

USP – Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

**Seções globais em níveis de energia
estritamente convexos
com equilíbrios do tipo sela-centro
para sistemas Hamiltonianos
com dois graus de liberdade**

Pedro Antonio Santoro Salomão¹

Tese apresentada ao Instituto de
Matemática e Estatística da USP para
a obtenção do grau de doutor em
Matemática Aplicada sob orientação de
Clodoaldo Grotta Ragazzo

São Paulo
2002

¹ Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da FAPESP

Seções globais em níveis de energia estritamente convexos com equilíbrios do tipo sela-centro para sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade

Este exemplar corresponde à redação final devidamente corrigida e definida por Pedro Antonio Santoro Salomão e aprovada pela comissão julgadora

*São Paulo
2002*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo – IME – USP

Prof. Dr. Daniel Victor Tausk – IME – USP

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira – UNICAMP

Prof. Dr. Marcus Aguiar – UNICAMP

Prof. Dr. Leonardo Magalhães Macarini - IMPA

Ficha Catalográfica

Salomão, Pedro Antonio Santoro Salomão

Seções globais em níveis de energia estritamente convexos com equilíbrios do tipo sela-centro para sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade./ Pedro Antonio Santoro Salomão - - São Paulo, 2002.

79p.

Tese (doutorado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

1. Sistemas Hamiltonianos. 2. Níveis de energia estritamente convexos. 3. Índice de Conley-Zehnder. 4. Equilíbrios do tipo sela-centro. 5. Seções globais. I. Título.

Ao meu querido avô
Rodolpho Santoro
(in memoriam)

Agradecimentos

À toda minha família, principalmente aos meus pais Roberto e Maria Eugênia, à minha avó Lina, à minha irmã Nanda e irmãos Paulo e João, pela paciência durante esse período de dedicação intensa ao trabalho.

Ao professor e amigo Clodoaldo Grotta Ragazzo, que dedicou boa parte de seu tempo para me ajudar a elaborar esse trabalho, contribuindo com grande parte das idéias que foram cruciais para alcançar o objetivo principal da tese, me transmitindo sua ampla experiência como pesquisador e dando estímulos nos momentos mais difíceis.

Ao amigo Salvador Addas Zanata por me incentivar a estudar matemática desde os tempos de faculdade.

Aos professores do IME com quem cursei disciplinas essenciais para o meu aprendizado: Prof^a Elza Gomide, Prof^a Helena M. A. de Castro, Prof. Jorge Manuel Sotomayor Tello, Prof. Oscar F. V. Erazo, Prof^a Mary Lilian Lourenço, Prof^a Rosa Maria dos S. B. Chaves, Prof^a Élvia M. Sallum, Prof^a Iracema M. Bund, Prof. Luiz Antonio Peresi, Prof. Luiz Fichman, Prof. Albert M. Fisher, Prof Edson de Faria e Prof. Sérgio M. Oliva.

Aos amigos do IME, do Colégio Dante Alighieri e da Escola Politécnica.

Ao Professor Daniel V. Tausk, por participar da banca examinadora e me ajudar a entender o conceito de índice de Conley-Zehnder.

Ao Professor Helmut Hofer, que deu boas dicas sobre a caracterização e comportamento da dinâmica em hipersuperfícies convexas.

Aos Professores Leonardo M. Macarini, Marco Antonio Teixeira e Marcus Aguiar, por terem participado da banca examinadora e dado boas sugestões para melhorar a tese e idéias para a continuidade da pesquisa.

Abstract

We study the existence of global surfaces of section in non-regular level sets for Hamiltonian systems of two degrees of freedom. We assume that these level sets are strictly convex and its non-regularity is caused by the existence of a saddle-center equilibrium. To make use of an important result of H. Hofer, E. Zehnder and K. Wysocki about the existence of global surfaces of section in regular level sets, we use a hypersurface regularization theorem of M. Ghomi. Properties of Conley-Zehnder index and Moser's normal form of saddle-center equilibria are crucial for the localization of the periodic orbit which is the border of global surfaces of section. A technical hypothesis is necessary to guarantee the existence of a global surface of section in the non-regular case. We present a fast calculation method of the Conley-Zehnder index which can be used numerically. We also verify the convexity hypothesis for Hamiltonian systems extensively studied in dynamical systems literature.

Resumo

Estudamos a existência de seções globais em níveis de energia não regulares para sistema Hamiltonianos com dois graus de liberdade. Assumimos que esses níveis de energia são estritamente convexos e perdem a regularidade devido à existência de um equilíbrio do tipo sela-centro. Para utilizarmos um importante resultado de H. Hofer, E. Zehnder e K. Wysocki sobre existência de seções globais em níveis de energia regulares, usamos uma regularização de hipersuperfícies devida a M. Ghomi. Propriedades do índice de Conley-Zehnder e uma forma normal de equilíbrios sela-centro devida a J. Moser, desempenham um importante papel para a localização da órbita periódica que é bordo de seções globais. Uma hipótese técnica é necessária para garantirmos a existência de uma seção global no caso não-regular. Apresentamos um método rápido para o cálculo do índice de Conley-Zehnder que pode ser usado numericamente. Verificamos também a hipótese de convexidade em sistemas Hamiltonianos muito estudados na literatura de sistemas dinâmicos.

Índice

Capítulo 1	1
Introdução.....	1
Capítulo 2 - Hipersuperfícies Regulares em \mathbb{R}^4	5
2.1. Geometria Diferencial elementar em \mathbb{R}^4	5
2.2. Conjuntos convexos em \mathbb{R}^4	7
2.3 Regularização de Hipersuperfícies em \mathbb{R}^4	9
Capítulo 3 - Pontos de equilíbrio do tipo sela-centro	15
3.1. Perturbações de um Sistema Integrável.....	18
3.2. Órbitas Homoclínicas à variedade central de um sela-centro.....	19
Capítulo 4 - O Índice de Conley-Zehnder	22
4.1. Uma Trivialização natural de fibrados lineares sobre uma Hipersuperfície.....	22
4.2. Definição do índice de Conley-Zehnder generalizado de órbitas periódicas.....	26
4.3. Equivalência do Fluxo Hamiltoniano em Hipersuperfícies Regulares.....	29
4.4. Conjuntos invariantes em hipersuperfícies de \mathbb{R}^4	33
Capítulo 5 - Estimativa do índice de Conley-Zehnder para órbitas per- iódicas que passam nas proximidades de um sela-centro	36
Capítulo 6 - Seções Globais	44
6.1. Nível de energia do sela-centro.....	44
6.2. Níveis de energia acima do sela-centro.....	52

Capítulo 7 - Exemplos e Aplicações.....	57
7.1. Formas Quadráticas Positiva-definidas.....	57
7.2. Hamiltonianos da forma $\frac{p_x^2+p_y^2}{2}+V(x,y)$	58
<hr/>	
7.3. O Hamiltoniano Henon-Heilles.....	61
7.4. Um exemplo integrável.....	65
Capítulo 8 - Hipersuperfícies de Contato em \mathbb{R}^4	67
8.1. Curvas Pseudo-Holomorfas.....	70
8.2. Um sistema de coordenadas importante e a hipótese (H1).....	73
Bibliografia.....	77

Capítulo 1

Introdução

Um dos problemas clássicos sobre sistemas Hamiltonianos¹ é a existência de órbitas periódicas em determinados níveis de energia. Sabe-se que hipersuperfícies regulares do tipo *star-shape*² sempre apresentam órbitas periódicas (Ver [Rab]). Conseqüentemente, níveis de energia estritamente convexos também possuem órbitas periódicas. Mais ainda, possuem seções globais para o fluxo. Tais seções globais são discos mergulhados cujo bordo é uma órbita periódica com propriedades muito particulares (Ver [HZW]). A existência de seções globais simplifica muito o estudo da dinâmica em tais níveis de energia, pois reduzimos este ao estudo de difeomorfismos em espaços de dimensão menor.

O objetivo principal deste trabalho é estudar a existência de seções globais em níveis de energia estritamente convexos que apresentam um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro. Pretendemos estender um resultado de Hofer, Zehnder e Wysocki ([HZW]), dando critérios para existência de seções globais.

Mais precisamente, em [HZW], temos o seguinte

Teorema A. Se $S \subset \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície C^2 , difeomorfa a S^3 e estritamente convexa, então o fluxo Hamiltoniano associado a S possui uma órbita periódica que é bordo de uma seção global em S .

A perda da regularidade de um nível de energia devido à existência de um equilíbrio sela-

¹Consideramos neste trabalho apenas sistemas Hamiltonianos em \mathbb{R}^4

²Um hipersuperfície $S \subset \mathbb{R}^4$, compacta e difeomorfa a S^3 é do tipo *star-shape* (estrelada) se existir um ponto p pelo qual toda semi-reta que começa em p intersecta S em exatamente 1 ponto.

centro impede o uso do Teorema de Hofer-Zehnder-Wysocki. Com uma hipótese técnica adicional (H1), definida em (6.4), provamos o seguinte

Teorema B. Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real-analítica. Seja $S \subset H^{-1}(0)$ uma hipersuperfície estritamente convexa, homeomorfa a S^3 , regular em todo ponto exceto em $p_c \in S$, que corresponde a um equilíbrio do tipo sela-centro. Suponhamos que vale a hipótese (H1). Então o fluxo Hamiltoniano associado à função H possui uma órbita periódica em S que é bordo de uma seção global em S .

É muito comum estudarmos os níveis de energia próximos ao do sela-centro. Um corolário importante da existência de seções globais é a existência de uma infinidade de órbitas periódicas e de órbitas homoclínicas à variedade central do sela-centro. Para isso, utilizamos técnicas semelhantes às usadas em [BGS].

A estratégia para a demonstração desse resultado é apresentada a seguir:

O nível de energia que contém o sela-centro pode ser regularizado numa vizinhança arbitrariamente pequena do equilíbrio utilizando um resultado de M. Ghomi ([Gho]). Para isso, algumas hipóteses sobre a convexidade do nível de energia devem ser verificadas.

Feita a regularização, sabemos que a nova hipersuperfície regularizada possui seção global em forma de disco. Surgem então 2 perguntas:

- (i) A órbita periódica que é o bordo dessa seção global passa longe da região onde foi feita a regularização?
- (ii) Se (i) for verdadeira, o disco mergulhado que representa a seção global intersecta a região onde foi feita a regularização?

Responderemos a primeira pergunta afirmativamente e daremos um critério para uma resposta afirmativa da segunda pergunta. Neste caso, podemos provar a existência de seções globais para o caso da hipersuperfície com o sela-centro.

A estrutura do trabalho foi organizada da seguinte forma:

Inicialmente, apresentaremos algumas definições elementares de hipersuperfícies regulares em \mathbb{R}^4 e alguns conceitos de geometria diferencial como aplicação normal de Gauss, aplicação de Weingarten e curvatura seccional.

Caracterizaremos conjuntos convexos e estritamente convexos em \mathbb{R}^4 , estabelecendo uma relação entre convexidade estrita e curvatura para hipersuperfícies com um ponto crítico. Essa

caracterização será fundamental para podermos regularizar uma hipersuperfície, conhecendo-se apenas suas propriedades geométricas locais.

Apresentaremos uma forma normal dos equilíbrios do tipo sela-centro devida a J. Moser (ver [Mo]). Mostraremos também alguns resultados sobre a existência de órbitas homoclínicas à variedade central de um sela-centro para perturbações de sistemas integráveis. Ver mais detalhes em [BGS].

Serão apresentadas duas definições do índice de Conley-Zehnder generalizado de órbitas periódicas (Ver [CZ] e [HZW]). A primeira delas tem um caráter espectral e é geral. Já a segunda utiliza conceitos geométricos. Daremos enfoque principalmente à definição geométrica, que apesar de estar definida apenas para órbitas periódicas não-degeneradas, fornece uma estimativa muito boa para as órbitas periódicas degeneradas.

Apresentaremos um método rápido para o cálculo do índice de Conley-Zehnder de órbitas periódicas. O índice de Conley-Zehnder e a forma normal de Moser serão fundamentais para obtermos esses resultados. Mais precisamente, sabemos que o índice do bordo da seção global da hipersuperfície regularizada é 3, e isso nos permite mostrar que tal órbita periódica não pode estar na região onde foi feita a regularização.

Estabeleceremos uma trivialização do fibrado tangente de uma hipersuperfície em \mathbb{R}^4 apresentada em [CPR]. As equações do fluxo linearizado nesse referencial trivializado apresentam características geométricas muito importantes para mostrarmos que órbitas periódicas com índice de Conley-Zehnder limitado não podem passar arbitrariamente próximas de um equilíbrio do tipo sela-centro.

Apresentaremos uma definição natural de seção global para hipersuperfícies não regulares, no caso particular em que a perda de regularidade ocorre devido à existência de um equilíbrio sela-centro. Tais equilíbrios apresentam variedades estável e instável uni-dimensionais e é natural pensarmos que tais órbitas estão conectadas pelo fluxo.

Apresentaremos um método simples para verificação de convexidade estrita em níveis de energia para Hamiltonianos do tipo "energia cinética + potencial" e verificaremos a convexidade em alguns casos como por exemplo o Hamiltoniano Henon-Heiles, muito estudado na literatura de sistemas mecânicos.

Finalmente, daremos também uma introdução à hipersuperfícies de contato em \mathbb{R}^4 assim

como as propriedades de curvas pseudo-holomorfas. O objetivo principal desta parte é preparar algumas ferramentas para a eliminação da hipótese técnica $(H1)$ e, com isso, generalizar o Teorema B.

Capítulo 2

Hipersuperfícies Regulares em \mathbb{R}^4

2.1 Geometria Diferencial elementar em \mathbb{R}^4

Um subconjunto S contido em \mathbb{R}^4 é uma hipersuperfície regular C^k se para todo ponto $p \in S$ existirem abertos $U \subset \mathbb{R}^3$ e $V \subset \mathbb{R}^4$ e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ com as seguintes propriedades:

- (1) X é diferenciável (C^k);
- (2) X é homeomorfismo;
- (3) Para todo $q \in U$, $dX(q)$ é injetora;

A aplicação X é chamada parametrização ou sistema de coordenadas numa vizinhança de p e a aplicação X^{-1} é chamada de carta. O conjunto $V \cap S$ é chamado de vizinhança coordenada.

Os exemplos mais comuns de hipersuperfícies em \mathbb{R}^4 são:

(1) Gráfico de uma função diferenciável. Seja $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, onde U é um conjunto aberto. Então $S_g = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3) \in U, x_4 = g(x_1, x_2, x_3)\}$ é uma hipersuperfície regular. Uma parametrização global para S_g é dada por $X_g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S_g \subset \mathbb{R}^4$ onde $X_g(u, v, w) = (u, v, w, g(u, v, w))$.

(2) Hipersuperfície definida implicitamente como imagem inversa de um valor regular: Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^4$ é chamado de ponto crítico se $dH(x_0)$ não é sobrejetora, ou seja, se todas as derivadas parciais de H se anulam em x_0 . Caso contrário x_0 é chamado de ponto regular. Um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ é chamado de valor regular se o conjunto $H^{-1}(t_0)$ não contém pontos críticos. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$ regular de H , $H^{-1}(t)$ é

uma hipersuperfície regular. Por exemplo, se $H(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1$ então 0 é um valor regular de H e $H^{-1}(0) = S^3$, chamada de esfera unitária de dimensão 3, é uma hipersuperfície regular.

Uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ diferenciável é chamada de curva na hipersuperfície S . Um vetor $v \in T_p\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^4$ é um vetor tangente a S em p , se existe uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. O conjunto de todos os vetores tangentes a S em p é chamado de espaço tangente a S em p , e denotado por T_pS . Um vetor normal a S em p é um vetor $N \in \mathbb{R}^4$ tal que $N \perp T_pS$, ou seja, $\langle w, N \rangle = 0$ para todo $w \in T_pS$.

Se $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^4$ é uma parametrização de uma hipersuperfície regular S numa vizinhança de $p \in S$ onde $p = X(q)$, então $dX(q)(T_q\mathbb{R}^3) = T_pS$ e, portanto, $\dim T_pS = 3$.

Chamamos de fibrado tangente a S o conjunto $TS \stackrel{def}{=} \bigcup_{q \in S} T_qS = \{(x, v) | x \in S \text{ e } v \in T_xS\}$. TS é localmente homeomorfo a $U \times \mathbb{R}^3$ onde $U \subset \mathbb{R}^3$ é um subconjunto aberto. O fibrado normal a S é dado por $NS \stackrel{def}{=} \{(x, v) | x \in S \text{ e } v \in (T_xS)^\perp\}$ e localmente é homeomorfo a $U \times \mathbb{R}$.

Um campo de vetores tangente a uma hipersuperfície regular S é uma aplicação $W : S \rightarrow TS$ tal que para todo $p \in S$, $W(p) = (p, v)$ onde $v \in T_pS$. Omitiremos a 1ª componente (identidade em S) do campo de vetores W . Por exemplo, dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^4$, a aplicação $X_u : U \rightarrow TS$ dada por $X_u(q) \stackrel{def}{=} \frac{\partial X}{\partial u}(q)$ define um campo de vetores tangente a S em $X(U)$. De forma análoga podemos definir campos de vetores associados às aplicações X_v e X_w onde (u, v, w) são as coordenadas em U . Um campo de vetores W é dito diferenciável em $p \in S$ se para alguma parametrização X de uma vizinhança de p temos $W(q) = a(q)X_u(q) + b(q)X_v(q) + c(q)X_w(q)$ onde a, b e c são funções diferenciáveis a valores reais em U . O campo de vetores W é diferenciável em S se W for diferenciável em todo $p \in S$.

Dada $X : U \rightarrow S$ uma parametrização de S , podemos definir um campo de vetores normais unitários em $X(U)$ pela aplicação $N : U \rightarrow NS$ dada por $N(q) \stackrel{def}{=} \frac{X_u(q) \wedge X_v(q) \wedge X_w(q)}{\|X_u(q) \wedge X_v(q) \wedge X_w(q)\|}$ onde $a \wedge b \wedge c$ é o produto exterior dos vetores a, b e c definido implicitamente por $\det(a, b, c, x) = \langle a \wedge b \wedge c, x \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$. Uma hipersuperfície regular S é orientável se e somente se existe um campo contínuo de vetores normais em S . A esfera S^3 é um exemplo de hipersuperfície orientável, onde $N : S^3 \rightarrow NS^3 \cong S^3$, $N(x) = x$ é uma orientação para S^3 .

Se S é uma hipersuperfície regular dada por $H^{-1}(c)$ onde $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e c é um valor regular de H , então para todo $p \in S$, $T_pS = \ker dH(p) = [H_x(p)]^\perp = [N(p)]^\perp$.

Dado um ponto $p \in S$, podemos identificar $T_p S$ e $T_{N(p)} S^3$ pois $T_{N(p)} S^3 = [N(p)]^\perp = T_p S$. Desta forma, seja $dN(p) : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial de N no ponto p . A aplicação $dN(p)$ é linear e auto-adjunta, ou seja, $\langle dN(p)v, w \rangle = \langle v, dN(p)w \rangle$ para todo $v, w \in T_p S$. Portanto, existe uma base ortonormal $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ de $T_p S$ tal que $dN(p)e_i(p) = -k_i(p)e_i(p)$, $i = 1, 2, 3$, onde k_i são números reais chamados de curvaturas principais de S .

Dizemos que uma hipersuperfície S tem curvatura positiva em $p \in S$ se $k_i(p)k_j(p) > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq 3$. Uma hipersuperfície S tem curvatura positiva se S tem curvatura positiva em todo $p \in S$. Os valores $k_i(p)k_j(p)$ para $1 \leq i \neq j \leq 3$ são chamados de curvaturas seccionais de $e_i(p)$ e $e_j(p)$.

Dados dois vetores ortonormais $X_1(p)$ e $X_2(p)$ contidos em $T_p S$, então $K_{X_1 X_2}$, a curvatura seccional associada ao plano gerado por $X_1(p)$ e $X_2(p)$, é dada por

$$K_{X_1 X_2} \stackrel{def}{=} \det \begin{pmatrix} \langle dN(p)X_1, X_1 \rangle & \langle dN(p)X_1, X_2 \rangle \\ \langle dN(p)X_1, X_2 \rangle & \langle dN(p)X_2, X_2 \rangle \end{pmatrix}$$

e é positiva se S tiver curvatura positiva em p . Para maiores informações sobre hipersuperfícies em \mathbb{R}^4 , ver [Tho].

2.2 Conjuntos convexos em \mathbb{R}^4

Dizemos que um subconjunto não vazio $K \subseteq \mathbb{R}^4$ é convexo se dados $x, y \in K$, então $(1-t)x + ty \in K$ para $0 \leq t \leq 1$. Dizemos que uma hipersuperfície S , homeomorfa a S^3 , é convexa em \mathbb{R}^4 se S é o bordo de um subconjunto convexo em \mathbb{R}^4 .

Um r -plano suporte de um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^4$ é uma subvariedade linear de \mathbb{R}^4 de dimensão r , que contém pontos de \overline{K} (o fecho de K), mas não contém pontos de $\overset{\circ}{K}$ (o interior de K). Um plano suporte é um 3-plano suporte.

Uma hipersuperfície S , $C^{k \geq 2}$, tem contato de ordem 1 com o hiperplano H em $p \in S$ se para toda curva C^2 , $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) \neq 0$, então $\langle \alpha'(0), N_H \rangle = 0$ e $\langle \alpha''(0), N_H \rangle \neq 0$ onde N_H é um vetor normal a H . Um hiperplano H é chamado de plano suporte não singular de S se $H \cap S = \{p\}$, para algum $p \in S$, e S tem contato de ordem 1 com H em p . Chamamos uma hipersuperfície S , $C^{k \geq 2}$, de estritamente convexa se todo plano

suporte de S é não singular.

Dada uma hipersuperfície regular S estritamente convexa, um ponto $p \in S$ e uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) \neq 0$, temos $\langle \alpha''(0), N(p) \rangle = -\langle dN(p)\alpha'(0), \alpha'(0) \rangle \neq 0$. Como isso vale para qualquer $\alpha'(0) \in T_p S \setminus \{0\}$, então o operador linear $dN(p)$ é definido (ou seja, a forma quadrática associada a $dN(p)$ é definida) e seu sinal depende da orientação de $N(p)$.

Se uma hipersuperfície S for dada na forma $S = H^{-1}(c)$ para alguma função $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ e c é um valor regular de H , então para todo $p \in S$, o vetor normal a S em p , $N(p)$, é dado por $N(p) = \frac{H_x(p)}{\|H_x(p)\|}$ onde $H_x(p)$ é o vetor gradiente de H no ponto p . Desta forma, para $v \in T_p S$, temos

$$\langle dN(p)v, v \rangle = \left\langle \left(\frac{H_{xx}(p)}{\|H_x(p)\|} + (s_{ij}(p)) \right) v, v \right\rangle$$

onde $s_{ij}(p) = H_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\|H_x(p)\|}$. Mas $\langle (s_{ij}(p))v, v \rangle = \langle v, (s_{ij}(p))^t v \rangle$ onde $(s_{ij}(p))^t$ é a matriz transposta a $(s_{ij}(p))$ e $(s_{ij}(p))^t v = 0$ para qualquer $v \in T_p S$ pois $\langle H_x(p), v \rangle = 0$. Concluimos que

$$\langle dN(p)v, v \rangle = \frac{1}{\|H_x(p)\|} \langle H_{xx}(p)v, v \rangle$$

para todo $v \in T_p S$. Isso mostra que uma condição necessária para uma hipersuperfície $S = H^{-1}(c)$ ser estritamente convexa é que o Hessiano de H em cada $p \in S$ seja definido quando restrito a $T_p S$.

Quando S é difeomorfa a S^3 , então a condição de o Hessiano de H ser definido no espaço tangente de todo ponto de S , é suficiente para que a hipersuperfície seja estritamente convexa.

Chamamos de ovalóide uma hipersuperfície regular estritamente convexa e difeomorfa a S^3 .

Dado um ponto b de uma hipersuperfície $S \subset \mathbb{R}^4$, $C^k \geq 2$, com curvatura positiva em p , então existe uma vizinhança C_b de b em S e um sistema retangular de coordenadas x_1, x_2, x_3, z com b na origem, tal que C_b é representada na forma

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = f(x) \geq 0, f(0) = 0, |x| < \delta, \delta > 0 \quad (2.1)$$

Além disso, $f(x)$ é uma função C^k estritamente convexa em x , ou seja, o Hessiano de f é positivo definido em todo ponto onde a função f está definida.

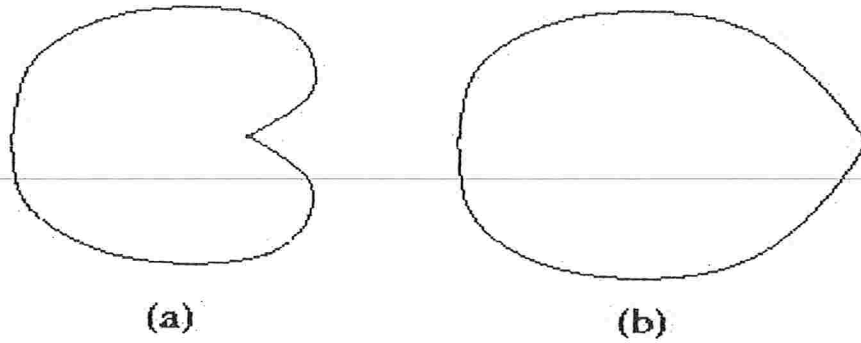


Figura 2-1: Uma curva fechada no plano, regular exceto em um ponto e com curvatura positiva pode ser bordo de (a) um domínio não convexo ou (b) um domínio convexo.

2.3 Regularização de Hipersuperfícies em \mathbb{R}^4

Suponhamos que para uma dada função $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $C^{k \geq 2}$, exista um subconjunto $S \subset H^{-1}(a)$, para algum $a \in \text{Im}(H)$, com as seguintes propriedades:

- (i) S é homeomorfo a S^3 ;
- (ii) existe um único ponto $p_c \in S$ tal que $H_x(p_c) = 0$, ou seja, todo ponto $q \in S$, $q \neq p_c$ é regular;
- (iii) para todo ponto $q \in S$, $q \neq p_c$, $\langle H_{xx}(q)v, v \rangle > 0$ para qualquer $v \in T_q S$;
- (iv) existe um plano suporte H_{p_c} de S tal que $H_{p_c} \cap S = \{p_c\}$;

O subconjunto $S_0 \stackrel{\text{def}}{=} S \setminus \{p_c\}$ é, portanto, uma hipersuperfície regular. Vamos mostrar que, de fato, S_0 é estritamente convexa. Diremos também que S é uma hipersuperfície estritamente convexa.

Se uma hipersuperfície difeomorfa a S^3 tem curvatura positiva, então ela é estritamente convexa. A presença de um ponto crítico, no entanto, pode causar problemas, como é o caso de uma curva no plano com curvatura positiva e que não é bordo de um domínio convexo. Ver figura 2-1.

Então

Teorema 2.1 *Dada qualquer vizinhança U_0 de p_c em \mathbb{R}^4 , existe um ovalóide S_{U_0} tal que $S \setminus U_0 \subset S_{U_0}$.*

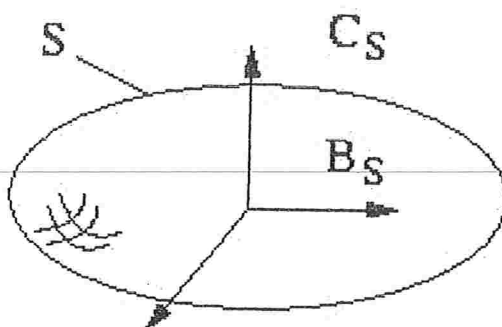


Figura 2-2: Hipersuperfícies em \mathbb{R}^4 separam o espaço em 2 regiões: uma limitada B_S e outra ilimitada, C_S .

Antes de provarmos este teorema, precisaremos de alguns lemas.

Sabemos que S separa \mathbb{R}^4 em dois subconjuntos disjuntos: um limitado, denotado por B_S , que é fechado e contém S , e outro ilimitado, denotado por C_S , aberto, tal que $\partial B_S = \partial C_S = S$ e $B_S \cap C_S = \emptyset$. Ver figura 2-1.

Fixaremos uma orientação $N : S_0 \rightarrow NS_0$ para S_0 tal que $\langle H_x(p), N(p) \rangle < 0$ para todo $p \in S_0$. Fixaremos também um referencial móvel sobre S que gera TS , ou seja, campos de vetores $X_i : S \rightarrow TS$, $i = 1..3$, ortonormais. A existência desse referencial será apresentada em (4.2).

Lema 2.1 *Seja $p \in S$ um ponto regular. Então existe uma vizinhança C_p de p em S e um sistema retangular de coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) tal que C_p pode ser representada como gráfico de uma função $f^p : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $x_4 = f^p(x_1, x_2, x_3)$ onde $f^p(0) = 0$, $f^p_x(0) = 0$, $f^p(x) > 0$ se $x \neq 0$ e o Hessiano $f^p_{xx}(x)$ de f^p é positivo definido para todo $x \in W$.*

Prova. Os vetores $X_1(p), X_2(p), X_3(p)$ e $N(p)$ definem uma base ortonormal para \mathbb{R}^4 . Nessa base, temos $z = p + x_1X_1(p) + x_2X_2(p) + x_3X_3(p) + x_4N(p)$. Os pontos em S satisfazem $H(p + x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 + x_4N) = a$ e o ponto p corresponde a $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Como $\langle H_x(p), N(p) \rangle \neq 0$, existe $f^p : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ numa vizinhança W da origem tal que $x_4 = f^p(x_1, x_2, x_3)$ e $H(p + x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 + f^p(x_1, x_2, x_3)N) = a$. Portanto o gráfico de f^p representa S numa vizinhança de p . Além disso, para $i = 1, 2$ e 3 temos

$$\langle H_x(p), X_i(p) + f^p_{x_i}(0)N(p) \rangle = 0 \implies f^p_{x_i}(0) = 0$$

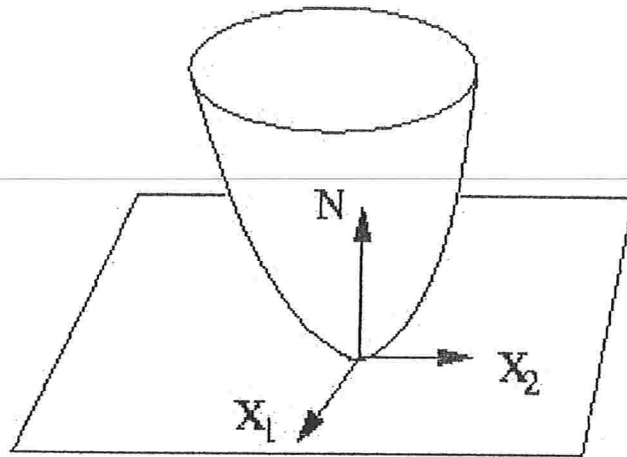


Figura 2-3: A representação local f^p de S numa vizinhança de um ponto com curvatura positiva é estritamente convexa numa vizinhança da origem.

Também, é fácil ver que

$$f_{x_i x_j}^p(0) = -\frac{\langle H_{xx}(p) X_i, X_j \rangle}{\langle H_x(p), N \rangle}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

e, portanto, o Hessiano de f^p é positivo definido numa vizinhança W de p . Logo $f^p > 0$ em W .

■

Definindo a aplicação $O_p: \bar{W} \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, numa vizinhança \bar{W} da origem, dada por

$$O_p(x_1, x_2, x_3, x_4) = p + x_1 X_1(p) + x_2 X_2(p) + x_3 X_3(p) + x_4 N(p)$$

temos

$$O_p(\{x_4 = f^p(x_1, x_2, x_3)\}) \subset S$$

$$O_p(\{x_4 \geq f^p(x_1, x_2, x_3)\}) \subset B_S$$

$$O_p(\{x_4 < f^p(x_1, x_2, x_3)\}) \subset C_S$$

Isso decorre da conexidade de S e da dependência contínua de f^p com relação a $p \in S$.

Lema 2.2 *Seja s um segmento de reta que passa por um ponto $p \in S$ tal que p não seja um dos extremos de s . Então s contém pontos de C_S .*

Prova. Se p é um valor regular então localmente S é representada por um gráfico de uma função estritamente convexa $x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$ tal que 0 representa p e $f(x) > 0$ para todo $x \neq p$. O conjunto C_S satisfaz $x_4 < f(x_1, x_2, x_3)$. Nessas coordenadas, se existe um ponto de s tal que $x_4 > 0$, então, como s passa pela origem, existe um ponto de s tal que $x_4 < 0$. Logo $s \cap C_S \neq \emptyset$. Se os pontos de s satisfazem $x_4 = 0$, então para $b = (x_1, x_2, x_3, 0) \in s$, onde $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ temos que $b \in C_S$.

Se $x = p_c$, então $s \subset H_{p_c}$ (plano suporte de S que passa por p_c) ou s é transversal a H_{p_c} . Como $H_{p_c} \cap S = \{p_c\}$ então S e, portanto B_S , está contido de forma estrita em um dos lados de H_{p_c} , ou seja, $B_S \cap H_{p_c} = \{p_c\}$. Logo, em qualquer uma das situações, s contém pontos de C_S . ■

Lema 2.3 *B_S é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^4 e se p é um ponto regular de S , então $H_p \cap S = \{p\}$ para todo hiperplano H_p tangente a S em p .*

Prova. Para mostarmos que B_S é um subconjunto convexo, basta provarmos que dados $x, y \in S$, $x \neq y$, o segmento de reta xy que une os pontos x e y está contido em B_S .

Sejam x e y dois pontos em S tais que $x \neq p_c$ e $y \neq p_c$. Sabemos que o Hessiano de H em x é definido, o que implica que S tem curvatura positiva em x . Podemos, portanto, pelo Lema 2.1, representar S numa vizinhança C_x de x como gráfico de $x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$, onde f é estritamente convexa e satisfaz (2.1). O conjunto B_S satisfaz, nessas coordenadas, $x_4 \geq f(x_1, x_2, x_3)$. Para $w \in C_x$, o segmento xw está, portanto, contido em B_S .

Seja $\gamma_{xy} : [0, 1] \rightarrow S$ uma curva contínua em S tal que $\gamma_{xy}(0) = x$, $\gamma_{xy}(1) = y$ e $\gamma_{xy}(t) \neq p_c$ para todo $t \in (0, 1)$. Para t suficientemente pequeno, sabemos, pela observação acima, que o segmento $x\gamma_{xy}(t) \subset B_S$ e é transversal a S em x e em $\gamma_{xy}(t)$. Seja $F = \{t \in (0, 1) \mid x\gamma_{xy}(t) \subset B_S\}$. Suponhamos que $F \neq \emptyset$ e seja $\tilde{t} = \inf F > 0$. Então temos

(i) $x\gamma_{xy}(\tilde{t}) \cap C_S = \emptyset$ pois, caso contrário, por continuidade de $x\gamma_{xy}(t)$ e abertura de C_S , $x\gamma_{xy}(t) \cap C_S \neq \emptyset$ para $t < \tilde{t}$, uma contradição. Portanto $x\gamma_{xy}(\tilde{t}) \subset B_S$.

(ii) O segmento $x\gamma_{xy}(\tilde{t})$ é transversal a S em x e em $\gamma_{xy}(\tilde{t})$, pois se for tangente em algum desses pontos, existem pontos de $x\gamma_{xy}(\tilde{t})$ em C_S , uma contradição por (i). Suponha

que $x\gamma_{xy}(\tilde{t}) \cap S = \{x, \gamma_{xy}(\tilde{t})\}$. Para todo t suficientemente próximo de \tilde{t} , $x\gamma_{xy}(t)$ também é transversal em x e em $\gamma_{xy}(t)$ e, por continuidade de $\gamma_{xy}(t)$, tem-se que $x\gamma_{xy}(t) \subset B_S$, o que contradiz a hipótese sobre \tilde{t} .

(iii) Portanto existe $w \in x\gamma_{xy}(\tilde{t})$, $w \notin \{x, \gamma_{xy}(\tilde{t})\}$ tal que $w \in S$. Mas pelo Lema 2.2, o segmento de reta $x\gamma_{xy}(\tilde{t})$ contém pontos de C_S , uma contradição com (i).

Concluimos que $F = \emptyset$ e, por continuidade de $x\gamma_{xy}(t)$ e compacidade de B_S temos que o segmento $xy \subset B_S$.

Se $y = p_c$, então seja $\gamma_{xp} : [0, 1] \rightarrow S$ uma curva contínua em S tal que $\gamma_{xy}(0) = x$, $\gamma_{xy}(1) = p_c$ e $\gamma_{xy}(t) \neq p_c$ para todo $t \in (0, 1)$. Então o segmento $x\gamma_{xy}(t) \in B_S$ para todo $t \in (0, 1)$ e, novamente por continuidade de $x\gamma_{xy}(t)$ e compacidade de B_S concluimos que o segmento $xp \subset B_S$.

Portanto para quaisquer $x, y \in B_S$ o segmento xy está contido em B_S e, portanto, B_S é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^4 .

Suponha que exista $p \in S$ e um hiperplano H_p de B_S passando por p tal que $H_p \cap S \supset \{p, z\}$ onde $z \in B_S$, $z \neq p$. Como B_S é convexo, o segmento $pz \subset B_S$ e portanto $H_p \cap B_S \supset pz$. Pelo Lema 2.2 sabemos $pz \cap S = \{p, z\}$ pois caso contrário o segmento pz teria pontos em C_S . Mas então H_p contém pontos de $\overset{\circ}{B}_S$ (o interior de B_S) o que contraria a hipótese de H_p ser um plano suporte de B_S . ■

Corolário 2.1 *A hipersuperfície $S_0 = S \setminus \{p_c\}$ é estritamente convexa.*

Prova. Sabemos, pela definição de S , que S_0 tem contato de ordem 1 com todo hiperplano H_p tangente a S em p . Pelo Lema 2.3 temos que $H_p \cap S_0 = \{p\}$ e, portanto, H_p é um plano suporte não singular de S , donde S_0 é estritamente convexa. ■

Antes de enunciarmos o resultado principal desta seção, precisamos do seguinte teorema de M. Ghomi

Teorema 2.2 *Seja S uma hipersuperfície C^2 compacta, conexa e imersa em \mathbb{R}^4 com curvatura positiva. Então S pode ser estendida a um ovalóide C^k se e somente se cada componente γ do bordo de S se localiza de forma estrita em um dos lados de cada hiperplano tangente a S em γ .*

Prova. Ver [Gho2]. ■

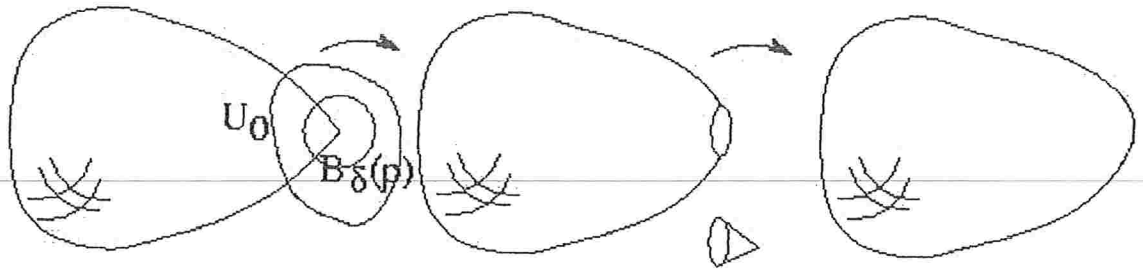


Figura 2-4: O Teorema de Ghomi permite regularizar uma hipersuperfície na vizinhança do ponto crítico.

Prova do Teorema 2.1. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset U_0$ onde $B_\delta(p)$ é a bola de raio δ com centro em p . Seja $S_\delta = S \setminus B_\delta(p)$. Seja ∂S_δ o bordo de S_δ . Então $\partial S_\delta = \partial B_\delta(p) \cap S$. Seja $z \in \partial S_\delta$. Então o hiperplano H_z tangente a S_δ em z é o mesmo hiperplano tangente a S em z . Pelo Lema 2.3 sabemos que $H_z \cap S = \{z\}$. Logo $H_z \cap S_\delta = \{z\}$. Como isso vale para qualquer $z \in \partial S_\delta$, podemos, pelo Teorema 2.2, estender S_δ a um ovalóide S_{U_0} . Como $B_\delta(p) \subset U_0$ e $S_{U_0} \supset S_\delta = S \setminus B_\delta(p)$ então $S_{U_0} \supset S \setminus U_0$. Ver figura 2.4 ■

Capítulo 3

Pontos de equilíbrio do tipo sela-centro

Um ponto $p \in \mathbb{R}^4$ é chamado ponto de equilíbrio do sistema Hamiltoniano associado à função $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ se $H_x(p) = 0$, ou seja, se a solução que passa por p for constante¹. Dizemos que um ponto de equilíbrio p é do tipo sela-centro se a matriz $J_0 H_{xx}(p)$ possui um par de autovalores reais $\pm\alpha$ ($\alpha > 0$) e um par de autovalores imaginários puros $\pm\omega i$ ($\omega > 0$).

Um ponto de equilíbrio p do tipo sela-centro possui variedades estável e instável unidimensionais. Uma solução não-constante é chamada de órbita homoclínica a p , caso esteja contida em ambas as variedades estável e instável de p . No caso de um sela-centro, a existência de tal órbita homoclínica implica que as variedades assintóticas a p devem coincidir.

Numa vizinhança de um sela-centro p , existe uma família contínua de órbitas periódicas, uma para cada valor de H , constituindo a variedade central bi-dimensional de p . Da mesma forma se define órbita homoclínica a tais órbitas periódicas. Neste caso, a existência de uma órbita homoclínica a alguma órbita periódica γ desta família não implica que as variedades estável e instável de γ devam coincidir, já que estas são bi-dimensionais.

Por um Teorema de Moser [Mo] (veja também [Russ] e [Hen]), sabemos que numa vizinhança U de um ponto de equilíbrio p do tipo sela-centro, o fluxo possui uma forma normal bastante

¹As equações de um sistema Hamiltoniano associado à função H são dadas por $\dot{x} = J_0 H_x(x)$, onde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ -I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$ e $H_x(x)$ é o gradiente de H no ponto x .

simples. Em outras palavras, podemos encontrar uma mudança de coordenadas $\varphi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow U$ onde, se denotarmos por $z = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ as coordenadas em V , então o fluxo em U é conjugado ao fluxo Hamiltoniano em V gerado pela função Hamiltoniana

$$K(q_1, q_2, p_1, p_2) = -\alpha I_1 + \omega I_2 + O(I_1^2 + I_2^2) \quad (3.1)$$

onde $I_1 = q_1 p_1$ e $I_2 = \frac{q_2^2 + p_2^2}{2}$. As constantes α e ω são aquelas obtidas pelos autovalores do sistema linearizado em p . As expressões I_1 e I_2 são integrais primeiras do sistema, ou seja, permanecem constantes ao longo de cada solução. Em V , as equações que determinam o movimento são

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial K(I_1, I_2)}{\partial I_1} q_1 \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial K(I_1, I_2)}{\partial I_1} p_1 \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial K(I_1, I_2)}{\partial I_2} p_2 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial K(I_1, I_2)}{\partial I_2} q_2 \end{aligned}$$

Esse sistema pode ser melhor visualizado em dois subespaços distintos: o plano (q_1, p_1) , onde o comportamento é o de uma sela hiperbólica, e o plano (q_2, p_2) onde o sistema se comporta como um centro. Ver figura 3-1

Algumas propriedades do fluxo em U podem, portanto, ser obtidas pela análise do fluxo em V :

- i) $0 \in V$ é um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro e $\varphi(0) = p$;
- ii) Os conjuntos $W^s(0) \stackrel{def}{=} \{z \in V : p_1 = p_2 = q_2 = 0\}$ e $W^u(0) \stackrel{def}{=} \{z \in V : q_1 = p_2 = q_2 = 0\}$ são, respectivamente, as variedades estável e instável de 0 em V ; Ambas estão contidas em $\{K = 0\}$, o mesmo nível de energia da origem;
- iii) As órbitas periódicas P_E , que compõe a variedade central de 0 estão contidas em $\{z \in V : q_1 = p_1 = 0, q_2^2 + p_2^2 > 0\}$. Para cada valor de energia $k \in K(V), k \neq 0$, existe uma única órbita periódica o_k com energia k contida na variedade central do sela-centro. As variedades estável e instável de uma órbita periódica com energia k estão contidas nos conjuntos $W^s(o_k) \stackrel{def}{=} \{z \in V : p_1 = 0, K = k\}$ e $W^u(o_k) \stackrel{def}{=} \{z \in V : q_1 = 0, K = k\}$ respectivamente.

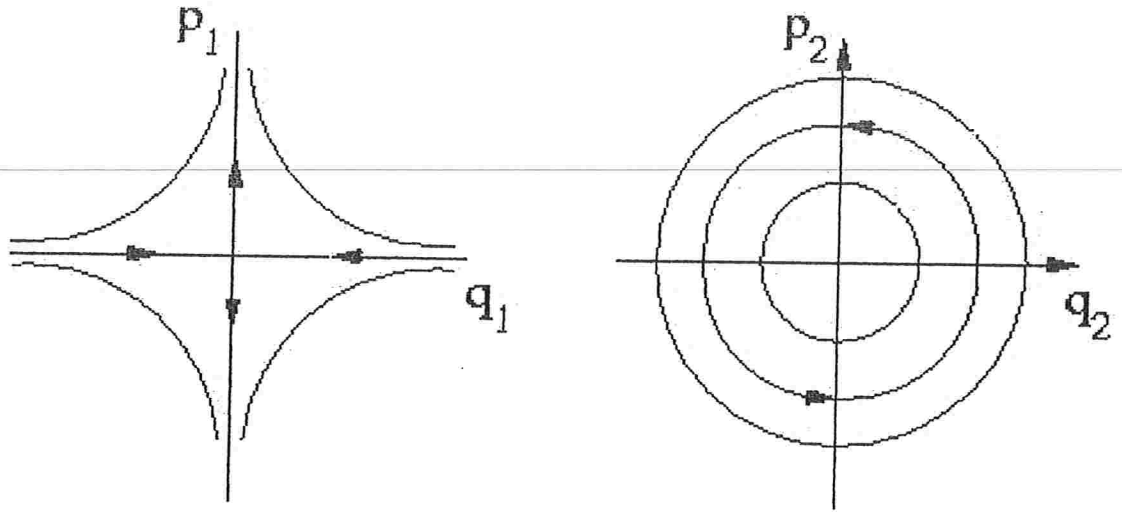


Figura 3-1: Na forma normal de um sela centro, a projeção do fluxo no plano $q_1 p_1$ é equivalente a uma sela e no plano $q_2 p_2$ é equivalente a um centro.

O uso de seções de Poincaré é uma ferramenta importante para descrevermos o fluxo numa vizinhança de um sela-centro. Em particular, os conjuntos $\Sigma_1 = \{z \in V : q_1 = \delta, \}$ e $\Sigma_2 = \{z \in V : p_1 = \delta, \}$ definem seções transversais ao fluxo em V , e intersectam transversalmente, respectivamente, as variedades estável e instável da origem e das órbitas periódicas que folheam sua variedade central.

Vamos denotar por Σ_i^E a intersecção de Σ_i com o nível de energia $\{K = E\}$, $i = 1, 2$. Por (3.1) vemos que $\frac{\partial K}{\partial I_1}(0, 0) = -\alpha \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, obtemos $I_1 = v(I_2, E)$ numa vizinhança de $I_2 = 0$ e, portanto, podemos tomar (q_2, p_2) como coordenadas em Σ_i^E . Nessas coordenadas, denotando $y = (q_2, p_2)$, obtemos a aplicação de Poincaré $l_E : \Sigma_1^E \cap \{p_1 > 0\} \rightarrow \Sigma_2^E$ dada por

$$l_E(y) = R(\theta(I_2(y), E))y \quad (3.2)$$

onde $R(\theta)$ denota a matriz de rotação de ângulo θ , e

$$\theta(I_2, E) = -\frac{\omega}{\alpha} \log |I_2 - I^c(E)| + \Lambda_E(I_2) \quad (3.3)$$

onde $I^c(E) = \frac{E}{\omega} + O(E^2)$ é tal que $v(I^c(E), E) = 0$. A função Λ_E é analítica em I_2 e os pontos em Σ_1^E satisfazem $I_2 > I^c(E)$. As relações (3.2) e (3.3) mostram que localmente o fluxo,

em cada nível de energia E , pode ser visto como uma rotação cujo ângulo de rotação tende para $+\infty$ conforme a órbita se aproxima das variedades estável e instável do conjunto invariante em V contido no mesmo nível de energia E . Por exemplo, para $E = 0$, o conjunto invariante em V é o próprio ponto de equilíbrio sela-centro e a aplicação l_0 está definida apenas para $y \neq 0$. O ângulo de rotação depende apenas de $|y|$ e tende para $+\infty$ quando $y \rightarrow 0$. Quando $E > 0$ o conjunto invariante em V é uma órbita periódica o_E e a aplicação l_E está definida apenas para $|y|^2 > 2I^c(E)$. O ângulo de rotação, nesse caso, tende para $+\infty$ quando y se aproxima de círculo $|y|^2 = 2I^c(E)$. É importante notar que para $E = 0$, a aplicação l_0 pode ser estendida de forma contínua na origem definindo-se $l_0(0) \stackrel{def}{=} 0$.

Quando existe uma órbita homoclínica à p , sabemos, usando o Teorema do Fluxo Tubular, que existe uma aplicação analítica $g_E : 0 \in W \subset \sum_2^E \rightarrow \sum_1^E$ satisfazendo $g_0(0) = 0$.

Compondo as aplicações l_E e g_E , podemos estudar a aplicação $F_E \stackrel{def}{=} g_E \circ l_E$ que representa a dinâmica próxima à órbita homoclínica a p .

3.1 Perturbações de um Sistema Integrável

Seja H_μ uma família a um parâmetro $\mu \in I_0 = (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$ de funções Hamiltonianas real-analíticas definidas em \mathbb{R}^4 que possuem as seguintes propriedades:

i) Para $\mu = 0$ o campo de vetores associado a H_0 é integrável e existe uma órbita homoclínica γ à origem;

ii) Para cada valor de $\mu \in I_0$, existe um equilíbrio r_μ do tipo sela-centro do campo de vetores associado a H_μ que depende analiticamente em μ ;

Sem perda de generalidade, podemos assumir também $H(r_\mu) = 0$.

Utilizando as mesmas notações anteriores mas agora acrescentando o índice μ , obtemos os mapas $l_{E,\mu}$ e $g_{E,\mu}$ que correspondem às aplicações local e global do fluxo, respectivamente para cada par (E, μ) . Considerando a aplicação $F_{E,\mu} = g_{E,\mu} \circ l_{E,\mu}$, temos que $F_{E,0} = R(\zeta(I_2, E) + \theta(I_2, E))$, pois o sistema é integrável para $\mu = 0$.

O Teorema KAM (ver [BGS] e [Rag2]) garante que para valores de μ e E suficientemente pequenos, existem curvas $C_{E,\mu}$ com as seguintes propriedades:

i) $C_{E,\mu} \subset \text{dom} F_{E,\mu}$;

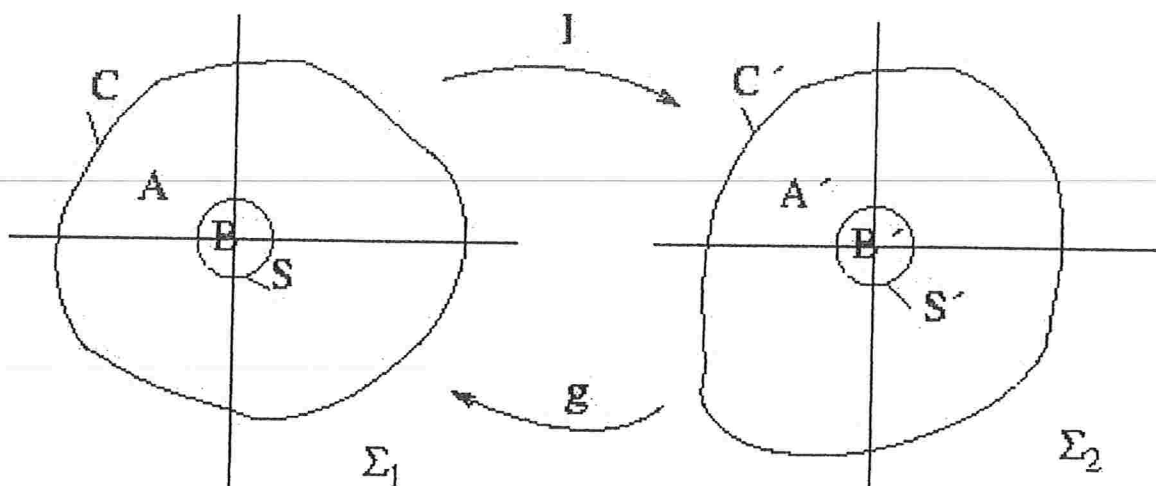


Figura 3-2:

ii) $C_{E,\mu}$ são curvas analíticas de Jordan que enlaçam o círculo $I_2 = I^c(E)$;

iii) $C_{E,\mu}$ são invariantes por $F_{E,\mu}$;

Seja $C'_{E,\mu} = l_{E,\mu}(C_{E,\mu}) = g_{E,\mu}^{-1}(C_{E,\mu})$.

3.2 Órbitas Homoclínicas à variedade central de um sela-centro

Por simplicidade de notação, omitiremos os índices E e μ . Analisaremos a partir de agora apenas os níveis de energia positivos.

Denotaremos por S (S') a intersecção entre a variedade estável (instável) e Σ_1 (Σ_2). Seja A (A') o anel aberto entre S (S') e C (C'). Seja B (B') o disco fechado limitado por S (S'), e D (D') o disco aberto limitado por C (C').

Então temos as seguintes aplicações: $l : A \rightarrow A'$ e $g : D' \rightarrow D$. Ambas as aplicações preservam área. Ver figura 3-2

Suponhamos que $w \in g(S') \cap S \neq \emptyset$. Então existe uma órbita h_P que passa por w e é homoclínica à órbita periódica P . Chamamos h_P de órbita homoclínica a P de 1 pulso. Mais geralmente se para algum $w \in S'$ tivermos $F^{N-1} \circ g(w) \in S$, então temos uma órbita homoclínica a P de N pulsos. Provaremos que para sistemas próximos ao integrável e níveis de energia suficientemente próximos do nível de energia do sela-centro r , sempre há órbitas

homoclínicas às órbitas periódicas da variedade central de r .

Lema 3.1 *Suponhamos que para $0 \leq n \leq N$, a aplicação $F^n \circ g$ esteja bem definido numa vizinhança de B' e $F^n \circ g(S') \cap S = \emptyset$. Então $F^i \circ g(B') \cap F^j \circ g(B') = \emptyset$ para todo $0 \leq j < i \leq N$.*

Prova. Suponhamos que $F^i \circ g(B') \cap F^j \circ g(B') \neq \emptyset$ para i, j tais que $0 \leq j < i \leq N$. Por preservação de área e analiticidade das aplicações l e g segue que $F^i \circ g(S') \cap F^j \circ g(S') \neq \emptyset$. Aplicando F^{-j} a ambos os lados, temos que $F^{i-j} \circ g(S') \cap g(S') \neq \emptyset$ o que é uma contradição pois a aplicação F^{-1} não está definida em $g(S')$. ■

Proposição 3.1 *Existe $N \geq 1$ tal que $F^{N-1} \circ g(S') \cap S \neq \emptyset$. Além disso, ou $F^{N-1} \circ g(S') = S$, ou $F^{N-1} \circ g(S') \subsetneq S$. No segundo caso existem infinitas órbitas homoclínicas de $2N$ pulsos.*

Prova. O Anel A tem área limitada e, pela preservação de área das aplicações g e l , temos que $F^i \circ g(B')$ tem sempre a mesma área. A não existência de tal N implica, pelo Lema 3.1 que estes são todos disjuntos, ocupando, portanto, uma área infinita em A , uma contradição.

Denotemos $G = F^{N-1} \circ g$ e $\delta = l(G(S') \cap A)$. Então se $G(S') \subsetneq S$, δ é uma curva que espirala infinitas vezes convergindo para S' de modo que $G(\delta \cap \text{dom}G)$ espirala infinitas vezes convergindo para $G(S')$ intersectando S infinitas vezes. Essas intersecções representam as órbitas homoclínicas de $2N$ pulsos. ■

Pode-se mostrar que nos casos onde $G(S') \subsetneq S$, existe um conjunto invariante no mesmo nível de energia de P tal que o fluxo restrito a esse conjunto é semi-conjugado ao shift de Bernoulli e tem entropia topológica positiva. Para mais detalhes, ver [BGS].

Vamos agora fixar um valor de parâmetro tal que não exista órbita homoclínica ao ponto de equilíbrio sela-centro, ou seja, tais que suas variedades estável e instável não coincidam. Continuamos considerando o caso próximo ao integrável, ou seja, para todo valor de energia suficientemente pequeno, existem órbitas homoclínicas a P_E .

Seja $N(E) = \min\{n \in \mathbb{N} : F_E^{n-1} \circ g(S'_E) \cap S_E \neq \emptyset\}$.

Teorema 3.1 *Existe uma seqüência $E_n \rightarrow 0$ tal que as variedades estável e instável de P_{E_n} não coincidem. Além disso $\lim_{E \rightarrow 0} N(E) = \infty$.*

Prova. Suponha que exista uma seqüência $E_n \rightarrow 0$ tal que $N(E_n)$ seja limitada. Podemos supor que $N(E_n) = N = \text{const}$. Então $F_{E_n}^{N-1} \circ g(S'_{E_n}) \cap S_{E_n} \neq \emptyset$. Usando um argumento

de compacidade e continuidade das aplicações, concluímos que $F_0^{N-1} \circ g(0) = 0$, o que é uma contradição, já que não há órbita homoclínica à origem.

Se não existir uma seqüência $E_n \rightarrow 0$ tal que as variedades estável e instável de P_{E_n} não coincidam, então para qualquer E suficientemente pequeno as variedades assintóticas devem coincidir. Mas um mesmo argumento de compacidade e continuidade implica que para E suficientemente pequeno, $N(E)$ é constante, uma contradição. ■

Capítulo 4

O Índice de Conley-Zehnder

4.1 Uma Trivialização natural de fibrados lineares sobre Hipersuperfícies em \mathbb{R}^4

Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ e c um valor regular de H . Seja F_S um fibrado linear sobre a hipersuperfície $S \stackrel{\text{def}}{=} H^{-1}(c)$, $C^k \geq 2$, tal que a fibra ξ_x em cada $x \in S$ é um subespaço de $T_x S$ de dimensão n ($n = 1, 2$ ou 3). Então o fibrado F_S pode ser trivializado se existir um homeomorfismo $\beta_{F_S} : F_S \rightarrow S \times \mathbb{R}^n$ tal que $pr_1 \circ \beta_{F_S} = \pi_{F_S}$ onde pr_1 é a projeção na primeira componente de $S \times \mathbb{R}^n$ e π_{F_S} é a projeção do fibrado F_S sobre a base S . O homeomorfismo β_{F_S} é chamado de trivialização de F_S . Introduziremos uma forma natural de trivializar o fibrado tangente TS apresentada em [CPR]. Usaremos esse mesmo método para trivializar fibrados cuja fibra bi-dimensional é transversal ao campo Hamiltoniano associado à função H .

Sejam $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Definimos agora as matrizes 4×4 dadas por:

$$A_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Para cada $x \in S$, seja

$$X_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H_x(x)}{\|H_x(x)\|}$$

onde $H_x(x) \in T_x\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^4$ é o vetor gradiente de H no ponto x , e é normal a T_xS . Sejam

$$X_i(x) \stackrel{def}{=} A_i X_0(x), i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Temos que $\langle X_i(x), X_j(x) \rangle = 0$ para $0 \leq i \neq j \leq 3$ e $\langle X_i(x), X_i(x) \rangle = 1$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Portanto, os vetores $X_1(x)$, $X_2(x)$ e $X_3(x)$ formam uma base ortonormal para T_xS . Como $X_i(x) \neq 0$ para qualquer $x \in S$, podemos trivializar TS usando os campos X_1, X_2 e X_3 da seguinte forma: todo vetor v tangente a S em x pode ser representado por $v = \sum_{i=1}^3 \alpha^i X_i(x)$. Então definimos a trivialização $\beta_{TS} : TS \rightarrow S \times \mathbb{R}^3$ por $\beta_{TS}(x, v) = (x, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$.

Sabemos que o campo Hamiltoniano associado à função H é dado por $X_H(x) = A_3 H_x(x)$ e, portanto, $X_H(x) = \delta(x) X_3(x)$ onde $\delta(x) = \|H_x(x)\|$. Desta forma, podemos considerar o fibrado linear F_2 sobre S cuja fibra é gerada pelos campos X_1 e X_2 . O fibrado F_2 é bi-dimensional, normal a $X_H(x)$ e pode ser trivializado da mesma forma como foi trivializado TS .

Consideremos agora um outro fibrado ξ sobre S , bi-dimensional, contido em TS , cuja fibra ξ_x é transversal a $X_3(x)$ para todo ponto $x \in S$.

Teorema 4.1 *O fibrado ξ pode ser trivializado.*

Prova. Como ξ_x é transversal a $X_3(x)$, então para cada vetor não nulo $v \in \xi_x$, temos que $v = \alpha^1 X_1(x) + \alpha^2 X_2(x) + \alpha^3 X_3(x)$ onde $(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 \neq 0$.

Seja $\pi_{\xi_x} : \xi_x \rightarrow \{X_1, X_2\}$ a projeção canônica dada por $\pi_{\xi_x}(v) = \alpha^1 X_1(x) + \alpha^2 X_2(x)$. Então π_{ξ_x} é um isomorfismo e podemos, portanto, definir uma base em ξ_x dada por $\{\pi_{\xi_x}^{-1}(X_1(x)), \pi_{\xi_x}^{-1}(X_2(x))\}$. Definindo

$$\tilde{X}_i(x) = \pi_{\xi_x}^{-1}(X_i(x)), i = 1, 2 \quad (4.3)$$

temos

$$v = \alpha^1 \tilde{X}_1(x) + \alpha^2 \tilde{X}_2(x) \quad (4.4)$$

de modo que os campos $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$ induzem uma trivialização $\beta_\xi : \xi \rightarrow S \times \mathbb{R}^2$ para ξ , dada por

$$\beta_\xi(x, v) = (x, \alpha^1, \alpha^2)$$

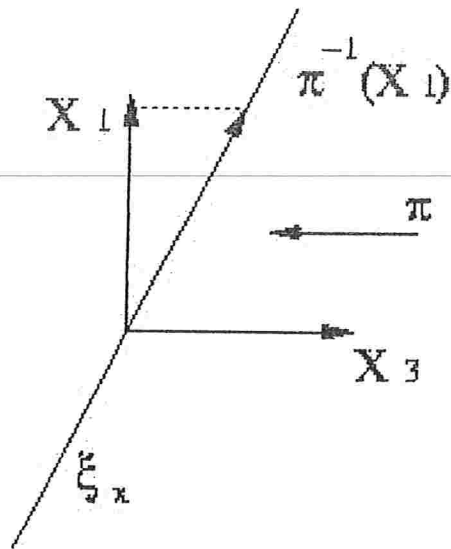


Figura 4-1: Os vetores \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 definem uma base para ξ_x .

Ver figura 4-1. ■

Observe que as coordenadas na trivialização β_ξ são iguais às 2 primeiras coordenadas na trivialização β_{TS} .

Seja φ_t o fluxo do sistema Hamiltoniano associado à função H , ou seja, $\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = X_H(x)$. Linearizando as equações de movimento sobre uma solução $x(t) \subset S$, obtemos um fluxo $T\varphi_t : TS \rightarrow TS$ que satisfaz a seguinte equação

$$\dot{y} = A_3 H_{xx}(x(t))y \quad (4.5)$$

onde $H_{xx}(x)$ é a matriz Hessiana de H no ponto x e $y(t) \in T_{x(t)}S$. No referencial que trivializa TS , temos $y(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha^i(t)X_i(x(t))$. Denotando $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$ obtemos de (4.5)

$$\dot{\alpha} = -J \tilde{S} \alpha \quad (4.6)$$

onde \tilde{S} é a matriz dada por

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \langle H_{xx}X_1, X_1 \rangle & \langle H_{xx}X_1, X_2 \rangle \\ \langle H_{xx}X_1, X_2 \rangle & \langle H_{xx}X_2, X_2 \rangle \end{pmatrix} + \langle H_{xx}X_3, X_3 \rangle I \quad (4.7)$$

Teorema 4.2 *Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície $C^{k \geq 2}$ estritamente convexa, difeomorfa a S^3 tal que $0 \in B_S$. Então o vetor $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t)) \in \mathbb{R}^2$ gira em torno da origem sempre no sentido horário ou sempre no sentido anti-horário. Ver figura 4-2.*

Prova. Consideremos o vetor $\alpha(t) \wedge \dot{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^3$ onde a 3ª versor \vec{k} de \mathbb{R}^3 é ortogonal ao plano que contém a solução $\alpha(t)$. Então temos

$$\alpha(t) \wedge \dot{\alpha}(t) = (\alpha^1 \ \alpha^2) \tilde{S} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}^1 \\ \dot{\alpha}^2 \\ \dot{\alpha}^3 \end{pmatrix} \vec{k}$$

Como S é estritamente convexa, sabemos que S tem curvatura positiva e, portanto,

$$\begin{aligned} \det \tilde{S} &= |H_x|^2 \left\{ \det \begin{pmatrix} \langle dNX_1, X_1 \rangle & \langle dNX_1, X_2 \rangle \\ \langle dNX_1, X_2 \rangle & \langle dNX_2, X_2 \rangle \end{pmatrix} + \langle dNX_3, X_3 \rangle \operatorname{tr}(dN) \right\} \\ &= |H_x|^2 \{K_{X_1X_2} + k_3 \tilde{H}\} > 0 \end{aligned}$$

pois a curvatura seccional $K_{X_1X_2}$ de X_1 e X_2 é positiva e \tilde{H} , a curvatura média de S tem o mesmo sinal que a curvatura normal k_3 na direção X_3 . O traço de \tilde{S} , dado por

$$\operatorname{tr} \tilde{S} = \{\langle H_{xx}X_1, X_1 \rangle + \langle H_{xx}X_2, X_2 \rangle + 2 \langle H_{xx}X_3, X_3 \rangle\}$$

é positivo se o Hessiano de H é positivo-definido em TS e negativo, caso contrário. Logo, a matriz \tilde{S} é definida e, portanto, a componente \vec{k} de $\alpha(t) \wedge \dot{\alpha}(t)$ é sempre diferente de zero de modo que $\alpha(t)$ gira em torno da origem sempre no sentido anti-horário se o Hessiano de H é positivo-definido e no sentido horário, caso seja negativo-definido. Ver figura 4-2 ■

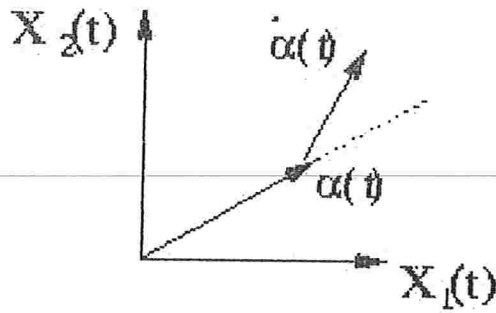


Figura 4-2: No referencial $X_1 X_2$ o vetor $\alpha(t)$ gira sempre no mesmo sentido.

4.2 Definição do índice de Conley-Zehnder generalizado de órbitas periódicas

O índice de Conley-Zehnder foi introduzido primeiramente em [CZ] e, em poucas palavras, mede o quanto órbitas próximas a uma dada órbita periódica "giram" em torno dela num determinado referencial. Denotaremos por P uma órbita periódica, dada por $x : [0, T] \rightarrow S$ onde T é seu período mínimo e $x([0, T]) = P$.

Estaremos também supondo que S é difeomorfo a S^3 e, portanto, S é simplesmente conexo.

Seja ξ um fibrado linear sobre S tal que para cada $x \in S$, a fibra $\xi_x \subset T_x S$ é um subespaço de dimensão 2 transversal a $X_H(x)$. Além disso, se $\varphi_t(x)$ é o fluxo gerado por X_H , supomos também que ξ é invariante por $D\varphi_t$. Seja $v_D : D \rightarrow M$ um mergulho do disco compacto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ em S tal que $v_D(e^{2\pi i t}) = x(tT)$. Seja $\beta : v_D^* \xi \rightarrow D \times \mathbb{R}^2$ uma trivialização do fibrado $v_D^* \xi$ sobre D . Definimos agora o arco de matrizes simpléticas em dimensão 2, $\Phi : [0, T] \rightarrow Sp(1)$ pelo fluxo linearizado $D\varphi_t$ restrito a ξ ao longo da órbita periódica $x(t) = \varphi_t(x(0))$ da seguinte forma

$$\Phi(t) = \beta(e^{2\pi i t/T}) \circ D\varphi_t|_{\xi_{x(0)}} \circ \beta(1)^{-1}, 0 \leq t \leq T$$

O arco começa na identidade $\Phi(0) = I$ e a órbita periódica é não-degenerada se e só se $\Phi(T)$ não possui o inteiro 1 como autovalor.

Daremos em primeiro lugar uma formulação espectral para o cálculo do índice de Conley-Zehnder generalizado que independe da degenerescência da órbita periódica.

O arco Φ de matrizes simpléticas satisfaz $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$ e, portanto, se definirmos $A(t) \stackrel{\text{def}}{=} -J_0 \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)$ temos que $A(t)$ é um arco de matrizes simétricas e $A(t) = A(t+T)$.

Definimos agora o operador $L_A : H^{1,2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ dado por $L_A \stackrel{\text{def}}{=} -J_0 \frac{d}{dt} - A(t)$ onde $H^{1,2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ é o espaço de Sobolev dado pelas funções $g : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja derivada está em $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$. Este operador é auto-adjunto e seu espectro $\sigma(L_A)$ é constituído por um conjunto enumerável de números reais não limitado por cima e nem por baixo. Além disso $\ker L_A = \{0\}$ se e somente se 1 não é autovalor de $\Phi(T)$.

Seja $v \neq 0$ um autovetor em $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ associado a $\lambda \in \sigma(L_A)$. Então v satisfaz as seguintes relações

$$-J_0 \dot{v}(t) - A(t)v(t) = \lambda v(t), \quad v(0) = v(T) \quad (4.8)$$

Isso mostra que $v(t) \neq 0$ para qualquer $t \in [0, T]$ e, como v é periódica, podemos associar a v um *winding number* $\omega(\lambda, v, A)$. É possível mostrar as seguintes propriedades

(i) Dois autovetores v_1 e v_2 de L_A , associados ao mesmo autovalor λ e linearmente independentes, determinam o mesmo *winding number*, ou seja, $\omega(\lambda, v_1, A) = \omega(\lambda, v_2, A)$. Desta forma, podemos apenas denotar o *winding number* por $\omega(\lambda, A)$;

(ii) Para cada número inteiro k , existem exatamente dois autovalores λ_1 e λ_2 , levando-se em consideração a multiplicidade dos autovalores, tais que $k = \omega(\lambda_1, A) = \omega(\lambda_2, A)$;

(iii) A aplicação $\omega_A : \sigma(L_A) \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\omega_A(\lambda) = \omega(\lambda, A)$ é monótono crescente;

Sejam $\alpha(A)$ e $p(A)$ os números inteiros dados por

$$\begin{aligned} \alpha(A) &= \max\{\omega(\lambda, A) \mid \lambda \in \sigma(L_A) \cap (-\infty, 0)\} \\ p(A) &= \begin{cases} 0 & \text{se existe } \lambda \in \sigma(L_A) \cap [0, \infty) \text{ tal que } \omega(\lambda, A) = \alpha(A) \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Tais propriedades aparecem com mais detalhes em [HZW2] e [HZW3].

Definimos $\tilde{\mu}(A) = 2\alpha(A) + p(A)$. É possível mostrar que esta definição independe da trivialização β . Como estamos supondo que S é difeomorfo a S^3 , o cálculo de $\tilde{\mu}(A)$ também independe do mergulho v_D . O índice de Conley-Zehnder generalizado da órbita periódica P é definido por $\tilde{\mu}_{CZ}(P) = \tilde{\mu}(A)$.

Uma definição mais geométrica do índice de Conley-Zehnder para órbitas periódicas não-

degeneradas é apresentada a seguir: considere o arco de matrizes simpléticas $\Phi : [0, T] \rightarrow Sp(\mathbb{1})$ definido acima. Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\rho(t)$ um argumento contínuo para a solução $z(t) = \Phi(t)z$, ou seja, $\rho(t)$ é uma função real contínua em $[0, T]$ tal que $e^{2\pi i \rho(t)} = \frac{z(t)}{|z(t)|}$. Seja $\Delta(z) \stackrel{def}{=} \rho(T) - \rho(0)$ e definimos o intervalo associado ao arco Φ por $I(\Phi) = \{\Delta(z) : z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. O conjunto $I(\Phi)$ é um intervalo com comprimento menor que $1/2$ e, portanto, está contido entre 2 inteiros ou contém um inteiro. Podemos definir, então

$$\tilde{\mu}(\Phi) = \begin{cases} 2k + 1 & \text{se } I(\Phi) \subset (k, k + 1) \\ 2k & \text{se } k \in I(\Phi) \end{cases}$$

Como M é difeomorfa a S^3 , $\tilde{\mu}(\Phi)$ não depende do mergulho v_D . Além disso também não depende da trivialização β (ver [HZW2]). Assim, podemos definir um novo índice $\tilde{\mu}_2(P)$ da órbita periódica não-degenerada P , por $\tilde{\mu}_2(P) = \tilde{\mu}(\Phi)$.

Proposição 4.1 *Para órbitas periódicas não-degeneradas, temos que $\tilde{\mu}_{CZ}(P) = \tilde{\mu}_2(P)$.*

Prova. Ver [HK]. ■

O cálculo de $\tilde{\mu}_2(P)$ pode também ser feito para órbitas periódicas degeneradas, porém nem sempre dá exatamente o índice de Conley-Zehnder $\tilde{\mu}_{CZ}(P)$. Apesar disso, temos uma boa estimativa, conforme a seguinte proposição

Proposição 4.2 *Para órbitas periódicas degeneradas, temos $\tilde{\mu}_{CZ}(P) = \tilde{\mu}_2(P)$ ou $\tilde{\mu}_{CZ}(P) = \tilde{\mu}_2(P) - 1$.*

Prova. Sabemos que quando uma órbita periódica é degenerada, o operador L_A possui algum autovetor $v \neq 0$ em $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ associado ao autovalor 0. Por (4.8) sabemos que v satisfaz $\dot{v}(t) = \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)v(t)$ e, portanto, temos que $v(t) = \Phi(t)v(0)$. Como v é periódica, temos que $\tilde{\mu}_2(P) = 2\omega(0, A)$. Das propriedades de $\omega(\lambda, A)$ e da definição de $\alpha(A)$ concluímos que $\alpha(A) = \omega(0, A)$ (neste caso $p(A) = 0$) ou $\alpha(A) = \omega(0, A) - 1$ (neste caso $p(A) = 1$). Então temos $\tilde{\mu}_{CZ}(P) = \tilde{\mu}(A) = 2\omega(0, A) = \tilde{\mu}_2(P)$ ou $\tilde{\mu}_{CZ}(P) = \tilde{\mu}(A) = 2\omega(0, A) - 1 = \tilde{\mu}_2(P) - 1$. ■

Uma definição mais axiomática e geral do índice de Conley-Zehnder pode ser vista em [CZ].

4.3 Equivalência do Fluxo Hamiltoniano em Hipersuperfícies Regulares

Nesta seção, mostraremos que o fluxo Hamiltoniano em um determinado nível de energia S depende fundamentalmente de S e não da função Hamiltoniana que o determina.

Proposição 4.3 *Seja S uma hipersuperfície $C^{k \geq 2}$, conexa e orientável em \mathbb{R}^4 . Sejam $H, G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, duas funções $C^{k \geq 2}$ tais que $S \subset H^{-1}(c_1)$ e $S \subset G^{-1}(c_2)$ e para todo $x \in S$, x é ponto regular de H e G . Então o fluxo Hamiltoniano associado às funções H e G são iguais em S , a menos de uma reparametrização no tempo.*

Prova. Sabemos que o fluxo Hamiltoniano preserva níveis de energia, portanto, vamos mostrar que para todo $x \in S$, temos $X_H(x) = f(x)X_G(x)$ para alguma função diferenciável não nula $f : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $N : S \rightarrow S^3$ uma orientação em S , ou seja, N é uma aplicação contínua que associa a cada $x \in S$ um vetor unitário $N(x)$ normal a S em x .

Para todo $x \in S$ sabemos, por hipótese, que os vetores gradiente $H_x(x)$ e $G_x(x)$ são diferentes de zero. Além disso eles devem ser paralelos pois ambos são paralelos a $N(x)$. Portanto $G_x(x) = f(x)H_x(x)$ onde f é uma função diferenciável e diferente de zero.

Dada uma solução $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ do fluxo Hamiltoniano

$$\frac{dx}{dt} = J_0 H_x(x), x(0) = x_0 \quad (4.9)$$

então existe um difeomorfismo $k : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$, $k(0) = 0$, tal que $\tilde{x}(t) \stackrel{def}{=} x(k(t))$ é solução de

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = J_0 G_x(\tilde{x}), \tilde{x}(0) = x_0 \quad (4.10)$$

Para isso, basta definir k como solução de

$$\dot{k} = f(x(k(t))) \quad (4.11)$$

e observar que $\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx(k(t))}{dt} \dot{k} = f(x(k(t)))J_0 H_x(x(k(t))) = J_0 G_x(\tilde{x})$. As soluções de $X_H(x)$ e $X_G(x)$ são, portanto, iguais após a reparametrização k . ■

O fluxo linearizado de X_H restrito a TS , ao longo de uma solução $x(t)$, é dado por

$$\dot{y} = J_0 H_{xx}(x(t))y \quad (4.12)$$

onde $y(t) \in T_{x(t)}S$ para todo $t \in I$. Analogamente, o fluxo linearizado de X_G restrito a TS ao longo de uma solução $\tilde{x}(t)$ é dado por

$$\dot{y} = J_0 G_{xx}(\tilde{x}(t))y \quad (4.13)$$

onde $\tilde{y}(t) \in T_{\tilde{x}(t)}S$.

Vamos mostrar agora que o fluxo linearizado independe da função Hamiltoniana que determina a superfície S no plano ortogonal à direção do campo Hamiltoniano.

Para isso, lembremos a trivialização de TS já apresentada anteriormente. Em cada ponto $x \in S$, $T = \{X_1(x), X_2(x), X_3(x)\}$ é uma base ortonormal de $T_x S$ tal que $X_3(x)$ está na mesma direção do campo Hamiltoniano associado a S . Sejam α_i , $i = 1, 2, 3$ as componentes de $y(t)$ na base T .

Proposição 4.4 *Considerando as mesmas hipóteses e notações da proposição 4.3 temos que se $y(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \in T_{x(t)}S$ é solução de (4.12) e $\tilde{y}(t) = (\tilde{\alpha}_1(t), \tilde{\alpha}_2(t), \tilde{\alpha}_3(t)) \in T_{\tilde{x}(t)}S$ é solução de (4.13), $\tilde{y}(0) = y(0)$, então $\tilde{\alpha}_1(t) = \alpha_1(k(t))$ e $\tilde{\alpha}_2(t) = \alpha_2(k(t))$, onde k foi definida em (4.11).*

Prova. Seja

$$R_x \stackrel{\text{def}}{=} J \left[\begin{pmatrix} \langle dN X_1, X_1 \rangle & \langle dN X_1, X_2 \rangle \\ \langle dN X_1, X_2 \rangle & \langle dN X_2, X_2 \rangle \end{pmatrix} + \langle dN X_3, X_3 \rangle I \right]_x$$

Lembramos que

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = -|H_x| R_{x(t)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Definindo-se $\beta_1(t) = \alpha_1(k(t))$ e $\beta_2(t) = \alpha_2(k(t))$, temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} &= \dot{k} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(k(t)) \\ \dot{\alpha}_2(k(t)) \end{pmatrix} = -\dot{k} |H_x| R_{x(k(t))} \begin{pmatrix} \alpha_1(k(t)) \\ \alpha_2(k(t)) \end{pmatrix} \\ &= -|G_x| R_{x(t)} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e, portanto, $\beta_i(t) = \tilde{\alpha}_i(t)$ para $i = 1, 2$. ■

As proposições 4.3 e 4.4 dizem que além de as soluções de $X_H(x)$ e $X_G(x)$ serem iguais em S , após uma reparametrização no tempo, a projeção no plano $\{X_1, X_2\}$ do fluxo linearizado em TS ao longo de uma solução é também igual após feita a mesma reparametrização no tempo. Usaremos a expressão "fluxo Hamiltoniano em S " quando não for necessário explicitar uma particular função Hamiltoniana H tal que S e H satisfaçam as hipóteses do teorema 4.3.

Vimos que o cálculo do índice de Conley-Zehnder de uma órbita periódica depende da projeção do fluxo linearizado no plano gerado por X_1 e X_2 . A Proposição 4.4 garante que este cálculo não sofre nenhuma alteração com a mudança da função Hamiltoniana escolhida.

Se S é uma hipersuperfície estritamente convexa e difeomorfa a S^3 tal que a origem esteja contida em seu interior, podemos considerar o fibrado ξ sobre S , também chamado de estrutura de contato, definido por

$$\xi = \{(x, v) \in TS, \lambda_0(x)v = 0\}$$

A fibra ξ_p , em cada ponto $p \in S$, é bi-dimensional e transversal ao campo Hamiltoniano X_H . Ver definição de λ_0 em (8.1). Logo ξ pode ser trivializada conforme (4.3).

Na direção de X_H o fluxo linearizado do campo Hamiltoniano muda conforme a escolha da função Hamiltoniana que tem S como conjunto regular, e por isso, em geral, a estrutura de contato ξ não é invariante pelo fluxo. Entretanto, podemos sempre escolher $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $S = H^{-1}(1)$ e o fluxo Hamiltoniano associado a H preserva a estrutura de contato ξ .

Para o cálculo do índice de Conley-Zehnder de uma órbita periódica P contida em S , devemos trivializar a estrutura de contato ξ sobre um disco compacto mergulhado D tal que $P = \partial D$. Vimos que a base $\tilde{T} = \{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$, definida em (4.3), trivializa o fibrado ξ em qualquer subconjunto de S e, em particular, em D . Essa trivialização pode ser simplética fazendo-se uma

mudança de escala (considerando a forma simplética canônica em \mathbb{R}^2 e a forma simplética $d\lambda_0$ restrita a ξ). Como usamos apenas o argumento do vetor na base \tilde{T} para o cálculo do índice de Conley-Zehnder, essa mudança de escala não é relevante. As coordenadas na base \tilde{T} são iguais às coordenadas na base $\{X_1, X_2\}$. Portanto, podemos calcular o índice de Conley-Zehnder apenas olhando para a projeção do fluxo linearizado sobre o plano gerado por X_1 e X_2 .

Por exemplo, consideremos o elipsóide $E = H^{-1}(1)$ onde $H = x_1^2 + p_1^2 + \frac{x_2^2 + p_2^2}{r^2}$ e r^2 é um irracional maior que 1. O fluxo Hamiltoniano X_H em E possui exatamente 2 órbitas periódicas dadas por $P_1 = \{x_1^2 + p_1^2 = 1, x_2 = p_2 = 0\}$ e $P_2 = \{x_2^2 + p_2^2 = r^2, x_1 = p_1 = 0\}$. Ambas as órbitas são não-degeneradas e, portanto, podemos calcular $\mu_{CZ}(P_1)$ e $\mu_{CZ}(P_2)$ pelo método geométrico descrito acima. A projeção do fluxo linearizado sobre o plano gerado por X_1 e X_2 ao longo das órbitas periódicas P_1 e P_2 é dada pela equação (4.6)

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(2 + \frac{2}{r^2}) \\ 2 + \frac{2}{r^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

O período de P_1 é π . A variação de argumento de uma solução no período π é $(1 + \frac{1}{r^2})2\pi$. Como $2 < 2(1 + \frac{1}{r^2}) < 4$, temos que $\mu_{CZ}(P_1) = 3$. O período de P_2 é πr^2 e a variação de argumento de uma solução nesse período é $(1 + r^2)2\pi$. Logo $\mu_{CZ}(P_2) = 2k + 1$, onde k é o inteiro que satisfaz $k < 1 + r^2 < k + 1$.

Fazendo-se $r = 1$ no exemplo anterior obtemos a esfera S^3 . Todas as órbitas em S^3 são periódicas e degeneradas. Pela simetria esférica, o índice de Conley-Zehnder $\mu_{CZ}(P)$ independe da escolha da órbita periódica P e, por ser degenerada, não podemos calculá-lo utilizando o método geométrico. Mas podemos fazer uma estimativa conforme a Proposição 4.2. Temos nesse caso $\tilde{\mu}_2(P) = 4$ e, portanto $\mu_{CZ}(P) = 3$ ou $\mu_{CZ}(P) = 4$. Veremos mais adiante que hipersuperfícies estritamente convexas, como o elipsóide e a esfera, possuem sempre uma órbita periódica com índice de Conley-Zehnder igual a 3. Portanto, $\mu_{CZ}(P) = 3$ para todas as órbitas periódicas de S^3 . O método espectral também é uma forma simples e direta de se calcular o índice de Conley-Zehnder das órbitas periódicas em S^3 .

4.4 Conjuntos invariantes em hipersuperfícies de \mathbb{R}^4

Nesta seção apresentaremos uma condição para a não existência de órbitas periódicas em hipersuperfícies de \mathbb{R}^4 .

Teorema 4.3 *Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície $C^{k \geq 1}$, orientável e conexa. Seja $K \subset S$ um compacto. Suponhamos que exista um vetor $N \in \mathbb{R}^4$, $N \neq 0$, tal que para todo $x \in K$, temos $\langle N(x), N \rangle \neq 0$, onde $N : S \rightarrow S^3$ é um campo de vetores unitário contínuo normal a S . Então o fluxo Hamiltoniano em S não possui órbitas totalmente contidas em K . Em particular, não existem órbitas periódicas em K .*

Prova. Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana $C^{k \geq 1}$, tal que $S \subset H^{-1}(c)$ para algum $c \in \text{Im}(H)$ tal que todo ponto $x \in S$, x é ponto regular de H .

Seja $X_i = A_i N$, $i = 1, 2, 3$, onde A_i são matrizes definidas em (4.1). Então o conjunto $X \stackrel{\text{def}}{=} \{X_1, X_2, X_3, N\}$ forma uma base ortonormal para \mathbb{R}^4 . Se $x \in S$, então $x = x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 N$. Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) \in S$ uma solução do fluxo Hamiltoniano associado à função H , cujas coordenadas estão na base X . Temos

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t)X_1 + \dot{x}_2(t)X_2 + \dot{x}_3(t)X_3 + \dot{x}_4(t)N$$

$$\dot{x}_3(t) = \langle \dot{x}(t), X_3 \rangle$$

Por hipótese $\langle N(x), N \rangle \neq 0$ para todo $x \in U_K$, uma vizinhança aberta de K em S . Como $A_3^t = -A_3$ e $A_3 A_3 = -I_{4 \times 4}$, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= \langle \dot{x}(t), X_3 \rangle = \langle A_3 H_x(x(t)), X_3 \rangle = \langle H_x(x(t)), A_3^t A_3 N \rangle \\ &= \|H_x(x(t))\| \left\langle \frac{H_x(x(\tilde{t}))}{\|H_x(x(\tilde{t}))\|}, N \right\rangle = \pm \|H_x(x(t))\| \langle N(x), N \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $\dot{x}_3(t) \neq 0$. Logo $x_3(t)$ é uma função monótona em U_K . Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\dot{x}_3(t) > 0$ para toda solução em U_K . Ver figura 4-3.

Suponhamos que $x(t) \in K$ para todo $t > 0$. Como K é compacto, existem números reais $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ tal que $x(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z \in K$. Seja $x_3(x)$ a coordenada x_3 do ponto x na base X . Então,

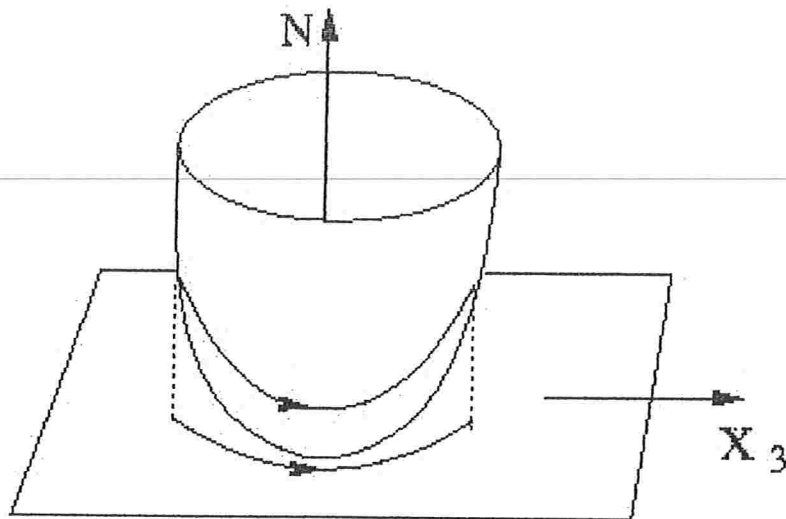


Figura 4-3: Na direção X_3 o fluxo é monótono em K .

por continuidade, $x_3(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_3(z)$. Mas $X_H(z) \neq 0$ pois z é ponto regular de H , logo existe uma vizinhança $U_z \subset U_K$ de z em S e $\delta > 0$ tais que $\varphi(\delta, U_z) \cap U_z = \emptyset$. Podemos também supor que $\varphi(\delta, U_z) \subset U_K$ e que $x_3(x) > x_3(y)$ para todo $x \in \varphi(\delta, U_z)$ e $y \in U_z$ pois $\dot{x}_3 > 0$ em todas as soluções contidas em U_K . Portanto existe uma seqüência de números reais $s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ tal que $x(s_k) \in \varphi(\delta, U_z)$ onde $x_3(s_k) > x_3(z)$, uma contradição. ■

Corolário 4.1 *Seja S uma hipersuperfície representada como gráfico de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $C^{k \geq 1}$, ou seja, $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3) \in U, x_4 = f(x_1, x_2, x_3)\}$ onde U é um aberto conexo. Então o fluxo Hamiltoniano não apresenta órbitas periódicas em qualquer compacto contido em S .*

Prova. Seja $N = (0, 0, 0, 1)$ nas coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) . O vetor normal a S em x pode ser expressado por $N(x) = \frac{1}{\|(-f_{x_1}(x), -f_{x_2}(x), -f_{x_3}(x), 1)\|} (-f_{x_1}(x), -f_{x_2}(x), -f_{x_3}(x), 1) \neq 0$ pois a função f é C^1 . Logo $\langle N(x), N \rangle \neq 0$ para todo $x \in S$. Então S satisfaz as hipóteses do teorema 4.3 e, portanto, não existem órbitas periódicas do fluxo Hamiltoniano em S . ■

Proposição 4.5 *Seja S uma hipersuperfície $C^{k \geq 1}$, orientável, em \mathbb{R}^4 e $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $S = H^{-1}(c)$ para algum valor regular c . Seja $\varphi(t, x)$ o fluxo Hamiltoniano associado a H . Seja $K \subset S$ um compacto com as seguintes propriedades: (i) K é difeomorfo*

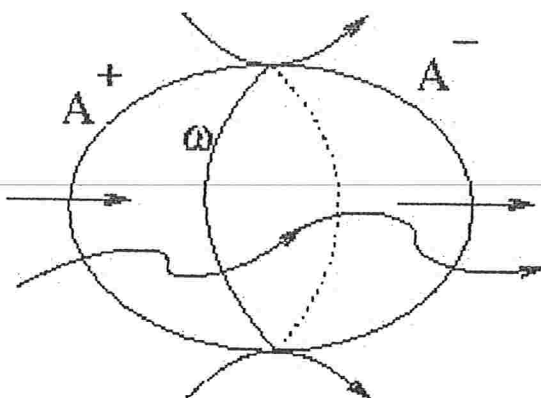


Figura 4-4: Toda órbita que entra no compacto K por A^+ deve sair de K por A^- .

a B^3 , a bola unitária de dimensão 3; (ii) $\partial K = A^+ \cup A^- \cup \omega$, onde A^+ e A^- são difeomorfos a D^2 e ω é difeomorfo a S^1 . O campo $X_H(x)$ é transversal a ∂K para todo $x \in A^+ \cup A^-$. Se $x \in A^+$ então $\varphi(t, x) \in K$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi(t, x) \notin K$ para todo $t < 0$ suficientemente pequeno. Analogamente se $x \in A^-$ então $\varphi(t, x) \notin K$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi(t, x) \in K$ para todo $t < 0$ suficientemente pequeno. O conjunto ω é formado pelos pontos x cuja órbita tangencia K e para todo tempo $t \neq 0$ suficientemente pequeno $\varphi(t, x) \notin K$. (iii) Existe um vetor N tal que $\langle N(x), N \rangle \neq 0$ para todo $x \in K$, onde $N(x)$ é um campo de vetores contínuo normal a S ; Então existe um difeomorfismo $\varphi_K : A^+ \rightarrow A^-$ que descreve o fluxo $\varphi(t, x)$ em $\overset{\circ}{K}$, ou seja, se $x \in A^+$, existe $t_x > 0$ tal que $\varphi_K(x) = \varphi(t_x, x) \in A^-$ e $\varphi(t, x) \in \overset{\circ}{K}$ para todo $0 < t < t_x$. Ver figura 4-4.

Prova. Sabemos, pelo Teorema 4.3, que não existem órbitas totalmente contidas em K e, portanto, a solução $x(t)$ que passa por $x \in A^+$ deve sair de K e, pela hipótese feita sobre ω , $x(t)$ sai de K por A^- , ou seja existe $t_x > 0$ tal que $x(t_x) \in A^-$ e $x(t_x) \in \overset{\circ}{K}$ para $0 < t < t_x$. Seja $\varphi_K : A^+ \rightarrow A^-$ onde $\varphi_K(x) \stackrel{def}{=} x(t_x) = \varphi(t_x, x)$. Obviamente φ_K está bem definida e, considerando-se o campo $-X_H$, vemos que φ_K é bijetora. A transversalidade do campo em $A^+ \cup A^-$ e a regularidade de ∂K nos garante que φ_K é um difeomorfismo local, e, portanto, φ_K é um difeomorfismo. ■

Capítulo 5

Estimativa do índice de Conley-Zehnder para órbitas periódicas que passam nas proximidades de um sela-centro

Seja p_c , diferente da origem, um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro para o fluxo Hamiltoniano gerado por $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ onde H é uma função real-analítica. Como já vimos, podemos aplicar o Teorema de Moser e encontrar coordenadas numa vizinhança de p_c onde o fluxo se apresenta numa forma bastante simplificada. Utilizaremos essas coordenadas para estimarmos o índice de Conley-Zehnder de órbitas periódicas que passam perto do equilíbrio p_c .

Suponhamos $H(p_c) = 0$. Sabemos que $H_x(p_c) = 0$ e, portanto, podemos escrever a função H da seguinte forma

$$H(x) = \frac{1}{2} \langle A(x - p_c), (x - p_c) \rangle + R_0(x - p_c) \quad (5.1)$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $\|R_0(x)\| \leq r_0 \|x\|^3$. A matriz A é tal que JA possui um par de autovalores reais $\pm \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} > 0$), e um par de autovalores imaginários puros $\pm \bar{\omega} i$ ($\bar{\omega} > 0$).

Seja U uma vizinhança de p_c em \mathbb{R}^4 onde vale o Teorema de Moser. Seja $\varphi : V \rightarrow U$

a mudança de coordenadas que conjunga o fluxo gerado por H em U ao fluxo gerado pelo Hamiltoniano $K : V \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$K(I_1, I_2) = -\bar{\alpha} I_1 + \bar{\omega} I_2 + \mathcal{O}(I_1^2 + I_2^2) \quad (5.2)$$

onde $I_1 = q_1 p_1$ e $I_2 = \frac{q_2^2 + p_2^2}{2}$. As coordenadas em V são $y = (q_1, q_2, p_1, p_2)$.

Suponhamos que exista um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^4$ que satisfaça as seguintes propriedades:

- (i) $S \subset H^{-1}(0)$;
- (ii) $p_c \in S$;
- (iii) S é homeomorfo a S^3 ;
- (iv) S é invariante pelo fluxo Hamiltoniano gerado por H ;
- (v) p_c é o único ponto crítico de S , ou seja, $H_x(q) \neq 0$ para todo $q \in S$, $q \neq p_c$;
- (vi) $S \setminus \{p_c\}$ é estritamente convexa.

O conjunto $S_0 \stackrel{def}{=} S \setminus \{p_c\}$ é, portanto, uma hipersuperfície regular de \mathbb{R}^4 , invariante pelo fluxo de H . Podemos calcular os vetores X_i , $i = 1, 2, 3$, que trivializam TS_0 conforme (4.2). Queremos estimar X_i sobre a variedade estável de p_c .

Sabemos que em V , a variedade estável local do sela-centro é dada pelo conjunto $\tilde{W}_V^s = \{q_1 \in \mathbb{R} \mid (q_1, 0, 0, 0) \in V\}$, ou seja, é um segmento de reta r em V gerado pelo vetor $v_1 = (1, 0, 0, 0)$. Vamos supor que o ramo da variedade estável de p_c contido em S_0 seja dado pelos pontos em \tilde{W}_V^s que satisfazem $q_1 > 0$. O caso $q_1 < 0$ é análogo. Logo, pela aplicação φ , que é um difeomorfismo, a variedade estável local de p_c em S_0 é um conjunto que se aproxima perto da origem de uma semi-reta s gerada pelo vetor $u_1 \stackrel{def}{=} M v_1$ onde $M \stackrel{def}{=} D\varphi(0)$. Sabemos que $\varphi(y) = p_c + M y + L_0(y)$, onde $\|L_0(y)\| \leq l_0 \|y\|^2$, $l_0 > 0$, e, em S_0 , a variedade estável de p_c é dada localmente por $W_{S_0}^s \stackrel{def}{=} \varphi(W_V^s) = \{p_c + q_1 u_1 + Z_0(q_1), 0 \leq q_1 \leq \delta\}$ onde $\|Z_0(x)\| \leq z_0 x^2$, $z_0 > 0$. Seja $N(x)$ o vetor normal a S_0 no ponto $x \in S_0$.

Lema 5.1 *Para $x \in W_{S_0}^s$, temos $X_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow p_c} X_i^\infty \stackrel{def}{=} \frac{A_i A u_1}{\|A u_1\|}$ e $N(x) \xrightarrow{x \rightarrow p_c} \frac{A u_1}{\|A u_1\|}$.*

Prova. Por (5.1) temos que $H_x(x) = A(x - p_c) + R_1(x - p_c)$ onde $\|R_1(x)\| \leq r_1 \|x\|^2$. Então, se $x \in W_{S_0}^s$, temos

$$H_x(x(q_1)) = q_1 A u_1 + A Z_0(q_1) + R_1(q_1 u_1 + Z_0(q_1)) \quad (5.3)$$

Mas

$$\begin{aligned}
\|AZ_0(q_1)\| &\leq \|A\| \|Z_0(q_1)\| \leq \tilde{z}_0 q_1^2 \\
\|R_1(q_1 u_1 + Z_0(q_1))\| &\leq r_1 \|q_1 u_1 + Z_0(q_1)\|^2 \\
\|q_1 u_1 + Z_0(q_1)\| &\leq \tilde{r}_0 q_1 + z_0 q_1^2 \leq \hat{r}_0 q_1
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Usando (5.3) e (5.4) temos que $H_x(x(q_1)) = q_1 A u_1 + R_2(q_1)$ onde $\|R_2(q_1)\| \leq r_2 q_1^2$ e $r_2 = \hat{r}_0^2 + \tilde{z}_0 > 0$. Logo

$$\begin{aligned}
X_i(x(q_1)) &= \frac{A_i(q_1 A u_1 + R_2(q_1))}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|} = \frac{q_1 A_i A u_1}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|} + \frac{A_i R_2(q_1)}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|} \\
N(x(q_1)) &= \frac{H_x(x(q_1))}{\|H_x(x(q_1))\|} = \frac{q_1 A u_1}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|} + \frac{R_2(q_1)}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|}
\end{aligned}$$

Denotando $c_1 = \frac{q_1 A u_1}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|}$ e $c_2 = \frac{R_2(q_1)}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|}$ vamos mostrar que $c_1 \rightarrow \frac{A u_1}{\|A u_1\|}$ e $c_2 \rightarrow 0$ quando $q_1 \rightarrow 0$. Temos

$$\begin{aligned}
\left\| c_1 - \frac{A u_1}{\|A u_1\|} \right\| &= \left\| \frac{q_1 A u_1}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|} - \frac{q_1 A u_1}{\|q_1 A u_1\|} \right\| \\
&= \frac{\left| \|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\| - \|q_1 A u_1\| \right|}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|}
\end{aligned}$$

Usando a relação $|\|m\| - \|n\|| \leq \|m - n\|$ temos $|\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\| - \|q_1 A u_1\|| \leq \|R_2(q_1)\| \leq r_2 q_1^2$. Para q_1 suficientemente pequeno, temos $\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\| \geq d_0 q_1 - r_2 q_1^2 \geq \tilde{d}_0 q_1$ para algum $\tilde{d}_0 > 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\left\| c_1 - \frac{A u_1}{\|A u_1\|} \right\| &\leq \frac{r_2 q_1}{\tilde{d}_0} \xrightarrow{q_1 \rightarrow 0} 0 \\
\|c_2\| &= \frac{\|A_i R_2(q_1)\|}{\|q_1 A u_1 + R_2(q_1)\|} \leq \frac{r_2 q_1}{\tilde{d}_0} \xrightarrow{q_1 \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

Concluimos que $X_i(x(q_1)) \xrightarrow{q_1 \rightarrow 0} \frac{A_i A u_1}{\|A u_1\|}$ e $N(x(q_1)) \xrightarrow{q_1 \rightarrow 0} \frac{A u_1}{\|A u_1\|}$ mas, em $W_{S_0}^s$, $q_1 \rightarrow 0$ se e só se $x \rightarrow p_c$, completando a demonstração do lema. ■

Seja $m(t, x)$ o fluxo Hamiltoniano em U gerado pela função dada em (5.1). Seja $n(t, y)$ o fluxo Hamiltoniano em V associado à função (5.2). Usaremos a notação $m_t(x) \stackrel{def}{=} m(t, x)$ e $n_t(y) = n(t, y)$.

Sabemos que o difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow U$ conjuga os fluxos $m(t, x)$ e $n(t, y)$ onde estes estiverem definidos, ou seja,

$$\varphi \circ n_t = m_t \circ \varphi \quad (5.5)$$

Então temos

$$D_y \varphi D_y n_t = D_x m_t D_y \varphi \quad (5.6)$$

Seja $x : [0, \infty) \rightarrow U$ uma solução de

$$\dot{x} = J_0 H_x(x)$$

tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p_c$, $x_0 \in S_0$. Obviamente $x(t) = m(t, x(0))$. Sejam $X_i : [0, \infty) \rightarrow TS_0$, $i = 1, 2, 3$ vetores ortonormais definidos em (4.2) tais que $\{X_i(t)\}_{i=1,2,3}$ geram $T_{x(t)}S_0$. Sabemos que a solução $y : [0, \infty) \rightarrow V$ dada por $y(t) = n_t(\varphi^{-1}(x(0)))$ é conjugada à solução $x(t)$ por φ conforme (5.5) e corresponde a um ramo variedade estável de 0 em V . A solução $y(t)$ satisfaz

$$\dot{y} = J_0 K_y(y)$$

onde $K_y(y)$ é o vetor gradiente de K no ponto y . Portanto, $y(t) = (q_{10}e^{-\alpha t}, 0, 0, 0)$.

Podemos, da mesma forma trivializar TV_0 , onde $V_0 \stackrel{def}{=} V \setminus \{0\}$, obtendo sobre a solução $y(t)$ vetores ortonormais $\{Y_i(t)\}_{i=1,2,3}$ que geram $T_{y(t)}V_0$. Então, nas coordenadas $y = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ em V , temos

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= Y_1 = (0, 1, 0, 0) \\ Y_2(t) &= Y_2 = (0, 0, 0, -1) \\ Y_3(t) &= Y_3 = (-1, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Seja $v : [0, \infty) \rightarrow TS_0$ uma solução não nula do fluxo linearizado sobre $x(t)$

$$\dot{v} = J_0 H_{xx}(x(t))v$$

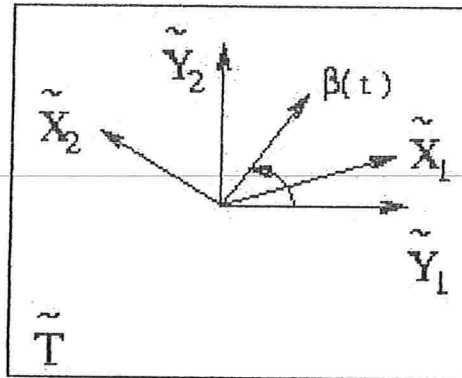


Figura 5-1: Existem duas bases para \tilde{T} : \tilde{X} e \tilde{Y} .

tal que $\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 \neq 0$ onde $v(t) = \alpha_1(t)X_1(t) + \alpha_2(t)X_2(t) + \alpha_3(t)X_3(t)$.

Queremos estimar o número de voltas que a projeção de $v(t)$ no plano gerado por $X_1(t)$ e $X_2(t)$ dá em torno da origem. Para isso, é suficiente estimarmos o número de voltas que o vetor $(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ dá em torno da origem. Seja $\tilde{X}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} D_x \varphi^{-1}(x(t))X_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ e seja $\tilde{T}(t)$ o plano gerado pelos vetores $\tilde{X}_1(t)$ e $\tilde{X}_2(t)$.

Como $\text{span}\{X_1(t), X_2(t)\} \cap X_H(x(t))$, então $\tilde{T}(t) \cap X_K(y(t)) \Rightarrow \tilde{T}(t) \cap Y_3$. Portanto, podemos considerar o isomorfismo $\pi_t: \tilde{T}(t) \rightarrow \{Y_1(t), Y_2(t)\}$ dado pela projeção ao longo de $Y_3(t)$, e definimos uma outra base em $\tilde{T}(t)$, $\tilde{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{Y}_1(t), \tilde{Y}_2(t)\}$ dada por

$$\tilde{Y}_i(t) = \pi_t^{-1}(Y_i), i = 1, 2$$

Então temos

$$\begin{aligned} g(t) &= \beta^1(t)Y_1(t) + \beta^2(t)Y_2(t) + \beta^3(t)Y_3(t) \\ &= \alpha^1(t)\tilde{X}_1(t) + \alpha^2(t)\tilde{X}_2(t) + \alpha^3(t)\tilde{X}_3(t) \\ &= \beta^1(t)\tilde{Y}_1(t) + \beta^2(t)\tilde{Y}_2(t) + \alpha^3(t)\tilde{X}_3(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ver figura 5-1.

Logo

$$\alpha^1(t)\tilde{X}_1(t) + \alpha^2(t)\tilde{X}_2(t) = \beta^1(t)\tilde{Y}_1(t) + \beta^2(t)\tilde{Y}_2(t) \quad (5.9)$$

Sabemos que

$$g(t) = Dn_t(y(t))g(0)$$

Logo $g(t)$ é solução de

$$\dot{g} = J_0 K_{yy}(y(t))g$$

onde $K_{yy}(y(t))$ é a matriz Hessiana de K no ponto $y(t)$. É fácil ver que

$$K_{yy}(y(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \bar{\omega} & 0 & 0 \\ -\bar{\alpha} & 0 & \gamma e^{-2\bar{\alpha}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Lema 5.2 *Temos*

$$\begin{pmatrix} \beta^1(t) \\ \beta^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\omega} t & -\sin \bar{\omega} t \\ \sin \bar{\omega} t & \cos \bar{\omega} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^1(0) \\ \beta^2(0) \end{pmatrix}$$

para todo $t \geq 0$.

Prova. Seja $\beta(t) = \begin{pmatrix} \beta^1(t) \\ \beta^2(t) \end{pmatrix}$. Sabemos, por (4.6) que

$$\dot{\beta} = -JS\beta$$

onde, por (4.7),

$$S = \begin{pmatrix} \langle K_{yy}(y(t))Y_1(t), Y_1(t) \rangle & \langle K_{yy}(y(t))Y_1(t), Y_2(t) \rangle \\ \langle K_{yy}(y(t))Y_1(t), Y_2(t) \rangle & \langle K_{yy}(y(t))Y_2(t), Y_2(t) \rangle \end{pmatrix} + \langle K_{yy}Y_3(t), Y_3(t) \rangle I$$

Então, por (5.7) e (5.10), temos

$$\langle K_{yy}(y(t))Y_1(t), Y_1(t) \rangle = \bar{\omega}$$

$$\langle K_{yy}(y(t))Y_1(t), Y_2(t) \rangle = 0$$

$$\langle K_{yy}(y(t))Y_2(t), Y_2(t) \rangle = \bar{\omega}$$

$$\langle K_{yy}Y_3(t), Y_3(t) \rangle = 0$$

Logo

$$S(t) = \begin{pmatrix} \bar{\omega} & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$\dot{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \beta$$

cuja solução é dada no enunciado do lema. ■

A solução $(\beta^1(t), \beta^2(t))$ é, portanto, dada por

$$\begin{pmatrix} \beta^1(t) \\ \beta^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\omega} t & -\sin \bar{\omega} t \\ \sin \bar{\omega} t & \cos \bar{\omega} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^1(0) \\ \beta^2(0) \end{pmatrix}$$

que corresponde a uma órbita circular em torno da origem com velocidade angular positiva constante. A projeção de $g(t)$ em $\tilde{T}(t)$ dá, portanto, infinitas voltas em torno da origem no referencial \tilde{Y} no sentido anti-horário.

Pelo Lema 5.1, sabemos que os vetores $X_i(t)$ convergem quando $t \rightarrow \infty$. Logo $\tilde{X}_i(t)$ e $\tilde{Y}_i(t)$ também convergem. Como $(\beta^1(t), \beta^2(t))$ gira infinitas vezes em torno da origem, então, por (5.9), o vetor $\beta^1(t) \tilde{Y}_1(t) + \beta^2(t) \tilde{Y}_2(t)$ também deve girar infinitas vezes com relação ao referencial \tilde{X} . E, portanto, o vetor $(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ também dá infinitas voltas em torno da origem.

Isso significa que o fluxo linearizado sobre um ramo da variedade estável de um sela-centro tende a um comportamento oscilatório quando projetado no plano gerado por pelos vetores X_1 e X_2 .

Sabemos que as equações que determinam o índice de Conley-Zehnder de uma órbita periódica são

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J_0 H_x(x) \\ \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} &= -|H_x| J \left[\begin{pmatrix} \langle dNX_1, X_1 \rangle & \langle dNX_1, X_2 \rangle \\ \langle dNX_1, X_2 \rangle & \langle dNX_2, X_2 \rangle \end{pmatrix} + \langle dNX_3, X_3 \rangle I \right]_{x(t)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Lema 5.3 *Se S_0 tem curvatura positiva, então dado $K \in \mathbb{N}$, existe uma vizinhança W de p_c em S tal que se P é uma órbita periódica que intersecta W , então $\mu_{CZ}(P) > K$.*

Prova. Sabemos que sobre a solução $x_s(t)$, $(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ dá infinitas voltas em torno da origem no sentido anti-horário. Podemos então escolher T_0 tal que $(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ dá $2(\lceil \frac{K}{2} \rceil + 1)$ voltas em torno da origem no tempo T_0 . Pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, existe uma vizinhança W_1 de $x_s(0)$ tal que qualquer órbita periódica que passa por W_2 tem período maior que T_0 .

Por dependência contínua das soluções das equações (5.11) com relação às condições iniciais, existe uma vizinhança $W_0 \subset W_1$ de $x_s(0)$ tal que a solução $\alpha(t)$ sobre qualquer solução $x(t)$ que começa em W_0 dá pelo menos $\lceil \frac{K}{2} \rceil + 1$ voltas em torno da origem no intervalo de tempo entre 0 e T_0 .

Como S_0 tem curvatura positiva, sabemos, pelo Teorema 4.2, que o ângulo de $(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ é crescente e portanto, após completar o período de uma órbita periódica P que passa por W_0 , o número de voltas de $(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ será de pelo menos $\lceil \frac{K}{2} \rceil + 1$. Pelas Proposições 4.1 e 4.2, o índice de Conley-Zehnder de uma órbita periódica pode ser estimado pelo número de voltas, conforme sua definição geométrica e, portanto, $\mu_{CZ}(P) > K$. Pela forma normal do sela-centro, é fácil ver que podemos encontrar uma vizinhança W de p_c tal que se uma órbita periódica P intersecta W então P intersecta W_0 . Logo $\mu_{CZ}(P) > K$ para toda órbita periódica P que intersecta W . ■

Capítulo 6

Seções Globais

6.1 Nível de energia do sela-centro

Seja X_H o campo Hamiltoniano restrito ao nível de energia $S = H^{-1}(a)$ onde a é um valor regular de $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $\Sigma \subset S$ é uma seção global do fluxo Hamiltoniano em S se Σ satisfaz as seguintes propriedades:

- i) Σ é um mergulho de uma superfície compacta;
- ii) $\partial \Sigma$ é constituído por órbitas periódicas de X_H ;
- iii) $\overset{\circ}{\Sigma}$ (o interior de Σ) é transversal a X_H ;
- iv) A órbita de qualquer ponto que não esteja contido em $\partial \Sigma$ intersecta Σ para frente e para trás no tempo;

O fluxo $\varphi(t, x)$ de X_H induz, portanto, um difeomorfismo $\tilde{\varphi} : \overset{\circ}{\Sigma} \rightarrow \overset{\circ}{\Sigma}$ da seguinte forma: dado $x \in \overset{\circ}{\Sigma}$, definimos $\tilde{\varphi}(x)$ o primeiro ponto da órbita para frente de x que intersecta $\overset{\circ}{\Sigma}$ novamente. A existência de uma seção global reduz, portanto, o estudo do fluxo num determinado nível de energia ao estudo de difeomorfismos em superfícies de dimensão 2.

Estamos interessados no caso em que Σ é um disco, ou seja, existe um mergulho $u : D \rightarrow S$ tal que $u(D) = \Sigma$, onde $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$. $\partial \Sigma$ é, neste caso, uma órbita periódica do fluxo $\varphi(t, x)$. Também consideramos apenas o caso em que S é difeomorfo a S^3 .

Seja $T_r : \overset{\circ}{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T_r(x) = \min\{t > 0 \mid \varphi(t, x) \in \overset{\circ}{\Sigma}\}$, ou seja, $\varphi(T_r(x), x) \in \overset{\circ}{\Sigma}$ e $\forall 0 < t < T_r(x)$ tal que $\varphi(t, x) \notin \overset{\circ}{\Sigma}$. A função T_r está bem definida, pois Σ é seção global, e é C^1 em $\overset{\circ}{\Sigma}$ devido à regularidade de Σ e do fluxo $\varphi(t, x)$.

Para cada $x \in \overset{\circ}{\Sigma}$, seja $o_1(x) \stackrel{def}{=} \{\varphi(t, x) \in S \mid 0 \leq t < T_r(x)\}$. Então $\partial \Sigma \cup \{ \bigcup_{x \in \overset{\circ}{\Sigma}} o_1(x) \} = S$.

Seja $\pi_\Sigma : S \setminus \partial \Sigma \rightarrow \overset{\circ}{\Sigma}$ onde $\pi_\Sigma(x) = z \in \overset{\circ}{\Sigma}$ se $x \in o_1(z)$. Seja $\Delta T_c : S \setminus \partial \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $\Delta T_c(x) = t \geq 0$ onde $\varphi(t, \pi_\Sigma(x)) = x$. Obviamente $\Delta T_c|_{\overset{\circ}{\Sigma}} = 0$ e $0 \leq \Delta T_c(x) < T_r(\pi_\Sigma(x))$ para todo $x \in S \setminus \partial \Sigma$.

Proposição 6.1 *Seja Σ uma seção global para o fluxo $\varphi(t, x)$. Seja $\Delta T_1 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função C^1 tal que*

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta T_1(x) < T_r(x) \text{ se } x \in \overset{\circ}{\Sigma} \\ \Delta T_1(x) = 0 \text{ numa vizinhança de } \partial \Sigma \text{ em } \Sigma \end{aligned}$$

Então $\tilde{\Sigma} = \{\varphi(\Delta T_1(x), x), x \in \Sigma\}$ é uma seção global para $\varphi(t, x)$.

Prova. Seja $\tilde{u} : D \rightarrow S$ dada por

$$\tilde{u}(z) = \varphi(\Delta T_1(u(z)), u(z))$$

onde $u : D \rightarrow S$ é um mergulho tal que $u(D) = \Sigma$. Então $\tilde{u}(D) = \tilde{\Sigma}$ e mostraremos que \tilde{u} também é um mergulho. Como Σ é uma seção transversal ao campo X_H , então $T_x S = T_x \Sigma \oplus X_H(x)$ e, como $\varphi(t, \cdot)$ é um difeomorfismo,

$$T_{\tilde{u}(z)} S = D_x \varphi(\Delta T_1(u(z)), u(z)) T_{u(z)} \Sigma \oplus X_H(\tilde{u}(z)) \quad (6.1)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} D_z \tilde{u} &= D_x \varphi(\Delta T_1(u(z)), u(z)) D_z u + \frac{\partial \varphi(\Delta T_1(u(z)), u(z))}{\partial t} D_x \Delta T_1(u(z)) D_z u \\ &= D_x \varphi(\Delta T_1(u(z)), u(z)) D_z u + X_H(\tilde{u}(z)) D_x \Delta T_1(u(z)) D_z u \end{aligned} \quad (6.2)$$

Devemos mostrar que a transformação linear $D_z \tilde{u}(z)$ é injetora. Como u é um mergulho, $D_z u(z) T_z D = T_{u(z)} \Sigma$. Seja $\{w_1, w_2\}$ uma base de $T_{u(z)} \Sigma$. Sejam $m_i, i = 1, 2$, os vetores em

$T_{\tilde{u}(z)} \tilde{\Sigma}$, dados por

$$m_i = D_x \varphi(\Delta T_1(u(z)), u(z)) w_i + X_H(\tilde{u}(z)) D_x \Delta T_1(u(z)) w_i \quad (6.3)$$

Por (6.1) e (6.2), os vetores m_1 e m_2 são linearmente independentes e, portanto, \tilde{u} é uma imersão. Pelo mesmo motivo, a reta $\mathbb{R}X_H(\varphi(\Delta T_1(u(z_0)), u(z_0)))$ não está contida em $T_{\tilde{u}(z)} \tilde{\Sigma}$. Logo $\tilde{\Sigma}$ é transversal ao campo X_H .

Obviamente \tilde{u} é contínua e injetora e sua inversa é dada por

$$\tilde{u}^{-1}(z) \stackrel{def}{=} \varphi(-\Delta T_1((\pi_{\Sigma}(z))), z)$$

Como $\Delta T_1(x) < T_r(x)$ para todo $x \in \tilde{\Sigma}$, podemos encontrar uma vizinhança U_x de $x \in \tilde{\Sigma}$ em S tal que para cada $y \in U_x \cap \tilde{\Sigma}$, temos $U_x \cap \tilde{\Sigma} \cap o_1(\pi_{\Sigma}(y)) = \{y\}$. Isso implica que \tilde{u} é um homeomorfismo de D sobre $\tilde{u}(D)$, considerando-se em $\tilde{u}(D)$ a topologia induzida por S .

Temos ainda $\partial \tilde{\Sigma} = \partial \Sigma$ pois ΔT_1 é zero numa vizinhança de $\partial \Sigma$. Obviamente a órbita de todo $p \in S \setminus \partial \tilde{\Sigma}$ intersecta $\tilde{\Sigma}$ para frente e para trás no tempo e, portanto $\tilde{\Sigma}$ é uma seção global para o fluxo $\varphi(t, z)$ em S . ■

Sabemos que hipersuperfícies difeomorfas a S^3 e estritamente convexas possuem seções globais. Mais precisamente, temos o seguinte Teorema de Hofer-Zehnder-Wysocki [HZW]

Teorema 6.1 *Seja $S = H^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície regular, compacta e estritamente convexa. Então existe uma órbita periódica P do fluxo Hamiltoniano de X_H com as seguintes propriedades:*

- (i) $P = \partial \Sigma$ é o bordo de um disco compacto Σ mergulhado em S ;
- (ii) $\overset{\circ}{\Sigma} = \Sigma \setminus \partial \Sigma$ é transversal a X_H ;
- (iii) Σ é uma seção global para X_H ;
- (iv) $\mu_{CZ}(P) = 3$ onde $\mu_{CZ}(P)$ é o índice de Conley-Zehnder da órbita periódica P , considerando seu período mínimo;
- (v) P não forma um nó em S e $sl(P)$, o *self-linking number* de P , é igual a -1 .

Além disso, o fluxo gerado por X_H possui 2 ou ∞ órbitas periódicas em S .

Para maiores detalhes sobre a definição do *self-linking number* de uma órbita periódica, ver [HZW].

Um importante resultado de [HZW] é que se $P \subset S$ é uma órbita periódica com índice de Conley-Zehnder igual a 3, *self-linking number* igual a -1 e tal que P não forma um nó em S então P é o bordo de uma seção global em S .

Consideraremos hipersuperfícies em \mathbb{R}^4 que não necessariamente sejam regulares, ou mais precisamente, que deixam de ser regulares em um único ponto p_c , correspondente à um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro. Queremos encontrar condições para existência de seções globais em hipersuperfícies não-regulares.

Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana real-analítica e $S \subset H^{-1}(c)$ uma hipersuperfície homeomorfa a S^3 com as seguintes propriedades:

- i) S é regular em todos os pontos exceto em p_c ;
- ii) p_c é um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro do fluxo Hamiltoniano associado a H .
- iii) Para todo $q \in S, q \neq p_c$, o Hessiano de H restrito a $T_q S$ é definido;
- (iv) Existe um plano suporte H_{p_c} de B_S , o interior de S , passando por p_c ;

Lembramos que p_c possui variedades estável e instável unidimensionais e, portanto, devemos adaptar o conceito de seção global. Chamamos Σ de seção global para S quando $p_c \notin \Sigma$ e Σ satisfaz todas as propriedades de seção global exceto que existem x_s e x_u pontos em Σ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x_s) = p_c$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{-t}(x_u) = p_c$, respectivamente, com a propriedade que tais semi-órbitas não passam por Σ para $t > 0$. Se definirmos $\tilde{\varphi} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ por: dado $x \in \Sigma$, $\tilde{\varphi}(x)$ é o primeiro ponto da órbita para frente de x que intersecta Σ novamente se $x \neq x_s$, $\tilde{\varphi}(x_s) = x_u$ e $\tilde{\varphi}^{-1}(x_u) = x_s$, obtemos um homeomorfismo do disco Σ .

Seja U_ϵ uma vizinhança de p_c contida em $B_\epsilon(p_c)$ onde vale o Teorema de Moser tal que se P é uma órbita periódica do fluxo X_H em S que intersecta U_ϵ , então $\mu_{CZ}(P) > 3$. A existência dessa vizinhança é garantida pelo Teorema 4.3. Seja $S_{U_\epsilon} \stackrel{def}{=} S \setminus U_\epsilon$. Utilizando o Teorema 2.2, podemos regularizar S_{U_ϵ} de modo a obter uma hipersuperfície $\tilde{S}_\epsilon \supset S_{U_\epsilon}$ difeomorfa a S^3 e estritamente convexa. Aplicando o Teorema 6.1 garantimos que existe em \tilde{S}_ϵ uma órbita periódica P que é bordo de uma seção global $\tilde{\Sigma}_\epsilon$. Além disso, sabemos que $\mu_{CZ}(P) = 3$. Seja $K_\epsilon \subset \tilde{S}_\epsilon$ o compacto definido por $K_\epsilon \stackrel{def}{=} (\tilde{S}_\epsilon \setminus S_{U_\epsilon}) \cup \partial S_{U_\epsilon}$. Se $P \cap K_\epsilon \neq \emptyset$ e $P \cap S_{U_\epsilon} \neq \emptyset$, então pelo Lema 5.3, $\mu_{CZ}(P) > 3$, portanto, $P \subset S_{U_\epsilon}$ ou $P \subset K_\epsilon$. Mas pela Proposição 4.5, $P \not\subset K_\epsilon$.

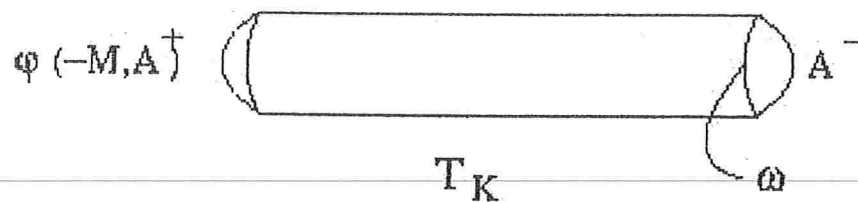


Figura 6-1: Representação esquemática do cilindro sólido T_K .

Logo $P \subset S_{U_\varepsilon}$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que P também é bordo de uma seção global para \tilde{S}_ε pois o índice de Conley-Zehnder e o self-linking number de P não se alteram com modificações em S longe de P . Portanto, consideramos, para todo $\varepsilon > 0$ a mesma órbita periódica P que é bordo de uma seção global para \tilde{S}_ε . Omitiremos o índice ε para facilitar de notação.

O conjunto $K \subset \tilde{S}$ é um compacto difeomorfo a B^3 com as seguintes propriedades:

(i) $\partial \Sigma \cap K = \emptyset$;

(ii) $\partial K = A^+ \cup A^- \cup \omega$, onde A^+ é um disco aberto tal que se $x \in A^+$ então $\varphi(t, x) \in K$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi(t, x) \notin K$ para todo $t < 0$ suficientemente pequeno. Analogamente A^- é um disco aberto tal que se $x \in A^-$ então $\varphi(t, x) \notin K$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi(t, x) \in K$ para todo $t < 0$ suficientemente pequeno. O conjunto ω é difeomorfo a S^1 e é formado pelos pontos x cuja órbita tangencia K e para todo tempo $t \neq 0$ suficientemente pequeno $\varphi(t, x) \notin K$. Além disso $\omega = \partial A^+ = \partial A^-$.

(iii) Existe um vetor $N \in \mathbb{R}^4$ tal que $\langle N(x), N \rangle \neq 0$ para todo $x \in K$, onde $N(x)$ é um vetor normal a K em x .

Associado ao conjunto K vamos construir um outro conjunto $T_K \subset S$ da seguinte forma: consideremos uma função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que \tilde{S} é um nível regular de H e o campo Hamiltoniano X_H satisfaz $\lambda_0(X_H) = 1$ (ver definição de λ_0 em (8.1)).

Seja $T_K = K \cup \bigcup_{0 \leq t \leq M} \varphi(-t, A^+ \cup \omega)$ onde $\varphi(t, x)$ é o fluxo do campo X_H e $M > 0$ é tal que $\varphi(-t, A^+ \cup \omega) \cap \{A^- \cup \omega\} = \emptyset$ para $0 < t \leq M$.

O conjunto T_K é um cilindro sólido cujo bordo é dado por $\partial T_K = \partial A^- \cup \bigcup_{0 \leq t \leq M} \varphi(-t, \omega) \cup \varphi(-M, A^+)$. Ver figura 6-1.

Suponhamos que Σ intersecta ∂T_K transversalmente. Então $\Sigma \cap \partial T_K = \bigcup_{i=1..r} C_i$ onde cada C_i é uma curva fechada simples. Consideremos o conjunto $I_\Sigma = \Sigma \cap T_K$. Então ∂I_K

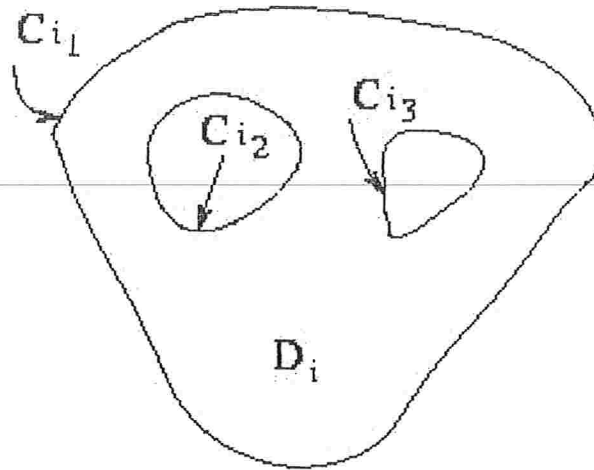


Figura 6-2: O bordo de D_i é formado por um número finito de curvas fechadas simples.

$= \sum \cap \partial T_K = \bigcup_{i=1..r} C_i$ pois $\partial \sum \cap T_K = \emptyset$. O conjunto I_Σ é formado por s componentes conexas, denotadas por D_j . O bordo de D_j é um conjunto finito de C_{j_i} 's. Ver figura 6-2.

Consideremos agora a seguinte hipótese

$$(H1) \quad D_j \cap \partial A^- = \emptyset \text{ ou } D_j \cap \varphi(-M, \partial A^+) = \emptyset \text{ para cada } j \in \{1, 2, \dots, s\} \quad (6.4)$$

Então temos

Teorema 6.2 *Suponhamos que para algum $\varepsilon > 0$ vale a hipótese (H1). Então existe uma seção global Σ_0 de \tilde{S} tal que $\Sigma_0 \cap K = \emptyset$ e $\partial \Sigma_0 = \partial \Sigma = P$. Além disso, Σ_0 também é seção global para S e se não existe órbita homoclínica a p_c , então o fluxo Hamiltoniano em S possui 2 ou ∞ órbitas periódicas.*

Prova. Movimentaremos Σ numa vizinhança de D_j para eliminarmos todas as interseções de Σ com K . Suponhamos que $D_j \cap \varphi(-M, \partial A^+) = \emptyset$. Queremos movimentar D_j para frente pelo fluxo para tirá-lo de T_K . Mas D_j pode estar obstruída por outra componente D_i , ou seja, não podemos movimentar D_j até tirarmos de T_K sem intersectarmos D_i durante o movimento. Ver figura 6-3.

Como Σ é transversal ao fluxo e T_K é uma caixa de fluxo, se D_i obstrui D_j para o movimento

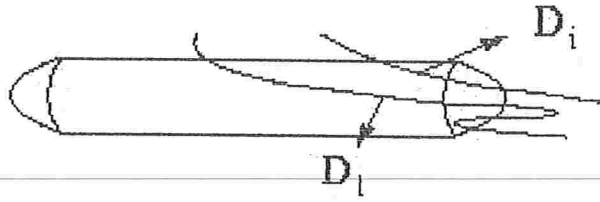


Figura 6-3: Uma componente D_i pode obstruir a movimentação para frente no tempo de D_l .

para frente, então D_l não pode obstruir D_i para o movimento para frente. Como temos um número finito de componentes conexas, então existe pelo menos uma componente conexa D_j que está desobstruída para o movimento para frente, ou seja, podemos usar o fluxo para tirarmos D_j de T_K sem termos problemas com novas intersecções.

Seja $\tilde{h}_j: D_j \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $\varphi(x, h_j(x)) \in A^-$. A função \tilde{h}_j está bem definida e é diferenciável. Além disso, como o bordo de D_j é formado por um número finito de curvas regulares, fechadas e simples, então dada uma vizinhança U_j de D_j em Σ , podemos estender \tilde{h}_j obtendo-se uma função diferenciável $h_j: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $h_j(x) = \tilde{h}_j(x)$ se $x \in D_j$ e $h_j(x) = 0$ se $x \in \Sigma \setminus U_j$. Seja $\phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função C^∞ que satisfaz $\phi(x) = 1$ se $x \in D_j$, $0 \leq \phi(x) < 1$ se $x \in U_j \setminus D_j$ e $\phi(x) = 0$ se $x \in \Sigma \setminus U_j$. Escolhendo-se a vizinhança U_j suficientemente pequena, n suficientemente grande e $\varepsilon_j > 0$ suficientemente pequeno, temos que $\varphi(\phi^n(h_j(x) + \varepsilon_j), x) \notin T_K$ para todo $x \in U_j$. A função h_j satisfaz as hipóteses da Proposição 6.1, e, portanto, o conjunto $\Sigma' \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(\phi^n(h_j(x) + \varepsilon_j), x), x \in \Sigma\}$ é uma seção global para o fluxo.

Além disso, como movimentamos apenas D_j o conjunto $I_{\Sigma'}$ possui uma componente conexa a menos do que I_Σ . Ver figura 6-4.

Como temos um número finito de componentes conexas, podemos continuar o mesmo processo de movimentação destas até obtermos uma seção global Σ_0 para o fluxo que não intersekte K . Usamos o mesmo processo para movimentarmos para trás no tempo as componentes conexas que intersectam $\varphi(-M, \partial A^+)$.

Basta agora provar que Σ_0 é superfície de seção global para o fluxo Hamiltoniano em S . Seja $\tilde{H}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $C^{k \geq 2}$ tal que $\tilde{S} = \tilde{H}^{-1}(c)$ para algum valor regular c . Seja Λ o conjunto dos pontos $x \in \Sigma_0$ tal que a órbita para frente de x , pelo fluxo de $X_{\tilde{H}}$, passa por K antes de

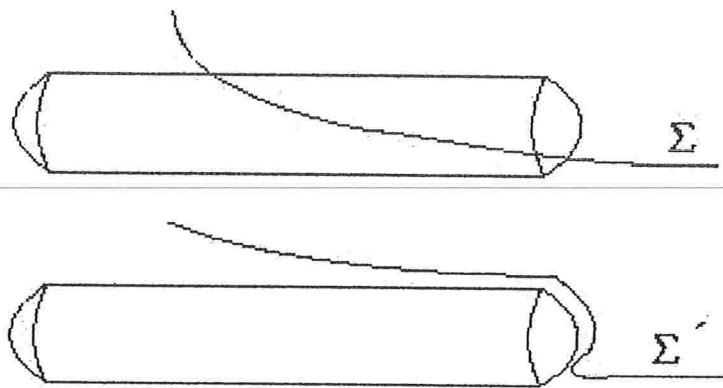


Figura 6-4: Obtemos uma nova seção global depois de movimentarmos uma componente D_i .

retornar a Σ_0 novamente. Então Λ é um disco topológico em Σ e definimos o homeomorfismo $\psi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ da seguinte forma: Se $x \notin \Lambda$ então $\psi(x) = \tilde{\psi}(x)$ onde $\tilde{\psi} : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ é a aplicação de retorno associado ao fluxo em \tilde{S} . Se $x \in \Lambda$, então seja y_x o primeiro ponto contido em ∂K da órbita para frente de x pelo fluxo de X_H (note que podemos também usar o fluxo de X_H). Seja z_x o ponto de saída de y_x de K pelo fluxo de X_H . Se y_x é o ponto da variedade estável de p_c , cuja órbita para frente por X_H fica sempre em U , então definimos z_x como sendo o único ponto da variedade instável de p_c no bordo de K cuja órbita para trás por X_H converge para p_c e está sempre contida em K . Finalmente, definimos $\psi(x)$ como o primeiro ponto da órbita para frente de z_x , por X_H (ou X_H), que passa por Σ_0 . Definindo de forma análoga ψ^{-1} , trocando o papel da variedade estável com o da variedade instável de p_c , temos que ψ é um homeomorfismo de Σ_0 .

Para provarmos a existência de órbitas periódicas em S quando não existe órbita homoclínica a p_c , usaremos a mesma idéia apresentada em [HZW2]. Sabemos que ψ preserva área (a forma simplética $d\lambda_0$ restrita a Σ_0) e, portanto, existe um ponto fixo \bar{p} de ψ . Este ponto fixo corresponde a um órbita periódica em S . Consideramos agora a restrição $\bar{\psi}$ do homeomorfismo ψ ao anel $\Sigma_0 \setminus \{\bar{p}\}$. Por um resultado de J. Franks ([F]), como $\bar{\psi}$ preserva área, então $\bar{\psi}$ tem 0 ou ∞ pontos periódicos. Cada ponto periódico de $\bar{\psi}$ também corresponde a uma órbita periódica em S . Portanto S possui 2 ou ∞ órbitas periódicas. ■

6.2 Níveis de energia acima do sela-centro

Fixaremos agora a função Hamiltoniana real-analítica $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ com as propriedades anteriores, ou seja, existe um ponto de equilíbrio p_c do tipo sela-centro do sistema Hamiltoniano associado, que está contido numa hipersuperfície $S \subset H^{-1}(0)$, homeomorfa a S^3 e estritamente convexa. Suponhamos, sem perda de generalidade, que o Hessiano de H é positivo-definido em $TS \setminus \{p_c\}$.

Para todo $E < 0$ suficientemente próximo de 0, existe uma hipersuperfície regular $S_E \subset H^{-1}(E)$ difeomorfa a S^3 que converge para S quando $E \rightarrow 0$ na topologia C^0 e na topologia C^∞ fora de uma vizinhança de p_c . Em S_E vale o Teorema 4.4, ou seja, existe seção global em S_E para o fluxo Hamiltoniano e este pode ser estudado por um difeomorfismo que preserva área no disco aberto. Não consideraremos, portanto, tais níveis de energia.

Para $E > 0$, os níveis de energia que estão próximos de S podem não ser compactos e há órbitas que escapam de qualquer vizinhança de S , por menor que seja o valor de E . O comportamento de tais órbitas pode ser melhor visualizado pela forma normal de Moser dada pela função Hamiltoniana (3.1). Suponhamos que S corresponda a $\{K = 0, q_1 \geq 0, p_1 \geq 0\}$. Então a hipersuperfície S_E contém pontos que em V correspondem a $\{q_1 > 0, p_1 < 0, I_2 < I^c(E)\}$ e a órbita para frente de tais pontos escapam de uma vizinhança de S .

No entanto, sabemos que, para $\varepsilon > 0$ fixo, $S_E \setminus B_\varepsilon(p_c)$ possui uma componente S_E^- que converge para S na topologia C^∞ quando $E \rightarrow 0$. Portanto, para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, o Hessiano de H será positivo-definido em $x \in S_E^-$. Ver figura 6-5.

Queremos estender S_E^- a um ovalóide utilizando o Teorema 2.2. Para isso, precisamos mostrar que o hiperplano H_p que passa por um ponto $p \in \partial S_E^-$ intersecta ∂S_E^- apenas no ponto x . Mostraremos por contradição. Se isso não ocorre, então existe uma seqüência $E_n \rightarrow 0$ e $p_n \in \partial S_{E_n}^-$ tal que $H_{p_n} \cap \partial S_{E_n}^- \supset \{y_n\}$, $y_n \neq p_n$. Por compacidade e continuidade, temos $p_n \rightarrow p_0 \in S$, $y_n \rightarrow y_0 \in S$, $H_{p_n} \rightarrow H_{p_0}$ e $H_{y_n} \rightarrow H_{y_0}$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo $y_0 \in H_{x_0}$. Mas se $x_0 \neq y_0$ então temos uma contradição, pois S é estritamente convexa. Se $x_0 = y_0$ então para n suficientemente grande p_n e y_n estão contidos na vizinhança dada pelo Lema 2.1, onde sabemos que S_{E_n} é localmente estritamente convexa, ou seja, chegamos a uma nova contradição.

Portanto, existe $E_0 > 0$ tal que para todo $0 < E < E_0$ existe uma hipersuperfície $S_E^- \subset H^{-1}(E)$ que pode ser estendida, pelo Teorema 2.2, a um ovalóide, que denotaremos por \tilde{S}_E^- .

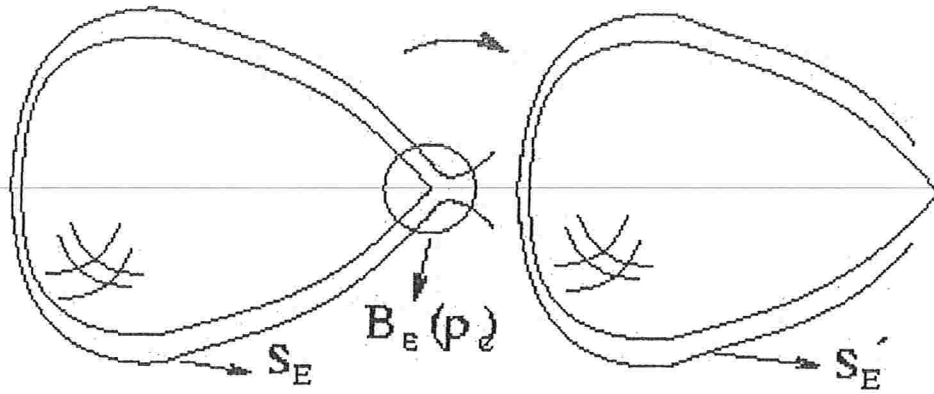


Figura 6-5: Existe uma componente convexa $S'_E \subset S_E$ que pode ser estendida a um ovalóide.

Podemos também escolher $\varepsilon > 0$ de modo que toda órbita periódica em \tilde{S}_E com índice de Conley-Zehnder igual a 3 esteja contida em S_E^- . Basta seguir a mesma idéia do Lema 5.3. Pelo Teorema 6.1, existe uma órbita periódica $P_E \subset S_E^-$ que é bordo de uma seção global Σ_E para o fluxo em \tilde{S}_E . Omitiremos o índice E para facilitar a notação.

Da mesma forma que fizemos no nível de energia 0, para cada $E > 0$, seja K um compacto com as seguintes propriedades:

(i) $\partial \Sigma \cap K = \emptyset$;

(ii) $\partial K = A^+ \cup A^- \cup \omega$, onde A^+ é um disco aberto tal que se $x \in A^+$ então $\varphi(t, x) \in K$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi(t, x) \notin K$ para todo $t < 0$ suficientemente pequeno. Analogamente A^- é um disco aberto tal que se $x \in A^-$ então $\varphi(t, x) \notin K$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi(t, x) \in K$ para todo $t < 0$ suficientemente pequeno. O conjunto ω é difeomorfo a S^1 e é formado pelos pontos x cuja órbita tangencia K e para todo tempo $t \neq 0$ suficientemente pequeno $\varphi(t, x) \notin K$. Além disso $\omega = \partial A^+ = \partial A^-$.

(iii) O conjunto K é tal que $\tilde{S}_E \cap K^c \subset S_E^-$.

Associado ao conjunto K , seja $T_K \subset S_E$ o cilindro sólido construído conforme anteriormente.

Podemos supor que Σ intersecta ∂T_K transversalmente. A transversalidade é garantida pelo Teorema de Sard (ver [Mi]), considerando-se a foliação de seções globais numa vizinhança de Σ . Então, como anteriormente $\Sigma \cap \partial T_K = \bigcup_{i=1..r} C_i$ onde cada C_i é uma curva fechada simples. Seja $I_\Sigma = \Sigma \cap T_K$. Então $\partial I_K = \Sigma \cap \partial T_K$ pois $\partial \Sigma \cap T_K = \emptyset$. O conjunto I_Σ é formado por

s componentes conexas, denotadas por D_j , $j = 1..s$. O bordo de D_j é um conjunto finito de C_i 's.

Consideremos a seguinte hipótese

(H2) $D_j \cap A^- = \emptyset$ ou $D_j \cap \varphi(-M, A^+) = \emptyset$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Teorema 6.3 *Suponhamos que para um dado nível de energia $E > 0$, vale a hipótese (H2). Então existe uma seção global $\tilde{\Sigma}$ de \tilde{S}_E tal que $\tilde{\Sigma} \cap K = \emptyset$ e $\partial \tilde{\Sigma} = \partial \Sigma = P$. Além disso, se as variedades estável e instável de o_E não coincidem, então existem infinitas órbitas homoclínicas a o_E , a órbita periódica no nível de energia E contida na variedade central de p_c .*

Prova. A construção de $\tilde{\Sigma}$ é exatamente a mesma feita na demonstração do Teorema 6.1. Seja $\tilde{\varphi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ o difeomorfismo que representa o fluxo em \tilde{S}_E . Consideremos agora os pontos $x \in \tilde{\Sigma}$ tais que a órbita para frente de x intersecta K antes de retornar a $\tilde{\Sigma}$. Chamemos tal conjunto de Λ . Então Λ é um disco topológico fechado contido em S_E^- . Consideremos agora o fluxo Hamiltoniano φ_H dado pela função H . Sabemos que existe uma curva de Jordan c_E em $\tilde{\Sigma}$ que corresponde a uma curva não homotopicamente trivial da variedade estável de o_E . Pela construção do compacto K , temos que $c_E \subset \Lambda$. Seja d_E o disco fechado em $\tilde{\Sigma}$ cujo bordo é c_E . Consideremos agora a aplicação $\psi: \tilde{\Sigma} \setminus d_E \rightarrow \tilde{\Sigma}$ definida da seguinte forma: Se $x \notin \Lambda$ então $\psi(x) = \tilde{\varphi}(x)$. Observe que esse segmento de órbita é o mesmo tanto para \tilde{S}_E quanto para S_E . Se $x \in \Lambda \setminus d_E$, então seja y_x o primeiro ponto contido em ∂K da órbita para frente de x pelo fluxo φ_H . Seja z_x o ponto de saída de y_x de K dado também pelo fluxo φ_H . Observe agora que a existência de z_x é facilmente verificada pela forma normal de Moser. Finalmente, seja $\psi(x)$ o primeiro ponto da órbita para frente de z_x a intersectar $\tilde{\Sigma}$.

A aplicação ψ não pode ser estendida de forma contínua em c_E pois, há um twist que tende a infinito para pontos que se aproximam de c_E . Esse twist decorre da estrutura do sela-centro e localmente pode ser entendido pela aplicação (3.3).

Da mesma forma, existe uma curva de Jordan j_E em $\tilde{\Sigma}$ que corresponde a uma curva não homotopicamente trivial da variedade insvável de o_E . Seja m_E o disco fechado em $\tilde{\Sigma}$ cujo bordo é c_E . Se $c_E \cap j_E \neq \emptyset$, então os pontos dessa interseção correspondem a órbitas homoclínicas a o_E . Ver figura 6-6.

Mas se $c_E \cap j_E = \emptyset$ então podemos considerar as iteradas $\psi^i(m_E)$. Como ψ preserva área

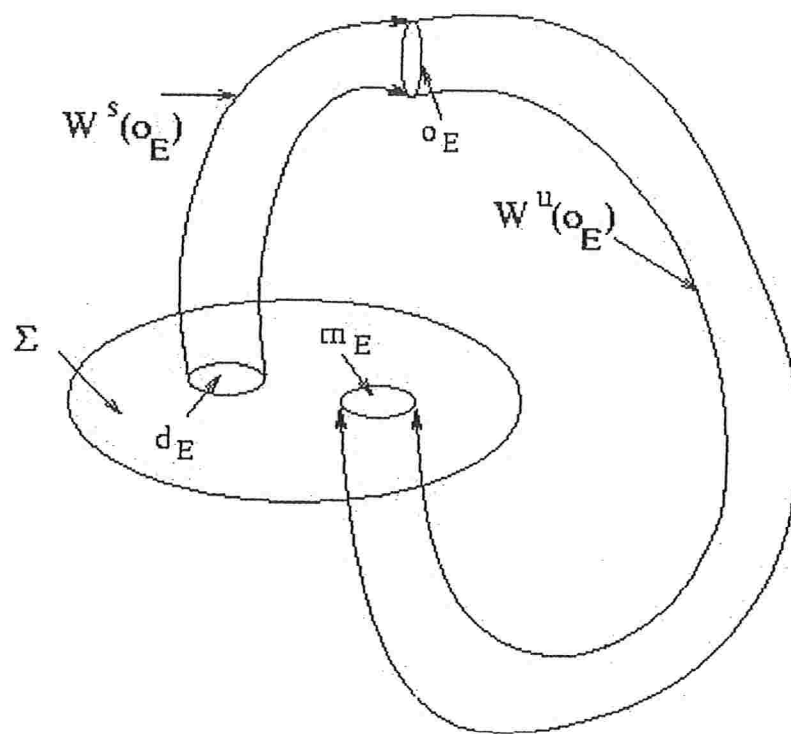


Figura 6-6: As intersecções de $\psi^n(j_E)$ com c_E corresponde a órbitas homoclínicas a o_E .

e as áreas de m_E e $\tilde{\Sigma}$ são finitas e diferentes de zero, então conforme feito na Proposição 3.1, existe $N \geq 0$ tal que $\psi^N(j_E) \cap c_E \neq \emptyset$. Tais pontos correspondem à órbitas homoclínicas a o_E de N -pulsos. Se as variedades estável e instável de o_E não coincidem, ou seja, se $c_E \neq \psi^k(j_E)$ para nenhum $k \geq 0$, então, também conforme a proposição 3.1, existem infinitos pontos em $\tilde{\Sigma} \setminus d_E$ tais que ψ^N está bem definida e que correspondem a órbitas homoclínicas a o_E de $2N$ -pulsos. Nesse caso, pode-se mostrar a existência de conjuntos cuja dinâmica é conjugada ao shift de Bernoulli, apresentando entropia topológica positiva. Veja mais detalhes em[BGS]. ■

Capítulo 7

Exemplos e Aplicações

7.1 Formas Quadráticas Positivas-definidas

Quando uma hipersuperfície S é definida como pré-imagem de um valor regular de uma função $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, vimos que a convexidade estrita de S depende do Hessiano de H . Mais precisamente, vimos que uma condição necessária para que uma hipersuperfície seja estritamente convexa é que H_{xx} , o Hessiano de H , seja definido em $T_x S$ para todo $x \in S$.

Sem perda de generalidade podemos impor que o Hessiano de H seja positivo-definido em $T_x S$, ou seja, para todo $v \in T_x S$ não nulo, $\langle H_{xx}(x)v, v \rangle > 0$. Em geral o Hessiano não é definido em $T_x \mathbb{R}^4$, bastando, para a convexidade, ser definido apenas no subespaço $T_x S$.

Seja $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador linear auto-adjunto. Seja $Q : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ a forma quadrática definida por $Q(v) = \langle Lv, v \rangle$ onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual de \mathbb{R}^4 . Seja E um subespaço de \mathbb{R}^4 de dimensão 3 e $\{X_i, i = 1, 2, 3\}$ uma base de E . Seja W a matriz 3×3 simétrica, definida por

$$W = (\langle LX_i, X_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 3} \quad (7.1)$$

Então temos o seguinte Lema

Lema 7.1 *A forma quadrática Q é positiva-definida em E se e somente se todos os autovalores de W são positivos.*

Prova. Ver [Mad]. ■

Lema 7.2 *Seja $W = (w_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ uma matriz 3×3 simétrica. Então todos os autovalores de W são positivos se e somente se as seguintes condições são satisfeitas*

$$\det W > 0$$

$$\text{tr}W > 0$$

$$D_W > 0$$

$$\text{onde } D_W = w_{11}w_{22} - w_{12}^2 + w_{11}w_{33} - w_{13}^2 + w_{22}w_{33} - w_{23}^2.$$

Prova. É imediato a partir das relações de Girard para polinômios de grau 3. ■

7.2 Hamiltonianos da forma $\frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(x, y)$

Seja H uma função Hamiltoniana da forma $H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(x, y)$, onde $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função $C^{k \geq 2}$, conhecida como função potencial. Seja $z = (x, y, p_x, p_y)$ os coordenadas de \mathbb{R}^4 e seja $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção no plano (x, y) . Suponhamos que $S \subset H^{-1}(E)$ seja uma hipersuperfície compacta, homeomorfa a S^3 e regular em todo ponto exceto em p_c que corresponde a um ponto de equilíbrio do campo X_H , ou seja, $\pi(p_c)$ é um ponto crítico de $V(x, y)$. O conjunto $B \stackrel{\text{def}}{=} \pi(S)$ é, portanto, homeomorfo a D^2 , cujo bordo $\partial B = \{\pi(z), z \in S, z = (x, y, 0, 0)\}$ é uma curva regular exceto em $\pi(p_c)$. O interior de B é dado por $\overset{\circ}{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\pi(z), z \in S, p_x^2 + p_y^2 \neq 0\}$ e se $(x, y) \in \overset{\circ}{B}$ então $V(x, y) < E$. Então temos

$$H_x(z) = (V_x, V_y, p_x, p_y)$$

$$H_{xx}(z) = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & 0 & 0 \\ V_{xy} & V_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja $z \in S$ tal que $p_x^2 + p_y^2 \neq 0$, ou seja, $\pi(z) \in \overset{\circ}{B}$. Então uma base para $T_z S = [H_x(z)]^\perp$ é dada por

$$X_1 = (0, 0, -p_y, p_x)$$

$$X_2 = (p_x, p_y, -V_x, -V_y)$$

$$X_3 = (p_y, -p_x, V_y, -V_x)$$

pois $X_i, i = 1, 2, 3$ são linearmente independentes e ortogonais a H_x . Queremos verificar a convexidade local de S em z . Observe que H_{xx} tem dois autovalores iguais a 1, logo o Hessiano de H é definido em $T_z S$ se e somente se ele for positivo-definido em $T_z S$. A matriz W definida em (7.1) é dada por

$$W = \begin{pmatrix} p_1^2 + p_2^2 & p_2 V_x - p_1 V_y & -p_2 V_y - p_1 V_x \\ p_2 V_x - p_1 V_y & V_{xx} p_1^2 + 2p_1 p_2 V_{xy} + V_{yy} p_2^2 + V_x^2 + V_y^2 & p_1 p_2 (V_{xx} - V_{yy}) + (p_2^2 - p_1^2) V_{xy}^2 \\ -p_2 V_y - p_1 V_x & p_1 p_2 (V_{xx} - V_{yy}) + (p_2^2 - p_1^2) V_{xy}^2 & V_{xx} p_2^2 + 2p_1 p_2 V_{xy} + V_{yy} p_1^2 + V_x^2 + V_y^2 \end{pmatrix}$$

onde $L = H_{xx}$. Então temos

$$\det W = 4(E - V)^2 (2(E - V)(V_{xx} V_{yy} - V_{xy}^2) + V_{xx} V_y^2 + V_{yy} V_x^2 - 2V_x V_y V_{xy}) \quad (7.2)$$

$$\text{tr} W = 2(E - V)(1 + V_{xx} + V_{yy}) + 2(V_x^2 + V_y^2)$$

$$D_W = 4(E - V)^2 (V_{xx} + V_{yy} + V_{xx} V_{yy}) + 2(E - V)(1 + V_{xx} + V_{yy})(V_x^2 + V_y^2) + (V_x^2 + V_y^2)^2$$

Para os pontos $z \in S, z \neq \pi(p_c)$ tais que $p_x = p_y = 0$, ou seja, se $\pi(z) \in \partial B \setminus \pi(p_c)$, então tomamos como base de $T_z S$ os seguinte vetores

$$X_1 = (0, 0, 1, 0)$$

$$X_2 = (0, 0, 0, 1)$$

$$X_3 = (V_y, -V_x, 0, 0)$$

e a matriz W definida em (7.1) é dada por

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & V_{xx} V_y^2 + V_{yy} V_x^2 - 2V_x V_y V_{xy} \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\det W &= V_{xx}V_y^2 + V_{yy}V_x^2 - 2V_xV_yV_{xy} \\
trW &= 2 + V_{xx}V_y^2 + V_{yy}V_x^2 - 2V_xV_yV_{xy} = 2 + \det W \\
D_W &= 1 + 2(V_{xx}V_y^2 + V_{yy}V_x^2 - 2V_xV_yV_{xy}) = 1 + 2 \det W
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Seja $S_0 = S \setminus p_c$.

Proposição 7.1 W é positiva-definida em TS_0 se e somente se

$$T_W \stackrel{def}{=} 2(E - V)(V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2) + V_{xx}V_y^2 + V_{yy}V_x^2 - 2V_xV_yV_{xy} > 0$$

em $B \setminus \pi(p_c)$.

Prova. Suponhamos que $T_W > 0$ em todo ponto de $B \setminus \pi(p_c)$. Então, por (7.2) e (7.3), $\det W > 0$ em $B \setminus \pi(p_c)$. Isso é suficiente para que W seja positiva-definida em $\{p \in S \mid \pi(p) \in \partial B \setminus \pi(p_c)\}$ pois $V = E$ em ∂B .

Se $p \in S$ e $\pi(p) \in \overset{\circ}{B}$ está suficientemente próximo de $\partial B \setminus \pi(p_c)$, então, por (7.2), temos que $trW > 0$ e $D_W > 0$ pois $V \xrightarrow{(x,y) \rightarrow \partial B} E$ e $V_x^2 + V_y^2 > 0$ em $\partial B \setminus \pi(p_c)$. Logo W é positiva-definida em p . Como $\overset{\circ}{B}$ é conexo e $\det W > 0$ em $\overset{\circ}{B}$, nenhum autovalor de W pode mudar de sinal em $\overset{\circ}{B}$ e, portanto, estes devem ser todos positivos em todo ponto de $\overset{\circ}{B}$. Logo W é positiva-definida em todo $p \in S$ tal que $\pi(p) \in \overset{\circ}{B}$. Concluimos que W é positiva-definida em $S \setminus p_c$. A recíproca é imediata. ■

Seja $R : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $R(x, y) = \sqrt{(E - V(x, y))}$. Então $R|_{\partial B} = 0$ e $R|_{\overset{\circ}{B}} > 0$. A curva ∂B é uma curva de Jordan $C^{k \geq 2}$ em todo ponto diferente de $\pi(p_c)$.

Proposição 7.2 W é positiva-definida em $S \setminus p_c$ se e somente se $\partial B \setminus \pi(p_c)$ tem curvatura normal não nula e a função R é C^2 localmente estritamente côncava em $\overset{\circ}{B}$.

Prova. A função R é C^2 localmente estritamente côncava em $\overset{\circ}{B}$ se e somente se a matriz

$$\tilde{W} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{xy} & R_{yy} \end{pmatrix}$$

é negativa-definida. Então temos

$$\tilde{W} = -\frac{1}{4(E-V)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 2V_{xx}(E-V) + V_x^2 & 2V_{xy}(E-V) + V_xV_y \\ 2V_{xy}(E-V) + V_xV_y & 2V_{yy}(E-V) + V_y^2 \end{pmatrix}$$

e, portanto, \tilde{W} é negativa definida se e somente se $\det \tilde{W} > 0$ e $tr \tilde{W} < 0$, ou seja

$$\begin{aligned} \det \tilde{W} &= \frac{2(E-V)(V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2) + V_{xx}V_y^2 + V_{yy}V_x^2 - 2V_xV_yV_{xy}}{16(E-V)^3} > 0 \\ -tr \tilde{W} &= \frac{2(E-V)(V_{xx} + V_{yy}) + V_x^2 + V_y^2}{4(E-V)^{\frac{3}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

Logo, \tilde{W} é negativa-definida se e somente se $\det W > 0$ em $\pi^{-1}(\overset{\circ}{B}) \cap S$ já que $-tr \tilde{W} > 0$ para pontos próximos de $\partial B \setminus \pi(p_c)$.

Os pontos da curva regular $\partial B \setminus \pi(p_c)$ satisfazem a equação $V(x, y) = E$ e a curvatura é dada por

$$k(x, y) = \frac{|V_{xx}V_y^2 - 2V_{xy}V_xV_y + V_{yy}V_x^2|}{(V_x^2 + V_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que, por (7.3) e continuidade da função $\det W$, é positiva se e somente se $\det W > 0$ em $\pi^{-1}(\partial B \setminus \pi(p_c)) \cap S$.

A proposição 7.1 completa a demonstração. ■

7.3 O Hamiltoniano Henon-Heilles

Estudamos a função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(x, y)$$

onde $V(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2} + bx^2y - \frac{y^3}{3}$ e b é um parâmetro positivo. Quando $b = 1$, temos o Hamiltoniano Henon-Heilles.

Independentemente do parâmetro b , o ponto $(0, 1)$ é uma sela da função potencial V e, para $p_x = p_y = 0$, corresponde a um equilíbrio do tipo sela-centro para o fluxo Hamiltoniano associado à função H . O sela-centro $p_c = (0, 1, 0, 0)$ está contido no nível de energia $M_b \stackrel{def}{=}$

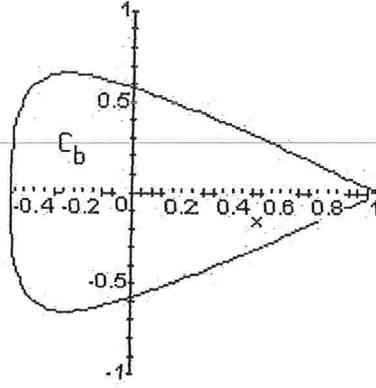


Figura 7-1: O bordo de C_b é uma curva fechada simples, regular e com curvatura positiva em todo ponto excepto $\pi(p_c)$.

$\{H = \frac{1}{6}\}$. O nível de energia M_b depende do parâmetro b . Seja $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x, y, p_x, p_y) = (x, y)$. Se $0 < b < 1$, então $\pi(M)$ possui uma componente C_b que é homeomorfa a D^2 e contém $\pi(p_c)$. O bordo de C_b é uma curva fechada, não diferenciável apenas em $\pi(p_c)$. Para todo $(x, y) \in C_b$, temos $-\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ e $x^2 < \frac{1-3y^2+2y^3}{3+6by}$. Os pontos $(x, y) \in \partial C_b$ satisfazem $V(x, y) = \frac{1}{6}$. Ver figura 7-1.

Seja $S_b \stackrel{def}{=} \pi^{-1}(C) \cap M_b$.

Lema 7.3 Se $(y, b) \in D \stackrel{def}{=} (-\frac{1}{2}, 0) \times (0, 1)$ e $8b^2y^3 + 12by^2 + 6y + 4b^2 - 3 > 0$ então $4by^2 + 3y + by + b > 0$.

Prova. Vamos mostrar que $8by^2 + 6y + 2by + 2b > 0$ em D . Temos

$$8by^2 + 6y > 3 - 4b^2 - 4by^2 - 8b^2y^3$$

Logo

$$8by^2 + 6y + 2by + 2b > -4by^2 - 8b^2y^3 + 3 - 4b^2 + 2by + 2b$$

Basta agora mostrar que

$$R(y, b) \stackrel{def}{=} -4by^2 - 8b^2y^3 + 3 - 4b^2 + 2by + 2b > 0$$

em D . Em ∂D , temos

$$\begin{aligned} R\left(-\frac{1}{2}, b\right) &= -3b^2 + 3 > 0 \text{ (exceto em } b = 1) \\ R(0, b) &= 3 - 4b^2 + 2b = (1 - b)(4b + 3) + b > 0 \\ R(y, 0) &= 3 > 0 \\ R(y, 1) &= -8y^3 - 4y^2 + 2y + 1 \end{aligned}$$

Além disso, $\frac{\partial R(y,1)}{\partial y} = -24y^2 - 8y + 2$ e é simples ver que $\frac{\partial R(y,1)}{\partial y} > 0$ para $-\frac{1}{2} < y \leq 0$. Logo $R(y, 1) > 0$ para todo $-\frac{1}{2} < y \leq 0$. Concluimos que $R(y, b)$ é uma função positiva em ∂D exceto no ponto $(-\frac{1}{2}, 1)$ onde ela se anula. Para mostrarmos que $R > 0$ em D basta mostrarmos que $R(y, b)$ não possui ponto crítico em D , ou seja, as soluções de

$$(-8by - 24b^2y^2 + 2b, -4y^2 - 8b - 18by^3 + 2y + 2) = (0, 0)$$

não estão contidas em D . Mas se $-8by - 24b^2y^2 + 2b = 0$, $b \neq 0$, então

$$y_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3b}}{6b}$$

Se $0 < b < 1$, então $y_+ > 0$ e $y_- < -\frac{1}{2}$ pois

$$\begin{aligned} 9b(b-1) < 0 &\Leftrightarrow 9b^2 - 6b + 1 < 3b + 1 \Leftrightarrow (3b-1)^2 < 3b + 1 \\ &\Rightarrow 3b - 1 < \sqrt{1 + 3b} \Rightarrow \frac{-1 - \sqrt{1 + 3b}}{6b} < -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Não existem, portanto, pontos críticos de $R(y, b)$ em D concluindo que $R(y, b) > 0$ em D . ■

Proposição 7.3 *Para todo $0 < b < 1$, S_b é uma hipersuperfície estritamente convexa em \mathbb{R}^4 , homeomorfa a S^3 , não-regular apenas em p_c .*

Prova. É suficiente mostrar que

$$2(V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2)\left(\frac{1}{6} - V\right) + V_x^2V_{yy} + V_y^2V_{xx} - 2V_xV_yV_{xy} > 0$$

para todo $(x, y) \in \overset{\circ}{C}_b$, o interior de C_b . Isso é equivalente a mostrar que

$$N(y, b) + F(y, b)x^2 + G(y, b)x^4 > 0 \quad (7.4)$$

onde $N(y, b) \stackrel{def}{=} (1+y)(1-y)^3(1+2by)$, $F(y, b) \stackrel{def}{=} 2b(y-1)(2by^2+3y+2by+2b)$ e $G(y, b) \stackrel{def}{=} 3b^2(1+2by)$. Seja $B = (-\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$.

Resolvendo a equação para x^2

$$N(y, b) + F(y, b)x^2 + G(y, b)x^4 = 0$$

obtemos

$$x_{\pm}^2 = \frac{-K_1(y, b) \pm \sqrt{K_2(y, b)}}{b(3+6by)}$$

onde

$$K_1(y, b) = 3y^2 + 2by^3 - 3y - 2b$$

$$K_2(y, b) = (1+2y)(1-y)^2(8b^2y^3 + 12by^2 + 6y + 4b^2 - 3)$$

Como $N(y, b) > 0$ e $G(y, b) > 0$ em B , x_-^2 e x_+^2 têm o mesmo sinal. Estamos interessados, obviamente, apenas no caso x_{\pm}^2 positivos e, portanto, assumimos que $K_2(y, b) > 0$. Vamos agora mostrar que $x^2 < x_-^2$ para todo $(x, y) \in \overset{\circ}{C}_b$. Para isso, é suficiente mostrar que $\frac{1-3y^2+2y^3}{3+6by} < x_-^2$ em B . Mas em B , temos

$$\frac{1-3y^2+2y^3}{3+6by} < x_-^2 \Leftrightarrow \sqrt{(1+2y)(8b^2y^3 + 12by^2 + 6y + 4b^2 - 3)} < 4by^2 + 3y + by + b$$

e, portanto, pelo lema 7.3

$$\frac{1-3y^2+2y^3}{3+6by} < x_-^2 \Leftrightarrow 3by + y + b + 1 > 0$$

e é imediato verificar que $3by + y + b + 1 > 0$ em B . ■

7.4 Um exemplo integrável

O Hamiltoniano $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(x, y)$$

onde $V(x, y) = \frac{x^2 + ky^2}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$ é um exemplo de um sistema integrável cuja segunda integral primeira F é dada por

$$F(x, y, p_x, p_y) = -\frac{(xp_y - p_x y)^2}{2(k-1)} + p_y^2 + ky^2 + \frac{1}{2}y^2(x^2 + y^2)$$

Quando o parâmetro k é negativo, a origem é uma sela da função $V(x, y)$ e, portanto, o ponto $p_c \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro do fluxo Hamiltoniano associado à função H . O ponto p_c está contido no nível de energia $M_k \stackrel{\text{def}}{=} \{H = 0\}$.

Seja $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x, y, p_x, p_y) = (x, y)$. Então $\pi(M_k)$ é simétrico em relação aos eixos x e y , e possui, para $y \geq 0$, uma componente C_k homeomorfa a D^2 cujo bordo ∂C_k é regular em todos os pontos exceto na origem. Os pontos do bordo são dados por $\partial C_k = \{(x, y) | y \geq 0, V(x, y) = 0\}$. Seja $S_k \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(C_k)$.

Proposição 7.4 *Para todo $k < 0$, S_k é uma hipersuperfície estritamente convexa em \mathbb{R}^4 , homeomorfa a S^3 , não-regular apenas em p_c .*

Prova. Vamos mostrar que

$$2(V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2)\left(\frac{1}{6} - V\right) + V_x^2V_{yy} + V_y^2V_{xx} - 2V_xV_yV_{xy} > 0$$

para todo $(x, y) \in C_k \setminus \{(0, 0)\}$. Isso é equivalente a mostrar que

$$K \stackrel{\text{def}}{=} 2y^6 + 6x^2y^4 - 3y^4 + 6ky^4 - y^2 + ky^2 + 6kx^2y^2 + 6x^4y^2 + 2x^6 + 3x^4 < 0$$

Sabemos que em C_k , $V(x, y) \leq 0$, ou seja,

$$x^2 + ky^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \leq 0$$

Então, temos

$$\begin{aligned}K_1 &\stackrel{\text{def}}{=} 2x^2y^2 + 2ky^4 + 2x^4y^2 + 4x^2y^4 + 2y^6 \leq 0 \\K_2 &\stackrel{\text{def}}{=} 2x^4 + 2kx^2y^2 + 2x^6 + 4x^4y^2 + 2x^2y^4 \leq 0\end{aligned}$$

Logo

$$K - K_1 - K_2 = -12x^2y^4 - 3y^4 + 4ky^4 - y^2 + ky^2 + 3kx^2y^2 + x^2(x^2 + ky^2)$$

Mas $x^2 + ky^2 < 0$ em $C_k \setminus \{(0, 0)\}$ pois resolvendo a equação $V(x, y) \leq 0$, obtemos

$$x^4 + (2y^2 + 1)x^2 + ky^2 + y^4 \leq 0$$

e, portanto, $0 \leq x^2 \leq \frac{-(2y^2+1) + \sqrt{4y^2(1-k)+1}}{2}$. Mas $\sqrt{4y^2(1-k)+1} < 1 + 2y^2 - 2ky^2$ e, então $x^2 < -ky^2$ de onde concluímos que $K - K_1 - K_2 < 0$. Com isso, temos que $K < K_1 + K_2 \leq 0$ em $C_k \setminus \{(0, 0)\}$.

O hiperplano $H_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{y = 0\}$ é tal que $H_0 \cap S_k = p_c$. ■

Capítulo 8

Hipersuperfícies de Contato em \mathbb{R}^4

Consideramos (x_1, x_2, x_3, x_4) as coordenadas em \mathbb{R}^4 . Sejam $x_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, as projeções sobre as coordenadas de \mathbb{R}^4 . Para cada $x \in \mathbb{R}^4$, definimos uma base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1,2,3,4}$ para $T_x\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^4$ dada por $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$. É possível trivializar $T\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ usando essa base em todo $x \in \mathbb{R}^4$. Sejam (v_1, v_2, v_3, v_4) as coordenadas em $T_x\mathbb{R}^4$ após feita essa trivialização.

Dados $x \in \mathbb{R}^4$ e $v \in T_x\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^4$, definimos

$$\lambda_0(x)(v) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 [x_j(x)dx_{j+2}(v) - x_{j+2}(x)dx_j(v)] \quad (8.1)$$

a 1-forma definida em \mathbb{R}^4 onde $dx_j(v) = v_j$. Então

$$\omega_0 \stackrel{def}{=} d\lambda_0 = \sum_{j=1}^2 dx_j \wedge dx_{j+2}$$

é uma 2-forma exata e não-degenerada em \mathbb{R}^4 conhecida como forma simplética canônica de \mathbb{R}^4 . O par (\mathbb{R}^4, ω_0) é, portanto, uma variedade simplética.

Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície regular. Definimos em S a 3-forma

$$\nu_0 \stackrel{def}{=} \lambda_0^S \wedge d\lambda_0^S \quad (8.2)$$

onde λ_0^S é a restrição de λ_0 a TS .

Suponha que ν_0 seja não-degenerada, ou seja, ν_0 define uma forma de volume em S . Então

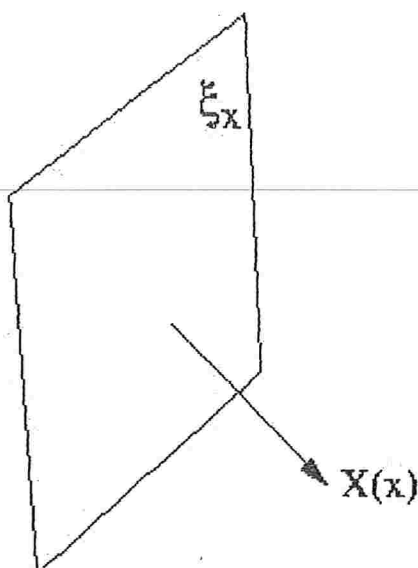


Figura 8-1: Numa hipersuperfície convexa que contém a origem, o campo Hamiltoniano é transversal à estrutura de contato

chamamos S de hipersuperfície de contato em (\mathbb{R}^4, ω_0) . A 1-forma λ_0 é chamada, neste caso, de forma de contato. Associada à forma de contato λ_0 , definimos a seguinte distribuição de hiperplanos ξ em TS : para cada $x \in S$ definimos o hiperplano $\xi_x \subset T_x S$ dado por

$$\xi_x = \ker \lambda_0^S(x) \quad (8.3)$$

O fibrado linear ξ é chamado de estrutura de contato.

Lema 8.1 Para todo $x \in S$, ξ_x é transversal a $X_3(x)$ (definido em (4.2)) em $T_x S$, onde ξ_x é a fibra de ξ em x .

Prova. Sejam $v, w \in T_x S$ tais que $\{v, w, X_3(x)\}$ seja linearmente independente. Sabemos que $d\lambda_0^S(X_3(x), v) = \langle J_0 X_3(x), v \rangle = \langle N(x), v \rangle = 0 \forall v \in T_x(S)$ onde $N(x)$ é um vetor unitário normal a S em x . A não-degenerescência de ν_0 (ver definição em (8.2)) implica que $\lambda_0^S(x)(X_3(x))d\lambda_0^S(x)(v, w) \neq 0$ donde $\lambda_0^S(x)(X_3(x)) \neq 0$. Logo $X_3(x) \notin \xi_x$ e, portanto, $X_3(x)$ é transversal a ξ_x em $T_x S$. Ver figura 8-1. ■

Proposição 8.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície difeomorfa a S^3 , estritamente convexa e com a origem em seu interior. Então S é uma hipersuperfície de contato em (\mathbb{R}^4, ω_0) .*

Prova. Devemos mostrar que ν_0 definida em (8.2) é não-degenerada, ou seja, $\nu_0(x)(v, w, z) \neq 0$ para todo $x \in S$ e $v, w, z \in T_x S$, v, w e z linearmente independentes. Temos

$$\begin{aligned} \nu_0(x)(v, w, z) &= \lambda_0^S(x)(v)d\lambda_0^S(x)(w, z) - \lambda_0^S(x)(w)d\lambda_0^S(x)(v, z) + \lambda_0^S(x)(z)d\lambda_0^S(x)(v, w) \\ \nu_0(x)(v, w, z) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

A condição de não-degenerescência de ν_0 é equivalente, portanto, à transversalidade da reta Ox com o hiperplano H_x tangente a S em x . Se Ox não for transversal a H_x então $Ox \subset H_x$ o que implica que H_x contém a origem, mas a origem está contida em $\overset{\circ}{B}_S$, o interior de S , uma contradição, pois H_x é um plano suporte de B_S . ■

Consideremos a partir de agora hipersuperfícies S de \mathbb{R}^4 difeomorfas a S^3 , estritamente convexas e com a origem em seu interior.

Podemos associar à variedade de contato (S, λ) um campo de vetores X em S dado por

$$\begin{aligned} d\lambda(X, \cdot) &= 0 \\ \lambda(X) &= 1 \end{aligned}$$

Esse campo é conhecido como campo de vetores de Reeb e é fácil mostrar que é equivalente ao campo Hamiltoniano em S . O campo de Reeb é transversal à estrutura de contato $\xi = \{\lambda = 0\}$ e portanto $T_x S = \xi_x \oplus \mathbb{R}X(x)$ para todo $x \in S$. Além disso, é possível encontrar uma função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o campo Hamiltoniano associado a H é igual ao campo de Reeb em S . A função H é construída da seguinte forma: se $x \in \mathbb{R}^4$, $x \neq 0$, consideremos a semi-reta r_x que começa na origem e passa por x . A reta r_x intersecta S em exatamente 1 ponto $p_x \in S$. Então existe um único $d_x > 0$ tal que $x = d_x p_x$. Podemos então definir $H : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ por $H(x) = \frac{1}{d_x^2}$. Não é difícil mostrar que H é uma função homogênea de grau -2 , $H|_S = 1$ e o campo Hamiltoniano associado a H coincide com o campo de Reeb em

(S, λ_0) . Ver [HZW].

Uma variedade de contato muito importante é (S^3, λ_0) . O campo de Reeb neste caso é muito simples: todas as órbitas são periódicas e degeneradas, constituindo a chamada fibração de Hopf. Se S é uma hipersuperfície estritamente convexa em \mathbb{R}^4 com a origem no seu interior, podemos associar a S^3 uma nova forma de contato $\lambda = f\lambda_0$ de modo que o campo de Reeb em (S^3, λ) seja equivalente ao campo de Reeb em (S, λ_0) . A função $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(x) = d_x^2 > 0$. Uma prova sobre essa equivalência é dada em [HZW].

O estudo sobre a existência de órbitas periódicas e seções globais em hipersuperfícies estritamente convexas é geralmente feito em S^3 com a forma de contato $\lambda = f\lambda_0$ cujo campo de Reeb é equivalente ao campo Hamiltoniano em S . A estrutura de contato ξ de (S^3, λ) é a mesma que a de (S^3, λ_0) .

8.1 Curvas Pseudo-Holomorfas

Seja (S^3, λ) uma variedade de contato tal que $\lambda = f\lambda_0$, $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f > 0$. Seja $\pi : TS^3 \rightarrow \xi$ a projeção de $TS^3 = \xi \oplus \mathbb{R}X_\lambda$ em ξ ao longo de X_λ , onde X_λ é o campo de Reeb em (S^3, λ) . É possível definir em ξ uma operação $J : \xi \rightarrow \xi$, $J^2 = -Id$, tal que em cada ponto $x \in S^3$ temos que a forma bilinear

$$g_J(x)(h, k) \stackrel{def}{=} d\lambda(h, J(x)k)$$

é positiva definida em ξ_x . Denotamos $|h|_J^2 = g_J(x)(h, h)$. Chamamos J com esta propriedade de estrutura complexa compatível em ξ .

Associada a J , definimos a estrutura quase complexa \tilde{J} em $S^3 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{J}(x, a)(h, k) = (-\lambda(x)h, J(x)\pi h + kX_\lambda(x))$$

para todo $(h, k) \in T_{(x,a)}S^3 \times \mathbb{R}$. É fácil ver que $\tilde{J}^2 = -Id$.

Chamaremos de curvas pseudo-holomorfas a aplicações $\tilde{u} = (u, a) : \mathbb{C} \rightarrow S^3 \times \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\tilde{J} \circ D\tilde{u} = D\tilde{u} \circ i$$

Em coordenadas $z = s + it \in \mathbb{C}$, essa equação é equivalente a

$$\begin{aligned} a_s &= \lambda(u_t) \\ a_t &= -\lambda(u_s) \end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\pi u_s + J(u)\pi u_t = 0$$

Definimos a energia $E(\tilde{u})$ de uma solução por

$$E(\tilde{u}) = \sup_{\varphi \in \Sigma} \int_{\mathbb{C}} \tilde{u}^* d\lambda_\varphi$$

onde $\Sigma = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \varphi'(x) \geq 0\}$ e $\lambda_\varphi(x, a)(h, k) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(a)\lambda(x)h$.

Em coordenadas temos

$$d\lambda_\varphi = [\varphi'(a)(a_s^2 + a_t^2) + \varphi(a)|\pi u_s|_J^2] ds \wedge dt$$

As soluções não constantes que satisfazem $E(\tilde{u}) < \infty$ estão diretamente ligadas à existência de órbitas periódicas e seções globais do campo de Reeb, e portanto, também para o campo Hamiltoniano em S . Veja [HZW] e [HZW2] para mais detalhes.

Dizemos que a forma de contato λ é dinamicamente convexa se o índice de Conley-Zehnder de qualquer órbita periódica de X_λ é maior ou igual a 3.

O principal resultado de [HZW2] é

Teorema 8.1 *Se $\lambda = f\lambda_0$ é uma forma de contato dinamicamente convexa em S^3 então existe uma órbita periódica P do campo de Reeb X_λ cujo índice de Conley-Zehnder é 3, considerando seu período mínimo T . Além disso, dada uma estrutura complexa J compatível em ξ , existe um difeomorfismo*

$$\Phi : S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow S^3 \setminus P$$

tal que a aplicação $u_\tau = \Phi(\tau, \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow S^3 \setminus P$ é um mergulho transversal a X_λ e tem a órbita periódica P como seu limite assintótico

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u_\tau(R.e^{2\pi it}) = P_0(T_0 t) \text{ in } C^\infty(S^1)$$

A aplicação u_τ é a projeção canônica em S^3 de uma curva pseudo-holomorfa de energia finita, a 2-forma $d\lambda|_{u_\tau(\mathbb{C})}$ é não degenerada e sua área satisfaz $\int_{\mathbb{C}} u_\tau^* d\lambda = T$. Para cada τ , $u_\tau(\mathbb{C})$ é uma seção global para o fluxo de X_λ .

O difeomorfismo Φ é chamado de "decomposição do livro aberto" de $S^3 \setminus P$.

A forma bilinear TS^3 dada por

$$\langle h, k \rangle_2 = \lambda(h)\lambda(k) + d\lambda(\pi h, \pi J(x)k) \quad (8.5)$$

é positiva definida e, portanto, temos uma nova métrica em S^3 , onde denotaremos a norma de um vetor associada a essa métrica por $\|v\|_2^2 = \langle v, v \rangle_2$. Podemos falar em ângulo $\angle h, k \in [0, \pi]$ entre os vetores h e k , usando a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, ou seja,

$$\cos(\angle h, k) = \frac{\langle h, k \rangle_2}{\|h\|_2 \|k\|_2}$$

É fácil ver que $\angle X_\lambda, v = \frac{\pi}{2}$ para todo $v \in \xi$. Definimos o ângulo $\angle \zeta, v \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entre um plano $\zeta \subset TS^3$ e um vetor $v \in TS^3$ como sendo o menor ângulo entre um vetor $w \in \zeta$ e o vetor v . Temos, portanto, $\angle \xi, X_\lambda = \frac{\pi}{2}$.

A função $a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, correspondente à componente \mathbb{R} de uma curva pseudo-holomorfa de energia finita é limitada inferiormente e $a(z_k) \rightarrow \infty$ se $|z_k| \rightarrow \infty$. Além disso apresenta várias relações com a componente $u : \mathbb{C} \rightarrow S^3$.

Consideramos em \mathbb{C} a métrica Euclidiana. Em primeiro lugar, por (8.4), temos

$$\Delta a = |\pi u_s|_J^2 > 0$$

onde Δ é o operador de Laplace. Portanto, a é uma função sub-harmônica. Seja ∇a o gradiente de a . É fácil ver que

$$Du \nabla a \in \xi$$

ou seja, a direção do gradiente de a é a direção onde a forma λ se anula em S^3 . Por outro lado, na direção $i \nabla a = (-a_t, a_s)$ temos o menor ângulo possível entre um vetor no espaço tangente a u e X_λ , ou seja, $\angle Tu, X_\lambda = \angle Du i \nabla a, X_\lambda$. Mais precisamente, esse ângulo é dado

por

$$\cos \angle Tu, X_\lambda = \frac{|\nabla a|^2}{\Delta a + |\nabla a|^2}$$

8.2 Um sistema de coordenadas importante e a hipótese (H1)

Apresentaremos agora um sistema de coordenadas que trivializa a forma de contato (S^3, λ) e definiremos uma estrutura complexa em $\ker \lambda$ que simplificará as equações das curvas pseudo-holomorfas. Temos como objetivo preparar algumas ferramentas para uma possível continuidade deste trabalho no sentido de generalizar o teorema 6.2.

Seja $w : [a, b] \rightarrow S^3$ uma solução do campo de Reeb X_λ tal que w é um mergulho. Podemos encontrar uma vizinhança U de $w([a, b])$ em S^3 , uma vizinhança V de $\{0\} \times [0, E_1]$ em $\mathbb{R}^2 \times [0, E_1]$ e um difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow U$ tal que

$$\lambda' = \varphi^* \lambda = dz + xdy \tag{8.6}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $z \in [a, b]$. Temos, portanto, $\varphi^* d\lambda = d\varphi^* \lambda = d\lambda' = dx \wedge dy$.

O campo de Reeb em V é constante, dado por $(0, 0, 1)$ e $\varphi(\{0\} \times [0, E_1]) = w([0, E_1])$.

A estrutura de contato ζ , nas novas coordenadas, dada pelo núcleo da 1-forma (8.6) é gerada em cada ponto pelos vetores $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, -x)$. A projeção $\pi' : T_p V \rightarrow \zeta_p$ ao longo do campo de Reeb é dada por

$$\pi'(h_x, h_y, h_z) = (h_x, h_y, -xh_y) = h_x e_1 + h_y e_2$$

Podemos definir uma estrutura complexa $J' : \zeta \rightarrow \zeta$ por

$$\begin{aligned} J' e_1 &= e_2 \\ J' e_2 &= -e_1 \end{aligned}$$

Portanto temos

$$J' \pi'(h_x, h_y, h_z) = -h_y e_1 + h_x e_2$$

$$d\lambda'(J'\pi'h, \pi'k) = h_x k_x + h_y k_y$$

Seja $\tilde{u} = (u, a) : \mathbb{C} \rightarrow S^3 \times \mathbb{R}$ uma curva pseudo-holomorfa com energia finita $E > 0$. Então, nas coordenadas em $V \times \mathbb{R}$, pelas equações (8.4), temos

$$\begin{aligned} x_s &= y_t \\ x_t &= -y_s \\ a_s &= z_t + xy_t \\ a_t &= -z_s - xy_s \end{aligned}$$

É imediato verificar que

$$\begin{aligned} a_{ss} + a_{tt} &= x_s^2 + x_t^2 > 0 \\ z_{ss} + z_{tt} &= 0 \end{aligned}$$

O campo $v_0 \stackrel{\text{def}}{=} Dui \nabla a$, que é *push-forward* do campo $i \nabla a$, definido em \mathbb{C} , é dado por

$$v_0 = -a_t u_s + a_s u_t$$

As curvas integrais do campo v_0 preservam a componente a .

Devido à transversalidade de u com o campo de Reeb, temos que $z = z(x, y)$, ou seja, cada componente conexa da projeção da curva pseudo-holomorfa em V é gráfico de uma função f definida num subconjunto do plano xy sobre a componente z . Seja D uma dessas componentes conexas e suponhamos que D intersecta os conjuntos $Z_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{z = 0\}$ e $Z_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z = E_1\}$. Então, pela mudança de coordenadas $(s, t) \rightarrow (x, y)$, que satisfaz $u(s, t) = (x, y, z(x, y))$, temos que

$$\begin{aligned} a_{xx} + a_{yy} &= 1 \\ z_{xx} + z_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

A projeção do campo v_0 no plano xy é equivalente ao campo \tilde{v}_0 , dado por

$$\tilde{v}_0 = (z_x, z_y + x)$$

É imediato que o campo \tilde{v}_0 preserva área.

Seja γ uma curva integral do campo v_0 , contida num nível regular da função a . Então temos

$$\int_{\gamma} \lambda' = \Delta z + \int_{\gamma} x dy$$

Se γ satisfaz $\left| \int_{\gamma} x dy \right| < \varepsilon$ então

$$\int_{\gamma} \lambda' > \Delta z - \varepsilon$$

de modo que se $E_0 > E + \varepsilon$, então a curva γ não pode intersectar ambos os conjuntos Z_0 e Z_1 , pois caso contrário teríamos

$$\int_{\gamma} \lambda' > E$$

Mas sabemos que isso não é possível pois, como a função $a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é coerciva, o conjunto de nível de um valor regular de a é uma união finita de curvas fechadas simples e, pelo Teorema de Stokes, temos que

$$\int_{\gamma} \lambda' = \int_{\tilde{\gamma}} u^* \lambda < \int_C u^* \lambda = \int_{\text{int}(C)} u^* d\lambda < E \quad (8.7)$$

onde $\tilde{\gamma} = u^{-1}(\gamma) \subset C$, que é uma curva fechada simples, contida em um nível da função a . Lembramos que $u^* \lambda(i \nabla a) > 0$ e, por isso, vale a primeira desigualdade em (8.7).

A hipótese (H1) introduzida no teorema 6.2 está diretamente relacionada a este fato. Mais precisamente, a solução w pode ser escolhida como um ramo da variedade estável do sela-centro e se não existe órbita homoclínica ao equilíbrio, então podemos escolher E_0 arbitrariamente grande. Como já vimos, a órbita periódica que é bordo da seção global do sistema regularizado é sempre a mesma e, portanto, tem ação fixa igual a E . Portanto, pela análise do campo \tilde{v}_0 , se provarmos que existe pelo menos uma solução que intersecta os conjuntos \tilde{Z}_0 e \tilde{Z}_1 (as projeções de $Z_0 \cap D$ e $Z_1 \cap D$ no plano xy , respectivamente) teríamos uma contradição, conforme visto

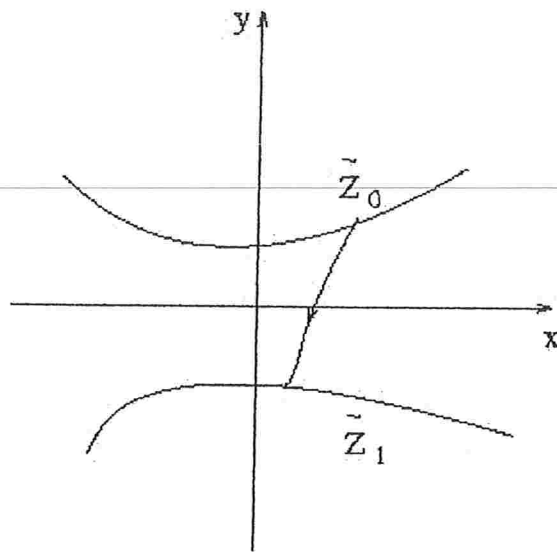


Figura 8-2:

acima. Ver figura 8-2.

Um campo de pesquisa importante, que daria uma continuidade natural a este trabalho, é, portanto, o estudo mais concentrado nas propriedades de curvas pseudo-holomorfas em S^3 com a finalidade de tornar a hipótese (H1) desnecessária. O teorema 6.2 seria, portanto, mais geral e suas hipóteses de convexidades ficariam relativamente fáceis de serem verificadas conforme feito nos exemplos de Hamiltonianos do tipo "energia cinética + potencial".

Da mesma forma, poderíamos eliminar a hipótese (H2) do teorema 6.3 e provarmos, apenas com hipóteses de convexidade do nível de energia do sela-centro, a existência de uma infinidade de órbitas periódicas e órbitas homoclínicas às órbitas periódicas da variedade central do sela-centro.

Referências Bibliográficas

- [Ar] Arnold, V.I. (1978) *Mathematical methods in classical mechanics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [BGS] Bernard, P., Grotta-Ragazzo, C., Salomao, P.A.S., *Homoclinic orbits near saddle-center fixed points of Hamiltonian systems with two degrees of freedom*, será publicado na Asterisque em 2003. Arquivo disponível em www.geocities.com/pedrosalomao.
- [Bus] Busemann, H., (1958) *Convex surfaces*, Interscience Tracts in Pure and App.Math., n° 6 Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers Ltd., London, 196 pp.
- [CPR] Churchill, R. C., Pecelli, G., Rod, D.L., (1977) *Hyperbolic structures in Hamiltonian systems*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, v.7, n° 3, pp 439-444.
- [Con] Conley, C., (1968) *Twist mappings, linking, analyticity, and periodic solutions which pass close to an unstable periodic solution*, Topological Dynamics (Sympos., Colorado State Univ., Ft. Collins, Colo., 1967), pp. 129-153. Benjamin, New York.
- [Con2] Conley, C., (1969) *On the ultimate behavior of orbits with respect to an unstable critical point I. Oscillating, asymptotic and capture orbits*, Journ. Diff. Eqns, 5, pp 136-158.
- [CZ] Conley, C., Zehnder, E., (1984) *Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian systems*, Comm. Pure App. Math., 37, pp 207-253.
- [F] Franks, J., (1996) *Area Preserving Homeomorphisms of Open Surfaces of Genus Zero*, New York Journal of Mathematics 2, pp 1-19.
- [Gho] Ghomi, M., (2002) *The problem of optimal smoothing for convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 130, pp 2255-2259.

- [Gho2] Ghomi, M., (2001) *Strictly convex submanifolds and hypersurfaces of positive curvature*, Journal of Diff. Geom., 57, pp 239-271.
- [Hen] Henrard, J., (1999) *The adiabatic invariant in classical mechanics, nonlinear and stochastic beam dynamics in accelerators - A challenge to theoretical and computational physics*, v. 3.
- [Hi] Hirsch, M., (1976) *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, n° 33, Springer-Verlag, New York, Heidelberg.
- [HK] Hofer, H., Kriener, M., *Holomorphic curves in contact geometry*, Proceedings of Symposia in Pure Math., Differential Equations, La Pietra 1996, Conference on Differential Equations, marking the 70th birthday of Peter Lax and Louis Nirenberg, v. 65, pp 77-132.
- [HZW] Hofer, H., Wysocki, K., Zehnder, E., (1998) *The dynamics on a strictly convex energy surface in \mathbb{R}^4* , Ann. of Math. (2) 148, n° 1, pp 197-289.
- [HZW2] Hofer, H., Wysocki, K., Zehnder, E., (2000) *Pseudoholomorphic curves and dynamics in three dimensions*, preprint.
- [HZW3] Hofer, H., Wysocki, K., Zehnder, E., (1995) *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations II: embedding controls and algebraic invariants*, GAFA, v. 5, pp270-328.
- [Ler] Lerman, L. M., (1991) *Hamiltonian systems with loops of a separatrix of saddle center*, Selecta Math. Sov. 10, 1991, pp 297-306.
- [LK] Lerman, L. M., Koltsova, O. Yu., (1995) *Periodic and homoclinic orbits in two-parameter unfolding of a Hamiltonian system with a homoclinic orbit to a saddle-center*, Intern. Jour. Bif. Chaos 5, pp. 397-408.
- [Mad] Maddocks, J. H., (1985) *Restricted quadratic forms and their application to bifurcation and stability in constrained variational principles*, SIAM J. Math. Anal., 16, pp 47-68.
- [MHO] Mielke, A., Holmes, P., and O' Reilly, O., (1992) *Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle center*, J. Dyn. Diff. Eqns. 4, pp. 95-126.

- [Mi] Milnor, J., (1965) *Topology from the differential point of view*, The University Press of Virginia, Charlottesville.
- [Mo] Moser, J., (1958) *On the generalization of a theorem of A. Liapunoff*, Comm. Pure Appl. Math. v. 11, pp. 257-271.
-
- [McS] McDuff, D., Salamon, D., (1998) *Introduction to symplectic topology*, 2nd Edition. Oxford University Press.
- [Rab] Rabinowitz, P., (1978) *Periodic solution of Hamiltonian systems*. Comm. Pure Appl. Math., 31, pp 157-184.
- [Rag1] Grotta-Ragazzo, C., (1997) *Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle centers*, Comm. Pure App. Math. L, pp 105-147.
- [Rag2] Grotta-Ragazzo, C., (1997) *On the stability of double homoclinic loops*, Comm. Math. Phys, 184, pp 251-272.
- [Russ] Rüssmann, H., (1964) *Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*, Math. Ann. v. 154, pp. 285-300. Princeton University Press.
- [Tho] Thorpe, J. , (1979) *Elementary topics in differential geometry*, Springer-Verlag, New York.