

Condições Geométricas  
para  
Caoticidade

Márcio Ricardo Alves Gouveia

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE  
EM  
CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Colli

*- Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP-*

São Paulo -SP

2003

Condições Geométricas  
para  
Caoticidade

Este exemplar corresponde à redação  
final da dissertação devidamente corrigida  
e defendida por Márcio Ricardo Alves Gouveia  
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 10 de março de 2003.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Eduardo Colli (orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Edson Vargas - IME - USP
- Prof. Dr. Vilton Pinheiro - UFBA

A todos os meus  
Mestres.

# Agradecimentos

Ao término deste trabalho, gostaria de manifestar meus sinceros agradecimentos:

À minha mãe pelo incentivo e apoio que me passou durante esta jornada.

Ao Prof. Eduardo Colli, pela valiosa orientação.

Aos professores do IME.

Aos professores do Departamento de Matemática da Unesp - S. J. do Rio Preto, em especial aos professores Aparecida Francisco da Silva, Paulo Ricardo da Silva, Neuza Kazuko Kakuta, pela formação e estímulo que me passaram durante a graduação, a primeira como minha tutora no PET - Programa Especial de Treinamento, e ao professor Vanderlei Minori Horita pela excelente indicação.

A meus companheiros de grupo PET com quem convivi durante os três últimos anos da graduação. Em especial aqueles com os quais sofremos em alguns verões, como Claudio Gomes Pessoa, Clayton Eduardo Lente da Silva e Karine Bobadilha; a última por aguentar eu e o Clayton em sua casa por cerca de 40 dias durante um dos cursos de verão, e aos dois primeiros por também terem me ajudado a dividir as despesas aqui em São Paulo durante os últimos dois anos.

Aos meus principais amigos da minha turma de graduação como Andréia Cristina Ribeiro, Homero Ghioti da Silva e Tatiane Bertoldi.

Ao pessoal da moradia estudantil com quem passei agradáveis, conturbados e inesquecíveis momentos durante minha graduação.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

À **FAPESP** pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Nesse trabalho estabelecemos a relação entre uma hipótese geométrica na dinâmica de funções do intervalo (com um ponto crítico) e o comportamento caótico da dinâmica, traduzido por propriedades ergódicas. Ao mesmo tempo, evidenciamos que a hipótese geométrica é importante para tirar conclusões no parâmetro, quando se trata de famílias de aplicações, implicando na abundância e prevalência, em termos de medida de Lebesgue, dos fenômenos caóticos fora de hiperbolicidade regular.

**Palavras-chave:** Dinâmica Unidimensional, Renormalização Generalizada, Família Quadrática, Decaimento de Geometria, Medidas Absolutamente Contínuas.

# Abstract

In this work we establish the relation between a geometrical hypothesis in the dynamic of interval functions (with one critical point) and the chaotic behaviour of the dynamic, defined by ergodic properties. At the same time, we show the importance of the geometric hypothesis to obtain conclusions involving the parameter, when dealing with families of maps, implying abundance and prevalence, in the sense of Lebesgue measure, of chaotic phenomenon outside regular hyperbolicity.

**Keywords:** One-dimensional Dynamic, Generalized Renormalization, Quadratic Family, Decay of Geometry, Absolutely Continuous Measures.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Medidas Invariantes e Ergodicidade . . . . .	10
1.1.1	Medidas Invariantes . . . . .	10
1.1.2	Ergodicidade . . . . .	13
1.2	A Hipótese Geométrica . . . . .	17
1.3	Parâmetros . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Derivada Schwarziana, Razão Cruzada e Distorção</b>	<b>25</b>
2.1	Derivada Schwarziana e Razão Cruzada . . . . .	25
2.2	Distorção . . . . .	29
2.3	Resultados e Demonstrações . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Intervalos Errantes e Hiperbolicidade</b>	<b>41</b>
3.1	Intervalos Errantes e Hiperbolicidade . . . . .	41
3.2	Resultados e Demonstrações . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Aplicações de Retorno e Fatores de Escala</b>	<b>55</b>
4.1	Pontos Bons e Aplicações de Retorno . . . . .	55
4.2	Fatores de Escala . . . . .	59
4.3	Resultados e Demonstrações . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Condição de Somabilidade para Derivadas</b>	<b>71</b>
5.1	Decomposição de Telemann da Órbita Crítica . . . . .	72
5.2	Prova da Condição de Somabilidade para Derivadas . . . . .	73

<b>6</b>	<b>Derivada ao longo de Órbitas Recorrentes</b>	<b>75</b>
6.1	Derivada ao longo de Órbitas Recorrentes . . . . .	75
6.2	Lemas Técnicos . . . . .	75
6.3	Prova da Proposição 6.1.1 . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Parâmetros</b>	<b>85</b>
7.1	Resultados no Parâmetro . . . . .	85
7.2	Renormalização Generalizada . . . . .	86
7.3	Renormalização Generalizada em Famílias . . . . .	89
7.4	Decaimento de Geometria e Starting Conditions . . . . .	91
7.5	Demonstrações . . . . .	95
7.5.1	Prevalência dos parâmetros caóticos e dos renormalizáveis . . . . .	95
7.5.2	Abundância de Caoticidade . . . . .	97
7.5.3	Densidade da renormalização . . . . .	98
<b>A</b>		<b>99</b>
A.1	Sela-nó . . . . .	100

# Capítulo 1

## Introdução

Nesse trabalho estudaremos alguns aspectos do que ocorre com a dinâmica das aplicações *unimodais*  $f$  do intervalo  $[0, 1]$ , isto é, funções  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  com um único ponto crítico e tais que  $f(0) = f(1) = 0$ . Estaremos interessados no que acontece com a sequência de iterados  $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$ , para uma dada aplicação unimodal  $f$  (e onde  $f^n$  denota a composição sucessiva de  $f$  por  $n$  vezes). Pode-se querer saber, por exemplo, com qual frequência o conjunto dos pontos de acumulação dessa sequência é uma *órbita periódica*,  $\{p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$  com  $f^k(p) = p$ , ou um conjunto de  $k$  intervalos  $I_0, I_1, \dots, I_{k-1}$ , tais que  $f(I_0) = I_1, f(I_1) = I_2, \dots, f(I_{k-1}) = I_0$ . Aqui a frequência pode ser explicada da seguinte forma: diz-se que uma certa propriedade ocorre quase sempre ou em quase todo ponto se ela ocorre dentro de um conjunto que tenha medida total (no nosso caso dentro de um conjunto que tenha medida de Lebesgue 1), isto é, a propriedade só não ocorre para pontos que estejam dentro de um conjunto que tenha medida zero.

Dentro das aplicações que estudaremos há alguns exemplos bem conhecidos como a família de funções quadráticas  $f_a(x) = 4ax(1 - x)$ , onde  $a$  é um parâmetro variando no intervalo  $[0, 1]$ , e  $f_a(x) = a \operatorname{sen}(\pi x)$  com o parâmetro  $a$  variando em  $[0, 1]$  também, ambas definidas no intervalo  $[0, 1]$ . Mas é bom ressaltar aqui que iremos trabalhar com a hipótese de que o ponto crítico dessas aplicações é quadrático e além disso com uma hipótese técnica de que a *Derivada Schwarziana* dessas aplicações seja negativa, onde a

derivada Schwarziana de uma aplicação  $f$  é definida por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2,$$

desde que  $x$  não seja o ponto crítico de  $f$ .

O nosso objetivo será formular uma condição geométrica para aplicações unimodais  $f$  do intervalo  $[0, 1]$  suficiente para serem caóticas, isto é, para a existência de medidas de probabilidade invariantes absolutamente contínuas. E o resultado principal desta dissertação, enunciado adiante, foi tirado do trabalho de Martens e Nowicki [4].

## 1.1 Medidas Invariantes e Ergodicidade

### 1.1.1 Medidas Invariantes

Lembremos alguns conceitos de Teoria da Medida. Sejam  $X \neq \emptyset$  um conjunto e  $\mathcal{P}(X)$  o conjunto das partes de  $X$ . Dizemos que um conjunto não vazio  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ) é uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$  se, e somente se:  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\mathcal{A}$ , se  $A$  é um elemento de  $\mathcal{A}$  então seu complementar também é, e se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de elementos de  $\mathcal{A}$ , então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  também é um elemento de  $\mathcal{A}$ . Com isso o par  $(X, \mathcal{A})$  é chamado de *espaço mensurável*.

Uma *medida* sobre  $(X, \mathcal{A})$  é uma função  $\mu$  definida em  $\mathcal{A}$  e com valores em  $[0, \infty]$ , ou seja,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ . Assim chamamos a terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  de *espaço de medida*. Se  $\mu(X) = 1$  a terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é denominada de *espaço de probabilidade*. No nosso contexto  $X$  será o intervalo  $[0, 1]$  e  $\mathcal{A}$  será a  $\sigma$ -álgebra dos *Borelianos*, ou seja, a menor  $\sigma$ -álgebra que contém os abertos do intervalo.

Se  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  e  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  são medidas, dizemos que  $\mu$  é *absolutamente contínua com respeito a  $\nu$* , e denotamos  $\mu \ll \nu$ , se  $A \in \mathcal{A}$  e  $\nu(A) = 0$  implicam  $\mu(A) = 0$ . Quando dizemos apenas que uma certa medida  $\mu$  é absolutamente contínua, sem especificar com relação a qual medida, estamos querendo dizer que  $\mu$  é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, onde a medida de Lebesgue é aquela que estende a noção de comprimento de intervalo para os borelianos.

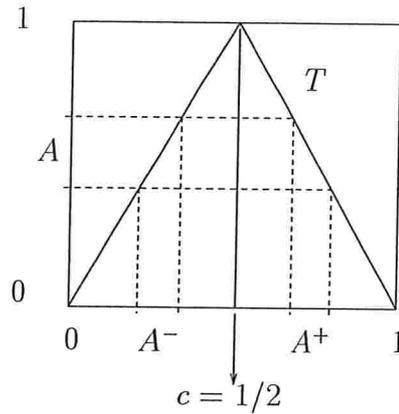


Figura 1.1: Ilustração da pré-imagem por  $T$  de um conjunto mensurável  $A$ .

Dadas uma transformação  $T : X \rightarrow X$  mensurável (isto é, tal que  $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ ) e uma medida  $\mu$  sobre  $(X, \mathcal{A})$ , diz-se que  $\mu$  é  $T$ -invariante, ou que  $T$  preserva a medida  $\mu$ , se  $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

Vejamos alguns exemplos. Primeiro definamos a aplicação tenda  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Vamos verificar que essa transformação  $T$  preserva a própria medida de Lebesgue. Considere  $A \subset [0, 1]$  um conjunto Lebesgue mensurável. Temos que  $T^{-1}(A) = A^- \cup A^+$ , onde  $A^- \subset [0, 1/2]$ ,  $A^+ \subset [1/2, 1]$  (ver Figura 1.1).

Como  $T$  é simétrica em relação ao ponto  $c = 1/2$  temos que  $\mu(T^{-1}(A)) = 2\mu(A^-)$ , mesmo que  $A^- \cap A^+ = \{1/2\}$  pois um ponto tem medida de Lebesgue zero. Sendo assim para concluirmos a invariância da medida  $\mu$  por  $T$  basta verificarmos que  $2\mu(A^-) = \mu(A)$ .

Seja  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$  a inversa de  $T$  nesse intervalo, isto é,  $\phi$  é dada por

$$\phi(y) = \frac{y}{2}.$$

Temos

$$\mu(A^-) = \int_{A^-} dx = \int_{\phi(A)} dx = \int_A \frac{dy}{2} = \frac{\mu(A)}{2},$$

onde na penúltima igualdade fizemos a mudança de variável  $x = \phi(y)$ . Assim  $\mu$  é  $T$ -invariante.

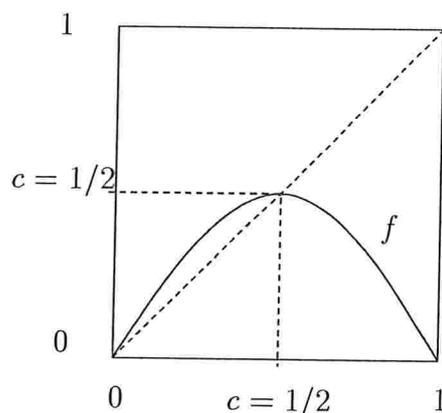


Figura 1.2: Gráfico da aplicação quadrática  $f(x) = 2x(1 - x)$ .

Considere agora a aplicação quadrática  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $f(x) = 2x(1 - x)$ . Temos que essa aplicação tem o ponto crítico  $c = 1/2$  como ponto fixo atrator (ver Figura 1.2).

Seja  $\delta_c$  a medida sobre os borelianos de  $[0, 1]$  dada por

$$\delta_c(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \notin A, \\ 1 & \text{se } c \in A. \end{cases}$$

Essa medida é chamada de medida de *Dirac* concentrada no ponto  $c$ . Ela é  $f$ -invariante, pois dado  $A \subset [0, 1]$  mensurável temos que

$$\delta_c(f^{-1}(A)) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \notin f^{-1}(A), \\ 1 & \text{se } c \in f^{-1}(A). \end{cases}$$

Mas se  $c \in f^{-1}(A)$  então  $f(c) = c \in A$  e assim  $\delta_c(A) = \delta_c(f^{-1}(A)) = 1$ . Caso  $c \notin f^{-1}(A)$  temos analogamente que  $\delta_c(A) = \delta_c(f^{-1}(A)) = 0$ . Portanto  $\delta_c$  é  $f$ -invariante.

Claramente essa medida não é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue, pois basta tomarmos qualquer conjunto enumerável  $E$  que contenha  $c$  que teremos  $\text{Leb}(E) = 0$  mas  $\delta_c(E) = 1$ .

Como nosso último exemplo considere a aplicação  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $T(x) = 4x(1 - x)$ . Essa aplicação  $T$  também preserva uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. A densidade dessa medida  $\mu$  é dada por

$$d\mu(x) = \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}},$$

isto é, dado um boreliano  $A \subset [0, 1]$  temos que a medida  $\mu$  de  $A$  é dada por

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

Que  $\mu$  é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue é claro, pois se  $A \subset [0, 1]$  é um conjunto Lebesgue mensurável tal que  $\text{Leb}(A) = \int_A dx = 0$  temos que

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}} = 0.$$

Para verificar que essa medida  $\mu$  é  $T$ -invariante, seja  $A \subset [0, 1]$  um conjunto mensurável. Temos que  $T^{-1}(A) = A^- \cup A^+$ , onde  $A^- \subset [0, 1/2]$ ,  $A^+ \subset [1/2, 1]$  (ver Figura 1.3).

Como  $T$  é simétrica em relação ao ponto crítico  $1/2$  temos que  $\mu(T^{-1}A) = 2\mu(A^-)$ . Sendo assim para mostrarmos a invariância da medida  $\mu$  por  $T$  basta mostrarmos que  $2\mu(A^-) = \mu(A)$ .

Seja  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$  dada por

$$\phi(y) = \frac{1 - \sqrt{1-y}}{2}.$$

Essa função  $\phi$  é a inversa de  $T$  em  $[0, 1/2]$ . Temos

$$\mu(A^-) = \int_{\phi(A)} \frac{dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

Fazendo a mudança de variável  $x = \phi(y)$  obtemos:

$$\mu(A^-) = \frac{1}{2} \int_A \frac{dy}{\pi \sqrt{y(1-y)}} = \frac{\mu(A)}{2}.$$

Portanto  $\mu$  é  $T$ -invariante.

### 1.1.2 Ergodicidade

Uma maneira interessante de se analisar o comportamento dinâmico dessas aplicações é do ponto de vista ergódico, onde dado um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  e sendo  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que preserva a medida  $\mu$ , diz-se que  $T$  é *ergódica* se:  $\forall A \in \mathcal{B}$  tal que  $T^{-1}(A) = A$ , tem-se  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(X \setminus A) = 0$ , ou seja, não há dois conjuntos invariantes disjuntos e ambos com medida positiva. Dentro desse contexto há um resultado básico e muito conhecido que é o Teorema Ergódico de Birkhoff (ver [8]).

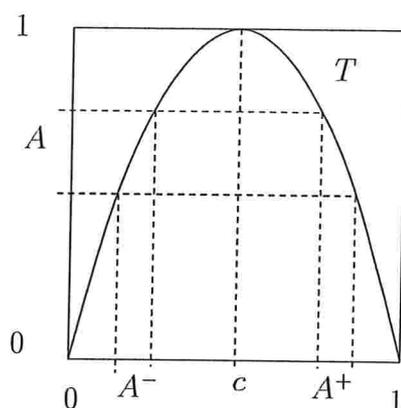


Figura 1.3: Ilustração da pré-imagem por  $T$  de um conjunto mensurável  $A$ .

**Teorema 1.1.1. Teorema Ergódico de Birkhoff.** *Sejam  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que preserva a medida  $\mu$ . Se  $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}; \int_X |f| d\mu < \infty\}$ , então existe  $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$  tal que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \rightarrow g(x), \text{ quando } n \rightarrow \infty, \mu \text{ q.t.p. } x \in X, \text{ e } \int_X g d\mu = \int_X f d\mu.$$

Além disso se  $T$  é ergódica então  $g$  é constante  $\mu$  q.t.p.  $x \in X$  e

$$g(x) = \int_X f d\mu.$$

Lembrando que uma propriedade é dita valer para  $\mu$  q.t.p.  $x \in X$  quando ela é válida para todo  $x$  dentro de um conjunto  $A \in \mathcal{B}$  que tenha medida total (isto é,  $\mu(X \setminus A) = 0$ ).

Analisemos nesse contexto os exemplos que vimos anteriormente. Como em cada um deles as transformações preservam a medida do seu respectivo espaço podemos aplicar o Teorema Ergódico de Birkhoff. Lembremos que se  $(X, \mathcal{B}, \nu)$  é um espaço de medida finita,  $\nu(X) < \infty$ , então a função indicadora  $\chi_A$  pertence a  $L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$ , para qualquer  $A \in \mathcal{B}$ . Assim, tomando  $f = \chi_A$ , para  $A \in \mathcal{B}$ , no Teorema Ergódico de Birkhoff, temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j(x) \rightarrow g(x), \mu \text{ q.t.p. } x \in X.$$

Uma vez que

$$\chi_A \circ T^j(x) = \chi_{T^{-j}(A)}(x) = \delta_{T^j(x)}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } T^j(x) \in A \\ 0 & \text{se } T^j(x) \notin A, \end{cases}$$

segue que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x)}(A) \rightarrow g(x), \quad \mu \text{ q.t.p. } x \in X = [0, 1].$$

E se  $T$  for uma aplicação ergódica obtemos que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x)}(A) \rightarrow \int_X \chi_A d\mu = \mu(A), \quad \mu \text{ q.t.p. } x \in X = [0, 1].$$

Mas  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x)}(A) = \frac{1}{n} \#\{0 \leq j \leq n-1; T^j(x) \in A\}$ , que é a frequência com que a órbita do ponto  $x \in X = [0, 1]$  visita o conjunto  $A$ . Ou seja, para quase todo ponto  $x \in X = [0, 1]$  a frequência com que sua órbita frequenta o conjunto  $A$  tem uma probabilidade igual à medida de  $A$ ,  $\mu(A)$ .

No caso da aplicação  $T(x) = 4x(1-x)$  há um resultado (vide Cap.V, pág. 332 de [MS]) que garante que essa aplicação é ergódica. Assim pelo Teorema Ergódico de Birkhoff temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{T^{-j}(A)}(x) \rightarrow g(x) = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A), \quad \mu \text{ q.t.p. } x \in X = [0, 1].$$

Como vimos acima a densidade dessa medida  $\mu$  é dada por

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}},$$

ou seja, a distribuição de densidade da órbita de um dado  $x_0 \in (0, 1)$  se comporta segundo a função  $h(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$ . Podemos fazer assim o seguinte experimento computacional: dividimos o intervalo  $[0, 1]$  em subintervalos de comprimento  $0 < \Delta < 1$  (ou seja, particionaremos o intervalo  $[0, 1]$  em  $1/\Delta$  intervalos de comprimento  $\Delta$ ); para facilitar a visualização vamos supor que essa divisão nos tenha fornecido  $k$  subintervalos,  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ ; escolhemos um ponto  $x_0 \in [0, 1]$  e consideremos as primeiras  $n$  iteradas

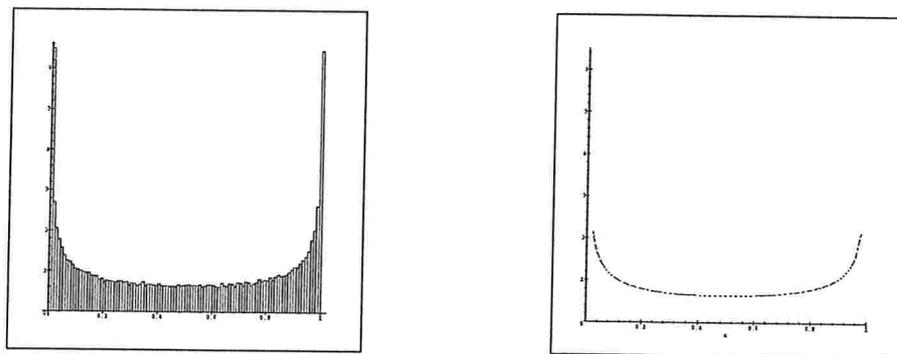


Figura 1.4: Comparação do experimento com o gráfico da função  $h(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ .

de  $x_0$  pela aplicação  $T$ , isto é,  $x_0, x_1 = T(x_0), \dots, x_n = T^n(x_0)$ ; em seguida para cada intervalo  $\Delta_j$ , com  $1 \leq j \leq k$ , fazemos o seguinte cálculo

$$\frac{1}{n} \#\{i \leq n; x_i \in \Delta_j\} = h_j, \text{ para cada } 1 \leq j \leq k.$$

Com esses números  $h_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , em mão fazemos o seguinte: sobre cada subintervalo  $\Delta_j$  colocamos um retângulo de altura  $h_j$  e base  $\Delta$ , para cada  $1 \leq j \leq k$ . Assim plotamos sobre o intervalo  $[0, 1]$ , subdividido nos  $k$  intervalos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ , retângulos que possuem bases de mesmo comprimento,  $\Delta$ , e alturas ( $h_j$ ) que dependem da quantidade de pontos, do pedaço da órbita de  $x_0$ , que entraram em cada subintervalo  $\Delta_j$ . Se fizermos o comprimento dos intervalos  $\Delta_j$  tender a zero (é claro que com isso a quantidade de subintervalos aumentará) e fizermos  $n \rightarrow \infty$  é de se esperar que a curva sob as alturas dos retângulos colocados sobre cada subintervalo se pareça com o gráfico da função  $h(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ . Para confirmarmos isso vejamos a Figura 1.4.

Já no caso da aplicação  $f(x) = 2x(1-x)$  vimos que a medida que ela preserva não é absolutamente contínua e assim ela não possui uma função de distribuição de densidade. Por outro lado, dado um ponto  $x_0 \in (0, 1)$  e considerando a órbita  $x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_i = f^i(x_0), \dots$  temos que as médias de Dirac convergem para  $\delta_c$ , isto é

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{x_i} \rightarrow \delta_c.$$

Na prática, na maioria dos casos, não é fácil encontrar explicitamente medidas invariantes absolutamente contínuas.

Uma motivação para estudarmos a existência de uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua é que uma tal medida implica em comportamento *caótico*. Na verdade, ocorre que em aplicações unimodais do intervalo, com derivada Schwarziana negativa, a existência de um *expoente de Lyapunov*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x)|$  positivo para Lebesgue q.t.p.  $x$  (isto é, para pontos  $x$  dentro de um conjunto com medida de Lebesgue igual a 1) é equivalente à existência de uma (única) medida de probabilidade invariante absolutamente contínua (vide Cap.V, pg. 366 de [MS]).

Para a existência de uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua utilizaremos aqui nesse trabalho (sem demonstrá-lo) um resultado que foi mostrado em [10] e em [MS, Cap.V, Seção 4] de que expansão suficiente ao longo da órbita crítica implica na existência de uma tal medida, ou seja, se a taxa de crescimento de  $|Df^k(f(c))|$  for tão rápido de modo que  $\sum_{k \geq 1} |Df^k(f(c))|^{-1/2} < \infty$ , então existirá uma medida de probabilidade  $f$ -invariante absolutamente contínua.

## 1.2 A Hipótese Geométrica

Como já dissemos, estaremos restritos, neste trabalho, a aplicações unimodais  $f$  com  $Sf < 0$  (essas aplicações são chamadas de  $S$ -unimodais) e ponto crítico quadrático. Para formular a hipótese geométrica, precisaremos antes de mais três hipóteses: (i)  $f$  não possui atratores periódicos; (ii) o ponto crítico é recorrente; (iii)  $f$  não é renormalizável. Vejamos primeiro o que significa cada um desses conceitos, e em seguida examinaremos a necessidade de cada uma das hipóteses.

(i) Dizemos que uma aplicação  $f$  possui um *atrator periódico*, digamos de período  $k$ , se existir um ponto periódico  $p$  de período  $k$  (isto é,  $p, f(p), \dots, f^{k-1}(p), f^k(p) = p$ ) que seja atrator, isto é, de modo que sua órbita periódica seja atratora. Sendo  $\mathcal{O}(p) = \{f^n(p); n \geq 0\} = \{p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$  a órbita periódica de  $p$ , dizemos que  $\mathcal{O}(p)$  é *atratora* se

$$B(p) = \{x; f^n(x) \rightarrow \mathcal{O}(p), \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

contém um conjunto aberto. O conjunto  $B(p)$  é chamado de *bacia de  $\mathcal{O}(p)$* . Além disso, a união das componentes de  $B(p)$ ,  $B_0(p)$ , que contém pontos de  $\mathcal{O}(p)$ , é chamada de *bacia imediata de  $\mathcal{O}(p)$* . Se  $B_0(p)$  é uma vizinhança de  $\mathcal{O}(p)$  então  $\mathcal{O}(p)$  é dita ser *atratora pelos dois lados*, caso contrário  $\mathcal{O}(p)$  é chamada de *atratora por um lado*. Mas em ambos os casos chamaremos  $\mathcal{O}(p)$  apenas de *órbita atratora*. Há um resultado (Teorema 2.1.2) que garante que para aplicações  $S$ -unimodais todo ponto periódico não-hiperbólico, isto é,  $|Df^k(p)| = 1$  (ver definição mais detalhada abaixo), é um atrator nesse sentido.

(ii) O *ponto crítico*  $c$  da aplicação  $f$  é chamado de *recorrente* quando  $c$  é um ponto de acumulação de sua própria órbita, ou seja, se existe uma subsequência  $n_i \rightarrow \infty$  tal que  $f^{n_i}(c) \rightarrow c$ .

(iii) Diz-se que uma *aplicação  $f$  é renormalizável* se existe uma coleção de intervalos,  $\{I_0, I_1, \dots, I_{k-1}\}$ , propriamente contidos em  $[0, 1]$  com os interiores dois a dois disjuntos e tais que: (a) o ponto crítico  $c$  de  $f$  pertence a  $I_{k-1}$ , digamos; (b)  $f(I_{k-1}) \subset I_0$  e  $f(\partial I_{k-1}) \subset \partial I_0$ ; (c)  $f : I_i \rightarrow I_{i+1}$  é um difeomorfismo para todo  $i = 0, \dots, k-2$ . Nesse caso a aplicação  $f^k|_{I_{k-1}}$  normalizada ao intervalo  $[0, 1]$  é a *renormalização de  $f$* . A partir daí diz-se que uma aplicação  $f$  é *infinitamente renormalizável* se toda renormalização de  $f$  também é renormalizável.

Além disso uma aplicação  $f$  é dita ser *Misiurewicz* se o ponto crítico  $c$  não é recorrente. Pode acontecer de  $\omega(c) = \{y \in X; \exists \text{ uma seqüência } n_i \rightarrow \infty \text{ com } f^{n_i}(c) \rightarrow y\}$  ser uma órbita periódica atratora. Se não, então  $f(c)$  pertence a algum conjunto compacto invariante hiperbólico  $\Lambda = \Lambda_f$ , onde diz-se que um *conjunto  $K \subset [0, 1]$  é hiperbólico* se  $f(K) \subset K$  e existirem constantes  $C > 0$  e  $\lambda > 1$  tais que

$$|Df^n(x)| > C\lambda^n,$$

para todo  $x \in K$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Surge assim uma pergunta natural: *por que estudaremos aplicações com todas essas restrições? Ou seja, por que queremos que as aplicações em questão não possuam atratores periódicos e sejam não renormalizáveis, não Misiurewicz e  $S$ -unimodais?*

Um ponto periódico  $p$ , de período  $k$  digamos, é chamado de *ponto periódico hiperbólico* se  $|Df^k(p)| \neq 1$ . Se  $|Df^k(p)| < 1$  então  $\mathcal{O}(p)$  é atratora, senão é repulsora.

Uma vez que as aplicações em estudo aqui são  $S$ -unimodais, há um resultado devido a Singer, (Teorema 2.1.1) estabelecendo que se  $f$  é uma aplicação do intervalo  $S$ -unimodal com derivada Schwarziana negativa, preservando o bordo, então a bacia imediata de qualquer órbita periódica atratora contém um ponto crítico de  $f$ . Como consequência desse Teorema vale que se  $f$  é uma aplicação  $S$ -unimodal então existe no máximo uma órbita periódica atratora (vide Corolário 2.1.1). Assim, no caso de haver uma órbita periódica atratora hiperbólica, deve existir um aberto  $V \subset [0, 1]$  contendo os pontos críticos de  $f$  (no nosso caso,  $f$  possui apenas um ponto crítico) e os pontos periódicos atratores, de modo que se  $x \in V$  então  $f^n(x)$  converge para a órbita periódica atratora,  $\mathcal{O}(p)$ . Logo, pelo Teorema 3.1.4 (Teorema de Misiurewicz, mas com a hipótese de que a aplicação é apenas de classe  $C^2$  seu enunciado também é conhecido como Teorema de Mañé) temos que  $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}([0, 1] \setminus V)$  é um conjunto hiperbólico e aplicando o Teorema 3.1.3 concluímos que para Lebesgue quase todo ponto  $x \in [0, 1]$  vale que

$$f^n(x) \rightarrow \mathcal{O}(p) = \{p_0 = p, p_1 = f(p), \dots, p_{k-1} = f^{k-1}(p)\},$$

fazendo com que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{x_i} \rightarrow \mu = \frac{1}{k} (\delta_{p_0} + \dots + \delta_{p_{k-1}}), \text{ para Leb q.t.p. } x_0 \in [0, 1],$$

onde  $\{x_i = f^i(x_0); i \geq 0\}$  é a órbita de  $x_0$ . E nesse caso não há uma medida de probabilidade absolutamente contínua. Para o caso não hiperbólico, mais precisamente quando a órbita periódica atratora é do tipo *sela-nó* veja o Apêndice, pois não podemos utilizar os mesmos argumentos que usamos acima no caso da órbita periódica atratora hiperbólica.

Para aplicações Misiurewicz há um resultado conhecido (vide Cap.V, pág. 363 de [MS]) que assegura a existência de uma medida absolutamente contínua. Veremos também que a hipótese geométrica não pode ser formulada nesse caso.

Quando a aplicação é renormalizável temos que para Lebesgue quase todo ponto a dinâmica se reduz à dinâmica de um intervalo de renormalização  $I \subset [0, 1]$  (ver Apêndice).

Em nenhum momento evitamos a possibilidade de que a função  $f$  seja assimétrica. Para lidar com isso, introduzimos a função  $\tau(x)$  dada por  $f = f \circ \tau$  com  $\tau \neq id$ , a qual é um difeomorfismo de classe  $C^1$  (vide Cap.4, Lema 4.1.1).

Para formular a condição geométrica (tendo em mente as hipóteses acima), definimos uma seqüência de intervalos  $V_n$ , chamados de *intervalos centrais*. Mas para isso precisamos do conceito de *ponto bom* (“nice”, em inglês), ou seja, definimos o conjunto de pontos bons como sendo o conjunto

$$\mathcal{N} = \{x \in [0, c] \mid V_x \cap \text{orb}(x) = \emptyset\},$$

onde  $V_x = (x, \tau(x))$ . Assim os intervalos centrais são da forma  $V_n = (x_n, \tau(x_n))$  (ver Figura 1.6), e além disso eles também são chamados de *intervalos bons*.

A partir daí, para cada  $n \geq 1$ , construímos indutivamente uma aplicação de primeiro retorno a  $V_n$ , isto é, uma aplicação  $R_n : D_n \rightarrow V_n$ , onde  $D_n \subset V_n$  é uma coleção enumerável de intervalos, todos sendo levados difeomorficamente sobre  $V_n$  exceto a componente central de  $D_n$  que é  $V_{n+1}$  (ver Figura 1.5). Além disso diz-se que a aplicação de primeiro retorno  $R_n$  tem um *retorno central* quando  $R_n(c) \in V_{n+1}$ . Esse processo indutivo de construção sucessiva de intervalos bons  $V_n$  com suas transformações de primeiro retorno  $R_n$  (melhor estudado no Capítulo 4), assim como aquele que está no Capítulo 7, é chamado de *Renormalização Generalizada*, o qual é bastante utilizado em [1] e [2], por exemplo, e cuja teoria foi desenvolvida em [11] e [12].

Vale ressaltar aqui que em qualquer um dos casos das aplicações que citamos acima e que não queremos (isto é, aplicações com atratores periódicos, Misiurewicz ou renormalizáveis) não vale a construção dos intervalos  $V_n$  (com  $|V_n| \rightarrow 0$ , onde  $|V_n|$  denota o comprimento do intervalo  $V_n$ ). Por isso também a importância das hipóteses.

A condição geométrica suficiente para a existência de medidas absolutamente contínuas é estabelecida em termos dos *fatores de escala* (“scaling factors” em inglês)

$$\sigma_n = \frac{|V_{n+1}|}{|V_n|}, n \geq 1.$$

Os fatores de escala descrevem propriedades geométricas do sistema e estão fortemente relacionados com questões de distorção.

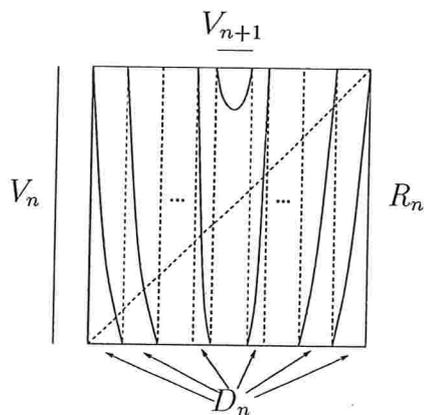


Figura 1.5: Aplicação de primeiro retorno a  $V_n$ .

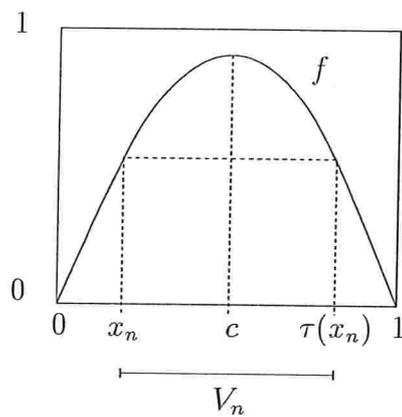


Figura 1.6: Ilustração do intervalo  $V_n$ .

Com todos esses conceitos e resultados bem entendidos usaremos a Decomposição de Telemann da Órbita Crítica (Capítulo 5) para provarmos que a somabilidade dos fatores de escala

$$\sum_{n \geq 1} (\sigma_n)^{1/2} < \infty$$

implica na Condição de Somabilidade sobre as derivadas

$$\sum_{k \geq 1} |Df^k(f(c))|^{-1/2} < \infty,$$

que estabelecemos há pouco. E aqui está o passo técnico detalhado nesse trabalho, isto é, demonstrar que fatores de escala pequenos ( $\sum_{n \geq 1} (\sigma_n)^{1/2} < \infty$ ) implicam em expansão ao longo da órbita crítica de modo que  $\sum_{k \geq 1} |Df^k(f(c))|^{-1/2} < \infty$ . E para isso utilizamos um resultado demonstrado no Capítulo 6 (Proposição 6.1.1).

Em [10] e em [5] (Cap.V, Seção 4) foi mostrado que expansão suficiente ao longo da órbita crítica implica na existência de uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua.

É bom ressaltar aqui que a condição de que exista apenas um número finito de retornos centrais na família de aplicações de retorno é suficiente para termos a somabilidade dos fatores de escala. Isto mostra que a condição geométrica pode ser trocada por uma condição topológica. Esse é um resultado conhecido como *decaimento de geometria* e que pode ser encontrado em [16] e [11]. Discutiremos esse assunto em mais detalhes no último Capítulo.

Com isso concluiremos o Teorema principal da dissertação, tirado do trabalho de Martens e Nowicki, [4].

**Teorema 1.2.1.** *Uma aplicação  $f$  (unimodal,  $Sf < 0$ ), não renormalizável, com ponto crítico quadrático e recorrente, e com a condição geométrica de que exista apenas um número finito de retornos centrais na sua família de aplicações de retorno, é caótica, ou seja,  $f$  tem uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua.*

A hipótese de que o ponto crítico é quadrático não é uma hipótese necessária. Estaremos utilizando-a aqui para facilitar as demonstrações.

## 1.3 Parâmetros

No último Capítulo desse trabalho estudaremos um pouco da importância do Teorema 1.2.1 ao lidarmos com famílias de aplicações ao invés de uma aplicação apenas. Ou seja, utilizaremos esse Teorema para mostrar, por exemplo, que, sob certas hipóteses, se  $(f_a)_{a \in J_0}$  é uma família de aplicações  $S$ -unimodais do intervalo  $[0, 1]$ , onde  $J_0$  é um intervalo no qual o parâmetro  $a$  varia, então os parâmetros  $a \in J_0$  para os quais  $f_a$  é renormalizável ou caótica são prevalentes em  $J_0$ . E que além disso os parâmetros para os quais  $f_a$  é caótica têm medida positiva e que os parâmetros para os quais  $f_a$  é renormalizável formam um conjunto denso em  $J_0$ . Para provarmos esses resultados no parâmetro estudaremos a renormalização generalizada em famílias.

Na maioria dos Capítulos tentaremos dispor os conceitos e resultados de forma a facilitar a leitura do trabalho, tanto para os que dominam a área quanto para os menos afins com ela. É com essa finalidade que a última Seção de cada Capítulo será destinada apenas para as demonstrações dos resultados constantes no mesmo e alguns resultados e conceitos técnicos que não foram enunciados mas que são necessários para obter os enunciados. Para maior clareza reenunciaremos os resultados e os demonstraremos em seguida.



## Capítulo 2

# Derivada Schwarziana, Razão Cruzada e Distorção

Neste e nos próximos três capítulos estudaremos conceitos e resultados importantes e necessários para adquirirmos embasamento teórico suficiente para abordarmos o Teorema principal da dissertação.

Os resultados deste Capítulo podem ser encontrados no livro de W. de Melo e S. Van Strien [5].

### 2.1 Derivada Schwarziana e Razão Cruzada

**Definição 2.1.1.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow [a', b']$  uma aplicação  $C^3$  tal que  $Df(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ , com  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ . A Derivada Schwarziana de  $f$  no ponto  $x \in [a, b]$  é definida como*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Da definição, a seguinte fórmula para a Derivada Schwarziana da composição de duas funções segue imediatamente da Regra da Cadeia

$$S(g \circ f) = Sg(f(x)) \cdot (Df(x))^2 + Sf(x). \quad (2.1)$$

Daqui segue que se  $Sf = 0 = Sg$  então  $S(g \circ f) = 0$ . E se  $Sf$  e  $Sg$  têm o mesmo sinal então  $S(g \circ f)$  também terá este mesmo sinal.

Utilizando essa fórmula da composição obtemos a Derivada Schwarziana da inversa de  $f$ , isto é

$$Sf^{-1} = -\frac{Sf}{(Df)^2} \circ f^{-1}.$$

E assim fica claro que  $Sf$  e  $Sf^{-1}$  têm sinais opostos, ou seja, se  $Sf < 0$  então  $Sf^{-1} > 0$ , e vice-versa.

Uma das hipóteses usadas no Teorema principal desse trabalho é o de que a Derivada Schwarziana da aplicação  $f$  é negativa,  $Sf < 0$ . Nesta Seção a maioria dos resultados envolvem o sinal da Derivada Schwarziana.

**Lema 2.1.1. (Princípio do Mínimo)** *Sejam  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação com derivada Schwarziana negativa. Se  $Df(x) \neq 0$  para todo  $x \in T$  então*

$$|Df(x)| > \min \{|Df(a)|, |Df(b)|\}, \forall x \in (a, b).$$

Em outras palavras, esse Lema 2.1.1 nos diz que  $Sf < 0$  implica que não há mínimo local positivo de  $Df$  e nem máximo local negativo de  $Df$ .

Veamos uma propriedade interessante que envolve a Derivada Schwarziana de uma aplicação. Na verdade essa é uma aplicação muito importante da Derivada Schwarziana, que envolve o conceito de distorção, como veremos na próxima Seção.

A Proposição 2.1.1 assim como o Lema 2.2.2 são adaptações do conhecido Princípio de Koebe. Em [5] há uma extensa discussão sobre esse resultado.

**Proposição 2.1.1.** *Sejam  $I', J' \subset \mathbb{R}$  e  $f : I' \rightarrow J'$  um difeomorfismo. Se  $J = f(I)$ ,  $J' = f(I')$ ,  $Sf \geq 0$ ,  $I \subset I'$  (vide Figura 2.1) então existe*

$$c = c(\min\{\frac{|I_r|}{|I|}, \frac{|I_l|}{|I|}\})$$

tal que

$$\frac{Df(x)}{Df(y)} \leq c, \forall x, y \in I,$$

onde  $I_l \subset I'$  é a componente de  $I' \setminus I$  à esquerda de  $I$  e  $I_r$  é o análogo à direita. Deve-se ressaltar que a constante  $c$  não depende da função  $f$ !

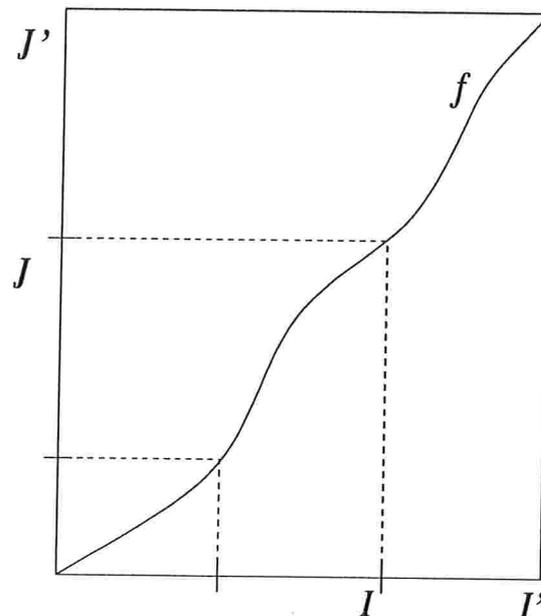


Figura 2.1: Propriedade da Derivada Schwarziana

Como se  $Sf > 0$  teremos pela fórmula da composição que  $Sf^{-1} < 0$ , obteremos um resultado análogo ao anterior para o caso em que  $Sf < 0$ , e nesse caso a constante  $c$  dependerá das razões nos intervalos do contradomínio.

A seguir temos alguns resultados envolvendo, além do sinal da Derivada Schwarziana, o conceito de órbita atratora, sendo que o primeiro é o Teorema de Singer (originalmente demonstrado em [17], vide também [5]).

**Teorema 2.1.1.** *Se  $f$  tem  $Sf < 0$  e  $f(\partial I) \subset \partial I$  então a bacia imediata de qualquer órbita periódica atratora contém um ponto crítico de  $f$ .*

**Corolário 2.1.1.** *Se  $f$  é uma aplicação  $S$ -unimodal, então  $f$  possui no máximo uma órbita periódica atratora.*

**Teorema 2.1.2.** *Se  $f$  tem  $Sf < 0$  então todo ponto periódico não-hiperbólico de  $f$  é um atrator.*

**Definição 2.1.2.** *Sejam  $J \subset T \subset \mathbb{R}$  intervalos abertos e limitados tais que  $T \setminus J$  consiste de dois intervalos  $L$  e  $R$ . Definimos a razão cruzada desses intervalos como*

sendo o quociente

$$D(T, J) = \frac{|J||T|}{|L||R|}.$$

A razão cruzada está relacionada à métrica hiperbólica. Seja  $T \subset \mathbb{R}$  um intervalo limitado. Para  $x, y \in T$  definimos o comprimento hiperbólico de  $J = [x, y]$  dentro de  $T$  por

$$\rho_T(x, y) = \text{hyp}(T, J) = \log \frac{|L \cup J||J \cup R|}{|L||R|} = \log(1 + D(T, J)).$$

**Definição 2.1.3.** Sejam  $J \subset T \subset \mathbb{R}$  intervalos como na Definição 2.1.2 e  $g : T \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação contínua e monótona. Definimos a distorção da razão cruzada de  $g$  como sendo o quociente

$$B(g, T, J) = \frac{D(g(T), g(J))}{D(T, J)}.$$

É fácil ver que se  $f : I \rightarrow I$  é contínua e  $f^n|_T$  é monótona então

$$B(f^n, T, J) = \prod_{i=0}^{n-1} B(f, f^i(T), f^i(J)).$$

Vamos discutir algumas propriedades interessantes do operador  $B$  definido acima, envolvendo a derivada Schwarziana e o grupo das Transformações de Möbius,  $\mathcal{M}$ , isto é,  $\phi \in \mathcal{M}$  se  $\phi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , onde  $a, b, c, d$  são números reais tais que  $ad - bc \neq 0$ .

**Proposição 2.1.2.** A derivada Schwarziana de  $g : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é identicamente zero se, e somente se,  $g$  é a restrição de uma transformação de Möbius a  $T$ .

**Proposição 2.1.3.** Seja  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação monótona. Então  $B(g, T^*, J^*) = 1$  para todos os pares de intervalos  $J^* \subset T^*$  se, e somente se,  $g$  é a restrição de uma transformação de Möbius.

**Proposição 2.1.4.** Seja  $T$  um intervalo aberto limitado da reta real. Para  $x, y \in T$  seja

$$\rho_T(x, y) = \text{hyp}(T, J) = \log \frac{|L \cup J||J \cup R|}{|L||R|} = \log(1 + D(T, J)),$$

onde  $J = [x, y]$ . Então  $\rho_T$  é uma métrica em  $T$  e o grupo de isometrias desta métrica é exatamente o grupo  $\mathcal{M}_T$  de todas as transformações de Möbius que levam  $T$  em  $T$ . Além disso, o grupo  $\mathcal{M}_T$  atua transitivamente sobre  $T$ , isto é, dados  $x, y \in T$ , existe uma isometria  $\phi$  tal que  $\phi(x) = y$ .

**Proposição 2.1.5.** *Se  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivada Schwarziana negativa (respectivamente positiva) em todos os pontos, e se  $\phi, \psi$  são transformações de Möbius então  $g \circ \phi$  e  $\psi \circ g$  também têm derivada Schwarziana negativa (respectivamente positiva).*

**Proposição 2.1.6.** *Se  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação  $C^3$  com derivada Schwarziana negativa então*

$$B(g, T^*, J^*) > 1, \text{ para todos os pares de intervalos } J^* \subset T^* \subset T.$$

Assim, um difeomorfismo  $g : T \rightarrow T'$  tendo derivada Schwarziana negativa (respectivamente positiva) expande (respectivamente contrai) a métrica hiperbólica:

$$\rho_{T'}(g(x), g(y)) > \rho_T(x, y)$$

(respectivamente  $\rho_{T'}(g(x), g(y)) < \rho_T(x, y)$ ) para todos  $x, y \in T$  e  $x \neq y$ .

## 2.2 Distorção

A Propriedade 2.1.1 que finaliza a seção anterior nos motiva à seguinte definição.

**Definição 2.2.1.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação  $C^1$ . Se  $Dg(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ , definimos a distorção de  $g$  em  $I$  por:*

$$\text{Dist}(g, I) = \sup_{x, y \in I} \log \frac{|Dg(x)|}{|Dg(y)|}.$$

Na literatura encontra-se também  $\sup_{x, y \in I} \frac{|Dg(x)|}{|Dg(y)|}$ , como sendo a distorção de  $g$  em  $I$ .

De acordo com a Definição 2.2.1 acima a Proposição 2.1.1 afirma que  $\text{Dist}(f, I)$  é limitada por  $\log c$  (ou por  $c$ , de acordo com Definição de distorção utilizada).

Na maioria dos resultados da seção anterior usamos a hipótese de que a Derivada Schwarziana é negativa,  $Sf < 0$ , e nesta seção não a usaremos.

**Lema 2.2.1.** *Sejam  $f : I \rightarrow I$  e  $T \subset I$  um intervalo tal que a restrição de  $f^n$  a  $T$  é um difeomorfismo  $C^1$ . Então*

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f, f^i(T)).$$

Como em geral estamos interessados na dinâmica de aplicações que tenham pontos críticos o resultado seguinte trata um pouco dessas considerações.

**Corolário 2.2.1.** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow D$  uma aplicação  $C^1$ . Sejam  $V \subset D$  um aberto contendo todos os pontos críticos de  $f$  e  $C > 0$  a constante de Lipschitz da aplicação  $x \mapsto \log |Df(x)|$  em  $D \setminus V$ . Se  $T \subset D$  é um intervalo tal que  $T, \dots, f^{n-1}(T)$  estão todos fora de  $V$ , então*

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|.$$

**Definição 2.2.2.** *Dizemos que uma aplicação  $f$  é de classe  $C^s$ , onde  $s = k + \alpha$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $\alpha \in [0, 1)$ , quando  $f$  é  $C^k$  e sua  $k$ -ésima derivada satisfaz a condição de Hölder de ordem  $\alpha$ , isto é*

$$|D^k f(x) - D^k f(y)| \leq C'|x - y|^\alpha,$$

onde  $C'$  é uma constante positiva.

Discutiremos expansão da derivada  $Df^n$  (hiperbolicidade) no Capítulo seguinte. Mas o próximo Lema mostra que expansão da derivada implica em distorção limitada.

**Lema 2.2.2.** *Sejam  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $C^{1+\alpha}$  com  $\alpha > 0$  e  $A \subset [0, 1]$  um conjunto aberto tal que a derivada de  $f$  não se anula no fecho de  $A$ . Se existem  $C > 0$ ,  $\lambda > 1$  tais que  $|Df^n(x)| \geq C^{-1}\lambda^n$ , para  $x \in [0, 1]$  tal que  $f^i(x) \in A$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$  então existe  $C_1 > 0$  tal que se  $f^i(J) \subset A$  para  $0 \leq i < n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f^n$  tem distorção limitada sobre  $J$ , ou seja,*

$$\frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} < C_1, \forall x, y \in J.$$

É importante ressaltar que a constante  $C_1$  não depende de  $n$  (desde que as hipóteses sejam satisfeitas).

## 2.3 Resultados e Demonstrações

**Lema 2.1.1. (Princípio do Mínimo)** *Sejam  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação com derivada Schwarziana negativa. Se  $Df(x) \neq 0$  para todo  $x \in T$  então*

$$|Df(x)| > \min \{|Df(a)|, |Df(b)|\}, \forall x \in (a, b).$$

*Demonstração.* Em qualquer ponto crítico  $y$  da aplicação  $x \mapsto |Df(x)|$  temos que  $D^2f(y) = 0$ . Assim  $0 > Sf(y) = \frac{D^3f(y)}{Df(y)}$ , isto é,  $D^3f(y)$  e  $Df(y)$  têm sinais opostos. Portanto,  $y$  é um máximo local de  $Df$  se  $Df(y) > 0$  ou um mínimo local se  $Df(y) < 0$ . Conseqüentemente, a função  $x \mapsto |Df(x)|$  não pode ter um mínimo no interior do intervalo. Assim seu mínimo deve estar na fronteira.  $\square$

**Proposição 2.1.1.** *Sejam  $I', J' \subset \mathbb{R}$  e  $f : I' \rightarrow J'$  um difeomorfismo. Se  $J = f(I)$ ,  $J' = f(I')$ ,  $Sf \geq 0$ ,  $I \subset I'$  então existe*

$$c = c(\min\{\frac{|I_r|}{|I|}, \frac{|I_l|}{|I|}\})$$

tal que

$$\frac{Df(x)}{Df(y)} \leq c, \forall x, y \in I,$$

onde  $I_l \subset I'$  é o intervalo à esquerda de  $I$  em  $I' \setminus I$  e  $I_r$  é o análogo à direita. Deve-se ressaltar que a constante  $c$  não depende da função  $f$ !

*Demonstração.* Considere

$$\varphi(x) = D \log |Df(x)| = \frac{D^2f(x)}{Df(x)} = \frac{f''(x)}{f'(x)}.$$

Temos

$$D\varphi(x) = \frac{f'''f' - f''f''}{(f')^2} = \frac{f'''}{f'} - \left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = Sf + \frac{1}{2}\varphi^2$$

e portanto

$$Sf = D\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2.$$

Como  $Sf \geq 0$  segue que  $\varphi'(x) \geq \frac{1}{2}\varphi^2(x)$ , que é uma inequação diferencial. Resolvendo a equação  $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\varphi^2(x)$  obtemos

$$\varphi_c(x) = \frac{-2}{x - c}$$

ou a solução identicamente nula, onde  $c$  é a constante que determina a unicidade da solução para cada  $x_0 \in I$ , ou seja, dados  $x_0 \in I$  e  $w_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  existe um único  $c$  tal que  $w_0 = \varphi_c(x_0)$ . Por exemplo, sejam  $I' = [a', b']$ ,  $I = [a, b]$  e suponhamos sem perda de generalidade que  $a' < a < 0 < b < b'$ . Assim temos que

$$\varphi_{b'} > \varphi_c, \forall c > b'$$

e

$$\varphi_{a'} < \varphi_c, \forall c < a'.$$

Agora seja  $\varphi_1 = \varphi_{c_1}$ , com  $c_1 < a'$ , a solução tal que  $\varphi_1(a') = \min \{0, \varphi(a')\}$ , e  $\varphi_2 = \varphi_{c_2}$ , com  $c_2 > b'$ , a solução tal que  $\varphi_2(b') = \max \{0, \varphi(b')\}$ . Com isso temos

$$\varphi_2(x) < \varphi_{b'}(x), \forall x < b'$$

e

$$\varphi_1(x) > \varphi_{a'}(x), \forall x > a'.$$

Da inequação diferencial  $\varphi'(x) \geq \frac{1}{2}\varphi^2(x)$  segue que

$$\varphi(x) \leq \varphi_2(x), \forall x < b'$$

e

$$\varphi(x) \geq \varphi_1(x), \forall x > a'.$$

Logo

$$\varphi \leq \frac{2}{b' - b} \text{ e } \varphi \geq \frac{-2}{a - a'}$$

e portanto

$$|\varphi| \leq 2 \max \left\{ \frac{1}{a - a'}, \frac{1}{b' - b} \right\} = \frac{2}{\text{dist}(I, \partial I')}.$$

E sendo assim obtemos que

$$|D \log |Df(x)|| \leq \frac{2}{\text{dist}(I, \partial I')}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio segue que

$$\left| \log \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} \right| = |\log |Df(x)|| - \log |Df(y)|| \leq \frac{2|I|}{\text{dist}(I, \partial I')};$$

fazendo  $c = c(I, I') = \exp \left\{ \frac{2|I|}{\text{dist}(I, \partial I')} \right\}$  obtemos o resultado desejado.  $\square$

**Teorema 2.1.1.** *Se  $f$  tem  $Sf < 0$  e  $f(\partial I) \subset \partial I$  então a bacia imediata de qualquer órbita periódica atratora contém um ponto crítico de  $f$ .*

*Demonstração.* Seja  $p$  um ponto periódico atrator, de período  $n$ , de  $f$ , e seja  $T$  a componente conexa de sua bacia imediata contendo  $p$ . Assim  $f^n(T) \subset T$ , pois se existisse  $x \in T$  tal que  $f^n(x) \notin T$  então, pelo Teorema do Valor Intermediário e pelo fato de  $T$  ser uma componente conexa, existiria  $w$  fora da bacia imediata de  $p$  ( $f^n(p) < f^n(y) < f^n(x)$ ) tal que  $w = f^n(y)$  para  $p < y < x$ , mas isso não ocorre pois a bacia imediata é invariante. Além disso, como  $p$  não atrai os pontos de fronteira temos que  $f^n(\partial T) \subset \partial T$ . Realmente,  $f^n$  não pode levar algum ponto da fronteira de  $T$  no interior de  $T$ , pois se isso acontecesse poderíamos estender  $T$ , o que não é possível uma vez que  $T$  é uma componente conexa da bacia imediata de  $p$ . Se existir  $x \in T$  tal que  $Df^n(x) = 0$  então, para algum  $0 \leq j \leq n - 1$ ,  $f^j(x)$  é um ponto crítico de  $f$  que pertence a  $f^j(T)$ . E usando o mesmo argumento utilizado acima para concluirmos que  $f^n(T) \subset T$ , também obtemos que  $f^j(T)$  está contido na bacia imediata de  $f^j(p)$ . Portanto o Teorema está verificado nesse caso. Agora, vamos assumir, por contradição, que  $Df^n(x) \notin 0$  para todo  $x \in T$ . Seja  $m = n$  se  $Df^n(x) > 0$  para todo  $x \in T$  e seja  $m = 2n$  se  $Df^n(x) < 0$  para todo  $x \in T$ . Como  $T$  é uma componente conexa da bacia imediata de  $p$ ,  $f^n(T) \subset T$  e  $f^n(\partial T) \subset \partial T$ , isso implica que  $f^m$  é um difeomorfismo de  $T$  em  $T$ , ou seja,  $f^m(T) = T$ ,  $Df^m(x) > 0$  para todo  $x \in T$  e  $f^m(x) = x$  para  $x \in \partial T$ . Se  $x \in \partial T$  então  $Df^m(x) \geq 1$  pois caso contrário  $x$  seria um atrator dos dois lados, e isso iria contradizer o fato de  $T$  ser uma componente conexa da bacia imediata de  $p$ . Pelo Princípio do Mínimo, segue que  $Df^m(w) > 1$  para todo  $w \in \text{int}(T)$ . Mas isto é impossível pois como  $f^m(T) = T$  temos pelo Teorema do Valor Médio que existe  $w \in \text{int}(T)$  tal que  $Df^m(w) = 1$ . Assim concluímos o resultado.  $\square$

**Corolário 2.1.1.** *Se  $f$  é uma aplicação  $S$ -unimodal, então  $f$  possui no máximo uma órbita periódica atratora.*

*Demonstração.* Uma vez que o Teorema de Singer assegura que a bacia imediata de qualquer órbita periódica atratora contém um ponto crítico de  $f$ , segue, pelo fato de  $f$  ser  $S$ -unimodal, que  $f$  possui no máximo uma órbita periódica atratora.  $\square$

**Teorema 2.1.2.** *Se  $f$  é uma aplicação  $S$ -unimodal, então todo ponto periódico não-hiperbólico de  $f$  é um atrator.*

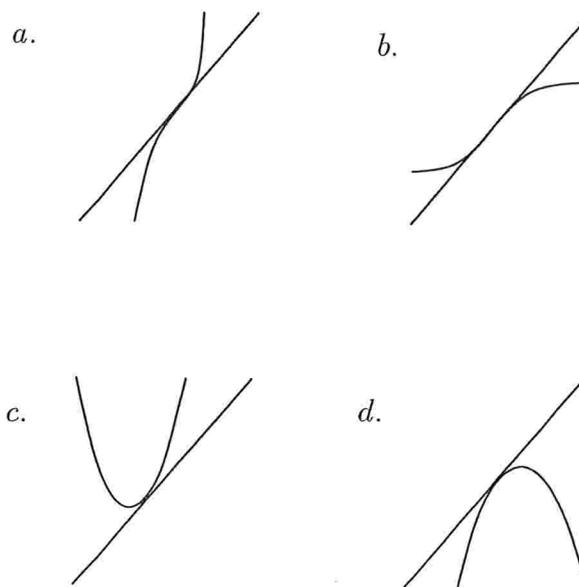


Figura 2.2: Possibilidades de gráficos de  $f^n$  numa vizinhança de  $p$ , com  $Df^n(p) = 1$ .

*Demonstração.* Seja  $p$  um ponto periódico não-hiperbólico de  $f$ , isto é,  $p$  é periódico de período  $n$  e  $|Df^n(p)| = 1$ . Sendo assim temos que  $Df^{2n}(p) = 1$ . Assim pelo Princípio do Mínimo temos que em nenhuma vizinhança  $V$  de  $p$  vale que  $Df^{2n}(x) \geq 1$  para todo  $x \in V$ . Logo o gráfico de  $f^{2n}$ , numa vizinhança de  $p$ , pode ser de uma das formas mostradas na Figura 2.2, com exceção da possibilidade *a.* pois  $Sf < 0$ , as quais são atratoras pois, em todas (*b.*, *c.* e *d.*), pelo menos uma semi-vizinhança é atratora.  $\square$

Vejamos agora alguns resultados básicos sobre transformações de Möbius que serão necessários para obtermos alguns resultados enunciados anteriormente. Para isso assumiremos aqui um conhecimento mínimo sobre análise complexa.

Uma aplicação  $S : \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  da forma  $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , onde  $ad - bc \neq 0$  é chamada de transformação de Möbius. Se  $S$  é uma transformação de Möbius então  $S^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$  satisfaz

$$S(S^{-1}(z)) = S^{-1}(S(z)) = z,$$

ou seja,  $S^{-1}$  é a aplicação inversa de  $S$  e é também uma transformação de Möbius. Como a composição de duas transformações de Möbius é uma transformação de Möbius e a

composição é associativa segue que elas formam um grupo, denotado por  $\mathcal{M}$ .

Quais são os pontos fixos finitos de  $S$ ? Ou seja, quais são os pontos  $z$  satisfazendo  $S(z) = z$ ? Se  $z$  satisfaz essa condição então

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Se  $c \neq 0$  então  $S(\infty) \neq \infty$  pois  $S(\infty) = a/c$  e assim  $S$  terá dois pontos fixos finitos no máximo. Agora, se  $c = 0$  então  $S(\infty) = \infty$ , mas  $(d - a)z - b = 0$  produz apenas mais um ponto fixo finito. Assim, uma transformação de Möbius pode ter no máximo dois pontos fixos finitos, a menos que  $S(z) = z$ .

Agora seja  $S$  uma transformação de Möbius e sejam  $a, b, c$  pontos distintos em  $\mathbb{C}_\infty$  com  $\alpha = S(a), \beta = S(b), \gamma = S(c)$ . Suponha que  $T$  seja uma outra transformação de Möbius com esta propriedade. Então  $T^{-1} \circ S$  tem  $a, b, c$  como pontos fixos e, portanto  $T^{-1} \circ S$  é igual a identidade. Ou seja,  $T = S$ . Assim, uma transformação de Möbius é unicamente determinada por sua ação sobre quaisquer três pontos dados em  $\mathbb{C}_\infty$ .

Sejam  $z_2, z_3, z_4$  pontos em  $\mathbb{C}_\infty$ . Defina  $S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  por

$$S(z) = \left( \frac{z - z_3}{z - z_4} \right) / \left( \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) \text{ se } z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C};$$

$$S(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4} \text{ se } z_2 = \infty;$$

$$S(z) = \frac{z_2 - z_4}{z - z_4} \text{ se } z_3 = \infty;$$

$$S(z) = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \text{ se } z_4 = \infty.$$

Em qualquer caso temos  $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0, S(z_4) = \infty$  e  $S$  é a única transformação de Möbius tendo esta propriedade.

**Definição 2.3.1.** Se  $z_1 \in \mathbb{C}_\infty$  então  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ , a razão cruzada de  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$ , é a imagem de  $z_1$  pela única transformação de Möbius que leva  $z_2$  no 1,  $z_3$  no 0 e  $z_4$  no  $\infty$ .

Por exemplo  $[z_2, z_2, z_3, z_4] = 1$  e  $[z, 1, 0, \infty] = z$ . Também, se  $M$  é qualquer transformação de Möbius e  $w_2, w_3, w_4$  são os pontos tais que  $Mw_2 = 1, Mw_3 = 0, Mw_4 = \infty$  então  $Mz = [z, w_2, w_3, w_4]$ .

**Proposição 2.3.1.** *Se  $z_2, z_3, z_4$  são pontos distintos e  $T$  é qualquer transformação de Möbius então*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4],$$

para qualquer ponto  $z_1$ , ou seja, transformações de Möbius preservam a razão cruzada.

*Demonstração.* Seja  $Sz = [z, z_2, z_3, z_4]$ ; então  $S$  é uma transformação de Möbius. Se  $M = ST^{-1}$  então  $M(Tz_2) = 1, M(Tz_3) = 0, M(Tz_4) = \infty$ ; assim,  $ST^{-1}z = [z, Tz_2, Tz_3, Tz_4]$  para todo  $z \in \mathbb{C}_\infty$ . Em particular, se  $z = Tz_1$  o resultado desejado segue.  $\square$

**Proposição 2.3.2.** *Se  $z_2, z_3, z_4$  são pontos distintos em  $\mathbb{C}_\infty$  e se  $w_2, w_3, w_4$  também são pontos distintos em  $\mathbb{C}_\infty$ , então existe uma única transformação de Möbius  $S$  tal que  $Sz_2 = w_2, Sz_3 = w_3, Sz_4 = w_4$ .*

*Demonstração.* Sejam  $Tz = [z, z_2, z_3, z_4], Mz = [z, w_2, w_3, w_4]$  e considere  $S = M^{-1}T$ . Claramente  $S$  tem a propriedade desejada. Se  $R$  é uma outra transformação de Möbius tal que  $Rz_j = w_j$  para  $j = 2, 3, 4$ , então  $R^{-1} \circ S$  tem três pontos fixos ( $z_2, z_3$  e  $z_4$ ). Assim temos que  $R^{-1} \circ S = I$  (identidade), ou seja,  $S = R$ .  $\square$

Vale também um outro resultado simples de se mostrar que diz o seguinte: se  $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  é uma transformação de Möbius então  $S(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  se, e somente se,  $a, b, c$  e  $d$  são números reais.

**Proposição 2.1.2.** *A derivada Schwarziana de  $g : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é identicamente zero se, e somente se,  $g$  é a restrição de uma transformação de Möbius a  $T$ .*

*Demonstração.* Observe que podemos escrever  $Sg = -2|Dg|^{\frac{1}{2}} D^2 \sqrt{\frac{1}{|Dg|}}$ . Se  $Sg = 0$  então  $D^2 \frac{1}{|Dg|^{\frac{1}{2}}} = 0$ . Assim,  $\frac{1}{|Dg|^{\frac{1}{2}}} = cx + d$  e portanto,  $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . A recíproca é imediata. De fato, se  $g$  é a restrição de uma transformação de Möbius a  $T$  então  $g$  se escreve da forma  $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , onde  $ad - bc \neq 0$ . Assim temos que:

$$Dg(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}, D^2g(x) = \frac{2c(bc - ad)(cx + d)}{(cx + d)^4} \text{ e } D^3g(x) = \frac{6c^2(ad - bc)}{(cx + d)^4}.$$

Logo

$$Sg(x) = \frac{D^3g(x)}{Dg(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{D^2g(x)}{Dg(x)} \right)^2 = \frac{6c^2}{(cx + d)^2} - \frac{3}{2} \left( \frac{-2c}{cx + d} \right)^2 = 0.$$

$\square$

**Proposição 2.1.3.** *Seja  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação monótona. Então  $B(g, T^*, J^*) = 1$  para todos os pares de intervalos  $J^* \subset T^*$  se, e somente se,  $g$  é a restrição de uma transformação de Möbius.*

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Sendo  $g$  a restrição de uma transformação de Möbius temos pela Proposição 2.3.1 que  $g$  preserva a razão cruzada. Assim  $B(g, T^*, J^*) = 1$ , ou seja, sendo  $T^* = [x_3, x_1]$  e  $J^* = [x_4, x_2] \subset T^*$  (onde  $x_3 < x_4 < x_2 < x_1$ ) e lembrando que  $g$  é monótona temos pela Proposição 2.3.1

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)]$$

e daí

$$B(g, T^*, J^*) = \frac{D(g(T^*), g(J^*))}{D(T^*, J^*)} = \frac{[g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)]}{[x_1, x_2, x_3, x_4]} = 1.$$

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $g$  seja uma aplicação monótona que preserva a razão cruzada  $D$ . Seja  $T = [x_0, x_1]$  e escolha  $x_2 \in (x_0, x_1)$ . Pelo Proposição 2.3.2 temos que existe uma única transformação de Möbius  $\phi$  tal que  $\phi(x_i) = g(x_i)$  para  $i = 0, 1, 2$ . Afirmamos que  $g(x) = \phi(x)$  para todo  $x \in T$ . De fato, se  $J$  é o intervalo limitado por  $x_2$  e  $x$ , então  $B(g, T, J) = B(\phi, T, J) = 1$ , pois sabemos da Proposição 2.3.1 que transformações de Möbius também preservam a razão cruzada. Portanto,  $D(\phi(T), \phi(J)) = D(g(T), g(J))$  e, como  $\phi(T) = g(T)$  e  $\phi(x_2) = g(x_2)$ , obtemos que  $\phi(x) = g(x)$ .  $\square$

**Proposição 2.1.4** *Seja  $T$  um intervalo aberto limitado da reta real. Para  $x, y \in T$  seja*

$$\rho_T(x, y) = \text{hyp}(T, J) = \log \frac{|L \cup J||J \cup R|}{|L||R|} = \log(1 + D(T, J)),$$

onde  $J = [x, y]$ . Então  $\rho_T$  é uma métrica em  $T$  e o grupo de isometrias desta métrica é exatamente o grupo  $\mathcal{M}_T$  de todas as transformações de Möbius que levam  $T$  em  $T$ . Além disso, o grupo  $\mathcal{M}_T$  atua transitivamente sobre  $T$ , isto é, dados  $x, y \in T$ , existe uma isometria  $\phi$  tal que  $\phi(x) = y$ .

*Demonstração.* Que  $\rho_T$  é uma métrica segue imediatamente da fórmula. Da Proposição 2.1.3 acima, obtemos que o grupo das isometrias coincide com o grupo das transformações de Möbius  $\mathcal{M}_T$ . Seja  $T = (x_0, x_1)$ . Como existe uma única transformação de Möbius satisfazendo  $\phi(x_i) = x_i$  para  $i = 0, 1$  e  $\phi(x) = y$ , o grupo de isometrias

atua transitivamente sobre  $T$ . Isto prova a sentença. Se  $T = (0, 1)$  então o grupo de isometrias preservando orientação é a família de aplicações

$$\phi_\lambda(x) = \frac{x}{\lambda x + 1 - \lambda}, \quad -\infty < \lambda < 1.$$

□

**Proposição 2.1.5** *Se  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivada Schwarziana negativa (respectivamente positiva) em todos os pontos, e se  $\phi, \psi$  são transformações de Möbius então  $g \circ \phi$  e  $\psi \circ g$  também têm derivada Schwarziana negativa (respectivamente positiva).*

*Demonstração.* Da Proposição 2.1.2 temos que  $S\psi = 0$  e, portanto, pela fórmula de composta obtemos

$$S(\psi \circ g) = (S\psi \circ g) \cdot |Dg|^2 + Sg = Sg \text{ e } S(g \circ \phi) = (Sg \circ \phi) \cdot (D\phi)^2 + S\phi = (Sg \circ \phi) \cdot (D\phi)^2.$$

□

**Proposição 2.1.6** *Se  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação  $C^3$  com derivada Schwarziana negativa então*

$$B(g, T^*, J^*) > 1, \text{ para todos os pares de intervalos } J^* \subset T^* \subset T.$$

*Demonstração.* Sejam  $T^* = [x_0, x_1]$ ,  $J^* = [y_0, y_1]$  e  $\phi$  uma transformação de Möbius tal que  $\phi \circ g$  fixa os pontos da fronteira de  $T^*$  e o ponto  $y_0$ . Afirmamos que  $\phi(g(y_1)) > y_1$ . De fato, suponha, por contradição, que  $\phi(g(y_1)) \leq y_1$ . Pelo Teorema do Valor Médio existem  $z_0 \in [x_0, y_0]$ ,  $z_1 \in [y_0, y_1]$ ,  $z_2 \in [y_1, x_1]$  tais que

$$D(\phi \circ g)(z_0) = \frac{\phi(g(y_0)) - \phi(g(x_0))}{y_0 - x_0} = 1,$$

$$D(\phi \circ g)(z_1) = \frac{\phi(g(y_1)) - \phi(g(y_0))}{y_1 - y_0} \leq 1,$$

e

$$D(\phi \circ g)(z_2) = \frac{\phi(g(x_1)) - \phi(g(y_1))}{x_1 - y_1} \geq 1.$$

Uma vez que  $S(\phi \circ g) = Sg < 0$ , isto contradiz o Princípio do Mínimo. Portanto  $\phi(g(y_1)) > y_1$ . Logo

$$B(\phi \circ g, T^*, J^*) = \frac{\frac{|\phi(g(T^*))|}{|T^*|} \frac{|\phi(g(J^*))|}{|J^*|}}{\frac{|\phi(g(L^*))|}{|L^*|} \frac{|\phi(g(R^*))|}{|R^*|}} > 1.$$

Como  $B(\phi \circ g, T^*, J^*) = B(\phi, g(T^*), g(J^*)) \cdot B(g, T^*, J^*)$ , e como pela Proposição 2.1.3 a transformação de Möbius  $\phi$  preserva a razão cruzada, obtemos que  $B(g, T^*, J^*) > 1$ .  $\square$

**Lema 2.2.1.** *Sejam  $f : I \rightarrow I$  e  $T \subset I$  um intervalo tal que a restrição de  $f^n$  a  $T$  é um difeomorfismo  $C^1$ . Então*

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f, f^i(T)).$$

*Demonstração.* Pela Regra da Cadeia temos que:

$$\log \frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} = \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{|Df(f^i(x))|}{|Df(f^i(y))|}.$$

Uma vez que  $f^i(x), f^i(y) \in f^i(T)$ , temos que

$$\log \frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f, f^i(T)),$$

e isto prova o Lema.  $\square$

**Corolário 2.2.1.** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow D$  uma aplicação  $C^1$ . Sejam  $V \subset D$  um aberto contendo todos os pontos críticos de  $f$  e  $C > 0$  a constante de Lipschitz da aplicação  $x \mapsto \log |Df(x)|$  em  $D \setminus V$ . Se  $T \subset D$  é um intervalo tal que  $T, \dots, f^{n-1}(T)$  estão todos fora de  $V$ , então*

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|.$$

*Demonstração.* A distorção de  $f$  sobre um intervalo  $J \subset D \setminus V$  é limitada por  $C \cdot |J|$ , pois

$$\left| \log \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} \right| = |\log |Df(x)| - \log |Df(y)|| \leq C|x - y| \leq C|J|, \forall x, y \in J.$$

Portanto

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f, f^i(T)) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|.$$

$\square$

**Lema 2.2.2.** *Sejam  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $C^{1+\alpha}$  com  $\alpha > 0$  e  $A \subset [0, 1]$  um conjunto aberto tal que a derivada de  $f$  não se anula no fecho de  $A$ . Se existem  $C > 0$ ,  $\lambda > 1$  tais que  $|Df^n(x)| \geq C^{-1}\lambda^n$ , para  $x \in [0, 1]$  tal que  $f^i(x) \in A$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$  então existe  $C_1 > 0$  tal que se  $f^i(J) \subset A$  para  $0 \leq i < n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f^n$  tem distorção limitada sobre  $J$ , ou seja,*

$$\frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} < C_1, \forall x, y \in J.$$

*Demonstração.* Dados  $x, y \in J$  e  $i = 1, \dots, n-1$  temos pelo Teorema do Valor Médio que existe  $\xi$  entre  $f^i(x)$  e  $f^i(y)$  tal que  $|Df^{n-i}(\xi)| = \frac{|f^n(x) - f^n(y)|}{|f^i(x) - f^i(y)|}$ .

Aplicando a hipótese de que  $|Df^n(x)| \geq C^{-1}\lambda^n$  a  $f^{n-i}$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ , temos que

$$|Df^{n-i}(\xi)| \geq C^{-1}\lambda^{n-i}, \forall \xi \in J, i = 1, \dots, n-1.$$

Assim obtemos que

$$|f^i(x) - f^i(y)| = \frac{|f^n(x) - f^n(y)|}{|Df^{n-i}(\xi)|} \leq C\lambda^{-n+i}|f^n(x) - f^n(y)|, \quad (2.2)$$

para todos  $x, y \in J$ , para todo  $\xi$  dado pelo Teorema do Valor Médio e para todo  $i = 1, \dots, n-1$ .

Agora como  $f$  é  $C^{1+\alpha}$  e a derivada de  $f$  não se anula no fecho de  $A$ , existe  $\beta > 0$  tal que a aplicação  $x \mapsto \log |Df(x)|$  é  $C^\beta$  sobre  $A$ . Logo temos que:

$$\begin{aligned} \log \frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} &= \sum_{i=0}^{n-1} (\log |Df(f^i(x))| - \log |Df(f^i(y))|) \\ &\stackrel{\text{(definição 2.2.2)}}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1} C' |f^i(x) - f^i(y)|^\beta \\ &\stackrel{(2.2)}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1} C' C^\beta \lambda^{(i-n)\beta} |f^n(x) - f^n(y)|^\beta \\ &= C' C^\beta |f^n(x) - f^n(y)|^\beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^i \\ &\leq C' C^\beta |f^n(x) - f^n(y)|^\beta \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^i \\ &\leq C' C^\beta \frac{\lambda^\beta}{\lambda^\beta - 1}. \end{aligned}$$

□

# Capítulo 3

## Intervalos Errantes e Hiperbolicidade

### 3.1 Intervalos Errantes e Hiperbolicidade

Os resultados deste Capítulo podem ser encontrados no livro de W. de Melo e S. Van Strien [5] e nas referências ali mencionadas.

**Definição 3.1.1.** *Se  $f : X \rightarrow X$  é uma aplicação contínua, onde  $X$  é um espaço métrico, chamamos de conjunto  $\omega$ -limite da órbita de  $x \in X$  ao conjunto*

$$\omega(x) = \{y \in X; \exists \text{ uma sequência } n_i \rightarrow \infty \text{ com } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

*Além disso, para todo subconjunto  $T$  de  $X$ , definimos*

$$\omega(T) = \{\omega(x); x \in T\}.$$

**Definição 3.1.2.** *Dizemos que  $J$  é um intervalo errante para a aplicação  $f$  se:*

- 1. os intervalos  $J, f(J), \dots$  são dois a dois disjuntos;*
- 2. o conjunto  $\omega$ -limite de  $J$  não é igual a uma órbita periódica.*

**Teorema 3.1.1. (Teorema de Schwartz)** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação contínua satisfazendo as seguintes condições: i)  $f$  é  $C^1$  e monótona por partes e ii) a aplicação  $x \mapsto \log |Df(x)|$  se estende a uma função Lipschitz sobre  $[0, 1]$ . Então  $f$  não tem intervalos errantes.*

Do Teorema de Schwartz obtemos o seguinte Corolário 3.1.1 que juntamente com o Lema 3.2.1 (que se encontra na última Seção deste Capítulo) nos fornece o Lema 3.1.1 a seguir. Lembrando que uma órbita periódica, de período  $k$  digamos  $\mathcal{O}(p) = \{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$  com  $f^k(p) = p$ , é dita ser atratora se  $|Df^k(x)| \leq 1$ , para todo  $x \in \mathcal{O}(p)$ .

**Corolário 3.1.1.** *Sejam  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $C^3$  com Derivada Schwarziana negativa e  $V \subset [0, 1]$  um conjunto aberto contendo todos os pontos críticos de  $f$  e pelo menos um ponto de cada órbita periódica atratora. Então  $f$  não possui intervalos errantes em  $[0, 1] \setminus \bar{V}$ .*

**Lema 3.1.1.** *Sejam  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $C^3$  com derivada Schwarziana negativa e  $V$  um conjunto aberto contendo todos os pontos críticos de  $f$  e pelo menos um ponto de cada órbita periódica atratora. Então existe um inteiro  $m$  tal que se  $f^i(x) \notin V$  para todo  $0 \leq i < m$  então  $|Df^m(x)| > 1$ .*

Com o Lema 3.1.1 e o Lema 2.2.2 obteremos o seguinte Teorema 3.1.2. Uma versão  $C^2$  desse Teorema foi demonstrado por Ricardo Mañé, vide [5] (por essa razão, seu enunciado é comunmente citado como Teorema de Mañé).

**Teorema 3.1.2.** *Sejam  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $C^3$  com derivada Schwarziana negativa e  $V$  um conjunto aberto contendo todos os pontos críticos de  $f$  e pelo menos um ponto de cada órbita periódica não-repulsora, onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo compacto. Então existem  $C > 0$ ,  $\lambda > 1$  e  $K < \infty$  tais que se  $x \in I$  satisfaz  $f^i(x) \notin V$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$  então*

$$|Df^n(x)| > C^{-1}\lambda^n,$$

e se  $J$  é um intervalo tal que  $J, \dots, f^{n-1}(J)$  estão todos fora de  $V$  então

$$\frac{Df^n(x)}{Df^n(y)} \leq K, \text{ para todos } x, y \in J.$$

**Definição 3.1.3.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Um subconjunto  $K \subset [0, 1]$  é dito hiperbólico se  $f(K) \subset K$  e existirem constantes  $C > 0$  e  $\lambda > 1$  tais que*

$$|Df^n(x)| > C^{-1}\lambda^n$$

para todo  $x \in K$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

O próximo Teorema garante que no intervalo, conjuntos hiperbólicos têm medida de Lebesgue nula.

**Teorema 3.1.3.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $C^{1+\alpha}$  com  $\alpha > 0$ . Se  $\Gamma \subset [0, 1]$  é um conjunto hiperbólico e compacto então  $\Gamma$  tem medida de Lebesgue igual a zero.*

Como consequência do Lema 3.1.1 e do Teorema 3.1.2 obtemos o Teorema de Mi-siurewicz 3.1.4 a seguir.

**Teorema 3.1.4.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $C^3$  com derivada Schwarziana negativa. Um conjunto compacto,  $K \subset I$  tal que  $f(K) \subset K$  é hiperbólico se ele não contém: pontos críticos, pontos periódicos não-hiperbólicos e nem pontos periódicos atratores hiperbólicos.*

Pelo Teorema 3.1.3 este conjunto  $K$  tem medida de Lebesgue zero. E como consequência dos dois últimos Teoremas temos o Corolário 3.1.2 abaixo.

**Corolário 3.1.2.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $C^3$  com derivada Schwarziana negativa. Se  $f$  tem um número finito de pontos críticos, não tem atratores periódicos e nem órbitas periódicas não-hiperbólicas então para q.t.p.  $x \in I$ ,  $\omega(x)$  contém pontos críticos de  $f$ .*

## 3.2 Resultados e Demonstrações

O seguinte Lema 3.2.1 é um passo necessário para a demonstração do Teorema de Schwartz.

**Lema 3.2.1.** *Sejam  $I$  um intervalo compacto e  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação contínua. Se  $T \subset I$  é um intervalo aberto tal que:*

$$1) \inf_{n \geq 0} |f^n(T)| = 0$$

ou

$$2) f^n \text{ é estritamente monótona em } T, \forall n \geq 1$$

então  $T$  ou é um intervalo errante ou  $\omega(T)$  é uma órbita periódica.

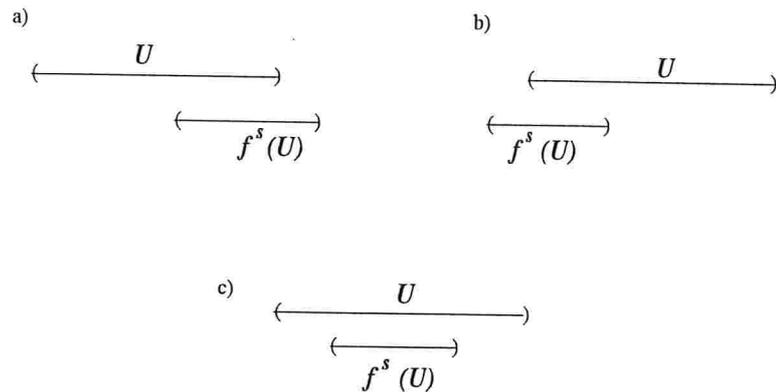


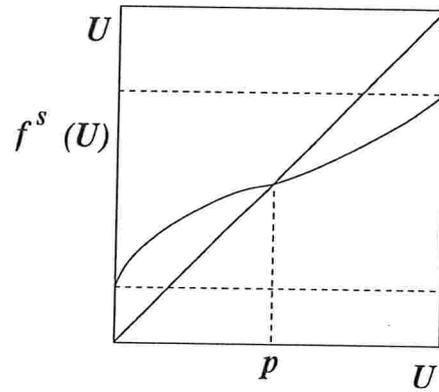
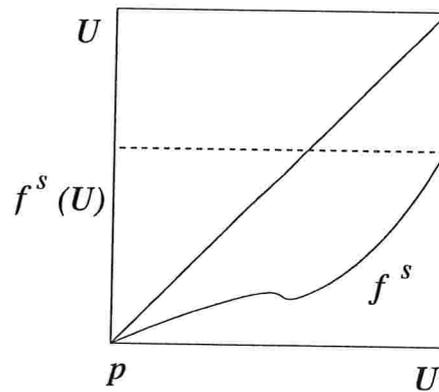
Figura 3.1: a) e b) não ocorrem pois  $U$  é uma componente de  $I$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{I} = \bigcup_{n \geq 0} f^n(T)$ . Temos que  $\mathcal{I}$  não é necessariamente aberto na hipótese 1, mas com a segunda hipótese  $\mathcal{I}$  é aberto. Claramente  $\mathcal{I}$  é invariante pelas iteradas positivas de  $f$ .

Primeiramente suponhamos que para qualquer componente  $U$  de  $\mathcal{I}$  temos que  $f^s(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $s \geq 1$ . Como  $\mathcal{I}$  é invariante pelas iteradas positivas de  $f$  temos que  $f^n(U) \cap f^m(U) = \emptyset$  para todos  $n > m \geq 0$ . Logo  $U$  (e portanto  $T$ ) é um intervalo errante (ou é assintótico à uma órbita periódica).

Agora suponhamos que existam uma componente  $U$  de  $\mathcal{I}$  e  $s > 0$  tais que  $f^s(U) \cap U \neq \emptyset$ . Como  $\mathcal{I}$  é invariante pelas iteradas positivas de  $f$  isto implica que  $f^s(U) \subset U$  (ver caso c) da Figura 3.1).

**Com a hipótese 1 temos:** Se  $U$  é um intervalo que contém em seu interior um ponto fixo  $p$  de  $f^s : U \rightarrow U$  (ver Figura 3.2), então alguma iterada de  $T$  contém esse ponto fixo em seu fecho, e como  $\inf_{k \geq 0} |f^k(T)| = 0$  esse ponto fixo atrai  $T$ , isto é,  $f^{ks}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$  para todo  $x \in T$ . E nesse caso não há mais nada para fazer. Caso contrário,  $\bar{U}$  contém em sua fronteira um ponto fixo atrator,  $p$ , de  $f^s : \bar{U} \rightarrow \bar{U}$ . Se  $f^s(U) \neq U$  então para todo  $x \in \bar{U}$  temos que  $f^{ks}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$  (ver Figura 3.3). Se  $f^s(U) = U$  então o ponto de fronteira  $\{q\} = \partial U \setminus \{p\}$  é um ponto periódico repulsor (ver Figura 3.4) e como  $\inf_{k \geq 0} |f^k(T)| = 0$  obtemos que nenhuma iterada de  $T$  contém  $q$  em seu fecho. Assim todo ponto de  $\text{int}(U)$  é assintótico a  $p$  pelas iteradas de  $f^s$ , isto é,  $f^{ks}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$  para todo  $x \in T$ . Novamente o resultado segue.

Figura 3.2: Ponto fixo atrator,  $p$ , no interior de  $U$  .Figura 3.3: Ponto fixo atrator,  $p$ , na fronteira de  $U$  .

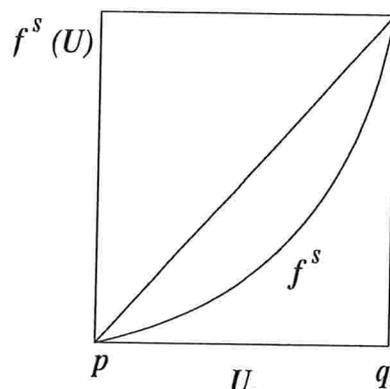


Figura 3.4: Ponto fixo atrator,  $p$ , e repulsor,  $q$ ; ambos na fronteira de  $U$ .

Com a hipótese 2 temos: Sendo  $T$  aberto e  $f^n$  estritamente monótona, para todo  $n \geq 1$ , temos que  $f^n(T)$  é aberto, para todo  $n \geq 1$ . Como  $U$  é uma componente de  $\mathcal{I} = \bigcup_{n \geq 0} f^n(T)$ ,  $U$  deve ser no máximo uma união de  $f^n(T)$  para alguns índices  $n \geq 0$ . Em  $U$  todas as potências de  $f$  são monótonas. Para ver isso suponhamos, sem perda de generalidade, que  $U = f^n(T) \cup f^m(T)$ , para  $n \neq m$ . Como  $U$  é uma componente de  $\mathcal{I}$  devemos ter  $f^n(T) \cap f^m(T) \neq \emptyset$ , e como  $f^n$  é estritamente monótona em  $T$ , para todo  $n \geq 1$ , segue que a monotonicidade de  $f^n(T)$  e a de  $f^m(T)$  deve ser a mesma. Assim assumiremos que  $f^s : U \rightarrow U$  é estritamente crescente pois caso contrário trabalharíamos com  $f^{2s} : U \rightarrow U$  ao invés de  $f^s$ . Logo, como  $f^s(U) \subset U$  e  $f^s$  é estritamente crescente temos que  $f^s$  possui um ponto fixo atrator,  $p$ , no interior ou na fronteira de  $U$ . Mas em qualquer caso teremos que todo ponto de  $U$  é assintótico a  $p$  pelas iteradas de  $f^s$ , isto é,  $f^{ks}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$  para todo  $x \in T$ , mesmo que  $\overline{f^s(U)} = \overline{U}$  pois como  $f^n(T)$  é aberto, para todo  $n \geq 1$ , temos que  $f^s(U)$  não intersecta o repulsor do bordo de  $U$ . E nesse caso o resultado também segue.

□

**Teorema 3.1.1.** (Teorema de Schwartz) *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação contínua satisfazendo as seguintes condições: i)  $f$  é  $C^1$  e monótona por partes e ii) a aplicação  $x \mapsto \log |Df(x)|$  se estende a uma função Lipschitz sobre  $[0, 1]$ . Então  $f$  não tem intervalos errantes.*

*Demonstração.* Segue de (ii) que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\text{Dist}(f, T) < C|T|$  para qualquer intervalo  $T \subset [0, 1]$ . Assim, pelo Corolário 2.2.1, temos que, para qualquer intervalo  $T$  e para qualquer inteiro  $n$ ,

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} C|f^i(T)|.$$

Suponhamos por contradição que  $f$  tenha um intervalo errante  $J$ . Seja  $J_0 \supset J$  um intervalo errante maximal contendo  $J$ , no sentido de que não exista intervalo errante que contenha  $J_0$  propriamente. Indutivamente, definimos  $J_n$  como sendo um intervalo errante maximal que contém o interior de  $f(J_{n-1})$ . Afirmamos que esses intervalos  $\{J_n\}_{n \geq 0}$  são dois a dois disjuntos. Realmente, suponhamos por contradição que existam inteiros  $0 \leq n < m$  tais que  $J_n \cap J_m \neq \emptyset$ . Como  $J_m$  contém o interior de  $f^{m-n}(J_n)$  temos que  $f^{m-n}(J_m) \cap J_m \supset f^{m-n}(J_m \cap J_n) \neq \emptyset$ . Mas isso é uma contradição pois  $J_m$  é um intervalo errante e assim a afirmação está provada.

Como  $f$  tem um número finito de pontos de máximo ou de mínimo locais, digamos  $n_0$ , existe  $n_1$  tal que se  $n \geq n_1$  então  $f^n(J_0)$  não contém nenhum desses pontos. Em particular,  $f^k|_{J_n}$  é um homeomorfismo sobre sua imagem para todo  $k > 0$  e  $n \geq n_1$ .

Uma vez que os intervalos  $\{J_n\}_{n \geq 0}$  são errantes existe  $n_2 > n_1$  tal que  $\sum_{j \geq 0} |f^j(J_{n_2})| \leq 1$ . Tome  $0 < \delta < (1/2)\exp(-2C)$  e seja  $A = J_{n_2}$ . Agora escolha um intervalo  $T$  que contenha  $A$  estritamente e tal que  $|T| \leq (1 + \delta)|A|$ . Vamos provar por indução que  $|f^i(T)| \leq 2|f^i(A)|$  para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Para  $n = 1$  esta propriedade é óbvia. Assumimos que essa propriedade seja verdadeira até o passo  $n-1$  e vamos provar que ela é verdadeira para o passo  $n > 1$ . Como vimos no Corolário 2.2.1 a hipótese de indução (H.I.) implica que a distorção de  $f^n$  em  $T$  é limitada por  $2C$ , ou seja

$$\begin{aligned} \text{Dist}(f^n, T) &\leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)| \stackrel{\text{(H.I.)}}{\leq} 2C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(A)| = 2C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(J_{n_2})| \\ &\leq 2C \sum_{i=0}^{\infty} |f^i(J_{n_2})| \leq 2C. \end{aligned}$$

Além disso, como a restrição de  $f^n$  a  $A$  é um difeomorfismo, existe pelo Teorema do Valor Médio um ponto  $x_n \in A$  tal que  $|Df^n(x_n)| = \frac{|f^n(A)|}{|A|}$ . Como  $\text{Dist}(f^n, T) \leq 2C$

segue que  $|Df^n(y)| \leq \exp(2C) \frac{|f^n(A)|}{|A|}$  para todo  $y \in T$ . Daí,

$$|f^n(T)| \leq |f^n(A)| + \exp(2C) \frac{|f^n(A)|}{|A|} |T \setminus A| \leq (1 + \delta \exp(2C)) |f^n(A)| \leq 2|f^n(A)|.$$

Isto completa o passo de indução.

Logo segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(T)| = 0$ . Mas como  $A$  é um intervalo errante maximal e  $T$  contém  $A$  estritamente nenhuma das teses do Lema 3.2.1 podem ocorrer, e isso contradiz a existência de um intervalo errante, completando assim a demonstração do Teorema.  $\square$

**Corolário 3.1.1.** *Sejam  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $C^3$  com Derivada Schwarziana negativa e  $V \subset [0, 1]$  um conjunto aberto contendo todos os pontos críticos de  $f$  e pelo menos um ponto de cada órbita periódica não-repulsora. Então  $f$  não possui intervalos errantes em  $[0, 1] \setminus \bar{V}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente restringimos  $f$  a  $[0, 1] \setminus \bar{V}$ . Em seguida estendemos  $f|_{[0, 1] \setminus \bar{V}}$  ao intervalo  $[0, 1]$  novamente, mas de modo que a aplicação  $x \mapsto \log |Df(x)|$  seja Lipschitz sobre  $[0, 1]$ . Assim aplicamos o Teorema de Schwartz e concluímos o resultado.  $\square$

**Lema 3.1.1.** *Sejam  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $C^3$  com derivada Schwarziana negativa e  $V \subset [0, 1]$  um conjunto aberto contendo todos os pontos críticos de  $f$  e pelo menos um ponto de cada órbita periódica não-repulsora. Então existe um inteiro  $m$  tal que: se  $f^i(x) \notin V$  para todo  $0 \leq i < m$  então  $|Df^m(x)| > 1$ .*

*Demonstração.* Suponha por contradição que existam inteiros  $n$  suficientemente grandes para os quais existe um ponto  $x_n \in [0, 1]$  tal que  $|Df^n(x_n)| \leq 1$  e  $f^i(x_n) \notin V$  para todo  $0 \leq i < n$ . Uma vez que o conjunto de pontos críticos de  $f$  e de pontos periódicos não-repulsores é fechado, existe um conjunto aberto  $U$  contendo cada ponto periódico não-repulsor em  $V$  e cujo fecho está contido em  $V$ . Seja  $J_n$  o intervalo maximal contendo  $x_n$  tal que

$$f^j(J_n) \subset [0, 1] \setminus \bar{U}, \text{ para todo } j = 0, \dots, n-1.$$

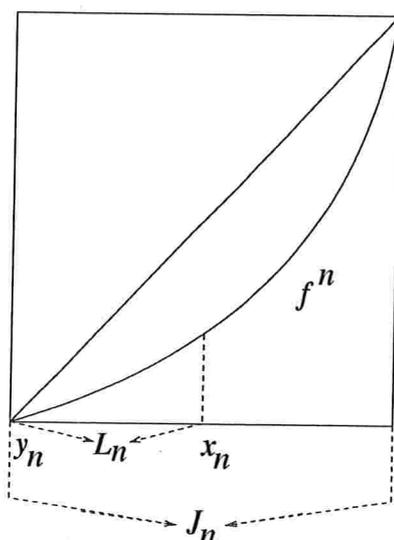


Figura 3.5: Componente  $L_n$  de  $J_n$  onde  $|Df^n(x)| \leq 1$ .

Como  $f^n|_{J_n}$  é um difeomorfismo sobre sua imagem (pois os pontos críticos de  $f$  estão em  $U$ ) e  $Sf^n < 0$ , segue do Lema 2.1.1 que existe uma componente  $L_n$  de  $J_n \setminus \{x_n\}$  tal que

$$|Df^n(x)| \leq 1, \text{ para todo } x \in L_n \text{ (ver Figura 3.5)}.$$

Seja  $y_n \neq x_n$  na fronteira de  $L_n$ . Pela maximalidade de  $J_n$ , existe um inteiro  $0 \leq k(n) < n$  tal que  $f^{k(n)}(y_n) \in \bar{U}$ . Seja  $\delta > 0$  tal que cada componente de  $V \setminus U$  tenha comprimento maior ou igual a  $\delta$ . Como  $f^{k(n)}(x_n) \notin V$  e  $f^{k(n)}(y_n) \in \bar{U}$  obtemos

$$|f^{k(n)}(L_n)| > \delta. \quad (3.1)$$

Por outro lado, como  $0 < |Df^n(x)| \leq 1$  para todo  $x \in L_n$ , obtemos que

$$|f^n(L_n)| \leq |L_n|. \quad (3.2)$$

Afirmamos agora que

$$|L_n| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

De fato, se (3.3) não se verificar podemos tomar uma subsequência  $L_{n_i}$  convergindo para um intervalo  $L$  de comprimento positivo. Se  $J$  é um intervalo cujo fecho está contido no interior de  $L$  então existe um inteiro  $j$  tal que  $L_{n_i}$  contém  $J$  para todo  $n_i > j$ . Como

$L_n \subset J_n$ , e  $f^j(J_n) \cap \bar{U} = \emptyset$  para todo  $0 \leq j < n$ , segue que  $f^n(J) \subset [0, 1] \setminus \bar{U}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Do Corolário 3.1.1 sabemos que  $f$  não possui intervalos errantes. Logo como  $f^n|_J$  é monótona, para todo  $n \geq 1$ , pelo Lema 3.2.1 existe um ponto em  $J$  que é assintótico a atratores periódicos. Mas isto não é possível pois  $U$  contém um ponto de cada órbita periódica atratora de  $f$ . Isto prova (3.3).

De (3.2) e (3.3) obtemos  $|f^n(L_n)| \rightarrow 0$ . Como  $|f^{k(n)}(L_n)| \geq \delta$  podemos tomar uma subsequência  $n_i \rightarrow \infty$  tal que os intervalos  $f^{k(n_i)}(L_{n_i})$  convergem para um intervalo  $S$  de comprimento pelo menos igual a  $\delta$ . Como  $|f^n(L_n)| = |f^{n-k(n)}(f^{k(n)}(L_n))| \rightarrow 0$  e  $|f^{k(n)}(L_n)| \geq \delta$ , temos que  $n - k(n) \rightarrow \infty$ . De fato. Sejam  $A = f^{k(n)}(L_n)$ ,  $n - k(n) = l$ ,  $f^n(L_n) = T$ . Assim temos

$$f^l(A) = T, |A| \geq \delta > 0, |T| \leq \epsilon, \text{ para um dado } \epsilon > 0.$$

Pelo Teorema do Valor Médio sabemos que  $|T| = |Df^l(\xi)||A|$ , para algum  $\xi \in A$ . Agora

$$|Df^l(\xi)| = \prod_{m=0}^{l-1} |Df(f^m(\xi))| \geq (\min |Df|)^l.$$

Assim temos

$$\begin{aligned} (\min |Df|)^l &\leq \frac{|T|}{|A|} \leq \frac{\epsilon}{\delta} \Rightarrow l \log \min |Df(\xi)| \leq \log \frac{\epsilon}{\delta} \\ \Rightarrow l \log (\min |Df|)^{-1} &\geq \log \frac{\delta}{\epsilon} \Rightarrow l \geq \frac{\log \frac{\delta}{\epsilon}}{\log (\min |Df|)^{-1}}, \end{aligned}$$

e assim se  $\epsilon \rightarrow 0$  devemos ter  $l \rightarrow \infty$ , ou seja,  $n - k(n) \rightarrow \infty$ .

Se  $J$  é um intervalo cujo fecho está contido no interior de  $S$ , então  $f^{k(n_i)}(L_{n_i})$  contém  $J$  para  $i$  grande o suficiente. Como antes segue que  $f^n(J)$  está contido em  $[0, 1] \setminus \bar{U}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Uma vez que  $f$  não possui intervalos errantes (Corolário 3.1.1) e usando novamente o Lema 3.2.1 obtemos que existem pontos em  $J$  que são assintóticos a atratores periódicos, o que é uma contradição pois  $f^n(J) \cap \bar{U} = \emptyset$  para todo  $n \geq 0$ . Assim segue o resultado.  $\square$

**Teorema 3.1.2.** *Sejam  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $C^3$  com derivada Schwarziana negativa e  $V$  um conjunto aberto contendo todos os pontos críticos de  $f$  e pelo menos um ponto de cada órbita periódica não-repulsora, onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo compacto. Então*

existem  $C > 0$ ,  $\lambda > 1$  e  $K < \infty$  tais que se  $x \in I$  satisfaz  $f^i(x) \notin V$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$  então

$$|Df^n(x)| > C^{-1}\lambda^n.$$

Se  $J$  é um intervalo tal que  $J, \dots, f^{n-1}(J)$  estão todos fora de  $V$  então

$$\frac{Df^n(x)}{Df^n(y)} \leq K, \text{ para todos } x, y \in J.$$

*Demonstração.* Do Lema 3.1.1 e da compacidade de  $I \setminus V$  segue que existem um inteiro  $k$  e  $\lambda > 1$  tais que: se  $f^i(x) \notin V$  para todo  $i \leq k$  então  $|Df^k(x)| > \lambda^k$ .

Sejam  $\rho = \min\{|Df(x)|; x \in I \setminus V\}$  e  $C > 0$  tais que  $\rho^i > C^{-1}\lambda^i$  para todo  $0 \leq i < k$ . Se  $n$  é um inteiro tal que  $f^l(x) \notin V$  para todo  $l < n$ , então podemos escrever  $n = jk + i$ , com  $0 \leq i < k$ ,  $f^n(x) = f^i(f^{jk}(x))$ , e temos

$$\begin{aligned} |Df^n(x)| &= \left( \prod_{l=0}^{j-1} |Df^k(f^{lk}(x))| \right) \cdot |Df^i(f^{jk}(x))| \geq \\ &\geq (\lambda^k)^j \rho^i \geq \lambda^{jk} C^{-1} \lambda^i = C^{-1} \lambda^n. \end{aligned}$$

E assim provamos a primeira desigualdade do Teorema.

Já a segunda e última desigualdade do Teorema segue diretamente do Lema 2.2.2. □

**Teorema 3.1.3.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $C^{1+\alpha}$  com  $\alpha > 0$ . Se  $\Gamma \subset [0, 1]$  é um conjunto hiperbólico e compacto então  $\Gamma$  tem medida de Lebesgue igual a zero.*

*Demonstração.* Uma vez que  $\Gamma$  é um conjunto hiperbólico para as iteradas de  $f$  podemos considerar  $f^n$  ao invés de  $f$ . Assim podemos assumir que  $|Df(x)| > \lambda > 1$  para todo  $x$  em uma vizinhança  $V$  de  $\Gamma$ . Claramente  $\Gamma$  não contém intervalos. De fato, se  $J \subset \Gamma$  é um intervalo então como  $\Gamma$  é invariante temos que  $f^n(J) \subset V$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ; além disso  $f^n$  não tem pontos críticos em  $J$ , pois  $\Gamma$  é hiperbólico. Sendo assim, se  $f^n|_J$  é injetiva então  $f^n(J)$  é um intervalo de comprimento pelo menos igual a  $\lambda^n \text{Leb}(J)$ . Mas isso não pode acontecer para todo  $n \in \mathbb{N}$  pois  $\lambda > 1$ . Logo para algum  $n \in \mathbb{N}$   $f^n|_J$  não é injetiva, ou seja,  $f^n|_J$  possui um ponto crítico, o que é um absurdo. Portanto  $\Gamma$  não contém intervalos.

Suponhamos por contradição que  $\Gamma$  tem medida de Lebesgue positiva e não contém intervalos. Pelo Teorema de Densidade de Lebesgue existe um ponto de densidade  $a \in \Gamma$ . Isto significa que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Leb}(B(a, \delta) \cap \Gamma)}{\text{Leb}(B(a, \delta))} = 1, \quad (3.4)$$

onde  $B(a, \delta)$  é a bola de raio  $\delta$  e centro em  $a \in \Gamma$ . Seja  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset V$  se  $x \in \Gamma$ . Como  $|Df(x)| > \lambda > 1$  para todo  $x \in V$ , para todo  $\delta > 0$  existe um inteiro  $n$  tal que  $\text{Leb}(f^n(B(a, \delta))) \geq \epsilon$ . Tome o menor  $n = n(\delta)$  tal que  $f^i(B(a, \delta)) \subset V$  para todo  $0 \leq i < n$ .

Uma vez que  $|Df(x)| > \lambda > 1$  em  $V$  temos que:

$$|f(x) - f(y)| \geq \lambda|x - y|,$$

$$|f^2(x) - f^2(y)| \geq \lambda|f(x) - f(y)| \geq \lambda^2|x - y|$$

$$\vdots$$

$$|f^n(x) - f^n(y)| \geq \lambda|f^{n-1}(x) - f^{n-1}(y)| \geq \dots \geq \lambda^{n-i}|f^i(x) - f^i(y)| \geq \dots \geq \lambda^n|x - y|. \quad (3.5)$$

Do Lema 2.2.2 temos que  $f^n$  tem distorção limitada sobre  $B(a, \delta)$ , mais precisamente, existe uma constante  $C_1$ , independente de  $\delta$ , tal que

$$\frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} < C_1 \quad (3.6)$$

para todos  $x, y \in B(a, \delta)$ . De fato, para aplicarmos o Lema aqui só precisamos da hipótese que: existem  $C > 0$  e  $\lambda > 1$  tais que se  $x \in [0, 1]$  satisfaz

$$f^i(x) \notin V, i = 1, \dots, n - 1 \text{ então } |Df^n(x)| \geq C^{-1}\lambda^n.$$

Mas isso segue facilmente do fato que  $|Df(x)| > \lambda > 1$  sobre  $V$ , e notando que

$$|Df^n(x)| = \prod_{j=0}^{n-1} |Df(f^j(x))|.$$

Assim existe  $n \geq 0$  tal que  $f^n$  mapeia  $B(a, \delta)$  difeomorficamente e com distorção limitada sobre um intervalo  $J_\delta$  de comprimento pelo menos  $\epsilon$ . Sendo  $\Gamma$  invariante pelas

iteradas positivas de  $f$  obtemos que  $f^n(\Gamma \cap B(a, \delta)) \subset \Gamma \cap J_\delta$  e portanto, usando (3.4) e (3.6), concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\text{Leb}(J_\delta \cap \Gamma)}{\text{Leb}(J_\delta)} &\geq \frac{\text{Leb}(f^n(\Gamma \cap B(a, \delta)))}{\text{Leb}(J_\delta)} = 1 - \frac{\text{Leb}(f^n(B(a, \delta) \setminus \Gamma))}{\text{Leb}(f^n(B(a, \delta)))} \\ &\geq 1 - C_1 \cdot \frac{\text{Leb}(B(a, \delta) \setminus \Gamma)}{\text{Leb}(B(a, \delta))} \rightarrow 1, \end{aligned}$$

quando  $\delta \rightarrow 0$ . Como cada um dos intervalos  $J_\delta$  tem tamanho pelo menos  $\epsilon$ , existe uma seqüência  $\delta_n \rightarrow 0$  tal que  $J_{\delta_n}$  converge para um intervalo  $J$ . Portanto,  $\text{Leb}(J \cap \Gamma) = \text{Leb}(J)$ , e assim  $\text{Leb}(\Gamma^c \cap J) = 0$ . Como  $\Gamma$  é um conjunto fechado, obtemos que  $\Gamma \supset J$ . De fato, como  $J \setminus \Gamma$  é aberto em  $J$  podemos ter  $J \setminus \Gamma = \emptyset$  ou  $J \setminus \Gamma$  contém pelo menos um intervalo aberto. Mas o último caso não ocorre pois caso  $J \setminus \Gamma$  contenha algum intervalo aberto teremos  $\text{Leb}(J \setminus \Gamma) = \text{Leb}(\Gamma^c \cap J) > 0$ . Sendo assim temos que  $J \setminus \Gamma = \emptyset$ . E daí segue que

$$\Gamma \cap J = J \Rightarrow J \subset \Gamma,$$

contradizendo a hipótese de que  $\Gamma$  não contém intervalos.

Portanto o resultado está concluído. □

**Corolário 3.1.2** *Em particular, se uma tal aplicação  $f : I \rightarrow I$ , com um número finito de pontos críticos, não tem atratores periódicos e nem órbitas periódicas não-hiperbólicas então para q.t.p.  $x \in I$ ,  $\omega(x)$  contém pontos críticos de  $f$ .*

*Demonstração.* Sejam  $V \subset I$  um aberto contendo todos os pontos críticos de  $f$  e

$$\Gamma_V = \{x \in I; f^n(x) \notin V, \forall n \geq 0\}.$$

Claramente  $f(\Gamma_V) \subset \Gamma_V$ , isto é,  $\Gamma_V$  é invariante pela  $f$ . Além disso temos que  $\Gamma_V$  é fechado. De fato:

$$x \in (\Gamma_V)^c \Rightarrow \exists n_0 \text{ t.q. } f^{n_0}(x) \in V;$$

como  $V$  é aberto temos que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(f^{n_0}(x), \epsilon) \subset V$ . Sendo  $f^{n_0}$  contínua existe  $\delta > 0$  tal que  $f^{n_0}(B(x, \delta)) \subset B(f^{n_0}(x), \epsilon) \subset V$ . Logo  $B(x, \delta) \subset (\Gamma_V)^c$ , ou seja,  $(\Gamma_V)^c$  é aberto, e portanto  $\Gamma_V$  é fechado.

Como  $\Gamma_V \subset I$  concluímos que  $\Gamma_V$  é compacto.

Logo pelos Teoremas 3.1.3 e 3.1.4 obtemos que

$$\text{Leb}(\Gamma_V) = 0 \text{ e } \text{Leb}(f^{-n}(\Gamma_V)) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

e assim  $\text{Leb}\left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\Gamma_V)\right) = 0$ . É bom ressaltar que essas afirmações demonstradas até agora nesse corolário valem para qualquer vizinhança  $V$  dos pontos críticos de  $f$ .

Agora denotemos o conjunto dos pontos críticos de  $f$  por  $P_c^f$ , isto é,

$$P_c^f = \{x \in I; f'(x) = 0\} = \{c_1, \dots, c_j\}.$$

Além disso seja  $\mathcal{R} = \{x \in I; \omega(x) \cap P_c^f \neq \emptyset\}$ . Temos

$$x \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists c_i \text{ t. q. } \forall \epsilon > 0, \forall n_0, \exists n \geq n_0 \text{ t. q. } |f^n(x) - c_i| < \epsilon.$$

Assim

$$x \in \mathcal{R}^c \Leftrightarrow \forall c_i, \exists \epsilon > 0, \exists n_0 \text{ t. q. } \forall n \geq n_0 \text{ tem-se que } |f^n(x) - c_i| \geq \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \exists V \supset P_c^f \text{ (onde } V \text{ é um aberto)}, \exists n_0 \text{ t. q. } \forall n \geq n_0 \text{ tem-se que } f^n(x) \notin V$$

$$\Leftrightarrow \exists V, \exists n_0 \text{ t. q. } f^{n_0}(x) \in \Gamma_V \Leftrightarrow \exists V, \exists n_0 \text{ t. q. } x \in f^{-n_0}(\Gamma_V)$$

$$\Leftrightarrow \exists V \text{ t. q. } x \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\Gamma_V)$$

(em particular vale que:  $\forall V' \subset V \Rightarrow x \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\Gamma_{V'})$ ).

Tomando uma seqüência  $V_{k+1} \subset V_k \subset V$  com  $|V_k| \rightarrow 0$  temos que

$$x \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\Gamma_{V_k}) \Leftrightarrow x \in \bigcup_k \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\Gamma_{V_k}) = \mathcal{R}^c.$$

Mas como  $\text{Leb}(\mathcal{R}^c) = 0$ , o resultado segue. □

# Capítulo 4

## Aplicações de Retorno e Fatores de Escala

### 4.1 Pontos Bons e Aplicações de Retorno

Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma aplicação  $S$ -unimodal com ponto crítico  $c$ . Assumiremos neste Capítulo que  $f$  não possui atratores periódicos, nem mesmo os não-hiperbólicos. Os resultados deste Capítulo podem ser encontrados no trabalho de Martens [3].

Para  $x \in [0, 1]$  denotaremos o intervalo  $(x, \tau(x))$  por  $V_x$ , onde  $\tau$  é o homeomorfismo satisfazendo  $f \circ \tau = f$  ( $\tau \neq \text{id}$ ).

**Lema 4.1.1.** *O homeomorfismo  $\tau$  é uma aplicação de classe  $C^1$ . Com isso o intervalo  $V_x$  é praticamente simétrico, se  $x$  está próximo de  $c$ .*

**Definição 4.1.1.** *Definimos o conjunto de pontos bons (“nice” em inglês) por*

$$\mathcal{N} = \{x \in [0, c] \mid V_x \cap \text{orb}(x) = \emptyset\}.$$

Observe que toda órbita periódica contém pontos bons pois basta tomar o ponto dessa órbita que maximiza  $f$  para ser uma extremidade do intervalo  $V_x$ . Assim  $\mathcal{N}$  é não vazio, pois 0 é uma órbita periódica, por exemplo.

**Lema 4.1.2.** *O ponto crítico é acumulado por órbitas periódicas. Em particular  $\mathcal{N}$  também se acumula sobre  $c$ .*

Como o ponto crítico  $c$  não é um ponto bom temos o seguinte resultado.

**Lema 4.1.3.**  $\mathcal{N} \cup \{c\}$  é fechado.

Agora fixemos  $x \in \mathcal{N}$  e seu intervalo correspondente  $V_x = (x, \tau(x))$ .

**Lema 4.1.4.** Para  $i = 1, 2$  sejam  $T_i \subset [0, 1]$  dois intervalos abertos diferentes tais que  $f^{n_i} : T_i \rightarrow V_x$  seja monótona e sobre, para  $n_1 \leq n_2$ . Se  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  então  $T_2 \subset T_1$  e  $n_1 < n_2$ .

**Definição 4.1.2.** Seja  $C_x \subset [0, 1]$  o conjunto:

$$C_x = \{y \in [0, 1] \mid f^n(y) \in V_x, \text{ para algum } n \geq 0\}.$$

Dizemos que  $C_x$  é o conjunto de pontos que retornam a  $V_x$  sob alguma iterada de  $f$ . Além disso definimos os conjuntos:  $\Lambda_x = [0, 1] - C_x$  e  $D_x = f^{-1}(C_x) \cap V_x$ .

Observe que o conjunto  $C_x$  pode ser descrito como sendo a união de todos os intervalos  $T$  tais que  $f^n : T \rightarrow V_x$  é monótona e sobre para algum  $n \geq 0$ , onde  $f^0$  é a aplicação identidade, isto é,  $f^0 = id : V_x \rightarrow V_x$  (ver Figura 4.1).

**Lema 4.1.5.** Seja  $I$  uma componente de  $C_x$ . Então existe um único  $n \geq 0$  tal que  $f^n : I \rightarrow V_x$  é monótona e sobre. Além disso  $\{I, f(I), \dots, f^n(I) = V_x\}$  é uma coleção onde seus elementos são dois a dois disjuntos.

O Lema 4.1.5 nos permite definir a *aplicação de transferência*

$$T_x : C_x \rightarrow V_x$$

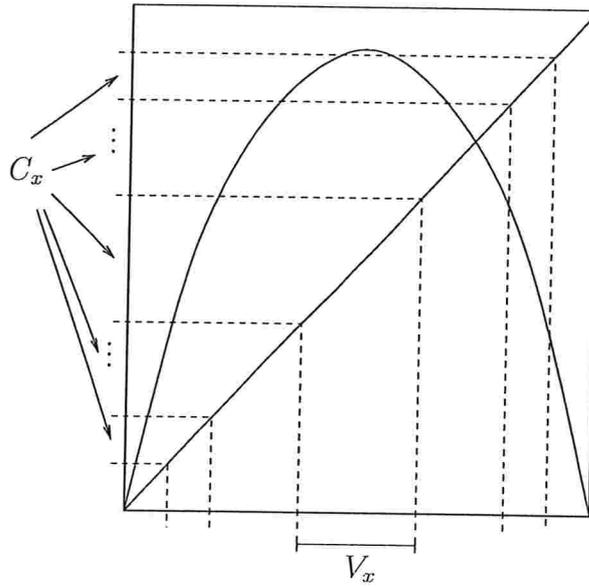
e também a *aplicação de Poincaré* ou *aplicação de primeiro retorno* a  $V_x$

$$R_x : D_x \rightarrow V_x$$

por  $R_x = T_x \circ f$ .

É bom ressaltar que os ramos da *aplicação de transferência* são monótonos.

O Lema 4.1.6 a seguir é uma consequência direta dos dois últimos Lemas e do fato que a fronteira de cada  $V_x$  é formada por pontos bons.

Figura 4.1: Ilustração de  $C_x$ .

**Lema 4.1.6.** Para cada  $x \in \mathcal{N}$  existe uma coleção de intervalos dois a dois disjuntos,  $\mathcal{U}_x$ , tal que

- (1)  $I \subset V_x$  para todo  $I \in \mathcal{U}_x$ ,
- (2)  $\bigcup_{I \in \mathcal{U}_x} I = D_x$
- (3) Se  $I \in \mathcal{U}_x$  e  $c \notin I$  então  $R_x : I \rightarrow V_x$  é monótona e sobre,
- (4) Se  $I \in \mathcal{U}_x$  e  $c \in I$  então  $R_x : I \rightarrow V_x$  é 2 a 1 sobre a imagem. Além disso  $R_x(\partial I) = \{x\}$  ou  $\{\tau(x)\}$ .

Já o Lema 4.1.7 abaixo mostrará que essas aplicações induzidas estão definidas em quase todo ponto.

**Lema 4.1.7.** Se  $x \in \mathcal{N}$  então:

- (1)  $|C_x| = 1$ ;
- (2)  $|D_x| = |V_x|$ ;
- (3)  $\Lambda_x$  é invariante;
- (4) Se  $y \in \Lambda_x$  é tal que  $\text{orb}(y) \cap \overline{V_x} = \emptyset$  então  $\Lambda_x$  se acumula de ambos os lados de  $y$ .

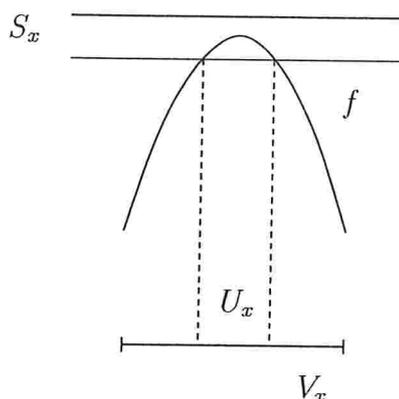


Figura 4.2: Ilustração de  $U_x$ .

Mais algumas palavras sobre a Proposição 2.1.1 que são interessantes nesta Seção. Para aplicarmos essa Proposição aqui precisamos saber o quanto a monotonicidade pode ser estendida. Sendo assim suponha que  $c_1 = f(c) \in C_x$ . Logo existe uma componente  $S_x \subset C_x$  com  $c_1 \in S_x$ . Defina:

$$\psi(x) = \partial f^{-1}(S_x) \cap [0, c)$$

e

$$U_x = V_{\psi(x)} = f^{-1}(S_x) \text{ (ver Figura 4.2) .}$$

Como  $c_1 \in S_x$  e  $x \in \mathcal{N}$  temos que  $f^{-1}(S_x) \subset V_x$ . Daí  $S_x \subset f(V_x)$ .

Pelo Lema 4.1.5 existe um único  $n \geq 0$  tal que  $f^n : S_x \rightarrow V_x$  é monótona e sobre. Além disso  $\{S_x, f(S_x), \dots, f^n(S_x) = V_x\}$  é uma coleção onde seus elementos são dois a dois disjuntos.

Pela definição de  $\psi$  temos que  $f(\psi(x))$  é um ponto de fronteira de  $S_x$ . Logo

$$\text{orb}(f(\psi(x))) \cap V_x = \emptyset,$$

pois  $f^n(f(\psi(x))) \in \partial V_x$ . E em particular

$$\text{orb}(f(\psi(x))) \cap V_{\psi(x)} = \emptyset \text{ (pois } V_{\psi(x)} \subset V_x),$$

e assim  $\psi(x) \in \mathcal{N}$ .

Por fim defina  $\psi(x) = x$  se  $c_1 \notin C_x$ .

O par  $(V_x, U_x)$  é chamado de *região de transferência*. Se  $V_x$  contém uma vizinhança  $\delta$ -escalorada de  $U_x$ , ou seja, se cada componente de  $V_x \setminus U_x$  tem comprimento pelo menos  $\delta|U_x|$ , então o par  $(V_x, U_x)$  é chamado de  $\delta$ -*região de transferência*. Com isso temos a seguinte

**Proposição 4.1.1.** *Sejam  $x \in \mathcal{N}$  e  $I \subset C_{\psi(x)}$  uma componente, e digamos que  $T_{\psi(x)}|I = f^n|I$ . Então existe um intervalo  $T_1$  contendo  $I$  tal que*

$$f^n : T_1 \rightarrow V_x$$

*é monótona e sobre.*

Combinando a Proposição 2.1.1 com esta Proposição obtemos que os ramos de  $T_{\psi(x)} : C_{\psi(x)} \rightarrow U_x$  têm distorção limitada uniformemente e a limitação depende apenas do tamanho das componentes de  $V_x \setminus U_x$ .

## 4.2 Fatores de Escala

Agora escolha  $x_1 \in \mathcal{N}$  e considere a sequência  $x_n = \psi(x_{n-1})$ , com  $n \geq 1$ . Usaremos a notação simplificada  $\mathcal{U}_n$  para  $\mathcal{U}_{x_n}$  e denotaremos as aplicações de primeiro retorno por

$$R_n : D_n \rightarrow V_n$$

ao invés de  $R_{x_n} : D_{x_n} \rightarrow V_{x_n}$ . Todas essas aplicações de primeiro retorno têm as propriedades estabelecidas no Lema 4.1.6.

Chamamos  $\sigma_n = \frac{|V_{n+1}|}{|V_n|}$ ,  $n \geq 1$ , de *fator de escala* de nível  $n$ . Como falamos na Seção 2 do Capítulo 1, na Introdução desse trabalho, estaremos usando a hipótese de que os fatores de escala são somáveis, ou seja

$$\sum_{n \geq 1} (\sigma_n)^{1/2} < \infty,$$

e assim é uma consequência imediata que  $(\sigma_n)^{1/2} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Sendo assim não há problemas em assumir que

$$\sigma_n \rightarrow 0.$$

E assumiremos isso de modo a facilitar as demonstrações.

**Lema 4.2.1.** *Se  $I \in \mathcal{U}_n$  e  $R_n|I = f^t$  então existe um intervalo  $J$  tal que  $f(I) \subset J$  e*

$$f^{t-1} : J \rightarrow V_{n-1}$$

*é monótona e sobre. Em particular todas as aplicações  $f^{t-1} : f(I) \rightarrow V_n, I \in \mathcal{U}_n$  têm distorção limitada uniformemente. Além disso essas aplicações serão essencialmente afins quando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Lema 4.2.2.** *Para  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \geq 1$  tal que o comprimento hiperbólico de qualquer  $I \in \mathcal{U}_n$  é pequeno,*

$$\text{hyp}(V_n, I) \leq \epsilon$$

*e também  $\frac{|f(I)|}{|f(V_n)|} \leq \epsilon$ , se  $n \geq n_0$ .*

**Definição 4.2.1.** *Um par  $(T, I)$  de intervalos com a propriedade de que para algum  $n \geq 0$ , chamado o tempo de transferência,*

*(1)  $f^n : T \rightarrow V_x$  é monótona e sobre;*

*(2)  $f^n(I) = U_x$*

*é chamado de par-TI para  $(V_x, U_x)$ .*

Como no Lema 4.1.5 observe que o tempo  $n \geq 0$  é definido unicamente, e pelo que vimos anteriormente todo par-TI para uma certa região de transferência tem distorção limitada sobre a parte do meio,  $U_x$ .

O comportamento de intersecção dos pares TI é formulado no Lema 4.2.3 a seguir.

**Lema 4.2.3.** *Para  $i = 1, 2$  sejam  $(T_i, I_i)$  pares TI para  $(V_x, U_x)$  com tempos de transferência  $n_1$  e  $n_2$  respectivamente. Se  $T_2 \cap T_1 \neq \emptyset$  e  $n_2 \geq n_1$  então*

$$T_2 \subset T_1 \setminus I_1 \text{ ou } T_2 \subset I_1$$

*e  $n_2 > n_1$ .*

### 4.3 Resultados e Demonstrações

**Lema 4.1.1.** *O homeomorfismo  $\tau$  é uma aplicação de classe  $C^1$ . Com isso o intervalo  $V_x$  é praticamente simétrico, quando  $x$  está próximo de  $c$ .*

*Demonstração.* Em primeiro lugar,  $\tau$  é uma involução, portanto  $\tau^{-1} = \tau$  e as afirmativas sobre  $\tau^{-1}$  são automáticas.

Sejam  $f_1(x) = f(x)$  para  $x < c$  e  $f_2(x) = f(x)$  para  $x > c$ . Assim temos que:

$$\tau(x) = \begin{cases} f_2^{-1}(f_1(x)), & \text{se } x < c \\ c, & \text{se } x = c \\ f_1^{-1}(f_2(x)), & \text{se } x > c \end{cases}$$

Que  $\tau$  é um homeomorfismo é claro pois pela sua definição temos que  $\tau$  é monótona (estritamente decrescente) e contínua. De acordo com a definição de  $\tau$  para mostrarmos que  $\tau$  é de classe  $C^1$  basta verificarmos que ela é diferenciável e a derivada é contínua em  $c$ , ou seja, precisamos mostrar que o limite

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\tau(x) - \tau(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\tau(x) - c}{x - c}$$

existe e que

$$\lim_{x \rightarrow c} \tau'(x) = \tau'(c),$$

pois para  $x \neq c$  já temos que  $\tau$  é  $C^1$ . Uma vez que o quociente  $\frac{\tau(x) - \tau(c)}{x - c}$  é sempre negativo vamos mostrar que o limite desse módulo existe, quando  $x$  tende a  $c$ . Pela fórmula de Taylor temos que

$$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + \frac{f''(c)}{2} \cdot (x - c)^2 + r_2(x)$$

onde  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{r_2(x)}{(x-c)^2} = 0$ . Essa equação também vale se substituirmos  $x$  por  $\tau(x)$ , observando que resto será do tipo  $r_2(\tau(x))$  e satisfazendo  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{r_2(\tau(x))}{(\tau(x)-c)^2} = 0$ . Uma vez que  $f(x) = f(\tau(x))$ ,  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) \neq 0$  (usando a hipótese de que o ponto crítico é quadrático) temos que

$$\begin{aligned} \frac{f''(c)}{2} \cdot (x - c)^2 \cdot \left[1 + \frac{2r_2(x)}{f''(c) \cdot (x - c)^2}\right] &= \frac{f''(c)}{2} \cdot (\tau(x) - c)^2 \cdot \left[1 + \frac{2r_2(\tau(x))}{f''(c) \cdot (\tau(x) - c)^2}\right] \\ \Rightarrow \frac{(\tau(x) - c)^2}{(x - c)^2} &= \frac{1 + \frac{2r_2(x)}{f''(c) \cdot (x - c)^2}}{1 + \frac{2r_2(\tau(x))}{f''(c) \cdot (\tau(x) - c)^2}} \\ \Rightarrow \left| \frac{\tau(x) - c}{x - c} \right| &= \sqrt{\frac{1 + \frac{2r_2(x)}{f''(c) \cdot (x - c)^2}}{1 + \frac{2r_2(\tau(x))}{f''(c) \cdot (\tau(x) - c)^2}}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Fazendo o limite quando  $x$  tende a  $c$  de ambos os lados da equação 4.1 concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\tau(x) - \tau(c)}{x - c} = -1.$$

Portanto  $\tau$  é diferenciável em  $c$ . Falta mostrarmos que  $\tau'$  é contínua em  $c$ . Lembrando que  $f'(x) = f'(\tau(x)) \cdot \tau'(x)$  para  $x \neq c$  e utilizando argumentos análogos aos anteriores obtemos

$$\tau'(x) = \frac{x - c}{\tau(x) - c} \cdot \frac{1 + \frac{r_1(x)}{f''(c) \cdot (x-c)}}{1 + \frac{r_1(\tau(x))}{f''(c) \cdot (\tau(x)-c)}}, \quad (4.2)$$

onde  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{r_1(x)}{x-c} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{r_1(\tau(x))}{\tau(x)-c} = 0$ . E fazendo, novamente, o limite quando  $x$  tende a  $c$  na equação 4.2 obtemos

$$\lim_{x \rightarrow c} \tau'(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x - c}{\tau(x) - c} = -1 = \tau'(c).$$

Portanto  $\tau$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$ . □

**Lema 4.1.2.** *O ponto crítico é acumulado por órbitas periódicas. Em particular  $N$  também se acumula sobre  $c$ .*

*Demonstração.* Pelo Corolário 3.1.2 existe  $x \neq c$  tal que  $c \in \omega(x)$ . Assim existe  $n \geq 1$  tal que  $f^n(x) \in (x, \tau(x))$ . Como  $x$  e  $\tau(x)$  possuem a mesma órbita a partir do primeiro iterado, o gráfico de  $f^n$  restrito a  $[x, \tau(x)]$  deve cruzar a diagonal (como mostra a Figura 4.3), aparecendo assim um ponto fixo,  $p$ , de  $f^n$ , isto é, um ponto periódico de  $f$ . □

**Lema 4.1.3.**  *$\mathcal{N} \cup \{c\}$  é fechado.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{N}$  tal que  $x_n \rightarrow x \neq c$ . Temos que  $x \in [0, 1]$  pois  $[0, 1]$  é fechado e  $x_n \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$ .

Mostremos agora que  $x \in \mathcal{N}$ , ou seja,  $\forall i \geq 0, f^i(x) \notin (x, \tau(x))$ .

Suponhamos que  $x \notin \mathcal{N}$ , ou seja, existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{i_0}(x) \in (x, \tau(x))$ .

Como  $x_n \rightarrow x$ , temos que  $\tau(x_n) \rightarrow \tau(x)$  e assim existem  $k, m \in \mathbb{N}$  tais que  $c < f^{i_0}(x) < \tau(x_n) - 1/k \leq \tau(x), \forall n \geq m$ .

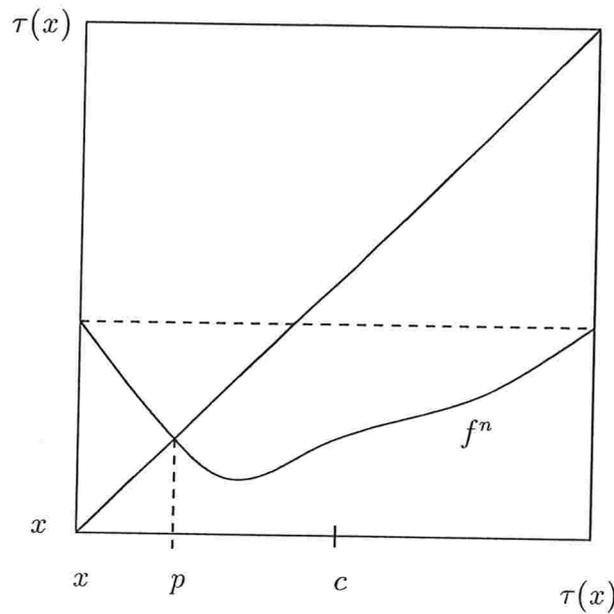


Figura 4.3: Gráfico de  $f^n$  restrito a  $[x, \tau(x)]$ .

Como  $f^{i_0}(x_n) \rightarrow f^{i_0}(x)$  temos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f^{i_0}(x_n) - f^{i_0}(x)| < 1/k, \forall n \geq n_0.$$

Tome  $j > \max\{m, n_0\}$ . Assim teremos

$$c < f^{i_0}(x_j) < 1/k + f^{i_0}(x) < 1/k + \tau(x_j) - 1/k \Rightarrow c < f^{i_0}(x_j) < \tau(x_j).$$

Assim  $f^{i_0}(x_j) \in (x_j, \tau(x_j))$ , contradizendo o fato de  $x_j \in \mathcal{N}$ .

Portanto  $\mathcal{N}$  é fechado. □

**Lema 4.1.4.** Para  $i = 1, 2$  sejam  $T_i \subset [0, 1]$  dois intervalos abertos diferentes tais que  $f^{n_i} : T_i \rightarrow V_x$  seja monótona e sobre, para  $n_1 \leq n_2$ . Se  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  então  $T_2 \subset T_1$  e  $n_1 < n_2$ .

*Demonstração.* Temos as possibilidades mostradas na Figura 4.4.

Por contradição suponhamos que não temos  $T_2 \subset T_1$ . Assim podemos supor que  $\partial T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  (como na Figura 4.5).

Logo  $n_1 \neq n_2$  pois caso contrário  $f^{n_1}$  não seria monótona (basta olhar para  $f^{n_1}$  em  $T_1$  e sobre  $T_1 \cap T_2$ ).

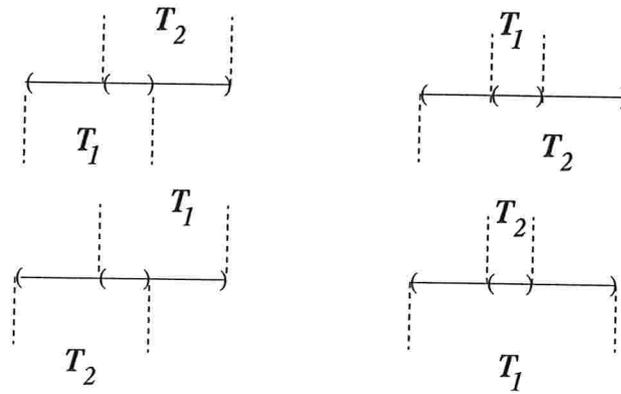


Figura 4.4: As possibilidades das intersecções dos intervalos  $T_1$  e  $T_2$ .

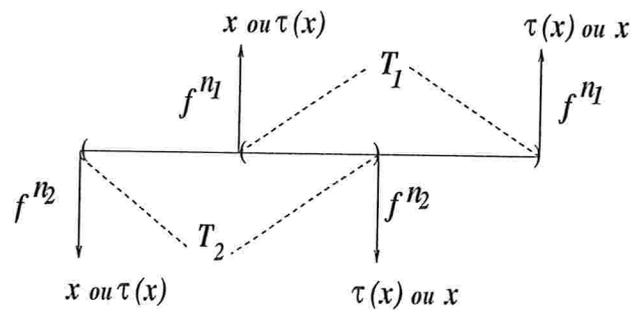


Figura 4.5:  $T_2$  não está contido em  $T_1$ .

Sendo  $f^{n_1}$  monótona temos:

- $f^{n_1}$  crescente  $\Rightarrow x \in f^{n_1}(T_2) \Rightarrow f^{n_2-n_1}(x) \in f^{n_2}(T_2) = V_x$ . Absurdo!
- $f^{n_1}$  decrescente  $\Rightarrow \tau(x) \in f^{n_1}(T_2) \Rightarrow f^{n_2-n_1}(\tau(x)) \in f^{n_2}(T_2) = V_x$ . Absurdo!

□

**Lema 4.1.5.** *Seja  $I$  uma componente de  $C_x$ . Então existe um único  $n \geq 0$  tal que  $f^n : I \rightarrow V_x$  é monótona e sobre. Além disso  $\{I, f(I), \dots, f^n(I) = V_x\}$  é uma coleção onde seus elementos são dois a dois disjuntos.*

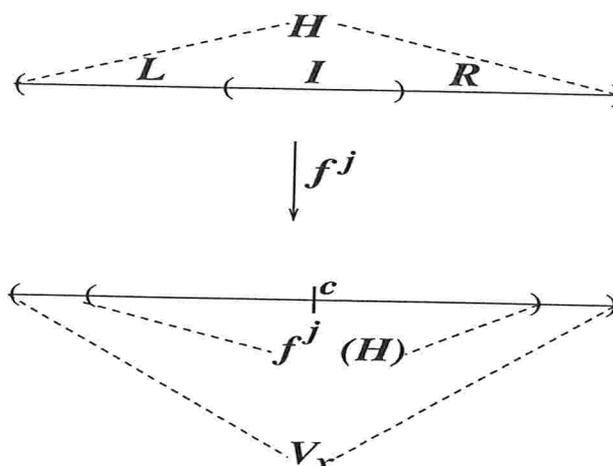
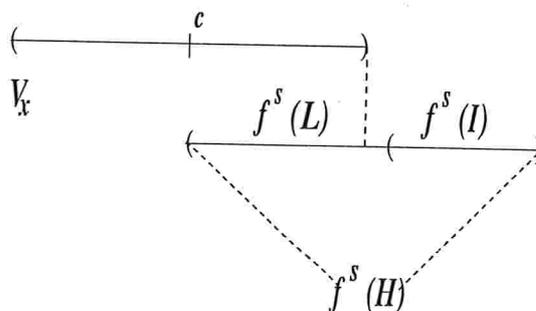
*Demonstração.* Como a demonstração desse Lema é feita de forma construtiva apenas mostraremos a disjunção da família  $\{I, f(I), \dots, f^n(I) = V_x\}$ . Para isso é suficiente provar que  $f^j(I) \cap V_x = \emptyset, \forall j < n$ , pois se  $f^j(I) \cap f^i(I) \neq \emptyset$ , para  $j < i < n$ , temos pelo Lema 4.1.4 que  $f^j(I) \subset f^i(I)$ . Logo  $f^{n-i}(f^j(I)) \subset f^{n-i}(f^i(I)) = V_x$ . Como  $n-i+j < n$  temos que  $f^{n-i+j}(I) \cap V_x \neq \emptyset$ .

Sendo assim suponhamos que  $f^j(I) \cap V_x \neq \emptyset$  para algum  $j < n$ . O Lema 4.1.4 nos fornece que  $f^j(I) \subset V_x$ .

Seja  $j < n$  minimal tal que  $f^j(I) \subset V_x$ . E seja  $H \subset [0, 1]$  o intervalo maximal contendo  $I$  com  $f^j|_H$  monótona e  $f^j(H) \subset V_x$ . Se mostrarmos que  $f^j : H \rightarrow V_x$  é monótona e sobre, teremos pela definição de  $C_x$  que  $H = I$  e em particular  $j = n$ . Obtemos assim uma contradição pois por hipótese tínhamos que  $j < n$ . E portanto o resultado segue, ou seja,  $\{I, f(I), \dots, f^n(I) = V_x\}$  é uma família onde os elementos são dois a dois disjuntos.

Para provarmos isso vamos supor por contradição que  $f^j : H \rightarrow V_x$  não seja sobrejetora, bastando para tal admitirmos que uma componente  $L$  de  $H \setminus I$  é mapeada em  $V_x$ , ou seja  $\overline{f^j(L)} \subset V_x$  (ver Figura 4.6).

Sendo  $H$  maximal tal que  $f^j : H \rightarrow V_x$  é monótona e  $f^j(H) \subset V_x$  temos que para qualquer outro intervalo  $M \subset [0, 1]$  contendo  $H$  e tal que  $f^j(M) \subset V_x$ ,  $f^j : M \rightarrow V_x$  não será monótona e essa perda de monotonicidade ocorrerá na fronteira de  $H$ ,  $\partial H$ , e se fará com o aparecimento do ponto crítico  $c$ , uma vez que  $f$  possui um único ponto crítico,  $c$ .

Figura 4.6: Aplicação  $f^j$ .Figura 4.7: Ilustração de  $f^s(I) \cap V_x = \emptyset$ .

Assim, como  $\overline{f^j(L)} \subset V_x$  segue que  $f^j$  perde a monotonicidade em  $\partial L$ , ou seja, o ponto crítico  $c$  deve estar na fronteira de  $f^s(L)$  para algum  $s < j$  ( $c \in \partial f^s(L)$ ).

Pela minimalidade de  $j$  temos que  $f^s(I) \cap V_x = \emptyset$ . Daí  $x$  ou  $\tau(x)$  pertence a  $f^s(L)$  (ver Figura 4.7).

Como  $\overline{f^j(L)} \subset V_x$  obtemos que  $\text{orb}(x) \cap V_x \neq \emptyset$ , contradizendo o fato de  $x \in \mathcal{N}$ . E assim segue o resultado.  $\square$

**Lema 4.1.7.** *Se  $x \in \mathcal{N}$  então:*

- (1)  $|C_x| = 1$ ;
- (2)  $|D_x| = |V_x|$ ;
- (3)  $\Lambda_x$  é invariante;

(4) Se  $y \in \Lambda_x$  é tal que  $\text{orb}(y) \cap \overline{V_x} = \emptyset$  então  $\Lambda_x$  se acumula de ambos os lados de  $y$ .

*Demonstração.* (1) Segue do fato que  $|\Lambda_x| = 0$ , uma vez que  $\Lambda_x$  é um conjunto compacto e hiperbólico, ou melhor, segue do Teorema 3.1.3.

(2) Precisamos mostrar que  $|V_x \setminus D_x| = 0$ . Como  $V_x \setminus D_x \subset f^{-1}(\Lambda_x)$  (pois  $D_x = f^{-1}(C_x) \cap V_x$ ) basta mostrarmos que  $|f^{-1}(\Lambda_x)| = 0$ .

Pelo item anterior sabemos que  $|\Lambda_x| = 0$ . Assim se  $|f^{-1}(\Lambda_x)| > 0$  então  $|f^{-1}(\Lambda_x) \cap [0, c]| > 0$  ou  $|f^{-1}(\Lambda_x) \cap (c, 1]| > 0$ . Como  $f|_{[0, c)}$  e  $f|_{(c, 1]}$  são difeomorfismos teríamos  $|\Lambda_x| > 0$ , o que contradiz o fato de que  $|\Lambda_x| = 0$ . Portanto segue que  $|f^{-1}(\Lambda_x)| = 0$ .

Com raciocínio análogo prova-se que  $|f^{-n}(\Lambda_x)| = 0, \forall n \geq 1$ .

(3) Tome  $y \in \Lambda_x$  e assumamos que  $f(y) \notin \Lambda_x$ ; digamos que  $f(y) \in I \in C_x$ .

Se  $c_1 = f(c) \notin I$  então  $f^{-1}(I) = \{x \in [0, 1] | f(x) \in I\} \subset C_x$ . Assim  $c_1 = f(c) \in I$  pois:  $y \notin C_x$  e  $f(y) \in I \in C_x$ , implicando que  $f^{-1}(I)$  não está contido em  $C_x$ .

Agora, como  $c \in f^{-1}(I)$  e  $c \in V_x$  temos que  $V_x \cap f^{-1}(I) \neq \emptyset$ . E assim poderemos ter  $f^{-1}(I) \subset V_x$  ou  $V_x \subset f^{-1}(I)$ . Mas o último caso não ocorre pois caso contrário teremos  $x \in f^{-1}(I)$  e daí  $\text{orb}(x) \cap V_x \neq \emptyset$ , contradizendo o fato de  $x \in \mathcal{N}$ .

Logo  $f^{-1}(I) \subset V_x$ . Mas isso também é uma contradição pois assim teremos que  $y \in V_x$  o que não ocorre uma vez que  $y \in \Lambda_x$ .

Portanto  $\Lambda_x$  é invariante.

(4) Tome  $y \in \Lambda_x$  com  $\text{orb}(y) \cap \overline{V_x} = \emptyset$ . Suponha que  $y$  não é acumulado de ambos os lados por  $\Lambda_x$ . Assim  $y$  é um ponto de fronteira de uma componente de  $C_x$ . Pelo Lema 4.1.5 temos que a órbita de  $y$  passa pela fronteira de  $C_x$ , contradizendo a hipótese  $\text{orb}(y) \cap \overline{V_x} = \emptyset$ . Portanto  $\Lambda_x$  se acumula de ambos os lados de  $y$ .  $\square$

**Proposição 4.1.1.** *Sejam  $x \in \mathcal{N}$  e  $I \subset C_{\psi(x)}$  uma componente, digamos que  $T_{\psi(x)}|_I = f^n|_I$ . Então existe um intervalo  $T_1$  contendo  $I$  tal que*

$$f^n : T_1 \rightarrow V_x$$

*é monótona e sobre.*

*Demonstração.* Seja  $I$  uma componente de  $C_{\psi(x)}$ , digamos  $T_{\psi(x)}|I = f^n|I$ , e seja  $H \subset [0, 1]$  o intervalo maximal contendo  $I$  tal que  $f^n|H$  é monótona e  $f^n(H) \subset V_x$ . Suponha por contradição que a componente  $L$  de  $H \setminus I$  é mapeada em  $V_x$ :  $\overline{f^n(L)} \subset V_x$ . Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração do Lema 4.1.5 segue da maximalidade que existe  $j < n$  tal que  $c \in \partial f^j(L)$ . Sabemos do Lema 4.1.5 que  $f^j(I) \cap U_x = \emptyset$ . Assim  $\psi(x) \in f^j(L)$ . O fato de  $\overline{f^n(L)} \subset V_x$  implica que  $\text{orb}(\psi(x)) \cap V_x \neq \emptyset$ , o que é uma contradição. Portanto segue o resultado.  $\square$

**Lema 4.2.1.** *Se  $I \in \mathcal{U}_n$  e  $R_n|I = f^t$  então existe um intervalo  $J$  tal que  $f(I) \subset J$  e*

$$f^{t-1} : J \rightarrow V_{n-1}$$

*é monótona e sobre. Em particular todas as aplicações  $f^{t-1} : f(I) \rightarrow V_n, I \in \mathcal{U}_n$  têm distorção limitada uniformemente. Além disso essas aplicações serão essencialmente lineares quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Seja  $I \in \mathcal{U}_n$  tal que  $R_n|I = f^t$  e seja  $J$  o intervalo maximal tal que  $f(I) \subset J$  e sobre o qual  $f^{t-1}$  é monótona. A maximalidade implica na existência de  $i < t - 1$  tal que  $c \in \partial f^i(J)$ . Observe que  $f^i(f(I)) \cap V_n = \emptyset$ , e o primeiro retorno acontece após  $t - 1 > i$  passos. Assim  $x_n$  (ou  $\tau(x_n)$ )  $\in f^i(J)$ . Como a órbita de  $f(x_n)$  nunca entra em  $V_{n-1}$  temos que  $V_{n-1} \subset f^{t-1}(J)$ . E assim segue o resultado.  $\square$

**Lema 4.2.2** *Para  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \geq 1$  tal que o comprimento hiperbólico de qualquer  $I \in \mathcal{U}_n$  é pequeno,*

$$\text{hyp}(V_n, I) \leq \epsilon$$

*e também  $\frac{|f(I)|}{|f(V_n)|} \leq \epsilon$ , se  $n \geq n_0$ .*

*Demonstração.* Seja  $I \in \mathcal{U}_n$ , digamos que  $R_n|I = f^t|I$ . O Lema 4.2.1 estabelece a existência de um intervalo  $J \supset f(I)$  tal que  $f^{t-1} : (J, f(I)) \rightarrow (V_{n-1}, V_n)$  monótona e sobre. Para  $n$  grande vemos que  $V_n$  é um intervalo central muito pequeno em  $V_{n-1}$ , e tem comprimento hiperbólico muito pequeno. Como  $f$  tem Derivada Schwarziana negativa obtemos que  $f(I) \subset J$  tem comprimento hiperbólico muito pequeno. Observe que  $f^{-1}(J) \subset V_n$ , pois em caso contrário teríamos  $x_n \in f^{-1}(J)$  (ou  $\tau(x_n) \in f^{-1}(J)$ ), e

assim  $f(x_n) \in J$  (ou  $f(\tau(x_n)) \in J$ ). Mas como  $f^{t-1} : J \rightarrow V_{n-1}$  é monótona e sobre (Lema 4.2.1) teríamos que órbita de  $f(x_n)$  (ou a órbita de  $f(\tau(x_n))$ ) passaria através de  $V_{n-1}$ , o que é impossível pelo fato de que a órbita de  $\psi(x_{n-1}) = x_n$  não cruza  $V_{n-1}$  (como vimos anteriormente). Assim, para concluirmos o Lema basta olharmos para a pré-imagem do par  $(J, f(I))$  pela  $f$ .  $\square$

**Lema 4.2.3.** *Para  $i = 1, 2$  sejam  $(T_i, I_i)$  pares TI para  $(V_x, U_x)$  com tempos de transferência  $n_1$  e  $n_2$  respectivamente. Se  $T_2 \cap T_1 \neq \emptyset$  e  $n_2 \geq n_1$  então*

$$T_2 \subset T_1 \setminus I_1 \text{ ou } T_2 \subset I_1$$

e  $n_2 > n_1$ .

*Demonstração.* Do Lema 4.1.4 obtemos que  $T_2 \subset T_1$  e  $n_1 < n_2$ . Agora, suponha por contradição que  $T_2 \cap \partial I_1 \neq \emptyset$ . Sendo assim obtemos que  $\psi(x) \in f^{n_1}(T_2)$  (ou  $\tau(\psi(x)) \in f^{n_1}(T_2)$ ). Logo  $f^{n_2-n_1}(\psi(x)) \in V_x$  (ou  $f^{n_2-n_1}(\tau(\psi(x))) \in V_x$ ). Contradição.  $\square$



## Capítulo 5

# Condição de Somabilidade para Derivadas

Neste Capítulo provaremos o Teorema 1.2.1, a menos de uma Proposição cuja prova adiaremos para o próximo Capítulo.

Mostraremos que a somabilidade das raízes dos fatores de escala

$$\sum_{n \geq 1} (\sigma_n)^{1/2} < \infty$$

implica na Condição de Somabilidade sobre as Derivadas, dada por

$$\sum_{k \geq 1} |Df^k(f(c))|^{-1/2} < \infty,$$

que é suficiente, por [10], ver também [5], para a existência de uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua.

Primeiramente escolha  $n_0 \geq 1$  grande o suficiente de modo que valha a seguinte Proposição, que demonstraremos no Capítulo 6.

**Proposição 6.1.1** *Existem  $n_0 \geq 1$ ,  $\theta < 1$  e  $C > 0$  com a seguinte propriedade: se  $n \geq n_0$ ,  $x \in V_{n+1}$  e  $R_n^i(x) \notin V_{n+1}$  para  $i \leq s$ , então*

$$|Df^T(f(x))| \geq C^{-1} \cdot \rho_n \cdot \theta^{-(s-1)},$$

onde  $R_n^s(x) = f^T(x)$  e  $\rho_n = \min \{1/\sigma_{n-1}, 1/\sigma_n\}$ .

## 5.1 Decomposição de Telemann da Órbita Crítica

Seja

$$a = \sum_{\substack{n \geq n_0 \\ s \geq 0}} \frac{C^{1/2} \theta^{s/2}}{(\rho_n)^{1/2}} = \frac{1}{1 - \theta^{1/2}} \sum_{n \geq n_0} \frac{C^{1/2}}{(\rho_n)^{1/2}} < 1,$$

onde  $C$  e  $\theta$  são as constantes da Proposição 6.1.1. Temos  $a < 1$  pois:

$$\sum_{n \geq 1} (\sigma_n)^{1/2} < \infty$$

e

$$\left(\frac{1}{\rho_n}\right)^{1/2} \leq (\sigma_{n-1})^{1/2} + (\sigma_n)^{1/2}, \forall n \geq 1,$$

fazendo com que

$$\sum_{n \geq n_0} \frac{C^{1/2}}{(\rho_n)^{1/2}} \leq C^{1/2} \sum_{n \geq n_0} (\sigma_{n-1})^{1/2} + C^{1/2} \sum_{n \geq n_0} (\sigma_n)^{1/2} < \infty.$$

E assim, escolhendo  $n_0$  grande o suficiente teremos  $a < 1$  e poderemos também aplicar a Proposição 6.1.1.

Fixe  $k \geq 1$ . A estimativa para  $|Df^k(f(c))|$  é baseada na *decomposição de Telemann* da órbita crítica até o tempo  $k$ . Considere a órbita de  $f(c)$  até o tempo  $k - 1$ . Seja  $m \geq 0$  tal que  $V_{n_0+m}$  é o menor intervalo central que é intersectado por esse pedaço da órbita:

$$n_0 + m = \max \{j \geq 0 \mid \exists 1 \leq i \leq k, f^i(c) \in V_j\},$$

e o último momento de interseção é denotado por

$$k_m = \max \{1 \leq j \leq k \mid f^j(c) \in V_{n_0+m}\}.$$

Os momentos  $k_m \leq k_{m-1} \leq \dots \leq k_1 \leq k_0 \leq k$  são tais que  $k_i$  é o último momento em que a órbita passa por  $V_{n_0+i}$ : se  $\{k_i < j \leq k \mid f^j(c) \in V_{n_0+i-1}\} = \emptyset$  então  $k_{i-1} = k_i$ , caso contrário

$$k_{i-1} = \max \{k_i < j \leq k \mid f^j(c) \in V_{n_0+i-1}\} \text{ com } 1 \leq i \leq m.$$

Além disso defina  $k_{m+1} = 0$ .

Seja  $r(k) = k - k_0$  e se  $k_{i-1} \neq k_i$  seja

$$s_{i-1}(k) = \#\{k_i < j \leq k_{i-1} \mid f^j(c) \in V_{n_0+i-1}\}, 1 \leq i \leq m+1,$$

o número de retornos a  $V_{n_0+i-1}$ .

Aplicando a regra da cadeia a  $Df^k(f(c))$  obtemos

$$Df^k(f(c)) = Df^{r(k)}(f^{k_0}(f(c))) \cdot Df^{k_m}(f(c)) \cdot \prod_{i=0}^{m-1} Df^{k_i-k_{i+1}}(f^{k_{i+1}}(f(c))).$$

O primeiro fator pode ser estimado pelo Teorema 3.1.2. Os outros fatores podem ser estimados pela Proposição 6.1.1, isto é:

$$\begin{aligned} |Df^k(f(c))|^{-1/2} &\leq (C^{-1}\lambda^{r(k)}) \cdot \prod_{\substack{i \leq m \\ k_i \neq k_{i+1}}} C^{-1} \cdot \rho_{n_0+i} \cdot \theta^{-(s_i(k)-1)} \cdot \theta^{-1/2} \\ &\leq C^{1/2} \left( \frac{1}{\lambda^{1/2}} \right)^{r(k)} \cdot \prod_{\substack{i \leq m \\ k_i \neq k_{i+1}}} \frac{C^{1/2} (\theta^{1/2})^{s_i(k)-1}}{(\rho_{n_0+i})^{1/2}}. \end{aligned}$$

**Lema 5.1.1.** *Sejam  $s_i, r$  e  $s'_i, r'$  correspondentes à decomposição de Telemann de  $k$  e  $k'$ , respectivamente. Se  $k \neq k'$  então  $r \neq r'$  ou  $s_i \neq s'_i$  para algum  $i \geq 0$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $r = r'$  e  $s_i = s'_i$  para todo  $i \geq 1$ . Observe que  $f^{k_m}(c) = R_{n_0+m}^{s_m}(c)$ , mas também temos que  $f^{k'_m}(c) = R_{n_0+m}^{s'_m}(c)$ . Assim obtemos que  $k_m = k'_m$ . Agora repetimos esse argumento para mostrar que  $k_i = k'_i$  para  $0 \leq i \leq m$ . Em particular obtemos  $k_0 = k'_0$ . Logo

$$k' = k'_0 + r' = k_0 + r = k.$$

□

## 5.2 Prova da Condição de Somabilidade para Derivadas

O número  $a < 1$  foi definido no início deste capítulo. Seja  $\beta = 1/2$ . Temos

$$\sum_{k \geq 0} |Df^k(f(c))|^{-1/2} = \sum_{r \geq 0} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ r(k)=r}} |Df^k(f(c))|^{-1/2}$$

$$\leq \sum_{r \geq 0} C^\beta \cdot \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^r \cdot \sum_{\substack{k \geq 0 \\ r(k)=r}} \prod_{\substack{0 \leq i \leq m \\ k_i \neq k_{i+1}}} \frac{C^\beta (\theta^\beta)^{s_i(k)-1}}{(\rho_{n_0+i})^\beta}.$$

Observe que para cada  $r$  não existem dois produtos formados pelos mesmos fatores aparecendo no segundo somatório, pois em caso contrário deveríamos ter todos os  $s^i(k)$ 's iguais, o que não ocorre devido ao Lema 5.1.1.

Agora, para cada  $m \geq 0$ , temos que o termo

$$\prod_{\substack{0 \leq i \leq m \\ k_i \neq k_{i+1}}} \frac{C^\beta (\theta^\beta)^{s_i(k)-1}}{(\rho_{n_0+i})^\beta} = \underbrace{\frac{C^\beta (\theta^\beta)^{s_0(k)-1}}{(\rho_{n_0})^\beta} \cdot \frac{C^\beta (\theta^\beta)^{s_1(k)-1}}{(\rho_{n_0+1})^\beta} \cdots \frac{C^\beta (\theta^\beta)^{s_m(k)-1}}{(\rho_{n_0+m})^\beta}}_{m+1 \text{ fatores}} \quad (5.1)$$

é majorado por

$$a^{m+1} = \left( \sum_{\substack{n \geq n_0 \\ s \geq 0}} \frac{C^{1/2} \theta^{s/2}}{(\rho_n)^{1/2}} \right)^{m+1}.$$

Logo se expandirmos  $a^n$  veremos que a soma de todos os possíveis produtos diferentes podem ser estimados por  $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$

Assim

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} |Df^k(f(c))|^{-1/2} &\leq \sum_{r \geq 0} C^\beta \cdot \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^r \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + \dots) \\ &\leq \frac{1}{1-a} \sum_{r \geq 0} C^\beta \cdot \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^r \\ &\leq C^\beta \cdot \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-1/\lambda^\beta} < \infty. \end{aligned}$$

# Capítulo 6

## Derivada ao longo de Órbitas Recorrentes

### 6.1 Derivada ao longo de Órbitas Recorrentes

Seja  $\rho_n = \min\{1/\sigma_{n-1}, 1/\sigma_n\}$ . Neste Capítulo provaremos a

**Proposição 6.1.1.** *Existem  $n_0 \geq 1$ ,  $\theta < 1$  e  $C > 0$  com a seguinte propriedade: se  $n \geq n_0$ ,  $x \in V_{n+1}$  e  $R_n^i(x) \notin V_{n+1}$  para  $i \leq s$ , então*

$$|Df^T(f(x))| \geq C^{-1} \cdot \rho_n \cdot \theta^{-(s-1)},$$

onde  $R_n^s(x) = f^T(x)$ .

### 6.2 Lemas Técnicos

Uma vez que a aplicação  $f$  que estamos trabalhando aqui é de classe  $C^3$ ,  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) \neq 0$ , de acordo com a fórmula de Taylor temos

$$f(x) = f(c) + \frac{f''(c)}{2} \cdot (x - c)^2 + r(x),$$

com  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{r(x)}{(x - c)^2} = 0$ . Sendo  $c$  o ponto crítico de  $f$  e como  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{r(x)}{(x - c)^2} = 0$ , temos que existe uma constante  $0 < A < \infty$  tal que

$$A^{-1} \cdot |x - c|^2 \leq |f(x) - f(c)| = \left| \frac{f''(c)}{2} \cdot (x - c)^2 + r(x) \right| \leq A \cdot |x - c|^2$$

e

$$A^{-1} \cdot |x - c| \leq |Df(x)| \leq A \cdot |x - c|.$$

Assim sendo, definimos as constantes  $M$  e  $E$  dadas por

$$M = \sup_n \left\{ \frac{1}{|V_n|^2} \cdot \max \{|f(x) - f(c)| : x \in \overline{V_n}\} \right\} < \infty,$$

$$E = \inf_n \left\{ \frac{1}{|V_n|} \cdot \min \{|Df(x)| : x \in [0, 1] \setminus V_n\} \right\}.$$

A prova da Proposição 6.1.1 usará os Lemas e notações que seguem. Fixe  $x \in V_{n+1}$  e  $t_i$  tal que  $R_n^i(x) = f^{t_i}(x)$ , com  $i \leq s$  (ou seja,  $t_s = T$ ).

**Lema 6.2.1.** *Para cada  $i \leq s$  existe um intervalo  $S_i \ni f(x)$  tal que*

$$f^{t_i-1} : S_i \rightarrow V_n$$

*é monótona e sobre.*

*Demonstração.* O Lema 4.2.1 aplicado a  $V_{n+1} \in \mathcal{U}_n$  estabelece a existência de  $S_1$ . A prova seguirá por indução. Assuma que exista  $S_i \ni f(x)$ . Então  $f^{t_i-1} : S_i \rightarrow V_n$  é monótona e sobre. Além disso seja  $I_{i+1} \in \mathcal{U}_n$  tal que  $f^{t_i-1}(f(x)) \in I_{i+1}$ . Como  $f^{t_i-1}(f(x)) \notin V_{n+1}$  temos que  $I_{i+1} \neq V_{n+1}$  e  $R_n : I_{i+1} \rightarrow V_n$  é monótona e sobre. Assim obtemos  $S_{i+1}$  do seguinte modo:  $S_{i+1} = f^{-(t_i-1)}(I_{i+1}) \cap S_i$ . Além disso  $f^{t_{i+1}-1} = R_n \circ f^{t_i-1} : S_{i+1} \rightarrow V_n$  é monótona e sobre. Como ilustração veja a Figura 6.1.  $\square$

Observe que  $f^{t_i-1-1}(S_i) = I_i \in \mathcal{U}_n$ .

O próximo Lema 6.2.2 nos diz que se a distorção da aplicação  $f^{t_i-1} : S_i \rightarrow V_n$  é grande o suficiente então a componente  $I_i$  não pode estar muito longe do ponto crítico.

**Lema 6.2.2.** *Existem  $n_0 \geq 1$  e  $K < \infty$  com a seguinte propriedade. Se a distorção de*

$$f^{t_i-1} : S_i \rightarrow V_n \text{ com } n \geq n_0$$

*é maior que  $K$  então*

$$I_i \subset \left( u_n + \frac{1}{8}|V_n|, \tau(u_n) - \frac{1}{8}|V_n| \right).$$

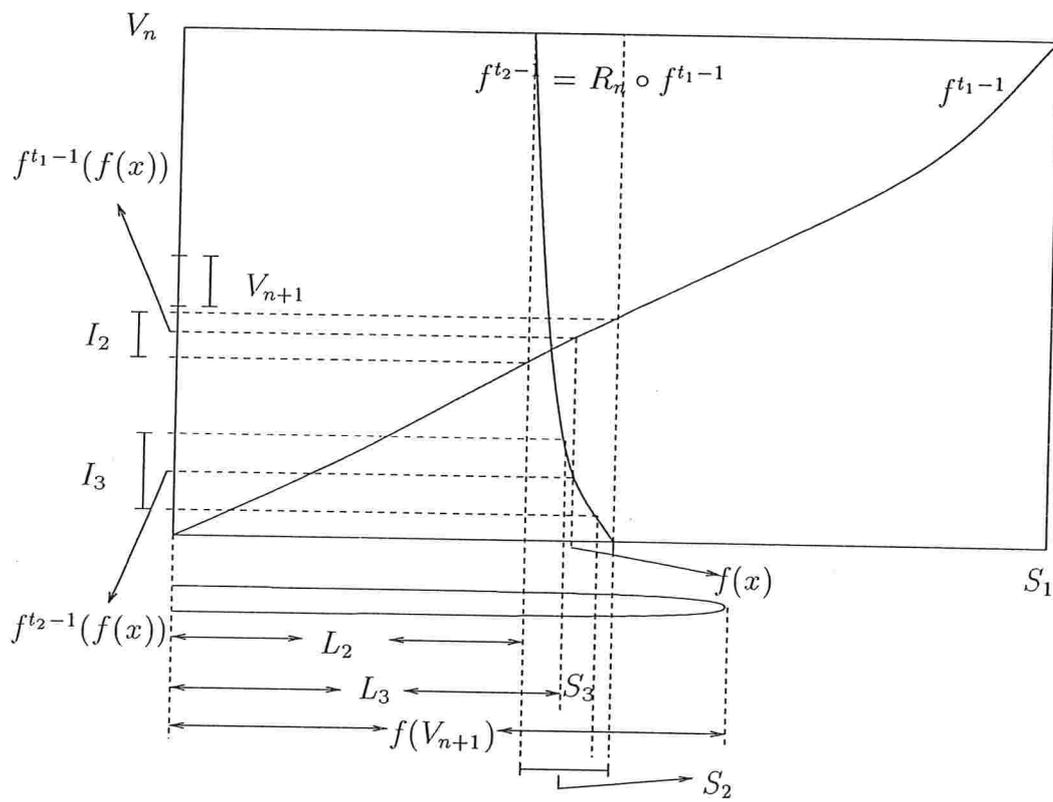


Figura 6.1: Gráficos ilustrativos de  $f^{t_1-1}$  e  $f^{t_2-1}$ .

*Demonstração.* O Lema 4.2.1 estabelece que  $f^{t_1-1} : S_1 \rightarrow V_n$  tem uma extensão monótona até  $V_{n-1}$  (a aplicação é essencialmente linear para  $n$  grande o suficiente). Assim tomemos  $i \geq 2$ , e considere a seguinte decomposição

$$f^{t_i-1}|_{S_i} = f^{t_i-t_{i-1}-1}|_{f(I_i)} \circ f|_{I_i} \circ f^{t_{i-1}-1}|_{S_i}.$$

O fator  $f^{t_{i-1}-1}|_{S_i}$  tem uma extensão monótona até  $V_n$ , pois do Lema 6.2.1 temos que  $f^{t_{i-1}-1} : S_{i-1} \rightarrow V_n$  é monótona e sobre, e além disso  $S_i = f^{-(t_{i-1}-1)}(I_i) \cap S_{i-1} \subset S_{i-1}$  (para  $n$  grande o suficiente, essa aplicação também é essencialmente linear, pois  $I_i$  tem comprimento hiperbólico muito pequeno dentro de  $V_n$  - de acordo com o Lema 4.2.2 e a Proposição 2.1.6). Já o fator  $f^{t_i-t_{i-1}-1}|_{f(I_i)}$  tem uma extensão monótona até  $V_{n-1}$  (Lema 4.2.1 - basta olhar para a aplicação  $f^{t_i-1} : S_i \rightarrow V_n$ ; essa aplicação também é essencialmente linear pelos mesmos argumentos, citados acima, que garantem que a aplicação  $f^{t_{i-1}-1} : S_{i-1} \rightarrow V_n$  o é). Com isso a distorção de  $f^{t_i-1}|_{S_i}$  pode ser causada apenas pelo fator  $f|_{I_i}$  e somente se  $I_i$  estiver muito próximo do ponto crítico,  $c$ . Como o Lema 4.2.2 assegura que  $I_i$  tem comprimento hiperbólico muito pequeno dentro de  $V_n$ , temos que existe algum  $n_0 \geq 1$  tal que  $I_i \subset (u_n + \frac{1}{8}|V_n|, \tau(u_n) - \frac{1}{8}|V_n|)$ , se  $n \geq n_0$ .  $\square$

**Lema 6.2.3.** *Dado  $\theta < 1$  existem  $n_0 \geq 1$  e  $C < \infty$  tais que*

$$|S_i| \leq C \cdot |V_{n+1}|^2 \cdot \theta^{i-1},$$

para  $n \geq n_0$  e  $i \geq 2$ .

*Demonstração.* Observe que  $f(c) \in S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_i$  e  $f(V_{n+1}) \subset S_1$ ,  $i \geq 2$ . Seja  $L_j \subset S_1$  a componente conexa de  $S_1 \setminus S_j$  tal que  $L_j \subset f(V_{n+1})$ ,  $2 \leq j \leq i$  (ver Figura 6.1). Para  $n$  grande o suficiente obtemos da construção do Lema 6.2.1, do Lema 4.2.2 e da Proposição 2.1.6 que o comprimento hiperbólico de  $S_j$  dentro de  $S_{j-1}$  é muito pequeno,  $2 \leq j \leq i$ . Realmente: seja  $R_j$  a componente de  $S_1 \setminus S_j \cup L_j$ , para  $2 \leq j \leq i$ . Pelo Lema 4.2.2 sabemos que dado  $0 < \epsilon$  existe  $n_0 \geq 1$  tal que

$$\text{hyp}(V_n, I) \leq \epsilon, \forall I \in \mathcal{U}_n,$$

se  $n \geq n_0$ .

Escolhendo  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno teremos que

$$D(V_n, I) \leq \theta, \forall I \in \mathcal{U}_n,$$

para algum  $0 < \theta (= \exp \epsilon - 1) < 1$ .

Agora, como  $f^{t_1-1}$  tem derivada Schwarziana negativa temos, da Proposição 2.1.6, que

$$D(S_{j-1}, S_j) \leq \theta,$$

para  $2 \leq j \leq i$ . Daí seguirá que

$$\frac{|S_j|}{|L_j|} \leq \theta \frac{|S_{j-1}|}{|L_{j-1}|}, \quad (6.1)$$

para  $2 \leq j \leq i$ .

Para mostrar 6.1, notemos primeiro que

$$D(S_1, S_2) = \frac{|S_1| \cdot |S_2|}{|L_2| \cdot |R_2|} \leq \theta \Rightarrow \frac{|S_2|}{|L_2|} \leq \frac{|R_2|}{|S_1|} \cdot \theta \Rightarrow \frac{|S_i|}{|L_i|} \leq \frac{|R_2|}{|S_1|} \cdot \theta,$$

para  $i \geq 2$ .

Agora, sejam  $l_j$  e  $r_j$ ,  $2 \leq j \leq i$ , as componentes de  $S_{j-1} \setminus S_j$ , à esquerda e à direita, respectivamente. Como  $\frac{|L_{j-1}|}{|L_j|} \leq 1$  basta mostrarmos que  $\frac{|S_j|}{|S_{j-1}|} \leq \theta$ . Sendo assim temos:

$$\frac{|S_j|}{|S_{j-1}|} = \frac{|S_j| \cdot |S_{j-1}|}{|S_{j-1}| \cdot |S_{j-1}|} \leq \frac{|S_j| \cdot |S_{j-1}|}{|l_j| \cdot |r_j|} = D(S_{j-1}, S_j) \leq \theta.$$

A desigualdade 6.1 implica que

$$\begin{aligned} |S_i| &\leq b \cdot \theta^{i-1} \cdot |L_i| \\ &\leq b \cdot \theta^{i-1} \cdot |f(V_{n+1})| \\ &\leq M \cdot \theta^{i-1} \cdot |V_{n+1}|^2, \end{aligned}$$

pois  $b = \frac{|R_2|}{|S_1|} \leq 1$ .

□

**Lema 6.2.4.** *Existe  $C > 0$  tal que*

$$|Df_{|S_1}^{t_1-1}| \geq C^{-1} \cdot \frac{|V_{n-1}|}{|V_n|^2}.$$

*Agora, se  $|R_n(V_{n+1})| = |f^{t_1}(V_{n+1})| \geq \frac{1}{10}|V_n|$  existe  $n_0 \geq 1$  tal que*

$$|Df_{|S_1}^{t_1-1}| \geq C^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{|V_{n+1}|^2},$$

*para  $n \geq n_0$ .*

*Demonstração.* Seja  $K \supset f(V_{n+1})$  o intervalo que é mapeado monotonamente sobre  $V_{n-1}$  por  $f^{t_1-1}$ . Observe que  $f^{-1}(K) \subset V_n$ . Isto segue do fato que a órbita de  $f(u_n)$  nunca passa por  $V_{n-1}$ , o qual já observamos anteriormente. Seja  $K' \subset K$  tal que  $f^{t_1-1} : K' \rightarrow (u_{n-1} + \frac{1}{8}|V_{n-1}|, \tau(u_{n-1}) - \frac{1}{8}|V_{n-1}|)$  é monótona e sobre. Esta aplicação tem distorção limitada uniformemente por uma constante  $C' > 0$ , pois ela possui uma extensão monótona até  $V_{n-1}$ , isto é

$$\frac{|Df^{t_1-1}(x)|}{|Df^{t_1-1}(y)|} \leq C', \forall x, y \in K'.$$

Além disso vale que  $f^{-1}(K') \subset f^{-1}(K) \subset V_n$ , pois  $K' \subset K$ . Sendo  $K'' = f^{-1}(K') \subset V_n$ , temos

$$f(K'') \subset f(V_n) \Rightarrow |f(K'')| \leq |f(V_n)| \leq M \cdot |V_n|^2.$$

Como  $f(c) \in S_1$  e  $K'' = f^{-1}(K')$  é da ordem de  $V_n$  segue que

$$|K'| \leq d \cdot |f(K'')|,$$

para alguma constante  $0 < d < \infty$  (ver Figura 6.2).

Pelo Teorema do Valor Médio existe  $z \in K'$  tal que

$$Df^{t_1-1}(z) = \frac{|f^{t_1-1}(K')|}{|K'|}.$$

Seja  $w \in S_1$ . Temos:

$$\begin{aligned} Df^{t_1-1}(w) &= \frac{Df^{t_1-1}(w)}{Df^{t_1-1}(z)} \cdot Df^{t_1-1}(z) \geq (C')^{-1} \cdot \frac{|f^{t_1-1}(K')|}{|K'|} \\ &\geq (C' \cdot d \cdot M)^{-1} \cdot \frac{|f^{t_1-1}(K')|}{|V_n|^2} \geq C^{-1} \cdot \frac{|V_{n-1}|}{|V_n|^2}, \end{aligned}$$

onde  $C = \frac{4 \cdot C' \cdot d \cdot M}{3}$ .

Assim a derivada  $|Df_{|S_1}^{t_1-1}|$  pode ser estimada por

$$|Df_{|S_1}^{t_1-1}| \geq C^{-1} \cdot \frac{|V_{n-1}|}{|V_n|^2}.$$

Agora, se  $|R_n(V_{n+1})| = |f^{t_1}(V_{n+1})| \geq \frac{1}{10}|V_n|$ , considere a aplicação  $f^{t_1-1} : S_1 \rightarrow V_n$ . Do Lema 4.2.1 sabemos que esta aplicação tem uma extensão monótona até  $V_{n-1}$ . A

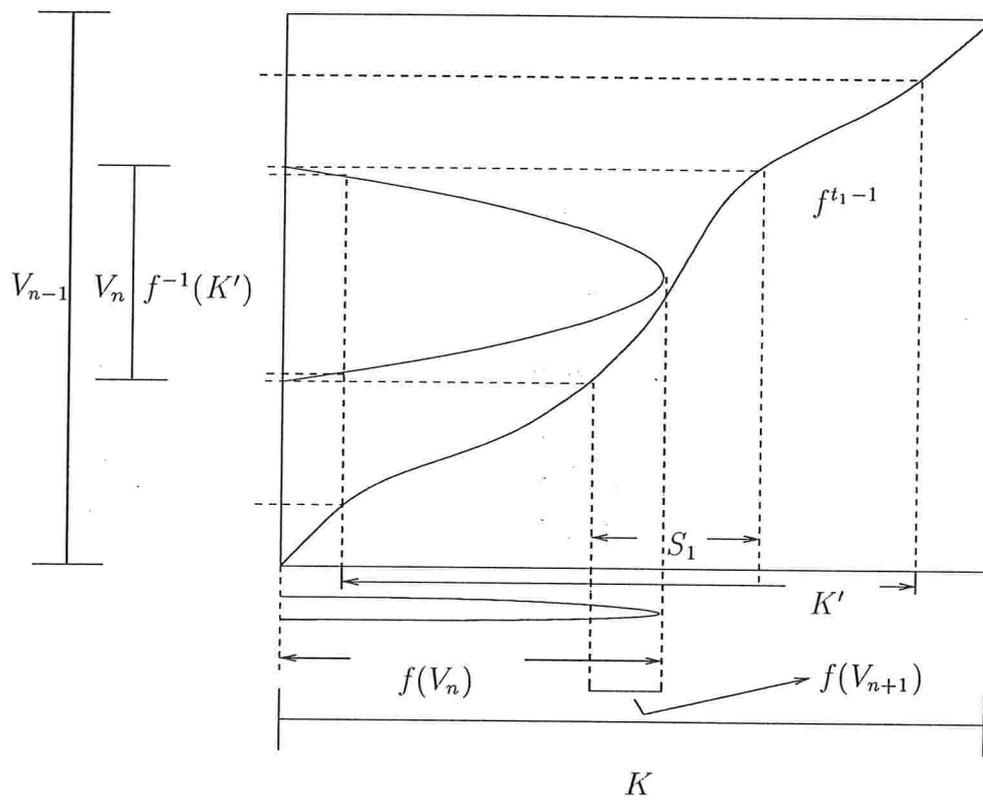


Figura 6.2: Gráfico ilustrativo de  $f^{t_1-1}$ ,  $K$  e  $K'$ .

aplicação é essencialmente linear pois  $\tau(u_{n-1}) \gg \tau(u_n)$  se  $n$  é grande o suficiente. Assim a derivada  $|Df_{|S_1}^{t_1-1}|$  é essencialmente constante e pode ser estimada como segue. Pelo Teorema do Valor Médio existe  $z \in f(V_{n+1})$  tal que

$$Df^{t_1-1}(z) = \frac{|R_n(V_{n+1})|}{|f(V_{n+1})|}.$$

Seja  $w \in S_1$ . Temos que

$$Df^{t_1-1}(w) = \frac{Df^{t_1-1}(w)}{Df^{t_1-1}(z)} \cdot Df^{t_1-1}(z).$$

Uma vez que  $f^{t_1-1} : S_1 \rightarrow V_n$  possui extensão monótona e sobre até  $V_{n-1}$ , sua distorção é uniformemente limitada por uma constante  $C' > 0$ . Logo

$$Df^{t_1-1}(w) \geq (C')^{-1} \cdot Df^{t_1-1}(z) = (C')^{-1} \cdot \frac{|R_n(V_{n+1})|}{|f(V_{n+1})|} \stackrel{\text{(hipótese)}}{\geq} \frac{(C')^{-1}}{10} \frac{|V_n|}{|f(V_{n+1})|}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{|f(V_{n+1})|} &\geq \frac{1}{\max\{|f(x) - f(c)| : x \in \overline{V_{n+1}}\}} \\ &\geq \frac{1}{|V_{n+1}|^2 \cdot \sup_n \frac{1}{|V_{n+1}|^2} \cdot \max\{|f(x) - f(c)| : x \in \overline{V_{n+1}}\}} \end{aligned}$$

segue que

$$|Df_{|S_1}^{t_1-1}| \geq C^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{|V_{n+1}|^2},$$

onde  $C = C' \cdot 10 \cdot M$ . □

### 6.3 Prova da Proposição 6.1.1

Primeiramente vamos assumir que  $s = 1$ . Assim basta aplicar o Lema 6.2.4. Se  $|R_n(V_{n+1})| \geq \frac{1}{10}|V_n|$  então

$$\begin{aligned} |Df^{t_1}(f(x))| &= |Df^{t_1-1}(f(x))| \cdot |Df(f^{t_1-1}(f(x)))| \geq (C')^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{|V_{n+1}|^2} \cdot |Df(f^{t_1}(x))| \\ &\geq C^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{|V_{n+1}|^2} \cdot |V_{n+1}| = C^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{|V_{n+1}|} \geq C^{-1} \cdot \rho_n, \end{aligned}$$

onde usamos que  $R_n(x) = f^{t_1}(x) \notin V_{n+1}$  e  $C = \frac{C'}{E}$ .

Caso  $|R_n(V_{n+1})| < \frac{1}{10}|V_n|$ , temos que

$$\begin{aligned} |Df^{t_1}(f(x))| &= |Df^{t_1-1}(f(x))| \cdot |Df(f^{t_1-1}(f(x)))| \geq (C')^{-1} \cdot \frac{|V_{n-1}|}{|V_n|^2} \cdot |Df(f^{t_1}(x))| \\ &\geq C^{-1} \cdot \frac{|V_{n-1}|}{|V_n|^2} \cdot |V_n| = C^{-1} \cdot \frac{|V_{n-1}|}{|V_n|} \geq C^{-1} \cdot \rho_n, \end{aligned}$$

onde usamos que  $f^{t_1-1}(f(x)) \in R_n(V_{n+1})$ , o qual está próximo da fronteira de  $V_n$ , e  $C = \frac{C'}{E}$ . Logo o caso  $s = 1$  está terminado.

Agora vamos assumir que  $s \geq 2$ . A prova será feita em dois casos. Seja  $n \geq n_0 \geq 1$  grande o suficiente de modo que os Lemas 6.2.2 e 6.2.3 possam ser aplicados. Sejam  $K < \infty$  a constante do Lema 6.2.2 e  $\theta < 1$  a constante do Lema 6.2.3.

**Caso I :**  $f^T(x) = R_n^s(x) \in (u_n + \frac{1}{8}|V_n|, \tau(u_n) - \frac{1}{8}|V_n|)$  - Lembremos que  $R_n^i(x) \notin V_{n+1}$  para  $i \leq s$ . Seja  $H \subset S_s$  tal que  $f(x) \in H$  e  $f^{T-1} = f^{t_{s-1}} : H \rightarrow (u_n + \frac{1}{8}|V_n|, \tau(u_n) - \frac{1}{8}|V_n|)$  é monótona e sobre. Esta aplicação tem uma extensão monótona até  $V_n$ . Assim ela tem distorção limitada uniformemente por uma constante  $C' > 0$ , ou seja

$$(C')^{-1} \leq \frac{|Df^{T-1}(x)|}{|Df^{T-1}(y)|} \leq C', \forall x, y \in H.$$

Logo

$$\begin{aligned} |Df^T(f(x))| &= |Df(f^{T-1}(f(x)))| \cdot |Df^{T-1}(f(x))| \\ &\geq (C')^{-1} \cdot |Df(f^T(x))| \cdot \frac{|f^{T-1}(H)|}{|H|} \\ &\geq (C')^{-1} \cdot |Df(f^T(x))| \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{|V_n|}{|S_s|} \\ &\geq \frac{3}{4} \cdot (C')^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{P \cdot \theta^{s-1} \cdot |V_{n+1}|^2} \cdot |V_{n+1}| \cdot E \\ &\geq C^{-1} \cdot \rho_n \cdot \theta^{-(s-1)}, \end{aligned}$$

onde  $P$  é a constante do Lema 6.2.3 e  $C = \frac{4C'P}{3E}$ .

**Caso II :**  $f^T(x) = R_n^s(x) \notin (u_n + \frac{1}{8}|V_n|, \tau(u_n) - \frac{1}{8}|V_n|)$  - Se a distorção de  $f^{T-1} : S_s \rightarrow V_n$  é limitada por  $K$  então podemos usar o mesmo argumento do Caso I, ou seja:

$$\begin{aligned} |Df^T(f(x))| &= |Df(f^{T-1}(f(x)))| \cdot |Df^{T-1}(f(x))| \\ &\geq (C')^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{|S_s|} \cdot |V_{n+1}| \\ &\geq (C')^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{P \cdot \theta^{s-1} \cdot |V_{n+1}|^2} \cdot |V_{n+1}| \\ &\geq C^{-1} \cdot \rho_n \cdot \theta^{-(s-1)}, \end{aligned}$$

onde  $C' = \frac{K}{E}$ ,  $P$  é a constante do Lema 6.2.3 e  $C = C'P$ .

Por outro lado, se a distorção for maior do que  $K$  temos do Lema 6.2.2 que  $I_s \subset (u_n + \frac{1}{8}|V_n|, \tau(u_n) - \frac{1}{8}|V_n|)$ . Daí

$$\begin{aligned} |Df^T(f(x))| &= |Df^{t_{s-1}}(f(x))| \cdot |Df^{T-t_{s-1}}(f^{t_{s-1}}(f(x)))| \\ &\geq C^{-1} \cdot \rho_n \cdot \theta^{-(s-2)} \cdot |Df^{T-t_{s-1}}(f^{t_{s-1}}(f(x)))|. \end{aligned}$$

Para  $s - 1 > 1$  obtemos esta estimativa do Caso I: basta ver na demonstração do Lema 6.2.1 que  $f^{t_{s-1}-1}(S_s) = I_s$  e  $R_n^{s-1}(x) = f^{t_{s-1}}(x) = f^{t_{s-1}-1}(f(x)) \in I_s \subset (u_n + \frac{1}{8}|V_n|, \tau(u_n) - \frac{1}{8}|V_n|)$ . Já quando  $s - 1 = 1$  segue da prova da Proposição 6.1.1 para  $s = 1$ .

O último fator pode ser estimado usando o fato de que  $f^{T-t_{s-1}-1} : f(I_s) \rightarrow V_n$  tem uma extensão monótona até  $V_{n-1}$  (basta observar que  $I_s \in \mathcal{U}_n$ ,  $f(I_s) = f(f^{t_{s-1}-1}(S_s)) = f^{t_{s-1}}(S_s)$ , olhar para a aplicação  $f^{t_{s-1}} : S_s \rightarrow V_n$  que é monótona e sobre e utilizar o Lema 4.2.1). Ela é essencialmente afim e sua derivada pode ser estimada por

$$|Df^{T-t_{s-1}-1}|_{f(I_s)}| \geq C^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{|f(I_s)|} \geq C^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{\epsilon \cdot |f(V_n)|},$$

onde  $\epsilon > 0$  é dado pelo Lema 4.2.2 e  $C > 0$  é a constante da limitação uniforme da distorção. Tomando  $n_0 \geq 1$  grande o suficiente podemos assumir que  $\epsilon > 0$  é arbitrariamente pequeno.

Observe que

$$|Df(f^{T-1}(f(x)))| \geq E \cdot |V_n|,$$

pois  $f^{T-1}(f(x)) \notin (u_n + \frac{1}{8}|V_n|, \tau(u_n) - \frac{1}{8}|V_n|)$ .

Podemos finalizar a estimativa para  $|Df^T(f(x))|$  observando que

$$\begin{aligned} |Df^{T-t_{s-1}}(f^{t_{s-1}}(f(x)))| &= |Df^{T-t_{s-1}-1}(f^{t_{s-1}}(f(x)))| \cdot |Df(f^{T-1}(f(x)))| \\ &\geq \left(\frac{C\epsilon}{E}\right)^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{|f(V_n)|} \cdot |V_n| \\ &\geq \left(\frac{C\epsilon M}{E}\right)^{-1} \cdot \frac{|V_n|}{|V_n|^2} \cdot |V_n| \\ &= \left(\frac{C\epsilon M}{E}\right)^{-1} \\ &\geq \theta^{-1}. \end{aligned}$$

# Capítulo 7

## Parâmetros

Nesse Capítulo daremos um esboço da demonstração do Teorema 7.1.1 abaixo. Mas a prova completa pode ser encontrada em [2] e [1].

### 7.1 Resultados no Parâmetro

**Teorema 7.1.1.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma função  $C^3$ ,  $S$ -unimodal, Misiurewicz, não-renormalizável e sem atratores periódicos. Seja  $(f_a)_a$  uma família  $C^3$  com  $f_0 = f$ , transversal em  $a = 0$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que*

1. *para quase todo  $a \in [-\epsilon, \epsilon]$ ,  $f_a$  é caótica ou renormalizável;*
2. *parâmetros para os quais  $f_a$  é renormalizável constituem uma união enumerável de intervalos fechados que são densos em  $[-\epsilon, \epsilon]$ ;*

Além desse Teorema 7.1.1, vamos mostrar que parâmetros para os quais  $f_a$  é caótica formam um conjunto que tem medida positiva.

Dizemos que  $(f_a)_a$  é transversal em  $a = 0$  se

$$\frac{d}{da}(f_a(c_a) - w_a) \neq 0,$$

sendo  $c_a$  a continuação do ponto crítico  $c$  e  $w_a$  a continuação de  $w = f(c)$ , as quais estão bem definidas pelo Teorema da Função Implícita. Melhor dizendo, da Teoria Hiperbólica, sabe-se que para  $g$  suficientemente próxima de  $f$  (na topologia  $C^1$ ), existe um conjunto

compacto invariante  $g$ -hiperbólico  $\Lambda_g$  tal que  $f|_{\Lambda_f}$  e  $g|_{\Lambda_g}$  são conjugadas por  $h_g : \Lambda \rightarrow \Lambda_g$ . A função  $g \mapsto \Lambda_g$  é de fato  $C^1$  e é chamada de *continuação hiperbólica* de  $\Lambda$ . Tomamos  $f$  em uma família  $C^3$ ,  $(f_a)_a$ , onde  $f_0 = f$ , e chamamos de  $w$  o ponto pertencente a  $\Lambda$  tal que  $w = f(c)$ . Como  $a$  varia,  $w$  tem sua continuação  $w_a = h_{f_a}(w)$  e o ponto crítico  $c$  tem sua continuação  $c_a$ , a qual está bem definida pelo Teorema da Função Implícita, usando que  $c$  é quadrático.

Na teoria de sistemas dinâmicos há uma crença de que um típico sistema dinâmico tem o comportamento bem entendido. Esta crença foi precisamente formulada na Conjectura de Palis [9]. Há alguns resultados que estabelecem esse entendimento para certas classes de aplicações. Por exemplo, Lyubich provou que na família quadrática  $f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , com  $f_a(x) = 4ax(1 - x)$  onde  $a \in [0, 1]$ , para quase todo parâmetro  $a \in [0, 1]$  ou  $f_a$  é caótica ou  $f_a$  possui uma órbita periódica atratora hiperbólica. As idéias da Subseção 7.5.1 estão contidas na demonstração desse resultado, baseadas no uso do conhecido Lema de Borel-Cantelli.

Em [13] e [14] foi mostrado que os parâmetros hiperbólicos são densos na família quadrática. Além disso, algum tempo antes, em [15] foi mostrado também que, na família quadrática, os parâmetros caóticos têm medida positiva.

## 7.2 Renormalização Generalizada

Aplicaremos os conceitos do Capítulo 4 não apenas para aplicações  $S$ -unimodais  $f$  do intervalo  $[0, 1]$ , mas para famílias de aplicações  $S$ -unimodais  $(f_a)_{a \in J}$  do intervalo  $[0, 1]$ , onde  $J$  é um intervalo. No entanto, adotaremos um ponto de vista ligeiramente diferente. Sendo assim, consideremos uma tal aplicação  $f = f_a$ , para um parâmetro  $a \in J$  fixado, e suporemos que para um certo intervalo bom  $V = V_x$  o gráfico da sua aplicação de primeiro retorno,  $R = R_x$ , a  $V_x$  se comporte como mostra a Figura 7.1.

Consideremos agora a coleção  $\mathcal{B}_0$  de todas as pré-imagens  $\beta$  de  $U$  pela aplicação  $R$ , tomadas fora de  $U$ . Em seguida definimos sobre  $\mathcal{B}_0 \cup U$  a seguinte aplicação  $\Phi_0$ : para cada  $\beta \in \mathcal{B}_0$ ,  $\Phi_0|_{\beta}$  é definida como a potência de  $R$  que envia  $\beta$  difeomorficamente sobre  $U$  e  $\Phi_0|_U = R|_U$ . Com isso o gráfico de  $\Phi_0$  fica da forma mostrado na Figura 7.2.

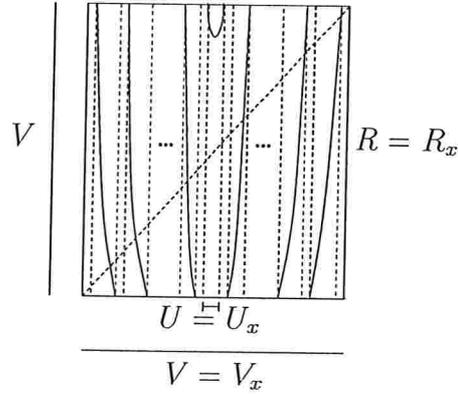


Figura 7.1: Aplicação de primeiro retorno a  $V = V_x$ .

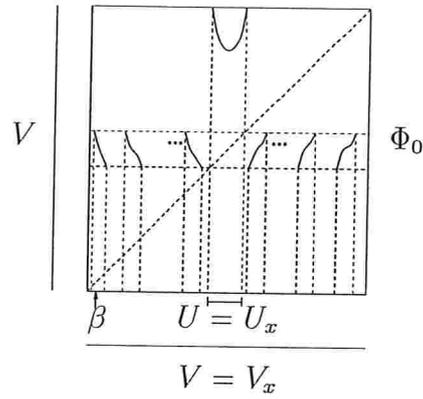


Figura 7.2: Aplicação de Renormalização.

Seja  $1 \leq \text{esc} \leq \infty$  o primeiro inteiro positivo tal que  $\Phi_0^{\text{esc}}(c) \in V \setminus U$ . A função renormalizada  $\Phi' = \text{Ren}(\Phi_0)$  será definida se, e somente se,  $\text{esc} < \infty$  e  $\Phi_0^{\text{esc}}(c) \in \text{int}(\beta)$ , para algum  $\beta \in \mathcal{B}_0$ , e neste caso colocamos

$$\gamma = \Phi_0^{-\text{esc}}(\beta)$$

como o intervalo central do domínio de  $\Phi'$  e  $\Phi'|_\gamma = \Phi_0|_\beta \circ \Phi_0^{\text{esc}}|_\gamma$ . Além de  $\gamma$ , o domínio de  $\Phi'$  é composto pela união de todas as pré-imagens de  $\gamma$  pela aplicação  $\Phi_0$  tomadas fora de  $\gamma$  e contidas em  $U$ . Vamos denotar esta coleção de intervalos por  $\mathcal{B}'$ . Para cada  $\beta' \in \mathcal{B}'$  existe uma potência de  $\Phi_0$  que envia  $\beta'$  difeomorficamente sobre  $\gamma$ , e esta será exatamente a definição de  $\Phi'|_{\beta'}$ . Analogamente podemos construir a renormalização de  $\Phi'$ . Assim observamos que a partir de uma aplicação  $\Phi_0$  com domínio

$$\text{dom}(\Phi_0) = \gamma_0 \cup \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_0} \beta \subset \gamma_{-1}$$

(onde  $\gamma_0$  corresponde a  $U$  e  $\gamma_{-1}$  corresponde a  $V = V_x$ ), obtemos, indutivamente, uma seqüência de aplicações  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ , onde  $\Phi_n = \text{Ren}(\Phi_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ . É claro que para podermos obter essa seqüência de aplicações estamos admitindo que para cada  $n$  a posição do valor crítico implica que  $\Phi_n$  é renormalizável nesse sentido. Esse processo gera uma seqüência decrescente de intervalos encaixados  $\gamma_{-1} \supset \gamma_0 \supset \dots \supset \gamma_n \supset \dots$  e coleções  $\mathcal{B}_n$  de intervalos dois a dois disjuntos e contidos em  $\gamma_{n-1}$ , para todo  $n \geq 0$ .

Como vimos anteriormente, para cada  $n \geq 0$ , existe um número  $\text{esc}_n \geq 1$  que é o primeiro inteiro positivo tal que  $\Phi_n^{\text{esc}_n}(c) \in \gamma_{n-1} \setminus \gamma_n$ . Assim diz-se que  $\Phi_n$  tem um *retorno central* se  $\text{esc}_n > 1$ , isto é,  $\Phi_n(c) \in \gamma_n$ , e um *retorno não-central* em caso contrário (assim como no Capítulo 4).

A menos de uma mudança afim de coordenadas daqui pra frente estaremos assumindo que o ponto crítico é o zero, 0, ao invés de  $c$ .

Para maior facilidade chamaremos

$$H_n = \Phi_n|_{\gamma_n},$$

o *ramo central* de  $\gamma_n$ , e para cada  $\beta \in \mathcal{B}_n$  seja  $B : \beta \rightarrow \gamma_n$  o difeomorfismo  $B = \Phi_n|_\beta$ .

Esse procedimento, assim como a construção sucessiva de intervalos bons  $V_n$  com suas transformações de primeiro retorno  $R_n$ , feita no Capítulo 4, leva o nome de *Renormalização Generalizada* (ver [11] e [12]).

### 7.3 Renormalização Generalizada em Famílias

Vamos descrever o processo de renormalização para famílias, em vez de um parâmetro fixado. Iniciamos com um intervalo de parâmetros  $J_0$  onde  $\Phi_0 = \Phi_{0,a}$  está definido.

Para ter uma idéia, tome por exemplo  $(f_a)_a$  como sendo a família quadrática e escolha  $J_0 = A_M$ , onde

$$A_M = \{a; f_a^j(0) \notin V = V_a, \forall 0 < j < M \text{ e } f_a^M(0) \in V = V_a\},$$

onde  $V = V_a$  é o intervalo bom cujos extremos são o ponto fixo atrator à direita de  $c$  e sua outra pré-imagem. Esse intervalo  $A_M$  corresponde aos parâmetros  $a$  para os quais a aplicação  $\Phi_0 = \Phi_{0,a}$  apresenta o mesmo comportamento como mostrado na Figura 7.1, isto é, com o mesmo número de ramos (respeitando a monotonicidade) mas notando que ao variarmos o parâmetro  $a$  em  $A_M = J_0$  a imagem do ramo central irá percorrer todo o intervalo  $V = V_a$ . E lembrando que se  $a > \sup \{A_M = J_0\}$  então aparecerá pelo menos mais dois ramos na Figura 7.1.

Embora o domínio de  $\Phi_0$  ( $\text{dom}(\Phi_0)$ ) possa variar com  $a$ , cada componente conexa do  $\text{dom}(\Phi_0)$  tem uma continuação definida para todo  $a \in J_0$ . A próxima geração  $\Phi_1$  é definida somente para os parâmetros  $a$  tais que  $H_0^{\text{esc}_0}(0) \in \text{int}(\beta)$ , para algum  $\beta \in \mathcal{B}_0$ . Portanto a família  $\Phi_1$  é definida para parâmetros em uma união de intervalos e cada intervalo dentro das componentes conexas do domínio sempre admitem uma continuação. Todas as componentes conexas do  $\text{dom}(\Phi_1)$  se encolhem em um ponto quando  $H_0^{\text{esc}_0}(0)$  se aproxima de um dos pontos de fronteira de  $\beta$ .

Precisamente falando, procedemos por indução. Seja  $\Phi_n = (\Phi_{n,a})_{a \in J, J \in \mathcal{J}_n}$  a  $n$ -ésima renormalização de  $\Phi_0 = (\Phi_{0,a})_{a \in J_0}$ , onde  $\mathcal{J}_n$  é uma coleção de intervalos, cada um dentro de algum intervalo da coleção  $\mathcal{J}_{n-1}$ , para  $n \geq 1$  (e  $\mathcal{J}_0 = \{J_0\}$ ). Para cada  $J \in \mathcal{J}_n$  existe um intervalo central  $\gamma_n = \gamma_n(J)$  que varia continuamente com  $a \in J$ , uma coleção  $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n(J)$  de pré-imagens do ramo central, variando continuamente com  $a \in J$ ,

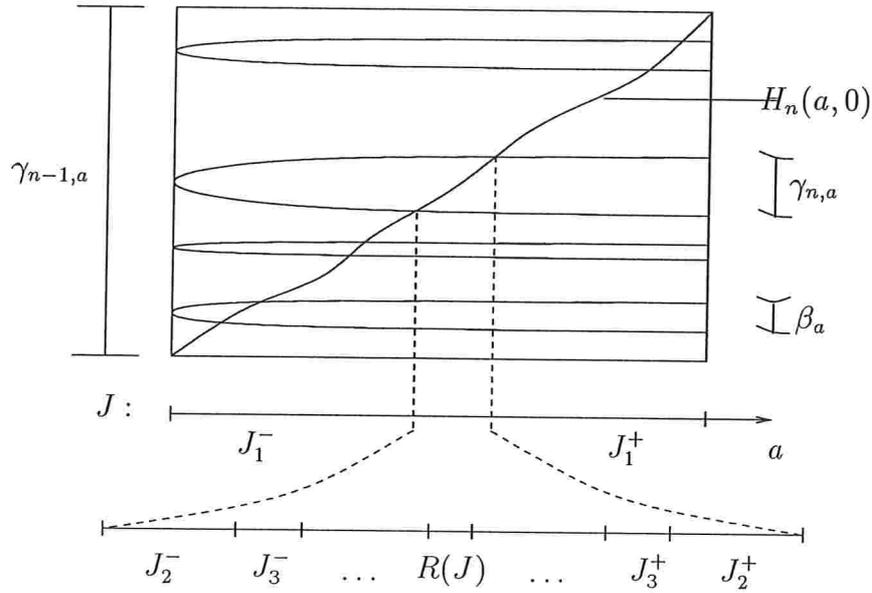


Figura 7.3: Dependência do parâmetro sobre o valor crítico e o domínio de  $\Phi_n$ .

difeomorfismos  $a$ -dependentes  $B : \beta \rightarrow \gamma_n$  e um ramo central  $H_n : \gamma_n \rightarrow \gamma_{n-1}$  com a propriedade de que  $H_n(0)$  cruza  $\gamma_{n-1}$  completamente quando  $a$  varia dentro de  $J$ .

Neste momento estamos assumindo que  $\Phi_n$  é bem comportada tanto no espaço quanto no parâmetro. Por exemplo, o ramo central é aproximadamente quadrático, a velocidade do valor crítico é quase constante e os elementos  $\beta = \beta_a$  se movem com velocidade muito menor. Essas hipóteses são justificadas por indução e preservadas pela renormalização generalizada, como mostrado em [1]. Além disso, sem perda de generalidade podemos supor que  $D_2 H_n < 0$  e  $|\text{Im} H_n|$  cresce com  $a$  (veja Figura 7.3).

Para procedermos indutivamente, dividimos o intervalo de parâmetros  $J \in \mathcal{J}_n$  da seguinte maneira: seja  $R = R(J)$  o intervalo fechado de parâmetros para os quais  $H_n$  é renormalizável (no caso da família quadrática  $f_a(x) = a - x^2$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , temos que  $R = [-\frac{1}{4}, 2]$ ); é fácil ver que  $a \in R$  se, e somente se,  $\text{esc} = \text{esc}(a) = +\infty$ . Agora sejam  $\sigma(a) = -$  se  $0 \notin \text{Im} H_n$  e  $\sigma(a) = +$  caso contrário, e defina  $J^\pm = \{a \in J; \sigma(a) = \pm, \text{esc}_n(a) < +\infty\}$ , de maneira que  $J = J^- \cup R \cup J^+$ . Para cada  $k \geq 1$  defina

$$J_k^\pm = \{a \in J^\pm; \text{esc}_n(a) = k\}.$$

Portanto  $\{R, \{J_k^\pm\}_{k \geq 1}\}$  define uma partição de  $J$  (veja Figura 7.3) e quando  $a$  varia

dentro dos  $J_k^\pm$  o ponto  $H_n^k(0)$  cruza a componente conexa à esquerda de  $\gamma_{n-1} \setminus \gamma_n$  (exceto para  $J_1^+$ , onde  $H_n(0)$  cruza a do lado direito).

O próximo passo é definir a coleção  $\mathcal{J}_{n+1}(J)$  dos elementos de  $\mathcal{J}_{n+1}$  contidos em  $J$ . Cada  $J' \in \mathcal{J}_{n+1}(J)$  pode ser escrito da forma

$$J' = J'(\sigma, k, \beta) = \{a \in J; \sigma(a) = \sigma, \text{esc}_n(a) = k, H_n^k(0) \in \beta_a\}$$

para algum  $\sigma = \pm$ ,  $k \geq 1$  e  $\beta \in \mathcal{B}_n$ . É claro que  $J'(\sigma, k, \beta) \subset J_k^\sigma$  e se  $\beta$  pertence à componente da direita de  $\gamma_{n-1} \setminus \gamma_n$  então  $J'(+, k, \beta)$  é não vazio somente se  $k = 1$ .

## 7.4 Decaimento de Geometria e Starting Conditions

Vamos adicionar a esse processo de renormalização mais algumas informações e carregá-las por toda a indução. Uma vez que já temos definida uma seqüência  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ , onde  $\Phi_n = \text{Ren}(\Phi_{n-1})$ , para todo  $n \geq 1$ , vamos assumir que a derivada Schwarziana de  $\Phi_0$  é não-positiva em cada componente de seu domínio (no caso de aplicações  $S$ -unimodais isso é imediato). E que além disso, para cada  $\beta \in \mathcal{B}_0$ , o difeomorfismo correspondente  $B : \beta \rightarrow \gamma_0$  admite uma extensão difeomórfica de  $\hat{\beta} \supset \beta$  em  $\gamma-1$  com derivada Schwarziana negativa, implicando em distorção pequena de  $B$  em  $\beta$ , se a razão  $|\gamma_0|/|\gamma_{-1}|$  é pequena, como vimos no Capítulo 2.

Para cada  $\beta \in \mathcal{B}_n$  defina

$$p_n(\beta) = \frac{|\beta|}{\text{dist}(\beta, \partial\gamma_{n-1})}, q_n(\beta) = \frac{|\beta|}{\text{dist}(\beta, \gamma_n)}.$$

Seja

$$r_n = \sup_a \frac{|\gamma_n|}{|\gamma_{n-1}|}, p_n = \sup_a \sup_{\beta \in \mathcal{B}_n} p_n(\beta), q_n = \sup_a \sup_{\beta \in \mathcal{B}_n} q_n(\beta).$$

O supremo é tomado entre os parâmetros  $a$  para os quais a renormalização está definida até o estágio  $n$ , dentro do intervalo de parâmetros de definição de  $\Phi_0$  (veja mais detalhes abaixo). Usamos o seguinte Teorema 7.4.1, cuja demonstração pode ser encontrada em [16], [11].

**Teorema 7.4.1.** *Se  $r_0, p_0$  e  $q_0$  são pequenos o suficiente, então  $r_n, p_n$  e  $q_n$  tendem a zero quando  $n \rightarrow \infty$ , e em particular  $r_n$  tende a zero exponencialmente. Embora eles possam*

não decrescer monotonamente, dados  $r, p$  e  $q$  suficientemente pequenos (e maiores que zero), se  $r_0, p_0$  e  $q_0$  são suficientemente pequenos então  $r_n \leq r, p_n \leq p$  e  $q_n \leq q$  para todo  $n \geq 0$ . Além disso, para cada  $\beta \in \mathcal{B}_n$  o difeomorfismo  $B : \beta \rightarrow \gamma_n$  é extensível a uma  $\theta_n^{-1}|\beta|$ -vizinhança de  $\beta$  com a mesma potência  $j$  tal que  $B = \Phi_0^j|\beta$  é um difeomorfismo sobre sua imagem (a qual está contida em  $\gamma_{n-1}$ ), onde  $\theta_n = \theta(q_n, r_n)$  e  $\theta$  vai a zero quando seu argumento vai a zero.

O decrescimento exponencial de  $r_n$  é chamado de *decaimento de geometria* da renormalização generalizada.

Vejam agora as informações que iremos adicionar sobre  $\Phi_n$ , relacionadas a suas derivadas envolvendo espaço e parâmetro. Estabelecemos a seguinte notação: para  $n \geq 0$  fixado e  $J \in \mathcal{J}_n$ , cada  $\beta = (\beta_a)_{a \in J}$  (ou  $\gamma_n = (\gamma_{n,a})_{a \in J}$ ) é uma família contínua de intervalos. Observe que  $\beta$  é usado tanto para denotar a família quanto um particular  $\beta = \beta_a$  se  $a$  é fixado. A função  $B : \beta \rightarrow \gamma_n$  (respectivamente  $H = H_n : \gamma_n \rightarrow \gamma_{n-1}$ ) pode ser vista como uma função real de duas variáveis em  $x$  e  $a$ , com domínio  $\{(a, x); a \in J, x \in \beta_a\}$  (respectivamente  $\{(a, x); a \in J, x \in \gamma_{n,a}\}$ ), tal que  $B(a, \beta_a) = \gamma_{n,a}$ , para um parâmetro fixado  $a \in J$ . No entanto mantemos a notação antiga quando tratamos com composições: por exemplo,  $B \circ H$  significa  $B(a, H(a, x))$ ,  $H^2$  significa  $H(a, H(a, x))$  e  $B^{-1} = B^{-1}(a, x)$  é a função tal que  $B(a, B^{-1}(a, x)) = x$ . Além disso, se escrevemos  $B(x)$  queremos dizer  $B(a, x)$ , se não há razão para dúvida. As derivadas parciais são escritas como  $B_x, B_a, H_{xa}$ , etc. Se  $j$  é um inteiro,  $H_x^j$  significará  $(H^j)_x$  e  $(H_x)^j$  significará  $H_x$  à  $j$ -ésima potência.

Diremos que a subfamília  $\Phi_n = (\Phi_{n,a})_{a \in J}$ , para  $J \in \mathcal{J}_n, n \geq 0$ , satisfaz as desigualdades  $(P_0)_{\delta_0}$  se o ramo central  $H = H_n : \gamma_n \rightarrow \gamma_{n-1}$  satisfaz

$$|H_{xx}| > 0, |H_a| > 0$$

e

$$|\gamma_n| \cdot \left| \frac{H_{xxx}}{H_{xx}} \right|, |\gamma_n| \cdot \left| \frac{H_{ax}}{H_a} \right|, |J| \cdot \left| \frac{H_{aa}}{H_a} \right|, |J| \cdot \left| \frac{H_{xxa}}{H_{xx}} \right| < \delta_0$$

para todo  $x \in \gamma_n = \gamma_{n,a}$  e todo  $a \in J$ .

Vejam o que essas condições implicam. Integrando  $\frac{\partial}{\partial x} \log |H_{xx}|$  obtemos, para  $\delta_0$

suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \log |H_{xx}|(y) dy \right| &= \left| \log \frac{H_{xx}(x)}{H_{xx}(0)} \right| < \delta_0 \Leftrightarrow -\delta_0 < \log \frac{H_{xx}(x)}{H_{xx}(0)} < \delta_0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\delta_0} < \frac{H_{xx}(x)}{H_{xx}(0)} < e^{\delta_0}, \end{aligned}$$

e sendo  $\delta_0$  suficientemente pequeno temos que:  $e^{\delta_0} \leq 1 + C\delta_0$  e  $e^{-\delta_0} \geq 1 - C\delta_0$ . Logo temos que

$$1 - C\delta_0 \leq \frac{H_{xx}}{2S} \leq 1 + C\delta_0 \quad (7.1)$$

para todo  $x \in \gamma$  e para alguma constante  $S = S_a = H_{xx}(0)/2$ , onde  $C$  é uma constante universal. Integrando a desigualdade 7.1 e lembrando que  $H_x(0) = 0$  obtemos

$$(1 - C\delta_0) \cdot 2Sx \leq H_x \leq (1 + C\delta_0) \cdot 2Sx$$

e integrando novamente obtemos

$$(1 - C\delta_0) \cdot Sx^2 \leq H(x) - H(0) \leq (1 + C\delta_0) \cdot Sx^2,$$

ou seja,  $H$  é quase quadrática para todo  $a \in J$ , mas a curvatura  $S = S_a$  pode (em princípio) variar com  $a$ . Agora, integrando  $\frac{\partial}{\partial x} \log |H_a|$  obtemos

$$1 - C\delta_0 \leq \frac{H_a}{v} \leq 1 + C\delta_0$$

para todo  $x \in \gamma_n$  e para alguma constante  $v = v_a$ . Em outras palavras, a velocidade de  $H(a, x)$  com respeito a  $a$  é aproximadamente igual à velocidade de  $H(a, 0)$ , para qualquer  $x \in \gamma_n$ . Da mesma forma, usando as outras duas desigualdades mostramos que  $v_a$  e  $S_a$  são quase constantes para  $a \in J$ , justificando a definição de constantes  $v_n = v_n(J)$  e  $S_n = S_n(J)$ , que aproximam os valores de  $H_a(a, x)$  e  $H_{xx}(a, x)$  para todo  $a \in J$  e  $x \in \gamma_n = \gamma_{n,a}$ .

Observamos que renormalização generalizada preserva o sinal de  $v_n \cdot S_n$ , como é fácil de se ver na família quadrática por exemplo.

Definimos agora o segundo conjunto de desigualdades, ou seja, dizemos que  $\Phi_n = (\Phi_{n,a})_{a \in J}$ ,  $J \in \mathcal{J}_n$ ,  $n \geq 0$ , satisfaz as desigualdades  $(P_1)_{\delta_1}$  se para todo  $\beta \in \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n(J)$  e a função correspondente  $B : \beta \rightarrow \gamma_n$  os quocientes

$$\left| \frac{B_a}{B_x H_a} \right|, |\gamma_n| \cdot \left| \frac{B_{xx}}{(B_x)^2} \right|, |\gamma_n| \cdot \left| \frac{B_{xa}}{(B_x)^2 H_a} \right|, |\gamma_n|^2 \cdot \left| \frac{B_{xxx}}{(B_x)^3} \right|, |\gamma_n|^2 \cdot \left| \frac{B_{xxa}}{(B_x)^3 H_a} \right|, |\gamma_n| \cdot \left| \frac{B_{aa}}{(B_x)^2 (H_a)^2} \right|$$

são menores que  $\delta_1$  para todo  $x \in \beta_a$  e  $a \in J$  tal que  $|\operatorname{Im}H_n| \geq \frac{1}{8}|\gamma_{n-1}|$  ou  $\operatorname{Im}H_n \cap \mathcal{U}(\beta) \neq \emptyset$  para uma certa vizinhança  $\mathcal{U}(\beta)$  de  $\beta$  (para a indução nós precisamos apenas de  $\operatorname{Im}H_n \cap \beta \neq \emptyset$ ). Aqui  $H_a$  significa  $H_a(a, 0)$  e não  $H_a(a, x)$ , uma vez que  $x$  vive dentro de  $\beta$  (ou então  $v_n = v_n(J)$ ) se as desigualdades  $(P_0)_{\delta_0}$  já estão satisfeitas). A condição

$$|\gamma_n| \cdot \left| \frac{B_{xx}}{(B_x)^2} \right| < \delta_1$$

assegura distorção pequena em  $\beta$ , pois para  $x_1, x_2 \in \beta$  temos

$$|\log |B_x(x_1)| - \log |B_x(x_2)|| \leq \int_{\gamma_n} \left| \frac{B_{xx}(B^{-1}y)}{[B_x(B^{-1}y)]^2} \right| dy < \delta_1.$$

Este quociente, em particular, pode ser controlado de duas maneiras: fazendo o cálculo direto ou pelas propriedades de extensão, com o uso do Lema 2.2.2. Fica como uma questão em aberto se existe um outro método de cálculo direto para controlar os quocientes restantes.

A condição

$$\left| \frac{B_a}{B_x H_a} \right| < \delta_1$$

pode ser facilmente entendida se a traduzirmos na forma

$$|B_a^{-1}| < \delta_1 |H_a(0)|,$$

que é dizer que a velocidade de  $\beta_a$  é muito menor que a velocidade de  $H_n^{\text{esc}}(0)$ . Isto é válido para valores de  $a$  que incluem o momento quando  $\beta$  é cruzado por  $H_n^{\text{esc}}(0)$ .

Vamos lembrar que o objetivo final é manter sob controle a velocidade do valor crítico: ele tem que ser quase constante ao longo de qualquer intervalo  $J \in \mathcal{J}_n$ ,  $n \geq 0$ . Isto corresponde ao quociente em  $H_{aa}$ . Mas para controlar esse quociente precisamos controlar também os outros envolvendo a função  $H$ , e como consequência, todos os que envolvem as funções  $B$ . Assim temos o seguinte

**Teorema 7.4.2.** *Se  $\Phi_0 = (\Phi_{0,a})_{a \in J_0}$  satisfaz as desigualdades  $(P_0)_{\delta_0}$  e  $(P_1)_{\delta_1}$  para  $\delta_0, \delta_1 > 0$  suficientemente pequenos, então  $\Phi_n = (\Phi_{n,a})_{a \in J}$  também satisfaz as desigualdades para todo  $J \in \mathcal{J}_n$ ,  $n \geq 0$ , desde que  $r_m, p_m$  e  $q_m$  sejam suficientemente pequenos para todo  $m \geq 0$  (que é o mesmo que exigir que  $r_0, p_0$  e  $q_0$  sejam suficientemente pequenos, pelo Teorema 7.4.1).*

A prova do Teorema 7.4.2 pode ser encontrada em [1].

## 7.5 Demonstrações

Antes de iniciarmos com o esboço da demonstração do Teorema 7.1.1 é importante ressaltar que com as hipóteses do Teorema 7.1.1, em [2] se mostra que  $(-\epsilon, \epsilon)$  é particionado numa coleção  $\mathcal{J}_0$ , a menos de medida nula, e para cada  $J_0 \in \mathcal{J}_0$  está definida uma aplicação  $\Phi_0$  que satisfas as desigualdades  $(P_0)_{\delta_0}$  e  $(P_1)_{\delta_1}$ . Assim aplicamos o Teorema 7.4.2 para garantir que as condições sejam mantidas para  $\Phi_n$ , para todo  $n \geq 0$ . E isso será usado para mostrar os resultados, em  $J_0$ , como medida total dos parâmetros caóticos ou renormalizáveis e densidade dos renormalizáveis.

### 7.5.1 Prevalência dos parâmetros caóticos e dos renormalizáveis

Seja  $J_0$  um intervalo como acima. Vamos mostrar que se  $(f_a)_{a \in J_0}$  é uma família de aplicações  $S$ -unimodais do intervalo  $[0, 1]$  então para quase todo  $a \in \mathcal{R}^c$  ou  $f_a$  é Misiurewicz ou  $\#\{n; \text{esc}_n = \text{esc}_n(a) > 1\} < \infty$ . No segundo caso, utilizando o Teorema 1.2.1 teremos que  $f_a$  é caótica. E como parâmetros Misiurewicz são automaticamente caóticos teremos concluído o item 1 do Teorema 7.1.1. Vamos lembrar que definimos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{R} = \{a; f_a \text{ é renormalizável} \},$$

$$\mathcal{E} = \{a; f_a \text{ é caótica} \}$$

e

$$\mathcal{M} = \{a; f_a \text{ é Misiurewicz} \}.$$

Primeiramente observemos o seguinte fato: para qualquer  $J \in \mathcal{J}_n$ ,  $n \geq 0$ ,  $|\gamma_{n-1,a}|$  é aproximadamente constante. Isto pode ser provado facilmente por indução, usando a aproximação quadrática do ramo central e o fato que a distância entre cada  $\beta \in \mathcal{B}_n$  e a fronteira de  $\gamma_{n-1}$  é muito maior que  $|\beta|$ . Para cada  $J \in \mathcal{J}_n$ ,  $n \geq 0$ , seja

$$\text{Cent}(J) = \{a \in J; H_n(0) \in \gamma_n\}.$$

Pelas considerações acima (uniformidade da velocidade do valor crítico) temos que

$$\frac{|\text{Cent}(J)|}{|J|} \leq Cr_n,$$

para alguma constante universal  $C > 0$ .

Seja  $\mathcal{C}$  o subconjunto de parâmetros em  $(-\epsilon, \epsilon)$  tais que se  $a \in \mathcal{C}$  então  $f_a$  não é renormalizável e o ponto crítico é recorrente (em breve,  $\mathcal{C} = \mathcal{R}^c \setminus \mathcal{M}$ ), correspondendo exatamente ao conjunto de parâmetros para os quais  $(\Phi_n)_{n \geq 0}$  está bem definida. Nos restringiremos a

$$\mathcal{C} \cap J_0 = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{J \in \mathcal{J}_n} J.$$

Para cada  $J \in \mathcal{J}_n$ ,  $n \geq 0$ , a coleção  $\mathcal{J}_{n+1}(J) = \{J' \in \mathcal{J}_{n+1}; J' \subset J\}$  pode ser decomposta em duas partes:

$$\mathcal{J}_{n+1}(J) = \mathcal{J}_{n+1}^{\text{cent}}(J) \cup \mathcal{J}_{n+1}^{\text{ext}}(J),$$

onde  $J' \in \mathcal{J}_{n+1}^{\text{cent}}(J)$  se e somente se  $J' = J'(\sigma, k, \beta)$  para algum  $k > 1$ ,  $\sigma = \pm$  e  $\beta \in \mathcal{B}_n$ , e  $J' \in \mathcal{J}_{n+1}^{\text{ext}}(J)$  se e somente se  $J' = J'(\sigma, 1, \beta)$  para algum  $\sigma = \pm$  e  $\beta \in \mathcal{B}_n$  (ver Figura 7.3).

Assim para qualquer  $a \in \mathcal{C} \cap J_0$  existe uma sequência  $J_0 \supset J_1 \supset \dots \supset J_n \supset \dots$  convergindo para  $a$  (pois  $|J_n| < |J_{n-1}|$ ,  $\forall n \geq 1$ ); tal que para cada  $n \geq 1$  ou  $J_n \in \mathcal{J}_n^{\text{cent}}(J_{n-1})$  ou  $J_n \in \mathcal{J}_n^{\text{ext}}(J_{n-1})$ , e portanto definindo a função  $\theta_a : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{cent}, \text{ext}\}$ . De acordo com o Teorema 1.2.1, se  $\theta_a^{-1}(\{\text{cent}\})$  contém somente finitos elementos então  $a \in \mathcal{E}$ . Provaremos que o conjunto de  $a \in J_0$  tais que  $\theta_a^{-1}(\{\text{cent}\})$  é infinito tem medida de Lebesgue zero, consequentemente provando o que queremos.

Para este propósito usamos o chamado Lema de Borel-Cantelli: “ se  $\{I_i\}_{i \geq 0}$  é uma coleção de intervalos  $I_i \subset [0, 1]$  tais que  $\sum_{i \geq 0} |I_i| < \infty$  então o conjunto de  $x \in [0, 1]$  tais que  $x$  pertence a infinitos  $I_i$ 's tem medida de Lebesgue zero” .

Para nós,  $\theta_a^{-1}(\{\text{cent}\})$  é infinito se e somente se  $a$  pertence a infinitos intervalos do conjunto

$$\bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{J \in \mathcal{J}_n} \mathcal{J}_{n+1}^{\text{cent}}(J).$$

Para qualquer  $J \in \mathcal{J}_n$ ,  $n \geq 0$ , os intervalos da coleção  $\mathcal{J}_{n+1}^{\text{cent}}(J)$  são dois a dois disjuntos e contidos no intervalo  $\text{Cent}(J)$ . Assim

$$\frac{1}{|J|} \sum \{|J'|; J' \in \mathcal{J}_{n+1}^{\text{cent}}(J)\} \leq Cr_n,$$

como observamos acima. Uma vez que  $\sum \{|J|; J \in \mathcal{J}_n\} \leq |J_0|$  obtemos

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{J \in \mathcal{J}_n} \{|J'|; J' \in \mathcal{J}_{n+1}^{\text{cent}}(J)\} \leq C|J_0| \sum_{n \geq 0} r_n.$$

Como  $r_n$  decresce exponencialmente (pelo Teorema 7.4.1) segue que a soma acima é finita.

### 7.5.2 Abundância de Caoticidade

Sejam  $n \geq 0$ ,  $J \in \mathcal{J}_n$ ,  $S_n = S_n(J)$  e  $v_n = v_n(J)$ . Como  $H_n$  é quase quadrática e a velocidade do valor crítico é quase constante podemos estimar o tamanho do intervalo de renormalização  $R(J)$ :

$$\frac{2}{|S_n \cdot v_n|} < |R(J)| < \frac{3}{|S_n \cdot v_n|}.$$

Mas queremos expressar  $|R(J)|$  como fração de  $|J|$ . Observe que se  $a = \sup J$ , então

$$S_n \left( \frac{1}{2} |\gamma_n| \right)^2 \cong |\gamma_{n-1}|.$$

Por outro lado

$$v_n \cong \frac{|\gamma_{n-1}|}{|J|},$$

levando-se em conta que  $|\gamma_{n-1}|$  é quase constante. Assim

$$|R(J)| < r_n^2 |J|.$$

Como  $r_n < 1$ ,  $\forall n \geq 0$ , e  $(r_n)_n$  decresce exponencialmente, existe  $\lambda < 1$  tal que  $r_n^2 < \lambda^n$ ,  $\forall n \geq 0$ . Então, para algum  $C(\lambda) > 0$  temos que

$$\text{Leb}(J_0 \setminus \mathcal{R}) \geq |J_0| \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^n) \geq |J_0| \cdot \exp\{-C(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\} > 0.$$

Pelo item 1 do Teorema 7.1.1, quase todos os parâmetros em  $J_0 \setminus \mathcal{R}$  são caóticos, provando assim a abundância dos parâmetros caóticos.

### 7.5.3 Densidade da renormalização

Se  $\mathcal{R}$  não fosse denso em  $J_0$  então existiria uma sequência infinita  $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_n \supset \dots$  de intervalos encaixados,  $J_n \in \mathcal{J}_n$ ,  $\forall n \geq 0$ , tais que  $\bigcap_{n \geq 0} J_n$  é um intervalo. Por outro lado, como a velocidade do valor crítico é quase constante para todo  $J \in \mathcal{J}_n$ ,  $n \geq 0$ , então é fácil ver que  $|J_{n+1}| \ll \frac{1}{2}|J_n|$ , implicando que a intersecção deve ser um único ponto. Com isso estabelecemos o item 2 do Teorema 7.1.1.

# Apêndice A

Na Seção 1.2 vimos que, no caso de aplicações  $S$ -unimodais do intervalo  $[0, 1]$  em questão, para Lebesgue quase todo ponto  $x \in [0, 1]$  a órbita de  $x$  converge para a órbita periódica atratora hiperbólica, se ela existir. É fácil ver que o mesmo argumento vale mesmo no caso não-hiperbólico, desde que a órbita seja atratora pelos dois lados. Restará apenas tratar do caso em que a órbita é do tipo sela-nó.

Analogamente, podemos mostrar que “se  $f$  é uma aplicação renormalizável então para Lebesgue quase todo ponto  $x \in [0, 1]$ , a dinâmica de  $f$  se reduz à dinâmica de um intervalo de renormalização, no caso em que um dos pontos do bordo do intervalo de renormalização seja um repulsor hiperbólico. Isto é, mostraremos que para Lebesgue quase todo ponto  $x \in [0, 1]$  existe  $n$  tal que  $f^n(x)$  pertence ao intervalo de renormalização. Para ver isso, seja  $\{I_0, I_1, \dots, I_{k-1}\}$  a coleção de intervalos que define a renormalização de  $f$ , onde excluímos os extremos dos intervalos  $I_i$  no caso em que um dos extremos é um repulsor hiperbólico. Assim estamos assumindo que os intervalos  $I_i$  são abertos. Logo se existisse órbita atratora fora de  $I_0$  ela atrairia o ponto crítico de  $f$  (Teorema de Singer), mas isso não ocorre pois  $I_0$  é invariante ( $f^k(I_0) \subset I_0$ ). Com isso temos pelo Teorema 3.1.4 que o conjunto  $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n} \left( [0, 1] \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} I_i \right)$  é hiperbólico e aplicando o Teorema 3.1.3 obtemos que quase todo ponto do intervalo  $[0, 1]$  entra na renormalização de  $f$ .

Neste Apêndice mostraremos que valem os dois resultados acima no caso da sela-nó, isto é, sendo  $\mathcal{O}(p)$  uma órbita periódica do tipo sela-nó então para Lebesgue quase todo ponto  $x \in [0, 1]$  vale que a órbita de  $x$  converge para  $\mathcal{O}(p)$ , e que além disso, se  $f$  for

renormalizável e o ponto periódico do bordo do intervalo de renormalização pertencer à órbita da sela-nó então para Lebesgue quase todo ponto  $x \in [0, 1]$ , a dinâmica de  $f$  se reduz à dinâmica do intervalo de renormalização. Mas nesse caso (sela-nó) há uma dificuldade adicional para provarmos esses resultados pois não podemos utilizar os mesmos argumentos que utilizamos nos casos anteriores, uma vez que no caso da sela-nó há apenas uma semi-vizinhança atratora.

Os argumentos que se seguem foram comunicados pessoalmente por Vilton Pinheiro.

## A.1 Sela-nó

Nesta Seção provaremos os resultados enunciados anteriormente no caso da sela-nó. Mas para isso será suficiente provarmos o seguinte resultado.

**Proposição A.1.1.** *Se  $f$  possui um ponto periódico do tipo sela-nó, e portanto atrator, então  $\text{Leb}(\{x \in [0, 1] : f^n(x) \in V_p = (p, \tau(p)), \text{ para algum } n \geq 0\}) = 1$ , onde  $p$  é o ponto da órbita da sela-nó que maximiza  $f$ .*

Vejamos porque essa Proposição A.1.1 dá conta do dois resultados que nos propomos a demonstrar aqui neste Apêndice. A demonstração do Teorema de Singer (2.1.1) mostra que  $c$  está na bacia imediata da órbita atratora, implicando que se  $x \in [p, c]$  então  $f^n(x) \rightarrow \mathcal{O}(p)$ . Para  $x \in (c, \tau(p)]$  vale o mesmo, pois  $f(x) = f(\tau(x))$  e  $\tau(x)$  pertence a  $[p, c]$ . Por outro lado, suponha que  $f$  seja renormalizável e seja  $I$  o intervalo de renormalização que contém o ponto crítico. Suponha também que o ponto periódico,  $p$ , em  $\partial I$  seja uma sela-nó. Da definição de renormalização,  $p$  é bom e o outro ponto do bordo de  $I$  tem que ser  $\tau(p)$ .

Para demonstrarmos a Proposição A.1.1 precisaremos de alguns resultados que começaremos a demonstrar agora. Fixemos  $k$  como sendo o período da sela-nó.

**Lema A.1.1.** *Existe  $\xi(p) \in \mathcal{N}$  e periódico tal que*

- (i)  $V_p \subset V_{\xi(p)}$  e  $V_p \neq V_{\xi(p)}$ ;
- (ii) o período de  $\xi(p)$  é menor ou igual ao período de  $p$  ;

(iii)  $f(\xi(p))$  maximiza  $f$ , com  $V_{\xi(p)}$  satisfazendo (i) e (ii).

*Demonstração.* Primeiramente vamos verificar que  $f$  tem finitos pontos periódicos de período menor ou igual ao período da sela-nó.

Seja  $g = f^m$ . Então os pontos periódicos de período  $m$  de  $f$  são pontos fixos de  $g$ . Suponha que  $g$  tenha infinitos pontos fixos. Pelo Teorema do Valor Médio, existem infinitos pontos tais que  $g'(x) = 1$ . Entre quaisquer três pontos sucessivos para os quais  $g'(x) = 1$ , deve existir um ponto para o qual  $g' < 1$ . Realmente,  $g'(x)$  não é identicamente igual a um sobre um intervalo, pois senão  $Sg = 0$  o que contradiz o fato de que  $Sg < 0$  (pois  $Sf < 0$ ). Como consequência do Princípio do Mínimo temos que  $g'$  não pode ter mínimo local positivo entre esses três pontos. Assim, deve existir pontos para os quais  $g' < 0$ . Conseqüentemente, existem pontos para os quais  $g' = 0$ . Mas isso implica que  $g$  tem infinitos pontos críticos, mas isso não é possível pois  $f$  possui apenas um ponto crítico implicando assim que  $g = f^m$  possui um número finito de pontos críticos.

Assim olhamos para o conjunto de pontos periódicos,  $x \in [0, 1]$ , de período menor ou igual ao período da sela-nó, e tal que  $V_p \subset V_x$  e  $V_p \neq V_x$ . Em seguida, para cada um desses pontos tomamos o ponto de sua órbita que maximiza  $f$ . E sendo finito o conjunto desses pontos periódicos conseguimos o ponto  $\xi(p)$ .  $\square$

**Lema A.1.2.**  $\mathcal{O}(p) \cap V_{\xi(p)} = \{p\}$ .

*Demonstração.* Suponhamos por contradição que exista  $0 < j < k$  tal que  $f^j(p) \in V_{\xi(p)}$ . Assim olhamos para o gráfico de  $f^{k-j}$  restrito ao intervalo  $(f^j(p), \tau(f^j(p)))$  (ver Figura A.1). Como  $f^{k-j}(f^j(p)) = f^{k-j}(\tau(f^j(p))) = p$  vemos que o gráfico de  $f^{k-j}$  deve cruzar a diagonal, gerando assim um ponto periódico de período  $k - j < k$ . Se o ponto periódico cair fora de  $V_p$  teremos uma contradição com a minimalidade de  $\xi(p)$ . E o ponto periódico não pode cair dentro de  $V_p$  também, pois sabemos que se  $x \in V_p$  então  $f^{kn}(x) \rightarrow \mathcal{O}(p)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Como vimos no Capítulo 4, dado um intervalo bom,  $V_x$ , definimos o conjunto de pontos que retornam a  $V_x$  sob alguma iterada de  $f$  (vide Definição 4.1.2), e com isso  $C_x$  pode ser descrito como sendo a união de todos os intervalos  $T$  tais que  $f^n : T \rightarrow V_x$

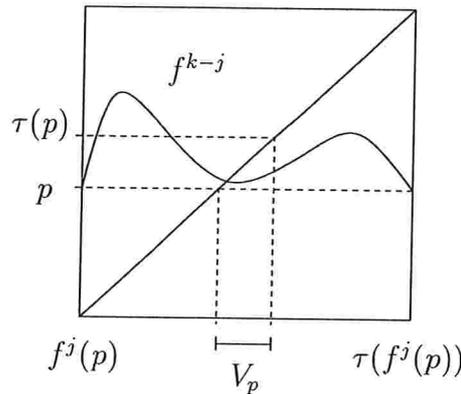


Figura A.1: Ilustração do gráfico de  $f^{k-j}$ .

é monótona e sobre para algum  $n \geq 0$ , lembrando que  $f^0$  é a aplicação identidade em  $V_x$ . Vimos também nesse Capítulo 4 que se  $I$  é uma componente de  $C_x$  então  $I, f(I), \dots, f^n(I) = V_x$  são dois a dois disjuntos (ver Lema 4.1.5). Apesar de termos assumido no Capítulo 4 que  $f$  não possui atratores, esses resultados não dependem dessa hipótese, de modo que podemos aplicá-los para  $x = p$ , onde  $p$  é como acima.

**Lema A.1.3.** *Sejam  $I \in C_p$  e  $n$  tais que  $f^n : I \rightarrow V_p$  é monótona e sobre. Então existe  $J \subset [0, 1]$  tal que  $I \subset J$ ,  $f^n|_J$  é um difeomorfismo e  $f^n(J) = V_{\xi(p)}$ .*

*Demonstração.* Por contradição seja  $J \supset I$  maximal tal que

- (1)  $f^n|_J$  é um difeomorfismo;
- (2)  $f^n(J) \subset V_{\xi(p)}$  e  $f^n(J) \neq V_{\xi(p)}$ .

Neste caso existe  $j < n$  tal que  $c \in \partial f^j(J)$  (ver Figura A.2). Temos então que  $f(p) \in f^{j+1}(J \setminus \bar{I})$ , e assim  $f^{n-j}(p) \in f^n(J \setminus \bar{I}) \subset V_{\xi(p)} \setminus \bar{V}_p$ . Contradizendo o Lema A.1.2.

□

**Lema A.1.4.** *Existe uma seqüência de intervalos bons,  $(V_j)_j$ , tal que  $V_p \subset V_j$  e  $V_p \neq V_j$  para todo  $j \geq 0$  e tal que a seqüência de números reais  $(|V_j \setminus V_p|)_j$  converge para zero. Em outras palavras,  $V_j$  se “acumula” em  $V_p$ .*

*Demonstração.* Seja  $m \leq k$  o período de  $\xi(p)$ . Suponha que exista um intervalo  $A \subset V_{\xi(p)} \setminus V_p$  tal que

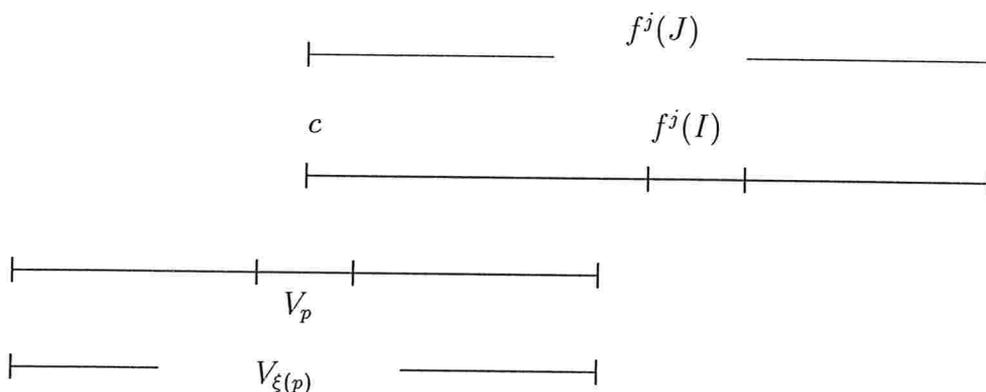


Figura A.2: Ilustração de  $c \in \partial f^j(J)$ .

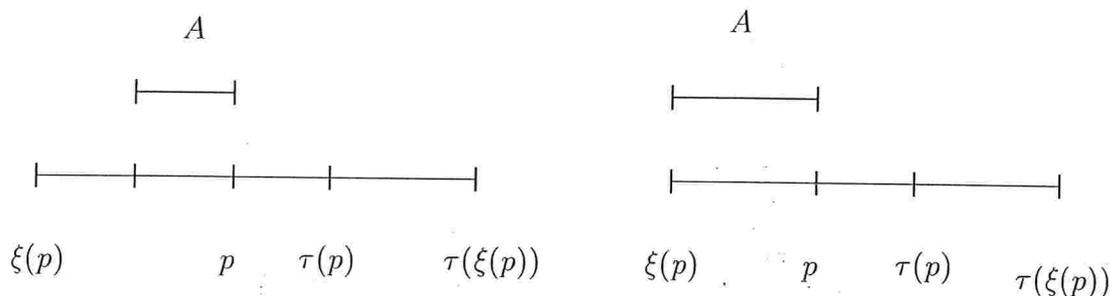


Figura A.3: Ilustração do intervalo  $A$ .

- (a)  $\bar{A} \cap \bar{V}_p = \{p\}$  (ver Figura A.3);
- (b) se  $x \in A$  então  $f^n(x) \notin V_p$  para todo  $n \geq 0$ ;
- (c)  $A$  é maximal satisfazendo (a) e (b).

Para facilitar, podemos assumir primeiro que o intervalo  $(\xi(p), p)$  não contém  $c$ . Se  $\xi(p) \notin \bar{A}$  temos as possibilidades

- (i)  $A \subset f^k(A)$  e  $A \neq f^k(A)$ ;
- (ii)  $f^k(A) \subset A$ .

A possibilidade (i) não ocorre pois se ocorresse seria uma contradição com a maximalidade de  $A$ . E (ii) não ocorre, pois caso contrário geraria um ponto periódico.

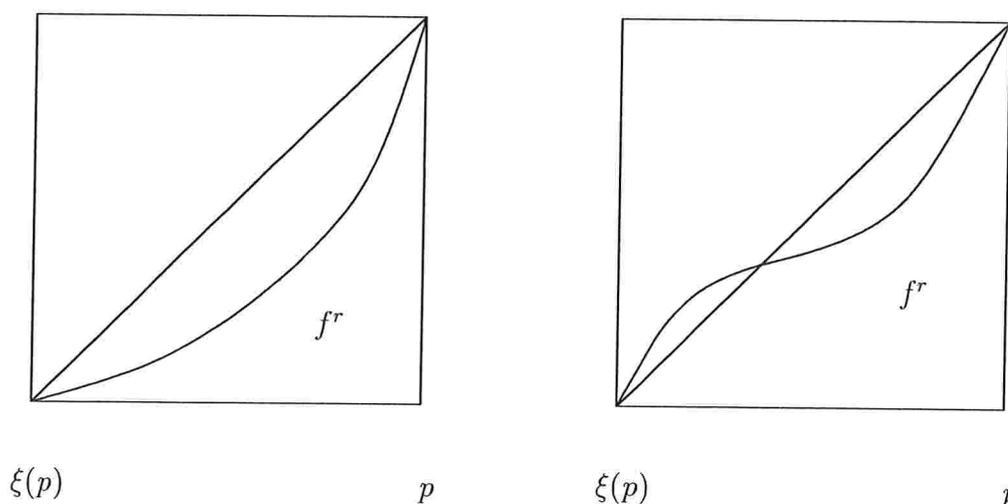


Figura A.4: Ilustração do gráfico de  $f^r$ .

Agora suponha  $\xi(p) \in A$  e olhemos para o difeomorfismo  $f^r|_{(\xi(p), p)}$ , onde  $r = \text{mmc}(m, k)$ . Como  $f^r$  fixa os extremos  $\xi(p)$  e  $p$  teríamos a geração de um atrator o que não é possível (ver Figura A.4), pois ou teríamos um atrator no interior de  $(\xi(p), p)$ , o que é um absurdo, ou  $\xi(p)$  tem uma semi-vizinhança atratora (à direita de  $\xi(p)$ ), o que não ocorre pois uma vez que  $\xi(p)$  é bom (e portanto ele não pertence à órbita de  $p$ ) teríamos outro atrator, o que é um absurdo.

Caso  $p$  e  $\xi(p)$  estejam de lados opostos como na Figura A.5 também teremos contradição. Se  $\tau(\xi(p)) \notin A$  o argumento é análogo ao caso quando  $\xi(p) \notin A$ . Agora se  $\tau(\xi(p)) \in A$  podemos ter ou  $f^r(p, \tau(\xi(p))) = (p, \tau(\xi(p)))$ , gerando assim um ponto periódico, o que é impossível, ou  $f^r(p, \tau(\xi(p))) = (\xi(p), p)$  e assim teríamos pontos de  $A$  entrando em  $V_p$ , o que não ocorre também, pela definição de  $A$ .

Como conseqüência temos que existem pré-imagens de  $V_p$  (ou seja, componentes de  $C_p$ ) arbitrariamente próximas de  $V_p$ . Assim, para cada uma dessas componentes, digamos  $I$ , sabemos que existe  $n \geq 0$  tal que  $f^n : I \rightarrow V_p$  é  $\overline{\text{monótona}}$  e sobre, e de acordo com o Lema A.1.3 conseguimos um intervalo  $J \supset I$  que estende essa aplicação monotonamente até  $V_{\xi(p)}$ . Com isso temos que os pontos do bordo de  $J$  são mandados nos pontos do bordo de  $V_{\xi(p)}$  por essa aplicação, os quais não retornam a  $V_{\xi(p)}$ . Sendo assim, para definirmos os intervalos  $V_j$ , dentre os pontos da órbita dos pontos de bordo

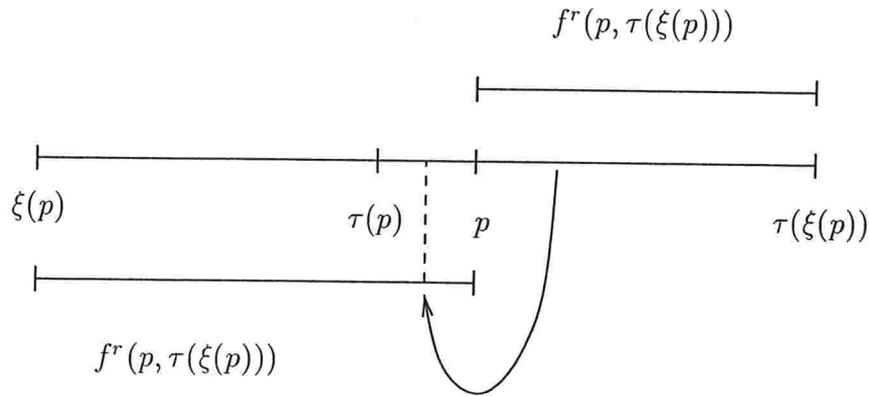


Figura A.5: Ilustração da imagem de  $(p, \tau(\xi(p)))$  por  $f^r$ .

de cada intervalo  $J$  escolhemos aquele que maximiza  $f$  e que pertence a  $V_{\xi(p)} \setminus \overline{V_p}$ .

□

Vamos agora provar a Proposição A.1.1.

*Demonstração.* Primeiramente tomamos uma seqüência de intervalos bons,  $(V_j)_j$ , se “acumulando” em  $V_p$ , de acordo com o Lema A.1.4. Logo existe  $j_0 \geq 1$  tal que todas as aplicações  $f^n : T \rightarrow V_j$  têm distorção limitada uniformemente, para  $j \geq j_0$ . Como  $V_j \rightarrow V_p$  temos que  $|V_j \setminus V_p| \rightarrow 0$ , isto é, dado  $\epsilon > 0$  existe  $j_0 \geq 0$  tal que  $|V_j \setminus V_p| < \epsilon$ , para todo  $j \geq j_0$ . Como  $f^n$  tem distorção limitada uniformemente sobre os intervalos  $V_j$  temos que

$$\text{Leb}(\{x \in C_j : f^l(x) \in V_j \setminus V_p, \text{ para algum } l \geq 0\}) \leq C\epsilon,$$

para alguma constante positiva  $C$ . Por outro lado, como  $C_j$  contém o ponto crítico de  $f$  e os pontos periódicos atratores, temos pelo Teorema 3.1.4 que  $(C_j)^c$  é um conjunto hiperbólico. Logo, pelo Teorema 3.1.3 obtemos que  $|C_j| = 1$ . Sendo  $\epsilon > 0$  arbitrário, concluímos que Lebesgue quase todo ponto  $x \in [0, 1]$  entra em  $V_p$  sob alguma iterada de  $f$ , isto é,

$$\text{Leb}(\{x \in [0, 1] : f^l(x) \in V_p = (p, \tau(p)), \text{ para algum } l \geq 0\}) = 1.$$

Portanto o resultado segue.

□



# Referências Bibliográficas

- [1] E. COLLI. A starting condition approach to parameter distortion in generalized renormalization. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*.
- [2] E. COLLI AND V. PINHEIRO. Chaos versus renormalization at quadratic S-unimodal Misiurewicz bifurcation. Submetido para publicação em *Astérisque*.
- [3] M. MARTENS. Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **14** (1994), 331-349.
- [4] M. MARTENS AND T. NOWICKI. Invariant measures for typical quadratic maps. *Astérisque* **261** (2000), 239-252.
- [5] W. DE MELO AND S. VAN STRIEN.- *One-dimensional dynamics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [6] A. KATOK AND B. HASSELBLATT. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press.
- [7] R. L. DEVANEY. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [8] R. MAÑÉ. *Teoria Ergódica*, Projeto Euclides.
- [9] J. PALIS. A Global View on Dynamics: Conjectures and Results. *Astérisque* **261** (2000), 339-351.
- [10] T. NOWICKI AND S. VAN STRIEN. Absolutely Continuous Measures under a Summability Condition, *Invent. Math.* **93** (1988), 619-635.

- [11] M. LYUBICH. Combinatorics, Geometry and Attractors of Quasi-Quadratic Maps. *Ann. of Math* **140** (1994), 347-404.
- [12] M. LYUBICH AND L. W. MILNOR. The Fibonacci Unimodal Map. *J. A. M. S.* **6** (1993), 425-457.
- [13] J. GRACZYK AND G. ŚWIĄTEK. Generic hyperbolicity in the quadratic family. *Ann. of Math.* **146** (1997), 1-52.
- [14] M. LYUBICH. Dynamics of quadratic polynomials, I, II. *Acta Math.* **178** (1997), 185-247, 247-297.
- [15] M. V. JAKOBSON. Absolutely Continuous Invariant Measures for one-parameter Families of One-dimensional Maps. *Comm. Math. Phys.* **81** (1981), 39-88.
- [16] M. JAKOBSON AND G. ŚWIĄTEK. Metric properties of non-renormalizable S-unimodal maps. Part I: Induced expansion and invariant measures. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **14** (1994), 721-755.
- [17] D. SINGER. Stable orbits and bifurcations of maps of the interval. *SIAM J. - Appl. Math* **35** (1978), 260-267.
- [18] JOHN B. CONWAY. *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag.