

Geometria das hipersuperfícies de conflito

Plácido de Jesus da Silva Leitão Junior

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Orientador: **Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor foi bolsista da FAPESP
Processo 98/15064-2*

São Paulo, 10 de dezembro de 2001

Geometria das hipersuperfícies de Conflito

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Plácido de Jesus da Silva Leitão Junior** e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 10 de dezembro de 2001.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Sotomayor (IME-USP)

Prof. Dr. Plínio Simões (IME-USP)

Prof. Dr. Ronaldo Garcia (IME-UFG)

Dedico este trabalho a
meus pais
Plácido de Jesus da Silva Leitão,
Irene Moraes Leitão
e a meus irmãos
Mercedes ,
Camila e
Diogo .

Resumo

Dados dois conjuntos A e B no \mathbb{R}^n , estudaremos o conjunto $C(A, B) = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, A) = d(x, B)\}$, denominado *conjunto de conflito* de A e B . Abordaremos o caso em que o *conjunto de conflito* é uma hipersuperfície de classe C^k , $k \geq 3$. No caso $n = 3$ determinamos, para as *superfícies de conflito*, as curvaturas Gaussianas e Média, a localização dos pontos umbílicos e um resultado inicial sobre o tipo Darbouxiano destes pontos. A matriz da derivada da normal, DN , e as funções simétricas elementares das *hipersuperfícies de conflito* do \mathbb{R}^4 também são estabelecidos. Os resultados são expressos em função das direções e curvaturas principais dos bordos dos conjuntos A e B dados, os quais são supostos convexos.

Abstract

Given two sets A and B in \mathbb{R}^n , we will study the set $C(A, B) = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, A) = d(x, B)\}$, called the *conflict set* of A and B . We will consider the case in which the *conflict set* is a hypersurface of class C^k , $k \geq 3$. In the case $n = 3$ we find, for *conflict surfaces*, the Gaussian and Mean curvatures, the location of umbilic points and an initial result concerning the Darbouxian type of these points. The matrix of the derivative, DN , of the normal, as well as the elementary symmetric functions of *conflict hypersurface* in \mathbb{R}^4 are also found. The results are expressed in terms of the principal directions and curvatures of the borders of the given sets A and B , which are assumed to be convex.

Agradecimentos

- Ao Prof. Jorge Sotomayor pela sua orientação, estando sempre disponível para o bom desenvolvimento do nosso trabalho.
- Ao Prof. Plínio Simões que por diversas vezes, atenciosamente, me indicou e emprestou livros. Além disso, contribuiu também na elaboração dos exemplos deste trabalho.
- Ao Prof. Geraldo Ávila por ter contribuído de forma significativa na minha formação acadêmica.
- A todos os meus familiares pelo amor e atenção dados a mim durante todo este tempo de luta.
- A Cássia.
- Ao meus amigos do 508: Glória, Jarlle, Ribamar, Eduardo, Wellington, Robson.
- Ao meu eterno e melhor amigo Wellington Barros, que apesar da distância sempre esteve comigo.
- A todos os meus amigos do IME-USP.
- Aos amigos ...

Índice

Resumo	iii
Abstract	iv
Agradecimentos	v
Introdução	1
1 Conjuntos de Conflito no \mathbb{R}^3	7
1.1 Introdução	7
1.2 Superfícies de Conflito	8
1.3 Geometria do Conflito	12
1.4 Pontos Umbílicos nas Superfícies de Conflito	25
1.5 Exemplos de Conjuntos de Conflito	31
1.5.1 Curvas de Conflito	31
1.5.2 Superfícies de Conflito	36
2 Conjuntos de Conflito no \mathbb{R}^4	42
2.1 Introdução	42
2.2 Hipersuperfícies de Conflito do \mathbb{R}^4	43
2.3 Funções Simétricas Elementares	45
Referências Bibliográficas	54

Introdução

Considerando dois conjuntos A_1 e A_2 no espaço Euclidiano. Um problema clássico é o estudo do conjunto de pontos de igual distância de ambos, tal é o caso da reta e um ponto que leva à parábola. O objetivo do presente estudo é analisar algumas propriedades geométricas desses conjuntos, ditos de *conflito*.

Os conjuntos de igual distância no espaço Euclidiano são denominados por vários nomes: bissetores (em geometria computacional), conjuntos equidistâtes, conjuntos de conflito da função distância (em teoria de singularidades), etc. Nós adotaremos a expressão $C(A_1, A_2)$ para denominar o conjunto de conflito de A_1 e A_2 , em certas ocasiões omitiremos os conjuntos usando apenas C .

Baseamos nosso trabalho no artigo de Sotomayor, Garcia e Siersma [13] que estuda as curvaturas das superfícies de conflito, definidas por pares de conjuntos convexos no \mathbb{R}^3 . Também foi útil o artigo de Siersma [11], que faz um estudo dos conjuntos de conflito no plano, mostrando suas propriedades de diferenciabilidade e obtendo uma expressão para curvatura da curva de conflito. Considerando o caso em que os conjuntos são convexos.

Ambos os artigos determinam a derivada da normal ao conjunto de conflito em função dos dados geométricos dos bordos dos conjuntos A_i . No caso do plano, a curvatura da curva de conflito é dada em função das curvaturas das curvas que determinam os bordos dos conjuntos A_i . No caso do espaço tridimensional a curvatura Gaussiana, a curvatura Média e a localização dos pontos umbílicos na superfície são determinadas em função das direções principais e das curvaturas dos bordos $B_i = \partial A_i$. A hipótese de convexidade dos bordos é fundamental nos trabalhos acima e será adotada neste trabalho. Um resultado inicial relativo ao tipo Darbouxiano dos

pontos umbílicos na superfície de conflito é também estabelecido (ver definição na seção 1.4).

Presumimos que o nosso leitor conheça os fundamentos de Geometria Diferencial e Equações Diferenciais Ordinárias. Tomamos como base para este estudo os livros de Carmo [1], Struik [18], Gray [5] e O'Neil [8] para a parte de Geometria Diferencial e Sotomayor [12] para a parte de EDO (Equações Diferenciais Ordinárias). Na seção 1.4, apresentaremos uma introdução do estudo do comportamento das linhas de curvatura na vizinhança de um ponto umbílico, como apresentado por Sotomayor e Gutiérrez em [16], [15], [14] e por Sotomayor e Garcia em [4]. Nessa mesma seção é feito, um estudo inicial do tipo genérico de pontos umbílicos que podem aparecer em um determinado ponto da superfície de conflito.

No **Capítulo 1** estudaremos as superfícies de conflito no \mathbb{R}^3 . Sejam dois conjuntos fechados A_1 e A_2 no espaço \mathbb{R}^3 , o qual é munido pela orientação canônica e da distância:

$$d(p, q) = |p - q| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (p_i - q_i)^2} = \langle p - q, p - q \rangle^{\frac{1}{2}},$$

onde \langle, \rangle é o produto interno Euclidiano em \mathbb{R}^3 .

O conjunto, $C(A_1, A_2)$, dito de conflito entre A_1 e A_2 está definido por

$$C(A_1, A_2) = \{p; d(p, A_1) = d(p, A_2)\},$$

onde $d(p, A) = \inf\{d(p, q); q \in A\}$.

Consideraremos conjuntos convexos fechados, não vazios, com seus interiores disjuntos e bordos regulares B_i de classe C^k , $k \geq 2$, orientados por seus campos de vetores normais N_i , apontando para o interior de A_i .

Um dos resultados mais importantes deste capítulo é a determinação da matriz de DN , a derivada de N a normal a superfície de conflito em um ponto p , em função dos dados geométricos dos A_i . Através deste resultado, podemos encontrar as funções simétricas elementares dos valores próprios, que nada mais são que as curvaturas Gaussiana e Média. Outros resultados importantes podem ser extraídos da matriz. Abaixo nos referimos a alguns resultados que obteremos.

Lembramos que as curvaturas principais $k_1^i \leq k_2^i$ de B_i são os valores próprios de $-DN_i$, e que a condição de convexidade de A_i é equivalente a dizer que ambas tem

o mesmo sinal. A curvatura Gaussiana é definida por

$$\mathcal{K}^i = k_1^i k_2^i = \det(-DN_i),$$

isto implica que $\mathcal{K}^i > 0$. Lembramos também, que a *curvatura média* de B_i é dada por

$$\mathcal{H}^i = \frac{1}{2} \text{traço}(-DN_i) = \frac{1}{2}(k_1^i + k_2^i),$$

A expressão \mathcal{U}^i , também chamada de *curvatura reversa*,

$$\mathcal{U}^i = \frac{1}{2}(k_1^i - k_2^i) = \sqrt{(\mathcal{H}^i)^2 - \mathcal{K}^i},$$

cujos zeros localizam os *pontos umbílicos* da superfície, também aparecerá a seguir.

Através da matriz de DN , podemos obter várias propriedades geométricas da superfície de conflito. Mostraremos que as curvaturas Gaussiana e Média em um ponto $p \in C/M$ a uma distância r dos conjuntos A_i , são dadas respectivamente por

$$\mathcal{K} = \left[\frac{1}{2}(\mathcal{K}^1(r) + \mathcal{K}^2(r)) - \mathcal{H}^1(r)\mathcal{H}^2(r) + \cos(2(\alpha_2 - \alpha_1))\mathcal{U}^1(r)\mathcal{U}^2(r) \right],$$

$$\mathcal{H} = \left(\frac{1 + \sin^2 \phi}{4 \sin \phi} \right) \left[(\mathcal{H}^1(r) - \mathcal{H}^2(r)) + \left(\frac{\cos^2 \phi}{1 + \sin \phi} \right) (\cos(2\alpha_1)\mathcal{U}^1(r) - \cos(2\alpha_2)\mathcal{U}^2(r)) \right],$$

onde M é o conjunto dos pontos da superfície de conflito, no qual o campo $N_1 + N_2$ é singular. A seguir definiremos os elementos que constituem as expressões acima.

Chamaremos de Π_i a função que projeta um ponto p da superfície de conflito no ponto p_i de B_i , que realiza a distância mínima. Os ângulos α_1 e α_2 são os que as direções principais mínimas de B_1 e B_2 , nos pontos p_1 e p_2 fazem com os vetores $D\Pi_i(T_1(p))$, onde T_1 o vetor unitário na direção de $N_1 + N_2$. O ângulo ϕ é a metade do ângulo entre N_1 e N_2 .

Nas expressões acima, as curvaturas $\mathcal{K}^i(r) = \frac{\mathcal{K}^i}{1 - 2r\mathcal{H}^i + r^2\mathcal{K}^i}$, $\mathcal{H}^i(r) = \frac{\mathcal{H}^i - r\mathcal{K}^i}{1 - 2r\mathcal{H}^i + r^2\mathcal{K}^i}$, $\mathcal{U}^i(r) = \frac{\mathcal{U}^i}{1 - 2r\mathcal{H}^i + r^2\mathcal{K}^i}$ são as das superfícies deslocadas normalmente duma distância r das B_i .

Estes resultados devidos a Sotomayor, Siersma e Garcia [13], estendem para superfícies o trabalho de Siersma [11], desenvolvido para curvas no plano. Damos a nossa versão de como obter o resultado do Siersma como uma decorrência dos resultados tratados neste capítulo.

Outro resultado obtido estabelece que um ponto $p \in C$ é umbílico se e somente se $\Upsilon = \Psi = 0$, onde

$$\Upsilon = \mathcal{U}^2 \text{sen}(2\alpha_2) - \mathcal{U}^1 \text{sen}(2\alpha_1),$$

$$\Psi = \left(\frac{3 - \cos 2\phi}{2}\right) \{[\mathcal{H}^1 - \mathcal{H}^2] \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{3 - \cos 2\phi}\right) + [\mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1) - \mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2)]\}.$$

Também foi provado que num ponto não umbílico $p \in C$ as direções principais são caracterizadas por fazerem um ângulo θ com T_1 , onde θ verifica:

$$\tan 2\theta = \frac{2\Upsilon \text{sen}\theta}{\Psi}.$$

Isto é equivalente a dar, em linguagem geométrica, as equações diferenciais das linhas de curvatura principal nas superfícies de conflito.

Encontramos uma expressão para a curvatura normal à superfície de conflito, em $p \in C/M$ na direção de um vetor unitário X tangente a C/M em p , dada por

$$k_n(X) = - \left\{ \frac{\cos^2(\theta) \text{sen}\phi}{2} [k_n^2(r) - k_n^1(r)] + \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2 \text{sen}\phi} [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)] \right. \\ \left. + \cos(\theta) \text{sen}(\theta) [\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)] \right\},$$

onde θ é o ângulo entre X e T_1 . Igualando esta expressão a zero, conseguimos uma forma equivalente as equações diferenciais para as linhas assintóticas.

Faremos uma breve introdução sobre como caracterizar o tipo de ponto umbílico genérico que pode aparecer em uma superfície. Condições algébricas serão impostas ao 3-jato da superfície para que tenhamos o tipo Darbouxiano do ponto umbílico. Com o intuito de caracterizarmos o tipo umbílico que pode aparecer no ponto $p_m \in M$, calculamos o 3-jato da superfície de conflito neste ponto, em função dos jatos dos bordos B_i .

Por fim daremos alguns exemplos de curvas e superfícies de conflito com a ajuda do programa *Mathematica* 4.

No **Capítulo 2** estudaremos as hipersuperfícies de conflito no \mathbb{R}^4 . Sejam dois conjuntos fechados A_1 e A_2 no espaço \mathbb{R}^4 . As definições que usaremos neste capítulo são as mesmas que introduzimos no capítulo anterior, com as devidas adaptações para o \mathbb{R}^4 .

Para que tenhamos uma boa regularidade nas hipersuperfícies de conflito consideraremos somente o caso em que os A_i são conjuntos convexos fechados, não vazios,

com seus interiores disjuntos e bordos regulares $B_i = \partial A_i$ de classe C^k , $k \geq 2$, orientados por seus campos de vetores normais N_i , apontando para o interior de A_i .

Faremos um estudo semelhante ao do capítulo 1, com o propósito de obtermos uma expressão para a matriz de DN , a derivada da normal a hipersuperfície de conflito gerada pelos dois conjuntos dados A_1 e A_2 . Na proposição 2, a matriz será dada em função dos dados geométricos dos B_i , chegando à seguinte representação para DN em um ponto $p \in C \setminus M$ em relação a base $\{T_1, T_2, T_3\}$ do hiperplano tangente,

$$DN = \begin{pmatrix} \frac{\text{sen}\phi}{2}[k_{n_1}^2(r) - k_{n_1}^1(r)] & \frac{1}{2}[\tau_{12}^2(r) - \tau_{12}^1(r)] & \frac{1}{2}[\tau_{13}^2(r) - \tau_{13}^1(r)] \\ \frac{1}{2}[\tau_{12}^2(r) - \tau_{12}^1(r)] & \frac{1}{2\text{sen}\phi}[k_{n_2}^2(r) - k_{n_2}^1(r)] & \frac{1}{2\text{sen}\phi}[\tau_{23}^2(r) - \tau_{23}^1(r)] \\ \frac{1}{2}[\tau_{13}^2(r) - \tau_{13}^1(r)] & \frac{1}{2\text{sen}\phi}[\tau_{23}^2(r) - \tau_{23}^1(r)] & \frac{1}{2\text{sen}\phi}[k_{n_3}^2(r) - k_{n_3}^1(r)] \end{pmatrix}$$

onde M é o conjunto dos pontos onde o campo $N_1 + N_2 = 0$ e os objetos que aparecem na matriz acima estão em função das curvaturas e direções principais dos B_i .

Lembramos que as curvaturas principais $k_1^i \leq k_2^i \leq k_3^i$ de B_i são os valores próprios de $-DN_i$, e que a condição de convexidade de A_i é equivalente a dizer que todas possuem o mesmo sinal. As funções simétricas elementares das hipersuperfícies B_i são obtidas através dos autovalores da matriz DN_i . e suas expressões são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^i &= k_1^i k_2^i k_3^i = \det(-DN_i), \\ \mathcal{H}_1^i &= \frac{1}{2} \left(k_1^i k_2^i + k_1^i k_3^i + k_2^i k_3^i \right), \\ \mathcal{H}^i &= \frac{1}{3} \left(k_1^i + k_2^i + k_3^i \right) = \frac{1}{3} \text{traço}(-DN_i), \end{aligned}$$

De acordo com a notação introduzida por Forsyth [3] (p.40 seção 281 capítulo XVI) temos que \mathcal{H}^i é chamada por *curvatura linear*, \mathcal{H}_1^i de *curvatura superficial* e \mathcal{K}^i a *curvatura espacial* (ou *curvatura volumétrica*).

A importância de determinarmos a matriz DN em função dos dados dos B_i é que nos permite também encontrar as funções simétricas elementares da hipersuperfície de conflito em função dos objetos geométricos dos bordos dos conjuntos A_i . Obtemos as seguintes expressões para as funções simétricas elementares de C :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \det(-DN) = -[k_{n_1} k_{n_2} k_{n_3} + 2\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23} - k_{n_1}(\tau_{23})^2 - k_{n_2}(\tau_{13})^2 - k_{n_3}(\tau_{12})^2], \\ \mathcal{H} &= \text{traço}(-DN) = -\frac{1}{3}(k_{n_1} + k_{n_2} + k_{n_3}), \\ \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{2} \{ [k_{n_1} k_{n_2} - (\tau_{12})^2] + [k_{n_1} k_{n_3} - (\tau_{13})^2] + [k_{n_2} k_{n_3} - (\tau_{23})^2] \}, \end{aligned}$$

lembramos que como DN esta dada em função das curvaturas e direções principais de B_i , as expressões acima também estão.

Este é o resultado do estudo desenvolvido sobre as expressões das funções simétricas elementares da hipersuperfície de conflito, com a intenção de expressá-las em função das funções simétricas elementares dos B_i , como foi feito para o \mathbb{R}^3 . Este estudo esta ainda em fase inicial.

Conjuntos de Conflito no \mathbb{R}^3

1.1 Introdução

Neste capítulo serão estudados as superfícies de conflito do \mathbb{R}^3 .

Dados dois conjuntos A_1 e A_2 no \mathbb{R}^3 , definiremos o *conjunto de conflito*, $C(A_1, A_2)$, como sendo o conjunto dos pontos, que estão a uma mesma distância dos dois conjuntos dados.

Para o desenvolvimento deste capítulo, nos baseamos no trabalho de Sotomayor, Garcia e Siersma [13], na qual foi feita uma extensão dos resultados de Siersma [11] para curvas de conflito planas.

Trataremos o caso em que o conjunto de conflito é uma superfície regular de classe C^k , $k \geq 1$. A regularidade é obtida ao considerarmos conjuntos fechados, não vazios, com seus interiores disjuntos e bordos regulares de classe C^k , $k \geq 2$.

Um dos resultados mais importantes deste capítulo, é a determinação da matriz de DN , a derivada de N a normal a superfície de conflito em um ponto p , em função dos dados geométricos dos A_i . Através deste resultado, podemos encontrar as funções simétricas elementares, que são as curvaturas Gaussiana e Média.

Determinaremos outros objetos geométricos das superfícies de conflito tais como: localização dos pontos umbílicos e direções principais, curvatura normal e direções assintóticas. Estes resultados saem diretamente da matriz de DN .

No trabalho de Siersma [11], é obtida no plano \mathbb{R}^2 , a expressão para a curvatura da curva de conflito em função das curvaturas dos bordos dos conjuntos que a define.

Damos nossa interpretação, de como obter os resultados do Siersma através dos dados da matriz DN , fazendo uma restrição dos objetos introduzidos para curvas sobre a superfície de conflito.

Faremos uma introdução sobre o comportamento das linhas de curvatura na vizinhança de um ponto umbílico. Daremos algumas condições sobre o 3-jato das superfícies com o intuito de classificar os tipos genéricos de pontos umbílicos, que podem surgir. Para termos essa caracterização dos pontos umbílicos sobre as superfícies de conflito, acharemos uma expressão para o 3-jato da superfície de conflito em um ponto $p \in M$.

Por fim, daremos alguns exemplos de curvas e superfícies de conflito.

1.2 Superfícies de Conflito

Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos não vazios, fechados no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Adotaremos a orientação canônica do \mathbb{R}^3 , através da seguinte classe de equivalência: Diremos que duas bases $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, base canônica, e $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ são igualmente orientadas, quando a matriz de passagem de E para F tiver determinante positivo.

A distância que utilizaremos é dada por

$$d(p, q) = |p - q| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (p_i - q_i)^2} = \langle p - q, p - q \rangle^{\frac{1}{2}},$$

onde $p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3)$ e $\langle \cdot \rangle$ é o produto interno Euclidiano usual, expresso da seguinte forma: sejam w e $v \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$\langle w, v \rangle = w_1 v_1 + w_2 v_2 + w_3 v_3$$

onde $w = (w_1, w_2, w_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.

O conjunto de conflito $C(A_1, A_2)$ entre A_1 e A_2 é definido por

$$C(A_1, A_2) = \{p \in \mathbb{R}^3; d(p, A_1) = d(p, A_2)\},$$

onde $d(p, A) = \inf\{d(p, q); q \in A\}$.

O conjunto $C(A_1, A_2)$ é também visto como o bordo comum entre o *território* de A_1 relativo a A_2 , definido por

$$\text{Terr}(A_1, A_2) = \{p; d(p, A_1) < d(p, A_2)\},$$

e $\text{Terr}(A_2, A_1)$, que é o *território* de A_2 relativo a A_1 .

O *conjunto de conflito* também é chamado de *bissetor* na Geometria Computacional e de *conjunto equidistante* entre A_1 e A_2 .

Em todo este capítulo consideraremos somente o caso onde os A_i são conjuntos fechados, convexos, com interiores disjuntos e bordos regulares $B_i = \partial A_i$, de classe C^k , $k \geq 2$.

Os bordos B_i são orientados, ou seja, existem campos diferenciáveis de vetores unitários $N_i: B_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associam para cada $p \in B_i$ um vetor normal unitário $N_i(p) \in \mathbb{R}^3$ para B_i em p . A convenção adotada será que N_i estará sempre apontando para o interior de A_i .

Para cada $p \in B_i$ podemos escolher, na linha normal passando por p , um intervalo aberto I_p próximo de p de comprimento, digamos, $2\epsilon_p$ (ϵ_p variando com p) de modo que se $p \neq q \in B_i$, então $I_p \cap I_q = \emptyset$. A união $\bigcup I_p$, $p \in B_i$, constitui um conjunto aberto V_i de \mathbb{R}^3 , que contém B_i e tem a propriedade que por cada ponto de V_i passa uma única reta normal a B_i . Denominamos V_i de *vizinhança tubular* de B_i . Como os B_i , por hipótese, são convexos, podemos garantir que este processo pode ser aplicado para ϵ qualquer na direção de $-N_i$, já que N_i esta apontando para o interior de B_i . O mesmo não pode ser feito para ϵ qualquer na direção da normal, já que pela hipótese das superfícies serem convexas, nesta direção as normais vizinhas se intersectam ao longo do conjunto focal. (M. Carmo [1], p. 110, seção 2-7)

Denotaremos por A_i^r o conjunto dos pontos a uma distância $r \geq 0$ de A_i ; seu bordo é a superfície B_i^r obtida pelo deslocamento de cada ponto p_i de B_i pela função $\Sigma_i^r(p_i) = p_i - rN_i(p_i)$. De acordo com as propriedades acima, de vizinhança tubular, temos que Σ_i^r é um difeomorfismo de classe C^{k-1} , cuja inversa, definida no conjunto fechado $E_i = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Int}(A_i)$, associa as projeções $\Pi_i(p) = p_i$ nos B_i , caracterizadas por

$$d(p, A_i) = \langle \Pi_i(p) - p, N_i(\Pi_i(p)) \rangle,$$

estas funções Π_i serão úteis nos cálculos a seguir, restringindo o seu domínio ao conjunto de conflito, no qual estamos interessados. Podemos também definir a projeção Π_i^r , através da seguinte composição $\Pi_i^r = \Sigma_i^r \circ \Pi_i$, que levará um ponto de E_i para B_i^r .

Além disso, $C(A_1, A_2)$ é definido implicitamente como o conjunto de nível zero da função

$$c(p) = d(p, A_2) - d(p, A_1),$$

que é regular de classe C^{k-1} , isto se verifica facilmente pela definição que demos acima da função Π_i . Calculando o gradiente dessa função temos

$$\nabla c(p) = N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p)).$$

Neste trabalho, a superfície de conflito C será orientada pela normal unitária N , ao longo do ∇c e apontando de A_2 para A_1 :

$$N = |N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))|^{-1} [N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))].$$

Para simplificar a notação escreveremos $\nu(V) = |V|^{-1}V$ para denotar a *normalização* de um vetor não nulo V . Logo

$$N = \nu(N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p)))$$

Um triedro móvel positivo definido em C é dado por $\{T_1, T_2, N\}$, onde:

$$T_1 = \nu(N_1(\Pi_1(p)) + N_2(\Pi_2(p))),$$

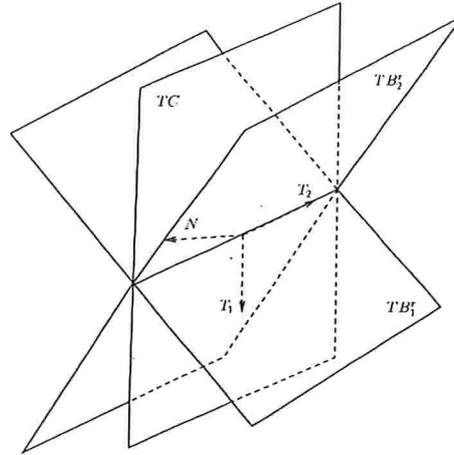
$$T_2 = N_1(\Pi_1(p)) \wedge N_2(\Pi_2(p)).$$

Note que o campo de vetores T_i são singulares nos pontos p do conjunto fechado $M = M(A_1, A_2)$, onde $N_1(\Pi_1(p)) + N_2(\Pi_2(p)) = 0$, que ocorre quando a distância de C para A_i ,

$$r(p) = d(p, A_1) = d(p, A_2),$$

é mínima, assumindo o valor $d_m = \frac{1}{2}d(A_1, A_2)$. A condição de *convexidade estrita* dos B_i nos conjuntos $\Pi_i(M)$, reduz M a um único ponto p_m .

Observamos também que T_2 pode ser definido como o vetor unitário obtido da intersecção dos planos tangentes de B_i^r em p , de tal forma que a base fique positiva. Isso é óbvio, pois se temos um vetor v na intersecção dos planos tangente a B_i^r em p , isso implica que v é normal a N_1 e a N_2 . Portanto v é paralelo a T_2 . Na figura abaixo temos um esquema disto, onde TC é o espaço tangente em $p \in C \setminus M$ e TB_i^r são os espaços tangentes a $p_i = p = \Pi_i^r(p) \in B_i^r$.

Figura 1.1: Triedro $\{T_1, T_2, N\}$

Podemos dividir a superfície de conflito nos pontos onde a intersecção do planos tangentes de B_i^r em $p \in C$ é gerada por um vetor, neste caso, estamos em $C \setminus M$. Já quando é gerada por dois vetores linearmente independentes, estamos em M .

Considerando a *convexidade estrita* de B_i em p_i , implica que DN_i é um automorfismo do espaço tangente TB_i , com a identificação usual do espaço tangente TB_i em p_i com o da esfera unitária TS^2 , em $N_i(p_i)$. Em termos das *curvaturas principais* $k_1^i \leq k_2^i$, que são os autovalores de $-DN_i$, a condição de convexidade estrita e a orientação do campo normal implica que $0 < k_1^i \leq k_2^i$ (Rodrigues [10], Cap. 3, pag. 30). Em termos da *curvatura Gaussiana*

$$\mathcal{K}^i = k_1^i k_2^i = \det(-DN_i),$$

isto implica que $\mathcal{K}^i > 0$. Lembramos também que a *curvatura média* de B_i é dada por

$$\mathcal{H}^i = \frac{1}{2} \text{traço}(-DN_i) = \frac{1}{2}(k_1^i + k_2^i),$$

A expressão

$$\mathcal{U}^i = \frac{1}{2}(k_1^i - k_2^i) = \sqrt{(\mathcal{H}^i)^2 - \mathcal{K}^i},$$

também chamada de *curvatura reversa*, cujos zeros localizam os *pontos umbílicos* da superfície, será também usada neste trabalho.

1.3 Geometria do Conflito

Seja $p \in C \setminus M$ tal que $p_i = \Pi_i(p)$ não sejam pontos umbílicos de B_i . Seja $\{E_1^i, E_2^i, N_i\}$ o triedro móvel positivo principal em B_i , numa vizinhança de p_i . Isto implica que

$$DN_i \cdot E_j^i = -k_j^i E_j^i,$$

onde $0 < k_1^i < k_2^i$, $i = 1, 2$, são as curvaturas principais de B_i . Denotemos por α_i o ângulo entre os vetores E_1^i e $F_1^i = \nu(D\Pi_i(p) \cdot T_1)$. Escrevemos

$$\tau_g^i = \tau_g^i(\alpha_i) = (k_2^i - k_1^i) \text{sen}(\alpha_i) \cos(\alpha_i)$$

para a *torção geodésica* na direção do vetor unitário F_1^i de B_i . Escrevemos

$$k_n^i = k_n^i(\alpha_i) = k_1^i \cos^2(\alpha_i) + k_2^i \text{sen}^2(\alpha_i),$$

que pela fórmula de Euler é a curvatura normal de B_i na direção de $F_1^i = \nu(D\Pi_i(p) \cdot T_1)$.

Similarmente, a curvatura normal de B_i na direção de $F_2^i = \nu(D\Pi_i(p) \cdot T_2)$ é dada por

$$k_{n\perp}^i = k_{n\perp}^i(\alpha_i) = k_n^i(\alpha_i + \frac{\pi}{2}) = k_1^i \text{sen}^2(\alpha_i) + k_2^i \cos^2(\alpha_i),$$

Mostraremos algumas propriedades geométricas de F_1^i e F_2^i que serão úteis no decorrer deste capítulo.

A figura 1.2, a seguir, mostra um esquema unidimensional de como os vetores F_1^i e TB_i^r , os planos tangentes a B_i^r , ficam dispostos em um ponto de $p \in C \setminus M$.

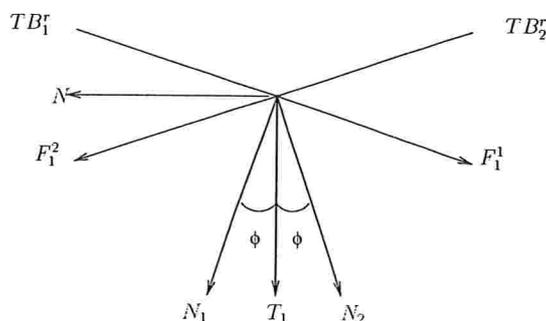


Figura 1.2: Seção plana no ponto p

Lema 1 Denotemos por ϕ o ângulo entre N_i e T_1 . Então

$$\text{sen}\phi = \frac{1}{2}|N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))| = \langle F_1^1, T_1 \rangle = \langle F_1^2, T_1 \rangle.$$

Prova. Observemos que

$$\begin{aligned} 2 \text{sen}^2\phi &= 1 - \cos 2\phi = 1 - \langle N_1, N_2 \rangle \\ &= \frac{2 - 2\langle N_1, N_2 \rangle}{2} = \frac{\langle N_1, N_1 \rangle + \langle N_2, N_2 \rangle - 2\langle N_1, N_2 \rangle}{2} \\ &= \frac{1}{2}\langle N_1 - N_2, N_1 - N_2 \rangle = \frac{|N_1 - N_2|^2}{2}. \end{aligned}$$

Então

$$\text{sen}\phi = \frac{1}{2}|N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))|$$

Temos que T_1 pode ser escrito como combinação linear de N_i e F_1^i , como mostra a figura 1.2. Logo $\langle F_1^i, T_1 \rangle = \langle F_1^i, \cos\phi N_i + \text{sen}\phi F_1^i \rangle = \text{sen}\phi$. ■

Lema 2 A base $\{T_1, T_2\}$ em $C \setminus M$ é projetada pela derivada de Π_i na base ortonormal $\{F_1^i, F_2^i\}$ em B_i .

Prova. Isto é visto facilmente através das propriedades da função projeção. Temos que T_2 pertence tanto ao plano tangente de $C \setminus M$ como a TB_i^r (ver figura 1.1), logo F_2^i será paralelo a T_2 . Já que T_2 é ortogonal ao plano gerado por N e T_1 , que contém F_1^i , concluímos então que $\{F_1^i, F_2^i\}$, $i = 1, 2$, são bases ortonormais. ■

Lema 3 Os vetores $\{F_1^i, F_2^i\}$, $i = 1, 2$, podem ser escritos da seguinte forma

$$\{F_1^1 = \nu(N_2 - \langle N_1, N_2 \rangle N_1), F_2^1 = T_2\},$$

$$\{F_1^2 = \nu(-N_1 + \langle N_1, N_2 \rangle N_2), F_2^2 = T_2\}.$$

Prova. Para verificarmos a primeira afirmativa, basta escrever N_2 como combinação linear de F_1^1 e N_1 (ver figura 1.2), ou seja,

$$\begin{aligned} N_2 &= \langle N_1, N_2 \rangle N_1 + \langle F_1^1, N_2 \rangle F_1^1 \Rightarrow \langle F_1^1, N_2 \rangle F_1^1 = N_2 - \langle N_1, N_2 \rangle N_1 \\ &\Rightarrow \nu(\langle F_1^1, N_2 \rangle F_1^1) = \nu(N_2 - \langle N_1, N_2 \rangle N_1) \Rightarrow F_1^1 = \nu(N_2 - \langle N_1, N_2 \rangle N_1) \end{aligned}$$

utilizando-se da notação vetorial $F_2^1 = T_2$, já que possuem a mesma direção e comprimento. Analogamente podemos mostrar a segunda afirmação. ■

Ao fazermos o deslocamento paralelo na direção da normal das superfícies B_i até termos B_i^r , o vetor $D\Pi_i^r(T_1)$ é dado por $D\Pi_i^r(T_1) = \text{sen}\phi F_1^i$. Para ver esta afirmação basta tomar uma curva $\gamma(t) \subset C$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = T_1$ e projetá-la sobre B_1^r . Fazendo a projeção teremos uma curva $\gamma_1^r(t)$ tal que $\gamma_1^r(0) = p_1 = p$ e $(\gamma_1^r)'(0) = D\Pi_1^r(T_1)$. Com o auxílio da figura 1.3 podemos concluir que $(\gamma_1^r)'(0) = \text{sen}\phi F_1^1$. Observamos que este argumento pode ser utilizado para $i = 2$.

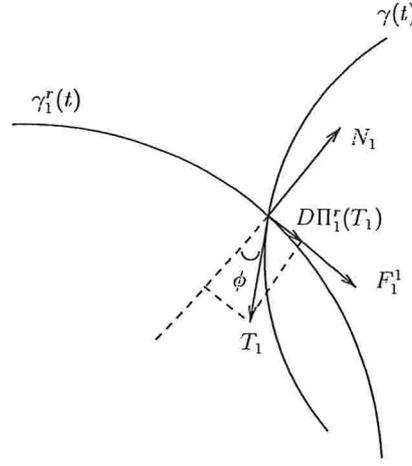


Figura 1.3: Derivada da Projeção

Os triedros principais $\{E_1^i, E_2^i, N_i\}$ em B_i são transladados ao longo da normal para o triedro principal em B_i^r . Isto segue do fato que Σ_i^r preserva os campos de direções principais assim como os pontos umbílicos. As curvaturas principais sofrem mudanças para $k_j^i(r) = \frac{k_j^i}{1-rk_j^i}$. Provaremos a seguir este fato.

Lema 4 *Seja $\Sigma_i^r : B_i \rightarrow B_i^r$. Então para X em $TB_i(p_i)$, $D\Sigma_i^r(X) = X + rDN_i(X)$, $DN_i^r(D\Sigma_i^r(X)) = DN_i(X)$, Σ_i^r preserva as direções principais e umbílicos. Se k_j^i é a curvatura principal de B_i em p_i na direção E_j^i , então $k_j^i(r) = \frac{k_j^i}{1-rk_j^i}$ é a correspondente curvatura principal de B_i^r em $\Sigma_i^r(p_i)$ na direção $D\Sigma_i^r(E_j^i)$. Além disso, temos que as curvaturas Gaussiana e Média de B_i^r são dadas respectivamente por:*

$$\mathcal{K}^i(r) = \frac{\mathcal{K}^i}{1 - 2r\mathcal{H}^i + r^2\mathcal{K}^i},$$

$$\mathcal{H}^i(r) = \frac{\mathcal{H}^i - r\mathcal{K}^i}{1 - 2r\mathcal{H}^i + r^2\mathcal{K}^i},$$

onde \mathcal{K}^i e \mathcal{H}^i denotam as curvaturas Gaussiana e Média de B_i .

Prova. Suponhamos que a normal N_i seja dada por (a_1, a_2, a_3) onde cada a_i é de classe C^{k-1} , $k \geq 2$. Se $p_i = (P_1, P_2, P_3)$ está em B_i^r , então $\Sigma_i^r(p_i) = (P_1 - ra_1(p_i), P_2 - ra_2(p_i), P_3 - ra_3(p_i))$ esta em B_i^r .

Para calcular $D\Sigma_i^r(X)$, tomemos uma curva $\sigma(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$ com $X = (b_1'(0), b_2'(0), b_3'(0))$, e calculemos a tangente para $\Sigma_i^r \circ \sigma$ em $t = 0$. Seja $N_i(\sigma(t)) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$; então $\Sigma_i^r \circ \sigma = (b_1 - ra_1(t), b_2 - ra_2(t), b_3 - ra_3(t))$, e seu tangente em $t = 0$ é dado por $X + rDN_i(X)$. Além disso, $N_i(\sigma(t)) = N_i(\Sigma_i^r \circ \sigma(t)) = N_i^r(\Sigma_i^r \circ \sigma(t))$ da definição de Σ_i^r , de B_i^r e que estamos trabalhando com normais unitárias. Desta forma $DN_i(X) = (a_1'(0), a_2'(0), a_3'(0)) = DN_i(D\Sigma_i^r(X)) = DN_i^r(D\Sigma_i^r(X))$.

Agora seja E_j^i um vetor unitário em $p_i \in B_i$ com $DN_i(E_j^i) = k_j^i E_j^i$, então $DN_i(D\Sigma_i^r(E_j^i)) = DN_i(E_j^i) = k_j^i E_j^i$ e $D\Sigma_i^r(E_j^i) = (1 - rk_j^i)E_j^i$. Se $1 - rk_j^i = 0$, então $D\Sigma_i^r(E_j^i) = 0$ e $DN_i(D\Sigma_i^r(E_j^i)) = k_j^i E_j^i = 0$, daí $k_j^i = 0$ e $1 = 0$, portanto $1 - rk_j^i \neq 0$ já que B_i^r é uma superfície regular. Concluimos que $DN_i(D\Sigma_i^r(E_j^i)) = (\frac{k_j^i}{1 - rk_j^i})D\Sigma_i^r(E_j^i)$, com isso mostramos que Σ_i^r preserva as direções principais, umbílicos e que $k_j^i(r) = \frac{k_j^i}{1 - rk_j^i}$.

As expressões de $\mathcal{K}^i(r)$ e $\mathcal{H}^i(r)$ saem dos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^i(r) &= k_1^i(r)k_2^i(r) = \frac{k_1^i k_2^i}{(1 - rk_1^i)(1 - rk_2^i)} = \frac{\mathcal{K}^i}{1 - 2r\mathcal{H}^i + r^2\mathcal{K}^i}, \\ 2\mathcal{H}^i &= k_1^i(r) + k_2^i(r) = \frac{k_1^i}{1 - rk_1^i} + \frac{k_2^i}{1 - rk_2^i} = \frac{k_1^i(1 - rk_2^i) + k_2^i(1 - rk_1^i)}{(1 - rk_1^i)(1 - rk_2^i)} \\ &= \frac{k_1^i + k_2^i - 2rk_1^i k_2^i}{(1 - rk_1^i)(1 - rk_2^i)} = \frac{2(\mathcal{H}^i - r\mathcal{K}^i)}{1 - 2r\mathcal{H}^i + r^2\mathcal{K}^i}. \end{aligned}$$

■

O Lema acima pode ser estendido facilmente para hipersuperfícies no \mathbb{R}^n . A demonstração pode ser encontrada em (Hicks [6], p. 36 seção 2.6).

As expressões para τ_g^i , k_n^i e $k_{n\perp}^i$ em B_i , são definidas em termos das curvaturas principais, podendo ser obviamente modificadas para valerem em B_i^r e denotaremos respectivamente por $\tau_g^i(r)$, $k_n^i(r)$ e $k_{n\perp}^i(r)$. Portanto:

$$\begin{aligned} \tau_g^i(r) &= \tau_g^i(r, \alpha_i) = (k_2^i(r) - k_1^i(r))\text{sen}(\alpha_i) \cos(\alpha_i), \\ k_n^i(r) &= k_n^i(r, \alpha_i) = k_1^i(r) \cos^2(\alpha_i) + k_2^i(r) \text{sen}^2(\alpha_i), \\ k_{n\perp}^i(r) &= k_{n\perp}^i(r, \alpha_i) = k_1^i(r) \text{sen}^2(\alpha_i) + k_2^i(r) \cos^2(\alpha_i). \end{aligned}$$

Proposição 1 Com a notação acima, nos pontos de $C \setminus M$, temos

$$DN.T_1 = \frac{\text{sen}\phi}{2}[k_n^2(r) - k_n^1(r)]T_1 + \frac{1}{2}[\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)]T_2, \quad (1.1)$$

$$DN.T_2 = \frac{1}{2}[\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)]T_1 + \frac{1}{2\text{sen}\phi}[k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)]T_2. \quad (1.2)$$

Prova. A conclusão segue do cálculo dos produtos internos em

$$DN(T_1) = \langle DN(T_1), T_1 \rangle T_1 + \langle DN(T_1), T_2 \rangle T_2, \quad (1.3)$$

$$DN(T_2) = \langle DN(T_2), T_1 \rangle T_1 + \langle DN(T_2), T_2 \rangle T_2. \quad (1.4)$$

Diferenciando N , obtemos:

$$DN = \frac{DN_1.D\Pi_1^r - DN_2.D\Pi_2^r}{2 \text{sen}\phi} + \frac{1}{2}D[(\text{sen}\phi)^{-1}].[N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))]. \quad (1.5)$$

Como queremos fazer o produto interno de DN por vetores tangentes, a contribuição do segundo termo é nula. Logo nos concentraremos somente no primeiro termo. Lembrando que,

$$D\Pi_i^r(T_1) = \text{sen}\phi F_1^i \text{ e } D\Pi_i^r(T_2) = F_2^i,$$

e que as bases E_i e F_i são relacionadas por

$$F_1^i = \cos(\alpha_i)E_1^i + \text{sen}(\alpha_i)E_2^i, \quad F_2^i = -\text{sen}(\alpha_i)E_1^i + \cos(\alpha_i)E_2^i.$$

Calculemos agora $DN_i D\Pi_i^r$ nas direções T_1 e T_2 , para sabermos o valor de DN nestas direções.

$$\begin{aligned} DN_i.D\Pi_i^r(T_1) &= DN_i(\text{sen}\phi F_1^i) \\ &= \text{sen}\phi DN_i(\cos(\alpha_i)E_1^i + \text{sen}(\alpha_i)E_2^i) \\ &= \text{sen}\phi[-k_1^i(r)\cos(\alpha_i)E_1^i - k_2^i(r)\text{sen}(\alpha_i)E_2^i] \\ &= \text{sen}\phi\{-k_1^i(r)\cos(\alpha_i)[\cos(\alpha_i)F_1^i - \text{sen}(\alpha_i)F_2^i] \\ &\quad - k_2^i(r)\text{sen}(\alpha_i)[\text{sen}(\alpha_i)F_1^i + \cos(\alpha_i)F_2^i]\} \\ &= \text{sen}\phi\{[-k_1^i(r)\cos^2(\alpha_i) - k_2^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i)]F_1^i \\ &\quad + [k_1^i(r) - k_2^i(r)]\text{sen}(\alpha_i)\cos(\alpha_i)F_2^i\} \\ &= \text{sen}\phi\{[-k_n^i(r)]F_1^i + [-\tau_g^i(r)]F_2^i\}. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
DN_i \cdot D\Pi_i^r(T_2) &= DN_i(F_2^i) \\
&= DN_i(-\text{sen}(\alpha_i)E_1^i + \text{cos}(\alpha_i)E_2^i) \\
&= [k_1^i(r)\text{sen}(\alpha_i)E_1^i - k_2^i(r)\text{cos}(\alpha_i)E_2^i] \\
&= \{k_1^i(r)\text{sen}(\alpha_i)[\text{cos}(\alpha_i)F_1^i - \text{sen}(\alpha_i)F_2^i] \\
&\quad - k_2^i(r)\text{cos}(\alpha_i)[\text{sen}(\alpha_i)F_1^i + \text{cos}(\alpha_i)F_2^i]\} \\
&= \{[(k_1^i(r) - k_2^i(r))\text{sen}(\alpha_i)\text{cos}(\alpha_i)F_1^i \\
&\quad - [k_1^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i) + k_2^i(r)\text{cos}^2(\alpha_i)]F_2^i]\} \\
&= \{-\tau_g^i(r)F_1^i - [k_{n\perp}^i(r)]F_2^i\}.
\end{aligned}$$

De (1.5), temos que

$$\begin{aligned}
DN(T_1) &= \frac{\text{sen}\phi}{2\text{sen}\phi} \{[-k_n^1(r)F_1^1 - \tau_g^1(r)F_2^1] - [-k_n^2(r)F_1^2 - \tau_g^2(r)F_2^2]\} \\
&= \frac{1}{2} \{[k_n^2(r)F_1^2 - k_n^1(r)F_1^1] + [\tau_g^2(r)F_2^2 - \tau_g^1(r)F_2^1]\}, \\
DN(T_2) &= \frac{1}{2\text{sen}\phi} \{[\tau_g^1 F_1^1 - k_{n\perp}^1(r)F_2^1] - [-\tau_g^2(r)F_1^2 - k_{n\perp}^2(r)F_2^2]\} \\
&= \frac{1}{2\text{sen}\phi} \{[k_{n\perp}^2(r)F_2^2 - k_{n\perp}^1(r)F_2^1] + [\tau_g^2(r)F_1^2 - \tau_g^1(r)F_1^1]\}.
\end{aligned}$$

Concluindo a demonstração, utilizamos os Lemas de 1 a 3, para fazermos os produtos internos de (1.3) e (1.4), e chegamos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\langle DN(T_1), T_1 \rangle &= \frac{\text{sen}\phi}{2} [k_n^2(r) - k_n^1(r)], \\
\langle DN(T_1), T_2 \rangle &= \frac{1}{2} [\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)], \\
\langle DN(T_2), T_1 \rangle &= \frac{1}{2} [\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)], \\
\langle DN(T_2), T_2 \rangle &= \frac{1}{2\text{sen}\phi} [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)].
\end{aligned}$$

■

Note que a prova da proposição usa somente a base principal no ponto (e não em conjuntos abertos) de B_i . Além disso, os cálculos de DN são válidos também nos pontos de $C \setminus M$, cuja projeção em uma (ou ambas) as superfícies B_i são pontos umbílicos. Neste caso, temos $k_1^i(r) = k_2^i(r)$ e podemos considerar $\alpha_i = 0$ (já que

toda direção é principal), assim concluímos que valem as seguintes igualdades para as projeções umbílicas,

$$\tau_g^i(r) = 0 \quad \text{e} \quad k_n^i(r) = k_1^i(r) = k_{n\perp}^i(r) = k_2^i(r) = k^i(r),$$

logo no caso das duas projeções serem umbílicas, obtemos pela proposição anterior

$$DN(T_1) = \frac{\text{sen}\phi}{2}[k^2(r) - k^1(r)]T_1,$$

$$DN(T_2) = \frac{1}{2\text{sen}\phi}[k^2(r) - k^1(r)]T_2.$$

Teorema 1 *Sejam* $\mathcal{K}^i = \mathcal{K}^i(r) = k_1^i(r)k_2^i(r)$, $\mathcal{H}^i = \mathcal{H}^i(r) = \frac{1}{2}(k_1^i(r) + k_2^i(r))$, $\mathcal{U}^i = \mathcal{U}^i(r) = \frac{1}{2}(k_2^i(r) - k_1^i(r))$, onde $k_j^i(r) = \frac{k_j^i}{1 - rk_j^i}$.

a) *A curvatura Gaussiana da superfície de conflito C é dada por*

$$\mathcal{K} = \left[\frac{1}{2}(\mathcal{K}^1 + \mathcal{K}^2) - \mathcal{H}^1\mathcal{H}^2 + \cos(2(\alpha_2 - \alpha_1))\mathcal{U}^1\mathcal{U}^2 \right].$$

b) *A curvatura média da superfície de conflito C é dada por*

$$\mathcal{H} = \left(\frac{1 + \text{sen}^2\phi}{4\text{sen}\phi} \right) \left[(\mathcal{H}^1 - \mathcal{H}^2) + \left(\frac{\cos^2\phi}{1 + \text{sen}\phi} \right) (\cos(2\alpha_1)\mathcal{U}^1 - \cos(2\alpha_2)\mathcal{U}^2) \right]$$

Prova. a) A curvatura Gaussiana de C é dada por $\det(-DN)$. Além disso, precisamos no decorrer dos cálculos que

$$\begin{aligned} k_n^i(r) &= k_1^i(r)\cos^2(\alpha_i) + k_2^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i) \\ &= \frac{1}{2}k_1^i(r)[1 - \text{sen}^2(\alpha_i)] + \frac{1}{2}k_1^i(r)\cos^2(\alpha_i) + \frac{1}{2}k_2^i(r)[1 - \cos^2(\alpha_i)] + \frac{1}{2}k_2^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i) \\ &= \frac{1}{2}[k_1^i(r) + k_2^i(r)] - \frac{1}{2}[k_2^i(r)\cos^2(\alpha_i) - k_1^i(r)\cos^2(\alpha_i) - k_2^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i) \\ &\quad + k_1^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i)] \\ &= \mathcal{H}^i - \mathcal{U}^i \cos(2\alpha_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{n\perp}^i(r) &= k_1^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i) + k_2^i(r)\cos^2(\alpha_i) \\ &= \frac{1}{2}k_1^i(r)[1 - \cos^2(\alpha_i)] + \frac{1}{2}k_1^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i) + \frac{1}{2}k_2^i(r)[1 - \text{sen}^2(\alpha_i)] + \frac{1}{2}k_2^i(r)\cos^2(\alpha_i) \\ &= \frac{1}{2}[k_1^i(r) + k_2^i(r)] + \frac{1}{2}[k_2^i(r)\cos^2(\alpha_i) - k_1^i(r)\cos^2(\alpha_i) - k_2^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i) \\ &\quad + k_1^i(r)\text{sen}^2(\alpha_i)] \\ &= \mathcal{H}^i + \mathcal{U}^i \cos(2\alpha_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r) &= [k_2^2(r) - k_1^2(r)]\text{sen}(\alpha_2) \cos(\alpha_2) - [k_2^1(r) - k_1^1(r)]\text{sen}(\alpha_1) \cos(\alpha_1) \\
&= 2 \mathcal{U}^2 \text{sen}(\alpha_2) \cos(\alpha_2) - 2 \mathcal{U}^1 \text{sen}(\alpha_1) \cos(\alpha_1) \\
&= \mathcal{U}^2 \text{sen}(2\alpha_2) - \mathcal{U}^1 \text{sen}(2\alpha_1), \\
(\mathcal{U}^i)^2 &= (\mathcal{H}^i)^2 - \mathcal{K}^i.
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{1}{4} \{ [k_n^2(r) - k_n^1(r)][k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)] - [\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)]^2 \} \\
&= \frac{1}{4} \{ [(\mathcal{H}^2 - \mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2)) - (\mathcal{H}^1 - \mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1))] [(\mathcal{H}^2 + \mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2) \\
&\quad - \mathcal{H}^1 + \mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1))] - [\mathcal{U}^2 \text{sen}(2\alpha_2) - \mathcal{U}^1 \text{sen}(2\alpha_1)]^2 \} \\
&= \frac{1}{4} \{ (\mathcal{H}^2)^2 - (\mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2))^2 + (\mathcal{H}^1)^2 - (\mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1))^2 - 2\mathcal{H}^1\mathcal{H}^2 \\
&\quad + 2\mathcal{U}^1\mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_1) \cos(2\alpha_2) - [\mathcal{U}^2 \text{sen}(2\alpha_2) - \mathcal{U}^1 \text{sen}(2\alpha_1)]^2 \} \\
&= \frac{1}{4} \{ (\mathcal{H}^2)^2 - (\mathcal{U}^2)^2 + (\mathcal{U}^2 \text{sen}(2\alpha_2))^2 + (\mathcal{H}^1)^2 - (\mathcal{U}^1)^2 + (\mathcal{U}^1 \text{sen}(2\alpha_1))^2 - 2\mathcal{H}^1\mathcal{H}^2 \\
&\quad + 2\mathcal{U}^1\mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_1) \cos(2\alpha_2) - [\mathcal{U}^2 \text{sen}(2\alpha_2) - \mathcal{U}^1 \text{sen}(2\alpha_1)]^2 \} \\
&= \frac{1}{4} \{ (\mathcal{K}^1 + \mathcal{K}^2) - 2\mathcal{H}^1\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{U}^1\mathcal{U}^2 \cos(2(\alpha_1 - \alpha_2)) \}
\end{aligned}$$

b) A curvatura média é dada pelo *traço* $(-\frac{1}{2}DN)$. Deduzimos usando as expressões da parte a) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\frac{1}{4} \{ \text{sen}\phi [k_n^2(r) - k_n^1(r)] + \frac{1}{\text{sen}\phi} [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)] \} \\
&= -\frac{1}{4} \{ \text{sen}\phi [\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}^1 + \mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1) - \mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2)] + \frac{1}{\text{sen}\phi} [\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}^1 \\
&\quad + \mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2) - \mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1)] \} \\
&= -\frac{1}{4} \{ [\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}^1] \left(\text{sen}\phi + \frac{1}{\text{sen}\phi} \right) + [\mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1) - \mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2)] \left(\text{sen}\phi - \frac{1}{\text{sen}\phi} \right) \} \\
&= \left(\frac{1 + \text{sen}^2\phi}{4\text{sen}\phi} \right) \{ [\mathcal{H}^1 - \mathcal{H}^2] + \left(\frac{\cos^2\phi}{1 + \text{sen}^2\phi} \right) [\mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1) - \mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2)] \}
\end{aligned}$$

■

Corolário 1 *O ponto $p \in C \setminus M$ é umbílico se e somente se $\Upsilon = \Psi = 0$, onde*

$$\begin{aligned}
\Upsilon &= [\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)] = \mathcal{U}^2 \text{sen}(2\alpha_2) - \mathcal{U}^1 \text{sen}(2\alpha_1), \\
\Psi &= \text{sen}^2\phi [k_n^2(r) - k_n^1(r)] - [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)] \\
&= [\mathcal{H}^1 - \mathcal{H}^2] \cos^2\phi + (1 + \text{sen}^2\phi) [\mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1) - \mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2)] \\
&= \left(\frac{3 - \cos 2\phi}{2} \right) \{ [\mathcal{H}^1 - \mathcal{H}^2] \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{3 - \cos 2\phi} \right) + [\mathcal{U}^1 \cos(2\alpha_1) - \mathcal{U}^2 \cos(2\alpha_2)] \}.
\end{aligned}$$

Prova. (\Rightarrow) Se p é um ponto umbílico temos que toda direção tangente em p é principal. Disto e das expressões (1.1) e (1.2), temos

$$DN.T_1 = \tilde{k}T_1 = \frac{\text{sen}\phi}{2}[k_n^2(r) - k_n^1(r)]T_1 \quad (1.6)$$

$$DN.T_2 = \hat{k}T_2 = \frac{1}{2\text{sen}\phi}[k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)]T_2 \quad (1.7)$$

A contribuição de T_2 em (1.6) é nula. Logo de (1.1), temos

$$\Upsilon = (\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)) = 0,$$

analogamente, poderíamos obter a mesma expressão levando em conta que a contribuição de T_1 é nula em (1.7), podemos recorrer a expressão (1.2) para obtermos o mesmo resultado.

Com isto a matriz de DN esta diagonalizada, ou seja, seus elementos da diagonal são os autovalores de DN . Como p é umbílico, temos

$$\begin{aligned} \tilde{k} = \hat{k} &\Rightarrow \tilde{k} - \hat{k} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\text{sen}\phi}{2}[k_n^2(r) - k_n^1(r)] - \frac{1}{2\text{sen}\phi}[k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)] = 0 \\ &\Rightarrow \text{sen}^2\phi[k_n^2(r) - k_n^1(r)] - [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)] = 0 \\ &\Rightarrow \Psi = 0 \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Se $\Upsilon = 0$ então a matriz de DN fica da seguinte forma

$$DN = \begin{pmatrix} \frac{\text{sen}\phi}{2}(k_n^2(r) - k_n^1(r)) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\text{sen}\phi}(k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)) \end{pmatrix}$$

Como $\Psi = 0$, a subtração dos elementos da diagonal é zero. Daí, concluímos que a subtração dos autovalores de DN é zero, ou seja, $k_1 - k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow p$ é umbílico \blacksquare

Corolário 2 *As direções principais em um ponto p não umbílico de $C \setminus M$ são caracterizadas por fazerem um ângulo θ com T_1 , dado por*

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{2[\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)] \text{sen}\theta}{\text{sen}^2\phi[k_n^2(r) - k_n^1(r)] - [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)]} \\ \tan 2\theta &= \frac{2\Upsilon \text{sen}\theta}{\Psi} \end{aligned}$$

Prova. Seja X um vetor unitário do plano tangente no ponto $p \in C \setminus M$. Escrevendo X na base $[T_1, T_2]$ e chamando de \bar{X} o vetor ortogonal a X , neste plano, temos que a torção geodésica na direção X é dada por

$$\begin{aligned}\tau_g(X) &= -\langle DNX, \bar{X} \rangle \\ \tau_g(X) &= -\langle DN(\cos \theta T_1 + \text{sen} \theta T_2), -\text{sen} \theta T_1 + \cos \theta T_2 \rangle \\ \tau_g(X) &= (\text{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) \langle DNT_1, T_2 \rangle + \cos \theta \text{sen} \theta (\langle DNT_1, T_1 \rangle - \langle DNT_2, T_2 \rangle) \quad (1.8)\end{aligned}$$

Daí, X é uma direção principal, se e somente se, $\tau_g(X) = 0$. Portanto igualando a zero (1.5), obtemos

$$\begin{aligned}0 &= (\text{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) \langle DNT_1, T_2 \rangle + \cos \theta \text{sen} \theta (\langle DNT_1, T_1 \rangle - \langle DNT_2, T_2 \rangle) \\ \frac{2 \cos \theta \text{sen} \theta}{(\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta)} &= \frac{2 \langle DNT_1, T_2 \rangle}{(\langle DNT_1, T_1 \rangle - \langle DNT_2, T_2 \rangle)} \\ \tan 2\theta &= \frac{2(\frac{1}{2}[\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)])}{\frac{\text{sen} \phi}{2}[k_n^2(r) - k_n^1(r)] - \frac{1}{\text{sen} \phi}[k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)]} \\ \tan 2\theta &= \frac{2[\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)] \text{sen} \phi}{\text{sen}^2 \phi [k_n^2(r) - k_n^1(r)] - [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)]} \\ \tan 2\theta &= \frac{2\Upsilon \text{sen} \phi}{\Psi}\end{aligned}$$

■

Corolário 3 *Seja X um vetor unitário tangente a C/M em p . Então a curvatura normal na direção de X é dada por*

$$\begin{aligned}k_n(X) &= -\left\{ \frac{\cos^2(\theta) \text{sen} \phi}{2} [k_n^2(r) - k_n^1(r)] + \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2 \text{sen} \phi} [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)] \right. \\ &\quad \left. + \cos(\theta) \text{sen}(\theta) [\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)] \right\},\end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre X e T_1 .

Prova. Como X um vetor unitário tangente a C/M em p , X pode ser escrito da forma $X = \cos \theta T_1 + \text{sen} \theta T_2$. Daí temos que

$$\begin{aligned}k_n(X) &= -\langle DN(X), X \rangle \\ &= -\langle DN(\cos \theta T_1 + \text{sen} \theta T_2), \cos \theta T_1 + \text{sen} \theta T_2 \rangle \\ &= -\cos^2 \theta \langle DN(T_1), T_1 \rangle + \text{sen}^2 \theta \langle DN(T_2), T_2 \rangle + 2 \cos \theta \text{sen} \theta \langle DN(T_1), T_2 \rangle \\ &= -\left\{ \frac{\cos^2 \theta \text{sen} \phi}{2} [k_n^2(r) - k_n^1(r)] + \frac{\text{sen}^2 \theta}{2 \text{sen} \phi} [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)] \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta \text{sen} \theta [\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)] \right\}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Note, que igualando a zero a expressão acima para a curvatura normal obtemos uma expressão para as direções assintóticas em função do ângulo θ e dos dados relativos aos B_i , analogamente a que obtemos para as direções principais. A seguir, temos um corolário que nos dar a expressão de k_n em um ponto de M .

Corolário 4 *Seja $p = p_m \in M$ e suponha que $p_i = \Pi_i(p)$ não é ponto umbílico de B_i , $i = 1, 2$. Seja X um vetor unitário de $T_p C$ e θ o ângulo formado entre X e E_1^1 . Então a curvatura normal na direção X é dada por*

$$k_n(X) = k_n(\theta) = -\frac{1}{2} [k_n^2(r) - k_n^1(r)].$$

Prova. Seja X um vetor unitário tangente a C em p . Como N_1 e N_2 são paralelos neste ponto temos que X pode ser escrito das seguintes formas:

$$X = \cos \theta E_1^1 + \sin \theta E_2^1 = \cos(\theta + \beta) E_1^2 + \sin(\theta + \beta) E_2^2$$

onde θ é o ângulo que X faz com E_1^1 e β é o ângulo entre E_1^1 e E_1^2 .

Calculemos então a curvatura normal na direção X , que é dada por

$$k_n(X) = k_n(\theta) = -\langle DN(X), X \rangle,$$

da expressão de DN , em (1.5), só é necessário a primeira primeira parcela, já que vamos fazer um produto interno com um vetor tangente X . Daí

$$\begin{aligned} &= -\left\langle \frac{DN_1 D\Pi_1^r(X) - DN_2 D\Pi_2^r(X)}{2 \sin \phi}, X \right\rangle \\ &= \frac{-1}{2 \sin \phi} [\langle DN_1 D\Pi_1^r(X), X \rangle - \langle DN_2 D\Pi_2^r(X), X \rangle] \\ &= \frac{-1}{2 \sin \phi} \left[\left\langle DN_1 D\Pi_1^r \left(\cos(\theta) E_1^1 + \sin(\theta) E_2^1 \right), \cos(\theta) E_1^1 + \sin(\theta) E_2^1 \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \left\langle DN_2 D\Pi_2^r \left(\cos(\theta + \beta) E_1^2 + \sin(\theta + \beta) E_2^2 \right), \cos(\theta + \beta) E_1^2 + \sin(\theta + \beta) E_2^2 \right\rangle \right] \\ &= \frac{-1}{2 \sin \phi} \left[\left(-k_1^1(r) \cos^2(\theta) - k_2^1(r) \sin^2(\theta) \right) - \left(-k_1^2(r) \cos^2(\theta + \beta) - k_2^2(r) \sin^2(\theta + \beta) \right) \right] \\ &= \frac{-1}{2 \sin \phi} [k_n^2(r, \theta) - k_n^1(r, \theta)], \end{aligned}$$

como $\phi = \frac{\pi}{2}$, obtemos a expressão desejada. ■

Já que $k_n(X)$, a curvatura normal na direção do vetor unitário $X \in T_p C$, não depende da escolha da curva regular γ , tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X$. Podemos

utilizar da curva gerada pela intersecção do plano ortogonal a $X \wedge N(p)$ com C . Se a curvatura da curva no ponto p é maior que zero, $k(0) > 0$, então o vetor normal $n(0) = \pm N(p)$ e portanto, segue-se que

$$k_n(X) = \pm k(0), \quad (1.9)$$

disto podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2 *Seja γ dada como acima, na qual $\gamma'(0) = T_1$. Suponhamos que F_1^i são direções principais. Então a curvatura da curva γ em $\gamma(0) = p$, é dada por*

$$k(0) = -\frac{\text{sen } \phi}{2} \left[\frac{k_j^2}{1 - rk_j^2} - \frac{k_j^1}{1 - rk_j^1} \right]$$

quando F_1^i é paralelo a E_j^i .

Prova. Supondo o sinal positivo em (1.9) e utilizando o corolário 3, temos a seguinte expressão para a curvatura de γ em p onde $\gamma'(0) = X$,

$$k(0) = -\left\{ \frac{\cos^2(\theta) \text{sen } \phi}{2} [k_n^2(r) - k_n^1(r)] + \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2 \text{sen } \phi} [k_{n\perp}^2(r) - k_{n\perp}^1(r)] \right. \\ \left. + \cos(\theta) \text{sen}(\theta) [\tau_g^2(r) - \tau_g^1(r)] \right\}.$$

Para o caso de $X = T_1$ e os vetores F_1^i serem direções principais, basta fazer $\theta = 0$ e $\alpha_i = 0$. Daí obtemos

$$k(0) = -\frac{\text{sen } \phi}{2} \left[\frac{k_j^2}{1 - rk_j^2} - \frac{k_j^1}{1 - rk_j^1} \right]$$

quando F_1^i é paralelo a E_j^i . ■

Podemos ver facilmente que no caso do \mathbb{R}^2 , a forma de procedimento para encontrarmos a curvatura da curva de conflito definida por dois conjuntos convexos A_1 e A_2 é semelhante. Já que $T_1 = T$ e N são definidos como a subtração e a soma das normais N_i , pelas propriedades análogas as citadas aqui, podemos mostrar que estes dois vetores são respectivamente tangente e normal as curvas de conflito do \mathbb{R}^2 . Utilizando-se das mesmas definições para $F_1^i = F^i = \nu(D\Pi_i(p).T_1)$, teremos que estes vetores são tangentes aos bordos B_i dos conjuntos A_i .

Achamos bastante natural, fazermos estas associações, pois assim podemos chegar na expressão obtida por Siersma em [11]. Abaixo, mostraremos como obter a curvatura das curvas de conflito em função dos dados geométricos dos B_i no \mathbb{R}^2 .

Teorema 3 *Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos convexos, disjuntos e com bordo C^k , $k \geq 2$, no plano \mathbb{R}^2 . Então*

$$k = -\frac{\text{sen}\phi}{2} \left[\frac{k_2}{1 - rk_2} - \frac{k_1}{1 - rk_1} \right]$$

onde k é a curvatura em um ponto p do conjunto de conflito, k_i são as curvaturas nos pontos $p_i = \Pi_i(p)$ em B_i e r é a distância de p para A_i .

Prova. Diferenciando N , obtemos:

$$dN = \frac{dN_1 \cdot d\Pi_1^r - dN_2 \cdot d\Pi_2^r}{2 \text{sen}\phi} + \frac{1}{2} d[(\text{sen}\phi)^{-1}] \cdot [N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))]. \quad (1.10)$$

Como queremos fazer o produto interno de dN pelo vetor tangente T , a contribuição do segundo termo é nulo. Logo nos concentraremos somente no primeiro termo. Lembrando que,

$$d\Pi_i^r(T) = \text{sen}\phi F^i.$$

Calculemos agora $dN_i \cdot d\Pi_i^r$ na direção de T , para sabermos o valor de dN nesta direção.

$$dN_i \cdot d\Pi_i^r(T) = dN_i(\text{sen}\phi F^i) = \text{sen}\phi dN_i(F^i) = \text{sen}\phi[-k^i(r)F^i].$$

Daí chegamos à seguinte expressão para dN ,

$$dN = \frac{1}{2} [k^2(r)F^2 - k^1(r)F^1]$$

Para calcular a curvatura k do conflito é suficiente fazer o produto interno

$$\begin{aligned} k &= \langle -dN, T \rangle = - \left\langle \frac{k^2(r)F^2 - k^1(r)F^1}{2}, T \right\rangle \\ &= -\frac{\text{sen}\phi}{2} [k^2(r) - k^1(r)] = -\frac{\text{sen}\phi}{2} \left[\frac{k_2}{1 - rk_2} - \frac{k_1}{1 - rk_1} \right]. \end{aligned}$$

■

Lembramos, que a orientação dos vetores N_i usada, neste trabalho é para o interior dos conjuntos A_i . No artigo de Siersma [11], a orientação escolhida para as normais N_i é para o exterior dos conjuntos A_i . Por este motivo, houveram algumas mudanças de sinais. Na figura 1.4 temos um noção de como os vetores estão dispostos.

No seção seguinte estudaremos o comportamento das linhas de curvatura na vizinhança de um ponto umbílico. Faremos uma introdução do tipo umbílico que pode surgir em $p_m \in M$.

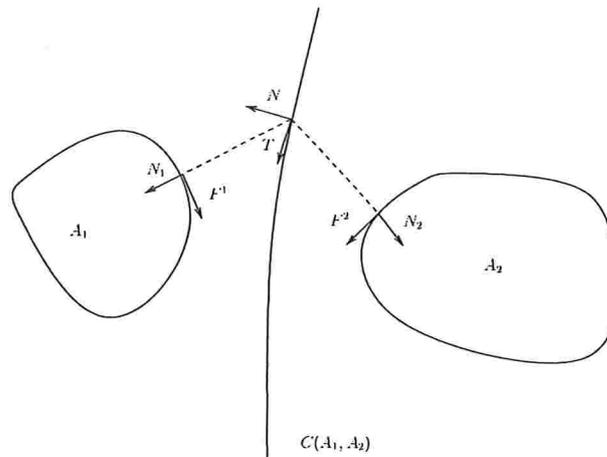


Figura 1.4: Conflito no Plano

1.4 Pontos Umbílicos nas Superfícies de Conflito

Nesta seção será mostrado como determinar o *tipo Darbouxiano* de um ponto umbílico $p_m \in M$.

Faremos uma pequena introdução sobre pontos umbílicos. Estabeleceremos condições para que um ponto umbílico seja *Darbouxiano*, assim como a configuração principal na vizinhança desse pontos.

Seja $p_o \in S$ um ponto umbílico da superfície S . Considere a carta $(u, v) : (S, p_o) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ em torno de p_o , onde a superfície é o gráfico de uma função da forma:

$$w = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3 + O[(u^2 + v^2)^2].$$

Isto é obtido através da projeção de S em $TS(p_o)$ ao longo da normal $N(p_o)$ e escolhendo uma carta ortonormal (u, v) em que o coeficiente de termo cúbico u^2v da projeção, w , de S em $N(p_o)$ é nulo.

Um ponto umbílico é chamado *Darbouxiano* se satisfaz, para a carta acima, as seguintes condições, T e D , como segue:

T) *A Condição de Transversalidade:* $b(b-a) \neq 0$

D) *A Condição Discriminante:*

$$D_1) : \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0$$

$$D_2) : \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1, a \neq b$$

$$D_3) : \frac{a}{b} < 1.$$

Na carta (u, v) acima, as equações para as linhas principais são escritas por

$$[bv + L]dv^2 - [(b - a)u + cv + M]dudv - [bv + N]du^2 = 0 \quad (1.11)$$

onde L , M e N são funções de ordem $O[(u^2 + v^2)^2]$.

A condição \mathbf{T} , implica que as curvas

$$bv + L = 0 \quad e \quad (b - a)u + cv + M = 0,$$

cuja intersecção define os pontos umbílicos, são regulares e se intersectam transversalmente no $0 = (0, 0)$.

Associada a equação 1.11, consideremos a equação diferencial implícita, no espaço $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}_1\mathbb{R}$, definida na carta (u, v, p) por,

$$F(u, v, p) = [bv + L]p^2 - [(b - a)u + cv + M]p - [bv + N] = 0,$$

onde $p = \frac{dy}{dx}$ e na carta (u, v, q) , $q = \frac{dx}{dy}$, por

$$G(u, v, q) = [bv + L] - [(b - a)u + cv + M]q - [bv + N]q^2 = 0.$$

Considerando o conjunto

$$\mathbb{M} = \{(u, v, [u : v]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}_1\mathbb{R} : F(u, v, p) = G(u, v, q) = 0\}. \quad (1.12)$$

A condição de transversalidade é equivalente a dizer que \mathbb{M} é regular em uma vizinhança da linha projetiva $\mathbb{P}_1\mathbb{R}$. De fato, na carta (u, v, p) segue que no ponto $(0, 0, p)$, temos:

$$F_u = -(b - a)p = 0, \quad F_v = bp^2 - cp - b = 0 \quad e \quad F_p = 0,$$

então $p = 0$ e $b = 0$ ou $p \neq 0$ e $b = a$. Pela condição \mathbf{T} nenhuma das duas é satisfeita.

Considere também a projeção $\pi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(u, v, p) = (u, v)$. O conjunto singular da projeção π é definido por $F(u, v, p) = F_p(u, v, p) = 0$ e coincide com a linha projetiva $\mathbb{P}_1\mathbb{R}$.

O campo de vetores $X = F_p \frac{\partial}{\partial u} + p F_p \frac{\partial}{\partial v} - (F_u + p F_v) \frac{\partial}{\partial p}$ está definido em \mathbb{M} e a projeção das curvas integrais de X são as soluções da equação diferencial implícita 1.11, com $q = \frac{du}{dv} \neq 0$. Isso é facilmente verificado diferenciando a equação $F(u(t), v(t), p(t)) = 0$ com relação a t , ou seja, $F_u \dot{u} + F_v \dot{v} + F_p \dot{p} = 0$. Então o campo

de vetores $Y = (1, p, -(F_u + pF_v)/F_p)$, $p = \frac{v}{u}$, esta bem definido em $\mathbb{M} \setminus \{F_p = 0\}$. Multiplicando Y por F_p temos o campo de vetores $X = (F_p, pF_p, -(F_u + pF_v))$ que tem as mesmas curvas integrais de Y em $\mathbb{M} \setminus \mathbb{P}_1\mathbb{R}$, além disso o conjunto singular de π é somente a linha projetiva.

Os pontos singulares de X na superfície implícita \mathbb{M} são dados por: $(0, 0, p_i)$, onde p_i são as raízes da equação cúbica

$$h(p) = -p[bp^2 - cp + (a - 2b)] = 0,$$

ou seja, os zeros de $-(F_u + pF_v)$. Os zeros do polinômio acima são dados por

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \\ p_1 &= \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} \text{ e} \\ p_2 &= \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}. \end{aligned}$$

Eles representam as possíveis direções principais em que as linhas principais podem aproximar o ponto umbílico.

Mostremos agora que as singularidades de X , em \mathbb{M} , são de fato hiperbólicas, ou seja, as singularidades tem parte real diferente de zero, sobre as condições **T** e **D**, que denominaremos de condições *Darbouxianas*.

Cálculos diretos mostram que

$$DX(0, 0, p) = \begin{pmatrix} -(b-a) & 2pb - c & 0 \\ -p(b-a) & 2p^2b - pc & 0 \\ * & * & -3bp^2 + 2cp + (2b-a) \end{pmatrix}$$

Os autovalores de $DX(0, 0, p)$ nas singularidades são dados por:

Na origem nós temos $\lambda_t = -(b-a)$ e $\lambda_p = (2b-a)$, onde λ_t é o autovalor associado ao autovetor transversal a linha projetiva e λ_p esta associado a linha projetiva que é invariante pelo campo de vetores X .

Além disso se $\frac{a}{b} < 1$ e $\frac{a}{b} > 2$ a origem é um ponto de sela hiperbólico. Se $1 < \frac{a}{b} < 2$ a origem é um ponto hiperbólico nodal.

Para $p \neq 0$ os autovalores são dados por $\lambda_t = [2bp^2 - pc - (b-a)]$ e $\lambda_p = h'(p)$, com isso temos que:

Quando $\frac{a}{b} > (\frac{c}{2b})^2 + 2$ a origem é o único ponto singularidade de X , que é um ponto de sela hiperbólico.

Para $\frac{a}{b} < 1$ nós temos três pontos de sela hiperbólicos.

Temos também que para $(\frac{c}{2b})^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1, a \neq 2b$, obtemos dois pontos de sela hiperbólicos e um ponto hiperbólico nodal.

Na carta (x, y, q) o campo de vetores $Y = (qF_p, F_p, -(qF_u + F_v))$ é regular na vizinhança do ponto 0 e a análise deste campo é análoga ao do campo X .

Daí concluímos que a condição **D** é imposta para que as singularidades do campo X e Y sejam hiperbólicas.

Ao projetarmos as curvas integrais dos campos X e Y , obtemos o comportamento das linhas de curvatura na vizinhança do ponto umbílico p_0 .

Podemos agora enunciarmos o seguinte teorema que caracteriza a configuração dos pontos umbílicos *Darbouxianos*:

Teorema 4 (Gutierrez, Sotomayor, 1982) *Seja p um ponto umbílico de uma imersão α dada nas coordenadas de Monge por:*

$$\alpha(u, v) = (u, v, \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}u^2v + \frac{c}{6}v^3 + o(4))$$

Suponha as seguintes condições:

$$\text{T)} b(b - a) \neq 0$$

$$\text{D}_1) (\frac{c}{2b})^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0 \quad \text{D}_2) (\frac{c}{2b})^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1, a \neq 2b \quad \text{D}_3) \frac{a}{b} < 1$$

*Então o comportamento das linhas de curvatura entorno do ponto umbílico p , nos casos D_1 , D_2 e D_3 , chamados de Umbílicos *Darbouxianos*, é como na figura 1.5.*

Logo a caracterização do tipos *Darbouxianos* depende do 3-jato da superfície, o qual determina o comportamento das linhas de curvatura em torno do ponto umbílico. Com o objetivo de caracterizar o tipo *Darbouxiano* dos pontos umbílicos de C , calcularemos o 3-jato da superfície de conflito em $p \in C$, em termos dos correspondentes 3-jatos das superfícies B_1 e B_2 em p_1 e p_2 .

Então as superfícies convexas B_1 e B_2 são localmente dadas na carta de Monge (x, y) e (u, v) pelos gráficos de

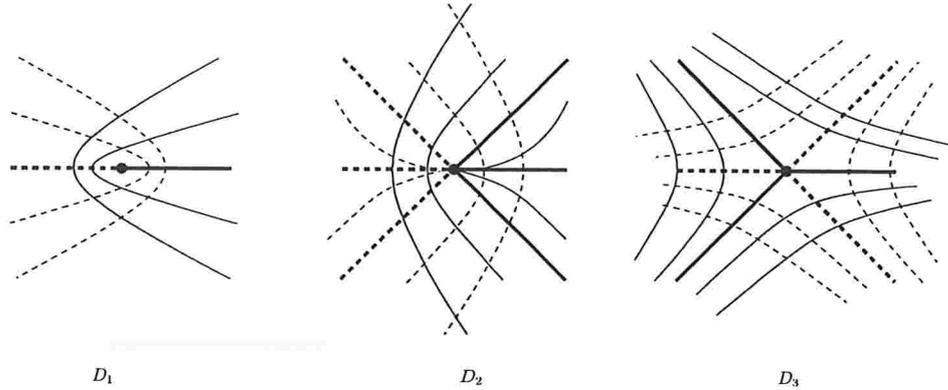


Figura 1.5: Umbílicos Darbouxianos

$$f_1(x, y) = r + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + \frac{1}{6}(a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \dots),$$

$$f_2(u, v) = -r - \frac{a}{2}u^2 - \frac{b}{2}v^2 - \frac{1}{6}(b_{30}u^3 + 3b_{21}u^2v + 3b_{12}uv^2 + b_{03}v^3 + \dots),$$

Seja $P = (X, Y, Z)$ um ponto do \mathbb{R}^3 . Pelas considerações acima segue que $p = (0, 0, 0) \in C$.

As expressões coordenadas dos jatos de segunda ordem em p das projeções $\Pi_1(P)$ e $\Pi_2(P)$, com expressão nas coordenadas de Monge (x, y) e (u, v) serão calculadas agora.

A projeção $\Pi_1(X, Y, Z) = (x, y)$, cuja expressão coordenada, é definida implicitamente pelas equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

onde $F(x, y, X, Y, Z) = d(P, B_1)^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - f_1(x, y))^2$.

Usando o Teorema da Função Implícita, após cálculos extensos com auxílio do *Maple*, obtemos que solução do sistema de equações acima é dado por

$$x = \frac{1}{1+ra}X - \frac{ra_{30}}{2(1+ra)^3}X^2 - \frac{ra_{21}}{(1+rb)(1+ra)^2}XY$$

$$- \frac{ra_{12}}{2(1+ra)(1+b)^2}Y^2 + \frac{a}{(1+ra)^2}XZ + \dots$$

$$y = \frac{1}{1+rb}Y - \frac{ra_{21}}{2(1+rb)(1+ra)^2}X^2 - \frac{ra_{12}}{(1+ra)(1+rb)^2}XY$$

$$- \frac{ra_{30}}{2(1+b)^3}Y^2 + \frac{b}{(1+rb)^2}YZ + \dots$$

Similarmente, consideraremos a função

$$G(x, y, X, Y, Z) = d(P, B_2)^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - f_2(x, y))^2,$$

obtemos que a projeção $\Pi_2(X, Y, Z) = (u, v)$, nas expressões coordenadas, é dada por

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{1+ra}X + \frac{rb_{30}}{2(1+ra)^3}X^2 + \frac{rb_{21}}{(1+rb)(1+ra)^2}XY \\ &\quad + \frac{rb_{12}}{2(1+ra)(1+b)^2}Y^2 - \frac{a}{(1+ra)^2}XZ + \dots \\ v &= \frac{1}{1+rb}Y + \frac{rb_{21}}{2(1+rb)(1+ra)^2}X^2 + \frac{rb_{12}}{(1+ra)(1+rb)^2}XY \\ &\quad + \frac{rb_{30}}{2(1+b)^3}Y^2 - \frac{b}{(1+rb)^2}YZ + \dots \end{aligned}$$

Lembrando que a superfície de conflito C é definida pela equação

$$c(X, Y, Z) = d\left((X, Y, Z), (u, v, f_2(u, v))\right) - d\left((X, Y, Z), (x, y, f_1(x, y))\right) = 0$$

com (x, y) e (u, v) representando as projeções $\Pi_1(X, Y, Z)$ e $\Pi_2(X, Y, Z)$, dadas pelas expressões acima.

Um cálculo extenso nos leva para a seguinte expressão para o 3-jato da representação de Monge de C na vizinhança de $p = (0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(a_{30} - b_{30})}{2(1+ar)^3} \frac{X^3}{6} + \frac{(a_{21} - b_{21})}{2(1+br)(1+ar)^2} \frac{X^2Y}{2} \\ &\quad + \frac{(a_{12} - b_{12})}{2(1+ar)(1+br)^2} \frac{XY^2}{2} + \frac{(a_{03} - b_{03})}{2(1+br)^3} \frac{Y^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Isto segue do Teorema da Função Implícita aplicado a função $c(X, Y, Z)$, observando que $c(0, 0, 0) = 0$ e $\frac{\partial c}{\partial Z}(0, 0, 0) = 4r \neq 0$.

Como isto, podemos através do teorema de Gutierrez e Sotomayor demonstrado acima nesta seção, caracterizarmos o tipo Darbouxiano do umbílico que pode aparecer no ponto $p = (0, 0, 0)$. Observamos que da maneira que foi dada a expressão de Z , é preciso fazer uma rotação para eliminarmos o termo X^2Y , pois no teorema citado, a expressão não possui este termo. Note-se, entretanto, que quando $a_{21} = b_{21}$, Z tem a forma reduzida acima. No trabalho de Darboux [2] existe uma caracterização dos pontos umbílicos Darbouxiano em função de todos os termos da parte cúbica, que pode ser aplicada diretamente a expressão de Z .

1.5 Exemplos de Conjuntos de Conflito

Nesta seção daremos uma série de exemplos de conjuntos de conflito no \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Daremos primeiramente alguns exemplos no \mathbb{R}^2 obtidos através de programas implementados no programa *Mathematica 4*; nestes pode-se obter uma seqüência satisfatória de pontos do conjunto de conflito, que nos indica o comportamento das curvas para certos conjuntos convexos do plano. Este método, já não é tão eficaz no \mathbb{R}^3 por causa dos fatores de visualização. Ao invés de termos pontos do conjunto de conflito, teremos curvas que ficam atrás das superfícies, logo é inviável ver o comportamento da superfície através deste método. No entanto, construímos alguns exemplos de superfícies de conflito através da obtenção da parametrização de tais superfícies.

1.5.1 Curvas de Conflito

Os exemplos de curvas de conflito no plano são dados de duas maneiras: a primeira, usando exclusivamente algoritmos no programa *Mathematica4*, na qual obtemos uma descrição do comportamento das curvas de conflito através de alguns pontos desta curva, usando o deslocamento paralelo na direção da normal dos bordos dos conjuntos dados. Entretanto, não obtemos as parametrizações das curvas. A segunda, é mais completa pois chegamos nas parametrizações das curvas. Utilizando o método anterior para visualizar e verificar se a parametrização obtida passa pelos pontos da curva obtidos pelo primeiro método. Os exemplos obtidos pelo segundo método são elementares, pois o método fica inviável partir do momento em que não é possível isolar certas variáveis em função das outras, obtendo assim, funções implícitas como no caso da elipse, que não trataremos aqui.

A curva **alpha** no plano pode ser definida no *Mathematica* por

$$\mathbf{alpha}[t_]:= \{\mathbf{a1}[t], \mathbf{a2}[t]\},$$

onde **a1** e **a2** são funções de **t**. Nós podemos definir **J**, o operador rotação dado por

$$\mathbf{J}[\{\mathbf{p1_}, \mathbf{p2_}\}] := \{-\mathbf{p2}, \mathbf{p1}\},$$

que para cada vetor do plano dar um giro de $\pi/2$ no sentido anti-horário.

A curva **paralela** a uma curva regular α é a curva plana dada por

$$\mathbf{parcurve}[\alpha][s](t) = \alpha(t) + \frac{s\mathbf{J}\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

A versão *Mathematica* para esta definição é o operador `parcuve` dado por

$$\text{parcuve}[\alpha_][s_][t_]:= \alpha[tt] - sJ[D[\alpha[tt], tt]]/Sqrt[Simplify[D[\alpha[tt], tt].D[\alpha[tt], tt]]]/.tt \rightarrow t$$

O operador `rotação` de um ângulo θ é definido no *Mathematica* da seguinte forma

$$\text{rt}[\theta_][\alpha_][t_]:= \{ \text{Cos}[\theta]\alpha[t][[1]] - \text{Sin}[\theta]\alpha[t][[2]], \\ \text{Sin}[\theta]\alpha[t][[1]] + \text{Cos}[\theta]\alpha[t][[2]] \}$$

A `ellipse` será definida no *Mathematica* por

$$\text{ellipse}[\mathbf{a_}, \mathbf{b_}][t_]:= \{ \mathbf{a} * \text{Cos}[t], \mathbf{b} * \text{Sin}[t] \}$$

observamos que as circunferências estão contidas nestes casos para $a = b$.

Definiremos a função

$$\mathbf{p}[\mathbf{a_}, \mathbf{b_}, \mathbf{c_}, \mathbf{d_}] := \text{ParametricPlot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\text{parcuve}[\text{ellipse}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]][\mathbf{s}][\mathbf{t}] \\ + \{ \mathbf{c}, \mathbf{d} \}, \{ \mathbf{s}, 0, 6, 0.5 \}], \{ \mathbf{t}, 0, 2\text{Pi} \}], \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}],$$

como sendo o operador do *Mathematica* que grafica, transladada para o ponto $[c,d]$, a `ellipse[a,b]` e suas curvas paralelas.

Assim sendo, podemos através do comando `Show` visualizar várias combinações destas figuras, como por exemplo

$$\text{Show}[\mathbf{p}[\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\mathbf{5}, \mathbf{0}], \mathbf{p}[\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{0}], \text{Axes} \rightarrow \text{False}]; \text{ (ver figura 1.6)}$$

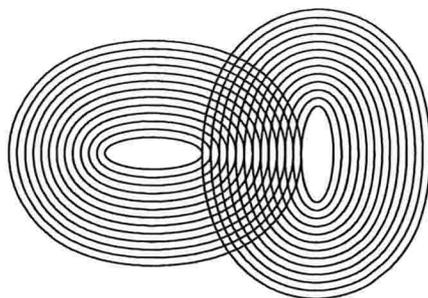
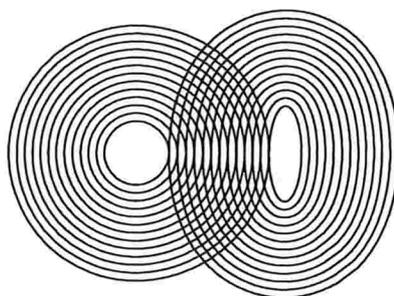
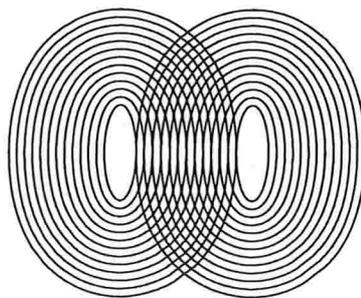
$$\text{Show}[\mathbf{p}[\mathbf{2}, \mathbf{2}, -\mathbf{4}, \mathbf{0}], \mathbf{p}[\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{0}], \text{Axes} \rightarrow \text{False}]; \text{ (ver figura 1.7)}$$

$$\text{Show}[\mathbf{p}[\mathbf{1}, \mathbf{3}, -\mathbf{4}, \mathbf{0}], \mathbf{p}[\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{0}], \text{Axes} \rightarrow \text{False}]; \text{ (ver figura 1.8)}$$

Os pontos de intersecção entre as respectivas curvas paralelas são pontos da curvas de conflito, pois estão a uma mesma distância das elipses centrais. Ligando os pontos temos as curvas de conflito.

Outros exemplos podem ser obtidos através da função `rotação`, para isto serão definidas as funções

$$\mathbf{r}[t] := \text{rt}[\pi/4, \text{ellipse}[\mathbf{3}, \mathbf{1}]][\mathbf{t}],$$

Figura 1.6: $p[3,1,-5,0]$ e $p[1,3,5,0]$ Figura 1.7: $p[2,2,-4,0]$ e $p[1,3,5,0]$ Figura 1.8: $p[1,3,-4,0]$ e $p[1,3,4,0]$

```
h[c_, d_] := ParametricPlot[Evaluate[Table[parcuve[r][s][t] + {c, d},
  {s, 0, 6, 0.5}]], {t, 0, 2Pi}, AspectRatio -> Automatic].
```

Daremos a seguir dois exemplos envolvendo rotações. Para obter estes exemplos podemos utilizar os seguintes comandos:

```
Show[p[3, 1, -5, 0], h[6, 0], Axes -> False]; (ver figura 1.9)
```

Show[h[-5, 0], h[5, 0], Axes → False]; (ver figura 1.10)

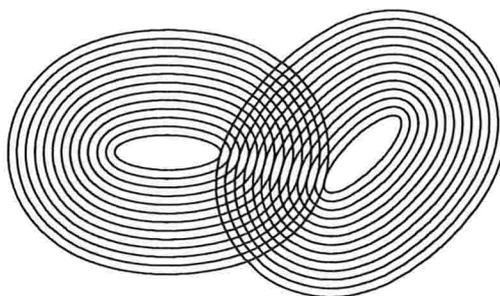


Figura 1.9: $p[3,1,-5,0]$ e $h[6,0]$

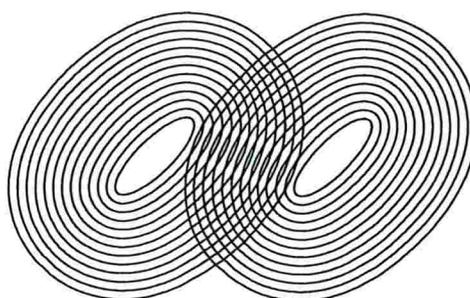


Figura 1.10: $h[-5,0]$ e $h[5,0]$

Nestes exemplos observa-se uma mudança no sinal da curvatura.

O próximo exemplo foi obtido chegando-se diretamente na expressão paramétrica da curva. Para isso igualamos as expressões das curvas paralelas a duas circunferência de raios diferentes. Sejam

$$(x - 6)^2 + y^2 = (5 + t)^2,$$

$$(x + 6)^2 + y^2 = (1 + t)^2,$$

as equações das curvas paralelas as circunferências de de raios 5 e 1, respectivamente, para $t \in \mathbb{R}$. Igualando as duas equações obtemos

$$t = -3(1 + x)$$

substituindo na primeira equação acima, obtemos

$$y^2 = 8(-4 + x^2)$$

Daí chegamos à parametrização para a curva de conflito, dada por

$$c(y) = \left(\sqrt{\frac{y^2}{8} + 4}, y \right),$$

esta curva é definida no *Mathematica* como

$$c[y_] := \{\text{Sqrt}[y^2/8 + 4], y\}$$

para visualizar este gráfico e suas curvas geradoras podemos utilizar os seguintes comandos no *Mathematica*,

$$cc := \text{ParametricPlot}[\text{Evaluate}[c[y]], \{y, -10, 10\}]$$

para definir o gráfico de $c[y_]$ e

$$\text{Show}[\{p[5, 5, -6, 0], p[1, 1, 6, 0], cc\}, \text{Axes} \rightarrow \text{False}];$$

para obter a figura 1.11.

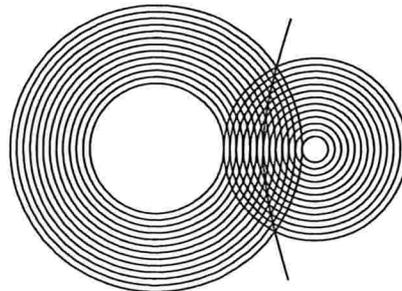


Figura 1.11: $p[5,5,-6,0]$, $p[1,1,6,0]$ e cc

É fácil ver, que caso este método seja utilizado para elipses, não teremos tamanha facilidade em isolar as variáveis para obtermos uma parametrização direta. Abaixo, segue a expressão em coordenadas para as curvas paralelas da elipse $[a,b]$ em função de *seno* e *coseno*,

$$\left(\cos(t) \left(a + \frac{bs}{\sqrt{b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)}} \right), \sin(t) \left(b + \frac{as}{\sqrt{b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)}} \right) \right)$$

onde s é o parâmetro na direção da normal e t é o parâmetro sobre a elipse.

Visualizando as figuras 1.6 a 1.8, podemos ser levados a acreditar que uma expressão de x em função de y , bem maleável possa existir para parametrizarmos suas respectivas curvas de conflito, pois as curvas são tão simples quanto para duas circunferências. Trabalhamos nesta direção, porém devido a falta de tempo deixamos este estudo para abordarmos futuramente.

1.5.2 Superfícies de Conflito

A definição no *Mathematica* para superfície paralela é

```
parsurf[x_][r_][u_, v_] := Module[{xu, xv, n1, n2, n3, n4},
  xu = D[x[uu, vv], uu];
  xv = D[x[uu, vv], vv];
  n1 = Cross[xu, xv]//Simplify;
  n2 = Simplify[Factor[n1.n1]];
  n3 = PowerExpand[Sqrt[n2]]//Simplify;
  n4 = Simplify[n1/n3];
  Simplify[Together[x[uu, vv] + rn4]]/.{uu -> u, vv -> v}
```

Definiremos a esfera por

$$\text{esfera}[\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_-][\mathbf{u}_-, \mathbf{v}_-] := \{\mathbf{a}\cos[\mathbf{v}]\cos[\mathbf{u}] + \mathbf{b}, \mathbf{a}\cos[\mathbf{v}]\sin[\mathbf{u}], \mathbf{a}\sin[\mathbf{v}]\}$$

onde o parâmetro \mathbf{a} é o raio e \mathbf{b} é o parâmetro de translação sobre o eixo x . Para para visualizar os exemplos usamos o parâmetro \mathbf{b} para obter que os interiores das esferas sejam disjuntos.

No \mathbb{R}^3 não podemos usar o método do deslocamento paralelo ao longo da normal para visualizar as curvas de intersecção, como foi feito no \mathbb{R}^2 para visualizar os pontos de intersecção, pois existe o problema da dimensão. As superfícies paralelas tem dimensão dois, elas funcionam como paredes obstruindo a visualização das intersecções.

Logo, só usamos o segundo método, que é o de encontrar uma parametrização para a superfície de conflito e depois visualizá-la com as superfícies paralelas dos conjuntos que a geraram.

Encontremos agora a parametrização para a superfície de conflito gerada por dois cones . A equação para os cones no *Mathematica* é

$$\text{cone}[\mathbf{a}_-, \mathbf{b}_-][\mathbf{t}_-, \mathbf{z}_-] := \{\mathbf{a} * \text{Cos}[\mathbf{t}] - \mathbf{b}, \mathbf{a} * \text{Sin}[\mathbf{t}], \mathbf{z}\},$$

Como para o caso de $\{a = 5, b = -6\}$ e $\{a = 1, b = 6\}$ já temos a expressão para a curva de conflito das duas circunferências no plano xy , feito na seção anterior, basta então acrescentarmos a variável z , da seguinte forma no *Mathematica*,

$$\mathbf{c}[\mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \{\text{Sqrt}[(\mathbf{y}^2)/8 + 4], \mathbf{y}, \mathbf{z}\},$$

o gráfico desta curva será definido por

```
sc1 := ParametricPlot3D[Evaluate[c[y, z]], {y, -10, 10}, {z, -10, 10},
  Axes → None, Boxed → False];
```

e dos cones por

```
c1 := ParametricPlot3D[Evaluate[cone[5, -6][t, z]], {t, 0, 2Pi}, {z, -10, 10},
  Axes → None, Boxed → False],
c2 := ParametricPlot3D[Evaluate[cone[1, 6][t, z]], {t, 0, 2Pi}, {z, -10, 10},
  Axes → None, Boxed → False].
```

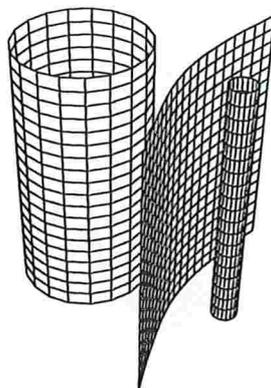
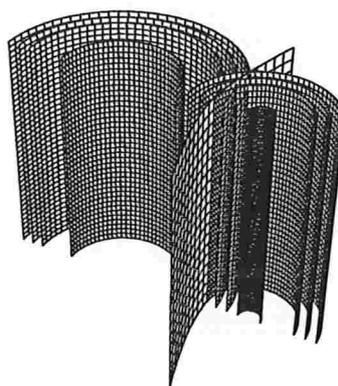
O comando para visualizar estes gráficos é

```
Show[{c1, c2, sc1}, Shading → False];
```

que nos dar a figura 1.12

O transporte paralelo de $c1$ e $c2$ é dado por

```
Pc1 := ParametricPlot3D[{c1[u, v], parsurf[c1][3][u, v], parsurf[c1][4][u, v],
  parsurf[c1][5][u, v]}/Evaluate, {u, 0, Pi}, {v, -10, 10}, PlotPoints → {40, 40},
  Axes → None, Boxed → False];,
Pc2 := ParametricPlot3D[{c2[u, v], parsurf[c2][2][u, v], parsurf[c2][3][u, v],
  parsurf[c2][4][u, v]}/Evaluate, {u, 0, Pi}, {v, -10, 10}, PlotPoints → {40, 40},
  Axes → None, Boxed → False];.
```

Figura 1.12: $c1$, $c2$ e $sc1$ Figura 1.13: $Pc1$, $Pc2$ e $sc1$

Assim sendo, plotando $Pc1$, $Pc2$ e $sc1$ através do operador

```
Show[{Pc1, Pc2, sc1}, Axes → False, ViewPoint → {-0.8, -2, 3}];
```

obtemos a figura 1.13.

O próximo exemplo será a superfície de conflito entre duas esferas de mesmo raio. Para isto, igualamos as equações das seguintes esferas

$$(x + 4)^2 + y^2 + z^2 = (2 + t)^2$$

$$(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = (2 + t)^2$$

e fazendo cálculos semelhantes aos feitos no \mathbb{R}^2 , obtemos $x = 0$, ou seja o conflito será o plano xy . Logo as intersecções das superfícies paralelas com o plano xy são circunferências, ou seja, teremos circunferências gerando todo o plano xy para $t \geq -2$.

A superfície de conflito é o plano xy , dado pela equação

$$\mathbf{p} := \{0, (2 + t)\text{Cos}[v], (2 + t)\text{Sin}[v]\},$$

seu gráfico fica definido por

```
sc2 := ParametricPlot3D[Evaluate[p], {t, -2, 20}, {v, 0, 2Pi},
    Axes, → None, Boxed → False];
```

Para esboçarmos os gráficos das esferas, se faz necessário o uso dos seguintes comandos:

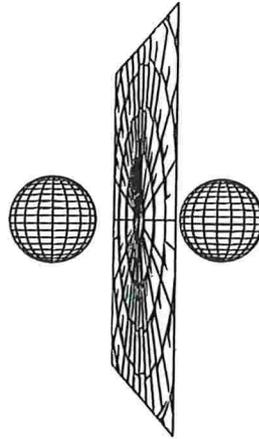
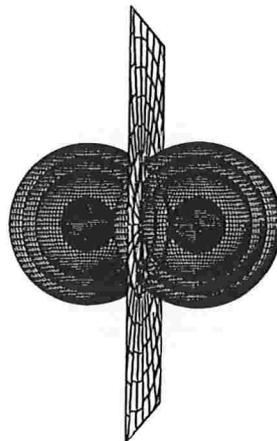
```
e1 := ParametricPlot3D[Evaluate[esfera[2, -4][u, v]], {u, 0, 2Pi}, {v, -Pi/2, Pi/2},
    Axes → None, Boxed → False];
e2 := ParametricPlot3D[Evaluate[esfera[2, 4][u, v]], {u, 0, 2Pi}, {v, -Pi/2, Pi/2},
    Axes → None, Boxed → False];
```

As superfícies paralelas à esfera são dadas por

```
Pe1 := ParametricPlot3D[{esfera[2, -4][u, v], parsurf[esfera[2, -4]][2][u, v],
    parsurf[esfera[2, -4]][3][u, v], parsurf[esfera[2, -4]][4][u, v]}
    //Evaluate, {u, 0, Pi}, {v, -Pi/2, Pi/2}, PlotPoints → {40, 40},
    Axes → None, Boxed → False];
Pe2 := ParametricPlot3D[{esfera[2, 4][u, v], parsurf[esfera[2, 4]][2][u, v],
    parsurf[esfera[2, 4]][3][u, v], parsurf[esfera[2, 4]][4][u, v]}
    //Evaluate, {u, 0, Pi}, {v, -Pi/2, Pi/2}, PlotPoints → {40, 40},
    Axes → None, Boxed → False];
```

Assim sendo, temos os comandos para visualizarmos a superfície de conflito primeiramente com os conjuntos geradores e depois com as superfícies paralelas

```
Show[{e1, e2, sc2}, Shading → False, ViewPoint → {-0.4, -2, 0}, (verfigura 1.14)
```

Figura 1.14: e_1 , e_2 e sc_2 Figura 1.15: Pe_1 , Pe_2 e sc_2

`Show[{{Pe1, Pe2, sc2}, Axes -> False, ViewPoint -> {0.4, -2, 0}}, (verfigura 1.15)`

Igualando as equações das superfícies paralelas das esferas $[a=1, b=-6]$ e $[a=5, b=6]$, como foi feito para as esferas $[a=2, b=-4]$ e $[a=2, b=4]$, chegamos na equação paramétrica do conflito dada por

$$c(y, z) = \left(\sqrt{\frac{y^2 + z^2}{8}} + 4, y, z \right)$$

Sua representação no *Mathematica* é

$$c[y-, z-] := \{\text{Sqrt}[(y^2 + z^2)/8 + 4], y, z\},$$

e seu gráfico fica definido por

```
sc3 := ParametricPlot3D[Evaluate[c], {y, -10, 10}, {z, -10, 10},
  Axes, → None, Boxed → False];
```

Para visualizar as superfícies o processo é análogo, ao feito anteriormente, basta definir **Pe3** e **e3** como **Pe1** e **e1** trocando os valores $a=2$ por $a=1$ e $b=-4$ por $b=-6$. Analogamente, definamos **Pe4** e **e4** trocando $a=2$ por $a=5$ e $b=-4$ por $b=6$, obtendo como isto as figuras 1.16 e 1.17.

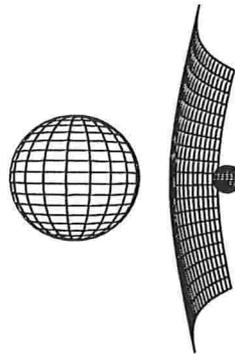


Figura 1.16: e3, e4 e sc3

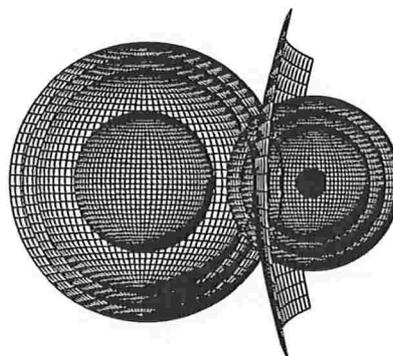


Figura 1.17: Pe3, Pe4 e sc3

Conjuntos de Conflito no \mathbb{R}^4

2.1 Introdução

Neste capítulo desenvolveremos o estudo das hipersuperfícies de conflito no \mathbb{R}^4 .

Consideraremos dois conjuntos A_1 e A_2 do \mathbb{R}^4 convexos, com interiores disjuntos e bordos B_i de classe C^k , $k > 1$, para definimos o conjunto de conflito a ser estudado.

A maioria das hipóteses feitas neste capítulo são herdadas do \mathbb{R}^3 . Na primeira seção faremos uma breve introdução dos objetos que utilizaremos. A semelhança com o \mathbb{R}^3 é grande.

Um dos assuntos introduzidos é a definição de um referencial móvel $\{T_1, T_2, T_3, N\}$ sobre a hipersuperfície de conflito. Este por sua vez é dados em função dos bordos dos conjuntos A_i . A ligação entre o referencial e os B_i nos possibilitará determinar a matriz DN da derivada da normal a hipersuperfície de conflito.

O resultado principal é a matriz DN . Encontraremos uma expressão para a matriz na base $\{T_1, T_2, T_3\}$ do hiperplano tangente a hipersuperfície de conflito em um ponto $p \in C \setminus M$. Com isso, podemos encontrar uma expressão para as funções simétricas elementares em função dos autovalores desta matriz. As funções simétricas elementares nos fornecem características da geometria da hipersuperfície de conflito.

Por fim, obtemos alguns exemplos de hipersuperfícies de conflito.

2.2 Hipersuperfícies de Conflito do \mathbb{R}^4

Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos não vazios, fechados no espaço Euclidiano \mathbb{R}^4 . Adotaremos a distância, o produto interno e a orientação canônicas do \mathbb{R}^4 .

O conjunto de conflito $C(A_1, A_2)$ entre A_1 e A_2 é definido como no \mathbb{R}^3 , ou seja,

$$C(A_1, A_2) = \{p; d(p, A_1) = d(p, A_2)\},$$

onde $d(p, A) = \inf\{d(p, q); q \in A\}$.

É necessário, para obtermos hipersuperfícies regulares de classe C^k , $k \geq 1$, considerarmos somente o caso em que os A_i são conjuntos fechados, convexos, com seus interiores disjuntos e bordos regulares $B_i = \partial A_i$ de classe C^k , $k \geq 2$.

Os bordos B_i são orientados por campos diferenciáveis de vetores unitários N_i normais as hipersuperfícies B_i . Assim, adotaremos a convenção que N_i esta sempre apontando para o interior de A_i .

Denotaremos por A_i^r o conjunto dos pontos a uma distância $r \geq 0$ de A_i ; seu bordo é a superfície B_i^r obtida pelo deslocamento de cada ponto p_i de B_i pela função $\Sigma_i^r(p_i) = p_i - rN_i(p_i)$. De acordo com as propriedades de *vizinhança tubular*, temos que Σ_i^r é um difeomorfismo de classe C^{k-1} . (Ver p. 9, cap. 1)

Definiremos a função projeção $\Pi_i(p) = p_i$ de um ponto do conflito em B_i , caracterizada por

$$d(p, A_i) = \langle \Pi_i(p) - p, N_i(\Pi_i(p)) \rangle,$$

observamos que Π_i pode ser definida como a inversa da função Σ_i^r . Temos então que Π_i é uma função de classe C^{k-1} . Podemos também definir a projeção $\Pi_i^r : C \rightarrow B_i^r$, através da seguinte composição $\Pi_i^r = \Sigma_i^r \circ \Pi_i$.

Utilizando-se da função de classe C^{k-1} ,

$$c(p) = d(p, A_2) - d(p, A_1),$$

para definir $C(A_1, A_2)$ como sendo o conjunto de nível *zero*, introduziremos um campo normal a hipersuperfície de conflito na direção do gradiente ∇c , que é dado por

$$\nabla c(p) = N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p)).$$

A hipersuperfície de conflito, portanto, será orientada pela normal N apontando de A_2 para A_1 , dada por:

$$N = |N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))|^{-1} [N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))].$$

Para simplificar a notação escreveremos $\nu(V) = |V|^{-1}V$ para a *normalização* de um vetor não nulo V . Logo

$$N = \nu(N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p)))$$

Para introduzirmos um referencial móvel positivo em C é necessário obter uma base do plano tangente. Um vetor tangente é

$$T_1 = \nu(N_1(\Pi_1(p)) + N_2(\Pi_2(p))).$$

Para completarmos a base do plano tangente precisamos de mais um vetor tangente, pois o terceiro é definido como o produto vetorial dos vetores tangentes já existentes e a normal.

Lema 1 *Seja $W = \{w \in \mathbb{R}^4 / w \in TB_1^r(p) \cap TB_2^r(p)\}$, $r = \text{dist}(p, B_i)$. Então $w \in W$, se e somente se, w é ortogonal a N e T_1 em p .*

Prova. Se $w \in TB_i^r$ então w é ortogonal a N_1 e N_2 . Logo w é ortogonal a N e T_1 . Se w é ortogonal a N e T_1 então temos que $\langle N, w \rangle = \langle T_1, w \rangle = 0$, daí $\langle N_2, w \rangle = \langle N_1, w \rangle = 0$. Como $\Pi_i^r(p) = p$, para $r = \text{dist}(p, B_i)$, e $TB_i^r(p) = \{v \in \mathbb{R}^4 / \langle v, N_i \rangle = 0\}$ o vetor $w \in TB_1^r(p) \cap TB_2^r(p)$. ■

Como queremos um referencial ortonormal o vetor que estamos procurando pertence a W . Suponhamos que a projeção do vetor $DN(T_1)$ sobre o conjunto W seja um vetor não nulo, ou seja, existe um vetor $w \in W$, $w \neq 0$, tal que $DN(T_1) - w$ é ortogonal a todo vetor de W . Denominaremos de T_2 o vetor unitário na direção da projeção w . Assim sendo, tomemos o último vetor da base, que denominaremos por T_3 , como sendo $N \wedge T_1 \wedge T_2$. Logo o referencial móvel será dado por T_1, T_2, T_3, N .

A hipersuperfície de conflito ficará dividida em dois conjuntos importantes a serem distinguidos. O primeiro é quando o campo T_1 não é singular. Neste caso, o conjunto W tem dimensão dois. O segundo caso é quando o campo T_1 é singular. Neste caso, o conjunto W tem dimensão três.

Note que o campo de vetores T_1 é singular nos pontos p do conjunto fechado $M = M(A_1, A_2)$, onde $N_1(\Pi_1(p)) + N_2(\Pi_2(p)) = 0$, que ocorre quando a distância de C para A_i ,

$$r(p) = d(p, A_1) = d(p, A_2),$$

é mínima, assumindo o valor $d_m = \frac{1}{2}d(A_1, A_2)$. A condição de *convexidade estrita* dos B_i nos conjuntos $\Pi_i(M)$, reduz M a um único ponto p_m .

Considerando a *convexidade estrita* de B_i em p_i , implica que DN_i é um automorfismo do espaço tangente TB_i , com a identificação usual do espaço tangente TB_i em p_i com o da esfera unitária, em $N_i(p_i)$. Em termos das *curvaturas principais* $k_1^i \leq k_2^i \leq k_3^i$, que são os autovalores de $-DN_i$, a condição de convexidade estrita e a orientação do campo normal implica que $0 < k_1^i \leq k_2^i \leq k_3^i$. Ver Rodrigues [10], Cap. 3, pag. 30.

As funções simétricas elementares dos autovalores da matriz são as funções que aparecem como coeficientes do polinômio característico de uma matriz. Na próxima seção descreveremos como as funções simétricas elementares dos autovalores da matriz de DN , derivada da normal a superfície de conflito, podem ser escritas em função dos B_i dados. As funções simétricas elementares das hipersuperfícies B_i são obtidas dos autovalores da matriz DN_i e suas expressões são dadas por,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^i &= k_1^i k_2^i k_3^i = \det(-DN_i), \\ \mathcal{H}_1^i &= \frac{1}{2} \left(k_1^i k_2^i + k_1^i k_3^i + k_2^i k_3^i \right), \\ \mathcal{H}^i &= \frac{1}{3} \left(k_1^i + k_2^i + k_3^i \right) = \frac{1}{3} \text{traço}(-DN_i),\end{aligned}$$

onde \mathcal{H}_1^i é a soma dos determinantes dos menores de $-DN_i$ e k_j^i são os autovalores de $-DN_i$.

De acordo com a notação introduzida em Forsyth [3] (pag. 40 seção 281 capítulo XVI) temos que \mathcal{H}^i pode ser chamada por *curvatura linear*, \mathcal{H}_1^i de *curvatura superficial* e \mathcal{K}^i a *curvatura espacial* (ou a *curvatura volumétrica*).

2.3 Funções Simétricas Elementares

Seja $p \in C \setminus M$ tal que suas projeções $p_i = \Pi_i(p)$ nos bordos B_i sejam tais que os autovalores das matrizes DN_i não sejam iguais, ou seja, $k_1^i < k_2^i < k_3^i$. Seja $\{E_1^i, E_2^i, E_3^i, N_i\}$ o referencial móvel positivo principal em B_i , numa vizinhança de p_i . Isto implica que

$$DN_i \cdot E_j^i = -k_j^i E_j^i,$$

onde $k_1^i < k_2^i < k_3^i$, $i = 1, 2$, são as curvaturas principais de B_i .

Sejam R_1 , R_2 e R_3 as seguintes matrizes,

$$R_1(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_2(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$R_3(\varphi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \text{sen}(\varphi) \\ 0 & -\text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Seja H a multiplicação das três matrizes acima e G sua inversa (que é igual a sua transposta), ou seja

$$H(\alpha, \theta, \varphi) := R_1(\alpha) \cdot R_2(\theta) \cdot R_3(\varphi),$$

$$G(\alpha, \theta, \varphi) := H^{-1}(\alpha, \theta, \varphi) = H^T(\alpha, \theta, \varphi).$$

Logo,

$$H = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta & \text{sen} \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \text{sen} \theta \text{sen} \varphi & \text{sen} \alpha \text{sen} \varphi - \cos \alpha \text{sen} \theta \cos \varphi \\ -\text{sen} \alpha \cos \theta & \cos \alpha \cos \varphi - \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \text{sen} \varphi & \cos \alpha \text{sen} \varphi + \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos \varphi \\ \text{sen} \theta & -\cos \theta \text{sen} \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix},$$

e

$$G = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta & -\text{sen} \alpha \cos \theta & \text{sen} \theta \\ \text{sen} \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \text{sen} \theta \text{sen} \varphi & \cos \alpha \cos \varphi - \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \text{sen} \varphi & -\cos \theta \text{sen} \varphi \\ \text{sen} \alpha \text{sen} \varphi - \cos \alpha \text{sen} \theta \cos \varphi & \cos \alpha \text{sen} \varphi + \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Utilizaremos as matrizes acima para relacionar a base $\{E_1^i, E_2^i, E_3^i\}$ e a base $\{F_1^i = \nu(D\Pi_i(p).T_1), F_2^i = \nu(D\Pi_i(p).T_2), F_3^i = \nu(D\Pi_i(p).T_3)\}$, dos espaços tangentes a B_i . Isso é feito através da matriz H , onde os ângulos envolvidos, também chamados de ângulos de Euler, são aqueles que através das matrizes do grupo de rotação R_1 , R_2 e R_3 levam uma base na outra, da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} F_1^i \\ F_2^i \\ F_3^i \end{pmatrix} = H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot \begin{pmatrix} E_1^i \\ E_2^i \\ E_3^i \end{pmatrix}$$

Como os vetores F_j^i são definidos em função dos T_i , isso nos permitirá associar o hiperplano tangente da hipersuperfície de conflito e o hiperplano tangente a B_i . É através desta associação que conseguiremos obter a matriz de DN do conflito em função dos dados das hipersuperfícies B_i .

Definamos as seguintes relações

$$\begin{aligned} k_{n_1}^i &= k_{n_1}^i(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) = k_{n_1}^i(F_1^i) = -\langle DN_i(F_1^i), F_1^i \rangle \\ &= k_1^i \cos^2(\alpha_i) \cos^2(\theta_i) + k_2^i [\sin(\alpha_i) \cos(\varphi_i) + \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)]^2 \\ &\quad + k_3^i [\sin(\alpha_i) \sin(\varphi_i) - \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)]^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} k_{n_2}^i &= k_{n_2}^i(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) = k_{n_2}^i(F_2^i) = -\langle DN_i(F_2^i), F_2^i \rangle \\ &= k_1^i \sin^2(\alpha_i) \cos^2(\theta_i) + k_2^i [\cos(\alpha_i) \cos(\varphi_i) - \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)]^2 \\ &\quad + k_3^i [\cos(\alpha_i) \sin(\varphi_i) + \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)]^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} k_{n_3}^i &= k_{n_3}^i(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) = k_{n_3}^i(F_3^i) = -\langle DN_i(F_3^i), F_3^i \rangle \\ &= k_1^i \sin^2(\theta_i) + k_2^i \cos^2(\theta_i) \sin^2(\varphi_i) + k_3^i \cos^2(\theta_i) \cos^2(\varphi_i) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{12}^i &= \tau_{12}^i(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) = \tau_{12}^i(F_1^i) = -\langle DN_i(F_1^i), F_2^i \rangle \\ &= -k_1^i \cos(\alpha_i) \cos^2(\theta_i) \sin(\alpha_i) + k_2^i [\sin(\alpha_i) \cos(\varphi_i) + \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)] \\ &\quad [\cos(\alpha_i) \cos(\varphi_i) - \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)] + k_3^i [\sin(\alpha_i) \sin(\varphi_i) \\ &\quad - \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)] [\cos(\alpha_i) \sin(\varphi_i) + \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \tau_{13}^i &= \tau_{13}^i(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) = \tau_{13}^i(F_1^i) = -\langle DN_i(F_1^i), F_3^i \rangle \\ &= k_1^i \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) \sin(\theta_i) - k_2^i \cos(\theta_i) \sin(\varphi_i) [\sin(\alpha_i) \cos(\varphi_i) \\ &\quad + \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)] + k_3^i \cos(\theta_i) \cos(\varphi_i) [\sin(\alpha_i) \sin(\varphi_i) \\ &\quad - \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \tau_{23}^i &= \tau_{23}^i(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) = \tau_{23}^i(F_2^i) = -\langle DN_i(F_2^i), F_3^i \rangle \\ &= -k_1^i \cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) - k_2^i \cos(\theta_i) \sin(\varphi_i) [\cos(\alpha_i) \cos(\varphi_i) \\ &\quad - \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)] + k_3^i \cos(\theta_i) \cos(\varphi_i) [\cos(\alpha_i) \sin(\varphi_i) \\ &\quad + \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Lema 2 Seja I_k a matriz diagonal 3×3 , na qual, os $a_{jj} = -k_j^i$. Então a matriz $H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot I_k \cdot G(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -k_{n_1}^i & -\tau_{12}^i & -\tau_{13}^i \\ -\tau_{12}^i & -k_{n_2}^i & -\tau_{23}^i \\ -\tau_{13}^i & -\tau_{23}^i & -k_{n_3}^i \end{pmatrix}.$$

Prova. Fazendo a multiplicação $I_k.G(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i)$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} -k_1^i \cos \alpha \cos \theta & k_1^i \operatorname{sen} \alpha \cos \theta & -k_1^i \operatorname{sen} \theta \\ -k_2^i (\operatorname{sen} \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) & -k_2^i (\cos \alpha \cos \varphi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) & k_2^i \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \\ -k_3^i (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi - \cos \alpha \operatorname{sen} \theta \cos \varphi) & -k_3^i (\cos \alpha \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos \varphi) & -k_3^i \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Daí temos que os elementos (a_{1j}) da matriz $H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i).I_k.G(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i)$ são dados por:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -k_1^i \cos^2(\alpha_i) \cos^2(\theta_i) - k_2^i [\operatorname{sen}(\alpha_i) \cos(\varphi_i) - \cos(\alpha_i) \operatorname{sen}(\theta_i) \operatorname{sen}(\varphi_i)]^2 \\ &\quad - k_3^i [\operatorname{sen}(\alpha_i) \operatorname{sen}(\varphi_i) - \cos(\alpha_i) \operatorname{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)]^2, \\ a_{12} &= k_1^i \cos(\alpha_i) \cos^2(\theta_i) \operatorname{sen}(\alpha_i) - k_2^i [\operatorname{sen}(\alpha_i) \cos(\varphi_i) + \cos(\alpha_i) \operatorname{sen}(\theta_i) \operatorname{sen}(\varphi_i)] \\ &\quad [\cos(\alpha_i) \cos(\varphi_i) - \operatorname{sen}(\alpha_i) \operatorname{sen}(\theta_i) \operatorname{sen}(\varphi_i)] - k_3^i [\operatorname{sen}(\alpha_i) \operatorname{sen}(\varphi_i) \\ &\quad - \cos(\alpha_i) \operatorname{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)] [\cos(\alpha_i) \operatorname{sen}(\varphi_i) + \operatorname{sen}(\alpha_i) \operatorname{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)], \\ a_{13} &= -k_1^i \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) \operatorname{sen}(\theta_i) + k_2^i \cos(\theta_i) \operatorname{sen}(\varphi_i) [\operatorname{sen}(\alpha_i) \cos(\varphi_i) \\ &\quad + \cos(\alpha_i) \operatorname{sen}(\theta_i) \operatorname{sen}(\varphi_i)] - k_3^i \cos(\theta_i) \cos(\varphi_i) [\operatorname{sen}(\alpha_i) \operatorname{sen}(\varphi_i) \\ &\quad - \cos(\alpha_i) \operatorname{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)]. \end{aligned}$$

Analogamente pode-se verificar que $a_{2j} = \langle DN_i(F_j^i), F_2^i \rangle$ e que $a_{3j} = \langle DN_i(F_j^i), F_3^i \rangle$, ou seja,

$$H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i).I_k.G(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) = \begin{pmatrix} \langle DN_i(F_1^i), F_1^i \rangle & \langle DN_i(F_1^i), F_2^i \rangle & \langle DN_i(F_1^i), F_3^i \rangle \\ \langle DN_i(F_2^i), F_1^i \rangle & \langle DN_i(F_2^i), F_2^i \rangle & \langle DN_i(F_2^i), F_3^i \rangle \\ \langle DN_i(F_3^i), F_1^i \rangle & \langle DN_i(F_3^i), F_2^i \rangle & \langle DN_i(F_3^i), F_3^i \rangle \end{pmatrix}.$$

De (2.1) - (2.6) temos o que queríamos. ■

As propriedades abaixo relacionadas são obtidas através de demonstrações análogas às feitas para o \mathbb{R}^3 . Portanto, optamos por apenas mencioná-las.

Denotemos por ϕ o ângulo entre N_i e T_1 . Então

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{1}{2} |N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))| = \langle F_1^1, T_1 \rangle = \langle F_1^2, T_1 \rangle. \quad (2.7)$$

A base $\{T_1, T_2, T_3\}$ em $C \setminus M$ é projetada ao longo da derivada de Π_i na base ortonormal $\{F_1^i, F_2^i, F_3^i\}$ em B_i . Os vetores $\{F_1^i, F_2^i, F_3^i\}$, $i = 1, 2$, podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{F_1^1 &= \nu(N_2 - \langle N_1, N_2 \rangle N_1), F_2^1 = T_2, F_3^1 = T_3\}, \\ \{F_1^2 &= \nu(-N_1 - \langle N_1, N_2 \rangle N_2), F_2^2 = T_2, F_3^2 = T_3\}. \end{aligned}$$

Observe que T_2 e T_3 pertencem a W , logo ao fazermos $D\Pi_i(p).T_2$ e $D\Pi_i(p).T_3$ não haverá alteração nas direções. Por isso temos a igualdade acima $F_2^i = T_2$ e $F_3^i = T_3$.

Além do mais,

$$D\Pi_i^r(T_1) = \text{sen}\phi F_1^i \quad D\Pi_i^r(T_2) = F_2^i \quad D\Pi_i^r(T_3) = F_3^i \quad (2.8)$$

Os referenciais principais $\{E_1^i, E_2^i, E_3^i, N_i\}$ em B_i são transladados ao longo da normal para os referenciais principais em B_i^r . Isso segue do fato que Σ_i^r preserva os campos de direções principais. As curvaturas principais sofrem mudanças para $k_j^i(r) = \frac{k_j^i}{1-rk_j^i}$. Ver Hicks [6], pag. 36 seção 2.6.

As expressões para $k_{n_1}^i, k_{n_2}^i, k_{n_3}^i, \tau_{12}^i, \tau_{13}^i$ e τ_{23}^i , definidas de (2.1) à (2.6), são dadas em termos das curvaturas principais de B_i , podendo ser obviamente modificadas para valerem em B_i^r e denotaremos respectivamente por $k_{n_1}^i(r), k_{n_2}^i(r), k_{n_3}^i(r), \tau_{12}^i(r), \tau_{13}^i(r)$ e $\tau_{23}^i(r)$. Portanto, trocando k_j^i por $k_j^i(r)$ nas equações de (2.1) - (2.6), temos:

$$k_{n_1}^i(r) = k_1^i(r) \cos^2(\alpha_i) \cos^2(\theta_i) + k_2^i(r) [\text{sen}(\alpha_i) \cos(\varphi_i) + \cos(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\varphi_i)]^2 + k_3^i(r) [\text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\varphi_i) - \cos(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)]^2 \quad (2.9)$$

$$k_{n_2}^i(r) = k_1^i(r) \text{sen}^2(\alpha_i) \cos^2(\theta_i) + k_2^i(r) [\cos(\alpha_i) \cos(\varphi_i) - \text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\varphi_i)]^2 + k_3^i(r) [\cos(\alpha_i) \text{sen}(\varphi_i) + \text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)]^2 \quad (2.10)$$

$$k_{n_3}^i(r) = k_1^i(r) \text{sen}^2(\theta_i) + k_2^i(r) \cos^2(\theta_i) \text{sen}^2(\varphi_i) + k_3^i(r) \cos^2(\theta_i) \cos^2(\varphi_i) \quad (2.11)$$

$$\tau_{12}^i(r) = -k_1^i(r) \cos(\alpha_i) \cos^2(\theta_i) \text{sen}(\alpha_i) + k_2^i(r) [\text{sen}(\alpha_i) \cos(\varphi_i) + \cos(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\varphi_i)] [\cos(\alpha_i) \cos(\varphi_i) - \text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\varphi_i)] + k_3^i(r) [\text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\varphi_i) - \cos(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)] [\cos(\alpha_i) \text{sen}(\varphi_i) + \text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)] \quad (2.12)$$

$$\tau_{13}^i(r) = k_1^i(r) \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) \text{sen}(\theta_i) - k_2^i(r) \cos(\theta_i) \text{sen}(\varphi_i) [\text{sen}(\alpha_i) \cos(\varphi_i) + \cos(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\varphi_i)] + k_3^i(r) \cos(\theta_i) \cos(\varphi_i) [\text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\varphi_i) - \cos(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)] \quad (2.13)$$

$$\tau_{23}^i(r) = -k_1^i(r) \cos(\theta_i) \text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) - k_2^i(r) \cos(\theta_i) \text{sen}(\varphi_i) [\cos(\alpha_i) \cos(\varphi_i) - \text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\varphi_i)] + k_3^i(r) \cos(\theta_i) \cos(\varphi_i) [\cos(\alpha_i) \text{sen}(\varphi_i) + \text{sen}(\alpha_i) \text{sen}(\theta_i) \cos(\varphi_i)] \quad (2.14)$$

A seguir encontraremos uma expressão para a derivada da normal, DN , da hipersuperfície de conflito em função dos dados geométricos das hipersuperfícies B_i .

Proposição 2 *Com a notação acima, nos pontos de $C \setminus M$, temos*

$$DN.T_1 = \frac{\text{sen}\phi}{2}[k_{n_1}^2(r) - k_{n_1}^1(r)]T_1 + \frac{1}{2}[\tau_{12}^2(r) - \tau_{12}^1(r)]T_2 + \frac{1}{2}[\tau_{13}^2(r) - \tau_{13}^1(r)]T_3,$$

$$DN.T_2 = \frac{1}{2}[\tau_{12}^2(r) - \tau_{12}^1(r)]T_1 + \frac{1}{2\text{sen}\phi}[k_{n_2}^2(r) - k_{n_2}^1(r)]T_2 + \frac{1}{2\text{sen}\phi}[\tau_{23}^2(r) - \tau_{23}^1(r)]T_3,$$

$$DN.T_3 = \frac{1}{2}[\tau_{13}^2(r) - \tau_{13}^1(r)]T_1 + \frac{1}{2\text{sen}\phi}[\tau_{23}^2(r) - \tau_{23}^1(r)]T_2 + \frac{1}{2\text{sen}\phi}[k_{n_3}^2(r) - k_{n_3}^1(r)]T_3.$$

Prova. A conclusão segue dos cálculos dos produtos internos em

$$DN(T_1) = \langle DN(T_1), T_1 \rangle T_1 + \langle DN(T_1), T_2 \rangle T_2 + \langle DN(T_1), T_3 \rangle T_3, \quad (2.15)$$

$$DN(T_2) = \langle DN(T_2), T_1 \rangle T_1 + \langle DN(T_2), T_2 \rangle T_2 + \langle DN(T_2), T_3 \rangle T_3. \quad (2.16)$$

$$DN(T_3) = \langle DN(T_3), T_1 \rangle T_1 + \langle DN(T_3), T_2 \rangle T_2 + \langle DN(T_3), T_3 \rangle T_3. \quad (2.17)$$

Diferenciando N , obtemos:

$$DN = \frac{DN_1.D\Pi_1^r - DN_2.D\Pi_2^r}{2\text{sen}\phi} + \frac{1}{2}D[(\text{sen}\phi)^{-1}].[N_1(\Pi_1(p)) - N_2(\Pi_2(p))]. \quad (2.18)$$

A contribuição do segundo termo nos produtos internos de (2.15), (2.16) e (2.17) é nula. Logo, consideraremos somente o primeiro termo de DN .

Lembrando que as bases E_j^i e F_j^i são relacionadas por

$$\begin{pmatrix} F_1^i \\ F_2^i \\ F_3^i \end{pmatrix} = H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot \begin{pmatrix} E_1^i \\ E_2^i \\ E_3^i \end{pmatrix}.$$

Calculemos agora $DN_i D\Pi_i^r$ nas direções T_1 , T_2 e T_3 , para sabermos o valor de DN nestas direções. De (2.8), obtemos

$$\begin{pmatrix} DN_i.D\Pi_i^r(T_1) \\ DN_i.D\Pi_i^r(T_2) \\ DN_i.D\Pi_i^r(T_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DN_i(\text{sen}\phi F_1^i) \\ DN_i(F_2^i) \\ DN_i(F_3^i) \end{pmatrix} = I_\phi \cdot \begin{pmatrix} DN_i(F_1^i) \\ DN_i(F_2^i) \\ DN_i(F_3^i) \end{pmatrix},$$

onde I_ϕ é a matriz diagonal 3×3 , na qual, o $a_{11} = \text{sen}\phi$ e $a_{22} = a_{33} = 1$. Denotando por h_{ij} os elementos da matriz $H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i)$, temos:

$$= I_\phi \cdot \begin{pmatrix} DN_i(h_{11}E_1^i + h_{12}E_2^i + h_{13}E_3^i) \\ DN_i(h_{21}E_1^i + h_{22}E_2^i + h_{23}E_3^i) \\ DN_i(h_{31}E_1^i + h_{32}E_2^i + h_{33}E_3^i) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= I_\phi \cdot \begin{pmatrix} h_{11}DN_i(E_1^i) + h_{12}DN_i(E_2^i) + h_{13}DN_i(E_3^i) \\ h_{21}DN_i(E_1^i) + h_{22}DN_i(E_2^i) + h_{23}DN_i(E_3^i) \\ h_{31}DN_i(E_1^i) + h_{32}DN_i(E_2^i) + h_{33}DN_i(E_3^i) \end{pmatrix} \\
&= I_\phi \cdot H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot \begin{pmatrix} DN_i(E_1^i) \\ DN_i(E_2^i) \\ DN_i(E_3^i) \end{pmatrix} = I_\phi \cdot H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot \begin{pmatrix} -k_1^i(r)E_1^i \\ -k_2^i(r)E_2^i \\ -k_3^i(r)E_3^i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Denotando por I_k^r a matriz diagonal 3×3 , na qual, os $a_{jj} = -k_j^i(r)$, temos

$$= I_\phi \cdot H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot I_k^r \cdot \begin{pmatrix} E_1^i \\ E_2^i \\ E_3^i \end{pmatrix} = I_\phi \cdot H(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot I_k^r \cdot G(\alpha_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot \begin{pmatrix} F_1^i \\ F_2^i \\ F_3^i \end{pmatrix}$$

Do Lema 2 e de (2.9)-(2.14), obtemos

$$= I_\phi \cdot \begin{pmatrix} -k_{n_1}^i(r) & -\tau_{12}^i(r) & -\tau_{13}^i(r) \\ -\tau_{12}^i(r) & -k_{n_2}^i(r) & -\tau_{23}^i(r) \\ -\tau_{13}^i(r) & -\tau_{23}^i(r) & -k_{n_3}^i(r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1^i \\ F_2^i \\ F_3^i \end{pmatrix}$$

Daí, temos que:

$$\begin{pmatrix} DN_i \cdot D\Pi_i^r(T_1) \\ DN_i \cdot D\Pi_i^r(T_2) \\ DN_i \cdot D\Pi_i^r(T_3) \end{pmatrix} = I_\phi \cdot \begin{pmatrix} -k_{n_1}^i(r)F_1^i - \tau_{12}^i(r)F_2^i - \tau_{13}^i(r)F_3^i \\ -\tau_{12}^i(r)F_1^i - k_{n_2}^i(r)F_2^i - \tau_{23}^i(r)F_3^i \\ -\tau_{13}^i(r)F_1^i - \tau_{23}^i(r)F_2^i - k_{n_3}^i(r)F_3^i \end{pmatrix}$$

Denotando por $HIG(i)$ a última matriz acima, temos

$$\begin{pmatrix} DN_i \cdot D\Pi_i^r(T_1) \\ DN_i \cdot D\Pi_i^r(T_2) \\ DN_i \cdot D\Pi_i^r(T_3) \end{pmatrix} = I_\phi \cdot HIG(i)$$

Considerando somente o primeiro termo de (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} DN(T_1) \\ DN(T_2) \\ DN(T_3) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \phi} \left[\begin{pmatrix} DN_1 \cdot D\Pi_1^r(T_1) \\ DN_1 \cdot D\Pi_1^r(T_2) \\ DN_1 \cdot D\Pi_1^r(T_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} DN_2 \cdot D\Pi_2^r(T_1) \\ DN_2 \cdot D\Pi_2^r(T_2) \\ DN_2 \cdot D\Pi_2^r(T_3) \end{pmatrix} \right] + \dots \\
&= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \phi} \cdot I_\phi \cdot (HIG(1) - HIG(2)) + \dots
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} DN(T_1) \\ DN(T_2) \\ DN(T_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \phi} \cdot U + \dots ,$$

onde U é dada por

$$U = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \phi \{ [k_{n_1}^2(r)F_1^2 - k_{n_1}^1(r)F_1^1] + [\tau_{12}^2(r)F_2^2 - \tau_{12}^1(r)F_2^1] + [\tau_{13}^2(r)F_3^2 - \tau_{13}^1(r)F_3^1] \} \\ [\tau_{12}^2(r)F_1^2 - \tau_{12}^1(r)F_1^1] + [k_{n_2}^2(r)F_2^2 - k_{n_2}^1(r)F_2^1] + [\tau_{23}^2(r)F_3^2 - \tau_{23}^1(r)F_3^1] \\ [\tau_{13}^2(r)F_1^1 - \tau_{13}^1(r)F_1^2] + [\tau_{23}^2(r)F_2^2 - \tau_{23}^1(r)F_2^1] + [k_{n_3}^2(r)F_3^2 - k_{n_3}^1(r)F_3^1] \end{pmatrix}$$

Fazendo os produtos internos de (2.15) e utilizando (2.7), temos,

$$\begin{aligned} \langle DN(T_1), T_1 \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \{ [k_{n_1}^2(r)F_1^2 - k_{n_1}^1(r)F_1^1] + [\tau_{12}^2(r)F_2^2 - \tau_{12}^1(r)F_2^1] + [\tau_{13}^2(r)F_3^2 - \tau_{13}^1(r)F_3^1] \}, T_1 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ k_{n_1}^2(r) \langle F_1^2, T_1 \rangle - k_{n_1}^1(r) \langle F_1^1, T_1 \rangle \} = \frac{\operatorname{sen} \phi}{2} [k_{n_1}^2(r) - k_{n_1}^1(r)] \\ \langle DN(T_1), T_2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \{ [k_{n_1}^2(r)F_1^2 - k_{n_1}^1(r)F_1^1] + [\tau_{12}^2(r)F_2^2 - \tau_{12}^1(r)F_2^1] + [\tau_{13}^2(r)F_3^2 - \tau_{13}^1(r)F_3^1] \}, T_2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ \tau_{12}^2(r) \langle F_2^2, T_2 \rangle - \tau_{12}^1(r) \langle F_2^1, T_2 \rangle \} = \frac{1}{2} [\tau_{12}^2(r) - \tau_{12}^1(r)] \\ \langle DN(T_1), T_3 \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \{ [k_{n_1}^2(r)F_1^2 - k_{n_1}^1(r)F_1^1] + [\tau_{12}^2(r)F_2^2 - \tau_{12}^1(r)F_2^1] + [\tau_{13}^2(r)F_3^2 - \tau_{13}^1(r)F_3^1] \}, T_3 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ \tau_{13}^2(r) \langle F_3^2, T_3 \rangle - \tau_{13}^1(r) \langle F_3^1, T_3 \rangle \} = \frac{1}{2} [\tau_{13}^2(r) - \tau_{13}^1(r)] \end{aligned}$$

Analogamente obtemos os produtos internos de (2.16) e (2.17). ■

De posse da matriz DN , podemos obter as expressões para as funções simétricas elementares das curvaturas principais, que são as curvaturas volumétrica, superficial e linear. Para tal faremos uso da seguinte notação para os elementos da diagonal de DN :

$$\begin{aligned} k_{n_1} &= \frac{\operatorname{sen} \phi}{2} [k_{n_1}^2(r) - k_{n_1}^1(r)], \\ k_{n_2} &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \phi} [k_{n_2}^2(r) - k_{n_2}^1(r)] \text{ e} \\ k_{n_3} &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \phi} [k_{n_3}^2(r) - k_{n_3}^1(r)]. \end{aligned}$$

Para os outros termos usaremos:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \frac{1}{2} [\tau_{12}^2(r) - \tau_{12}^1(r)], \\ \tau_{13} &= \frac{1}{2} [\tau_{13}^2(r) - \tau_{13}^1(r)] \text{ e} \\ \tau_{23} &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \phi} [\tau_{23}^2(r) - \tau_{23}^1(r)]. \end{aligned}$$

Então temos que a *curvatura volumétrica* é dada por:

$$\mathcal{K} = \det(-DN) = -[k_{n_1}k_{n_2}k_{n_3} + 2\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23} - k_{n_1}(\tau_{23})^2 - k_{n_2}(\tau_{13})^2 - k_{n_3}(\tau_{12})^2].$$

A *curvatura linear* é dada por:

$$\mathcal{H} = \text{traço}(-DN) = -\frac{1}{3}(k_{n_1} + k_{n_2} + k_{n_3}).$$

A *curvatura superficial* é dada por:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\{[k_{n_1}k_{n_2} - (\tau_{12})^2] + [k_{n_1}k_{n_3} - (\tau_{13})^2] + [k_{n_2}k_{n_3} - (\tau_{23})^2]\}.$$

Deixamos para estudos futuros expressar as funções simétricas elementares em função das funções simétricas elementares das hipersuperfícies B_i . Além disso, gostaríamos de encontrar uma lei de formação para estas funções quando a dimensão for aumentando, tendo como modelo e ponto de partida o caso das curvas no plano e superfícies no \mathbb{R}^3 , apresentado no capítulo 1. Um aprimoramento pertinente consiste em reduzir o número de ângulos nas expressões acima para o número de 6.

Referências Bibliográficas

- [1] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, (1976).
- [2] G. Darboux, *Sur la forme des lignes de courbure dans la voisinage d'un ombilic*, Lecons sur la Theorie des Surfaces, IV, Note 7, Gauthier Villars, Paris, (1896).
- [3] A. R. Forsyth, *Geometry of Four Dimensions*, vols. I e II, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1930).
- [4] R. Garcia, J.Sotomayor, *Lectures on the Qualitative Theory of Differential Equations of Classical Geometry*, pré-publicação UFG.
- [5] A. Gray, *Modern Differential Geometry de Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, 2 edição, (1997).
- [6] N. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, McGraw-Hill, (1963).
- [7] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, *Spatial Tesselations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, Wiley Ser. Probab. Math. Statist. Appl. Probab. Statist., Wiley, Chichester, (1992).
- [8] B. O'Neil, *Elementary Differential Geometry*, Ac. Press, (1966).
- [9] I. R. Porteous. *Geometric Differentiation for the Intelligence of Curves and Surfaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1994).
- [10] L. Rodríguez, *Geometria das Subvariedades*, Monografias de Matemática, 26, IMPA, (1976).
- [11] D. Siersma, *Properties of conflict sets in the plano*, Caustics 98, Banach Center Publications, vol. 50, Polish Acad. Sciences, Warszawa, (1999).
- [12] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, CNPq, (1979).

- [13] J. Sotomayor, R. Garcia, D. Siersma, *Curvatures of Conflict Surfaces in Euclidean 3-Space*, Caustics 98, Banach Center Publications, vol. 50, Polish Acad. Sciences, Warszawa, (1999).
- [14] J. Sotomayor, C. Gutierrez, *Lines of Curvature, Umbilic Points and Carathéodory Conjecture*, Resenhas IME-USP, 3:291-322, (1998).
- [15] J. Sotomayor, C. Gutiérrez, *Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces*, Colóquio Bras. de Mat. IMPA, (1991).
- [16] J. Sotomayor, C. Gutiérrez, *Structurally stable configurations of lines of principal curvature*, Astérisque 98-99, (1982), 195-215.
- [17] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vols. I e III, Publish or Perish, Wilmington, (1979).
- [18] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison Wesley, 1950, Reprinted by Dover, New York, (1988).