

DOBRAS E CÚSPIDES
EM SISTEMAS DINÂMICOS

ANA LÚCIA FERNANDES

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM
MATEMÁTICA APLICADA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: MATEMÁTICA APLICADA
ORIENTADOR: Prof. Dr. JORGE M. SOTOMAYOR TELLO

novembro de 1995

DOBRAS E CÚSPIDES EM SISTEMAS DINÂMICOS

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e apresentada por Ana Lúcia Fernandes e aprovada
pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 8 de novembro de 1995.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello (Orientador) - IME-USP
Profa. Dra. Sônia Regina Leite Garcia - IME-USP
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia - UFG

“A Construção

**Eles ergueram a Torre de Babel
Para escalar o Céu,
Mas Deus não estava lá!
Estava ali mesmo, entre eles,
Ajudando a construir a torre.”**

M. Quintana

Aos meus pais, aos meus irmãos
e ao meu namorado.

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa de estudos que me permitiu a realização deste trabalho.

Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística da USP, em especial ao Prof. Dr. Zaqueu Nogueira Coelho Filho, pelos conselhos e pelo exemplo; à Prof^a. Dr^a. Sonia Regina Leite Garcia pela leitura atenciosa do trabalho, pelas discussões e inúmeras sugestões e ao Prof. Dr. Jorge M. Sotomayor Tello pelo difícil trabalho de orientação.

À minha família, aos meus amigos e ao meu namorado pelo apoio emocional.

Resumo

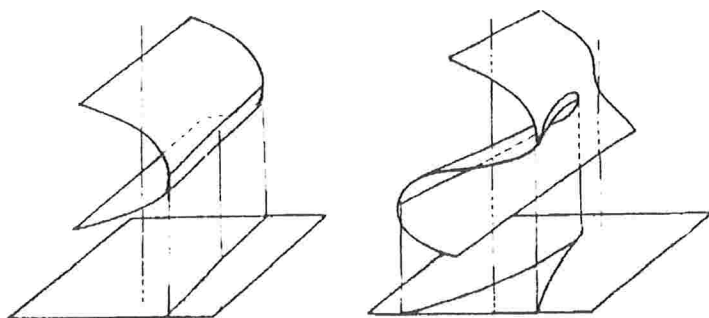
Neste trabalho são exploradas as características genéricas das dobras e das cúspides dentro do ambiente da Teoria das Singularidades, dos campos vetoriais e dos endomorfismos. Durante todo o texto é utilizado o Teorema da Preparação de Malgrange-Mather para a construção das Formas Normais. Os pontos principais são o Teorema de Whitney para aplicações do plano no plano, o Teorema da Forma Normal na vizinhança do bordo de uma variedade 3-dimensional para campos vetoriais e a estratificação de uma variedade 2-dimensional construída com a utilização dos pontos singulares de um endomorfismo.

Abstract

In this work the genericity of folds and cusps are studied explored in the contexts Singularity Theory, in the vector fields theory and in the endomorphisms theory. The Malgrange-Mather Preparation Theorem is used to construct the normal forms. The main results of this work are The Whitney Theorem about maps in the plane, The Normal Form Theorem about the behavior of vector fields on the boundary of a 3-dimensional manifold, and the stratification of a 2-dimensional manifold defined by the critical points of an endomorphism.

Introdução

O objetivo deste trabalho é o de estudar as dobras e as cúspides dentro de vários contextos. A motivação vem do fato de muitas vezes as dobras e as cúspides estarem associadas a propriedades genéricas e de estabilidade estrutural. Para explicarmos em poucas palavras que elementos matemáticos entendemos por dobra e cúspide, consideremos as seguintes figuras, representando projeções de superfícies do espaço no plano.



As superfícies S são dadas por equações $f(x, y, z) = 0$. Definimos o contorno aparente como o conjunto C dos pontos $a \in S$ tais que $(\partial f / \partial z)(a) = 0$ ou a sua projeção $p(C)$ no plano (x, y) . Um ponto $a \in S$ é um ponto dobra se ele é a origem de um sistema de coordenadas adaptado de tal forma que a superfície S é gerada pelos zeros da função $f(x, y, z) = z^2 - y$. Um ponto $a \in S$ é um ponto cúspide se ele é a origem de um sistema de coordenadas onde S é gerada pelos zeros da função $f(x, y, z) = z^3 - xz - y$.

Olhando para o contorno aparente da superfície no plano, a imagem das dobras forma a curva que separa os pontos do plano cuja imagem inversa da projeção possui dois pontos na superfície dos que não possuem nenhum. O ponto cúspide é isolado e está na fronteira de duas curvas de dobras. Qualquer vizinhança da projeção do ponto cúspide no plano tem pontos cuja imagem inversa da projeção corresponde a um ponto na superfície e pontos que possuem três imagens inversas. Também existem pontos nestas vizinhanças que possuem 2 imagens inversas, sendo que uma é do tipo dobra e a outra regular.

Os três contextos que escolhemos para estudar as dobras e as cúspides são: dentro do âmbito da Teoria das Singularidades; no contato de campos vetoriais com o bordo de variedades 3-dimensionais e nas singularidades de endomorfismos contratores definidos em variedades 2-dimensionais. Esta escolha pretende dar uma idéia da universalidade dos conceitos envolvidos, pois no primeiro caso não há dinâmica, no segundo temos a dinâmica de campos vetoriais e no terceiro a dinâmica discreta dos endomorfismos.

No Capítulo I estudamos as definições de dobra e cúspide e demonstramos o Teorema de Whitney, que diz que genericamente as aplicações do plano no

plano só possuem pontos regulares, dobras e cúspides. Além disto, estas aplicações são localmente estruturalmente estáveis.

No Capítulo II estudamos os tubos de fluxo definidos a partir de campos vetoriais transitórios em variedades 3-dimensionais com bordo. Usando estes tubos de fluxo analisamos os tipos de tangência que um campo estruturalmente estável pode ter no bordo da variedade.

No Capítulo III estudamos as singularidades genéricas dos endomorfismos contratores definidos numa variedade 2-dimensional sem bordo e usamos estas singularidades para definir uma estratificação especial que de certa forma detém a informação essencial sobre o endomorfismo. Ou seja, esta estratificação tem a propriedade de ser invariante por conjugação topológica.

Índice

Introdução.....	v
Capítulo I - Singularidades de Aplicações de \mathfrak{R}^2 em \mathfrak{R}^2 : Dobras e Cúspides .	1
1. Dobras e Cúspides	1
2. Desdobramentos	7
3. O Teorema de Whitney	10
Capítulo II - Fluxos Transitórios em M^3	15
1. Comportamento do Campo em Pontos do Bordo	15
2. O Teorema da Forma Normal	17
3. Campos Vetoriais Transitórios	21
4. Estabilidade Estrutural	26
Capítulo III - Endomorfismos Contratores em M^2	32
1. Endomorfismos Contratores Estruturalmente Estáveis	32
2. A Estratificação $S(F)$	34
Apêndice A - Os Teoremas da Preparação e da Divisão	42
Considerações Finais	47
Bibliografia	48

Capítulo I

Singularidades de aplicações de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 : dobras e cúspides.

O objetivo da Teoria das Singularidades é estudar as propriedades de aplicações diferenciáveis arbitrárias que sejam invariantes por mudanças de coordenadas. Citaremos o nome de alguns matemáticos que foram essenciais para o desenvolvimento desta teoria. O primeiro que citamos é M. Morse, que na década de 20 estudou os pontos críticos não-degenerados de funções reais diferenciáveis. Também destacamos os matemáticos B. Malgrange e J. Mather. Em 1963, Malgrange demonstrou a versão C^∞ do Teorema da Preparação (por volta de 1880 Weierstrass enunciou e demonstrou este teorema para funções analíticas). A demonstração do Teorema da Preparação apoia-se no Teorema da Divisão, cuja versão de Mather destaca-se. H. Whitney estudou as singularidades de aplicações diferenciáveis, e entre os seus trabalhos temos o teorema sobre as aplicações do plano no plano (de 1955), que demonstraremos neste capítulo. R. Thom trabalhou no desenvolvimento da teoria da transversalidade e basendo-se nisto apresentou um enfoque geral para o estudo das singularidades genéricas no seu Teorema da Classificação das Catástrofes Elementares.

O capítulo está dividido em 3 seções. Na seção 1 estudamos as definições de dobra e cúspide; na seção 2 estudamos alguns resultados que serão usados na prova do teorema de Whitney. Mais especificamente, desenvolvemos um pouco da teoria dos desdobramentos universais, enunciamos o Teorema de Sard e provamos um resultado a partir deste lema; e na seção 3 provamos o Teorema de Whitney.

1. Dobras e Cúspides

Nesta seção enunciamos e provamos o Teorema da Forma Normal Preliminar, que será usado como um passo intermediário na prova do Teorema de Whitney e damos duas definições equivalentes para a dobra e para a cúspide.

1.1 Definição

Denotamos o conjunto das funções diferenciáveis de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n por $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e o transformamos num espaço topológico quando consideramos a base de abertos $\{U(\varepsilon, k)\}$ definida da seguinte forma: para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada função contínua estritamente positiva $\varepsilon: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $F = (f_1, \dots, f_n) \in U(\varepsilon, k) \Leftrightarrow |D^\alpha f_j(x)| < \varepsilon(x)$, $j = 1, \dots, n$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$ e $x \in \mathbb{R}^m$.

1.2 Definição

Sejam $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $F(p_1) = q_1$, $G(p_2) = q_2$. Dizemos que F em p_1 é C^k -equivalente a G em p_2 se existem vizinhanças U_1 de p_1 , U_2 de p_2 , V_1 de q_1 e

V_2 de q_2 e difeomorfismos de classe C^k $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ e $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ tais que $F(U_1) \subset V_1$, $G(U_2) \subset V_2$, $\varphi(p_1) = p_2$, $\psi(q_1) = q_2$ e $G\varphi = \psi F$ em U_1 , isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ U_1 & \xrightarrow{\quad} & V_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ U_2 & \xrightarrow{\quad} & V_2 \\ & G & \end{array} \quad \text{é comutativo.}$$

Como um abuso de linguagem diremos que duas aplicações são equivalentes se forem C^∞ -equivalentes.

1.3 Definição

Uma aplicação $F \in C^\infty(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ é dita localmente estruturalmente estável em $p_1 \in \mathfrak{M}$ se para qualquer vizinhança V_p de p_1 em \mathfrak{M} existir uma vizinhança \mathfrak{U} de F em $C^\infty(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ tal que se $H \in \mathfrak{U}$, então existe $p_2 \in V_p$ com F em p_1 equivalente a H em p_2 .

1.4 Definição

Sejam $p \in \mathfrak{M}$ e $F \in C^\infty(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Se $DF(p): \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ não é sobrejetora, dizemos que p é um ponto crítico ou singular de F , caso contrário, p é dito um ponto regular. O conjunto crítico de F é denotado por $\Sigma_F = \{p \in \mathfrak{M}: DF(p): \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N} \text{ não é sobrejetora}\}$.

Os elementos de $\mathfrak{N} - F(\Sigma_F)$ são chamados de valores regulares de F .

É imediato que se $m < n$, $\Sigma_F = \mathfrak{M}$.

1.5 Definição

Diremos que uma propriedade é genérica para um conjunto de aplicações se este possui um subconjunto residual no qual a propriedade é válida.

1.6 Teorema da Forma Normal Preliminar

Sejam $F \in C^\infty(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $p \in \mathfrak{M}$ e $q \in \mathfrak{N}$ tais que $F(p) = q$ e seja $k = \text{posto}(DF(p))$. Então existe um sistema de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_m)$ de \mathfrak{M} onde F pode ser escrita na forma $F(x) = (x_1, \dots, x_k, f_1(x), \dots, f_{n-k}(x))$ numa vizinhança da origem.

demonstração

Usando translações podemos tomar $p = 0 \in \mathfrak{M}$ e $q = 0 \in \mathfrak{N}$. Neste sistema de coordenadas F se escreve $F(y) = (g_1(y), \dots, g_n(y))$, com $F(0) = 0$.

Como $\text{posto}(DF(0)) = k$, mudando, se necessário, a numeração das coordenadas podemos supor que

$$\left| \frac{\partial(g_1, \dots, g_k)(0)}{\partial(y_1, \dots, y_k)} \right| \neq 0.$$

Logo, numa vizinhança da origem, podemos fazer a mudança de coordenadas $y \rightarrow x$, onde x é dado por

$$x_1 = g_1(y), \dots, x_k = g_k(y),$$

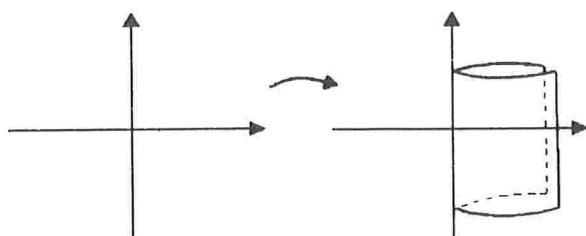
$$x_{k+1} = y_{k+1}, \dots, x_m = y_m.$$

Nas novas coordenadas F se escreve $F(x) = (x_1, \dots, x_k, f_1(x), \dots, f_{n-k}(x))$, c.q.d.

1.7 Definição

Seja $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto dobra de F se as seguintes condições são satisfeitas:

- i) F tem posto 1 em p , isto é, $DF(p)$ tem posto 1.
- ii) Σ_F é curva regular numa vizinhança de p em \mathbb{R}^2 , e além disto, se $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e tem o mesmo polinômio de Taylor de ordem 2 num ponto $q \in \mathbb{R}^2$ que F em p , então Σ_G é curva regular numa vizinhança de q em \mathbb{R}^2 .
- iii) Σ_F e $\text{Ker}(DF(p))$ são transversais em p , isto é, $\text{Ker}(DF(p)) + T_p \Sigma_F = T_p \mathbb{R}^2$.



Na figura temos o plano (x, y) sendo dobrado e levado no semi-plano $\{x \geq 0\}$ pela aplicação $F(x, y) = (x^2, y)$.

1.8 Observação

Escolhemos esta maneira de definir dobra porque ressalta o caráter geométrico da mesma, mas existem outras maneiras equivalentes. De fato, será mais conveniente trabalharmos com a seguinte definição.

1.9 Definição

Seja $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto dobra de F se através de uma mudança de coordenadas podemos escrever $F(x, y) = (x, f(x, y))$ numa vizinhança de p , onde $f_y(p) = 0$ e $f_{yy}(p) \neq 0$.

1.10 Proposição

As definições 1.7 e 1.9 são equivalentes.

demonstração

(\Leftarrow)

Suponhamos que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto dobra segundo 1.9. Mostremos que p é um ponto dobra segundo 1.7.

Se num sistema de coordenadas adequado e numa vizinhança de p podemos escrever $F(x, y) = (x, f(x, y))$, então $DF(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_x(x, y) & f_y(x, y) \end{bmatrix}$

logo $f_y(p) = 0$ significa que $DF(p)$ tem posto 1.

Nestas coordenadas, $\Sigma_F = \{(x, y): f_y(x, y) = 0\}$. Por hipótese $f_{yy}(p) \neq 0$, logo $f_{xy}(p)dx + f_{yy}(p)dy \neq 0$ o que implica em Σ_F ser uma curva regular próximo a p e vale o mesmo para uma aplicação $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ que tenha o mesmo polinômio de Taylor de ordem 2 que F . De fato, se isto acontece para G em q , então existem um sistema de coordenadas no qual G se escreve $G(x, y) = (x, g(x, y))$. Além disto, o polinômio de Taylor de ordem 2 de g é o mesmo de f , e reaplicando o raciocínio anterior, $\Sigma_G = \{(x, y): g_y(x, y) = 0\}$ é uma curva regular.

Afirmamos que Σ_F e $\text{Ker}(DF(p))$ são transversais.

De fato, tomamos o vetor $(-f_{yy}(p), f_{xy}(p))$ que é tangente a Σ_F e o vetor $(0, 1)$ que é um gerador de $\text{Ker}(DF(p))$. Como $f_{yy}(p) \neq 0$, estes dois vetores geram \mathbb{R}^2 e por definição, Σ_F e $\text{Ker}(DF(p))$ são transversais.

(\Rightarrow)

Se $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto dobra para $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ segundo 1.7, mostremos que p é um ponto dobra segundo 1.9.

Se $DF(p)$ tem posto 1, por 1.6, existe um sistema de coordenadas no qual F se escreve $F(x, y) = (x, f(x, y))$, com $f_y(p) = 0$. (Aqui estamos fazendo um pequeno abuso de notação e continuamos chamando o ponto dobra de p , apesar da mudança de coordenadas).

Como Σ_G é uma curva regular numa vizinhança de um ponto q onde G tem o mesmo polinômio de Taylor de ordem 2 que F , temos que $f_{xy}(p) \neq 0$ ou $f_{yy}(p) \neq 0$. De fato, se $f_{xy}(p) = f_{yy}(p) = 0$, o polinômio de Taylor de ordem 2 de F é $P_2F(x, y) = (x, ax + bx^2)$ e $\Sigma_{P_2F} = \mathbb{R}^2$, contrariando o fato de Σ_{P_2F} ser uma curva regular.

De Σ_F e $\text{Ker}(DF(p))$ serem transversais, os vetores $(-f_{yy}(p), f_{xy}(p))$ e $(0, 1)$ geram \mathbb{R}^2 , implicando em $f_{yy}(p) \neq 0$.

Com isto terminamos de demonstrar a equivalência das duas definições.

1.11 Observação

A dobra canônica é a aplicação $d(x, y) = (x, y^2)$. Verifiquemos que a origem é um ponto dobra para esta aplicação usando a definição 1.9.

$d(x, y) = (x, f(x, y))$, onde $f(x, y) = y^2$.
 $f_y(0) = 0$ e $f_{yy}(0) = 2 \neq 0$.

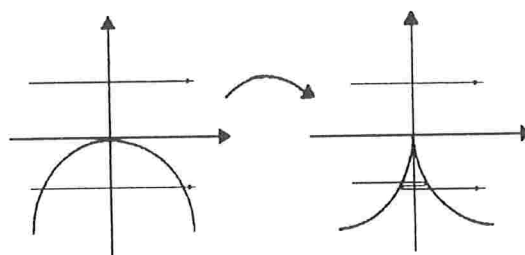
Portanto a origem é um ponto dobra para a aplicação d .

1.12 Definição

Seja $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto cúspide de F se as seguintes condições são satisfeitas:

i) F tem posto 1 em p , isto é, $DF(p)$ tem posto 1.

- ii) Σ_F é curva regular numa vizinhança de p em \mathbb{R}^2 , e se $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e tem o mesmo polinômio de Taylor de ordem 2 num ponto $q \in \mathbb{R}^2$ que F em p , então Σ_G é uma curva regular numa vizinhança de q em \mathbb{R}^2 .
- iii) $F|_{\Sigma_F}$ é de ordem dois em p , isto é, $(F|_{\Sigma_F})'(p) = 0$ e $(F|_{\Sigma_F})''(p) \neq 0$.



Na figura temos que a área interior da parábola é dobrada duas vezes pela aplicação $F(x, y) = (x^3 + xy, y)$.

1.13 Observação

Analogamente ao caso da dobra, escolhemos esta definição de cúspide para ressaltar o caráter geométrico, mas trabalharemos com a seguinte definição equivalente.

1.14 Definição

Seja $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto cúspide de F se através de uma mudança de coordenadas podemos escrever $F(x, y) = (x, f(x, y))$ com $f_y(p) = f_{yy}(p) = 0$, $f_{xy}(p) \neq 0$ e $f_{yyy}(p) \neq 0$. Aqui cometemos um abuso de linguagem e continuamos chamando de p o ponto cúspide, apesar da mudança de coordenadas.

1.15 Proposição

As definições 1.12 e 1.14 são equivalentes.

demonstração

(\Leftarrow)

Se p é um ponto cúspide para uma função F segundo 1.14, provemos que a definição 1.12 também é satisfeita.

Analogamente ao caso da dobra a condição $f_y(p) = 0$ implica em $DF(p)$ ter posto 1 e $f_{xy}(p) \neq 0$ implica em $\Sigma_G = \{(x, y): g_y(x, y) = 0\}$ ser uma curva regular numa vizinhança de q se G tem o mesmo polinômio de Taylor de ordem 2 em q que F tem em p .

Resta apenas verificar que $F_{|\Sigma_F}$ é de ordem dois em p , isto é, $(F_{|\Sigma_F})'(p) = 0$ e $(F_{|\Sigma_F})''(p) \neq 0$. Para simplificar vamos considerar que $p = 0$.

Como $f_y(0) = 0$ e $f_{xy}(0) \neq 0$, pelo Teorema das Funções Implícitas, existe $\gamma \in C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ tal que $f_y(\gamma(y), y) = 0$ e $\gamma(0) = 0$.

Derivando a equação acima temos $f_{yy}(\gamma(y), y) + f_{xy}(\gamma(y), y)\gamma'(y) = 0$.
Na origem, $f_{xy}(0)\gamma'(0) = 0$. Como $f_{xy}(0) \neq 0$, necessariamente $\gamma'(0) = 0$.

Derivando novamente, temos

$$2f_{xyy}(\gamma(y), y)\gamma'(y) + f_{yyy}(\gamma(y), y) + f_{xxy}(\gamma(y), y)(\gamma'(y))^2 + f_{xy}(\gamma(y), y)\gamma''(y) = 0.$$

Na origem, $f_{yyy}(0) + f_{xy}(0)\gamma''(0) = 0$. De $f_{yyy}(0) \neq 0$ e $f_{xy}(0) \neq 0$, temos $\gamma''(0) \neq 0$.

Agora vamos analisar $F_{|\Sigma_F} = (\gamma(y), f(\gamma(y), y))$.

$$(F_{|\Sigma_F})'(y) = (\gamma'(y), f_x(\gamma(y), y)\gamma'(y) + f_y(\gamma(y), y)) = (\gamma'(y), f_x(\gamma(y), y)\gamma'(y))$$

$$(F_{|\Sigma_F})''(y) = (\gamma''(y), f_{xx}(\gamma(y), y)(\gamma'(y))^2 + f_{xy}(\gamma(y), y)\gamma'(y) + f_x(\gamma(y), y)\gamma''(y))$$

Na origem, temos,

$$(F_{|\Sigma_F})'(0) = (\gamma'(0), f_x(\gamma(0), 0)\gamma'(0)) = (0, 0)$$

$$(F_{|\Sigma_F})''(0) = (\gamma''(0), f_{xx}(\gamma(0), 0)(\gamma'(0))^2 + f_{xy}(\gamma(0), 0)\gamma'(0) + f_x(\gamma(0), 0)\gamma''(0)) = (\gamma''(0), f_x(\gamma(0), 0)\gamma''(0))$$

Como $\gamma''(0) \neq 0$, $F_{|\Sigma_F}$ é de ordem dois na origem.

Com isto temos que p também é um ponto cúspide segundo **1.12**.

(\Rightarrow)

Se p e F satisfazem as condições para a definição **1.12** então também satisfazem as condições para a definição **1.14**.

Analogamente ao caso dobra, como $DF(p)$ tem posto 1, por **1.6** existe um sistema de coordenadas no qual podemos escrever $F(x, y) = (x, f(x, y))$ numa vizinhança de p e $f_y(p) = 0$.

Se tivéssemos $f_{yy}(p) \neq 0$, teríamos que Σ_F e $\text{Ker}(DF(p))$ seriam transversais e $(F_{|\Sigma_F})' \neq 0$, contrariando a hipótese de $F_{|\Sigma_F}$ ser de ordem 2 em p , então $f_{yy}(p) = 0$. Mas para Σ_G ser uma curva regular para G com o mesmo polinômio de Taylor de ordem 2 que F , necessariamente temos $f_{xy}(p)dx + f_{yy}(p)dy \neq 0$, logo $f_{xy}(p) \neq 0$.

Resta verificar que $F_{|\Sigma_F}$ ser de ordem 2 em p implica que $f_{yyy}(p) \neq 0$.

De fato, basta seguirmos o caminho inverso na análise que fizemos acima para concluir que $f_{yyy}(p) \neq 0$ implica em $F_{|\Sigma_F}$ ser de ordem 2 para chegarmos a esta conclusão.

Com isto demonstramos a equivalência entre estas duas definições.

1.16 Observação

A aplicação $c(x, y) = (x, xy - y^3)$ é a cúspide canônica. Verifiquemos que a origem é um ponto cúspide para esta aplicação usando a definição **1.14**.

$$c(x, y) = (x, f(x, y)), \text{ onde } f(x, y) = xy - y^3.$$

$$f_y(0) = 0, f_{yy}(0) = 0, f_{xy}(0) = 1 \neq 0 \text{ e } f_{yyy}(0) = -3 \neq 0.$$

Portanto a origem é um ponto cúspide para a aplicação c .

2. Desdobramentos

Nesta seção estudamos um pouco sobre o desdobramento de uma função necessário para a construção da equivalência entre as cúspides. O Teorema de Sard e o lema decorrente dele serão usados na prova da genericidade das aplicações que só possuem pontos regulares, dobras e cúspides.

2.1 Definição

Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Um *desdobramento a r parâmetros* de f é uma função $F \in C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $F(0, y) = f(y)$ numa vizinhança da origem de \mathbb{R}^n .

2.2 Definição

Seja $F \in C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ um desdobramento de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Um desdobramento $G \in C^\infty(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é dito *induzido* por F se existem aplicações $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$ e $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$, tais que

$$(i) \varphi(0, y) = y,$$

$$(ii) G(v, y) = F(\psi(v), \varphi(v, y)) + \gamma(v)$$

se verificam para (v, y) numa vizinhança aberta da origem em $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n$. Dizemos que φ é a transformação de variáveis e ψ a transformação de parâmetros.

2.3 Definição

Dois desdobramentos $F \in C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $G \in C^\infty(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de uma mesma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ são equivalentes se $r = s$ e G é induzido por F , de tal modo que a transformação de parâmetros ψ seja um difeomorfismo local.

2.4 Definição

Um desdobramento é dito *versal* quando ele induz todos os desdobramentos da função. Se o número de parâmetros de um desdobramento versal é mínimo, ele é dito um desdobramento *universal*.

2.5 Proposição

Dois desdobramentos universais de uma mesma função são equivalentes.

Referência para a demonstração desta proposição: [12].

2.6 Definição

Uma aplicação de classe C^r $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita uma submersão se para todo $p \in \mathbb{R}^m$ a diferencial $Dh: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetora.

2.7 Lema

Seja $F \in C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $F(0, 0) = 0$ um desdobramento a r parâmetros de uma função f . Suponhamos que X é um campo de vetores C^∞ numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$ tal que

$$1) X = \partial/\partial t_1 + \sum_{i=2, \dots, r} \xi_i(t) \partial/\partial t_i + \sum_{i=1, \dots, n} X_i(t, y) \partial/\partial y_i$$

$$2) X \cdot F = 0.$$

Então existe uma submersão $h_0 \in C^\infty(\mathfrak{N}^r, \mathfrak{N}^{r-1})$, $h_0(0) = 0$ tal que F é isomorfo à $F_1 \circ h_0$ (isto é, existe um difeomorfismo φ tal que $F = \varphi \circ F_1 \circ h_0$), numa vizinhança da origem, onde F_1 é a restrição de F ao subespaço $t_1 = 0$.

Referência para a demonstração deste lema: [12].

2.8 Teorema

Seja $f(y) = y^3$. O desdobramento a dois parâmetros $F(t, y) = y^3 + t_0 y + t_1$ é um desdobramento universal de f .

demonstração

Seja $G(u, y)$, $u \in \mathfrak{N}^r$ um desdobramento qualquer de y^3 .

Então $G(u, y) = y^3 + g(u, y)$, $g(0, y) = 0$.

Afirmamos que todo $h \in C^\infty(\mathfrak{N}^{r+1}, \mathfrak{N})$, com $h(0) = 0$, pode se escrever

$$(1) \quad h(u, y) = \lambda(u, y) \partial G / \partial y + \alpha(u) + \beta(u)y, \quad \alpha, \beta \in C^\infty(\mathfrak{N}^r, \mathfrak{N}), \quad \lambda \in C^\infty(\mathfrak{N}^{r+1}, \mathfrak{N}),$$

De fato, temos $(\partial G / \partial y)(u, y) = 3y^2 + (\partial g / \partial y)(u, y)$,

$$(\partial^2 G / \partial y^2)(u, y) = 6y + (\partial^2 g / \partial y^2)(u, y), \text{ e}$$

$$(\partial^3 G / \partial y^3)(u, y) = 6 + (\partial^3 g / \partial y^3)(u, y).$$

Na origem, $(\partial G / \partial y)(0, 0) = 0$, $(\partial^2 G / \partial y^2)(0, 0) = 0$ e $(\partial^3 G / \partial y^3)(0, 0) = 6 \neq 0$. $(\partial g(0) / \partial y^i) = 0$ porque G é desdobramento de y^3 . Logo, $\partial G / \partial y$ é regular de ordem 2 em y , e usando o Teorema da Divisão por Ordem 2 (A.3) podemos dividir h por $\partial G / \partial y$ e obter a igualdade (1).

Definimos agora um desdobramento H que é soma de F e G :

$$H(u, t, y) = y^3 + g(u, y) + t_0 y + t_1.$$

Como H é um desdobramento de y^3 e pelo raciocínio acima $\partial H / \partial y$ é regular de ordem 2, podemos dividir $\partial H / \partial u_1 - \partial H / \partial u_1(0, 0, 0)$ por $\partial H / \partial y$, onde $u = (u_1, \dots, u_r)$,

$$\partial H(u, t, y) / \partial u_1 - \partial H / \partial u_1(0, 0, 0) = \lambda(u, t, y) \partial H / \partial y + \alpha(u, t) + \beta(u, t)y.$$

Como o termo $-\partial H / \partial u_1(0, 0, 0)$ é constante, podemos incorporá-lo em $\alpha(u, t)$ e ficar com a forma

$$\partial H(u, t, y) / \partial u_1 = \lambda(u, t, y) \partial H / \partial y + \alpha(u, t) + \beta(u, t)y.$$

Definindo $X = \partial / \partial u_1 - \beta \partial / \partial t_0 - \alpha \partial / \partial t_1 - \lambda \partial / \partial y$, temos que $XH = 0$, e usando o lema 2.7 temos que H é isomorfo à $H_1 \circ h_1$, onde H_1 é a restrição de H à $u_1 = 0$ e h_1 é uma submersão local.

Denotamos por H_2, \dots, H_r as restrições de H aos subespaços $u_1 = u_2 = 0, \dots, u_1 = u_2 = \dots = u_r = 0$.

Por recorrência sobre r , podemos deduzir que H é isomorfo à $H_r \circ h_r$, onde $h_r \in C^\infty(\mathfrak{N}^r \times \mathfrak{N}^2, \mathfrak{N})$, $h_r(0) = 0$ é uma submersão local.

Notamos que $H_r = F$. Seja $h_0 \in C^\infty(\mathfrak{N}^r, \mathfrak{N})$, $h_0(0) = 0$ a restrição de h_r à $t = 0$. A restrição de H à $t = 0$ é igual a G , donde se deduz que G é isomorfo à $F \circ h_0$.

Logo G é induzido por F , o que implica em F ser um desdobramento universal de $f(y) = y^3$.

2.9 Teorema de Sard

Sejam $U \subset \mathfrak{N}^n$ aberto e $F \in C^\infty(U, \mathfrak{N}^p)$. O conjunto $F(\Sigma_F)$ dos valores críticos de F tem medida nula em \mathfrak{N}^p .

Uma referência para a demonstração do Teorema de Sard é [16].

2.10 Lema

Dada $f \in C^\infty(\mathfrak{N}^2, \mathfrak{N})$, o conjunto dos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ tais que $g(x, y) = f(x, y) - \lambda_1 y - \lambda_2 xy - \lambda_3 y^2 - \lambda_4 y^3$ não satisfaça "se $p \in \mathfrak{N}^2$ e $g_y(p) = g_{yy}(p) = 0$, então $g_{xy}(p) \neq 0$ e $g_{yyy}(p) \neq 0$ " tem medida nula em \mathfrak{N}^4 .

demonstração

Queremos mostrar que $\{\lambda \in \mathfrak{N}^4: g_y(p) = g_{yy}(p) = g_{xy}(p) = 0, \text{ para algum } p \in \mathfrak{N}^2\} \cup \{\lambda \in \mathfrak{N}^4: g_y(p) = g_{yy}(p) = g_{yyy}(p) = 0, \text{ para algum } p \in \mathfrak{N}^2\}$ tem medida nula.

As derivadas parciais de g são dadas por

$$\begin{aligned} g_y &= f_y - \lambda_1 - \lambda_2 x - 2\lambda_3 y - 3\lambda_4 y^2, \\ g_{yy} &= f_{yy} - 2\lambda_3 - 6\lambda_4 y, \\ g_{xy} &= f_{xy} - \lambda_2, \\ g_{yyy} &= f_{yyy} - 6\lambda_4, \end{aligned}$$

Se $g_y = g_{yy} = g_{xy} = 0$,

$$\begin{aligned} f_y &= \lambda_1 + \lambda_2 x + 2\lambda_3 y + 3\lambda_4 y^2, \\ f_{yy} &= 2\lambda_3 + 6\lambda_4 y, \\ f_{xy} &= \lambda_2, \end{aligned}$$

Usando estas equações podemos obter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ em função de x, y e λ_4 , e com isto definir a aplicação $\varphi(x, y, \lambda_4) = (\lambda_1(x, y, \lambda_4), \lambda_2(x, y, \lambda_4), \lambda_3(x, y, \lambda_4), \lambda_4)$. Esta aplicação está definida de \mathfrak{N}^3 em \mathfrak{N}^4 , logo seu conjunto critico é \mathfrak{N}^3 e pelo Teorema de Sard, a imagem desta aplicação tem medida nula.

Se $g_y = g_{yy} = g_{yyy} = 0$,

$$\begin{aligned} f_y &= \lambda_1 + \lambda_2 x + 2\lambda_3 y + 3\lambda_4 y^2, \\ f_{yy} &= 2\lambda_3 + 6\lambda_4 y, \\ f_{yyy} &= 6\lambda_4, \end{aligned}$$

Usando estas equações obtemos λ_1, λ_3 e λ_4 em função de x, y e λ_2 , e com isto definir a aplicação $\psi(x, y, \lambda_2) = (\lambda_1(x, y, \lambda_2), \lambda_2, \lambda_3(x, y, \lambda_2), \lambda_4(x, y, \lambda_2))$. Analogamente ao que fizemos acima, usamos o Teorema de Sard para concluir que a imagem desta aplicação tem medida nula.

A união de dois conjuntos de medida nula tem medida nula, e portanto concluímos o lema.

3. O Teorema de Whitney

Usando o material desenvolvido nas duas primeiras seções deste capítulo, provaremos o Teorema de Whitney.

3.1 Teorema de Whitney

Genericamente, uma aplicação $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ é, numa vizinhança de cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$, estável e equivalente à uma das seguintes formas:

- i) $G(x, y) = (x, y)$ (regular).
- ii) $G(x, y) = (x, y^2)$ (dobra).
- iii) $G(x, y) = (x, xy - y^3)$ (cúspide).

demonstração

Primeiro provaremos que todos os pontos regulares, dobras e cúspides de uma aplicação F são equivalentes aos canônicos. Depois que se $p \in \mathbb{R}^2$ é de um destes tipos para uma aplicação F , então F em p é localmente estruturalmente estável em p , e por fim que o conjunto das aplicações que só tem pontos destes tipos é genérico.

Definimos o conjunto $S \subset C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, que provaremos ser um conjunto genérico, da seguinte maneira: A primeira propriedade que exigimos para que uma aplicação F esteja em S é que F tenha posto ≥ 1 para qualquer $p \in \mathbb{R}^2$. Então, por 1.6, F se escreve localmente $F(x, y) = (x, f(x, y))$. A outra propriedade que exigimos é que se $f_y(p) = f_{yy}(p) = 0$, então $f_{xy}(p) \neq 0$ e $f_{yyy}(p) \neq 0$.

Sejam $F \in S$ e $p \in \mathbb{R}^2$. Podem ocorrer 3 casos, que são (i) $f_y(p) \neq 0$, (ii) $f_y(p) = 0$ e $f_{yy}(p) \neq 0$ ou (iii) $f_y(p) = f_{yy}(p) = 0$, $f_{xy}(p) \neq 0$ e $f_{yyy}(p) \neq 0$. Analisaremos cada um separadamente.

Na verdade, para as demonstrações das formas canônicas de F , não precisamos que F esteja em S , porque todos os resultados que obtemos são locais. Só precisamos usar que p é um ponto onde F tem posto ≥ 1 e satisfaz uma das três condições acima.

- (i) $f_y(p) \neq 0$.

É o mesmo que dizer que $DF(p)$ tem posto 2, então por 1.6, F em p é equivalente a $G(x, y) = (x, y)$ e estamos no caso regular.

- (ii) $f_y(p) = 0$ e $f_{yy}(p) \neq 0$.

Pela Proposição 1.10, p é um ponto dobra para F . Logo só nos falta demonstrar que qualquer dobra é equivalente à dobra canônica, para o que faremos uma série de mudanças de variáveis. Na primeira mudança transformaremos F tal que F e $G(x, y) = (x, y^2)$ tenham os mesmos conjuntos críticos, isto é, $\Sigma_F = \Sigma_G = \{y = 0\}$. Depois, transformaremos F tal que $F|_{\Sigma_F} = G|_{\Sigma_G} = \{y = 0\}$. E finalmente provaremos que F é equivalente à dobra canônica G . Sem perda de generalidade, suporemos que $p = 0$ e $F(0) = 0$.

- a) Podemos expressar F num sistema de coordenadas de maneira que $\Sigma_F = \Sigma_G = \{y = 0\}$.

De fato, de $f_y(0) = 0$ e $f_{yy}(0) \neq 0$ temos, pelo Teorema das Funções Implícitas, que existe uma função $\theta \in C^\infty(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ tal que $\theta(0) = 0$ e localmente $f_y(x, \theta(x)) = 0$.

Definimos a aplicação $\phi(x, y) = (x, y + \theta(x))$, ϕ é um difeomorfismo, pois

$$D\phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta'(x) & 1 \end{bmatrix}$$

Definimos $F' = F \circ \phi$, então F' em $(0, 0)$ é equivalente a F em $(0, 0)$, e $\Sigma(F') = \{(x, y) : f_y'(x, y) = f_y(x, y + \theta(x)) = 0\} = \{y = 0\}$.

Para não carregarmos a notação, denotaremos F' por F .

b) Existe um sistema de coordenadas no qual $F(\Sigma_F) = G(\Sigma_G) = \{y = 0\}$.

De fato, por 1.6, $F(x, y) = (x, f(x, y))$.

Definimos a aplicação $\psi(x, y) = (x, y - f(x, 0))$, ψ é um difeomorfismo local, pois

$$D\psi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -f_x(x, 0) & 1 \end{bmatrix}$$

Definimos $F' = \psi \circ F$, então

$$DF'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_x(x, y) - f_x(x, 0) & f_y(x, y) \end{bmatrix}$$

Logo $\Sigma_{F'} = \{(x, y) : f_y(x, y) = 0\} = \Sigma_F = \{y = 0\}$.

$$F'(\Sigma_{F'}) = \{F'(x, 0)\} = \{\psi(F(x, 0))\} = \{\psi(x, f(x, 0))\} = \{(x, f(x, 0) - f(x, 0))\} = \{(x, 0)\} = \{y = 0\}.$$

Para não carregarmos a notação, denotaremos F' por F .

c) F em $(0, 0)$ é equivalente à $G(x, y) = (x, y^2)$ em $(0, 0)$.

De fato, usando as hipóteses, a) e b) podemos supor que, numa vizinhança de p , $F(x, y) = (x, f(x, y))$, $f(x, 0) = 0$, $f_y(x, 0) = 0$ e $f_{yy}(0, 0) \neq 0$. Portanto $f(x, y) = y^2 g(x, y)$ com $g(0) = (1/2)f_{yy}(0) \neq 0$.

Seja a aplicação ϕ definida por $\phi(x, y) = (x, y\sqrt{\delta}g(x, y))$, onde $\delta = \text{sign}(g(0))$. A aplicação ϕ é um difeomorfismo local já que

$$D\phi(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\delta}g(0, 0) \end{bmatrix}$$

e $G(\phi(x, y)) = (x, y^2 \delta g(x, y)) = (x, \delta f(x, y))$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^2, 0 & \xrightarrow{F} & \mathcal{R}^2, 0 \\ \phi \downarrow & d & \downarrow \psi \\ \mathcal{R}^2, 0 & \xrightarrow{G} & \mathcal{R}^2, 0 \end{array}$$

onde $\psi(x, y) = (x, \delta y)$, é comutativo numa vizinhança da origem.

(iii) $f_y(p) = f_{yy}(p) = 0$, $f_{xy}(p) \neq 0$ e $f_{yyy}(p) \neq 0$.

Por 1.15, p é um ponto cúspide para F , então o que devemos demonstrar é que todas as cúspides são equivalentes à cúspide canônica.

a) $f(0, y)$ é equivalente à y^3 .

De fato, como $f(0) = f_y(0) = f_{yy}(0) = 0$ e $f_{yyy}(0) \neq 0$, então $f(0, y) = y^3 g(y)$, $g(0) \neq 0$. Definimos $\varphi(y) = y(g(y))^{1/3}$.

Como $\varphi_y(0) = (g(0))^{1/3} \neq 0$, φ é difeomorfismo local e $f(0, y) = [\varphi(y)]^3$, logo $f(0, y)$ é equivalente à y^3 .

b) F é equivalente à $G(x, y) = (x, y^3 - xy)$.

Por 2.7, $y^3 + t_0 y + t_1$ é um desdobramento universal de y^3 , então qualquer desdobramento induzido por este se escreve da forma $y^3 + u_0(x)y + u_1(x)$, $u_0(0) = u_1(0) = 0$. Logo F é equivalente à $G(x, y) = (x, y^3 + u_0(x)y + u_1(x))$, $u_0(0) = u_1(0) = 0$. Eliminamos $u_1(x)$ trasladando a imagem por $(0, -u_1(x))$, em cada ponto (x, y) .

A condição $f_{xy}(0) \neq 0$ nestas coordenadas quer dizer que $u_{0x}(0) \neq 0$. Portanto u_0 é um difeomorfismo local. Trocando a coordenada x por $-u_0(x)$ temos que F se escreve $G(x, y) = (x, y^3 - xy)$, c.q.d.

S é um conjunto de aplicações localmente estruturalmente estáveis.

Devemos provar que se $F \in S$, então para cada $p \in \mathbb{R}^2$ e para cada vizinhança V_p de p , existe uma vizinhança \mathcal{V} de F em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que se $G \in \mathcal{V}$, então existe $p_1 \in V_p$ tal que F em p é equivalente a G em p_1 .

Se p é um ponto regular de F , como as matrizes de posto 2 formam um conjunto aberto e denso no espaço das matrizes 2×2 , existe uma vizinhança \mathcal{V} de F em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que se $G \in \mathcal{V}$, G tem posto 2 em p e, conseqüentemente, numa vizinhança de p . Pelo Teorema 1.6, F em p é equivalente a G em p , logo F é localmente estruturalmente estável em p .

Se p é um ponto dobra para F , existe uma vizinhança V_p de p na qual F tem posto ≥ 1 , e se tomarmos uma vizinhança \mathcal{V} de F suficientemente pequena teremos que qualquer H nesta vizinhança tem posto ≥ 1 em V_p . Nas coordenadas originais, $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ e $H(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ em V_p . Usamos o teorema 1.6 para escrever F na forma $F(x, y) = (x, f(x, y))$ numa vizinhança da origem, e como as derivadas parciais de f_i e h_i estão próximas e H tem posto ≥ 1 em V_p , também podemos usar o teorema 1.6 para levar p para a origem e escrever H na forma $H(x, y) = (x, h(x, y))$ numa vizinhança da origem e os difeomorfismos usados para esta mudança de variáveis estão próximos dos usados para a mudança de variáveis que deixou F na forma normal. Com isto queremos garantir que as derivadas parciais de f e h estão próximas. Como p é um ponto dobra para F e foi levado na origem pela mudança de coordenadas, $f_y(0) = 0$ e $f_{yy}(0) \neq 0$, portanto f_y muda de sinal na vizinhança da origem e se H está suficientemente próxima de F o mesmo acontece para h_y , e portanto existe um ponto p_1 próximo de p que é levado num ponto q_1 próximo da origem tal que $h_y(q_1) = 0$ e $h_{yy}(q_1) \neq 0$. Por 1.10, temos que

p_1 é um ponto dobra para H , e pelo item (ii) da demonstração deste teorema, F em p é equivalente à H em p_1 . Portanto F é localmente estruturalmente estável em p .

Se p é um ponto cúspide para F , seguindo um raciocínio análogo ao do caso dobra temos que se H está suficientemente próximo de F usamos o teorema 1.6 duas vezes para escrever $F(x, y) = (x, f(x, y))$ e $H(x, y) = (x, h(x, y))$ numa vizinhança da origem com mudanças de coordenadas próximas e levando p para a origem. Nestas coordenadas, $f_y(0) = f_{yy}(0) = 0$, $f_{xy}(0) \neq 0$ e $f_{yyy}(0) \neq 0$. Como h está próxima de f e as condições $f_{xy}(0) \neq 0$ e $f_{yyy}(0) \neq 0$ são condições abertas, elas valem para f e para h numa vizinhança da origem e implicam que f_y e f_{yy} mudam de sinal, já que na origem estas duas funções se anulam. Mais ainda, como $f_{yy}(0) = 0$, existe uma curva na qual f_y se anula. Isto implica que h_y se anula sobre uma curva e h_y e h_{yy} também mudam de sinal na vizinhança da origem. Existe um ponto no qual ambas se anulam simultaneamente.

S é um conjunto genérico

Para cada $N \in \mathbb{N}$, seja $B_N \subset \mathbb{R}^2$ a bola fechada centrada na origem e de raio N . Seja $S_N = \{F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : F \text{ só tem pontos regulares, dobras e cúspides em } B_N\}$.

S_N é aberto para cada $N \in \mathbb{N}$.

De fato, se $F \in S_N$, F é localmente estruturalmente estável nos pontos de B_N , e como B_N é compacto, podemos tomar uma vizinhança \mathcal{V} de F em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ pequena o suficiente para que se $G \in \mathcal{V}$, então $G \in S_N$.

S_N é denso para cada $N \in \mathbb{N}$.

Seja $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, vamos mostrar que para cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$ existe uma vizinhança V_p de p e uma vizinhança \mathcal{V} de G em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que toda $G' \in \mathcal{V}$ pode ser aproximada por $F' \in \mathcal{V}$ tal que F' só tem pontos regulares, dobras e cúspides em V_p . De fato, como as aplicações de posto ≥ 1 em B_N formam um aberto e denso em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ (não demonstraremos este fato aqui, apenas diremos que é uma decorrência do Teorema de Transversalidade de Thom II.2.7, ver, p. ex., [16]), G pode ser arbitrariamente aproximado por uma aplicação $F_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ com posto ≥ 1 em B_N . Dado um ponto $p \in B_N$, seja V_p uma vizinhança de p na qual podemos fazer uma mudança de coordenadas e escrever $F_1(x, y) = (x, f_1(x, y))$. Pelo lema 2.10, F_1 pode ser arbitrariamente aproximada por uma aplicação F_λ , tal que F_λ só tem pontos regulares, dobras e cúspides em V_p . Mais ainda, as aplicações da família F_λ aproximam todas as aplicações numa vizinhança \mathcal{V} de G mantendo a propriedade de só terem pontos regulares, dobras e cúspides em V_p , logo estas aplicações formam um conjunto denso. Já sabíamos que S_N formava um conjunto aberto, e pelos mesmos argumentos temos que as aplicações que só tem pontos regulares, dobras e cúspides em V_p também formam um aberto. Como B_N é compacto, podemos cobri-lo com um número finito de vizinhanças do tipo de V_p e intersectando as aplicações que em cada V_p só tem pontos regulares, dobras e cúspides, temos que S_N resulta num conjunto aberto e denso.

Como cada S_N é aberto e denso e $S = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} S_N$, S é um conjunto residual.

Com isto terminamos de demonstrar o Teorema de Whitney.

3.2 Observações

- 1) Se M e N forem duas variedades diferenciáveis 2-dimensionais compactas, o resultado do Teorema de Whitney é mais forte. O conjunto genérico das aplicações de $C^\infty(M, N)$ é formado pelas aplicações que só tem pontos regulares, dobras e cúspides, as imagens das dobras só se encontram duas a duas e transversalmente e imagens de cúspides não coincidem com imagens de outras singularidades. Prova-se que as aplicações deste conjunto são globalmente estáveis, isto é, a equivalência entre as aplicações vale em M , e não apenas numa vizinhança de cada ponto.
- 2) Se restringirmos o nosso estudo para aplicações próprias, também prova-se que genericamente uma aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 é globalmente estável (com a mesma terminologia da observação acima). Lembramos que uma aplicação contínua definida entre subconjuntos de espaços vetoriais de dimensão finita é própria quando a imagem inversa de todo compacto é compacta.

Capítulo II

Fluxos Transitórios em M^3

Neste capítulo estudamos os fluxos transitórios em variedades 3-dimensionais compactas, conexas e com bordo não vazio. Encontramos a forma normal em pontos de bordo para um conjunto aberto e denso de campos vetoriais e notamos que novamente nos deparamos com as dobras e as cúspides. O motivo de restringirmos o nosso estudo aos campos transitórios é podermos nos concentrar na análise do contato do campo com o bordo, sem nos preocuparmos com os elementos críticos e as separatrizes.

As principais referências para este capítulo são os trabalhos de P. Percell [13] e J. Sotomayor [17], que se preocuparam em estudar o problema da estabilidade estrutural para campos vetoriais em variedades compactas com bordo. A maioria dos autores de trabalhos anteriores nesta área ignorou o problema das variedades com bordo, trabalhando com campos que nunca são tangentes ao bordo ou estão definidos sobre variedades compactas sem bordo. Nesta linha estão, por exemplo, os trabalhos de Smale, Thom, Whitney, Robbin, Mather e outros. São exceções os trabalhos de Peixoto e Pugh, conforme [13].

Neste capítulo M denotará uma variedade compacta, 3-dimensional, C^∞ , com bordo $V \subset C^\infty$, mergulhada numa variedade N 3-dimensional, C^∞ , sem bordo. O conjunto $\mathcal{X}(N)$ denotará os campos vetoriais C^∞ definidos sobre N e cada campo $X \in \mathcal{X}(M)$ será considerado como restrição a M de um campo $X' \in \mathcal{X}(N)$.

As seções estão divididas da seguinte maneira: na primeira estudaremos o comportamento do campo em pontos do bordo e sob algumas condições construiremos uma estratificação especial de V ; na segunda seção usaremos o Teorema da Preparação para provar o Teorema da Forma Normal; a terceira seção trata dos campos vetoriais transitórios e a quarta e última seção tem como tema central a prova do Teorema da Estabilidade Estrutural.

1. Comportamento do Campo em Pontos do Bordo.

Nesta seção definiremos uma condição de regularidade local sobre o comportamento de um campo vetorial X no bordo de M . Quando X satisfaz esta condição, o bordo de M poderá ser decomposto pelas subvariedades $\Gamma_0(X)$, $\Gamma_1(X)$ e $\Gamma_2(X)$, que serão definidas.

1.1 Definição

O conjunto dos campos vetoriais $\mathcal{X}(N)$ se torna um espaço topológico quando consideramos a base de abertos $\{U(\varepsilon, k)\}$ definida da seguinte forma: para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $\varepsilon > 0$ temos que $F \in U(\varepsilon, k) \Leftrightarrow |D^\alpha(F \circ \varphi_x^{-1})\varphi_x(x)| < \varepsilon$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$ e $x \in N$ e onde $\varphi_x: V_x \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma carta local definida numa vizinhança de x .

1.2 Definição

Dada uma aplicação C^r , $r \geq 1$, $f: M \rightarrow N$, dizemos que f é uma *imersão* se para cada $p \in M$, $Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetora. Uma imersão é chamada *mergulho* se $f: M \rightarrow f(M) \subset N$ é um homeomorfismo quando se considera $f(M)$ com a topologia induzida de N . Neste caso, $f(M)$ é uma subvariedade de N e dizemos que está *mergulhada* em N .

1.3 Notação

Por conveniência, usaremos uma função para trabalharmos com o bordo de V , ao invés de tratá-lo como uma subvariedade. De fato, existe $\beta \in C^\infty(N, \mathfrak{R})$ tal que:

(a) $\beta^{-1}(0) = V$.

(b) 0 é valor regular de β .

Observamos que a função β só está definida globalmente se a variedade M for orientável. Caso contrário podemos considerar β definida localmente numa vizinhança de cada ponto.

1.4 Definição

Seja β satisfazendo 1.3. Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz a *condição local* se para cada inteiro não-negativo k a aplicação $(\beta, X\beta, \dots, X^k\beta): M \rightarrow \mathfrak{R}^{k+1}$ tem 0 como valor regular, onde $X^{j+1}\beta = X(X^j\beta)$.

1.5 Observação

Se X satisfaz a condição local, então a aplicação definida acima não deve atingir 0 quando $k \geq 3 = \dim(M)$. De fato, se isto acontecesse, 0 não poderia ser valor regular, por causa da dimensão do espaço de chegada.

Em particular, X não pode se anular em nenhum ponto de V , pois caso contrário, $X^k\beta$ seria nulo para qualquer k neste ponto. Outra implicação deste fato é que cada órbita só encontra o bordo de M num conjunto discreto (e, como M é compacto, de cardinalidade finita) de pontos.

1.6 Lema

A definição 1.4 é independente da escolha da função β satisfazendo 1.3.

1.7 Definição

Sejam β uma função satisfazendo (1.3) e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para um inteiro não negativo k definimos o *conjunto de ordem de tangência k* , $\Gamma_k(X)$ como o conjunto dos $m \in M$ tais que

$$\beta(m) = (X\beta)(m) = \dots = (X^k\beta)(m) = 0, (X^{k+1}\beta)(m) \neq 0.$$

Definimos $\Gamma_\infty(X)$ como o conjunto dos $m \in M$ tais que $(X^k\beta)(m) = 0$, para qualquer k inteiro não-negativo.

É imediato que se $m \in \Gamma_k(X)$, para algum k , então $m \in V$.

Esta definição não depende da função β escolhida.

1.8 Definição

Uma *estratificação* de M é uma coleção finita de subvariedades conexas, sem bordo e disjuntas $\{L_i\}$ tais que:

- (1) $\cup L_i = M$,
 (2) Se $i \neq j$ e $\bar{L}_i \cap L_j \neq \emptyset$, então $\bar{L}_i \supset L_j$ e $\dim L_j < \dim L_i$.

Os conjuntos $\Gamma_k(X)$ são subconjuntos de V disjuntos e sua união é V . Em particular, se só existe um número finito de componentes conexas destes conjuntos eles formam uma estratificação de V , que é o caso quando X satisfaz a condição local. Este fato está demonstrado no Capítulo III, em 2.2.

2. O Teorema da Forma Normal

Nesta seção provaremos o Teorema da Forma Normal. Neste teorema, vemos como um campo que satisfaz a condição local pode se comportar no bordo de M . É neste ponto que entram as dobras e as cúspides neste capítulo.

2.1 Definição

Uma função $f(t, x)$ de classe C^∞ definida numa vizinhança aberta U de $(0, 0)$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é dita *p-regular em t* se p é o menor inteiro não negativo para o qual $(\partial^p f / \partial t^p)(0, 0)$ é não-nula.

2.2 Teorema da Preparação

Se U é uma vizinhança aberta de $(0, 0)$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ é *p-regular em t*, então existe um intervalo J contendo $0 \in \mathbb{R}$, uma n -bola aberta S contendo $0 \in \mathbb{R}^n$ e funções

$$Q \in C^\infty(J \times S, \mathbb{R}),$$

$$\text{e } H_j \in C^\infty(S, \mathbb{R}), j = 1, \dots, p$$

tais que $J \times S \subset U$ e $\forall (t, x) \in J \times S$,

$$a) Q(t, x) \neq 0,$$

$$b) f(t, x) = Q(t, x) \left[t^p + \sum_{j=1, \dots, p} H_j(x) t^{j-1} \right]$$

O Teorema da Preparação será provado no Apêndice A.

2.3 Teorema da Forma Normal

Seja $X \in \mathcal{X}(M)$ a restrição de um campo $X' \in \mathcal{X}(N)$ e suponhamos que X satisfaz a condição local. Se $m_0 \in \Gamma_k(X)$, então podemos encontrar coordenadas (t, x_1, x_2) numa vizinhança U de m_0 em N , que se anulam em m_0 e tais que $X'|_U = \partial/\partial t$ e em U , $\beta(m) = t(m)^{k+1} + \sum_{j=1, \dots, k} x_j(m) t(m)^{j-1}$.

demonstração

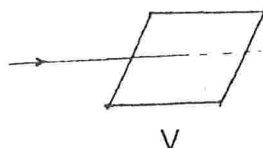
Sejam β uma função definida em N que satisfaz 1.3 e (s, y_1, y_2) um sistema de coordenadas para N definido numa vizinhança U de m_0 tal que m_0 é a origem deste sistema e $X'|_U = \partial/\partial s$. A existência deste sistema de coordenadas é garantida pelo Teorema do Fluxo Tubular (ver, p. ex., [14]). Observamos que ao tomarmos as coordenadas (t, x_1, x_2) , estamos transformando o campo X' num campo "reto" na vizinhança U .

Por 1.6 temos $0 \leq k \leq 2$, e para cada $m_0 \in V$ queremos encontrar um sistema de coordenadas numa vizinhança de m_0 tais que β é dada por:

se $m_0 \in \Gamma_0(X)$, $\beta(m) = t(m)$,
se $m_0 \in \Gamma_1(X)$, $\beta(m) = t(m)^2 + x_1(m)$,
e se $m_0 \in \Gamma_2(X)$, $\beta(m) = t(m)^3 + x_1(m) + x_2 t(m)$.

Se $m_0 \in \Gamma_0(X)$, $\beta(m_0) = 0$ e $X'\beta(m_0) \neq 0$. No sistema de coordenadas (s, y_1, y_2) , m_0 é a origem e $X'\beta(0) = \partial\beta(0)/\partial s \neq 0$, ou seja, β é 1-regular em s no ponto 0. Logo, por 2.2, e diminuindo U se necessário, existem funções $q: U \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_1: S \rightarrow \mathbb{R}$, onde S é uma 2-bola aberta contendo a origem, tais que quando $m \in U$ temos $q(m) \neq 0$ e $\beta(m) = q(m) \gamma(m)$, onde $\gamma(m) = s(m) + h_1(y(m))$ e $y = (y_1, y_2)$. Como $\beta(0) = 0$ e $q(0) \neq 0$, $\gamma(0) = 0$ e como $s(0) = 0$, $h_1(0) = 0$. Fazemos a mudança de variáveis $t = s + h_1(y)$, então $X' = \partial/\partial s = \partial/\partial t$ e $\gamma(m) = t(m)$.

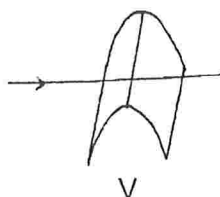
Como $q(m) \neq 0$ em U , dividindo-se β por q , temos outro sistema de coordenadas no qual localmente β se escreve $t(m)$.



Na figura temos que V é dada localmente pela função $\beta(m) = t$ e o fluxo por $X'(m) = \partial/\partial t$.

Se $m_0 \in \Gamma_1(X)$, $\beta(m_0) = X'\beta(m_0) = 0$ e $X'^2\beta(m_0) \neq 0$. No sistema (s, y_1, y_2) , temos $X'\beta(0) = \partial\beta(0)/\partial s = 0$ e $\partial^2\beta(0)/\partial s^2 \neq 0$, ou seja, β é 2-regular em s no 0. Logo, por 2.2, diminuindo U se necessário, existem funções $q: U \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_i: S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, tais que quando $m \in U$ temos $q(m) \neq 0$ e $\beta(m) = q(m) \gamma(m)$, onde $\gamma(m) = s(m)^2 + h_1(y(m)) + h_2(y(m))s(m)$ e $y = (y_1, y_2)$. Analogamente ao caso acima, $h_i(0) = 0$. Fazemos a mudança de variáveis $t = s + h_2(y)/2$, e temos $t(0) = 0$, $X' = \partial/\partial s = \partial/\partial t$ e $\gamma = s^2 + h_1(y) + h_2(y)s = (t - h_2(y)/2)^2 + h_1(y) + h_2(y)(t - h_2(y)/2) = t^2 - th_2(y) - h_2(y)^2/4 + h_1(y) + th_2(y) - h_2(y)^2/2 = t^2 + g_1(y)$.

A aplicação $g_1 \circ \gamma$ tem posto 1 em m_0 porque $(\gamma, \partial\gamma/\partial t): U \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem posto 2 em m_0 . Logo, se tomarmos $(t, x_1, x_2) = (t, g_1 \circ \gamma, y_2)$ como um novo sistema de coordenadas, teremos $X' = \partial/\partial t$ e $\gamma(m) = t(m)^2 + x_1(m)$, numa vizinhança de m_0 . Como $q(m) \neq 0$ em U , dividindo-se β por q , temos outro sistema de coordenadas no qual β se escreve localmente $t(m)^2 + x_1(m)$.

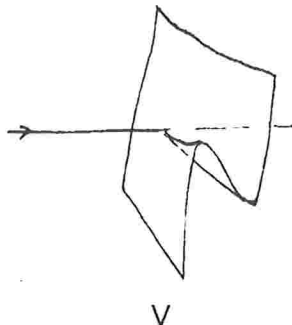


Na figura temos que V é dada localmente pela função $\beta(m) = t^2 + x_1$ e o fluxo por $X'(m) = \partial/\partial t$.

Se $m_0 \in \Gamma_2(X)$, $\beta(m_0) = X'\beta(m_0) = X'^2\beta(m_0) = 0$ e $X'^3\beta(m_0) \neq 0$. No sistema (s, y_1, y_2) , temos $X'\beta(0) = \partial\beta(0)/\partial s = \partial^2\beta(0)/\partial s^2 = 0$ e $\partial^3\beta(0)/\partial s^3 \neq 0$, ou seja, β é 3-regular em s no 0. Logo, por 2.2, e diminuindo U se necessário, existem funções $q: U \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_i: S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ tais que quando $m \in U$ temos $q(m) \neq 0$ e $\beta(m) = q(m) \gamma(m)$, onde $\gamma(m) = s(m)^3 + h_1(y(m)) + h_2(y(m))s + h_3(y(m))s(m)^2$ e $y = (y_1, y_2)$. Novamente temos $h_i(0) = 0$. Fazemos a mudança de variáveis $t = s + h_3(y)/3$, e temos $t(0) = 0$ e $X' = \partial/\partial s = \partial/\partial t$.

$$\gamma(m) = s^3 + h_1(y) + h_2(y)s + h_3(y)s^2 = (t - h_3(y)/3)^3 + h_1(y) + h_2(y)(t - h_3(y)/3) + h_3(y)(t - h_3(y)/3)^2 = t^3 - t^2h_3(y) + th_3(y)^2/3 - h_3(y)^3/27 + h_1(y) + th_2(y) - h_2(y)h_3(y)/3 + t^2h_3(y) - 2h_3(y)^2/3 + h_3(y)^3/9 = t^3 + g_1(y) + g_2(y)t.$$

A aplicação $(g_1 \circ \gamma, g_2 \circ \gamma)$ tem posto 2 em m_0 porque $(\gamma, \partial\gamma/\partial t, \partial^2\gamma/\partial t^2): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem posto 3 em m_0 . Logo, se tomarmos $(t, x_1, x_2) = (t, g_1 \circ \gamma, g_2 \circ \gamma)$ como um novo sistema de coordenadas, teremos $X' = \partial/\partial t$ e $\gamma(m) = t(m)^3 + x_1(m) + x_2(m)t$, numa vizinhança de m_0 . Como $q(m) \neq 0$ em U , dividindo-se β por q , temos outro sistema de coordenadas no qual β se escreve localmente $t(m)^3 + x_1(m) + x_2(m)t$.



Na figura temos que V é dada localmente pela função $\beta(m) = t^3 + x_1 + x_2t$ e o fluxo por $X'(m) = \partial/\partial t$.

Para demonstrarmos o teorema da abertura e densidade dos campos vetoriais que satisfazem a condição local precisamos do seguinte lema:

2.5 Lema

Seja P uma variedade tal que existe um difeomorfismo $h: P \rightarrow M$ e seja $Z \in \mathcal{X}(P)$. Então $\Gamma_k(Dh \circ Z \circ h^{-1}) = h(\Gamma_k(Z))$ para cada inteiro não-negativo k e se Z satisfaz a condição local, $Dh \circ Z \circ h^{-1} \in \mathcal{X}(M)$ também satisfaz a condição local.

demonstração

Seja β definida em N e satisfazendo 1.3. Então $\beta \circ h$ é uma função sobre P satisfazendo as condições análogas sobre esta variedade. Portanto, Z satisfazendo a condição local significa que para todo inteiro não-negativo k , a aplicação $(\beta \circ h, Z(\beta \circ h), \dots, Z^k(\beta \circ h)): P \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ tem 0 como valor regular. Também, temos que um ponto $p \in \partial P$ está em $\Gamma_k(Z)$ se esta aplicação é nula em p e $Z^{k+1}(\beta \circ h)(p) \neq 0$.

Mas $(Dh \circ Z \circ h^{-1})(\beta) = [Z(\beta \circ h)] \circ h^{-1}$, pela definição da função tangente Dh e, por indução, $(Dh \circ Z \circ h^{-1})^r(\beta) = [Z^r(\beta \circ h)] \circ h^{-1}$, $\forall r \in \mathbb{N}$.

2.6 Definição

Sejam P e Q variedades de classe C^k , $S \subset Q$ uma subvariedade de classe C^k e $f: P \rightarrow Q$ uma aplicação de classe C^r , $k, r \geq 1$. Dizemos que f é transversal a S em um ponto $p \in P$ se $f(p) \notin S$ ou $Df_p(T_p P) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} Q$. Dizemos que f é transversal a S se é transversal em todo ponto $p \in P$.

Dadas duas subvariedades S_1 e $S_2 \subset Q$, dizemos que S_1 é transversal a S_2 se a inclusão $i: S_1 \rightarrow Q$ é transversal a S_2 .

2.7 Teorema da Transversalidade de Thom

Sejam P e Q variedades de classe C^∞ , $S \subset Q$ uma subvariedade. O conjunto $\{f \in C^\infty(P, Q): f \text{ é transversal a } S\}$ é residual em $C^\infty(P, Q)$. Se S for fechado, este conjunto será aberto.

Referência para a demonstração: [16].

2.8 Definição

Definimos o espaço $J^k(n, p)$ de jatos de ordem k , ou k -jatos, das aplicações diferenciáveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^p que aplicam $0 \in \mathbb{R}^n$ em $0 \in \mathbb{R}^p$ da seguinte maneira: um k -jato $z \in J^k(n, p)$ é uma classe de equivalência segundo a relação que identifica duas aplicações diferenciáveis f e g , $f(0) = 0$ e $g(0) = 0$, se $\frac{|f(x) - g(x)|}{|x|^k} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$.

Se f é uma aplicação diferenciável, o k -jato que a contém é denotado por $j^k f(0)$ e f é um representante de z . Cada k -jato tem um representante polinomial de grau k , que é o polinômio de Taylor de grau k em $0 \in \mathbb{R}^n$ de um representante f .

Dados um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma função diferenciável $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$, associamos à f a aplicação $j^k f: U \rightarrow J^k(n, p)$, definida por $j^k f(x) = j^k f_x(0)$, onde $f_x(u) = f(x + u) - f(x)$. Esta aplicação chama-se extensão de f ao espaço de k -jatos.

2.9 Lema

Sejam U uma vizinhança de V na qual X' não se anula e $W^k(X', U)$ a subvariedade do espaço $J^k(N, \mathbb{R})$ formada pelos k -jatos que se anulam em U . Então a aplicação $(\beta, X'\beta, \dots, X'^k \beta): N \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ tem 0 como valor regular se e somente se o k -jato $j^k \beta$ é transversal à subvariedade $W^k(X', U)$.

2.10 Teorema

O subconjunto de $\mathcal{I}(M)$ dos campos vetoriais satisfazendo a condição local é aberto e denso em $\mathcal{I}(M)$.

demonstração

abertura

A abertura segue de f ser uma função contínua sobre M implicar que para cada inteiro não-negativo k , a aplicação $X \rightarrow X^k f$ de $\mathcal{I}(M)$ em $C^\infty(M)$ é contínua.

De fato, se $X \in \mathcal{I}(M)$ satisfaz a condição local, então para cada inteiro não negativo k , a aplicação $(\beta, X\beta, \dots, X^k \beta): M \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ tem o zero como valor regular, e se $k \geq 3$, esta aplicação não deve atingir o zero. Por continuidade podemos encontrar uma vizinhança \mathcal{U} de X em $\mathcal{I}(M)$ tal que se $Y \in \mathcal{U}$, a aplicação $(\beta, Y\beta, \dots, Y^k \beta): M \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ não atinge o zero se $k \geq 3$. Diminuindo um pouco esta vizinhança, se $k < 3$ e $Y \in \mathcal{U}$, o zero quando atingido é valor regular da aplicação acima também pela continuidade.

densidade

Suponhamos que $X \in \mathcal{X}(M)$. Queremos mostrar que X pode ser aproximado por um campo arbitrariamente próximo e que satisfaz a condição local.

Cada campo sobre M pode ser aproximado por um campo com um número finito de singularidades e estas podem ser deslocadas para fora do bordo, logo podemos supor que X não tem singularidades em V .

Sejam X' uma extensão de X a N e β definida em N satisfazendo 1.3. Já que a condição local é uma restrição sobre campos vetoriais, β pode ser considerada fixa com o seu conjunto nulo igual a V . Entretanto, agora é mais conveniente considerar o campo vetorial fixo e variar β .

Interpretando a condição local como uma condição sobre β , usamos o lema 2.9 e o Teorema da Transversalidade de Thom 2.7 para aproximar β por funções arbitrariamente próximas $\gamma: N \rightarrow \mathfrak{N}$ tal que para todo inteiro não-negativo k a aplicação $(\gamma, X'\gamma, \dots, X'^k\gamma): N \rightarrow \mathfrak{N}^{k+1}$ tem 0 como valor regular.

Pelo Teorema Isotópico Transversal (ver, por ex., [1]), existem difeomorfismos $h: N \rightarrow N$, tanto mais próximos da identidade quanto γ está de β , tais que $h(\gamma^{-1}(0)) = \beta^{-1}(0) = V$.

Portanto, segue que existem difeomorfismos h de N próximos da identidade tais que $X'|_{h^{-1}(M)}$ satisfaz a condição local.

Pelo lema 2.5, $\text{Th}^\circ(X'|_{h^{-1}(M)})^\circ(h^{-1}|_M) \in \mathcal{X}(M)$ satisfaz a condição local e está próximo de X porque h está próximo da Identidade. Com isto temos a densidade dos campos que satisfazem a condição local.

3. Campos Vetoriais Transitórios

Nesta seção estudamos o conjunto dos campos vetoriais transitórios sobre M . Primeiro mostraremos que é exatamente o conjunto dos campos vetoriais que não se anulam e são gradiente para alguma métrica de Riemann sobre M . Então, mostraremos que o conjunto dos campos vetoriais transitórios é sempre um conjunto aberto e não vazio de $\mathcal{X}(M)$. Apresentaremos a condição global que um campo transitório deve satisfazer para ser estruturalmente estável. Esta condição regula o conjunto de trajetórias que são tangentes a V em mais de um ponto.

3.1 Definição

Um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ é um campo *transitório* se cada curva integral de X só está definida para um intervalo de tempo finito.

3.2 Observação

Dizer que X é um campo transitório é equivalente a dizer que o conjunto não-errante de X é vazio. Em particular, X não tem pontos singulares nem órbitas periódicas.

3.3 Definição

Sejam P_1 e P_2 variedades arbitrárias, $X_1 \in \mathcal{I}(P_1)$ e $X_2 \in \mathcal{I}(P_2)$ são C^k -equivalentes se existe um difeomorfismo de classe C^k entre P_1 e P_2 levando trajetórias de X_1 em trajetórias de X_2 , preservando o sentido das mesmas. Abusando da linguagem, dizemos que os campos são equivalentes se forem C^∞ -equivalentes. Um campo é estruturalmente estável se é equivalente a cada campo vetorial em uma de suas vizinhanças.

3.4 Definição

Sejam um campo $Y \in \mathcal{I}(N)$, Σ a imagem de uma 2-bola aberta mergulhada em N e transversal a Y e J um intervalo de \mathbb{R} , aberto, limitado e contendo 0. Quando o fluxo de Y , $\phi: \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ restrito a $J \times \Sigma$ é um difeomorfismo no subconjunto de N varrido por Σ no intervalo de tempo J , chamamos o conjunto $\phi(J \times \Sigma)$ um *tubo de fluxo* e o denotamos por $T(Y, J, \Sigma)$. Observamos que um tubo de fluxo nada mais é do que um feixe de órbitas de Y , e a condição de que $\phi|_{J \times \Sigma}$ seja um difeomorfismo é necessária para evitarmos pontos singulares e órbitas periódicas totalmente contidas no tubo. Se $J = (a, b)$, os conjuntos $\phi(\{a\} \times \Sigma)$ e $\phi(\{b\} \times \Sigma)$ são ditos os extremos de $T(Y, J, \Sigma)$.

3.5 Lema

Seja $X' \in \mathcal{I}(N)$ tal que $X = X'|_M$ é transitório. Então M pode ser coberto por um número finito de tubos de fluxo cujos extremos estão fora de M .

demonstração

A existência dos tubos de fluxo é garantida pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo. Como X é transitório, a curva integral através de cada ponto de M deixa M em tempo finito positivo e negativo. Portanto, escolhendo intervalos grandes o suficiente e 2-bolas convenientes, podemos cobrir M por tubos de fluxos cujos extremos estão fora de M . A subcobertura finita segue da compacidade de M .

3.6 Definição

Uma *partição da unidade subordinada à cobertura enumerável e localmente finita por abertos $\{U_n\}$ de uma variedade M* é uma coleção $\{\varphi_n\}$ de funções reais, não negativas e de classe C^∞ tais que:

- 1) Para cada n , o suporte de φ_n está contido em U_n ;
- 2) $\sum_n \varphi_n(p) = 1, \forall p \in M$.

3.7 Lema

Sejam $X' \in \mathcal{I}(N)$ e $X \in \mathcal{I}(M)$ a sua restrição. X é transitório se e só se existe uma função derivável f definida em M tal que $Xf \equiv 1$ em M .

demonstração

(\Rightarrow)

Sejam $T_i(X', J_i, \Sigma_i)$, $i = 1, \dots, k$, uma família finita de tubos de fluxo com extremos fora de M e cobrindo M . Sobre cada um destes tubos definimos a função f_i , como a

coordenada tempo ou projeção sobre J_i . Como $X'f_i$ significa a derivada da função f_i na direção do campo X' , é claro que $X'f_i \equiv 1$ em $T_i(X', J_i, \Sigma_i)$.

Para obter uma função global sobre M usaremos uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{T_i(X', J_i, \Sigma_i) \cap M\}$ de M que tenha a propriedade de suas funções serem constantes sobre as trajetórias de X . Lembramos que toda cobertura enumerável e localmente finita (no nosso caso temos uma cobertura finita) de uma variedade admite uma partição da unidade subordinada a ela (ver, p.ex., [6]). Esta partição da unidade não é suficiente porque queremos a propriedade das funções serem constantes nas trajetórias de X . Teremos terminado com esta parte do lema quando construirmos esta partição da unidade.

Como cada Σ_i é imagem de uma 2-bola aberta, podemos tomar $\Delta_i \subset \Sigma_i$ como imagens de 2-bolas abertas de tal modo que o fecho de cada Δ_i ainda está contido em Σ_i e os tubos de fluxo $T_i(X', J_i, \Delta_i)$, $i = 1, \dots, k$ ainda cobrem M .

Para cada $i = 1, \dots, k$ seja ρ_i uma função definida em Σ_i com as seguintes propriedades:

- (a) $0 \leq \rho_i \leq 1$ sobre Σ_i ;
- (b) O suporte de cada ρ_i é compacto;
- (c) $\rho_i = 1$ em Δ_i .

Sejam π_i as projeções de $T_i(X', J_i, \Sigma_i)$ sobre Σ_i que a cada ponto da trajetória por $m \in \Sigma_i$ associam a m . Então as restrições de $\rho_i \circ \pi_i$ a $T_i(X', J_i, \Sigma_i) \cap M$ se estendem para uma função em M que é nula fora de $T_i(X', J_i, \Sigma_i) \cap M$ e constante sobre trajetórias de X . Podemos normalizar estas funções de modo que a sua soma em cada ponto de M seja 1 e com isto construir a partição da unidade desejada. Com esta partição e as funções f_i definimos a função f .

(\Leftarrow)

Como $Xf \equiv 1$, nenhum ponto de M pode ser estacionário e nenhuma órbita fechada pode estar contida em M .

Agora notamos que se m_1 e m_2 estão na mesma trajetória, então $|f(m_1) - f(m_2)|$ é o tempo que se leva de m_1 a m_2 . Como M é compacto e f é contínua, existe K tal que $|f(m)| < K$, para qualquer $m \in M$. Logo o tempo entre m_1 a m_2 é sempre finito e portanto cada curva integral fica em M somente um tempo finito, c.q.d.

3.8 Definição

Uma métrica Riemanniana numa variedade M é uma aplicação que a cada ponto $p \in M$ associa um produto interno \langle, \rangle definido no espaço tangente a M em p .

Em qualquer variedade existe uma métrica Riemanniana C^∞ . De fato, consideramos uma cobertura enumerável localmente finita (U_n) por abertos de uma variedade M tal que em cada U_n podemos fixar um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_m): U_n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e definimos a seguinte métrica $\langle, \rangle_n(q)$, $q \in U_n$, pelos valores nos elementos da base de $T_q(M)$: $\langle (\partial/\partial x_i)(q), (\partial/\partial x_j)(q) \rangle_n = \delta_{ij}$. Seja (ϕ_n) uma partição da unidade subordinada a (U_n) . A métrica em M fica definida em cada ponto $p \in M$ pela expressão $\langle, \rangle(p) = \sum_n \phi_n(p) \langle, \rangle_n(p)$.

3.9 Proposição

Sejam $X' \in \mathcal{X}(N)$ e $X \in \mathcal{X}(M)$ a sua restrição. O campo X é transitório se e só se X é um campo vetorial gradiente que não se anula para alguma métrica Riemanniana em M .

demonstração

(\Rightarrow)

Por 3.7 existe f definida em M tal que $Xf \equiv 1$. Seja f' extensão de f a N .

Agora tomamos uma cobertura de M por tubos de fluxos $T_i(X', J_i, \Sigma_i)$, $i = 1, \dots, m$, com a propriedade de f' ser constante sobre cada Σ_i . Se uma métrica produto é colocada sobre $J_i \times \Sigma_i$, então os difeomorfismos determinados pelos fluxos entre $T_i(X', J_i, \Sigma_i)$ e $J_i \times \Sigma_i$ determinam uma métrica Riemanniana sobre $T_i(X', J_i, \Sigma_i)$ tal que X' é ortogonal às superfícies de nível de f' e $|X'| = 1$ em cada ponto em cada tubo de fluxo. É fácil de checar que se nós adicionamos as métricas sobre os conjuntos $T_i(X', J_i, \Sigma_i) \cap M$ usando uma arbitrária partição da unidade subordinada a esta cobertura de M por conjuntos abertos, então obtemos uma métrica global sobre M tal que X é ortogonal às superfícies de nível da f e $|X(m)| = 1$ em cada ponto $m \in M$. A primeira destas propriedades implica que X e $\text{grad}(f)$ são paralelos em cada ponto de M . Em particular, $\langle X, \text{grad}(f) \rangle = \pm |X| |\text{grad}(f)|$.

De $Xf(m) = 1$ e $|X(m)| = 1 \forall m \in M$ temos $\langle X, \text{grad}(f) \rangle = Xf = 1 = |X|^2$.

Portanto, X e $\text{grad}(f)$ têm o mesmo comprimento e direção em cada ponto, logo $X = \text{grad}(f)$ nesta métrica.

(\Leftarrow)

Existem f e uma métrica em M tal que $X = \text{grad}(f)$. Então $Xf = \langle X, \text{grad}(f) \rangle = |X|^2 = \text{grad}(f)^2 > 0$, portanto $Xf(m) > 0 \forall m \in M$. Logo o campo vetorial $(1/(Xf))X$ é transitório pelo lema 3.7. Portanto X é transitório porque é multiplicação por uma função que não se nula de um campo transitório.

3.10 Proposição

O conjunto dos campos vetoriais transitórios é aberto em $\mathcal{X}(M)$.

demonstração

Usando o lema 3.7, dado um campo vetorial transitório X em M , seja f tal que $Xf \equiv 1$ sobre M . Então para todo Y numa vizinhança suficientemente pequena de X em $\mathcal{X}(M)$ temos $Yf > 0$ sobre M . Logo, por 3.7, $(1/(Yf))Y$ é transitório, e consequentemente Y também é.

3.11 Proposição

O conjunto dos campos vetoriais transitórios em M é não-vazio.

demonstração

Podemos encontrar uma função definida em M sem pontos críticos tomando uma função de Morse em N de tal modo que todos os pontos críticos estão em $N - M$. Por 3.9, o gradiente desta função com respeito a qualquer métrica Riemanniana em M é transitório.

3.12 Definição

Seja $Q \subset \mathbb{R}^m$ uma variedade. Se $\dim Q = n$, definimos a codimensão de Q em \mathbb{R}^m como $k = m - n$.

3.13 Definição

Sejam P_1, \dots, P_r subvariedades de uma variedade Q . Um ponto $p \in \bigcap_{i=1}^r P_i$, $i = 1, \dots, r$ é dito um *cruzamento* de P_1, \dots, P_r . Um cruzamento p é dito um *cruzamento normal* se $\sum_{i=1, \dots, r} \text{codim } T_p P_i = \text{codim } \bigcap_{i=1, \dots, r} T_p P_i$,

onde $T_p P_i$ é o espaço tangente a P_i em p considerado como subespaço de $T_p Q$.

3.14 Notação

Sejam $X' \in \mathcal{X}(N)$ e $X \in \mathcal{X}(M)$ a sua restrição. Suponhamos que X é transitório e satisfaz a condição local e seja $\phi: \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ o fluxo para X' . Sejam τ uma trajetória de X e m_1, \dots, m_r os pontos onde τ intercepta V (por 1.5 são em número finito) e suponhamos que $m_i \in \Gamma_{k(i)}(X)$. Já que X não é tangente a $\Gamma_{k(i)}(X)$ em m_i , é possível tomarmos um intervalo aberto J_i tal que $\phi(J_i \times \{m_i\})$ contém τ e uma vizinhança aberta $\Delta_i(\tau)$ de m_i em $\Gamma_{k(i)}(X)$ pequena o suficiente para que $\phi(J_i \times \Delta_i(\tau))$ seja uma subvariedade mergulhada em N .

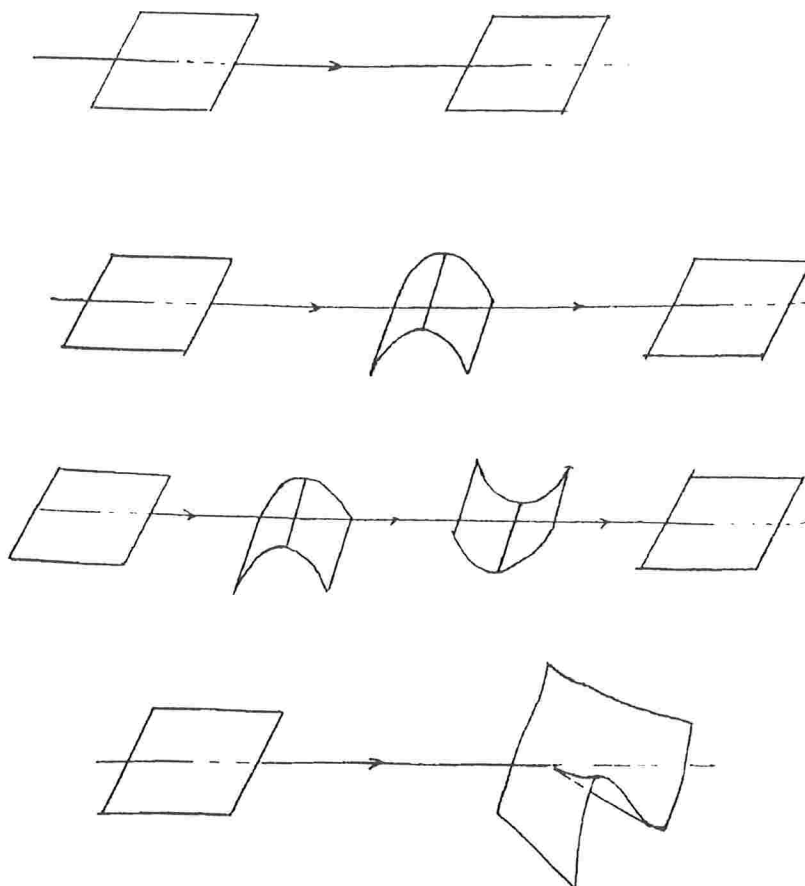
3.15 Definição

Sejam X, X' e τ como em 3.14, e seja $T(X', J, \Sigma)$ um tubo de fluxo contendo τ . Podemos supor que os conjuntos J_i e $\Delta_i(\tau)$ foram escolhidos pequenos o suficiente para que $\phi(J_i \times \Delta_i(\tau)) \subset T(X', J, \Sigma)$. Então os conjuntos $\pi(\Delta_i(\tau))$ são subvariedades mergulhadas em Σ , onde π é a projeção do tubo de fluxo sobre Σ . Dizemos que $X \in \mathcal{X}(M)$ satisfaz a *condição* $G(\tau)$ se as subvariedades $\pi(\Delta_i(\tau))$, $i = 1, \dots, r$ tem um cruzamento normal no ponto $\pi(\tau) \in \Sigma$. Dizemos que $X \in \mathcal{X}(M)$ satisfaz a *condição global* se é transitório, satisfaz a condição local e a condição $G(\tau)$ para cada trajetória τ de X .

É claro que a condição $G(\tau)$ é independente da escolha particular dos conjuntos J_i e $\Delta_i(\tau)$.

Agora vamos analisar quais cruzamentos podemos ter se X satisfaz a condição global. Primeiro notamos que $\dim T_{\pi(\tau)} \Sigma = 2$, e portanto as subvariedades mergulhadas em Σ só podem ter codimensão 0, 1, ou 2. Do Teorema da Forma Normal 2.3, temos que $\Gamma_0(X)$ tem codimensão 0, $\Gamma_1(X)$ tem codimensão 1 e $\Gamma_2(X)$ tem codimensão 2, portanto, uma órbita τ pode interceptar duas vezes $\Gamma_0(X)$, duas vezes $\Gamma_0(X)$ e uma $\Gamma_1(X)$ (por dentro de M),

uma vez $\Gamma_1(X)$ (por fora de M), duas vezes $\Gamma_0(X)$ e duas $\Gamma_1(X)$ (de maneira que as projeções sobre Σ são transversais) ou uma vez $\Gamma_0(X)$ e uma $\Gamma_2(X)$. Estas situações estão ilustradas nas figuras abaixo.



Na primeira figura temos uma órbita τ interceptando duas vezes $\Gamma_0(X)$, na segunda duas vezes $\Gamma_0(X)$ e uma $\Gamma_1(X)$, na terceira duas vezes $\Gamma_0(X)$ e duas $\Gamma_1(X)$ (de maneira que as projeções sobre Σ são transversais) e na última uma vez $\Gamma_0(X)$ e uma $\Gamma_2(X)$.

4. Estabilidade Estrutural

Nesta seção provamos o principal resultado do capítulo, que é que um campo vetorial sobre M que satisfaz a condição global é estruturalmente estável.

Seja $\psi(Y, A, Q)$ a restrição a $A \times Q$ do fluxo de Y , onde $Y \in \mathcal{I}(N)$, A é um subconjunto de \mathfrak{R} e Q é um subconjunto de N .

4.1 Lema

Sejam $Y \in \mathcal{I}(N)$ e $T(Y, J, \Sigma)$ um tubo de fluxo com extremos fora de M tal que Σ é imagem de uma 2-bola mergulhada e aberta e $\psi(Y, \bar{J}, \bar{\Sigma})$ é um mergulho. Então para cada subconjunto compacto K de $T(Y, J, \Sigma)$ existe uma vizinhança \mathcal{V} de Y tal que se $Z \in \mathcal{V}$, então $\psi(Z, J, \Sigma)$ é um mergulho e $T(Z, J, \Sigma)$ é um tubo de fluxo contendo K com extremos fora de M .

demonstração

Como $\overline{J} \times \overline{\Sigma}$ é uma variedade compacta (com quinas), o conjunto dos mergulhos em $C^\infty(\overline{J} \times \overline{\Sigma}, N)$ é aberto. Logo, como $\psi(Z, \overline{J}, \overline{\Sigma})$ depende continuamente de Z , podemos tomar \mathfrak{V} tal que se $Z \in \mathfrak{V}$, então $\psi(Z, \overline{J}, \overline{\Sigma})$ é um mergulho e $T(Z, J, \Sigma)$ é um tubo de fluxo bem definido.

Vamos mostrar que podemos tomar \mathfrak{V} tal que se $Z \in \mathfrak{V}$ os extremos de $T(Z, J, \Sigma)$ estão fora de M .

De fato, se $J = (a, b)$, a imagem de $\psi(Y, \{a, b\}, \overline{\Sigma})$ é disjunta de M , e portanto podemos diminuir \mathfrak{V} tal que se $Z \in \mathfrak{V}$, então a imagem de $\psi(Y, \{a, b\}, \Sigma)$ é disjunta de M . A imagem desta aplicação contém os extremos de $T(Z, J, \Sigma)$, que conseqüentemente estão fora de M .

Seja K um subconjunto compacto de $T(Y, J, \Sigma)$. Podemos supor sem perda de generalidade que K é conexo. Por K ser compacto, podemos diminuir \mathfrak{V} tal que se $Z \in \mathfrak{V}$, $K \cap T(Z, \overline{J}, \overline{\Sigma}) \neq \emptyset$. Já que K e o bordo de $J \times \Sigma$ são conjuntos compactos, podemos diminuir \mathfrak{V} novamente tal que se $Z \in \mathfrak{V}$, a imagem do bordo de $J \times \Sigma$ por $\psi(Z, J, \Sigma)$ é disjunta de K .

Então, se $Z \in \mathfrak{V}$, K fica inteiramente contido em $T(Z, J, \Sigma)$. Logo, a vizinhança \mathfrak{V} tem a propriedade de que se $Z \in \mathfrak{V}$, então K está contido em $T(Z, J, \Sigma)$.

4.2 Teorema

Sejam $X' \in \mathcal{X}(N)$ e $X \in \mathcal{X}(M)$ a sua restrição. Suponhamos que X é transitório, satisfaz a condição local e τ é uma trajetória para X tal que X satisfaz a condição $G(\tau)$. Então τ está contido num tubo de fluxo $T(X', J, \Sigma)$ com a propriedade de que para cada subconjunto compacto K de $T(X', J, \Sigma)$ existe uma vizinhança U de X' em $\mathcal{X}(N)$ tal que se Y_1 e $Y_2 \in U$ e $Y_1 = Y_2$ fora de K , então as restrições $Y_1|_M$ e $Y_2|_M$ são equivalentes.

demonstração

Seja β uma função sobre N que satisfaz 1.3.

Seja $T(X', J, \Lambda)$ um tubo de fluxo contendo τ . Usaremos a letra π para denotar todas as projeções $T(X', J, \Lambda) \rightarrow \Lambda$, $J \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ e $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$. Sejam m_1, \dots, m_r os pontos onde τ intersecta V e sejam $k(i)$ tais que $m_i \in \Gamma_{k(i)}(X)$. Se s é a coordenada sobre J , seja $\sigma_i = s(m_i)$.

Consideremos a função $f_0 = \beta \circ \psi(X', J, \Lambda)$ sobre $J \times \Lambda$. Para cada $i = 1, \dots, r$, esta função é regular de ordem $k(i) + 1$ no ponto $(\sigma_i, \pi(\tau))$. Portanto, segue do Teorema da Preparação que existem,

- (a) intervalos abertos disjuntos J_i , $i = 1, \dots, r$, tais que $\sigma_i \in J_i$, $J_i \subset J$ e o único zero de f_0 em $J_i \times \{\pi(\tau)\}$ é $(\sigma_i, \pi(\tau))$,
- (b) Um conjunto Σ que contém $\pi(\tau)$ e está no interior de Λ ,
- (c) uma vizinhança \mathfrak{U} de f_0 em $C^\infty(J \times \Lambda, \mathfrak{R})$, e
- (d) aplicações contínuas,
$$Q_i: \mathfrak{U} \rightarrow C^\infty(J_i \times \Sigma, \mathfrak{R}), \quad i = 1, \dots, r,$$

e $H = (H_{1,1}, \dots, H_{1,k(1)+1}, H_{2,1}, \dots, H_{r,k(r)+1}) : \mathcal{U} \rightarrow C^\infty(\Sigma, \mathfrak{R}^{d+r})$, onde $d = \sum_{i=1, \dots, r} k(i)$

tais que, se $f \in \mathcal{U}$ e $(s, y) \in J_i \times \Sigma$, temos,

(i) $Q_i(f)(s, y) \neq 0$,

(ii) $f(s, y) = Q_i(f)(s, y)[(s - \sigma_i)^{k(i)+1} + \sum_{j=1, \dots, k(i)+1} H_{i,j}(f)(s - \sigma_i)^{j-1}]$

Na verdade, a versão do Teorema da Preparação que estamos usando aqui é mais geral do que a que enunciamos em 2.2 e provamos no Apêndice A. Aqui precisamos que Q_i e $H_{i,j}$ sejam função de f_0 e estejam definidas numa vizinhança de f_0 . Uma referência para a demonstração deste teorema é [11].

Pela análise que fizemos logo após a definição 3.16, temos os seguintes casos:

(i) $r = 2$, $m_1, m_2 \in \Gamma_0(X)$,

(ii) $r = 3$, $m_1, m_3 \in \Gamma_0(X)$, $m_2 \in \Gamma_1(X)$,

(iii) $r = 1$, $m_1 \in \Gamma_1(X)$,

(iv) $r = 4$, $m_1, m_4 \in \Gamma_0(X)$, $m_2, m_3 \in \Gamma_1(X)$,

(v) $r = 2$, $m_1 \in \Gamma_0(X)$, $m_2 \in \Gamma_2(X)$.

Seja I o menor intervalo aberto que contém todos os intervalos J_i , $i = 1, \dots, r$. Então $I \subset J$ e se Σ é pequeno o suficiente, os extremos de $T(X', I, \Sigma)$ estão fora de M . Também, $\psi(X', I, \Sigma)$ é um mergulho e podemos aplicar o Lema 4.1. Sejam $\phi_i : I \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, r$, funções tais que para cada i , o suporte de ϕ_i está contido em J_i e ϕ_i é 1 sobre I_i , onde I_i é um intervalo aberto contendo σ_i .

Agora consideremos um polinômio genérico de $(q+1)$ -ésima ordem $s^{q+1} + \sum_{j=1, \dots, q+1} a_j s^{j-1}$

Se $t = s + a_{q+1}/(q+1)$, então a relação

$$t^{q+1} + \sum_{j=1, \dots, q} \theta_{q,j}(a_1, \dots, a_{q+1}) t^{j-1} = s^{q+1} + \sum_{j=1, \dots, q+1} a_j s^{j-1}$$

define funções polinomiais $\theta_{q,j}(a_1, \dots, a_{q+1})$, $j = 1, \dots, q$, cuja parte linear é a_j . Notamos que t^q não aparece no novo polinômio.

Suponhamos que $y = (y_1, y_2)$ é um sistema de coordenadas sobre Σ tal que $y_i(\pi(\tau)) = 0$. Para uma aplicação $h = (h_{1,1}, \dots, h_{1,k(1)+1}, h_{2,1}, \dots, h_{r,k(r)+1})$ de Σ em \mathfrak{R}^{d+r} , seja $A(h) : I \times \Sigma \rightarrow \mathfrak{R}^d$ definida por

$$\begin{aligned} (t^0 A(h))(s, y) &= s + \sum \phi_i(s) \cdot h_{i,k(i)+1}(y)/(k(i) + 1) \\ (x_i^0 A(h))(s, y) &= \begin{cases} \theta_{k(i),m}(h_{j,1}(y), \dots, h_{j,k(i)+1}(y)), \\ y_m, m = d+1, \dots, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

onde t é coordenada sobre \mathfrak{R} e (x_1, x_2) sobre \mathfrak{R}^2 . Notamos que $A(h)$ leva fibra em fibra se consideramos $I \times \Sigma$ e \mathfrak{R}^d como fibrados e com projeções π sobre Σ e \mathfrak{R}^2 . Afirmamos que a aplicação de Σ em \mathfrak{R}^d definida por $y \rightarrow (H_{1,1}(f_0)(y), \dots, H_{1,k(1)+1}(f_0)(y), H_{2,1}(f_0)(y), \dots, H_{r,k(r)+1}(f_0)(y))$ tem posto d em $y = \pi(\tau)$ (fato provado em [13]). Prova-se também que $H_{i,j}(f_0)(\pi(\tau)) = 0$, $\forall i, j$, portanto $A(H(f_0))(s, \pi(\tau)) = (s, 0)$. Logo, como a parte linear de $\theta_{q,j}$ é a_j , vemos que podemos supor que as coordenadas y_1, y_2 estão ordenadas de modo que $A(H(f_0))$ tem posto 3 em cada ponto de $I \times \{\pi(\tau)\}$. Portanto, se Σ é pequena o suficiente, existe uma vizinhança W de $H(f_0)$ em $C^\infty(\Sigma, \mathfrak{R}^{d+r})$ tal que se $h \in W$, $A(h)$ é um mergulho.

É claro pela construção de $A(h)$ que se $h_1, h_2 \in W$ e $h_1 = h_2$ fora de um subconjunto compacto D de Σ , então $A(h_1) = A(h_2)$ fora de $\pi^{-1}(D)$ em $I \times \Sigma$ e $A(h_1)$ e $A(h_2)$ tem as mesmas imagens, de tal modo que a aplicação $B(h_1, h_2) = A(h_2)^{-1} \circ A(h_1)$ é um

difeomorfismo de $I \times \Sigma$ que é a identidade fora de $\pi^{-1}(D)$ e leva fibras de $I \times \Sigma$ em fibras. Seja $\gamma(h)$ a função sobre $(\bigcup_{i=1, \dots, r} J_i) \times \Sigma$ definida por

$$\gamma(h)(s, y) = (s - \sigma_i)^{k(i)+1} + \sum_{j=1, \dots, k(i)+1} h_{ij}(y)(s - \sigma_i)^{j-1},$$

quando $(s, y) \in J_i \times \Sigma$.

Verificaremos que $B(h_1, h_2)$ leva o conjunto nulo de $\gamma(h_1)$ no de $\gamma(h_2)$. Sejam C_i intervalos abertos tais que $\sigma_i \in C_i$ e $C_i \subset I_i$. Podemos assumir Σ e W pequenos o suficiente para que se $h \in W$, então $A(h)[\gamma(h)^{-1}(0) \cap (J_i \times \Sigma)] \subset C_i \times \pi[A(h)(I \times \Sigma)]$ e $C_i \times \pi[A(h)(I \times \Sigma)] \subset A(h)(I_i \times \Sigma)$.

Segue que se $h_1, h_2 \in W$ e $h_1 = h_2$ fora de um subconjunto compacto de Σ , então, $A(h)[\gamma(h_1)^{-1}(0) \cap (J_i \times \Sigma)] \subset A(h_2)(I_i \times \Sigma)$.

Mas a aplicação $A(h)$ foi construída para ter a propriedade que se $h \in W$, então $\gamma(h) \circ A(h)^{-1}(t, x) = (t - \sigma_i)^{k(i)+1} + \sum_{j=1, \dots, k(i)} x_{d(i)} (t - \sigma_i)^{j-1}$

para $(t, x) \in A(h)(I_i \times \Sigma)$, onde $d(1) = 0$ e $d(i) = k(1) + \dots + k(i-1)$, $i = 2, \dots, r$. Portanto temos que se $h_1, h_2 \in W$ e $h_1 = h_2$ fora de um subconjunto compacto D de Σ , então $B(h_1, h_2)$ é um difeomorfismo de $I \times \Sigma$ que é a identidade fora de $\pi^{-1}(D)$, leva os zeros de $\gamma(h_1)$ nos zeros de $\gamma(h_2)$ e leva fibra sobre fibra.

Agora suponhamos que é dado um subconjunto compacto K de $T(X', I, \Sigma)$ e queremos encontrar a vizinhança U de X' pedida no enunciado. Pelo Lema 4.1, podemos tomar U suficientemente pequena tal que se $Y \in U$, então $\psi(Y, I, \Sigma)$ é um mergulho e $T(Y, I, \Sigma)$ é um tubo de fluxo contendo K e com extremos fora de M . Para o restante da prova, Y_1 e Y_2 denotarão um par de campos vetoriais em U tais que $Y_1 = Y_2$ fora de K .

Definimos a aplicação contínua $F: U \rightarrow C^\infty(J \times \Lambda, \mathfrak{R})$ por $F(Y) = \beta \circ \psi(Y, J, \Lambda)$ e diminuimos U para que $F(U) \subset V$ e $H(F(U)) \subset W$. Como F é contínua, mostra-se que podemos tomar Σ e U pequenos o suficiente tais que se $Y \in U$, os zeros de $F(Y)$ em $I \times \Sigma$ estão na verdade contidos em $(\bigcup_{i=1, \dots, r} J_i) \times \Sigma$. Portanto, pelo Teorema da

Preparação, se $Y \in U$, então os zeros de $F(Y)$ em $I \times \Sigma$ são os mesmos de $(\gamma \circ H \circ F)(Y)$. Notamos que $\psi(Y_1, J, \Lambda) = \psi(Y_2, J, \Lambda)$ fora de $J \times \pi(K)$. Portanto, $F(Y_1) = F(Y_2)$ fora de $J \times \pi(K)$, e, em particular, os zeros de $F(Y_1)$ fora de $J \times \pi(K)$ são os mesmos que os de $F(Y_2)$. Sejam $h_i = H(F(Y_i))$, $i = 1, 2$. Então os zeros de $\gamma(h_1)$ fora de $I \times \pi(K)$ são os mesmos que os de $\gamma(h_2)$.

Tomemos uma função $\rho: \Sigma \rightarrow [0, 1]$ que é 1 numa vizinhança de $\pi(K)$ e cujo suporte está contido num subconjunto compacto D de Σ . Seja $\underline{h} = \rho \cdot h_1 + (1 - \rho)h_2$. Podemos tomar U pequena o suficiente para que \underline{h} esteja em W . Então $\underline{h} = h_2$ fora de D mas $\gamma(\underline{h}) = (\rho \circ \pi)\gamma(h_1) + (1 - \rho \circ \pi)\gamma(h_2)$ tem os mesmos zeros que $\gamma(h_2)$. Portanto, temos a seguinte relação: $\underline{h} = h_2$ fora de D , os zeros de $\gamma(h_1)$ em $I \times \Sigma$ são os mesmos de $\beta \circ \psi(Y_1, I, \Sigma)$ e os de $\gamma(h_2)$ são os mesmos de $\beta \circ \psi(Y_2, I, \Sigma)$.

Definimos uma aplicação $\eta: T(Y_1, I, \Sigma) \rightarrow T(Y_2, I, \Sigma)$ por $\eta = \psi(Y_2, I, \Sigma) \circ B(\underline{h}, h_2) \circ \psi(Y_1, I, \Sigma)^{-1}$. Então η é um difeomorfismo que é a identidade fora de $\pi^{-1}(D)$ em $T(Y_1, I, \Sigma)$, leva trajetórias de Y_1 em trajetórias de Y_2 e $T(Y_1, I, \Sigma) \cap V$ em $T(Y_2, I, \Sigma) \cap V$.

$Y_1|_M = Y_2|_M$ fora de $T(Y_1, I, \Sigma) \cap M = T(Y_2, I, \Sigma) \cap M$ porque estes conjuntos contém $K \cap M$ e os extremos dos tubos de fluxo estão fora de M . Por isto podemos estender

$\eta|_{T(Y_1, I, \Sigma) \cap M}$ a um difeomorfismo de M que é uma equivalência entre $Y_1|_M$ e $Y_2|_M$ e é a identidade fora de $T(Y_1, I, \Sigma) \cap M$.

4.3 Corolário

Sejam $X' \in \mathcal{I}(N)$ e $X \in \mathcal{I}(M)$ a sua restrição. Se X satisfaz a condição global, então X é estruturalmente estável.

demonstração

Como M é compacto, é possível encontrarmos uma cobertura finita de M por tubos de fluxo $T_i(X', J_i, \Sigma_i)$, $i = 1, \dots, m$, que tenham a propriedade do teorema 4.1.

Para cada $i = 1, \dots, m$, seja $\{\rho_i\}$ uma partição da unidade subordinada à $T_i(X', J_i, \Sigma_i)$.

Quando $Y \in \mathcal{I}(N)$, seja $Y_0 = X'$ e $Y_j = X' + (\sum_{i=1, \dots, j} \rho_i)(Y - X')$, $j = 1, \dots, m$.

Como cada Y_{j-1} difere de cada Y_j somente no suporte de ρ_i , que é um subconjunto compacto de $T_i(X', J_i, \Sigma_i)$ e os Y_i 's dependem continuamente de Y , segue de 4.2 que existe uma vizinhança \mathcal{U} de X' em $\mathcal{I}(N)$ tal que se $Y \in \mathcal{U}$, então $Y_{j-1}|_M$ é equivalente a $Y_j|_M$, para $j = 1, \dots, m$. Portanto, quando $Y \in \mathcal{U}$, $X = Y_0|_M$ é equivalente a $Y|_M = Y_m|_M$. Logo, por continuidade, o conjunto das restrições dos campos de \mathcal{U} a M é uma vizinhança de X e X é equivalente a cada campo vetorial nesta vizinhança. Com isto temos que X é estruturalmente estável.

4.4 Teorema

O conjunto dos campos vetoriais que satisfazem a condição global é denso no conjunto de todos os campos vetoriais transitórios sobre M .

Referência para a demonstração:[13].

4.5 Lema

Sejam P_1 e P_2 variedades arbitrárias e sejam $X_1 \in \mathcal{I}(P_1)$ e $X_2 \in \mathcal{I}(P_2)$ campos vetoriais equivalentes que não se anulam. Então existe um difeomorfismo $h: P_1 \rightarrow P_2$ e uma função diferenciável $f: P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f não se anula e $X_2 = f(Th^*X_1h^{-1})$.

demonstração

Como X_1 e X_2 são equivalentes, existe um difeomorfismo $h: P_1 \rightarrow P_2$ levando trajetórias de X_1 em trajetórias de X_2 . Segue que $Th^*X_1h^{-1}$ e X_2 são linearmente dependentes em cada ponto de P_2 porque as suas trajetórias são as mesmas. Como $Th^*X_1h^{-1}$ nunca se anula, podemos tomar f como a divisão de X_2 por $Th^*X_1h^{-1}$. É imediato que a função f é diferenciável.

4.6 Lema

Se X e Y são campos vetoriais equivalentes e não nulos sobre M e X satisfaz a condição global, então Y também satisfaz a condição global.

demonstração

Pelo lema 4.5, existem um difeomorfismo h em M e uma função f em M que nunca se anula tais que $Y = f(Th^*Xh^{-1})$. Afirmamos que Th^*Xh^{-1} também satisfaz a condição global (este fato decorre de 2.5 e de difeomorfismos preservarem cruzamentos normais). A condição global é preservada pela operação de multiplicação por função não nula porque esta operação preserva a condição local, a condição $G(\tau)$ e a propriedade do campo de ser transitório.

4.7 Corolário

Se $X \in \mathcal{X}(M)$ é transitório e estruturalmente estável, então X satisfaz a condição global.

demonstração

Como X é estruturalmente estável, segue do teorema 4.4 que existe um campo vetorial que satisfaz a condição global e é equivalente a X . Basta então aplicar o lema 4.6.

4.8 Teorema

O conjunto dos campos vetoriais transitórios estruturalmente estáveis é aberto e denso no conjunto dos campos vetoriais transitórios sobre M .

demonstração

A abertura é imediata da definição de estabilidade estrutural. A densidade sai de 4.4, 4.6 e 4.7.

4.9 Corolário

Toda variedade compacta 3-dimensional C^∞ com bordo e conexa admite um campo vetorial estruturalmente estável.

demonstração

Aplicação imediata do teorema 4.8.

Capítulo III

Endomorfismos Contratores em M^2 .

Estudaremos neste capítulo os endomorfismos contratores definidos em variedades 2-dimensionais compactas. As únicas singularidades dos endomorfismos estruturalmente estáveis são a dobra, a cúspide, a bi-dobra e a dobra-dobrada. Usaremos as singularidades de um endomorfismo F estruturalmente estável para construir uma estratificação especial de M , que denotaremos $S(F)$. Provaremos que esta estratificação é invariante dentro da classe de conjugação de F e concluiremos que o número de cúspides, bi-dobras e dobras-dobradas é também invariante dentro da classe de conjugação de F .

A principal referência para este capítulo é o trabalho de J. Franke [9], que foi outro matemático que se interessou pelo problema de encontrar aplicações estruturalmente estáveis e classificá-las. Trabalhos anteriores ao de Franke foram os de M. Shub (1969) que estudou aplicações expansoras, o de Z. Nitecki (1970), que estudou os endomorfismos não-singulares do círculo e também os trabalhos de S. Smale (1967), H. Whitney (1955-58), Levine (1971), etc. No trabalho de Franke foi usada a estabilidade estrutural no sentido de Smale, porque as aplicações estão definidas de uma variedade nela própria.

1. Endomorfismos Contratores Estruturalmente Estáveis.

1.1 Definição

Sejam $M = M^2$ uma variedade compacta, 2-dimensional, conexa e sem bordo e d uma métrica sobre M . Um endomorfismo definido em M é uma aplicação $F: M \rightarrow M$ de classe C^r tal que quando existe F^{-1} , F é um difeomorfismo local. Dizemos que um endomorfismo é uma contração se para algum λ , $0 < \lambda < 1$, $d(F(p), F(q)) \leq \lambda d(p, q)$, $\forall p, q \in M$.

1.2 Definição

Denotamos o conjunto dos endomorfismos diferenciáveis de M em M por $C^\infty(M)$ e o transformamos num espaço topológico quando consideramos a base de abertos $\{U(\varepsilon, k)\}$ definida da seguinte forma: para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $\varepsilon > 0$ temos que $F \in U(\varepsilon, k) \Leftrightarrow |D^\alpha(F \circ \varphi_x^{-1})\varphi_x(x)| < \varepsilon$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$ e $x \in M$ e onde $\varphi_x: V_x \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma carta local definida numa vizinhança de x .

Por simplicidade trabalharemos com endomorfismos de classe C^r , mas segundo os trabalhos de Whitney bastaria que tivéssemos classe C^r , $r \geq 12$, para obtermos resultados análogos.

1.3 Definição

Dois endomorfismos F e G são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h: M \rightarrow M$ tal que $h \circ F = G \circ h$.

Um endomorfismo $F \in C^\infty(M)$ é C^∞ -estruturalmente estável se é topologicamente conjugado a todo G pertencente a uma de suas vizinhanças. Como fizemos nos capítulos anteriores, diremos apenas estruturalmente estável para indicar C^∞ -estruturalmente estável.

1.4 Observação

A motivação deste estudo vem novamente do trabalho de Whitney, que provou que se M e N são variedades 2-dimensionais, o conjunto $W \subset C^r(M, N)$, $r \geq 12$, das aplicações que satisfazem:

- para cada ponto $p \in M$ e cada endomorfismo F , existem coordenadas locais (no domínio e no contradomínio) em relação às quais F tem uma das seguintes formas:
 1. regular: $F(x, y) = (x, y)$,
 2. dobra: $F(x, y) = (x, y^2)$,
 3. cúspide: $F(x, y) = (x, xy - y^3)$.
- as imagens das dobras se interceptam somente duas a duas e transversalmente, e imagens de dobras e cúspides não se interceptam,

é aberto e denso em $C^r(M, N)$. Este resultado já foi observado em 1.3.2.

1.5 Notação

Denotamos por Σ_F o conjunto crítico de F , ou seja, o conjunto das singularidades de F , que são apenas dobras e cúspides se $F \in W$. Se F é uma contração, denotamos por p_F seu único ponto fixo.

1.6 Definição

Dizemos que $p, q \in M$, $p \neq q$, são coincidentes para F se existem inteiros $i, j \geq 0$ tais que $F^i(p) = F^j(q)$. Os menores inteiros satisfazendo esta relação serão chamados de índices.

1.7 Definição

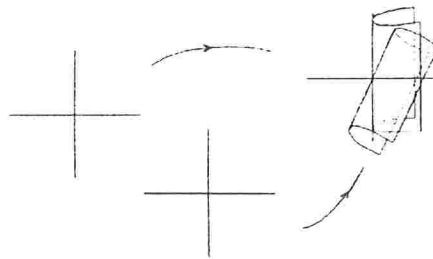
Consideremos o conjunto W definido em 1.4 no caso em que $N = M$. Seja $K \subset W$ o conjunto dos endomorfismos F que satisfazem:

- 1) F é contração;
- 2) p_F é regular e não-coincidente para F com nenhuma singularidade.
- 3) Um ponto cúspide não é coincidente para F com nenhuma outra singularidade.
- 4) Cada singularidade é coincidente com no máximo mais uma singularidade.
- 5) Se p e $q \in \Sigma_F$, $p \neq q$, são coincidentes para F com índices $i \leq j$, então $DF_p^i(T_p \Sigma_F) \oplus DF_q^j(T_q \Sigma_F) = T_{F^i(p)}M$.
Se $i = 0$, então também deve valer $DF_q^j(T_q \Sigma_F) \oplus \text{Ker} DF_p = T_p M$.

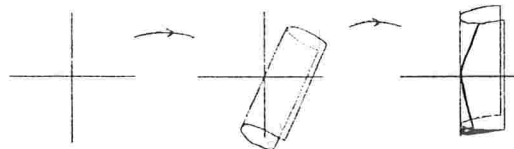
1.8 Observação

Chamamos de bi-dobra a coincidência entre duas dobras com $i, j > 0$, e de dobra-dobrada a coincidência de duas dobras com $i = 0, j > 0$. De fato, o que está acontecendo no caso da bi-dobra é a coincidência das iteradas de duas

dobras, e no caso da dobra-dobrada é a iterada de uma dobra que é dobrada outra vez. Chamamos a atenção para a diferença entre estes dois casos, que ilustraremos a seguir.



Na figura temos a imagem de duas dobras coincidindo transversalmente.



Nesta figura temos a imagem de uma dobra sendo dobrada novamente.

1.9 Teorema

O conjunto K definido em 1.7 é o conjunto dos endomorfismos contratores estruturalmente estáveis definidos em M e é aberto e denso no conjunto dos endomorfismos contratores em M .

Optamos por não demonstrar este teorema por entender que a demonstração é bastante técnica e que já fizemos demonstrações similares nos capítulos I e II. Neste capítulo optamos por trabalhar com a construção e análise da estratificação $S(F)$. A demonstração pode ser encontrada em [4]. [10]

2. A Estratificação $S(F)$.

Nesta seção usaremos as singularidades de um endomorfismo do conjunto K para construir uma estratificação da variedade M que é invariante dentro da classe de conjugação topológica do endomorfismo escolhido.

Dados uma estratificação S de M (definição II.1.8) e um endomorfismo F definido em M , podemos construir outras subdivisões desta variedade, que em alguns casos serão estratificações. Chamaremos de estratos os elementos desta subdivisões mesmo antes de verificarmos que eles formam uma estratificação. Basicamente, as operações que podemos fazer usando F e S são:

- 1) $F(S)$.

Para definir os estratos de $F(S)$, primeiro aplicamos F nos estratos de S , formando novos estratos que podem estar subdivididos por intersecções. Os estratos restantes são formados pelas componentes conexas de M menos os estratos obtidos pelo passo acima.

2) $F^{-1}(S)$.

Os estratos são as componentes conexas das imagens inversas dos estratos de S .

3) $S \cap F(S)$ e $S \cap F^{-1}(S)$.

O estrato de $S \cap F(S)$ a que pertence um ponto p é a componente conexa da intersecção dos estratos de S e $F(S)$ que contém p . A construção é análoga para $S \cap F^{-1}(S)$.

Não podemos garantir que estes conjuntos sempre formam uma estratificação porque não eliminamos, por exemplo, a possibilidade de existirem infinitos estratos.

Dada $F \in K$, para começar a construção de $S(F)$, definimos a estratificação S_1 de M da seguinte forma:

- As cúspides formam os estratos 0-dimensionais.
- As componentes conexas de $\Sigma_F - \{p \in \Sigma_F: p \text{ é cúspide}\}$ formam os estratos 1-dimensionais.
- As componentes conexas de $M - \Sigma_F$ formam os estratos 2-dimensionais.

2.1 Lema

Se $F \in K$, então F só tem um número finito de cúspides, bi-dobras e dobras-dobradas.

demonstração

Pela forma normal, existem vizinhanças em torno de cada ponto cúspide que não possuem outros pontos cúspide. Da compacidade de M segue que só existe um número finito de cúspides.

As bi-dobras são intersecções de iteradas de Σ_F e as dobras-dobradas são intersecções de Σ_F com suas iteradas. Suponhamos, por contradição, que existem infinitas coincidências. Então existe um ponto $p \in M$ que é acumulado por elas. Como as iteradas de Σ_F são conjuntos fechados, p é um ponto de intersecção entre duas iteradas de Σ_F . O ponto p não pode ser cúspide, porque pela definição, cúspide nunca é coincidente com outra singularidade. O ponto p também não pode ser uma bi-dobra ou uma dobra-dobrada porque a intersecção em p não é transversal.

2.2 Proposição

Dada $F \in K$, cada uma das seguintes subdivisões de M é uma estratificação:

$$S_1, S_2 = F(S_1), S_3 = S_1 \cap S_2, \dots, S_{2n} = F(S_{2n-1}), S_{2n+1} = S_1 \cap S_{2n}, \dots$$

demonstração

Que S_1 é uma estratificação é claro pelas formas normais e pelo lema 2.1.

Suponhamos que S_{i-1} é uma estratificação, provemos que S_i também é.

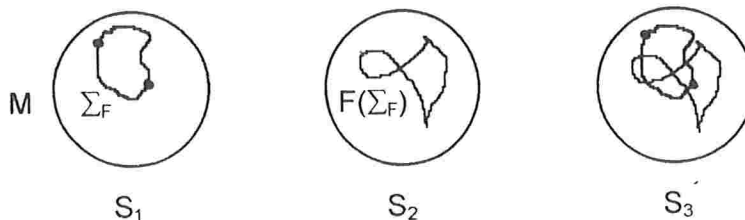
(i) Se i é par.

Os estratos 0-dimensionais de S_i são imagem da aplicação de F nos estratos 0-dimensionais de S_{i-1} ou coincidências de dobras com índices $i/2$ e $0 < j \leq i/2$. Isto é porque se um estrato 0-dimensional de S_i não é imagem pela F de um estrato 0-dimensional de S_{i-1} , ele tem que estar na intersecção de dois estratos 1-dimensionais, ou seja, a coincidência de duas dobras. Como é a primeira vez que acontece esta coincidência e aplicamos F $i/2$ vezes, os índices que dão esta coincidência são $i/2$ e $0 < j \leq i/2$. Pelo lema 2.1, só existe um número finito de tais coincidências e S_{i-1} só tem um número finito de estratos 0-dimensionais, portanto S_i só tem um número finito de estratos 0-dimensionais.

Os estratos 1-dimensionais são as componentes conexas das imagens dos estratos 1-dimensionais de S_{i-1} pela F , que podem ter sido subdivididos por causa de uma nova coincidência entre singularidades. Como, pelo lema 2.1, só existe um número finito de tais coincidências, só existe um número finito de estratos 1-dimensionais e o fecho de cada um deles contém no máximo dois estratos 0-dimensionais.

Os estratos 2-dimensionais são as componentes conexas de $M - \{\text{estratos 0-dimensionais} \cup \text{estratos 1-dimensionais}\}$. É claro que também só existe um número finito destes estratos.

Estes conjuntos satisfazem todas as condições necessárias para fazer de S_i uma estratificação.



Na primeira figura temos a variedade M dividida pela estratificação S_1 , ou seja, pelas componentes conexas de Σ_F e de $M - \Sigma_F$; na segunda pela estratificação S_2 dada pelas componentes conexas da aplicação de F nos estratos de S_1 ; e na última temos a intersecção destas duas estratificações.

(ii) Se i é ímpar, $S_i = S_1 \cap S_{i-1}$.

Os estratos 0-dimensionais de S_i são os estratos 0-dimensionais de S_1 e de S_{i-1} mais os elementos de Σ_F que são imagem de outras singularidades com j iteradas de F , $0 < j \leq (i-1)/2$. Em outras palavras, as dobras-dobradas, que são intersecções de Σ_F com alguma iterada de Σ_F , até a ordem j , $0 < j \leq (i-1)/2$. Existe no máximo um número finito de dobras-dobradas até a ordem $(i-1)/2$ (e até qualquer ordem), portanto só existe um número finito de estratos 0-dimensionais.

Os estratos 1-dimensionais são as componentes conexas dos estratos 1-dimensionais de S_1 e S_{i-1} após estes terem sido subdivididos por causa das coincidências descritas acima. Novamente usamos que só existem um número finito de tais coincidências para concluir que só existe um número finito de estratos 1-dimensionais e o fecho de cada um deles contém no máximo dois estratos 0-dimensionais.

Os estratos 2-dimensionais são formados da mesma maneira que quando i é par, e só existem em número finito.

Estes conjuntos satisfazem todas as condições necessárias para fazer de S_i uma estratificação.

2.3 Proposição

Dada $F \in K$, existem $m, J \in \mathbb{N}$ tais que F é um difeomorfismo de $F^m(M)$ em $F^{m+1}(M)$ e $F^J(B)$ contém uma iterada de cada singularidade, onde $B = F^m(M) - F^{m+1}(M)$.

demonstração

Como p_F é um ponto regular, existe uma vizinhança A de p_F tal que $F|_A$ é um difeomorfismo.

Como F é uma contração e M é compacto, existe m inteiro tal que $F^m(M) \subset A$, e portanto $F|_{F^m(M)}: F^m(M) \rightarrow F^{m+1}(M)$ é um difeomorfismo. Em particular, não existem singularidades coincidentes com índice $k > m$.

O conjunto $B = F^m(M) - F^{m+1}(M)$ não chega a ser um domínio fundamental (isto é, uma região do domínio que contém uma iterada de cada órbita), pois não podemos garantir que ele contenha um ponto de cada órbita. Porém podemos garantir que existe um inteiro J tal que $F^J(B)$ contém uma imagem de cada singularidade.

De fato, como p_F é regular, existe uma vizinhança U de p_F que não contém nenhuma singularidade. Se B não contém uma iterada de cada singularidade é porque existem singularidades que estão em $F^{m+1}(M)$. É claro que as singularidades que possuem iteradas em B também possuem iteradas em $F(B)$, além de em $F(B)$ atingirmos novas singularidades. Por causa da vizinhança de p_F que não contém nenhuma singularidade, existe um inteiro J tal que $F^J(B)$ possui uma iterada de cada singularidade.

Observamos que $F^J(B)$ contém informações sobre todas as interseções entre singularidades.

2.4 Proposição

Dada $F \in K$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n \geq N$, cada uma das seguintes subdivisões de M é uma estratificação:

$\psi_1 = F^{-1}(S_{2n+1}) \cap S_{2n+1}$, $\psi_2 = F^{-1}(\psi_1) \cap \psi_1$, ..., $\psi_n = F^{-1}(\psi_{n-1}) \cap \psi_{n-1}$, ...
Além disto temos que $\psi_N = \psi_{N+1}$.

demonstração

Sejam m e J os inteiros dados pela Proposição 2.3, e seja $N = m + J$.

Afirmamos que a imagem inversa pela F de qualquer ponto $p \in M$ só possui um número finito de pontos.

De fato, suponhamos que não seja, isto é, suponhamos que exista $p \in M$ tal que $\#F^{-1}(p) = \infty$. Como M é compacto, $F^{-1}(p)$ se acumula em um ponto $q \in M$, que pela continuidade da F pertence a $F^{-1}(p)$. Mais ainda, como admitimos no máximo uma coincidência para cada dobra, as únicas singularidades que podem existir em $F^{-1}(p)$ são uma cúspide, ou uma dobra, ou duas dobras. Portanto este conjunto tem um infinitos pontos regulares. O ponto q não pode ser regular, porque F seria um difeomorfismo numa vizinhança de q , contrariando o fato dele ser acumulado por pontos que tem a mesma imagem pela F . Se q fosse um ponto dobra, existiriam coordenadas locais numa vizinhança de q tal que $F(x, y) = (x, y^2)$, e não existiria nenhum ponto nesta vizinhança que tivesse o mesmo valor pela F que o ponto q , gerando uma contradição. Analogamente, q não pode ser cúspide, e com isto terminamos a afirmação que a imagem inversa pela F de qualquer ponto $p \in M$ só possui um número finito de pontos.

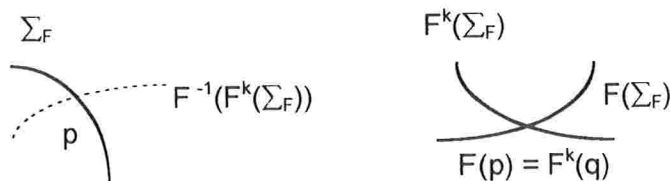
Precisamos desta afirmação para concluir que a imagem inversa de qualquer estrato 0-dimensional só possui um número finito de pontos.

Para mostrar que cada ψ_i é uma estratificação, primeiro vamos analisar os estratos de $F^{-1}(S_{2n+1})$. Seja $p \in M$, temos que analisar em separado cada caso, p sendo regular, dobra ou cúspide.

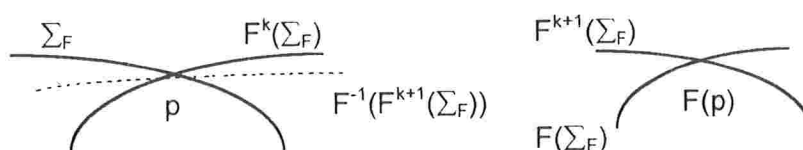
Se p é um ponto regular, não importando se p e $F(p)$ estão num estrato 0, 1 ou 2-dimensional de S_{2n+1} , $F|_{V_p}$ é difeomorfismo, onde V_p é uma vizinhança de p . Logo a imagem inversa de $F|_{V_p}$ aplicada numa vizinhança $V_{F(p)}$ de $F(p)$ está contida em V_p e divide V_p com o mesmo número de estratos 0, 1 ou 2-dimensionais que $V_{F(p)}$ possui.

Se p é um ponto dobra, ele pertence a um estrato 0 ou 1-dimensional de S_{2n+1} . Se ele está num estrato 1-dimensional e $F(p)$ também, F^{-1} não adiciona nada ao desenho local próximo a p .

Se p é um ponto dobra num estrato 1-dimensional e $F(p)$ é estrato 0-dimensional, então p e outra singularidade são coincidentes em $F(p)$ e a intersecção das imagens é transversal, portanto F^{-1} introduz uma curva transversal a Σ_F em p . Com isto, p se torna um estrato 0-dimensional para $F^{-1}(S_{2n+1})$ e está no cruzamento de duas curvas que se quebram em 4 estratos 1-dimensionais, conforme a figura abaixo.



Se p é uma dobra que é um estrato 0-dimensional, p é na verdade uma dobra-dobrada, e está no cruzamento das curvas 1-dimensionais Σ_F e $F^k(\Sigma_F)$, para algum k . É imediato que $F(p)$ também é um estrato 0-dimensional e não acontece mais nenhuma coincidência entre singularidades em $F(p)$. Os desenhos locais estão na figura abaixo.

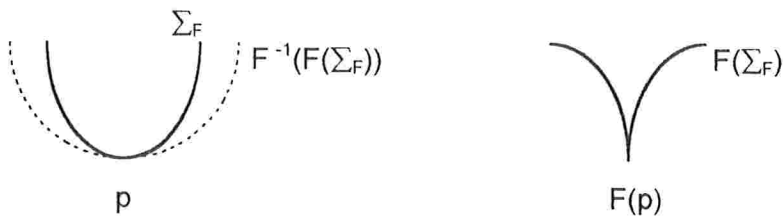


Cada um dos dois estratos 1-dimensionais que formam $F^{k+1}(\Sigma_F)$ na vizinhança de $F(p)$ tem duas imagens inversas perto de p . Logo temos seis estratos 2-dimensionais, seis 1-dimensionais e um 0-dimensional numa vizinhança de p para a estratificação $F^{-1}(S_{2n+1})$.

Se p é um ponto cúspide, então ele está num estrato 0-dimensional de S_{2n+1} e p não coincide com nenhuma outra singularidade. A imagem inversa de $F(\Sigma_F)$ numa vizinhança de $F(p)$ é composta, além de Σ_F , por mais duas curvas a partir do ponto p . A existência destas duas curvas é melhor visualizada quando analisamos a projeção de uma superfície cuspidal em \mathbb{R}^2 .



Vemos que na superfície existem duas curvas de pontos regulares cuja imagem coincide com a imagem do conjunto crítico. No nosso caso há o mesmo fenômeno e portanto a imagem inversa de $F|_{V_p}$ aplicada numa vizinhança de $F(p)$ divide V_p em quatro estratos 2-dimensionais, quatro 1-dimensionais e um 0-dimensional. A aplicação F é 1-1 no fecho de cada estrato 1-dimensional.



Portanto $F^{-1}(S_{2n+1})$ tem um número finito de estratos 0 e 1-dimensionais, e o fecho de cada 1-dimensional adiciona no máximo dois 0-dimensionais. Os estratos 2-dimensionais são as componentes conexas de $M - \{\text{estratos 0 e 1-dimensionais}\}$, logo $F^{-1}(S_{2n+1})$ é uma estratificação de M .

$F^{-1}(S_{2n+1}) \cap S_{2n+1}$ é um refinamento como no caso (ii) da proposição 2.2, logo é uma estratificação.

A única diferença do caso ψ_i para o caso ψ_1 , é que pode acontecer de p ser um ponto dobra num estrato 1-dimensional e $F(p)$ ser um estrato 0-dimensional mas não ser um ponto de coincidência entre p e outra singularidade. Neste caso, $F(p)$ é imagem inversa de uma coincidência. Mas isto não importa, já que a estratificação local é do mesmo tipo que quando $F(p)$ é um ponto de coincidência.

Portanto, cada $\psi_{i+1} = F^{-1}(\psi_i) \cap \psi_i$ é uma estratificação.

Demonstraremos agora que $\psi_N = \psi_{N+1}$.

O ponto chave para demonstrarmos esta igualdade é notarmos que a cada passo na construção de ψ_N acrescentamos como estratos 0-dimensionais as coincidências entre singularidades futuras e passadas de certa ordem. Isto é, quando construímos os S_i 's, para i par, acrescentávamos as bi-dobras com índices $i/2$ e $0 < j \leq i/2$, e para i ímpar, acrescentávamos as dobras-dobradas com índice $0 < j \leq (i - 1)/2$. Como $F|_{F^k(M)}$ é um difeomorfismo para $k \geq N$, não existe nenhuma coincidência com índice maior do que N , e S_{2n+1} contém nos seus estratos 0-dimensionais todas as cúspides, dobras-dobradas e bi-dobras da F . Quando passamos para a construção dos ψ_i 's, a cada passo acrescentamos as imagens inversas dos estratos 0 e 1-dimensionais do passo anterior, e continuamos construindo estratificações desta maneira até que não tenhamos mais estratos 0 e 1-dimensionais para acrescentar, ou seja, passamos por N iterações inversas da F . O resultado destas operações é que na estratificação ψ_N todos os pontos cuja órbita contém uma cúspide, ou uma dobra-dobrada, ou uma bi-dobra, e somente estes, estão em estratos 0-dimensionais. Os pontos que estão em estratos 1-dimensionais são os que tem apenas uma dobra na sua órbita, e os dos estratos 2-dimensionais só possuem pontos regulares na sua órbita. O termo órbita não é o mais adequado para usarmos aqui, já que a órbita passada de cada ponto não está univocamente determinada (em geral, F não é 1-1). É melhor dizermos órbita futura do ponto união com o conjunto das imagens inversas pela F de qualquer ordem do ponto.

Concluimos que $\psi_N = \psi_{N+1}$.

2.5 Notação

Dada $F \in K$, seja m o menor inteiro tal que F é um homeomorfismo de $F^m(M)$ em $F^{m+1}(M)$ e $F^m(M) \cap \Sigma_F = \emptyset$ e seja J o menor inteiro tal que $F^J(F^m(M) - F^{m+1}(M))$ contém uma iterada de cada singularidade. Seja $N = m + J$. Definimos $S(F) = \psi_N$.

2.6 Teorema

Se $F, G \in K$ e são topologicamente conjugados através do homeomorfismo h , então h preserva os estratos entre $S(F)$ e $S(G)$.

demonstração

A conjugação h leva singularidade em singularidade, logo h é um homeomorfismo entre Σ_F e Σ_G .

Uma conjugação preserva órbitas, logo também preserva bi-dobras e dobras-dobradas.

Portanto os estratos 0-dimensionais de Σ_F que são um número finito de cúspides, bi-dobras e dobras-dobradas também são preservados por h .

A conjugação h preserva Σ_F e os estratos 0-dimensionais de Σ_F , logo preserva os estratos 1-dimensionais de Σ_F que são as componentes conexas de Σ_F menos os estratos 0-dimensionais.

Como h preserva órbitas, $h(F^i(M)) = G^i(M)$ e se $F^i(M)$ não contém singularidades, $G^i(M)$ também não.

Se F é 1-1 sobre $F^i(M)$, G é 1-1 sobre $G^i(M)$, portanto se m é o menor inteiro tal que $F|_{F^m(M)}$ é um difeomorfismo, m também é o menor inteiro para o qual $G|_{G^m(M)}$ é um difeomorfismo.

O menor J tal que $F^J(F)$ contém uma imagem de cada singularidade é também o menor J para G . De fato, pois h leva $F^J(F^m(M) - F^{m+1}(M))$ em $G^J(G^m(M) - G^{m+1}(M))$. Logo os inteiros usados para definir $S(F)$ e $S(G)$ são os mesmos.

Os estratos 0 e 1-dimensionais de $S(F)$ e $S(G)$ são obtidos de Σ_F e Σ_G tomando-se N iteradas futuras e passadas. Como h preserva órbitas, as iteradas dos estratos em Σ_F devem ir nas iteradas correspondentes dos estratos correspondentes de Σ_G , e o mesmo para as iteradas inversas.

Esta propriedade de preservação de órbitas de h garante que os estratos 0 e 1-dimensionais de $S(F)$ vão nos de $S(G)$.

Os estratos 2-dimensionais são as componentes conexas de $M - \{\text{estratos 0 e 1-dimensionais}\}$, e portanto h também deve preservá-los.

Logo h preserva os estratos entre $S(F)$ e $S(G)$.

2.6 Observação

Este último teorema estabelece que m , J e o número de cúspides, de bi-dobras e dobras-dobradas são invariantes para a classe de conjugação topológica de $F \in K$.

Apêndice A

Os Teoremas da Divisão e da Preparação

Neste apêndice demonstraremos os Teoremas da Divisão e da Preparação. O Teorema da Preparação é na verdade um corolário do Teorema da Divisão. As principais referências para este apêndice são [3] e [12].

Lembramos a seguinte definição, dada no capítulo II.

II.2.1 Definição

Uma função $f(t, x)$ definida numa vizinhança aberta U da origem de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é dita *p-regular em t* se p é o menor inteiro não negativo para o qual $(\partial^p f / \partial t^p)(0, 0) \neq 0$.

A.1 Teorema da Preparação

Se U é uma vizinhança aberta de $(0, 0)$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ é *p-regular em t*, então existe um intervalo J contendo $0 \in \mathbb{R}$, uma n -bola aberta S contendo $0 \in \mathbb{R}^n$ e funções

$$\begin{aligned} & Q \in C^\infty(J \times S, \mathbb{R}), \\ \text{e} \quad & H_j \in C^\infty(S, \mathbb{R}), j = 1, \dots, p \quad \text{tais que } J \times S \subset U \text{ e } \forall (t, x) \in J \times S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & Q(t, x) \neq 0, \\ \text{b)} \quad & f(t, x) = Q(t, x) \left[t^p + \sum_{j=1, \dots, p} H_j(x) t^{j-1} \right] \end{aligned}$$

A.2 Definição

Uma função $P \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $P(0) = 0$, tem a propriedade da divisão de ordem p com respeito a t numa vizinhança da origem se para qualquer função $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$, existem funções $Q: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $r_1, \dots, r_p: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tais que a seguinte relação

$$(1) \quad f(t, x) = P(t, x)Q(t, x) + \sum_{i=1, \dots, p} r_i(x) t^{p-i} \quad \text{vale numa vizinhança da origem.}$$

A.3 Teorema da Divisão de Ordem p (Malgrange, 1962)

Toda função *p-regular em t* verifica a propriedade da divisão de ordem p com respeito a t .

Na verdade não precisamos demonstrar este teorema da forma que enunciamos acima. A próxima proposição nos restringe a um caso bem mais simples.

Seja o polinômio canônico de grau p :

$$P_p(t, \sigma) = t^p + \sigma_1 t^{p-1} + \dots + \sigma_{p-1} t + \sigma_p, \quad t, \sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathbb{R}$$

Podemos considerar P_p como função de (t, x, σ) e P_p é *p-regular em t*.

A.4 Proposição

O Teorema da Divisão de ordem p equivale à $P_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $P_p(0) = 0$, verificar a propriedade da divisão de ordem p com respeito à t .

demonstração

É claro que basta mostrarmos que P_p ter a propriedade da divisão implica no teorema da divisão em geral.

P_p ter a propriedade da divisão significa que toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$, se escreve $f(t, x, \sigma) = P_p(t, x, \sigma)Q(t, x, \sigma) + \sum_{i=1, \dots, p} r_i(x, \sigma)t^{p-i}$, numa vizinhança da origem.

A demonstração é feita em duas etapas, primeiro mostramos que se P_p tem a propriedade da divisão de ordem p , então toda função $P(t, x)$ p -regular pode se escrever da forma $P(t, x) = (t^p + \sigma_1(x)t^{p-1} + \dots + \sigma_p(x))Q(t, x)$, com $Q(0, 0) \neq 0$ e $\sigma_1, \dots, \sigma_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (este é justamente o enunciado do Teorema da Preparação!). A segunda parte é demonstrar que todo germe $P(t, x)$ p -regular tem a propriedade da divisão.

1ª) Seja $P \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $P(0) = 0$, uma função p -regular. P pode ser escrita da forma

$$P(t, x) = (t^p + \sigma_1(x)t^{p-1} + \dots + \sigma_p(x))Q(t, x), \text{ com } Q(0, 0) \neq 0 \text{ e } \sigma_1, \dots, \sigma_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

De fato, consideramos P como função de (t, x, σ) o dividimos por P_p .

$$(1) \quad P(t, x) = (t^p + \sigma_1 t^{p-1} + \dots + \sigma_{p-1} t + \sigma_p)Q(t, x, \sigma) + \sum_{i=1, \dots, p} r_i(x, \sigma)t^{p-i},$$

Se $x = 0$ e $\sigma = 0$, (1) fica

$$P(t, 0) = t^p Q(t, 0, 0) + \sum_{i=1, \dots, p} r_i(0, 0)t^{p-i},$$

P é p -regular, então

$$(2) \quad \begin{cases} r_i(0, 0) = 0, i = 1, \dots, p, \\ Q(0, 0, 0) \neq 0. \end{cases}$$

Usando agora que P é independente de σ e derivando (1) com respeito a σ_j ,

$$0 = t^{p-j}Q(t, x, \sigma) + P_p(t, \sigma)(\partial Q / \partial \sigma_j)(t, x, \sigma) + \sum_{i=1, \dots, p} (\partial r_i / \partial \sigma_j)(x, \sigma)t^{p-i},$$

restringindo a $x = 0$, $\sigma = 0$,

$$0 = t^{p-j}Q(t, 0, 0) + t^p(\partial Q / \partial \sigma_j)(t, 0, 0) + \sum_{i=1, \dots, p} (\partial r_i / \partial \sigma_j)(0, 0)t^{p-i},$$

Igualando os termos de mesma ordem e tomando $t = 0$,

$$(3) \quad \begin{cases} (\partial r_i / \partial \sigma_j)(0, 0) = 0, \text{ se } i \neq j, \\ (\partial r_j / \partial \sigma_j)(0, 0) = -Q(0, 0, 0). \end{cases}$$

Consideremos agora o sistema de equações

$$(4) \quad \begin{cases} r_1(x, \sigma) = 0, \\ \dots, \\ r_p(x, \sigma) = 0, \end{cases} \quad \text{nas incógnitas } \sigma_1, \dots, \sigma_p.$$

A matriz $[(\partial r_i / \partial \sigma_j)(0, 0)]$ é inversível, pois, por (3), ela é diagonal e todos os seus elementos são iguais a $-Q(0, 0, 0)$, que é diferente de zero por (2). Logo, pelo teorema das funções implícitas, o sistema (4) admite uma única solução $\sigma(x)$, que é de classe C^∞ , e por (2), $\sigma(0) = 0$.

Substituindo $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_p(x))$ em (1), temos

$$P(t, x) = (t^p + \sigma_1(x)t^{p-1} + \dots + \sigma_{p-1}(x)t + \sigma_p(x))Q(t, x, \sigma(x)),$$

Portanto, se P_p tem a propriedade da divisão de ordem p , então o Teorema da Preparação está provado, isto é, toda função $P(t, x)$ p -regular pode se escrever da forma

$$(5) \quad P(t, x) = (t^p + \sigma_1(x)t^{p-1} + \dots + \sigma_p(x))Q(t, x), \quad Q(0, 0) \neq 0 \text{ e } \sigma_1, \dots, \sigma_p: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}.$$

2ª) Mostraremos agora, ainda sob a hipótese de P_p ter a propriedade da divisão, que toda função $P(t, x)$ p -regular tem a propriedade da divisão.

Seja $f: (\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{A}, 0)$. Consideremos f como função de (t, x, σ) e o dividimos por P_p :

$$f(t, x) = P_p(t, \sigma)Q_1(t, x, \sigma) + \sum_{i=1, \dots, p} s_i(x, \sigma)t^{p-i},$$

Substituímos na última identidade a variável independente σ pela função $\sigma(x)$ obtida na primeira etapa, temos:

$$(6) \quad f(t, x) = (t^p + \sigma_1(x)t^{p-1} + \dots + \sigma_p(x))Q_1(t, x, \sigma(x)) + \sum_{i=1, \dots, p} s_i(x, \sigma(x))t^{p-i},$$

Como $Q(0) \neq 0$, $Q^{-1} = 1/Q$ é C^∞ numa vizinhança da origem, então podemos escrever (5) como

$$t^p + \sigma_1(x)t^{p-1} + \dots + \sigma_p(x) = P(t, x)Q^{-1}(t, x).$$

Substituindo em (6) temos,

$$f(t, x) = P(t, x)Q^{-1}(t, x)Q_1(t, x) + \sum_{i=1, \dots, p} s_i(x)t^{p-i},$$

em outras palavras, provamos que se P_p tem a propriedade da divisão de ordem p , então toda função P que for p -regular também tem esta propriedade.

A.5 Observação

Esta proposição mostra que só precisamos demonstrar o teorema da divisão para o caso do polinômio canônico. Outra consequência desta proposição é que o Teorema da Preparação é um corolário do Teorema da Divisão, pois mostramos que toda função P que é p -regular pode se escrever na forma (5), que é justamente o Teorema da Preparação.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema da Divisão para um polinômio canônico vamos fazer algumas definições e estabelecer alguns resultados que serão necessários para a demonstração.

Usando os polinômios genéricos $P_p(t, \sigma)$, para cada p podemos definir uma aplicação $\sigma^p: \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{p-1} \rightarrow \mathbb{A}^p$ através da relação

$$P_p(t, \sigma^p(s, \mu)) = (t - s)P_{p-1}(t, \mu), \text{ onde } (s, \mu) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{p-1}, \text{ ou seja,}$$

$$\sigma_1 = \mu_1 s,$$

$$\sigma_j = \mu_j - \mu_{j-1} s, \quad 2 \leq j \leq p-1$$

$$\sigma_p = \mu_{p-1} s.$$

A.6 Lema de Hadamard

Se $f(x) = f(x_1, \dots, x_p)$ é uma função de classe C^m com $f(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_p) = 0$, então existem funções $g_i(x_1, \dots, x_p)$, $1 \leq i \leq n$, de classe C^{m-1} , tais que

$$f(x) = \sum_{i=1, \dots, n} x_i g_i(x).$$

Referência para a demonstração :[3].

A.7 Teorema da Divisão Canônico

Seja U uma vizinhança aberta da origem de \mathfrak{R}^n . Para cada inteiro p e cada aplicação $f \in C^\infty(\mathfrak{R} \times U)$, $f(0) = 0$, existem aplicações $Q_f^p \in C^\infty(\mathfrak{R}^{p+1} \times U)$, $R_{1,f}^p, \dots, R_{p,f}^p \in C^\infty(\mathfrak{R}^p \times U)$ tais que

$$f(t, x) = P_p(t, \sigma)Q_f^p(t, \sigma, x) + R_f^p(t, \sigma, x),$$

$$\text{onde } R_f^p(t, \sigma, x) = \sum_{j=1, \dots, p} R_{j,f}^p(\sigma, x)t^{p-j},$$

$$\text{e vale } Q_f^p(t, \sigma^p(s, \mu), x) = \frac{Q_f^{p-1}(t, \mu, x) - Q_f^{p-1}(s, \mu, x)}{t - s}$$

demonstração

Faremos a prova por indução em p .

Para simplificar a notação, escreveremos $Q_f^p = Q^p$ e $R_f^p = R^p$.
 $p = 0$, definimos $Q^0(t, \sigma) = f(t)$ e $R^0 = 0$.

$$p = 1,$$

$$P_1(t, \sigma) = t + \sigma_1.$$

$$f(t) - f(-\sigma_1) = (t + \sigma_1) \int_0^1 (\partial f / \partial t)(st - (1-s)\sigma_1) ds$$

Portanto, podemos definir

$$Q^1(t, \sigma) = \int_0^1 (\partial f / \partial t)(st - (1-s)\sigma_1) ds,$$

$$R^1(t, \sigma) = R_1^1(t, \sigma) = f(-\sigma_1).$$

$$\text{Como } \sigma^1(s, \mu) = -s, \text{ temos } Q^1(t, \sigma^1(s, \mu)) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{Q^0(t, \mu, x) - Q^0(s, \mu, x)}{t - s}$$

Agora assumimos que o teorema foi provado para $0, 1, \dots, p-1$ ($p \geq 2$).

Denotamos os pontos em \mathfrak{R}^p , \mathfrak{R}^{p+1} e \mathfrak{R}^{p-2} respectivamente por

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p),$$

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{p-1})$$

$$v = (v_1, \dots, v_{p-2})$$

e escrevemos $\sigma(s, \mu) = \sigma^p(s, \mu)$, $(s, \mu) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^{p-1}$

$$\mu(r, v) = \sigma^{p-1}(r, v), (r, v) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^{p-2}$$

Então $P_p(t, \sigma(s, \mu(r, v))) = (t - s)P_{p-1}(t, \mu(r, v)) = (t - s)(t - r)P_{p-2}(t, v)$,
e portanto $\sigma(s, \mu(r, v))$ é simétrico em (s, r) .

Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} (1) \quad f(t) &= P_{p-1}(t, \mu)Q^{p-1}(t, \mu) + R^{p-1}(t, \mu) \\ &= P_p(t, \sigma(s, \mu)) \frac{Q^{p-1}(t, \mu) - Q^{p-1}(s, \mu)}{t - s} + \sum_{j=1, \dots, p} R_j(s, \mu)t^{p-j}, \end{aligned}$$

onde R_1, \dots, R_p são dados por

$$\sum_{j=1, \dots, p} R_j(s, \mu) t^{p-j} = P_{p-1}(t, \mu) Q^{p-1}(s, \mu) + R^{p-1}(t, \mu)$$

Mostraremos que cada $R_j(s, \mu(r, v))$ é simétrico em (s, r) . Por (1) e pela simetria de $\sigma(s, \mu(r, v))$ é suficiente mostrar que $\frac{Q^{p-1}(t, \mu(r, v)) - Q^{p-1}(s, \mu(r, v))}{t - s}$ é simétrico.

$$\begin{aligned} & \frac{Q^{p-1}(t, \mu(r, v)) - Q^{p-1}(s, \mu(r, v))}{t - s} = \\ & = \frac{1}{t - s} \left[\frac{Q^{p-2}(t, v) - Q^{p-2}(r, v)}{t - r} - \frac{Q^{p-2}(s, v) - Q^{p-2}(r, v)}{s - r} \right] = \\ & = \frac{(s - r)Q^{p-2}(t, v) - (t - r)Q^{p-2}(s, v) + (t - s)Q^{p-2}(r, v)}{(t - r)(t - s)(s - r)} \end{aligned}$$

é simétrica em (s, r) .

A aplicação $(s, \mu_1, \dots, \mu_{p-1}) \rightarrow (s, \sigma^p_1(s, \mu), \dots, \sigma^p_{p-1}(s, \mu)) = (s, \mu_1 - s, \mu_2 - \mu_1 s, \dots, \mu_{p-1} - \mu_{p-2} s)$ de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^{p-1}$ em \mathfrak{R}^p é uma aplicação polinomial inversível. Usando-se este fato e o teorema de extensão 5.4 de [3] mostra-se que $R_j(s, \mu(r, v)) = R_j(r, \mu(s, v))$ e define-se $R^p_j(\sigma) = R_j(t, \mu)$.

Finalmente mostraremos que $f(t) - \sum_{j=1, \dots, p} R^p_j(\sigma) t^{p-j}$ é divisível por $P_p(t, \sigma)$.

Pelo lema de Hadamard, é suficiente mostrar que esta função se anula sobre o conjunto nulo de $P(t, \sigma)$.

Se $P(t, \sigma) = 0$, então $\sigma = \sigma(t, \mu)$ para algum $\mu \in \mathfrak{R}^{p-1}$, e portanto,

$$f(t) - \sum_{j=1, \dots, p} R^p_j(\sigma) t^{p-j} = f(t) - \sum_{j=1, \dots, p} R_j(t, \mu) t^{p-j} = 0, \text{ por (1).}$$

Em outras palavras, $f(t) - \sum_{j=1, \dots, p} R^p_j(\sigma) t^{p-j}$ se anula no conjunto nulo de $P_p(t, \sigma)$.

Temos $f(t) = P_p(t, \sigma) Q^p(t, \sigma) + \sum_{j=1, \dots, p} R^p_j(\sigma) t^{p-j}$,

$$\text{onde } Q^p(t, \sigma) = \frac{f(t) - \sum_{j=1, \dots, p} R^p_j(\sigma) t^{p-j}}{P_p(t, \lambda)}$$

Mais ainda, se $\sigma = \sigma(s, \mu)$,

$$Q^p(t, \sigma(s, \mu)) = \frac{Q^{p-1}(t, \mu) - Q^{p-1}(s, \mu)}{t - s}, \text{ por (1).}$$

Isto completa a demonstração do teorema.

Considerações Finais

Agora falaremos um pouco sobre algumas situações que não desenvolvemos neste trabalho, mas que estão de alguma forma relacionadas com ele.

Dentro da Teoria das Catástrofes, encontramos as dobras e as cúspides no Teorema de Classificação das Catástrofes Elementares de Thom. Neste teorema Thom classificou os pontos críticos degenerados para funções genéricas de $\text{codim} \leq 4$ (posteriormente este resultado foi ampliado para codimensões maiores). Na tabela construída por Thom encontramos a dobra como a singularidade genérica quando a codimensão é 1 e a cúspide quando a codimensão é 2. A Teoria das Catástrofes é um assunto amplamente difundido e estudado, motivo pelo qual não foi incluído neste trabalho. Algumas referências que indicamos sobre este assunto são [3] e [12].

Outro contexto que não desenvolvemos aqui e no qual as dobras e as cúspides são genéricas é o das aplicações de Gauss, que definiremos agora. Consideremos uma superfície em \mathbb{R}^3 parametrizada por um mergulho $X:U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$. Definimos a sua aplicação de Gauss $N:U \rightarrow S^2$ como a aplicação que envia cada ponto (x, y) de U na normal unitária $N = (X_x \times X_y) / |X_x \times X_y|$. A aplicação N também é chamada imagem circular, pois associa os pontos da superfície à esfera S^2 .

A aplicação de Gauss é singular quando $0 = N_x \times N_y = K(x, y)(X_x \times X_y)$, isto é, no conjunto parabólico onde a curvatura Gaussiana $K(x, y)$ é igual a zero.

Na terminologia de Whitney, a aplicação de Gauss é *boa* se o gradiente de K não se anula no conjunto parabólico. Se N é boa, então o conjunto parabólico é uma curva suave $(x(t), y(t))$. A imagem desta curva sob a aplicação de Gauss é singular quando $N'(t) = 0$. Se N é boa, dizemos que é *excelente* se $N'(t) = 0$ implica $N''(t) \neq 0$. Quando isto acontece as singularidades da curva $N(t)$ são cúspides. Quando N é excelente dizemos que N está em *posição geral* se a imagem de $N(t)$ não tem pontos triplos de auto-tangências, e nenhuma imagem de um ponto cúspide de $N(t)$ coincide com a imagem de outro ponto de $N(t)$.

Whitney provou que, em geral, uma aplicação de superfícies é excelente se e somente se suas singularidades são equivalentes, por mudanças de coordenadas, a dobras ou cúspides. Mais ainda, uma aplicação é estável se e somente se ela é excelente e em posição geral. As referências que damos sobre este assunto são [2] e [5].

Bibliografia

- [1] Abraham, R. & Robbin, J., *Transversal Mappings and Flows*, Benjamin, New York, (1967).
- [2] Banchoff, T., Gaffney, T. & McCrory, C., *Cusps of Gauss Mappings*, Pitman Advanced Publishing Program, (1982).
- [3] Bierstone, E., *Differentiable Functions*, Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 11 nº 2 (1980), pp. 139-190.
- [4] Brocker, Th. & Lander, L., *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 17 (1975).
- [5] Bruce, J. W. & Giblin, P. J., *Curves and Singularities*, Cambridge University Press (1984).
- [6] Bulajich, R. & Medrano, S. L., *Teoría de Singularidades*, notas de aula, UNAM, México.
- [7] Camacho, C. & Lins Neto, A., *Teoria Geométrica das Folheações*, Projeto Euclides, IMPA, (1979).
- [8] Castegriano, D. & Hayes, S., *Catastrophe Theory*.
- [9] Demazure, M., *Catastrophes et Bifurcations*, Ecole Polytechnique, (1987).
- [10] Franke, J. E., *Structural Stability of Smooth Contracting Endomorphisms on Compact Manifolds*, Société Mathématique de France, Astérisque 31, pp. 141-188 (1976).
- [11] Lima, E. L., *Variedades Diferenciáveis*, Monografias de Matemática # 15, IMPA, (1973).
- [12] Martinet, J., *Singularités des Fonctions et Applications Différentiables*, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, (1977).
- [13] Percell, P. B., *Structural Stability on Manifolds with Boundary*, Topology, vol.12, pp. 123-144 (1973)
- [14] Poston, T. & Stewart, I., *Thom's Classification Theorem - an intuitive approach*, Taylor Expansions and Catastrophes, Pitman Publishing, (1976).
- [15] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, (1979).
- [16] Sotomayor, J., *Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*, II Escola Latino Americana de Matemática, IMPA, (1976).

[17] Sotomayor, J., *Structural Stability in Manifolds with Boundary*, in Global Analysis and its applications, vol III, International Atomic Energy Agency, Viena (1974).

[18] Zhitomirskii, M., *Local Theory Singularities- Lecture Notes*, IMPA, 1992.