Propriedades de $\mathcal{M}$-subconjuntos Reconhecíveis de um Monóide Livre

Nami Kobayashi

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Ciência da Computação**
Orientador: **Prof. Dr. Imre Simon**

São Paulo, Dezembro de 1991

O meu ***muito obrigada***

ao Professor Doutor Imre Simon,

pela orientação valiosa, pelas críticas e sugestões construtivas, pela paciência e estímulo durante todo esse tempo e, pelos ensinamentos que vêm desde o Mestrado;

a todos os amigos e colegas,

especialmente, ao Coelho, Cris, Jacques Sakarovitch, Jorge de Almeida, Manuel, Maria Ângela, Raquel, Ricardo, Siang, Sonia, Stephen, Stolfi, Valdemar, Yoshiharu e Yoshiko, que estiveram presentes em algum momento, que colaboraram de tantas formas diferentes, principalmente manifestando apoio, carinho e incentivo, que foram imprescindíveis durante a elaboração deste trabalho

e aos meus pais, pelo carinho e pela imensa dedicação.

Nami

Abstract

We study some properties of recognizable $\mathcal{M}$-subsets of a free monoid A^*, denoted by $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ and of two of its subfamilies: $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, of the simple $\mathcal{M}$-subsets and $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, of the $\mathcal{M}$-subsets which are nondeterministic complexities.

At first, we study some necessary conditions for membership in each one of these families and we show that $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. We relate these families with the families $\mathcal{H}_p$ ($p \geq 0$), obtained by Simon and we verify that $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_0 = \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}_0$ and $\forall p \geq 1$, $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p \subsetneq \mathcal{H}_p$, where $\mathcal{H}_0$ is the family of recognizable and limited $\mathcal{M}$-subsets.

We also study the closure properties of the three families, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ and $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, under several operations.

One of the major results in this thesis is that $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ is closed under division by a positive integer. Our proof of this result is constructive and a generalization of this construction is the essential idea in the proof of a characterization of recognizable $\mathcal{M}$-subsets that we obtain. More precisely, we show that an $\mathcal{M}$-subset of A^+ is recognizable if, and only if, it is the sum of finitely many simple $\mathcal{M}$-subsets of A^+. This is the main result of this thesis.

We also show that every simple $\mathcal{M}$-subset of A^* can be obtained from $\mathcal{M}$-subsets which are nondeterministic complexities by using the minimum, concatenation and star operations.

Resumo

Neste trabalho, estudamos algumas propriedades de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de um monóide livre A^*, denotado por $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, e de duas de suas subfamílias: $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, dos $\mathcal{M}$-subconjuntos simples e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, dos $\mathcal{M}$-subconjuntos que são complexidades não daterminísticas.

Inicialmente, estudamos algumas condições necessárias de pertinência a cada uma dessas famílias e mostramos que $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Relacionamos estas famílias com as famílias $\mathcal{H}_p$ ($p \geq 0$), obtidas por Simon e verificamos que $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_0 = \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}_0$ e $\forall p \geq 1$, $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p \subsetneq \mathcal{H}_p$, onde $\mathcal{H}_0$ é a família de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e limitados.

Estudamos também as propriedades de fechamento das três famílias, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, sob várias operações.

Um dos resultados principais nesta tese é que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a divisão por um inteiro positivo. A nossa prova deste resultado é construtiva e uma generalização desta construção é a idéia essencial na prova de uma caracterização que obtemos para $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis. Mais precisamente, mostramos que um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^+ é reconhecível se, e somente se, ele é a soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^+. Este é o resultado principal desta tese.

Mostramos também que todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples de A^* pode ser obtido a partir de $\mathcal{M}$-subconjuntos que são complexidades não determinísticas, utilizando as operações de mínimo, concatenação e estrela.

Conteúdo

Introdução

O estudo de subconjuntos reconhecíveis com multiplicidades num corpo teve sua origem nos trabalhos fundamentais de M. P. Schützenberger [13, 14, 15], escritos no início da década de 60. Nos meados da década de 70, S. Eilenberg [4] sistematizou esta teoria para um semi-anel qualquer K e estudou, em particular, os casos do semi-anel booleano, do semi-anel dos números naturais e dos sub-semi-anéis de um corpo. Um tratamento mais algébrico de K-subconjuntos reconhecíveis é dado por Berstel e Reutenauer [2].

Neste nosso trabalho, estudamos algumas propriedades da família de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^*, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, onde $\mathcal{M}$ denota o semi-anel Min-Plus, também chamado de semi-anel tropical e que consiste dos números naturais estendido com ∞ e tendo como operações o mínimo e a adição. Um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* é uma função que associa uma multiplicidade em $\mathcal{M}$ a cada palavra em A^*. Um $\mathcal{M}$-A-autômato é um autômato finito ao qual se associam multiplicidades em $\mathcal{M}$ aos estados iniciais, aos estados finais e às arestas, permitindo com isso associar multiplicidades em $\mathcal{M}$ a cada palavra em A^*. O $\mathcal{M}$-subconjunto resultante é dito reconhecível.

O semi-anel $\mathcal{M}$ é conhecido em Pesquisa Operacional, onde ele é usado em problemas de minimização de custos [3]. Na Teoria de Autômatos, o estudo de multiplicidades no semi-anel $\mathcal{M}$ foi introduzido por I. Simon [17], em 1978, para dar uma caracterização de subconjuntos reconhecíveis de um monóide livre que têm a propriedade da potência finita. Uma solução independente também foi obtida por K. Hashiguchi [6]. Nos últimos anos, foram resolvidos outros problemas importantes relacionados com $\mathcal{M}$-subconjuntos ou como aplicações do semi-anel $\mathcal{M}$. Por exemplo, K. Hashiguchi [7, 8] caracterizou os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e limitados, através de um raciocínio de grande complexidade; H. Leung [12] e I. Simon [19, 21] obtiveram, independentemente, outras soluções mais algébricas para decidir se um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível é limitado; K. Hashiguchi [9] resolveu o problema de determinar a altura das estrelas de subconjuntos reconhecíveis. Um 'survey' sobre os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis foi escrito por I. Simon [20].

Em particular, nós estudamos duas das subfamílias de $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$: a dos $\mathcal{M}$-subconjuntos simples, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e a dos $\mathcal{M}$-subconjuntos que são complexidades não determinísticas, $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$. Um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* é simples se ele é reconhecido por um $\mathcal{M}$-A-autômato cujas multiplicidades (associadas às arestas e aos estados) pertencem a $\{0, 1, \infty\}$ e é uma complexidade não determinística se ele é reconhecido por um $\mathcal{M}$-A-autômato que pode ser obtido a partir de um autômato finito (não determinístico), associando-se a multiplicidade 0 às suas arestas determinísticas, 1 às suas arestas não determinísticas e 0, aos seus estados iniciais e finais.

Inicialmente, estudamos condições necessárias de pertinência a cada uma das três famílias. Em primeiro lugar, estabelecemos condições necessárias para um $\mathcal{M}$-subconjunto ser reconhecível:

Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. *Então,*
(i) suporte$(X) = \{ w \in A^* \mid wX \neq \infty \}$ *é um subconjunto reconhecível de* A^**;*
(ii) $\forall m \in \mathcal{M}$, mX^{-1} *é um subconjunto reconhecível de* A^**;*
(iii) $\exists k > 0$ *tal que* $\forall w \in A^+$, *ou* $wX = \infty$ *ou* $wX \leq k|w|$.

Uma outra condição que um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível satisfaz é parecida com o 'Pumping Lema' para linguagens regulares:

Seja X *um* $\mathcal{M}$*-subconjunto reconhecível de* A^*. *Então, existe um inteiro positivo* m *tal que para toda palavra* x *em* A^*, *com* $xX < \infty$ *e para toda escolha de pelo menos* m *posições marcadas em* x, *a palavra* x *admite uma fatoração da forma* $x = uvw$, *de modo que*
(i) v *contenha pelo menos uma e no máximo* m *posições marcadas;*
(ii) $\exists c \geq 0$ *tal que* $\forall k \geq 0$, $\quad (uv^kw)X \leq xX + (k-1)c$.

Verificamos que nenhuma dessas condições, se satisfeita, é suficiente para que um dado $\mathcal{M}$-subconjunto seja reconhecível.

Uma condição necessária para que um $\mathcal{M}$-subconjunto seja simples é a seguinte:

Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*. Se X é simples então $\forall w \in A^*$, ou $wX = \infty$ ou $wX \leq |w|$.

Dessa propriedade segue facilmente que

$$\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^* \ .$$

Quanto aos $\mathcal{M}$-subconjuntos que são complexidades não determinísticas, obtemos uma condição mais complexa:

Se um $\mathcal{M}$-subconjunto X é uma complexidade não determinística, então X não é de multiplicidade diferenciável.

Dizemos que um $\mathcal{M}$-subconjunto X é de multiplicidade diferenciável se existem palavras x, y, u e v em A^* tais que para cada $k \geq 1$, exista uma palavra z_k em A^+ de modo que

$$\forall l \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall m > k, \quad w_{klk}X = w_{kkk}X < w_{kkm}X < \infty \ ,$$

onde $w_{klm} = x(uz_k^k v)^l u z_k^m y$.

Observamos que esta definição independe de qualquer $\mathcal{M}$-A-autômato reconhecendo X, ao contrário da definição de complexidade não determinística.

Dessa condição, mostramos que

$$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \ ,$$

para um alfabeto A, com pelo menos duas letras.

Relacionamos $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ com as famílias $\mathcal{H}_p$ $(p \geq 0)$ de Simon [18], que formam uma hierarquia para $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, mostrando que a relação de inclusão própria entre $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ é mantida em cada $\mathcal{H}_p$ $(p > 0)$. Ou seja,

$$\forall p \geq 1, \quad \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p \subsetneq \mathcal{H}_p \ ,$$

para um alfabeto A, com pelo menos duas letras.

$\mathcal{H}_0$ denota a família de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e limitados, isto é, aqueles cuja imagem é um subconjunto finito de $\mathcal{M}$. Estabelecemos algumas propriedades básicas de $\mathcal{M}$-subconjuntos limitados; em particular, mostramos que todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples e limitado é uma complexidade não determinística. Ou seja,

$$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_0 = \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}_0 \ .$$

Estudamos, também, as propriedades de fechamento das três famílias, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, sob as operações básicas e também sob o máximo, o mônus, o resto e a divisão por um inteiro positivo. Verificamos que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ não é fechada com relação ao máximo, mônus e resto e, através de uma caracterização de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e limitados como soma ou mínimo de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis bastante particulares, mostramos que:

Sejam $X, Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*, \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$). Se Y é limitado então $\max(X,Y)$, $X \dot{-} Y$ e $Y \bmod d$, para $d > 0$, são $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis (respectivamente, simples, complexidades não determinísticas).

Com relação à divisão (inteira) de um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* por um inteiro positivo d, mostramos que

$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$) *é fechada sob div d, para $d > 0$.*

A nossa demonstração é construtiva e essa construção tem uma importância fundamental não só para este resultado mas, principalmente, na obtenção de uma caracterização que descrevemos a seguir.

Verificamos que a família de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples não é fechada sob a adição. Então, investigando o fecho de $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ sob a adição, obtemos uma caracterização de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^+, que é o resultado principal da nossa tese e cuja demonstração, também construtiva, utiliza uma generalização da construção de um $\mathcal{M}$-A-autômato que foi introduzida para mostrar que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a divisão por um inteiro positivo.

Um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^+ é reconhecível se, e somente se, ele é a soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^+.

Verificamos que a família das complexidades não determinísticas não é fechada sob a concatenação e a estrela. Então, investigando esse fecho, obtemos uma caracterização de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^*, cuja demonstração é baseada na demonstração do Teorema de Kleene dada por McNaughton e Yamada.

$\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ é o fecho de $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ sob o mínimo, a concatenação e a estrela.

Desse modo, este trabalho consta de seis capítulos, cujos conteúdos descrevemos, resumidamente, a seguir.

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos de semi-anéis, K-subconjuntos, operações sobre K-subconjuntos e K-A-autômatos, para um semi-anel qualquer K. Na última seção desse capítulo, damos a interpretação para o semi-anel $\mathcal{M}$ dos conceitos nas seções anteriores e introduzimos outros conceitos e alguma notação que serão utilizados no decorrer de todo este texto.

No Capítulo 2 estabelecemos algumas condições necessárias de pertinência para $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ e mostramos as relações de inclusão existentes entre essas famílias.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo das propriedades de fechamento de $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ sob as operações básicas.

No Capítulo 4 estudamos algumas propriedades básicas de $\mathcal{M}$-subconjuntos limitados e relacionamos $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ com as famílias $\mathcal{H}_p$ ($p \geq 0$), obtidas por Simon.

O objetivo do Capítulo 5 é continuar o estudo das propriedades de fechamento de $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, iniciado no Capítulo 3. Incluimos aqui as operações: máximo, mônus, resto e divisão por um inteiro positivo.

Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos uma caracterização de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^+ como soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^+. Mostramos também que todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples pode ser obtido a partir de complexidades não determinísticas utilizando somente as operações de mínimo, adição e estrela.

Por último, apresentamos a Conclusão, a Bibliografia e o Índice.

Capítulo 1

Semi-anéis, K-subconjuntos e K-A-autômatos

Neste capítulo, introduziremos a noção de semi-anéis e apresentaremos os conceitos e algumas propriedades de K-subconjuntos e K-A-autômatos, onde K é um semi-anel qualquer. O material deste capítulo foi extraído do livro de S. Eilenberg [4, cap. 6]. Uma outra referência importante com um tratamento mais algébrico é o livro de J. Berstel e C. Reutenauer [2].

1.1 Semi-anéis

Um *semi-anel* é um conjunto K com pelo menos dois elementos, 0 e 1, e com duas operações: adição e multiplicação. Com relação à adição, K é um monóide comutativo com identidade 0. Ou seja, $\forall x, y$ e $z \in K$,

$$\begin{gathered} x + y = y + x \\ x + (y + z) = (x + y) + z \\ x + 0 = x \ . \end{gathered}$$

Com relação à multiplicação, K é um monóide com identidade 1. Ou seja, $\forall x, y$ e $z \in K$,

$$\begin{gathered} x(yz) = (xy)z \\ 1x = x = x1 \ . \end{gathered}$$

Além disso, são válidas as seguintes propriedades. $\forall x, y$ e $z \in K$,

$$\begin{aligned} x(y+z) &= xy + xz \\ (x+y)z &= xz + yz \\ x0 = 0x &= 0 \ . \end{aligned}$$

Diz-se que o semi-anel K é *comutativo* se K é comutativo como monóide multiplicativo.

Diz-se que um conjunto K' é um *sub-semi-anel* de K se $K' \subseteq K$, $0 \in K'$, $1 \in K'$ e K' é fechado sob a adição e a multiplicação de K.

Alguns exemplos de semi-anéis são:

- o semi-anel booleano $B = \{0, 1\}$, com $1 + 1 = 1$;

- o semi-anel $\mathbb{N}$ dos números naturais;

- o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros;

- o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais;

- o semi-anel dos subconjuntos racionais de A^*, para um alfabeto A;

- o semi-anel $\mathcal{N} = \mathbb{N} \cup \infty$, em que a adição e a multiplicação de $\mathbb{N}$ são estendidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} n + \infty = \infty + n = \infty + \infty &= \infty \quad && (\forall n \in \mathbb{N}) \\ n\infty = \infty n &= \infty && (\forall n \in \mathbb{N}, n > 0) \\ \infty\infty &= \infty \\ \infty 0 = 0\infty &= 0 \ . \end{aligned}$$

- o semi-anel $\mathbb{R}_+$ dos números reais não negativos;

- o semi-anel $\mathcal{R}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \infty$, em que as operações são estendidas como no caso da passagem de $\mathbb{N}$ para $\mathcal{N}$;

- o semi-anel $\mathbb{Q}_+$ dos números racionais não negativos, que constitui um subsemi-anel de $\mathbb{R}_+$.

Existem semi-anéis K em que a soma $\sum_{i \in I} x_i$ está bem definida para toda família $\{x_i \mid i \in I\}$ de elementos de K, mesmo que o conjunto de índices I seja infinito. Tais semi-anéis são chamados de *semi-anéis completos*. Por exemplo, os semi-anéis $\mathcal{N}$ e $\mathcal{R}_+$ tornam-se semi-anéis completos, quando se define $\sum_{i \in I} x_i$ para um conjunto infinito I como sendo ∞, se existirem infinitos índices i em I tais que $x_i \neq 0$.

Um *semi-anel* é *positivo* se satisfaz as seguintes condições para todos os seus elementos x e y: se $x + y = 0$ então $x = 0$ e $y = 0$, e se $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

Dados dois semi-anéis K_1 e K_2, um *morfismo* $\varphi\colon\ K_1 \to K_2$ é uma função satisfazendo as seguintes condições, $\forall x, y \in K_1$:

$$(x+y)\varphi = x\varphi + y\varphi \quad \text{e} \quad 0_{K_1}\varphi = 0_{K_2} \ ;$$

$$(xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi) \quad \text{e} \quad 1_{K_1}\varphi = 1_{K_2} \ .$$

1.2 K-subconjuntos

Sejam K um semi-anel e A um conjunto. Um *K-subconjunto* X de A é uma função

$$X\colon\ A \to K \ .$$

Para cada $a \in A$, o elemento aX de K é chamado de *multiplicidade* com que a pertence a X. Se aX assume somente os valores 0 e 1, diz-se que o *K-subconjunto* X de A é *não ambíguo*.

Alguns exemplos de K-subconjuntos não-ambíguos são $\mathbf{A}$, $\emptyset$ e $\mathbf{a}$, para cada $a \in A$, definidos por:

$$\forall a \in A, \quad a\mathbf{A} = 1 \ ;$$

$$\forall a \in A, \quad a\emptyset = 0$$

$$\text{e} \quad \forall b \in A, \quad b\mathbf{a} = \begin{cases} 1 & \text{se } b = a \\ 0 & \text{se } b \neq a \end{cases} \ .$$

Os K-subconjuntos não ambíguos $\mathbf{a}$ são chamados *unitários*.

Se X é um K-subconjunto de A e $\varphi\colon\ K \to K'$ é um morfismo de semi-anéis, a composição $X\varphi$,

$$A \xrightarrow{X} K \xrightarrow{\varphi} K'$$

é um K'-subconjunto de A.

O *suporte* de X é o conjunto

$$\text{suporte}(X) = \{\, a \in A \mid aX \neq 0 \,\} \ .$$

1.3 Operações sobre K-subconjuntos

Considere, inicialmente, a operação de *adição*. Para toda família $\{ X_i \mid i \in I \}$ de K-subconjuntos de A, indexada por um conjunto I, define-se:

$$\forall a \in A, \qquad a(\sum_{i \in I} X_i) = \sum_{i \in I} aX_i \ . \tag{1.1}$$

Sempre que a família $\{ X_i \mid i \in I \}$ é *localmente finita*, ou seja, para cada $a \in A$, $aX_i \neq 0$ somente para um número finito de índices $i \in I$, (1.1) está bem definida.

Uma outra operação é a *multiplicação escalar*; ou seja, a multiplicação de um K-subconjunto X de A por um elemento $k \in K$. O resultado é o K-subconjunto kX definido por:

$$\forall a \in A, \qquad a(kX) = k(aX)$$

e são válidas as seguintes propriedades, para todo k_1, k_2 em K, para todo subconjunto $\{ k_i \mid i \in I \}$ de K e para toda família $\{ X_i \mid i \in I \}$ de K-subconjuntos de A:

$$\begin{aligned} 1X &= X \\ 0X &= \emptyset \\ (k_1 k_2)X &= k_1(k_2 X) \\ (\sum_{i \in I} k_i)X &= \sum_{i \in I} k_i X \\ k(\sum_{i \in I} X_i) &= \sum_{i \in I} kX_i \ . \end{aligned}$$

A *intersecção* ou *produto de Hadamard* de dois K-subconjuntos X e Y de A, denotada por $X \cap Y$, é definida por:

$$\forall a \in A, \qquad a(X \cap Y) = (aX)(aY) \ .$$

Para cada K-subconjunto X de A, a família $\{ (aX)\mathbf{a} \mid a \in A \}$ é localmente finita e vale que

$$X = \sum_{a \in A} (aX)\mathbf{a} \ .$$

Tal somatória é conhecida por *expansão* de X em termos dos unitários.

Para um semigrupo S, pode-se definir a *multiplicação* entre dois K-subconjuntos X e Y de S como sendo o K-subconjunto XY de S, da seguinte forma:

$$\forall s \in S, \quad s(XY) \;=\; \sum_{xy=s} (xX)(yY) \ . \tag{1.2}$$

Em geral, para cada $s \in S$, podem existir infinitos pares (x, y) tais que $xy = s$; nesse caso, deve-se supor que K é um semi-anel completo. Mas, por exemplo, quando $S = A^+$, o semigrupo livre com uma base A (não necessariamente finita), não há necessidade de se supor que K seja completo, pois, nesse caso, o número de fatorações $xy = s$ é exatamente $|s|-1$. Também quando S é um monóide livre ou S é um produto de um número finito de monóides livres, (1.2) fica bem definida.

A multiplicação definida em (1.2) é *bilinear*, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades, onde $\{ X_i \mid i \in I \}$ e $\{ Y_i \mid i \in I \}$ são famílias de K-subconjuntos de S e $k \in K$:

$$\begin{aligned} (\sum_{i\in I} X_i)Y &= \sum_{i\in I} X_iY \\ X(\sum_{i\in I} Y_i) &= \sum_{i\in I} XY_i \\ (kX)Y &= k(XY) \;=\; X(kY) \ . \end{aligned}$$

Além disso, a multiplicação é associativa.

Assim, se M é um monóide, a família K^M de todos os K-subconjuntos de M é um semi-anel (não necessariamente comutativo). De fato, K^M é um monóide comutativo com relação à adição, tendo como identidade o K-subconjunto $\emptyset$ tal que $\forall m \in M, m\emptyset = 0$. Com relação à multiplicação, K^M também é um monóide, cuja identidade é o K-subconjunto $\mathbf{1}$, dado por:

$$m\mathbf{1} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \ . \end{cases}$$

Quando $M = A^*$ (o monóide livre gerado por A), a família de todos os K-subconjuntos de A^* é denotada por $K\langle\langle A\rangle\rangle$ e seus elementos podem ser considerados como *séries formais com coeficientes em K e variáveis não comutativas em A*. O subconjunto de $K\langle\langle A\rangle\rangle$ que consiste das séries cujo suporte é finito é denotado por $K\langle A\rangle$ e seus elementos são chamados de *polinômios*.

Um K-subconjunto X de A^* é *próprio* se $1X = 0$. Então, se X é próprio, a família $\{ X^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ é localmente finita pois,

$$\forall w \in A^*, \qquad wX^n = 0, \quad \text{para } n > |w| \ .$$

Portanto, a soma

$$X^+ = \sum_{n \geq 1} X^n$$

está bem definida. E, define-se também a *estrela* de X como sendo

$$X^* = \sum_{n \geq 0} X^n \ ,$$

onde $X^0 = \mathbf{1}$.

Um subconjunto $\mathcal{F}$ de $K\langle\langle A \rangle\rangle$ é *racionalmente fechado* se os K-subconjuntos $\emptyset$ e $\mathbf{1}$ pertencem a $\mathcal{F}$ e se para todos X e Y em $\mathcal{F}$ e para todo k em K, os K-subconjuntos

$$X + Y, \quad XY, \quad kX \quad \text{e} \quad X^*$$

também pertencem a $\mathcal{F}$. Denotamos por $K\,\mathrm{Rat}\,A^*$ o menor subconjunto racionalmente fechado de $K\langle\langle A \rangle\rangle$, contendo os K-subconjuntos unitários $\mathbf{a}$, para todo $a \in A$. Os elementos em K Rat A^* são chamados de *K-subconjuntos racionais* de A^*.

1.4 K-A-autômatos

A noção de K-A-autômato surgiu como uma extensão da noção de autômato finito (não necessariamente determinístico) sobre A, associando-se multiplicidades em K às suas arestas e aos seus estados iniciais e finais, permitindo assim associar uma multiplicidade a cada palavra em A^*.

Sejam A um alfabeto finito e K um semi-anel. Um *K-A-autômato* $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ é um autômato sobre A com

um conjunto finito Q de estados,

dois K-subconjuntos I e T de Q

e um K-subconjunto E de $Q \times A \times Q$.

Um estado q em Q é um *estado inicial* (*final*) de $\mathcal{A}$ se $qI \neq 0$ ($qT \neq 0$).

Se (p, a, q) é uma aresta em $\mathcal{A}$, diz-se que o seu *rótulo* é a e que a sua *multiplicidade* é $(p, a, q)E$.

Se P é um *passeio* de comprimento n em $\mathcal{A}$, com origem p_0 e término p_n,

$$P = (p_0, a_1, p_1)(p_1, a_2, p_2) \dots (p_{n-1}, a_n, p_n) \ ,$$

então, o seu *rótulo* é

$$|P| = a_1 a_2 \dots a_n$$

e a sua *multiplicidade* é

$$||P|| = \prod_{i=1}^{n} (p_{i-1}, a_i, p_i)E \ .$$

O *comportamento* de $\mathcal{A}$ é o K-subconjunto $\|\mathcal{A}\|$ de A^*, definido da seguinte forma. Seja $w \in A^*$ e seja C o conjunto dos passeios P com rótulo w. Então,

$$w\|\mathcal{A}\| = \sum_{P \in C} (iI)||P||(tT) \ ,$$

onde i e t são, respectivamente, a origem e o término do passeio P. E, como existe um número finito de passeios com rótulo w, essa somatória fica bem definida.

Os únicos passeios de comprimento zero são os passeios triviais, $(q, 1, q)$, que têm como rótulo a palavra vazia e multiplicidade igual a 1. Logo,

$$1\|\mathcal{A}\| = \sum_{q \in Q} (qI)(qT) \ .$$

O *conjunto reconhecido* por $\mathcal{A}$, denotado por $|\mathcal{A}|$, é o suporte de $\|\mathcal{A}\|$:

$$|\mathcal{A}| = \{ \, w \in A^* \mid w\|\mathcal{A}\| \neq 0 \, \} \ .$$

Um K-subconjunto de A^* é *reconhecível* se ele é o comportamento de algum K-A-autômato. A família de todos os K-subconjuntos reconhecíveis de A^* é denotada por $K \operatorname{Rec} A^*$.

Um K-A-autômato pode ser representado graficamente da forma usual, colocando-se a multiplicidade associada a cada aresta ao lado do seu rótulo e a multiplicidade asssociada a cada estado inicial ou final sobre a seta que representa a respectiva condição desse estado (seta entrando no estado, se este for inicial; ou, seta saindo do estado, se for final).

Exemplo 1.1 Sejam $A = \{a, b\}$ e $\{ k_i \mid 1 \leq i \leq 7 \}$ um subconjunto de K.

Considere o seguinte K-A-autômato $\mathcal{A} = (Q, I, T)$, com $Q = \{p, q\}$; os K-subconjuntos I e T de Q, definidos por:

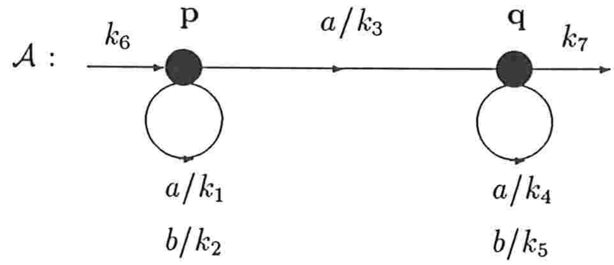
$$pI = k_6 \quad \text{e} \quad qI = 0; \qquad pT = 0 \quad \text{e} \quad qT = k_7$$

e o K-subconjunto E de $Q \times A \times Q$ dado por:

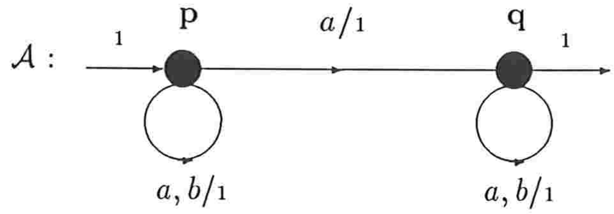
$$(p, a, p)E = k_1 \quad (p, a, q)E = k_3 \quad (p, b, p)E = k_2 \quad (p, b, q)E = 0$$

$$(q, a, p)E = 0 \quad (q, a, q)E = k_4 \quad (q, b, p)E = 0 \quad (q, b, q)E = k_5 \ .$$

A representação gráfica do autômato $\mathcal{A}$ descrito acima é a seguinte:



Vejamos como se comporta o K-A-autômato $\mathcal{A}$, quando K é o semi-anel dos números naturais e $k_i = 1$ $(1 \leq i \leq 7)$.



O conjunto reconhecido por $\mathcal{A}$ é

$$|\mathcal{A}| = \{ w \in A^* \mid |w|_a \geq 1 \}$$

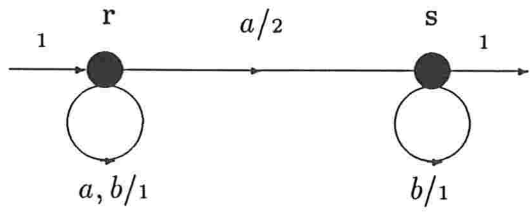
e o comportamento de $\mathcal{A}$ é dado por:

$$\forall w \in A^*, \quad w\|\mathcal{A}\| = |w|_a \ .$$

Ou seja, a multiplicidade associada a cada palavra w é exatamente o número de passeios existentes em $\mathcal{A}$ de p para q com rótulo w.

Mas, existe um outro $\mathbb{N}$-A-autômato $\mathcal{B}$, de modo que o conjunto reconhecido por $\mathcal{B}$ seja o mesmo de $\mathcal{A}$, apesar do mecanismo de reconhecimento de cada palavra ser diferente nos dois $\mathbb{N}$-A-autômatos. Considere, por exemplo, o $\mathbb{N}$-A-autômato $\mathcal{B}$ representado abaixo:

$\mathcal{B}$:



O comportamento de $\mathcal{B}$ é dado por:

$$\forall w \in A^*, \quad w\|\mathcal{B}\| = \begin{cases} 2 & \text{se } |w|_a \geq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Neste caso, para cada palavra w, existe no máximo um passeio em $\mathcal{B}$ de r para s, com rótulo w.

Um K-A-autômato $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ é *normalizado* se $\mathcal{A}$ possui um único estado inicial i e um único estado final t, com $t \neq i$ e $iI = tT = 1$. Além disso, não existem arestas com término em i e nem arestas com origem em t. Chamamos de *algoritmo de normalização* ao método que, a partir de um dado K-A-autômato, constrói o K-A-autômato normalizado equivalente (a menos da palavra vazia).

Proposição 1.1 *Para todo K-A-autômato $\mathcal{A}$ existe um K-A-autômato normalizado $\mathcal{A}'$ tal que $\|\mathcal{A}'\| = \|\mathcal{A}\| \cap \mathbf{A}^+$.*

O K-subconjunto $\mathbf{A}^+$ de A^* é dado por:

$$\forall w \in A^*, \quad w\mathbf{A}^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } w = 1 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

1.5 K-subconjuntos reconhecíveis

Sejam A e B alfabetos finitos e K um semi-anel comutativo. Nesta seção são enunciadas algumas propriedades de K-subconjuntos reconhecíveis de A^*, cujas demonstrações podem ser encontradas em Eilenberg [4].

Inicialmente, considere algumas definições.

A *função reverso* ρ: $A^* \longrightarrow A^*$ é dada por:

$$1\rho = 1, \qquad a\rho = a \quad (\forall a \in A), \qquad (xy)\rho = (y\rho)(x\rho) \quad (\forall x, y \in A^*) \ .$$

Então, o reverso de um K-subconjunto X de A^*, denotado por X_ρ, é definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX_\rho = (w\rho)X \ .$$

Sejam os subconjuntos $X \subseteq A^*$ e $Y \subseteq B^*$, com $A \cap B = \emptyset$. Então, o *embaralhamento* de X e Y, denotado por $X \sqcup\!\sqcup Y$, consiste do seguinte conjunto

$$\{\, x_1y_1x_2y_2 \ldots x_ny_n \in (A \cup B)^* \mid x_1x_2 \ldots x_n \in X \text{ e } y_1y_2 \ldots y_n \in Y \,\} \ .$$

Se $X = \sum_{x \in A^*}(xX)\mathrm{x}$ e $Y = \sum_{y \in B^*}(yY)\mathrm{y}$ são K-subconjuntos de A^* e B^*, respectivamente, o K-subconjunto $X \sqcup\!\sqcup Y$ de $(A \cup B)^*$ é dado por

$$X \sqcup\!\sqcup Y = \sum_{x \in A^*, y \in B^*} (xX)(yY)(x \sqcup\!\sqcup y) \ .$$

Esta somatória está bem definida, pois $x \sqcup\!\sqcup y$ é um subconjunto finito de $(A \cup B)^*$. Além disso, $x \sqcup\!\sqcup y$ e $x' \sqcup\!\sqcup y'$ são disjuntos quando $x \neq x'$ ou $y \neq y'$.

Seja um morfismo $f: A^* \longrightarrow B^*$ e seja X um K-subconjunto de A^*. Então, o K-subconjunto Xf de B^* é definido por:

$$\forall w \in B^*, \quad w(Xf) = \sum_{\forall x \in wf^{-1}} xX \ .$$

Se K não é um semi-anel completo, para que essa fórmula esteja bem definida, deve-se supor que $\forall w \in B^*$, wf^{-1} seja um subconjunto finito de A^*.

Se X é um K-subconjunto de B^* então o K-subconjunto Xf^{-1} de A^* é definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad w(Xf^{-1}) = (wf)X \ .$$

Sejam X e Y subconjuntos de A^*. Considere uma cópia A' disjunta de A e seja Y' o subconjunto de A'^* correspondente a Y sob o isomorfismo $A^* \longrightarrow A'^*$ que a cada $a \in A$ associa $a' \in A'$.

Seja o morfismo

$$\nu\colon (A \cup A')^* \longrightarrow A^* \ ,$$

tal que para cada $a \in A$, $a\nu = a'\nu = a$.

O *embaralhamento interno* de X e Y consiste do conjunto

$$X \sqcup Y = (X \sqcup\!\sqcup Y')\nu \ .$$

Se X e Y são K-subconjuntos de A^*, $X \sqcup Y$ também é um K-subconjunto de A^*.

Proposição 1.2 *$K \operatorname{Rec} A^*$ é fechada sob a união, a intersecção e o reverso.*

Proposição 1.3 *Seja $f\colon A^* \longrightarrow B^*$ um morfismo fino (isto é, $Af \subseteq B \cup 1$). Se X é um K-subconjunto reconhecível de B^* então Xf^{-1} é um K-subconjunto reconhecível de A^*.*

Proposição 1.4 *Seja $f\colon A^* \longrightarrow B^*$ um morfismo tal que $1 = 1f^{-1}$. Se X é um K-subconjunto reconhecível de A^* então Xf é um K-subconjunto reconhecível de B^*.*

Proposição 1.5 *Sejam A e B alfabetos disjuntos, X um K-subconjunto reconhecível de A^* e Y um K-subconjunto reconhecível de B^*. Então, $X \sqcup\!\sqcup Y$ é um K-subconjunto reconhecível de $(A \cup B)^*$.*

Proposição 1.6 *$K \operatorname{Rec} A^*$ é fechada sob o embaralhamento interno.*

Proposição 1.7 *$K \operatorname{Rec} A^*$ é fechada sob a multiplicação escalar.*

Proposição 1.8 *Um K-subconjunto X de A^* é reconhecível se, e somente se, o K-subconjunto $X' = X \cap \mathbf{A}^+$ é reconhecível.*

Proposição 1.9 *$K \operatorname{Rec} A^*$ é fechada sob a multiplicação.*

Proposição 1.10 *$K \operatorname{Rec} A^*$ é fechada sob $+$ e $*$ de Kleene.*

O Teorema de Kleene é válido para a família de K-subconjuntos de A^*, qualquer que seja o semi-anel K.

Teorema 1.11 (Kleene-Schützenberger) *Para todo alfabeto finito A, $K \operatorname{Rec} A^* = K \operatorname{Rat} A^*$.*

1.6 O caso $K = \mathcal{M}$

O semi-anel $\mathcal{M}$ é conhecido em Pesquisa Operacional pelo seu uso em problemas de minimização de custos. (Veja o livro de Cuninghame-Green [3].) Na Teoria de Autômatos, o estudo de multiplicidades no semi-anel $\mathcal{M}$ foi introduzido por Imre Simon [16], em 1978, para dar uma caracterização de subconjuntos reconhecíveis limitados de um monóide livre. Nos últimos anos, o semi-anel $\mathcal{M}$ ganhou relevância pelas suas aplicações na obtenção de alguns resultados importantes relacionados a subconjuntos reconhecíveis de um monóide livre. Um 'survey' sobre esse assunto foi escrito por Imre Simon [19].

Esta seção descreve a interpretação para o semi-anel $\mathcal{M}$ dos conceitos apresentados nas seções anteriores. A inclusão desta seção é justificada pela possível confusão que possam causar as correspondências entre as operações de $\mathcal{M}$ e as de K.

1.6.1 O semi-anel $\mathcal{M}$

O semi-anel $\mathcal{M}$ é conhecido por *semi-anel Min-Plus* e, mais recentemente, é chamado também de *semi-anel tropical*. $\mathcal{M}$ tem como suporte $\mathbb{N} \cup \infty$ e como operações o *mínimo* e a *adição*, que são extensões naturais dessas operações em $\mathbb{N}$. A identidade do mínimo é ∞ e da adição é 0.

Chamamos a atenção do leitor para a seguinte associação existente entre as operações de $\mathcal{M}$ e as de um semi-anel qualquer K:

> a operação mínimo em $\mathcal{M}$ corresponde à adição em K
> e a adição em $\mathcal{M}$ corresponde à multiplicação em K.

$\mathcal{M}$ é um semi-anel comutativo e positivo. Além disso, se $\{ m_i \mid i \in I \}$ é uma família de elementos de $\mathcal{M}$ indexada por um conjunto I, o mínimo $\min_{i \in I} m_i$ está bem definido qualquer que seja o conjunto de índices I. Em particular, se $I = \emptyset$, $\min_{i \in I} m_i = \infty$. Logo, $\mathcal{M}$ é um *semi-anel completo*. É interessante observar também que a soma $\sum_{i \in I} m_i$ está bem definida para qualquer conjunto de índices I. Em particular, se $I = \emptyset$, $\sum_{i \in I} m_i = 0$ e, se I for infinito e existirem infinitos elementos $m_i \neq 0$, $\sum_{i \in I} m_i = \infty$.

1.6.2 Operações sobre $\mathcal{M}$-subconjuntos

Seja A um conjunto e seja $\{ X_i \mid i \in I \}$ uma família de $\mathcal{M}$-subconjuntos de A, indexada por um conjunto I (não necessariamente finito). As operações de *mínimo* e de *adição* entre $\mathcal{M}$-subconjuntos de A são definidas da seguinte forma:

$$\forall a \in A, \quad a(\min_{i \in I} X_i) = \min_{i \in I}(aX_i)$$

$$\text{e} \qquad a(\sum_{i \in I} X_i) = \sum_{i \in I}(aX_i) \ .$$

Observe que estas operações estão bem definidas qualquer que seja o conjunto de índices I.

Uma outra operação é a *adição escalar* de um $\mathcal{M}$-subconjunto X de A por um elemento m de $\mathcal{M}$, denotada por $m + X$ e definida por:

$$\forall a \in A, \quad a(m + X) = m + aX \ .$$

A *expansão* de um $\mathcal{M}$-subconjunto X de A em termos dos unitários é:

$$X = \min_{a \in A}((aX) + \mathbf{a}) \ ,$$

onde para cada $a \in A$, o $\mathcal{M}$-subconjunto unitário $\mathbf{a}$ é dado por:

$$\forall b \in A, \quad b\mathbf{a} = \begin{cases} 0 & \text{se } b = a \\ \infty & \text{caso contrário} \ . \end{cases}$$

Seja S um semigrupo e sejam X e Y dois $\mathcal{M}$-subconjuntos de S. Define-se a *concatenação* de X e Y como sendo o $\mathcal{M}$-subconjunto XY, dado por:

$$\forall s \in S, \quad s(XY) = \min_{xy=s}(xX + yY) \ ,$$

que está bem definida qualquer que seja o semigrupo S.

Seja A um alfabeto finito. Então, a família $\mathcal{M}\langle\langle A \rangle\rangle$ de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^*, com as operações de mínimo e concatenação, é um semi-anel. A identidade com relação ao mínimo é o $\mathcal{M}$-subconjunto $\emptyset$ tal que

$$\forall w \in A^*, \quad w\emptyset = \infty \ .$$

Com relação à concatenação, a identidade é o $\mathcal{M}$-subconjunto $\mathbf{1}$, dado por:

$$\forall w \in A^*, \quad w\mathbf{1} = \begin{cases} 0 & \text{se } w = 1 \\ \infty & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

As operações $+$ e $*$ de Kleene de um $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* são definidas por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX^+ = w(\min_{n\geq 1} X^n) = \min_{n\geq 1}(wX^n)$$

$$\text{e} \quad wX^* = w(\min_{n\geq 0} X^n) = \min_{n\geq 0}(wX^n) \ ,$$

onde $X^0 = \mathbf{1}$ e $X^n = XX^{n-1}$, para $n > 1$. Observe que estas operações estão bem definidas mesmo quando $1X \neq \infty$.

Um subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M} \ll A \gg$ é *racionalmente fechado* se os $\mathcal{M}$-subconjuntos $\emptyset$ e $\mathbf{1}$ pertencem a $\mathcal{F}$ e se para todos X e Y em $\mathcal{F}$ e para todo m em $\mathcal{M}$, os $\mathcal{M}$-subconjuntos

$$\min(X, Y), \quad XY, \quad m + X \quad \text{e} \quad X^*$$

também pertencem a $\mathcal{F}$. Denotamos por $\mathcal{M}\,\mathrm{Rat}\,A^*$ o menor subconjunto racionalmente fechado de $\mathcal{M}{\ll}A{\gg}$, contendo os $\mathcal{M}$-subconjuntos unitários $\mathbf{a}$, para todo $a \in A$.

Dado um subconjunto F de $\mathcal{M}{\ll}A{\gg}$, definimos o *fecho racional* de F como sendo o menor subconjunto de $\mathcal{M}{\ll}A{\gg}$ racionalmente fechado, que contém F. O *subfecho racional* de F é o menor subconjunto de $\mathcal{M}{\ll}A{\gg}$, que contém F e os $\mathcal{M}$-subconjuntos $\emptyset$ e $\mathbf{1}$ e é fechado somente sob as operações de mínimo, concatenação e estrela.

Um $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* tal que $1X = \infty$ é também chamado de $\mathcal{M}$-subconjunto de A^+.

1.6.3 $\mathcal{M}$-A-autômatos

Seja A um alfabeto finito. Um *$\mathcal{M}$-A-autômato* $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ é um autômato sobre A, com

um conjunto finito Q de estados,

dois $\mathcal{M}$-subconjuntos I e T de Q

e um $\mathcal{M}$-subconjunto $E_{\mathcal{A}}$ de $Q \times A \times Q$.

Se $qI \neq \infty$, diz-se que q é um *estado inicial* de $\mathcal{A}$ e se $qT \neq \infty$, diz-se que q é um *estado final* de $\mathcal{A}$.

Se (p, a, q) é uma *aresta* em $\mathcal{A}$, diz-se que o seu *rótulo* é a e que a sua *multiplicidade* é $(p, a, q)E_{\mathcal{A}}$. Se $(p, a, q)E_{\mathcal{A}} \neq \infty$, diz-se que (p, a, q) é uma *aresta útil* de $\mathcal{A}$.

Se P é um *passeio* de *comprimento* n em $\mathcal{A}$, com *origem* p_0 e *término* p_n,

$$P = (p_0, a_1, p_1)(p_1, a_2, p_2) \dots (p_{n-1}, a_n, p_n) \ ,$$

então, o seu *rótulo* é

$$|P| = a_1 a_2 \dots a_n$$

e a sua *multiplicidade* é a soma das multiplicadades de suas arestas,

$$||P|| = \sum_{i=1}^{n} (p_{i-1}, a_i, p_i) E_{\mathcal{A}} \ .$$

O passeio P também é denotado abreviadamente por

$$P = (p_0, a_1 a_2 \dots a_n, p_n) \quad \text{ou} \quad P : p_0 \xrightarrow{a_1 a_2 \dots a_n} p_n \ .$$

Concatenações, fatorações e fatores de passeios são definidos da forma usual.

Um *passeio* é *útil* se a sua multiplicidade não é ∞. Um *passeio* útil é *bem sucedido* se a sua origem i e o seu término t satisfazem $iI \neq \infty$ e $tT \neq \infty$.

O *comportamento* de $\mathcal{A}$ é o $\mathcal{M}$-subconjunto $||\mathcal{A}||$ de A^*, que associa uma multiplicidade a cada palavra de A^*, da seguinte forma. Seja $w \in A^*$ e seja C o conjunto dos passeios bem sucedidos P em $\mathcal{A}$, com rótulo w. Então,

$$w||\mathcal{A}|| = \min_{P \in C} (iI + ||P|| + tT) \ ,$$

onde i e t são, respectivamente, a origem e o término do passeio P.

Um *passeio* bem sucedido P em $\mathcal{A}$, com rótulo w, origem i e término t, é chamado *vitorioso* se $iI + ||P|| + tT = w||\mathcal{A}||$.

Os únicos passeios de comprimento zero são os *passeios triviais*, $(q, 1, q)$, que têm como rótulo a palavra vazia e multiplicidade igual a zero. Logo,

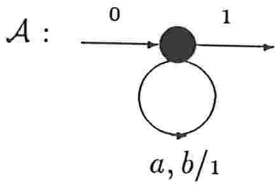
$$1||\mathcal{A}|| = \min_{q \in Q} (qI + qT) \ .$$

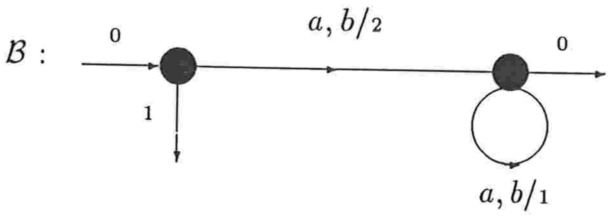
O *conjunto reconhecido* por $\mathcal{A}$, denotado por $|\mathcal{A}|$, é o conjunto das palavras que são rótulos de passeios bem sucedidos em $\mathcal{A}$, que é exatamente o suporte do comportamento de $\mathcal{A}$:

$$|\mathcal{A}| = \{\, w \in A^* \mid w\|\mathcal{A}\| \neq \infty \,\} \ .$$

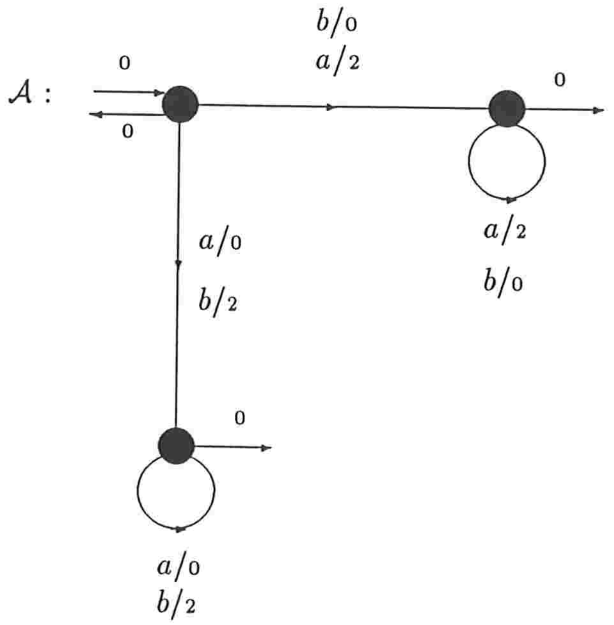
Um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* é *reconhecível* se ele é o comportamento de algum $\mathcal{M}$-A-autômato. A família de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^* é denotada por $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Exemplo 1.2 Seja $A = \{a, b\}$. Seja X o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* definido por: $\forall w \in A^*$, $wX = |w| + 1$. Representamos, a seguir, dois $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que $\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{B}\| = X$.





Exemplo 1.3 Seja $A = \{\, a, b \,\}$ e seja X o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* definido por: $\forall w \in A^*$, $wX = 2\min\{\, |w|_a, |w|_b \,\}$. Um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$ cujo comportamento é X pode ser representado por:



Um $\mathcal{M}$-A-*semiautômato* $\mathcal{C} = (Q, E_{\mathcal{C}})$ sobre A consiste de um conjunto finito Q de estados e um $\mathcal{M}$-subconjunto $E_{\mathcal{C}}$ de $Q \times A \times Q$. Um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$ pode ser construído a partir de $\mathcal{C}$, introduzindo-se dois $\mathcal{M}$-subconjuntos I e T de Q. Neste caso, $\mathcal{A}$ é também denotado por $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, I, T)$.

Um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ é *normalizado* se $\mathcal{A}$ possui um único estado inicial i e um único estado final t, com $t \neq i$ e $iI = tT = 0$. Além disso, não existem arestas com término em i e nem arestas com origem em t.

O *algoritmo de normalização* para K-A-autômatos pode ser utilizado para $\mathcal{M}$-A-autômatos com as correspondentes operações de $\mathcal{M}$.

Vamos denotar por $\mathbf{A}^+$ o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* tal que

$$\forall w \in A^*, \quad w\mathbf{A}^+ = \begin{cases} \infty & \text{se } w = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

Proposição 1.12 *Para todo $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$ existe um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado $\mathcal{B}$ tal que $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\| + \mathbf{A}^+$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = (Q, I, T)$. Considere o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, I_{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{B}})$, com $Q_{\mathcal{B}} = Q \cup \{i, t\}$, onde $Q \cap \{i, t\} = \emptyset$. Os $\mathcal{M}$-subconjuntos

$I_{\mathcal{B}}$ e $T_{\mathcal{B}}$ de $Q_{\mathcal{B}}$ são definidos por:

$$iI_{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{e} \quad \forall q \in Q \cup \{t\}, \quad qI_{\mathcal{B}} = \infty \ ;$$

$$tT_{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{e} \quad \forall q \in Q \cup \{i\}, \quad qT_{\mathcal{B}} = \infty \ .$$

O $\mathcal{M}$-subconjunto $E_{\mathcal{B}}$ de $Q_{\mathcal{B}} \times A \times Q_{\mathcal{B}}$ é dado por:

$$\forall (p,a,q) \in Q \times A \times Q, \quad (p,a,q)E_{\mathcal{B}} = (p,a,q)E_{\mathcal{A}} \ ;$$

$$\forall (i,a,q) \in \{i\} \times A \times Q, \quad (i,a,q)E_{\mathcal{B}} = \min_{p \in Q}(pI + (p,a,q)E_{\mathcal{A}}) \ ;$$

$$\forall (p,a,t) \in Q \times A \times \{t\}, \quad (p,a,t)E_{\mathcal{B}} = \min_{q \in Q}((p,a,q)E_{\mathcal{A}} + qT) \ ;$$

$$\forall a \in A, \quad (i,a,t)E_{\mathcal{B}} = \min_{p,q \in Q}(pI + (p,a,q)E_{\mathcal{A}} + qT) \ ;$$

$$\forall (p,a,i) \in Q_{\mathcal{B}} \times A \times \{i\}, \quad \forall (t,a,q) \in \{t\} \times A \times (Q \cup \{t\}),$$
$$(p,a,i)E_{\mathcal{B}} = (t,a,q)E_{\mathcal{B}} = \infty \ .$$

Dessa construção resulta que $\mathcal{B}$ é normalizado e pode-se demontrar que

$$\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\| + \mathbf{A}^+ \ .$$

■

É importante observarmos que num $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado $\mathcal{A} = (Q, I, T)$, todo passeio vitorioso P, com rótulo w, satisfaz $||P|| = w\|\mathcal{A}\|$ (pois, $QI, QT \subseteq \{0, \infty\}$) e todo passeio bem sucedido P', com rótulo w, é tal que $w\|\mathcal{A}\| \leq ||P'||$ (pois, $||P|| \leq ||P'||$). Estas propriedades serão usadas freqüentemente nas provas em todo este trabalho.

Capítulo 2

Uma hierarquia de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^*

O objetivo deste capítulo é introduzir duas subfamílias da família de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^* ($\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$): os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples ($\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$) e os $\mathcal{M}$-subconjuntos que são complexidades não determinísticas ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$). Encontraremos condições necessárias de pertinência a cada uma das três famílias de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e mostraremos que $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

2.1 $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis

Estudaremos algumas condições necessárias para que um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* seja reconhecível. A condição apresentada na primeira proposição é válida para K-subconjuntos, desde que o semi-anel K seja positivo; mas, vamos demonstrá-la para o semi-anel $\mathcal{M}$.

Proposição 2.1 *Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Então,* suporte$(X) = \{\, w \in A^* \mid wX \neq \infty \,\}$ *é um subconjunto reconhecível de A^*.*

Demonstração. Basta considerarmos um $\mathcal{M}$-A-autômato, cujo comportamento é X, como um autômato sobre A, isto é, sem as multiplicidades de suas arestas e de seus estados iniciais e finais. O conjunto reconhecido por este autômato é o suporte de X.

■

Consideremos, por exemplo, o $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^*, com $A = \{a, b\}$, definido por:

$$wX = \begin{cases} 0 & \text{se } w = a^n b^n, \text{ para algum } n \geq 0 \\ \infty & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Como

$$\text{suporte}(X) = \{\, w \in A^* \mid wX \neq \infty \,\} = \{\, a^n b^n \mid n \geq 0 \,\}$$

não é um subconjunto reconhecível, resulta que X não é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

Proposição 2.2 *Se* $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$*, então* $\exists k > 0$ *tal que* $\forall w \in A^+$*, ou* $wX = \infty$ *ou* $wX \leq k|w|$.

Demonstração. Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ existe um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ tal que $\|\mathcal{A}\| = X$.

Seja k' o máximo das multiplicidades das arestas úteis de $\mathcal{A}$, isto é,

$$k' = \max\{\, (p, a, q)E \mid (p, a, q) \in Q \times A \times Q \text{ e } (p, a, q)E \neq \infty \,\}$$

e seja k'' o máximo das multiplicidades dos estados iniciais e finais de $\mathcal{A}$, ou seja,

$$k'' = \max(\{\, qI \mid q \in Q \text{ e } qI \neq \infty \,\} \cup \{\, qT \mid q \in Q \text{ e } qT \neq \infty \,\}) \ .$$

Então, $\forall w \in A^+$, se $wX \neq \infty$ resulta que

$$wX \leq k'|w| + 2k'' \leq k|w| \ ,$$

onde $k = k' + 2k''$.

■

Por exemplo, o $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^*, definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX = |w|^2 \ ,$$

não é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

Proposição 2.3 *Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Então, $\forall m \in \mathcal{M}$, mX^{-1} é um subconjunto reconhecível de A^*.*

Demonstração. Temos que $\infty X^{-1} = A^* - \text{suporte}(X)$. Então, pela Proposição 2.1, ∞X^{-1} é um subconjunto reconhecível de A^*.

Seja $m \in \mathcal{M}$, $m \neq \infty$. Como X é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^* existe, pela Proposição 1.12, um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ tal que $\|\mathcal{A}\| = X + \mathbf{A}^+$. A partir de $\mathcal{A}$, vamos construir um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$ que reconhece somente as palavras que são reconhecidas por $\mathcal{A}$ com multiplicidade no máximo m. Definimos $\mathcal{B} = (Q', I', T')$ da seguinte forma:

$Q' = Q \times ([0, m] \cup \{\infty\})$;

o $\mathcal{M}$-subconjunto I' de Q' é dado por:

$$\forall q \in Q, \quad (q, i)I' = \begin{cases} qI & \text{se } i = 0 \\ \infty & \text{se } i \in [1, m] \cup \{\infty\} \end{cases}$$

e o $\mathcal{M}$-subconjunto T' de Q' é dado por:

$$\forall q \in Q, \quad (q, i)T' = \begin{cases} qT & \text{se } i \in [0, m] \\ \infty & \text{se } i = \infty \ . \end{cases}$$

Para cada aresta útil (p, a, q) de $\mathcal{A}$,

- se $(p, a, q)E_{\mathcal{A}} = 0$ então, para cada $i \in [0, m] \cup \{\infty\}$, $((p, i), a, (q, i))E_{\mathcal{B}} = 0$;

- se $(p, a, q)E_{\mathcal{A}} = k$, com $0 < k < \infty$, então, para cada $i \in [0, m] \cup \{\infty\}$, $((p, i), a, (q, j))E_{\mathcal{B}} = k$, com $j = i + k$, se $i + k \leq m$ e ∞, em caso contrário.

Podemos verificar que no $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$ todo passeio útil P, com origem em $Q \times \{0\}$ e término em $Q \times \{k\}$ é tal que $||P|| = k$, se $k \in [0, m]$ e $||P|| > m$, se $k = \infty$. Então, a cada passeio útil P em $\mathcal{B}$, $P : (p, 0) \xrightarrow{w} (q, k)$, com $k \in [0, m]$ e $w \in A^+$, existe um passeio útil $P' : p \xrightarrow{w} q$ em $\mathcal{A}$ tal que $||P'|| = ||P||$. Portanto, $\forall w \in A^+$, se $w\|\mathcal{B}\| \neq \infty$ então $w\|\mathcal{B}\| \leq m$. E, nesse caso, $w\|\mathcal{A}\| = w\|\mathcal{B}\|$.

Por outro lado, a cada passeio útil P' em $\mathcal{A}$, $P' : p \xrightarrow{w} q$, com $w \in A^+$ e $||P'|| = k \in [0, m]$, existe um passeio útil $P : (p, 0) \xrightarrow{w} (q, k)$ em $\mathcal{B}$ tal que $||P|| = k$. Logo, $\forall w \in A^+$, se $w\|\mathcal{A}\| \leq m$, então $w\|\mathcal{B}\| = w\|\mathcal{A}\|$.

Assim, $|\mathcal{B}| = [0, m] \|\mathcal{A}\|^{-1}$. Analogamente, temos que $[0, m-1] \|\mathcal{A}\|^{-1}$ é um subconjunto reconhecível de A^*.

Logo, $m\|\mathcal{A}\|^{-1} = [0, m]\|\mathcal{A}\|^{-1} - [0, m-1]\|\mathcal{A}\|^{-1}$ é um subconjunto reconhecível de A^*.

Assim, $mX^{-1} = m\|\mathcal{A}\|^{-1} \cup \{1\}$, se $1X = m$ e $mX^{-1} = m\|\mathcal{A}\|^{-1}$, em caso contrário. Portanto, mX^{-1} é um subconjunto reconhecível de A^*.

■

Consideremos, por exemplo, o $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^*, com $A = \{a, b\}$, definido por:

$$wX = \begin{cases} 0 & \text{se } w = a^n b^n, \text{ para algum } n \geq 0 \\ \infty & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Como $0X^{-1} = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ não é um subconjunto reconhecível de A^*, resulta que X não é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

Nenhuma das condições necessárias apresentadas nas Proposições 2.1, 2.2 e 2.3 é suficiente para que um dado $\mathcal{M}$-subconjunto seja reconhecível, como mostra o lema a seguir.

Lema 2.4 *Seja $A = \{a, b\}$ e seja X o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* definido por: $1X = \infty$ e $\forall w \in A^+$, $wX = \max\{ |w|_a, |w|_b \}$. Então, X satisfaz cada uma das condições nas Proposições 2.1, 2.2 e 2.3; mas, X não é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*.*

Demonstração. Inicialmente, vamos verificar as três condições para X.

- Suporte$(X) = \{ w \in A^* \mid wX \neq \infty \} = A^+$ é um subconjunto reconhecível de A^*.
- $\forall w \in A^+$, $wX = \max\{ |w|_a, |w|_b \} \leq |w|$.
- $\infty X^{-1} = \{1\}$ que é um subconjunto reconhecível de A^*.

  Para $m \neq \infty$,

$$\begin{aligned} mX^{-1} &= \{ w \in A^* \mid wX = m \} \\ &= \{ w \in A^* \mid \max\{ |w|_a, |w|_b \} = m \} \\ &= \{ w \in A^* \mid |w|_a = m \text{ e } 0 \leq |w|_b \leq m \} \\ &\quad \cup \{ w \in A^* \mid |w|_b = m \text{ e } 0 \leq |w|_a \leq m \} \ , \end{aligned}$$

que é um subconjunto reconhecível de A^*, pois é finito.

Agora, suponhamos que X seja um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*. Então, pela Proposição 1.12, existe um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado $\mathcal{A}$ tal que $\|\mathcal{A}\| = X$, pois $1X = \infty$.

Consideremos a palavra $w = a^n b^n$, onde n é o número de estados de $\mathcal{A}$. Então, $wX = n$.

Seja P um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$, soletrando w. Então, $||P|| = w\|\mathcal{A}\| = wX = n$ e existem naturais r, s e t, com $s > 0$ e $r + s + t = n$, tais que o passeio P pode ser fatorado em:

$$P : q_0 \xrightarrow{a^n} q_1 \xrightarrow{b^r} q_2 \xrightarrow{b^s} q_2 \xrightarrow{b^t} q_3 \ .$$

Consideremos o fator $P_1 = (q_2, b^s, q_2)$ de P. Se $||P_1|| = 0$, existe um passeio bem sucedido P' em $\mathcal{A}$,

$$P' : q_0 \xrightarrow{a^n} q_1 \xrightarrow{b^r} q_2 \xrightarrow{b^s} q_2 \xrightarrow{b^s} q_2 \xrightarrow{b^t} q_3 \ ,$$

soletrando a palavra $w' = a^n b^{n+s}$ tal que

$$||P'|| = ||P|| = n \ .$$

Então, $w'\|\mathcal{A}\| \leq ||P'|| = n$. Isto é um absurdo, já que

$$w'X = \max\{\, n, n+s \,\} \geq n+1 \ .$$

Assim, $||P_1|| \neq 0$. E, neste caso, existe um passeio bem sucedido P'' em $\mathcal{A}$,

$$P'' : q_0 \xrightarrow{a^n} q_1 \xrightarrow{b^r} q_2 \xrightarrow{b^t} q_3 \ ,$$

soletrando a palavra $w'' = a^n b^{r+t}$ tal que

$$||P''|| < ||P|| = n \ .$$

Então, $w''\|\mathcal{A}\| \leq ||P''|| < n$. Isto é um absurdo, já que

$$w''X = \max\{\, n, r+t \,\} = n \ .$$

Portanto, X não é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*.

■

Na demonstração do Lema 2.4, utilizamos uma técnica que será freqüente em todo este trabalho. Ela consiste em iterar ou remover um fator de um dado passeio, dependendo se a multiplicidade desse fator é zero ou não.

Uma outra condição necessária para que um dado $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* seja reconhecível é parecida com um 'Pumping Lemma' para subconjuntos reconhecíveis de A^*; mais precisamente, com o Lema da Iteração de Ogden para subconjuntos reconhecíveis [1, cap. 1].

Seja $x \in A^*$ tal que $x = x_1x_2 \ldots x_n$, com $x_l \in A$ $(1 \leq l \leq n)$. Uma *posição* em x é qualquer inteiro $i \in [1, n]$. Dado um subconjunto I de $[1, n]$, dizemos que uma *posição* i é *marcada* com relação a I se, e somente se, $i \in I$.

Lema 2.5 *Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*. Então, existe um inteiro positivo m tal que para toda palavra x em A^*, com $xX < \infty$ e para toda escolha de pelo menos m posições marcadas em x, a palavra x admite uma fatoração da forma $x = uvw$, de modo que*
(i) *v contenha pelo menos uma e no máximo m posições marcadas;*
(ii) $\exists c \geq 0$ *tal que* $\forall k \geq 0$, $\quad (uv^kw)X \leq xX + (k-1)c$.

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*. Seja $\mathcal{A}$ um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado tal que $\|\mathcal{A}\| = X + \mathbf{A}^+$ e seja m o número de estados de $\mathcal{A}$.

Seja $x \in A^*$ tal que $xX < \infty$ e $x = x_1x_2 \ldots x_n$, com $x_l \in A$ $(1 \leq l \leq n)$.

Consideremos o subconjunto I de $[1, n]$ como sendo uma escolha de pelo menos m posições em x. Como $|I| \geq m$, segue que $n \geq m$.

Sejam $i_1, i_2, \ldots, i_m$ os m menores elementos de I, com $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$. Definimos a seguinte fatoração de x,

$$x = y_0y_1y_2 \ldots y_my_{m+1} \ ,$$

com:

$$\begin{cases} y_0 &= x_1 \ldots x_{i_1-1} \\ y_1 &= x_{i_1} \\ y_l &= x_{i_{l-1}+1} \ldots x_{i_l}, \qquad \text{para } 2 \leq l \leq m \\ y_{m+1} &= x_{i_m+1} \ldots x_n \ . \end{cases}$$

Então, cada y_l $(1 \leq l \leq m)$ contém exatamente uma posição marcada.

Consideremos um passeio vitorioso P em $\mathcal{A}$, que soletra x tal que

$$P : p \xrightarrow{y_0} q_0 \xrightarrow{y_1} q_1 \xrightarrow{y_2} \dots \xrightarrow{y_{m-1}} q_{m-1} \xrightarrow{y_m} q_m \xrightarrow{y_{m+1}} r \ .$$

Então, entre os $m+1$ estados $q_0, q_1, \dots, q_m$, dois são iguais; ou seja, existem h e j, $0 \leq h < j \leq m$ tais que $q_h = q_j$. Definimos

$$u = y_0 y_1 \dots y_h, \quad v = y_{h+1} \dots y_j \quad \text{e} \quad w = y_{j+1} \dots y_{m+1} \ .$$

Então, $x = uvw$ e v contém exatamente $j-h$ posições marcadas, com $0 < j - h \leq m$.

O passeio P pode ser fatorado como:

$$P : p \xrightarrow{u} q_h \xrightarrow{v} q_j = q_h \xrightarrow{w} r \ .$$

Consideremos as palavras

$$x' = uw = y_0 y_1 \dots y_h y_{j+1} \dots y_{m+1}$$

e $x'' = uv^k w = y_0 y_1 \dots y_h (y_{h+1} \dots y_j)^k y_{j+1} \dots y_{m+1}$, para algum $k \geq 1$ e o fator $P_1 = (q_h, v, q_j)$ de P. Observemos que $x' \neq 1$. De fato, se $x' = 1$ então $p = r$; o que é um absurdo, pois P é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado.

Duas situações podem ocorrer:

(1) Suponhamos que $\|P_1\| = 0$. Então,

$$x'\|\mathcal{A}\| \leq \|P\| = x\|\mathcal{A}\| \quad \text{e} \quad x''\|\mathcal{A}\| \leq \|P\| = x\|\mathcal{A}\| \ .$$

Portanto, para $c = 0$ vale que

$$\forall k \geq 0, \qquad (uv^k w)X \leq xX + (k-1)c \ .$$

(2) Suponhamos que $\|P_1\| > 0$. Então,

$$x'\|\mathcal{A}\| \leq \|P\| - \|P_1\| = x\|\mathcal{A}\| - \|P_1\|$$

$$\text{e} \quad x''\|\mathcal{A}\| \leq \|P\| + (k-1)\|P_1\| = x\|\mathcal{A}\| + (k-1)\|P_1\| \ .$$

Portanto, para $c = \|P_1\|$ vale que

$$\forall k \geq 0, \qquad (uv^k w)X \leq xX + (k-1)c \ .$$

■

A condição no Lema 2.5 também não é suficiente para que um dado $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* seja reconhecível, como podemos ver no próximo lema.

Em vista desse lema, não havia necessidade do Lema 2.4. Mas, decidimos incluí-lo, porque a técnica que utilizamos na sua demonstração contém uma idéia que será explorada freqüentemente nas provas no decorrer deste trabalho. Essa técnica é diferente da que usamos na demonstração do próximo lema.

Lema 2.6 *Seja $A = \{ a, b, c \}$ e seja X o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* definido por:*

$$\forall w \in A^*, \quad wX = \begin{cases} |w|_a + |w|_b & \textit{se } w \in c^+\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \} \\ \min\{ |w|_a, |w|_b \} & \textit{caso contrário} . \end{cases}$$

Então, X satisfaz cada uma das condições nas Proposições 2.1, 2.2 e 2.3 e no Lema 2.5; mas, X não é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que X satisfaz cada uma das condições nas Proposições 2.1, 2.2 e 2.3:

- suporte(X) $= \{ x \in A^* \mid xX \neq \infty \} = A^*$ é um subconjunto reconhecível.
- $\forall w \in A^+$, $wX \leq |w|$.
- $\infty X^{-1} = \emptyset$ e $\forall m \in \mathcal{M}$, $m \neq \infty$,

  $$mX^{-1} = c^+ a^{m/2} b^{m/2} \cup \{ w \mid w \in A^* - c^+ a^m b^m \text{ e } \min\{ |w|_a, |w|_b \} = m \} .$$

  Ou seja, $\forall m \in \mathcal{M}$, mX^{-1} é um subconjunto reconhecível de A^*.

Em seguida, vamos mostrar que X satisfaz a condição no Lema 2.5.

Seja $m = 1$. Vamos mostrar que para toda palavra x em A^+ e para toda escolha de uma posição marcada em x, a palavra x admite uma fatoração $x = uvw$ de modo que
(i) v contenha a posição marcada;
(ii) $\exists j \geq 0$ tal que $\forall k \geq 0, \quad (uv^k w)X \leq xX + (k-1)j$.

Denotemos por p a posição marcada em x. Vamos analisar, separadamente, as diferentes possibilidades para a palavra x.

(1) Seja $x \in c^+\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$. Então, $x = c^s a^n b^n$, com $s > 0$ e $n \geq 0$, e $xX = 2n$.

(1a) Se $1 \leq p \leq s$, consideremos

$$u = c^{p-1}, \quad v = c \quad \text{e} \quad w = c^{s-p} a^n b^n \ .$$

Seja $x' = c^{p-1} c^k c^{s-p} a^n b^n$, para algum $k \geq 0$.
Se $s = 1$ e $k = 0$ então $x'X = (a^n b^n)X = n \leq xX$.
Se $s = 1$ e $k > 0$ então $x'X = (c^k a^n b^n)X = 2n = xX$.
Se $s > 1$, $\forall k \geq 0$, $(c^{p-1} c^k c^{s-p} a^n b^n)X = 2n = xX$.
Logo, para $j = 0$ resulta que

$$\forall k \geq 0, \quad (uv^k w)X \leq xX + (k-1)j \ .$$

(1b) Se $s + 1 \leq p \leq s + n$, consideremos

$$u = c^s a^{p-s-1}, \quad v = a \quad \text{e} \quad w = a^{n-p+s} b^n \ .$$

Nesse caso, $n > 0$ e seja $x' = c^s a^{p-s-1} a^k a^{n-p+s} b^n$, para algum $k \geq 0$.
Se $k = 0$, $x'X = (c^s a^{n-1} b^n)X = n - 1 < xX$.
Se $k = 1$, $x'X = xX$.
Se $k > 1$, $x'X = (c^s a^{n-1} a^k b^n)X = n < xX$.
Logo, para $j = 0$ resulta que

$$\forall k \geq 0, \quad (uv^k w)X \leq xX + (k-1)j \ .$$

(1c) Se $s + n + 1 \leq p \leq s + 2n$, consideremos

$$u = c^s a^n b^{p-s-n-1}, \quad v = b \quad \text{e} \quad w = b^{2n-p+s} \ .$$

A demostração é análoga à situação (1b).

(2) Seja $x \in \{ a, b, c \}^* - c^+\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$, $x = x_1 \ldots x_t$, $x_l \in A$ $(1 \leq l \leq t)$.
Então, $xX = \min\{ |x|_a, |x|_b \}$. Consideremos

$$u = x_1 \ldots x_{p-1}, \quad v = x_p \quad \text{e} \quad w = x_{p+1} \ldots x_t \ .$$

Se para algum $k \geq 0$, $uv^k w \in c^+\{\, a^n b^n \mid n \geq 0 \,\}$, consideremos

$$u = x_1 \ldots x_i, \quad v = x_{i+1} \ldots x_p \ldots x_r \quad \text{e} \quad w = x_{r+1} \ldots x_t \ ,$$

para $i < p$ e $r \geq p$ tal que $uv^k w \notin c^+\{\, a^n b^n \mid n \geq 0 \,\}$, $\forall k \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0, \quad (uv^k w)X &= \min\{\, |uv^k w|_a, |uv^k w|_b \,\} \\ &= \min\{\, |x|_a + (k-1)|v|_a, |x|_b + (k-1)|v|_b \,\} \ . \end{aligned}$$

Mas, pode-se verificar facilmente que

$$\forall k \geq 0, \quad \min\{\, |x|_a + (k-1)|v|_a, |x|_b + (k-1)|v|_b \,\} \leq \min\{\, |x|_a, |x|_b \,\} + (k-1)j \ ,$$

onde

$$j = \begin{cases} |v|_a & \text{se } |x|_a < |x|_b \\ |v|_b & \text{se } |x|_b < |x|_a \\ \min\{\, |v|_a, |v|_b \,\} & \text{se } |x|_a = |x|_b \ . \end{cases}$$

Portanto, $\exists j \geq 0$ tal que

$$\forall k \geq 0, \quad (uv^k w)X \leq xX + (k-1)j \ .$$

Assim, de (1) e (2) resulta que X satisfaz a condição no Lema 2.5.

Agora, vamos mostrar que X não é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

É interessante chamarmos a atenção para essa demonstração, que utiliza uma estratégia diferente daquela que utilizamos em outras demonstrações.

Suponhamos que X seja um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*. Então, pela Proposição 1.12, existe um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ tal que $\|\mathcal{A}\| = X + \mathbf{A}^+$. Seja n o número de estados de $\mathcal{A}$. Denotemos por p o estado inicial de $\mathcal{A}$ e por r o estado final de $\mathcal{A}$.

Seja m um inteiro positivo e definimos, para cada natural l, o subconjunto Q_l de Q da seguinte forma:

$$Q_l = \{\, q \mid \text{existe um passeio vitorioso } p \xrightarrow{c^m a^l} q \xrightarrow{b^h} r, \text{ para algum } h \neq l \,\} \ .$$

Então, existem naturais i e j tais que $i < j$ e $Q_i = Q_j$. Observemos que Q_l é não vazio, para todo l.

Como $c^m a^i b^j \in |\mathcal{A}|$, existe um passeio vitorioso P em $\mathcal{A}$, soletrando $c^m a^i b^j$, com a seguinte fatoração:

$$P : p \xrightarrow{c^m a^i} q \xrightarrow{b^j} r \ ,$$

para algum $q \in Q$. Mas, como $j \neq i$, concluímos que $q \in Q_i$. Como $Q_i = Q_j$, $q \in Q_j$. Então, existe um passeio vitorioso P' em $\mathcal{A}$, soletrando $c^m a^j b^k$, para algum $k \neq j$, com a seguinte fatoração:

$$P' : p \xrightarrow{c^m a^j} q \xrightarrow{b^k} r \ .$$

Mas, como

$$||P|| = (c^m a^i b^j)||\mathcal{A}|| = (c^m a^i b^j)X = \min\{i, j\} = i$$

$$\text{e} \quad ||P'|| = (c^m a^j b^k)||\mathcal{A}|| = (c^m a^j b^k)X = \min\{j, k\} \ ,$$

concluímos que os fatores $P_1 = (p, c^m a^j, q)$ de P' e $P_2 = (q, b^j, r)$ de P são tais que $||P_1|| \leq j$ e $||P_2|| \leq i$.

Logo, o passeio $P_1 P_2 = (p, c^m a^j, q)(q, b^j, r)$ satisfaz

$$||P_1 P_2|| = ||P_1|| + ||P_2|| \leq j + i < 2j \ .$$

Então,

$$(c^m a^j b^j)||\mathcal{A}|| \leq ||P_1 P_2|| < 2j \ .$$

O que é um absurdo, pois $(c^m a^j b^j)X = 2j$.

Portanto, X não é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*.

■

2.2 $\mathcal{M}$-subconjuntos simples

Introduziremos os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples e estudaremos uma condição necessária para que um $\mathcal{M}$-subconjunto seja simples. Desta condição resultará que a família de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples estará contida propriamente na família de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis.

Um *$\mathcal{M}$-subconjunto* de A^* é *simples* se ele é o comportamento de algum $\mathcal{M}$-A-autômato simples. Dizemos que um *$\mathcal{M}$-A-autômato* $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ é *simples* se satisfaz:

$$(Q \times A \times Q)E_{\mathcal{A}} \subseteq \{0, 1, \infty\}, \quad QI \subseteq \{0, \infty\} \text{ e } QT \subseteq \{0, \infty\} \ .$$

Note, pela definição, que se X é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples, então $1X \in \{0, \infty\}$. Denotamos por $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ a família de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^*.

Como ocorre com os $\mathcal{M}$-A-autômatos normalizados, é importante observar também que num $\mathcal{M}$-A-autômato simples $\mathcal{A}$, todo passeio vitorioso P em $\mathcal{A}$, com rótulo w, satisfaz $||P|| = w||\mathcal{A}||$ (já que $QI \subseteq \{0, \infty\}$ e $QT \subseteq \{0, \infty\}$) e todo passeio bem sucedido P' em $\mathcal{A}$, com rótulo w, é tal que $w||\mathcal{A}|| \leq ||P'||$.

Podemos verificar que o algoritmo de normalização de $\mathcal{M}$-A-autômatos, que vimos na Proposição 1.12, preserva a propriedade de um $\mathcal{M}$-A-autômato ser simples.

Proposição 2.7 *Para todo $\mathcal{M}$-A-autômato simples $\mathcal{A}$, existe um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado e simples $\mathcal{B}$ tal que* $||\mathcal{B}|| = ||\mathcal{A}|| + \mathbf{A}^+$.

∎

A proposição a seguir apresenta uma condição necessária para que um $\mathcal{M}$-subconjunto seja simples.

Proposição 2.8 *Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^*. Se X é simples então, $\forall w \in A^*$, ou $wX = \infty$ ou $wX \leq |w|$.*

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto simples de A^*. Então, existe um $\mathcal{M}$-A-autômato simples $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ tal que $||\mathcal{A}|| = X$.

Logo, $\forall w \in A^*$, se $w||\mathcal{A}|| \neq \infty$, existe um passeio vitorioso P em $\mathcal{A}$, soletrando w e $||P|| = w||\mathcal{A}||$.

Como $\mathcal{A}$ é simples, segue que $||P|| \leq |w|$. Portanto, $wX = w||\mathcal{A}|| \leq |w|$.

∎

Uma conseqüência da Proposição 2.8 é que os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples constituem uma subfamília própria de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis.

Corolário 2.9 $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Demonstração. Basta considerar, por exemplo, o $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* definido por $wX = 2|w|$, $\forall w \in A^*$. É claro que X é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível; mas, não é simples, pois não satisfaz a condição na Proposição 2.8.

∎

O lema a seguir mostra que a recíproca da Proposição 2.8 não é válida.

Lema 2.10 *Seja $A = \{a, b\}$ e seja X o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* definido por:*

$$\forall w \in A^*, \quad wX = 2\min\{\, |w|_a, |w|_b \,\} \ .$$

X é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível que satisfaz a condição $wX \leq |w|, \forall w \in A^*$; mas, X não é simples.

Demonstração. É claro que X é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível e um $\mathcal{M}$-A-autômato cujo comportamento é X pode ser visto no Exemplo 1.3.

Suponhamos que X seja um $\mathcal{M}$-subconjunto simples. Nesse caso, existe um $\mathcal{M}$-A-autômato simples $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ tal que $||\mathcal{A}|| = X$.

Seja $n = |Q|$ e consideremos a palavra

$$w = a^n b^m, \qquad \text{com } m = 2n + 1 \ .$$

Então, existe um passeio vitorioso P em $\mathcal{A}$, com rótulo w e $||P|| = w||\mathcal{A}|| = wX = 2n$. Além disso, existem naturais r, s e t, com $s > 0$ e $r + s + t = n$ tais que o passeio P pode ser decomposto em:

$$P : i \xrightarrow{a^r} p \xrightarrow{a^s} p \xrightarrow{a^t} q \xrightarrow{b^m} f \ .$$

Seja $w' = a^{n+s} b^m$. Então,

$$w'X = 2\min\{\, |w'|_a, |w'|_b \,\} = 2\min\{\, n + s, m \,\} \ .$$

Como $n+s \leq 2n$ e $m = 2n+1$, resulta que $n+s < m$. Assim, $w'X = 2n+2s$.

Vamos considerar o fator $P_1 = (p, a^s, p)$ de P. Então, inserindo um outro fator P_1 em P, o passeio resultante é

$$P' : i \xrightarrow{a^r} p \xrightarrow{a^s} p \xrightarrow{a^s} p \xrightarrow{a^t} q \xrightarrow{b^m} f \ .$$

Mas, como $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{M}$-A-autômato simples, $0 \leq ||P_1|| \leq s$. Então, resulta que

$$w'||\mathcal{A}|| \leq ||P'|| = ||P|| + ||P_1|| \leq ||P|| + s = 2n + s < 2n + 2s = w'X \ ,$$

contradizendo que $X = ||\mathcal{A}||$.

Portanto, não é possível que exista um $\mathcal{M}$-A-autômato simples cujo comportamento seja igual a X. Assim, X não é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples.

■

2.3 $\mathcal{M}$-subconjuntos que são complexidades não determinísticas

A idéia da complexidade não determinística de um autômato finito consiste em associar a cada palavra o número mínimo de decisões necessárias para soletrá-la num autômato finito não determinístico. Esta idéia surgiu inicialmente para máquinas de Turing e foi formalizada por C. M. R. Kintala e P. Fischer, em 1977 [10]. Mais tarde, em 1980, C. M. R. Kintala e D. Wotschke [11] consideraram esta idéia para autômatos finitos. Mais recentemente, J.Goldstine, H. Leung e D. Wotschke [5] têm relacionado a ambigüidade com o não determinismo em autômatos finitos.

Nesta seção, apresentaremos uma condição necessária para que um $\mathcal{M}$-subconjunto seja uma complexidade não determinística e, como conseqüência, resultará que a família das complexidades não determinísticas estará contida propriamente na família de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples.

Seja $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ um autômato finito (não necessariamente determinístico) sobre o alfabeto A. Dizemos que uma aresta (p, a, q) de $\mathcal{A}$ é *não determinística* se existir uma outra aresta (p, a, q') em $\mathcal{A}$, com $q' \neq q$ e, *determinística*, em caso contrário.

É possível associar a cada palavra em A^* o número mínimo de decisões necessárias para soletrá-la no autômato $\mathcal{A}$, quando $\mathcal{A}$ é não determinístico, simplesmente associando a multiplicidade 1 às arestas não determinísticas e 0, às arestas determinísticas e aos estados iniciais e finais.

Mais precisamente, o autômato $\mathcal{A}$ pode ser transformado num $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B} = (Q, I_\mathcal{B}, T_\mathcal{B})$, definindo o $\mathcal{M}$-subconjunto $E_\mathcal{B}$ de $Q \times A \times Q$ da seguinte forma:

$$(p, a, q)E_\mathcal{B} = \begin{cases} 0 & \text{se } (p, a, q) \text{ é uma aresta determinística de } \mathcal{A} \\ 1 & \text{se } (p, a, q) \text{ é uma aresta não determinística de } \mathcal{A} \\ \infty & \text{se } (p, a, q) \text{ não é uma aresta de } \mathcal{A} \end{cases}$$

e os $\mathcal{M}$-subconjuntos $I_\mathcal{B}$ e $T_\mathcal{B}$ de Q por:

$$\forall q \in Q, \quad qI(qT) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \text{ é um estado inicial (final) de } \mathcal{A} \\ \infty & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Então, $\forall w \in A^*$, $w\|\mathcal{B}\|$ é exatamente o número mínimo de arestas não determinísticas necessárias para soletrar w de I para T em $\mathcal{A}$.

Agora, seja $\mathcal{C}$ um $\mathcal{M}$-A-autômato simples tal que para cada aresta útil (p,a,q) de $\mathcal{C}$,

$$(p,a,q)E_{\mathcal{C}} = \begin{cases} 0 & \text{se não existem outras arestas } (p,a,q') \text{ em } \mathcal{C}, \text{ com } q \neq q' \\ 1 & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Então, dizemos que o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{C}$ é do *tipo nc*. O $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$, construído acima também é do tipo nc.

Um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* é uma *complexidade não determinística* se ele é o comportamento de algum $\mathcal{M}$-A-autômato do tipo nc. Mas, podemos notar que uma complexidade não determinística pode ser o comportamento de um $\mathcal{M}$-A-autômato que não é do tipo nc. Em particular, em algumas provas de que um dado $\mathcal{M}$-subconjunto é uma complexidade não determinística, vamos construir um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$ que nem sempre é do tipo nc. Na verdade, se $\mathcal{A}$ é simples e se para cada aresta útil (p,a,q) de $\mathcal{A}$, com multiplicidade zero, não existirem outras arestas úteis (p,a,r) em $\mathcal{A}$, com $r \neq q$, podemos concluir que $\|\mathcal{A}\|$ é uma complexidade não determinística, já que $\mathcal{A}$ pode ser facilmente estendido para um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$ do tipo nc, com $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\|$.

A família de todas as complexidades não determinísticas de A^* é denotada por $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$. Como toda complexidade não determinística é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples, resulta que $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \subseteq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

A questão que surge nesse momento é a seguinte:

> Todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples é uma complexidade não determinística?

Antes de responder a essa questão, vamos estudar a nossa condição necessária para que um $\mathcal{M}$-subconjunto seja uma complexidade não determinística.

Dizemos que um $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* é de *multiplicidade diferenciável* se existem palavras x, y, u e v em A^* tais que para cada $k \geq 1$, exista uma palavra z_k em A^+ de modo que

$$\forall l \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall m > k, \quad w_{klk}X = w_{kkk}X < w_{kkm}X < \infty \ ,$$

onde $w_{klm} = x(uz_k^k v)^l u z_k^m y$.

Ou seja, para cada $k \geq 1$, a palavra $w = x(uz_k^k v)^k u z_k^k y$ tem um fator z_k que ocorre em dois contextos distintos. Num dos contextos, o fator $uz_k^k v$ pode ser eliminado de w ou pode ser iterado infinitamente, sem alterar a multiplicidade da palavra resultante $w_{k0k} = xuz_k^k y$ ou $w_{klk} = x(uz_k^k v)^l uz_k^k y$, $\forall l > 0$, respectivamente. Mas, no outro contexto, se o fator z_k for iterado m vezes, qualquer que seja $m > k$, a multiplicidade da palavra resultante $w_{kkm} = x(uz_k^k v)^k uz_k^m y$ será sempre maior do que a multiplicidade de w.

Observemos que um $\mathcal{M}$-subconjunto X ser uma complexidade não determinística é uma propriedade que depende da existência de um particular $\mathcal{M}$-A-autômato com comportamento X; enquanto que X ser de multiplicidade diferenciável independe de qualquer $\mathcal{M}$-A-autômato com comportamento X.

Não sabemos decidir se um dado $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^* é de multiplicidade diferenciável. Mesmo fixando-se as palavras x, y, u e v em A^*, o inteiro $k \geq 1$ e a palavra z_k em A^+, não conseguimos decidir se

$$\forall l \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall m > k, \quad w_{klk}X = w_{kkk}X < w_{kkm}X < \infty \ .$$

A seguir, apresentamos a nossa condição necessária para que um $\mathcal{M}$-subconjunto seja uma complexidade não determinística.

Lema 2.11 *Se um $\mathcal{M}$-subconjunto X é uma complexidade não determinística, então X não é de multiplicidade diferenciável.*

Na demonstração deste lema utilizamos propriedades de alguns passeios num $\mathcal{M}$-A-autômato do tipo nc. A proposição e o lema a seguir estabelecem essas propriedades.

Proposição 2.12 *Seja $\mathcal{A}$ um $\mathcal{M}$-A-autômato do tipo nc e sejam P e P' passeios úteis e distintos em $\mathcal{A}$, mas com os mesmos rótulos. Se P e P' têm a mesma origem, então as suas multiplicidades são diferentes de zero.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ um $\mathcal{M}$-A-autômato do tipo nc e seja $w \in A^*$, $w = w_1 w_2 \ldots w_n$, com $w_l \in A$ $(1 \leq l \leq n)$.

Considere dois passeios úteis e distintos P e P' em $\mathcal{A}$, ambos com rótulo w e com as seguintes fatorações:

$$P : p_0 \xrightarrow{w_1} p_1 \xrightarrow{w_2} p_2 \xrightarrow{w_3} \cdots \xrightarrow{w_n} p_n$$

$$\text{e} \quad P' : q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \xrightarrow{w_2} q_2 \xrightarrow{w_3} \cdots \xrightarrow{w_n} q_n \ .$$

Suponhamos que $p_0 = q_0$. Então, $n \geq 1$, já que P e P' são distintos. Seja $i = \min\{ j \mid 1 \leq j \leq n \text{ e } p_j \neq q_j \}$; então, os fatores $P_1 = (p_{i-1}, w_i, p_i)$ de

P e $P_2 = (q_{i-1}, w_i, q_i)$ de P' são tais que $p_{i-1} = q_{i-1}$ e $p_i \neq q_i$. Ou seja, P_1 e P_2 são duas arestas úteis de $\mathcal{A}$, com a mesma origem, mesmo rótulo, mas términos distintos. Como $\mathcal{A}$ é do tipo nc, concluímos que $||P_1|| = ||P_2|| = 1$. Portanto, $||P|| > 0$ e $||P'|| > 0$.

■

Lema 2.13 *Seja $\mathcal{A}$ um $\mathcal{M}$-A-autômato do tipo nc. Seja P um passeio útil em $\mathcal{A}$ com rótulo w^n, para algum $w \in A^+$ e $n > 0$,*

$$P : q_0 \xrightarrow{w} q_1 \xrightarrow{w} q_2 \xrightarrow{w} \cdots \xrightarrow{w} q_n \ .$$

Se existem $j, k \in [0, n]$, $j < k$ tais que $q_j = q_k$ e o fator (q_j, w^{k-j}, q_k) de P tem multiplicidade zero, então $q_n \in \{ q_i \mid 0 \leq i \leq n-1 \}$ e o fator (q_l, w^{n-l}, q_n) de P, com $l = \min\{ i \mid 0 \leq i \leq n-1$ e $q_i = q_n \}$, tem multiplicidade zero.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ um $\mathcal{M}$-A-autômato do tipo nc e seja $w \in A^+$.

Considere um passeio útil P em $\mathcal{A}$, soletrando w^n, para algum $n > 0$,

$$P : q_0 \xrightarrow{w} q_1 \xrightarrow{w} q_2 \xrightarrow{w} \cdots \xrightarrow{w} q_n \ .$$

Suponhamos que existam $j, k \in [0, n]$, $j < k$ tais que $q_j = q_k$ e o fator (q_j, w^{k-j}, q_k) de P tenha multiplicidade zero. Então, podemos determinar o máximo m do seguinte conjunto:

$$m = \max\{ i \mid 1 \leq i \leq n \text{ e } \exists h, 0 \leq h < i \text{ tal que } q_h = q_i \text{ e}$$

$$\text{o fator } (q_h, w^{i-h}, q_i) \text{ de } P \text{ tem multiplicidade zero} \} \ .$$

E, seja $t \in [0, m-1]$ tal que $q_t = q_m$ e o fator $P_1 = (q_t, w^{m-t}, q_m)$ de P tenha multiplicidade zero.

Se $m \neq n$, pela escolha de m, resulta que o passeio P tem dois fatores

$$P_2 = (q_t, w, q_{t+1}) \quad \text{e} \quad P_3 = (q_m, w, q_{m+1}) \ ,$$

com $q_t = q_m$ e $q_{t+1} \neq q_{m+1}$. Como $\mathcal{A}$ é do tipo nc, segue pela Proposição 2.12 que P_2 e P_3 têm multiplicidades positivas. Mas, P_2 também é fator de P_1; então, $||P_2|| \leq ||P_1||$. Logo, resulta que $0 < ||P_2|| \leq ||P_1|| = 0$; o que é um absurdo. Portanto, $m = n$.

Seja l o mínimo do seguinte conjunto:

$$l = \min\{ i \mid 0 \leq i \leq n-1 \text{ e } q_i = q_n \} \ .$$

Então, $l \leq t$.

Se $l = t$, já sabemos que o fator $P_1 = (q_l, w^{n-l}, q_n)$ de P tem multiplicidade zero.

Se $l < t$, consideremos os passeios

$$P_4 = (q_l, w^{t-l}, q_t) \quad \text{e} \quad P_5 = (P_1)^s(q_t, w^r, q_{t+r})$$

tais que P_4 é um fator de P e P_5 é obtido pela concatenação de s fatores iguais a P_1, seguido do fator (q_t, w^r, q_{t+r}) de P_1, onde s e r são naturais satisfazendo $t - l = s(n-t) + r$ e $0 \leq r < n - t$. Como $||P_1|| = 0$, segue que $||P_5|| = 0$. Então, como $\mathcal{A}$ é do tipo nc, $q_t = q_n = q_l$, $|P_4| = |P_5| = w^{t-l}$ e $||P_5|| = 0$, pela Proposição 2.12 resulta que P_4 coincide com P_5. Logo, $||P_4|| = 0$.

Assim, o fator $P_4P_1 = (q_l, w^{n-l}, q_n)$ de P tem multiplicidade zero.

■

Demonstração do Lema 2.11. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* que é uma complexidade não determinística. Seja $\mathcal{A}$ um $\mathcal{M}$-A-autômato do tipo nc tal que $||\mathcal{A}|| = X$.

Suponhamos que X seja de multiplicidade diferenciável. Então, existem palavras x, y, u e v em A^* tais que $\forall k \geq 1$, $\exists\, z_k \in A^+$ de modo que $\forall l \geq 0$ e $\forall m > k$, $w_{klk}X = w_{kkk}X < w_{kkm}X < \infty$, onde $w_{klm} = x(uz_k^kv)^l uz_k^m y$.

Seja k o número de estados de $\mathcal{A}$ e consideremos a palavra

$$w = w_{kkk} = x(uz_k^kv)^k uz_k^k y$$

e um passeio vitorioso P em $\mathcal{A}$, soletrando w.

Para simplificar a notação, usaremos z, ao invés de z_k, no decorrer desta demonstração.

O passeio P pode ser fatorado da seguinte forma.

$$P : p_0 \xrightarrow{x} q_0 \xrightarrow{uz^kv} q_1 \xrightarrow{uz^kv} q_2 \cdots \xrightarrow{uz^kv} q_k \xrightarrow{uz^k} q_{k+1} \xrightarrow{y} q_{k+2} \ .$$

Então, existem inteiros j e h, $0 \leq j < h \leq k$ tais que $q_j = q_h$.

Considere o fator $P_1 = (q_j, (uz^kv)^{h-j}, q_h)$ de P. Se $||P_1|| \neq 0$, a palavra

$$w' = w_{k,j+k-h,k} = x(uz^kv)^{j+k-h} uz^k y$$

pode ser soletrada em $\mathcal{A}$ pelo seguinte passeio bem sucedido

$$P' : p_0 \xrightarrow{x} q_0 \xrightarrow{(uz^kv)^j} q_j = q_h \xrightarrow{(uz^kv)^{k-h}} q_k \xrightarrow{uz^k} q_{k+1} \xrightarrow{y} q_{k+2} \ .$$

Então, resulta que

$$w'\|\mathcal{A}\| \leq ||P'|| < ||P|| = w\|\mathcal{A}\| = wX \ .$$

Como X é de multiplicidade diferenciável, $wX = w_{kkk}X = w_{k,j+k-h,k}X = w'X$. Logo, $w'\|\mathcal{A}\| < w'X$, contradizendo que $X = \|\mathcal{A}\|$. Portanto, $||P_1|| = 0$.

Assim, pelo Lema 2.13, existe um inteiro $i \in [0, k-1]$ tal que $q_i = q_k$ e o fator $P_2 = (q_i, (uz^k v)^{k-i}, q_k)$ de P tem multiplicidade zero.

Considere, agora, o fator $P_3 = (q_i, uz^k v, q_{i+1})$ de P_2, com a seguinte fatoração:

$$P_3 : q_i \xrightarrow{u} r_0 \xrightarrow{z} r_1 \xrightarrow{z} r_2 \xrightarrow{z} \cdots \xrightarrow{z} r_k \xrightarrow{v} q_{i+1} \ .$$

Como $||P_3|| = 0$ e k é o número de estados de $\mathcal{A}$, P_3 tem um fator $(r_{i_1}, z^{i_2-i_1}, r_{i_2})$, $0 \leq i_1 < i_2 \leq k$, com $r_{i_1} = r_{i_2}$ e multiplicidade zero. Então, pelo Lema 2.13, existe um inteiro $s \in [0, k-1]$ tal que $r_s = r_k$.

Como $\mathcal{A}$ é do tipo nc, $||P_3|| = 0$ e $q_i = q_k$, segue pela Proposição 2.12 que o fator (q_k, uz^k, q_{k+1}) de P coincide com o seguinte fator de P_3:

$$q_i \xrightarrow{u} r_0 \xrightarrow{z^s} r_s \xrightarrow{z^{k-s}} r_k \ ;$$

logo, $r_k = r_s = q_{k+1}$.

Então, a palavra

$$w'' = w_{k,k,k+k-s} = x(uz^k v)^k uz^{k+k-s} y$$

pode ser soletrada em $\mathcal{A}$ pelo seguinte passeio bem sucedido

$$P'' : p_0 \xrightarrow{x} q_0 \xrightarrow{uz^k v} q_1 \cdots \xrightarrow{uz^k v} q_k \xrightarrow{uz^k} q_{k+1} = r_s \xrightarrow{z^{k-s}} r_k = q_{k+1} \xrightarrow{y} q_{k+2}.$$

Logo,

$$w''\|\mathcal{A}\| \leq ||P''|| = ||P|| = w\|\mathcal{A}\| = wX \ .$$

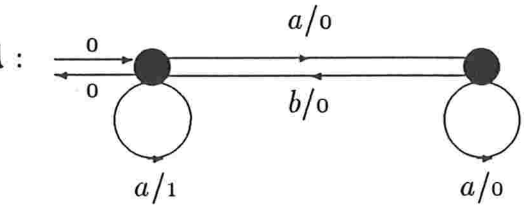
Mas, como X é de multiplicidade diferenciável, $wX = w_{kkk}X < w_{k,k,2k-s}X = w''X$. Logo, $w''\|\mathcal{A}\| < w''X$, contradizendo que $X = \|\mathcal{A}\|$. Assim, X não é de multiplicidade diferenciável.

∎

A condição apresentada no Lema 2.11 é útil para dar exemplos de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples que não são complexidades não determinísticas, como podemos ver no teorema a seguir.

Teorema 2.14 *Seja $A = \{a, b\}$. O $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* definido por $wX = n$ se $w = ua^n$, com $u \in (aa^*b)^*$, e ∞, em caso contrário, é simples; mas, X não é uma complexidade não determinística.*

Demonstração. É fácil ver que X é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples. Um $\mathcal{M}$-A-autômato simples $\mathcal{A}$, cujo comportamento é X, é mostrado a seguir:



Pode-se verificar facilmente que X satisfaz as seguintes condições:
$\forall k \geq 1, \quad ((a^kb)^ka^k)X = k.$

$\forall k \geq 1, \quad \forall m > k, \quad ((a^kb)^ka^m)X = m > k.$

$\forall k \geq 1, \quad \forall l \geq 0, \quad ((a^kb)^la^k)X = k.$

Logo, concluímos que $\quad \forall k \geq 1, \quad \forall l \geq 0 \quad$ e $\quad \forall m > k,$

$$((a^kb)^la^k)X = ((a^kb)^ka^k)X < ((a^kb)^ka^m)X < \infty \ .$$

Portanto, considerando as palavras $u = 1$, $v = b$, $x = y = 1$ e $z_k = a$, $\forall k \geq 1$, resulta que X é de multiplicidade diferenciável.

Assim, pelo Lema 2.11, X não é uma complexidade não determinística. Ou seja, $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, mas $X \notin \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

Observamos que, exceto para um exemplo no Capítulo 4, para todos os outros $\mathcal{M}$-subconjuntos que são de multiplicidade diferenciável, será possível considerar a mesma palavra z para todo $k \geq 1$, como ocorreu na demonstração do Teorema 2.14.

Uma conseqüência do Teorema 2.14 é que para um alfabeto A, com pelo menos duas letras, os $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^* que são complexidades não determinísticas constituem uma subfamília própria dos $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^*. Não sabemos se o mesmo ocorre para um alfabeto A com apenas uma letra ou se, neste caso, as duas subfamílias coincidem.

Corolário 2.15 $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, *para um alfabeto* A, *com pelo menos duas letras.*

$\blacksquare$

Capítulo 3

Propriedades de fechamento de $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ sob as operações básicas

Neste capítulo, estudaremos as propriedades de fechamento das três famílias, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, sob as operações básicas. Como $\mathcal{M}$ é um semi-anel comutativo, a maioria das propriedades que veremos aqui para $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ seguem das propriedades correspondentes que foram estabelecidas por Eilenberg [4] para $K\,\mathrm{Rec}\,A^*$, qualquer que seja o semi-anel comutativo K. Não haveria necessidade de incluir as demonstrações de que algumas dessas propriedades são válidas para $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$; mas, decidimos incluí-las neste capítulo para nos familiarizarmos mais com as operações sobre os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e com os $\mathcal{M}$-A-autômatos e, também, porque algumas delas serão referenciadas nas provas dessas propriedades para as famílias $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

Proposição 3.1 *$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ são fechadas sob o mínimo.*

Demonstração. Sejam X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Então, existem $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A} = (Q_\mathcal{A}, I_\mathcal{A}, T_\mathcal{A})$ e $\mathcal{B} = (Q_\mathcal{B}, I_\mathcal{B}, T_\mathcal{B})$ tais que $\|\mathcal{A}\| = X$ e $\|\mathcal{B}\| = Y$.

Definimos um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{C} = (Q_\mathcal{C}, I_\mathcal{C}, T_\mathcal{C})$ da seguinte forma:

$Q_\mathcal{C} = Q_\mathcal{A} \cup Q_\mathcal{B}$;

$I_{\mathcal{C}} : Q_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ é dado por:

$$qI_{\mathcal{C}} = \begin{cases} qI_{\mathcal{A}} & \text{se } q \in Q_{\mathcal{A}} \\ qI_{\mathcal{B}} & \text{se } q \in Q_{\mathcal{B}} \end{cases} ;$$

$T_{\mathcal{C}} : Q_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ é dado por:

$$qT_{\mathcal{C}} = \begin{cases} qT_{\mathcal{A}} & \text{se } q \in Q_{\mathcal{A}} \\ qT_{\mathcal{B}} & \text{se } q \in Q_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

e $E_{\mathcal{C}} : Q_{\mathcal{C}} \times A \times Q_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ é definido por:

$$(p,a,q)E_{\mathcal{C}} = \begin{cases} (p,a,q)E_{\mathcal{A}} & \text{se } (p,a,q) \text{ é uma aresta em } \mathcal{A} \\ (p,a,q)E_{\mathcal{B}} & \text{se } (p,a,q) \text{ é uma aresta em } \mathcal{B} \end{cases} .$$

Ou seja, uma aresta é útil em $\mathcal{C}$ se, e somente se, ela é útil ou em $\mathcal{A}$ ou em $\mathcal{B}$. Logo, todo passeio útil em $\mathcal{C}$ é ou um passeio útil em $\mathcal{A}$ ou um passeio útil em $\mathcal{B}$. Assim,

$$|\mathcal{C}| = |\mathcal{A}| \cup |\mathcal{B}| \quad \text{e} \quad \forall w \in A^*, w\|\mathcal{C}\| = \min(w\|\mathcal{A}\|, w\|\mathcal{B}\|) = \min(wX, wY) .$$

Ou seja, $\|\mathcal{C}\| = \min(X, Y)$. Portanto, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo.

Por outro lado, observemos que a restrição de $\mathcal{C}$ aos estados em $Q_{\mathcal{A}}(Q_{\mathcal{B}})$ é $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. Então, podemos verificar que, se os $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são simples (do tipo nc), $\mathcal{C}$ também é simples (do tipo nc). Assim, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ são fechadas sob o mínimo.

■

Proposição 3.2 *$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a adição.*

Demonstração. Sejam X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Então, existem $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, I_{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{B}})$ tais que $\|\mathcal{A}\| = X$ e $\|\mathcal{B}\| = Y$.

Definimos um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{C} = (Q_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, T_{\mathcal{C}})$ da seguinte forma:
$Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}$;
$I_{\mathcal{C}} : Q_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ tal que $(q', q'')I_{\mathcal{C}} = q'I_{\mathcal{A}} + q''I_{\mathcal{B}}$;
$T_{\mathcal{C}} : Q_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ tal que $(q', q'')T_{\mathcal{C}} = q'T_{\mathcal{A}} + q''T_{\mathcal{B}}$
e $E_{\mathcal{C}} : Q_{\mathcal{C}} \times A \times Q_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ é definido por:

$$((p', p''), a, (q', q''))E_{\mathcal{C}} = (p', a, q')E_{\mathcal{A}} + (p'', a, q'')E_{\mathcal{B}} .$$

Então, $((p', p''), a, (q', q''))$ é uma aresta útil de $\mathcal{C}$ se, e somente se, (p', a, q') é uma aresta útil de $\mathcal{A}$ e (p'', a, q'') é uma aresta útil de $\mathcal{B}$.

Logo, cada passeio útil $P : (p', p'') \xrightarrow{w} (q', q'')$ em $\mathcal{C}$ pode ser visto como um par (P', P'') de passeios úteis,

$$P' : p' \xrightarrow{w} q' \text{ em } \mathcal{A} \quad \text{e} \quad P'' : p'' \xrightarrow{w} q'' \text{ em } \mathcal{B}$$

tais que $||P|| = ||P'|| + ||P''||$.

Além disso, P é um passeio bem sucedido em $\mathcal{C}$ se, e somente se, P' e P'' são bem sucedidos em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{B}$, respectivamente. Assim,

$$|\mathcal{C}| = |\mathcal{A}| \cap |\mathcal{B}| \quad \text{e} \quad \forall w \in A^*,\ w||\mathcal{C}|| = w||\mathcal{A}|| + w||\mathcal{B}|| \ .$$

Ou seja, $||\mathcal{C}|| = X + Y$. Portanto, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a adição.

■

Proposição 3.3 *$\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não são fechadas sob a adição.*

Demonstração. Consideremos o $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX = |w| \ .$$

É claro que X é simples e também é uma complexidade não determinística.

O $\mathcal{M}$-subconjunto $X + X$ é tal que

$$\forall w \in A^*, \quad w(X + X) = wX + wX = 2|w| \ .$$

Então, pela Proposição 2.8, $X + X$ não é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples. Logo, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não são fechadas sob a adição.

■

Proposição 3.4 *Sejam X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$). Se $A^*X \subseteq \{0, \infty\}$ então $X + Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$).*

Demonstração. Sejam X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ tal que $A^*X \subseteq \{0, \infty\}$. O resultado segue da Proposição 3.2, já que podemos considerar os $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ simples e como todas as arestas úteis de $\mathcal{A}$ têm multiplicidade zero, o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{C}$ resulta simples.

Se X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ e $A^*X \subseteq \{0, \infty\}$, na demonstração da Proposição 3.2, podemos considerar os $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ do tipo nc. Então, pelo que vimos para X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, resulta que $\mathcal{C}$ é um $\mathcal{M}$-A-autômato simples. Além disso, seja $((p', p''), a, (q', q''))E_{\mathcal{C}} = 0$; então, $(p', a, q')E_{\mathcal{A}} = 0$ e $(p'', a, q'')E_{\mathcal{B}} = 0$. Suponhamos que exista em $\mathcal{C}$ uma aresta útil $((p', p''), a, (r', r''))$, com $r' \neq q'$ ou $r'' \neq q''$. Se $r' \neq q'$ então (p', a, r') é uma aresta útil de $\mathcal{A}$, contradizendo que $\mathcal{A}$ é do tipo nc. Se $r'' \neq q''$ então (p'', a, r'') é uma aresta útil de $\mathcal{B}$, contradizendo que $\mathcal{B}$ é do tipo nc. Logo, em $\mathcal{C}$, para cada aresta útil com multiplicidade zero, não existem outras arestas úteis com a mesma origem e mesmo rótulo. Portanto, $||\mathcal{C}||$ é uma complexidade não determinística.

■

Proposição 3.5 *$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ são fechadas sob o reverso.*

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Lembremos que X_ρ denota o reverso de X e é definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX_\rho = (w\rho)X \ .$$

Seja $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ um $\mathcal{M}$-A-autômato tal que $\|\mathcal{A}\| = X$. Definimos um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B} = (Q, T, I)$, com uma aresta útil (q, a, p) para cada aresta útil (p, a, q) de $\mathcal{A}$ e com

$$E_{\mathcal{B}} \colon Q \times A \times Q \to \mathcal{M} \ ,$$

dado por:

$$(q, a, p)E_{\mathcal{B}} = (p, a, q)E_{\mathcal{A}} \ .$$

Então, a um passeio útil P em $\mathcal{A}$, com $|P| = a_1 \ldots a_k$, corresponde um passeio útil P' em $\mathcal{B}$, com $|P'| = a_k \ldots a_1$ e $||P'|| = ||P||$. Logo,

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|\rho \quad e \quad \forall w \in A^*,\ w\|\mathcal{B}\| = (w\rho)\|\mathcal{A}\| = (w\rho)X \ .$$

Ou seja, $\|\mathcal{B}\| = X_\rho$. Portanto, $\mathcal{M}$ Rec A^* é fechada sob o reverso.

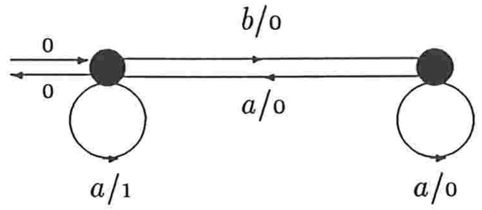
Além disso, é facil ver, pela construção de $\mathcal{B}$, que se $\mathcal{A}$ é simples, $\mathcal{B}$ também é simples. Logo, $\mathcal{M}$ SRec A^* também é fechada sob o reverso.

■

Proposição 3.6 *$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não é fechada sob o reverso.*

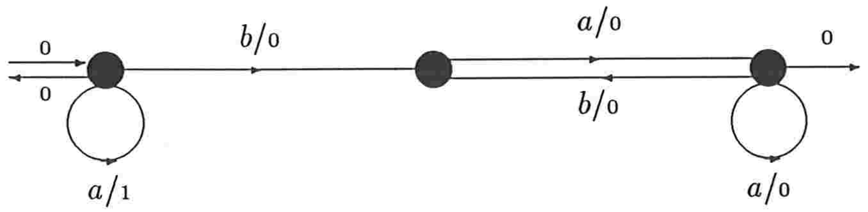
Demonstração. Seja $A = \{\, a, b \,\}$. Consideremos o seguinte $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$:



Então, $|\mathcal{A}| = a^*(ba^*a)^*$ e $\|\mathcal{A}\|$ é uma complexidade não determinística, já que ele também é o comportamento do seguinte $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$.

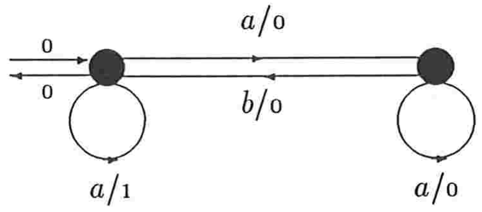
$\mathcal{B}$:



Ou seja, $\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{B}\| \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

O $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{C}$, representado a seguir,

$\mathcal{C}$:



é tal que $|\mathcal{C}| = (aa^*b)^*a^*$ e $\forall w \in A^*,\quad w\|\mathcal{C}\| = (w\rho)\|\mathcal{A}\|$. Ou seja, $\|\mathcal{C}\| = \|\mathcal{A}\|_\rho$. Mas, na demonstração do Teorema 2.14, vimos que o comportamento de $\mathcal{C}$ não é uma complexidade não determinística. Ou seja, $\|\mathcal{C}\| \notin \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

Proposição 3.7 *$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a adição escalar.*

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e seja $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ um $\mathcal{M}$-A-autômato tal que $\|\mathcal{A}\| = X$.

Para cada $m \in \mathcal{M}$, os $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{B} = (Q, m + I, T)$, com $E_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{C} = (Q, I, m + T)$, com $E_{\mathcal{C}} = E_{\mathcal{A}}$ são tais que $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{C}\| = m + X$.

Logo, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a adição escalar.

■

Proposição 3.8 *$\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não são fechadas sob a adição escalar.*

Demonstração. Seja X o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX = |w| \ .$$

É claro que X é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples e também é uma complexidade não determinística.

Seja $m \in \mathcal{M}$ tal que $0 < m < \infty$. Então, o $\mathcal{M}$-subconjunto $m + X$ que é dado por:

$$\forall w \in A^*, \quad w(m + X) = m + wX = m + |w| > |w| \ ,$$

não é simples pela Proposição 2.8.

Logo, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não são fechadas sob a adição escalar.

■

Vejamos, então, para quais valores de m o $\mathcal{M}$-subconjunto $m + X$ resulta sempre simples (complexidade não determinística), quando X é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples (complexidade não determinística).

Proposição 3.9 *Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$). Sejam $m \in \mathcal{M} - \{\infty\}$ e $d = \min\{\, |w| - wX \mid w \in A^* \text{ e } wX \neq \infty \,\}$. O $\mathcal{M}$-subconjunto $m + X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$) se, e somente se, $0 \leq m \leq d$.*

Demonstração. Sejam $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ um $\mathcal{M}$-A-autômato simples tal que $\|\mathcal{A}\| = X$.

Considere $0 \leq m \leq d$. Queremos mostrar que $m + X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$. Para isso, vamos construir um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B} = (Q_\mathcal{B}, I_\mathcal{B}, T_\mathcal{B})$ da seguinte forma:

$Q_\mathcal{B} = Q \times [0, m]$;

$I_\mathcal{B} \colon Q_\mathcal{B} \to \mathcal{M}$, definido por:

$$(q,0)I_\mathcal{B} = qI \quad (\forall q \in Q) \quad \text{e} \quad (q,i)I_\mathcal{B} = \infty \quad (\forall q \in Q \text{ e } \forall i \in [1,m])$$

e $T_\mathcal{B} \colon Q_\mathcal{B} \to \mathcal{M}$, definido por:

$$(q,m)T_\mathcal{B} = qT \quad (\forall q \in Q) \quad \text{e} \quad (q,i)T_\mathcal{B} = \infty \quad (\forall q \in Q \text{ e } \forall i \in [0,m-1]) \ .$$

Para cada aresta útil (p, a, q) de $\mathcal{A}$,

- se $(p, a, q)E_\mathcal{A} = 1$, então para cada $i \in [0, m]$, $((p,i), a, (q,i))$ é uma aresta em $\mathcal{B}$ com multiplicidade igual a 1;

- se $(p, a, q)E_\mathcal{A} = 0$, então $((p,m), a, (q,m))$ é uma aresta em $\mathcal{B}$ com multiplicidade igual a 0 e, para cada $i \in [0, m-1]$, $((p,i), a, (q, i+1))$ é uma aresta em $\mathcal{B}$ com multiplicidade igual a 1. Dizemos que estas arestas são do tipo *ponte-i*.

Logo, cada passeio bem sucedido em $\mathcal{B}$ deve utilizar, para cada i, $0 \leq i \leq m-1$, exatamente uma aresta do tipo ponte-i.

Por outro lado, pela definição de d, cada passeio vitorioso P em $\mathcal{A}$ tem pelo menos d de suas arestas com multiplicidade zero. E, como $m \leq d$, é possível associar a P um passeio vitorioso P' em $\mathcal{B}$ que use m arestas do tipo ponte-i, uma para cada i, $0 \leq i \leq m-1$ e tal que $|P| = |P'|$. Portanto,

$$\forall w \in A^*, \quad w\|\mathcal{B}\| = w\|\mathcal{A}\| + m = wX + m = w(m + X) \ .$$

Além disso, pela construção de $\mathcal{B}$, é claro que $\mathcal{B}$ é simples. Assim, resulta que $m + X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, podemos considerar o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$ do tipo nc. Pela construção de $\mathcal{B}$, vimos que $\mathcal{B}$ é simples e podemos observar que a restrição de $\mathcal{B}$ aos estados em $Q \times \{m\}$ é uma cópia de $\mathcal{A}$ e que cada aresta útil de $\mathcal{B}$, com origem e término em $Q \times \{i\}$, $i \in [0, m-1]$ ou, com origem em $Q \times \{i\}$ e término em $Q \times \{i+1\}$, $i \in [0, m-1]$, tem multiplicidade 1. Logo, $\|\mathcal{B}\|$ é uma complexidade não determinística. Portanto, $m + X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$.

Reciprocamente, suponhamos que $m + X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$). Então, $\forall w \in A^*$, ou $w(m + X) = \infty$ ou $0 \leq w(m + X) = m + wX \leq |w|$. Ou seja, $\forall w \in A^*$, $0 \leq m \leq |w| - wX$. Logo, $0 \leq m \leq d$.

■

Proposição 3.10 *$X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$ se, e somente se, $X + \mathbf{A}^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$.*

Demonstração. Lembremos que $1\mathbf{A}^+ = \infty$ e $\forall w \in A^+$, $w\mathbf{A}^+ = 0$. Então, $1(X + \mathbf{A}^+) = \infty$ e $\forall w \in A^+$, $w(X + \mathbf{A}^+) = wX$. Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$ então $X + \mathbf{A}^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$, pela Proposição 1.12. Podemos também ver que $X + \mathbf{A}^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$, utilizando a Proposição 3.2 e o fato que $\mathbf{A}^+$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

Reciprocamente, suponhamos que $X + \mathbf{A}^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$. Como $X = \min(X + \mathbf{A}^+, 1X + \mathbf{1})$ e $\mathbf{1}$ (definido por $w\mathbf{1} = 0$, se $w = 1$ e ∞, em caso contrário) é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível, segue pelas Proposições 3.1 e 3.7 que $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$.

■

Proposição 3.11 *$X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$) se, e somente se, $X + \mathbf{A}^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$) e $1X \in \{0, \infty\}$.*

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$. Então, $1X \in \{0, \infty\}$.
É claro que $\mathbf{A}^+$ é uma complexidade não determinística e como $\forall w \in A^*$, $w\mathbf{A}^+ \in \{0, \infty\}$, pela Proposição 3.4 resulta que $X + \mathbf{A}^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$.
A demonstração é análoga quando $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$.

Reciprocamente, suponhamos que $X + \mathbf{A}^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$ e que $1X \in \{0, \infty\}$.
Se $1X = \infty$, então $X = X + \mathbf{A}^+$. Logo, $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$.
Se $1X = 0$, então $X = \min(X + \mathbf{A}^+, \mathbf{1})$. Como $\mathbf{1}$ é uma complexidade não determinística, resulta, pela Proposição 3.1, que $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$.
A demonstração é análoga se $X + \mathbf{A}^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$.

■

Proposição 3.12 *$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ são fechadas sob a concatenação.*

Demonstração. Sejam X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Então, $X = \min(X', m + \mathbf{1})$ e $Y = \min(Y', n + \mathbf{1})$, com $X' = X + \mathbf{A}^+$, $Y' = Y + \mathbf{A}^+$, $m = 1X$ e $n = 1Y$. Logo,

$$XY = \min((m + n) + \mathbf{1}, m + Y', n + X', X'Y') \ . \tag{3.1}$$

Assim, pelas Proposições 3.1, 3.7 e 3.10 é suficiente mostrarmos que $X'Y'$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível. É o que faremos a seguir.

Sejam $\mathcal{A} = (Q_1, I_1, T_1)$ e $\mathcal{B} = (Q_2, I_2, T_2)$ $\mathcal{M}$-A-autômatos normalizados tais que $\|\mathcal{A}\| = X'$ e $\|\mathcal{B}\| = Y'$. Sejam i_1 e i_2 (t_1 e t_2) os estados iniciais (finais) de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{B}$, respectivamente.

Definimos o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{C} = (Q, I, T)$, identificando os estados t_1 e i_2 num único estado que chamamos de p. Ou seja, $Q = (Q_1 \cup Q_2) - \{\, t_1, i_2 \,\} \cup \{p\}$ e o único estado inicial (final) de $\mathcal{C}$ é i_1 (t_2). As arestas úteis de $\mathcal{C}$ são as arestas úteis de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{B}$ (considerando $t_1 = i_2 = p$), com as mesmas multiplicidades.

Portanto,

$$|\mathcal{C}| = |\mathcal{A}||\mathcal{B}| \quad \text{e} \quad \forall w \in A^*,\ w\|\mathcal{C}\| = \min_{xy=w}(x\|\mathcal{A}\| + y\|\mathcal{B}\|) \ .$$

Ou seja, $\|\mathcal{C}\| = \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}\| = X'Y'$. Logo, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a concatenação.

Se X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, como $1X, 1Y \in \{\, 0, \infty \,\}$, resulta que em (3.1), $(m + n) + \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ou $\emptyset$, $m + Y' = Y'$ ou $\emptyset$ e $n + X' = X'$ ou $\emptyset$. Mas, $\mathbf{1}$ e $\emptyset$ são $\mathcal{M}$-subconjuntos simples e, pela Proposição 3.11, X', $Y' \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$. Então, pela Proposição 2.7, os $\mathcal{M}$-A-autômatos normalizados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são simples, fazendo com que $\mathcal{C}$, por construção, também seja simples. Logo $X'Y' \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e, pela Proposição 3.1, $XY \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

■

Proposição 3.13 *$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não é fechada sob a concatenação.*

Demonstração. Seja $A = \{\, a, b \,\}$. Consideremos os $\mathcal{M}$-subconjuntos X e Y de A^* definidos por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX = \begin{cases} 0 & \text{se } w \in (aa^*b)^* \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{e} \qquad wY = \begin{cases} |w| & \text{se } w \in a^* \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

É fácil ver que X e Y são complexidades não determinísticas.

O $\mathcal{M}$-subconjunto XY é dado por:

$$\forall w \in A^*, \quad w(XY) = \begin{cases} n & \text{se } w = ua^n, \text{ com } u \in (aa^*b)^* \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Mas, pelo Teorema 2.14, $XY \notin \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

Proposição 3.14 *$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ são fechadas sob as operações $+$ e $*$ de Kleene.*

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Lembremos que

$$X^* = \min_{n \geq 0} X^n \quad \text{e} \quad X^+ = \min_{n \geq 1} X^n .$$

Seja $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado tal que $\|\mathcal{A}\| = X + \mathbf{A}^+$. Então, identificando-se os estados inicial i e final t num único estado i' (que será inicial e final) e mantendo-se as mesmas arestas com as suas respectivas multiplicidades, obtém-se um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B} = (Q', I', I')$ tal que

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|^* \quad \text{e} \quad \|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\|^* = (X + \mathbf{A}^+)^* .$$

Mas, $(X + \mathbf{A}^+)^* = X^*$. De fato, $1X^* = 0 = 1(X + \mathbf{A}^+)^*$ e $\forall w \in A^+$, se $wX^* = wX^i$, para algum $i \geq 1$ tal que $wX^i < wX^j$, para todo $j < i$, então $wX^i = w(X + \mathbf{A}^+)^i$. Assim, $X^* \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Por outro lado, $X^+ = X^* + \mathbf{A}^+$ e, pela Proposição 3.10, $X^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

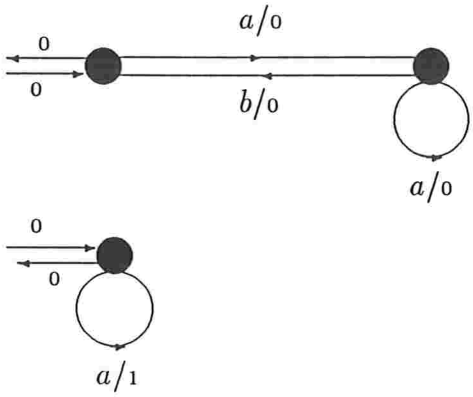
Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, então pela Proposição 2.7 o $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado $\mathcal{A}$ é simples e segue, por construção, que $\mathcal{B}$ também é simples. Logo, $X^* \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$. E, pela Proposição 3.11, segue que $X^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

■

Proposição 3.15 *$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não é fechada sob a operação $*$ de Kleene.*

Demonstração. Consideremos o seguinte $\mathcal{M}$-A-autômato, com $A = \{a, b\}$.

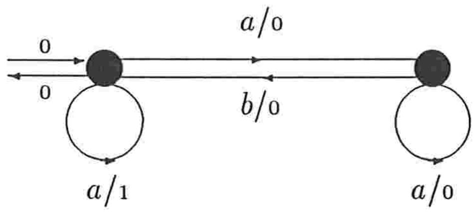
$\mathcal{A}$:



Então, $|\mathcal{A}| = (aa^*b)^* \cup a^*$ e o comportamento $\|\mathcal{A}\|$ de $\mathcal{A}$ é uma complexidade não determinística.

O $\mathcal{M}$-subconjunto $\|\mathcal{A}\|^*$ pode ser descrito pelo comportamento do $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$ a seguir.

$\mathcal{B}$:



Mas, vimos na demonstração do Teorema 2.14 que o comportamento $\|\mathcal{B}\|$ de $\mathcal{B}$ não é uma complexidade não determinística.

Portanto, $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não é fechada sob $*$.

■

Proposição 3.16 $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ *não é fechada sob a operação* $+$ *de Kleene.*

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$. Se $X^+ \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, como $X^* = \min(X^+, \mathbf{1})$, $\mathbf{1} \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo, resulta que $X^* \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$; contradizendo a Proposição 3.15. Logo, $X^+ \notin \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

Proposição 3.17 *Sejam A e B alfabetos disjuntos, $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,B^*$. Então, $X \sqcup\!\sqcup Y$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de $(A \cup B)^*$. Ademais, se X e Y são simples (complexidades não determinísticas) então $X \sqcup\!\sqcup Y$ também é simples (complexidade não determinística).*

Demonstração. Inicialmente, observemos que se $X = \min_{x \in A^*}((xX) + \mathrm{x})$ e $Y = \min_{y \in B^*}((yY) + \mathrm{y})$ são $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^* e B^*, respectivamente, o embaralhamento de X e Y é o $\mathcal{M}$-subconjunto de $(A \cup B)^*$ dado por

$$X \sqcup\!\sqcup Y = \min_{x \in A^*, y \in B^*, w \in x \sqcup\!\sqcup y}((xX + yY) + \mathrm{w}) \ .$$

Sejam $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{A}})$ um $\mathcal{M}$-A-autômato tal que $\|\mathcal{A}\| = X$ e $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, I_{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{B}})$ um $\mathcal{M}$-B-autômato tal que $\|\mathcal{B}\| = Y$.

Vamos definir um $\mathcal{M}$-$(A \cup B)$-autômato $\mathcal{C} = (Q_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, T_{\mathcal{C}})$ da seguinte forma:

$Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}$;
$I_{\mathcal{C}} \colon Q_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ tal que $(q, q')I_{\mathcal{C}} = qI_{\mathcal{A}} + q'I_{\mathcal{B}}$
e $T_{\mathcal{C}} \colon Q_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ tal que $(q, q')T_{\mathcal{C}} = qT_{\mathcal{A}} + q'T_{\mathcal{B}}$.
As arestas de $\mathcal{C}$ são da forma:

- $((p, p'), a, (q, p'))$, para cada aresta (p, a, q) em $\mathcal{A}$ e $\forall p' \in Q_{\mathcal{B}}$, e $((p, p'), a, (q, p'))E_{\mathcal{C}} = (p, a, q)E_{\mathcal{A}}$;

- $((p, p'), b, (p, q'))$, para cada aresta (p', b, q') em $\mathcal{B}$ e $\forall p \in Q_{\mathcal{A}}$, e $((p, p'), b, (p, q'))E_{\mathcal{C}} = (p', b, q')E_{\mathcal{B}}$.

Então, pode-se verificar que

$$|\mathcal{C}| = |\mathcal{A}| \sqcup\!\sqcup |\mathcal{B}| \quad \text{e} \quad \forall w \in (A \cup B)^*,\ w\|\mathcal{C}\| = x\|\mathcal{A}\| + y\|\mathcal{B}\| \ ,$$

onde $x \in A^*$, $y \in B^*$ e $w \in x \sqcup\!\sqcup y$. Ou seja, $\|\mathcal{C}\| = X \sqcup\!\sqcup Y$. Logo, $X \sqcup\!\sqcup Y$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de $(A \cup B)^*$.

Se X e Y são $\mathcal{M}$-subconjuntos simples, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são simples e, por construção, $\mathcal{C}$ também é simples. Logo, $X \sqcup\!\sqcup Y$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples.

Se X e Y são complexidades não determinísticas, podemos considerar $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ do tipo nc. Então, $\mathcal{C}$ é simples. Agora, vamos analisar as arestas de $\mathcal{C}$. Seja $\alpha = ((p, p'), a, (q, p'))$ uma aresta útil de $\mathcal{C}$. Se $\|\alpha\| = 1$, nada temos a verificar. Suponhamos, então que $||\alpha|| = 0$. Se $((p,p'),a,(r,p'))$ é uma aresta útil de $\mathcal{C}$, com $r \neq q$, então (p,a,r) é uma aresta útil de $\mathcal{A}$; o que é um absurdo, já que $\mathcal{A}$ é do tipo nc e $(p,a,q)E_{\mathcal{A}} = 0$. Analogamente, se $((p,p'),b,(p,q'))$ tem multiplicidade zero, não existe em $\mathcal{C}$ uma aresta útil $((p,p'),b,(p,r'))$, com $r' \neq q'$, pois $\mathcal{B}$ é do tipo nc. Logo, $||\mathcal{C}|| = X \sqcup\!\sqcup Y$ é uma complexidade não determinística.

■

Proposição 3.18 *Seja* $f\colon A^* \to B^*$ *um morfismo. Se* $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ *então* $Xf \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,B^*$.

Demonstração. Inicialmente, observemos que

$$\forall w \in B^*, \quad w(Xf) = \min_{x \in wf^{-1}} (xX) \ .$$

Dado um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, I, T)$ tal que $||\mathcal{A}|| = X$, definimos um $\mathcal{M}$-$(B \cup 1)$-autômato $\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}}, I_{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{B}})$, com $Q_{\mathcal{A}} \subseteq Q_{\mathcal{B}}$ e os $\mathcal{M}$-subconjuntos $I_{\mathcal{B}}$ e $T_{\mathcal{B}}$ de $Q_{\mathcal{B}}$ definidos por:

$qI_{\mathcal{B}} = qI$, se $q \in Q_{\mathcal{A}}$ e ∞, em caso contrário;

$qT_{\mathcal{B}} = qT$, se $q \in Q_{\mathcal{A}}$ e ∞, em caso contrário.

As arestas úteis de $\mathcal{B}$ são descritas da seguinte forma.

Seja (p,a,q) uma aresta útil de $\mathcal{A}$ e seja $af = b_1 b_2 \ldots b_n$, com $b_i \in B$ $(1 \leq i \leq n)$ e $n \geq 0$.

Consideremos três casos, dependendo de n.

- Se $n = 0$, então $(p,1,q)$ é uma aresta útil de $\mathcal{B}$ com

$$(p,1,q)E_{\mathcal{B}} = (p,a,q)E_{\mathcal{A}} \ .$$

- Se $n = 1$, então (p,b_1,q) é uma aresta útil de $\mathcal{B}$ com

$$(p,b_1,q)E_{\mathcal{B}} = (p,a,q)E_{\mathcal{A}} \ .$$

- Se $n > 1$,

$$(p,b_1,r_1),(r_1,b_2,r_2),\ldots,(r_{n-2},b_{n-1},r_{n-1}) \text{ e } (r_{n-1},b_n,q)$$

são arestas úteis de $\mathcal{B}$, onde os $n-1$ estados intermediários $r_1,\ldots,r_{n-1}$ são novos estados, distintos entre si, que são acrescentados a $Q_{\mathcal{A}}$. Além disso,

$$(p,b_1,r_1)E_{\mathcal{B}} = (p,a,q)E_{\mathcal{A}} \ ,$$

$$(r_{i-1}, b_i, r_i)E_{\mathcal{B}} = 0, \text{ para } 2 \leq i \leq n-1$$
$$\text{e} \quad (r_{n-1}, b_n, q)E_{\mathcal{B}} = 0 \ .$$

Logo, para cada passeio útil P em $\mathcal{A}$, existe um passeio útil P' em $\mathcal{B}$ tal que $|P'| = |P|f$ e $||P'|| = ||P||$. Assim,

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|f \quad \text{e} \quad \forall w \in B^*, \ w\|\mathcal{B}\| = \min\{ x\|\mathcal{A}\| \mid x \in wf^{-1} \} \ .$$

Agora, vamos construir um $\mathcal{M}$-B-autômato $\mathcal{C} = (Q_{\mathcal{B}}, J, T_{\mathcal{B}})$ tal que $\|\mathcal{C}\| = \|\mathcal{B}\|$, mas que não tenha arestas com rótulo 1.

Definimos o $\mathcal{M}$-subconjunto J de $Q_{\mathcal{B}}$ da seguinte forma:
para cada $q \in Q_{\mathcal{B}}$,

$$qJ = \min_{p \in Q_{\mathcal{B}}} \{ pI + ||P|| \mid pI_{\mathcal{B}} \neq \infty \text{ e } P : p \xrightarrow{1} q \text{ é um passeio útil em } \mathcal{B} \} \ .$$

Ou seja, os estados iniciais de $\mathcal{C}$ são todos os iniciais de $\mathcal{B}$ e mais os estados que podem ser atingidos a partir de algum estado inicial de $\mathcal{B}$ por um passeio útil soletrando a palavra vazia.

As arestas úteis de $\mathcal{C}$ são construídas de modo que

(p, a, q) é uma aresta útil de $\mathcal{C}$ sse existe um passeio útil $P : p \xrightarrow{a} q$ em $\mathcal{B}$

e $(p, a, q)E_{\mathcal{C}} = \min\{ ||P|| \mid P : p \xrightarrow{a} q \text{ em } \mathcal{B} \}$.

Pode-se verificar que $\|\mathcal{C}\| = \|\mathcal{B}\| = Xf$. Portanto, $Xf \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,B^*$.

■

Proposição 3.19 *Existe $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e existe um morfismo $f\colon A^* \to B^*$ tais que $Xf \notin \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,B^*$.*

Demonstração. Sejam $A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$ e $B = \{ b_1, b_2 \}$. Consideremos o $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* definido por:

$$\forall w \in A^*, \qquad wX = \begin{cases} |w| & \text{se } w \in a_2 a_1^+ a_3 \\ \infty & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

É claro que X é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível e simples.

Definimos um morfismo $f\colon A^* \to B^*$ por:

$$a_1 f = 1, \quad a_2 f = b_1 \quad \text{e} \quad a_3 f = b_2 \ .$$

Seja a palavra $w = a_2a_1a_3$ em A^*. Então, $y = wf = b_1b_2$. Como $y(Xf) = \min\{\, uX \mid uf = y \,\}$, resulta que $y(Xf) = \min\{\, uX \mid u \in a_1^*a_2a_1^*a_3a_1^* \,\} = 3$, que ocorre para a palavra $w = a_2a_1a_3$. Logo, $y(Xf) > |y|$ e, pela Proposição 2.8, $Xf \notin \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,B^*$.

■

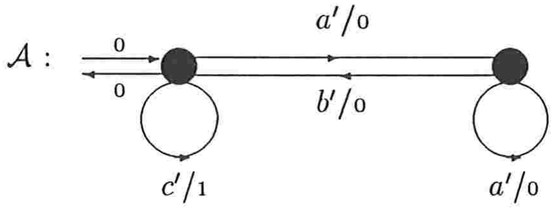
Proposição 3.20 *Seja $f\colon A^* \to B^*$ um morfismo tal que $1f^{-1} = 1$. Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ então $Xf \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,B^*$.*

Demonstração. Segue da demonstração da Proposição 3.18, já que, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ então $\mathcal{A}$ é simples e como f é tal que $1f^{-1} = 1$, resulta que $\mathcal{B}$ é um $\mathcal{M}$-B-autômato simples.

■

Proposição 3.21 *Existe $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ e existe um morfismo $f\colon A^* \to B^*$, satisfazendo $1f^{-1} = 1$, tais que $Xf \notin \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,B^*$.*

Demonstração. Sejam $A = \{\, a', b', c' \,\}$ e $B = \{\, a, b \,\}$. Consideremos o seguinte $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$.



Então, o comportamento $\|\mathcal{A}\|$ de $\mathcal{A}$ é uma complexidade não determinística.

Seja $f\colon A^* \to B^*$ um morfismo definido por:

$$a'f = c'f = a \quad \text{e} \quad b'f = b\ .$$

Então, f satisfaz $1f^{-1} = 1$. Mas, $\|\mathcal{A}\|f$ é o comportamento do $\mathcal{M}$-B-autômato na demonstração do Teorema 2.14; logo, $\|\mathcal{A}\|f$ não é uma complexidade não determinística.

■

Proposição 3.22 *Seja $f\colon A^* \to B^*$ um morfismo fino e injetor. Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ então $Xf \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,B^*$.*

Demonstração. Segue da demonstração da Proposição 3.18, já que, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, então $\mathcal{A}$ pode ser considerado do tipo nc e, como f é fino e injetor, $\mathcal{B}$ é um $\mathcal{M}$-B-autômato e a sua construção restringe-se ao caso $n = 1$; ou seja, para cada aresta útil (p, a, q) de $\mathcal{A}$ existe exatamente uma aresta útil (p, b, q) em $\mathcal{B}$, com $b = af$ e multiplicidade igual a de (p, a, q). Se $(p, b, q)E_{\mathcal{B}} = 0$ e se existe uma aresta útil (p, b, q') em $\mathcal{B}$, com $q' \neq q$, resulta que (p, a, q') é uma aresta útil de $\mathcal{A}$. Mas, isto é impossível, pois $(p, a, q)E_{\mathcal{A}} = 0$ e $\mathcal{A}$ é do tipo nc. Logo, $\|\mathcal{B}\| = Xf$ é uma complexidade não determinística.

■

Proposição 3.23 *Seja $f\colon A^* \to B^*$ um morfismo. Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,B^*$ então $Xf^{-1} \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.*

Demonstração. Inicialmente, observemos que

$$\forall x \in A^*, \quad x(Xf^{-1}) = (xf)X \ .$$

Dado um $\mathcal{M}$-B-autômato $\mathcal{B} = (Q, I, T)$ tal que $\|\mathcal{B}\| = X$, definimos um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A} = (Q, I, T)$, cujas arestas úteis são de um dos seguintes dois tipos.

- Para cada $w \in Af$ tal que $w \neq 1$ e para cada passeio útil $P : p \xrightarrow{w} q$ em $\mathcal{B}$, (p, a, q) é uma aresta útil de $\mathcal{A}$, para cada $a \in A$ tal que $af = w$ e $(p, a, q)E_{\mathcal{A}} = ||P||$.

- Para cada $a \in A$ tal que $af = 1$, (p, a, p) é uma aresta útil de $\mathcal{A}$, para todo $p \in Q$ e $(p, a, p)E_{\mathcal{A}} = 0$.

Logo, para cada passeio útil $P' : p \xrightarrow{x} q$ em $\mathcal{A}$ existe um passeio útil $P : p \xrightarrow{y} q$ em $\mathcal{B}$ tal que $y = xf$ e $||P'|| = ||P||$. Assim,

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|f^{-1} \quad \text{e} \quad \forall x \in A^*,\ x\|\mathcal{A}\| = (xf)\|\mathcal{B}\| \ .$$

Portanto, $Xf^{-1} \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

■

Proposição 3.24 *Existe $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,B^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,B^*$) e existe um morfismo $f\colon A^* \to B^*$ tais que $Xf^{-1} \notin \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$).*

Demonstração. Sejam $A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$ e $B = \{ b_1, b_2 \}$. Consideremos o $\mathcal{M}$-subconjunto X de B^* definido por:

$$\forall w \in B^*, \qquad wX = |w| \ .$$

É claro que X é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples. Pode-se ver também que X é uma complexidade não determinística.

Definimos um morfismo $f\colon A^* \to B^*$ por:

$$a_1 f = b_2, \quad a_2 f = b_1 b_2 \quad \text{e} \quad a_3 f = b_1^2 b_2 \ .$$

Seja a palavra $u = a_1 a_2 a_3 \in A^*$. Então,

$$uf = (a_1 a_2 a_3) f = b_2 b_1 b_2 b_1^2 b_2 \ .$$

Logo, $u(Xf^{-1}) = (uf)X = (b_2 b_1 b_2 b_1^2 b_2)X = 6 > |u| = 3$. Portanto, pela Proposição 2.8, $Xf^{-1} \notin \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$. Logo, $X \notin \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

Proposição 3.25 *Seja $f\colon A^* \to B^*$ um morfismo fino. Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,B^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,B^*$) então $Xf^{-1} \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$).*

Demonstração. Vamos utilizar a demonstração da Proposição 3.23.

Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,B^*$, o $\mathcal{M}$-B-autômato $\mathcal{B}$ é simples. Como f é um morfismo fino, isto é, $Af \subseteq B \cup 1$, as arestas úteis de $\mathcal{A}$ podem ser de um dos dois tipos:

- para cada $b \in Af$ tal que $b \neq 1$ e para cada aresta útil (p, b, q) de $\mathcal{B}$, (p, a, q) é uma aresta útil de $\mathcal{A}$, para cada $a \in A$ tal que $af = b$ e $(p, a, q)E_{\mathcal{A}} = (p, b, q)E_{\mathcal{B}} \in \{ 0, 1 \}$;

- para cada $a \in A$ tal que $af = 1$, (p, a, p) é uma aresta útil de $\mathcal{A}$, para todo $p \in Q$ e $(p, a, p)E_{\mathcal{A}} = 0$.

Então, $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{M}$-A-autômato simples e resulta que $Xf^{-1} \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,B^*$, $\mathcal{B}$ pode ser considerado do tipo nc. Então, $\mathcal{B}$ é simples e resulta que $\mathcal{A}$ é simples (como acabamos de ver).

Seja (p, a, q) uma aresta útil de $\mathcal{A}$, com $(p, a, q)E_{\mathcal{A}} = 0$.

Se $af = 1$, então $q = p$ e, pela construção de $\mathcal{A}$, não existem arestas úteis (p, a, q') em $\mathcal{A}$, com $q' \neq p$, pois elas corresponderiam a arestas úteis $(p, 1, q')$ em $\mathcal{B}$, o que é impossível.

Se $af \neq 1$, (p, af, q) é uma aresta útil de $\mathcal{B}$ e $(p, af, q)E_{\mathcal{B}} = 0$. Se (p, a, q') é uma aresta útil de $\mathcal{A}$, com $q' \neq q$, segue que (p, af, q') é uma aresta útil de $\mathcal{B}$, contradizendo que $\mathcal{B}$ é do tipo nc. Logo, $\|\mathcal{A}\|$ é uma complexidade não determinística. Portanto, $Xf^{-1} \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

Proposição 3.26 *Se X e $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$) então $X \sqcup Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$).*

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Considere uma cópia A' de A e um isomorfismo $\Psi\colon A^* \longrightarrow A'^*$ tal que $\forall a \in A, \quad a\Psi = a'$.

Agora, defina o morfismo $\nu\colon (A \cup A')^* \longrightarrow A^*$ tal que $\forall a \in A, \quad a\nu = a'\nu = a$.

Como $X \sqcup Y = (X {\sqcup\!\sqcup} Y\Psi)\nu$, resulta pelas Proposições 3.17 e 3.18 que $X \sqcup Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Se $X, Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, observando-se que os morfismos Ψ e ν satisfazem $1\Psi^{-1} = 1$ e $1\nu^{-1} = 1$, resulta pelas Proposições 3.17 e 3.20 que $X \sqcup Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

■

Proposição 3.27 *Existem $X, Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ tal que $X \sqcup Y \notin \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.*

Demonstração. Segue da demonstração da Proposição 3.13, observando-se que os $\mathcal{M}$-subconjuntos X e Y lá definidos satisfazem $X \sqcup Y = XY$.

■

Vamos resumir na Tabela 3.1 as propriedades de fechamento estudadas até aqui para as famílias

$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}$ de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis,

$\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}$ de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples e

$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}$ de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos que são complexidades não determinísticas.

Tabela 3.1: Propriedades de fechamento de $\mathcal{M}$ Rec, $\mathcal{M}$ SRec e $\mathcal{M}$ CRec sob as operações básicas

Operação	$\mathcal{M}$ Rec	$\mathcal{M}$ SRec	$\mathcal{M}$ CRec
$\min(X, Y)$	sim	sim	sim
$m + X$, com $0 < m < \infty$	sim	não	não
$m + X$, com $m = \infty$ ou $0 \leq m \leq \min\{\, \lvert w \rvert - wX \mid wX < \infty \,\}$	sim	sim	sim
$X + Y$	sim	não	não
$X\rho$, ρ é a função reverso	sim	sim	não
$XY \qquad X^* \qquad X^+$	sim	sim	não
$X ⧢ Y$, $⧢$ é o embaralhamento	sim	sim	sim
Xf, f é um morfismo	sim	não	não
Xf, f é um morfismo com $1f^{-1} = 1$	sim	sim	não
Xf, f é um morfismo fino e injetor	sim	sim	sim
Xf^{-1}, f é um morfismo	sim	não	não
Xf^{-1}, f é um morfismo fino	sim	sim	sim
$X \sqcup Y$, $\sqcup$ é o embaralhamento interno	sim	sim	não

Capítulo 4

Relacionando $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ com as famílias $\mathcal{H}_p$ $(p \geq 0)$ de Simon

Na Seção 1 estudaremos algumas propriedades de $\mathcal{M}$-subconjuntos (reconhecíveis e) limitados e mostraremos que todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples e limitado será uma complexidade não determinística.

Na Seção 2 introduziremos as famílias $\mathcal{H}_p$ $(p \geq 0)$ de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis obtidas por I. Simon e mostraremos que as relações de inclusão própria entre $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ serão preservadas em cada $\mathcal{H}_p$ $(p > 0)$, ou seja, $(\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p) \subsetneq (\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p) \subsetneq \mathcal{H}_p$.

4.1 $\mathcal{M}$-subconjuntos limitados de A^*

Os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e limitados têm recebido muita atenção nos últimos anos e uma caracterização dessa família foi obtida por K. Hashiguchi [7], em 1982 e melhorada por ele mesmo [8], em 1986, mas utiliza um raciocínio combinatório de grande complexidade. Outras provas mais algébricas, a partir das quais resultaram algoritmos mais eficientes para decidir se um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível é limitado, foram obtidas, independentemente, por H. Leung [12], em 1987 e, por I. Simon [18, 20], em 1989, como conseqüência de resultados mais gerais.

Nesta seção, mostraremos que todo $\mathcal{M}$-subconjunto limitado será a soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos da forma $\lfloor R, m \rfloor$ ou o mínimo de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos da forma $\lceil R, m \rceil$, com $R \subseteq A^*$ e $m \in \mathcal{M}$. Essa caracterização será bastante útil nas provas das propriedades de fechamento de algumas operações como o máximo, o resto e o mônus, que veremos no próximo capítulo. Mostraremos também que todo $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível e limitado X de A^*, satisfazendo para todo w em A^*, ou $wX = \infty$ ou $wX \leq |w|$, será uma complexidade não determinística. Desse resultado, seguirá imediatamente que todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples e limitado será uma complexidade não determinística.

Dizemos que um $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* é *limitado* se A^*X é um subconjunto finito de $\mathcal{M}$.

Inicialmente, estudamos alguns $\mathcal{M}$-subconjuntos limitados X de A^* com $A^*X = \{ m, 0 \}$ ou $A^*X = \{ m, \infty \}$, para algum $m \in \mathcal{M}$.

Seja R um subconjunto de A^*. Para cada $m \in \mathcal{M}$, definimos dois $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^*, $\lfloor R, m \rfloor$ e $\lceil R, m \rceil$, da seguinte forma:

$$\forall w \in A^*, \quad w\lfloor R, m \rfloor = \begin{cases} m & \text{se } w \in R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$w\lceil R, m \rceil = \begin{cases} m & \text{se } w \in R \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

A seguir, apresentamos algumas identidades que podem ser facilmente verificadas:

1. $\lfloor A^*, m \rfloor = \lceil A^*, m \rceil, \quad \forall m \in \mathcal{M}$
2. $\lfloor \emptyset, m \rfloor = \lceil A^*, 0 \rceil, \quad \forall m \in \mathcal{M}$
3. $\lceil \emptyset, m \rceil = \lfloor A^*, \infty \rfloor = \emptyset, \quad \forall m \in \mathcal{M}$
4. $\lfloor R, 0 \rfloor = \lfloor A^*, 0 \rfloor, \quad \forall R \subseteq A^*$
5. $\lceil R, \infty \rceil = \emptyset, \quad \forall R \subseteq A^*$
6. $\lfloor R, \infty \rfloor = \lceil A^* - R, 0 \rceil, \quad \forall R \subseteq A^*$
7. $\lfloor R, m \rfloor = \min(\lceil R, m \rceil, \lceil A^* - R, 0 \rceil), \quad \forall R \subseteq A^*$ e $\forall m \in \mathcal{M}$
8. $\lceil R, m \rceil = \lfloor R, m \rfloor + \lfloor A^* - R, \infty \rfloor, \quad \forall R \subseteq A^*$ e $\forall m \in \mathcal{M}$.

Os $\mathcal{M}$-subconjuntos unitários w, para cada $w \in A^*$, são um caso particular dos $\mathcal{M}$-subconjuntos da forma $\lceil R, m \rceil$; basta considerar $R = \{w\}$ e $m = 0$. Assim, para todo $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^*, a expansão de X pode ser dada por:

$$X = \min_{w \in A^*}(wX + \lceil \{w\}, 0 \rceil) = \min_{w \in A^*} \lceil \{w\}, wX \rceil \ .$$

É interessante observarmos que para os $\mathcal{M}$-subconjuntos existe um outro tipo de expansão que utiliza a adição ao invés do mínimo.

Para cada $w \in A^*$, consideremos o $\mathcal{M}$-subconjunto $\lfloor R, m \rfloor$, onde $R = \{w\}$ e $m = 1$. Assim, todo $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* pode ser descrito por:

$$X = \sum_{w \in A^*} (\sum_{i=1}^{wX} \lfloor \{w\}, 1 \rfloor) = \sum_{w \in A^*} \lfloor \{w\}, wX \rfloor \ .$$

Observemos que se $wX = 0$ então $\sum_{i=1}^{wX} \lfloor \{w\}, 1 \rfloor = \lfloor A^*, 0 \rfloor$.

A proposição a seguir mostra quando $\lfloor R, m \rfloor$ e $\lceil R, m \rceil$ são $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis.

Proposição 4.1 *Sejam $R \subseteq A^*$ e $m \in \mathcal{M}$. Se R é um subconjunto reconhecível de A^*, então $\lfloor R, m \rfloor$ e $\lceil R, m \rceil$ são $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^*.*

Se $\lfloor R, m \rfloor$ ($\lceil R, m \rceil$) é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^* então ou $m = 0$ ($m = \infty$) ou R é um subconjunto reconhecível de A^*.

Demonstração. Suponhamos que R seja um subconjunto reconhecível de A^*.

Para verificarmos que $\lceil R, m \rceil$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível, consideremos o autômato finito reduzido $\mathcal{A}$ que reconhece R. A partir de $\mathcal{A}$, obtemos um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}'$, atribuindo, por exemplo, a multiplicidade 0 às arestas e aos estados finais de $\mathcal{A}$ e m, aos estados iniciais de $\mathcal{A}$. Então, $\|\mathcal{A}'\| = \lceil R, m \rceil$.

Para verificarmos que $\lfloor R, m \rfloor$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível, consideremos a identidade

$$\lfloor R, m \rfloor = \min(\lceil R, m \rceil, \lceil A^* - R, 0 \rceil) \ .$$

Mas, pelo que acabamos de ver, $\lceil R, m \rceil$ e $\lceil A^* - R, 0 \rceil$ são $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis. E, como $\mathcal{M}$ Rec A^* é fechada sob o mínimo, resulta que $\lfloor R, m \rfloor$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

Agora, suponhamos que $\lfloor R, m \rfloor$ seja um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*. Se $m \neq 0$, então $R = m(\lfloor R, m \rfloor)^{-1}$ e, pela Proposição 2.3, R é um subconjunto reconhecível de A^*. Se R não é um subconjunto reconhecível de A^*, então $R \neq m(\lfloor R, m \rfloor)^{-1}$ e isto só ocorre se $m = 0$. A prova é análoga para $\lceil R, m \rceil$.

∎

O próximo lema mostra que todo $\mathcal{M}$-subconjunto (reconhecível e) limitado é a soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos da forma $\lfloor R, m \rfloor$.

Lema 4.2 *Um $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* é (reconhecível e) limitado se, e somente se, existe $n > 0$ e existem n subconjuntos (reconhecíveis) X_i ($1 \leq i \leq n$) de A^* e n elementos m_i ($1 \leq i \leq n$) de $\mathcal{M}$ tais que*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lfloor X_i, m_i \rfloor \ .$$

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto limitado de A^*. Seja $n = |A^*X|$ e denotemos por $m_1, m_2, \ldots, m_n$ os elementos de A^*X.

Para cada $i \in [1, n]$, consideremos o conjunto

$$X_i = \{ w \in A^* \mid wX = m_i \} = m_i X^{-1} \ .$$

Vamos verificar que

$$\forall w \in A^*, \quad wX = w \sum_{i=1}^{n} \lfloor X_i, m_i \rfloor \ .$$

Seja $w \in A^*$. Então, existe um único $j \in [1, n]$ tal que $wX = m_j$. Logo, $w \in X_j$. E, nesse caso, $w\lfloor X_j, m_j \rfloor = m_j$ e $\forall i \in [1, n]$, $i \neq j$, $w\lfloor X_i, m_i \rfloor = 0$. Portanto,

$$w \sum_{i=1}^{n} \lfloor X_i, m_i \rfloor = \sum_{i=1}^{n} w\lfloor X_i, m_i \rfloor = w\lfloor X_j, m_j \rfloor = m_j = wX \ .$$

Assim, $X = \sum_{i=1}^{n} \lfloor X_i, m_i \rfloor$.

Além disso, quando $X \in \mathcal{M}\operatorname{Rec} A^*$, pela Proposição 2.3, cada X_i ($1 \leq i \leq n$) é um subconjunto reconhecível de A^*.

A recíproca é imediata.

∎

O próximo lema estabelece que todo $\mathcal{M}$-subconjunto (reconhecível e) limitado é o mínimo de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos da forma $\lceil R, m \rceil$.

Lema 4.3 *Um $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* é (reconhecível e) limitado se, e somente se, existe $n > 0$ e existem n subconjuntos (reconhecíveis) X_i $(1 \leq i \leq n)$ de A^* e n elementos m_i $(1 \leq i \leq n)$ de $\mathcal{M}$ tais que*

$$X = \min_{1 \leq i \leq n} \lceil X_i, m_i \rceil \ .$$

Demonstração. É análoga à do Lema 4.2.

∎

A proposição a seguir mostra que alguns $\mathcal{M}$-subconjuntos podem ser definidos a partir de outros $\mathcal{M}$-subconjuntos, utilizando o $\mathcal{M}$-subconjunto da forma $\lceil R, 0 \rceil$ ($\lfloor R, \infty \rfloor$) e a adição (mínimo).

Proposição 4.4 *Sejam R um subconjunto de A^* e X um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^*. Então, os $\mathcal{M}$-subconjuntos Y_1 e Y_2, definidos por:*

$$\forall w \in A^*, \quad wY_1 = \begin{cases} wX & \text{se } w \in R \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{e} \qquad wY_2 = \begin{cases} wX & \text{se } w \in R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

são tais que

$$Y_1 = X + \lceil R, 0 \rceil \quad \text{ e } \quad Y_2 = \min(X, \lfloor R, \infty \rfloor) \ .$$

Ademais, se R é um subconjunto reconhecível de A^* e $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, então Y_1, $Y_2 \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Além disso, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$) então Y_1, $Y_2 \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$).

Demonstração. Pode-se verificar facilmente que $Y_1 = X + \lceil R, 0 \rceil$ e que $Y_2 = \min(X, \lfloor R, \infty \rfloor)$.

Se R é um subconjunto reconhecível de A^*, pela Proposição 4.1, os $\mathcal{M}$-subconjuntos $\lceil R, 0 \rceil$ e $\lfloor R, \infty \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Assim, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, como

$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a adição e o mínimo, resulta que $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

$\lceil R, 0 \rceil$ e $\lfloor R, \infty \rfloor = \lceil A^* - R, 0 \rceil$ são complexidades não determinísticas, se R é um subconjunto reconhecível de A^*. Logo, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, segue pela Proposição 3.4 que $Y_1 = X + \lceil R, 0 \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e, como $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo, segue que $Y_2 = \min(X, \lfloor R, \infty \rfloor) \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

A prova é análoga se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

A seguir, estudamos uma condição que os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e limitados devem satisfazer para que sejam complexidades não determinísticas.

Proposição 4.5 *Sejam R um subconjunto reconhecível de A^* e $m \in \mathcal{M}$. Se $m \leq \min\{\,|w| \mid w \in R\,\}$, então $\lfloor R, m \rfloor$ e $\lceil R, m \rceil$ são complexidades não determinísticas.*

Demonstração. Sejam R um subconjunto de A^* e $m \in \mathcal{M}$. Então,

$$\lceil R, m \rceil = m + \lceil R, 0 \rceil \quad \text{e} \quad \lfloor R, m \rfloor = \min(\lceil R, m \rceil, \lceil A^* - R, 0 \rceil) \ .$$

Suponhamos que R seja reconhecível. Então, pela Proposição 4.1, $\lceil R, 0 \rceil$ e $\lceil A^* - R, 0 \rceil$ são $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e, é fácil ver que ambos são complexidades não determinísticas. Se $m \leq \min\{\,|w| \mid w \in R\,\}$, segue pela Proposição 3.9 que $m + \lceil R, 0 \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$. Logo, $\lceil R, m \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$. Mas, como $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo, resulta que $\lfloor R, m \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

Lema 4.6 *Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível e limitado de A^* tal que $\forall w \in A^*$, ou $wX = \infty$ ou $wX \leq |w|$. Então, $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.*

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível e limitado de A^* tal que $\forall w \in A^*$, ou $wX = \infty$ ou $wX \leq |w|$.

Consideremos $n = |A^*X|$ e denotemos por $m_1, m_2, \ldots, m_n$ os elementos de A^*X. Então, pelo Lema 4.3 (e sua demonstração), existem n subconjuntos reconhecíveis m_iX^{-1} $(1 \leq i \leq n)$ de A^* tais que

$$X = \min_{1 \leq i \leq n} \lceil m_iX^{-1}, m_i \rceil \ .$$

Seja $i \in [1,n]$. Se $m_i = \infty$, $\lceil \infty X^{-1}, \infty \rceil = \emptyset$ é uma complexidade não determinística.

Suponhamos, então, que $m_i \neq \infty$. Nesse caso, $\forall w \in m_i X^{-1}$, $m_i = wX \leq |w|$. Assim, pela Proposição 4.5, os $\mathcal{M}$-subconjuntos $\lceil m_i X^{-1}, m_i \rceil$ $(1 \leq i \leq n)$ são complexidades não determinísticas. Como $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo, resulta que $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

Vimos na Proposição 2.8 que todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples X de A^* satisfaz: $\forall w \in A^*$, $wX \leq |w|$, se $wX < \infty$. Assim, pelo Lema 4.6, todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples e limitado é uma complexidade não determinística. Logo, temos provado o corolário a seguir, onde $\mathcal{H}_0$ é a notação utilizada por I. Simon para a família de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e limitados, como veremos na próxima seção.

Corolário 4.7 $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_0 = \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_0$.

■

4.2 A hierarquia de Simon para $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e sua relação com $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$

Nesta seção, apresentaremos as famílias $\mathcal{H}_p$ $(p \geq 0)$ de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^* obtidas por Imre Simon [17] e que constituem uma hierarquia para $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Seus elementos são indexados por funções polinomiais que relacionam os comprimentos com as multiplicidades das palavras reconhecidas por um $\mathcal{M}$-A-autômato. Simon obteve essa hierarquia introduzindo uma família de $\mathcal{M}$-A-autômatos, que são do tipo nc. Nós exibiremos uma família de $\mathcal{M}$-A-autômatos simples, cujos comportamentos não serão complexidades não determinísticas e mostraremos que as relações de inclusão própria, $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \subsetneq \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, serão preservadas em cada $\mathcal{H}_p$, para $p > 0$.

Inicialmente, descrevemos resumidamente como Simon obteve as famílias $\mathcal{H}_p$ $(p \geq 0)$. Ele estudou o comportamento assintótico dos coeficientes no comportamento de um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$, relacionando as multiplicidades com os comprimentos das palavras reconhecidas por $\mathcal{A}$. Para isso, ele definiu uma função sh da seguinte forma.

Para um $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* e para $m \geq 0$,

$$\mathrm{sh}(X, m) = \min\{\, |w| \mid w \in A^*, m \leq wX < \infty \,\} \ .$$

Ou seja, $\mathrm{sh}(X, m)$ é o comprimento mínimo que uma palavra precisa ter para que a sua multiplicidade seja pelo menos m. Note que, se X é limitado, $\mathrm{sh}(X, m)$ não está definida para valores de m suficientemente grandes. E, se X não é limitado, então $\mathrm{sh}(X, m)$ está sempre definida e não é limitada.

Simon construiu, para cada $p \geq 1$, um $\mathcal{M}$-A_p-autômato $\mathcal{A}_p$ do tipo nc, cujo comportamento $\|\mathcal{A}_p\|$ satisfaz

$$\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}_p\|, m) = \sum_{k=1}^{p} \binom{m}{k}, \qquad \text{para cada } m \geq 0 \ .$$

Ou seja, $\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}_p\|, m)$ pode ser expressa como um polinômio de grau p em m. Então,

$$\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}_p\|, m) \in \Theta(m^p) \ .$$

A seguir, descrevemos, para $p \geq 1$, o $\mathcal{M}$-A_p-autômato $\mathcal{A}_p = (Q_p, I_p, T_p)$, com $A_p = \{\, 1, 2, \ldots, p \,\}$.

O conjunto de estados Q_p tem $2p$ elementos e é definido por:

$$Q_1 = \{\, u_1, v_1 \,\} \qquad \text{e} \qquad Q_p = Q_{p-1} \cup \{\, u_p, v_p \,\} \quad (p > 1) \ .$$

O conjunto de estados iniciais é $\{\, u_p \,\}$; ou seja,

$$u_p I_p = 0 \qquad \text{e} \qquad q I_p = \infty, \quad \forall q \in Q_p - \{\, u_p \,\}$$

e o conjunto de estados finais é $\{\, u_p, v_p \,\}$; ou seja,

$$u_p T_p = v_p T_p = 0 \qquad \text{e} \qquad q T_p = \infty, \quad \forall q \in Q_p - \{\, u_p, v_p \,\} \ .$$

O conjunto de arestas úteis E_p é dado por:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\, (u_1, 1, u_1), (u_1, 1, v_1) \,\}, \\ E_p &= E_{p-1} \cup \{\, (q, a, q) \mid q \in \{\, u_p, v_p \,\}, a \in A_p \,\} \\ &\quad \cup \{\, (u_p, p, u_{p-1}), (u_{p-1}, p, v_p), (v_{p-1}, p, v_p) \,\} \quad (p > 1) \ . \end{aligned}$$

O $\mathcal{M}$-A_p-autômato $\mathcal{A}_p$ tem exatamente $2p$ arestas com multiplicidade um e este conjunto N_p é dado por:

$$\begin{aligned} N_1 &= E_1, \\ N_p &= N_{p-1} \cup \{\, (u_p, p, u_p), (u_p, p, u_{p-1}) \,\} \quad (p > 1) \ ; \end{aligned}$$

as demais arestas úteis de $\mathcal{A}_p$ têm multiplicidade zero.

A Figura 4.1 mostra a seqüência de $\mathcal{M}$-A_p-autômatos $\mathcal{A}_p$ $(p \geq 1)$.

Inspirado no fato de que os $\mathcal{M}$-A_p-autômatos $\mathcal{A}_p$ satisfazem

$$\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}_p\|, m) \in \Theta(m^p), \qquad \text{para } p \geq 1 \text{ e } m \geq 0 \quad ,$$

Simon definiu, para cada $p \geq 0$, a família $\mathcal{H}_p$ de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^* para os quais sh é limitada por um polinômio de grau p em m:

$$\mathcal{H}_p = \{\, X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^* \mid \mathrm{sh}(X, m) \in \mathrm{O}(m^p) \,\} \ .$$

Em particular, $\mathcal{H}_0$ é a família de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e limitados de A^*.

Assim, ele mostrou que, para um alfabeto com pelo menos duas letras, a seqüência $\mathcal{H}_p$ forma uma hierarquia que coincide com a família $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$ de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^*. Ou seja,

$$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^* = \cup_{p \geq 0} \mathcal{H}_p \ .$$

Entretanto, para um alfabeto com apenas uma letra, a hierarquia deixa de existir e, nesse caso, ele mostrou que

$$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^* = \mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 \ .$$

Podemos resumir os seus resultados:

Proposição 4.8 (I. Simon) *Para cada $p \geq 1$, o comportamento do $\mathcal{M}$-A_p-autômato $\mathcal{A}_p$ satisfaz:*

$$sh(\|\mathcal{A}_p\|, m) = \sum_{k=1}^{p} \binom{m}{k} \ .$$

Corolário 4.9 (I. Simon) *Para cada $p \geq 1$, o comportamento do $\mathcal{M}$-A_p-autômato $\mathcal{A}_p$ satisfaz:*

$$sh(\|\mathcal{A}_p\|, m) \in \Theta(m^p) \ .$$

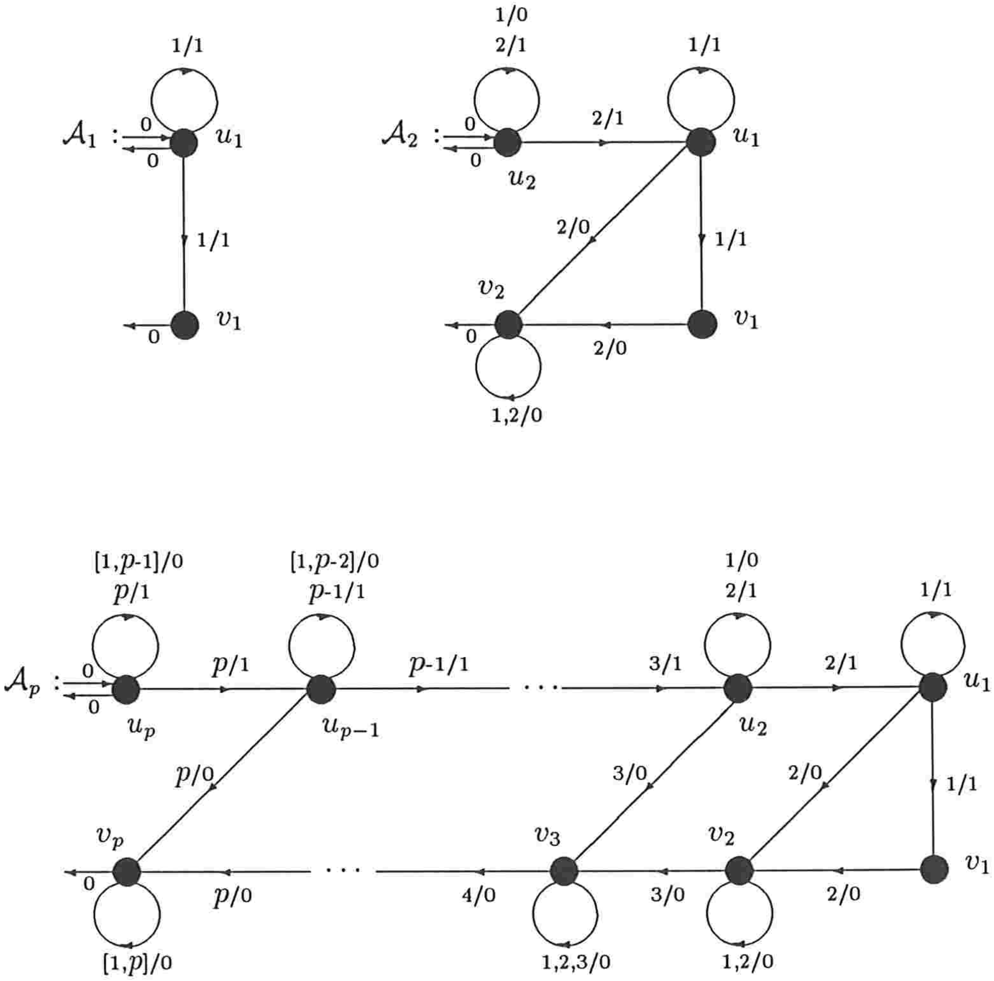


Figura 4.1: Os $\mathcal{M}$-A_p-autômatos $\mathcal{A}_p$

Teorema 4.10 (I. Simon) *Para um alfabeto A com pelo menos duas letras,*

$$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^* = \bigcup_{p\geq 0} \mathcal{H}_p \ ,$$

e, para todo $p \geq 1$, existe uma função de complexidade não determinística em $\mathcal{H}_p - \mathcal{H}_{p-1}$. Para um alfabeto A de uma só letra,

$$\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^* = \mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 \ .$$

A seguir, mostramos que existe, para cada $p \geq 1$, um $\mathcal{M}$-A'_p-autômato simples $\mathcal{A}'_p$ tal que $\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}'_p\|, m)$ pode ser expressa por um polinômio de grau p em m, mas $\|\mathcal{A}'_p\|$ não é uma complexidade não determinística.

Vamos, então, definir para cada $p \geq 1$, o $\mathcal{M}$-A'_p-autômato $\mathcal{A}'_p$ que é construído a partir do $\mathcal{M}$-A_p-autômato $\mathcal{A}_p$, com $A'_p = A_p \cup \{\beta\} = \{1, 2, \ldots, p, \beta\}$.

Considere $\mathcal{A}'_p = (Q'_p, I'_p, T'_p)$, com

$Q'_p = Q_p \cup \{u, v\}$;

o conjunto de estados iniciais é $\{u\}$, ou seja,

$$uI'_p = 0 \qquad \text{e} \qquad qI'_p = \infty, \quad \forall q \in Q'_p - \{u\}$$

e o conjunto de estados finais é $\{u_p, v_p\}$, ou seja,

$$u_pT'_p = v_pT'_p = 0 \qquad \text{e} \qquad qT'_p = \infty, \quad \forall q \in Q'_p - \{u_p, v_p\} \ .$$

O conjunto de arestas úteis E'_p é dado por:

$$\begin{array}{rcll} E'_p & = & E_p & \cup \ \{(u, a, u_p) \mid a \in A_p\} \\ & & & \cup \ \{(u, a, v), (v, a, v) \mid a \in A_p\} \\ & & & \cup \ \{(v, \beta, u)\} \ , \end{array}$$

de modo que as arestas (u_i, i, u_i), para $1 \leq i \leq p$, (u_i, i, u_{i-1}), para $2 \leq i \leq p$, e $(u_1, 1, v_1)$ têm multiplicidade um e as demais arestas úteis de $\mathcal{A}'_p$ têm multiplicidade zero.

A Figura 4.2 mostra a seqüência de $\mathcal{M}$-A'_p-autômatos $\mathcal{A}'_p$ $(p \geq 1)$.

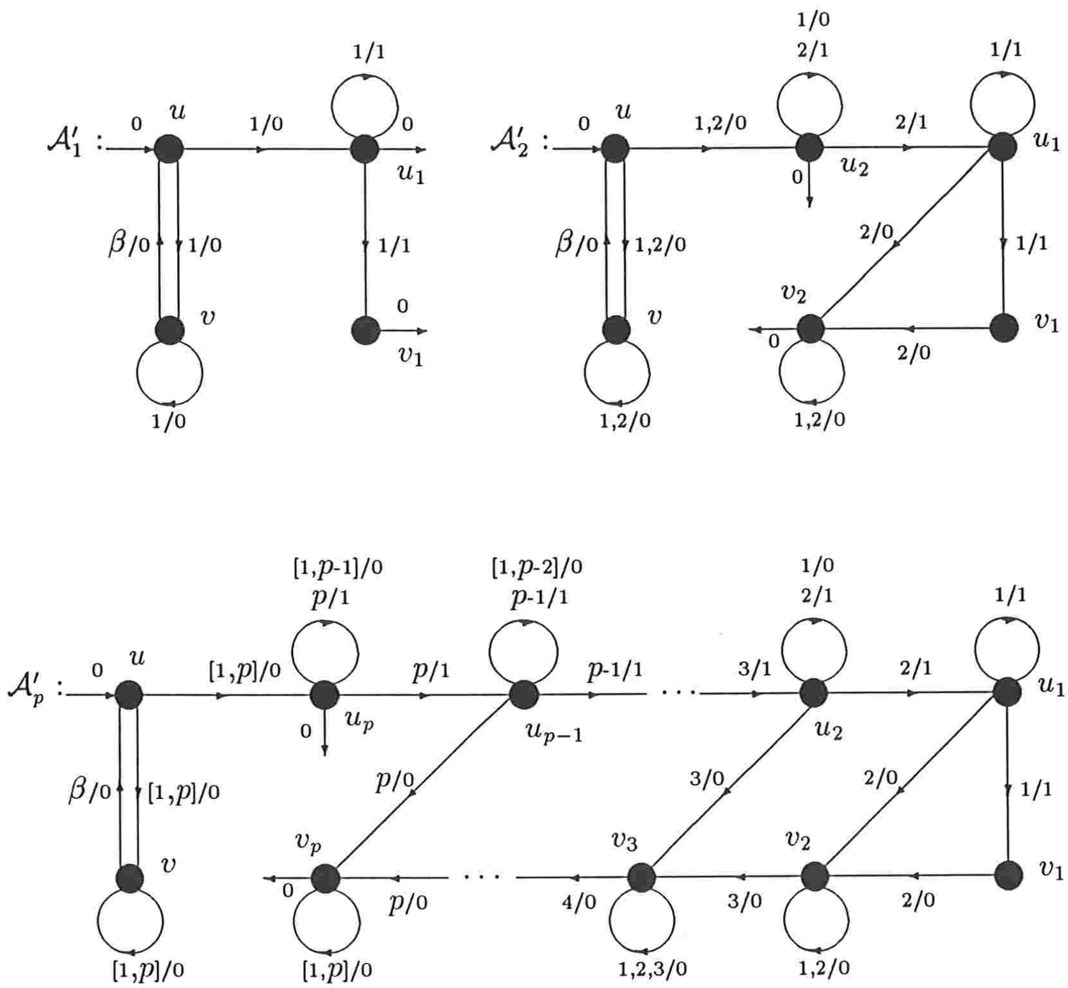


Figura 4.2: Os $\mathcal{M}$-A'_p-autômatos $\mathcal{A}'_p$

Proposição 4.11 *Para cada $p \geq 1$, o comportamento do $\mathcal{M}$-A'_p-autômato $\mathcal{A}'_p$ satisfaz:*

$$\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}'_p\|, m) = \sum_{k=1}^{p} \binom{m}{k} + 1 \ .$$

Demonstração. Notemos, inicialmente, que $|\mathcal{A}'_p| = (A_p^+\beta)^* A_p^+$, para todo $p \geq 1$.

Seja $w \in A'^*_p$ tal que $w\|\mathcal{A}'_p\| \geq m$. Então, w pode ser fatorado em

$$w = saw', \text{ com } s \in (A_p^+\beta)^*, a \in A_p \text{ e } w' \in A_p^* \ .$$

Um passeio vitorioso P em $\mathcal{A}'_p$, soletrando w, pode ser fatorado em:

$$P : u \xrightarrow{s} u \xrightarrow{a} u_p \xrightarrow{w'} q \ ,$$

com $q \in \{ u_p, v_p \}$ e $\|P\| = \|(u_p, w', q)\| = w'\|\mathcal{A}_p\|$, já que os fatores (u, s, u) e (u, a, u_p) têm multiplicidade zero e o fator (u_p, w', q) é um passeio vitorioso em A_p.

Assim, o comprimento de uma palavra mais curta x, com $x\|\mathcal{A}'_p\| \geq m$, é descrito por

$$\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}'_p\|, m) = \mathrm{sh}(\|\mathcal{A}_p\|, m) + 1 \ ,$$

já que x pode ser obtida de w considerando $s = 1$. E, pela Proposição 4.8 resulta que

$$\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}'_p\|, m) = \sum_{k=1}^{p} \binom{m}{k} + 1 \ .$$

■

Corolário 4.12 *Para cada $p \geq 1$, o comportamento do $\mathcal{M}$-A'_p-autômato $\mathcal{A}'_p$ satisfaz*

$$\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}'_p\|, m) \in \Theta(m^p) \ .$$

Demonstração. Pela Proposição 4.11 resulta que $\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}'_p\|, m)$ é um polinômio de grau p em m. Assim, $\mathrm{sh}(\|\mathcal{A}'_p\|, m) \in \Theta(m^p)$.

■

Na seqüência, vamos mostrar que o comportamento do $\mathcal{M}$-A'_p-autômato $\mathcal{A}'_p$ ($p \geq 1$) não é uma complexidade não determinística. Para isso vamos construir conjuntos de palavras que são descritos através de expressões racionais que não utilizam a operação de união e cujas definição e notação seguem as de Simon[17].

Uma *expressão racional multiplicativa* sobre um alfabeto A é definido indutivamente por:

(1) a palavra vazia é uma expressão racional multiplicativa;

(2) todo elemento de A é uma expressão racional multiplicativa;

(3) se e_1 e e_2 são expressões racionais multiplicativas, então (e_1e_2) é uma expressão racional multiplicativa;

(4) se e_1 é uma expressão racional multiplicativa, então $(e_1)^*$ é uma expressão racional multiplicativa.

Dispensaremos os parêntesis não necessários.

Podemos associar uma seqüência de palavras de A^* a cada expressão racional multiplicativa, da seguinte forma.

Seja e uma expressão racional multiplicativa. Consideremos e como uma função

$$e: \mathbb{N} \to A^*,$$

que é definida indutivamente por:

(1) se $e = 1$ então $ne = 1$, para todo $n \geq 0$;

(2) se $e = a \in A$ então $ne = a$, para todo $n \geq 0$;

(3) se $e = e_1e_2$ então $ne = (ne_1)(ne_2)$, para todo $n \geq 0$;

(4) se $e = e_1^*$ então $ne = (ne_1)^n$, para todo $n \geq 0$.

Ou seja, ne é uma palavra no subconjunto de A^* denotado por e. Mais precisamente, ne é a palavra obtida de e substituindo-se todas as ocorrências de $*$ por n.

A proposição a seguir define uma seqüência de expressões racionais multiplicativas e_p e determina, para algumas palavras em e_p, as multiplicidades com que elas são reconhecidas por $\mathcal{A}_p$.

Proposição 4.13 *Para cada $p \geq 1$, a expressão racional multiplicativa e_p sobre A_p, definida indutivamente por:*

$$\begin{cases} e_1 & = & 1 \\ e_p & = & e_{p-1}^* p \quad (\forall p \geq 2) \end{cases}$$

satisfaz

$$\forall k \geq 1 \quad e \quad \forall m \geq 1, \quad \begin{cases} (ke_1)^m \|\mathcal{A}_1\| & = & m \\ (ke_p)^m \|\mathcal{A}_p\| & = & \min\{\, m, k+1 \,\} \quad (\forall p \geq 2) \ . \end{cases}$$

Demonstração. Usamos indução em p e, para cada p, utilizamos indução em m.

Para $p = 1$, resulta que

$$\forall k \geq 1 \quad \text{e} \quad \forall m \geq 1, \quad (ke_1)^m \|\mathcal{A}_1\| = (k1)^m \|\mathcal{A}_1\| = 1^m \|\mathcal{A}_1\| = m \ .$$

Consideremos $p \geq 2$ e suponhamos que a proposição seja válida para $p - 1$. Vamos mostrar, por indução em m, que

$$(ke_p)^m \|\mathcal{A}_p\| = \min\{\, m, k+1 \,\} \ .$$

Seja $m = 1$. Então,

$$(ke_p)\|\mathcal{A}_p\| = ((ke_{p-1})^k p)\|\mathcal{A}_p\| = 1 = \min\{\, m, k+1 \,\} \ .$$

Se $m > 1$, então

$$(ke_p)^m \|\mathcal{A}_p\| = ((ke_p)(ke_p)^{m-1})\|\mathcal{A}_p\| = (((ke_{p-1})^k p)((ke_{p-1})^k p)^{m-1})\|\mathcal{A}_p\| \ .$$

Seja P um passeio vitorioso que soletre $(ke_p)^m$ em $\mathcal{A}_p$. Então, P pode ser fatorado em

$$P : u_p \xrightarrow{(ke_{p-1})^k p} q_1 \xrightarrow{((ke_{p-1})^k p)^{m-1}} q_2 \ .$$

Sejam $P_1 = (u_p, ke_p, q_1)$ e $P_2 = (q_1, (ke_p)^{m-1}, q_2)$ fatores de P. Há duas possibilidades para q_1.

- Se $q_1 = u_p$ então $\|P_1\| = 1$ e, pela hipótese de indução em m, $\|P_2\| = (ke_p)^{m-1}\|\mathcal{A}_p\| = \min\{\, m-1, k+1 \,\}$. Nesse caso,

$$\|P\| = 1 + \min\{\, m-1, k+1 \,\} = \min\{\, m, k+2 \,\} \ .$$

- Se $q_1 = u_{p-1}$ então $||P_1|| = 1$ e P_2 pode ser fatorado em
$$P_2 : u_{p-1} \xrightarrow{(ke_{p-1})^k} q_3 \xrightarrow{p((ke_{p-1})^k p)^{m-2}} q_2 \ ,$$
onde $q_3 \in \{ u_{p-1}, v_{p-1} \}$; então, os fatores $P_3 = (u_{p-1}, (ke_{p-1})^k, q_3)$ e $P_4 = (q_3, p((ke_{p-1})^k p)^{m-2}, q_2)$ são tais que $||P_3|| = (ke_{p-1})^k ||\mathcal{A}_{p-1}|| = k$, pela hipótese de indução em p e $||P_4|| = 0$. Nesse caso, $||P|| = 1 + k$.

Logo,
$$(ke_p)^m ||\mathcal{A}_p|| = ||P|| = \min\{ m, k+1 \} \ .$$

■

Teorema 4.14 *Para cada $p \geq 1$, o comportamento do $\mathcal{M}$-A'_p-autômato simples $\mathcal{A}'_p$ não é uma complexidade não determinística.*

Demonstração. Para cada $p \geq 1$, consideremos a expressão racional multiplicativa e_p, definida na Proposição 4.13. Então, para cada $k \geq 1$, a palavra $z_k = ke_p$ em A_p^+ é tal que
$$((1z_k^k\beta)^k 1z_k^k)||\mathcal{A}'_p|| = ((1(ke_p)^k\beta)^k 1(ke_p)^k)||\mathcal{A}'_p|| = (ke_p)^k ||\mathcal{A}_p|| = k \ ;$$
$$\forall m > k, \quad ((1z_k^k\beta)^k 1z_k^m)||\mathcal{A}'_p|| = ((1(ke_p)^k\beta)^k 1(ke_p)^m)||\mathcal{A}'_p|| =$$
$$= \begin{cases} (ke_p)^m ||\mathcal{A}_p|| = \min\{ m, k+1 \} = k+1 & \text{se } p > 1 \\ (k1)^m ||\mathcal{A}_p|| = m \quad \text{se } p = 1 \end{cases}$$
e $\forall l \geq 0, ((1z_k^k\beta)^l 1z_k^k)||\mathcal{A}'_p|| = ((1(ke_p)^k\beta)^l 1(ke_p)^k)||\mathcal{A}'_p|| = (ke_p)^k ||\mathcal{A}_p|| = k$.
Logo, resulta que $\forall k \geq 1$, $\exists\, z_k \in A_p^+$, de modo que $\forall l \geq 0$ e $\forall m > k$,
$$((1z_k^k\beta)^l 1z_k^k)||\mathcal{A}'_p|| = ((1z_k^k\beta)^k 1z_k^k)||\mathcal{A}'_p|| < ((1z_k^k\beta)^k 1z_k^m)||\mathcal{A}'_p|| < \infty \ .$$

Ou seja, o $\mathcal{M}$-A'_p-autômato $\mathcal{A}'_p$ é de multiplicidade diferenciável. Portanto, pelo Lema 2.11, o comportamento $||\mathcal{A}'_p||$ de $\mathcal{A}'_p$ não é uma complexidade não determinística.

■

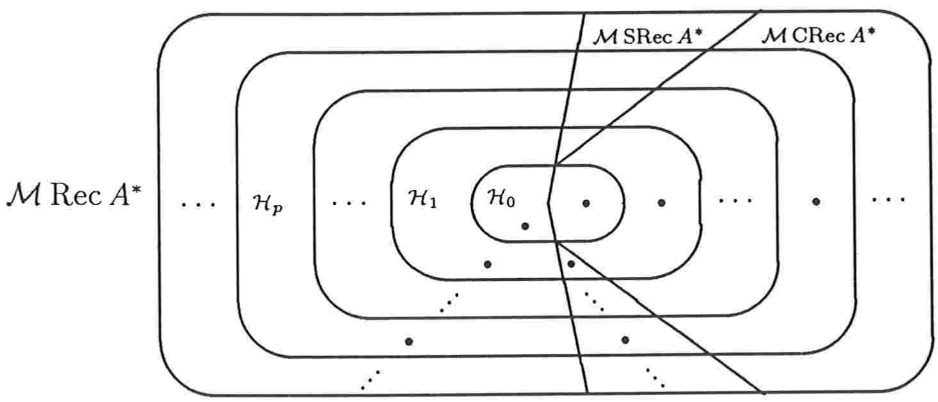
Assim, podemos concluir que as famílias $\mathcal{H}_p$ $(p \geq 1)$, restritas aos $\mathcal{M}$-subconjuntos simples que não sejam complexidades não determinísticas, também formam uma hierarquia. É fácil verificar também que o mesmo ocorre para as famílias $\mathcal{H}_p$ $(p \geq 0)$, restritas aos $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis que não sejam simples.

Corolário 4.15 *$\forall p \geq 1$, $(\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p) \subsetneq (\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \cap \mathcal{H}_p)$, para um alfabeto A, com pelo menos duas letras.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.12 e pelo Teorema 4.14 segue que o comportamento do $\mathcal{M}$-A'_p-autômato $\mathcal{A}'_p$ pertence a $\mathcal{H}_p$, é simples, mas não é uma complexidade não determinística.

∎

Vamos representar num diagrama as relações existentes entre as famílias $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ e $\mathcal{H}_p$ $(p \geq 0)$, supondo-se que o alfabeto A tenha pelo menos duas letras. Essas relações são os conteúdos dos Corolários 2.9, 2.15, 4.7 e 4.15 e do Teorema 4.10 (Simon).



Capítulo 5

Propriedades de fechamento de $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ sob outras operações

Neste capítulo, continuaremos a estudar as propriedades de fechamento de $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, que foi iniciado no Capítulo 3. Estudaremos as propriedades de fechamento sob as operações de adição, máximo, resto, mônus e divisão. Com relação à adição, vimos que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada, mas que $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não o são. Encontraremos uma condição para que a soma de dois $\mathcal{M}$-subconjuntos simples (complexidades não determinísticas) seja simples (complexidade não determinística). Veremos que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ será fechada sob a divisão, mas não será fechada sob o máximo, o resto e o mônus. Mostraremos que a família de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e limitados será fechada sob o resto e que o máximo e o mônus de dois $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis será reconhecível se um dos $\mathcal{M}$-subconjuntos for limitado. Essas mesmas restrições valerão para as operações máximo, resto e mônus em $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e em $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

5.1 A adição em $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e em $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$

Lema 5.1 *Sejam X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$). Se*

$$\max\{\, wY \mid w \in A^* \text{ e } wY \neq \infty \,\} \leq \min\{\, |w| - wX \mid w \in A^* \text{ e } wX \neq \infty \,\}$$

então, $X + Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$).

Demonstração. Sejam X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$. Consideremos

$$k = \max\{\, wY \mid w \in A^* \text{ e } wY \neq \infty \,\} \ ,$$

$$l = \min\{\, |w| - wX \mid w \in A^* \text{ e } wX \neq \infty \,\}$$

e suponhamos que $k \leq l$. Então, Y é limitado.

Seja $n = |A^*Y|$ e denotemos os elementos de A^*Y por $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Então, pelo Lema 4.3 (e sua demonstração), existem n subconjuntos reconhecíveis m_iY^{-1} $(1 \leq i \leq n)$ tais que

$$Y = \min_{1 \leq i \leq n} \lceil m_iY^{-1}, m_i \rceil \ .$$

Para cada $i \in [1, n]$, seja $Y_i = \lceil m_iY^{-1}, m_i \rceil$. Logo, pela Proposição 4.1, $Y_i \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Mas, temos que

$$X + Y = X + \min(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \min(X + Y_1, X + Y_2, \ldots, X + Y_n) \ .$$

Então, se mostrarmos que $\forall i \in [1, n]$, $X + Y_i \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, que é fechada sob o mínimo, resulta que $X + Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

Vamos mostrar que $X + Y_i \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$. Seja

$$R = \mathrm{suporte}(X) \cap \mathrm{suporte}(Y_i) = \{\, w \in A^* \mid wX \neq \infty \text{ e } wY_i \neq \infty \,\} \ .$$

Então, R é um subconjunto reconhecível pela Proposição 2.1 e o $\mathcal{M}$-subconjunto $X + Y_i$ satisfaz

$$\forall w \in A^*, \quad w(X + Y_i) = \begin{cases} wX + m_i & \text{se } w \in R \\ \infty & \text{caso contrário} \ . \end{cases}$$

Consideremos o $\mathcal{M}$-subconjunto Z definido por:

$$\forall w \in A^*, \qquad wZ = \begin{cases} wX & \text{se } w \in R \\ \infty & \text{caso contrário} \ . \end{cases}$$

Então, $X + Y_i = m_i + Z$ e, pela Proposição 4.4, segue que $Z = X + \lceil R, 0 \rceil$ e que $Z \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$. Mas,

$$\begin{aligned} l' &= \min\{\, |w| - wZ \mid w \in A^* \text{ e } wZ \neq \infty \,\} \\ &= \min\{\, |w| - wX \mid w \in R \,\} \\ &= \min\{\, |w| - wX \mid wX \neq \infty \text{ e } wY_i \neq \infty \,\} \\ &= \min\{\, |w| - wX \mid wX \neq \infty \text{ e } wY_i = m_i \,\} \quad \geq \quad l \ . \end{aligned}$$

Como $m_i \le k \le l$, segue que $m_i \le l'$ e, pela Proposição 3.9 resulta que $m_i + Z \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$. Assim, $X + Y_i \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

A demonstração é análoga para X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

5.2 O máximo de $\mathcal{M}$-subconjuntos

Consideremos a operação *máximo* (denotada por max) sobre os elementos de $\mathcal{M}$. Esta operação pode ser estendida para os $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^* da seguinte forma.

Sejam X e Y $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^*. O $\mathcal{M}$-subconjunto $\max(X,Y)$ é definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad w(\max(X,Y)) = \max(wX, wY) \ .$$

Uma propriedade que pode ser verificada facilmente é a distributividade do máximo em relação ao mínimo. Sejam $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^*. Então,

$$\max(X, \min_{1\le i\le n} Y_i) = \min_{1\le i\le n} \max(X, Y_i) \ .$$

Proposição 5.2 $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ *não é fechada sob o máximo.*

Demonstração. Considere $A = \{a, b\}$. Sejam X e Y $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^+, definidos por:

$$\forall w \in A^+, \quad wX = |w|_a \quad \text{e} \quad wY = |w|_b \ .$$

Então, X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e o $\mathcal{M}$-subconjunto $\max(X,Y)$ é dado por:

$$\forall w \in A^+, \quad w(\max(X,Y)) = \max(wX, wY) = \max(|w|_a, |w|_b) \ .$$

Vimos no Lema 2.4 que $\max(X,Y) \notin \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Logo, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ não é fechada sob o máximo.

■

A seguir, vamos encontrar algumas condições que dois $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis devem satisfazer para que o máximo entre eles seja um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

Proposição 5.3 *Seja* $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. *Sejam* $m \in \mathcal{M}$ *e* R *um subconjunto reconhecível de* A^*. *Então,* $\max(X, \lceil R, m \rceil) \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Sejam $m \in \mathcal{M}$ e R um subconjunto reconhecível de A^*. Então, $\forall w \in A^*$,

$$w(\max(X, \lceil R, m \rceil)) = \max(wX, w\lceil R, m \rceil) = \begin{cases} \infty & \text{se } w \notin R \\ m & \text{se } w \in R \text{ e } wX \leq m \\ wX & \text{se } w \in R \text{ e } m < wX \end{cases} .$$

Na seqüência, vamos definir alguns $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis, a partir dos quais podemos obter o $\mathcal{M}$-subconjunto $\max(X, \lceil R, m \rceil)$, utilizando somente operações sob as quais $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada.

Seja

$$R_1 = \bigcup_{i=0}^{m} iX^{-1} \cap R = \{ w \in A^* \mid w \in R \text{ e } wX \leq m \} .$$

Pela Proposição 2.3, R_1 é um subconjunto reconhecível de A^*. A partir de R_1, definimos o $\mathcal{M}$-subconjunto X_1 por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX_1 = \begin{cases} m & \text{se } w \in R_1 \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Logo, $X_1 = \lceil R_1, m \rceil$ e, pela Proposição 4.1, $X_1 \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Seja

$$R_2 = (A^* - \bigcup_{i=0}^{m} iX^{-1}) \cap R = \{ w \in A^* \mid w \in R \text{ e } m < wX \} .$$

Pela Proposição 2.3, R_2 é um subconjunto reconhecível de A^*. A partir de R_2, definimos o $\mathcal{M}$-subconjunto X_2 por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX_2 = \begin{cases} wX & \text{se } w \in R_2 \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Logo, pela Proposição 4.4, $X_2 = X + \lceil R_2, 0 \rceil$ e $X_2 \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Podemos verificar que

$$\max(X, \lceil R, m \rceil) = \min(X_1, X_2) ,$$

já que os subconjuntos R_1 e R_2 são disjuntos e, para cada $i \in [1, 2]$,

$$\forall w \in A^*, \quad wX_i = \begin{cases} w(\max(X, \lceil R, m \rceil)) & \text{se } w \in R_i \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Portanto, como $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$ é fechada sob o mínimo, segue que $\max(X, \lceil R, m \rceil) \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$.

■

Proposição 5.4 *Seja* $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$ *(*$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$*). Sejam* R *um subconjunto reconhecível de* A^* *e* $m \in \mathcal{M}$ *tais que* $\lceil R, m \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$*. Então,* $\max(X, \lceil R, m \rceil) \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$ *(*$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$*).*

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$. Sejam R um subconjunto reconhecível de A^* e $m \in \mathcal{M}$ tais que $\lceil R, m \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$. Se $R = \emptyset$ ou $m = \infty$, $\lceil R, m \rceil = \emptyset$. E, nesse caso, $\max(X, \lceil R, m \rceil) = \emptyset \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$. Vamos supor, então, que R é não vazio e que $m < \infty$. Como $\lceil R, m \rceil$ é simples, $m \le \min\{\, |w| \mid w \in R \,\}$.

A demonstração de que $\max(X, \lceil R, m \rceil) \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$ segue da Proposição 5.3, observando-se que:

1. $\forall w \in R_1$, $m \le |w|$, já que $R_1 \subseteq R$; então, pela Proposição 4.5, $X_1 = \lceil R_1, m \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$;

2. pela Proposição 4.4, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$ então $X_2 = X + \lceil R_2, 0 \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$;

3. $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^*$ é fechada sob o mínimo.

A demonstração é análoga quando $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*$.

■

Utilizando a Proposição 5.3 e umas das caracterizações de $\mathcal{M}$-subconjuntos limitados, estendemos a subfamília de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis que é fechada sob o máximo.

Lema 5.5 *Sejam* X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$*. Se* Y *é limitado, então* $\max(X, Y) \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\, A^*$.

Demonstração. Sejam X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e suponha que Y seja limitado. Consideremos $n = |A^*Y|$ e denotemos os elementos de A^*Y por $m_1, m_2, \ldots,$ m_n. Então, pelo Lema 4.3 (e sua demonstração), existem n subconjuntos reconhecíveis m_iY^{-1} $(1 \leq i \leq n)$ tais que

$$Y = \min_{1\leq i\leq n} \lceil m_iY^{-1}, m_i \rceil \ .$$

Logo,

$$\max(X,Y) = \max(X, \min_{1\leq i\leq n} \lceil m_iY^{-1}, m_i\rceil) = \min_{1\leq i\leq n} (\max(X, \lceil m_iY^{-1}, m_i\rceil)) \ .$$

Como, pela Proposição 5.3, para cada $i \in [1,n]$, $\max(X, \lceil m_iY^{-1}, m_i\rceil)$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível e $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo, resulta que $\max(X,Y) \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

■

Lema 5.6 *Sejam* X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ *(*$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$*). Se* Y *é limitado, então* $\max(X,Y) \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ *(*$\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$*).*

Demonstração. Se X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e Y é limitado, o resultado segue do Lema 5.5, observando-se que para cada $i \in [1,n]$, o $\mathcal{M}$-subconjunto $\lceil m_iY^{-1}, m_i\rceil$ é uma complexidade não determinística pela demonstração do Lema 4.6 e que, pela Proposição 5.4, $\max(X, \lceil m_iY^{-1}, m_i\rceil) \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, que é fechada sob o mínimo.

A demonstração é análoga quando $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

5.3 O resto da divisão de um $\mathcal{M}$-subconjunto por um inteiro positivo

Uma outra operação que podemos considerar sobre $\mathcal{M}$ é o *resto* da divisão inteira de $m \in \mathcal{M}$ por algum inteiro $d > 0$, que será denotada por $m \bmod d$. Para $m \in \mathbb{N}$, $m \bmod d$ é dado pela definição usual. Para $m = \infty$, definimos $\infty \bmod d = \infty$. Esta operação também pode ser estendida para os $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^*, da seguinte forma.

Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* e seja um inteiro $d > 0$. Definimos o $\mathcal{M}$-subconjunto $X \bmod d$ por:

$$\forall w \in A^*, \quad w(X \bmod d) = wX \bmod d \ .$$

Na proposição a seguir, mostramos que, sob algumas condições, é válida a distributividade da operação $\bmod d$ em relação à adição (mínimo) de $\mathcal{M}$-subconjuntos da forma $\lfloor R, m \rfloor$ ($\lceil R, m \rceil$).

Proposição 5.7 *Sejam $R_1, R_2, \ldots, R_k$ subconjuntos reconhecíveis de A^*, dois a dois disjuntos. Sejam $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos de $\mathcal{M}$ e um inteiro $d > 0$. Então,*

$$\min_{1 \leq i \leq k} \lceil R_i, m_i \rceil \bmod d = \min_{1 \leq i \leq k} (\lceil R_i, m_i \rceil \bmod d)$$

$$e \quad \sum_{i=1}^{k} \lfloor R_i, m_i \rfloor \bmod d = \sum_{i=1}^{k} (\lfloor R_i, m_i \rfloor \bmod d) \ .$$

Demonstração. Seja $w \in A^*$. Então,

$$\begin{aligned} w(\min_{1 \leq i \leq k} \lceil R_i, m_i \rceil \bmod d) &= w \min_{1 \leq i \leq k} \lceil R_i, m_i \rceil \bmod d \\ &= \min_{1 \leq i \leq k} w \lceil R_i, m_i \rceil \bmod d \ . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} w \min_{1 \leq i \leq k} (\lceil R_i, m_i \rceil \bmod d) &= \min_{1 \leq i \leq k} w(\lceil R_i, m_i \rceil \bmod d) \\ &= \min_{1 \leq i \leq k} (w \lceil R_i, m_i \rceil \bmod d) \ . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como os R_i's ($1 \leq i \leq k$) são dois a dois disjuntos, temos dois casos para verificar.

Inicialmente, suponhamos que $w \notin \cup_{i=1}^{k} R_i$. Nesse caso, $w \lceil R_i, m_i \rceil = \infty$, $\forall i \in [1, k]$. Logo, (5.1)$= \infty =$(5.2).

Agora, suponhamos que $w \in R_j$, para algum $j \in [1, k]$. Então, $w \lceil R_j, m_j \rceil = m_j$ e $w \lceil R_i, m_i \rceil = \infty$, $\forall i \in [1, k]$, $i \neq j$. Logo, (5.1)$= m_j \bmod d =$(5.2).

Portanto,

$$\min_{1 \leq i \leq k} \lceil R_i, m_i \rceil \bmod d = \min_{1 \leq i \leq k} (\lceil R_i, m_i \rceil \bmod d) \ .$$

A demonstração da outra identidade é análoga.

∎

Proposição 5.8 *Seja um inteiro $d > 1$. $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ não é fechada sob a operação* mod d.

Demonstração. Seja $A = \{\,a, b\,\}$ e consideremos o $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^* definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX = \min\{\,2|w|_a, 2|w|_b + 1\,\} \ .$$

É claro que $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Como $1(X \bmod 2)^{-1} = \{\,w \in A^* \mid |w|_b < |w|_a\,\}$ não é um subconjunto reconhecível de A^*, resulta pela Proposição 2.3 que $X \bmod 2 \notin \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Assim, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ não é fechada sob mod d, para $d > 1$.

■

O próximo lema apresenta uma subfamília de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis que é fechada sob mod d, para $d > 0$.

Lema 5.9 *Seja d um inteiro positivo. Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e é limitado, então X* mod $d \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Ademais, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ então X mod $d \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível e limitado. Se $d = 1$, então $X \bmod 1 = \lceil \mathrm{suporte}(X), 0 \rceil$ que é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

Consideremos, então, $d > 1$ e seja $n = |A^*X|$. Denotemos os elementos de A^*X por $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Então, pelo Lema 4.3 (e sua demonstração), existem n subconjuntos reconhecíveis m_iX^{-1} $(1 \leq i \leq n)$ tais que

$$X = \min_{1 \leq i \leq n} \lceil m_iX^{-1}, m_i \rceil \ .$$

Logo, como $\forall i, j \in [1, n]$, $i \neq j$, $m_iX^{-1} \cap m_jX^{-1} = \emptyset$, pela Proposição 5.7 resulta que

$$X \bmod d = \min_{1 \leq i \leq n} \lceil m_iX^{-1}, m_i \rceil \bmod d = \min_{1 \leq i \leq n} (\lceil m_iX^{-1}, m_i \rceil \bmod d) \ .$$

Mas, para cada $i \in [1, n]$,

$$\lceil m_iX^{-1}, m_i \rceil \bmod d = \lceil m_iX^{-1}, m_i \bmod d \rceil \ ,$$

que é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível, pela Proposição 4.1.

Assim,

$$X \bmod d = \min_{1 \le i \le n} \lceil m_i X^{-1}, m_i \bmod d \rceil$$

e, como $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo, $X \bmod d \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Além disso, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, para cada $i \in [1, n]$, $\lceil m_i X^{-1}, m_i \bmod d \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, pela demonstração da Proposição 4.6. E, como $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo, resulta que $X \bmod d \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

∎

5.4 O mônus de $\mathcal{M}$-subconjuntos

A seguir vamos definir uma operação binária sobre $\mathcal{M}$ que é semelhante à subtração sobre os números inteiros. Essa operação será estendida para todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos.

Consideremos a operação *mônus*, $\dot{-} : \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}$, definida por:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \dot{-} n = \begin{cases} m - n & \text{se } m \ge n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases},$$

$$\infty \dot{-} n = \infty, \quad m \dot{-} \infty = 0 \quad \text{e} \quad \infty \dot{-} \infty = \infty .$$

Sejam X e Y $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^*. Definimos o $\mathcal{M}$-subconjunto $X \dot{-} Y$ por:

$$\forall w \in A^*, \quad w(X \dot{-} Y) = wX \dot{-} wY .$$

A proposição a seguir estabelece uma propriedade relacionando as operações mônus e adição de $\mathcal{M}$-subconjuntos.

Proposição 5.10 *Sejam $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^*. Então,*

$$X \dot{-} \sum_{i=1}^{k} Y_i = (((X \dot{-} Y_1) \dot{-} Y_2) \dot{-} \cdots) \dot{-} Y_k .$$

Demonstração. Utilizamos indução em k.

Seja $k = 2$. Então, $\forall w \in A^*$,

$$w(X \dot{-} Y_1) = wX \dot{-} wY_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } wX \le wY_1 \\ wX - wY_1 & \text{se } wX > wY_1 \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
w((X \dot{-} Y_1) \dot{-} Y_2) &= w(X \dot{-} Y_1) \dot{-} wY_2 \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } wX - wY_1 \leq wY_2 \\ (wX - wY_1) - wY_2 & \text{se } wX - wY_1 > wY_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } wX \leq wY_1 + wY_2 \\ wX - (wY_1 + wY_2) & \text{se } wX > wY_1 + wY_2 \end{cases} \\
&= wX \dot{-} (wY_1 + wY_2) \\
&= wX \dot{-} w(Y_1 + Y_2) \\
&= w(X \dot{-} (Y_1 + Y_2)) \; .
\end{aligned}$$

Portanto, $(X \dot{-} Y_1) \dot{-} Y_2 = X \dot{-} (Y_1 + Y_2)$.

Seja $k > 2$. Então,

$$\begin{aligned}
X \dot{-} \sum_{i=1}^{k} Y_i &= X \dot{-} (\sum_{i=1}^{k-1} Y_i + Y_k) \\
&= (X \dot{-} \sum_{i=1}^{k-1} Y_i) \dot{-} Y_k \\
&= ((((X \dot{-} Y_1) \dot{-} Y_2) \dot{-} \cdots) \dot{-} Y_{k-1}) \dot{-} Y_k \; .
\end{aligned}$$

■

Proposição 5.11 $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ *não é fechada sob a operação mônus.*

Demonstração. Consideremos $A = \{ a, b \}$.

Seja X o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^+ definido por:

$$\forall w \in A^+, \quad wX = |w| \; .$$

Seja Y o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^+ definido por:

$$\forall w \in A^+, \quad wY = \min\{ |w|_a, |w|_b \} \; .$$

Então, X e Y são $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e o $\mathcal{M}$-subconjunto $X \dot{-} Y$ é dado por:

$$\forall w \in A^+, \quad w(X \dot{-} Y) = |w| - \min\{ |w|_a, |w|_b \} \; .$$

Ou seja,

$$\forall w \in A^+, \quad w(X \dot{-} Y) = \max\{\, |w|_a, |w|_b \,\} \ .$$

Mas, já vimos (no Lema 2.4) que $X \dot{-} Y \notin \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

■

Podemos ver um outro exemplo para a proposição anterior.

Consideremos $A = \{\, a, b \,\}$. Seja X o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX = |w|_a$$

e seja Y o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* definido por:

$$\forall w \in A^*, \quad wY = |w|_b \ .$$

É claro que X e Y são $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis.

Agora, consideremos o $\mathcal{M}$-subconjunto $X \dot{-} Y$ que é dado por:

$$\forall w \in A^*, \quad w(X \dot{-} Y) = \begin{cases} |w|_a - |w|_b & \text{se } |w|_a > |w|_b \\ 0 & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Mas, o subconjunto

$$0(X \dot{-} Y)^{-1} = \{\, w \in A^* \mid w(X \dot{-} Y) = 0 \,\} = \{\, w \in A^* \mid |w|_a \leq |w|_b \,\}$$

não é reconhecível. Portanto, pela Proposição 2.3, $X \dot{-} Y \notin \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

O teorema a seguir apresenta uma condição para que, dados dois $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis X e Y, $X \dot{-} Y$ seja um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

Teorema 5.12 *Sejam $X, Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Se Y é limitado, então $X \dot{-} Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.*

Antes de demonstrarmos este teorema, vamos estudar os casos em que o $\mathcal{M}$-subconjuto Y de A^* é da forma $\lfloor R, m \rfloor$, para algum $m \in \mathcal{M}$ e algum subconjunto reconhecível R de A^*.

Proposição 5.13 *Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+. Então, $X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+.*

Ademais, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ então $X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+. Então, existe um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ tal que $\|\mathcal{A}\| = X$.

O $\mathcal{M}$-subconjunto $X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor$ é tal que

$$\begin{aligned} \forall w \in A^*, \quad w(X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor) &= wX \dot{-} w\lfloor A^*, 1 \rfloor \\ &= wX \dot{-} 1 \\ &= \begin{cases} \infty & \text{se } wX = \infty \\ 0 & \text{se } wX = 0 \\ wX - 1 & \text{se } 1 \leq wX < \infty \end{cases} . \end{aligned}$$

Vamos construir um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$ de modo que $\|\mathcal{B}\| = X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor$. Seja $\mathcal{B} = (Q_\mathcal{B}, I_\mathcal{B}, T_\mathcal{B})$, onde

$Q_\mathcal{B} = \{ q' \mid q \in Q \} \cup \{ q'' \mid q \in Q \}$,

$I_\mathcal{B}$ é o $\mathcal{M}$-subconjunto de $Q_\mathcal{B}$ dado por:

$$\forall q \in Q, \quad q' I_\mathcal{B} = qI \quad \text{e} \quad q'' I_\mathcal{B} = \infty$$

e $T_\mathcal{B}$ é o $\mathcal{M}$-subconjunto de $Q_\mathcal{B}$ dado por:

$$\forall q \in Q, \quad q' T_\mathcal{B} = q'' T_\mathcal{B} = qT \ .$$

As arestas úteis de $\mathcal{B}$ são definidas da seguinte forma. Para cada aresta útil (p, a, q) de $\mathcal{A}$,

- se $(p, a, q)E_\mathcal{A} = 0$, então (p', a, q') e (p'', a, q'') são arestas úteis de $\mathcal{B}$ e suas multiplicidades são iguais a 0;

- se $(p, a, q)E_\mathcal{A} > 0$, então (p', a, q'') e (p'', a, q'') são arestas úteis de $\mathcal{B}$ e suas multiplicidades são dadas por:

$$(p', a, q'')E_\mathcal{B} = (p, a, q)E_\mathcal{A} - 1 \quad \text{e} \quad (p'', a, q'')E_\mathcal{B} = (p, a, q)E_\mathcal{A} \ .$$

Assim, pode-se verificar facilmente que $\|\mathcal{B}\| = X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor$. Portanto, $X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, pela Proposição 2.7, podemos considerar o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$ simples. Então, $Q_\mathcal{B} I_\mathcal{B}$, $Q_\mathcal{B} T_\mathcal{B} \subseteq \{ 0, \infty \}$ e as multiplicidades das arestas úteis de $\mathcal{B}$ são ou 0 ou 1, por construção. Logo, $\mathcal{B}$ é simples, resultando que $X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

■

Observemos que, na demonstração da Proposição 5.13, quando X é um $\mathcal{M}$-subconjunto simples, não há necessidade de se considerar o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$ normalizado, já que se $\mathcal{A}$ é simples as multiplicidades dos estados iniciais e finais são zero.

Proposição 5.14 *Se* $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ *então* $X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

Demonstração. A construção do $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$, que apresentamos na demonstração da proposição anterior, não garante que $X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor$ seja uma complexidade não determinística, se X o for. Assim, faremos uma construção diferente.

O $\mathcal{M}$-subconjunto $X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor$ é tal que

$$\begin{aligned} \forall w \in A^*, \quad w(X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor) &= wX \dot{-} w\lfloor A^*, 1 \rfloor \\ &= wX \dot{-} 1 \\ &= \begin{cases} \infty & \text{se } wX = \infty \\ 0 & \text{se } wX = 0 \\ wX - 1 & \text{se } 1 \leq wX < \infty \end{cases} . \end{aligned}$$

Consideremos um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A} = (Q, I, T)$ do tipo nc tal que $\|\mathcal{A}\| = X$.

Vamos construir um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$ de modo que $\|\mathcal{B}\| = X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor$.

Inicialmente, consideremos o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{C} = (Q_\mathcal{C}, I_\mathcal{C}, T_\mathcal{C})$, que é a parte 0-acessível de $\mathcal{A}$; ou seja,

$Q_\mathcal{C} = \{\, q' \mid q \in Q$ e q é acessível em $\mathcal{A}$ por um passeio P, com $\|P\| = 0 \,\}$;

$I_\mathcal{C} \colon Q_\mathcal{C} \to \mathcal{M}$, definido por $q'I_\mathcal{C} = qI$

e $T_\mathcal{C} \colon Q_\mathcal{C} \to \mathcal{M}$, definido por $q'T_\mathcal{C} = qT$.

$\forall p', q' \in Q_\mathcal{C}$ e $\forall a \in A$, (p', a, q') é uma aresta útil de $\mathcal{C}$ se, e somente se, $(p, a, q)E_\mathcal{A} = 0$. Além disso, $(p', a, q')E_\mathcal{C} = 0$. É claro que $\forall w \in A^*$, $w\|\mathcal{A}\| = 0$ se, e somente se, $w\|\mathcal{C}\| = 0$.

Consideremos o seguinte subconjunto

$$R = \{\, \text{arestas úteis } \alpha = (p, a, q) \text{ de } \mathcal{A}, \text{ com } \|\alpha\| = 1 \text{ e } p' \in Q_\mathcal{C} \,\}$$

e seja $k = |R|$.

O $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$ será construído a partir de k 'cópias' dos $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$. Ou seja,

$Q_{\mathcal{B}} = (Q_{\mathcal{C}} \times [1,k]) \cup (Q \times [1,k])$;

$I_{\mathcal{B}} \colon Q_{\mathcal{B}} \to \mathcal{M}$, definido por:

$$(q',i)I_{\mathcal{B}} = qI, \quad \forall q' \in Q_{\mathcal{C}} \text{ e } \forall i \in [1,k]$$

$$\text{e} \quad (q,i)I_{\mathcal{B}} = \infty, \quad \forall q \in Q \text{ e } \forall i \in [1,k] \ ;$$

$T_{\mathcal{B}} \colon Q_{\mathcal{B}} \to \mathcal{M}$, definido por:

$$(q',i)T_{\mathcal{B}} = qT, \quad \forall q' \in Q_{\mathcal{C}} \text{ e } \forall i \in [1,k]$$

$$\text{e} \quad (q,i)T_{\mathcal{B}} = qT, \quad \forall q \in Q \text{ e } \forall i \in [1,k] \ .$$

Como $\mathcal{A}$ é do tipo nc, $Q_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{B}}$, $Q_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{B}} \subseteq \{0,\infty\}$.

As arestas úteis de $\mathcal{B}$ são definidas da seguinte forma:

- para cada aresta útil (p,a,q) de $\mathcal{A}$, $((p,i),a,(q,i))$ é uma aresta útil de $\mathcal{B}$, $\forall i \in [1,k]$ e $((p,i),a,(q,i))E_{\mathcal{B}} = (p,a,q)E_{\mathcal{A}}$;

- para cada aresta útil (p',a,q') de $\mathcal{C}$, $((p',i),a,(q',i))$ é uma aresta útil de $\mathcal{B}$, $\forall i \in [1,k]$ e $((p',i),a,(q',i))E_{\mathcal{B}} = 0$;

- para cada $i \in [1,k]$, se $\alpha_i = (p,a,q)$ é a i-ésima aresta em R, então $((p',i),a,(q,i))$ é uma aresta útil de $\mathcal{B}$ e $((p',i),a,(q,i))E_{\mathcal{B}} = 0$.

Podemos observar que, como $(\alpha_i = (p,a,q))E_{\mathcal{A}} = 1$ e $\mathcal{A}$ é do tipo nc, não deve existir em $\mathcal{A}$ uma aresta (p,a,r) com multiplicidade igual a zero. Se existir em $\mathcal{A}$ uma aresta (p,a,r) com multiplicidade 1, então a aresta $((p',j),a,(r,j))$ estará em $\mathcal{B}$, para algum $j \neq i$. Logo, em $\mathcal{B}$ não existem outras arestas com origem em (p',i) e rótulo a. Portanto, $\mathcal{B}$ é do tipo nc.

Precisamos mostrar que $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\| \dot{-} \lfloor A^*,1 \rfloor$. Seja $w \in A^*$ e seja P um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$ com $|P| = w$.

Se $||P|| = 0$, pelas construções de $\mathcal{C}$ e de $\mathcal{B}$, existe em $\mathcal{B}$ um passeio vitorioso P', que soletra w, com $||P'|| = 0$.

Se $||P|| \neq 0$, consideremos a seguinte fatoração do passeio P

$$P : p \xrightarrow{u} q \xrightarrow{a} r \xrightarrow{v} s \ ,$$

tal que $uav = w$, com $a \in A$ e os seus fatores $P_1 = (p, u, q)$ e $P_2 = (q, a, r)$ satisfazem $||P_1|| = 0$ e $||P_2|| = 1$.

Suponhamos que $P_2 = (q, a, r)$ seja a i-ésima aresta em R. Então, por construção de $\mathcal{B}$,

$$P' : (p', i) \xrightarrow{u} (q', i) \xrightarrow{a} (r, i) \xrightarrow{v} (s, i)$$

é um passeio útil em $\mathcal{B}$ e seus fatores $P_1' = ((p', i), u, (q', i))((q', i), a, (r, i))$ e $P_2' = ((r, i), v, (s, i))$ são tais que $||P_1'|| = 0$ e $||P_2'||$ é igual à multiplicidade do fator (r, v, s) de P. Logo, $||P'|| = ||P|| - 1$. E, pode-se verificar que P' é vitorioso em $\mathcal{B}$.

Analogamente, demonstra-se que para cada passeio vitorioso P' em $\mathcal{B}$, existe um passeio vitorioso P em $\mathcal{A}$, com rótulo igual ao de P', tal que

$$||P|| = \begin{cases} ||P'|| & \text{se } P' \text{ tem término em } Q_C \times [1, k] \\ ||P'|| + 1 & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Assim, $||\mathcal{B}|| = ||\mathcal{A}|| \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor$. Portanto, $X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

∎

Proposição 5.15 *Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+ e seja $m \in \mathcal{M}$. Então, $X \dot{-} \lfloor A^*, m \rfloor$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+.*

Ademais, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ então $X \dot{-} \lfloor A^*, m \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+ e seja $m \in \mathcal{M}$.

Se $m = 0$, então $X \dot{-} \lfloor A^*, 0 \rfloor = X$.

Se $m = \infty$, então

$$\forall w \in A^*, \quad w(X \dot{-} \lfloor A^*, \infty \rfloor) = wX \dot{-} \infty = \begin{cases} \infty & \text{se } wX = \infty \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Logo, $X \dot{-} \lfloor A^*, \infty \rfloor = \lceil \text{suporte}(X), 0 \rceil$. Assim, pelas Proposições 2.1 e 4.1, $X \dot{-} \lfloor A^*, \infty \rfloor$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

Agora, considere $0 < m < \infty$. Pode-se verificar que

$$X \dot{-} \lfloor A^*, m \rfloor = \underbrace{(((X \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor) \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor) \dot{-} \cdots) \dot{-} \lfloor A^*, 1 \rfloor}_{m \text{ vezes}} .$$

Assim, pela Proposição 5.13 resulta que $X \dot{-} \lfloor A^*, m \rfloor$, para $0 < m < \infty$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível.

A demonstração é análoga se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

■

Proposição 5.16 *Sejam $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ e $m \in \mathcal{M}$. Então, $X \dot{-} \lfloor A^*, m \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.*

Demonstração. Segue das Proposições 5.15 e 5.14, observando-se que $X \dot{-} \lfloor A^*, \infty \rfloor = \lceil \mathrm{suporte}(X), 0 \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

■

Proposição 5.17 *Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+. Sejam $m \in \mathcal{M}$ e R um subconjunto reconhecível de A^*. Então, $X \dot{-} \lfloor R, m \rfloor$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+.*

Ademais, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ então $X \dot{-} \lfloor R, m \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+. Sejam $m \in \mathcal{M}$ e R um subconjunto reconhecível de A^*. Se $R = A^*$, o resultado segue da Proposição 5.15.

Suponhamos que $R \neq A^*$. Se $m = 0$ então $X \dot{-} \lfloor R, 0 \rfloor = X$ e nada temos a provar. Consideremos, inicialmente, $0 < m < \infty$. Então,

$$\forall w \in A^*, \quad w(X \dot{-} \lfloor R, m \rfloor) = \begin{cases} \infty & \text{se } wX = \infty \\ 0 & \text{se } wX < m \text{ e } w \in R \\ wX & \text{se } wX < \infty \text{ e } w \notin R \\ wX - m & \text{se } (m \leq wX < \infty \text{ e } w \in R) \ . \end{cases}$$

A seguir vamos definir alguns $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis, a partir dos quais é possível obtermos $X \dot{-} \lfloor R, m \rfloor$, utilizando somente operações sob as quais $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada.

Seja

$$R_1 = \bigcup_{i=0}^{m-1} iX^{-1} \cap R = \{\, w \in A^* \mid wX < m \text{ e } w \in R \,\} \ .$$

Pela Proposição 2.3, R_1 é um subconjunto reconhecível de A^*.

Definimos o $\mathcal{M}$-subconjunto X_1 por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } w \in R_1 \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Logo, $X_1 = \lceil R_1, 0 \rceil$ e, pela Proposição 4.1, $X_1 \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Seja

$$R_2 = (A^* - \infty X^{-1}) \cap (A^* - R) = \{ w \in A^* \mid wX < \infty \text{ e } w \notin R \} .$$

Pela Proposição 2.3, R_2 é um subconjunto reconhecível de A^*.

Definimos o $\mathcal{M}$-subconjunto X_2 por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX_2 = \begin{cases} wX & \text{se } w \in R_2 \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Logo, pela Proposição 4.4, $X_2 = X + \lceil R_2, 0 \rceil$ e $X_2 \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Seja

$$R_3 = (A^* - (\bigcup_{i=0}^{m-1} iX^{-1} \cup \infty X^{-1})) \cap R = \{ w \in A^* \mid m \leq wX < \infty \text{ e } w \in R \} .$$

Pela Proposição 2.3, R_3 é um subconjunto reconhecível de A^*.

Definimos o $\mathcal{M}$-subconjunto X_3 por:

$$\forall w \in A^*, \quad wX_3 = \begin{cases} wX - m = w(X \dot{-} \lfloor A^*, m \rfloor) & \text{se } w \in R_3 \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Como pela Proposição 5.15, $X \dot{-} \lfloor A^*, m \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, resulta pela Proposição 4.4 que $X_3 = (X \dot{-} \lfloor A^*, m \rfloor) + \lceil R_3, 0 \rceil$ e que $X_3 \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Assim, pode-se verificar que

$$X \dot{-} \lfloor R, m \rfloor = \min(X_1, X_2, X_3) ,$$

já que os subconjuntos R_1, R_2 e R_3 são dois a dois disjuntos e, para cada $i \in [1, n]$,

$$\forall w \in A^*, \quad wX_i = \begin{cases} w(X \dot{-} \lfloor R, m \rfloor) & \text{se } w \in R_i \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Portanto, $X \dot{-} \lfloor R, m \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$, já que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo.

Podemos observar que o $\mathcal{M}$-subconjunto $X_1 = \lceil R_1, 0 \rceil \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ e se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, $X_2 = X + \lceil R_2, 0 \rceil$ e $X_3 = (X \dot{-} \lfloor A^*, m \rfloor) + \lceil R_3, 0 \rceil$ são simples pelas Proposições 3.4 e 5.15. E, como $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo, $X \dot{-} \lfloor R, m \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

Agora, consideremos $m = \infty$; então

$$\forall w \in A^*, \quad w(X \dot{-} \lfloor R, \infty \rfloor) = \begin{cases} \infty & \text{se } wX = \infty \\ 0 & \text{se } wX < \infty \text{ e } w \in R \\ wX & \text{se } wX < \infty \text{ e } w \notin R \end{cases} .$$

Assim, $X \dot{-} \lfloor R, \infty \rfloor = \min(X_1, X_2) \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Analogamente, se $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, $X \dot{-} \lfloor R, \infty \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$.

■

Proposição 5.18 *Sejam* $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ *e* $m \in \mathcal{M}$. *Então,* $X \dot{-} \lfloor R, m \rfloor \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$.

Demonstração. Segue das Proposições 5.17 e 5.16.

■

Agora, podemos demonstrar que se X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e Y é limitado então $X \dot{-} Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Demonstração do Teorema 5.12. Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Considere $X' = X + \mathbf{A}^+$. Pela Proposição 3.10, $X' \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

Seja Y um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível e limitado de A^*. Seja $n = |A^*Y|$ e denotemos os elementos de A^*Y por $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Então, pelo Lema 4.2 (e sua demonstração), existem n subconjuntos reconhecíveis m_iY^{-1} ($1 \leq i \leq n$) tais que

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \lfloor m_iY^{-1}, m_i \rfloor .$$

Assim,

$$\begin{aligned} X' \dot{-} Y &= X' \dot{-} \sum_{i=1}^{n} \lfloor m_i Y^{-1}, m_i \rfloor \\ &= (((X' \dot{-} \lfloor m_1 Y^{-1}, m_1 \rfloor) \dot{-} \lfloor m_2 Y^{-1}, m_2 \rfloor) \dot{-} \cdots) \dot{-} \lfloor m_n Y^{-1}, m_n \rfloor, \end{aligned}$$

pela Proposição 5.10.

Denotemos $X_0 = X'$ e, para cada $i \in [1, n]$,

$$X_i = ((X' \dot{-} \lfloor m_1 Y^{-1}, m_1 \rfloor) \dot{-} \cdots) \dot{-} \lfloor m_i Y^{-1}, m_i \rfloor \ .$$

Pela Proposição 5.17, para cada $i \in [1, n]$, $X_{i-1} \dot{-} \lfloor m_i Y^{-1}, m_i \rfloor$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*. Portanto, $X' \dot{-} Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e $1(X' \dot{-} Y) = 1X' \dot{-} 1Y = \infty \dot{-} 1Y = \infty$.

Mas,

$$X \dot{-} Y = \min(X' \dot{-} Y, (1X \dot{-} 1Y) + 1) \ .$$

E, como $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a adição escalar e sob o mínimo, resulta que $X \dot{-} Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$.

∎

Teorema 5.19 *Sejam X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$). Se Y é limitado, então $X \dot{-} Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$).*

Demonstração. Se X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, o resultado segue do Teorema 5.12, da Proposição 3.11 e observando-se que $1X \dot{-} 1Y \in \{0, \infty\}$.

Se X, $Y \in \mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, o resultado segue do Teorema 5.12, das Proposições 3.11 e 5.18 e considerando a observação acima.

∎

5.5 O quociente de um $\mathcal{M}$-subconjunto por um inteiro positivo

A *divisão inteira* sobre os números naturais (que será denotada por div) pode ser estendida para o semi-anel $\mathcal{M}$, definindo-se ∞ div $d = \infty$, $\forall d > 0$. Podemos estender essa operação para os $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^*, como segue.

Para cada inteiro positivo d e para cada $\mathcal{M}$-subconjunto X de A^*, definimos o $\mathcal{M}$-subconjunto X div d de A^* da seguinte forma:

$$\forall w \in A^*, \quad w(X \text{ div } d) = wX \text{ div } d \ .$$

A seguir, mostramos que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a operação div d, para todo inteiro positivo d.

Teorema 5.20 *Seja d um inteiro positivo. Se X é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+ então X div d é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+.*

Na demonstração do Teorema 5.20 construiremos um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B} = (Q, I, T)$ a partir de um dado $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado $\mathcal{A} = (Q_\mathcal{A}, I_\mathcal{A}, T_\mathcal{A})$ de modo que $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\|$ div d. A idéia é construir $\mathcal{B}$ utilizando d 'cópias' de $\mathcal{A}$.

Inicialmente, vamos construir um $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$, dependendo de $\mathcal{A}$, e estudar as suas propriedades. Este $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$ também será utilizado no próximo capítulo na demonstração do resultado principal deste nossso trabalho.

Consideremos $\mathcal{C} = (Q, E_\mathcal{C})$, onde $Q = Q_\mathcal{A} \times [1, d]$ e as arestas úteis de $\mathcal{C}$ com as suas respectivas multiplicidades são definidas como segue.

Seja $\alpha' = (p, a, q)$ uma aresta útil de $\mathcal{A}$. Sejam

$$k = \alpha' E_\mathcal{A} \text{ div } d \quad \text{e} \quad r = \alpha' E_\mathcal{A} \bmod d \ .$$

Então, $\alpha' E_\mathcal{A} = kd + r$.

Para cada $i \in [1, d]$, $\alpha = ((p, i), a, (q, j))$ é uma aresta útil de $\mathcal{C}$, satisfazendo:

- se $i > r$, $j = i - r$ e $\alpha E_\mathcal{C} = k$; assim,

$$\alpha' E_\mathcal{A} = kd + r = d(\alpha E_\mathcal{C}) + i - j \ ;$$

- se $i \leq r$, $j = i - r + d$ e $\alpha E_\mathcal{C} = k + 1$; assim,

$$\alpha' E_\mathcal{A} = kd + r = kd + d + r - d = d(k+1) + r - d = d(\alpha E_\mathcal{C}) + i - j \ .$$

Em ambos os casos, $j \in [1, d]$ e $\alpha' E_\mathcal{A} = d(\alpha E_\mathcal{C}) + i - j$. Note que esta condição define unicamente j e $\alpha E_\mathcal{C}$, para cada i e $\alpha' E_\mathcal{A}$.

É interessante fazermos as seguintes observações.

1. Quando $r = 0, \forall i \in [1, d], i > r$ e $j = i$. Logo, $\forall i \in [1, d], ((p, i), a, (q, i))$ é uma aresta útil de $\mathcal{C}$ com multiplicidade k.

2. Para cada aresta útil α' de $\mathcal{A}$, existem d arestas úteis em $\mathcal{C}$, cada uma com origem em $Q_{\mathcal{A}} \times \{i\}$, para $i \in [1, d]$, sendo que r dessas arestas têm multiplicidade $k+1$ e as restantes $d - r$ têm multiplicidade k.

3. Se $\mathcal{A}$ é simples e $d > 1$, $k = \alpha' E_{\mathcal{A}}$ div $d = 0$, qualquer que seja a aresta útil α' de $\mathcal{A}$. Assim, as multiplicidades das arestas de $\mathcal{C}$ estão em $\{0, 1, \infty\}$.

4. Verifiquemos como ficam as multiplicidades das arestas úteis de $\mathcal{C}$, quando d é o máximo das multiplicidades das arestas úteis de $\mathcal{A}$. Esta é a situação que teremos no próximo capítulo. Se cada aresta útil α' de $\mathcal{A}$ é tal que $0 \leq \alpha' E_{\mathcal{A}} \leq d$, resulta que $k = \alpha' E_{\mathcal{A}}$ div d ou é 0 ou é 1. E, $k = 1$ se, e somente se, $\alpha' E_{\mathcal{A}} = d$ e, neste caso, $r = \alpha' E_{\mathcal{A}} \bmod d = 0$. Então,

$$\forall i \in [1, d], \qquad \alpha E_{\mathcal{C}} = \begin{cases} k \text{ (que pode ser ou 0 ou 1)} & \text{se } i > r \\ 1 & \text{se } i \leq r \end{cases}.$$

Assim, as multiplicidades das arestas de $\mathcal{C}$ estão em $\{0, 1, \infty\}$.

Vejamos um exemplo para entendermos melhor a construção do $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$.

Exemplo 5.1 Seja $d = 3$. Consideremos um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$ e suponhamos que algumas das arestas úteis de $\mathcal{A}$ sejam as seguintes:
$\alpha'_0 = (p, a, p')$, com multiplicidade 0;
$\alpha'_1 = (q, a, q')$, com multiplicidade 1;
$\alpha'_2 = (s, a, s')$, com multiplicidade 2;
$\alpha'_3 = (t, a, t')$, com multiplicidade 3;
$\alpha'_5 = (u, a, u')$, com multiplicidade 5;
$\alpha'_7 = (v, a, v')$, com multiplicidade 7.

Apresentamos na tabela a seguir, para cada uma das arestas acima, o valor m' de sua multiplicidade, os valores de k, r, i e j e a multiplicidade

	α'_0	α'_1	α'_2	α'_3	α'_5	α'_7
$m'/k/r$	0/0/0	1/0/1	2/0/2	3/1/0	5/1/2	7/2/1
i	123	123	123	123	123	123
j	123	312	231	123	231	312
m	000	100	110	111	221	322

m da aresta correspondente em $\mathcal{C}$. Podemos observar que os valores de j associados a $i = 1,2,3$ formam uma permutação cíclica de $1,2,3$.

Mostramos, nas Figuras 5.1 e 5.2, como ficam as três arestas em $\mathcal{C}$ correspondentes a cada uma das arestas de $\mathcal{A}$ descritas acima.

A seguir, estudamos algumas propriedades que relacionam passeios em $\mathcal{A}$ com os passeios correspondentes em $\mathcal{C}$ e vice versa.

Sejam $P_{\mathcal{A}}$ e $P_{\mathcal{C}}$ os conjuntos dos passeios úteis em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{C}$, respectivamente. Vamos definir uma função $\Psi: P_{\mathcal{C}} \to P_{\mathcal{A}}$, como segue. Se

$$P = ((p_0, i_0), a_1, (p_1, i_1))((p_1, i_1), a_2, (p_2, i_2))...((p_{n-1}, i_{n-1}), a_n, (p_n, i_n))$$

é um passeio útil em $\mathcal{C}$, então

$$P\Psi = (p_0, a_1, p_1)(p_1, a_2, p_2)...(p_{n-1}, a_n, p_n) \ .$$

É fácil ver, pela construção de $\mathcal{C}$, que $P\Psi$ é um passeio útil em $\mathcal{A}$ e dizemos que $P\Psi$ é a *projeção* de P em $\mathcal{A}$. Por outro lado, pode-se verificar que para cada passeio útil P' em $\mathcal{A}$ e para cada $i \in [1, d]$, existe um único passeio útil P em $\mathcal{C}$, com origem em $Q_{\mathcal{A}} \times \{i\}$, cuja projeção em $\mathcal{A}$ é P'. Tal passeio P será chamado *i-levantamento* de P' em $\mathcal{C}$. O lema a seguir relaciona a multiplicidade de um passeio útil em $\mathcal{C}$ com a multiplicidade de sua projeção em $\mathcal{A}$.

Lema 5.21 *Seja P um passeio útil em $\mathcal{C}$ de (p,i) para (q,j), i e $j \in [1,d]$. Então, a sua projeção P' em $\mathcal{A}$ satisfaz*

$$||P'|| = d||P|| + i - j \ .$$

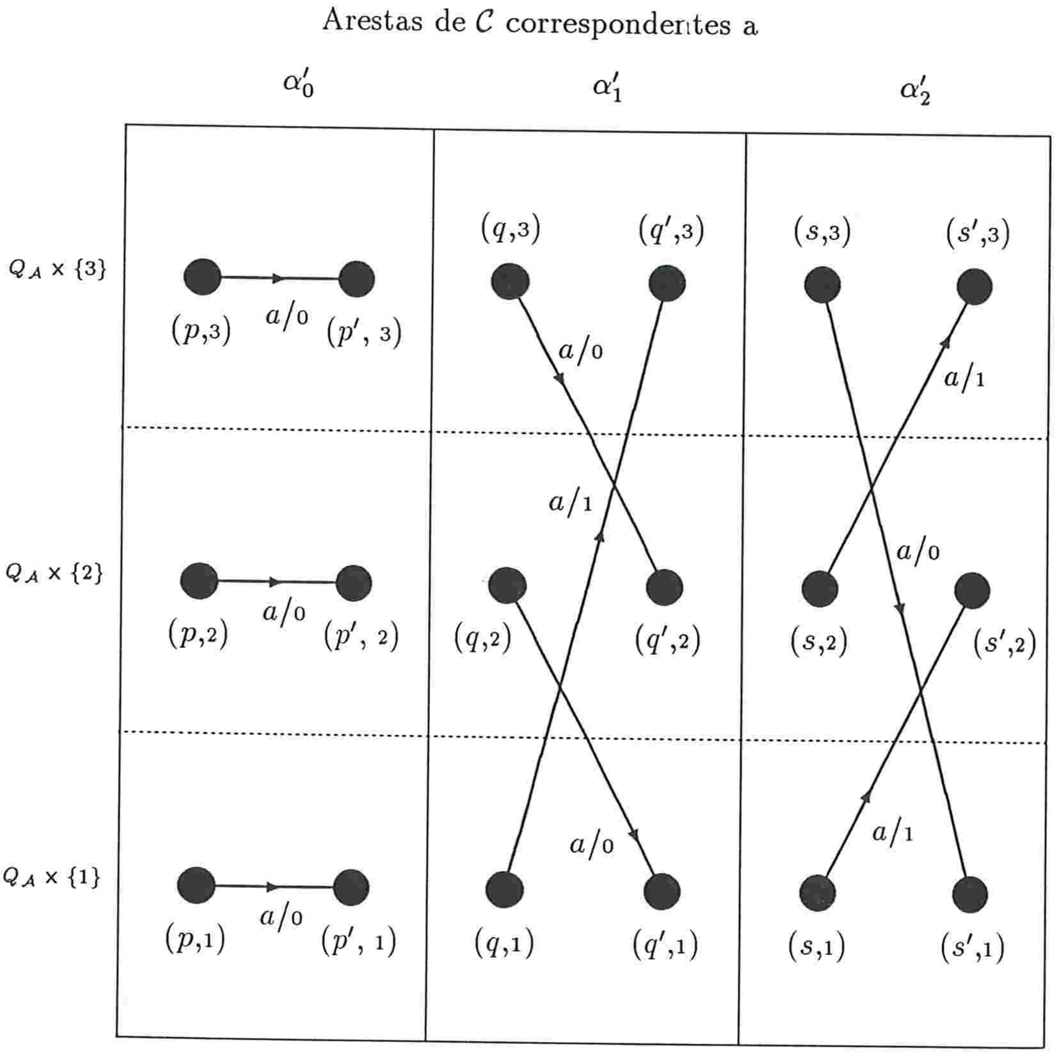


Figura 5.1: Um exemplo da construção do $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$

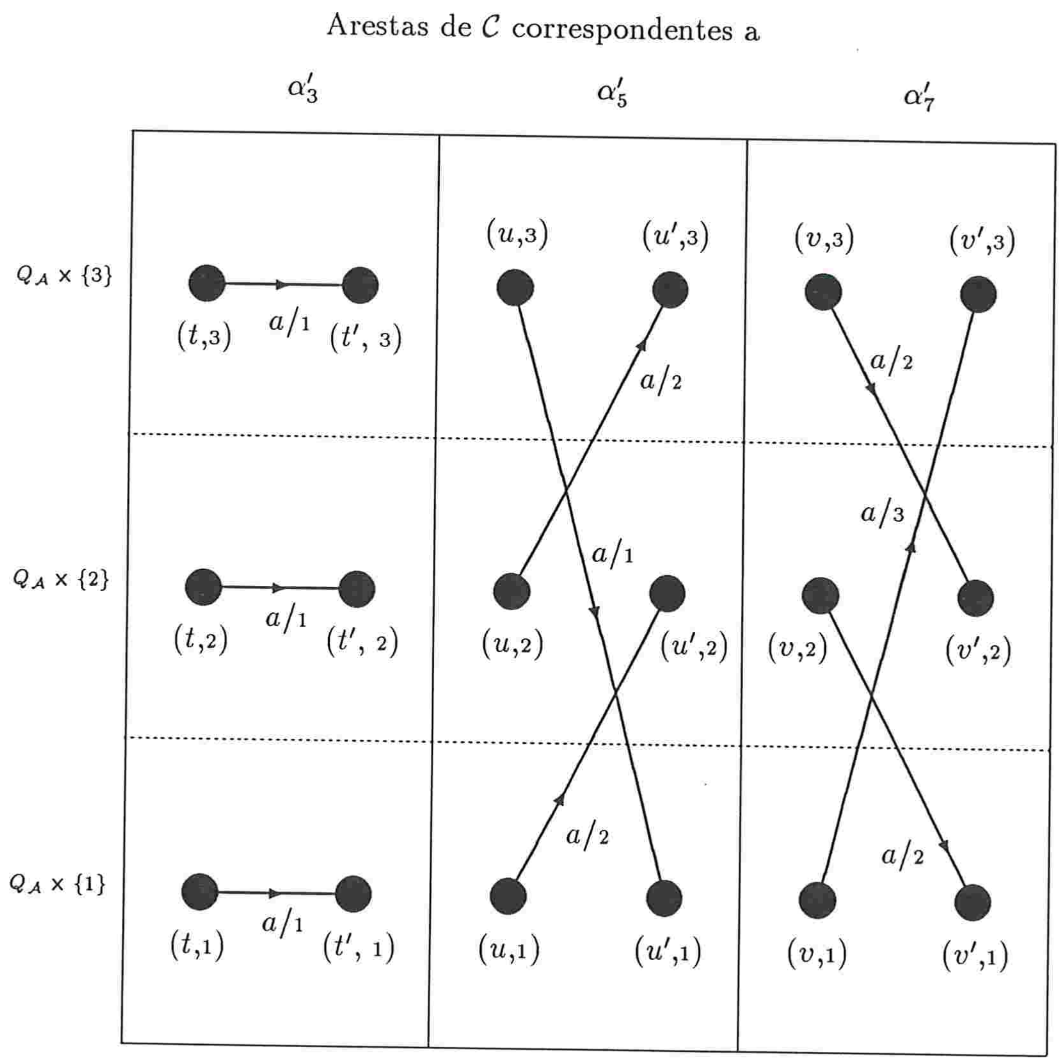


Figura 5.2: Um exemplo da construção do $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$

Demonstração. Seja P um passeio útil em $\mathcal{C}$ de (p,i) para (q,j). Seja w o rótulo de P, $w = w_1 \dots w_t$, com $w_l \in A$, $(1 \leq l \leq t)$. A demonstração é por indução no comprimento t do passeio P.

Se $t = 1$, então $P = ((p,i), w, (q,j))$ é uma aresta útil de $\mathcal{C}$. Seja $P' = (p, w, q)$ a projeção de P em $\mathcal{A}$. Pela construção de $\mathcal{C}$, podemos verificar que

$$||P'|| = d||P|| + i - j \ .$$

Suponhamos que $t > 1$ e que o lema seja válido para os passeios úteis em $\mathcal{C}$ com comprimento menor do que t. Então, o passeio $P = ((p,i), w, (q,j))$ pode ser decomposto no paseio $P_1 = ((p,i), w_1 \dots w_{t-1}, (s,l))$ e na aresta $\alpha = ((s,l), w_t, (q,j))$, para algum $s \in Q$ e $l \in [1,d]$, tal que $P = P_1\alpha$.

Pela hipótese de indução aplicada ao passeio $P_1 = ((p,i), w_1 \dots w_{t-1}, (s,l))$, a sua projeção $P_1{}' = (p, w_1 \dots w_{t-1}, s)$ em $\mathcal{A}$ satisfaz

$$||P_1{}'|| \ = \ d||P_1|| + i - l \ .$$

Seja $\alpha' = (s, w_t, q)$ a projeção de $\alpha = ((s,l), w_t, (q,j))$ em $\mathcal{A}$. Pela construção de $\mathcal{C}$, resulta que

$$||\alpha'|| \ = \ d||\alpha|| + l - j \ .$$

Assim, o passeio $P' = P_1{}'\alpha' = (p, w_1 \dots w_{t-1}, s)(s, w_t, q)$ de p para q é a projeção de P em $\mathcal{A}$ e

$$||P'|| = ||P_1{}'|| + ||\alpha'|| = d||P_1|| + i - l + d||\alpha|| + l - j = d(||P_1|| + ||\alpha||) + i - j \ .$$

Portanto, $||P'|| = d||P|| + i - j$.

■

A propriedade crucial da construção de $\mathcal{C}$ é estabelecida no Lema 5.21: para cada passeio útil P em $\mathcal{C}$ e sua projeção P' em $\mathcal{A}$, a diferença $||P'|| - d||P||$ depende somente da origem e do término do passeio P.

Corolário 5.22 *Seja P um passeio útil em $\mathcal{C}$ de (p,i) para (q,j), i e $j \in [1,d]$. Seja P' a projeção de P em $\mathcal{A}$. Então,*

$$||P|| = \begin{cases} ||P'|| \text{ div } d & se \ i - j \geq 0 \\ 1 + ||P'|| \text{ div } d & se \ i - j < 0 \ . \end{cases}$$

■

Demonstração do Teorema 5.20. Se $d = 1$ nada temos para provar.

Seja $d \geq 2$. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+ e seja $\mathcal{A} = (Q_\mathcal{A}, I_\mathcal{A}, T_\mathcal{A})$ um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado tal que $\|\mathcal{A}\| = X$.

Vamos construir um $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B} = (\mathcal{C}, I, T)$ a partir do $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C} = (Q, E_\mathcal{C})$, cuja construção e propriedades acabamos de descrever. Para isto, vamos definir os $\mathcal{M}$-subconjuntos I e T de Q:

$$(q,d)I = qI_\mathcal{A} \quad (\forall q \in Q_\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad (q,j)I = \infty \quad (\forall q \in Q_\mathcal{A}, \quad \forall j \in [1, d-1]) \ ;$$

$$(q,j)T = qT_\mathcal{A} \quad (\forall q \in Q_\mathcal{A}, \quad \forall j \in [1, d]) \ .$$

Vamos provar que $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\| \text{ div } d$. Seja $w \in A^+$ tal que $w\|\mathcal{A}\| \neq \infty$ e seja P' um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$, com rótulo w. Pelo Corolário 5.22, o d-levantamento P de P' em $\mathcal{B}$ satisfaz

$$||P|| = ||P'|| \text{ div } d \ ;$$

portanto,

$$w\|\mathcal{B}\| \leq ||P|| = w\|\mathcal{A}\| \text{ div } d \ . \tag{5.3}$$

Agora, seja P_1 um passeio vitorioso em $\mathcal{B}$, com rótulo w. Seja $P_1{}'$ a projeção de P_1 em $\mathcal{A}$. Então, lembrando que a origem de P_1 é um estado em $Q_\mathcal{A} \times \{d\}$, e utilizando o Corolário 5.22, temos que

$$w\|\mathcal{B}\| = ||P_1|| = ||P_1{}'|| \text{ div } d \geq ||P'|| \text{ div } d = w\|\mathcal{A}\| \text{ div } d \ . \tag{5.4}$$

Assim, de (5.3) e (5.4), resulta que $w\|\mathcal{B}\| = w\|\mathcal{A}\| \text{ div } d$.

Além disso, observamos que $1\|\mathcal{B}\| = \infty$ e se $w\|\mathcal{A}\| = \infty$ então Corolário 5.22 implica que $w\|\mathcal{B}\| = \infty$. Assim, $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\| \text{ div } d = X \text{ div } d$. Portanto, X div d é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+.

■

Corolário 5.23 *Seja d um inteiro positivo.* $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ *é fechada sob* div d.

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$. Pelo Teorema 5.20, $(X + \mathbf{A}^+) \text{ div } d$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+. Assim, $X \text{ div } d = \min((X + \mathbf{A}^+) \text{ div } d, (1X \text{ div } d) + \mathbf{1})$ é um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*.

■

Corolário 5.24 *Seja d um inteiro positivo.* $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ *é fechada sob* div d.

Demonstração. Segue do Teorema 5.20 e do Corolário 5.23, observando-se que o $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado $\mathcal{A}$, na demonstração do Teorema 5.20, pode ser considerado simples e, nesse caso, o $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$ tem as multiplicidades de suas arestas em $\{0, 1, \infty\}$ e, como o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{B}$ é construído a partir de $\mathcal{C}$ e seus estados iniciais e finais são definidos a partir de $\mathcal{A}$, resulta que $\mathcal{B}$ é simples.

■

Quanto à família das complexidades não determinísticas, $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, não sabemos se ela é fechada sob div d, para $d > 1$.

A Tabela 5.1 completa a Tabela 3.1 (no Capítulo 3) com as propriedades de fechamento de $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}$, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}$ sob a adição, o máximo, o resto, o mônus e a divisão.

Tabela 5.1: Propriedades de fechamento de $\mathcal{M}$ Rec, $\mathcal{M}$ SRec e $\mathcal{M}$ CRec

Operação	$\mathcal{M}$ Rec	$\mathcal{M}$ SRec	$\mathcal{M}$ CRec
$\min(X, Y)$	sim	sim	sim
$m + X$, com $0 < m < \infty$	sim	não	não
$m + X$, com $m = \infty$ ou $0 \leq m \leq \min\{\, \lvert w \rvert - wX \mid wX < \infty \,\}$	sim	sim	sim
$X + Y$	sim	não	não
$X + Y$, $\min\{\, \lvert w \rvert - wX \lvert wX < \infty \,\} \geq \max\{\, wY \mid wY < \infty \,\}$	sim	sim	sim
$X\rho$, ρ é a função reverso	sim	sim	não
XY X^* X^+	sim	sim	não
$X \sqcup\!\sqcup Y$, $\sqcup\!\sqcup$ é o embaralhamento	sim	sim	sim
Xf, f é um morfismo	sim	não	não
Xf, f é um morfismo com $1f^{-1} = 1$	sim	sim	não
Xf, f é um morfismo fino e injetor	sim	sim	sim
Xf^{-1}, f é um morfismo	sim	não	não
Xf^{-1}, f é um morfismo fino	sim	sim	sim
$X \sqcup Y$, $\sqcup$ é o embaralhamento interno	sim	sim	não
$\max(X, Y)$	não	não	não
$\max(X, Y)$, Y é limitado	sim	sim	sim
$X \dot{-} Y$, $\dot{-}$ é o mônus	não	não	não
$X \dot{-} Y$, Y é limitado	sim	sim	sim
$X \bmod d$, $d > 1$	não	não	não
$X \bmod d$, $d > 0$, X é limitado	sim	sim	sim
$X \operatorname{div} d$, $d > 0$	sim	sim	?

Capítulo 6

Caracterizações de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis e de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^*

Na Seção 1, apresentaremos uma caracterização de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis, que será o resultado principal deste nosso trabalho. Mais precisamente, mostraremos que um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^+ é reconhecível se, e somente se, ele é a soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^+. Na demonstração deste resultado, utilizaremos uma generalização da construção do $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$ que foi introduzida na demonstração de que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ é fechada sob a divisão por um inteiro positivo.

Na Seção 2, mostraremos que o fecho da família de $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^* que são complexidades não determinísticas, $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, sob o mínimo, a concatenação e a estrela será a família de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^*, $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$. Podemos observar que para se obter a família de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^*, bastaria considerarmos também o fecho sob a adição escalar.

6.1 Uma caracterização de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis de A^*

Vimos no Capítulo 3 (Proposição 3.3) que $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, a família de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples, não é fechada sob a adição. Este fato levou-nos a investigar a seguinte questão:

> Todo $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^* é a soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^* ?

Por exemplo, o $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível X definido por:

$$\forall w \in \{\, a, b \,\}^*, \quad wX = 2 \min\{\, |w|_a, |w|_b \,\}$$

não é simples pelo Lema 2.10; mas, pode ser obtido a partir da soma de dois $\mathcal{M}$-subconjuntos simples Y e Z dados por:

$$\forall w \in \{\, a.b \,\}^*, \quad wY = wZ = \min\{\, |w|_a, |w|_b \,\} \ ;$$

ou seja, $X = Y + Z$.

Como todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples X satisfaz $1X \in \{\, 0, \infty \,\}$, um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível Y, com $1Y \notin \{\, 0, \infty \,\}$ não pode ser a soma de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples. Assim, consideremos inicialmente a seguinte questão:

> Todo $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^+ é a soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^+ ?

Obtivemos uma resposta afirmativa para esta questão e este é o resultado principal deste nosso trabalho.

Teorema 6.1 *Um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^+ é reconhecível se, e somente se, ele é a soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^+.*

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto de A^+. Seja $\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{A}})$ um $\mathcal{M}$-A-autômato normalizado tal que $\|\mathcal{A}\| = X$ e seja d o máximo das multiplicidades das arestas úteis de $\mathcal{A}$.

Vamos construir d $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq d)$ tais que $\sum_{i=1}^{d} \|\mathcal{A}_i\| = \|\mathcal{A}\|$.

Para cada $i \in [1, d]$, o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}_i = (\mathcal{C}, I_i, T)$ é construído a partir do $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C} = (Q, E_{\mathcal{C}})$ que foi introduzido no capítulo anterior na demonstração do Teorema 5.20. Vamos definir os $\mathcal{M}$-subconjuntos I_i e T de Q:

$$(\forall q \in Q_{\mathcal{A}}, \quad \forall j \in [1, d]) \qquad (q, j)I_i = \delta(i, j) + qI_{\mathcal{A}} \ ,$$

$$\text{com} \quad \delta(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \infty & \text{caso contrário} \ ; \end{cases}$$

$$(\forall q \in Q_{\mathcal{A}}, \quad \forall j \in [1, d]) \qquad (q, j)T = qT_{\mathcal{A}} \ .$$

Note que $QI_i, QT \subseteq \{0, \infty\}$ e como as multiplicidades das arestas de $\mathcal{C}$ estão em $\{0, 1, \infty\}$ (como observamos no capítulo anterior), $\mathcal{A}_i$ é um $\mathcal{M}$-A-autômato simples. Observemos, também, que os $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}_i$'s $(1 \leq i \leq d)$ diferem entre si apenas nos seus estados iniciais.

Antes de continuarmos a demonstração deste teorema, vamos estudar, através dos próximos lemas, as propriedades que relacionam os passeios em cada $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq d)$ com as suas projeções em $\mathcal{A}$. Estudamos, também, as relações existentes entre os passeios em $\mathcal{A}_i$ e os passeios em $\mathcal{A}_j$, para $i \neq j$.

Seja $i \in [1, d]$. Seja P um passeio vitorioso em $\mathcal{A}_i$ com término em $Q_{\mathcal{A}} \times \{j\}$, para algum $j \in [1, d]$. Dizemos que P é um *passeio vitorioso mais alto* em $\mathcal{A}_i$, se não existem passeios vitoriosos em $\mathcal{A}_i$ com rótulos iguais ao de P e com término em $Q_{\mathcal{A}} \times \{k\}$, para $k \in [1, d]$, $k > j$.

Lema 6.2 *Seja P um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_i$ $(i \in [1, d])$. Então, a sua projeção P' é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja P um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_i$. Então, P tem a sua origem em $Q_{\mathcal{A}} \times \{i\}$. Suponhamos que o término de P seja um estado em $Q_{\mathcal{A}} \times \{j\}$, para algum $j \in [1, d]$. Se a projeção P' de P não é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$, existe um passeio vitorioso $P_1{}'$ em $\mathcal{A}$ tal que $|P_1{}'| = |P'|$ e $||P_1{}'|| < ||P'||$.

Seja P_1 o i-levantamento de $P_1{}'$ em $\mathcal{A}_i$ e suponhamos que P_1 termina em $Q_{\mathcal{A}} \times \{k\}$, para algum $k \in [1, d]$. Então, utilizando o Lema 5.21,

$$d||P_1|| = ||P_1{}'|| - i + k < ||P'|| - i + k = d||P|| + i - j - i + k = d||P|| + k - j \ .$$

Portanto,

$$d(||P_1|| - ||P||) < k - j \ .$$

Além disso, P_1 é um passeio bem sucedido em $\mathcal{A}_i$. De fato, a sua origem (p, i) e o seu término (q, k) satisfazem $(p, i)I_i = pI_{\mathcal{A}} \neq \infty$ e $(q, k)T = qT_{\mathcal{A}} \neq \infty$, já que a sua projeção $P_1{}'$ é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$. Mas, como P é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}_i$, $||P_1|| \geq ||P||$.

Se $||P_1|| = ||P||$ então P_1 também é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}_i$ e $k - j > 0$. Ou seja, $k > j$. Logo, P não é um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_i$; uma contradição.

Assim, $||P_1|| > ||P||$. Então,

$$d \leq d(||P_1|| - ||P||) < k - j \ .$$

Isto é impossível, já que $k, j \in [1, d]$. Portanto, P' é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$.

■

Lema 6.3 *Seja* P_i $(i \in [1, d])$ *um passeio vitorioso mais alto em* $\mathcal{A}_i$ *com rótulo* w *e suponhamos que* P_i *termine em* $Q_{\mathcal{A}} \times \{j\}$ $(j \in [1, d])$. *Seja* P_k $(k \in [1, d]$ *e* $k \neq i)$ *um passeio vitorioso mais alto em* $\mathcal{A}_k$ *com rótulo* w *e suponhamos que* P_k *termine em* $Q_{\mathcal{A}} \times \{l\}$ $(l \in [1, d])$. *Então,* $i - j \equiv k - l \pmod{d}$.

Demonstração. Seja P_i um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_i$ com término em $Q_{\mathcal{A}} \times \{j\}$ e rótulo w. Seja P_k um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_k$ com término em $Q_{\mathcal{A}} \times \{l\}$ e rótulo w.

Sejam $P_i{}'$ e $P_k{}'$, as projeções de P_i e P_k, respectivamente, em $\mathcal{A}$. Pelo Lema 6.2 resulta que $P_i{}'$ e $P_k{}'$ são passeios vitoriosos em $\mathcal{A}$. Então, $||P_i{}'|| = ||P_k{}'||$.

Mas, pelo Lema 5.21,

$$||P_i{}'|| = d||P_i|| + i - j \quad \text{e} \quad ||P_k{}'|| = d||P_k|| + k - l \ .$$

Logo, de $||P_i{}'|| = ||P_k{}'||$, segue que

$$d||P_i|| + i - j = d||P_k|| + k - l \ .$$

Então,

$$i - j = d(||P_k|| - ||P_i||) + k - l \ .$$

Ou seja, $i - j \equiv k - l \pmod d$.

■

Podemos observar no Lema 6.3 que:

1. Se $k = i + 1$ então $l \equiv j + 1 \pmod d$.
2. Se $k = i - 1$ então $l \equiv j - 1 \pmod d$.
3. $l \neq j$. Pois, se $l = j$ então $i \equiv k \pmod d$ e, como $i, k \in [1, d]$ segue que $k = i$; o que contradiz a hipótese.

Nós continuamos a demonstração do Teorema 6.1 considerando $X_i = \|\mathcal{A}_i\|$ $(1 \leq i \leq d)$. Então, os X_i's $(1 \leq i \leq d)$ são $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^+. Além disso, podemos verificar que $\forall w \in A^+$, $wX = \infty$ se, e somente se, $\forall i \in [1, d]$, $wX_i = \infty$. Logo, $wX = \infty$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^{d} wX_i = \infty$. No que segue, vamos considerar $w \in A^+$ com $wX \neq \infty$. Então, podemos supor que $\forall i \in [1, d]$, $wX_i \neq \infty$.

Para cada $i \in [1, d]$, existe um passeio vitorioso mais alto P_i em $\mathcal{A}_i$, com rótulo w e

$$||P_i|| = w\|\mathcal{A}_i\| \quad = \quad wX_i \ . \tag{6.1}$$

Portanto, pelo Lema 6.2, para cada $i \in [1, d]$, a projeção P_i' de P_i em $\mathcal{A}$ é um passeio vitorioso e

$$||P_i'|| = w\|\mathcal{A}\| = wX \ .$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{d} ||P_i'|| = d(wX) \ . \tag{6.2}$$

Suponhamos que para cada $i \in [1, d]$, P_i termine em $Q_{\mathcal{A}} \times \{k_i\}$, para algum $k_i \in [1, d]$. Então, pelo Lema 6.3, para cada par $j,\ l \in [1, d]$, se $j \neq l$ resulta que $k_j \neq k_l$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{d} k_i = \sum_{i=1}^{d} i \ . \tag{6.3}$$

Mas, pelo Lema 5.21, para cada $i \in [1,d]$,

$$||P_i'|| = d||P_i|| + i - k_i \ .$$

Então, utilizando (6.2) e (6.3), temos que

$$d(wX) = \sum_{i=1}^{d} ||P_i'|| = \sum_{i=1}^{d}(d||P_i||+i-k_i) = \sum_{i=1}^{d} d||P_i||+\sum_{i=1}^{d} i-\sum_{i=1}^{d} k_i = d\sum_{i=1}^{d} ||P_i|| \ .$$

Logo, de (6.1),

$$wX = \sum_{i=1}^{d} ||P_i|| = \sum_{i=1}^{d} wX_i \ .$$

Assim,

$$\forall w \in A^+, \qquad wX = \sum_{i=1}^{d} wX_i = w\sum_{i=1}^{d} X_i \ .$$

Portanto,

$$X = \sum_{i=1}^{d} X_i \ .$$

A recíproca deste teorema segue da definição de $\mathcal{M}$-subconjunto simples e do fecho de $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ sob a adição.

■

Os seguintes dois lemas contêm mais propriedades relacionando passeios em $\mathcal{A}$ com passeios em cada $\mathcal{A}_i$ ($1 \le i \le d$) e têm interesse próprio.

Lema 6.4 *Seja P um passeio bem sucedido em $\mathcal{A}_i$ ($i \in [1,d]$), com término em $Q_\mathcal{A} \times \{j\}$ ($j \in [1,d]$). Se a projeção P' de P em $\mathcal{A}$ é um passeio vitorioso, então todos os passeios vitoriosos em $\mathcal{A}_i$, com rótulos iguais ao de P, terminam em $Q_\mathcal{A} \times \{k\}$, para $k \in [1,d]$, $k \le j$.*

Demonstração. Seja P um passeio ben sucedido em $\mathcal{A}_i$ com término em $Q_\mathcal{A} \times \{j\}$, de modo que a sua projeção P' em $\mathcal{A}$ seja um passeio vitorioso.

Suponhamos que exista um passeio vitorioso P_1 em $\mathcal{A}_i$, com término em $Q_\mathcal{A} \times \{k\}$, para $k > j$ e $|P_1| = |P|$.

Consideremos a projeção P_1' de P_1 em $\mathcal{A}$. Então, pelo Lema 5.21,

$$||P_1'|| = d||P_1|| + i - k \ .$$

Como P_1 é vitorioso em $\mathcal{A}_i$, segue que $||P_1|| \leq ||P||$. Então,

$$||P_1'|| \leq d||P|| + i - k \ .$$

Mas, $k > j$; então,

$$d||P|| + i - k < d||P|| + i - j \ .$$

E, pelo Lema 5.21,

$$d||P|| + i - j = ||P'|| \ .$$

Assim, concluímos que

$$||P_1'|| < ||P'|| \ .$$

O que é um absurdo, pois P' é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$.

■

Lema 6.5 *Seja P' um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$. Então, para cada $i \in [1, d]$, o i-levantamento P de P' é um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_i$.*

Demonstração. Seja P' um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$ com rótulo w e seja $i \in [1, d]$.

Consideremos o i-levantamento P de P' em $\mathcal{A}_i$. Suponhamos que P termine em $Q_\mathcal{A} \times \{j\}$, para algum $j \in [1, d]$. Então, pelo Lema 6.4, todos os passeios vitoriosos em $\mathcal{A}_i$, com rótulos iguais a w, terminam em $Q_\mathcal{A} \times \{k\}$, para algum $k \in [1, d]$, $k \leq j$.

Suponhamos que P não seja vitorioso em $\mathcal{A}_i$. Então, existe um passeio vitorioso mais alto P_1 em $\mathcal{A}_i$, com rótulo w e P_1 termina em $Q_\mathcal{A} \times \{l\}$, para algum $l \in [1, d]$, $l \leq j$.

Logo, pelo Lema 6.2, a projeção P_1' de P_1 é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$. Assim, $||P_1'|| = ||P'||$.

Mas, pelo Lema 5.21,

$$||P_1'|| = d||P_1|| + i - l \qquad \text{e} \qquad ||P'|| = d||P|| + i - j \ .$$

Então,

$$d||P_1|| + i - l = d||P|| + i - j \ .$$

Logo,

$$j - l = d(||P|| - ||P_1||) \ .$$

Mas, como P_1 é vitorioso em $\mathcal{A}_i$ e P não é, resulta que $||P_1|| < ||P||$; logo, $||P|| - ||P_1|| > 0$.

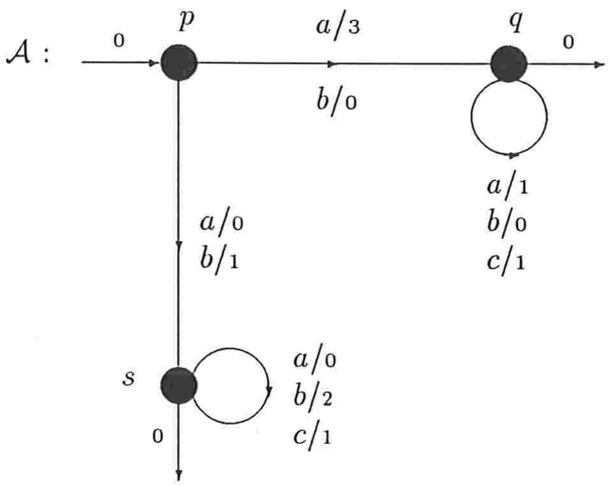
Portanto, $j - l = d(||P|| - ||P_1||) \geq d$; o que é um absurdo.

Assim, P é um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_i$.

■

A seguir, vejamos um exemplo da construção dos $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}_i$'s que foi feita na demonstração do Teorema 6.1.

Exemplo 6.1 Sejam $A = \{a, b, c\}$ e o $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$ representado a seguir.



Construimos, na Figura 6.1, o $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$, a partir de $\mathcal{A}$.

Consideremos a palavra $w = a^5b^3$. Existem em $\mathcal{A}$ somente dois passeios bem sucedidos com rótulo w:

$$P' : p \xrightarrow{a} q \xrightarrow{a^4} q \xrightarrow{b^3} q$$

$$\text{e} \quad S' : p \xrightarrow{a} s \xrightarrow{a^4} s \xrightarrow{b^3} s \ .$$

Como $||P'|| = 7$ e $||S'|| = 6$, segue que somente S' é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$, com rótulo w.

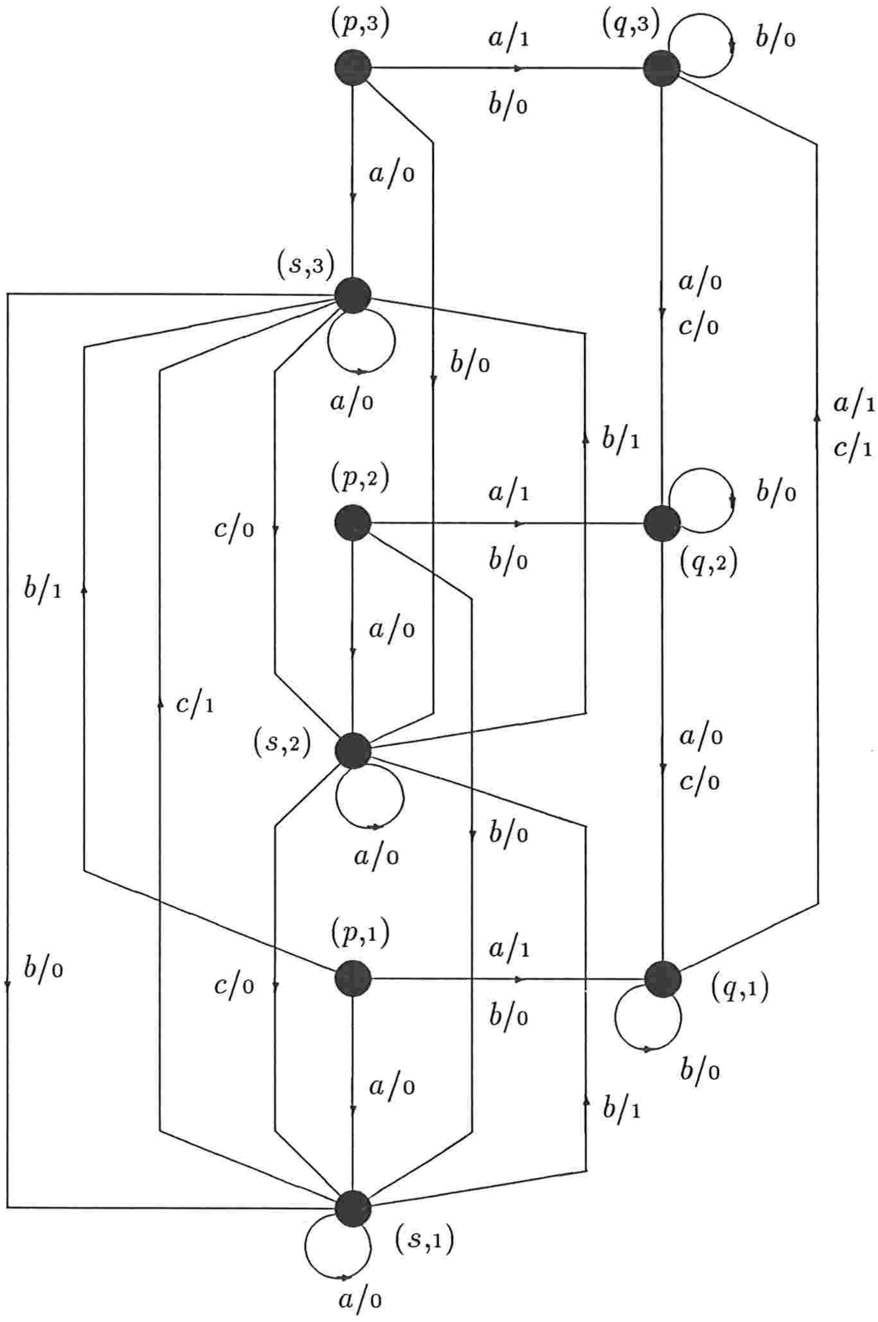


Figura 6.1: O $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$ correspondente ao $\mathcal{M}$-A-autômato $\mathcal{A}$

Os $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ são construídos a partir do $\mathcal{M}$-A-semiautômato $\mathcal{C}$, de modo que para cada $i \in [1,3]$, o estado inicial de $\mathcal{A}_i$ seja (p,i) e os estados finais de $\mathcal{A}_i$ sejam (q,j) e (s,j), $\forall j \in [1,3]$.

Agora, vejamos como são os i-levantamentos de P' e de S' em cada $\mathcal{A}_i$, para $i \in [1,3]$.

Em $\mathcal{A}_1$, o 1-levantamento P_1 de P' é dado por:

$$P_1 : (p,1) \xrightarrow{a} (q,1) \xrightarrow{a} (q,3) \xrightarrow{a} (q,2) \xrightarrow{a} (q,1) \xrightarrow{a} (q,3) \xrightarrow{b^3} (q,3)$$

e o 1-levantamento S_1 de S' é dado por:

$$S_1 : (p,1) \xrightarrow{a} (s,1) \xrightarrow{a^4} (s,1) \xrightarrow{b} (s,2) \xrightarrow{b} (s,3) \xrightarrow{b} (s,1) \ .$$

Como $||P_1|| = 3$ e $||S_1|| = 2$ e, não existem outros passeios bem sucedidos em $\mathcal{A}_1$ com rótulo w, segue que S_1 é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}_1$, com rótulo w.

Em $\mathcal{A}_2$, o 2-levantamento P_2 de P' é dado por:

$$P_2 : (p,2) \xrightarrow{a} (q,2) \xrightarrow{a} (q,1) \xrightarrow{a} (q,3) \xrightarrow{a} (q,2) \xrightarrow{a} (q,1) \xrightarrow{b^3} (q,1)$$

e o 2-levantamento S_2 de S' é dado por:

$$S_2 : (p,2) \xrightarrow{a} (s,2) \xrightarrow{a^4} (s,2) \xrightarrow{b} (s,3) \xrightarrow{b} (s,1) \xrightarrow{b} (s,2) \ .$$

Como $||P_2|| = 2$ e $||S_2|| = 2$ e, não existem outros passeios bem sucedidos em $\mathcal{A}_2$ com rótulo w, segue que ambos, P_2 e S_2, são passeios vitoriosos em $\mathcal{A}_2$, com rótulo w. Então, S_2 é um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_2$, com rótulo w, já que S_2 termina em $(s,2)$ e P_2 termina em $(q,1)$. Observe que a projeção S' de S_2 é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$, enquanto que a projeção P' de P_2 não é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$.

Em $\mathcal{A}_3$, o 3-levantamento P_3 de P' é dado por:

$$P_3 : (p,3) \xrightarrow{a} (q,3) \xrightarrow{a} (q,2) \xrightarrow{a} (q,1) \xrightarrow{a} (q,3) \xrightarrow{a} (q,2) \xrightarrow{b^3} (q,2)$$

e o 3-levantamento S_3 de S' é dado por:

$$S_3 : (p,3) \xrightarrow{a} (s,3) \xrightarrow{a^4} (s,3) \xrightarrow{b} (s,1) \xrightarrow{b} (s,2) \xrightarrow{b} (s,3) \ .$$

Como $||P_3|| = 2$ e $||S_3|| = 2$ e, não existem outros passeios bem sucedidos em $\mathcal{A}_3$ com rótulo w, segue que ambos, P_3 e S_3, são passeios vitoriosos em

$\mathcal{A}_3$, com rótulo w. Então, S_3 é um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_3$, com rótulo w, já que S_3 termina em $(s,3)$ e P_3 termina em $(q,2)$. Observe que somente a projeção S' de S_3 é um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$.

Assim, para cada $i \in [1,3]$, o i-levantamento de S' em $\mathcal{A}_i$ é um passeio vitorioso mais alto em $\mathcal{A}_i$, com rótulo w e vale que

$$||S_1|| + ||S_2|| + ||S_3|| = 6 = ||S'|| \ .$$

Na demonstração do Teorema 6.1, os $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}_i = (Q_\mathcal{A} \times [1,d], I_i, T)$ $(1 \leq i \leq d)$ foram construídos de modo que, para cada $i \in [1,d]$, o conjunto de estados iniciais de $\mathcal{A}_i$ é $\{\,(q,i) \mid q$ é um estado inicial de $\mathcal{A}\,\}$ e o conjunto de estados finais de $\mathcal{A}_i$ é $\{\,(q,j) \mid q$ é um estado final de $\mathcal{A}$ e $j \in [1,d]\,\}$. Ou seja, todos os $\mathcal{A}_i$'s têm os mesmos estados finais, mas diferem em seus estados iniciais.

Vejamos o que acontece se os estados iniciais e finais de cada $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq d)$ forem escolhidos de outra forma.

(1) Para cada $i \in [1,d]$, considere o conjunto de estados iniciais de $\mathcal{A}_i$ como sendo $\{\,(q,j) \mid q$ é um estado inicial de $\mathcal{A}$ e $j \in [1,d]\,\}$ e o conjunto de estados finais de $\mathcal{A}_i$ como sendo $\{\,(q,i) \mid q$ é um estado final de $\mathcal{A}\,\}$. Ou seja, todos os $\mathcal{A}_i$'s têm os mesmos estados iniciais, mas os finais são diferentes. Nesse caso, para cada passeio útil P' em $\mathcal{A}$, o i-levantamento P_i em cada $\mathcal{A}_i$ tem origem em $Q_\mathcal{A} \times \{k_i\}$, para algum $k_i \in [1,d]$ tal que $k_i \equiv i + ||P'|| \pmod d$. Logo, $k_l \neq k_h$ se $l \neq h$ e, para cada $i \in [1,d]$, $||P'|| = d||P_i|| + k_i - i$. Portanto, $\sum_{i=1}^{d} ||P_i|| = ||P'||$. Além disso, para cada $i \in [1,d]$, se existir mais de um passeio vitorioso soletrando uma dada palavra em $\mathcal{A}_i$, somente aqueles com origem em $Q_\mathcal{A} \times \{k\}$, para o menor k possível, terão como projeções um passeio vitorioso em $\mathcal{A}$.

(2) Seja $k \in [1,d]$. Para cada $i \in [1,d]$, o conjunto de estados iniciais de $\mathcal{A}_i$ é $\{\,(q,j) \mid q$ é um estado inicial de $\mathcal{A}$ e $j \in [1,d]\,\}$ e o conjunto de estados finais de $\mathcal{A}_i$ é $\{\,(q,k) \mid q$ é um estado final de $\mathcal{A}\,\}$. Ou seja, todos os $\mathcal{A}_i$'s têm os mesmos estados iniciais e finais. Nesse caso, para cada passeio útil P' em $\mathcal{A}$, os i-levantamentos P_i em cada $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq d)$ são todos iguais; isto é, têm origem em $Q_\mathcal{A} \times \{j\}$, para algum $j \in [1,d]$ tal que $j \equiv k + ||P'|| \pmod d$ e têm multiplicidade satisfazendo $||P'|| = d||P_i|| + j - k$. Então, pode ocorrer que $\sum_{i=1}^{d} ||P_i|| \neq ||P'||$.

(3) Seja $k \in [1,d]$. Para cada $i \in [1,d]$, o conjunto de estados iniciais de $\mathcal{A}_i$ é $\{ (q,i) \mid q$ é um estado inicial de $\mathcal{A} \}$ e o conjunto de estados finais de $\mathcal{A}_i$ é $\{ (q,k) \mid q$ é um estado final de $\mathcal{A} \}$. Nesse caso, para cada passeio vitorioso P' em $\mathcal{A}$, o i-levantamento P_i em $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq d)$ pode nem ser um passeio bem sucedido. Isto ocorre mesmo que os estados finais dos $\mathcal{A}_i$'s sejam todos diferentes.

(4) Para cada $i \in [1,d]$, considere o conjunto de estados iniciais de $\mathcal{A}_i$ como sendo $\{ (q,j) \mid q$ é um estado inicial de $\mathcal{A}$ e $j \in [1,d] \}$ e o conjunto de estados finais de $\mathcal{A}_i$ como sendo $\{ (q,j) \mid q$ é um estado final de $\mathcal{A}$ e $j \in [1,d] \}$. Nesse caso, para cada passeio vitorioso P' em $\mathcal{A}$, existem i-levantamentos P_i em $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq d)$ que são vitoriosos e que satisfazem $||P_i|| = ||P'||$ div d. Logo, $\sum_{i=1}^{d} ||P_i|| \leq ||P'||$.

Assim, dessas quatro possibilidades, somente a escolha (1) pode ser uma alternativa para definir os estados iniciais e finais dos $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}_i$'s, na demonstração do Teorema 6.1.

Corolário 6.6 *Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^*. Então, X é a soma de um número finito de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^* se, e somente se, $1X \in \{0,\infty\}$.*

Demonstração. Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^* tal que $1X \in \{0,\infty\}$. Pelo Teorema 6.1, basta considerar o caso em que $1X = 0$. Sejam os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples X_i's $(1 \leq i \leq d)$ de A^+, obtidos pelo Teorema 6.1, para $X + \mathbf{A}^+$. Para cada $i \in [1,d]$, considere o $\mathcal{M}$-subconjunto $Y_i = \min(X_i, 1)$. É claro que Y_i é simples e $1Y_i = 0$. Então, $X = \sum_{i=1}^{d} Y_i$.

A recíproca segue imediatamente das definições de $\mathcal{M}$-subconjunto simples e da operação de adição de $\mathcal{M}$-subconjuntos.

■

Corolário 6.7 *Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível de A^* tal que $1X \notin \{0,\infty\}$. Então, existe $d > 0$ e existem d $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^*,*

$X_1, \ldots, X_d$ e um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível Y de A^* tais que

$$X = \min(\sum_{i=1}^{d} X_i, Y) \ .$$

Demonstração. Basta considerar $X = \min(\sum_{i=1}^{d} X_i, 1X + \mathbf{1})$, onde os $\mathcal{M}$-subconjuntos X_i's $(1 \leq i \leq d)$ são obtidos pelo Teorema 6.1 para $X + \mathbf{A}^+$.

■

6.2 Uma caracterização de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^*

No Capítulo 3 (Proposições 3.13 e 3.15), vimos que $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ não é fechada sob a concatenação e a estrela. Este fato levou-nos a investigar o fecho de $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ sob estas operações.

O Teorema de Kleene-Schützenberger afirma que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^* = \mathcal{M}\,\mathrm{Rat}\,A^*$. Ou seja, $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^* =$ fecho racional($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$), já que $\mathcal{M}\,\mathrm{Rat}\,A^*$ é o menor subconjunto de $\mathcal{M} \ll A \gg$ racionalmente fechado (isto é, fechado sob o mínimo, a concatenção, a adição escalar e a estrela), contendo os $\mathcal{M}$-subconjuntos unitários $\mathbf{a}$, $\forall a \in A$ e os $\mathcal{M}$-subconjuntos unitários são complexidades não determinísticas.

Mostramos, a seguir, que o fecho de $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ sob o mínimo, a concatenação e a estrela, é a família de todos os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples de A^*. A demonstração é baseada na prova do Teorema de Kleene dada por McNaughton e Yamada.

Teorema 6.8 $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* =$ subfecho racional ($\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$).

Demonstração. Inicialmente, recordemos a definição de subfecho racional de $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$: é a menor família contendo $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$ e os $\mathcal{M}$-subconjuntos $\emptyset$ e $\mathbf{1}$ (que são complexidades não determinísticas) e que é fechada sob o mínimo, a concatenação e a estrela.

Como $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^* \subseteq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$ é fechada sob o mínimo, a concatenação e a estrela, resulta que

$$\text{subfecho racional}(\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*) \subseteq \mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^* \ .$$

Para verificarmos a inclusão contrária, precisamos mostrar que todo $\mathcal{M}$-subconjunto simples pode ser obtido a partir de $\mathcal{M}$-subconjuntos que são complexidades não determinísticas, utilizando somente o mínimo, a concatenação e a estrela.

Seja X um $\mathcal{M}$-subconjunto simples de A^*. Então, existe um $\mathcal{M}$-A-autômato simples $\mathcal{A} = (Q, I_{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{A}})$ tal que $\|\mathcal{A}\| = X$.

Seja $Q = \{1, 2, ..., n\}$ e consideremos, para cada $i \in Q$, o $\mathcal{M}$-subconjunto $\mathbf{i}$ de Q definido por:

$$\forall q \in Q, \quad q\mathbf{i} = \begin{cases} 0 & \text{se } q = i \\ \infty & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

Agora, consideremos os $\mathcal{M}$-A-autômatos $\mathcal{A}_{ij} = (Q, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ e os $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^*

$$A_{ij} = \|\mathcal{A}_{i,j}\| \quad (1 \leq i, j \leq n) .$$

Então,

$$\|\mathcal{A}\| = \min_{i,j \in Q} (iI_{\mathcal{A}} + A_{ij} + jT_{\mathcal{A}}) .$$

Mas, como $QI_{\mathcal{A}}$, $QT_{\mathcal{A}} \subseteq \{0, \infty\}$ (pois $\mathcal{A}$ é simples), resulta que

$$\|\mathcal{A}\| = \min\{ A_{ij} \mid i, j \in Q, iI_{\mathcal{A}} = 0 \text{ e } jT_{\mathcal{A}} = 0 \} .$$

Logo, basta mostrarmos que cada $\mathcal{M}$-subconjunto A_{ij} pode ser obtido a partir de $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^* que são complexidades não determinísticas, utilizando somente o mínimo, a concatenação e a estrela. É o que faremos a seguir.

Para cada inteiro $k \in [0, n]$, seja $C_{ij}^{(k)}$ o conjunto dos passeios úteis e não triviais de $\mathcal{A}$, com origem em i, término em j e que não passam por um estado $l > k$. Mais precisamente, se $P \in C_{ij}^{(k)}$, em cada fatoração do passeio P

$$P : i \xrightarrow{w_1} l \xrightarrow{w_2} j ,$$

com w_1, $w_2 \in A^+$, deve ocorrer que $l \leq k$.

Seja $B_{ij}^{(k)}$ o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* que, a cada w em A^*, associa o mínimo das mutiplicidades dos passeios em $C_{ij}^{(k)}$ que soletram w.

Para cada $i, j \in [1, n]$, denotemos por E_{ij} o $\mathcal{M}$-subconjunto de A^* definido por:

$$\forall a \in A, \quad aE_{ij} = (i, a, j)E_{\mathcal{A}} \quad \text{e} \quad \forall w \in A^* - A, \quad wE_{ij} = \infty .$$

Temos que:

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(0)} &= E_{ij} \\ A_{ij} &= \begin{cases} B_{ij}^{(n)} & \text{se } i \neq j \\ \min(\mathbf{1}, B_{ij}^{(n)}) & \text{se } i = j \end{cases} \\ B_{ij}^{(k)} &= \min(B_{ij}^{(k-1)}, B_{ik}^{(k-1)}(B_{kk}^{(k-1)})^* B_{kj}^{(k-1)}), \quad \forall k \in [1, n] \ . \end{aligned}$$

A última fórmula segue da observação de que um passeio $P \in C_{ij}^{(k)}$ se, e somente se, ou $P \in C_{ij}^{(k-1)}$ ou P tem uma única fatoração

$$P : i \xrightarrow{w_0} k \xrightarrow{w_1} k \xrightarrow{w_2} k \cdots k \xrightarrow{w_{s-1}} k \xrightarrow{w_s} k \xrightarrow{w_{s+1}} j \ ,$$

com $s \geq 0$, com o fator (i, w_0, k) em $C_{ik}^{(k-1)}$, com os fatores (k, w_h, k) em $C_{kk}^{(k-1)}$, $\forall h \in [1, s]$ e com o fator (k, w_{s+1}, j) em $C_{kj}^{(k-1)}$.

Por outro lado, para cada E_{ij}, definimos, para cada $a \in A$, o $\mathcal{M}$-subconjunto $\mathbf{a}_{ij}$, da seguinte forma:

$$\forall w \in A^*, \quad w\mathbf{a}_{ij} = \begin{cases} wE_{ij} & \text{se } w = a \\ \infty & \text{caso contrário} \ . \end{cases}$$

Então,

$$E_{ij} = \min\{\, \mathbf{a}_{ij} \mid a \in A \,\} \ .$$

Mas, como $\mathcal{A}$ é simples, $\forall a \in A$, $aE_{ij} \in \{\, 0, 1, \infty \,\}$. Logo, $\mathbf{a}_{ij}$ é uma complexidade não determinística.

Como cada E_{ij} pode ser obtido a partir de $\mathcal{M}$-subconjuntos de A^* que são complexidades não determinísticas, utilizando somente o mínimo, resulta das fórmulas acima que, para todo $k \in [0, n]$, $B_{ij}^{(k)}$ pode ser obtido a partir de complexidades não determinísticas, utilizando o mínimo, a concatenação e a estrela. Mas, o $\mathcal{M}$-subconjunto $\mathbf{1}$ também é uma complexidade não determinística. Portanto, cada A_{ij} pertence ao subfecho racional($\mathcal{M}$ CRec A^*). Assim,

$$\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^* \subseteq \text{ subfecho racional } (\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*) \ .$$

Portanto,

$$\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\, A^* = \text{ subfecho racional } (\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\, A^*) \ .$$

■

Conclusão

As condições necessárias referentes às famílias $\mathcal{M}\,\mathrm{Rec}\,A^*$ e $\mathcal{M}\,\mathrm{SRec}\,A^*$, que apresentamos no Capítulo 2, são muito simples, quase ingênuas. Não acreditamos nem mesmo que elas estejam próximas de serem suficientes. No entanto, a busca de condições necessárias mais precisas falhou.

Com relação a $\mathcal{M}\,\mathrm{CRec}\,A^*$, vimos uma condição necessária para um $\mathcal{M}$-subconjunto ser uma complexidade não determinística, que utiliza a definição de multiplicidade diferenciável. Esta definição, apesar de não depender de nenhum $\mathcal{M}$-A-autômato, é complexa e uma tentativa de simplificá-la poderia ser no sentido de eliminar os índices k, l e m. Com relação às propriedades algoritmicas, não sabemos se é decidível se um dado $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível é de multiplicidade diferenciável; nem mesmo fixando-se as palavras x, y, u e v, o inteiro k e a palavra z_k. Além disso, não encontramos um exemplo de um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível que não seja de multiplicidade diferenciável e que não seja uma complexidade não determinística.

A caracterização de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis como uma soma finita de $\mathcal{M}$-subconjuntos simples, que apresentamos no Capítulo 6, parece nos mostrar que os $\mathcal{M}$-subconjuntos simples refletem todas as propriedades de $\mathcal{M}$-subconjuntos reconhecíveis. Seria muito interessante encontrar aplicações dessa caracterização e, ao mesmo tempo, obter condições mais significativas para que um $\mathcal{M}$-subconjunto reconhecível seja simples. Seria também bastante interessante se pudéssemos obter aplicações de uso das operações mônus, máximo e resto.

Bibliografia

[1] J. Berstel, *Transductions and Context-Free Languages,* B.G. Teubner, Stuttgart, 1979.

[2] J. Berstel and C. Reutenauer, *Les Séries Rationnelles et Leurs Langages,* Masson, Paris, 1984.

[3] R. Cuninghame-Green, Minimax Algebra, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,* 166, Springer-Verlag, 1979.

[4] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines,* vol. A, Academic Press, New York, 1974.

[5] J. Goldstine, H. Leung and D. Wotschke, On the Relation between Ambiguity and Nondeterminism in Finite Automaton, *Technical Report* TR-89-CS-02, Department of Computer Science, New Mexico State University.

[6] K. Hashiguchi, A Decision Procedure for the Order of Regular Events, *Theoret. Comput. Sci.,* 8 (1979), 69-72.

[7] K. Hashiguchi, Limitedness Theorem on Finite Automata with Distance Functions, *J. Comput. System Sci.,* 24:2 (1982), 233–244.

[8] K. Hashiguchi, Improved Limitedness Theorem on Finite Automata with Distance Functions, *Rapport LITP Universite Paris,* 6 (1986), 86–72.

[9] K. Hashiguchi, Algorithms for Determining Relative Star Height and Star Height, *Information and Computation,* 78 (1988), 124–169.

[10] C. M. R. Kintala and P. Fisher, Computations with a Restricted Number of Nondeterministic Steps, in *Proc. of the Ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing,* (1977), 178–185.

[11] C. M. R. Kintala and D. Wotschke, Amounts of Nondeterminism in Finite Automaton, *Acta Inf.,* 13 (1980), 199–204.

[12] H. Leung, An Algebraic Method for Solving Decision Problems in Finite Automata Theory, *Ph. D. Dissertation (Technical Report 87-23),* Department of Computer Science, The Pennsylvania State University, 1987.

[13] M. P. Schützenberger, On the Definition of a Family of Automata, *Information and Control,* 4 (1961), 245–270.

[14] M. P. Schützenberger, On a Theorem of R. Jungen, in *Proc. Amer. Math. Soc.,* 13 (1961), 885–889.

[15] M. P. Schützenberger, Certain Elementary Families of Automata, in *Proc. Symposium on Mathemathical Theory of Automata,* Polytechnic Institute Brooklyn, (1962), 139–153.

[16] I. Simon, Caracterizações de Conjuntos Racionais Limitados, *Tese de Livre Docência,* Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1978.

[17] I. Simon, Limited Subsets of a Free Monoid, in *Proc. 19th. Annual Symposium on Foundations of Computer Science,* Institute of Electrical and Electronics Engineers, Piscataway, N.J., (1978), 143–150.

[18] I. Simon, The Nondeterministic Complexity of a Finite Automaton, in M. Lothaire(ed.), *Mots - mélanges offerts à M. P. Schützenberger,* 384–400, Hermes, Paris, 1990.

[19] I. Simon, Factorization Forests of Finite Height, *Theoret. Comput. Sci.,* 72 (1990), 65–94.

[20] I. Simon, Recognizable Sets with Multiplicities in the Tropical Semiring, *Lecture Notes in Computer Science,* 324, Springer-Verlag, (1988), 107–120.

[21] I. Simon, On Semigroups of Matrices over the Tropical Semiring, *Technical Report RT-MAC-8907*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1989.

Índice