

Campos Hamiltonianos
e Colchete de Poisson na
Teoria Geométrica dos Campos

Mário Otávio Salles

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientador : **Prof. Dr. Frank Michael Forger**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

- São Paulo, 2 de dezembro de 2004 -

Campos Hamiltonianos e Colchete de Poisson na Teoria Geométrica dos Campos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Mário Otávio Salles e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 1 de dezembro de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Frank Michael Forger (Orientador) – IME – USP
- Prof. Dr. Paolo Piccione – IME – USP
- Prof. Dr. Jorge Passamani Zubelli – IMPA
- Prof. Dr. Sandro Vieira Romero – UFV
- Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin – IMECC – UNICAMP

à *Anne*,
por tudo que ela significou, uma mãe.

آهنگر محیی فضل آاداب شد
در جمع کمال شیخ اسحاب شد
ز دوزخین شب تاریک نبرد بود
گفتند فسانه و در خواب شد

*”Então do TI em MIM que busca atrás
Do véu do Universo, chorei para encontrar
Um Candeeiro que me guiasse na escuridão; e
Então alguma coisa disse - ‘uma cega Inteligência’. ”*

Omar Khayyam – 1120 DC
Matemático persa.
Discípulo de Avicena.

Agradecimentos

Gostaria de deixar aqui os nomes daquelas pessoas que estiveram presentes nestes anos na USP ou que então torceram pela realização deste trabalho.

À memória de meu pai *Mário*.

À minha mãe *Anne*, que buscou compreender minhas escolhas e sempre apoiou-me em minhas opções. A ela dedico este trabalho com amor.

À toda a minha família, que viu minha partida do Sul e acompanhou minha evolução que desdobra-se agora, em especial minha tia *Altanisa*, ao meu irmão *Cristiano*, ao meu irmão *Diogo*, à *Valéria* e claro, ao pequeno *João Pedro*, que acabou de chegar!

À *Gisa*, *Marisa* e *Sabrina*, pelo que representaram, consciente ou inconscientemente, e também pelos estímulos e entusiasmo, que ao seu tempo e à sua maneira marcaram meu caminho com suas presenças.

Aos Mestres *Alcides de Lima* e *Dorival dos Santos* e a todos meus irmãos de Capoeira por terem me acolhido na família *CEACA* (Centro de Estudos e Aplicação da Capoeira) e mostrado que “*O segredo da Lua quem sabe é o clarão do Sol*”.

Aos amigos do *CEOP* – *Centro de Educação e Organização Popular* – e do *Coletivo Griot*, pela força e pela coragem de dizer não mesmo quando todos diziam sim.

Aos amigos e companheiros de “luta”: *Albetã*, *Alessandra*, *Cláudio*, *Daniel*, *Jutta* e *Beto*, *Max* e *Rogério*.

Aos colegas de “trabalho”: *Bruno*, *Fernando*, *Leandro*, *Paola* e *Sandro*, pelas discussões sempre agradáveis.

Aos amigos, pela ajuda e claro pelas “baladas”: *Bárbara*, *Eliane* e *Daniel*, *Fábio*, *Glaúcio*, *Irene* e *Zé*, *Jaime*, *Natália S*, *Natália V*, *Raul*, *Regina*, *Said*, *Samuel*, *Sandra* e *Cristian*.

Finalmente, um agradecimento especial, merece o Prof. *Michael Forger*, pela excelente orientação. Além disso gostaria de agradecer a amizade e a disposição nestes anos de convívio.

Para todos aqueles que compartilharam esta passagem, e que nunca poderia citar aqui, deixo esta poesia

Levarás contigo
Meus olhos tão velhos?
Ah, deixa-os comigo
De que te servirão?

Levarás contigo
Minha boca e ouvidos?
Ah, deixa-os comigo
Degustei, ouvi
Tudo o que conheces
Coisas tão antigas.

Levarás contigo
Meu exato nariz?
Ah, deixa-o comigo
Aspirou, torceu-se
Insignificante, mas meu.

E minha voz e cantiga?
Meu verso, meu dom
De poesia, sortilégio, vida?
Ah, leva-os contigo.
Por mim.

Hilda Hilst
Da morte. Odes Mínimas

Resumo

Na generalização do arcabouço simplético da mecânica à teoria dos campos, o método tradicional baseado em dados iniciais não é covariante, pois depende da escolha “a priori” de uma hipersuperfície de Cauchy. Dois formalismos tem sido desenvolvidos para superar este problema: a abordagem multissimplética [3, 17, 21, 23, 24, 39] e a abordagem pelo espaço de fase covariante ou formalismo funcional covariante [4, 5, 40, 41]. Uma questão central em ambas é a procura por uma definição natural de colchetes de Poisson. Na abordagem multissimplética, existem várias propostas de diferentes autores (veja, por exemplo, [12] e referências citadas), enquanto que na abordagem pelo espaço de fase covariante, a definição é originalmente devida a Peierls [32] e foi geometrizada por DeWitt [7–9]; a construção deste colchete de Peierls-DeWitt dentro do formalismo multissimplético foi recentemente elaborada por Forger e Romero [14, 34]. Esta tese apresenta primeiros resultados mostrando que, pelo menos em certos casos especiais, os diferentes tipos de colchete de Poisson coincidem.

Abstract

In the generalization of the symplectic framework from mechanics to field theory, the traditional method based on initial data fails to be covariant because it depends on the “a priori” choice of a Cauchy hypersurface. Two formalisms have been developed to overcome this problem: the multisymplectic approach [3, 17, 21, 23, 24, 39] and the covariant phase space approach or covariant functional formalism [4, 5, 40, 41]. A central issue in both of them is the quest for a natural definition of Poisson brackets. In the multisymplectic approach, there are various proposals by different authors (see, for example, [12] and references therein), while in the covariant phase space approach, the definition is originally due to Peierls [32] and has been geometrized by de Witt [7–9]; the construction of this Peierls-DeWitt bracket within the multisymplectic formalism has recently been worked out by Forger and Romero [14, 34]. This thesis presents first results showing that, at least in certain special cases, the different types of Poisson brackets coincide.

Conteúdo

Introdução	1
1 Formalismo multissimplético	9
1.1 Mecânica de sistemas não-autônomos	11
1.2 Campos como seções de fibrados	13
1.3 Fibrado dos jatos	16
1.3.1 Levantamento canônico	18
1.4 Fibrados de cojatos	20
1.4.1 Levantamento canônico	23
1.5 Geometria multissimplética	27
1.5.1 Espaços de multifase	28
1.5.2 Levantamento hamiltoniano	33
1.6 Campos vetoriais hamiltonianos	38
1.6.1 Espaço de multifase estendido	39
1.6.2 Espaço de multifase comum	50
1.6.3 Projeção e levantamento de campos vetoriais hamiltonianos	58
1.7 Colchete de Poisson	60

2	Tensor de Poisson	65
2.1	Conexões e derivadas covariantes	66
2.2	Conexões lineares e duais lineares	69
2.3	Conexões afins e duais afins	71
2.4	Conexões parciais	73
2.5	Conexões em fibrados compostos	77
2.6	Conexões no fibrado vertical	81
2.7	Conexões nos fibrados de jatos e cojatos	85
2.8	Referenciais de Darboux e tensor de Poisson	88
3	Formalismo funcional	95
3.1	Espaço de fase covariante	95
3.2	Funcionais gerados por formas	100
3.3	Os teoremas principais	103
A	Referenciais não holônomos	109
A.1	Derivadas covariantes no fibrado vertical	109
A.2	Referenciais não holônomos no fibrado dos cojatos	112

Introdução

Existe uma extensão natural, da mecânica para a teoria dos campos, do conceito do tensor de Poisson? Com esta pergunta iniciamos a pesquisa que deságua neste trabalho.

No início do século 19, ao estudar as equações de movimento na mecânica celeste, Poisson introduziu o colchete que leva hoje seu nome. Aproximadamente 30 anos depois, ao estudar as propriedades algébricas deste colchete, Jacobi descobriu sua famosa identidade e, na mesma época, Hamilton escreveu as equações de movimento da mecânica de sistemas conservativos na forma de um sistema de primeira ordem, hoje conhecido como as equações de Hamilton.

Uma novidade básica trazida por esta reformulação da mecânica clássica foi a introdução do conceito de espaço de fase de um sistema, como conjunto de todos os seus estados possíveis. Esta noção influenciou de forma fundamental o desenvolvimento de toda a física, principalmente em áreas como a mecânica estatística ou a mecânica quântica. Hoje, a sua implementação matemática correta ocupa uma posição central em qualquer teoria física.

Na própria mecânica clássica, o modelo matemático para espaços de fase passou por duas generalizações importantes. Originalmente, imaginou-se que o espaço de fase P seria sempre derivado de um espaço de configuração Q , ou em termos matemáticos, existiria uma variedade Q descrevendo as possíveis configurações do sistema tal que P seria o fibrado cotangente T^*Q de Q . No entanto, na década de 60, as dificuldades de incorporar partículas com spin semi-inteiro levaram Souriau a propor um modelo matemático mais geral: o de uma variedade simplética. Finalmente, a partir da década de 70, começou a vingar um modelo ainda mais geral, protagonizado por Lichnerowicz e Weinstein, entre outros: o de uma variedade de Poisson.

Uma variedade de Poisson é uma variedade M munida de um colchete de Poisson, i.e., uma aplicação bilinear (sobre \mathbb{R}) e antisimétrica

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M) \quad (1)$$

que satisfaz

i) a identidade de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0, \quad (2)$$

ii) a regra de Leibniz:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. \quad (3)$$

Esta combinação de propriedades tem se revelado tão importante e útil que levou à definição de um novo tipo de álgebra: uma **álgebra de Poisson** é um espaço vetorial munido de duas composições internas – um produto associativo com unidade, comutativo ou não, e um colchete de Lie satisfazendo a regra de Leibniz como condição de compatibilidade. Além do seu caráter algébrico, a regra de Leibniz também tem um aspecto analítico e geométrico, pois afirma que para todo $f \in \mathcal{F}(M)$, a aplicação $g \mapsto \{f, g\}$ é uma derivação em $\mathcal{F}(M)$ e portanto existe um campo vetorial X_f em M tal que $X_f(g) = \{f, g\}$. Em particular, se a função f for a **Hamiltoniana** H , o fluxo do campo vetorial X_H correspondente descreve a evolução temporal do sistema.

O mesmo argumento pode ser aplicado aos dois argumentos do colchete de Poisson simultaneamente: como este é antisimétrico e é uma derivação em cada um dos seus argumentos, existe um único campo bivetorial π sobre P , chamado o **tensor de Poisson**, tal que, para quaisquer duas funções $f, g \in \mathcal{F}(P)$, vale

$$\{f, g\} = \pi(df \wedge dg). \quad (4)$$

Reinterpretando π como homomorfismo de fibrados vetoriais

$$\pi : T^*P \longrightarrow TP, \quad (5)$$

temos simplesmente

$$X_f = \pi(df). \quad (6)$$

A identidade de Jacobi para o colchete de Poisson pode então ser reformulada como a condição de que o colchete de Schouten¹ de π com π mesmo se anule:

$$[\pi, \pi] = 0. \quad (7)$$

¹Uma definição explícita do colchete de Schouten para campos multivetoriais é dada na Seção 1.7.

Uma classe especial de variedades de Poisson são as variedades simpléticas. Uma **variedade simplética** é uma variedade munida de uma dois-forma ω fechada ($d\omega = 0$) e não-degenerada. Esta forma chama-se **forma simplética** e o tensor de Poisson obtido a partir desta estrutura simplética é não-degenerado. A não-degenerescência de ω fornece um meio de definirmos, de maneira única, para cada função um campo vetorial; dada uma função f pode-se associar à 1-forma df o campo vetorial X_f dado por

$$i_{X_f}\omega = df . \quad (8)$$

Neste caso o colchete é expresso pela fórmula

$$\{f, g\} = i_{X_g}i_{X_f}\omega . \quad (9)$$

Obviamente, o colchete assim definido é antisimétrico, e mostra-se que ele satisfaz a identidade de Jacobi se e somente se ω for fechada.

Dentro da classe das variedades simpléticas, destacam-se os fibrados cotangentes. O **fibrado cotangente** T^*Q de uma variedade Q qualquer, com projeção τ_Q^* , vem munido de uma um-forma θ dada por

$$\theta(z)(v) = z(T_z\tau_Q^* \cdot v) , \quad (10)$$

onde $z \in T^*Q$ e $v \in T_z(T^*Q)$. Esta forma chama-se **forma canônica**, e sua derivada exterior (a menos de sinal) é a forma simplética:

$$\omega = -d\theta . \quad (11)$$

Na modelagem matemática do conceito de espaço de fase, existem dois aspectos importantes que motivaram a passagem de fibrados cotangentes para variedades simpléticas. Um deles foi a observação, devida a Souriau, que isso permite incluir, de forma natural, o conceito de spin na mecânica clássica, mesmo quando este for semi-inteiro, usando a esfera S^2 como a parte do espaço de fase que descreve este grau de liberdade. O outro encontra-se no fato de que variedades simpléticas constituem um âmbito matemático natural para o processo de redução do espaço de fase, conforme descrito pelo teorema de Marsden e Weinstein. Exemplos importantes de variedades simpléticas que, tipicamente, não são fibrados cotangentes incluem as órbitas coadjuntas de grupos de Lie ou variedades de Kähler.

De forma semelhante, existem variedades de Poisson que não são simpléticas, o que ocorre quando o tensor de Poisson não tiver posto máximo, podendo inclusive deixar de ter posto constante. O exemplo mais simples é o espaço dual \mathfrak{g}^* de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . Uma outra classe de exemplos é formada pelos grupos de Lie-Poisson, uma vez que um grupo de Lie semisimples não possui tensores de Poisson invariantes que sejam não-degenerados (ou seja, não existem grupos de Lie simpléticos semisimples). Um teorema geral de Weinstein estabelece que qualquer variedade de Poisson admite uma decomposição canônica em

subvariedades simpléticas, na forma de uma folheação (singular). O exemplo mais simples é a decomposição do espaço dual \mathfrak{g}^* de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} nas órbitas coadjuntas, em particular a de \mathbb{R}^3 em esferas: a menor órbita $\{0\}$ consiste de um único ponto, enquanto que as órbitas de maior dimensão são as órbitas regulares.

Passando da mecânica clássica à teoria clássica dos campos, o método mais tradicional de implementar o formalismo canônico é baseado na identificação das variáveis dinâmicas da teoria como dados iniciais, ou seja, funções sobre alguma hipersuperfície de Cauchy no espaço-tempo, sendo que o formalismo providencia equações diferenciais para a evolução temporal fora desta hipersuperfície. O problema principal desta abordagem reside no fato de que pela mera escolha de uma hipersuperfície de Cauchy específica para carregar os dados iniciais, perde-se a covariância explícita da teoria, isto é, a invariância de Lorentz (no contexto da relatividade restrita) e mais geralmente a invariância sob transformações gerais de coordenadas do espaço-tempo (no contexto da relatividade geral). Isso não significa que estas simetrias fundamentais sejam quebradas, mas elas (ou pelo menos uma parte delas) deixam de se manifestar de forma direta: podemos dizer que são ofuscadas. No entanto, isso pode criar problemas muito mais sérios do que uma mera falta de elegância quando queremos aplicar algum método de quantização, pois nada garante *a priori* que este método seja compatível com tais “simetrias escondidas”. De fato, quantização canônica conduz a modelos da teoria quântica dos campos cuja covariância está longe de ser óbvia e de fato constitui um problema formidável: como um exemplo bem conhecido, podemos citar os esforços necessários para verificar a invariância de Lorentz da eletrodinâmica quântica (perturbativa) no calibre de Coulomb.

Estas e outras observações similares têm por muitas décadas motivado tentativas de desenvolver, na teoria clássica dos campos, um formalismo canônico inteiramente covariante, que poderia servir como ponto inicial para métodos alternativos de quantização. Entre muitas idéias que foram propostas nesta direção, duas vieram ocupar um papel de destaque. A primeira é o “formalismo funcional covariante”, baseado no conceito do “espaço de fase covariante” que é definido como o espaço das soluções das equações de movimento, ao invés de um espaço de dados de Cauchy para estas equações. Esta formulação foi popularizada nos 1980’s por Crnković, Witten e Zuckerman [4, 5, 41] (veja também [40]) que mostraram como construir, para alguns dos modelos mais importantes da teoria dos campos (incluindo teorias de calibre e relatividade geral), uma estrutura simplética no espaço de fase covariante. A segunda tornou-se conhecida como o “formalismo multissimplético”, baseado no conceito do “espaço de multifase” que, basicamente, pode ser definido localmente associando a cada coordenada q^i não apenas um momento conjugado p_i mas n momentos conjugados p_i^μ ($\mu = 1, \dots, n$), onde n é a dimensão da variedade espaço-tempo subjacente. Em coordenadas locais, esta construção recorre aos trabalhos clássicos de De Donder e Weyl nos 1930’s [6, 39]. No entanto, a formulação global é muito mais recente: foi iniciada nos 1970’s por um grupo de físicos matemáticos, principalmente na Polônia [21, 23, 24] mas também em

outras partes do mundo [15, 18], e foi definitivamente estabelecida nos 1990's [3, 16]; uma exposição detalhada, com vários exemplos, pode ser encontrada no "GIMmsy paper" [17].

Os dois formalismos, embora inteiramente covariantes e dirigidos para o mesmo objetivo último, são completamente diferentes na natureza; cada um deles tem seus próprios méritos e inconvenientes.

- O formalismo multissimplético é manifestamente consistente com os princípios básicos da teoria dos campos, em particular o de localidade, e é matematicamente rigoroso pois usa apenas métodos bem estabelecidos do cálculo em variedades de dimensão finita. Por outro lado, não parece permitir nenhuma definição óbvia do colchete de Poisson entre observáveis. De fato, a proposta original de simplesmente adotar a mesma fórmula (9) da mecânica cria um problema sério, a saber que a identidade de Jacobi deixa de ser válida. Este defeito foi recentemente corrigido modificando a definição pela adição de um termo exato [11, 12], mas várias outras dificuldades não foram superadas, entre elas a aparente inexistência de um produto associativo com unidade em relação ao qual este colchete de Poisson satisfaria uma regra de Leibniz. Ademais, a introdução de n momentos conjugados a cada coordenada obscurece a dualidade usual entre variáveis canonicamente conjugadas (tais como momentos e posições), que desempenha um papel fundamental em todos os métodos conhecidos de quantização. Uma solução definitiva destes problemas ainda precisa ser encontrada.
- O formalismo funcional covariante está em concordância com os princípios que regem a geometria simplética; em particular, ele admite uma definição natural do colchete de Poisson, devida a Peierls [32] e elaborada posteriormente por DeWitt [7–9], que preserva a dualidade entre variáveis canonicamente conjugadas. Por outro lado, sendo de natureza intrinsecamente global, tal abordagem obscurece a implementação do princípio de localidade. Além disso, este formalismo não pode ser considerado matematicamente rigoroso, uma vez que está essencialmente restrito à aplicação formal de métodos do cálculo em variedades, extrapolados ao caso de dimensão infinita: transformar os resultados formais assim obtidos em teoremas matemáticos é um problema separado, frequentemente bem complexo e difícil.

A relação exata entre as duas formulações vem sendo buscada desde os 1970's mas ainda está longe de ser completamente entendida. Avanços significativos tem sido alcançados nos últimos anos e o presente trabalho pretende contribuir nesta direção.

Os resultados principais desta tese encontram-se no Capítulo 3; são os Teoremas 3.2 e 3.3. O segundo e o último deles estabelecem uma estreita relação entre o colchete de Poisson do formalismo multissimplético [11, 12] entre formas diferenciais no espaço de multifase comum e o colchete de Peierls-DeWitt entre funcionais definidos a partir de tais formas, para o caso

especial em que as referidas formas são formas hamiltonianas de grau $n - 1$ e os funcionais correspondentes são obtidos, essencialmente, por pull-back destas formas com uma solução das equações de movimento do modelo e subsequente integração sobre uma subvariedade de codimensão 1 do espaço-tempo, tipicamente uma hipersuperfície de Cauchy.

Outro aspecto do nosso trabalho é a tentativa de identificar, dentro do formalismo multisimplético, um objeto análogo ao tensor de Poisson do formalismo simplético. No contexto da mecânica, o tensor de Poisson π é o dual da forma simplética ω , o que em coordenadas locais de Darboux (q^i, p_i) pode ser representado pela fórmula

$$\omega = dq^i \wedge dp_i, \quad \pi = \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (12)$$

Por outro lado, a relação entre o tensor de Poisson e o colchete de Poisson entre funções sobre o espaço de fase é estabelecida pela equação (4) que, quando escrita em coordenadas locais de Darboux (q^i, p_i) , leva à fórmula padrão

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (13)$$

Afirmações análogas, pelo menos em nível formal, valem para o formalismo funcional covariante da teoria dos campos: Aqui, a forma simplética funcional Ω é dada pela integral da “corrente simplética” de Crnković, Witten e Zuckerman [4,5,41] (veja também [40]) sobre uma hipersuperfície de Cauchy Σ no espaço-tempo M , enquanto que o colchete de Peierls-DeWitt, que segundo o resultado principal de [14,34] é o colchete de Poisson correspondente, conforme o análogo funcional das equações (8) e (9), é dado por uma integral dupla envolvendo a função de Green causal do operador linearizado. Isso pode ser interpretado como dizendo que o tensor de Poisson funcional Π correspondente, conforme o análogo funcional da equação (4), é um operador integral em $M \times M$ cujo núcleo é a referida função de Green causal.

No caso do formalismo multissimplético, uma possível proposta para um tensor de Poisson consistiria em introduzir, como dual da forma multissimplética ω , que é de grau $n + 1$, um campo multivetorial π , também de grau $n + 1$, tal que em coordenadas locais adaptadas onde

$$\omega = dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu - dp \wedge d^n x, \quad (14)$$

teríamos

$$\pi = \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \wedge \frac{\partial^n}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial^n}{\partial x}. \quad (15)$$

Entretanto, ao contrário de ω , este objeto não é um campo tensorial, pois não se transforma de maneira natural sob mudança de coordenadas. Outro problema é que a definição ingênua de um colchete de Poisson a partir de uma expressão análoga à da mecânica clássica, tal que

$$\{f, g\} = i_{\pi}(df \wedge dg), \quad (16)$$

é insatisfatória.

Como será mostrado no Capítulo 2 desta tese, o primeiro problema pode ser resolvido pela introdução de um referencial apropriado, geralmente não holônomo, que chamaremos de referencial de Darboux e que pode ser definido a partir de um conjunto apropriado de conexões Γ , em relação ao qual

$$\omega = e^i \wedge e_i^\mu \wedge e_\mu^n - e_0 \wedge e^n, \quad (17)$$

e

$$\pi_{\Gamma} = e_i \wedge e_\mu^i \wedge e_\mu^n - e^0 \wedge e_n. \quad (18)$$

Mais exatamente, provamos que o campo multivetorial π_{Γ} é completamente determinado em termos de

- uma conexão geral no espaço de configuração E ,
- uma conexão linear parcial no fibrado vertical VE de E ao longo de VE ,
- uma conexão linear na variedade base M .

No entanto, é claro que a introdução de tais conexões configura uma estrutura adicional cuja interpretação física permanece obscura. Portanto, o resultado desta investigação é uma afirmação negativa: não parece existir um conceito natural de tensor de Poisson na geometria multissimplética.

1. Introdução

2. O que é a Matemática? 2

3. A Matemática e a Física 3

4. A Matemática e a Química 4

5. A Matemática e a Biologia 5

6. A Matemática e a História 6

7. A Matemática e a Arte 7

8. A Matemática e a Filosofia 8

9. A Matemática e a Tecnologia 9

10. A Matemática e a Sociedade 10

11. A Matemática e o Futuro 11

12. Conclusão 12

13. Referências 13

14. Anexos 14

15. Índice 15

16. Glossário 16

17. Bibliografia 17

18. Notas 18

19. Comentários 19

20. Conclusão 20

21. Referências 21

22. Anexos 22

23. Índice 23

24. Glossário 24

25. Bibliografia 25

26. Notas 26

27. Comentários 27

28. Conclusão 28

29. Referências 29

30. Anexos 30

31. Índice 31

32. Glossário 32

33. Bibliografia 33

34. Notas 34

35. Comentários 35

36. Conclusão 36

37. Referências 37

38. Anexos 38

39. Índice 39

40. Glossário 40

41. Bibliografia 41

42. Notas 42

43. Comentários 43

44. Conclusão 44

45. Referências 45

46. Anexos 46

47. Índice 47

48. Glossário 48

49. Bibliografia 49

50. Notas 50

51. Comentários 51

52. Conclusão 52

53. Referências 53

54. Anexos 54

55. Índice 55

56. Glossário 56

57. Bibliografia 57

58. Notas 58

59. Comentários 59

60. Conclusão 60

61. Referências 61

62. Anexos 62

63. Índice 63

64. Glossário 64

65. Bibliografia 65

66. Notas 66

67. Comentários 67

68. Conclusão 68

69. Referências 69

70. Anexos 70

71. Índice 71

72. Glossário 72

73. Bibliografia 73

74. Notas 74

75. Comentários 75

76. Conclusão 76

77. Referências 77

78. Anexos 78

79. Índice 79

80. Glossário 80

81. Bibliografia 81

82. Notas 82

83. Comentários 83

84. Conclusão 84

85. Referências 85

86. Anexos 86

87. Índice 87

88. Glossário 88

89. Bibliografia 89

90. Notas 90

91. Comentários 91

92. Conclusão 92

93. Referências 93

94. Anexos 94

95. Índice 95

96. Glossário 96

97. Bibliografia 97

98. Notas 98

99. Comentários 99

100. Conclusão 100

101. Referências 101

102. Anexos 102

103. Índice 103

104. Glossário 104

105. Bibliografia 105

106. Notas 106

107. Comentários 107

108. Conclusão 108

109. Referências 109

110. Anexos 110

111. Índice 111

112. Glossário 112

113. Bibliografia 113

114. Notas 114

115. Comentários 115

116. Conclusão 116

117. Referências 117

118. Anexos 118

119. Índice 119

120. Glossário 120

121. Bibliografia 121

122. Notas 122

123. Comentários 123

124. Conclusão 124

125. Referências 125

126. Anexos 126

127. Índice 127

128. Glossário 128

129. Bibliografia 129

130. Notas 130

131. Comentários 131

132. Conclusão 132

133. Referências 133

134. Anexos 134

135. Índice 135

136. Glossário 136

137. Bibliografia 137

138. Notas 138

139. Comentários 139

140. Conclusão 140

141. Referências 141

142. Anexos 142

143. Índice 143

144. Glossário 144

145. Bibliografia 145

146. Notas 146

147. Comentários 147

148. Conclusão 148

149. Referências 149

150. Anexos 150

151. Índice 151

152. Glossário 152

153. Bibliografia 153

154. Notas 154

155. Comentários 155

156. Conclusão 156

157. Referências 157

158. Anexos 158

159. Índice 159

160. Glossário 160

161. Bibliografia 161

162. Notas 162

163. Comentários 163

164. Conclusão 164

165. Referências 165

166. Anexos 166

167. Índice 167

168. Glossário 168

169. Bibliografia 169

170. Notas 170

171. Comentários 171

172. Conclusão 172

173. Referências 173

174. Anexos 174

175. Índice 175

176. Glossário 176

177. Bibliografia 177

178. Notas 178

179. Comentários 179

180. Conclusão 180

181. Referências 181

182. Anexos 182

183. Índice 183

184. Glossário 184

185. Bibliografia 185

186. Notas 186

187. Comentários 187

188. Conclusão 188

189. Referências 189

190. Anexos 190

191. Índice 191

192. Glossário 192

193. Bibliografia 193

194. Notas 194

195. Comentários 195

196. Conclusão 196

197. Referências 197

198. Anexos 198

199. Índice 199

200. Glossário 200

201. Bibliografia 201

202. Notas 202

203. Comentários 203

204. Conclusão 204

205. Referências 205

206. Anexos 206

207. Índice 207

208. Glossário 208

209. Bibliografia 209

210. Notas 210

211. Comentários 211

212. Conclusão 212

213. Referências 213

214. Anexos 214

215. Índice 215

216. Glossário 216

217. Bibliografia 217

218. Notas 218

219. Comentários 219

220. Conclusão 220

221. Referências 221

222. Anexos 222

223. Índice 223

224. Glossário 224

225. Bibliografia 225

226. Notas 226

227. Comentários 227

228. Conclusão 228

229. Referências 229

230. Anexos 230

231. Índice 231

232. Glossário 232

233. Bibliografia 233

234. Notas 234

235. Comentários 235

236. Conclusão 236

237. Referências 237

238. Anexos 238

239. Índice 239

240. Glossário 240

241. Bibliografia 241

242. Notas 242

243. Comentários 243

244. Conclusão 244

245. Referências 245

246. Anexos 246

247. Índice 247

248. Glossário 248

249. Bibliografia 249

250. Notas 250

251. Comentários 251

252. Conclusão 252

253. Referências 253

254. Anexos 254

255. Índice 255

256. Glossário 256

257. Bibliografia 257

258. Notas 258

259. Comentários 259

260. Conclusão 260

261. Referências 261

262. Anexos 262

263. Índice 263

264. Glossário 264

265. Bibliografia 265

266. Notas 266

267. Comentários 267

268. Conclusão 268

269. Referências 269

270. Anexos 270

271. Índice 271

272. Glossário 272

273. Bibliografia 273

274. Notas 274

275. Comentários 275

276. Conclusão 276

277. Referências 277

278. Anexos 278

279. Índice 279

280. Glossário 280

281. Bibliografia 281

282. Notas 282

283. Comentários 283

284. Conclusão 284

285. Referências 285

286. Anexos 286

287. Índice 287

288. Glossário 288

289. Bibliografia 289

290. Notas 290

291. Comentários 291

292. Conclusão 292

293. Referências 293

294. Anexos 294

295. Índice 295

296. Glossário 296

297. Bibliografia 297

298. Notas 298

299. Comentários 299

300. Conclusão 300

301. Referências 301

302. Anexos 302

303. Índice 303

304. Glossário 304

305. Bibliografia 305

306. Notas 306

307. Comentários 307

308. Conclusão 308

309. Referências 309

310. Anexos 310

311. Índice 311

312. Glossário 312

313. Bibliografia 313

314. Notas 314

315. Comentários 315

316. Conclusão 316

317. Referências 317

318. Anexos 318

319. Índice 319

320. Glossário 320

321. Bibliografia 321

322. Notas 322

323. Comentários 323

324. Conclusão 324

325. Referências 325

326. Anexos 326

327. Índice 327

328. Glossário 328

329. Bibliografia 329

330. Notas 330

331. Comentários 331

332. Conclusão 332

333. Referências 333

334. Anexos 334

335. Índice 335

336. Glossário 336

337. Bibliografia 337

338. Notas 338

339. Comentários 339

340. Conclusão 340

341. Referências 341

342. Anexos 342

343. Índice 343

344. Glossário 344

345. Bibliografia 345

346. Notas 346

347. Comentários 347

348. Conclusão 348

349. Referências 349

350. Anexos 350

351. Índice 351

352. Glossário 352

353. Bibliografia 353

354. Notas 354

355. Comentários 355

356. Conclusão 356

357. Referências 357

358. Anexos 358

359. Índice 359

360. Glossário 360

361. Bibliografia 361

362. Notas 362

363. Comentários 363

364. Conclusão 364

365. Referências 365

366. Anexos 366

367. Índice 367

368. Glossário 368

369. Bibliografia 369

370. Notas 370

371. Comentários 371

372. Conclusão 372

373. Referências 373

374. Anexos 374

375. Índice 375

376. Glossário 376

377. Bibliografia 377

378. Notas 378

379. Comentários 379

380. Conclusão 380

381. Referências 381

382. Anexos 382

383. Índice 383

384. Glossário 384

385. Bibliografia 385

386. Notas 386

387. Comentários 387

388. Conclusão 388

389. Referências 389

390. Anexos 390

391. Índice 391

392. Glossário 392

393. Bibliografia 393

394. Notas 394

395. Comentários 395

396. Conclusão 396

397. Referências 397

398. Anexos 398

399. Índice 399

400. Glossário 400

401. Bibliografia 401

402. Notas 402

403. Comentários 403

404. Conclusão 404

405. Referências 405

406. Anexos 406

407. Índice 407

408. Glossário 408

409. Bibliografia 409

410. Notas 410

411. Comentários 411

412. Conclusão 412

413. Referências 413

414. Anexos 414

415. Índice 415

416. Glossário 416

417. Bibliografia 417

418. Notas 418

419. Comentários 419

420. Conclusão 420

421. Referências 421

422. Anexos 422

423. Índice 423

424. Glossário 424

425. Bibliografia 425

426. Notas 426

427. Comentários 427

428. Conclusão 428

429. Referências 429

430. Anexos 430

431. Índice 431

432. Glossário 432

433. Bibliografia 433

434. Notas 434

435. Comentários 435

436. Conclusão 436

437. Referências 437

438. Anexos 438

439. Índice 439

440. Glossário 440

441. Bibliografia 441

442. Notas 442

443. Comentários 443

444. Conclusão 444

445. Referências 445

446. Anexos 446

447. Índice 447

448. Glossário 448

449. Bibliografia 449

450. Notas 450

451. Comentários 451

452. Conclusão 452

453. Referências 453

454. Anexos 454

455. Índice 455

456. Glossário 456

457. Bibliografia 457

458. Notas 458

459. Comentários 459

460. Conclusão 460

461. Referências 461

462. Anexos 462

463. Índice 463

464. Glossário 464

465. Bibliografia 465

466. Notas 466

467. Comentários 467

468. Conclusão 468

469. Referências 469

470. Anexos 470

471. Índice 471

472. Glossário 472

473. Bibliografia 473

474. Notas 474

475. Comentários 475

476. Conclusão 476

477. Referências 477

478. Anexos 478

479. Índice 479

480. Glossário 480

481. Bibliografia 481

482. Notas 482

483. Comentários 483

484. Conclusão 484

485. Referências 485

486. Anexos 486

487. Índice 487

488. Glossário 488

489. Bibliografia 489

490. Notas 490

491. Comentários 491

492. Conclusão 492

493. Referências 493

494. Anexos 494

495. Índice 495

496. Glossário 496

497. Bibliografia 497

498. Notas 498

499. Comentários 499

500. Conclusão 500

Formalismo multissimplético

Durante os últimos anos, evidenciou-se cada vez mais que o âmbito matemático adequado para a formulação geométrica da teoria clássica dos campos é o que pode ser chamado de geometria multissimplética. Esta extensão da geometria simplética, que na física corresponde à passagem da mecânica à teoria dos campos, teve início nos trabalhos de Cartan, De Donder e Weyl. A idéia central deste formalismo é tratar todas as variáveis espaço-temporais da teoria dos campos (e não apenas a variável temporal) da mesma maneira que a variável temporal da mecânica. Assim, em um sistema com N graus internos de liberdade sobre um espaço-tempo n -dimensional M , teremos para cada campo clássico φ^i ($i = 1, \dots, N$) não somente um campo conjugado mas n campos conjugados π_i^μ ($i = 1, \dots, N, \mu = 1, \dots, n$). No formalismo lagrangiano, onde a dinâmica de um modelo é determinada pela densidade lagrangiana $L(x^\mu, \varphi^i, \partial_\mu \varphi^i)$, estes campos conjugados são obtidos pela correspondente transformação de Legendre, i.e.,

$$\pi_i^\mu = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^i}, \quad (1.1)$$

e a *hamiltoniana covariante* ou *hamiltoniana de De Donder - Weyl* é

$$H(x^\mu, \varphi^i, \pi_i^\mu) = \pi_i^\mu \partial_\mu \varphi^i - L. \quad (1.2)$$

No formalismo lagrangiano, as equações do movimento são as *equações de Euler - Lagrange*

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} = 0. \quad (1.3)$$

Sob passagem ao formalismo hamiltoniano, obtemos como equações de movimento as *equações de De Donder - Weyl*

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_i^\mu} = \partial_\mu \varphi^i, \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi^i} = -\partial_\mu \pi_i^\mu. \quad (1.4)$$

Mediante condições de regularidade para L e/ou H , essas duas versões de equações de movimento são equivalentes.

Observemos a similaridade com a situação encontrada na mecânica. De fato, veremos na primeira seção que, quando $n = 1$, recuperamos a mecânica (não-autônoma). A principal novidade reside no fato de que, em geral, temos n multimomenta π_i^μ associados a cada grau de liberdade φ^i . Outras diferenças estão na natureza das variáveis, tanto das independentes como das dependentes: Na mecânica usa-se simplesmente uma cópia da reta real \mathbb{R} para representar o tempo, enquanto que na teoria dos campos o espaço-tempo é modelado por uma variedade M que nem sempre será trivial. Na mecânica, as variáveis dinâmicas são representadas por curvas em uma variedade “interna” Q , chamada de espaço de configuração, enquanto que, como explicamos com mais detalhes na segunda seção, na teoria dos campos elas são representadas por seções de um fibrado E sobre M que também nem sempre será trivial (é da forma $M \times Q$ apenas localmente). Para acomodar derivadas, o papel análogo ao do fibrado tangente TQ de Q na mecânica é desempenhado pelo fibrado dos jatos JE (de primeira ordem) de E [35]. De forma semelhante, o papel análogo ao do fibrado cotangente T^*Q de Q na mecânica é desempenhado por um dos duais de JE , mais exatamente o dual afim torcido $J^\circ E$ de JE . Além destes, o formalismo também usa o fibrado dos jatos linearizado $\vec{J}E$ de E e seu dual linear torcido $\vec{J}^\circ E$. A construção destes objetos será apresentada na terceira e quarta seção. Também incluímos uma breve exposição do processo de levantamento canônico de automorfismos (infinitesimais) do fibrado E sobre M para automorfismos (infinitesimais) do fibrado dos jatos JE e dos seus vários duais, assim como sua ação sobre seções destes fibrados. Na quinta seção, discutimos a construção da forma multicanônica θ e da forma multissimplética ω sobre $J^\circ E$ e introduzimos a forma multicanônica $\theta_{\mathcal{H}}$ e a forma multissimplética $\omega_{\mathcal{H}}$ sobre $\vec{J}^\circ E$ associadas a uma hamiltoniana \mathcal{H} , que é uma seção de $J^\circ E$ visto como fibrado afim em linhas sobre $\vec{J}^\circ E$, obtidas simplesmente por pull-back [3]. Também abordamos as relações entre θ , ω e o campo de Euler Σ sobre $J^\circ E$ que existe em função de $J^\circ E$ ser o espaço total de um fibrado vetorial sobre E . Assim, verifica-se porque o dual afim torcido $J^\circ E$ de JE é o espaço de multifase estendido e o dual linear torcido $\vec{J}^\circ E$ é o espaço de multifase comum da geometria multissimplética. Na sexta seção, introduzimos campos vetoriais localmente hamiltonianos e exatamente hamiltonianos sobre $J^\circ E$ assim como sobre $\vec{J}^\circ E$ e apresentamos resultados sobre sua estrutura que, no primeiro caso, foram obtidos recentemente em [13]. Na sétima seção, recordamos o conceito de $(n - 1)$ -formas hamiltonianas e a definição do colchete de Poisson de tais formas segundo a filosofia geral adotada em [11–13, 20]. Estes resultados serão importantes para a demonstração do teorema principal desta tese, que está no Capítulo 3.

1.1 Mecânica de sistemas não-autônomos

Todas as formulações usuais da mecânica clássica baseiam-se no preceito de tratar a variável independente, o tempo, como um parâmetro externo de evolução. Aspectos geométricos que levam à introdução de variedades não-triviais, seja como modelo para o espaço de configuração Q , seja como modelo para o espaço de fase P , não afetam a variável tempo t que parametriza as curvas em Q ou P representando as soluções das equações de movimento. Claramente, esta independência de t das variáveis dinâmicas do sistema é uma expressão do axioma do tempo absoluto de Newton. No entanto, sabemos que este ponto de vista não poderá ser mantido quando queremos incorporar o princípio da relatividade – seja restrita, seja geral. Portanto, faz-se necessário, como primeiro passo, adaptar o formalismo de tal forma a colocar a variável tempo em evidência.

A inclusão da variável tempo dentro do formalismo geral da mecânica torna-se imprescindível, mesmo no âmbito da mecânica clássica newtoniana, para a descrição de sistemas não-autônomos, tais como a mecânica de partículas ou sistemas de partículas em campos externos que dependem explicitamente do tempo. O procedimento padrão para tratar desta situação no contexto lagrangiano consiste em substituir o espaço de configuração Q , com coordenadas locais típicas q^i , pelo produto cartesiano $\mathbb{R} \times Q$, com coordenadas locais típicas (t, q^i) , e o espaço de velocidades TQ , com coordenadas locais típicas (q^i, \dot{q}^i) , pelo produto cartesiano $\mathbb{R} \times TQ$, com coordenadas locais típicas (t, q^i, \dot{q}^i) , permitindo assim a inclusão de lagrangianas L que dependem explicitamente do tempo ($L = L(t, q^i, \dot{q}^i)$). De maneira análoga, no contexto hamiltoniano devemos substituir o espaço de fase P , com coordenadas locais típicas (q^i, p_i) , pelo produto cartesiano $\mathbb{R} \times P$, com coordenadas locais típicas (t, q^i, p_i) , permitindo assim a inclusão de hamiltonianas H que dependem explicitamente do tempo ($H = H(t, q^i, p_i)$). Globalmente, se P for uma variedade simplética, $\mathbb{R} \times P$ vem munido de uma dois-forma fechada que é simplesmente o pull-back da forma simplética de P pela projeção sobre o segundo fator; no entanto, esta dois-forma é degenerada, com núcleo que forma uma distribuição involutiva uni-dimensional. Este tipo de estrutura tem sido axiomatizado sob o título de “variedades de contato”. Como veremos ela admite uma extensão natural à teoria dos campos, porém não-degenerada.

A solução do problema de definir uma versão estendida do conceito de espaço de fase que inclua a variável tempo mas sem alterar o tipo de modelo matemático empregado já foi claramente enunciada por Cartan. Ao invés do “espaço de fase simplesmente estendido” $\mathbb{R} \times P$, com coordenadas locais típicas (t, q^i, p_i) , considere o “espaço de fase duplamente estendido” $\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}$, com coordenadas locais típicas (t, q^i, p_i, p) , onde p é uma variável com a dimensão física de uma energia. (Usamos o símbolo p , ao invés de E , para evitar uma mudança de notação na hora da passagem da mecânica para a teoria dos campos.) Obviamente, como \mathbb{R}^2 é o fibrado cotangente de \mathbb{R} , $\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}$ será uma variedade do mesmo tipo que P : se $P = T^*Q$ com forma canônica dada por $\theta_P = p_i dq^i$, então

$\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R} = T^*(\mathbb{R} \times Q)$ com forma canônica dada por

$$\theta = p_i dq^i + p dt, \quad (1.5)$$

enquanto que se P for variedade simplética com forma simplética dada por $\omega_P = dq^i \wedge dp_i$, então $\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}$ também será variedade simplética, com forma simplética dada por

$$\omega = dq^i \wedge dp_i - dp \wedge dt, \quad (1.6)$$

e finalmente se P for variedade de Poisson com tensor de Poisson π_P , $\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}$ também será variedade de Poisson, com tensor de Poisson dado por

$$\pi = \pi_P - \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Uma outra vantagem de incluir a variável tempo nos diversos espaços que descrevem as variáveis dinâmicas é que este procedimento permite abordar o conceito das “simetrias locais” que estão no coração das modernas teorias de calibre, de suma importância na formulação de modelos para as interações fundamentais na física das partículas. Em geral, simetrias contínuas são descritas por algum grupo de Lie G em conjunto com uma ação deste grupo sobre o espaço de variáveis dinâmicas pertinente. A formulação padrão da mecânica permite considerar apenas “simetrias globais”, onde as transformações de simetria são independentes do tempo. A inclusão de “simetrias locais” requer permitir que as transformações de simetria possam depender explicitamente do tempo; tais simetrias locais são geralmente conhecidas como “transformações de calibre”. Em termos geométricos, isto significa considerar os espaços estendidos $\mathbb{R} \times Q$, $\mathbb{R} \times TQ$, $\mathbb{R} \times P$, $\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}$ etc. como fibrados sobre a reta real que representa o tempo, abrindo assim a possibilidade de interpretar transformações de calibre como mudanças de trivialização nestes fibrados. Observa-se que segundo um teorema geral de topologia, todos os fibrados sobre \mathbb{R} são triviais, mas vale salientar que não existe em geral nenhuma trivialização preferida, e portanto o “princípio de invariância de calibre”, ou seja, o princípio de invariância sob mudança de trivialização, continua sendo de grande importância mesmo nesta situação.

Como exemplo, podemos notar que aplicando o princípio de invariância de calibre a qualquer um dos espaços estendidos acima mencionados elimina o status privilegiado da segunda projeção. Em particular, isso significa que a projeção de $\mathbb{R} \times P$ sobre P usada na definição da estrutura de contato sobre $\mathbb{R} \times P$ não é invariante de calibre. Este fato é a origem das dificuldades encontradas em tentativas de formular a mecânica hamiltoniana de partículas acopladas a campos eletromagnéticos e/ou de Yang-Mills usando o formalismo de variedades de contato.

A reinterpretção de $\mathbb{R} \times Q$ como fibrado sobre \mathbb{R} acarreta uma série de consequências não-triviais. Primeiro, permite concluir que $\mathbb{R} \times TQ$ é na verdade o fibrado dos jatos (de

primeira ordem) de $\mathbb{R} \times Q$. Como tal, este é novamente um fibrado sobre \mathbb{R} mas também é um fibrado sobre $\mathbb{R} \times Q$, e mais precisamente, um fibrado afim. Podemos perguntar por que não seria um fibrado vetorial, já que TQ é um fibrado vetorial sobre Q . A razão da perda da estrutura linear é justamente a possibilidade de efetuar transformações de calibre, ou seja, transformações de coordenadas locais na variedade Q que podem depender do tempo. Neste caso, a lei de transformação para as coordenadas locais induzidas em TQ adquire, além do termo linear envolvendo a jacobiana, um termo constante envolvendo a derivada temporal. Os espaços de fase duplamente estendido $\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}$ e simplesmente estendido $\mathbb{R} \times P$ podem então ser definidos como, respectivamente, o dual afim do fibrado dos jatos e o dual linear do fibrado dos jatos linearizado, sendo o primeiro um fibrado afim em linhas sobre o segundo. Como resultado, é possível considerar a hamiltoniana de um sistema mecânico como uma seção deste fibrado ($\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times P$): em coordenadas locais, é definida por $(t, q^i, p_i) \mapsto (t, q^i, p_i, p)$ com¹

$$p = -H(t, q^i, p_i).$$

Ademais, soluções das equações de movimento tornam-se seções dos fibrados $\mathbb{R} \times Q$ (no caso lagrangiano) ou $\mathbb{R} \times P$ (no caso hamiltoniano) sobre \mathbb{R} : em coordenadas locais, são dadas por $t \mapsto (t, q^i(t))$ ou $t \mapsto (t, q^i(t), p_i(t))$, respectivamente.

Uma descrição mais detalhada destas construções, num contexto bem mais geral, será apresentada na próxima seção. Por enquanto, mencionamos apenas que as formas θ e ω , assim como o tensor de Poisson π , dados em coordenadas locais pelas equações (1.5), (1.6) e (1.7), possuem um significado global, ou seja, independente da escolha de um sistema de coordenadas, mesmo quando admitirmos transformações de coordenadas $q^i \rightarrow q'^k$ que dependem do tempo. Esta invariância adicional é altamente não-trivial e não pode ser deduzida de nenhum dos argumentos apresentados anteriormente, mas ela pode ser verificada ou por cálculo explícito ou como resultado das construções globais a serem discutidas na próxima seção.

1.2 Campos como seções de fibrados

O ponto inicial para a formulação geométrica da teoria clássica dos campos é a escolha de um *fibrado de configuração*, que em general pode ser um fibrado sobre um espaço-tempo cujas seções sejam os campos da teoria sob consideração. No que segue, denotaremos seu espaço total por E , seu espaço base por M , sua fibra típica por Q e a projeção de E sobre M por π ; as dimensões são

$$\dim M = n, \quad \dim Q = N, \quad \dim E = n + N. \quad (1.8)$$

¹O sinal nesta equação é meramente convencional.

De forma geral, M é interpretado como *espaço-tempo* enquanto Q é o *espaço de configuração* da teoria – uma variedade cujas coordenadas (locais) descrevem graus internos de liberdade.² O espaço total E é localmente mas não necessariamente globalmente isomorfo ao produto cartesiano $M \times Q$, mas deve-se salientar que mesmo quando o fibrado de configuração for globalmente trivial, não existe em geral nenhuma trivialização preferida, e é precisamente a liberdade de mudar de trivialização que permite incorporar as teorias do calibre neste contexto. Um outro ponto que merece ser enfatizado é que o fibrado de configuração em geral não possui nenhuma estrutura adicional: estas aparecem somente quando nos focalizamos em classes especiais de modelos.

- *Fibrados vetoriais* surgem naturalmente nas teorias com *campos lineares de matéria* e também na relatividade geral: o tensor métrico é um exemplo.
- *Fibrados afins* podem ser empregados para acomodar *campos de calibre*, uma vez que conexões principais em um fibrado principal P sobre o espaço-tempo M podem ser vistas como seções do *fibrado das conexões* de P – um fibrado afim CP sobre M construído a partir de P .
- *Fibrados gerais* são empregados para acomodar *campos não-lineares de matéria*, em particular aqueles que correspondem à aplicações do espaço-tempo M para alguma variedade alvo Q : um exemplo padrão são os modelos sigma não-lineares.

Para cobrir toda esta variedade de situações, as construções gerais nas quais se baseia a formulação geométrica da teoria clássica dos campos não devem depender da escolha de qualquer estrutura adicional no fibrado de configuração. Esta exigência é satisfeita naturalmente no formalismo do espaço de multifase – ao contrário de muitas propostas que se encontram na literatura: na sua maioria, estas dependem da escolha *a priori* de uma conexão no fibrado de configuração, excluindo assim as teorias de calibre nas quais conexões devem ser tratadas como variáveis dinâmicas e não como campos de fundo fixos.

Neste formalismo, simetrias são realizadas por *automorfismos* do fibrado E sobre M e geradores de grupos a um parâmetro de simetrias por *campos vetoriais projetáveis* sobre E .

Um *automorfismo* de um fibrado geral E sobre M com projeção π é um difeomorfismo $\Phi_E : E \rightarrow E$ que preserva fibras. Isto implica que Φ_E induz um difeomorfismo $\Phi_M : M \rightarrow M$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi_E} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\Phi_M} & M \end{array} \quad (1.9)$$

²Esta interpretação muda na teoria das cordas e das membranas.

é comutativo; dizemos que Φ_E é um automorfismo de fibrados *sobre* Φ_M . Como caso especial, um automorfismo Φ_E de E é chamado *estrito* se Φ_M for a identidade. Podemos introduzir ainda o *suporte* de um difeomorfismo Φ_M de M como sendo o fecho do conjunto de pontos em M sobre os quais ele não age como a identidade,

$$\text{supp } \Phi_M = \overline{\{x \in M / \Phi_M(x) \neq x\}} , \quad (1.10)$$

e de forma similar, o *suporte na base* de um automorfismo Φ_E de E como sendo o fecho do conjunto de pontos de M para os quais ele não age como a identidade na fibra respectiva,

$$\text{supp } \Phi_E = \overline{\{x \in M / \Phi_E(e) \neq e \text{ para algum } e \in E_x\}} . \quad (1.11)$$

Passando a campos vetoriais como geradores de grupos a um parâmetro de difeomorfismos, através do seu fluxo, diremos que um campo vetorial X_E sobre E é *projetável* se vale

$$T_{e_1} \pi(X_E(e_1)) = T_{e_2} \pi(X_E(e_2)) \quad \text{para } e_1, e_2 \in E \text{ com } \pi(e_1) = \pi(e_2) , \quad (1.12)$$

onde $T\pi : TE \rightarrow TM$ é a aplicação tangente à projeção $\pi : E \rightarrow M$. Isto implica que X_E induz um campo vetorial X_M sobre M ao qual é π -relacionado:

$$X_M(x) = T_e \pi(X_E(e)) \quad \text{para } x \in M \text{ e } e \in E \text{ com } \pi(e) = x . \quad (1.13)$$

Também diremos que X_E *recobre* X_M . Como caso especial, um campo vetorial projetável X_E sobre E é chamado *vertical* se X_M for zero. Às vezes, é conveniente pensar em um automorfismo Φ de um fibrado como o par (Φ_E, Φ_M) e em um campo vetorial projetável X sobre um fibrado como o par (X_E, X_M) . Finalmente, cabe mencionar que um termo alternativo para “campo vetorial projetável” é “automorfismo infinitesimal de fibrado”.

Um ponto importante para este trabalho é entender como automorfismos e automorfismos infinitesimais de fibrados agem sobre suas seções. Primeiro, a ação de um automorfismo $\Phi = (\Phi_E, \Phi_M)$ sobre uma seção φ de E fornece uma nova seção $\Phi \cdot \varphi$ de E , dada por:

$$(\Phi \cdot \varphi)(x) = \Phi_E \cdot (\varphi(\Phi_M^{-1}(x))) \quad \text{para } x \in M . \quad (1.14)$$

Segundo, a ação de um automorfismo infinitesimal $X = (X_E, X_M)$ sobre uma seção φ de E fornece uma seção $\delta_X \varphi$ do fibrado vetorial $\varphi^*(VE)$ sobre M que é o pull-back do fibrado vertical VE de E via φ , obtida da fórmula anterior por diferenciação em relação ao parâmetro de fluxo:

$$\delta_X \varphi(x) = X_E(\varphi(x)) - T_{x\varphi} \cdot X_M(x) \quad \text{para } x \in M . \quad (1.15)$$

Em coordenadas locais adaptadas, constituídas por coordenadas locais x^μ para a variedade base M , coordenadas locais q^i para a fibra típica Q e uma trivialização local de E sobre M , temos

$$\delta_X \varphi^i = X^i(\varphi) - \partial_\mu \varphi^i X^\mu . \quad (1.16)$$

1.3 Fibrado dos jatos

A construção do fibrado dos jatos associado a um fibrado geral E é padrão e pode ser encontrada em muitas referências. No caso de jatos de primeira ordem, denotado aqui por JE , ela é particularmente simples. Dado um fibrado E sobre M com projeção π e fibra típica Q , a fibra de JE em cada ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$ é definida por

$$J_e E = \{u \in L(T_x M, T_e E) : T_e \pi \circ u = \text{id}_{T_x M}\}. \quad (1.17)$$

Assim, os elementos de $J_e E$ são exatamente os candidatos para as aplicações tangentes em x de seções (locais) φ do fibrado E satisfazendo $\varphi(x) = e$. Obviamente, $J_e E$ é um subespaço afim do espaço vetorial $L(T_x M, T_e E)$ de todas as aplicações lineares do espaço tangente $T_x M$ para o espaço tangente $T_e E$, sendo o correspondente espaço vetorial de diferenças o espaço vetorial $L(T_x M, V_e E)$ de todas as aplicações lineares do espaço tangente $T_x M$ para o espaço vertical $V_e E$:

$$\vec{J}_e E = L(T_x M, V_e E) \cong T_x^* M \otimes V_e E. \quad (1.18)$$

Variando e em E , obtemos um fibrado afim sobre E em relação à projeção alvo $\tau : JE \rightarrow E$, que é um subfibrado do fibrado vetorial $L(\pi^* TM, TE) \cong \pi^*(T^*M) \otimes TE$, sendo o correspondente fibrado vetorial de diferenças o fibrado vetorial sobre E em relação à projeção alvo $\vec{\tau} : \vec{J}E \rightarrow E$, dado por

$$\vec{J}E = L(\pi^*(TM), VE) \cong \pi^*(T^*M) \otimes VE. \quad (1.19)$$

Em geral, JE e $\vec{J}E$ também são fibrados sobre M em relação às respectivas projeções fonte $\sigma = \pi \circ \tau : JE \rightarrow M$ e $\vec{\sigma} = \pi \circ \vec{\tau} : \vec{J}E \rightarrow M$, porém apenas fibrados gerais sem estrutura adicional. Ocasionalmente, denotaremos JE por $J_E E$ ou por $J_M E$ e $\vec{J}E$ por $\vec{J}_E E$ ou por $\vec{J}_M E$ para enfatizar que estamos considerando-o como fibrado em relação à projeção alvo ou em relação à projeção fonte, respectivamente. Também faremos uso do fato de que os pontos de JE podem ser representados como 1-jatos de seções (locais) de E : para todo ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$, os elementos de $J_e E$ podem ser escritos na forma $u = j_x \varphi$ onde φ é uma seção de E definida em uma vizinhança aberta de x em M tal que $\varphi(x) = e$ e $T_x \varphi = u$.

Na discussão a seguir, tornar-se-á importante que estruturas adicionais sobre o fibrado E possam ser herdadas pelo fibrado $J_M E$. Por exemplo, se E for um fibrado vetorial/afim sobre M então JE também será um fibrado vetorial/afim sobre M . Mais especificamente, é fácil ver que se E for um fibrado vetorial sobre M , então $J_M E$ também o será: basta definir

$$\lambda j_x \varphi + \mu j_x \psi = j_x(\lambda \varphi + \mu \psi) \quad \text{para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \varphi, \psi \in \Gamma(E). \quad (1.20)$$

De modo semelhante, se E for um fibrado afim sobre M e \vec{E} for o correspondente fibrado vetorial de diferenças, então $J_M E$ também será um fibrado afim sobre M e $J_M \vec{E}$ será o

correspondente fibrado vetorial de diferenças: basta definir

$$j_x\varphi + j_x\vec{\varphi} = j_x(\varphi + \vec{\varphi}) \quad \text{para } \varphi \in \Gamma(E), \vec{\varphi} \in \Gamma(\vec{E}). \quad (1.21)$$

Durante o desenvolvimento deste trabalho usaremos sistematicamente cálculos em coordenadas locais. Tipicamente, denotaremos coordenadas locais na base M por x^μ , coordenadas locais na fibra típica Q por q^i e as coordenadas locais no espaço total E induzidas por estas e uma escolha de trivialização local por $(x^\mu; q^i)$.³ Estas por sua vez induzem coordenadas locais em JE e em $\vec{J}E$, que escrevemos na forma $(x^\mu, q^i; q_\mu^i)$ ou $(x^\mu, q^i; \vec{q}_\mu^i)$ quando consideramos JE ou $\vec{J}E$ como fibrado sobre E , na forma $(x^\mu; q^i, q_\mu^i)$ ou $(x^\mu; q^i, \vec{q}_\mu^i)$ quando consideramos JE ou $\vec{J}E$ como fibrado sobre M e na forma (x^μ, q^i, q_μ^i) ou $(x^\mu, q^i, \vec{q}_\mu^i)$ quando não for necessário ou conveniente especificar a projeção. Combinando uma mudança de coordenadas locais $x^\mu \rightarrow x'^\kappa$ em M , uma mudança de coordenadas locais $q^i \rightarrow q'^k$ em Q e uma mudança de trivialização local, obtemos uma mudança de coordenadas locais $(x^\mu, q^i) \rightarrow (x'^\kappa, q'^k)$ em E onde

$$x'^\kappa = x'^\kappa(x), \quad q'^k = q'^k(x, q). \quad (1.22)$$

Esta por sua vez induz mudanças de coordenadas locais $(x^\mu, q^i, q_\mu^i) \rightarrow (x'^\kappa, q'^k, q'_\kappa^k)$ em JE e $(x^\mu, q^i, \vec{q}_\mu^i) \rightarrow (x'^\kappa, q'^k, \vec{q}'_\kappa^k)$ em $\vec{J}E$ que são dadas por

$$q'_\kappa^k = \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} q_\mu^i + \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa}, \quad (1.23)$$

e

$$\vec{q}'_\kappa^k = \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \vec{q}_\mu^i. \quad (1.24)$$

Em particular, se E for um fibrado vetorial/afim sobre M e os q^i assim como os q'^k forem coordenadas lineares/afins ao longo das fibras, então a mudança de coordenadas corresponde a uma transformação de calibre, efetuada por uma matriz (g_i^k) de funções, conforme

$$q'^k(x, q) = g_i^k(x) q^i \quad (1.25)$$

no primeiro caso e por uma matriz (g_i^k) mais um vetor (g^k) de funções, conforme

$$q'^k(x, q) = g_i^k(x) q^i + g^k(x) \quad (1.26)$$

no segundo caso. Em ambos os casos,

$$\frac{\partial q'^k}{\partial q^i}(x, q) = g_i^k(x)$$

³Usamos o símbolo “;” para sinalizar a separação entre “coordenadas horizontais” e “coordenadas verticais”, em relação à uma projeção dada.

e portanto

$$q_{\kappa}^{\prime k} = g_i^k \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime \kappa}} q_{\mu}^i + \partial_{\mu} g_i^k \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime \kappa}} q^i, \quad (1.27)$$

ou

$$q_{\kappa}^{\prime k} = g_i^k \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime \kappa}} q_{\mu}^i + \partial_{\mu} g_i^k \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime \kappa}} q^i + \partial_{\mu} g^k \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime \kappa}}, \quad (1.28)$$

respectivamente, confirmando assim a afirmação acima de que E sendo um fibrado vetorial/afim sobre M então JE também é.

1.3.1 Levantamento canônico

O próximo passo a ser discutido é o levantamento canônico de automorfismos e, passando para grupos a um parâmetro, o levantamento canônico de automorfismos infinitesimais, i.e., de campos vetoriais projetáveis, de E para $\vec{J}E$ e para JE . No final discutiremos a ação destes levantamentos sobre seções de $\vec{J}E$ e de JE .

Um automorfismo do fibrado E pode ser levantado para um automorfismo do fibrado dos jatos linearizados $\vec{J}E$, como fibrado vetorial sobre E , definindo $\Phi_{\vec{J}E} : \vec{J}E \rightarrow \vec{J}E$ como segue: dado um ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$ e uma aplicação linear $\vec{u}_e \in \vec{J}_e E = L(T_x M, V_e E)$, definimos $\Phi_{\vec{J}E}(\vec{u}_e) \in \vec{J}_{\Phi_E(e)} E = L(T_{\Phi_M(x)} M, V_{\Phi_E(e)} E)$ por

$$\Phi_{\vec{J}E}(\vec{u}_e) = T_e \Phi_E \circ \vec{u}_e \circ (T_x \Phi_M)^{-1}. \quad (1.29)$$

Esta fórmula define uma aplicação linear de $L(T_x M, V_e E)$ para $L(T_{\Phi_M(x)} M, V_{\Phi_E(e)} E)$. Em particular, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \vec{J}E & \xrightarrow{\Phi_{\vec{J}E}} & \vec{J}E \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ E & \xrightarrow{\Phi_E} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\Phi_M} & M \end{array} \quad (1.30)$$

De forma análoga, um automorfismo do fibrado E pode ser levantado para um automorfismo do fibrado dos jatos JE , como fibrado afim sobre E , definindo $\Phi_{JE} : JE \rightarrow JE$ como segue: dado um ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$ e um jato $u_e \in J_e E$, definimos $\Phi_{JE}(u_e) \in J_{\Phi_E(e)} E$ por

$$\Phi_{JE}(u_e) = T_e \Phi_E \circ u_e \circ (T_x \Phi_M)^{-1}. \quad (1.31)$$

Esta fórmula define uma aplicação linear de $L(T_x M, T_e E)$ para $L(T_{\Phi_M(x)} M, T_{\Phi_E(e)} E)$ que, por restrição, induz uma aplicação afim de $J_e E$ para $J_{\Phi_E(e)} E$, já que mapeia $J_e E$ para $J_{\Phi_E(e)} E$:

$$\begin{aligned}
T_{\Phi_E(e)} \pi_E \circ \Phi_{J_E}(u_e) &= T_{\Phi_E(e)} \pi_E \circ T_e \Phi_E \circ u_e \circ (T_x \Phi_M)^{-1} \\
&= T_e (\pi_E \circ \Phi_E) \circ u_e \circ (T_x \Phi_M)^{-1} \\
&= T_e (\Phi_M \circ \pi_E) \circ u_e \circ (T_x \Phi_M)^{-1} \\
&= T_x \Phi_M \circ T_e \pi_E \circ u_e \circ (T_x \Phi_M)^{-1} \\
&= T_x \Phi_M \circ \text{id}_{T_x M} \circ (T_x \Phi_M)^{-1} \\
&= \text{id}_{T_{\Phi_M(x)} M}
\end{aligned}$$

Em particular, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
J E & \xrightarrow{\Phi_{J E}} & J E \\
\tau \downarrow & & \downarrow \tau \\
E & \xrightarrow{\Phi_E} & E \\
\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
M & \xrightarrow{\Phi_M} & M
\end{array} \quad (1.32)$$

Passando à descrição da situação infinitesimal, podemos reduzir o levantamento de automorfismos infinitesimais ao levantamento de grupos (locais) a um parâmetro de automorfismos (locais). Assim, todo campo vetorial projetável X_E sobre E possui levantamentos canônicos para campos vetoriais projetáveis $X_{\vec{J}E}$ sobre $\vec{J}E$ e X_{JE} sobre JE . Ao invés de fórmulas globais que são pouco instrutivas, apresentamos as expressões em coordenadas locais adaptadas, que podem ser deduzidas se observarmos que localmente, automorfismos são representadas por transformações de um sistema de coordenadas locais adaptadas para outro e portanto podemos calcular seus geradores por diferenciação em relação a um parâmetro de fluxo λ . Explicitamente, escrevendo

$$X_M = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (1.33)$$

e

$$X_E = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad (1.34)$$

onde os X^μ dependem somente das coordenadas x^ρ na variedade base, e substituindo a equação (1.22) por

$$x'^\kappa = x'^\kappa(x, \lambda), \quad q'^k = q'^k(x, q, \lambda),$$

podemos calcular os componentes

$$X^\kappa = \left. \frac{\partial x'^\kappa}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad X^k = \left. \frac{\partial q'^k}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

e

$$\vec{X}_\kappa^k = \left. \frac{\partial \vec{q}_\kappa'^k}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad X_\kappa^k = \left. \frac{\partial q_\kappa'^k}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

de $X_{\vec{J}E}$ e de X_{JE} por diferenciação das equações (1.24) e (1.23), respectivamente, em relação a λ , usando que

$$\left. \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \right|_{\lambda=0} = \delta_\mu^\kappa, \quad \left. \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \right|_{\lambda=0} = \delta_i^k, \quad \left. \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \right|_{\lambda=0} = 0,$$

e

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \right) \right|_{\lambda=0} = - \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \right|_{\lambda=0} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} \right) \right|_{\lambda=0} \left. \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} \right|_{\lambda=0} = - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\kappa}.$$

O resultado é que

$$X_{\vec{J}E} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{\partial X^i}{\partial q^j} \vec{q}_\mu^j - \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \vec{q}_\nu^i \right) \frac{\partial}{\partial \vec{q}_\mu^i}, \quad (1.35)$$

e

$$X_{JE} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{\partial X^i}{\partial q^j} q_\mu^j - \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} q_\nu^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial q_\mu^i}. \quad (1.36)$$

Finalmente, a ação de automorfismos e automorfismos infinitesimais sobre seções de $\vec{J}E$ e de JE é definida pela ação dos correspondentes levantamentos. Em particular, a ação de um automorfismo infinitesimal $X = (X_{JE}, X_E, X_M)$ sobre uma seção $j\varphi = (\varphi, \partial\varphi)$ de JE fornece uma seção $\delta_X(j\varphi) = (\delta_X\varphi, \delta_X\partial\varphi)$ do fibrado vetorial $(j\varphi)^*(V(JE))$ sobre M que é o pull-back do fibrado vertical $V(JE)$ de JE via $j\varphi$:

$$\delta_X(j\varphi)(x) = X_{JE}(j\varphi(x)) - T_x(j\varphi) \cdot X_M(x) \quad \text{para } x \in M. \quad (1.37)$$

Em coordenadas locais adaptadas, esta fórmula reproduz a equação (1.16) em conjunto com a equação

$$\delta_X \partial_\mu \varphi^i = \frac{\partial X^i}{\partial q^j}(\varphi) \partial_\mu \varphi^j - \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}(\varphi) \partial_\nu \varphi^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu}(\varphi) - \partial_\nu \partial_\mu \varphi^i X^\nu. \quad (1.38)$$

1.4 Fibrados de cojatos

Assim como o fibrado tangente de uma variedade M , o fibrado dos jatos de primeira ordem de um fibrado E admite uma noção natural de dual.

Primeiro, introduzimos o *dual afim* J^*E de JE , que é semelhante ao *dual linear* \vec{J}^*E de $\vec{J}E$: ambos são fibrados vetoriais sobre E cujas fibras em cada ponto e de E são definidas por

$$J_e^*E = \{ z_e : J_eE \longrightarrow \mathbb{R} \text{ afim} \}, \quad (1.39)$$

e

$$\vec{J}_e^* E = \{ \vec{z}_e : \vec{J}_e E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear} \}, \quad (1.40)$$

respectivamente. Entretanto, para chegar ao tipo de dual que aparece naturalmente na teoria dos campos, torna-se necessário substituir, no codomínio das aplicações afins ou lineares empregadas, a reta real pelo espaço unidimensional das formas de volume sobre o ponto correspondente de M , ou seja, considerar o *dual afim torcido* $J^\circledast E$ de JE e o *dual linear torcido* $\vec{J}^\circledast E$ de $\vec{J}E$ cujas fibras em cada ponto e de E são definidas por

$$J^\circledast E = \{ z_e : J_e E \longrightarrow \bigwedge^n T^* M \text{ afim} \}, \quad (1.41)$$

e

$$\vec{J}^\circledast E = \{ \vec{z}_e : \vec{J}_e E \longrightarrow \bigwedge^n T^* M \text{ linear} \}, \quad (1.42)$$

respectivamente. Em outras palavras, temos

$$J^\circledast E = J^* E \otimes \bigwedge^n T^* M, \quad (1.43)$$

e

$$\vec{J}^\circledast E = \vec{J}^* E \otimes \bigwedge^n T^* M, \quad (1.44)$$

respectivamente. Como os fibrados JE e $\vec{J}E$ introduzidos na seção anterior, cada um destes fibrados admite duas projeções: uma projeção alvo, em relação à qual é um fibrado vetorial, e uma projeção fonte, em relação à qual não admite, em geral, nenhuma estrutura adicional.

Em termos de coordenadas locais, podemos afirmar que as coordenadas locais (x^μ, q^i, q_μ^i) de JE e $(x^\mu, q^i; \vec{q}_\mu^i)$ introduzidas na seção anterior induzem coordenadas locais (x^μ, q^i, p_i^μ, p) para J^*E e $J^\circledast E$ e coordenadas locais (x^μ, q^i, p_i^μ) para \vec{J}^*E e $\vec{J}^\circledast E$, definidas pelo requerimento de que o pareamento entre um ponto de JE e um ponto do seu dual afim seja dado por

$$p_i^\mu q_\mu^i + p \quad (1.45)$$

no caso não-torcido e por

$$(p_i^\mu q_\mu^i + p) d^n x \quad (1.46)$$

no caso torcido, enquanto que o pareamento entre um ponto de $\vec{J}E$ e um ponto do seu dual linear seja dado por

$$p_i^\mu \vec{q}_\mu^i \quad (1.47)$$

no caso não-torcido e por

$$p_i^\mu \vec{q}_\mu^i d^n x \quad (1.48)$$

no caso torcido. Assim, combinando uma mudança de coordenadas locais $x^\mu \rightarrow x'^\kappa$ em M , uma mudança de coordenadas locais $q^i \rightarrow q'^k$ em Q e uma mudança de trivialização local, obtemos, além das mudanças de coordenadas locais induzidas já discutidas na seção anterior,

mudanças de coordenadas locais induzidas (x^μ, q^i, p_i^μ, p) \rightarrow $(x'^\kappa, q'^k, p'_k{}^\mu, p')$ em J^*E e em $J^\circ E$ e $(x^\mu, q^i, p_i^\mu) \rightarrow (x'^\kappa, q'^k, p'_k{}^\mu)$ em \vec{J}^*E e em $\vec{J}^\circ E$ que são dadas por

$$p'_k{}^\mu = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\mu, \quad p' = p - \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\mu. \quad (1.49)$$

no caso não-torcido e

$$p'_k{}^\mu = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\mu, \quad p' = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \left(p - \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\mu\right). \quad (1.50)$$

no caso torcido.

Uma observação importante na geometria multissimplética é que o fibrado $J^\circ E$ é isomorfo a um certo subfibrado vetorial do fibrado $\bigwedge^n T^*E$ das n -formas sobre E , a saber o subfibrado vetorial $\bigwedge_{n-1}^n T^*E$ das n -formas $(n-1)$ -horizontais sobre E . Explicitamente, este é definido por

$$\bigwedge_{n-1}^n T^*E = \{z \in \bigwedge^n T^*E / i_u i_v z = 0 \text{ para todo } u, v \in V_e E\}. \quad (1.51)$$

De fato, existe um isomorfismo canônico

$$\Psi : \bigwedge_{n-1}^n T^*E \xrightarrow{\cong} J^\circ E \quad (1.52)$$

de fibrados vetoriais sobre E que pode ser definido explicitamente da seguinte maneira: dado um ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$ e uma n -forma $(n-1)$ -horizontal $\alpha_e \in \bigwedge_{n-1}^n T_e^*E$ qualquer, juntamente com um jato $u_e \in J_e E$, podemos usar u_e , que é uma aplicação linear de $T_x M$ para $T_e E$, para fazer o pull-back da n -forma α_e sobre $T_e E$ para uma n -forma $u_e^* \alpha_e$ sobre $T_x M$. Obviamente, $u_e^* \alpha_e$ é uma função afim em relação a u_e quando u_e percorre o espaço afim $J_e E$ uma vez que na verdade ela é uma função linear de u_e quando u_e percorre todo o espaço vetorial $L(T_x M, T_e E)$ (a restrição do domínio de uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais a um subespaço afim define uma aplicação afim). Desta forma, colocando

$$\Psi_e(\alpha_e) \cdot u_e = u_e^* \alpha_e, \quad (1.53)$$

definimos uma aplicação $\Psi_e : \bigwedge_{n-1}^n T_e^*E \rightarrow J_e^*E$ que é evidentemente linear e, como e varia sobre E , providencia o isomorfismo (1.52) desejado. Notemos que para sistemas com apenas um grau de liberdade interna, i.e., quando $N = 1$, a condição de $(n-1)$ -horizontalidade é automática, já que neste caso, quaisquer dois vetores verticais são proporcionais:

$$\bigwedge_{n-1}^n T^*E = \bigwedge^n T^*E \quad \text{quando } N = 1. \quad (1.54)$$

1.4.1 Levantamento canônico

O próximo passo a ser discutido é o levantamento canônico de automorfismos e, passando para grupos a um parâmetro, o levantamento canônico de automorfismos infinitesimais, i.e., de campos vetoriais projetáveis, para o fibrado dual linear (torcido ou não) de $\vec{J}E$ e o fibrado dual afim (torcido ou não) de JE , que é definido simplesmente por dualização dos automorfismos obtidos na seção anterior. No final discutiremos a ação destes levantamentos sobre seções destes fibrados duais.

Primeiro, dualização linear do automorfismo $\Phi_{\vec{J}E} : \vec{J}E \rightarrow \vec{J}E$ de $\vec{J}E$ obtido por levantamento de um automorfismo $\Phi_E : E \rightarrow E$ de E fornece automorfismos $\Phi_{\vec{J}^*E} : \vec{J}^*E \rightarrow \vec{J}^*E$ e $\Phi_{\vec{J}^\otimes E} : \vec{J}^\otimes E \rightarrow \vec{J}^\otimes E$ dos fibrados vetoriais \vec{J}^*E e $\vec{J}^\otimes E$ sobre E definidos como segue: dado um ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$ e $\vec{z}_e \in \vec{J}_e^*E$ ou $\vec{z}_e \in \vec{J}_e^\otimes E$, definimos $\Phi_{\vec{J}^*E}(\vec{z}_e) \in \vec{J}_{\Phi_E(e)}^*E$ ou $\Phi_{\vec{J}^\otimes E}(\vec{z}_e) \in \vec{J}_{\Phi_E(e)}^\otimes E$ por

$$\Phi_{\vec{J}^*E}(\vec{z}_e) = \vec{z}_e \circ (\Phi_{\vec{J}E}|_{\vec{J}_eE})^{-1}, \quad (1.55)$$

ou

$$\Phi_{\vec{J}^\otimes E}(\vec{z}_e) = \bigwedge^n (T_x \Phi_M)^{-1*} \circ \vec{z}_e \circ (\Phi_{\vec{J}E}|_{\vec{J}_eE})^{-1}, \quad (1.56)$$

respectivamente. Em particular, os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} \vec{J}^*E & \xrightarrow{\Phi_{\vec{J}^*E}} & \vec{J}^*E & \text{e} & \vec{J}^\otimes E & \xrightarrow{\Phi_{\vec{J}^\otimes E}} & \vec{J}^\otimes E & (1.57) \\ \tau^* \downarrow & & \downarrow \tau^* & & \tau^\otimes \downarrow & & \downarrow \tau^\otimes & \\ E & \xrightarrow{\Phi_E} & E & & E & \xrightarrow{\Phi_E} & E & \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \pi \downarrow & & \downarrow \pi & \\ M & \xrightarrow{\Phi_M} & M & & M & \xrightarrow{\Phi_M} & M & \end{array}$$

De forma análoga, dualização afim do automorfismo $\Phi_{JE} : JE \rightarrow JE$ de JE obtido por levantamento de um automorfismo $\Phi_E : E \rightarrow E$ de E fornece automorfismos $\Phi_{J^*E} : J^*E \rightarrow J^*E$ e $\Phi_{J^\otimes E} : J^\otimes E \rightarrow J^\otimes E$ dos fibrados vetoriais J^*E e $J^\otimes E$ sobre E definidos como segue: dado um ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$ e $z_e \in J_e^*E$ ou $z_e \in J_e^\otimes E$, definimos $\Phi_{J^*E}(z_e) \in J_{\Phi_E(e)}^*E$ ou $\Phi_{J^\otimes E}(z_e) \in J_{\Phi_E(e)}^\otimes E$ por

$$\Phi_{J^*E}(z_e) = z_e \circ (\Phi_{JE}|_{J_eE})^{-1}, \quad (1.58)$$

ou

$$\Phi_{J^\otimes E}(z_e) = \bigwedge^n (T_x \Phi_M)^{-1*} \circ z_e \circ (\Phi_{JE}|_{J_eE})^{-1}, \quad (1.59)$$

respectivamente. Em particular, os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 J^*E & \xrightarrow{\Phi_{J^*E}} & J^*E \\
 \tau^* \downarrow & & \downarrow \tau^* \\
 E & \xrightarrow{\Phi_E} & E \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 M & \xrightarrow{\Phi_M} & M
 \end{array}
 \quad \text{e} \quad
 \begin{array}{ccc}
 J^\otimes E & \xrightarrow{\Phi_{J^\otimes E}} & J^\otimes E \\
 \tau^\otimes \downarrow & & \downarrow \tau^\otimes \\
 E & \xrightarrow{\Phi_E} & E \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 M & \xrightarrow{\Phi_M} & M
 \end{array}
 \quad (1.60)$$

No último caso, deve ser notado que sob o isomorfismo canônico Ψ , o automorfismo $\Phi_{J^\otimes E}$ de $J^\otimes E$ corresponde ao automorfismo de $\bigwedge_{n-1}^n T^*E$ que age em n -formas sobre E por pull-back através de Φ_E^{-1} . De fato, dado um ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$, uma n -forma $(n-1)$ -horizontal $\omega_e \in \bigwedge_{n-1}^n T_e^*E$ sobre $T_e E$ e um jato $u_{\Phi_E(e)} \in J_{\Phi_E(e)}E$ em $\Phi_E(e)$, calculamos

$$\begin{aligned}
 \Phi_{J^\otimes E}(\Psi_e(\omega_e)) \cdot u_{\Phi_E(e)} &= \bigwedge^n (T_x \Phi_M)^{-1*} \cdot (\Psi_e(\omega_e) \cdot \Phi_{J^\otimes E}^{-1}(u_{\Phi_E(e)})) \\
 &= \bigwedge^n (T_x \Phi_M)^{-1*} \cdot \left(((T_e \Phi_E)^{-1} \circ u_{\Phi_E(e)} \circ T_x \Phi_M)^* \omega_e \right) \\
 &= ((T_e \Phi_E)^{-1} \circ u_{\Phi_E(e)})^* \omega_e = u_{\Phi_E(e)}^* ((T_e \Phi_E)^{-1*} \omega_e) \\
 &= \Psi_{\Phi_E(e)}((T_e \Phi_E)^{-1*} \omega_e) \cdot u_{\Phi_E(e)}.
 \end{aligned}$$

Passando à descrição da situação infinitesimal, prosseguimos como antes, reduzindo o levantamento de automorfismos infinitesimais ao levantamento de grupos (locais) a um parâmetro de automorfismos (locais). Assim, todo campo vetorial projetável X_E sobre E possui levantamentos canônicos para campos vetoriais projetáveis X_{J^*E} sobre J^*E , $X_{J^\otimes E}$ sobre $J^\otimes E$, X_{J^*E} sobre J^*E e $X_{J^\otimes E}$ sobre $J^\otimes E$. Novamente, ao invés de fórmulas globais que são pouco instrutivas, apresentamos as expressões em coordenadas locais adaptadas, que podem ser deduzidas das leis de transformação (1.49) e (1.50) por diferenciação em relação a um parâmetro de fluxo λ , como antes. Usando as fórmulas anteriores, em conjunto com as relações

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial q^i}{\partial q^{k'}} \right) \right|_{\lambda=0} = - \left. \frac{\partial q^i}{\partial q^{r'}} \right|_{\lambda=0} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial q^{r'}}{\partial q^s} \right) \right|_{\lambda=0} \left. \frac{\partial q^s}{\partial q^{k'}} \right|_{\lambda=0} = - \frac{\partial X^i}{\partial q^k},$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \det(A) = \det(A) \operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \lambda} \right),$$

que implica

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \right|_{\lambda=0} = - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu},$$

obtemos

$$X_{\vec{J}^*E} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} p_j^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} p_i^\nu \right) \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \quad (1.61)$$

para \vec{J}^*E e

$$X_{\vec{J}^\circ E} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} p_j^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} p_i^\nu + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} p_i^\mu \right) \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \quad (1.62)$$

para $\vec{J}^\circ E$, assim como

$$X_{J^*E} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} p_j^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} p_i^\nu \right) \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p} \quad (1.63)$$

para J^*E e

$$\begin{aligned} X_{J^\circ E} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} p_j^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} p_i^\nu + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} p_i^\mu \right) \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \\ - \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} p_i^\mu + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} p \right) \frac{\partial}{\partial p} \end{aligned} \quad (1.64)$$

para $J^\circ E$. No último caso, nota-se que sob o isomorfismo canônico Ψ , o campo vetorial $X_{J^\circ E}$ sobre $J^\circ E$ corresponde ao campo vetorial sobre $\Lambda_{n-1}^n T^*E$ que age em n -formas sobre E pela derivada de Lie ao longo de $-X_E$. De fato, em termos de coordenadas locais adaptadas, temos que para todo campo vetorial X_E sobre E com representação (1.34) e toda n -forma $(n-1)$ -horizontal ω_E sobre E com representação

$$\omega_E = \omega_i^\mu dq^i \wedge d^n x_\mu + \omega_0 d^n x, \quad (1.65)$$

a derivada de Lie $L_{X_E} \omega_E$ de ω_E ao longo de X_E é dada por

$$\begin{aligned} L_{X_E} \omega_E = & \left(X^\kappa \frac{\partial \omega_i^\mu}{\partial x^\kappa} + X^k \frac{\partial \omega_i^\mu}{\partial q^k} \right) dq^i \wedge d^n x_\mu + \left(X^\kappa \frac{\partial \omega_0}{\partial x^\kappa} + X^k \frac{\partial \omega_0}{\partial q^k} \right) d^n x \\ & + \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} \omega_j^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} \omega_i^\nu + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} \omega_i^\mu + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} \omega_0 \right) dq^i \wedge d^n x_\mu \\ & + \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} \omega_i^\mu + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} \omega_0 \right) d^n x \\ & + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} \omega_j^\nu dq^i \wedge dq^j \wedge d^n x_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Essa fórmula como está é válida mesmo para campos vetoriais X_E que não sejam projetáveis, mas ela também mostra que X_E deve ser projetável se queremos garantir que tomando a

derivada de Lie ao longo de X_E leve n -formas $(n - 1)$ -horizontais em n -formas $(n - 1)$ -horizontais – exceto para sistemas com apenas um grau de liberdade interno: Quando $N = 1$, a equação (1.54) assegura que campos vetoriais arbitrários sobre E podem ser levantados para campos vetoriais sobre $J^\circ E$, a única mudança sendo que, neste caso, a equação (1.64) possui um termo adicional, sendo substituída por

$$\begin{aligned} X_{J^\circ E} &= X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} p_j^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} p_i^\nu + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} p_i^\mu + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} p \right) \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \\ &\quad - \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} p_i^\mu + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} p \right) \frac{\partial}{\partial p} , \end{aligned} \quad (1.67)$$

onde os índices internos i e j tomam somente um único valor mas não obstante não foram suprimidos a fim de evitar uma confusão notacional.

Finalmente, a ação de automorfismos e automorfismos infinitesimais sobre seções é, mais uma vez, definida pela ação dos correspondentes levantamentos. Em particular, a ação de um automorfismo infinitesimal $X = (X_{\vec{J}^\circ E}, X_E, X_M)$ sobre uma seção $\phi = (\varphi, \pi)$ de $\vec{J}^\circ E$ fornece uma seção $\delta_X \phi = (\delta_X \varphi, \delta_X \pi)$ do fibrado vetorial $\phi^*(V(\vec{J}^\circ E))$ sobre M que é o pull-back do fibrado vertical $V(\vec{J}^\circ E)$ de $\vec{J}^\circ E$ via ϕ :

$$\delta_X \phi(x) = X_{\vec{J}^\circ E}(\phi(x)) - T_x \phi \cdot X_M(x) \quad \text{para } x \in M . \quad (1.68)$$

Em coordenadas locais adaptadas, esta fórmula reproduz a equação (1.16) em conjunto com a equação

$$\delta_X \pi_i^\mu = - \frac{\partial X^j}{\partial q^i}(\varphi) \pi_j^\mu + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}(\varphi) \pi_i^\nu - \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu}(\varphi) \pi_i^\mu - \partial_\nu \pi_i^\mu X^\nu . \quad (1.69)$$

De forma semelhante, se escolhermos uma seção

$$\mathcal{H} : \vec{J}^\circ E \rightarrow J^\circ E$$

de $J^\circ E$ como fibrado afim em linhas sobre $\vec{J}^\circ E$ (para a interpretação física deste tipo de seção como hamiltoniana, veja a seção seguinte); a ação de um automorfismo infinitesimal $X = (X_{J^\circ E}, X_E, X_M)$ sobre uma seção $\tilde{\phi} = \mathcal{H}(\phi) = (\varphi, \pi, -H(\varphi, \pi))$ de $J^\circ E$ fornece uma seção $\delta_X \tilde{\phi} = (\delta_X \varphi, \delta_X \pi, -\delta_X H(\varphi, \pi))$ do fibrado vetorial $\tilde{\phi}^*(V(J^\circ E))$ sobre M que é o pull-back do fibrado vertical $V(J^\circ E)$ de $J^\circ E$ via $\tilde{\phi}$:

$$\delta_X \tilde{\phi}(x) = X_{J^\circ E}(\tilde{\phi}(x)) - T_x \tilde{\phi} \cdot X_M(x) \quad \text{para } x \in M . \quad (1.70)$$

Em coordenadas locais adaptadas, esta fórmula reproduz as equações (1.16) e (1.69) em conjunto com a equação

$$\delta_X H(\varphi, \pi) = \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu}(\varphi) \pi_i^\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(X^\mu H(\varphi, \pi) \right), \quad (1.71)$$

ou

$$\begin{aligned} \delta_X H(\varphi, \pi) = & \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu}(\varphi) \pi_i^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} H(\varphi, \pi) \\ & - X^\mu \frac{\partial H}{\partial x^\mu}(\varphi, \pi) - X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i}(\varphi, \pi) \partial_\mu \varphi^i - X^\mu \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu}(\varphi, \pi) \partial_\mu \pi_j^\nu. \end{aligned} \quad (1.72)$$

1.5 Geometria multissimplética

Durante os últimos anos, evidenciou-se cada vez mais que o conceito matemático adequado para a formulação geométrica da teoria clássica dos campos é o de uma variedade multissimplética. No entanto, um dos primeiros problemas que enfrentamos neste contexto é a inexistência de uma definição consolidada deste conceito.

Uma definição preliminar seria a seguinte: Uma variedade multissimplética é uma variedade P munida de uma forma diferencial ω fechada de grau $n + 1$, onde n é a dimensão do espaço-tempo M , e satisfazendo certas condições de natureza algébrica, entre elas no mínimo a de não-degenerescência: em cada ponto p de P , a contração de ω_p com um vetor tangente X_p não nulo fornece uma n -forma $i(X_p)\omega_p$ não nula. (Para $n = 1$, recuperamos a definição padrão de uma variedade simplética da mecânica.) No entanto, esta condição de não-degenerescência não é suficiente para garantir a validade da versão multissimplética do teorema de Darboux [29]: este requer condições mais restritivas cuja natureza algébrica ainda não foi completamente esclarecida. Outro aspecto que não parece ser adequadamente contemplado na literatura é o fato de que as variedades multissimpléticas que ocorrem na teoria dos campos não são apenas variedades mas possuem a estrutura adicional de um fibrado sobre o espaço-tempo e que esta deve satisfazer uma condição de compatibilidade com a forma multissimplética. Destarte, a seguinte definição deve ser considerada um tanto provisória.

Definição 1.1 *Uma variedade multissimplética é uma dupla (P, ω) onde P é uma variedade e ω é uma forma diferencial de grau $n + 1$ sobre P , chamada a forma multissimplética, que é fechada,*

$$d\omega = 0, \quad (1.73)$$

e satisfaz certas condições algébricas, entre elas no mínimo a de não-degenerescência, afirmando que para todo campo vetorial X , vale

$$i_X \omega = 0 \implies X = 0. \quad (1.74)$$

Definição 1.2 *Uma variedade exatamente multissimplética é uma variedade P munida de uma forma θ de grau n , chamada a forma multicanônica, tal que*

$$\omega = -d\theta \quad (1.75)$$

é uma forma multissimplética sobre P .

Observa-se que, obviamente, a conclusão (1.74) deixa de ser válida para campos multivetoriais, ou seja, o núcleo de ω sobre multivetores não é trivial. (Isso ocorre mesmo para formas simpléticas, que se anulam sobre multivetores obtidos como produto exterior de vetores contidos em algum subespaço isotrópico. Da mesma forma, o núcleo de θ sobre multivetores não é trivial.) Dualmente, um papel especial e importante é desempenhado pelo aniquilador deste núcleo, ou seja, por formas cujo núcleo multivetorial é maior do que o de ω , i.e., que se anulam sobre todos os multivetores contidos no núcleo de ω . Em particular, em [12], foi adotada uma definição mais restritiva de variedade exatamente multissimplética, exigindo-se que o núcleo de ω seja contido no núcleo de θ :

$$\ker \omega \subset \ker \theta, \quad (1.76)$$

i.e., para todo campo multivetorial ξ , vale

$$i_\xi \omega = 0 \implies i_\xi \theta = 0. \quad (1.77)$$

A função principal desta restrição é garantir que o colchete de Poisson entre formas de Poisson definido em [12] seja bem definido. No entanto, para formas de grau $n - 1$, a restrição a formas de Poisson torna-se desnecessária (e por este motivo nem aparece em [11]). Como no presente trabalho, consideramos apenas formas de grau $n - 1$, optamos por adotar uma definição menos restritiva, o que permite incluir não apenas o espaço de multifase estendido mas também o espaço de multifase comum: ambos são exemplos de variedades exatamente multissimpléticas, desempenhando o mesmo papel na geometria multissimplética que os fibrados cotangentes na geometria simplética.

1.5.1 Espaços de multifase

Definição 1.3 *Dado um fibrado de configuração E sobre o espaço-tempo M , o dual afim torcido $J^\circ E$ do fibrado de jatos JE de E é chamado o espaço de multifase estendido (associado a E) e o dual linear torcido $\vec{J}^\circ E$ do fibrado de jatos linearizado $\vec{J}E$ de E é chamada o espaço de multifase comum (associado a E).*

O espaço de multifase estendido $J^\circledast E$ é o exemplo padrão de uma variedade exatamente multissimplética. A construção da forma multicanônica θ e da forma multissimplética ω sobre $J^\circledast E$ pode ser entendido da seguinte forma.

Seja E uma variedade de dimensão $n+N$ e $\bigwedge^n T^*E$ o fibrado das n -formas sobre E , com projeção τ_E^{*n} . Então existe uma n -forma canônica θ sobre $\bigwedge^n T^*E$, definida por

$$\theta(z)(v_1, \dots, v_n) = z(T_z \tau_E^{*n} \cdot v_1, \dots, T_z \tau_E^{*n} \cdot v_n), \quad (1.78)$$

onde $z \in \bigwedge^n T^*E$ e $v_1, \dots, v_n \in T_z(\bigwedge^n T^*E)$. Em termos de coordenadas locais y^a ($1 \leq a \leq N$) para E e as coordenadas locais induzidas $(y^a, z_{a_1 \dots a_n})$ ($1 \leq a \leq N$, $1 \leq a_1 < \dots < a_n \leq N$) para $\bigwedge^n T^*E$, temos

$$\theta = \frac{1}{n!} z_{a_1 \dots a_n} dy^{a_1} \wedge \dots \wedge dy^{a_n}, \quad (1.79)$$

e portanto

$$\omega = -\frac{1}{n!} dz_{a_1 \dots a_n} \wedge dy^{a_1} \wedge \dots \wedge dy^{a_n}. \quad (1.80)$$

Quando E for o espaço total de um fibrado sobre M , podemos considerar a subvariedade $\bigwedge_{n-1}^n T^*E$ das n -formas $(n-1)$ -horizontais sobre E e restringir as formas θ e ω a esta subvariedade. Assim, usando o isomorfismo canônico 1.53, podemos transferir estas formas de $\bigwedge_{n-1}^n T^*E$ para $J^\circledast E$: usaremos as mesmas letras θ e ω , respectivamente, para todas estas formas. Em coordenadas locais adaptadas,

$$\theta = p_i^\mu dq^i \wedge d^n x_\mu + p d^n x, \quad (1.81)$$

e portanto

$$\omega = dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu - dp \wedge d^n x. \quad (1.82)$$

Passando ao espaço de multifase comum $\vec{J}^\circledast E$, observamos que neste, não há *a priori* nenhuma forma multicanônica ou multissimplética preferida. No entanto, esta estrutura pode ser definida assim que escolhermos uma hamiltoniana. Ocorre que, como já foi devidamente enfatizado em [3], o conceito de hamiltoniana na geometria multissimplética exige o emprego de ambos os tipos de espaço de multifase, o estendido $J^\circledast E$ assim como o comum $\vec{J}^\circledast E$, sendo o primeiro um fibrado afim em linhas sobre o segundo em relação à projeção $\eta: J^\circledast E \rightarrow \vec{J}^\circledast E$ que associa a cada forma afim sua parte linear.

Definição 1.4 *Dado um fibrado de configuração E sobre o espaço-tempo M , uma hamiltoniana é uma seção*

$$\mathcal{H}: \vec{J}^\circledast E \rightarrow J^\circledast E \quad (1.83)$$

do espaço de multifase estendido $J^\circledast E$ como fibrado afim em linhas sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^\circledast E$.

Observemos que hamiltonianas sempre existem, uma vez que fibrados cuja fibra típica é difeomórfica a um \mathbb{R}^k sempre admitem seções globais [22, Ch. 1, Theorem 5.7].

Dada uma hamiltoniana \mathcal{H} , podemos então definir uma n -forma $\theta_{\mathcal{H}}$ e uma $(n+1)$ -forma $\omega_{\mathcal{H}}$ sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ por pull-back:

$$\theta_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^*\theta \quad , \quad \omega_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^*\omega \quad . \quad (1.84)$$

Em coordenadas locais adaptadas,

$$\theta_{\mathcal{H}} = p_i^\mu dq^i \wedge d^n x_\mu - H d^n x \quad , \quad (1.85)$$

e

$$\omega_{\mathcal{H}} = dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu + dH \wedge d^n x \quad , \quad (1.86)$$

ou mais explicitamente,

$$\omega_{\mathcal{H}} = dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \wedge d^n x + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} dp_i^\mu \wedge d^n x \quad . \quad (1.87)$$

A observação crucial é que na teoria dos campos, ao contrário do que acontece na mecânica, a forma $\omega_{\mathcal{H}}$ é não-degenerada. De fato, usando coordenadas locais adaptadas, escrevemos um campo vetorial \vec{X} qualquer sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ na forma

$$\vec{X} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \quad , \quad (1.88)$$

onde os coeficientes X^μ , X^i e X_i^μ são funções (em geral arbitrárias) das variáveis x^κ , q^k e p_k^κ , e empregamos a forma explícita (1.87) de $\omega_{\mathcal{H}}$ para obter

$$\begin{aligned} i_{\vec{X}} \omega_{\mathcal{H}} &= X^\nu dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_{\mu\nu} - \left(X_i^\mu + X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) dq^i \wedge d^n x_\mu \\ &+ \left(X^i \delta_\mu^\nu - X^\nu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right) dp_i^\mu \wedge d^n x_\nu + \left(X^i \frac{\partial H}{\partial q^i} + X_i^\mu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right) d^n x \quad . \end{aligned} \quad (1.89)$$

Quando $n > 1$, o primeiro termo (que no caso $n = 1$ está ausente) é linearmente independente dos demais e se anula apenas quando os coeficientes X^μ são zero, levando à conclusão de que a expressão inteira se anula se e somente se todos os coeficientes X^μ , X^i e X_i^μ são zero.

Uma diferença entre as formas multicanônicas e multissimpléticas sobre $J^{\otimes}E$ e sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ é que as primeiras satisfazem a relação (1.76) ou (1.77) entre os respectivos núcleos enquanto que as segundas não. Mas a principal diferença entre as duas estruturas é que a primeira é de natureza cinemática, independente da escolha de uma hamiltoniana, enquanto que a segunda é de natureza dinâmica, dependendo explicitamente da hamiltoniana. Este

aspecto já pode ser notado na mecânica onde, na notação padrão empregada na primeira seção deste capítulo, as equações (1.81) e (1.82) se reduzem, respectivamente, às equações (1.5) e (1.6), enquanto que as equações (1.87) e (1.88) adquirem a forma

$$\omega_{\mathcal{H}} = dq^i \wedge dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \wedge dt + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt, \quad (1.90)$$

e

$$\vec{X} = X^0 \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (1.91)$$

Assim, a equação (1.89) é substituída por

$$\begin{aligned} i_{\vec{X}} \omega_{\mathcal{H}} = & - \left(X_i + X^0 \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) dq^i + \left(X^i - X^0 \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) dp_i \\ & + \left(X^i \frac{\partial H}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) dt. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Neste caso vemos que a forma $\omega_{\mathcal{H}}$ possui um núcleo não-trivial, gerado pelo campo vetorial

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (1.93)$$

sendo que as equações de movimento podem ser expressas como o fato de que este campo vetorial deve se anular sobre as suas soluções.

Outro objeto importante que pode ser definido globalmente nos espaços de multifase (o comum assim como o estendido) é o *campo de escalonamento* ou *campo de Euler* que denotaremos por Σ . Esta definição é baseada exclusivamente no fato de que $\vec{J}^{\otimes} E$ e $J^{\otimes} E$ são espaços totais de fibrados vetoriais sobre E . De fato, dado qualquer fibrado vetorial V sobre E , Σ_V (que iremos simplesmente denotar por Σ quando não houver perigo de confusão) é definido como sendo o campo fundamental associado à ação de \mathbb{R} , considerado como um grupo comutativo pela adição, por transformações de escala, ou homotetias, nas fibras:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow V \\ (\lambda, v) & \longmapsto \exp(\lambda) v \end{aligned}$$

Assim Σ é simplesmente o campo vetorial vertical em V que, através da identificação do espaço tangente vertical a V com a fibra típica do próprio V , torna-se a identidade em V :

$$\Sigma(v) = \left. \frac{d}{d\lambda} \exp(\lambda) v \right|_{\lambda=0} = v.$$

Em coordenadas locais adaptadas, $\vec{\Sigma}$ sobre $\vec{J}^\circ E$ é dado por

$$\vec{\Sigma} = p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu}, \quad (1.94)$$

enquanto que Σ sobre $J^\circ E$ é dado por

$$\Sigma = p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + p \frac{\partial}{\partial p}. \quad (1.95)$$

O segundo desempenha um papel particularmente importante na teoria, devido à seguinte

Proposição 1.1 *A forma multicanônica θ , a forma multissimplética ω e o campo de Euler Σ no espaço de multifase estendido $J^\circ E$ satisfazem as seguintes relações:*

$$L_\Sigma \theta = \theta. \quad (1.96)$$

$$L_\Sigma \omega = \omega. \quad (1.97)$$

$$i_\Sigma \theta = 0. \quad (1.98)$$

$$i_\Sigma \omega = -\theta. \quad (1.99)$$

DEMONSTRAÇÃO. Observemos que em relação à projeção alvo de $J^\circ E$ para E , Σ é vertical e θ é horizontal, o que implica a eq. (1.98). Em coordenadas locais adaptadas, observamos que a contração usual da forma multissimplética ω , dada pela eq. (1.82), com o campo de Euler Σ , dado pela eq. (1.95), produz, a menos de sinal, a forma θ , dada pela eq. (1.81), o que prova a eq. (1.99). Combinando estas duas equações, temos

$$L_\Sigma \theta = d(i_\Sigma \theta) + i_\Sigma d\theta = -i_\Sigma \omega = \theta,$$

provando a eq. (1.96). Finalmente,

$$L_\Sigma \omega = d(i_\Sigma \omega) + i_\Sigma d\omega = -d\theta = \omega,$$

provando a eq. (1.97). □

Observe que a equação (1.99) concretiza a relação (1.76) ou (1.77) entre os núcleos de θ e de ω no espaço de multifase estendido, sendo que não existe nenhuma relação análoga entre os núcleos de θ_H e de ω_H no espaço de multifase comum (exceto quando H depender linearmente dos multimomenta, o que é excluído pela hipótese de que o sistema seja não-degenerado e mesmo quando este for degenerado constitui um caso pouco realista).

1.5.2 Levantamento hamiltoniano

A projeção entre os espaços de multifase introduzida acima, assim como a correspondente projeção entre os duais não-torcidos, possui algumas propriedades adicionais que não são imediatamente visíveis a partir da afirmação de que em coordenadas locais adaptadas, elas são dadas pela simples eliminação $(x^\mu, q^i, p_i^\mu, p) \mapsto (x^\mu, q^i, p_i^\mu)$ da variável energia p , e que merecem uma análise mais cuidadosa.⁴ Estas propriedades adicionais baseiam-se na existência de uma ação natural

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times J^*E &\longrightarrow J^*E \\ (\alpha, z) &\longmapsto z + \alpha \end{aligned} \quad (1.100)$$

de \mathbb{R} sobre J^*E , definida pela identificação de formas constantes, como formas afins especiais, com seus valores. É fácil verificar que esta ação é livre e transitiva sobre as fibras de J^*E sobre \vec{J}^*E ; portanto, J^*E é de fato um fibrado principal sobre \vec{J}^*E em relação à projeção $\eta : J^*E \rightarrow \vec{J}^*E$, com grupo estrutural \mathbb{R} . Em coordenadas locais adaptadas, o campo fundamental associado a esta ação é simplesmente o campo vetorial

$$\frac{\partial}{\partial p}, \quad (1.101)$$

conferindo-lhe assim um significado global, independente de qualquer escolha de coordenadas. Também podemos transferir toda esta estrutura para os duais torcidos se escolhermos uma forma de volume ϵ no espaço-tempo M , pois esta estabelece isomorfismos $J^\circ E \cong J^*E$ e $\vec{J}^\circ E \cong \vec{J}^*E$. Assim, obtemos uma ação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times J^\circ E &\longrightarrow J^\circ E \\ (\alpha, z) &\longmapsto z + \alpha \epsilon \end{aligned} \quad (1.102)$$

de \mathbb{R} sobre $J^\circ E$ que torna $J^\circ E$ um fibrado principal sobre $\vec{J}^\circ E$ em relação à projeção $\eta : J^\circ E \rightarrow \vec{J}^\circ E$, com grupo estrutural \mathbb{R} . Em coordenadas locais adaptadas, o campo fundamental associado a esta ação é o campo vetorial

$$\Sigma_\epsilon = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{onde} \quad \epsilon = \epsilon_0 d^n x. \quad (1.103)$$

Em particular, a mera existência de uma hamiltoniana implica que $J^\circ E$, como fibrado principal sobre $\vec{J}^\circ E$, é topologicamente trivial:

Esta estrutura torna-se interessante e útil quando consideramos o problema de levantar automorfismos e seus geradores de $\vec{J}^\circ E$ para $J^\circ E$ usando uma hamiltoniana \mathcal{H} fixa.

⁴Para simplificar a notação, denotaremos essas duas projeções pelo mesmo símbolo η .

Começamos pela questão do levantamento de automorfismos no caso dos duais não-torcidos, supondo momentaneamente que seja dada uma seção \mathcal{H}_0 de J^*E sobre \vec{J}^*E . Neste caso, podemos afirmar que dado um automorfismo $\Phi_{\vec{J}^*E} : \vec{J}^*E \rightarrow \vec{J}^*E$ de \vec{J}^*E sobre o difeomorfismo $\Phi_M : M \rightarrow M$ de M , existe um único automorfismo $\Phi_{J^*E} : J^*E \rightarrow J^*E$ de J^*E sobre o mesmo difeomorfismo $\Phi_M : M \rightarrow M$ de M com as seguintes propriedades:

- Φ_{J^*E} projeta sobre $\Phi_{\vec{J}^*E}$ sob a projeção η , i.e.,

$$\eta \circ \Phi_{J^*E} = \Phi_{\vec{J}^*E} \circ \eta . \quad (1.104)$$

- Φ_{J^*E} é equivariante em relação à ação (1.100) de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \Phi_{J^*E}(z + \alpha) &= \Phi_{J^*E}(z) + \alpha \\ \text{para } z \in J^*E, \alpha \in \mathbb{R} . \end{aligned} \quad (1.105)$$

- Φ_{J^*E} é um levantamento de $\Phi_{\vec{J}^*E}$ pela seção \mathcal{H}_0 , i.e.,

$$\Phi_{J^*E} \circ \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0 \circ \Phi_{\vec{J}^*E} . \quad (1.106)$$

Para demonstrar esta afirmação, notamos inicialmente que as primeiras duas propriedades significam que Φ_{J^*E} é um automorfismo de J^*E como fibrado principal sobre \vec{J}^*E . É bem conhecido e fácil provar que dado um fibrado principal trivial P sobre uma variedade base M com grupo estrutural G e mediante a escolha de uma seção global $\sigma : M \rightarrow P$, um automorfismo $F : P \rightarrow P$ de P que induz um determinado difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ de M pode ser representado por uma função $f_0 \in C^\infty(M, G)$ determinada por $F(\sigma(m) \cdot g) = \sigma(f(m)) \cdot f_0(m) g$. Neste contexto, a escolha mais natural é dada por $f_0 \equiv 1$, e é exatamente este levantamento cuja existência e unicidade está sendo afirmada, no caso especial em que P, M, G e σ são substituídos por $J^*E, \vec{J}^*E, \mathbb{R}$ e \mathcal{H}_0 , respectivamente.

Passando aos duais torcidos, definidos em termos dos duais não-torcidos pelas equações (1.43) e (1.44), observamos que as fórmulas

$$\Phi_{\vec{J}^\circ E} = \Phi_{\vec{J}^*E} \otimes \Phi_M^{-1*} , \quad (1.107)$$

$$\Phi_{J^\circ E} = \Phi_{J^*E} \otimes \Phi_M^{-1*} , \quad (1.108)$$

estabelecem correspondências biunívocas entre os automorfismos de $\vec{J}^\circ E$ e de \vec{J}^*E , assim como entre os automorfismos de $J^\circ E$ e de J^*E . Escolhendo uma forma de volume ϵ no espaço-tempo M e fazendo uso dos isomorfismos $\vec{J}^\circ E \cong \vec{J}^*E$ e $J^\circ E \cong J^*E$ por ela induzidos, podemos identificar seções \mathcal{H}_0 de J^*E sobre \vec{J}^*E com seções \mathcal{H} de $J^\circ E$ sobre $\vec{J}^\circ E$. Assim, chegamos à seguinte

Proposição 1.2 *Dados uma hamiltoniana \mathcal{H} e um automorfismo $\Phi_{\vec{J}^{\otimes E}} : \vec{J}^{\otimes E} \rightarrow \vec{J}^{\otimes E}$ de $\vec{J}^{\otimes E}$ sobre o difeomorfismo $\Phi_M : M \rightarrow M$ de M , existe um único automorfismo $\Phi_{J^{\otimes E}} : J^{\otimes E} \rightarrow J^{\otimes E}$ de $J^{\otimes E}$ sobre o mesmo difeomorfismo $\Phi_M : M \rightarrow M$ de M com as seguintes propriedades:*

- $\Phi_{J^{\otimes E}}$ projeta sobre $\Phi_{\vec{J}^{\otimes E}}$ sob a projeção η , i.e.,

$$\eta \circ \Phi_{J^{\otimes E}} = \Phi_{\vec{J}^{\otimes E}} \circ \eta, \quad (1.109)$$

- $\Phi_{J^{\otimes E}}$ satisfaz a seguinte condição de “equivariância torcida” em relação à ação (1.102) de \mathbb{R} , para qualquer escolha de ϵ :

$$\begin{aligned} \Phi_{J^{\otimes E}}(z + \alpha\epsilon) &= \Phi_{J^{\otimes E}}(z) + \alpha \det^{-1}(\Phi'_M(m)) \epsilon \\ &\text{para } z \in J^{\otimes E} \text{ sobre } m \in M, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

- $\Phi_{J^{\otimes E}}$ é um levantamento de $\Phi_{\vec{J}^{\otimes E}}$ pela hamiltoniana \mathcal{H} , i.e.,

$$\Phi_{J^{\otimes E}} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \Phi_{\vec{J}^{\otimes E}}. \quad (1.111)$$

Chamaremos $\Phi_{J^{\otimes E}}$ o levantamento hamiltoniano de $\Phi_{\vec{J}^{\otimes E}}$.

A versão infinitesimal é a seguinte:

Proposição 1.3 *Dados uma hamiltoniana \mathcal{H} e um campo vetorial $X_{\vec{J}^{\otimes E}}$ sobre $\vec{J}^{\otimes E}$ que é projetável sobre um campo vetorial X_M sobre M , existe um único campo vetorial $X_{J^{\otimes E}}$ sobre $J^{\otimes E}$ que é projetável sobre o mesmo campo vetorial X_M sobre M com as seguintes propriedades:*

- $X_{J^{\otimes E}}$ projeta sobre $X_{\vec{J}^{\otimes E}}$ sob a projeção η , i.e.,

$$T\eta \circ X_{J^{\otimes E}} = X_{\vec{J}^{\otimes E}} \circ \eta. \quad (1.112)$$

- $X_{J^{\otimes E}}$ satisfaz a seguinte condição de “equivariância torcida” em relação ao campo fundamental Σ_ϵ , para qualquer escolha de ϵ :

$$[X_{J^{\otimes E}}, \Sigma_\epsilon] = \text{div } X_M \Sigma_\epsilon. \quad (1.113)$$

- $X_{J^{\otimes E}}$ é um levantamento de $X_{\vec{J}^{\otimes E}}$ pela hamiltoniana \mathcal{H} , i.e.,

$$X_{J^{\otimes E}} \circ \mathcal{H} = T\mathcal{H} \circ X_{\vec{J}^{\otimes E}}. \quad (1.114)$$

Chamaremos $X_{J^{\circledast}E}$ o levantamento hamiltoniano de $X_{\tilde{J}^{\circledast}E}$. Em coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i, p_i^μ) para $\tilde{J}^{\circledast}E$ e (x^μ, q^i, p_i^μ, p) para $J^{\circledast}E$, escrevendo $\mathcal{H} = -H d^n x$ e

$$X_{\tilde{J}^{\circledast}E} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu}, \quad (1.115)$$

obtemos

$$\begin{aligned} X_{J^{\circledast}E} &= X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \\ &\quad - \left((p + H) \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial H}{\partial x^\mu} X^\mu + \frac{\partial H}{\partial q^i} X^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} X_i^\mu \right) \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \quad (1.116)$$

DEMONSTRAÇÃO. Em termos de coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i, p_i^μ) para $\tilde{J}^{\circledast}E$ e (x^μ, q^i, p_i^μ, p) para $J^{\circledast}E$, campos vetoriais $X_{\tilde{J}^{\circledast}E}$ são escritos na forma

$$X_{\tilde{J}^{\circledast}E} = \vec{X}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \vec{X}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \vec{X}_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu},$$

onde os coeficientes \vec{X}^μ , \vec{X}^i e \vec{X}_i^μ são funções gerais das variáveis x^ρ , q^r e p_r^ρ , enquanto que campos vetoriais $X_{J^{\circledast}E}$ são escritos na forma

$$X_{J^{\circledast}E} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + X_0 \frac{\partial}{\partial p},$$

onde os coeficientes X^μ , X^i , X_i^μ e X_0 são funções gerais das variáveis x^ρ , q^r , p_r^ρ e p . Nestes termos, o fato de que o segundo projeta sobre o primeiro significa que

$$X^\mu = \vec{X}^\mu, \quad X^i = \vec{X}^i, \quad X_i^\mu = \vec{X}_i^\mu.$$

Em particular, os coeficientes X^μ , X^i e X_i^μ independem de p . Calculando o colchete de Lie, temos

$$\begin{aligned} [X_{J^{\circledast}E}, \Sigma_\epsilon] &= \left[X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + X_0 \frac{\partial}{\partial p}, \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial p} \right] \\ &= \left(X^\mu \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x^\mu} - \epsilon_0 \frac{\partial X_0}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição da divergência,

$$\operatorname{div} X_M \epsilon = L_{X_M} \epsilon,$$

ou em coordenadas,

$$\operatorname{div} X_M = X^\mu \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x^\mu} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} .$$

Portanto, a condição (1.113) é equivalente à relação

$$\frac{\partial X_0}{\partial p} = - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} , \quad (1.117)$$

que pode ser integrada como segue:

$$X_0 = -p \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} + Y_0 , \quad (1.118)$$

onde Y_0 independe da variável p . Finalmente, a propriedade de $X_{J^\circledast E}$ ser um levantamento de $X_{\vec{J}^\circledast E}$ pela hamiltoniana \mathcal{H} significa que

$$X_0 \Big|_{p=-H} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x^\mu} X^\mu + \frac{\partial H}{\partial q^i} X^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} X_i^\mu \right) .$$

Combinando as últimas duas equações, obtemos a equação (1.116). \square

Observemos que o levantamento hamiltoniano providencia um método de identificar automorfismos no espaço de multifase comum e no espaço de multifase estendido. Entre eles, podemos distinguir aqueles que preservam a forma multissimplética ω e que parecem ser os candidatos naturais para definir o conceito de uma *transformação multicanônica*, que seria o análogo natural da noção de uma transformação canônica no formalismo simplético da mecânica.

Finalmente, a ação de automorfismos e automorfismos infinitesimais relacionados por levantamento hamiltoniano sobre seções é simples. Em particular, quando comparamos a ação de um automorfismo infinitesimal $X = X_{\vec{J}^\circledast E}$ sobre uma seção $\phi = (\varphi, \pi)$ de $\vec{J}^\circledast E$ com a ação do seu levantamento hamiltoniano $\tilde{X} = X_{J^\circledast E}$ sobre a seção composta $\tilde{\phi} = \mathcal{H}(\phi) = (\varphi, \pi, -H(\varphi, \pi))$ de $J^\circledast E$, obtemos

$$\delta_X \phi = (\delta_X \varphi, \delta_X \pi) , \quad \delta_{\tilde{X}} \tilde{\phi} = (\delta_{\tilde{X}} \varphi, \delta_{\tilde{X}} \pi, -\delta_{\tilde{X}} H(\varphi, \pi)) , \quad (1.119)$$

com

$$\delta_{\tilde{X}} \varphi^i = \delta_X \varphi^i = X^i(\varphi) - \partial_\mu \varphi^i X^\mu , \quad (1.120)$$

$$\delta_{\tilde{X}} \pi_i^\mu = \delta_X \pi_i^\mu = X_i^\mu(\varphi, \pi) - \partial_\nu \pi_i^\mu X^\nu , \quad (1.121)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\tilde{X}} H(\varphi, \pi) &= \frac{\partial H}{\partial q^i}(\varphi, \pi) (X^i(\varphi) - \partial_\mu \varphi^i X^\mu) \\ &+ \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu}(\varphi, \pi) (X_i^\mu(\varphi, \pi) - \partial_\nu \pi_i^\mu X^\nu) . \end{aligned} \quad (1.122)$$

Observemos as diferenças entre os dois processos de levantamento canônico e de levantamento hamiltoniano: Ambos partem de um automorfismo de $\vec{J}^{\otimes}E$ que induz um automorfismo de E , onde no caso do levantamento canônico o primeiro é obtido por levantamento do segundo (correspondendo a um campo vetorial sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ com coeficientes X_i^{μ} determinados pelos coeficientes X^i e X^{μ}), enquanto que no caso do levantamento hamiltoniano o primeiro é independente do segundo (correspondendo a um campo vetorial sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ com coeficientes X_i^{μ} independentes dos coeficientes X^i e X^{μ}). Um melhor entendimento da questão quando estes dois levantamentos coincidem será obtido mais adiante.

1.6 Campos vetoriais hamiltonianos

Em variedades multissimpléticas, temos a mesma noção de campos vetoriais hamiltonianos (localmente, globalmente ou exatamente) que em variedades simpléticas:

Definição 1.5 *Seja $X \in \mathfrak{X}(P)$ um campo vetorial sobre uma variedade multissimplética P . O campo X é dito **localmente hamiltoniano** se $i_X\omega$ for uma forma fechada, ou seja, se*

$$L_X\omega = 0, \quad (1.123)$$

*o que significa que o fluxo de X preserva a forma multissimplética ω , e é dito **hamiltoniano** se $i_X\omega$ for uma forma exata, ou seja, se existir uma $(n-1)$ -forma f tal que*

$$i_X\omega = df. \quad (1.124)$$

*Neste caso, X é unicamente determinado por f (pois ω é não-degenerada) e chamado o **campo hamiltoniano associado a f** , denotado por X_f . Reciprocamente, se para uma dada $(n-1)$ -forma f existir um campo vetorial X tal que vale a fórmula (1.124), então dizemos que f é uma $(n-1)$ -**forma hamiltoniana** e que f é **associada a X** .*

A novidade na geometria multissimplética é que f é uma $(n-1)$ -forma, ao invés de ser simplesmente uma função, e que nem todas as $(n-1)$ -formas são hamiltonianas: Ocorre que a condição (1.124) impõe fortes restrições não apenas sobre X mas também sobre f .

No caso em que a variedade for exatamente multissimplética, podemos completar a definição acima como segue:

Definição 1.6 *Seja $X \in \mathfrak{X}(P)$ um campo vetorial sobre uma variedade exatamente multissimplética P . O campo X é dito **exatamente hamiltoniano** se*

$$L_X\theta = 0, \quad (1.125)$$

o que significa que o fluxo de X preserva a forma multicanônica θ .

É fácil ver que vale

$$X \text{ exatamente hamiltoniano} \implies X \text{ hamiltoniano}, \quad (1.126)$$

e

$$X \text{ hamiltoniano} \implies X \text{ localmente hamiltoniano}. \quad (1.127)$$

De fato, a primeira implicação segue de

Proposição 1.4 *Seja $X \in \mathfrak{X}(P)$ um campo vetorial exatamente hamiltoniano sobre uma variedade exatamente multissimplética P . Então*

$$J(X) = i_X \theta \quad (1.128)$$

é uma $(n - 1)$ -forma hamiltoniana cujo campo hamiltoniano associado é o próprio X :

$$X_{J(X)} = X. \quad (1.129)$$

DEMONSTRAÇÃO. É um cálculo simples:

$$d(J(X)) = d(i_X \theta) = L_X \theta - i_X d\theta = i_X \omega.$$

□

1.6.1 Espaço de multifase estendido

No caso do espaço de multifase estendido $J^\circledast E$, onde o núcleo de θ contém o núcleo de ω e onde podemos lançar mão do campo de Euler Σ para obter θ a partir de ω , conforme a equação (1.99), este constitui uma ferramenta chave para a completa classificação dos campos vetoriais localmente hamiltonianos, através da sua decomposição em componentes homogêneos sob a derivada de Lie ao longo de Σ . A seguir, apresentamos a classificação dos campos multivetoriais exatamente hamiltonianos e dos campos multivetoriais localmente hamiltonianos sobre $J^\circledast E$ obtida em [13] para o caso especial e mais simples de campos vetoriais.

Como primeiro passo, formulamos duas afirmações simples que generalizam a proposição anterior:

Proposição 1.5 *Seja $X \in \mathfrak{X}(J^\circledast E)$ um campo vetorial localmente hamiltoniano sobre o espaço de multifase estendido $J^\circledast E$. Então*

$$J(X) = i_X \theta \quad (1.130)$$

é uma $(n - 1)$ -forma hamiltoniana cujo campo hamiltoniano associado é $X + [\Sigma, X]$:

$$X_{J(X)} = X + [\Sigma, X]. \quad (1.131)$$

DEMONSTRAÇÃO. É um cálculo simples:

$$\begin{aligned} d(J(X)) &= d(i_X \theta) = L_X \theta - i_X d\theta \\ &= -L_X i_\Sigma \omega + i_X \omega \\ &= -L_X i_\Sigma \omega + i_\Sigma L_X \omega + i_X \omega \\ &= -i_{[X, \Sigma]} \omega + i_X \omega. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.6 *Seja $X \in \mathfrak{X}(J^\circ E)$ um campo vetorial localmente hamiltoniano sobre o espaço de multifase estendido $J^\circ E$. Então X é homogêneo de grau 0 sob L_Σ se e somente se X for exatamente hamiltoniano.*

DEMONSTRAÇÃO. A afirmação segue imediatamente da igualdade

$$L_X \theta = i_{[\Sigma, X]} \omega, \quad (1.132)$$

que é válida desde que $L_X \omega = 0$, em conjunto com o fato de que ω é não-degenerada.

□

Para prosseguir, usamos coordenadas locais adaptadas, em termos das quais um campo vetorial X qualquer sobre $J^\circ E$ assume a forma

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + X_0 \frac{\partial}{\partial p}, \quad (1.133)$$

onde todos os coeficientes X^μ , X^i , X_i^μ e X_0 são funções (em geral arbitrárias) das variáveis x^κ , q^k , p_k^κ e p . Tendo em vista as formas explícitas (1.82) de ω e (1.81) de θ em coordenadas locais adaptadas, torna-se óbvio que

$$\begin{aligned} i_X \omega &= X^\nu dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_{\mu\nu} - X_i^\mu dq^i \wedge d^n x_\mu + X^i dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu \\ &\quad + X^\mu dp \wedge d^n x_\mu - X_0 d^n x, \end{aligned} \quad (1.134)$$

e

$$i_X \theta = (p_i^\mu X^i + p X^\mu) d^n x_\mu - p_i^\mu X^\nu dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu}. \quad (1.135)$$

Estas fórmulas constituem o ponto de partida para a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 1.1 *Seja $X \in \mathfrak{X}(J^{\otimes}E)$ um campo vetorial exatamente hamiltoniano sobre o espaço de multifase estendido $J^{\otimes}E$. Então em coordenadas locais adaptadas, as componentes de X conforme definidas pela equação (1.133) acima estão sujeitas às seguintes restrições:*

- *Os coeficientes X^μ independem das variáveis p e p_k^κ . Para $N > 1$, também independem das variáveis q^k .*
- *Os coeficientes X^i independem das variáveis p e p_k^κ .*
- *Os coeficientes X_i^μ e X_0 são definidos em termos dos coeficientes X^μ e X^i pelas seguintes fórmulas:*

$$X_i^\mu = -p \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} - p_j^\mu \frac{\partial X^j}{\partial q^i} + p_i^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} - p_i^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu}, \quad (1.136)$$

$$X_0 = -p \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} - p_i^\mu \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu}. \quad (1.137)$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $X \in \mathfrak{X}(J^{\otimes}E)$ um campo vetorial qualquer sobre $J^{\otimes}E$. Em coordenadas locais adaptadas, aplicamos a derivada exterior d à equação (1.135) para obter

$$\begin{aligned} d(i_X \theta) &= X^i dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu + \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} p_i^\mu d^n x + \frac{\partial X^i}{\partial q^j} p_i^\mu dq^j \wedge d^n x_\mu \\ &+ \frac{\partial X^i}{\partial p_j^\nu} p_i^\mu dp_j^\nu \wedge d^n x_\mu + \frac{\partial X^i}{\partial p} p_i^\mu dp \wedge d^n x_\mu \\ &+ X^\mu dp \wedge d^n x_\mu + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} p d^n x + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} p dq^i \wedge d^n x_\mu \\ &+ \frac{\partial X^\mu}{\partial p_j^\nu} p dp_j^\nu \wedge d^n x_\mu + \frac{\partial X^\mu}{\partial p} p dp \wedge d^n x_\mu \\ &- X^\nu dp_i^\mu \wedge dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu} + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\kappa} p_i^\mu dq^i \wedge dx^\kappa \wedge d^n x_{\mu\nu} \\ &- \frac{\partial X^\nu}{\partial q^j} p_i^\mu dq^j \wedge dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu} - \frac{\partial X^\nu}{\partial p_k^\kappa} p_i^\mu dp_k^\kappa \wedge dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu} \\ &- \frac{\partial X^\nu}{\partial p} p_i^\mu dp \wedge dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Assim, pela equação (1.134),

$$\begin{aligned}
L_X \theta &= d(i_X \theta) - i_X \omega \\
&= \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} p + \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} p_i^\mu + X_0 \right) d^n x \\
&\quad + \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} p_j^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} p_i^\nu + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} p_i^\mu + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} p + X_i^\mu \right) dq^i \wedge d^n x_\mu \\
&\quad + \left(\frac{\partial X^i}{\partial p_j^\nu} p_i^\mu + \frac{\partial X^\mu}{\partial p_j^\nu} p \right) dp_j^\nu \wedge d^n x_\mu \\
&\quad + \left(\frac{\partial X^i}{\partial p} p_i^\mu + \frac{\partial X^\mu}{\partial p} p \right) dp \wedge d^n x_\mu \\
&\quad + \frac{\partial X^\nu}{\partial q^j} p_i^\mu dq^i \wedge dq^j \wedge d^n x_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{\partial X^\nu}{\partial p_k^\kappa} p_i^\mu dq^i \wedge dp_k^\kappa \wedge d^n x_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{\partial X^\nu}{\partial p} p_i^\mu dq^i \wedge dp \wedge d^n x_{\mu\nu} .
\end{aligned}$$

Numerando os termos nesta equação de 1 a 7, a condição

$$L_X \theta = 0$$

leva às seguintes conclusões:

- Termo 7: Este se anula se e somente se os coeficientes X^μ independem da variável p , e então o quarto termo se anula se e somente se os coeficientes X^i independem da variável p .
- Termo 6: Este se anula se e somente se os coeficientes X^μ independem das variáveis p_k^κ , e então o terceiro termo se anula se e somente se os coeficientes X^i independem das variáveis p_k^κ .
- Termo 5: Este se anula se e somente se os coeficientes X^μ independem das variáveis q^k , caso $N > 1$. No caso $N = 1$, este termo se anula identicamente.
- Termos 1 e 2: Estes se anulam se e somente se os coeficientes X_i^μ e X_0 são definidos em termos dos coeficientes X^μ e X^i segundo as equações (1.136) e (1.137).

□

Passando a campos vetoriais localmente mas não necessariamente exatamente hamiltonianos, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2 *Seja $X \in \mathfrak{X}(J^{\otimes}E)$ um campo vetorial localmente hamiltoniano sobre o espaço de multifase estendido $J^{\otimes}E$. Então em coordenadas locais adaptadas, as componentes de X conforme definidas pela equação (1.133) acima estão sujeitas às seguintes restrições:*

- *Os coeficientes X^μ independem das variáveis p e p_k^κ . Para $N > 1$, também independem das variáveis q^k .*
- *Os coeficientes X^i independem das variáveis p e p_k^κ .*
- *Os coeficientes X_i^μ e X_0 são definidos em termos dos coeficientes X^μ e X^i , em conjunto com novos coeficientes X_-^μ que também independem das variáveis p e p_k^κ , pelas seguintes fórmulas:*

$$X_i^\mu = -p \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} - p_j^\mu \frac{\partial X^j}{\partial q^i} + p_i^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} - p_i^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X_-^\mu}{\partial q^i}, \quad (1.138)$$

$$X_0 = -p \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} - p_i^\mu \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} + \frac{\partial X_-^\mu}{\partial x^\mu}. \quad (1.139)$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $X \in \mathfrak{X}(J^{\otimes}E)$ um campo vetorial qualquer sobre $J^{\otimes}E$. Em coordenadas locais adaptadas, aplicamos a derivada exterior d à equação (1.134) para obter

$$\begin{aligned} L_X \omega &= d(i_X \omega) \\ &= \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\kappa} dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge dx^\kappa \wedge d^n x_{\mu\nu} + \frac{\partial X^\nu}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{\partial X^\nu}{\partial p_k^\kappa} dp_k^\kappa \wedge dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_{\mu\nu} + \frac{\partial X^\nu}{\partial p} dp \wedge dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{\partial X_i^\mu}{\partial x^\mu} dq^i \wedge d^n x - \frac{\partial X_i^\mu}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^i \wedge d^n x_\mu \\ &\quad - \frac{\partial X_i^\mu}{\partial p_j^\nu} dp_j^\nu \wedge dq^i \wedge d^n x_\mu - \frac{\partial X_i^\mu}{\partial p} dp \wedge dq^i \wedge d^n x_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} dp_i^\mu \wedge d^n x + \frac{\partial X^i}{\partial q^j} dq^j \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu \\
& + \frac{\partial X^i}{\partial p_j^\nu} dp_j^\nu \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu + \frac{\partial X^i}{\partial p} dp \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu \\
& - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} dp \wedge d^n x + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} dq^i \wedge dp \wedge d^n x_\mu + \frac{\partial X^\mu}{\partial p_j^\nu} dp_j^\nu \wedge dp \wedge d^n x_\mu \\
& - \frac{\partial X_0}{\partial q^i} dq^i \wedge d^n x - \frac{\partial X_0}{\partial p_i^\mu} dp_i^\mu \wedge d^n x - \frac{\partial X_0}{\partial p} dp \wedge d^n x .
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
L_X \omega &= \left(\frac{\partial X_i^\mu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial X_0}{\partial q^i} \right) dq^i \wedge d^n x \\
& - \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} + \frac{\partial X_0}{\partial p_i^\mu} \right) dp_i^\mu \wedge d^n x \\
& - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial X_0}{\partial p} \right) dp \wedge d^n x \\
& + \left(\frac{\partial X_i^\mu}{\partial p} + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} \right) dq^i \wedge dp \wedge d^n x_\mu \\
& + \left(\frac{\partial X^\sigma}{\partial p_k^\kappa} - \delta_\kappa^\sigma \frac{\partial X^k}{\partial p} \right) dp_k^\kappa \wedge dp \wedge d^n x_\sigma \\
& + \left(\frac{\partial X_i^\mu}{\partial p_j^\nu} + \delta_\nu^\mu \frac{\partial X^j}{\partial q^i} - \delta_i^j \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} + \delta_\nu^\mu \delta_i^j \frac{\partial X^\kappa}{\partial x^\kappa} \right) dq^i \wedge dp_j^\nu \wedge d^n x_\mu \\
& + \frac{\partial X_i^\mu}{\partial q^j} dq^i \wedge dq^j \wedge d^n x_\mu \\
& + \frac{\partial X^l}{\partial p_k^\kappa} dp_k^\kappa \wedge dp_l^\lambda \wedge d^n x_\lambda \\
& + \frac{\partial X^\sigma}{\partial q^k} dq^k \wedge dq^l \wedge dp_l^\lambda \wedge d^n x_{\lambda\sigma} \\
& - \frac{\partial X^\sigma}{\partial p_k^\kappa} dq^l \wedge dp_k^\kappa \wedge dp_l^\lambda \wedge d^n x_{\lambda\sigma} \\
& + \frac{\partial X^\nu}{\partial p} dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge dp \wedge d^n x_{\mu\nu} .
\end{aligned}$$

Numerando os termos nesta equação de 1 a 11, a condição

$$L_X \omega = 0$$

leva às seguintes conclusões:

- Termo 11: Este se anula se e somente se os coeficientes X^μ independem da variável p .
- Termo 10: Fixando índices i, j, μ, ν, ρ e índices mutuamente diferentes $\rho_1, \dots, \rho_{n-2}$, contraímos $L_X \omega$ com o campo multivetorial $\partial_j \wedge \partial_\mu^i \wedge \partial_\nu^j \wedge \partial_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\rho_{n-2}}$ (sem soma sobre j), obtendo a relação

$$\frac{\partial X^\sigma}{\partial p_i^\mu} \epsilon_{\nu\sigma\rho_1\dots\rho_{n-2}} = \delta_j^i \frac{\partial X^\sigma}{\partial p_j^\nu} \epsilon_{\mu\sigma\rho_1\dots\rho_{n-2}} \quad (\text{sem soma sobre } j).$$

Agora, se inicialmente, fixamos apenas os índices i, μ e ρ , podemos sempre escolher os demais índices tais que $\nu, \rho, \rho_1, \dots, \rho_{n-2}$ são mutuamente diferentes, o que reduz o lado esquerdo desta equação à expressão $\pm \partial X^\rho / \partial p_i^\mu$, enquanto que o lado direito se anula se escolhermos $j \neq i$ ou $\rho_1, \dots, \rho_{n-2}$ tais que μ ocorre entre eles. Assim, concluimos que

$$\frac{\partial X^\rho}{\partial p_i^\mu} = 0,$$

exceto quando $N = 1$ e $n > 2$ e $\mu = \rho$ ou quando $N = 1$ e $n = 2$. Observe que quando $N = 1$ e $\mu = \rho$, a equação anterior assume a forma⁵

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial p^\mu} \epsilon_{\nu\mu\rho_1\dots\rho_{n-2}} = \frac{\partial X^\nu}{\partial p^\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho_1\dots\rho_{n-2}} \quad (\text{sem soma sobre } \mu \text{ e } \nu),$$

o que implica

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial p^\mu} = -\frac{\partial X^\kappa}{\partial p^\kappa} = \frac{\partial X^\lambda}{\partial p^\lambda} = -\frac{\partial X^\mu}{\partial p^\mu} \quad (\text{sem soma sobre } \mu, \kappa \text{ e } \lambda),$$

desde que μ, κ, λ são mutuamente diferentes. Portanto, a conclusão anterior, de que

$$\frac{\partial X^\rho}{\partial p_i^\mu} = 0,$$

vale mesmo quando $N = 1$ e $n > 2$ e $\mu = \rho$. A única exceção ocorre no caso em que $N = 1$ e $n = 2$, onde é apenas possível concluir que

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial p^\mu} = 0.$$

No entanto, esta situação será coberta no próximo item.

⁵Quando $N = 1$, omitimos os índices i, j , etc.

- Termo 5: Fixando índices i, μ, ρ e $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ tais que os índices $\rho, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ são mutuamente diferentes, contraímos $L_X \omega$ com o campo multivetorial $\partial_\mu^i \wedge \partial_0 \wedge \partial_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\rho_{n-1}}$, obtendo a relação

$$\frac{\partial X^\rho}{\partial p_i^\mu} = \delta_\mu^\rho \frac{\partial X^i}{\partial p}.$$

Tomando o traço em μ e ρ e usando o resultado do item anterior, chegamos à conclusão de que

$$\frac{\partial X^i}{\partial p} = 0,$$

mesmo no caso em que $N = 1$ e $n = 2$. Portanto, temos também

$$\frac{\partial X^\rho}{\partial p_i^\mu} = 0,$$

mesmo no caso em que $N = 1$ e $n = 2$.

- Termo 8: Fixando índices i, j, μ, ν e índices mutuamente diferentes $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, contraímos $L_X \omega$ com o campo multivetorial $\partial_\mu^i \wedge \partial_\nu^j \wedge \partial_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\rho_{n-1}}$, obtendo a relação

$$\frac{\partial X^j}{\partial p_i^\mu} \epsilon_{\nu \rho_1 \dots \rho_{n-1}} = \frac{\partial X^i}{\partial p_j^\nu} \epsilon_{\mu \rho_1 \dots \rho_{n-1}}.$$

Agora, se inicialmente, fixamos apenas os índices i, j e μ , podemos sempre escolher os demais índices tais que $\nu \neq \mu$ e que $\nu, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ são mutuamente diferentes, o que reduz o lado esquerdo desta equação à expressão $\pm \partial X^j / \partial p_i^\mu$, enquanto que o lado direito se anula. Assim, chegamos à conclusão de que

$$\frac{\partial X^j}{\partial p_i^\mu} = 0.$$

- Termo 9: Fixando índices i, j, ρ e $\nu, \rho_1, \dots, \rho_{n-2}$ tais que os índices $\nu, \rho, \rho_1, \dots, \rho_{n-2}$ são mutuamente diferentes, contraímos $L_X \omega$ com o campo multivetorial $\partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_\nu^j \wedge \partial_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\rho_{n-2}}$ (sem soma sobre j), obtendo a relação

$$\frac{\partial X^\rho}{\partial q^i} = \delta_j^i \frac{\partial X^\rho}{\partial q^j} \quad (\text{sem soma sobre } j).$$

Assim, chegamos à conclusão de que

$$\frac{\partial X^\rho}{\partial q^i} = 0,$$

exceto no caso em que $N = 1$ onde o termo inteiro se anula identicamente e nenhuma conclusão pode ser tirada.

Para prosseguir, escrevemos as equações obtidas dos termos restantes.

- Termo 1:

$$\frac{\partial X_0}{\partial q^i} = \frac{\partial X_i^\mu}{\partial x^\mu}. \quad (1.140)$$

- Termo 2:

$$\frac{\partial X_0}{\partial p_i^\mu} = -\frac{\partial X^i}{\partial x^\mu}. \quad (1.141)$$

- Termo 3:

$$\frac{\partial X_0}{\partial p} = -\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu}. \quad (1.142)$$

- Termo 4:

$$\frac{\partial X_i^\mu}{\partial p} = -\frac{\partial X^\mu}{\partial q^i}. \quad (1.143)$$

- Termo 6:

$$\frac{\partial X_i^\mu}{\partial p_j^\nu} = -\delta_\nu^\mu \frac{\partial X^j}{\partial q^i} + \delta_i^j \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} - \delta_\nu^\mu \delta_i^j \frac{\partial X^\kappa}{\partial x^\kappa}. \quad (1.144)$$

- Termo 7:

$$\frac{\partial X_i^\mu}{\partial q^j} = \frac{\partial X_j^\mu}{\partial q^i}. \quad (1.145)$$

Começando pelas equações (1.141) e (1.142), nota-se que o lado direito independe da variável p e das variáveis p_k^κ ; portanto elas podem ser integradas diretamente para concluir que

$$X_0 = -p \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} - p_i^\mu \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} + Y_0,$$

onde Y_0 é uma função local sobre E : independe da variável p e das variáveis p_k^κ . O mesmo argumento aplicado às equações (1.143) e (1.144) mostra que

$$X_i^\mu = -p \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} - p_j^\mu \frac{\partial X^j}{\partial q^i} + p_i^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} - p_i^\mu \frac{\partial X^\kappa}{\partial x^\kappa} + Y_i^\mu,$$

onde os Y_i^μ são funções locais sobre E : independem da variável p e das variáveis p_k^κ . Substituindo estas relações nas equações (1.140) e (1.145), vem

$$\frac{\partial Y_0}{\partial q^i} = \frac{\partial Y_i^\mu}{\partial x^\mu},$$

e

$$\frac{\partial Y_i^\mu}{\partial q^j} = \frac{\partial Y_j^\mu}{\partial q^i},$$

respectivamente. Finalmente, este último sistema de equações pode ser resolvido pondo

$$Y_0 = \frac{\partial X_-^\mu}{\partial x^\mu}, \quad Y_i^\mu = \frac{\partial X_-^\mu}{\partial q^i},$$

onde os X_-^μ são funções locais sobre E : independem da variável p e das variáveis p_k^k . Isso demonstra as equações (1.138) e (1.139) e conclui a demonstração do teorema. \square

Para encontrar uma interpretação global das conclusões destes teoremas, observamos que os primeiros dois itens afirmam que um campo vetorial X (exatamente ou localmente) hamiltoniano sobre $J^\circ E$ é projetável sobre um campo vetorial X_E sobre E que, para $N > 1$, por sua vez é projetável sobre um campo vetorial X_M sobre M . Usando o levantamento canônico $X_{J^\circ E}$ de X_E para $J^\circ E$, dado pela equação (1.67), e comparando esta com as equações (1.136) e (1.137), chegamos à

Proposição 1.7 *Seja $X \in \mathfrak{X}(J^\circ E)$ um campo vetorial qualquer sobre o espaço de multi-fase estendido $J^\circ E$. Então X é exatamente hamiltoniano se e somente se X é projetável sobre E e coincide com o levantamento canônico $X_{J^\circ E}$ de sua projeção X_E .*

Passando a campos vetoriais localmente mas não necessariamente exatamente hamiltonianos, o terceiro item do Teorema (1.2) sugere uma decomposição de X na soma de dois termos, sendo o primeiro o mesmo que no teorema anterior. A novidade reside no segundo termo, isto é, nos coeficientes X_-^μ , cuja interpretação global decorre da seguinte proposição:

Proposição 1.8 *Seja f_0 uma $(n-1)$ -forma sobre E e considere a $(n-1)$ -forma sobre $J^\circ E$ obtida de f_0 por pull-back pela projeção alvo $\tau^\circ : J^\circ E \rightarrow E$, que por abuso de notação também será denotada por f_0 . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- Sobre $J^\circ E$, f_0 é hamiltoniana.
- Sobre E , a derivada exterior df_0 de f_0 é $(n-1)$ -horizontal.

Em coordenadas locais adaptadas, podemos escrever

$$f_0 = f_0^\mu d^n x_\mu + \frac{1}{2} (f_0)_{i}^{\mu\nu} dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu} + \dots, \quad (1.146)$$

onde os pontos denotam termos de ordem superior contendo pelo menos dois dq 's, e

$$df_0 = \frac{\partial f_0^\mu}{\partial x^\mu} d^n x + \left(\frac{\partial f_0^\mu}{\partial q^i} - \frac{\partial (f_0)_i^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right) dq^i \wedge d^n x_\mu, \quad (1.147)$$

obtendo

$$X_{f_0} = - \left(\frac{\partial f_0^\mu}{\partial q^i} - \frac{\partial (f_0)_i^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - \frac{\partial f_0^\mu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial p}. \quad (1.148)$$

para o campo hamiltoniano associado sobre $J^\circ E$.

DEMONSTRAÇÃO. A representação de uma $(n-1)$ -forma geral sobre E em coordenadas locais adaptadas sendo dada pela eq. (1.146), podemos aplicar a derivada exterior para obter uma fórmula que difere da eq. (1.147) pela presença de termos de ordem superior contendo pelo menos dois dq 's. A ausência destes termos expressa, de um lado, a $(n-1)$ -horizontalidade de df_0 sobre E e, de outro lado, a propriedade de df_0 sobre $J^\circ E$ se anular sobre o núcleo de ω , pois tendo em vista a forma explícita (1.82) de ω em coordenadas locais adaptadas, mostra-se que um multivetor que é uma combinação linear de produtos exteriores de vetores da forma ∂_μ e ∂_i pertence ao núcleo de ω se e somente se cada dos seus termos contém pelo menos dois vetores do tipo ∂_i . Da mesma maneira, a forma explícita (1.82) de ω em coordenadas locais adaptadas mostra que se definirmos X_{f_0} pela fórmula (1.148), a condição (1.124) será satisfeita. \square

Agora podemos formular a decomposição global de campos vetoriais localmente hamiltonianos em componentes homogêneas sob L_Σ :

Teorema 1.3 *Seja $X \in \mathfrak{X}(J^\circ E)$ um campo vetorial localmente hamiltoniano sobre o espaço de multifase estendido $J^\circ E$. Então X admite uma decomposição canônica na soma de dois termos*

$$X = X_- + X_0, \quad (1.149)$$

onde X_- e X_0 são campos vetoriais localmente hamiltonianos homogêneos de grau -1 e 0 sob L_Σ , respectivamente. Ademais, temos que

- X_- é vertical em relação à projeção sobre E e obtido por pull-back e dualização sob ω conforme exposto na Proposição 1.8.
- X_0 é exatamente hamiltoniano e obtido por levantamento canônico conforme exposto na Proposição 1.7.

1.6.2 Espaço de multifase comum

No caso do espaço de multifase comum $\vec{J}^{\otimes}E$, prosseguimos de forma análoga, por cálculo direto em coordenadas locais adaptadas, em termos das quais um campo vetorial \vec{X} qualquer sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ assume a forma

$$\vec{X} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu}, \quad (1.150)$$

onde todos os coeficientes X^μ , X^i e X_i^μ são funções (em geral arbitrárias) das variáveis x^κ , q^k e p_k^κ . Tendo em vista as formas explícitas (1.87) de $\omega_{\mathcal{H}}$ e (1.85) de $\theta_{\mathcal{H}}$ em coordenadas locais adaptadas, torna-se óbvio que

$$\begin{aligned} i_{\vec{X}} \omega_{\mathcal{H}} &= X^\nu dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_{\mu\nu} - \left(X_i^\mu + X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) dq^i \wedge d^n x_\mu \\ &+ \left(X^i \delta_\mu^\nu - X^\nu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right) dp_i^\mu \wedge d^n x_\nu + \left(X^i \frac{\partial H}{\partial q^i} + X_i^\mu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right) d^n x. \end{aligned} \quad (1.151)$$

e

$$i_{\vec{X}} \theta_{\mathcal{H}} = (p_i^\mu X^i - H X^\mu) d^n x_\mu - p_i^\mu X^\nu dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu}, \quad (1.152)$$

Estas fórmulas constituem o ponto de partida para a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 1.4 *Seja $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\vec{J}^{\otimes}E)$ um campo vetorial exatamente hamiltoniano sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^{\otimes}E$. Então em coordenadas locais adaptadas, as componentes de \vec{X} conforme definidas pela equação (1.150) acima estão sujeitas às seguintes restrições:*

- Os coeficientes X^μ independem das variáveis p_k^κ . Para $N > 1$, também independem das variáveis q^k .
- Os coeficientes X^i independem das variáveis p_k^κ .
- Os coeficientes X_i^μ são definidos em termos dos coeficientes X^μ e X^i pela seguinte fórmula:

$$X_i^\mu = H \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} - p_j^\mu \frac{\partial X^j}{\partial q^i} + p_i^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} - p_i^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu}, \quad (1.153)$$

- Vale a seguinte relação de compatibilidade entre os coeficientes X^μ e X^i e a função hamiltoniana H :

$$-H \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} + p_i^\mu \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} = \frac{\partial H}{\partial x^\mu} X^\mu + \frac{\partial H}{\partial q^i} X^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} X_i^\mu. \quad (1.154)$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\vec{J}^{\otimes} E)$ um campo vetorial qualquer sobre $\vec{J}^{\otimes} E$. Em coordenadas locais adaptadas, aplicamos a derivada exterior d à equação (1.152) para obter

$$\begin{aligned}
d(i_{\vec{X}} \theta_{\mathcal{H}}) &= X^i dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu + \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} p_i^\mu d^n x \\
&+ \frac{\partial X^i}{\partial q^j} p_i^\mu dq^j \wedge d^n x_\mu + \frac{\partial X^i}{\partial p_j^\nu} p_i^\mu dp_j^\nu \wedge d^n x_\mu \\
&- X^\mu \frac{\partial H}{\partial x^\mu} d^n x - X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \wedge d^n x_\mu - X^\nu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} dp_i^\mu \wedge d^n x_\nu \\
&- \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} H d^n x - \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} H dq^i \wedge d^n x_\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial p_j^\nu} H dp_j^\nu \wedge d^n x_\mu \\
&- X^\nu dp_i^\mu \wedge dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu} + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\kappa} p_i^\mu dq^i \wedge dx^\kappa \wedge d^n x_{\mu\nu} \\
&- \frac{\partial X^\nu}{\partial q^j} p_i^\mu dq^j \wedge dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu} - \frac{\partial X^\nu}{\partial p_k^\kappa} p_i^\mu dp_k^\kappa \wedge dq^i \wedge d^n x_{\mu\nu} .
\end{aligned}$$

Assim, pela equação (1.151),

$$\begin{aligned}
L_{\vec{X}} \theta_{\mathcal{H}} &= d(i_{\vec{X}} \theta_{\mathcal{H}}) - i_{\vec{X}} \omega_{\mathcal{H}} \\
&= \left(- \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} H + \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} p_i^\mu - \left(\frac{\partial H}{\partial x^\mu} X^\mu + \frac{\partial H}{\partial q^i} X^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} X_i^\mu \right) \right) d^n x \\
&+ \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} p_j^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} p_i^\nu + \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} p_i^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} H + X_i^\mu \right) dq^i \wedge d^n x_\mu \\
&+ \left(\frac{\partial X^i}{\partial p_j^\nu} p_i^\mu - \frac{\partial X^\mu}{\partial p_j^\nu} H \right) dp_j^\nu \wedge d^n x_\mu \\
&+ \frac{\partial X^\nu}{\partial q^j} p_i^\mu dq^i \wedge dq^j \wedge d^n x_{\mu\nu} \\
&+ \frac{\partial X^\nu}{\partial p_k^\kappa} p_i^\mu dq^i \wedge dp_k^\kappa \wedge d^n x_{\mu\nu} .
\end{aligned}$$

Numerando os termos nesta equação de 1 a 5, a condição

$$L_{\vec{X}} \theta_{\mathcal{H}} = 0$$

leva às seguintes conclusões:

- Termo 5: Este se anula se e somente se os coeficientes X^μ independem das variáveis p_k^κ , e então o terceiro termo se anula se e somente se os coeficientes X^i independem das variáveis p_k^κ .
- Termo 4: Este se anula se e somente se os coeficientes X^μ independem das variáveis q^k , caso $N > 1$. No caso $N = 1$, este termo se anula identicamente.
- Termo 2: Este se anula se e somente se os coeficientes X_i^μ são definidos em termos dos coeficientes X^μ e X^i segundo a equação (1.153).
- Termo 1: Este se anula se e somente se vale a relação (1.154).

□

Passando a campos vetoriais localmente mas não necessariamente exatamente hamiltonianos, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.5 *Seja $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\vec{J}^{\otimes} E)$ um campo vetorial localmente hamiltoniano sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^{\otimes} E$, e suponha que $N > 1$ ou $n > 2$. Então em coordenadas locais adaptadas, as componentes de \vec{X} conforme definidas pela equação (1.150) acima estão sujeitas às seguintes restrições:*

- Os coeficientes X^μ independem das variáveis p_k^κ . Para $N > 1$, também independem das variáveis q^k .
- Os coeficientes X^i independem das variáveis p_k^κ .
- Os coeficientes X_i^μ são definidos em termos dos coeficientes X^μ e X^i , em conjunto com novos coeficientes X_-^μ que também independem das variáveis p_k^κ , pela seguinte fórmula:

$$X_i^\mu = H \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} - p_j^\mu \frac{\partial X^j}{\partial q^i} + p_i^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} - p_i^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X_-^\mu}{\partial q^i}. \quad (1.155)$$

- Vale a seguinte relação de compatibilidade entre os coeficientes X^μ , X^i e X_-^μ e a função hamiltoniana H :

$$-H \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} + p_i^\mu \frac{\partial X^i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial X_-^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial H}{\partial x^\mu} X^\mu + \frac{\partial H}{\partial q^i} X^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} X_i^\mu. \quad (1.156)$$

Observação 1.1 Em relação às afirmações do Teorema 1.5, o caso em que $N = 1$ e $n = 2$ parece ser excepcional. Por exemplo, os argumentos a serem apresentados na demonstração

a seguir não permitem concluir, neste caso, que os coeficientes X^μ e X^i independem das variáveis p_k^κ ; mas apenas que vale⁶

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial p^\mu} = 0, \quad (1.157)$$

e

$$\frac{\partial X}{\partial p^\mu} = \frac{\partial X^\nu}{\partial p^\mu} \frac{\partial H}{\partial p^\nu}. \quad (1.158)$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\vec{J}^\otimes E)$ um campo vetorial qualquer sobre $\vec{J}^\otimes E$. Em coordenadas locais adaptadas, aplicamos a derivada exterior d à equação (1.151) para obter

$$\begin{aligned} L_{\vec{X}} \omega_{\mathcal{H}} &= d(i_{\vec{X}} \omega_{\mathcal{H}}) \\ &= \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\kappa} dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge dx^\kappa \wedge d^n x_{\mu\nu} + \frac{\partial X^\nu}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{\partial X^\nu}{\partial p_k^\kappa} dp_k^\kappa \wedge dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(X_i^\mu + X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) dq^i \wedge d^n x \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial q^j} \left(X_i^\mu + X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) dq^j \wedge dq^i \wedge d^n x_\mu \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} \left(X_i^\mu + X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) dp_j^\nu \wedge dq^i \wedge d^n x_\mu \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\delta_\mu^\nu X^i - X^\nu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right) dp_i^\mu \wedge d^n x \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\delta_\mu^\nu X^i - X^\nu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right) dq^j \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\nu \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} \left(\delta_\mu^\nu X^i - X^\kappa \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right) dp_j^\nu \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\kappa \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q^i} \left(X^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + X_j^\nu \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} \right) dq^i \wedge d^n x \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \left(X^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + X_j^\nu \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} \right) dp_i^\mu \wedge d^n x. \end{aligned}$$

⁶Lembramos que quando $N = 1$, omitimos os índices i, j , etc.

Reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
L_{\bar{X}} \omega_{\mathcal{H}} = & \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(X_i^\mu + X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) + \frac{\partial}{\partial q^i} \left(X^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + X_j^\nu \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} \right) \right) dq^i \wedge d^n x \\
& - \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\delta_\mu^\nu X^i - X^\nu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \left(X^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + X_j^\nu \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} \right) \right) dp_i^\mu \wedge d^n x \\
& + \left(\delta_l^k \left(\delta_\kappa^\sigma \frac{\partial X^\tau}{\partial x^\tau} - \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\kappa} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial p_k^\kappa} \left(X_l^\sigma + X^\sigma \frac{\partial H}{\partial q^l} \right) + \frac{\partial}{\partial q^l} \left(\delta_\kappa^\sigma X^k - X^\sigma \frac{\partial H}{\partial p_k^\kappa} \right) \right) dq^l \wedge dp_k^\kappa \wedge d^n x_\sigma \\
& - \frac{\partial}{\partial q^j} \left(X_i^\mu + X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) dq^j \wedge dq^i \wedge d^n x_\mu \\
& + \frac{\partial}{\partial p_k^\kappa} \left(\delta_\lambda^\sigma X^l - X^\sigma \frac{\partial H}{\partial p_l^\lambda} \right) dp_k^\kappa \wedge dp_l^\lambda \wedge d^n x_\sigma \\
& + \frac{\partial X^\sigma}{\partial q^k} dq^k \wedge dq^l \wedge dp_l^\lambda \wedge d^n x_{\lambda\sigma} \\
& - \frac{\partial X^\sigma}{\partial p_k^\kappa} dq^l \wedge dp_k^\kappa \wedge dp_l^\lambda \wedge d^n x_{\lambda\sigma} .
\end{aligned}$$

Numerando os termos nesta equação de 1 a 7, a condição

$$L_{\bar{X}} \omega_{\mathcal{H}} = 0$$

leva às seguintes conclusões:

- Termo 7: Pelo mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 1.2 para analisar o termo 10, podemos concluir que

$$\frac{\partial X^\rho}{\partial p_i^\mu} = 0 ,$$

exceto no caso em que $N = 1$ e $n = 2$, onde é apenas possível concluir que vale a relação (1.157).

- Termo 5: Fixando índices i, j, μ, ν, ρ e $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ tais que os índices $\rho, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ são mutuamente diferentes, contraímos $L_{\bar{X}} \omega_{\mathcal{H}}$ com o campo multivetorial

$\partial_\mu^i \wedge \partial_\nu^j \wedge \partial_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\rho_{n-1}}$, obtendo a relação

$$\frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \left(\delta_\nu^\rho X^j - X^\rho \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} \left(\delta_\mu^\rho X^i - X^\rho \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right),$$

ou seja

$$\delta_\nu^\rho \frac{\partial X^j}{\partial p_i^\mu} - \frac{\partial X^\rho}{\partial p_i^\mu} \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} = \delta_\mu^\rho \frac{\partial X^i}{\partial p_j^\nu} - \frac{\partial X^\rho}{\partial p_j^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu}.$$

Quando $N > 1$ ou $n > 2$, podemos usar o resultado do item anterior para concluir que

$$\delta_\nu^\rho \frac{\partial X^j}{\partial p_i^\mu} = \delta_\mu^\rho \frac{\partial X^i}{\partial p_j^\nu}.$$

Agora, se inicialmente, fixamos apenas os índices i, j e μ , podemos sempre escolher os demais índices tais que $\nu \neq \mu$ e $\rho = \nu$, o que reduz o lado esquerdo desta equação à expressão $\partial X^j / \partial p_i^\mu$, enquanto que o lado direito se anula. Assim, chegamos à conclusão de que

$$\frac{\partial X^j}{\partial p_i^\mu} = 0.$$

Por outro lado, quando $N = 1$ e $n = 2$, a equação anterior assume a forma

$$\delta_\nu^\rho \frac{\partial X}{\partial p^\mu} - \frac{\partial X^\rho}{\partial p^\mu} \frac{\partial H}{\partial p^\nu} = \delta_\mu^\rho \frac{\partial X}{\partial p^\nu} - \frac{\partial X^\rho}{\partial p^\nu} \frac{\partial H}{\partial p^\mu}.$$

Agora, se inicialmente, fixamos apenas o índice μ , podemos sempre escolher os demais índices tais que $\nu \neq \mu$ e $\rho = \nu$, obtendo

$$\frac{\partial X}{\partial p^\mu} = \frac{\partial X^\nu}{\partial p^\mu} \frac{\partial H}{\partial p^\nu} - \frac{\partial X^\nu}{\partial p^\nu} \frac{\partial H}{\partial p^\mu} \quad (\text{sem soma sobre } \nu),$$

o que, devido à equação (1.157), é equivalente à equação (1.158).

- Termo 6: Pelo mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 1.2 para analisar o termo 9, podemos concluir que

$$\frac{\partial X^\rho}{\partial q^i} = 0,$$

exceto no caso em que $N = 1$ onde o termo inteiro se anula identicamente e nenhuma conclusão pode ser tirada.

Para prosseguir, escrevemos as equações obtidas dos termos restantes.

- Termo 1:

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \left(X^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + X_j^\nu \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} \right) = - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(X_i^\mu + X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} \right). \quad (1.159)$$

- Termo 2:

$$\frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \left(X^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + X_j^\nu \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\delta_\nu^\mu X^i - X^\nu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \right). \quad (1.160)$$

- Termo 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} \left(X_i^\mu + X^\mu \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) &= - \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\delta_\nu^\mu X^j - X^\mu \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} \right) \\ &+ \delta_i^j \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} - \delta_\nu^\mu \delta_i^j \frac{\partial X^\kappa}{\partial x^\kappa}. \end{aligned} \quad (1.161)$$

- Termo 4:

$$\frac{\partial X_i^\mu}{\partial q^j} = \frac{\partial X_j^\mu}{\partial q^i}. \quad (1.162)$$

Supondo a partir de agora que $N > 1$ ou $n > 2$ e usando que sob esta hipótese, os coeficientes X^μ e X^i independem das variáveis p_k^κ , notamos que a equação (1.161) pode ser integrada diretamente para concluir que

$$X_i^\mu = H \frac{\partial X^\mu}{\partial q^i} - p_j^\mu \frac{\partial X^j}{\partial q^i} + p_i^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} - p_i^\mu \frac{\partial X^\kappa}{\partial x^\kappa} + Y_i^\mu,$$

onde os Y_i^μ são funções locais sobre E : independem das variáveis p_k^κ . Substituindo esta relação na equação (1.162), vem

$$\frac{\partial Y_i^\mu}{\partial q^j} = \frac{\partial Y_j^\mu}{\partial q^i},$$

o que pode ser resolvido pondo

$$Y_i^\mu = \frac{\partial Y_-^\mu}{\partial q^i},$$

onde os Y_-^μ são funções locais sobre E : independem das variáveis p_k^κ . Finalmente, substituindo a relação assim obtida nas equações (1.159) e (1.160), vem

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \left(H \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} - p_j^\nu \frac{\partial X^j}{\partial x^\nu} + \frac{\partial Y_-^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial H}{\partial x^\nu} X^\nu + \frac{\partial H}{\partial q^j} X^j + \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} X_j^\nu \right) = 0,$$

e

$$\frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \left(H \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} - p_j^\nu \frac{\partial X^j}{\partial x^\nu} + \frac{\partial Y_-^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial H}{\partial x^\nu} X^\nu + \frac{\partial H}{\partial q^j} X^j + \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} X_j^\nu \right) = 0,$$

mostrando que

$$H \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\nu} - p_j^\nu \frac{\partial X^j}{\partial x^\nu} + \frac{\partial Y_-^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial H}{\partial x^\nu} X^\nu + \frac{\partial H}{\partial q^j} X^j + \frac{\partial H}{\partial p_j^\nu} X_j^\nu = Y_- ,$$

onde Y_- é uma função local sobre M : independe das variáveis q^k e p_k^x . Escrevendo Y_- como uma divergência,

$$Y_- = \frac{\partial Y_-'^\nu}{\partial x^\nu} ,$$

e pondo $X^\mu = Y_-^\nu - Y_-'^\nu$, chegamos às equações (1.155) e (1.156), o que conclui a demonstração do teorema. \square

Para encontrar uma interpretação global das conclusões destes teoremas, observamos novamente que os primeiros dois itens afirmam que um campo vetorial \vec{X} (exatamente ou localmente) hamiltoniano sobre $\vec{J}^\circledast E$ é projetável sobre um campo vetorial X_E sobre E^7 que, para $N > 1$, por sua vez é projetável sobre um campo vetorial X_M sobre M . Usando o levantamento canônico $X_{J^\circledast E}$ de X_E para o espaço de multifase estendido $J^\circledast E$, dado pela equação (1.67), e comparando esta com as equações (1.153) e (1.154), chegamos à

Proposição 1.9 *Seja $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\vec{J}^\circledast E)$ um campo vetorial qualquer sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^\circledast E$. Então \vec{X} é exatamente hamiltoniano se e somente se \vec{X} é projetável sobre E e é \mathcal{H} -relacionado ao levantamento canônico $X_{J^\circledast E}$ de sua projeção X_E :*

$$X_{J^\circledast E} \circ \mathcal{H} = T\mathcal{H} \circ \vec{X} . \quad (1.163)$$

Passando a campos vetoriais localmente mas não necessariamente exatamente hamiltonianos, o terceiro item do Teorema (1.5) sugere uma decomposição de \vec{X} na soma de dois termos, como antes. No entanto, a interpretação global desta decomposição parece ser mais complicada do que no caso do Teorema 1.2. A razão principal da dificuldade reside no fato de que, apesar de ainda ser possível caracterizar esta decomposição em termos de componentes homogêneos sob a derivada de Lie ao longo do campo de Euler Σ (agora sobre $\vec{J}^\circledast E$), estes dois componentes deixam de ser localmente hamiltonianos pois não satisfazem separadamente o vínculo (1.156). Assim, o Teorema 1.3 parece não ter nenhum análogo natural.

⁷Lembramos que excluímos o caso excepcional de campos vetoriais localmente hamiltonianos mencionado na Observação 1.1 (sistemas com $N=1$ grau de liberdade em $n=2$ dimensões), que requer um tratamento separado.

1.6.3 Projeção e levantamento de campos vetoriais hamiltonianos

O passo final no nosso estudo de campos vetoriais hamiltonianos consistirá em esclarecer a relação entre campos vetoriais (exatamente ou localmente) hamiltonianos X sobre o espaço de multifase estendido $J^{\circledast}E$ e campos vetoriais (exatamente ou localmente) hamiltonianos \vec{X} sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^{\circledast}E$, no caso em que estes são projetáveis.

Definição 1.7 *Um campo vetorial X sobre o espaço de multifase estendido $J^{\circledast}E$ é chamado projetável se for projetável em relação a cada uma das três projeções (sobre $\vec{J}^{\circledast}E$, sobre E e sobre M). De forma análoga, um campo vetorial \vec{X} sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^{\circledast}E$ é chamado projetável se for projetável em relação a cada uma das duas projeções (sobre E e sobre M).*

Com esta terminologia, os Teoremas 1.2 e 1.5 implicam que para $N > 1$, qualquer campo vetorial localmente hamiltoniano é projetável, enquanto que, talvez surpreendentemente, o caso de sistemas com apenas um grau de liberdade é mais complicado: Para $N = 1$, um campo vetorial localmente hamiltoniano sobre $\vec{J}^{\circledast}E$ é projetável sobre E se $n > 2$, enquanto que um campo vetorial localmente hamiltoniano sobre $J^{\circledast}E$ é sempre projetável sobre E e será projetável sobre $\vec{J}^{\circledast}E$ se e somente se for projetável sobre M .

Para a discussão a seguir, que aborda a relação entre campos vetoriais localmente hamiltonianos sobre $J^{\circledast}E$ e sobre $\vec{J}^{\circledast}E$, restringiremo-nos a campos vetoriais projetáveis, em todos os sentidos como definido acima, mesmo quando $N = 1$. Um dos motivos é que campos vetoriais sobre o espaço total de um fibrado sobre o espaço-tempo M que não sejam projetáveis sobre M podem ser considerados como patológicos, pois geram um tipo de transformação que não induz nenhuma transformação bem-definida no espaço-tempo: é difícil imaginar como interpretar uma transformação desta natureza como candidato para uma simetria que tenha algum significado físico.

A relação entre campos vetoriais projetáveis e localmente hamiltonianos sobre $\vec{J}^{\circledast}E$ e sobre $J^{\circledast}E$ baseia-se na observação de que a relação de compatibilidade (1.156) identificada no Teorema 1.5 possui uma interpretação geométrica-natural, independente da escolha de coordenadas: Ela afirma que os campos vetoriais projetáveis X sobre $J^{\circledast}E$ e \vec{X} sobre $\vec{J}^{\circledast}E$ dados, respectivamente, pelas equações (1.133), (1.138), (1.139) e (1.150), (1.155) são \mathcal{H} -relacionados:

$$X \circ \mathcal{H} = T\mathcal{H} \circ \vec{X} . \quad (1.164)$$

Independentemente da questão se os campos vetoriais envolvidos são localmente hamiltonianos ou não, mostra-se útil introduzir uma terminologia específica para medir um possível desvio da validade desta relação.

Definição 1.8 Dada uma hamiltoniana \mathcal{H} , seja X um campo vetorial sobre o espaço de multifase estendido $J^{\otimes}E$ que é projetável, conforme a Definição 1.7, seja \vec{X} sua projeção sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^{\otimes}E$ e seja \tilde{X} o levantamento hamiltoniano de \vec{X} , conforme a Proposição 1.3. O campo vetorial

$$X^{\mathcal{H}} = X - \tilde{X} \quad (1.165)$$

sobre $J^{\otimes}E$ será chamado o *desvio hamiltoniano* de X .

Em coordenadas locais adaptadas, com componentes de X e de \vec{X} conforme definidas pela equações (1.133) e (1.150), temos

$$X^{\mathcal{H}} = X_0^{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial p}, \quad (1.166)$$

onde, conforme a equação (1.116),

$$X_0^{\mathcal{H}} = X_0 + (p + H) \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial H}{\partial x^{\mu}} X^{\mu} + \frac{\partial H}{\partial q^i} X^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^{\mu}} X_i^{\mu}. \quad (1.167)$$

Por definição, X e \vec{X} são \mathcal{H} -relacionados se e somente se $X^{\mathcal{H}}$ se anula sobre a imagem de \mathcal{H} em $J^{\otimes}E$. Se X for localmente hamiltoniano, então a equação (1.139) mostra que o coeficiente $X_0^{\mathcal{H}}$ independe de p e vale

$$X_0^{\mathcal{H}} = H \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - p_i^{\mu} \frac{\partial X^i}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial H}{\partial x^{\mu}} X^{\mu} + \frac{\partial H}{\partial q^i} X^i + \frac{\partial H}{\partial p_i^{\mu}} X_i^{\mu}. \quad (1.168)$$

Note também que o fato de que, por definição, \tilde{X} e \vec{X} são sempre \mathcal{H} -relacionados implica que, para qualquer forma diferencial α sobre $J^{\otimes}E$, vale a relação

$$i_{\vec{X}}(\mathcal{H}^* \alpha) = \mathcal{H}^*(i_{\tilde{X}} \alpha), \quad (1.169)$$

ou seja,

$$i_{\vec{X}}(\mathcal{H}^* \alpha) = \mathcal{H}^*(i_X \alpha) - \mathcal{H}^*(i_{X^{\mathcal{H}}} \alpha). \quad (1.170)$$

Em particular, notamos que

$$i_{X^{\mathcal{H}}} \theta = 0, \quad i_{X^{\mathcal{H}}} \omega = -X_0^{\mathcal{H}} d^n x. \quad (1.171)$$

Quanto à possibilidade de construir \vec{X} a partir de X e/ou vice versa, vale o seguinte

Teorema 1.6 *Dada uma hamiltoniana \mathcal{H} , seja $X \in \mathfrak{X}(J^{\circledast}E)$ um campo vetorial sobre o espaço de multifase estendido $J^{\circledast}E$ e $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\vec{J}^{\circledast}E)$ um campo vetorial sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^{\circledast}E$, ambos projetáveis.*

- *Dado X , suponha que \vec{X} seja sua projeção.
Se X for localmente hamiltoniano (em relação a ω) e for tangente à imagem de \mathcal{H} , então X e \vec{X} são \mathcal{H} -relacionados, \vec{X} é localmente hamiltoniano (em relação a $\omega_{\mathcal{H}}$) e X é seu levantamento hamiltoniano.*
- *Dado \vec{X} , suponha que X seja seu levantamento hamiltoniano.
Se \vec{X} for localmente hamiltoniano (em relação a $\omega_{\mathcal{H}}$), então X e \vec{X} são \mathcal{H} -relacionados, X é localmente hamiltoniano (em relação a ω) e \vec{X} é sua projeção.*

Em particular, \vec{X} é localmente hamiltoniano se e somente se X é localmente hamiltoniano e tangente à imagem de \mathcal{H} , ou equivalentemente, $X^{\mathcal{H}} = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Observe que X é tangente à imagem de \mathcal{H} se e somente se para todo $\vec{z} \in \vec{J}^{\circledast}E$, existe $\vec{Y}_{\vec{z}} \in T_{\vec{z}}(\vec{J}^{\circledast}E)$ tal que $X(\mathcal{H}(\vec{z})) = T_{\vec{z}}\mathcal{H}(\vec{Y}_{\vec{z}})$. Aplicando a tangente $T_{\mathcal{H}(\vec{z})}\eta$ à projeção η , concluímos que $\vec{Y}_{\vec{z}} = \vec{X}_{\vec{z}}$. As afirmações que se referem ao levantamento hamiltoniano seguem por comparação das equações (1.116), (1.133) com (1.139) e (1.156). \square

1.7 Colchete de Poisson

Um dos maiores problemas no formalismo multissimplético, ainda parcialmente em aberto, é a definição adequada do colchete de Poisson entre observáveis. Apesar de uma resposta definitiva talvez ainda não tenha sido encontrada, existem resultados parciais, que passamos a expor.

Uma das idéias que tem sido explorada na literatura é definir um colchete de Poisson usando como ponto de partida a mesma fórmula $i_X\omega = df$ da mecânica, o que no entanto requer várias modificações – algumas delas óbvias, outras nem tanto. Por exemplo, o fato de que no formalismo multissimplético, a forma ω é de grau $n + 1 > 2$ implica que os objetos X passam a ser campos multivetoriais, ao invés de campos vetoriais, e os objetos f passam a ser formas diferenciais, ao invés de funções. Como já foi visto, isso acarreta um certo grau de ambiguidade, pois em geral, X é determinado por f apenas a menos de um campo

multivetorial tomando valores no núcleo de ω e, reciprocamente, f é determinada por X apenas a menos de uma forma fechada. No caso especial em que X tem grau 1 e f tem grau $n-1$, a primeira ambiguidade deixa de existir, mas a segunda permanece. Em outras palavras, temos o seguinte isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Formas hamiltonianas} & \\ & \text{de grau } n-1 & \\ \text{Campos vetoriais hamiltonianos} & \longleftrightarrow & \text{módulo formas fechadas} \end{array} \quad (1.172)$$

Uma primeira proposta para um colchete de Poisson entre duas $(n-1)$ -formas hamiltonianas f e g é a mesma da mecânica, ou seja,

$$\{f, g\} = i_{X_g} i_{X_f} \omega, \quad (1.173)$$

onde X_f e X_g são os campos hamiltonianos associados a f e g . Infelizmente, esta proposta não satisfaz a identidade de Jacobi, pois para três $(n-1)$ -formas hamiltonianas f , g e h , temos

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = d(i_{X_f} i_{X_g} i_{X_h} \omega). \quad (1.174)$$

Entretanto, no caso de variedades multissimpléticas exatas, este defeito pode ser corrigido adicionando um termo exato adequado:

Teorema 1.7 [11] *Seja P uma variedade multissimplética exata com n -forma multi-canônica θ e $(n+1)$ -forma multissimplética $\omega = -d\theta$. Para quaisquer duas $(n-1)$ -formas hamiltonianas f e g sobre P , chamamos a $(n-1)$ -forma hamiltoniana $\{f, g\}$ definida por*

$$\{f, g\} = i_{X_g} i_{X_f} \omega + d(i_{X_g} f - i_{X_f} g - i_{X_g} i_{X_f} \theta), \quad (1.175)$$

onde X_f e X_g são os campos hamiltonianos associados a f e g , respectivamente, o **colchete de Poisson** de f e g . Este colchete satisfaz a identidade de Jacobi e prove o espaço das $(n-1)$ -formas hamiltonianas sobre P de uma estrutura de álgebra de Lie.

Para generalizar esta definição do colchete de Poisson a formas de qualquer grau, torna-se necessário estender algumas das operações do cálculo em variedades envolvendo campos vetoriais ao caso de campos multivetoriais. Primeiro, para um campo multivetorial decomponível $X = X_1 \wedge \dots \wedge X_r$, a contração de uma forma α com X é definida como

$$i_X \alpha = i_{X_r} \dots i_{X_1} \alpha. \quad (1.176)$$

Segundo, o colchete de Lie entre campos vetoriais pode ser estendido para um colchete entre campos multivetoriais conhecido como o colchete de Schouten, sendo que o colchete

de Schouten entre dois campos multivetoriais decomponíveis $X = X_1 \wedge \dots \wedge X_r$ de grau r e $Y = Y_1 \wedge \dots \wedge Y_s$ de grau s é o campo multivetorial de grau $r + s - 1$ definido por

$$\begin{aligned} & [X_1 \wedge \dots \wedge X_r, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_s] \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge \dots \wedge X_r \\ & \quad \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{j-1} \wedge Y_{j+1} \wedge \dots \wedge Y_s. \end{aligned} \quad (1.177)$$

As propriedades principais do colchete de Schouten são, além de sua bilinearidade sobre \mathbb{R} , a antissimetria graduada,

$$[X, Y] = -(-1)^{(r-1)(s-1)} [Y, X], \quad (1.178)$$

a identidade de Jacobi graduada,

$$\begin{aligned} & (-1)^{(r-1)(t-1)} [X, [Y, Z]] + (-1)^{(s-1)(r-1)} [Y, [Z, X]] \\ & \quad + (-1)^{(t-1)(s-1)} [Z, [X, Y]] = 0. \end{aligned} \quad (1.179)$$

e a regra de Leibniz graduada (em relação ao produto exterior),

$$[Z, X \wedge Y] = [Z, X] \wedge Y + (-1)^{(r-1)s} X \wedge [Z, Y]. \quad (1.180)$$

Isso significa que o espaço dos campos multivetoriais $\mathfrak{X}^\wedge(M)$ sobre uma variedade M qualquer é uma superálgebra de Poisson – o análogo supersimétrico de uma álgebra de Poisson. Finalmente, a derivada de Lie de uma forma diferencial ao longo de um campo multivetorial X é definida como o comutador graduado da derivada exterior com a contração com X :

$$L_X \alpha = (di_X - (-1)^r i_X d) \alpha. \quad (1.181)$$

Retornando à questão da correspondência entre campos multivetoriais hamiltonianos de grau r e formas hamiltonianas de grau $n - r$ estabelecida pela fórmula $i_X \omega = df$, observamos que para r geral, o isomorfismo (1.172) deve ser substituído pelo seguinte isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Campos multivetoriais} & & \text{Formas hamiltonianas} \\ \text{hamiltonianos de grau } r & \longleftrightarrow & \text{de grau } n - r \\ \text{módulo núcleo de } \omega & & \text{módulo formas fechadas} \end{array} \quad (1.182)$$

Devido à falta de unicidade dos campos multivetoriais associados às formas hamiltonianas, teremos que impor uma restrição adicional sobre estas para garantir que o colchete de Poisson a ser introduzido abaixo seja bem definido.

Definição 1.9 [12] *Seja P uma variedade multissimplética com forma multissimplética ω . Uma forma hamiltoniana f sobre P é chamada uma **forma de Poisson** se o núcleo de f contém o núcleo de ω , i.e., se para um campo multivetorial ξ de grau arbitrário, vale*

$$i_\xi \omega = 0 \implies i_\xi f = 0. \quad (1.183)$$

Teorema 1.8 [12] *Seja P uma variedade multissimplética exata com n -forma multicanônica θ e $(n+1)$ -forma multissimplética $\omega = -d\theta$ tal que θ seja uma forma de Poisson. Para quaisquer duas formas de Poisson f de grau $n-r$ e g de grau $n-s$ sobre P , chamamos a forma de Poisson $\{f, g\}$ de grau $n-r-s+1$ dada por*

$$\begin{aligned} \{f, g\} = & (-1)^{r(s-1)} i_Y i_X \omega \\ & + d\left((-1)^{(r-1)(s-1)} i_Y f - i_X g - (-1)^{(r-1)s} i_Y i_X \theta\right), \end{aligned} \quad (1.184)$$

onde X e Y são quaisquer dois campos multivetoriais hamiltonianos de graus r e s associados a f e g , respectivamente, o **colchete de Poisson** de f e g . Este colchete, além de bem definido e graduado antissimétrico, satisfaz a identidade de Jacobi graduada e prove o espaço das formas de Poisson sobre P de uma estrutura de superálgebra de Lie.

Outra questão importante refere-se à escolha da variedade multissimplética P a ser utilizada na construção do colchete de Poisson. Inicialmente, o problema foi analisado, por vários autores, no âmbito do espaço de multifase comum, mas muitas vezes usando construções em coordenadas locais que carecem de um significado geométrico intrínseco, e mais recentemente no âmbito do espaço de multifase estendido. No entanto, como foi discutido na Seção 1.5.1, dada uma hamiltoniana \mathcal{H} , o espaço de multifase comum $\vec{J}^{\otimes}E$ também é uma variedade exatamente multissimplética, com n -forma multicanônica $\theta_{\mathcal{H}}$ e $(n+1)$ -forma multissimplética $\omega_{\mathcal{H}} = -d\theta_{\mathcal{H}}$, e portanto este também vem munido de um colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{H}}$ que, obviamente, depende da hamiltoniana \mathcal{H} , conferindo-lhe uma característica dinâmica. Devido a esta distinção, referimo-nos ao colchete definido no espaço de multifase estendido $J^{\otimes}E$ como **colchete cinemático** e ao colchete definido no espaço de multifase comum $\vec{J}^{\otimes}E$ como **colchete dinâmico**.

Mecânica não-autônoma	Teoria dos campos
espaço de configuração estendido $\mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ coordenadas locais adaptadas t, q^i	fibrado de configuração $E \rightarrow M$ coordenadas locais adaptadas x^μ, q^i
espaço de fase simplesmente estendido $\mathcal{P}_0 = \mathbb{R} \times T^*Q$ coordenadas locais adaptadas t, q^i, p_i	espaço de multifase comum $\mathcal{P}_0 = \vec{J}^\otimes E = \vec{J}^* E \otimes \bigwedge^n T^* M$ coordenadas locais adaptadas x^μ, q^i, p_i^μ
espaço de fase duplamente estendido $\mathcal{P} = T^*(\mathbb{R} \times Q) = \mathbb{R} \times T^*Q \times \mathbb{R}$ coordenadas locais adaptadas t, q^i, p_i, E	espaço de multifase estendido $\mathcal{P} = J^\otimes E = J^* E \otimes \bigwedge^n T^* M$ coordenadas locais adaptadas x^μ, q^i, p_i^μ, p
1-forma canônica sobre \mathcal{P} $\theta = p_i dq^i + E dt$	n -forma multicanônica sobre \mathcal{P} $\theta = p_i^\mu dq^i \wedge d^n x_\mu + p d^n x$
2-forma simplética sobre \mathcal{P} , não degenerada $\omega = -d\theta = dq^i \wedge dp_i - dE \wedge dt$	$(n+1)$ -forma multissimplética sobre \mathcal{P} , não degenerada (em campos vetoriais) $\omega = -d\theta = dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu - dp \wedge d^n x$
hamiltoniana $\mathcal{H} : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ função sobre \mathcal{P}_0	hamiltoniana $\mathcal{H} : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}$ seção de \mathcal{P} sobre \mathcal{P}_0 (fibrado afim em linhas)
Campo de Euler $\Sigma = p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + E \frac{\partial}{\partial E}$	Campo de Euler $\Sigma = p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + p \frac{\partial}{\partial p}$

Tabela comparativa entre a geometria simplética na mecânica não-autônoma e a geometria multissimplética na teoria clássica dos campos.

Tensor de Poisson

A nossa meta principal neste capítulo é investigar a possibilidade de construir, no âmbito do formalismo multissimplético, ou seja, sobre o espaço de multifase estendido $P = J^{\circledast}E$, um tensor de Poisson que desempenharia um papel semelhante ao tensor de Poisson na geometria simplética. Tendo em vista que a forma multissimplética ω é de grau $n + 1$, é de se esperar que este tensor de Poisson π deve ser um campo multivetorial de grau $n + 1$. Obviamente, um campo multivetorial π de grau $n + 1$ induz, para todo r com $0 \leq r \leq n$, um homomorfismo de fibrados vetoriais

$$\pi : \Lambda^{n-r+1}T^*P \longrightarrow \Lambda^rTP, \quad (2.1)$$

assim generalizando o homomorfismo (5) da geometria simplética. A meta básica seria definir π de tal forma que para formas α que se anulam sobre o núcleo de ω , valha a relação

$$i_{\pi(\alpha)}\omega = \alpha, \quad (2.2)$$

pois isto garante que

$$X = \pi(df) \quad (2.3)$$

será uma solução da condição básica

$$i_X\omega = df \quad (2.4)$$

que relaciona campos multivetoriais hamiltonianos e forma hamiltonianos.

Infelizmente, esta construção depende da escolha de certos dados adicionais, que são conexões em vários fibrados. Como veremos, dois tensores de Poisson construídos a partir de diferentes escolhas de conexões diferem por um campo multivetorial a valores no núcleo de ω , o que reflete a ambiguidade na relação entre X e f que já enfrentamos no Capítulo 1. Mesmo assim, é interessante identificar qual tipo de estrutura geométrica é suficiente para remover esta ambiguidade.

Para descrever a referida construção, torna-se necessário aprofundar-se no estudo de conexões, tanto de conexões gerais em fibrados gerais como de conexões lineares em fibrados vetoriais e de conexões afins em fibrados afins. Será este o assunto que nos ocupará pela maior parte do presente capítulo.

Começaremos discutindo na primeira seção as várias definições da noção de conexão em um fibrado geral e como a escolha de uma conexão leva à definição de uma derivada covariante de seções. Nas duas seções seguintes faremos primeiro uma revisão do conceito de conexões lineares em fibrados vetoriais, passando em seguida ao conceito de conexões afins em fibrados afins. Também discutiremos a noção de conexão dual de uma conexão linear/afim em um fibrado vetorial/afim dado, que em ambos os casos é uma conexão linear no fibrado vetorial dual. Na quarta seção, estenderemos parte desta discussão a conexões parciais, definidas apenas ao longo de subfibrados do fibrado tangente TM da variedade base M . Na quinta seção, consideraremos conexões compostas em fibrados compostos. Na sexta e na sétima seção, combinaremos os conceitos introduzidos anteriormente para mostrar como construir conexões lineares ou afins em vários fibrados vetoriais ou afins sobre o espaço total E de um fibrado geral, tais como o fibrado vertical VE , o fibrado JE dos jatos de primeira ordem e seu dual afim $J^{\circ}E$, a partir de dados mais simples: uma conexão geral em E , uma conexão linear parcial em VE ao longo de VE e, nos últimos dois casos, uma conexão linear na variedade base M . Finalmente, na última seção, definiremos os referenciais de Darboux induzidos no fibrado $J^{\circ}E$ pela conexão construída na seção anterior. Nestes referenciais definiremos o tensor de Poisson e ao final daremos algumas propriedades do tensor de Poisson.

2.1 Conexões e derivadas covariantes

Nesta seção apresentamos várias definições, todas equivalentes, do conceito de uma conexão geral em um fibrado geral E sobre M , sem nenhuma estrutura adicional.

Definição 2.1 *Uma conexão geral em um fibrado geral E sobre M é dada por uma seção global*

$$\Gamma : E \longrightarrow JE \tag{2.5}$$

do fibrado afim $JE \longrightarrow E$.

Existe uma definição alternativa, mais tradicional, segundo a qual uma conexão geral em um fibrado geral E sobre M pode ser vista como um subfibrado vetorial HE do fibrado tangente TE , chamado o fibrado horizontal, que é complementar ao fibrado vertical VE :

$$TE = HE \oplus VE. \tag{2.6}$$

A escolha de um fibrado horizontal equivale à escolha de uma cisão

$$\pi^*TM \longrightarrow TE \quad (2.7)$$

da seguinte sequência exata de fibrados vetoriais sobre E :

$$0 \longrightarrow VE \longrightarrow TE \longrightarrow \pi^*TM \longrightarrow 0. \quad (2.8)$$

Ainda equivale à escolha de uma projeção horizontal $H : TE \rightarrow TE$ ou de uma projeção vertical $V : TE \rightarrow TE$, que são homomorfismos de fibrados vetoriais sobre E tais que $H^2 = H$, $V^2 = V$, $VE = \text{im}(V) = \ker(H)$, $HE = \ker(V) = \text{im}(H)$ e $H + V = \text{id}_{TE}$.

Para mostrar que as duas definições dadas acima são de fato equivalentes, lembramos que uma seção global Γ de JE sobre E associa a cada ponto $e \in E$ sobre um ponto $x \in M$ um elemento $\Gamma(e) \in L(T_xM, T_eE)$ tal que $T_e\pi \circ \Gamma(e) = \text{id}_{T_xM}$. Mas então $V_eE \cap \text{im}(\Gamma(e)) = \{0\}$ e $\ker(\Gamma(e)) = \{0\}$. A última relação implica que $\text{im}(\Gamma(e))$ e T_xM têm a mesma dimensão, e como $T_e\pi$ é sobrejetora, segue $V_eE \oplus \text{im}(\Gamma(e)) = T_eE$, ou seja, $\text{im}(\Gamma(e))$ é subespaço horizontal de T_eE . Assim, uma seção global de JE determina um fibrado horizontal de E . Reciprocamente, a partir de um subespaço horizontal H_eE de T_eE , obtemos um elemento de J_eE considerando a inversa da restrição de $T_e\pi$ a H_eE . Assim um fibrado horizontal de E determina uma seção global de JE .

Uma outra forma de estabelecer esta bijeção é através da cisão (2.7), que equivale a uma seção do fibrado vetorial $\pi^*T^*M \otimes TE$ sobre E , pois este contém JE como subfibrado afim.

Dada uma conexão geral Γ no fibrado geral E , podemos para todo campo vetorial X_M sobre M introduzir seu **levantamento horizontal**, que é um campo vetorial $\Gamma(X_M)$ sobre E definido por

$$\Gamma(X_M)(e) = \Gamma(e) \cdot X_M(x) \quad (2.9)$$

para todo $e \in E$ sobre $x \in M$. É fácil mostrar que para quaisquer dois campos vetoriais X_M e Y_M sobre M , a expressão

$$\Omega(X_M, Y_M) = [\Gamma(X_M), \Gamma(Y_M)] - \Gamma([X_M, Y_M]) \quad (2.10)$$

representa um campo vetorial vertical sobre E . Mais geralmente, a **forma de curvatura** da conexão Γ é definida como a 2-forma horizontal Ω sobre E a valores no fibrado vertical VE tal que para dois campos vetoriais X e Y sobre E , $\Omega(X, Y)$ é a parte vertical do colchete de Lie entre as partes horizontais dos campos X e Y :

$$\Omega(X, Y) = [X_H, Y_H]_V. \quad (2.11)$$

Portanto, a forma de curvatura Ω mede quanto o fibrado horizontal deixa de ser involutivo.

Em coordenadas locais, escrevemos a seção (2.5) na forma

$$\Gamma(x, q) = (x^\mu, q^i; \Gamma_\mu^i(x, q)) . \quad (2.12)$$

Outra representação, que enfatiza a interpretação de uma conexão como fornecendo uma base local de 1-formas horizontais a valores no fibrado tangente TE de E , é a seguinte [28]

$$\Gamma = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i) . \quad (2.13)$$

Isto significa que o levantamento horizontal do campo local ∂_μ sobre M é o campo local $\Gamma(\partial_\mu)$ sobre E dado por

$$\Gamma(\partial_\mu) = \partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i . \quad (2.14)$$

Nos mesmos termos, a projeção vertical V e a projeção horizontal H são dadas por

$$\begin{aligned} V(x, q; \dot{x}, \dot{q}) &= (x^\mu, q^i; 0, \dot{q}^i + \Gamma_\mu^i(x, q) \dot{x}^\mu) , \\ H(x, q; \dot{x}, \dot{q}) &= (x^\mu, q^i; \dot{x}^\mu, -\Gamma_\mu^i(x, q) \dot{x}^\mu) . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para a forma de curvatura Ω da conexão Γ , temos

$$\Omega(X, Y) = X^\mu Y^\nu \Omega_{\mu\nu}^i \partial_i , \quad (2.16)$$

com

$$\Omega_{\mu\nu}^i(x, q) = \partial_\mu \Gamma_\nu^i - \partial_\nu \Gamma_\mu^i + \Gamma_\mu^j \partial_j \Gamma_\nu^i - \Gamma_\nu^j \partial_j \Gamma_\mu^i . \quad (2.17)$$

A lei de transformação para os coeficientes de conexão sob mudança de coordenadas locais como em (1.22) e (1.24) é $\Gamma_\mu^i \rightarrow \Gamma_\kappa^k$, onde

$$\Gamma_\kappa^k = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \Gamma_\mu^i + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} . \quad (2.18)$$

Fixando uma conexão, podemos introduzir a noção de **derivada covariante** de seções, que generaliza a noção de derivada direcional de funções em \mathbb{R}^n . Em fibrados gerais, a derivada covariante determina a parte vertical da derivada comum: dada uma seção (local) φ de E sobre M , sua derivada comum é a seção (local) $j\varphi$ de JE sobre M (que corresponde à aplicação tangente $T\varphi : TM \rightarrow TE$) e a sua derivada covariante é uma seção (local) $\nabla^\Gamma \varphi$ de $T^*M \otimes \varphi^*(VE)$ sobre M , obtida por composição

$$\nabla^\Gamma \varphi = V_\Gamma \circ j\varphi , \quad (2.19)$$

onde

$$V_\Gamma : JE \longrightarrow \pi^*(T^*M) \otimes VE \quad (2.20)$$

é a restrição a JE de $\text{id}_{T^*M} \otimes V : T^*M \otimes TE \longrightarrow T^*M \otimes VE$. A relação com a idéia de derivada direcional é estabelecida por contração com campos vetoriais X sobre M : denota-se por $\nabla_X^\Gamma \varphi$ a derivada covariante de φ ao longo de X , que é uma seção de $\varphi^*(VE)$, com dependência $\mathfrak{F}(M)$ -linear em X :

$$\nabla_{fX}^\Gamma \varphi = f \nabla_X^\Gamma \varphi. \quad (2.21)$$

Em coordenadas locais,

$$V_\Gamma = (q_\mu^i - \Gamma_\mu^i) dx^\mu \otimes \partial_i, \quad (2.22)$$

enquanto que

$$\nabla^\Gamma \varphi = (\partial_\mu \varphi^i - (\Gamma \circ \varphi)_\mu^i) dx^\mu \otimes \partial_i. \quad (2.23)$$

e

$$\nabla_X^\Gamma \varphi = (\partial_\mu \varphi^i - (\Gamma \circ \varphi)_\mu^i) X^\mu \partial_i. \quad (2.24)$$

Escrevemos simplesmente ∇ no lugar de ∇^Γ , sempre que não houver perigo de confusão.

Reciprocamente, podemos perguntar quais seriam as condições a serem exigidas para que um operador ∇ que leva cada seção φ de E para uma seção $\nabla \varphi$ de $T^*M \otimes \varphi^*(VE)$ seja a derivada covariante associada a uma conexão Γ em E . Em geral, essas condições são complicadas e de difícil formulação. Por outro lado, são bastante simples no caso de conexões lineares em fibrados vetoriais ou conexões afins em fibrados afins, que passamos a considerar nas seguintes duas seções.

2.2 Conexões lineares e duais lineares

Definição 2.2 *Uma conexão Γ em um fibrado vetorial E sobre M é dita ser uma **conexão linear** se a seção (2.5) for um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre M .*

Em coordenadas locais lineares ao longo das fibras, esta condição significa que

$$\Gamma_\mu^i(x, q) = -A_{\mu j}^i(x) q^j. \quad (2.25)$$

Nestas coordenadas, a forma de curvatura tem a expressão

$$\Omega_{\mu\nu}^i(x, q) = -F_{\mu\nu j}^i(x) q^j, \quad (2.26)$$

onde

$$F_{\mu\nu j}^i = \partial_\mu A_{\nu j}^i - \partial_\nu A_{\mu j}^i + A_{\mu k}^i A_{\nu j}^k - A_{\nu k}^i A_{\mu j}^k. \quad (2.27)$$

A lei de transformação para os coeficientes $A_{\mu j}^i$ e os coeficientes $F_{\mu\nu j}^i$, conhecidos como potenciais de calibre e como campos de calibre, respectivamente, sob uma mudança de coordenadas locais como em (1.22) e (1.25) é $A_{\mu j}^i \rightarrow A'_{\kappa l}{}^k$ e $F_{\mu\nu j}^i \rightarrow F'_{\kappa\lambda l}{}^k$, onde

$$A'_{\kappa l}{}^k = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \left(g_i^k A_{\mu j}^i (g^{-1})_l^j - \partial_\mu g_i^k (g^{-1})_l^i \right), \quad (2.28)$$

$$F'_{\kappa\lambda l}{}^k = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} g_i^k F_{\mu\nu j}^i (g^{-1})_l^j. \quad (2.29)$$

Usando o fato de que E sendo um fibrado vetorial, seu fibrado vertical VE é canonicamente isomorfo a π^*E e portanto $\varphi^*(VE) \cong E$ para qualquer seção φ de E , podemos neste caso interpretar a derivada covariante como um operador diferencial linear

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) \quad (2.30)$$

de primeira ordem que satisfaz a regra de Leibniz, afirmando que para $f \in \mathfrak{F}(M)$, $\varphi \in \Gamma(E)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_X(f\varphi) = (X \cdot f)\varphi + f \nabla_X \varphi. \quad (2.31)$$

Reciprocamente, é bem conhecido que qualquer operador diferencial deste tipo é a derivada covariante associada a uma conexão linear. Em coordenadas locais lineares ao longo das fibras, temos $\nabla_X \varphi = X^\mu \nabla_\mu \varphi^i \partial_i$ com

$$\nabla_\mu \varphi^i = \partial_\mu \varphi^i + A_{\mu j}^i \varphi^j. \quad (2.32)$$

Conexões lineares comportam-se naturalmente sob o processo de dualização. Dado um fibrado vetorial E sobre M , seja E^* o seu dual linear, definido fibra por fibra: $(E^*)_x = (E_x)^*$. Qualquer conexão linear Γ em E induz uma conexão linear Γ^* em E^* cuja definição é mais facilmente dada em termos das correspondentes derivadas covariantes. De fato, usando o pareamento canônico

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E \longrightarrow M \times \mathbb{R} \quad (2.33)$$

entre E e E^* , que induz um pareamento canônico

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(E^*) \times \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{F}(M) \quad (2.34)$$

entre suas seções, os operadores $\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ e $\nabla^* : \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E^*)$ de derivada covariante em E e em E^* são determinados um pelo outro através da regra de Leibniz, afirmando que para $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\varphi \in \Gamma(E)$ e $\varphi^* \in \Gamma(E^*)$,

$$X \cdot \langle \varphi^*, \varphi \rangle = \langle \nabla_X^* \varphi^*, \varphi \rangle + \langle \varphi^*, \nabla_X \varphi \rangle. \quad (2.35)$$

Em coordenadas locais lineares ao longo das fibras, é conveniente denotar as coordenadas lineares verticais de E por q^i e as coordenadas lineares verticais de E^* por p_i ; então se a conexão linear original Γ em E é dada pela fórmula (2.25), a conexão dual Γ^* em E^* é dada por

$$(\Gamma^*)_{\mu,i}(x,p) = A_{\mu i}^j(x) p_j . \quad (2.36)$$

2.3 Conexões afins e duais afins

Definição 2.3 *Uma conexão Γ em um fibrado afim E sobre M é dita ser uma **conexão afim** se a seção (2.5) for um homomorfismo de fibrados afins sobre M .*

Em coordenadas locais afins ao longo das fibras, esta condição significa que

$$\Gamma_{\mu}^i(x,q) = -A_{\mu j}^i(x) q^j - A_{\mu}^i(x) . \quad (2.37)$$

Nestas coordenadas, a forma de curvatura tem a expressão

$$\Omega_{\mu\nu}^i(x,q) = -F_{\mu\nu j}^i(x) q^j - F_{\mu\nu}^i(x) , \quad (2.38)$$

onde

$$F_{\mu\nu j}^i = \partial_{\mu} A_{\nu j}^i - \partial_{\nu} A_{\mu j}^i + A_{\mu k}^i A_{\nu j}^k - A_{\nu k}^i A_{\mu j}^k , \quad (2.39)$$

e

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_{\mu} A_{\nu}^i - \partial_{\nu} A_{\mu}^i + A_{\mu k}^i A_{\nu}^k - A_{\nu k}^i A_{\mu}^k . \quad (2.40)$$

A lei de transformação para os coeficientes $A_{\mu j}^i$ e A_{μ}^i e os coeficientes $F_{\mu\nu j}^i$ e $F_{\mu\nu}^i$, conhecidos como potenciais de calibre e como campos de calibre, respectivamente, sob uma mudança de coordenadas locais como em (1.22) e (1.26) é $A_{\mu j}^i \rightarrow A'_{\kappa l}{}^i$ e $A_{\mu}^i \rightarrow A'_{\kappa}{}^i$, $F_{\mu\nu j}^i \rightarrow F'_{\kappa\lambda l}{}^i$ e $F_{\mu\nu}^i \rightarrow F'_{\kappa\lambda}{}^i$, onde

$$A'_{\kappa l}{}^i = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\kappa}} \left(g_i^k A_{\mu j}^i (g^{-1})_l^j - \partial_{\mu} g_i^k (g^{-1})_l^i \right) , \quad (2.41)$$

$$A'_{\kappa}{}^i = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\kappa}} \left(g_i^k A_{\mu}^i - \partial_{\mu} g_i^k - g_i^k A_{\mu j}^i (g^{-1})_l^j g^l + \partial_{\mu} g_i^k (g^{-1})_l^i g^l \right) , \quad (2.42)$$

$$F'_{\kappa\lambda l}{}^i = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}} g_i^k F_{\mu\nu j}^i (g^{-1})_l^j , \quad (2.43)$$

$$F'_{\kappa\lambda}{}^i = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}} \left(g_i^k F_{\mu\nu}^i - g_i^k F_{\mu\nu j}^i (g^{-1})_l^j g^l \right) . \quad (2.44)$$

Toda conexão afim Γ em um fibrado afim E sobre M induz uma conexão linear $\vec{\Gamma}$ no seu fibrado de diferenças \vec{E} , sendo que o homomorfismo

$$\vec{\Gamma} : \vec{E} \longrightarrow J_M \vec{E} \quad (2.45)$$

de fibrados vetoriais sobre M é simplesmente a parte linear do homomorfismo

$$\Gamma : E \longrightarrow J_M E \quad (2.46)$$

de fibrados afins sobre M . Em coordenadas locais vetoriais de \vec{E} ao longo das fibras (provindo de coordenadas locais afins de E ao longo das fibras),

$$\vec{\Gamma}_\mu^i(x, q) = -A_{\mu j}^i(x) q^j . \quad (2.47)$$

Usando o fato de que E sendo um fibrado afim, seu fibrado vertical VE é canonicamente isomorfo a $\pi^* \vec{E}$ e portanto $\varphi^*(VE) \cong \vec{E}$ para qualquer seção φ de E , podemos neste caso interpretar a derivada covariante associada a Γ como um operador diferencial afim

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes \vec{E}) \quad (2.48)$$

de primeira ordem e a derivada covariante associada a $\vec{\Gamma}$ como um operador diferencial linear

$$\vec{\nabla} : \Gamma(\vec{E}) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes \vec{E}) \quad (2.49)$$

de primeira ordem, satisfazendo a regra de Leibniz, relacionados por

$$\vec{\nabla}_X(\varphi - \psi) = \nabla_X \varphi - \nabla_X \psi . \quad (2.50)$$

Reciprocamente, pode-se mostrar que qualquer operador diferencial deste tipo é a derivada covariante associada a uma conexão afim. Em coordenadas locais afins ao longo das fibras de E , temos $\nabla_X \varphi = X^\mu \nabla_\mu \varphi^i \partial_i$ com

$$\nabla_\mu \varphi^i = \partial_\mu \varphi^i + A_{\mu j}^i \varphi^j + A_\mu^i . \quad (2.51)$$

Em seguida, faremos uso do fato de que sempre podemos, a partir de qualquer conexão linear $\vec{\Gamma}$ em \vec{E} e qualquer seção φ_0 de E , construir uma única conexão afim Γ em E que tenha $\vec{\Gamma}$ como parte linear e tal que a seção φ_0 seja covariantemente constante:

$$\nabla^\Gamma \varphi_0 = 0 . \quad (2.52)$$

Em coordenadas locais afins ao longo das fibras de E , isso significa que

$$A_\mu^i = -(\partial_\mu \varphi_0^i + A_{\mu j}^i \varphi_0^j) . \quad (2.53)$$

Finalmente, conexões afins também se comportam naturalmente sob o processo de dualização. Dado um fibrado afim E sobre M , seja E^* o seu dual afim, definido fibra por fibra: $(E^*)_x = (E_x)^*$. Qualquer conexão afim Γ em E induz uma conexão linear Γ^* em E^* cuja definição é mais facilmente dada em termos das correspondentes derivadas covariantes. De fato, usando os pareamentos canônicos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E \longrightarrow M \times \mathbb{R} \quad (2.54)$$

entre E^* e E e

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times \vec{E} \longrightarrow M \times \mathbb{R} \quad (2.55)$$

entre E^* e \vec{E} , que induzem pareamentos canônicos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(E^*) \times \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{F}(M) \quad (2.56)$$

e

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(E^*) \times \Gamma(\vec{E}) \longrightarrow \mathfrak{F}(M) \quad (2.57)$$

entre suas seções, os operadores $\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes \vec{E})$ e $\nabla^* : \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E^*)$ de derivada covariante em E e em E^* são determinados um pelo outro através da regra de Leibniz, afirmando que para $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\varphi \in \Gamma(E)$ e $\varphi^* \in \Gamma(E^*)$,

$$X \cdot \langle \varphi^*, \varphi \rangle = \langle \nabla_X^* \varphi^*, \varphi \rangle + \langle \varphi^*, \nabla_X \varphi \rangle. \quad (2.58)$$

Em coordenadas locais afins/lineares ao longo das fibras, é conveniente denotar as coordenadas afins verticais de E por q^i , as coordenadas lineares verticais de \vec{E} por \vec{q}^i e as coordenadas lineares verticais de E^* por (p_i, p_0) , de forma que o pareamento (2.54) é dado por $\langle p, q \rangle = p_i q^i + p_0$ e o pareamento (2.55) por $\langle p, \vec{q} \rangle = p_i \vec{q}^i$; então se a conexão afim original Γ em E é dada pela fórmula (2.37), a conexão dual Γ^* em E^* é dada por

$$(\Gamma^*)_{\mu,i}(x, p) = A_{\mu i}^j(x) p_j, \quad (\Gamma^*)_{\mu,0}(x, p) = A_{\mu}^i(x) p_i. \quad (2.59)$$

2.4 Conexões parciais

O conceito de conexão parcial nasceu no contexto de conexões lineares, representadas pelos correspondentes operadores de diferenciação covariante, admitindo-se que seções possam possuir derivadas covariantes apenas ao longo de certas direções. As direções permitidas são representadas pela escolha de um subfibrado vetorial D do fibrado tangente TM da variedade base M . A situação mais importante ocorre quando este subfibrado for involutivo.

Para estender o conceito de uma conexão parcial de conexões lineares a conexões gerais, introduzimos o conceito do fibrado dos jatos parciais de primeira ordem associado a um

fibrado geral E e um subfibrado vetorial D de sua variedade base, denotado aqui por $J^{\parallel}E$. Dado um fibrado E sobre M com projeção π e fibra típica Q e um subfibrado vetorial D de TM , a fibra de $J^{\parallel}E$ em cada ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$ é o espaço afim

$$J_e^{\parallel}E = \{u \in L(D_x, T_eE) : T_e\pi \circ u = \text{id}_{D_x}\}, \quad (2.60)$$

que é um subespaço afim do espaço vetorial $L(D_x, T_eE)$, com espaço modelo $L(D_x, V_eE)$. Deixando e variar sobre E , obtemos um fibrado afim sobre E em relação à projeção alvo $\tau^{\parallel} : J^{\parallel}E \rightarrow E$, que é um subfibrado do fibrado vetorial $L(\pi^*D, TE) \cong \pi^*D^* \otimes TE$. Novamente, os pontos de $J^{\parallel}E$ podem ser representados como 1-jatos de seções (locais) de E : para todo ponto $e \in E$ sobre o ponto $x \in M$, os elementos de $J_e^{\parallel}E$ podem ser escritos na forma $u = j_x^{\parallel}\varphi$ onde φ é uma seção de E definida em uma vizinhança aberta de x em M tal que $\varphi(x) = e$ e $T_x\varphi|_{D_x} = u$.

Definição 2.4 *Uma conexão parcial geral em um fibrado geral E sobre M , ao longo de um subfibrado vetorial D de TM , é dada por uma seção global*

$$\Gamma^{\parallel} : E \longrightarrow J^{\parallel}E \quad (2.61)$$

do fibrado afim $J^{\parallel}E \rightarrow E$.

Como no caso de conexões usuais, existe uma definição alternativa, cuja formulação requer substituir o fibrado tangente TE ao espaço total pelo subfibrado vetorial

$$T_DE = (T\pi)^{-1}(D). \quad (2.62)$$

De fato, uma conexão parcial geral em um fibrado geral E sobre M , ao longo de um subfibrado vetorial D de TM , pode ser vista como um subfibrado vetorial H_DE do fibrado T_DE , chamado o **fibrado horizontal parcial**, que é complementar ao fibrado vertical VE :

$$T_DE = H_DE \oplus VE. \quad (2.63)$$

A escolha de um fibrado horizontal parcial equivale à escolha de uma cisão

$$\pi^*D \longrightarrow T_DE \quad (2.64)$$

da seguinte sequência exata de fibrados vetoriais sobre E :

$$0 \longrightarrow VE \longrightarrow T_DE \longrightarrow \pi^*D \longrightarrow 0. \quad (2.65)$$

Ainda equivale à escolha de uma projeção horizontal parcial $H : T_DE \rightarrow T_DE$ ou de uma projeção vertical parcial $V : T_DE \rightarrow T_DE$, que são homomorfismos de fibrados vetoriais

sobre E tais que $H^2 = H$, $V^2 = V$, $VE = \text{im}(V) = \text{ker}(H)$, $H_DE = \text{ker}(V) = \text{im}(H)$ e $H + V = \text{id}_{T_DE}$.

A equivalência entre as duas definições se demonstra da mesma forma como no caso de conexões usuais. Também é claro que dada uma conexão parcial Γ^\parallel em E ao longo de D podemos definir o levantamento horizontal $\Gamma^\parallel(X_M)$ de qualquer campo vetorial X_M sobre M tangente a D , substituindo Γ por Γ^\parallel na expressão em (2.9). No entanto, a definição de curvatura requer como hipótese que D seja involutivo, o que implica que T_DE também é involutivo. Neste caso, observa-se que a expressão em (2.10), com Γ substituído por Γ^\parallel , continua bem definida, para quaisquer dois campos vetoriais X_M e Y_M sobre M tangentes a D , e que a expressão em (2.11) continua bem definida, para quaisquer duas seções X e Y de T_DE .

Para uma distribuição integrável D de dimensão d , podemos considerar sistemas de coordenadas locais em M adaptados a esta distribuição

$$(x_\parallel^\mu, x_\#^\mu) = (x^{\mu_1}, \dots, x^{\mu_d}, x^{\mu_{d+1}}, \dots, x^{\mu_n}), \quad (2.66)$$

de tal maneira que as variedades integrais maximais de D são descritas por

$$x_\#^\mu = \text{const}. \quad (2.67)$$

Esta decomposição das coordenadas locais de M em “coordenadas paralelas” e “coordenadas transversais” induz uma decomposição correspondente para os sistemas de coordenadas locais de E e de JE introduzidos anteriormente, conforme $(x_\parallel^\mu, x_\#^\mu; q^i)$ e $(x_\parallel^\mu, x_\#^\mu; q^i, q_{\mu\parallel}^i, q_{\mu\#}^i)$, respectivamente; então as coordenadas locais induzidas de $J^\parallel E$ são $(x_\parallel^\mu, x_\#^\mu; q^i, q_{\mu\parallel}^i)$, e a seção (2.61) assume a forma

$$\Gamma^\parallel(x, q) = (x_\parallel^\mu, x_\#^\mu, q^i; \Gamma_{\mu\parallel}^i(x, q)), \quad (2.68)$$

ou na interpretação de soma de 1-formas horizontais a valores no fibrado tangente TE de E ,

$$\Gamma^\parallel = dx_\parallel^\mu \otimes (\partial_{\mu\parallel} + \Gamma_{\mu\parallel}^i \partial_i). \quad (2.69)$$

Em geral, a distribuição D não admite nenhuma distribuição complementar privilegiada. No entanto, podemos perguntar o que acontece quando fixarmos um subfibrado vetorial D' de TM complementar ao subfibrado vetorial original D de TM :

$$TM = D \oplus D'. \quad (2.70)$$

Neste caso, é fácil ver que a escolha de um par $(\Gamma^\parallel, \Gamma^{\parallel'})$ de conexões parciais em E , Γ^\parallel ao longo de D e $\Gamma^{\parallel'}$ ao longo de D' , corresponde exatamente à escolha de uma conexão comum Γ em E , sendo que

$$TE = H_DE \oplus H_{D'}E \oplus VE. \quad (2.71)$$

Também podemos afirmar que

$$\Gamma = \Gamma^{\parallel} \oplus \Gamma^{\prime}, \quad (2.72)$$

já que vale

$$JE = J^{\parallel}E \oplus J^{\prime}E. \quad (2.73)$$

Em particular, quando D' for o complemento ortogonal de D em relação a alguma métrica, usamos o símbolo \cdot^{\perp} , ao invés de \cdot^{\prime} . Quanto ao uso de coordenadas locais, podemos no caso dos dois subfibrados, D e D' , serem integráveis, escolher as coordenadas transversais a D tais que sejam coordenadas ao longo de D' .

Como no caso do fibrado JE , estruturas adicionais sobre o fibrado E podem ser herdadas pelo fibrado $J^{\parallel}E$. Em particular, prova-se da mesma forma que antes (substituindo $j_x\varphi$ por $j_x^{\parallel}\varphi$) que se E for um fibrado vetorial/afim sobre M então $J^{\parallel}E$ também será um fibrado vetorial/afim sobre M .

Definição 2.5 *Uma conexão parcial Γ^{\parallel} em um fibrado vetorial/afim E sobre M é dita ser uma conexão parcial linear/afim se a seção (2.61) for um homomorfismo de fibrados vetoriais/afins sobre M .*

No caso linear, que é o caso de interesse a seguir, usando um sistema de coordenadas locais lineares ao longo das fibras, adaptado à distribuição D , temos

$$\Gamma_{\mu\parallel}^i(x, q) = -A_{\mu\parallel j}^i(x) q^j. \quad (2.74)$$

Nestas coordenadas, a forma de curvatura tem a expressão

$$\Omega_{\mu\nu\parallel}^i(x, q) = -F_{\mu\nu\parallel j}^i(x) q^j. \quad (2.75)$$

Finalmente, podemos introduzir o conceito de derivada covariante associada a uma conexão parcial linear como um operador diferencial linear

$$\nabla^{\parallel} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(D^* \otimes E) \quad (2.76)$$

de primeira ordem que satisfaz a regra de Leibniz, afirmando que para $f \in \mathfrak{F}(M)$, $\varphi \in \Gamma(E)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ tangente a D ,

$$\nabla_X^{\parallel}(f\varphi) = (X \cdot f)\varphi + f \nabla_X^{\parallel}\varphi. \quad (2.77)$$

Reciprocamente, qualquer operador diferencial deste tipo é a derivada covariante associada a uma conexão parcial linear. Em coordenadas locais lineares ao longo das fibras, adaptadas à distribuição D , temos $\nabla_X^{\parallel}\varphi = X^{\mu} \nabla_{\mu\parallel}^{\parallel}\varphi^i \partial_i$ com

$$\nabla_{\mu\parallel}^{\parallel}\varphi^i = \partial_{\mu\parallel}\varphi^i + A_{\mu\parallel j}^i \varphi^j. \quad (2.78)$$

Desta forma vemos que D representa as “direções permitidas”, ao longo das quais seções possuem derivadas covariantes.

2.5 Conexões em fibrados compostos

Nesta seção estudamos conexões em fibrados compostos. Considere um fibrado $F \xrightarrow{\rho} E$ cuja base é o espaço total de outro fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$; então obtemos um terceiro fibrado $F \xrightarrow{\pi \circ \rho} M$, chamado de fibrado composto. (Exemplos seriam $F = VE$ ou $F = JE$.) No que segue, queremos estabelecer diversos tipos de relações entre conexões Γ_E em E , $\hat{\Gamma}_F$ em F como fibrado sobre M e $\tilde{\Gamma}_F$ em F como fibrado sobre E .

Como pré-requisito usamos as respectivas projeções alvo para definir os fibrados verticais $VE \xrightarrow{\tau_E} E$, $V_E F \xrightarrow{\tau_{F,E}} F$ (obtido a partir de $F \xrightarrow{\rho} E$) e $V_M F \xrightarrow{\tau_{F,M}} M$ (obtido a partir de $F \xrightarrow{\pi \circ \rho} M$). Em coordenadas locais, estes fibrados são parametrizados, respectivamente, por

$$(x^\mu, q^i; \dot{q}^i) \quad , \quad (x^\mu, q^i, r^m; \dot{r}^m) \quad , \quad (x^\mu, q^i, r^m; \dot{q}^i, \dot{r}^m) \quad .$$

Com notação similar para J no lugar de V , podemos definir os fibrados de jatos $JE \xrightarrow{\tau_E} E$, $J_E F \xrightarrow{\tau_{F,E}} F$ (obtido a partir de $F \xrightarrow{\rho} E$) e $J_M F \xrightarrow{\tau_{F,M}} M$ (obtido a partir de $F \xrightarrow{\pi \circ \rho} M$). Em coordenadas locais, estes fibrados são parametrizados, respectivamente, por

$$(x^\mu, q^i; q_\mu^i) \quad , \quad (x^\mu, q^i, r^m; r_\mu^m, r_i^m) \quad , \quad (x^\mu, q^i, r^m; \tilde{q}_\mu^i, \tilde{r}_\mu^m) \quad .$$

Para os fibrados $\rho^* JE$ e $\rho^* JE \times_F J_E F$ sobre F , temos as coordenadas locais

$$(x^\mu, q^i, r^m; q_\mu^i) \quad , \quad (x^\mu, q^i, r^m; q_\mu^i, r_\mu^m, r_i^m) \quad .$$

Lema 2.1 [35] *Existe um homomorfismo estrito de fibrados afins sobre F*

$$\gamma : \rho^* JE \times_F J_E F \longrightarrow J_M F \quad (2.79)$$

que, em coordenadas locais, é dado por

$$\tilde{q}_\mu^i = q_\mu^i \quad , \quad \tilde{r}_\mu^m = r_\mu^m + r_i^m q_\mu^i \quad . \quad (2.80)$$

Passando à discussão de conexões, temos nestas mesmas coordenadas locais,

$$\Gamma_E = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i) \quad (2.81)$$

$$\hat{\Gamma}_F = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \hat{\Gamma}_\mu^i \partial_i + \hat{\Gamma}_\mu^m \partial_m) \quad (2.82)$$

$$\tilde{\Gamma}_F = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu^m \partial_m) + dq^i \otimes (\partial_i + \tilde{\Gamma}_i^m \partial_m) \quad (2.83)$$

Dizemos que $\hat{\Gamma}_F$ é **projetável** e **projeta** sobre Γ_E se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\hat{\Gamma}_F} & J_M F \\ \rho \downarrow & & \downarrow j\rho \\ E & \xrightarrow{\Gamma_E} & J E \end{array} \quad (2.84)$$

for comutativo. É possível observar que, em coordenadas locais, esta condição é equivalente a requerer que

$$\hat{\Gamma}_\mu^i = \Gamma_\mu^i . \quad (2.85)$$

Dizemos ainda que $\tilde{\Gamma}_F$ e Γ_E induzem $\hat{\Gamma}_F$ se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \rho^* J E \times_F J_E F & \xrightarrow{\gamma} & J_M F \\ & \nwarrow (\rho^* \Gamma_E, \tilde{\Gamma}_F) & \nearrow \hat{\Gamma}_F \\ & F & \end{array} \quad (2.86)$$

for comutativo, isto é, se

$$\hat{\Gamma}_F = \gamma \circ (\rho^* \Gamma_E, \tilde{\Gamma}_F) . \quad (2.87)$$

Esta conexão é chamada a **conexão composta**. Em coordenadas locais,

$$\hat{\Gamma}_F = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + (\tilde{\Gamma}_\mu^m + \tilde{\Gamma}_i^m \Gamma_\mu^i) \partial_m) . \quad (2.88)$$

Usando o conceito de conexões parciais introduzido na seção anterior, podemos dar uma interpretação alternativa e bastante intuitiva a esta construção, baseada na decomposição (2.6) do fibrado tangente TE de E na soma direta do fibrado vertical VE com o fibrado horizontal HE fornecido pela conexão Γ_E . De fato, esta permite decompor qualquer conexão geral $\tilde{\Gamma}_F$ em $F \xrightarrow{\rho} E$ na soma direta de duas partes: uma “parte vertical” $\tilde{\Gamma}_F^V$ e uma “parte horizontal” $\tilde{\Gamma}_F^H$ que são, respectivamente, conexões parciais gerais em $F \xrightarrow{\rho} E$ ao longo de VE e ao longo de HE . Observa-se então que se $\tilde{\Gamma}_F$ for projetável sobre Γ_E , então $\tilde{\Gamma}_F^H$ será, grosso modo, o “pull-back” da conexão composta $\hat{\Gamma}_F$ pela projeção π de E sobre M .

Para melhor entender essa última correspondência, vamos primeiro explicar com um pouco mais de detalhe o significado da definição dada na seção anterior para os casos da “parte vertical” $\tilde{\Gamma}_F^V$ e da “parte horizontal” $\tilde{\Gamma}_F^H$ da conexão $\tilde{\Gamma}_F$. Em ambos os casos, precisamos substituir, nas equações (2.62)–(2.65), E por F , M por E , π por ρ e VE por $V_E F$. No primeiro caso, onde $D = VE$, observamos que o subfibrado vetorial $T_{VE} F$ de TF é exatamente o fibrado vertical $V_M F$ em relação à projeção composta de F sobre M :

$$T_{VE} F := (T\rho)^{-1}(VE) = V_M F . \quad (2.89)$$

Assim, a conexão parcial $\tilde{\Gamma}_F^V$ é dada pela escolha de um fibrado horizontal parcial $H_{VE} F$ tal que

$$V_M F = H_{VE} F \oplus V_E F , \quad (2.90)$$

e que é a imagem de $\rho^* VE$ sob uma cisão

$$\rho^* VE \longrightarrow V_M F$$

da seguinte seqüência exata de fibrados vetoriais sobre F :

$$0 \longrightarrow V_E F \longrightarrow V_M F \longrightarrow \rho^* V E \longrightarrow 0 .$$

No segundo caso, o subfibrado vetorial $T_{HE} F$ de TF não possui nenhuma interpretação alternativa particularmente interessante; temos apenas a definição:

$$T_{HE} F := (T\rho)^{-1}(HE) . \quad (2.91)$$

Assim, a conexão parcial $\tilde{\Gamma}_F^H$ é dada pela escolha de um fibrado horizontal parcial $H_{HE} F$ tal que

$$T_{HE} F = H_{HE} F \oplus V_E F , \quad (2.92)$$

e que é a imagem de $\rho^* H E$ sob uma cisão

$$\rho^* H E \longrightarrow T_{HE} F$$

da seguinte seqüência exata de fibrados vetoriais sobre F :

$$0 \longrightarrow V_E F \longrightarrow T_{HE} F \longrightarrow \rho^* H E \longrightarrow 0 .$$

Em termos de jatos, $\tilde{\Gamma}_F^V$ pode ser descrita como uma seção global

$$\tilde{\Gamma}_F^V : F \longrightarrow J_E^V F , \quad (2.93)$$

onde $J_E^V F$ é o fibrado sobre F cuja fibra em cada ponto $f \in F$ sobre o ponto $e \in E$ é o espaço afim

$$(J_E^V)_f F = \{ u \in L(V_e E, T_f F) / T_f \rho \circ u = \text{id}_{V_e E} \} , \quad (2.94)$$

que é um subespaço afim do espaço vetorial $L(V_e E, T_f F)$, com espaço modelo $L(V_e E, V_f F)$. Deixando f variar sobre F , obtemos um fibrado afim sobre F em relação à projeção alvo $\tau_F^V : J_E^V F \rightarrow F$, que é um subfibrado do fibrado vetorial $L(\rho^* V E, TF) \cong \rho^*(V^* E) \otimes TF$. De forma semelhante, $\tilde{\Gamma}_F^H$ pode ser descrita como uma seção global

$$\tilde{\Gamma}_F^H : F \longrightarrow J_E^H F \quad (2.95)$$

onde $J_E^H F$ é o fibrado sobre F cuja fibra em cada ponto $f \in F$ sobre o ponto $e \in E$ é o espaço afim

$$(J_E^H)_f F = \{ u \in L(H_e E, T_f F) / T_f \rho \circ u = \text{id}_{H_e E} \} , \quad (2.96)$$

que é um subespaço afim do espaço vetorial $L(H_e E, T_f F)$, com espaço modelo $L(H_e E, V_f F)$. Deixando f variar sobre F , obtemos um fibrado afim sobre F em relação à projeção alvo $\tau_F^H : J_E^H F \rightarrow F$, que é um subfibrado do fibrado vetorial $L(\rho^* H E, TF) \cong \rho^*(H^* E) \otimes TF$.

Por outro lado, sabemos que $J_M F$ é o fibrado sobre F cuja fibra em cada ponto $f \in F$ sobre o ponto $e \in E$ que por sua vez está sobre o ponto $x \in M$ é o espaço afim

$$(J_M)_f F = \{ u \in L(T_x M, T_f F) / T_f(\rho \circ \pi) \circ u = \text{id}_{T_x M} \}. \quad (2.97)$$

Assim, o isomorfismo linear $T_e \pi$ entre $H_e E$ e $T_x M$ induz um isomorfismo afim natural entre $(J_E^H)_f F$ e $(J_M)_f F$, mostrando como identificar seções $\tilde{\Gamma}_F^H$ de $J_E^H F$ e seções $\hat{\Gamma}_F$ de $J_M F$ sobre F .

Na discussão a seguir, tornar-se-á importante que estruturas adicionais sobre F como fibrado sobre E sejam parcialmente herdadas não apenas pelo fibrado $J_E F$ mas também pelo fibrado $J_M F$. Em particular, se F for um fibrado vetorial/afim sobre E , então como já foi visto na seção (1.3), $J_E F$ também será um fibrado vetorial/afim sobre E , mas podemos além disso afirmar que $J_M F$ será um fibrado vetorial/afim sobre $J E$. A demonstração desta afirmação está baseada na seguinte observação:

- Para quaisquer duas seções φ e ψ de F sobre M tais que em um ponto x de M dado, vale $j_x(\rho \circ \varphi) = j_x(\rho \circ \psi)$ em $J E$ (o que implica que $(\rho \circ \varphi)(x) = (\rho \circ \psi)(x)$ em E), é possível encontrar outras duas seções $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\psi}$ de F sobre M tais que $j_x \tilde{\varphi} = j_x \varphi$ e $j_x \tilde{\psi} = j_x \psi$ em $J_M F$ e que satisfazem $\rho \circ \tilde{\varphi} = \rho \circ \tilde{\psi}$ sobre M inteiro.

De fato, usando esta observação, torna-se possível definir a estrutura linear/afim de $J_M F$ sobre $J E$ induzida pela estrutura linear/afim de F sobre E da mesma forma como a de $J_E F$ sobre E , por uma simples adaptação das fórmulas (1.20) e (1.21): No caso linear, podemos definir

$$\lambda j_x \varphi + \mu j_x \psi = j_x(\lambda \varphi + \mu \psi)$$

para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi \in \Gamma(M, F)$ tais que $\rho \circ \varphi = \rho \circ \psi$ sobre M , enquanto que no caso afim, podemos definir

$$j_x \varphi + j_x \vec{\varphi} = j_x(\varphi + \vec{\varphi})$$

para $\varphi \in \Gamma(M, F)$ e $\vec{\varphi} \in \Gamma(M, \vec{F})$ tais que $\rho \circ \varphi = \rho \circ \vec{\varphi}$ sobre M . Essa estrutura nos permite introduzir a seguinte terminologia.

Definição 2.6 *Seja F um fibrado vetorial/afim sobre E que por sua vez é um fibrado geral sobre M . Dada uma conexão geral Γ_E em E e uma conexão $\hat{\Gamma}_F$ em F como fibrado composto sobre M que é projetável e projeta sobre Γ_E , dizemos que a conexão $\hat{\Gamma}_F$ é linear/afim ao longo das fibras de F sobre E se e somente se o diagrama (2.84) definir um homomorfismo de fibrados vetoriais/afins (sobre Γ_E).*

Em termos das componentes utilizadas na equação (2.82), isso significa que em coordenadas locais lineares/afins ao longo das fibras de F sobre E ,

$$\hat{\Gamma}_\mu^m(x, q, r) = -A_{\mu n}^m(x, q) r^n, \quad (2.98)$$

no caso linear, e

$$\hat{\Gamma}_\mu^m(x, q, r) = -A_{\mu n}^m(x, q)r^n - A_\mu^m(x, q), \quad (2.99)$$

no caso afim.

Voltando à situação geral, vimos que fixando um fibrado composto $F \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} M$ e uma conexão Γ_E em $E \xrightarrow{\pi} M$, uma conexão $\tilde{\Gamma}_F$ em $F \xrightarrow{\rho} E$ induz uma conexão $\hat{\Gamma}_F$ em $F \xrightarrow{\pi \circ \rho} M$, a conexão composta, que é obviamente projetável e projeta sobre Γ_E . Reciprocamente, podemos perguntar sob quais condições é possível, para uma dada conexão $\hat{\Gamma}_F$ em $F \xrightarrow{\pi \circ \rho} M$ que é projetável e projeta sobre Γ_E , construir uma conexão $\tilde{\Gamma}_F$ em $F \xrightarrow{\rho} E$ tal que $\hat{\Gamma}_F$ seja a composta de $\tilde{\Gamma}_F$ com Γ_E , ou seja,

$$\hat{\Gamma}_\mu^m = \tilde{\Gamma}_\mu^m + \tilde{\Gamma}_i^m \Gamma_\mu^i, \quad (2.100)$$

e tal que $\tilde{\Gamma}_F$ seja determinada de forma natural a partir de $\hat{\Gamma}_F$ e Γ_E . É claro que a condição (2.100) por si só não determina $\tilde{\Gamma}_F$ unicamente e portanto uma construção “natural” de $\tilde{\Gamma}_F$ em termos de $\hat{\Gamma}_F$ e Γ_E requer dados adicionais. É de se esperar que tal construção “natural” seja possível se o fibrado composto $F \xrightarrow{\pi \circ \rho} M$ for obtido a partir do fibrado original $E \xrightarrow{\pi} M$ por alguma construção funtorial “fibra por fibra” que, via de regra, também permite obter a conexão $\hat{\Gamma}_F$ a partir da conexão Γ_E . Exemplos bem conhecidos de tais construções para fibrados vetoriais e conexões lineares são o dual, a soma direta e o produto tensorial [19]; uma formulação próxima à notação aqui empregada pode ser encontrada em [28, pg 52].¹ Exemplos importantes para fibrados e conexões gerais são o fibrado vertical e o fibrado dos jatos de primeira ordem; a correspondente construção de $\hat{\Gamma}_F$ a partir de Γ_E é descrita em [28, pgs 53 & 57] sob o título “vertical connection” e “second order connection”, respectivamente. No entanto, a questão da construção de $\tilde{\Gamma}_F$ não é abordada: ela sempre requer dados adicionais.

A seguir, discutiremos a construção de conexões em vários fibrados construídos a partir de um fibrado geral $E \xrightarrow{\pi} M$ que são fibrados vetoriais ou afins sobre E , incluindo o fibrado vertical VE de E , o fibrado dos jatos de primeira ordem JE de E e o fibrado dos cojatos $J^\circ E$ de E : esta última será a chave para o entendimento global da construção do tensor de Poisson a ser apresentada na seção final deste capítulo.

2.6 Conexões no fibrado vertical

Nesta seção, discutimos a construção de conexões em VE , o fibrado vertical de E , primeiro como fibrado composto sobre M

$$VE \xrightarrow{\tau_E} E \xrightarrow{\pi} M \quad (2.101)$$

¹Uma formulação axiomática do que deve ser entendido por uma construção funtorial “fibra por fibra”, no caso de fibrados vetoriais, pode ser encontrada no livro [27].

e a seguir como fibrado vetorial sobre E . A primeira parte da construção pode ser elaborada de maneira canônica, enquanto que a segunda depende da escolha de uma conexão parcial linear em VE ao longo do próprio VE .

Inicialmente, recordamos que se E e E' são fibrados sobre M e $\phi : E \rightarrow E'$ é um homomorfismo de fibrados sobre M , então a aplicação tangente $T\phi : TE \rightarrow TE'$ levará o fibrado vertical VE de E para o fibrado vertical VE' de E' e portanto induz uma aplicação vertical tangente $V\phi : VE \rightarrow VE'$, por restrição. Aplicamos esta observação a duas situações. Primeiro, substituindo E por JE , E' por E e ϕ pela projeção alvo τ_E , obtemos uma projeção $V\tau_E : V_M(JE) \rightarrow VE$. Segundo, mantendo E mas substituindo E' por JE e ϕ por uma aplicação $\Gamma_E : E \rightarrow JE$, obtemos uma aplicação $V\Gamma_E : VE \rightarrow V_M(JE)$. Quando Γ_E for uma conexão geral em E , temos $\tau_E \circ \Gamma_E = \text{id}_E$ e, pela regra da cadeia, $V\tau_E \circ V\Gamma_E = \text{id}_{VE}$. Agora fazemos uso da seguinte

Proposição 2.1 *Existe um difeomorfismo global entre $V_M(JE)$ e $J_M(VE)$, que também é um isomorfismo global de fibrados sobre E assim como sobre M , tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} V_M(JE) & \xleftrightarrow{\cong} & J_M(VE) \\ & \searrow V\tau_E & \swarrow \tau_{VE} \\ & & VE \end{array} \quad (2.102)$$

Em coordenadas locais, ele é dado pelo seguinte operador de troca:

$$\begin{array}{ccc} V_M(JE) & \longrightarrow & J_M(VE) \\ (x^\mu, q^i, q_\mu^i, \dot{q}^i, \dot{q}_\mu^i) & \longmapsto & (x^\mu, q^i, \dot{q}^i, q_\mu^i, \dot{q}_\mu^i) \end{array} \quad (2.103)$$

DEMONSTRAÇÃO. Para encontrar uma formulação global da definição do operador de troca dado, em coordenadas locais, pela equação (2.103), começamos com uma convenção: uma família a um parâmetro de seções de E é simplesmente a segunda componente φ de um seção $\tilde{\varphi}$ de $I \times E$ sobre $I \times M$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é algum intervalo contendo 0:

$$\tilde{\varphi}(t, x) = (t, \varphi(t, x)) .$$

Neste caso, escrevemos

$$\varphi_t(x) = \varphi(t, x) \quad , \quad \dot{\varphi}_0(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0} .$$

A seguir, fixamos pontos de referência $m \in M$ e $e \in E$ sobre m , um vetor vertical $v \in V_e E$ e um jato $u \in J_e E$.

1. Seja $w_1 \in V_M(JE)$ um vetor vertical tangente ao fibrado $JE \rightarrow M$ sobre u . Usando coordenadas locais, pode-se mostrar que existe uma família a um parâmetro de seções de E tal que $\varphi_0(m) = e$, $\pi(\varphi_t(m)) = m$ para todo $t \in I$, $\dot{\varphi}_0(m) = v$, $j_m\varphi_0 = u$ e $\frac{d}{dt}j_m\varphi_t|_{t=0} = w_1$. Então $\dot{\varphi}_0$ é uma seção de $VE \rightarrow M$, e definimos $w_2 \in J_M(VE)$ por $w_2 = j_m\dot{\varphi}_0$. Como veremos, w_2 não depende da escolha de φ , desde que suponhamos que φ seja pelo menos de classe C^2 , para garantir a validade da regra de Schwarz.
2. Seja $w_2 \in J_M(VE)$ um jato de primeira ordem do fibrado $VE \rightarrow M$ sobre v . Usando coordenadas locais, pode-se mostrar que existe uma família a um parâmetro de seções de E tal que $\varphi_0(m) = e$, $\pi(\varphi_t(m)) = m$ para todo $t \in I$, $\dot{\varphi}_0(m) = v$, $j_m\varphi_0 = u$ e $j_m\dot{\varphi}_0 = w_2$. Então a função $I \rightarrow JE$ definida por $t \mapsto j_m\varphi_t$ é uma curva em JE que é vertical em relação à projeção fonte, e definimos $w_1 \in V_M(JE)$ por $w_1 = \frac{d}{dt}j_m\varphi_t|_{t=0}$. Como veremos, w_1 não depende da escolha de φ , desde que suponhamos que φ seja pelo menos de classe C^2 , para garantir a validade da regra de Schwarz.

Em coordenadas locais, as condições impostas sobre a família a um parâmetro de seções de E utilizada fixam o valor de φ , de suas primeiras derivadas parciais e de suas segundas derivadas parciais mistas no ponto $(0, m)$:

- $\varphi(0, m)$ corresponde a e ;
- $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0, m)$ corresponde a v e $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}(0, m)$ corresponde a u ;
- $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial x^\mu}(0, m)$ corresponde a w_1 e $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu \partial t}(0, m)$ corresponde a w_2 .

Portanto, a identificação entre w_1 e w_2 é expressão da regra de Schwarz. \square

Assim, dada uma conexão geral

$$\begin{aligned} \Gamma_E : \quad E &\longrightarrow JE \\ (x^\mu, q^i) &\longmapsto (x^\mu, q^i, \Gamma_\mu^i) \end{aligned} \quad (2.104)$$

podemos formar sua aplicação vertical tangente

$$\begin{aligned} V\Gamma_E : \quad VE &\longrightarrow V_M(JE) \\ (x^\mu, q^i, \dot{q}^i) &\longmapsto (x^\mu, q^i, \Gamma_\mu^i, \dot{q}^i, \partial_j \Gamma_\mu^i \dot{q}^j) \end{aligned} \quad (2.105)$$

e compô-la com o isomorfismo da Proposição 2.1 para obter uma aplicação

$$\hat{\Gamma}_{VE} : VE \longrightarrow J_M(VE) \quad (2.106)$$

que satisfaz $\tau_{VE} \circ \hat{\Gamma}_{VE} = \text{id}_{VE}$ e portanto é uma conexão geral em VE ; ela é chamada a conexão vertical induzida por Γ_E . Em coordenadas locais, ela é dada por

$$\hat{\Gamma}_{VE}(\partial_\mu) = \partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + \partial_j \Gamma_\mu^k \dot{q}^j \dot{\partial}_k, \quad (2.107)$$

ou equivalentemente

$$\hat{\Gamma}_{VE} = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + \partial_j \Gamma_\mu^k \dot{q}^j \dot{\partial}_k). \quad (2.108)$$

Obviamente, $\hat{\Gamma}_{VE}$ é projetável e projeta sobre Γ_E .

Passando a considerar VE não como fibrado sobre M e sim como fibrado vetorial sobre E , e conforme foi visto na seção anterior, podemos reinterpretar a conexão vertical $\hat{\Gamma}_{VE}$ assim definida como uma conexão parcial $\tilde{\Gamma}_{VE}^H$ em VE ao longo do fibrado horizontal HE definido por Γ_E . Ademais, a linearidade de $\hat{\Gamma}_{VE}$ ao longo das fibras de VE implica que $\tilde{\Gamma}_{VE}^H$ será uma conexão linear parcial ao longo de HE . Complementando esta por $\tilde{\Gamma}_{VE}^V$, uma conexão linear parcial qualquer ao longo de VE , chegamos à conclusão que é sempre possível reinterpretar $\hat{\Gamma}_{VE}$ como sendo o resultado da composição de alguma conexão linear $\tilde{\Gamma}_{VE}$ em VE com a conexão original Γ_E . Em coordenadas locais, esta é dada por

$$\tilde{\Gamma}_{VE}(\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i) = \partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + \partial_j \Gamma_\mu^k \dot{q}^j \dot{\partial}_k, \quad (2.109)$$

$$\tilde{\Gamma}_{VE}(\partial_i) = \partial_i - \Gamma_{ij}^k \dot{q}^j \dot{\partial}_k. \quad (2.110)$$

ou equivalentemente

$$\tilde{\Gamma}_{VE} = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + \partial_j \Gamma_\mu^k \dot{q}^j \dot{\partial}_k) + (dq^i - \Gamma_\mu^i dx^\mu) \otimes (\partial_i - \Gamma_{ij}^k \dot{q}^j \dot{\partial}_k), \quad (2.111)$$

o que pode ser reescrito na forma

$$\tilde{\Gamma}_{VE} = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + (\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) \dot{q}^j \dot{\partial}_k) + dq^i \otimes (\partial_i - \Gamma_{ij}^k \dot{q}^j \dot{\partial}_k). \quad (2.112)$$

Observa-se que os coeficientes adicionais Γ_{ij}^k introduzidos por estas fórmulas são os símbolos de Christoffel da conexão linear parcial $\tilde{\Gamma}_{VE}^V$. Resumindo, temos

Teorema 2.1 *Dadas uma conexão Γ_E em E sobre M e uma conexão linear parcial $\tilde{\Gamma}_{VE}^{VE}$ em VE sobre E ao longo de VE , existe uma única extensão de $\tilde{\Gamma}_{VE}^{VE}$ para uma conexão linear total $\tilde{\Gamma}_{VE}$ em VE sobre E cuja composição com Γ_E é a conexão vertical $\hat{\Gamma}_{VE}$ em VE sobre M induzida por Γ_E . Em termos de derivadas covariantes de seções X de VE , isto é, campos vetoriais verticais X sobre E , temos*

$$\nabla_i X^j = \partial_i X^j + \Gamma_{ir}^j X^r, \quad (2.113)$$

e

$$\nabla_\mu X^j = \partial_\mu X^j - (\partial_i \Gamma_\mu^j + \Gamma_{ri}^j \Gamma_\mu^r) X^i, \quad (2.114)$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla_{\Gamma(\partial_\mu)} X^j = \partial_\mu X^j + \Gamma_\mu^i \partial_i X^j - \partial_i \Gamma_\mu^j X^i . \quad (2.115)$$

Uma demonstração independente de que estas expressões realmente definem uma derivada covariante de seções X de VE encontra-se na primeira seção do Apêndice. Neste contexto, é interessante observar que conforme a equação (A.21), os campos de coordenadas ∂_i sobre E se transformam de maneira covariante, enquanto que os campos de coordenadas ∂_μ sobre E não. No entanto, combinando as equações (A.19), (A.21) e (2.14), concluímos que os levantamentos horizontais dos campos de coordenadas ∂_μ sobre M para E , estes sim, se transformam de maneira covariante.

Finalmente, observamos que se o fibrado E for vetorial ou afim, então podemos supor sem perda de generalidade que a conexão $\tilde{\Gamma}_{VE}^{VE}$ tenha curvatura zero. Em coordenadas locais que são, respectivamente, lineares ou afins ao longo das fibras de E , podemos neste caso supor que $\Gamma_{ir}^j = 0$.

2.7 Conexões nos fibrados de jatos e cojatos

Nesta seção, discutimos a construção de conexões no fibrado JE dos jatos de primeira ordem de E e no fibrado $J^{\circledast}E$ dos cojatos estendido de E , diretamente como fibrado afim e como fibrado vetorial sobre E , respectivamente. Como ponto de partida, teremos que escolher: (a) uma conexão Γ_E em E sobre M , (b) uma conexão linear parcial $\tilde{\Gamma}_{VE}^{VE}$ em VE sobre E ao longo de VE e (c) uma conexão linear Γ_M na variedade base M do fibrado original.

No primeiro passo, observamos que o fibrado de diferenças de JE sobre E é o fibrado vetorial

$$\vec{J}E \cong \pi^*(T^*M) \otimes VE . \quad (2.116)$$

Portanto, podemos fazer uso da conexão linear Γ_{VE} em VE sobre E induzida pelas primeiras duas conexões, conforme o Teorema 2.1 da seção anterior (o símbolo $\tilde{\cdot}$ será omitido para simplificar a notação), em conjunto com a terceira conexão (ou mais exatamente seu pull-back de M para E), para definir uma conexão linear $\Gamma_{\vec{J}E}$, como produto tensorial

$$\Gamma_{\vec{J}E} = \Gamma_M^* \otimes \Gamma_{VE} . \quad (2.117)$$

No segundo passo, aplicamos um resultado enunciado na Seção 2.3, segundo o qual existe uma única conexão afim Γ_{JE} em JE que tenha $\Gamma_{\vec{J}E}$ como parte linear e tal que a conexão Γ_E , vista como seção de JE sobre E , seja covariantemente constante:

$$\nabla^{\Gamma_{JE}} \Gamma_E = 0 . \quad (2.118)$$

Em termos de coordenadas locais $(x^\mu, q^i; \bar{q}_\mu^i)$ para $\vec{J}E$ e $(x^\mu, q^i; q_\mu^i)$ para JE , usamos que os símbolos de Christoffel do produto tensorial de duas conexões lineares são obtidos somando os símbolos de Christoffel dos dois fatores, em conjunto com a equação (2.112), digamos, para obter

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{J}E} = dx^\mu \otimes & \left(\partial_\mu + ((\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) \bar{q}_\kappa^j + \Gamma_{\mu\kappa}^\rho \bar{q}_\rho^k) \partial_\kappa^j \right) \\ & + dq^i \otimes \left(\partial_i - \Gamma_{ij}^k \bar{q}_\kappa^j \partial_\kappa^i \right), \end{aligned} \quad (2.119)$$

e combinamos as equações (2.37), (2.47), (2.51) e (2.53) para concluir que

$$\begin{aligned} \Gamma_{JE} = dx^\mu \otimes & \left(\partial_\mu + ((\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) q_\kappa^j + \Gamma_{\mu\kappa}^\rho q_\rho^k) \partial_\kappa^j \right. \\ & \left. + (\partial_\mu \Gamma_\kappa^k - (\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) \Gamma_\kappa^j - \Gamma_{\mu\kappa}^\rho \Gamma_\rho^k) \partial_\kappa^j \right) \\ & + dq^i \otimes \left(\partial_i - \Gamma_{ij}^k q_\kappa^j \partial_\kappa^i + (\partial_i \Gamma_\kappa^k + \Gamma_{ij}^k \Gamma_\kappa^j) \partial_\kappa^i \right). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Passando aos duais, usamos a equação (2.36) para definir a conexão linear $\Gamma_{\vec{J}^*E}$ em \vec{J}^*E , dual à conexão linear $\Gamma_{\vec{J}E}$ em $\vec{J}E$, e da mesma maneira, usamos a equação (2.59) para definir a conexão linear Γ_{J^*E} em J^*E , dual à conexão afim Γ_{JE} em JE . Finalmente, para incorporar os duais torcidos, temos que formar os produtos tensoriais das conexões lineares nos duais ordinários com a conexão linear Γ_M^{*n} no fibrado em linhas $\wedge^n T^*M$ sobre M induzida pela conexão linear Γ_M^* em T^*M :

$$\Gamma_{\vec{J}^*E} = \Gamma_{\vec{J}E} \otimes \Gamma_M^{*n}, \quad (2.121)$$

$$\Gamma_{J^*E} = \Gamma_{JE} \otimes \Gamma_M^{*n}. \quad (2.122)$$

Em termos de coordenadas locais $(x^\mu, q^i; p_i^\mu)$ para \vec{J}^*E e $(x^\mu, q^i; p_i^\mu, p)$ para J^*E , temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{J}^*E} = dx^\mu \otimes & \left(\partial_\mu - ((\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) p_k^\kappa + \Gamma_{\mu\rho}^\kappa p_j^\rho) \partial_\kappa^j \right) \\ & + dq^i \otimes \left(\partial_i + \Gamma_{ij}^k p_k^\kappa \partial_\kappa^i \right), \end{aligned} \quad (2.123)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{J^*E} = dx^\mu \otimes & \left(\partial_\mu - ((\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) p_k^\kappa + \Gamma_{\mu\rho}^\kappa p_j^\rho) \partial_\kappa^j \right. \\ & \left. - (\partial_\mu \Gamma_\kappa^k - (\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) \Gamma_\kappa^j - \Gamma_{\mu\kappa}^\rho \Gamma_\rho^k) p_k^\kappa \partial_0 \right) \\ & + dq^i \otimes \left(\partial_i + \Gamma_{ij}^k p_k^\kappa \partial_\kappa^i - (\partial_i \Gamma_\kappa^k + \Gamma_{ij}^k \Gamma_\kappa^j) p_k^\kappa \partial_0 \right). \end{aligned} \quad (2.124)$$

De maneira análoga, em termos de coordenadas locais $(x^\mu, q^i; p_i^\mu)$ para $\vec{J}^\circledast E$ e $(x^\mu, q^i; p_i^\mu, p)$ para $J^\circledast E$, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{J}^\circledast E} &= dx^\mu \otimes \left(\partial_\mu - ((\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) p_k^\kappa + \Gamma_{\mu\rho}^\kappa p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_j^\kappa) \partial_\kappa^j \right) \\ &\quad + dq^i \otimes \left(\partial_i + \Gamma_{ij}^k p_k^\kappa \partial_\kappa^j \right), \end{aligned} \quad (2.125)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{J^\circledast E} &= dx^\mu \otimes \left(\partial_\mu - ((\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) p_k^\kappa + \Gamma_{\mu\rho}^\kappa p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_j^\kappa) \partial_\kappa^j \right. \\ &\quad \left. - ((\partial_\mu \Gamma_\kappa^k - (\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) \Gamma_\kappa^j - \Gamma_{\mu\kappa}^\rho \Gamma_\rho^k) p_k^\kappa - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p) \partial_0 \right) \\ &\quad + dq^i \otimes \left(\partial_i + \Gamma_{ij}^k p_k^\kappa \partial_\kappa^j - (\partial_i \Gamma_\kappa^k + \Gamma_{ij}^k \Gamma_\kappa^j) p_k^\kappa \partial_0 \right). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Em resumo, temos

Teorema 2.2 *Dadas uma conexão Γ_E em E sobre M , uma conexão linear parcial Γ_{VE}^{VE} em VE sobre E ao longo de VE e uma conexão linear Γ_M em M , seja Γ_{VE} a conexão linear no fibrado vertical VE , como fibrado vetorial sobre E , induzida pelas primeiras duas, conforme o Teorema 2.1. (O símbolo $\tilde{\cdot}$ será omitido, para simplificar a notação.) Então existem*

- uma única conexão linear $\Gamma_{\vec{J}E}$ em $\vec{J}E$, como fibrado vetorial sobre E , que é o produto tensorial de Γ_M^* e Γ_{VE} (veja a equação (2.117)), com expressão em coordenadas locais adaptadas dada pela equação (2.119);
- uma única conexão afim Γ_{JE} em JE , como fibrado afim sobre E , que tem $\Gamma_{\vec{J}E}$ como parte linear e para a qual Γ_M é uma seção covariantemente constante (veja a equação (2.118)), com expressão em coordenadas locais adaptadas dada pela equação (2.120);
- conexões lineares $\Gamma_{\vec{J}^*E}$ em \vec{J}^*E , Γ_{J^*E} em J^*E , $\Gamma_{\vec{J}^\circledast E}$ em $\vec{J}^\circledast E$ e $\Gamma_{J^\circledast E}$ em $J^\circledast E$, todos como fibrados vetoriais sobre E , unicamente determinadas por dualização e, no caso dos duais torcidos, mediante um produto tensorial com Γ_M^{*n} (veja as equações (2.121) e (2.122)), com expressões em coordenadas locais adaptadas dada pelas equações (2.123)–(2.126).

Finalmente, consideramos a questão de construir, a partir dos mesmos dados que antes, uma conexão afim no espaço $J^\circledast E$ dos cojatos estendido de E considerado como fibrado afim em linhas sobre o espaço $\vec{J}^\circledast E$ dos cojatos comum de E . No caso não-torcido, é fácil ver que a escolha de uma conexão Γ_E em E sobre M , vista como seção $\Gamma_E : E \rightarrow JE$, induz uma decomposição canônica de formas afins sobre as fibras de JE em parte linear

e parte constante, que pode ser vista como uma trivialização explícita de J^*E sobre \vec{J}^*E . Obviamente, esta induz uma conexão afim $\bar{\Gamma}_{J^*E}$ em J^*E como fibrado afim em linhas sobre \vec{J}^*E . Tomando o produto tensorial com o fibrado em linhas $\wedge^n T^*M$ sobre M e a conexão linear Γ_M^{*n} , obtemos uma conexão afim $\bar{\Gamma}_{J^\circ E}$ em $J^\circ E$ como fibrado afim em linhas sobre $\vec{J}^\circ E$. Explicitamente, em termos de coordenadas locais $(x^\mu, q^i; p_i^\mu)$ para \vec{J}^*E e $(x^\mu, q^i; p_i^\mu, p)$ para J^*E , temos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{J^*E} = & dx^\mu \otimes \left(\partial_\mu - \partial_\mu \Gamma_\nu^j p_j^\nu \partial_0 \right) \\ & + dq^i \otimes \left(\partial_i - \partial_i \Gamma_\nu^j p_j^\nu \partial_0 \right) + dp_i^\mu \otimes \left(\partial_\mu - \Gamma_\mu^i \partial_0 \right). \end{aligned} \quad (2.127)$$

De maneira análoga, em termos de coordenadas locais $(x^\mu, q^i; p_i^\mu)$ para $\vec{J}^\circ E$ e $(x^\mu, q^i; p_i^\mu, p)$ para $J^\circ E$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{J^\circ E} = & dx^\mu \otimes \left(\partial_\mu - \left(\partial_\mu \Gamma_\nu^j p_j^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\rho (p + \Gamma_\nu^j p_j^\nu) \right) \partial_0 \right) \\ & + dq^i \otimes \left(\partial_i - \partial_i \Gamma_\nu^j p_j^\nu \partial_0 \right) + dp_i^\mu \otimes \left(\partial_\mu - \Gamma_\mu^i \partial_0 \right). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Veremos a seguir como estas construções são utilizadas para chegar à definição de um tensor de Poisson.

2.8 Referenciais de Darboux e tensor de Poisson

Inicialmente, lembremos que um referencial numa variedade M de dimensão n é uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de campos vetoriais locais e_μ sobre M . Tal referencial é chamado *holônomo* se estes estão em involução, i.e., se vale

$$[e_\mu, e_\nu] = 0 \quad (1 \leq \mu, \nu \leq n).$$

Neste caso, o teorema de Frobenius garante a existência de um sistema de coordenadas locais x^μ sobre M tal que (após diminuição do domínio de definição se necessário),

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1 \leq \mu \leq n).$$

Caso contrário, o referencial é dito *não-holônomo*.

No espaço total de um fibrado, existe uma classe de referenciais especiais adaptados a sua estrutura de fibrado: são os referenciais cujos membros podem naturalmente ser divididos em campos verticais e campos horizontais. Obviamente, tal divisão requer a escolha de uma

conexão. Mais explicitamente, dado um fibrado com espaço total E , variedade base M e fibra típica Q , podemos a partir de um sistema de coordenadas locais x^μ para M , um sistema de coordenadas locais q^i para Q e uma conexão Γ construir um referencial em E constituído de $N = \dim Q$ campos vetoriais locais verticais e_i mais $n = \dim M$ campos vetoriais locais horizontais e_μ , definidos por

$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i},$$

e

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial q^i},$$

Em geral, este referencial composto não é holônomo, apesar dos referenciais em M e em Q formados, respectivamente, pelos $\partial/\partial x^\mu$ e pelos $\partial/\partial q^i$, por si só serem holônomos. A condição para o referencial composto ser holônomo é que a conexão Γ tenha curvatura zero; neste caso, ele é associado a um sistema de coordenadas composto (x^μ, q^i) , como usado anteriormente.

Usando esta idéia e os resultados da seção anterior, construiremos uma classe de referenciais no fibrado dos cojatos estendido $J^\otimes E$ que chamaremos de referenciais de Darboux.

Na geometria simplética, um sistema de coordenadas adaptado à estrutura simplética é chamado um sistema de coordenadas de Darboux. A mesma terminologia será adotada para a geometria multissimplética. Como exemplos, citamos as coordenadas locais naturais (q^i, p_i) no fibrado cotangente T^*Q de uma variedade Q , no caso simplético e, de forma totalmente análoga, as coordenadas locais adaptadas (x^μ, q^i, p_i^μ, p) no fibrado dos cojatos estendido $J^\otimes E$ de um fibrado E sobre M (veja a equação (1.82)).

Passando a referenciais não-holônomos, continuaremos usando a mesma terminologia, chamando um referencial qualquer um *referencial de Darboux* se for adaptado à forma simplética ou multissimplética. Como veremos, referenciais não-holônomos de Darboux desempenham um papel importante neste trabalho e na definição de um tensor de Poisson.

Para construir o referencial não-holônomo em $J^\otimes E$ associado às três conexões mencionadas na hipótese do Teorema 2.2 e a um sistema qualquer (x^μ, q^i, p_i^μ, p) de coordenadas locais adaptadas em $J^\otimes E$, procedemos como indicado acima, mas em três etapas. Primeiro, usamos a conexão Γ_E em E sobre M para levantar os campos locais ∂_μ de M para E :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial q^i}. \quad (2.129)$$

Segundo, usamos a conexão $\Gamma_{\vec{J}^\otimes E}$ em $\vec{J}^\otimes E$ sobre E para levantar os campos locais ∂_i e ∂_μ

de E para $\vec{J}^{\otimes}E$:

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{ij}^k p_k^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu}, \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \left((\partial_j \Gamma_\mu^k + \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^k) p_k^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_j^\nu \right) \frac{\partial}{\partial p_j^\nu}. \quad (2.131)$$

Terceiro, usamos a conexão $\bar{\Gamma}_{\vec{J}^{\otimes}E}$ em $J^{\otimes}E$ sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ para levantar os campos locais ∂_μ^i , ∂_i e ∂_μ de $\vec{J}^{\otimes}E$ para $J^{\otimes}E$:

$$\frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial p}, \quad (2.132)$$

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial q^i} - \partial_i \Gamma_\nu^j p_j^\nu \frac{\partial}{\partial p}, \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \left(\partial_\mu \Gamma_\nu^j p_j^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\rho (p + \Gamma_\nu^j p_j^\nu) \right) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (2.134)$$

Combinando estas três etapas, chegamos ao seguinte teorema:

Definição 2.7 Dadas uma conexão Γ_E em E sobre M , uma conexão linear parcial Γ_{VE}^{VE} em VE sobre E ao longo de VE e uma conexão linear Γ_M em M , o **referencial de Darboux** associado a este conjunto de conexões e a um sistema (x^μ, q^i, p_i^μ, p) de coordenadas locais adaptadas em $J^{\otimes}E$ é o referencial $(e_\mu, e_i, e_\mu^i, e_0)$ no fibrado tangente ou o referencial $(e^\mu, e^i, e_i^\mu, e^0)$ no fibrado cotangente de $J^{\otimes}E$ dado por

$$e_0 = \frac{\partial}{\partial p}, \quad (2.135)$$

$$e_\mu^i = \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial p}, \quad (2.136)$$

$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{ij}^r p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} - (\partial_i \Gamma_\nu^r + \Gamma_{ij}^r \Gamma_\nu^j) p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p}, \quad (2.137)$$

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^j \frac{\partial}{\partial q^j} - \left(\partial_j \Gamma_\mu^r p_r^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_j^\nu \right) \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} - \left(\partial_\mu \Gamma_\nu^j p_j^\nu + \Gamma_\mu^i \partial_i \Gamma_\nu^r p_r^\nu - \Gamma_\nu^j \partial_j \Gamma_\mu^r p_r^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu \Gamma_\nu^j p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p \right) \frac{\partial}{\partial p}, \quad (2.138)$$

ou

$$e^\mu = dx^\mu, \quad (2.139)$$

$$e^i = dq^i - \Gamma_\mu^i dx^\mu, \quad (2.140)$$

$$e_i^\mu = dp_i^\mu - \Gamma_{ji}^r p_r^\mu dq^j + \left((\partial_i \Gamma_\nu^r + \Gamma_{ji}^r \Gamma_\nu^j) p_r^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu p_i^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\rho p_i^\mu \right) dx^\nu, \quad (2.141)$$

$$e^0 = dp + \Gamma_\mu^i dp_i^\mu + \partial_i \Gamma_\mu^r p_r^\mu dq^i + \left(\partial_\mu \Gamma_\nu^i p_i^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\rho (p + \Gamma_\nu^i p_i^\nu) \right) dx^\mu. \quad (2.142)$$

Uma demonstração independente de que estas expressões realmente definem referenciais covariantes, no sentido de que sob transformações locais de coordenadas adaptadas $(x^\mu, q^i, p_i^\mu, p) \rightarrow (x'^\kappa, q'^k, p'_k{}^\kappa, p')$ em $J^{\otimes}E$, de acordo com

$$p'_k{}^\kappa = p_k^\kappa(x^\mu, q^i, p_i^\mu), \quad p' = p'(x^\mu, q^i, p_i^\mu, p),$$

onde

$$p'_k{}^\kappa = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\mu, \quad p' = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \left(p - \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\mu \right), \quad (2.143)$$

estes objetos satisfazem a simples lei de transformação $e_0 \rightarrow e'_0$, $e_\mu^i \rightarrow e'^k{}_\kappa$, $e_i \rightarrow e'_k$, $e_\mu \rightarrow e'_\kappa$ e $e^0 \rightarrow e'^0$, $e_i^\mu \rightarrow e'^\kappa{}_k$, $e^i \rightarrow e'^k$, $e^\mu \rightarrow e'^\kappa$ com

$$\begin{aligned} e'_0 &= \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) e_0, \quad e'^k{}_\kappa = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} e_\mu^i, \\ e'_k &= \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} e_i, \quad e'_\kappa = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} e_\mu, \end{aligned} \quad (2.144)$$

e

$$\begin{aligned} e'^0 &= \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) e^0, \quad e'^\kappa{}_k = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} e_i^\mu, \\ e'^k &= \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} e^i, \quad e'^\kappa = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} e^\mu, \end{aligned} \quad (2.145)$$

encontra-se na segunda seção do Apêndice; uma afirmação análoga vale para o referencial no fibrado cotangente obtido por dualização.

O motivo principal para o uso do termo “referencial de Darboux” reside no fato de que em qualquer referencial de Darboux, a forma multissimplética ω assume a sua forma padrão:

Teorema 2.3 Dadas uma conexão Γ_E em E sobre M , uma conexão linear parcial Γ_{VE}^{VE} em VE sobre E ao longo de VE sem torção e uma conexão linear Γ_M em M sem torção, então em qualquer referencial de Darboux associado a este conjunto de conexões, a forma multissimplética ω assume a forma padrão

$$\omega = e^i \wedge e_i^\mu \wedge e_\mu^n - e^0 \wedge e^n, \quad (2.146)$$

enquanto que a forma multicanônica θ assume a forma

$$\theta = p_i^\mu e^i \wedge e_\mu^n + (p + \Gamma_\mu^i p_i^\mu) e^n, \quad (2.147)$$

onde e^n denota o produto exterior dos e^μ e $e_\mu^n = i_{e_\mu} e^n$.

DEMONSTRAÇÃO. Calculamos

$$\begin{aligned} & e^i \wedge e_i^\mu \wedge e_\mu^n - e^0 \wedge e^n \\ &= \left(dq^i - \Gamma_\kappa^i dx^\kappa \right) \wedge \left(dp_i^\mu - \Gamma_{ji}^r p_r^\mu dq^j \right. \\ & \quad \left. + \left((\partial_i \Gamma_\lambda^r + \Gamma_{ji}^r \Gamma_\lambda^j) p_r^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu p_i^\rho - \Gamma_{\lambda\rho}^\rho p_i^\mu \right) dx^\lambda \right) \wedge d^n x_\mu \\ & \quad - \left(dp + \Gamma_\mu^i dp_i^\mu + \partial_i \Gamma_\mu^r p_r^\mu dq^i \right) \wedge d^n x \\ &= dq^i \wedge dp_i^\mu \wedge d^n x_\mu - \Gamma_{ji}^r p_r^\mu dq^i \wedge dq^j \wedge d^n x_\mu \\ & \quad + \left((\partial_i \Gamma_\mu^r + \Gamma_{ji}^r \Gamma_\mu^j) p_r^\mu + \Gamma_{\mu\rho}^\mu p_i^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_i^\mu \right) dq^i \wedge d^n x \\ & \quad + \Gamma_\mu^i dp_i^\mu \wedge d^n x - \Gamma_\mu^i \Gamma_{ji}^r p_r^\mu dq^j \wedge d^n x \\ & \quad - dp \wedge d^n x - \Gamma_\mu^i dp_i^\mu \wedge d^n x - \partial_i \Gamma_\mu^r p_r^\mu dq^i \wedge d^n x \\ &= \omega - \Gamma_{ji}^r p_r^\mu dq^i \wedge dq^j \wedge d^n x_\mu + \left(\Gamma_{\mu\rho}^\mu p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_j^\mu \right) dq^i \wedge d^n x. \end{aligned}$$

□

Ao contrário da forma multissimplética ω e da forma multicanônica θ , o tensor de Poisson π depende explicitamente das conexões escolhidas.

Definição 2.8 Dadas uma conexão Γ_E em E sobre M , uma conexão linear parcial Γ_{VE}^{VE} em VE sobre E ao longo de VE sem torção e uma conexão linear Γ_M em M sem torção, definimos o correspondente **tensor de Poisson**, em qualquer referencial de Darboux associado a este conjunto de conexões, por

$$\pi_\Gamma = e_i \wedge e_\mu^i \wedge e_n^\mu - e_0 \wedge e_n, \quad (2.148)$$

onde e_n denota o produto exterior dos e_μ e $e_n^\mu = i_{e_\mu} e_n$.

Observe que a definição de π_Γ depende do conjunto de conexões escolhido mas independe do sistema de coordenadas locais adaptadas utilizadas na construção do referencial de Darboux associado, como pode ser facilmente verificado usando as leis de transformação (2.144) e (2.145).

Teorema 2.4 *A diferença entre os tensores de Poisson π_Γ e $\pi_{\Gamma'}$, associados a diferentes conjuntos de conexões Γ e Γ' é um campo multivetorial a valores no núcleo de ω .*

DEMONSTRAÇÃO. Esta afirmação segue diretamente do fato de que podemos escrever o tensor de Poisson π_Γ na forma

$$\begin{aligned}
\pi_\Gamma &= (e_i \wedge e_\mu^i - e_0 \wedge e_\mu) \wedge e_n^\mu \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{ij}^r p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} - (\partial_i \Gamma_\nu^r + \Gamma_{ij}^r \Gamma_\nu^j) p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p} \right) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial p} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial p} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^j \frac{\partial}{\partial q^j} - (\partial_j \Gamma_\mu^r p_r^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_j^\nu) \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} \right) \right] \wedge e_n^\mu \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + \Gamma_{ij}^r p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - (\partial_i \Gamma_\nu^r + \Gamma_{ij}^r \Gamma_\nu^j) p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p} - \Gamma_\mu^i \Gamma_{ij}^r p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} \wedge \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu^j \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial q^j} \right. \\
&\quad \left. + \left(\partial_j \Gamma_\mu^r p_r^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_j^\nu \right) \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} \right] \wedge e_n^\mu \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \wedge \partial_n x^\mu + (\text{termos a valores no núcleo de } \omega),
\end{aligned}$$

onde usamos a abreviação

$$\partial_n x^\mu = \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\mu\mu_2 \dots \mu_n} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{\mu_n}}.$$

sendo que o mesmo vale para o tensor de Poisson $\pi_{\Gamma'}$.

□

Formalismo funcional

A nossa meta neste capítulo será apresentar um resultado que estabelece uma conexão inédita entre o colchete de Poisson do formalismo multissimplético, conforme exposto no Capítulo 1, e o colchete de Peierls-DeWitt, que segundo [14,34] pode ser considerado o colchete de Poisson do formalismo funcional baseado no conceito do espaço de fase covariante. Na primeira seção, recordamos brevemente alguns aspectos deste formalismo e da sua conexão com o formalismo multissimplético. Na segunda seção, introduzimos uma classe de funcionais F que são definidos a partir de formas diferenciais f sobre o espaço de multifase do formalismo multissimplético por pull-back e subsequente integração sobre alguma subvariedade do espaço-tempo. Na terceira seção, provamos o teorema principal desta tese, segundo o qual o campo hamiltoniano funcional X_F associado ao funcional F pode, em certas circunstâncias, ser obtido diretamente, de forma algébrica, do campo hamiltoniano X_f associado à forma f , sem a necessidade de introduzir a função de Green causal associada às equações de movimento linearizadas para definir X_F por uma integral de convolução, como em [14,34]. Como corolário, obtemos pela primeira vez uma relação direta entre o colchete de Poisson do formalismo multissimplético e o colchete de Peierls-DeWitt do formalismo funcional.

3.1 Espaço de fase covariante

O espaço de fase covariante na teoria dos campos é, por definição, o espaço das soluções das equações de movimento – ao contrário do espaço de fase tradicional, que é definido em termos de dados de Cauchy, o que ofusca a covariância da teoria. Obviamente, não é de se esperar que estas duas interpretações do espaço de fase sejam equivalentes de forma completamente geral, pois é bem conhecido que, para equações de movimento não-lineares, a evolução temporal a partir de dados de Cauchy regulares pode gerar soluções que, dentro de um tempo finito, desenvolvem algum tipo de singularidade. Um pré-requisito ainda mais

elementar é que o espaço-tempo subjacente M deva admitir pelo menos uma hipersuperfície de Cauchy, o que significa que M deva ser globalmente hiperbólico.

Portanto, uma das hipóteses fundamentais neste capítulo será que o espaço-tempo M seja *globalmente hiperbólico*. É esta a arena natural para a teoria matemática de (sistemas de) equações diferenciais parciais hiperbólicas, onde o problema de Cauchy é bem posto. Existem várias e aparentemente diferentes definições do conceito de um espaço-tempo globalmente hiperbólico, mas no final todas se mostraram equivalentes; veja [38, Cap. 8] para uma extensa discussão. A mais conveniente para os nossos fins é que M admite uma função tempo global¹ cujas hipersuperfícies de nível providenciam uma folheação de M em superfícies de Cauchy e um difeomorfismo global $M \cong \mathbb{R} \times \Sigma$. Como corolário imediato, podemos definir a noção de uma *fatia temporal* (aberta ou fechada) em M : é um subconjunto (aberto ou fechado) de M que sob tal difeomorfismo corresponde a um subconjunto de $\mathbb{R} \times \Sigma$ da forma $I \times \Sigma$, onde I é um intervalo (aberto ou fechado) em \mathbb{R} .

Dentro da abordagem adotada neste trabalho, onde campos são seções de fibrados, é natural considerar o espaço de fase covariante \mathcal{S} como inserido no espaço de configurações de campo \mathcal{C} , que por sua vez é o espaço das seções de um certo fibrado F :

$$\mathcal{C} = \Gamma(F) . \quad (3.1)$$

No formalismo desenvolvido no Capítulo 1, F é o fibrado E no âmbito lagrangiano e é o fibrado $\vec{J}^{\otimes} E$ no âmbito hamiltoniano. Destarte, os pontos de \mathcal{C} , que são as seções ϕ de F , correspondem a seções φ de E no âmbito lagrangiano e a seções (φ, π) de $\vec{J}^{\otimes} E$ no âmbito hamiltoniano. Em ambos os casos, os elementos de \mathcal{S} são os pontos estacionários do funcional ação, que em cada ponto ϕ de \mathcal{C} é definido como a integral da forma $\phi^* \theta_{\mathcal{L}}$ no âmbito lagrangiano e da forma $\phi^* \theta_{\mathcal{H}}$ no âmbito hamiltoniano. As correspondentes equações de movimento constituem um sistema de equações diferenciais parciais, conhecidas como equações de Euler-Lagrange no âmbito lagrangiano e como equações de De Donder-Weyl no âmbito hamiltoniano.

Formalmente, o espaço de configurações de campo \mathcal{C} pode ser visto como uma variedade (de dimensão infinita). Como tal, possui em cada um dos seus pontos um espaço tangente $T_{\phi} \mathcal{C}$ que formalmente pode ser definido como um espaço de seções lisas, com certas propriedades de suporte, do fibrado vetorial $V_{\phi} = \phi^*(VF)$ sobre M . Denotando por $V_{\phi}^* = \phi^*(V^*F)$ o dual comum e por $V_{\phi}^{\otimes} = V_{\phi}^* \otimes \wedge^n T^*M$ o dual torcido de V_{ϕ} , vimos que o espaço cotangente será então o espaço das seções distribucionais, com propriedades de suporte duais, do fibrado vetorial V_{ϕ}^{\otimes} sobre M . Existem várias opções para a escolha das propriedades de suporte a serem impostas, entre as quais adotaremos a opção 3 de [14]:

$$T_{\phi} \mathcal{C} = \Gamma_{sc}^{\infty}(V_{\phi}) \quad , \quad T_{\phi}^* \mathcal{C} = \Gamma_{tc}^{-\infty}(V_{\phi}^{\otimes}) \quad , \quad (3.2)$$

¹É claro que tal função tempo está longe de ser única – mesmo no espaço-tempo de Minkowski.

onde os índices “sc” e “tc” significam “suporte espacialmente compacto” e “suporte temporalmente compacto”, respectivamente. Dizemos que uma seção de um fibrado vetorial sobre o espaço-tempo M tem *suporte espacialmente compacto* se a interseção de seu suporte com qualquer fatia temporal fechada for compacta e que tem *suporte temporalmente compacto* se seu suporte for contido em alguma fatia temporal.

Dentro do espaço de configurações de campo \mathcal{C} , temos o espaço de fase covariante \mathcal{S} , que pode ser definido como o conjunto dos pontos estacionários do funcional ação S :

$$\mathcal{S} = \{ \phi \in \mathcal{C} / S'[\phi] = 0 \} . \quad (3.3)$$

Formalmente, \mathcal{S} pode ser visto como subvariedade de \mathcal{C} . Portanto, possui em cada um dos seus pontos um espaço tangente $T_\phi \mathcal{S}$ que é o subespaço do espaço tangente $T_\phi \mathcal{C}$ consistindo das soluções das equações de movimento linearizadas (onde “linearizadas” significa, mais precisamente, “linearizadas em torno da solução ϕ das plenas equações de movimento”). Estas soluções são exatamente as seções de V_ϕ que pertencem ao núcleo do correspondente operador de Jacobi $\mathcal{J}[\phi] : \Gamma(V_\phi) \rightarrow \Gamma(V_\phi^\otimes)$:

$$T_\phi \mathcal{S} = \{ \delta\phi \in T_\phi \mathcal{C} / \mathcal{J}[\phi] \cdot \delta\phi = 0 \} . \quad (3.4)$$

Para maiores detalhes, inclusive uma definição explícita do operador de Jacobi, tanto no âmbito lagrangiano como no âmbito hamiltoniano, veja Ref. [14].

A estrutura simplética sobre o espaço de fase covariante é descrita por uma forma simplética funcional Ω que associa a todo ponto ϕ em \mathcal{S} e quaisquer dois vetores tangentes $\delta\phi_1$ e $\delta\phi_2$ em $T_\phi \mathcal{S}$ um número real $\Omega_\phi(\delta\phi_1, \delta\phi_2)$. Como foi observado por Crnković e Witten [4,5], este pode ser escrito como a integral de uma “corrente simplética”, que é uma $(n-1)$ -forma fechada sobre o espaço-tempo dependendo de ϕ , $\delta\phi_1$ e $\delta\phi_2$, sobre uma hipersuperfície Σ de Cauchy qualquer:

$$\Omega_\phi(\delta\phi_1, \delta\phi_2) = \int_\Sigma J_\phi(\delta\phi_1, \delta\phi_2) . \quad (3.5)$$

No formalismo multissimplético, esta “corrente simplética” pode ser construída diretamente a partir da forma multissimplética em termos de um pull-back modificado, em dois passos. No âmbito lagrangiano, o primeiro passo consiste em usar a lagrangiana \mathcal{L} , ou mais exatamente a transformação de Legendre $\mathbb{F}\mathcal{L} : JE \rightarrow J^\otimes E$ induzida pela lagrangiana \mathcal{L} , para definir a forma de Poincaré-Cartan $\omega_{\mathcal{L}} = (\mathbb{F}\mathcal{L})^* \omega$ sobre JE . No segundo passo, define-se um “pull-back misturado” de $\omega_{\mathcal{L}}$ pelas derivadas $j\phi$ de ϕ , $j(\delta\phi_1)$ de $\delta\phi_1$ e $j(\delta\phi_2)$ de $\delta\phi_2$, onde nos primeiros dois argumentos de $\omega_{\mathcal{L}}$, inserimos $j(\delta\phi_1)$ e $j(\delta\phi_2)$, respectivamente, ao invés da aplicação tangente $Tj(\phi)$ a $j(\phi)$ que aparece nos demais $n-1$ argumentos. De forma análoga, no âmbito hamiltoniano, o primeiro passo consiste em usar a hamiltoniana \mathcal{H} para definir a forma de De Donder-Weyl $\omega_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^* \omega$ sobre $\vec{J}^\otimes E$. No segundo passo, define-se um “pull-back misturado” de $\omega_{\mathcal{H}}$ por ϕ , $\delta\phi_1$ e $\delta\phi_2$, onde nos primeiros dois argumentos de $\omega_{\mathcal{H}}$,

inserimos $\delta\phi_1$ e $\delta\phi_2$, respectivamente, ao invés da aplicação tangente $T\phi$ a ϕ que aparece nos demais $n-1$ argumentos. Explicitamente, no âmbito hamiltoniano em que a construção é bem mais simples, temos

$$\left(\phi^*\omega_{\mathcal{H}}(\delta\phi_1, \delta\phi_2)\right)_x(u_1, \dots, u_{n-1}) = (\omega_{\mathcal{H}})_{\phi(x)}(\delta\phi_1(x), \delta\phi_2(x), T_x\phi \cdot u_1, \dots, T_x\phi \cdot u_{n-1}), \quad (3.6)$$

e então

$$J_{\phi}(\delta\phi_1, \delta\phi_2) = \phi^*\omega_{\mathcal{H}}(\delta\phi_1, \delta\phi_2). \quad (3.7)$$

Em coordenadas locais adaptadas, escrevendo

$$J_{\phi}(\delta\phi_1, \delta\phi_2) = J_{\phi}^{\mu}(\delta\phi_1, \delta\phi_2) d^n x_{\mu},$$

e

$$\delta\phi_1 = \delta\varphi_1^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \delta\pi_{1,i}^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_i^{\mu}}, \quad \delta\phi_2 = \delta\varphi_2^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \delta\pi_{2,i}^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_i^{\mu}},$$

obtemos

$$\Omega_{\phi}(\delta\phi_1, \delta\phi_2) = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} J_{\phi}^{\mu}(\delta\phi_1, \delta\phi_2), \quad (3.8)$$

com

$$J_{\phi}^{\mu}(\delta\phi_1, \delta\phi_2) = \delta\varphi_1^i \delta\pi_{2,i}^{\mu} - \delta\varphi_2^i \delta\pi_{1,i}^{\mu}. \quad (3.9)$$

Aliás, estas fórmulas mostram que, exatamente como na mecânica, Ω não depende da escolha da hamiltoniana \mathcal{H} (o mesmo vale para J).

Continuando a discussão sobre como desenvolver uma versão formal da geometria simplética no espaço de fase covariante, o próximo passo seria introduzir o análogo de funções, de suas derivadas, do campo hamiltoniano associado a uma função e, finalmente, do colchete de Poisson entre duas funções. Como \mathcal{S} é de certa forma um espaço de funções e portanto o análogo das funções sobre um espaço de fase comum aqui são os funcionais sobre \mathcal{S} , todos estes conceitos adquirirão um adjetivo “funcional”.

A primeira destas construções é a da derivada funcional. Dado um funcional F sobre \mathcal{C} , a sua *derivada funcional* no ponto ϕ em \mathcal{C} ao longo do vetor tangente funcional $\delta\phi \in T_{\phi}\mathcal{C}$ é definida por

$$F'[\phi] \cdot \delta\phi = \frac{d}{d\lambda} F[\phi_{\lambda}] \Big|_{\lambda=0}, \quad (3.10)$$

onde os ϕ_{λ} representam uma família a um parâmetro de seções de F tal que

$$\phi = \phi_{\lambda} \Big|_{\lambda=0}, \quad \delta\phi = \frac{d}{d\lambda} \phi_{\lambda} \Big|_{\lambda=0}. \quad (3.11)$$

Para que esta prescrição realmente defina um vetor cotangente funcional $F'[\phi] \in T_{\phi}^*\mathcal{C}$, será necessário garantir compatibilidade com as propriedades de suporte estipulados na

equação (3.2). Portanto, neste trabalho consideraremos exclusivamente funcionais que são “locais no tempo”, i.e., cuja dependência dos campos é não-trivial apenas dentro de uma fatia temporal, ou em outras palavras, cuja derivada funcional tem suporte temporalmente compacto. (Os funcionais a serem estudados nas próximas seções tem esta propriedade, uma vez que são definidos como integrais de expressões locais nos campos sobre alguma hipersuperfície de Cauchy.) Observamos também que $F'[\phi]$ é uma seção distribucional do fibrado vetorial V_ϕ^\otimes para a qual utilizaremos a seguinte notação padrão,

$$F'[\phi] \cdot \delta\phi = \int_M d^n x \frac{\delta F}{\delta\phi^i}[\phi](x) \delta\phi^i(x), \quad (3.12)$$

onde podemos considerar que, localmente,

$$\frac{\delta F}{\delta\phi}[\phi] \in \Gamma_{\text{tc}}^{-\infty}(V_\phi^*) \quad , \quad \frac{\delta F}{\delta\phi}[\phi] d^n x \in \Gamma_{\text{tc}}^{-\infty}(V_\phi^\otimes). \quad (3.13)$$

As mesmas considerações se aplicam, “mutatis mutandis”, se substituirmos o espaço de configurações de campo \mathcal{C} pelo espaço de fase covariante \mathcal{S} . Observamos apenas que o fato de que os elementos $\delta\phi$ de $T_\phi\mathcal{S}$ devem satisfazer (sistemas de) equações diferenciais parciais, tipicamente de caráter hiperbólico, exclui a opção de exigir que eles tenham suporte compacto ou suporte temporalmente compacto e motiva a condição formulada na equação (3.2) de que tenham suporte espacialmente compacto como a única condição de suporte consistente com as referidas equações de evolução.

O problema básico a ser resolvido para poder implementar a filosofia da geometria simplética dentro do formalismo funcional é conseguir dualizar, em cada ponto ϕ de \mathcal{S} , o covetor funcional $F'[\phi]$, em relação à forma simplética funcional Ω_ϕ , para obter um vetor funcional $X_F[\phi]$. Formalmente, a definição de $X_F[\phi]$ em termos de $F'[\phi]$ é dada pela fórmula

$$\Omega_\phi(X_F[\phi], \delta\phi) = F'[\phi] \cdot \delta\phi \quad \text{para todo } \delta\phi \in T_\phi\mathcal{S}. \quad (3.14)$$

Observa-se que, ao contrário do que acontece em variedades simpléticas de dimensão finita, esta relação não garante que $X_F[\phi]$ pertença ao espaço $T_\phi\mathcal{S}$. De fato, inspecionando a definição de $\Omega_\phi(\delta\phi_1, \delta\phi_2)$, percebe-se que basta supor que uma das duas seções $\delta\phi_1$ e $\delta\phi_2$ seja lisa e tenha suporte espacialmente compacto, sendo que a outra pode então ser distribucional e ter suporte qualquer, e mesmo assim a expressão $\Omega_\phi(\delta\phi_1, \delta\phi_2)$ será bem definida. Portanto, é de se esperar que, de forma geral, não valha

$$X_F[\phi] \in \Gamma_{\text{sc}}^\infty(V_\phi), \quad (3.15)$$

mas que valha apenas

$$X_F[\phi] \in \Gamma^{-\infty}(V_\phi). \quad (3.16)$$

É neste sentido “fraco” que é possível exibir, no contexto do espaço de fase covariante, o campo hamiltoniano funcional X_F associado ao funcional F .

O resultado principal da tese [34] afirma que $X_F[\phi]$ pode ser construído explicitamente como convolução da distribuição que define a derivada funcional de F em ϕ com a função de Green causal G_ϕ do operador de Jacobi em ϕ :

$$(X_F[\phi])^i(x) = \int_M d^n y G_\phi^{ij}(x, y) \frac{\delta F}{\delta \phi^j}[\phi](y). \quad (3.17)$$

Observa-se que esta convolução é bem definida, pois quando fixarmos x , $G_\phi(x, \cdot)$ é uma distribuição de suporte espacialmente compacto em y enquanto que, por hipótese, $\delta F/\delta \phi[\phi]$ é uma distribuição de suporte temporalmente compacto, e a interseção dos dois suportes é compacto. Por outro lado, não há como fazer nenhuma afirmação sobre propriedades de regularidade ou de suporte da distribuição resultante.

Usando este resultado, é praticamente trivial escrever o colchete de Poisson induzido por Ω : Para dois funcionais F e G ,

$$\{F, G\}[\phi] = F'[\phi] \cdot X_G[\phi] = -G'[\phi] \cdot X_F[\phi]. \quad (3.18)$$

Explicitamente,

$$\{F, G\}[\phi] = \int_M d^n x \int_M d^n y \frac{\delta F}{\delta \phi^i}(x) G_\phi^{ij}(x, y) \frac{\delta G}{\delta \phi^j}(y). \quad (3.19)$$

Este é o *colchete de Peierls-DeWitt*.

A desvantagem principal das fórmulas (3.17) e (3.19) é que elas ainda são relativamente implícitas e que dependem da dinâmica do modelo concreto, pois calcular G_ϕ requer resolver um sistema hiperbólico de equações diferenciais parciais lineares, onde a solução ϕ das equações de movimento aparece nos coeficientes do sistema.

O resultado principal da presente tese consistirá de uma fórmula muito mais simples e direta para calcular X_F , para uma classe restrita de funcionais que no entanto é suficientemente importante nas aplicações para merecer uma atenção especial. Para tais funcionais, veremos que o colchete de Peierls-DeWitt se reduz a uma versão modificada do colchete de Poisson discutido no Capítulo 1.

3.2 Funcionais gerados por formas

A nossa meta nesta seção será introduzir uma classe de funcionais no espaço de fase covariante que são definidos a partir de formas diferenciais sobre o espaço de multifase (estendido ou comum) do formalismo multissimplético por pull-back e integração, e calcular a derivada funcional de um tal funcional em termos da derivada de Lie da respectiva forma diferencial.

Para simplificar o tratamento, restringiremo-nos ao formalismo hamiltoniano, observando que resultados completamente análogos no contexto do formalismo lagrangiano podem ser obtidos por pull-back via a transformação de Legendre $\vec{\mathbb{F}}\mathcal{L}$ pertinente, substituindo $\vec{J}^{\otimes}E$ por JE e \mathcal{H} por $\mathbb{F}\mathcal{L}$.

Definição 3.1 *Sejam Σ uma subvariedade p -dimensional de M e f uma p -forma sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^{\otimes}E$. Então definimos o funcional F associado a Σ e f pela fórmula*

$$F[\phi] = \int_{\Sigma} \phi^* f \quad \text{para } \phi \in \Gamma(\vec{J}^{\otimes}E). \quad (3.20)$$

A rigor, não especificamos aqui se queremos considerar F como funcional sobre o espaço de fase covariante \mathcal{S} ou sobre o espaço \mathcal{C} das configurações de campo da teoria. De qualquer forma, a segunda opção constitui uma extensão da primeira opção que é definida naturalmente, sem qualquer arbitrariedade. Também deixamos de especificar condições para garantir a existência da integral, pois existem vários tipos de tais condições que são bem diferentes entre si. Em primeiro lugar, deve-se salientar que Σ pode ser uma subvariedade com bordo. Desta forma, podemos garantir a existência da integral se supormos que Σ seja compacta. Outra possibilidade consiste em impor restrições sobre f . Por exemplo, podemos supor que f tenha suporte na base compacto (i.e., o conjunto dos pontos x em M tais que f não se anula na fibra de $J^{\otimes}E$ sobre x é compacto) ou que f satisfaça condições apropriadas de decaimento ao infinito.

Outro ponto que merece ser mencionado é que dada uma hamiltoniana \mathcal{H} qualquer, podemos sempre supor que f seja o pull-back de uma p -forma sobre $J^{\otimes}E$ via \mathcal{H} , pois sempre vale $f = \mathcal{H}^*(\eta^* f)$; será esta a situação que encontraremos nas aplicações a seguir.

O próximo passo consiste em calcular a derivada funcional para essa classe de funcionais. Para tanto, lembramos primeiro que o espaço tangente formal $T_{\phi}\mathcal{C}$ de \mathcal{C} no ponto ϕ de \mathcal{C} é o espaço $\Gamma(\phi^*(V(\vec{J}^{\otimes}E)))$ das seções $\delta\phi$ do pull-back do fibrado vertical $V(\vec{J}^{\otimes}E)$ de $\vec{J}^{\otimes}E$ por ϕ . Entre estas, temos as seções obtidas por composição de ϕ com um campo vetorial vertical \vec{X} sobre $\vec{J}^{\otimes}E$,

$$\delta\phi(x) = \vec{X}(\phi(x)). \quad (3.21)$$

Usando o fato de que ϕ não é apenas uma aplicação qualquer de M para $\vec{J}^{\otimes}E$ mas é uma seção de $\vec{J}^{\otimes}E$ como fibrado sobre M , pode-se provar que qualquer variação $\delta\phi \in \Gamma(\phi^*(V(\vec{J}^{\otimes}E)))$ de ϕ pode ser escrita assim, para algum campo vetorial vertical $\vec{X} \in \mathfrak{X}_V(\vec{J}^{\otimes}E)$ sobre $\vec{J}^{\otimes}E$. (Para demonstrar esta afirmação, que vale não apenas para $\vec{J}^{\otimes}E$ para um fibrado F sobre M qualquer, aplicamos o teorema das funções inversas para construir, a partir de um sistema de coordenadas locais (x^{μ}, r^k) de F em torno de um ponto qualquer $\phi(m)$ da imagem de M em F sob ϕ , induzido por um sistema de coordenadas locais x^{μ} de M em torno de m , um sistema de coordenadas locais r^k da fibra típica de F e uma trivialização local de F sobre M

como sempre, um novo sistema de coordenadas locais (x^μ, s^l) de F em torno de $\phi(m)$ tal que nele, a seção ϕ é representada por $s^l(x) = 0$. Então usando uma função corte em torno da origem, é fácil estender as funções $\delta\phi^l(x)$ para funções $X^l(x, s)$. Finalmente, usa-se uma partição da unidade sobre M para colar estas “extensões” locais de $\delta\phi$ e assim chegar a uma “extensão” global de $\delta\phi$.) Obviamente, \vec{X} está longe de ser unicamente determinado por $\delta\phi$, já que apenas os valores de \vec{X} sobre a imagem de M em $\vec{J}^\circledast E$ sob ϕ são determinados por $\delta\phi$, através da condição (3.21).

Com essa ferramenta de extensão de campos vetoriais (verticais) ao longo de uma seção de um fibrado para campos vetoriais (verticais) na variedade alvo (o espaço total do fibrado) à nossa disposição, podemos calcular a derivada funcional de funcionais do tipo (3.20).

Proposição 3.1 *Sejam Σ uma subvariedade p -dimensional de M e f uma p -forma sobre o espaço de multifase comum $\vec{J}^\circledast E$. Então a derivada funcional do funcional F associado a Σ e f conforme a equação (3.20) é dada pela fórmula*

$$F'[\phi] \cdot \vec{X}(\phi) = \int_{\Sigma} \phi^*(L_{\vec{X}} f), \quad \text{para } \phi \in \Gamma(\vec{J}^\circledast E) \text{ e } \vec{X} \in \mathfrak{X}_V(\vec{J}^\circledast E). \quad (3.22)$$

DEMONSTRAÇÃO. Lembremos que para um funcional F qualquer, a sua derivada funcional em ϕ ao longo de $\delta\phi$ é definida por

$$F'[\phi] \cdot \delta\phi = \left. \frac{d}{d\lambda} F[\phi_\lambda] \right|_{\lambda=0},$$

onde os ϕ_λ representam uma família a um parâmetro de seções de $\vec{J}^\circledast E$ tal que

$$\phi = \phi_\lambda \Big|_{\lambda=0}, \quad \delta\phi = \left. \frac{d}{d\lambda} \phi_\lambda \right|_{\lambda=0}.$$

Fixando ϕ e $\delta\phi$, introduzimos um campo vetorial vertical \vec{X} sobre $\vec{J}^\circledast E$ que representa a variação $\delta\phi$ de ϕ , conforme a equação (3.21), e consideramos seu fluxo, que é um grupo (local) de automorfismos (locais) estritos Φ_λ de $\vec{J}^\circledast E$ tal que

$$\vec{X} = \left. \frac{d}{d\lambda} \Phi_\lambda \right|_{\lambda=0}.$$

Podemos então por

$$\phi_\lambda = \Phi_\lambda \circ \phi,$$

para concluir que

$$\begin{aligned} F'[\phi] \cdot \delta\phi &= \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{d\lambda} \phi_\lambda^* f \right|_{\lambda=0} = \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{d\lambda} (\Phi_\lambda \circ \phi)^* f \right|_{\lambda=0} \\ &= \int_{\Sigma} \phi^* \left. \frac{d}{d\lambda} \Phi_\lambda^* f \right|_{\lambda=0} = \int_{\Sigma} \phi^*(L_{\vec{X}} f). \end{aligned}$$

□

3.3 Os teoremas principais

Inicialmente, formulamos um teorema que providencia uma interpretação global para as equações de movimento na teoria geométrica dos campos, em termos de um operador que podemos chamar de operador de Euler - Lagrange, no formalismo lagrangiano, e de operador de De Donder - Weyl, no formalismo hamiltoniano. Em ambos os casos, é possível deduzir as equações de movimento a partir de um princípio variacional. Como este procedimento é bem conhecido no formalismo lagrangiano, restringiremo-nos aqui a apresentar a sua versão hamiltoniana.

Definição 3.2 Dada uma hamiltoniana \mathcal{H} , definimos o correspondente *operador de De Donder - Weyl* como sendo a aplicação

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}} : J(\vec{J}^{\otimes} E) \longrightarrow T^*(\vec{J}^{\otimes} E) \otimes \wedge^n T^* M \quad (3.23)$$

de fibrados sobre $\vec{J}^{\otimes} E$ ² que associa a cada jato de primeira ordem $(\varphi, \pi, \partial\varphi, \partial\pi)$ de seções (locais) (φ, π) de $\vec{J}^{\otimes} E$ sobre M e a cada campo vetorial \vec{X} sobre $\vec{J}^{\otimes} E$ a n -forma sobre M dada por

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(\varphi, \pi, \partial\varphi, \partial\pi) \cdot \vec{X} = (\varphi, \pi)^*(i_{\vec{X}}\omega_{\mathcal{H}}) . \quad (3.24)$$

A importância deste operador decorre do seguinte

Teorema 3.1 Dadas uma hamiltoniana \mathcal{H} e uma seção $\phi = (\varphi, \pi)$ de $\vec{J}^{\otimes} E$, as seguintes condições são equivalentes:

- ϕ satisfaz as equações de De Donder - Weyl;
- ϕ é aniquilado pelo operador de De Donder - Weyl, ou seja, para todo campo vetorial \vec{X} sobre $\vec{J}^{\otimes} E$, vale

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(\varphi, \pi, \partial\varphi, \partial\pi) \cdot \vec{X} = 0 ; \quad (3.25)$$

- ϕ é ponto estacionário do funcional ação

$$S_{\mathcal{H}}[\phi] = \int_M \phi^* \theta_{\mathcal{H}} . \quad (3.26)$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja \vec{X} um campo vetorial sobre $\vec{J}^{\otimes} E$, cuja expressão em coordenadas locais adaptadas é dada pela equação (1.150). Calculando o pull-back da forma $i_{\vec{X}}\omega_{\mathcal{H}}$, que

²Suprimimos os símbolos que indicam o pull-back de fibrados sobre E ou M para $\vec{J}^{\otimes} E$.

é dada pela equação (1.151), com (φ, π) , obtemos

$$\begin{aligned}
(\varphi, \pi)^*(i_{\vec{X}}\omega_{\mathcal{H}}) &= X^\nu(\varphi, \pi) \left(\partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \pi_i^\mu - \partial_\nu \varphi^i \partial_\mu \pi_i^\mu \right. \\
&\quad \left. - \partial_\nu \varphi^i \frac{\partial H}{\partial q^i}(\varphi, \pi) - \partial_\nu \pi_i^\mu \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu}(\varphi, \pi) \right) d^n x \\
&\quad + X^i(\varphi, \pi) \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}(\varphi, \pi) + \partial_\mu \pi_i^\mu \right) d^n x \\
&\quad + X_i^\mu(\varphi, \pi) \left(\frac{\partial H}{\partial p_i^\mu}(\varphi, \pi) - \partial_\mu \varphi^i \right) d^n x,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(\varphi, \pi)^*(i_{\vec{X}}\omega_{\mathcal{H}}) &= \left(\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}(\varphi, \pi) + \partial_\mu \pi_i^\mu \right) (X^i(\varphi, \pi) - X^\nu(\varphi, \pi) \partial_\nu \varphi^i) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i^\mu}(\varphi, \pi) - \partial_\mu \varphi^i \right) (X_i^\mu(\varphi, \pi) - X^\nu(\varphi, \pi) \partial_\nu \pi_i^\mu) \right) d^n x,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

demonstrando a equivalência entre o primeiro critério e o segundo critério. Note que as fórmulas (3.27) ou (3.28) mostram que a condição (3.25) vale para todo campo vetorial \vec{X} sobre $\vec{J}^\circledast E$ se vale para todo campo vetorial vertical \vec{X} sobre $\vec{J}^\circledast E$. Para demonstrar a equivalência entre o segundo critério, nesta forma, e o terceiro critério, utilizamos o resultado da Proposição 3.1, segundo o qual temos para todo campo vetorial vertical \vec{X} sobre $\vec{J}^\circledast E$

$$S'_{\mathcal{H}}[\phi] \cdot \vec{X}(\phi) = \int_M \phi^*(L_{\vec{X}}\theta_{\mathcal{H}}) = \int_M \phi^*(i_{\vec{X}}d\theta_{\mathcal{H}}) + \int_M \phi^*(di_{\vec{X}}\theta_{\mathcal{H}}).$$

Como o princípio variacional exige que $\vec{X}(\phi)$ tenha suporte compacto e portanto podemos, sem perda de generalidade, supor que \vec{X} tenha suporte na base compacto, o último termo se anula pelo teorema de Stokes. Assim, obtemos

$$S'_{\mathcal{H}}[\phi] \cdot \vec{X}(\phi) = - \int_M \phi^*(i_{\vec{X}}\omega_{\mathcal{H}}),$$

o que demonstra o teorema. \square

Uma outra fórmula explícita para o operador de De Donder-Weyl que pode ser obtida da equação (3.27) eliminando-se \vec{X} é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(\varphi, \pi, \partial\varphi, \partial\pi) &= - \left(\partial_\mu \varphi^i \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}(\varphi, \pi) + \partial_\nu \pi_i^\nu \right) + \partial_\mu \pi_i^\nu \left(\frac{\partial H}{\partial p_i^\nu}(\varphi, \pi) - \partial_\nu \varphi^i \right) \right) dx^\mu \otimes d^n x \\
&\quad + \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}(\varphi, \pi) + \partial_\mu \pi_i^\mu \right) dq^i \otimes d^n x + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i^\mu}(\varphi, \pi) - \partial_\mu \varphi^i \right) dp_i^\mu \otimes d^n x.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Passemos agora à apresentação dos nossos teoremas principais. Para tanto, continuamos trabalhando no âmbito hamiltoniano, e restringimo-nos a considerar funcionais F associados a hipersuperfícies Σ , tipicamente hipersuperfícies de Cauchy, e formas de grau $n-1$ sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ obtidas de formas localmente hamiltonianas de grau $n-1$ sobre $J^{\otimes}E$ por pull-back com alguma hamiltoniana \mathcal{H} . É importante lembrar que esta classe de formas é mais ampla do que a classe de formas localmente hamiltonianas de grau $n-1$ sobre $\vec{J}^{\otimes}E$, pois não está se exigindo que os correspondentes campos hamiltonianos sobre $J^{\otimes}E$ sejam tangentes à imagem de \mathcal{H} .

Teorema 3.2 *Dada uma hamiltoniana \mathcal{H} , seja f uma $(n-1)$ -forma hamiltoniana sobre o espaço de multifase estendido $J^{\otimes}E$ tal que o campo hamiltoniano X_f associado a f seja projetável, conforme a Definição 1.7; denotaremos a sua projeção sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ por \vec{X}_f e a sua projeção sobre M por $X_{f,M}$.³ Por outro lado, seja Σ uma hipersuperfície tipo espaço em M sem bordo e F o funcional sobre \mathcal{S} associado a Σ e \mathcal{H}^*f , conforme a Definição 3.1. Então o campo hamiltoniano funcional X_F associado a F , definido pela condição (3.14), é dado pela seguinte fórmula explícita:*

$$X_F[\phi] = \vec{X}_f(\phi) - T\phi(X_{f,M}). \quad (3.30)$$

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar que a expressão na equação (3.30) satisfaz a condição (3.14), para todo $\phi \in \mathcal{S}$ e todo $\delta\phi \in T_\phi\mathcal{S} \subset T_\phi\mathcal{C}$, começamos representando $\delta\phi$ como a composição de ϕ com algum campo vetorial vertical \vec{X} sobre $\vec{J}^{\otimes}E$, conforme a equação (3.21). Primeiro, calculamos o lado esquerdo da equação (3.14), inserindo as equações (3.5), (3.7) e (3.30):

$$\Omega_\phi(X_F[\phi], \vec{X}(\phi)) = \int_\Sigma \phi^* \omega_{\mathcal{H}}(X_F[\phi], \vec{X}(\phi)) = \int_\Sigma \phi^* \omega_{\mathcal{H}}(\vec{X}_f(\phi) - T\phi(X_{f,M}), \vec{X}(\phi)).$$

Observemos agora que a integral

$$\int_\Sigma \phi^* \omega_{\mathcal{H}}(T\phi(X_{f,M}), \vec{X}(\phi)) = - \int_\Sigma i_{X_{f,M}}(\phi^*(i_{\vec{X}}\omega_{\mathcal{H}}))$$

se anula, conforme o Teorema 3.1, pelo fato de ϕ ser uma solução das equações de movimento. Portanto,

$$\Omega_\phi(X_F[\phi], \vec{X}(\phi)) = \int_\Sigma \phi^*(i_{\vec{X}}i_{\vec{X}_f}\omega_{\mathcal{H}}).$$

³A existência destas projeções é automaticamente garantida exceto no caso $N=1$; veja a Definição 1.7 e a discussão subsequente.

Por outro lado, segundo a Proposição 3.1, o lado direito da equação (3.14) vale

$$\begin{aligned} F'[\phi] \cdot \vec{X}(\phi) &= \int_{\Sigma} \phi^* \left(L_{\vec{X}}(\mathcal{H}^*f) \right) = \int_{\Sigma} \phi^* \left(di_{\vec{X}}(\mathcal{H}^*f) + i_{\vec{X}}d(\mathcal{H}^*f) \right) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \phi^* \left(i_{\vec{X}}(\mathcal{H}^*f) \right) + \int_{\Sigma} \phi^* \left(i_{\vec{X}}\mathcal{H}^*(i_{X_f}\omega) \right). \end{aligned}$$

O primeiro termo é zero, pois por hipótese, $\partial\Sigma = \emptyset$. e portanto, pela equação (1.170),

$$F'[\phi] \cdot \vec{X}(\phi) = \int_{\Sigma} \phi^* \left(i_{\vec{X}}i_{X_f}\omega_{\mathcal{H}} + i_{\vec{X}}\mathcal{H}^*(i_{X_f}\omega) \right).$$

Agora, o segundo termo é zero pois, em relação à projeção de $\vec{J}^{\otimes}E$ sobre M , o campo vetorial \vec{X}_g^V é vertical enquanto que considerando o pull-back da equação (1.171) com \mathcal{H} mostra que a n -forma $\mathcal{H}^*(i_{X_f}\omega)$ é horizontal. \square

De forma semelhante, podemos calcular explicitamente o colchete de Peierls-DeWitt entre dois funcionais associados a $(n-1)$ -formas hamiltonianas:

Teorema 3.3 *Dada uma hamiltoniana \mathcal{H} , sejam f e g $(n-1)$ -formas hamiltonianas sobre o espaço de multifase estendido $J^{\otimes}E$ tais que os campos hamiltonianos X_f associados a f e X_g associados a g sejam projetáveis, conforme a Definição 1.7; denotaremos as respectivas projeções sobre $\vec{J}^{\otimes}E$ por \vec{X}_f e \vec{X}_g e as respectivas projeções sobre M por $X_{f,M}$ e $X_{g,M}$.⁴ Por outro lado, seja Σ uma hipersuperfície tipo espaço de M sem bordo, e sejam F e G os funcionais sobre \mathcal{S} associados a Σ e às formas \mathcal{H}^*f e \mathcal{H}^*g , respectivamente, conforme a Definição 3.1, i.e.,*

$$F[\phi] = \int_{\Sigma} (\mathcal{H} \circ \phi)^* f \quad , \quad G[\phi] = \int_{\Sigma} (\mathcal{H} \circ \phi)^* g. \quad (3.31)$$

Então o colchete de Peierls-DeWitt entre F e G é o funcional sobre \mathcal{S} associado a Σ e à forma $\mathcal{H}^*\{f, g\}_{\mathcal{H}}$, i.e.,

$$\{F, G\}[\phi] = \int_{\Sigma} (\mathcal{H} \circ \phi)^* \{f, g\}_{\mathcal{H}}, \quad (3.32)$$

onde $\{f, g\}_{\mathcal{H}}$ é um colchete de Poisson modificado entre f e g :

$$\{f, g\}_{\mathcal{H}} = i_{X_g}i_{X_f}\omega - i_{X_g}i_{X_f^{\mathcal{H}}}\omega - i_{X_g^{\mathcal{H}}}i_{X_f}\omega \quad \text{modulo termos exatos.} \quad (3.33)$$

Explicitamente,

$$\{F, G\}[\phi] = \int_{\Sigma} \phi^* \left(i_{\vec{X}_g}i_{\vec{X}_f}\omega_{\mathcal{H}} \right). \quad (3.34)$$

⁴A existência destas projeções é automaticamente garantida exceto no caso $N=1$; veja a Definição 1.7 e a discussão subsequente.

DEMONSTRAÇÃO. Representando $\vec{X}_g(\phi) - T\phi(X_{g,M})$ como a composição de ϕ com algum campo vetorial vertical \vec{X}_g^V sobre $\vec{J}^\otimes E$, conforme a equação (3.21), i.e.,

$$\vec{X}_g^V(\phi) = \vec{X}_g(\phi) - T\phi(X_{g,M}),$$

e usando as equações (3.18) e (3.22), vemos que o lado esquerdo da expressão (3.32) é dado por

$$\begin{aligned} \{F, G\}[\phi] &= F'[\phi] \cdot X_G[\phi] = \int_{\Sigma} \phi^*(L_{\vec{X}_g^V}(\mathcal{H}^*f)) = \int_{\Sigma} \phi^*(di_{\vec{X}_g^V}(\mathcal{H}^*f) + i_{\vec{X}_g^V}d(\mathcal{H}^*f)) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \phi^*(i_{\vec{X}_g^V}(\mathcal{H}^*f)) + \int_{\Sigma} \phi^*(i_{\vec{X}_g^V}(\mathcal{H}^*(i_{X_f}\omega))) , \end{aligned}$$

O primeiro termo é zero pois por hipótese, $\partial\Sigma = \emptyset$, e portanto, pela equação (1.170),

$$\{F, G\}[\phi] = \int_{\Sigma} \phi^*(i_{\vec{X}_g^V}i_{\vec{X}_f}\omega_{\mathcal{H}} + i_{\vec{X}_g^V}\mathcal{H}^*(i_{X_f}\omega)) .$$

Agora, o segundo termo é zero pois, em relação à projeção de $\vec{J}^\otimes E$ sobre M , o campo vetorial \vec{X}_g^V é vertical enquanto que considerando o pull-back da equação (1.171) com \mathcal{H} mostra que a n -forma $\mathcal{H}^*(i_{X_f}\omega)$ é horizontal. Usando a relação $\vec{X}_g^V(\phi) = \vec{X}_g(\phi) - T\phi(X_{g,M})$, obtemos

$$\{F, G\}[\phi] = \int_{\Sigma} \phi^*(i_{\vec{X}_g}i_{\vec{X}_f}\omega_{\mathcal{H}}) - \int_{\Sigma} i_{X_{g,M}}(\phi^*(i_{\vec{X}_f}\omega_{\mathcal{H}})) .$$

Novamente, o segundo termo se anula, desta vez devido ao fato de ϕ ser uma solução das equações de movimento, conforme o Teorema 3.1. Assim, chegamos à equação (3.34). Finalmente, observamos que

$$i_{\vec{X}_g}i_{\vec{X}_f}\omega_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^*(i_{X_g}i_{X_f}\omega + i_{X_g}i_{X_f}\mathcal{H}\omega - i_{X_g^{\mathcal{H}}}i_{X_f}\omega) ,$$

já que o termo $i_{X_g^{\mathcal{H}}}i_{X_f}\omega$ se anula automaticamente. □

Resta, como tarefa para o futuro, determinar os termos exatos que faltam na equação (3.33) para garantir que este colchete modificado satisfaça a identidade de Jacobi, em analogia ao Teorema 1.7.

Referenciais não holônomos

A.1 Derivadas covariantes no fibrado vertical

No que segue, apresentaremos uma demonstração independente do Teorema 2.1, que por conveniência reproduzimos aqui:

Teorema A.1 *Dada uma conexão Γ_E em E sobre M e uma conexão linear parcial $\tilde{\Gamma}_{VE}^{VE}$ em VE sobre E ao longo de VE , existe uma única extensão de $\tilde{\Gamma}_{VE}^{VE}$ para uma conexão linear total $\tilde{\Gamma}_{VE}$ em VE sobre E cuja composição com Γ_E é a conexão vertical $\hat{\Gamma}_{VE}$ em VE sobre M induzida por Γ_E . Em termos de derivadas covariantes de seções X de VE , isto é, campos vetoriais verticais X sobre E , temos*

$$\nabla_i X^j = \partial_i X^j + \Gamma_{ir}^j X^r, \quad (\text{A.1})$$

e

$$\nabla_\mu X^j = \partial_\mu X^j - (\partial_i \Gamma_\mu^j + \Gamma_{ri}^j \Gamma_\mu^r) X^i, \quad (\text{A.2})$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla_{\Gamma(\partial_\mu)} X^j = \partial_\mu X^j + \Gamma_\mu^i \partial_i X^j - \partial_i \Gamma_\mu^j X^i. \quad (\text{A.3})$$

DEMONSTRAÇÃO. Para checar que estas expressões realmente definem uma derivada covariante de seções X de VE , faremos uma mudança de coordenadas, do antigo sistema de coordenadas locais $(x^\mu, q^i; \dot{q}^i)$ de VE para um novo sistema de coordenadas locais $(x'^\kappa, q'^k; \dot{q}'^k)$ conforme a equação (1.20), que implica

$$\dot{q}'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \dot{q}^i. \quad (\text{A.4})$$

Conforme a equação (A.21), os campos de coordenadas ∂_i sobre E se transformam de maneira covariante, enquanto que os campos de coordenadas ∂_μ sobre E não. No entanto, combinando as equações (A.19), (A.21) e (2.14), concluímos que os levantamentos horizontais dos campos de coordenadas ∂_μ sobre M para E , estes sim, se transformam de maneira covariante. Assim, temos

$$\partial'_k = \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \partial_i \quad , \quad \Gamma(\partial'_\kappa) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \Gamma(\partial_\mu) . \quad (\text{A.5})$$

A lei de transformação para as componentes de seções X de VE é dada pela equação (A.4), e a lei de transformação para as suas derivadas parciais pode ser calculada a partir desta e das equações (A.21):

$$\begin{aligned} \partial_i X^j &\longrightarrow \partial'_k X'^l = \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_i X^j + \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^j} X^j , \\ \partial_\mu X^j &\longrightarrow \partial'_\kappa X'^l = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_\mu X^j + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\mu \partial q^j} X^j \\ &\quad - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^r} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_i X^j - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^r} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^j} X^j . \end{aligned}$$

Portanto, a lei de transformação (A.26) mostra que as derivadas covariantes ao longo dos campos de coordenadas ∂_i sobre E , que aparecem na equação (A.1), se transformam de maneira covariante:

$$\begin{aligned} \nabla'_k X'^l &= \partial'_k X'^l + \Gamma'^l_{ks} X'^s \\ &= \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_i X^j + \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^j} X^j \\ &\quad + \left(\frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} \Gamma^j_{ir} - \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^r} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} \right) \left(\frac{\partial q'^s}{\partial q^t} X^t \right) \\ &= \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \nabla_i X^j . \end{aligned}$$

Por outro lado, a lei de transformação (A.21) mostra que as derivadas covariantes ao longo dos campos de coordenadas ∂_μ sobre E , que aparecem na equação (A.2), não se transformam de maneira covariante, o que não deve surpreender tendo em vista que os próprios campos ∂_μ sobre E não se transformam de maneira covariante. Covariância só pode ser estabelecida para as derivadas covariantes ao longo dos campos $\Gamma(\partial_\mu)$ sobre E obtidos a partir dos campos de coordenadas ∂_μ sobre M por levantamento horizontal, pois estes sim se transformam de

maneira covariante (veja a equação (A.5)). De fato, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Gamma(\partial'_\kappa)} X'^l &= \partial'_\kappa X'^l + \Gamma'^k_\kappa \partial'_\kappa X'^l - \partial'_\kappa \Gamma'^l_\kappa X'^k \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_\mu X^j + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\mu \partial q^j} X^j \\
&\quad - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^r} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_i X^j - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^r} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^j} X^j \\
&\quad + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \Gamma^i_\mu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial q^r}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_r X^j + \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^r \partial q^j} X^j \right) \\
&\quad - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \left(\frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_i \Gamma^j_\mu + \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^j} \Gamma^j_\mu + \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\mu \partial q^i} \right) \left(\frac{\partial q'^k}{\partial q^r} X^r \right) \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \nabla_{\Gamma(\partial_\mu)} X^j + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\mu \partial q^j} X^j - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^r} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_i X^j \\
&\quad - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^r} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^j} X^j + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^j} \Gamma^i_\mu X^j \\
&\quad + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_r X^j + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^r \partial q^j} X^j \\
&\quad - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \left(\frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^j} \Gamma^j_\mu + \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\mu \partial q^i} \right) X^i \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \nabla_{\Gamma(\partial_\mu)} X^j .
\end{aligned}$$

Isto implica na lei de transformação desejada:

$$\begin{aligned}
\nabla_i X^j &\longrightarrow \nabla_k X'^l = \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \nabla_i X^j , \\
\nabla_{\Gamma(\partial_\mu)} X^j &\longrightarrow \nabla_{\Gamma(\partial'_\kappa)} X'^l = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \nabla_{\Gamma(\partial_\mu)} X^j .
\end{aligned}$$

□

A.2 Referenciais não holônomos no fibrado dos cojatos

Teorema A.2 *Dadas uma conexão Γ_E em E sobre M , uma conexão linear parcial Γ_{VE}^{VE} em VE sobre E ao longo de VE e uma conexão linear Γ_M em M , os referenciais de Darboux associados a este conjunto de conexões se transformam de maneira covariante sob transformações de coordenadas locais adaptadas em $J^\circ E$, como especificado pelas equações (2.144) e (2.145).*

DEMONSTRAÇÃO. Restringiremo-nos a provar a lei de transformação (2.144) para os referenciais de Darboux no fibrado tangente de $J^\circ E$, definidos pelas equações (2.135)–(2.138), sendo que a definição dos referenciais de Darboux no fibrado cotangente de $J^\circ E$, dada pelas equações (2.139)–(2.142), e a lei de transformação (2.145) para estes é obtida por dualização. Começamos por reproduzir as equações (2.135)–(2.138):

$$e_0 = \frac{\partial}{\partial p}, \quad (\text{A.6})$$

$$e_\mu^i = \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial p}, \quad (\text{A.7})$$

$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{ij}^r p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} - (\partial_i \Gamma_\nu^r + \Gamma_{ij}^r \Gamma_\nu^j) p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p}, \quad (\text{A.8})$$

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^j \frac{\partial}{\partial q^j} - \left(\partial_j \Gamma_\mu^r p_r^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_j^\nu \right) \frac{\partial}{\partial p_j^\nu} \quad (\text{A.9})$$

$$- \left(\partial_\mu \Gamma_\nu^j p_j^\nu + \Gamma_\mu^i \partial_i \Gamma_\nu^r p_r^\nu - \Gamma_\nu^j \partial_j \Gamma_\mu^r p_r^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu \Gamma_\nu^j p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p \right) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Para mostrarmos que estas expressões realmente definem um referencial covariante, faremos uma mudança de coordenadas, do antigo sistema de coordenadas locais (x^μ, q^i, p_i^μ, p) de $J^\circ E$ para o novo sistema de coordenadas locais $(x'^\kappa, q'^k, p_k'^\kappa, p')$, de acordo com

$$p_k'^\kappa = p_k'^\kappa(x^\mu, q^i, p_i^\mu), \quad p' = p'(x^\mu, q^i, p_i^\mu, p),$$

onde

$$p_k'^\kappa = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\mu, \quad p' = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \left(p - \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\mu \right). \quad (\text{A.10})$$

A correspondente lei de transformação para o referencial pode ser determinado diferenciando a última equação, obtendo a lei de transformação para os diferenciais:

$$\begin{aligned} dp_k'^\kappa &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} \right) p_j^\nu dx^\mu + \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial q^j}{\partial q'^k} \right) p_j^\nu dq^i \\ &+ \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} dp_i^\mu, \end{aligned}$$

$$dp' = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \left(p - \frac{\partial q'^k}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} p_j^\nu \right) \right) dx^\mu - \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial q'^k}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} \right) p_j^\nu dq^i \\ - \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} dp_i^\mu + \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) dp .$$

Usando as relações

$$\partial_\alpha(A^{-1}) = -A^{-1} \partial_\alpha A A^{-1} ,$$

$$\partial_\alpha \det(A) = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1} \partial_\alpha A) ,$$

para funções a valores matriciais A das variáveis z^α , obtemos

$$dx'^\kappa = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} dx^\mu , \quad (\text{A.11})$$

$$dq'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} dq^i , \quad (\text{A.12})$$

$$dp_k'^\kappa = \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \left(\left(- \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} p_j^\nu + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} p_j^\nu \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^\mu \partial q^r} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^\nu \right) dx^\mu \right. \\ \left. - \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^r} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^\nu dq^i + \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} dp_i^\mu \right) , \quad (\text{A.13})$$

$$dp' = \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \left(\left(\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left(\frac{\partial q'^k}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} p_j^\nu - p \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} p_j^\nu + \frac{\partial q'^k}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^\mu \partial q^r} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^\nu \right) dx^\mu \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\nu \partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} p_j^\nu - \frac{\partial q'^k}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^r} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^\nu \right) dq^i \right. \\ \left. - \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} dp_i^\mu + dp \right) . \quad (\text{A.14})$$

Dualizando, obtemos o resultado

$$\frac{\partial}{\partial p'} = \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial p} , \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k'^\kappa} = \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial p} \right) , \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial q'^k} = \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^r} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^\mu \partial q^r} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p} , \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^\kappa} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial q^i} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} p_i^\mu - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\kappa} p_i^\nu \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\nu \partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} p_j^\mu - \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^r} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} p_j^\mu \right) \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \quad (\text{A.18}) \\ &+ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \left(\frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\nu - \frac{\partial q'^l}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^r}{\partial q'^l} \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\nu \partial q^r} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\nu \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\rho} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p_i^\nu + \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} p \right) \frac{\partial}{\partial p} . \end{aligned}$$

Para uma conexão em E , temos a lei de transformação

$$\Gamma_\mu^i \longrightarrow \Gamma_\kappa'^k = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \Gamma_\mu^i + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} , \quad (\text{A.19})$$

que, como notaremos para uso posterior, implica

$$p + \Gamma_\mu^i p_i^\mu \longrightarrow p' + \Gamma_\kappa'^k p_k'^\kappa = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) (p + \Gamma_\mu^i p_i^\mu) . \quad (\text{A.20})$$

Para calcular a lei de transformação para as suas derivadas, usamos que, localmente em E ,

$$dx'^\kappa = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} dx^\mu , \quad dq'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} dq^i$$

e dualizando

$$\frac{\partial}{\partial x'^\kappa} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial q^i} , \quad \frac{\partial}{\partial q'^k} = \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (\text{A.21})$$

obtemos assim as leis de transformações procuradas

$$\partial_j \Gamma_\mu^i \longrightarrow \partial'_l \Gamma_\kappa'^k , \quad \partial_\nu \Gamma_\mu^i \longrightarrow \partial'_\lambda \Gamma_\kappa'^k , \quad (\text{A.22})$$

onde

$$\partial'_l \Gamma_\kappa'^k = \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \Gamma_\mu^i + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \right)$$

e

$$\partial'_\lambda \Gamma'_\kappa{}^{ik} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial q^l}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \frac{\partial}{\partial q^j} \right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \Gamma_\mu^i + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \right)$$

ou explicitamente

$$\partial'_l \Gamma'_\kappa{}^{ik} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \left(\frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \partial_j \Gamma_\mu^i + \frac{\partial^2 q'^k}{\partial q^j \partial q^i} \Gamma_\mu^i + \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\mu \partial q^j} \right), \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \partial'_\lambda \Gamma'_\kappa{}^{ik} = & \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \partial_\nu \Gamma_\mu^i + \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\nu \partial q^i} \Gamma_\mu^i - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \Gamma_\rho^i \right. \\ & + \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\rho} \\ & \left. - \frac{\partial q^l}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \left(\frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \partial_j \Gamma_\mu^i + \frac{\partial^2 q'^k}{\partial q^j \partial q^i} \Gamma_\mu^i + \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\mu \partial q^j} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Finalmente, para uma conexão linear em M (isto é, no fibrado tangente TM de M)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho \longrightarrow \Gamma_{\kappa\lambda}^{\nu\sigma} = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda}, \quad (\text{A.25})$$

e para uma conexão linear no fibrado vertical VE de E

$$\Gamma_{ij}^r \longrightarrow \Gamma_{kl}^{s} = \frac{\partial q'^s}{\partial q^r} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} \Gamma_{ij}^r - \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l}. \quad (\text{A.26})$$

Isto implica que

$$\partial_j \Gamma_\mu^i + \Gamma_{jr}^i \Gamma_\mu^r \longrightarrow \partial'_l \Gamma'_\kappa{}^{ik} + \Gamma_{ls}^k \Gamma'_\kappa{}^{is}, \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\begin{aligned} & \partial'_l \Gamma'_\kappa{}^{ik} + \Gamma_{ls}^k \Gamma'_\kappa{}^{is} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \partial_j \Gamma_\mu^i + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^k}{\partial q^j \partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \Gamma_\mu^i + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\mu \partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \\ &+ \left(\frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} \Gamma_{jr}^i - \frac{\partial^2 q'^k}{\partial q^j \partial q^r} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} \right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^s}{\partial q^t} \Gamma_\mu^t + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^s}{\partial x^\mu} \right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \partial'_l \Gamma'_\kappa{}^{ik} + \Gamma_{ls}^k \Gamma'_\kappa{}^{is} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \left(\partial_j \Gamma_\mu^i + \Gamma_{jr}^i \Gamma_\mu^r \right) \\ &+ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q^j}{\partial q^l} \left(\frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} \frac{\partial q'^s}{\partial x^\mu} \Gamma_{jr}^i - \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} \frac{\partial q'^s}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 q'^k}{\partial q^j \partial q^r} + \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\mu \partial q^j} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Então

$$e_0 \longrightarrow e'_0, \quad e_\mu^i \longrightarrow e_\kappa'^k, \quad e_i \longrightarrow e'_k, \quad e_\mu \longrightarrow e'_\kappa \quad (\text{A.29})$$

onde

$$e'_0 = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) e_0. \quad (\text{A.30})$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} e_\kappa'^k &= \frac{\partial}{\partial p_k'^\kappa} - \Gamma_k'^\kappa \frac{\partial}{\partial p'} \\ &= \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial p} \right) \\ &\quad - \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \Gamma_\mu^i + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial p} \\ &= \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} \left(\frac{\partial}{\partial p_i^\mu} - \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial p} \right), \end{aligned}$$

assim

$$e_\kappa'^k = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial q^i} e_\mu^i. \quad (\text{A.31})$$

Para uso posterior, observemos as seguintes leis de transformações, que são facilmente derivadas das equações (A.11) e (A.31):

$$p_r^\nu e_\nu^j \longrightarrow p_s'^\lambda e_\lambda'^n = \frac{\partial q'^n}{\partial q^j} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} p_r^\nu e_\nu^j, \quad (\text{A.32})$$

$$p_j^\rho e_\nu^j \longrightarrow p_l'^\sigma e_\lambda'^n = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho} p_j^\rho e_\nu^j, \quad (\text{A.33})$$

$$p_j^\nu e_\nu^j \longrightarrow p_l'^\lambda e_\lambda'^n = p_j^\nu e_\nu^j. \quad (\text{A.34})$$

Agora podemos observar o comportamento do referencial por uma mudança de coordenadas com respeito as coordenadas q . Usamos as equações (A.6) e (A.7) para reescrevermo a equação (A.8) na forma

$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{ij}^r p_r^\nu e_\nu^j - \partial_i \Gamma_\nu^r p_r^\nu e_0, \quad (\text{A.35})$$

e usando as leis de transformações de coordenadas estabelecidas previamente para calcular

$$\begin{aligned}
e'_k &= \frac{\partial}{\partial q'^k} + \Gamma_{kl}^{s'} p_s'^{\lambda} e_{\lambda}' - \partial_k' \Gamma_{\lambda}^{s'} p_s'^{\lambda} e_0' \\
&= \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^r} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_i^{\mu}} + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^{\mu} \partial q^r} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^{\mu} \frac{\partial}{\partial p} \\
&\quad + \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} \left(\frac{\partial q'^s}{\partial q^r} \Gamma_{ij}^r - \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^j} \right) \frac{\partial q'^l}{\partial q^t} \frac{\partial q^u}{\partial q'^s} p_u^{\nu} e_{\nu}^t \\
&\quad - \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \left(\frac{\partial q'^s}{\partial q^r} \partial_i \Gamma_{\nu}^r + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^r} \Gamma_{\nu}^r + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^{\nu} \partial q^i} \right) \left(\frac{\partial q^t}{\partial q'^s} p_t^{\nu} \right) e_0 \\
&= \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{ij}^r p_r^{\nu} e_{\nu}^j - \partial_i \Gamma_{\nu}^r p_r^{\nu} e_0 \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^r} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_i^{\mu}} + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^{\mu} \partial q^r} \frac{\partial q^j}{\partial q'^s} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} p_j^{\mu} \frac{\partial}{\partial p} \\
&\quad - \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q^u}{\partial q'^s} p_u^{\nu} e_{\nu}^j - \left(\frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^i \partial q^r} \Gamma_{\nu}^r + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^{\nu} \partial q^i} \right) \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q^t}{\partial q'^s} p_t^{\nu} e_0,
\end{aligned}$$

que fornece

$$e'_k = \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} e_i. \quad (\text{A.36})$$

Finalmente, para checarmos as leis de transformações para o referencial com respeito as coordenadas x , usamos as equações (A.6), (A.7) e (A.8) para reescrevermos a equação (A.9) na forma

$$\begin{aligned}
e_{\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu}^j e_j - \left((\partial_j \Gamma_{\mu}^r + \Gamma_{ji}^r \Gamma_{\mu}^i) p_r^{\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} p_j^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} p_j^{\nu} \right) e_{\nu}^j \\
&\quad - \left(\partial_{\mu} \Gamma_{\nu}^j p_j^{\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} (p + \Gamma_{\nu}^j p_j^{\nu}) \right) e_0,
\end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

e usando as leis de transformações de coordenadas estabelecidas previamente calculamos

$$\begin{aligned}
e'_\kappa &= \frac{\partial}{\partial x'^\kappa} + \Gamma'_\kappa{}^l e'_l - \left((\partial'_l \Gamma'^s_\kappa + \Gamma'^s_{lk} \Gamma'^k_\kappa) p'^\lambda + \Gamma'^\lambda_{\kappa\sigma} p'^\sigma - \Gamma'^\sigma_{\kappa\sigma} p'^\lambda \right) e'_\lambda \\
&\quad - \left(\partial'_\kappa \Gamma'^l_\lambda p'^\lambda - \Gamma'^\sigma_{\kappa\sigma} (p' + \Gamma'^l_\lambda p'^\lambda) \right) e'_0 \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial q^i} \\
&\quad + \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} p^\mu_i - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\kappa} p^\nu_i \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\nu \partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q'^k} p^\mu_j - \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\nu} \frac{\partial q^r}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^r} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} p^\mu_j \right) \frac{\partial}{\partial p^\mu_i} \\
&\quad + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \left(\frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p^\nu_i - \frac{\partial q'^l}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^r}{\partial q'^l} \frac{\partial^2 q'^k}{\partial x^\nu \partial q^r} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p^\nu_i \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\rho} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} p^\nu_i + \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} p \right) \frac{\partial}{\partial p} \\
&\quad + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \Gamma^j_\mu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^l}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial q^i}{\partial q'^l} e_i \\
&\quad - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} \left(\frac{\partial q'^s}{\partial q^r} \left(\partial_j \Gamma^r_\mu + \Gamma^r_{ji} \Gamma^i_\mu \right) + \frac{\partial q'^s}{\partial q^r} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \Gamma^r_{ji} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^j \partial q^i} + \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^\mu \partial q^j} \right) \frac{\partial q'^l}{\partial q^i} \frac{\partial q^u}{\partial q'^s} p^u_\nu e^t_\nu \\
&\quad - \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \right) \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} p^\delta_j e^j_\beta \\
&\quad + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \left(\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \right) (p^\nu_j e^j_\beta + (p + \Gamma^j_\nu p^\nu_j) e_0) \\
&\quad - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \left(\frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \tilde{\partial}_\mu \Gamma^j_\nu + \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\mu \partial q^j} \Gamma^j_\nu - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \Gamma^j_\rho \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial q'^l}{\partial x^\rho} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \left(\frac{\partial q'^l}{\partial q^j} \partial_i \Gamma^j_\nu + \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^j} \Gamma^j_\nu + \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\nu \partial q^i} \right) \right) \\
&\quad \times \frac{\partial q^t}{\partial q'^l} p^\nu_i e_0.
\end{aligned}$$

De acordo com a equação (A.35), os termos sublinhados se cancelam, e após renomear os índices em termos originados da equação (A.18), temos que

$$\begin{aligned}
e'_\kappa = & \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_\mu^j e_j - \left((\partial_j \Gamma_\mu^r + \Gamma_{ji}^r \Gamma_\mu^i) p_r^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu p_j^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\rho p_j^\nu \right) e_j^j \right. \\
& \left. - \left(\partial_\mu \Gamma_\nu^j p_j^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\rho (p + \Gamma_\nu^j p_j^\nu) \right) e_0 \right] \\
& + \underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} p_j^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu}}_1 - \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} p_j^\rho \frac{\partial}{\partial p_j^\nu}}_2 \\
& + \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^\mu \partial q^j} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu}}_3 - \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^j \partial q^i} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} p_r^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu}}_4 \\
& + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} p_j^\nu}_5 - \underbrace{\frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\nu \partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} p_j^\nu}_6 \right. \\
& \left. - \underbrace{\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial q'^l}{\partial x^\rho} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} p_j^\nu}_7 + \underbrace{\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} p}_8 \right) \frac{\partial}{\partial p} \\
& + \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^j \partial q^i} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} p_r^\nu e_\nu^j}_4 - \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial x^\mu \partial q^j} \frac{\partial q^r}{\partial q'^s} p_r^\nu e_\nu^j}_3 \\
& + \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} p_j^\rho e_\nu^j}_2 - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left(\underbrace{p_j^\nu e_\nu^j + \Gamma_\nu^j p_j^\nu e_0}_1 + \underbrace{p e_0}_8 \right) \\
& - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial q^j}{\partial q'^l} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\mu \partial q^i} \Gamma_\nu^i}_3 - \underbrace{\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial q'^l}{\partial q^i} \Gamma_\rho^i}_2 \right. \\
& \left. + \underbrace{\frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\nu \partial x^\mu}}_5 - \underbrace{\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial q'^l}{\partial x^\rho}}_7 \right. \\
& \left. - \underbrace{\frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial q^i \partial q^r} \Gamma_\nu^r}_4 - \underbrace{\frac{\partial q'^k}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^l}{\partial x^\nu \partial q^i}}_6 \right) p_j^\nu e_0.
\end{aligned}$$

Todos os termos não homogêneos se cancelam, e ficamos com

$$e'_\kappa = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\kappa} e_\mu . \quad (\text{A.38})$$

□

Bibliografia

- [1] R. ABRAHAM & J.E. MARSDEN: *Foundations of Mechanics*, 2nd edition, Benjamin/Cummings, Reading 1978.
- [2] V. ARNOLD: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd edition, Springer, Berlin 1989.
- [3] J.F. CARIÑENA, M. CRAMPIN & L.A. IBORT: *On the Multisymplectic Formalism for First Order Field Theories*, *Diff. Geom. Appl.* 1 (1991) 345-374.
- [4] C. CRNKOVIĆ & E. WITTEN: *Covariant Description of Canonical Formalism in Geometrical Theories*, in: "Three Hundred Years of Gravitation", pp. 676-684, eds: W. Israel & S. Hawking, Cambridge University Press, Cambridge 1987.
- [5] C. CRNKOVIĆ: *Symplectic Geometry of Covariant Phase Space*, *Class. Quantum Grav.* 5 (1988) 1557-1575.
- [6] TH. DE DONDER: *Théorie Invariante du Calcul des Variations*, Gauthier-Villars, Paris 1935.
- [7] B. DEWITT: *Invariant Commutators for the Quantized Gravitational Field*, *Phys. Rev. Lett.* 4 (1960) 317-320.
- [8] B. DEWITT: *Dynamical Theory of Groups and Fields*, in: "Relativity, Groups and Topology" (1963 Les Houches Lectures), pp. 585-820, eds: B. DeWitt & C. DeWitt, Gordon and Breach, New York 1964.
- [9] B. DEWITT: *The Spacetime Approach to Quantum Field Theory*, in: "Relativity, Groups and Topology II" (1983 Les Houches Lectures), pp. 382-738, eds: B. DeWitt & R. Stora, Elsevier, Amsterdam 1984.

- [10] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA: *Geometry of Multisymplectic Hamiltonian First-Order Field Theories*, J. Math. Phys. **41** (2000) 7402-7444, dg-ga/0004005.
- [11] M. FORGER & H. RÖMER: *The Poisson Bracket on Multisymplectic Phase Space*, Rep. Math. Phys. **48** (2001) 211-218, math-ph/0009037.
- [12] M. FORGER, C. PAUFLER & H. RÖMER: *The Poisson Bracket for Poisson Forms in Multisymplectic Field Theory*, Rev. Math. Phys. **15** (2003) 705-743, math-ph/0202043.
- [13] M. FORGER, C. PAUFLER & H. RÖMER: *Hamiltonian Multivector Fields and Poisson Forms in Multisymplectic Field Theory*, submetido para publicação, math-ph/0407057.
- [14] M. FORGER & S.V. ROMERO: *Covariant Poisson Brackets in Geometric Field Theory*, aceito para publicação em Commun. Math. Phys. math-ph/0408008.
- [15] H. GOLDSCHMIDT AND S. STERNBERG: *The Hamilton-Cartan Formalism in the Calculus of Variations*, Ann. Inst. Fourier **23** (1973) 203-267.
- [16] M. J. GOTAY: *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations. I: Covariant Hamiltonian formalism*, in: "Mechanics, Analysis and Geometry: 200 years after Lagrange", pp. 203-235, eds: M. Francaviglia & D.D. Holm, North-Holland, Amsterdam 1991.
- [17] M.J. GOTAY, J. ISENBERG & J.E. MARSDEN: *Momentum Maps and Classical Relativistic Fields I: Covariant Field Theory*, physics/9801019.
- [18] V. GUILLEMIN AND S. STERNBERG: *Geometric Asymptotics*, AMS, Providence 1977.
- [19] W.H. GREUB, S. HALPERIN & R. VANSTONE: *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol. 2, Academic Press, New York 1973.
- [20] I.V. KANATCHIKOV: *Canonical Structure of Classical Field Theory in the Polymomentum Phase Space*, Rep. Math. Phys. **41** (1998) 49-90, hep-th/9709229.
- [21] J. KIJOWSKI: *A Finite-Dimensional Canonical Formalism in the Classical Field Theory*, Commun. Math. Phys. **30** (1973) 99-128; *Multiphase Spaces and Gauge in the Calculus of Variations*, Bull. Acad. Sc. Polon. **22** (1974) 1219-1225.
- [22] S. KOBAYASHI & K. NOMIZU: *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Interscience, New York 1963.

- [23] J. KIJOWSKI & W. SZCZYRBA: *Multisymplectic Manifolds and the Geometrical Construction of the Poisson Brackets in the Classical Field Theory*, in: "Géométrie Symplectique et Physique Mathématique", pp. 347-379, ed.: J.-M. Souriau, C.N.R.S., Paris 1975.
- [24] J. KIJOWSKI & W. SZCZYRBA: *A Canonical Structure for Classical Field Theories*, Commun. Math. Phys. **46** (1976) 183-206.
- [25] J. KIJOWSKI & W. TULCZYJEW: *A Symplectic Framework for Field Theories*, Lecture Notes in Physics, Vol. 107, Springer, Berlin 1979.
- [26] I. KOLÁŘ, P.W. MICHOR & J. SLOVÁK: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer, Berlin 1993.
- [27] S. LANG: *Differential Manifolds*, Addison-Wesley, Reading 1972.
- [28] L. MANGIAROTTI, G. SARDANASHVILY: *Connections in Classical and Quantum field Theory*, World Scientific, Singapore 2000.
- [29] G. MARTIN: *A Darboux Theorem for Multisymplectic Manifolds*, Lett. Math. Phys. **16** (1988) 133-138.
- [30] G. MARTIN: *Dynamical Structures for k -Vector Fields*, Int. J. Theor. Phys. **41** (1988) 571-585.
- [31] M. MODUGNO & A.M. VIANAGRODOV: *Some Variations on the Notion of Connection*. Annali di Matematica Pura ed Applicata (IV) , **167** (1984) 33-71.
- [32] R.E. PEIERLS: *The Commutation Laws of Relativistic Field Theory*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **214** (1952) 143-157.
- [33] C. PAUFLER, H. RÖMER: *Geometry of Hamiltonian n -vectors in Multisymplectic Field Theory*, J. Geom. Phys. **44** (2002) 52-69, math-ph/0102008.
- [34] S.V. ROMERO: *Colchete de Poisson Covariante na Teoria Geométrica dos Campos*, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Junho de 2001.
- [35] D. SAUNDERS: *The Geometry of Jet Bundles*, Springer, Berlin 1993.
- [36] B. REINHART: *Differential Geometry and Foliations*, Springer, Berlin 1983.
- [37] W.M. TULCZYJEW: *The Graded Lie Algebra of Multivector Fields and the Generalized Lie Derivative of Forms*, Bull. Acad. Pol. Sci. SMAP **22** (1974) 937-942.

- [38] R.M. WALD: *General Relativity*, Chicago University Press, Chicago 1984.
- [39] H. WEYL: *Geodesic Fields in the Calculus of Variations for Multiple Integrals*, Ann. Math. 36 (1935) 607-629.
- [40] N.M.J. WOODHOUSE: *Geometric Quantization*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford 1992.
- [41] G. ZUCKERMAN: *Action Principles and Global Geometry*, in: "Mathematical Aspects of String Theory", pp. 259-288, ed.: S.-T. Yau, World Scientific, Singapore 1987.