Realização de Dinâmicas Complexas em Equações Funcionais com Retardo

Wania Cristina de Lucca

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Jorge M. Sotomayor**

-São Paulo, Julho de 1996-

Realização de Dinâmicas Complexas em Equações Funcionais com Retardo

Este exemplar corresponde à redação
final da tese, devidamente corrigida,
apresentada por Wania Cristina de Lucca e
aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 29 de Julho de 1996

Banca Examinadora

-Prof. Dr. Jorge M. Sotomayor Tello (Presidente)	IME-USP
-Prof. Dr. Luiz Fichmann	IME-USP
-Prof. Dr. Waldyr Muniz Oliva	ISTP-Lisboa
-Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas	ICMSC-USP
-Prof. Dr. Ronaldo A. Garcia	IFG

Registro meu reconhecimento ao Prof. Sotomayor, pela orientação deste trabalho e pelo constante incentivo. Agradeço também o apoio dos amigos e familiares. Felizmente não tenho condições de listar todos, o que significa que são muitos. Para alguns deles, não importa muito se as equações são com retardo ou se as formas são normais, mas, ainda assim, estão sempre presentes com aquele "vai valer à pena"! Sem dúvida valeu, especialmente por mais essa história que tenho para contar. Meu maior agradecimento é a Deus, pois é quem mantém a dinâmica deste grande sistema, que chamamos VIDA, com todos os seus movimentos simples ou complexos.

Nada perdeu a poesia. E agora há a mais as máquinas
Com sua poesia também, e todo o novo gênero de vida
Comercial, mundana, intelectual, sentimental,
Que a era das máquinas veio trazer para as almas.
As viagens agora são tão belas como eram dantes
E um navio será sempre belo, só porque é um navio.
Viajar ainda é viajar e o longe está sempre onde esteve -
Em parte nenhuma, graças a Deus!
FERNANDO PESSOA

Conteúdo

Resumo

Foram estudados dois problemas de realização de dinâmicas definidas por sistemas finito dimensionais em equações diferenciais funcionais com um número finito de retardos. Prova-se, primeiramente, que qualquer dinâmica local estruturalmente estável pode ser encontrada nestas equações, o que também inclui dinâmicas complexas. Em seguida é obtida uma imersão de campos vetoriais arbitrários na mesma classe de equações com retardamento, sem a exigência de que a variedade invariante envolvida seja central. Essa realização é conseguida de forma que o campo vetorial associado à equação retardada seja da mesma classe de diferenciabilidade do campo vetorial de dimensão finita que é dado.

São apresentados cálculos de formas normais para equações funcionais escalares com não linearidades envolvendo um e dois retardos, possuindo uma singularidade em $\mathbb{R}^3$, associada ao auto valor nulo de multiplicidade três. Verifica-se uma restrição no nível de jatos normalizados para equações com um retardo que, no entanto, não corresponde a restrições nos fluxos definidos por estas equações, quando comparados, numa variedade invariante, com equações ordinárias possuindo mesma singularidade.

Este trabalho teve o suporte financeiro da CAPES

Abstract

Two problems relative to realization of dynamics defined by finite dimensional systems in functional differential equations with a finite number of delays are considered. First, it is proved that any local structurally stable dynamics can be found in this equations, that also include complex dynamics. Next, it is obtained an imbbeding of arbitrary vector fields in the same class of retarded equations, without to demand that the invariant manifold involved in it be a center manifold. In this realization the vector field associated to retarded equation can be chosen of the same class of differentiability that the given finite dimensional vector field.

It is shown calculus of normal forms to functional equations with nonlinearities involving one and two delays, for a singularity in $\mathbb{R}^3$ associated with eigenvalue zero of multiplicity three. It is observed one restriction for equations depending just of one delay in the level of jets in normal forms, but this restriction do not correspond to restrictions in the flows defined by this equations, when are compared, on a invariant manifold, with ordinary differential equations having the same singularity.

Introdução

Modelos usando equações diferenciais funcionais retardadas aparecem frequentemente em muitas aplicações, especialmente para descrever sistemas físicos e biológicos.

Estas equações definem sistemas (semi)dinâmicos em um espaço de fase infinito dimensional. Poderíamos esperar, devido à dimensão infinita, que toda complexidade dinâmica que ocorre para equações diferenciais ordinárias (EDO's) seria também encontrada em equações diferenciais funcionais retardadas (EDFR's). Em algum sentido isso é verdadeiro; por exemplo, se considerarmos o espaço de fase da EDFR como sendo o das funções contínuas num intervalo $[-r, 0]$ tomando valores em $\mathbb{R}^n$, com n suficientemente grande.

Mas, para equações funcionais escalares com um único retardo, Faria e Magalhães [8] detectaram fortes limitações nos retratos de fase na vizinhança de uma singularidade do tipo Hopf-Takens (associada aos auto valores simples $0, \pm iw$), ao se comparar com retratos de fase de uma equação diferencial ordinária com mesma singularidade. Nesse caso, apesar da dimensão infinita, o comportamento dinâmico da equação funcional é bem mais simples do que o da equação ordinária.

Exemplos como este motivam a investigação de situações em que seja possível assegurar a ocorrência de fenômenos dinâmicos arbitrários em equações retardadas. Um procedimento usado nessa direção é o estudo da realização de equações ordinárias, que consiste em reduzir a EDFR a uma variedade invariante de dimensão finita e comparar o fluxo desta equação sobre a variedade com fluxos descritos por EDO's arbitrárias definidas em espaços finito dimensionais. Se a EDFR apresentar sobre a variedade o "mesmo" comportamento de uma dada EDO, diremos então que a EDFR a realiza.

Essa técnica foi usada inicilamente por Hale [11], que considerou uma equação escalar

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + f(z_t), \quad z_t \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}), \quad r > 0,$$

supondo que a equação linearizada tenha p auto valores sobre o eixo imaginário. Mostrou que qualquer campo vetorial polinomial pode ser realizado sobre variedades centrais da equação acima, com f dependendo apenas de $p-1$ retardos. As principais ferramentas utilizadas nesse trabalho foram: Teorema da Função Implícita e a independência linear das auto funções, dada pelo chamado Lema de Lin (que pode ser encontrado também em [11].)

Posteriormente, Faria e Magalhães [7] estenderam os resultados de Hale para $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, obtendo a realização de todos os jatos finitos de campos vetoriais sobre variedades centrais de EDFR's, com não linearidades envolvendo somente um número finito de retardos. Esse trabalho consiste num aprimoramento dos argumentos de [11] e baseia-se fortemente no método de formas normais, por eles mesmos desenvolvido no contexto das equações funcionais ([5] e [6]).

De um modo geral, a teoria de variedades centrais e métodos de formas normais são técnicas amplamente usadas para simplificar o estudo de sistemas dinâmicos. A teoria de variedades centrais permite reduzir a dimensão do sistema e as formas normais permitem eliminar grande parte dos termos não lineares.

Variedade central e condições de independência de auto funções constituem também o fundamento de estudos de realização de dinâmicas em equações parabólicas semilineares, que têm avançado muito a partir de 1990, especialmente com os trabalhos [9], [20], [21], [22], [23], [24], [25]. Muitas idéias que utilizaremos nessa tese, para equações com retardamento, encontram aí sua inspiração e motivação.

No capítulo 2, a exemplo do que é feito em [23], mostraremos a ocorrência de qualquer dinâmica local estruturalmente estável numa classe de equações funcionais retardadas, quando restrita a uma variedade central. Isso é obtido via um resultado de densidade, que garante que, dado qualquer campo vetorial finito dimensional, arbitrariamente próximo dele (numa norma conveniente), existe um campo que pode ser realizado numa certa classe de EDFR.

Mas, a ocorrência de muitas dinâmicas complicadas encontradas em equações ordinárias de dimensão finita não é contemplada através desse resultado de densidade. Para isso, seria necessário garantir a realização de todas as equações ordinárias em equações funcionais retardadas.

Tanto o trabalho de Hale [11], quanto sua generalização em [7], só garantem a realização de jatos finitos de campos vetoriais arbitrários. Ainda assim são bastante abrangentes, visto que muitas singularidades estudadas com interesse para equações ordinárias ficam determinadas completamente pelos termos de ordem finita numa forma normal adequada.

Um resultado geral de realização de campos vetoriais na variedade central, e não apenas seus jatos finitos, foi provado, sob certas condições de regularidade, por Rybakowski [26]: os campos dados devem ser, pelo menos, de classe $\mathcal{C}^{32}$. Na prova foi utilizada uma versão do teorema de função implícita de Nash-

Moser, levando a uma perda substancial de derivadas.

Mostraremos no terceiro capítulo uma forma de realização válida para campos vetoriais arbitrários de classe C^1, porém, sem a exigência de que esta se dê na variedade central. A variedade invariante será construída a partir da fórmula da variação das constantes. Esse problema foi tratado por Polácik e Rybakowski [24] no contexto das equações parabólicas escalares.

Assim como em [11], [7] e [26], verificamos que os dois resultados de realização mencionados acima são possíveis no âmbito das equações diferenciais diferença, com um número finito e pré-determinado de retardos. Utilizamos o mesmo número apresentado por [7]. Como é mencionado nesse trabalho, esse valor não é ótimo, podendo ser diminuído em alguns casos. No entanto, ao menos para EDFR's escalares cuja parte linear tenha zero como auto valor de multiplicidade m, é verificado em [11] que a quantidade mínima de retardos deve ser $m-1$.

A redução do número de retardos fornece uma direção para procurar eventuais restrições nos retratos de fase; um exemplo disto pode ser visto em [8]. É efetuado neste artigo um estudo das singularidades em $\mathbb{R}^2$ de tipos Hopf e Bogdanov-Takens, verificando-se a ausência de restrições para EDFR's escalares com um único retardo.

No capítulo 4 apresentaremos alguns cálculos de formas normais para equações funcionais escalares, com singularidades em $\mathbb{R}^3$ tendo parte linear nilpotente. Utilizamos o método desenvolvido em [5], que permite obter os coeficientes da forma normal da equação na variedade central em termos dos coeficientes da equação retardada original. Veremos que a redução para um único retardo na parte não linear da EDFR levará a uma "restrição" , ao menos no espaço de jatos normalizados. Não é claro se isto implica também numa restrição nos fluxos possíveis, quando comparamos com uma equação ordinária tendo mesma singularidade. O estudo da dinâmica de campos vetoriais finito dimensionais com uma singularidade desse tipo tem sido feito por Dumortier e Ibáñez [2]. De qualquer modo, essa restrição que observamos para os coeficientes da forma normal era esperada, visto que diminuímos o número de retardos para um valor menor do que aquele mínimo possível, mencionado anteriormente.

Casos mais degenerados, como por exemplo, aqueles estudados em [4] para singularidades nilpotentes no plano de codimensão três, precisamente os casos elíptico, sela e foco, não são possíveis de ser tratados a partir da técnica de formas normais utilizada.

Concluímos este trabalho apontando algumas questões concernentes ao problema de caracterização das restrições obtidas com a redução do número de retardos, que até o momento encontram-se sem respostas.

Capítulo 1

Considerações Gerais

1.1 Elementos da Teoria Geral

Basicamente utilizaremos a notação introduzida por [15], onde também podem ser encontrados os detalhes dos fatos mencionados nesta seção.

Dado $r > 0$ um número real fixo, consideremos o espaço de Banach $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ das funções contínuas de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$, com a norma uniforme.

Seja $L : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ um operador linear limitado. A relação

$$\dot{z}(t) = L(z_t) \tag{1.1}$$

onde $z_t(\theta) = z(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, define uma equação diferencial funcional retardada (EDFR) linear.

Pelo Teorema de Representação de Riesz podemos expressar o operador L como

$$L(\varphi) = \int_{-r}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta),$$

onde $\eta(\theta)$ é uma matriz $n \times n$ cujos elementos são funções de variação limitada.

Seja $t \mapsto z_t(\cdot, \varphi)$ a solução de (1.1) com condição inicial $z_0(\cdot, \varphi) = \varphi(\cdot)$. O operador $T(t) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ dado por $T(t)\varphi(\cdot) = z_t(\cdot, \varphi)$, define um semigrupo fortemente contínuo para $t \geq 0$, que é compacto quando $t \geq r$. Seu gerador infinitesimal A satisfaz $A\varphi(\theta) = \dot{\varphi}(\theta)$ e está definido para toda função $\varphi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável tal que $\dot{\varphi}(0) = L(\varphi)$. O espectro $\Sigma(A)$ de A coincide com seu espectro pontual e $\lambda \in \Sigma(A)$ se, e somente se, λ é raíz da equação característica

$$\det \Delta(\lambda) = 0 \quad \text{onde} \quad \Delta(\lambda) = \lambda I_n - \int_{-r}^{0} d\eta(\theta) e^{\lambda\theta} \tag{1.2}$$

Comumente nos referimos aos auto valores de A como auto valores da equação (1.1).

O auto espaço generalizado associado a $\lambda \in \Sigma(A)$, $\mathcal{M}_\lambda(A)$, tem dimensão finita e é invariante com relação a A. Considerando um conjunto Λ finito e não vazio de auto valores de A, o espaço $P = span\{\mathcal{M}_\lambda(A) : \lambda \in \Lambda\}$ é invariante sob A e sob o semigrupo $T(t)$. Se m for o número de raízes de (1.2) em Λ, contando multiplicidades, então $\dim P = m$. Sobre P, o fluxo $T(t)$ é equivalente a uma equação diferencial ordinária (EDO)

$$\dot{y} = By, \qquad y \in \mathbb{R}^m, \tag{1.3}$$

onde B é uma matriz constante $m \times m$ cujos auto valores coincidem com os elementos de Λ.

Se $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ é uma base para P, então $T(t)\Phi = \Phi e^{Bt}$.

Consideremos agora a equação adjunta formal

$$\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} y(t-\theta)d\eta(\theta) \tag{1.4}$$

que, dada uma condição inicial, tem solução para $t \leq 0$.

Definimos $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}([0,r], \mathbb{R}^{n^*})$, onde $\mathbb{R}^{n^*}$ é o espaço n-dimensional de vetores linhas, e $y^t \in \mathcal{C}^*$ por $y^t(\theta) = y(t+\theta)$, $\theta \in [0,r]$.

Se $t \mapsto y^t(\cdot, \psi)$ é solução de (1.4) com $y^0(\cdot,\psi) = \psi(\cdot)$, então $T^*(t)\psi(\theta) = y^t(\theta,\psi)$ define, para $t \leq 0$, um semigrupo fortemente contínuo de operadores de $\mathcal{C}^*$ em $\mathcal{C}^*$. O gerador infinitesimal A^* desse semigrupo tem somente o espectro pontual; além disso, $\Sigma(A^*) = \Sigma(A)$ e, para todo $\lambda \in \Sigma(A^*)$, o auto espaço generalizado de A associado a λ tem mesma dimensão (finita) que $\mathcal{M}_\lambda(A)$. De modo análogo ao que foi feito para P, podemos obter um subespaço invariante P^* em $\mathcal{C}^*$, chamado às vezes de espaço dual a P. Tem-se que $\dim P^* = \dim P$.

Sobre $\mathcal{C}^* \times \mathcal{C}$ define-se uma forma bilinear

$$(\psi, \varphi) := \psi(0)\varphi(0) - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi(\xi - \theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi. \tag{1.5}$$

Se $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ e $\Psi = col(\psi_1, \ldots \psi_m)$ são bases, respectivamente, de P e P^*, então a matriz $(\Psi, \Phi) := ((\psi_j, \phi_i), i,j = 1, \ldots, m)$ é não singular, podendo ser tomada como a identidade.

Com o auxílio da equação adjunta podemos decompor o espaço de fase $\mathcal{C}$ em

$$\mathcal{C} = P \oplus Q,$$

onde Q é entendido como o espaço "ortogonal" a P^* segundo a forma bilinear (1.5), ou seja, $Q = \{\varphi \in \mathcal{C} : (\Psi, \varphi) = 0\}$.

Utilizando propriedades de operadores compactos mostra-se que, para todo $\beta \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\Lambda = \{\lambda \in \Sigma(A) : \Re\lambda \geq \beta\}$$

é finito.

Fixado $\beta \in \mathbb{R}$, tomando Λ como sendo o conjunto acima e fazendo a decomposição $\mathcal{C} = P \oplus Q$ segundo Λ, podemos encontrar constantes positivas K e γ para as quais valem as estimativas

$$\begin{aligned} \|T(t)\varphi\| &\leq Ke^{(\beta+\gamma)t}\|\varphi\|, \quad t \leq 0, \quad \varphi \in P \\ \|T(t)\varphi\| &\leq Ke^{(\beta-\gamma)t}\|\varphi\|, \quad t \geq 0, \quad \varphi \in Q \end{aligned} \tag{1.6}$$

Consideremos agora equações funcionais não lineares da forma

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + f(z_t) \tag{1.7}$$

onde $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ é uma não linearidade de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$.

Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, pela Fórmula da Variação das Constantes, uma solução z_t de (1.7) com condição inicial z_{t_o} deve satisfazer

$$z_t = T(t - t_0)z_{t_0} + \int_{t_0}^{t} T(t - s)X_0 f(z_s)ds, \quad t \geq t_0. \tag{1.8}$$

onde $X_0 = X_0(\theta)$ é dado por

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I & \text{se } \theta = 0 \\ 0 & \text{se } -r \leq \theta < 0 \end{cases}$$

Suponhamos que $\Lambda := \{\lambda \in \Sigma(A) : \Re\lambda = 0\}$ é não vazio e consideremos a decomposição associada de $\mathcal{C}$. Sejam Φ e Ψ bases de P e P^*, respectivamente. Se $f(0) = 0$ e f é suficientemente pequena na topologia $\mathcal{C}^k$ na origem, então existe uma variedade central de (1.7) dada por

$$M_f = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi = \Phi x + \sigma(x; f), \quad x \in V \subset \mathbb{R}^m\},$$

onde V é uma vizinhança do zero em $\mathbb{R}^m$, $\sigma(x; f) \in Q$ para cada x e satisfaz $\sigma(0; f) = 0$. M_f não é única, mas pode ser escolhida de classe $\mathcal{C}^k$ se $f \in \mathcal{C}^k$, numa vizinhança do zero. Além disso, é localmente invariante, tangente a P na origem e tem dimensão finita. Sobre M_f o fluxo de (1.7) é dado por $z_t = \Phi x(t) + \sigma(x(t); f)$ onde $x(t)$ é solução da EDO

$$\dot{x} = Bx + \Psi(0) f(\Phi x + \sigma(x; f)), \tag{1.9}$$

sendo B a matriz cujos auto valores são os elementos $\lambda \in \Lambda$.

A variedade central tem um papel fundamental no estudo qualitativo da equação (1.7), pois o comportamento das órbitas desta equação em $\mathcal{C}$, numa vizinhança da singularidade na origem, fica completamente determinado restringindo-se o fluxo a uma variedade central associada. No entanto, de modo mais geral, podemos considerar outras variedades invariantes, tangentes a um espaço invariante P arbitrário, que esteja associado a um conjunto finito e não vazio de auto valores $\Lambda \subset \Sigma(A)$. Neste trabalhho utilizaremos este contexto mais geral. A notação usada para descrever outras variedades invariantes é inteiramente similar à utilizada para descrever variedades centrais.

1.2 Realização de EDO's por EDFR's

Como foi observado em [7] e [11], apesar do fluxo definido por uma equação do tipo (1.7) estar num espaço de dimensão infinita, sua restrição a uma variedade central não é arbitrária. Isto quer dizer que nem sempre a complexidade dinâmica apresentada por EDO's de dimensão finita pode ser reproduzida por uma EDFR.

Faz sentido, então, indagar sobre quais são os fluxos possíveis de ser encontrados numa equação como (1.7) em $\mathcal{C}$.

Um procedimento que vem sendo adotado nessa investigação a partir do trabalho de [11] (mesmo em outros contextos, como para equações parabólicas), refere-se a realização de EDO's, como é definido a seguir:

Definição 1 *Uma EDO*

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{1.10}$$

com $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *satisfazendo* $g(0) = 0$, *é realizada numa EDFR do tipo*

$$\dot{z}(t) = f(z_t), \quad z_t \in \mathcal{C} = \mathcal{C}([-r.0], \mathbb{R}^n), \tag{1.11}$$

se existe uma função $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$, *com* $f(0) = 0$, *e uma decomposição* $C = P \oplus Q$ *segundo um conjunto finito e não vazio de auto valores da equação linearizada de (1.11), tais que estejam satisfeitas às duas propriedades seguintes:*

i) existe uma variedade localmente invariante para (1.11) da forma

$$M_f = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi = \Phi x + \sigma(x; f), \quad x \in V \subset \mathbb{R}^m\}, \tag{1.12}$$

onde Φ é uma base de P e $\sigma : \mathbb{R}^m \to Q$ satisfaz $\sigma(0; f) = 0$ e
ii) o fluxo de (1.11) sobre M_f coincide com o fluxo da EDO dada.

Para $k > 0$ fixado, denotaremos por $J_0^k(\mathbb{R}^m)$ o espaço linear finito dimensional dos k-jatos sobre $\mathbb{R}^m$, para os quais zero é um ponto fixo. Cada elemento deste espaço pode ser entendido como a expansão de Taylor no ponto zero de uma aplicação $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, tal que $g(0) = 0$. Essa expansão até termos de ordem k é designada *k-jato de g*.

Os resultados de realização apresentados em [7] e [11] são válidos somente para k-jatos em $J_0^k(\mathbb{R}^m)$. Se o campo vetorial g na equação (1.10) for de classe C^k, $g(0) = 0$, uma condição necessária e suficiente para que o k-jato de g seja realizado em (1.11) é que n (a dimensão do espaço de chegada da EDFR) seja maior ou igual do que o maior número de blocos de Jordan da matriz $B = Dg(0)$, associados a um mesmo auto valor. Sob essa condição, é possível encontrar f, para a qual (1.11) tenha uma variedade invariante M_f, e a expansão de Taylor de ordem k do campo vetorial reduzido, dado pelo fluxo de (1.11) sobre M_f, coincide (em coordenadas apropriadas) com a expansão de Taylor de g até termos de ordem k. Além disso, se P e P^* são os espaços invariantes para a equação linear $\dot{z}(t) = Df(0)z_t$ e sua adjunta, respectivamente, associados ao conjunto de auto valores $\Sigma(B)$ (que está contido no espectro do gerador infinitesimal da EDFR linear), e se Φ e Ψ são bases para esses respectivos espaços, verifica-se que a realização da parte não linear da EDO (1.10) é obtida por uma EDFR cujos termos não lineares têm valores num subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão igual ao posto de $\Psi(0)$ e dependem apenas de $m-$posto $\Phi(0)$ retardos ([7]).

Esse número de retardos advem do chamado Lema de Lin, que fornece uma condição de independência das auto funções associadas aos auto valores da parte linear da EDFR. Como utilizaremos esse resultado outras vezes nesse trabalho, incluiremos seu enunciado, conforme aparece em [7], onde também pode ser encontrada uma prova.

Lema 1 (Lin) *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e sejam $n, m \in \mathbb{N}$ quaisquer. Dados $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C(I, \mathbb{R}^n)$ funções linearmente independentes, definamos, para $r \in I$, a matriz de ordem $n \times m$, $\Phi_m(r) := [\varphi_1(r), \ldots, \varphi_m(r)]$. Suponhamos que $\Phi_m(r_0)$ tenha posto q para algum $r_0 \in I$ fixado. Então, existem $m-q$ pontos distintos, $r_1, \ldots, r_{m-q} \in I - \{r_0\}$, tais que a matriz $col[\Phi_m(r_0), \ldots, \Phi_m(r_{m-q})]$ (de ordem $n(m-q+1) \times m$) tem posto m.*

Conclui-se que, para $r_1, \ldots, r_{m-q} \in (0, r]$ adequadamente escolhidos e sendo U a matriz de ordem $n \times p$ cujas colunas de $\Psi(0)U$ constituem uma base para o espaço gerado pelas colunas de $\Psi(0)$, a realização dita acima ocorre na classe de EDFR do tipo

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + UF(z(t), \ldots, z(t - r_{m-q})), \tag{1.13}$$

sendo que o operador linear $L : C \to \mathbb{R}^n$ pode ser escolhido de modo que o espaço invariante para a EDFR linear $\dot{z}(t) = L(z_t)$, associado a $\Sigma(B)$, tenha uma base Φ que satisfaz $\dot{\Phi} = \Phi B$.

Para $F : \mathbb{R}^{n(m-q+1)} \to \mathbb{R}^n$ com $F(0) = 0$, a fórmula

$$\hat{F}(\varphi) := F(\varphi(0), \varphi(-r_1), \ldots, \varphi(-r_{m-q}))$$

define o operador Nemitskii $\hat{F} : C \to \mathbb{R}^n$.

Em suma, foi provado que, para qualquer $j^k g \in J_0^k(\mathbb{R}^m)$, encontra-se F e $M_{\hat{F}}$ como em (1.12), tal que o k-jato da função

$$x \in V \subset \mathbb{R}^m \mapsto Bx + \Psi(0)U\hat{F}(\Phi x + \sigma(x; F)) \in \mathbb{R}^m \tag{1.14}$$

coincide com $j^k g$. A função descrita em (1.14) é o lado direito da EDO

$$\dot{x} = Bx + \Psi(0)U\hat{F}(\Phi x + \sigma(x; F)) \tag{1.15}$$

que representa o fluxo de (1.13) sobre a variedade invariante $M_{\hat{F}}$.

A técnica utilizada em [7] para provar o resultado de realização é, essencialmente, um teorema de função implícita na forma sobrejetiva, que não pode ser utilizada para provar um resultado mais forte de realização de campos vetoriais em vez de somente jatos finitos de campos vetoriais. Brevemente, mencionaremos onde está o problema:

A EDO $\dot{x} = Bx + g(x)$ que queremos realizar em (1.13), pode ser colocada, a partir de mudanças de coordenadas adequadas, numa forma normal dada por $\dot{x} = Bx + \Psi(0)Ug(x)$, para Ψ e U como antes (cf. [7]). Portanto, deseja-se provar que para toda g variando num espaço de funções, existe F e uma certa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^m$ tal que, nessa vizinhança, vale a igualdade

$$\hat{F}(\Phi \cdot +\sigma(\cdot; F)) = g(\cdot)$$

A idéia natural é aplicar o Teorema da Função Implícita a "aplicação"

$$(F, g) \mapsto K(F, g) := \hat{F}(\Phi \cdot +\sigma(\cdot; F)) - g(\cdot).$$

Como $K(0,0) = 0$, precisamos definir espaços funcionais convenientes para garantir que $D_F K(0,0)$ seja sobrejetiva. Se $p =$ posto $\Psi(0)$, tomando

$$K : W \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^{n(m-q+1)}, \mathbb{R}^p) \times \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \to \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p),$$

onde W é uma vizinhança do zero, esta aplicação não é continuamente diferenciável, pois envolve um composição de F com σ, enquanto σ também depende de F; ou seja, se $F \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^{n(m-q+1)}, \mathbb{R}^p)$, então $\hat{F}(\Phi \cdot + \sigma(\cdot, F)) \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. Deveríamos então colocar $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ no lugar de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, para garantir que K seja $\mathcal{C}^1$. Mas, nesse caso, $D_F K(0,0)$ não é sobrejetiva. A introdução do espaço de jatos como é feita em [7], resolve essa questão, pois a imagem de $D_F K(0,0)$ consiste de campos vetoriais $\mathcal{C}^k$, que formam um subespaço denso em $\mathcal{C}^{k-1}$; sendo o espaço de jatos finito-dimensional, um subespaço denso nele só pode ser todo o espaço. Isto garante tanto a sobrejetividade quanto a diferenciabilidade da aplicação, dando condições para a utilização do Teorema da Função Implícita.

Um resultado de realização de campos vetorias na variedade central é provado em [26], utilizando uma versão do Teorema da Função Implícita de Nash-Moser, mas com a exigência de outras condições de regularidade.

1.3 Formas Normais para EDFR's

Daremos uma breve descrição do método de obtenção de formas normais para EDFR desenvolvido por Faria e Magalhães [7], que utilizaremos no capítulo 3.

O método consiste numa extensão do algorítmo conhecido como Colchete de Lie, que é comumente usado na construção de formas normais para EDO's.

Seja a EDFR definida em $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + f(z_t), \tag{1.16}$$

com $L : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ linear limitado e $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$.

Ampliando-se o espaço de fase $\mathcal{C}$ a um espaço que pode ser identificado com $\mathcal{C} \times \mathbb{R}^n$ (das funções da forma $\psi = \varphi + X_0\alpha$, $\varphi \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, que são contínuas em $[-r, 0)$, e admitem descontinuidades tipo salto em $\theta = 0$), (1.16) pode ser descrita como uma EDO abstrata

$$\frac{d}{dt}u = \dot{u} + X_0[L(u) - \dot{u}(0)] + X_0 f(u), \tag{1.17}$$

onde $\cdot$ designa a derivada com relação a θ, e

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I & \text{se } \theta = 0 \\ 0 & \text{se } -r \leq \theta < 0 \end{cases}.$$

A equação (1.17) apresenta uma clara decomposição entre termos lineares e não lineares.

Os fatos da teoria geral de EDFR mencionados na seção 1.1 podem ser traduzidos para o novo espaço $\mathcal{C} \times \mathbb{R}^n$, conduzindo à decomposição

$$\mathcal{C} \times \mathbb{R}^n = P \oplus Ker(\pi) \tag{1.18}$$

onde P é o espaço finito dimensional presente na decomposição $\mathcal{C} = P \oplus Q$ segundo algum conjunto de auto valores Λ e $\pi : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \to P$ é a projeção contínua definida por

$$\pi(\varphi + X_0\alpha) = \Phi[(\Psi, \varphi) + \Psi(0)\alpha] \tag{1.19}$$

(Φ e Ψ são bases de P e P^*, respectivamente, e $(\cdot, \cdot)$ designa a forma bilinear (1.5)).

Segundo a decomposição (1.18), colocando $u = \Phi x + \omega$, com $x \in \mathbb{R}^m$ ($m = \dim P$) e $\omega \in Q_1 := Ker(\pi) \cap \mathcal{C}^1$, conclui-se que a equação (1.17) é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \Psi(0) f(\Phi x + \omega) \\ \frac{d}{dt}\omega &= A_{Q_1}\omega + (I - \pi) X_0 f(\Phi x + \omega), \end{aligned} \tag{1.20}$$

onde B é a matriz $m \times m$ que satisfaz $\dot{\Phi} = \Phi B$ e A_{Q_1} é a restrição à Q_1 do operador

$$Au := \dot{u} + X_0[L(u) - \dot{u}(0)].$$

Considerando o desenvolvimento (formal) em série de Taylor dos termos não lineares de (1.20)

$$f(u) = \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} f_j(u), \qquad u \in \mathcal{C},$$

onde f_j é polinômio homogêneo de grau j, reescrevemos (1.20) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} F_j^1(x, \omega) \\ \frac{d}{dt}\omega &= A_{Q_1}\omega + \sum_{j \geq 2} F_j^2(x, \omega) \end{aligned} \tag{1.21}$$

com

$$\begin{aligned} F_j^1(x, \omega) &= \Psi(0) f_j(\Phi x + \omega) \\ F_j^2(x, \omega) &= (I - \pi) X_0 f_j(\Phi x + \omega). \end{aligned}$$

A esse sistema (1.21) é que, enfim, será aplicado o algorítmo de construção das formas normais. Trata-se de um processo recursivo no qual, em cada etapa j, faz-se uma mudança de variável da forma

$$(x, \omega) = (\hat{x}, \hat{\omega}) + \frac{1}{j!} U_j(\hat{x}), \tag{1.22}$$

para $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^m$, $\omega, \hat{\omega} \in Q_1$ e $U_j = (U_j^1, U_j^2) \in V_j^m(\mathbb{R}^m) \times V_j^m(Q_1)$ onde

$$V_j^m(X) = \{ \sum_{|q|=j} c_q x^q : q \in \mathbb{N}^m \quad \text{e} \quad c_q \in X \}.$$

Supondo que já foram calculados os termos até ordem $j-1$, de modo que (1.21) foi transformado num sistema como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \sum_{i=2}^{j-1} \frac{1}{i!} G_i^1(x.\omega) + \frac{1}{j!} \bar{F}_j^1(x,\omega) + \dots \\ \frac{d}{dt}\omega &= A_{Q_1}\omega + \sum_{i=2}^{j-1} \frac{1}{i!} G_i^2(x,\omega) + \frac{1}{j!} \bar{F}_j^2(x,\omega) + \dots \end{aligned}$$

$G_i^1, F_i^1 \in V_i^m(\mathbb{R}^m)$, $G_i^2, F_i^2 \in V_i^m(Ker(\pi))$, reaplicando a mudança de variáveis (1.22) obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \sum_{i=2}^{j} \frac{1}{i!} G_i^1(x,\omega) + \dots \\ \frac{d}{dt}\omega &= A_{Q_1}\omega + \sum_{i=2}^{j} \frac{1}{i!} G_i^2(x,\omega) + \dots \end{aligned} \tag{1.23}$$

onde

$$\begin{aligned} G_j^1(x,\omega) &= \bar{F}_j^1(x,\omega) - [DU_j^1(x)Bx - BU_j^1(x)] \\ &:= \bar{F}_j^1(x,\omega) - (M_j^1 U_j^1)(x) \\ G_j^2(x,\omega) &= \bar{F}_j^2(x,\omega) - [D_x U_j^2(x) - A_{Q_1}(U_j^2(x))] \\ &:= \bar{F}_j^2(x,\omega) - (M_j^2 U_j^2)(x). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Os operadores M_j^1 em (1.24) são definidos precisamente pelos "colchetes de Lie". Com a notação $G_j = (G_j^1, G_j^2)$, $F_j = (F_j^1, F_j^2)$ e $U_j = (U_j^1, U_j^2)$, tem-se

$$G_j = F_j - M_j U_j. \tag{1.25}$$

Evidentemente a escolha dos U_j deve ser conveniente para que (1.23) seja de fato uma forma mais simplificada da equação original (1.21).

Se $P_{I,j} = (P^1_{I,j}, P^2_{I,j})$ é projeção de $V^m_j(\mathbb{R}^m) \times V^m_j(Ker(\pi))$ sobre $\Im(M^1_j) \times \Im(M^2_j)$, para $\omega = 0$ em (1.25), uma escolha adequada de U_j é

$$U_j(x) = M_j^{-1} P_{I,j} \bar{F}_j(x, 0), \tag{1.26}$$

pois permite anular a componente de G_j em $\Im(M_j)$:

$$G_j(x, 0) = (I - P_{I,j}) \bar{F}_j(x, 0) \in (\Im(M_j))^c.$$

Por indução, obtem-se a forma normal para (1.21) relativa ao espaço invariante P, dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} G^1_j(x, \omega) \\ \frac{d}{dt}\omega &= A_{Q_1}\omega + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} G^2_j(x, \omega) \end{aligned} \tag{1.27}$$

com G_j e U_j definidos, respectivamente, por (1.25) e (1.26).

Se for válida a condição

$$G^2_j(x, 0) = 0, \qquad \forall j \geq 2, \tag{1.28}$$

então a equação $\omega = 0$ define uma variedade localmente invariante para (1.21), tangente a P na origem, onde o fluxo é descrito pela EDO m-dimensional (em forma normal)

$$\dot{x} = Bx + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} G^1_j(x, 0). \tag{1.29}$$

A condição (1.28) será garantida se os operadores M^2_j forem sobrejetivos, o que, por sua vez, ocorre se estiverem satisfeitas as condições de não ressonância relativas a $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$:

$$q_1\lambda_1 + \ldots q_m\lambda_m \neq \mu, \qquad \forall \mu \in \Sigma(A_{Q_1}), \qquad q_1 + \ldots + q_m \geq 2.$$

O espectro de A_{Q_1} é constituído pelos auto valores da equação linear

$$\dot{z}(t) = L(z_t) \tag{1.30}$$

que não pertencem ao conjunto Λ.

Essas condições de não ressonância são satisfeitas particularmente para os casos em que Λ é o conjunto dos auto valores de (1.30) com $\Re\lambda = 0$ ou $\Re\lambda \geq 0$; a equação $\omega = 0$ representa então a equação da variedade central e da variedade centro instável, respectivamente.

Capítulo 2

Realização de Dinâmicas Estruturalmente Estáveis

Sistemas dinâmicos robustos ou estruturalmente estáveis são aqueles que conservam suas propriedades qualitativas por pequenas perturbações. Dito de modo mais preciso, um campo vetorial g tem a propriedade de estabilidade estrutural se existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo campo vetorial $\bar{g}$ com $\|g - \bar{g}\|_{C^1} < \varepsilon$, tem-se que $\bar{g}$ é topologicamente equivalente a g.

Para EDO's em dimensão maior ou igual a três podemos encontrar fenômenos dinâmicos estruturalmente estáveis bastante complicados. Por exemplo: EDO's com homoclínicas transversais a órbitas periódicas hiperbólicas. Para estas equações, o "shift" aparece de modo persistente, e existem conjuntos de Cantor invariantes onde o comportamento dinâmico pode ser descrito por dinâmicas simbólicas. Há também atratores estranhos que são hiperbólicos, como os atratores de Lorenz; uma discussão sobre isto pode ser encontrada em [10] (cap.5).

Mostraremos que qualquer dinâmica local estruturalmente estável observada para EDO's pode ser encontrada numa classe de EDFR's. Isto será formulado como um problema de realização de EDO's por EDFR's.

2.1 Realização de Família de Jatos

Para $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, consideremos a EDFR

$$\dot{z}(t) = f(z_t). \tag{2.1}$$

Seja Λ um conjunto finito e não vazio de auto valores da sua equação linearizada e consideremos a decomposição usual $\mathcal{C} = P \oplus Q$ associada a Λ. Fixemos as bases Φ e Ψ para os espaços invariantes P e P^*, respectivamente, tais que $(\Psi, \Phi) = I$; suponhamos que $p =$ posto $\Psi(0)$ e $q =$ posto $\Phi(0)$. Seja B a matriz de ordem $m \times m$ que satisfaz $\dot{\Phi} = \Phi B$.

Pelo que foi visto na seção 1.2 do capítulo 1, dada a EDO

$$\dot{x} = Bx + g(x) \tag{2.2}$$

se g for polinomial de grau k, com $g(0) = 0$ e $Dg(0) = 0$, podemos efetuar a realização do k-jato desta equação em (1.13), para F conveniente, sobre uma variedade invariante M_F. Portanto, a EDO (1.15), que descreve o fluxo da EDFR sobre M_F pode ser representada por

$$\dot{x} = Bx + g(x) + G(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{2.3}$$

com $G(x)$ de ordem maior do que k, para x pequeno.

O resultado de realização de jatos finitos não nos permite ter qualquer controle sobre o resto $G(x)$. Vimos que não pode ser nulo. Portanto, não temos nenhuma informação à respeito da "proximidade" dos fluxos (2.3) com (2.2) numa vizinhança do zero. Para contornar esse problema vamos introduzir uma versão parametrizada do resultado de realização de jatos.

Uma família a um parâmetro de k-jatos de classe $\mathcal{C}^\ell$ em $J_0^k(\mathbb{R}^m)$ é uma família $\{j^k(\varepsilon)\}_{-\delta\leq\varepsilon\leq\delta}$, tal que $\varepsilon \in (-\delta,\delta) \mapsto j^k(\varepsilon) \in J_0^k(\mathbb{R}^m)$ é uma curva $\mathcal{C}^\ell$.

Definição 2 *Uma família* $\{j^k(\varepsilon)\}_{-\delta\leq\varepsilon\leq\delta}$ *em* $J_0^k(\mathbb{R}^m)$ *de classe* $\mathcal{C}^\ell$ *é realizada numa EDFR do tipo (2.1) se existir uma família* $\{f_\varepsilon\}_{-\delta\leq\varepsilon\leq\delta}$ *tal que*
(i) Para cada $\varepsilon \in (-\delta,\delta)$, f_ε *é de classe* $\mathcal{C}^k$ *e realiza* $j^k(\varepsilon)$ *sobre uma variedade invariante*

$$M_\varepsilon = M_{f_\varepsilon} = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi = \Lambda_{f_\varepsilon}(x), \quad x \in \mathrm{W} \subset \mathbb{R}^m\},$$

W *é uma vizinhança do zero em* $\mathbb{R}^m$ *(independente de* ε*) e* $\Lambda_{f_\varepsilon}(x) \in \mathcal{C}$ *é* $\mathcal{C}^k$ *em* x*;*
(ii) As funções

$$\begin{aligned}(\varphi,\varepsilon) \in \mathcal{C}\times(-\delta,\delta) \quad &\mapsto \quad f_\varepsilon(\varphi) \in \mathbb{R}^n\\ (\varepsilon, x) \in (-\delta,\delta)\times \mathrm{W} \quad &\mapsto \quad \Lambda_{f_\varepsilon}(x) \in \mathcal{C}\end{aligned}$$

são contínuas juntamente com suas derivadas parciais com relação a ε *até ordem* ℓ*.*

Observação 1: A condição (ii) é que faz a diferença entre a realização da família $\{j^k(\varepsilon)\}_{-\delta\leq\varepsilon\leq\delta}$ e a realização de $j^k(\varepsilon)$ para cada $\varepsilon \in (-\delta,\delta)$.

Um teorema de realização para família de jatos é dado a seguir.

Teorema 1 *Para todo $\ell \geq 0$ e n suficientemente grande, cada família C^ℓ de jatos em zero de equações diferenciais ordinárias do tipo*

$$\dot{x} = B_\varepsilon x + G_\varepsilon(x), \quad \varepsilon \in (-\delta, \delta), \quad x \in \mathbb{R}^m \tag{2.4}$$

com $G_\varepsilon(0) = 0$, $DG_\varepsilon(0) = 0$, pode ser realizada por equações funcionais retardadas da forma

$$\dot{z}(t) = L_\varepsilon(z_t) + UF_\varepsilon(z(t), z(t - r_1), ..., z(t - r_{m-q})), \tag{2.5}$$

para uma matriz U de ordem $n \times p$ e retardos $0 < r_1 < ... < r_{m-q} \leq r$, tais que p e q são valores que dependem apenas da parte linear de (2.5), e uma família de funções polinomiais F_ε satisfazendo $F_\varepsilon(0) = 0$, $DF_\varepsilon(0) = 0$, todos adequadamente escolhidos.

Prova: Seja $k > 1$ fixado arbitrariamente. Precisamos verificar a validade das condições (i) e (ii) da definição de realização de família de jatos.

A primeira parte é precisamente o teorema de realização para jatos finitos que foi mencionado no capítulo 1. Incluiremos uma parte da prova, por completividade. Para cada $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, sabemos que a EDO linear $\dot{x} = B_\varepsilon x$ pode ser realizada em $\dot{z}(t) = L_\varepsilon(z_t)$ se, e somente se, $n \geq$maior número de blocos de Jordan associados a cada um dos auto valores de B_ε. Se $k(\varepsilon)$ é esse número, tomaremos $n \geq \max_\varepsilon k(\varepsilon)$, de modo que a realização da parte linear, para todo ε, fica garantida com EDFR's lineares tomando valores em $\mathbb{R}^n$ (sendo o mesmo n válido para todos os elementos da família).

Se Φ_ε eΨ_ε são bases, respectivamente, para o espaço m-dimensional associado ao conjunto de auto valores de $\dot{z}(t) = L_\varepsilon(z_t)$ constituido pelos auto valores de B_ε e o seu espaço adjunto, sejam $p_\varepsilon =$posto $\Psi_\varepsilon(0)$ e $q_\varepsilon =$posto $\Phi_\varepsilon(0)$.

Como antes, vamos considerar a matrizes U_ε de ordem $n \times p_\varepsilon$ tais que as colunas de $\Psi_\varepsilon(0)U_\varepsilon$ constituam uma base para o espaço gerado pelas colunas de $\Psi_\varepsilon(0)$. Sejam

$$p := \max_{\varepsilon} p_\varepsilon \;\text{ e }\; q := \min_{\varepsilon} q_\varepsilon.$$

Entre as matrizes U_ε tomamos uma matriz U que tenha ordem $n \times p$ e escolhemos retardos $0 < r_1, \ldots < r_{m-q} \leq r$ tais que, para todo $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, as matrizes

$$M_\varepsilon = col[\Phi_\varepsilon(0), \ldots, \Phi_\varepsilon(-r_{m-q})]$$

tenham posto m.

Para cada $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ fixado, pelo Teorema 4.2 de [7], existe uma mudança de coordenadas, definida por uma matriz não singular S de ordem $m \times m$, que transforma a equação (2.4) numa forma normal

$$\dot{x} = B_\varepsilon S x + \Psi_\varepsilon(0) U g_\varepsilon(S^{-1}x),$$

com $g_\varepsilon : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.

Seja $\mathrm{P}_0^k(\mathbb{R}^{n(m-q+1)}, \mathbb{R}^p)$ o espaço das funções $f : \mathbb{R}^{n(m-q+1)} \to \mathbb{R}^p$ que são polinomiais de ordem k e satisfazem $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$. Denotaremos por $J_0^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ o espaço de k-jatos de funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^p$.

Consideremos equações da forma (2.5) com $F_\varepsilon \in P_0^k(\mathbb{R}^{n(m-q+1)}, \mathbb{R}^p)$, $F_\varepsilon(0) = 0$ e $DF_\varepsilon(0) = 0$. Assim, para ε fixado e para qualquer $\ell \geq 0$, podemos obter vizinhanças de zero

$$\mathrm{V}_0 \subset \mathbb{R}^m, \qquad \mathrm{W}_0^\varepsilon \subset \mathrm{P}_0^k(\mathbb{R}^{n(m-q+1)}, \mathbb{R}^p),$$

e uma função de classe $C^{k+\ell}$

$$\sigma_\varepsilon : \mathrm{V}_0 \times \mathrm{W}_0^\varepsilon \to Q$$

satisfazendo $\sigma_\varepsilon(x,0)=0$, $\forall x\in \mathrm{V}_0$, e $\sigma_\varepsilon(0,F_\varepsilon)=D_x\sigma_\varepsilon(0,F_\varepsilon)=0$, $\forall F_\varepsilon\in \mathrm{W}_0^\varepsilon$, tal que

$$M_\varepsilon=\{\varphi_\varepsilon\in\mathcal{C}:\varphi_\varepsilon=\Phi_\varepsilon x+\sigma_\varepsilon(x,F_\varepsilon),\quad x\in \mathrm{V}_0\}$$

é uma variedade invariante local para o problema (2.5). Em M_ε o fluxo é descrito pela equação

$$\dot{x}=B_\varepsilon Sx+\Psi_\varepsilon(0)U\hat{F}_\varepsilon(\Phi x+\sigma_\varepsilon(x,F_\varepsilon)),$$

onde $\hat{F}(\phi)=F(\phi(0),\phi(-r_1),...,\phi(-r_{m-q}))$.

Definindo a função $\mathcal{C}^{k+\ell}$

$$K:J_0^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)\times \mathrm{W}_0^\varepsilon\to J_0^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$$

por

$$K(g_\varepsilon,F_\varepsilon)=j_0^k(\hat{F}_\varepsilon(\Phi_\varepsilon\cdot+\sigma_\varepsilon(\cdot,F_\varepsilon)))-g_\varepsilon(S^{-1}\cdot),$$

onde $j_0^k(f)$ denota o k-jato em zero de f (não confundir com $j^k(\varepsilon)$; aqui ε está fixado), a condição (i) é estabelecida mostrando-se que

$$D_{F_\varepsilon}K(0,0):\mathrm{P}_0^k(\mathbb{R}^{n(m-q+1)},\mathbb{R}^p)\to J_0^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$$

é sobrejetiva e aplicando-se o teorema da função implícita na forma sobrejetiva à $K(g_\varepsilon,F_\varepsilon)=0$ numa vizinhança de zero em $J_0^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)\times\mathrm{P}_0^k(\mathbb{R}^{n(m-q+1)},\mathbb{R}^p)$.

Isto é feito com detalhes por Faria e Magalhães em ([7], teorema 4.5), usando que posto de M_ε é igual a m, para todo $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$.

Falta provar que estão satisfeitas as duas condições de regularidade exigidas em (ii) da Definição 2.

Como $D_{F_\varepsilon}K(0,0)$ é sobrejetiva, para todo $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ é possível obter um suplementar para $Ker[D_{F_\varepsilon}K(0,0)]$, isto é,

$$\mathrm{P}_0^k(\mathbb{R}^{n(m-q+1)},\mathbb{R}^p)=Ker[D_{F_\varepsilon}K_\varepsilon(0,0)]\oplus E,$$

onde E é um espaço finito dimensional, tal que

$$D_{F_\varepsilon} K(0,0)|_E : E \to J_0^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$$

é um isomorfismo.

Consideremos $\bar{K} = K|_{J_0^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)\times E} : J_0^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \times E \to J_0^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$.

Portanto, existe uma vizinhança de zero V $\subset J_0^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ tal que para qualquer curva g_ε em V de classe $\mathcal{C}^\ell$, existe uma curva $\mathcal{C}^\ell$ de funções F_ε em E tal que $K(g_\varepsilon, F_\varepsilon) = 0$. A regularidade de F_ε implica também que a função $\Lambda_{F_\varepsilon}(x) = \Phi_\varepsilon(x) + \sigma(x, F_\varepsilon)$, que define a variedade invariante M_ε, é de classe $\mathcal{C}^\ell$ com relação a ε.

Fica com isto provado o teorema. □

2.2 Realização de Dinâmicas Persistentes

O Teorema 1 acima possibilita a formulação de um resultado de realização de equações diferenciais ordinárias por equações funcionais retardadas no sentido de equivalência de fluxos numa variedade invariante.

Dizemos que o fluxo da equação (2.1) numa variedade invariante M_f é $\mathcal{C}^1$*- equivalente* ao fluxo da equação

$$\dot{x} = Bx + g(x) \tag{2.6}$$

para x numa vizinhança de zero W $\subset \mathbb{R}^m$, e g : W $\to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$, se existe um difeomorfismo de M_f sobre W que leva trajetórias de (2.1) sobre M_f

em trajetórias de (2.6), preservando a orientação.

Vamos considerar o subespaço

$$D_0 = \{g \in C^1(\bar{\mathrm{W}}, \mathbb{R}^m) : g(0) = 0, \quad Dg(0) = 0\}.$$

Teorema 2 *Para n suficientemente grande, existe um conjunto de funções $\mathcal{D}$ que é denso em D_0 e satisfaz a seguinte propriedade: para toda função $g \in \mathcal{D}$ é possível encontrar um matriz U, de ordem $n \times p$, e uma função $F : \mathbb{R}^{n(m-q+1)} \to \mathbb{R}^p$ tais que o fluxo da equação (1.13), em alguma variedade invariante, é C^1- equivalente ao fluxo da equação ordinária (2.6).*

Prova: Basta provar que um polinômio arbitrário $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de grau k, $k \geq 2$ fixado, satisfazendo $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$, pode ser aproximado por uma função g satisfazendo as asserções do teorema, pois o conjunto desses polinômios é denso em D_0.

Escrevemos:

$$h(x) = \sum_{j=2}^{k} h_j(x),$$

com h_j homogêneo de grau j, isto é, $h_j(x) = A_j x^j$ com A_j j-linear.

Vamos aplicar o Teorema 1 à família de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = \varepsilon^{k-1} Bx + h_\varepsilon(x), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

onde

$$h_\varepsilon(x) = \sum_{j=2}^{k} \varepsilon^{k-j} h_j(x).$$

Escolhendo $\ell > k$ e tomando $|\varepsilon| < \delta$ com δ suficientemente pequeno, podemos realizar k-jatos em zero de (2.7) numa EDFR do tipo (1.13) como família $\mathcal{C}^\ell$. Ou seja, podemos encontrar uma família de não linearidades UF_ε e retardos $r_1(\varepsilon), ..., r_{m-q}(\varepsilon) \in (0, r]$, tais que as equações diferenciais funcionais

$$\dot{z}(t) = L_\varepsilon(z_t) + UF_\varepsilon(z(t), z(t - r_1), ..., z(t - r_{m-q})) \qquad (2.8)$$

realizam (2.7) sobre variedades invariantes

$$M_\varepsilon = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi = \Phi_\varepsilon x + \sigma_\varepsilon(x, F_\varepsilon),\ x \text{ numa vizinhança do zero } \mathrm{V} \subset \mathbb{R}^m\}.$$

Assim, para cada ε, o fluxo de (2.8) sobre M_ε é equivalente ao fluxo da equação

$$\dot{x} = \varepsilon^{k-1}Bx + h_\varepsilon(x) + H(\varepsilon, x), \qquad (2.9)$$

para $x \in \mathrm{V}$ e $H : (-\delta, \delta) \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}^m$ de ordem $k + 1$ em x para $||x|| \to 0$; precisamente,

$$H(\varepsilon, x) = \Psi_\varepsilon(0)U\hat{F}_\varepsilon(\Phi_\varepsilon x + \sigma_\varepsilon(x, F_\varepsilon)) - h_\varepsilon(x).$$

Pela condição (ii) da Definição 1 e sendo $h_\varepsilon(x)$ uma família $\mathcal{C}^\ell$, temos que $H(\varepsilon, x)$ também é de classe $\mathcal{C}^\ell$. Como $\ell > k$,

$$D_x^j H(\varepsilon, x)|_{x=0} = 0, \qquad \forall j = 1, ..., k. \qquad (2.10)$$

A idéia agora é, através de uma mudança de escala conveniente, reescrever (2.9) como uma equação da forma $\dot{y} = By + h(y) + \bar{H}(\varepsilon, y)$ com $\bar{H}(\varepsilon, y) \to 0$ e $D_y\bar{H}(\varepsilon, y) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Então, definiremos a função g como $g(y) = h(y) + \bar{H}(\varepsilon, y)$, de modo que g e h fiquem tão próximas quanto desejamos na norma $\mathcal{C}^1$ uniforme.

Façamos

$$x = \varepsilon y \qquad \text{e} \qquad t = \frac{s}{\varepsilon^{k-1}} \tag{2.11}$$

Usando a homogeneidade de h_j, essa mudança de variáveis transforma (2.9) em

$$\frac{dy}{ds} = \varepsilon^{-k}\frac{dx}{dt} = \varepsilon^{-k}(\varepsilon^k By + \sum_{j=2}^{k}\varepsilon^k h_j(y) + H(\varepsilon, \varepsilon y)) = By + h(y) + \varepsilon^{-k}H(\varepsilon, \varepsilon y). \tag{2.12}$$

Seja $\bar{H}(\varepsilon, y) := \varepsilon^{-k}H(\varepsilon, \varepsilon y)$. Por (2.10), temos que

$$\bar{H}(\varepsilon, y) \to 0 \text{ e } D_y\bar{H}(\varepsilon, y) \to 0$$

quando $\varepsilon \to 0$, uniformemente para y num conjunto limitado.

Escolheremos então um valor de ε tal que $\bar{H}(\varepsilon, y)$ seja suficientemente pequeno na norma do supremo em $\mathcal{C}^1(\mathrm{W}, \mathbb{R}^m)$ e assim tenhamos a proximidade desejada entre as funções g e h.

Portanto, a equação $\dot{y}(s) = By + g(y)$, via a transformação de variáveis (2.11) é $\mathcal{C}^1$-equivalente à equação (2.9), substituindo a vizinhança V por εW, e esta equação, por sua vez, representa o fluxo de (1.13), com $F = F_\varepsilon$, sobre a variedade invariante

$$\bar{M}_\varepsilon = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi = \Phi_\varepsilon x + \sigma_\varepsilon(x, F_\varepsilon), \;\; x \in \varepsilon \mathrm{W}\}$$

□

O Teorema 2 mostra que, dado um campo vetorial qualquer em $\mathbb{R}^m$, arbitrariamente próximo dele existe um campo vetorial que pode ser realizado por uma equação funcional com um número finito de retardos. Em particular, temos o

Corolário 1 *Qualquer dinâmica local estruturalmente estável pode ser encontrada em (1.13).*

Prova: Seja W uma vizinhança do zero em $\mathbb{R}^m$ e consideremos a equação

$$\dot{x} = Bx + \bar{g}(x), \quad x \in \mathrm{W} \text{ e } \bar{g}(0) = 0, \quad D\bar{g}(0) = 0. \tag{2.13}$$

Se a propriedade de estabilidade estrutural for satisfeita para (2.13), então o fluxo desta equação é $\mathcal{C}^0$-equivalente ao fluxo da equação (2.6), para toda g que esteja próxima de $\bar{g}$ em $\mathcal{C}^1(\mathrm{W}, \mathbb{R}^m)$.

Então, tomando $g \in \mathcal{D}$, pelo Teorema 2 , existem U, matriz de ordem $n \times p$, e F tais que o fluxo de (1.13) é $\mathcal{C}^1$-equivalente ao fluxo de (2.6) em alguma variedade invariante e, portanto, é equivalente ao fluxo da equação dada (2.13) nessa variedade. $\square$

Capítulo 3

Imersão de Campos Vetoriais em EDFR's

No capítulo anterior provamos um resultado de realização de dinâmicas estruturalmente estáveis numa equação do tipo (1.13), usando um resultado de densidade. Porém, esse resultado não é suficiente para garantir a ocorrência em (1.13) de muitos fenômenos degenerados encontrados em EDO's. Para esse fim, precisamos mostrar que todas as EDO's podem ser realizadas por esta equação.

Já mencionamos anteriormente o trabalho de Rybakowski [26], onde foi provada a realização de EDO's arbitrárias por EDFR's com finitos retardos, na variedade central; contudo, há exigência de que o campo vetorial dado seja bastante regular e a técnica utilizada na prova, que se baseia no Teorema de Função Implícita de Nash-Moser, implica uma perda substancial de derivadas: o campo vetorial g em (1.10) tem que ser tomado, pelo menos de classe $\mathcal{C}^{32}$ e, então, se obtém a não linearidade da EDFR de classe $\mathcal{C}^{17}$.

O objetivo deste capítulo é mostrar que, tirando-se a exigência da variedade M_f ser central, o resultado de realização de EDO's arbitrárias em EDFR's escalares com não linearidades dependendo apenas de um número finito de retardos, se mantém para campos g de classe $\mathcal{C}^1$ e, além disso, se tomarmos $g \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, poderemos obter a não linearidade de (1.13) também de classe $\mathcal{C}^k$. A variedade M_f será construída a partir da Fórmula da Variação das Constantes.

3.1 Colocação do Problema

Utilizando a notação e alguns fatos apresentados no capítulo 1, nos preocuparemos nessa seção em colocar o problema central numa forma conveniente, afim de que seja completamente atacado na próxima seção.

Consideremos a EDFR linear

$$\dot{z}(t) = L(z_t), \qquad z_t \in \mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Dado $\beta \in \mathbb{N}$, seja Λ um conjunto finito e não vazio de auto valores de (3.1) tal que, cada $\lambda \in \Lambda$ satisfaz $\Re\lambda < -\beta$. Segundo Λ fazemos a decomposição $\mathcal{C} = P \oplus Q$. Seja $m = \dim P$ e $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ uma base de P.

Como consequência do Lema de Lin (Lema 1), podemos escolher os retardos $0 < r_1 < \ldots < r_{m-1} \leq r$ para os quais a aplicação

$$H : x \in \mathbb{R}^m \mapsto (\Phi(0)x, \ldots \Phi(-r_{m-1})x) \in \mathbb{R}^m \tag{3.2}$$

é um isomorfismo. Seja $H^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ a inversa de H.

Para $k = 1, 2, \ldots$, seja $\mathcal{E}^k$ o conjunto de todas as funções

$$f : x \in \mathbb{R}^m \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

tais que, para todo j, $1 \leq j \leq k$, a derivada de Fréchet $D_x^j f$ existe e é contínua e limitada em $\mathbb{R}^m$.

Se $f \in \mathcal{E}^k$, seja $\hat{f}(\varphi) := f(\varphi(0), \ldots \varphi(-r_{m-1}))$, $\varphi \in \mathcal{C}$, o operador Nemitskii, de classe $\mathcal{C}^k$.

Seja V uma vizinhança do zero em $\mathbb{R}^m$. Dada uma EDO

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in V \subset \mathbb{R}^m, \tag{3.3}$$

com $g : V \to \mathbb{R}^m$ limitada e de classe $\mathcal{C}^1$, queremos encontrar uma função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ também de classe $\mathcal{C}^1$, tal que, para a equação

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + \hat{f}(z_t), \tag{3.4}$$

existe uma variedade localmente invariante

$$M_{\hat{f}} := \left\{ \Lambda_{\hat{f}}(x) : x \in V \subset \mathbb{R}^m \right\},$$

e o fluxo de (3.4) sobre $M_{\hat{f}}$ é conjugado ao fluxo de (3.3). Trata-se, portanto, de encontrar $f \in \mathcal{E}^1$ e uma imersão $\Lambda_{\hat{f}} : V \to \mathcal{C}$ tal que, se $t \mapsto x(t)$ é uma solução de (3.3) com $x(0) = x_0$, então $t \mapsto z_t(\cdot) = \Lambda_{\hat{f}}(x(t))(\cdot)$ é uma solução de (3.4) com $z_0(\cdot) = \Lambda_{\hat{f}}(x_0)(\cdot)$. A função $\Lambda_{\hat{f}}$ é a conjugação entre os fluxos da EDFR (3.4) e da EDO (3.3).

Supondo que $z_t(\theta) = \Lambda(x(t))(\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, seja solução de (3.4), devemos ter

$$\frac{d}{dt}(\Lambda(x(t))(0)) = L(\Lambda(x(t))) + \hat{f}(\Lambda(x(t)))$$

ou seja,

$$D_x\Lambda(x(t))(0)\dot{x}(t) = L(\Lambda(x(t))) + \hat{f}(\Lambda(x(t)))$$

Utilizando (3.3) e extraíndo o argumento t para facilitar a notação, chegamos à equação

$$D_x\Lambda(x)(0)(g(x)) = L(\Lambda(x)) + \hat{f}(\Lambda(x)). \tag{3.5}$$

Procuraremos $\Lambda(x)$ da forma

$$\Lambda(x) = \Phi x + \sigma(x) \tag{3.6}$$

onde Φ é uma base para P e $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathcal{C}$ é uma função não linear a ser encontrada.

Deste modo, em (3.5) ficaremos com

$$D_x\sigma(x)(0)\dot{x}(t) = L(\sigma(x)) + L(\Phi x) - \Phi(0)g(x) + \hat{f}(\Phi x + \sigma(x)). \tag{3.7}$$

Precisamos, então, definir as funções σ e f de forma que satisfaçam a equação (3.7).

Construção de f: Um resultado de estabilização de EDFR proposto por [19] nos auxiliará na construção da função f. Esse resultado estabelece que se $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \ldots$ são auto valores de uma EDFR $\dot{z}(t) = L(z_t)$, dados quaisquer números complexos $\mu_1, \ldots, \mu_s$ distintos dos λ_j, é possível modificar o operador L, de modo que a nova equação linear tenha como auto valores os números $\mu_1, \ldots, \mu_s, \lambda_{s+1}, \ldots$.

Dado $\beta \in \mathbb{N}$ queremos transportar todos os auto valores de (3.1) para o semiplano $\{\Re\lambda < -\beta\}$. Sabemos que há apenas um número finito de auto valores no complementar $\{\Re\lambda \geq -\beta\}$; chamemos de Γ o conjunto destes elementos. Segundo Γ obtemos a decomposição usual $C = P_\Gamma \oplus Q_\Gamma$ e temos as bases Φ_Γ e Ψ_Γ dos espaçoes P_Γ e P_Γ^*, respectivamente. Sejam $m_\Gamma = \dim P_\Gamma$ e B_Γ a matriz $m_\Gamma \times m_\Gamma$ que satisfaz a relação $\dot{\Phi}_\Gamma = \Phi_\Gamma B_\Gamma$. Se $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$, escolhemos $\mu_1, \ldots, \mu_s \in \mathbf{C} - \Sigma(A)$, onde A é o gerador infinitesimal da equação linear $\dot{z}(i) = L(z_t)$, tais que $\Re\mu_j < -\beta$, $j = 1, \ldots s$. Como os elementos μ_j são tomados fora do espectro de A, eles não coincidem com nenhum elemento de Λ. O par $(B_\Gamma, \Psi_\Gamma(0))$ é controlável, isto é, a matriz $(\Psi_\Gamma(0), B_\Gamma\Psi_\Gamma(0), \ldots, B_\Gamma^{m_\Gamma - 1}\Psi_\Gamma(0))$ tem posto m_Γ ([7], teorema 5.2); portanto, pelo resultado de [19], existe uma matriz F de ordem $1 \times m_\Gamma$, tal que o espectro do gerador infinitesimal A_F da EDFR linear

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + F(\Psi_\Gamma(0), z_t),$$

onde $(\cdot, \cdot)$ designa a forma bilinear definida em (1.15), é $(\Sigma(A) - \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}) \cup \{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$. Ou seja, os auto valores $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ são transportados para as novas posições $\mu_1, \ldots \mu_s$, com $\Re\mu_j < -\beta$, $j = 1, \ldots s$, e os demais auto valores de A permanecem como antes. Sumarizamos estas informações no Lema a seguir.

Lema 2 *Dado $\beta \in \mathbb{N}$, existe um operador contínuo $M : C \to \mathbb{R}$ tal que todos os auto valores λ da equação linear*

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + M(z_t)$$

satisfazem $\Re\lambda < -\beta$. M pode ser escolhido como

$$M(\varphi) = F(\Psi_\Gamma, \varphi)$$

para uma matriz conveniente F de ordem $1 \times m_\Gamma$, onde $m_\Gamma = \dim P_\Gamma$ e $(\cdot, \cdot)$ designa a forma bilinear definida por (1.5).

Semelhantemente ao efetuado na prova do Teorema 5.2 de [7], prova-se que os espaços invariantes P e P_F para os geradores infinitesimais A e A_F, respectivamente, associados ao conjunto de auto valores Λ, são iguais.

Colocando

$$\hat{f}(\Lambda(x)) := F(\Psi_\Gamma, \sigma(x)) - L(\Phi x) \tag{3.8}$$

F como no Lema 2, em (3.7) obtemos

$$D_x\sigma(x)(0)\dot{x}(t) = L(\sigma(x)) + F(\Psi_\Gamma, \sigma(x)) - \Phi(0)g(x).$$

Devemos então encontrar $\sigma(x)$ tal que, para cada solução $x(t)$ de (3.3), a função

$$v_t(\theta) := \sigma(x(t))(\theta) \tag{3.9}$$

satisfaça

$$\dot{v}(t) = L(v_t) + F(\Psi_\Gamma, v_t) - \Phi(0)g(x). \tag{3.10}$$

A Fórmula da Variação das Constantes dará a expressão da função v e, consequentemente de σ. Esta será obtida na próxima seção, onde também provaremos com rigor todos os detalhes envolvidos nesse problema de realização.

3.2 Resultado Principal

A formulação do resultado principal deste capítulo é feita no Teorema 3 abaixo. Antes de enunciá-lo vamos inserir alguns fatos standard da teoria de EDO's, que nos serão úteis na prova desse Teorema.

Para $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ limitada, globalmente Lipschitziana, consideremos $\pi_g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ o fluxo global gerado pela função g, isto é, π_g é uma transformação que associa a cada ponto $(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ o valor em t da solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= g(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Lema 3 *Seja $k \in \mathbb{N}$. Para todo campo vetorial limitado $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, o fluxo π_g é também C^k e existe uma constante $\tilde{c_k}$ tal que*

$$\|D_x^k \pi_g(t, x_0)\| \leq \tilde{c_k} \exp(k|t| \|g\|_{C^k}), \quad \forall (t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m,$$

onde $\| \ \|$ denota a norma em $\mathcal{L}^k((\mathbb{R}^m)^k, \mathbb{R}^m)$.

Prova: A prova, feita por indução, pode ser facilmente encontrada na literatura de equações diferenciais ordinárias. Incluiremos aqui apenas um esboço; para maiores detalhes veja, por exemplo, [14].

Derivando (3.12) com relação à condição inicial, conclui-se que a matriz $D_x\pi(t, x_0)$ deve satisfazer à equação linear variacional

$$\dot{y}(t) = D_x g(\pi(t, x_0)) y(t) \tag{3.12}$$

donde, $D_x\pi(t, x_0) = D_x\pi(0, x_0) \exp(tD_x g(\pi(t, x_o)))$, com $D_x\pi(0, x_0) = I$.

Disto segue a desigualdade para $k = 1$. Repetindo os argumentos obtém-se as derivadas de ordem superior. $\square$

Aplicando a regra da cadeia e o Lema 3 obtemos:

Lema 4 *Seja $k \in \mathbb{N}$. Para todo campo vetorial limitado $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^k$, existe uma constante c_k tal que*

$$||D_x^k(g \circ \pi)(t, x_0)|| \leq c_k ||g||_{\mathcal{C}^k} \exp(k|t|||g||_{\mathcal{C}^k}), \ \forall (t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

Teorema 3 *Existe $\delta > 0$ tal que, para toda função $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$, limitada, com $||g||_{\mathcal{C}^1} < \delta$, existe uma não linearidade $f \in \mathcal{E}^1$ e uma variedade invariante $M_{\hat{f}}$ para a EDFR (3.4), para as quais essa equação realiza a EDO (3.3). Se g for de classe $\mathcal{C}^k$ pode-se escolher $f \in \mathcal{E}^k$ e $M_{\hat{f}}$ é dada por uma imersão $\Lambda_{\hat{f}} : \mathbb{R}^m \to \mathcal{C}$ também de classe $\mathcal{C}^k$.*

Prova: Seja $k \geq 1$ e consideremos g de classe $\mathcal{C}^k$. Denotaremos por

$$N_j := ||g||_{\mathcal{C}^j}, \quad j = 0, \ldots, k.$$

Escolhemos um número $\beta \in \mathbb{N}$ que satisfaça

$$\beta > kN_k \quad \text{e} \quad \beta > N_1 + 1.$$

Para esse β, pelo Lema 2 podemos obter uma matriz F de modo que todos os auto valores da equação

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + F(\Psi_\Gamma, z_t) \tag{3.13}$$

têm parte real menor do que $-\beta$. Logo, existem constantes positivas γ e $K = K(\gamma)$ tais que

$$||T_0(t)\varphi|| \leq Ke^{-(\beta+\gamma)t}||\varphi||, \ t > 0, \ \varphi \in \mathcal{C}, \tag{3.14}$$

onde $\{T_0\}$, $t \geq 0$, designa o semigrupo sobre $\mathcal{C}$ gerado pelas soluções da equação linear (3.13).

Evidentemente, o número $\beta+\gamma$ também satisfaz as desigualdades

$$\beta+\gamma > kN_k \quad \text{e} \quad \beta+\gamma > N_1+1. \tag{3.15}$$

Definimos a função $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathcal{C}$ por

$$\sigma(x) = -\int_0^\infty T_0(s)X_0\Phi(0)g(\pi(-s,x))ds, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \tag{3.16}$$

onde

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I & \text{se } \theta = 0 \\ 0 & \text{se } -r \leq \theta < 0 \end{cases}$$

A função σ está bem definida, pois $T_0(s)X_0\Phi(0)g(\pi(-s,x))$ definida de $[-r,0]$ em $\mathbb{R}$ é contínua e, além disso, por (3.14) tem-se que

$$\|T_0(s)X_0\Phi(0)g(\pi(-s,x))\| \leq K|\Phi|N_0e^{-(\beta+\gamma)s}$$

com $|\Phi| = |(\phi_1,\ldots,\phi_m)| = \sum_{i=1}^m \|\phi_i\|_{\mathcal{C}}$.

Pelo Lema 4, $\forall j, 1 \leq j \leq k$ e $\forall x \in \mathbb{R}^m$,

$$\|D_x^jT_0(s)X_0\Phi(0)g(\pi(-s,x))\| \leq Kc_j|\Phi|N_je^{-(\beta+\gamma-jN_j)s}.$$

A função

$$h_j(s) := Kc_j|\Phi|N_je^{-(\beta+\gamma-jN_j)s} \tag{3.17}$$

é integrável. Portanto, $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathcal{C}$ é de classe $\mathcal{C}^k$.

Além disso, temos que

$$\int_0^\infty h_j(s)ds = Kc_j|\Phi|N_j\frac{1}{\beta+\gamma-jN_j} \tag{3.18}$$

Definindo $\Lambda : \mathbb{R}^m \to \mathcal{C}$ por $\Lambda(x) = \Phi x + \sigma(x)$, vamos mostrar que $x \mapsto \Lambda(x)$ é uma imersão de $\mathbb{R}^m$ em $\mathcal{C}$.

Como vimos na seção anterior, para retardos $0 < r_1 < \dots r_{m-1} \leq r$ convenientemente escolhidos, a aplicação H definida em (3.2) é um isomorfismo. Definindo U como sendo o conjunto destes retardos, ou seja, $U := \{0, r_1, \dots, r_{m-1}\}$, vemos que

$$\|H\| = \sup_{|x|\leq 1} |H(x)| = \sup_{|x|\leq 1} \max_{\theta \in U} |\Phi(\theta)x| = \max_{\theta \in U} |\Phi(\theta)| < \infty.$$

Logo, pelo Teorema da Inversa Limitada, temos que $\|H^{-1}\| < \infty$.

Tomando $j = 1$ em (3.18) e usando a relação $\beta + \gamma > N_1 + 1$, obtemos a estimativa

$$\|D_x \sigma(x)\| \leq K c_1 |\Phi| N_1.$$

Para $\delta < \frac{1}{\|H^{-1}\| K c_1 |\Phi|}$, se $\|g\|_{C^1} < \delta$, então

$$\|D_x \sigma(x)\| < \frac{1}{\|H^{-1}\|}.$$

Temos que $D_x\sigma(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{C})$; para cada $\theta \in U$ e $N_1 < \delta$, valem as relações abaixo:

$$\begin{aligned} \|D_x\sigma(x)(\cdot)(\theta)\| &= \sup_{\|y\|\leq 1} |D_x\sigma(x)y(\theta)| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|D_x\sigma(x)y\| \\ &= \|D_x\sigma(x)\| < \frac{1}{\|H^{-1}\|} \end{aligned}$$

Logo, para $N_1 < \delta$,

$$\|(D_x\sigma(x)(\cdot)(0), \dots, D_x\sigma(x)(\cdot)(-r_{m-q}))\| = \max_{\theta \in U} |D_x\sigma(x)(\cdot)(\theta)| < \frac{1}{\|H^{-1}\|}.$$

Consideremos a aplicação

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

definida por

$$\mathcal{S}(x) = H^{-1}(\sigma(x)(0), \ldots, \sigma(x)(-r_{m-1})).$$

Se $N_1 < \delta$, pelas estimativas anteriores, temos que

$$\|D_x\mathcal{S}(x)\| = \|H^{-1}\|\|(D_x\sigma(x)(0), \ldots, D_x\sigma(x)(-r_{m-1}))\| < \|H^{-1}\|\frac{1}{\|H^{-1}\|} = 1.$$

Agora, definimos $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ como

$$x \mapsto \Lambda(x)(0), \ldots, \Lambda(x)(-r_{m-1})) = H(x + H^{-1}(\sigma(x)(0), \ldots, \sigma(x)(-r_{m-1}))).$$

Ou seja, $\mathcal{F} = H \circ (I + \mathcal{S})$.

Sabemos que $\mathcal{F}$ é de classe $\mathcal{C}^k$. Como H é um isomorfismo e $\|D_x\mathcal{S}(x)\| < 1$, pelo Teorema da Função Inversa, localmente $\mathcal{F}$ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^k$. Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ tem uma inversa global. Para isto, basta mostrar que

$$x \in \mathbb{R}^m \mapsto x + S(x) \in \mathbb{R}^m,$$

é invertível. Dado $y \in \mathbb{R}^m$, consideremos $T_y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dada por $T_y(x) = y - S(x)$; como $\|D_xT_y(x)\| = \|D_xS(x)\| < 1$, segue que T_y tem um único ponto fixo x_0, ou seja, $y = x_0 - S(x_0)$, donde segue que $x \mapsto x + \mathcal{S}(x)$ tem uma inversa.

Portanto, $\mathcal{F}$ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^k$ e existe $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $x = h(\Lambda(x)(0), \ldots, \Lambda(x)(-r_{m-1}))$.

Podemos agora definir a função f, para todo $y \in \mathbb{R}^m$, como

$$f(y) = F(\Psi_\Gamma, \sigma(h(y)))) - L(\Phi h(y)). \tag{3.19}$$

Para todo j, $0 \leq j \leq k$, a aplicação

$$y \mapsto D_y^j h(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

é contínua e limitada; logo, $f \in \mathcal{E}^k$.

Para provar que $x \mapsto \Lambda(x)$ é uma imersão de $\mathbb{R}^m$ em $\mathcal{C}$, seguimos um raciocínio análogo ao anterior, mas agora utilizando a própria Φ para fazer o papel da função H. De fato, dado $x = (x_1, \ldots x_m) \in \mathbb{R}^m$, temos que $\Phi : \mathbb{R}^m \to P \subset \mathcal{C}$ é dada por $\Phi(x) = \sum_{j=1}^m x_j \phi_j$, que é a transformação que dá uma mudança de base; portanto, Φ é também um isomorfismo. Além disso, podemos expressar a aplicação $x \in \mathbb{R}^m \mapsto \Lambda(x) \in \mathcal{C}$ por

$$\Lambda(x) = \Phi(x + \Phi^{-1}\sigma(x)).$$

Diminuindo o valor de δ se necessário, ou seja, tomando

$$\delta < \min\left\{\frac{1}{\|\Phi^{-1}\| K c_1 |\Phi|}, \frac{1}{\|H^{-1}\| K c_1 |\Phi|}\right\},$$

se $N_1 < \delta$, obtemos $\|D_x \Phi^{-1}(\sigma(x))\| < 1$.

Procedendo de modo análogo ao efetuado antes, concluimos que Λ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^m$ num subespaço m-dimensional de $\mathcal{C}$.

Resta apenas mostrar que f dada por (3.19) de fato define uma função para a qual (3.4) realiza (3.3) sobre

$$M_f = \{\Lambda(x) = \Phi x + \sigma(x) : x \in V \subset \mathbb{R}^m\}.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\sigma(x) = -\int_0^\infty T_0(s)X_0\Phi(0)g(\pi(-s,x))ds = -\int_{-\infty}^0 T_0(-s)X_0\Phi(0)g(\pi(s,x))ds.$$

Assim, dados quaisquer $t, t_0 \in \mathbb{R}$, com $t_0 < t$,

$$\begin{aligned}
\sigma(\pi(t,x)) &= -\int_{-\infty}^0 T_0(-s)X_0\Phi(0)g(\pi(t+s,x))ds \\
&= -\int_{-\infty}^t T_0(t-s)X_0\Phi(0)g(\pi(s,x))ds \\
&= -T_0(t-t_0)\int_{-\infty}^{t_0} T_0(t_0-s)X_0\Phi(0)g(\pi(s,x))ds \\
&- \int_{t_0}^t T_0(t-s)X_0\Phi(0)g(\pi(s,x))ds \\
&= T_0(t-t_0)\sigma(\pi(t_0,x)) - \int_{t_0}^t T_0(t-s)X_0\Phi(0)g(\pi(s,x))ds
\end{aligned}$$

A função $v_t := \sigma(\pi(t,x)) \in \mathcal{C}$ satisfaz

$$\dot{v}(t) = L(v_t) + F(\Psi_\Gamma, v_t) - \Phi(0)g(\pi(t,x)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pela definição de f, segue que a função $t \in \mathbb{R} \mapsto \Lambda(\pi(t,x)) \in \mathcal{C}$ é solução da equação (3.4). Isto completa a prova do teorema. $\square$

Capítulo 4

Formas Normais para uma Singularidade Nilpotente

Dumortier e Ibáñez [2] estudaram singularidades de campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ cuja parte linear é conjugada a

$$y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}.$$

Eles trataram os casos de codimensão 3, isto é, quando essas singularidades ocorrem em famílias genéricas à 3 parâmetros, e também os de codimensão 4.

Utilizando o método descrito na seção 1.3 do capítulo 1, vamos calcular uma forma normal para EDFR's escalares com uma singularidade deste tipo, no caso de codimensão 3. Os cálculos para o caso mais degenerado de codimensão 4 também foram efetuados, porém, não apresentaremos aqui por serem demasiadamente extensos.

4.1 Zero de Multiplicidade 3

Consideremos a EDFR

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + f(z_t) \tag{4.1}$$

onde $L : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ é linear, limitado e $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, satisfazendo $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$.

Suponhamos que a equação característica

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} d\eta(\theta) e^{\lambda\theta}$$

associada a equação linear

$$\dot{z}(t) = L(z_t) \tag{4.2}$$

tenha $\lambda = 0$ como auto valor de multiplicidade 3 e não tenha outros auto valores no eixo imaginário. Então, devemos ter

$$\Delta(0) = \Delta'(0) = \Delta''(0) = 0 \text{ e } \Delta'''(0) \neq 0$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} L(1) &= 0 \\ L(\theta) &= 1 \\ L(\theta^2) &= 0 \\ L(\theta^3) &\neq 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Segundo $\Lambda = \{0\}$ temos a decomposição $\mathcal{C} = P \oplus Q$. Uma base para P é dada por

$$\Phi(\theta) = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}\right\}, \qquad -r \leq \theta \leq 0.$$

Para o espaço "dual" P^*, uma base $\Psi(\theta)$ pode ser obtida usando-se a relação $(\Psi, \Phi) = I$, onde $(\cdot, \cdot)$ é a forma bilinear dada em (1.5); chegamos em:

$$\Psi(s) = \mathrm{col}\left(\psi_1(0) - s\psi_2(0) + s^2\frac{\psi_3(0)}{2}, \psi_2(0) - s\psi_3(0), \psi_3(0)\right)$$

com

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_3(0)^2\left\{\frac{L(\theta^5)}{5!} + \left(\frac{L(\theta^4)}{4!}\right)^2\psi_3(0)\right\} \\ \psi_2(0) &= \psi_3(0)^2\frac{L(\theta^4)}{4!} \\ \psi_3(0) &= \frac{-3!}{L(\theta^3)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

A matriz B satisfazendo $\dot{\Phi} = \Phi B$ é dada por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Realização de [7], não existem restrições na realização, sobre uma variedade central na origem , de jatos finitos de campos vetoriais com essa singularidade, por EDFR's com não linearidades dependendo de três ou mais retardos, desde que estes sejam adequadamente escolhidos.

Portanto, faremos o cálculo de formas normais para (4.1) com f dependendo apenas de dois e de um retardo.

4.2 EDFR's com Dois Retardos

Consideremos

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + f(z(t - r_0), z(t - r_1)), \tag{4.5}$$

com $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ e $r_0, r_1 \in [-r, 0]$ são distintos.

Tomando a expansão de Taylor de f, temos que

$$f(z(t - r_0), z(t - r_1)) = \frac{1}{2} f_2(\Phi(x, y, z) + \omega) + k(z(t - r_0), z(t - r_1))$$

sendo que a última função no lado direito da igualdade inclui todos os termos de ordem superior a dois e

$$f_2(\Phi(x, y, z) + \omega) = A_{20} z^2(t - r_0) + A_{11} z(t - r_0) z(t - r_1) + A_{02} z^2(t - r_1).$$

Temos

$$\begin{aligned}
f_2(\Phi(x, y, z) + \omega) &= f_2\left(x + \theta y + \frac{\theta^2}{2} z + \omega(\theta)\right) \\
&= A_{20}\left(x - r_0 y + \frac{r_0^2}{2} z + \omega(-r_0)\right)^2 \\
&+ A_{02}\left(x - r_1 y + \frac{r_1^2}{2} z + \omega(-r_1)\right)^2 \\
&+ A_{11}\left(x - r_0 y + \frac{r_0^2}{2} z + \omega(-r_0)\right)\left(x - r_1 y + \frac{r_1^2}{2} z + \omega(-r_1)\right)
\end{aligned}$$

Logo, para $\omega = 0$,

$$\begin{aligned}
f_2(\Phi(x, y, z)) &= A_{20}\left(x - r_0 y + \frac{r_0^2}{2} z\right)^2 + A_{02}\left(x - r_1 y + \frac{r_1^2}{2} z\right)^2 + \\
&+ A_{11}\left(x - r_0 y + \frac{r_0^2}{2} z\right)\left(x - r_1 y + \frac{r_1^2}{2} z\right).
\end{aligned}$$

e

$$F_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} \Psi(0) \\ (I-\pi)X_0 \end{pmatrix} f_2(\Phi(x,y,z))$$

Como $\Lambda = \{0\}$, as condições de não ressonância estão satisfeitas e, portanto, $P^2_{I,2} = I$.

Calculando as imagens dos elementos da base canônica de $V_2^3(\mathbb{R}^3)$ pelos operadores

$$(M_j^1 p)(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\frac{\partial p_1}{\partial x} + z\frac{\partial p_1}{\partial y} - p_2 \\ y\frac{\partial p_2}{\partial x} + z\frac{\partial p_2}{\partial y} - p_3 \\ y\frac{\partial p_3}{\partial x} + z\frac{\partial p_3}{\partial y} \end{pmatrix},$$

podemos escolher

$$\Im(M_2^1)^c = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}$$

Com isto, calculando $U_2(x,y,z) = M_2^{-1} P_{I,2} f_2(x,y,z,0)$, obtemos

$$U_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ h \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \{\left(-\psi_1(0) + \frac{\psi_2(0)}{2} r_0 - \frac{\psi_3(0)}{3!} r_0^2\right) r_0 A_{20} \\ &+ \left(-\psi_1(0) + \frac{\psi_2(0)}{3}(r_0+r_1) - \frac{\psi_3}{3!} r_0 r_1\right) \frac{A_{11}}{2}(r_0+r_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(-\psi_1(0) + \frac{\psi_2(0)}{2} - \frac{\psi_3(0)}{3!} r_1^2\right) r_1 A_{02}\} x^2 \\
&+ \{\left(\psi_1(0) - \frac{\psi_2(0)}{3} r_0 + \frac{\psi_3}{12} r_0^2\right) r_0^2 A_{20} \\
&+ \left(\frac{\psi_1(0)}{3!}(r_0+r_1)^2 + \left(\frac{\psi_1(0)}{3} - \frac{\psi_2(0)}{6}(r_0+r_1) + \frac{\psi_3(0)}{12} r_0 r_1\right) A_{11}\right) \\
&+ \left(\psi_1(0) - \frac{\psi_2(0)}{3} r_1 + \frac{\psi_3(0)}{12} r_1^2\right) r_1^2 A_{02}\} xy \\
&- \psi_1(0)\left(A_{20} r_0^3 + A_{11}\frac{r_0+r_1}{2} r_0 r_1 + A_{02} r_1^3\right) xz \\
&+ \frac{\psi_1(0)}{4}(A_{20} r_0^4 + A_{11} r_0^2 r_1^2 + A_{02} r_1^4) yz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b \;=\;& -\psi_1(0)(A_{20} + A_{11} + A_{02}) x^2 + \{\left(\psi_2(0) - \frac{\psi_3(0)}{3} r_0\right) r_0^2 A_{20} \\
&+ \left(\frac{\psi_2(0)}{2}(r_0+r_1)^2 + (\psi_2(0) - \psi_3(0)(r_0+r_1)) r_0 r_1\right)\frac{A_{11}}{3} \\
&+ \left(\psi_2(0) - \frac{\psi_3(0)}{3} r_1\right) r_1^2 A_{02}\} xy + \{\left(-\psi_2(0) + \frac{\psi_3(0)}{4} r_0\right) r_0^3 \frac{A_{20}}{3} \\
&+ (-\psi_1(0)(r_0+r_1)^2 + (4\psi_1(0) - \frac{\psi_2(0)}{2}(r_0+r_1) \\
&+ \frac{\psi_3(0)}{4} r_0 r_1) r_0 r_1)\frac{A_{11}}{3} + \left(-\psi_2(0) + \frac{\psi_3}{4} r_1\right) r_1^3 \frac{A_{02}}{3}\} xz \\
&+ \{\left(-\psi_2(0) + \frac{\psi_3(0)}{4} r_0\right) r_0^3 \frac{A_{20}}{3} + (\psi_1(0)(r_0 - r_1)^2 \\
&+ \left(-\psi_2(0)(r_0+r_1) + \frac{\psi_3(0)}{2} r_0 r_1\right) r_0 r_1)\frac{A_{11}}{3!} \\
&+ (-\psi_2(0) + \frac{\psi_3}{4} r_1) r_1^3 \frac{A_{02}}{3}\} y^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c &= -\psi_2(0)(A_{20}+A_{11}+A_{02})x^2 + \{2(-\psi_1(0)-\psi_2(0)r_0)A_{20} \\
&+ (-2\psi_1(0)+\psi_2(0)(r_0+r_1))A_{11} + 2(-\psi_1(0)+\psi_2(0)r_1)A_{02}\}xy \\
&+ \{-\frac{\psi_3(0)}{3}r_0^3A_{20} - (\psi_2(0)(r_0-r_1)^2 + \frac{\psi_3(0)}{2}(r_0+r_1)r_0r_1)\frac{A_{11}}{3} \\
&- \frac{\psi_3(0)}{3}r_1^3A_{02}\}xz + \{-\frac{\psi_3(0)}{3}r_0^3A_{20} + (\psi_2(0)(r_0-r_1)^2 \\
&- \psi_3(0)(r_0+r_1)r_0r_1)\frac{A_{11}}{3!} - \frac{\psi_3(0)}{3}r_1^3A_{02}\}y^2 + \frac{\psi_3(0)}{4}(A_{20}r_0^4 \\
&+ A_{11}r_0^2r_1^2 + A_{02}r_1^4)yz - \frac{\psi_2(0)}{4}(A_{20}r_0^4 + A_{11}r_0^2r_1^2 + A_{02}r_1^4)z^2
\end{aligned}
$$

e h é solução da equação

$$(M_2^2h)(x,y,z) = (I-\pi)X_0H(x,y,z)$$

com

$$
\begin{aligned}
H(x,y,z) &= (A_{20}+A_{11}+A_{02})x^2 - (2A_{20}r_0 + A_{11}(r_0+r_1) + 2A_{02}r_1)xy \\
&+ (A_{20}r_0^2 + A_{11}\frac{r_0^2+r_1^2}{2} + A_{02}r_1^2)xz + (A_{20}r_0^2 + A_{11}r_0r_1 + A_{02}r_1^2)y^2 \\
&- (A_{20}r_0^3 + A_{11}(\frac{r_0^2r_1^2+r_0r_1^2}{2}) + A_{02}r_1^3)yz \\
&+ (A_{20}\frac{r_0^4}{4} + A_{11}\frac{r_0^2r_1^2}{4} + A_{02}\frac{r_1^4}{4})z^2
\end{aligned}
$$

Os termos de segunda ordem em forma normal, na variedade $\omega = 0$, serão dados por

$$G_2(x,y,z,0) = F_2(x,y,z,0) - M_2U_2(x,y,z).$$

Para $M_2U_2(x,y,z)$ chegamos na seguinte expressão:

$$M_2U_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} \psi_1(0)H(x,y,z) \\ \psi_2(0)H(x,y,z) \\ d \\ (I-\pi)X_0H(x,y,z) \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} d &= -2\psi_2(0)(A_{20}+A_{11} \\ &+ A_{02})xy + \{2(-\psi_1(0)+\psi_2(0)r_0)A_{20} \\ &+ (-2\psi_1(0)+\psi_2(0)(r_0+r_1))A_{11} \\ &+ 2(-\psi_1(0)+\psi_2(0)r_1)A_{02}\}(y^2+xz) \\ &- \psi_3(0)\{A_{20}r_0^3 + A_{11}(\frac{r_0^2r_1+r_0r_1^2}{2}) + A_{02}r_1^3\}yz \\ &+ \psi_3(0)(A_{20}\frac{r_0^4}{4} + A_{11}\frac{r_0^2r_1^2}{4} + A_{02}\frac{r_1^4}{4})z^2. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$G_2(x,y,z,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{d} \\ 0 \end{pmatrix}$$

sendo

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \psi_3(0)(A_{20}+A_{11}+A_{02})x^2 + \{2(\psi_2(0)-r_0\psi_3(0))A_{20} \\ &+ (2\psi_2(0)-(r_0+r_1)\psi_3(0))A_{11} + 2(\psi_2(0)-r_1\psi_3(0))A_{02}\}xy \\ &+ \{(2\psi_1(0)-2\psi_2(0)r_0+\psi_3(0)r_0^2)A_{20} \\ &+ (2\psi_1(0)-2\psi_2(0)(r_0+r_1)+\psi_3(0)(\frac{r_0^2+r_1^2}{2}))A_{11} \\ &+ (2\psi_1(0)-2\psi_2(0)r_1+\psi_3(0)r_1^2)A_{02}\}xz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \{(2\psi_1(0) - 2\psi_2(0)r_0 + \psi_3(0)r_0^2)A_{20} \\
&+ \quad (2\psi_1(0) - 2\psi_2(0)(r_0 + r_1) + \psi_3(0)r_0r_1)A_{11} \\
&+ \quad (2\psi_1(0) - 2\psi_2(0)r_1 + \psi_3(0)r_1^2)A_{02}\}y^2
\end{aligned}
$$

Portanto, o fluxo da EDFR (4.5) na variedade central $\{\omega = 0\}$ é dado, em forma normal, por

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y + O(\|(x,y,z)\|^3) \\
\dot{y} &= z + O(\|(x,y,z)\|^3) \\
\dot{z} &= \alpha x^2 + \beta xy + \gamma xz + \eta y^2 + O(\|(x,y,z)\|^3)
\end{aligned}
$$

sendo os coeficientes da forma normal expressos em termos dos coeficientes da equação original, por

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-3}{L(\theta^3)}(A_{20} + A_{11} + A_{02}) \\
\beta &= \frac{3}{L(\theta^3)}\{\left(2r_0 + \frac{L(\theta^4)}{2L(\theta^3)}\right)A_{20} + \left(r_0 + r_1 + \frac{L(\theta^4)}{2L(\theta^3)}\right)A_{11} \\
&+ \left(2r_1 + \frac{L(\theta^4)}{L(\theta^4)}\right)A_{02}\} \\
\gamma &= \frac{3}{L(\theta^3)}\{\left(\frac{L(\theta^5)}{10L(\theta^3)} - \frac{L(\theta^4)^2}{8L(\theta^3)} - \frac{L(\theta^4)}{2L(\theta^3)}r_0 - r_0^2\right)A_{20} \\
&+ \left(\frac{L(\theta^5)}{10L(\theta^3)} - \frac{L(\theta^4)^2}{L(\theta^3)^2} - \frac{L(\theta^4)}{2L(\theta^3)}(r_0 + r_1) - (\frac{r_0^2 + r_1^2}{2})\right)A_{11} \\
&+ \left(\frac{L(\theta^5)}{10L(\theta^3)} - \frac{L(\theta^4)^2}{8L(\theta^3)^2} - \frac{L(\theta^4)}{2L(\theta^3)}r_1 - r_1^2\right)A_{02}\} \\
\eta &= \frac{3}{L(\theta^3)}\{\left(\frac{L(\theta^5)}{10L(\theta^3)} - \frac{L(\theta^4)^2}{8L(\theta^3)^2} - \frac{L(\theta^4)}{2L(\theta^3)}r_0 - r_0^2\right)A_{20} \\
&+ \left(\frac{L(\theta^5)}{10L(\theta^3)} - \frac{L(\theta^4)^2}{3L(\theta^3)^2} - \frac{L(\theta^4)}{L(\theta^3)}(r_0 + r_1) - r_0r_1\right)A_{11} \\
&+ \left(\frac{L(\theta^5)}{10L(\theta^3)} - \frac{L(\theta^4)^2}{8L(\theta^3)^2} - \frac{L(\theta^4)}{2L(\theta^3)}r_1 - r_1^2\right)A_{02}\}.
\end{aligned}
$$

4.3 EDFR's com Um Retardo

Consideraremos agora equações com apenas um retardo

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + f(z(t - r_0)), \quad 0 \leq r_0 \leq r, \tag{4.6}$$

com $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$.

Os cálculos são inteiramente análogos aos anteriores, porém bem mais simples neste caso. Os termos de segunda ordem na expansão de Taylor de f são dados por

$$f_2(\Phi(x, y, z) + \omega) = A_2 z^2(t - r_o).$$

Para $\omega = 0$, $f_2(\Phi(x, y, z)) = A_2(x - r_0 y + \frac{r_0^2}{2} z)^2$.

$$U_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ h \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
a &= \left(-\psi_1(0) + \frac{\psi_2(0)}{2} r_0 - \frac{\psi_3(0)}{3!} r_0^2\right) r_0 A_{20} x^2 \\
&+ \left(\psi_1(0) - \frac{\psi_2(0)}{3} r_0 + \frac{\psi_3(0)}{12} r_0^2\right) r_0^2 A_2 xy \\
&- \psi_1(0) A_2 r_0^3 xz + \frac{\psi_1(0)}{4} A_2 r_0^4 yz \\
b &= -\psi_1(0) A_2 x^2 + \left(\psi_2(0) \frac{\psi_3(0)}{3} r_0\right) r_0^2 A_2 xy \\
&+ \left(-\psi_2(0) + \frac{\psi_3(0)}{4} r_0\right) r_0^3 \frac{A_2}{3} xz + \left(-\psi_2(0) + \frac{\psi_3(0)}{4} r_0\right) r_0^3 \frac{A_2}{3} y^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c &= -\psi_2(0)A_2x^2 + 2\left(\psi_1(0) + \psi_2(0)r_0\right)A_2xy - \frac{\psi_3(0)}{3}r_0^3A_2xz \\
&- \frac{\psi_3(0)}{3}r_0^3A_2y^2 + \frac{\psi_3(0)}{4}A_2r_0^4yz - \frac{\psi_2(0)}{4}A_2r_0^4z^2
\end{aligned}
$$

e h é solução de equação

$$
(M_2^2h)(x,y,z) = (I-\pi)X_0\{A_2(x - r_0y + \frac{r_0^2}{2}z)^2\}.
$$

Assim, $G_2(x,y,z,0) = F_2(x,y,z,0) - M_2U_2(x,y,z)$ é dado por

$$
G_2(x,y,z,0) = A_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{d} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

com

$$
\begin{aligned}
\bar{d} &= \psi_3(0)x^2 + 2(\psi_2(0) - r_0\psi_3(0))xy \\
&+ (2\psi_2(0) - 2\psi_2r_0 + \psi_3(0)r_0^2)(xz + y^2)
\end{aligned}
$$

Na variedade central $\{\omega = 0\}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y + O(\|(x,y,z)\|^3) \\
\dot{y} &= z + O(\|(x,y,z)\|^3) \\
\dot{z} &= \alpha x^2 + \beta xy + \gamma xz + \eta y^2 + O(\|(x,y,z)\|^3)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{3}{L(\theta^3)}A_2 \\
\beta &= \frac{3}{L(\theta^3)}\left(2r_0 + \frac{L(\theta^4)}{2L(\theta^3)}\right)A_2 \\
\gamma = \eta &= \frac{3}{L(\theta^3)}\left(\frac{L(\theta^5)}{10L(\theta^3)} - \frac{L(\theta^4)^2}{8L(\theta^3)^2} - \frac{L(\theta^4)}{2L(\theta^3)}r_0 - r_0^2\right)A_2
\end{aligned}
$$

Portanto, ao menos no nível dos jatos normalizados, detectamos a restrição $\gamma = \eta$.

Isso é compatível com o resultado de Hale em [11], onde, com um cálculo simples, é verificado que: se $\lambda = 0$ é auto valor de multiplicidade m da equação característica associada à equação linearizada de uma EDFR escalar, então o número mínimo de retardos deve ser $m - 1$. No nosso caso, como $m = 3$, o menor número de retardos a ser considerado deve ser dois.

No entanto, do ponto de vista do comportamento dinâmico na vizinhança da singularidade estudada, não há restrição, pois para essa análise os coeficientes γ e η podem ser suprimidos. Dumortier e Ibáñez [2] provaram que, para campos vetoriais finito dimensionais com a mesma singularidade no caso de codimensão três, há um único tipo topológico; a saber, se $\alpha \neq 0$, são todos C^0−equivalentes a

$$y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + x^2\frac{\partial}{\partial z},$$

de onde se conclui que os coeficientes γ e η são irrelevantes para descrever os fuxos do sistema, ao menos do ponto de vista de equivalência topológica.

Quando $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ (com outras condições sobre o 3-jato), obtém-se um subconjunto algébrico de codimensão 4 no espaço dos campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ com uma singularidade na origem.

4.4 Considerações Finais

Esse trabalho é uma contribuição no estudo da complexidade dinâmica de equações com retardo. Porém, pairam ainda muitas dúvidas à respeito das restrições que podem existir nos fluxos de equações funcionais, quando são reduzidos à uma variedade invariante. São poucos os exemplos conhecidos onde tais limitações ocorrem e não é clara a razão de sua existência.

Seguindo a linha de pesquisa de [8], uma questão interessante seria a caracterização destas restrições no espaço de jatos normalizados: se somente envolvem relações algébricas entre os coeficientes da forma normal, se são sempre lineares ou podem ser também quadráticas, cúbicas,..., ou mesmo transcendentes. Uma vez obtida esta descrição efetiva de sua natureza, seria fundamental poder dizer algo sobre sua importância no comportamento dinâmico do problema.

Temos efetuado cálculos de formas normais, como os apresentados neste capítulo, para singularidades nilpotentes no plano, a saber, os casos tratados em [3] e [4] para campos vetoriais finito dimensionais e, como já citamos, o caso de codimensão 4 para a mesma singularidade tratada aqui, para EDFR's com dois e com apenas um retardo. Porém, em geral, as expressões dos coeficientes envolvem muitos termos, dificultando a obtenção de boas conclusões.

Um fato interessante é a impossibilidade do tratamento dos casos elíptico, sela e foco de [4], para EDFR com um retardo, visto que o coeficiente da forma normal que deveria anular-se é sempre distinto de zero no cálculo que obtivemos. Há uma suspeita de que, em alguns casos, o aumento da degenerecência torne necessário o aumento do número de retardos envolvidos no problema.

Bibliografia

[1] CARR, J. (1981) Applications of center manifold theory, *App. Math. Sci*, vol 35, Springer-Verlag, New York.

[2] DUMORTIER, F., IBÁÑEZ, S. (1994) Nilpotent singularities in generic 4-parameter families of 3-dimensional vector fields, pre-print.

[3] DUMORTIER, F., ROUSSARIE, R., SOTOMAYOR, J. (1987) Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3. *Ergod. Th. and Dyn. Syst*, 7, 375-413.

[4] DUMORTIER, F., ROUSSARIE, R., SOTOMAYOR, J., ZOLADEK, H. (1991) Bifurcations of planar vector fields: nilpotent singularities and abelian integrals, *Lec. Notes Math.* 1480, Springer-Verlag.

[5] FARIA, T., MAGALHÃES, L. (1995) Normal forms for retarded functional differential equations and applications to Bogdanov singularity, *J.*

Diff. Equations, 122, 22, 181-200.

[6] FARIA, T., MAGALHÃES, L. (1995) Normal forms for retarded functional differential equations with parameters and applications to Hopf bifurcation, *J. Diff. Equations*, 122, 22, 201-224.

[7] FARIA, T., MAGALHÃES, L. (1995) Realization of ordinary differential equations by retarded functional differential equations in neighborhoods of equilibrium points, *Proc. Royal Soc. Edinb.*, 125-A, 759-776.

[8] FARIA, T., MAGALHÃES, L. (1995) Restrictions on the possible flows of scalar retarded functional differential equations in neighborhoods of singularities, to appear.

[9] FIEDLER, B., POLÁCIK, P. (1990) Complicated dynamics of scalar reaction diffusion equations with a nonlocal terms, *Proc. Roy. Soc. Edinb.* Sect. A 115, 167-192.

[10] GUKENHEIMER, J., HOLMES, P. (1983) Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer-Verlag, New York.

[11] HALE, J. (1985) Flows on center manifolds for scalar functional differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* Sect. A 101, 193-201.

[12] HALE, J. (1986) Local flows for functional differential equations, *Contemp. Math.* vol 56, 185-192, *Amer. Math. Soc.*, Providence, R.I.

[13] HALE, J., MAGALHÃES, L., OLIVA, W. (1982) An introduction to infinite dimensional dynamical systems: Geometric theory, *App. Math. Sci.*, 47.

[14] HALE, J. (1980) Ordinary diferential equations, *Robert E. Krieger Publ. Comp.*, New York.

[15] HALE, J. (1977) Theory of functional differential equations, Springer-Verlag.

[16] HALE, J., LUNEL, S. V. (1993) Introduction to functional differential equations , *Appl. Math. Sci*, 99, Springer-Verlag.

[17] HAUTUS, M. J. (1970) Stabilization controllability and observability of linear autonomous systems, *Indag. Math.* 32, 448-455.

[18] HENRY, D. (1981) Geometric theory of semilinear parabolic equations, *Lec. Notes in Math,* 840, Springer-Verlag.

[19] PANDOLFI, L. (1975) Feedback stabilization of functional differential equations, *Boll. della Unione Matematica Italiana*, 11, 626-635.

[20] POLÁCIK, P. (1991) Complicated dynamics in scalar semilinear parabolic equations in higher space dimension, *J. Diff. Eqns.*, 89, 244-271.

[21] POLÁCIK, P. (1992) Imbedding of any vector field in a scalar semilinear parabolic equation, *Proc. Amer. Math. Soc,* v 115, 4, 1001-1008.

[22] POLÁCIK, P. (1992) Realization of any finite jet in a scalar semilinear parabolic equation on the ball in $\mathbb{R}^3$, *Ann. Scuola Sup. Pisa,* XVIII, 83-102.

[23] POLÁCIK, P.(1995) Hight-dimensional ω-limit sets and chaos in scalar parabolic equations, *J. Diff. Equations* 119, 24-53.

[24] POLÁCIK, P., RYBAKOWSKI, K. (1994) Imbedding vector fields in scalar parabolic Dirichlet BVPs, to appear.

[25] RYBAKOWSKI, K. (1994) Realization of arbitrary vector fields on center manifolds of parabolic Dirichlet BVP's, *J. Diff. Equations*, 114, 199-221.

[26] RYBAKOWSKI, K. (1994) Realization of arbitrary vector fields on invariant manifolds of delay equations, *J. Diff. Equations*, 114, 222-231.

[27] WIGGINS, S. (1990) Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, Springer-Verlag.