

**Estabilidade do movimento
equatorial de partículas
em magnetosferas planetárias**

Maité Kulesza

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo

– Durante o desenvolvimento deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do CNPq –

— São Paulo, 23 de Fevereiro de 2005 —

**Estabilidade do movimento
equatorial de partículas
em magnetosferas planetárias**

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e
defendida por Maité Kulesza
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 23 de fevereiro de 2005.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (Orientador) - IME-USP
 - Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão - IME-USP
 - Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro - UFMG
 - Prof. Dr. Sylvio Ferraz Mello - IAG-USP
 - Profa. Dra. Tatiana A. Michtchenko - IAG-USP
-

*O segredo é não correr atrás das borboletas...
É cuidar do jardim para que elas venham até você.*

Mário Quintana

Às três pessoas que mais desejaram esta tese:
Nandinho, Painho e Mainha.

Agradecimentos

Esta tese foi escrita não só com muito trabalho mas principalmente com muito “açúcar e afeto”. Este é o motivo maior de “Agradecimentos” tão longos...

Ao meu orientador Clodoaldo Grotta Ragazzo por ter me recebido e aceitado como aluna; pelo interessante problema proposto; pela excelente orientação, sempre me estimulando a seguir em frente e; por ter me permitido viver uma vida fora do mundo acadêmico, inclusive me dando a oportunidade de passar um ano fora acompanhando meu marido.

Ao meu amigo e professor José Claudio Vidal não só pelo incentivo mas pelo empenho para que eu recomeçasse em São Paulo.

Ao meu orientador de mestrado Hildeberto Eulálio Cabral por ter começado toda minha história acadêmica.

Ao meu amigo Pedro Antonio Santoro Salomão por toda a ajuda nas disciplinas que fizemos juntos e na minha iniciação com programação numérica, pelas sugestões na versão final da tese e pela amizade solícita.

À banca examinadora, professores Mário Jorge Dias Carneiro, Sylvio Ferraz Mello e Tatiana A. Michtchenko, pelas observações e sugestões na defesa da tese.

Aos meus professores de graduação e mestrado pela minha primeira formação matemática.

Aos professores do MAP e do MAT por toda a atenção e torcida e por me receberem em um ambiente acadêmico cordial. Em especial, aos professores Elói Medina, Sérgio Muniz Oliva, José Antonio Verderesi, Roseli Fernandez, Albert Meads Fisher e Eduardo Colli, por terem me inserido em uma sala de aula onde existe um interesse real para que o aluno aprenda e cresça.

Ao meu marido Nandinho por todo seu amor, carinho, paixão, amizade, companheirismo, força, compreensão e por muitas vezes abdicar dele mesmo para que eu pudesse chegar ao fim da tese.

Aos meus Painho e Mainha por todo amor e carinho mas principalmente por

representarem tudo de mais sólido que existe em mim.

Aos meus manos, Yuri, Raoni e Uirá, por hoje cuidarem de mim como eu um dia cuidei deles e por serem o maior tesouro que eu possuo.

À minha Tia Irene por ser minha segunda mãe e me acolher no seu aconchegante lar; aos meus Tios Lica e Sérgio, e meus primos Chayenne e Wallace, por estarem presentes em cada momento da minha vida.

À minha família Kulesza, pelos “chás” e almoços onde eu ia buscar energia e alegria para continuar em frente. Em especial ao meu Avô Alexandre (*in memoriam*) que sempre esteve e estará comigo, lá e cá.

Aos meus padrinhos, Lourdinha e Mário, pela torcida mesmo à distância. E a minha “madrinha torta” Sílvia por todas as palavras cheias de luz e vida que eu, desde criança, adoro ouvir.

À minha sogra Nuca pelas orações constantes.

Às minhas cunhadas, Roberta, Amanda e Michelle, pela amizade e carinho.

Aos meus sobrinhos e afilhados, Vlad, Luíza, Marion, Vinícius, Rodrigo e Yasmin por encherem minha vida de ternura infantil, mesmo aqueles que eu ainda não tenha podido conhecer e/ou até batizar.

À minha amiga “guruá” Alice por ter criado um fio condutor em 1998, mesmo que a gente não soubesse, que me trouxe à Sampa em 2000 e por ter andando de braços dados comigo em todo o meu caminho de crescimento.

À minha amiga Fer por toda sua ternura e dedicação comigo, desde o curso de Verão até agora.

Aos meus amigos em Jampa: Alvinho, pela infância maravilhosa que tivemos juntos; Elias, Monik e Josué, Hellena, Stênio, Valdneide e Carlos, pelos tempos de graduação e depois por me fazerem sentir em casa a cada volta à “terrinha” e; Deri e Marcos, Erick, Iragildo, Jefferson, Malu e Galego, Micheline e Antonio, Sinhá e Romeu, pelos momentos de alegria que tivemos em família.

Aos meus amigos em Recife: Aninha, Celinho e Ana Tereza, Claudinha, Katinha, Kátia Evangelista, Leleka, Martinha, Mirele e Tony, Stela, Tâninha, Tekinha, Vivi,

por terem vivido comigo meus melhores e piores momentos acadêmicos mas também terem compartilhado comigo momentos dos quais sinto imensas saudades. À nossa inocência de querer humanizar o DMAT.

Aos meus amigos que reencontrei em Sampa: Cidoca, Rita e Sales, pelos nossos encontros fervilhantes, cheios de muita regionalidade.

Aos meus amigos em Sampa: Aldo, pela sua amizade sincera e companheira; Viviana e Hector, por compartilharem conosco a “vizinhança” e nos fazer sentir como se estivéssemos com “irmãos” por perto; Fabinho, Jair, Olga, Rudimar, Said e Santos, por me salvarem inúmeras vezes nas “ET’s”, tendo uma infinita paciência com esta “analfabeta em computação” e também pela amizade e carinho todos os dias; Ariane, Bárbara e Gilberto, Caputi, Carlos Henrique, Cecilia e Pablo, Claudia e Juan, Diane, Débora e Luis Carlos(Charlie Brown), Delhi, Domingo, Elier, Fernando, Glaucio, Irene e Zé, Leandro, Liane e Daniel, Lu e Suzy, Lucia, Major, Maria do Carmo e Heitor, Mariana, Mário, Michel, Milena, Nelson, Palmira, Paola, Pinho, Raquel, Raul, Ricardinho, Rita e Osnel, Robson, Rodrigo, Ronaldo, Sabrina e Daniel, Salvador, Samuca, Sandrinha e Cristian, Sílvia, Sônia e Washington, Suzana, Tatiane, Valquíria, Verinha, Walter pelos nossos encontros no IME, e fora dele, tão leves e calorosos que eu já morro de saudades; minha mais nova amiga Marcela, pelo exemplo de força e vida que é pra mim e; galera da sala 141: Aldemir, Anderson, Andréia, Caio, Fernanda, Gladys, Hilde, Lourdes, Márcio, Neusa, Patrícia, Wellington por terem aguentado a minha “aperrição” diária.

Aos meus amigos do Cepê: minha “personal teacher” Sílvia, Camila, Paki, Yasuko e “de quebra”, o Ferreira, pelo exercício diário da amizade.

Aos meus amigos caminhantes: Elô, Nelci, Sotello, Massa, Monica e Raúl, Nacho pelos “caminhos” que cruzamos e que mudaram minha vida.

Aos meus amigos em Portugal: Alessia, Ana e Bruno, Bel e Gildemarks, Carlos, Edison, Ju e Marcus, Marçal, Marília, Marta, Miriam, Nayara e Dáger pelos nossos encontros regados com vinho português, queijo, pão e algumas vezes um bacalhauzinho.

Às minhas professoras de Origami: Alice, minha “Mestra”, por me mostrar que origami é muito mais do que dobrar um papel e, Mari pelo prazer do convívio.

Aos meus amigos do Origami: Amália, Cáu, Danilo, Déa, Fátima, Sandra, Sol, principalmente ao mestre Fausto, pela força e amizade na reta final.

À todos os funcionários do IME: da segurança, da limpeza, da copa, das secretarias, do setor financeiro, pelo “Bom Dia” que me trazia alegria e conforto. Em especial a Dona Lucia, Rose, da secretaria do MAP e Alessandra, Feijão, Francisca, Patrícia, Rose, da CPG pela dedicação em atender a todos os meus pedidos.

Ao CNPq e ao meu marido pelo apoio financeiro.

Amigos

Tenho amigos que não sabem o quanto são meus amigos.

Não percebem o amor que lhes devoto e a absoluta necessidade que tenho deles.

A amizade é um sentimento mais nobre do que o amor.

Eis que permite que o objeto dela se divida em outros afetos, enquanto o amor tem intrínseco o ciúme, que não admite a rivalidade.

E eu poderia suportar, embora não sem dor, que tivessem morrido todos os meus amores, mas enlouqueceria se morressem todos os meus amigos!

Até mesmo aqueles que não percebem o quanto são meus amigos e o quanto minha vida depende de suas existências ...

A alguns deles não procuro, basta-me saber que eles existem.

Esta mera condição me encoraja a seguir em frente pela vida.

Mas, porque não os procuro com assiduidade, não posso lhes dizer o quanto gosto deles.

Eles não iriam acreditar.

Muitos deles estão lendo esta crônica e não sabem que estão incluídos na sagrada relação de meus amigos.

Mas é delicioso que eu saiba e sinta que os adoro, embora não declare e não os procure.

E às vezes, quando os procuro, noto que eles não tem noção de como me são necessários.

De como são indispensáveis ao meu equilíbrio vital, porque eles fazem parte do mundo que eu, trêmulamente construí, e se tornaram alicerces do meu encanto pela vida.

Se um deles morrer, eu ficarei torto para um lado.

Se todos eles morrerem, eu desabo!

Por isso é que, sem que eles saibam, eu rezo pela vida deles.

E me envergonho, porque essa minha prece é, em síntese, dirigida ao meu bem estar.

Ela é, talvez, fruto do meu egoísmo.

Por vezes, mergulho em pensamentos sobre alguns deles.

Quando viajo e fico diante de lugares maravilhosos, cai-me alguma lágrima por não estarem junto de mim, compartilhando daquele prazer ...

Se alguma coisa me consome e me envelhece é que a roda furiosa da vida não me permite ter sempre ao meu lado, morando comigo, andando comigo, falando comigo, vivendo comigo, todos os meus amigos, e, principalmente os que só desconfiam ou talvez nunca vão saber que são meus amigos!

A gente não faz amigos, reconhece-os.”

Vinícius de Moraes

Resumo

Sob hipóteses físicas simplificadoras, apresenta-se uma formulação das equações de movimento de uma partícula carregada em uma típica magnetosfera planetária, onde todas as constantes físicas do planeta e da partícula se resumem em dois parâmetros: L e Λ . A partir de tal formulação, é realizado um estudo exaustivo da dinâmica restrita ao plano equatorial, em função de vários parâmetros do problema. Em seguida é feita uma análise da estabilidade dos equilíbrios no plano equatorial com a respeito a perturbações fora do mesmo.

As regiões de Hill para o problema são obtidas em função dos parâmetros do sistema. A análise completa das regiões de Hill é uma das maiores contribuições desta tese.

No estudo da dinâmica restrita ao plano equatorial encontram-se certos laços homoclínicos. A dinâmica próxima a tais laços é estudada usando uma certa aproximação da aplicação de Poincaré. Através do estudo desta aplicação é possível determinar a estabilidade dos laços homoclínicos.

Abstract

A simple physical model for the motion of a charged particle in a typical planetary magnetosphere is studied. The problem is scaled in such a way that the equations of motion depend only on two parameters: L and Λ . Then the dynamics on the equatorial plane and the stability of the equilibria with respect to out of plane perturbations are studied.

The Hill's regions of the problem are fully studied. This is one of the main contributions of this thesis.

Some saddle-center loops are found on the equatorial plane. In the last part of the thesis the question of stability of these loops is addressed using Poincaré's first return maps.

Índice

Introdução	5
1 Equações de Movimento	9
1.1 Equações de Movimento	9
1.2 Equações de Movimento no Plano Equatorial e Equilíbrios Relativos .	12
1.3 Classificação dos Equilíbrios Relativos	18
2 Regiões de Hill	23
2.1 Diagrama de Bifurcação das Regiões de Hill	23
2.2 Comportamento da Função Potencial U na Origem e no Infinito . . .	24
2.3 Equilíbrios do Plano Equatorial	29
2.4 Equilíbrios Fora do Plano Equatorial	43
3 Dinâmica Próxima às Órbitas Homoclínicas ao Sela-Centro	67
3.1 Aplicação de Poincaré e sua Aproximação Discreta	67
3.2 O Invariante α e sua Interpretação Geométrica	70
3.3 Cálculo Aproximado do Invariante α	72
3.4 Estabilidade Orbital dos Laços Sela-Centro	74

3.5	Atratores para a Aplicação Discreta no Toro	77
A	Dados Planetários de Júpiter e Saturno	83
B	Programas numéricos	89
	Referências Bibliográficas	125

Introdução

Desde que o sistema dos anéis de Júpiter foi descoberto em 1979 pela nave espacial Voyager 1 (Smith et al. (1979), Owen et al. (1979)) revelou-se um crescente interesse pelos anéis ditos etéreos. Tais anéis têm duas características que os tornam tão diferentes dos outros, são elas: a dinâmica de cada uma de suas partículas é mais importante para a sua forma do que os efeitos do conjunto delas, uma vez que a densidade da partícula é baixa, e a maioria das partículas dos anéis tem uma vida limitada (Burns et al. (1984)).

A teoria desenvolvida nesta tese possui aplicações nos estudos de tais anéis etéreos. Aqui, Júpiter será escolhido como modelo uma vez que, ao contrário de Saturno, possui exclusivamente anéis etéreos. Além dos anéis etéreos, como por exemplo o anel F, Saturno possui também anéis com partículas grandes, da ordem de centímetros ou metros, aos quais os resultados aqui são irrelevantes. No entanto, cabe ressaltar que, do ponto de vista da hipótese de que o eixo magnético do planeta está alinhado ao seu eixo de rotação suposta a seguir, Saturno se encaixa melhor ao modelo proposto do que Júpiter.

Os anéis de Júpiter são bem uniformes e têm três componentes: o halo interno, o anel principal e o anel “gossamer” exterior que possui apenas 10^{-6} por cento de massa em relação aos outros dois anéis (Burns et al. (1984)). Devido ao curto período de vida das partículas, os anéis têm de ser permanentemente realimentados. Por exemplo, provavelmente a principal fonte de reabastecimento de grãos do anel principal é o satélite Andrastea (Burns et al. (1999)). No apêndice A podem ser encontradas as constantes físicas relacionadas a Júpiter e Saturno, inclusive comparadas com as da

Terra.

A maioria das partículas nos anéis de Júpiter possuem diâmetro que vai de 0.1 a $100\mu m$ (Horányi, Cravens (1996)). Devido a um fenômeno eletromagnético explicado em Consolmagno (1983) e Burns et al. (1999) tais partículas adquirem uma carga elétrica e por causa de tal carregamento elas interagem com o campo magnético de Júpiter. Assim, como o da Terra, o campo magnético de Júpiter é aproximadamente o campo de um dipolo, cujo eixo está inclinado com relação ao eixo do planeta em aproximadamente 10 graus (Consolmagno (1983)). Nesta tese, o eixo magnético e o eixo de rotação do planeta serão considerados alinhados, ou seja, a declinação magnética será desprezada. É importante ressaltar que no caso de Saturno a declinação magnética é menor que 1 grau. Ou seja, para Saturno a hipótese de axisimetria é verificada com acurância. Tal hipótese, natural em uma primeira abordagem facilita muito o problema matematicamente. Com isso, o número de graus de liberdade para o movimento da partícula pode ser reduzido de três para dois usando-se a simetria das equações de movimento com relação ao eixo de rotação do planeta. Uma discussão detalhada acerca da validade do modelo físico aqui utilizado pode ser encontrada em Consolmagno (1983), Burns et al. (1984), Schaffer, Burns (1994) e Krivov et al. (2002).

Neste trabalho, os resultados matemáticos obtidos não serão confrontados com os dados observacionais (encontrados, por exemplo, em Ockert-Bell et al. (1999)), a maioria dos quais obtidos pela sonda Galileo, que recentemente visitou o planeta. Tanto um tratamento de declinação magnética quanto uma confrontação dos resultados com os dados observacionais serão objeto de um futuro estudo.

O principal objetivo deste trabalho é o estudo da estabilidade do movimento no plano equatorial das partículas nos anéis de Júpiter e das regiões de Hill da Hamiltoniana do sistema. A princípio o sistema possui muitos parâmetros, que após um devido reescalamamento de variáveis são reduzidos a dois: os parâmetros L e Λ , onde L é o momento angular e Λ é o parâmetro que engloba todas as constantes físicas do problema. A dinâmica no plano equatorial é então exaustivamente estudada em função de (L, Λ) e da energia da órbita. Este estudo é motivado pelo fato de que a maior parte dos grãos de poeira encontra-se no plano equatorial do planeta (Schaffer, Burns (1994)). A seguir, apresenta-se um pequeno resumo da tese.

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro deles, descreve-se as várias formulações das equações de movimento para, em seguida, escrevê-las em termos dos parâmetros L e Λ . De fato, muito da física do problema está contida na definição destes parâmetros adimensionais. Aborda-se, então, o problema no plano equatorial, obtendo-se os equilíbrios e a primeira divisão do plano (L, Λ) em termos dos tipos de funções potenciais possíveis. Linearizando o sistema de equações em torno de tais equilíbrios, pôde-se classificá-los quanto à estabilidade nas direções ρ e z e obter mais uma divisão do plano (L, Λ) .

As regiões de Hill, que são regiões do espaço de configurações acessíveis ao movimento, são obtidas no segundo capítulo. Primeiramente, uma análise cuidadosa teve de ser feita próxima à “origem”, que é uma singularidade do potencial gravitacional e magnético. A seguir, obtêm-se tais regiões para o caso em que todos pontos críticos do potencial estão no plano equatorial. Finalmente, obtêm-se as regiões de Hill em uma região do espaço (L, Λ) na qual existem equilíbrios fora do plano equatorial. Deve-se mencionar que um estudo parcial de zonas de Hill já foi feito por Howard et al. (1999), Howard et al. (2000) e Dullin et al. (2002). Para alguns parâmetros fisicamente relevantes do problema tais autores exibiram as zonas de Hill. Uma contribuição principal dada nesta tese foi o estudo completo das zonas de Hill do problema para todos os valores dos parâmetros.

O terceiro capítulo refere-se ao estudo da dinâmica próxima a um tipo especial de órbita, o chamado laço sela-centro. Trata-se de uma órbita homoclínica (ou bi-assintótica) a um equilíbrio do tipo sela-centro (ou seja, associado a um par de autovalores reais $\pm\nu$ e um par de autovalores imaginários puros $\pm\omega i$). Os laços sela-centro contidos no plano equatorial estão sempre associados a equilíbrios do tipo sela-centro cujo autoespaço do tipo sela está também contido no plano equatorial. A parte do tipo centro é transversal ao plano equatorial. O estudo da dinâmica próxima ao sela-centro é feito através de uma certa aproximação a uma conveniente aplicação de Poincaré, definida sobre uma seção de Poincaré transversal ao laço. Tal aplicação possui dois invariantes γ e α , aos quais está associada a dinâmica do laço. Um deles, o invariante γ , é facilmente obtido, uma vez que é dado por $\sqrt{|\omega/\nu|}$. O invariante α está relacionado à linearização do fluxo na órbita homoclínica. Este foi aqui calculado numericamente. Também neste capítulo faz-se uma breve descrição

de alguns resultados obtidos por Grotta Ragazzo (Grotta Ragazzo (1997c)) acerca da estabilidade orbital do laço sela-centro. Um deles é um critério numérico que permite extrair informação da estabilidade a partir dos valores de γ e α . Usando-se tal critério e o cálculo numérico de α , foi possível encontrar valores de Λ e L para os quais o sistema admite tanto laços sela-centro estáveis quanto instáveis. Quando o laço é instável, foi obtido por Addas Zanata e Grotta Ragazzo (Addas Zanata, Grotta Ragazzo (2002)) um resultado ligado à topologia das órbitas que se afastam do laço sela-centro. Tal resultado é brevemente descrito e também é verificado numérica e explicitamente para o problema estudado.

Equações de Movimento

Na primeira seção deste capítulo são apresentadas as equações de movimento de uma partícula nos anéis de Júpiter nas suas formas Newtoniana e Hamiltoniana. Após uma transformação canônica de coordenadas e uma reescala do tempo e da posição, tais equações já na forma Hamiltoniana podem ser reescritas de modo a dependerem de apenas dois parâmetros. O estudo de tais equações no plano equatorial é feito na segunda seção, onde também é dado um gráfico de bifurcação dos tipos de funções potenciais no plano equatorial. Na última seção, obtém-se uma classificação dos tipos de equilíbrios relativos possíveis no plano equatorial.

1.1 Equações de Movimento

Considera-se uma partícula de massa m com carga Q sob um campo gravitacional de uma esfera de massa M e um campo magnético de um dipolo girante, localizado no centro da esfera. Supõe-se que o eixo do dipolo, cujo momento magnético é $\mu \mathbf{e}_z$, está alinhado com a direção da velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$. Desta forma, a equação de movimento da partícula em um sistema inercial é escrita, no sistema de unidades CGS, como (Mendis et al. (1982)):

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \frac{Q}{c}\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}(\mathbf{q}) - \frac{Q}{c}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{B}(\mathbf{q}) - MmG \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3}, \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, c é a velocidade da luz, G é a constante da gravitação universal, $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \times \mathbf{A}(\mathbf{q})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \frac{\mu \mathbf{e}_z \times \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3}$.

A Lagrangiana do sistema é dada por:

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 + \frac{Q}{c} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \frac{Q}{c} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) + \frac{MmG}{|\mathbf{q}|} \quad (1.2)$$

segue que o momento associado à \mathbf{L} é dado por:

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathbf{L} = m\dot{\mathbf{q}} + \frac{Q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{q}). \quad (1.3)$$

Logo, a Hamiltoniana associada ao sistema é escrita como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{1}{2m} \left| \mathbf{p} - \frac{Q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \right|^2 + \frac{Q}{c} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \frac{MmG}{|\mathbf{q}|}. \quad (1.4)$$

Introduzindo-se coordenadas cilíndricas

$$(x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

onde $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$, e assumindo-se que $\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{e}_z$ e $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$, obtém-se a seguinte Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + p_z^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{Q\mu}{c} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2 \right] + \frac{Q\mu\Omega}{c} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{MmG}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \quad (1.5)$$

onde

$$p_\varphi = \rho^2 \left(m\dot{\varphi} + \frac{Q}{c} \frac{\mu}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

é constante.

Desta forma, têm-se as equações de movimento:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{p_\rho}{m} \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{m\rho} \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{Q\mu}{c} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m} \\ \dot{p}_\rho &= \frac{1}{m} \left[\frac{p_\rho^2}{\rho} - 3 \frac{Q\mu}{c} \frac{p_\varphi \rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \left(\frac{Q\mu}{c} \right)^2 \frac{\rho(z^2 - 2\rho^2)}{(\rho^2 + z^2)^4} \right] - \frac{Q\mu\Omega}{c} \frac{\rho(2z^2 - \rho^2)}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{MmG\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\ \dot{p}_\varphi &= 0 \\ \dot{p}_z &= \frac{3}{m} \left[- \frac{Q\mu}{c} \frac{p_\varphi z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} + \left(\frac{Q\mu}{c} \right)^2 \frac{\rho^2 z}{(\rho^2 + z^2)^4} \right] + 3 \frac{Q\mu\Omega}{c} \frac{\rho^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{MmGz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Observa-se que φ é uma variável cíclica ou ignorável.

Seja o seguinte reescalamto

$$\bar{t} = \Omega t$$

e

$$\bar{\mathbf{q}} = \left(\frac{\Omega m c}{|Q\mu|} \right)^{1/3} \mathbf{q}.$$

Nota-se que \bar{t} e $\bar{\mathbf{q}}$ são adimensionais.

As equações de movimento reescaladas são escritas como:

$$\begin{aligned} \bar{p}' &= p_{\bar{\rho}} \\ \bar{\varphi}' &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{L}{\bar{\rho}} - \text{sgn}(Q\mu) \frac{\bar{\rho}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \right) \\ \bar{z}' &= p_{\bar{z}} \\ p_{\bar{\rho}}' &= \frac{L^2}{\bar{\rho}^3} - \text{sgn}(Q\mu) \frac{\bar{\rho}(2\bar{z}^2 - \bar{\rho}^2 + 3L)}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{5/2}} - \frac{\bar{\rho}(\bar{z}^2 - 2\bar{\rho}^2)}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^4} - \frac{\Lambda \bar{\rho}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \\ L' &= 0 \\ p_{\bar{z}}' &= 3\bar{z} \left(\text{sgn}(Q\mu) \frac{\bar{\rho}^2 - L}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{5/2}} + \frac{\bar{\rho}^2}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^4} \right) - \frac{\Lambda \bar{z}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde

$$L = \bar{\rho}^2 \left(\bar{\varphi}' + \text{sgn}(Q\mu) \frac{1}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \right)$$

(constante) e

$$\Lambda = \frac{MmGc}{|Q\mu|\Omega}$$

são também adimensionais.

A Hamiltoniana é dada por:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(p_{\bar{\rho}}^2 + p_{\bar{z}}^2) + \bar{U}(\bar{\rho}, \bar{z}) \quad (1.8)$$

onde

$$\bar{U}(\bar{\rho}, \bar{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\bar{\rho}} - \text{sgn}(Q\mu) \frac{\bar{\rho}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} \right)^2 + \text{sgn}(Q\mu) \frac{\bar{\rho}^2}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} - \frac{\Lambda}{(\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)^{1/2}}. \quad (1.9)$$

É importante salientar que, devido ao mecanismo de carregamento elétrico das partículas(Consolmagno (1983)), a razão entre a força magnética e a força gravitacional, que age em uma partícula dos anéis, cresce inversamente com o tamanho da

12 Equações de Movimento no Plano Equatorial e Equilíbrios Relativos

partícula. Ou seja, para partículas grandes o efeito da força magnética é desprezível, o oposto valendo para as partículas muito pequenas. Portanto, como era de se esperar, o parâmetro físico de maior importância para o entendimento da dinâmica de uma partícula é sua razão Q/m . Mais ainda, quando a razão carga-massa converge para o infinito, tem-se o problema de Störmer girante e; quando ela tende para zero, tem-se o problema de Kepler. Na nova parametrização, o primeiro caso equivale a $\Lambda \rightarrow 0$ e o segundo, a $\Lambda \rightarrow \infty$.

1.2 Equações de Movimento no Plano Equatorial e Equilíbrios Relativos

No plano equatorial, as equações (1.7)(omitindo-se as barras) são dadas por:

$$\begin{aligned} \rho' &= p_\rho \\ \varphi' &= \frac{L}{\rho^2} - \operatorname{sgn}(Q\mu) \frac{1}{\rho^3} \\ p_\rho' &= \frac{(\operatorname{sgn}(Q\mu) - \Lambda)}{\rho^2} + \frac{L^2}{\rho^3} - \operatorname{sgn}(Q\mu) \frac{3L}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^5} \\ L' &= 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

com Hamiltoniana associada

$$H = \frac{p_\rho^2}{2} + U(\rho) \tag{1.11}$$

onde

$$U(\rho) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\rho} - \operatorname{sgn}(Q\mu) \frac{1}{\rho^2} \right)^2 + \frac{(\operatorname{sgn}(Q\mu) - \Lambda)}{\rho}. \tag{1.12}$$

Os equilíbrios relativos no plano equatorial são os pontos críticos da função potencial U e portanto, são aqueles para os quais ρ satisfaz:

$$(-\operatorname{sgn}(Q\mu) + \Lambda)\rho^3 - L^2\rho^2 + 3\operatorname{sgn}(Q\mu)L\rho - 2 = 0. \tag{1.13}$$

A denominação relativo tem origem no fato de que, na verdade, tais equilíbrios são órbitas periódicas no plano (ρ, φ) . Se, além da condição (1.13), vale que

$$\rho = \frac{\operatorname{sgn}(Q\mu)}{L}, \tag{1.14}$$

então os equilíbrios relativos são, de fato, equilíbrios do sistema. A condição (1.14) é satisfeita no conjunto de parâmetros a seguir:

$$\{(L, \Lambda) : \Lambda = \text{sgn}(Q\mu)\}.$$

Para obter o diagrama de bifurcação da função potencial U , será feito um estudo dos pontos críticos, dos limites e dos zeros da função potencial.

1. Pontos Críticos da Função Potencial U

Observa-se que a equação (1.13), dos pontos críticos de U , pode ser reescrita como

$$\beta \tilde{\rho}^3 = (\tilde{\rho} - \text{sgn}(Q\mu))(\tilde{\rho} - 2\text{sgn}(Q\mu)) \quad (1.15)$$

onde

$$\beta = \frac{-\text{sgn}(Q\mu) + \Lambda}{L^3} \quad (1.16)$$

e

$$\tilde{\rho} = L\rho \quad (1.17)$$

com $L \neq 0$.

Logo, as bifurcações ocorrem para os pares $(\tilde{\rho}, \beta)$ onde a curva $\beta \tilde{\rho}^3$ tangencia a curva $\tilde{\rho}^2 - 3\text{sgn}(Q\mu)\tilde{\rho} + 2$, ou seja, para os pares

$$(\tilde{\rho}_1, \beta_1) = \left(3 - \sqrt{3}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{18(2 - \sqrt{3})} \right),$$

$$(\tilde{\rho}_2, \beta_2) = \left(3 + \sqrt{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{18(2 + \sqrt{3})} \right),$$

se $Q\mu > 0$, ou

$$(\tilde{\rho}_3, \beta_3) = \left(-3 - \sqrt{3}, \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{18(2 + \sqrt{3})} \right),$$

$$(\tilde{\rho}_4, \beta_4) = \left(-3 + \sqrt{3}, \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{18(2 - \sqrt{3})} \right),$$

se $Q\mu < 0$.

(a) Caso $Q\mu > 0$

Desta forma, para $Q\mu > 0$ tem-se que a função potencial possui:

14 Equações de Movimento no Plano Equatorial e Equilíbrios Relativos

- i. nenhum ponto crítico se
 - A. $L < 0, \Lambda \leq 1$ ou
 - B. $L > 0, \Lambda < \beta_1 L^3 + 1$;
- ii. um ponto crítico se
 - A. $L < 0, \Lambda > 1$;
 - B. $L > 0, \Lambda > \beta_2 L^3 + 1$ ou
 - C. $L > 0, \Lambda = \beta_1 L^3 + 1$;
- iii. dois pontos críticos se
 - A. $L > 0, \Lambda = \beta_2 L^3 + 1$ ou
 - B. $L > 0, \beta_1 L^3 + 1 < \Lambda < 1$;
- iv. três pontos críticos se
 - A. $L > 0, 1 < \Lambda < \beta_2 L^3 + 1$.

No caso $L = 0$, pode-se resolver a equação (1.13) explicitamente e conclui-se que a função U não tem pontos críticos, se $\Lambda \leq 1$, ou possui apenas um, se $\Lambda > 1$.

(b) Caso $Q\mu < 0$

Já para $Q\mu < 0$, tem-se que a função potencial possui:

- i. nenhum ponto crítico se
 - A. $L < 0, \Lambda < \beta_4 L^3 - 1$ ou
 - B. $L > 0, \Lambda \leq -1$;
- ii. um ponto crítico se
 - A. $L < 0, \Lambda = \beta_4 L^3 - 1$;
 - B. $L < 0, \Lambda > \beta_3 L^3 - 1$ ou
 - C. $L > 0, \Lambda > -1$;
- iii. dois pontos críticos se
 - A. $L < 0, \beta_4 L^3 - 1 < \Lambda \leq -1$ ou
 - B. $L < 0, \Lambda = \beta_3 L^3 - 1$;
- iv. três pontos críticos se
 - A. $L < 0, -1 < \Lambda < \beta_3 L^3 - 1$.

No caso $L = 0$, novamente pode-se resolver a equação (1.13) explicitamente e conclui-se que a função U não tem pontos críticos, se $\Lambda \leq -1$, ou possui apenas um, se $\Lambda > -1$.

2. Zeros da Função Potencial U

A equação dos zeros da função U é dada por

$$(\operatorname{sgn}(Q\mu) - \Lambda)\rho^3 + \frac{L^2\rho^2}{2} - \operatorname{sgn}(Q\mu)L\rho + \frac{1}{2} = 0 \quad (1.18)$$

e é equivalente a equação

$$2\beta\tilde{\rho}^3 = (\tilde{\rho} - \operatorname{sgn}(Q\mu))^2 \quad (1.19)$$

onde β e $\tilde{\rho}$ são dados como em (1.16) e (1.17), respectivamente.

As bifurcações desta última equação ocorrem para os pares

$$(\tilde{\rho}_5, \beta_5) = \left(1, 0\right),$$

$$(\tilde{\rho}_6, \beta_6) = \left(3, \frac{2}{27}\right),$$

se $Q\mu > 0$, ou

$$(\tilde{\rho}_7, \beta_7) = \left(-3, -\frac{2}{27}\right),$$

$$(\tilde{\rho}_8, \beta_8) = \left(-1, 0\right),$$

se $Q\mu < 0$.

(a) Caso $Q\mu > 0$

Logo, para $Q\mu > 0$ o número de zeros se distribui da seguinte forma:

i. nenhum zero se

A. $L < 0, \Lambda \leq 1$ ou

B. $L > 0, \Lambda < 1$;

ii. um zero se

A. $L < 0, \Lambda > 1$;

B. $L > 0, \Lambda > \beta_6 L^3 + 1$ ou

16 Equações de Movimento no Plano Equatorial e Equilíbrios Relativos

C. $L > 0, \Lambda = 1;$

iii. dois zeros se

A. $L > 0, \Lambda = \beta_6 L^3 + 1;$

iv. três zeros se

A. $L > 0, 1 < \Lambda < \beta_6 L^3 + 1.$

Do mesmo modo pode-se resolver a equação (1.18) para $L = 0$ e obter que U não tem zeros, se $\Lambda \leq 1$, ou possui apenas um, se $\Lambda > 1$.

(b) Caso $Q\mu < 0$

Agora, para $Q\mu > 0$ o número de zeros se distribui da seguinte forma:

i. nenhum zero se

A. $L < 0, \Lambda < -1$ ou

B. $L > 0, \Lambda \leq -1;$

ii. um zero se

A. $L < 0, \Lambda > \beta_7 L^3 - 1;$

B. $L < 0, \Lambda = -1$ ou

C. $L > 0, \Lambda > -1;$

iii. dois zeros se

A. $L < 0, \Lambda = \beta_7 L^3 - 1;$

iv. três zeros se

A. $L < 0, -1 < \Lambda < \beta_7 L^3 - 1.$

Novamente a equação (1.18) pode ser resolvida para $L = 0$ e obtém-se que U não tem zeros, se $\Lambda \leq -1$, ou possui apenas um, se $\Lambda > -1$.

3. Limites da Função Potencial U

Resta o estudo dos limites da função potencial U . Observando a expressão (1.12), conclui-se que quando ρ converge para zero, então $U(\rho)$ converge para $+\infty$. No entanto, quando ρ converge para $+\infty$, tem-se que

(a) $U(\rho) \rightarrow 0_+$ se $\Lambda \leq \text{sgn}(Q\mu)$ ou

(b) $U(\rho) \rightarrow 0_-$ se $\Lambda > \text{sgn}(Q\mu)$.

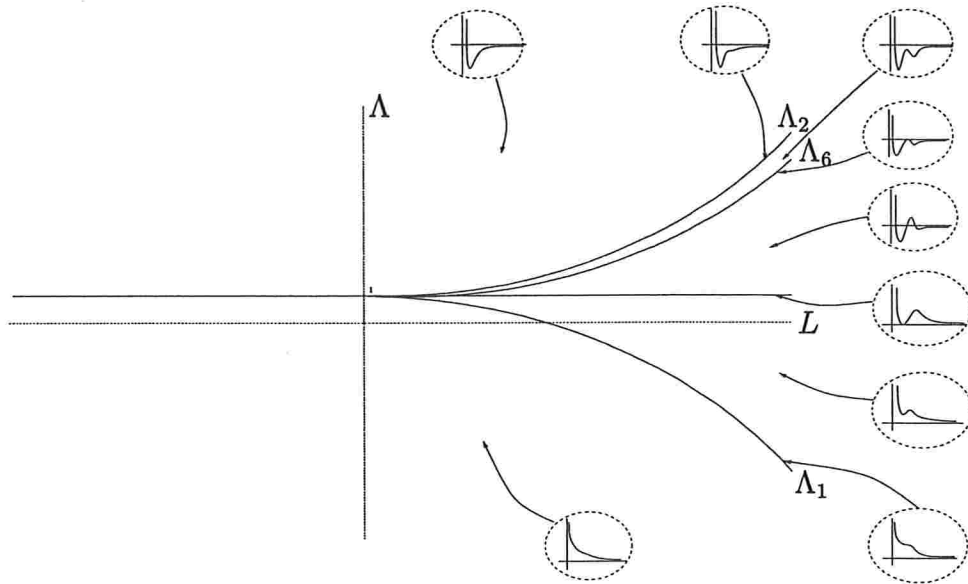


Figura 1.1: Diagrama de bifurcação da função potencial para $Q\mu > 0$ onde, com $L \geq 0$, $\Lambda_1(L) = \beta_1 L^3 + 1$, $\Lambda_2(L) = \beta_2 L^3 + 1$, $\Lambda_6(L) = \beta_6 L^3 + 1$.

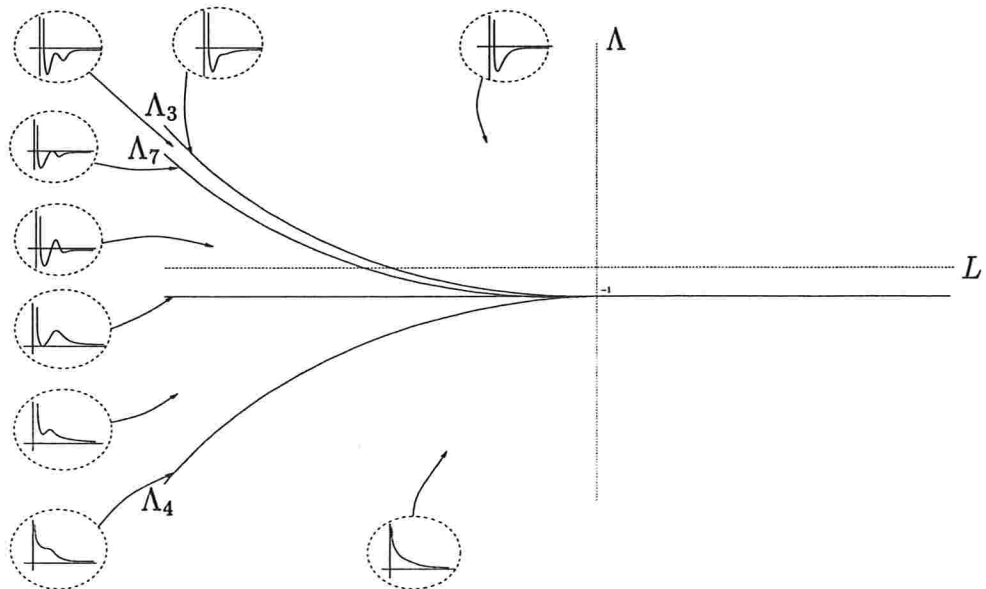


Figura 1.2: Diagrama de bifurcação da função potencial para $Q\mu < 0$ onde, com $L \leq 0$, $\Lambda_3(L) = \beta_3 L^3 - 1$, $\Lambda_4(L) = \beta_4 L^3 - 1$, $\Lambda_7(L) = \beta_7 L^3 - 1$.

Com todos os resultados anteriores, pode-se obter o diagrama de bifurcação da função potencial $U(\rho)$ em termos dos parâmetros L e Λ conforme as figuras (1.1) e (1.2) para os casos $Q\mu > 0$ e $Q\mu < 0$, respectivamente.

1.3 Classificação dos Equilíbrios Relativos

Linearizando-se o sistema em torno dos equilíbrios relativos ρ_* no plano equatorial, obtém-se que:

$$\tilde{\zeta}' = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\zeta} \quad (1.20)$$

onde $\tilde{\zeta} = (\rho, \varphi, z, p_\rho, L, p_z)$,

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ H_{L\rho} & 0 & H_{Lz} & 0 & H_{LL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -H_{\rho\rho} & 0 & -H_{z\rho} & 0 & -H_{L\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -H_{z\rho} & 0 & -H_{zz} & 0 & -H_{Lz} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

e H_{ij} são as derivadas segundas do Hamiltoniano H no ponto crítico $\tilde{\zeta}_*$, com $i, j = \rho, L, z$.

Restringindo a (ρ, z) e usando que $H_{z\rho} = 0$, obtém-se que:

$$\zeta' = \mathbf{M}\zeta \quad (1.22)$$

onde $\zeta = (\rho, z, p_\rho, p_z)$,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\nu & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

$$\nu = H_{\rho\rho} = \frac{1}{\rho_*^6} (L\rho_* - (3\text{sgn}(Q\mu) + \sqrt{3})) (L\rho_* - (3\text{sgn}(Q\mu) - \sqrt{3})) \quad (1.24)$$

e

$$\omega = H_{zz} = \frac{1}{\rho_*^6} ((-3\text{sgn}(Q\mu) + \Lambda)\rho_*^3 + 3(\text{sgn}(Q\mu)L\rho_* - 1)). \quad (1.25)$$

O polinômio característico de \mathbf{M} é dado por:

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + \nu)(\lambda^2 + \omega). \quad (1.26)$$

A matriz (1.23) possui dois subespaços bidimensionais invariantes: um deles tangente ao plano (ρ, p_ρ) e outro tangente ao plano (z, p_z) . Os autovalores do subespaço (ρ, p_ρ) estão associados ao coeficiente ν e os autovalores do subespaço (z, p_z) estão associados ao coeficiente ω .

Nota-se que, usando a equação (1.13), ω pode ser reescrito como

$$\omega = \frac{1}{\rho_*^6}(-2\text{sgn}(Q\mu)\rho_*^3 + L^2\rho_*^2 - 1). \quad (1.27)$$

No entanto, para facilitar a classificação dos equilíbrios, feita a seguir, é usada a expressão (1.25) para ω .

A classificação dos equilíbrios na direção ρ , como centro, sela ou parabólico, é imediata da classificação dos pontos críticos do potencial U , como mínimo, máximo ou sela, respectivamente. Para a classificação na direção z é necessário verificar se o autovalor associado a esta direção é real ou complexo o que corresponde a ω negativo (sela) ou positivo (centro), respectivamente, o que sugere o estudo da equação $\omega = 0$. Observa-se que tal equação é equivalente à:

$$\beta\tilde{\rho}^3 = 3(-\text{sgn}(Q\mu)\tilde{\rho} + 1) \quad (1.28)$$

onde

$$\beta = \frac{-3\text{sgn}(Q\mu) + \Lambda}{L^3} \quad (1.29)$$

e

$$\tilde{\rho} = L\rho_*, \quad (1.30)$$

com $L \neq 0$.

As soluções de (1.28) bifurcam-se para o par:

$$(\tilde{\rho}_9, \beta_9) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{4}{9} \right),$$

se $Q\mu > 0$, ou

$$(\tilde{\rho}_{10}, \beta_{10}) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{4}{9} \right),$$

se $Q\mu < 0$.

Zeros da equação $\omega = 0$

1. Caso $Q\mu > 0$

Neste caso, a equação $\omega = 0$ possui

(a) nenhuma solução se

- i. $L \leq 0, \Lambda \leq 3$ ou
- ii. $L > 0, \Lambda < \beta_9 L^3 + 3$,

(b) uma solução (ρ_1) se

- i. $L \leq 0, \Lambda > 3$,
- ii. $L > 0, \Lambda \geq 3$ ou
- iii. $L > 0, \Lambda = \beta_9 L^3 + 3$,

(c) duas soluções (ρ_1, ρ_2) se

- i. $L > 0, \beta_9 L^3 + 3 < \Lambda < 3$,

No caso (a), tem-se que $\omega < 0$ para todo ρ_* , logo nestas regiões os equilíbrios são todos selas. Por outro lado, no caso (b), têm-se duas situações: em (i) e (ii), $\omega < 0$ se $0 < \rho_* < \rho_1$, $\omega = 0$ se $\rho_* = \rho_1$ e $\omega > 0$ se $\rho_* > \rho_1$; e em (iii), $\omega < 0$ se $\rho_* \neq \rho_1$ e $\omega = 0$ se $\rho_* = \rho_1$. Nestas regiões, a classificação do equilíbrio na direção z depende da sua posição em relação às soluções da equação $\omega = 0$, podendo ser do tipo sela, parabólico ou centro em (b(i)) e (b(ii)), e sela ou parabólico em (b(iii)). No caso (c), novamente a classificação depende da posição relativa do equilíbrio, podendo ser sela ($\omega < 0$ se $0 < \rho_* < \rho_1$ ou $\rho_* > \rho_2$), parabólico ($\omega = 0$ se $\rho_* = \rho_1$ ou $\rho_* = \rho_2$) ou centro ($\omega > 0$ se $\rho_1 < \rho_* < \rho_2$). Os casos descritos acima estão sintetizados na figura (1.3).

2. Caso $Q\mu < 0$

A equação $\omega = 0$ neste outro caso possui

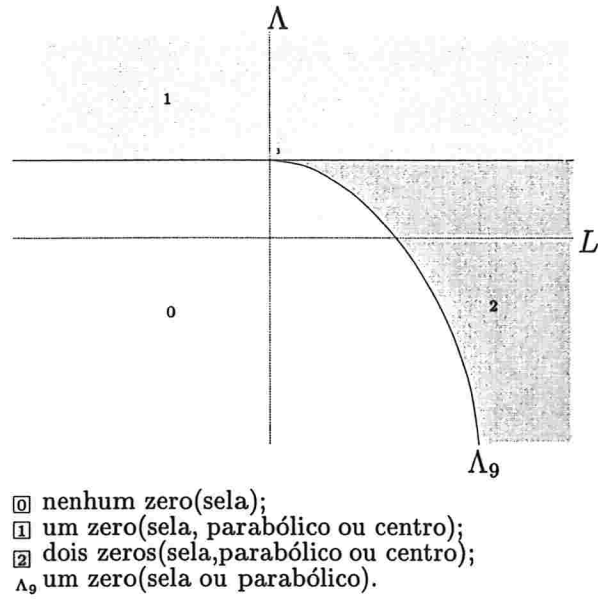


Figura 1.3: Classificação do número de soluções da equação $\omega = 0$ para $Q\mu > 0$ onde, com $L \geq 0$, $\Lambda_9(L) = \beta_9 L^3 + 3$.

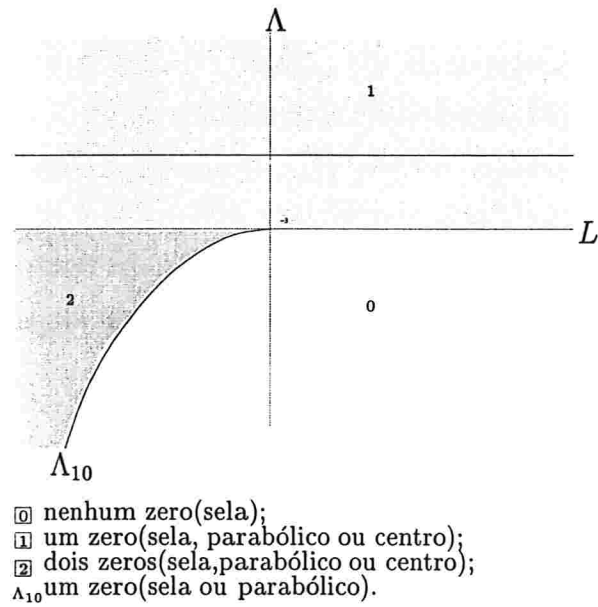


Figura 1.4: Classificação do número de soluções da equação $\omega = 0$ para $Q\mu < 0$ onde, com $L \leq 0$, $\Lambda_{10}(L) = \beta_{10} L^3 - 3$.

- (a) nenhuma solução se
- i. $L < 0, \Lambda < \beta_{10}L^3 - 3$ ou
 - ii. $L \geq 0, \Lambda \leq -3,$
- (b) uma solução (ρ_1) se
- i. $L < 0, \Lambda = \beta_{10}L^3 - 3,$
 - ii. $L < 0, \Lambda \geq -3$ ou
 - iii. $L \geq 0, \Lambda > -3,$
- (c) duas soluções (ρ_1, ρ_2) se
- i. $L < 0, \beta_{10}L^3 - 3 < \Lambda < -3,$

Novamente, no caso (a) tem-se que $\omega < 0$ para todo ρ_* , logo nestas regiões os equilíbrios são todos selas. Por outro lado, no caso (b), têm-se duas situações: em (i), $\omega < 0$ se $\rho_* \neq \rho_1$ e $\omega = 0$ se $\rho_* = \rho_1$; e em (ii) e (iii), $\omega < 0$ se $0 < \rho_* < \rho_1$, $\omega = 0$ se $\rho_* = \rho_1$ e $\omega > 0$ se $\rho_* > \rho_1$. Nestas regiões, a classificação do equilíbrio na direção z depende da sua posição em relação às soluções da equação $\omega = 0$, podendo ser do tipo sela ou parabólico em (b(i)), e sela, parabólico ou centro em (b(ii)) e (b(iii)). No caso (c), novamente a classificação depende da posição relativa do equilíbrio, podendo ser sela ($\omega < 0$ se $0 < \rho_* < \rho_1$ ou $\rho_* > \rho_2$), parabólico ($\omega = 0$ se $\rho_* = \rho_1$ ou $\rho_* = \rho_2$) ou centro ($\omega > 0$ se $\rho_1 < \rho_* < \rho_2$). Uma síntese de tais casos pode ser encontrada na figura (1.4).

Regiões de Hill

Inicia-se este capítulo com um diagrama de bifurcação dos tipos de regiões de Hill possíveis em termos dos parâmetros L e Λ , para $Q\mu > 0$. E em seguida, explica-se como tais regiões foram obtidas. Em todo o capítulo foi considerado este sinal de $Q\mu$ para fixar idéias. O caso $Q\mu$ negativo é análogo e será apresentado em um trabalho futuro. Na segunda seção, obtém-se o comportamento da função potencial U na origem e no infinito. Com estes resultados e a classificação dos equilíbrios no plano equatorial, pode-se na seção seguinte esboçar as regiões de Hill para o caso onde todos os equilíbrios estão neste plano. Na última seção, mostra-se a existência de equilíbrios fora do plano equatorial e de posse deles, as regiões de Hill para este caso são esboçadas. Todas as regiões esboçadas neste capítulo foram verificadas usando o programa (2) do apêndice B.

2.1 Diagrama de Bifurcação das Regiões de Hill

Já foi visto que a Hamiltoniana do problema é dada por:

$$H(\rho, z) = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + p_z^2) + U(\rho, z) \quad (2.1)$$

onde

$$U(\rho, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\rho - \text{sgn}(Q\mu)} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2 + \text{sgn}(Q\mu) \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\Lambda}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}. \quad (2.2)$$

Como $\frac{1}{2}(p_\rho^2 + p_z^2)$ é não negativo, segue que,

$$U(\rho, z) \leq E$$

para cada energia E . A região definida pelos pares (ρ, z) que satisfazem a desigualdade anterior é denominada a região de Hill para o nível de energia E . Nota-se que o movimento da partícula fica confinado a esta região para a energia fixada E .

Fixado o par (Λ, L) , para cada energia E , tem-se uma região de Hill. Para obter a descrição de tais regiões para cada energia, escolhe-se primeiramente uma energia onde tal região seja a mais simples possível. Pelos tipos da função potencial U (ver figura (1.1)) no plano equatorial, o mais conveniente neste caso é a menor energia, ou melhor, o menor valor que o potencial $U|_{z=0}$ assume. A seguir, varia-se E , neste caso, aumentando a energia, e observa-se a topologia da região $U \leq E$. De fato, este comportamento é alterado a medida que surgem novos pontos críticos e dependendo do tipo dos mesmos. Aqui ressalta-se que importam não somente os equilíbrios no plano equatorial, já obtidos no Capítulo 1, como também os equilíbrios fora do plano equatorial, caso eles existam. De posse de tais equilíbrios, resta apenas obter o comportamento do potencial U na origem (quando $(\rho, z) \rightarrow (0, 0)$) e no infinito (quando $\rho \rightarrow \infty$ e $z \rightarrow \pm\infty$).

O diagrama de bifurcação dos tipos de regiões de Hill possíveis para cada par (L, Λ) é dado pela figura (2.1). Neste diagrama estão resumidos os resultados deste capítulo, inclusive com as curvas de bifurcação do número de equilíbrios fora do plano equatorial. Observa-se que o diagrama limita-se a $L \geq 0$. Se $L \leq 0$, tem-se duas situações: uma para $\Lambda \leq 1$, que é idêntica a da região (9) e, outra para $\Lambda \geq 1$, que é esboçada pela figura (2.4).

2.2 Comportamento da Função Potencial U na Origem e no Infinito

O potencial U na origem possui três tipos de comportamento que destacam-se a seguir

- Existência de uma região próxima à origem onde $U \leq E$ para toda energia E .
- Existência de uma curva equipotencial que se aproxima da origem para $E = L$.
- Próximo da origem, $U > E$ para toda energia E .

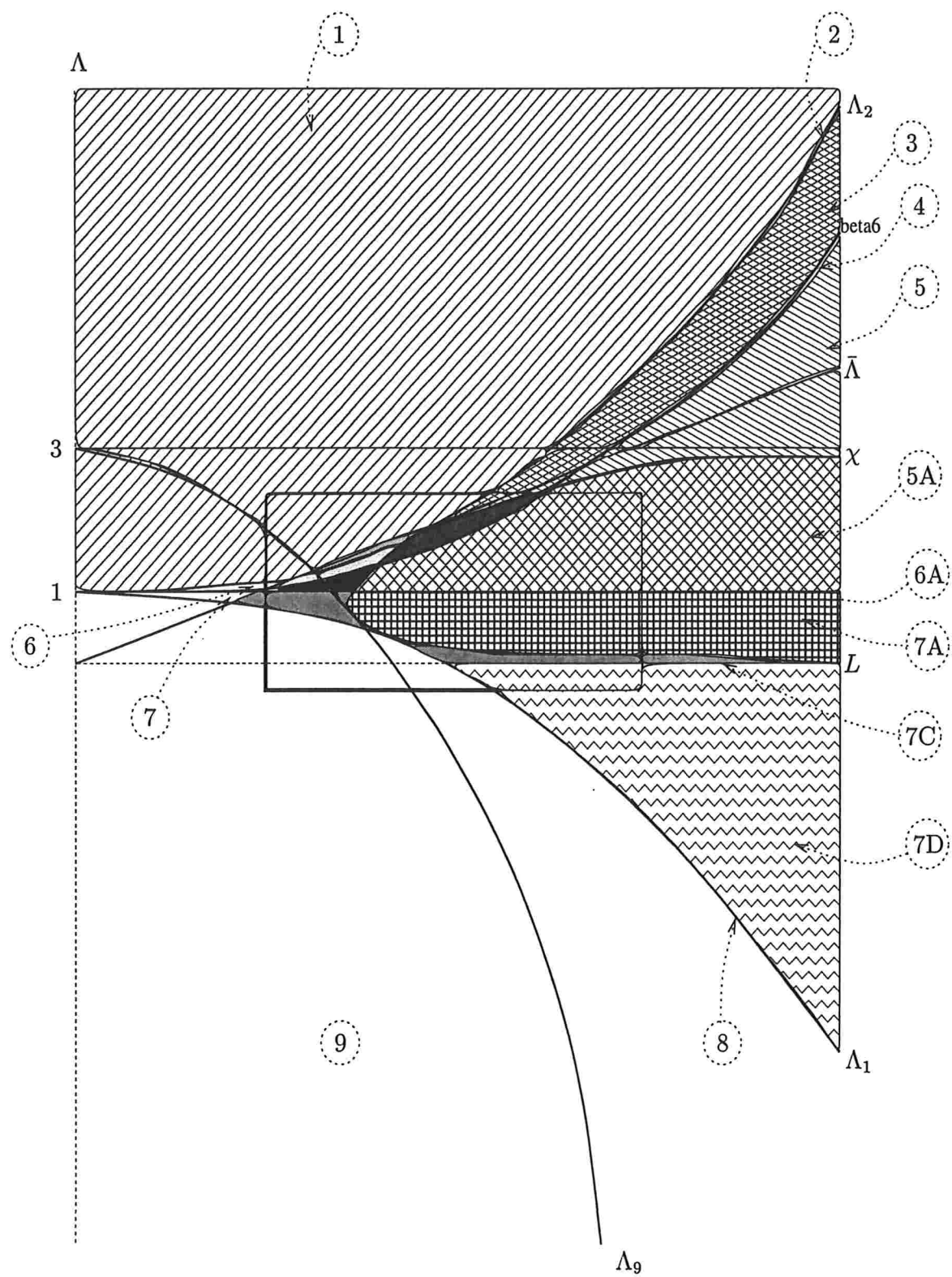


Figura 2.1: Diagrama de bifurcação das regiões de Hill em termos do par (L, Λ) para $Q\mu > 0$ onde $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_5$ são como na figura (1.1), Λ_9 é como na figura (1.3), $\bar{\Lambda} = 0,92820323L$ e χ obtida numericamente, conforme explicado na seção (2.4).

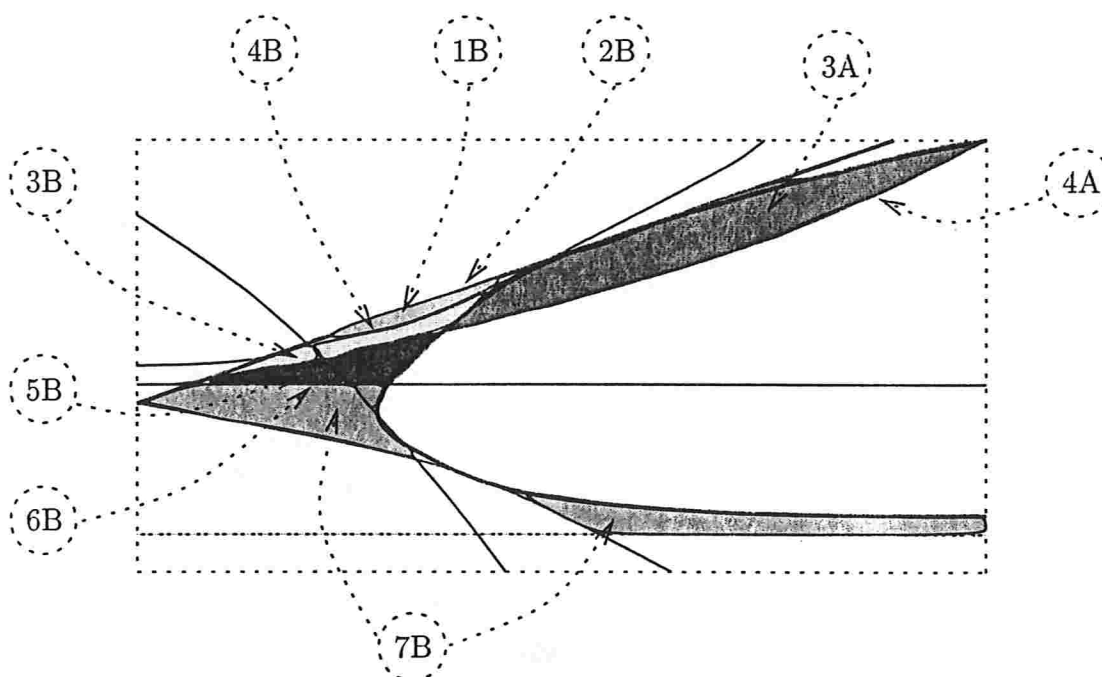


Figura 2.2: “Zoom” da região demarcada na figura (2.1).

Inicialmente, considera-se a mudança de coordenadas dada por

$$\begin{aligned} u &= \frac{r^3}{\rho^2} \\ r &= \sqrt{(\rho^2 + z^2)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\rho > 0$ e $z \in \mathbb{R}$.

Observa-se que, de fato, tem-se um difeomorfismo da região $\{(\rho, z) : \rho > 0, z > 0\}$ na região $\{(r, u) : u > 0, 0 < r < u\}$. Analogamente, $\{(\rho, z) : \rho > 0, z < 0\}$ é difeomorfo a $\{(r, u) : u > 0, r > u > 0\}$.

Nestas novas coordenadas, o potencial U é descrito como

$$U(r, u) = \frac{1}{2ur^3}(Lu - \operatorname{sgn}(Q\mu))^2 + \frac{\operatorname{sgn}(Q\mu)}{u} - \frac{\Lambda}{r} \quad (2.4)$$

o qual pode ser reescrito como

$$U(r, u) = \frac{\operatorname{sgn}(Q\mu)}{u} + \frac{1}{r} \left(-\Lambda + \frac{1}{2ur^2}(Lu - \operatorname{sgn}(Q\mu))^2 \right). \quad (2.5)$$

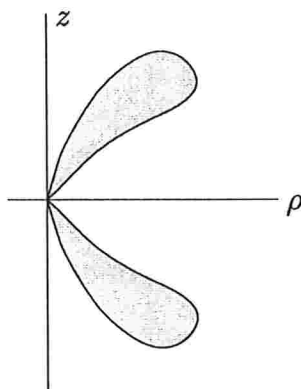


Figura 2.3: Região “salsicha” próxima à origem.

Neste ponto fixa-se o sinal de $Q\mu$ para uma melhor compreensão do comportamento do potencial U . Inicialmente, toma-se $Q\mu > 0$.

Pode-se reescrever a equação (2.5) como uma equação quadrática em u da seguinte forma

$$L^2 u^2 - 2(Er^3 + \Lambda r^2 + L)u + 2r^3 + 1 = 0 \quad (2.6)$$

cuja solução é

$$u = \frac{(Er^3 + \Lambda r^2 + L) \pm r\sqrt{\Delta}}{L^2} \quad (2.7)$$

onde

$$\Delta = r^2(\Lambda + Er)^2 + 2L(\Lambda + (E - L)r).$$

Observa-se que $\Delta \rightarrow 2L\Lambda$ e $u \rightarrow 1/L$, quando $r \rightarrow 0$. Desta forma, o estudo do comportamento do potencial U próximo a origem resume-se a analisar os sinais dos limites de Δ e u , ou melhor, do produto $L\Lambda$ e de L .

1. Caso $L\Lambda > 0$ e $L > 0$

Considera-se a equação (2.6). Neste caso, tem-se que Δ e u convergem para valores positivos, quando $r \rightarrow 0$. Logo, para cada r a equação (2.6) possui dois valores u como solução e portanto, pode-se concluir que existem duas curvas de nível $U = E$ convergindo para zero, o que garante que existe uma região “salsicha” em torno da curva $\tilde{\Upsilon}_{1/L}$ tal que $U(\rho, z) < E$ para toda energia E , conforme a figura (2.3).

Pode-se ver este comportamento, por exemplo, na figura (2.5).

2. **Caso $L\Lambda > 0$ e $L < 0$**

Apesar de Δ convergir pra um valor positivo, quando r converge pra zero, a solução u dada por (2.7) converge para $1/L$ o qual é um número negativo, o que é uma contradição. Logo, novamente, não existe a região “salsicha”.

A figura (2.15) retrata este comportamento.

3. **Caso $L\Lambda < 0$**

Neste caso, pode-se observar que Δ converge para um valor negativo, quando $r \rightarrow 0$. Logo, não existe u real que satisfaça a equação (2.6), para r pequeno. E portanto, não pode existir a região “salsicha”.

Este comportamento pode ser visto nas figuras (2.4) e (2.15).

4. **Caso $L\Lambda = 0$**

Este caso se divide em dois:

(a) **Caso $L = 0$**

Substituindo $L = 0$ na equação (2.6), obtém-se a seguinte equação

$$-2(Er^3 + \Lambda r^2)u + 2r^3 + 1 = 0 \quad (2.8)$$

e neste caso, quando $r \rightarrow 0$, a equação acima não possui solução e portanto, a região “salsicha” não aparece.

(b) **Caso $\Lambda = 0$**

Têm-se duas possibilidades:

i. **Caso $L > 0$**

Observa-se que

$$\Delta = r^2(\Lambda + Er)^2 + 2(E - L)r. \quad (2.9)$$

Desta forma, se $E \geq L$ então existe a região “salsicha” pois $\Delta \rightarrow 0^+$, quando r converge pra zero. Caso contrário, não existe a região “salsicha” pois $\Delta \rightarrow 0^-$, quando r converge pra zero.

ii. **Caso $L < 0$**

Neste caso, quando $r \rightarrow 0$ $u \rightarrow 1/L$, o qual é negativo e portanto, não existe a região “salsicha”.

O estudo do comportamento de U no infinito é mais simples. Fixando-se ρ na expressão (2.2) de U , tem-se que U converge para $\frac{L^2}{2\rho^2}$ quando $z \rightarrow \infty$. Por outro lado, se z está fixo, U também converge para 0, quando $\rho \rightarrow \infty$.

2.3 Equilíbrios do Plano Equatorial

Neste momento esboçam-se as regiões de Hill para os casos onde todos os equilíbrios se encontram no plano equatorial. São elas: as regiões (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (7C), (7D), (8), (9) da figura (2.1).

1. Região onde $L \leq 0$ e $\Lambda > 1$ (Figura 2.4)

- Não-existência da região “salsicha”, conforme foi visto na seção (2.2).
- O potencial possui apenas um ponto crítico do tipo centro-centro cuja energia é E_1 .

2. Região 1: $L > 0$ e $\Lambda > \beta_2 L^3 + 1$ (Figura 2.5)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial também possui apenas um ponto crítico porém do tipo centro-sela e cuja energia é E_1 .

3. Região 2: $L > 0$ e $\Lambda = \beta_2 L^3 + 1$ e $\Lambda > \bar{\beta} L$ (Figura 2.6)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui dois pontos críticos: um do tipo centro-sela(energia E_1) e outro do tipo parabólico-sela(energia E_3).

4. Região 3: $L > 0$ e $\beta_2 L^3 + 1 < \Lambda < \beta_6 L^3 + 1$ e $\Lambda > \bar{\beta} L$ (Figura 2.7)

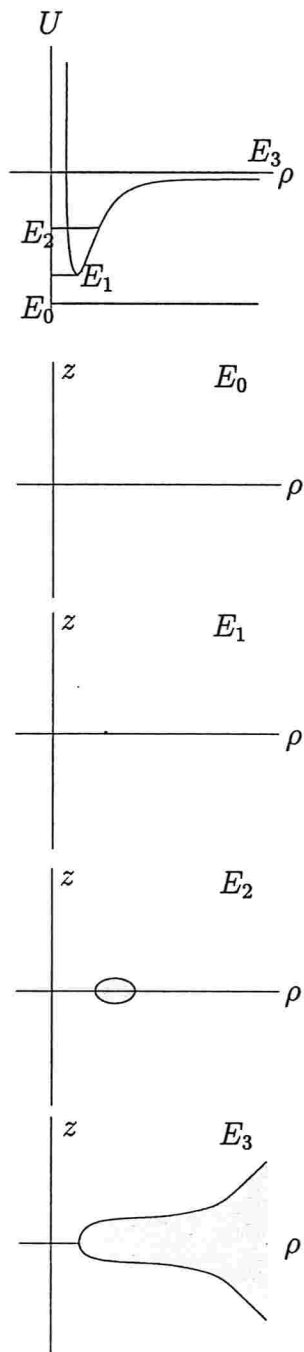


Figura 2.4: Regiões de Hill para o potencial U da região onde $L \leq 0$ e $\Lambda > 1$.

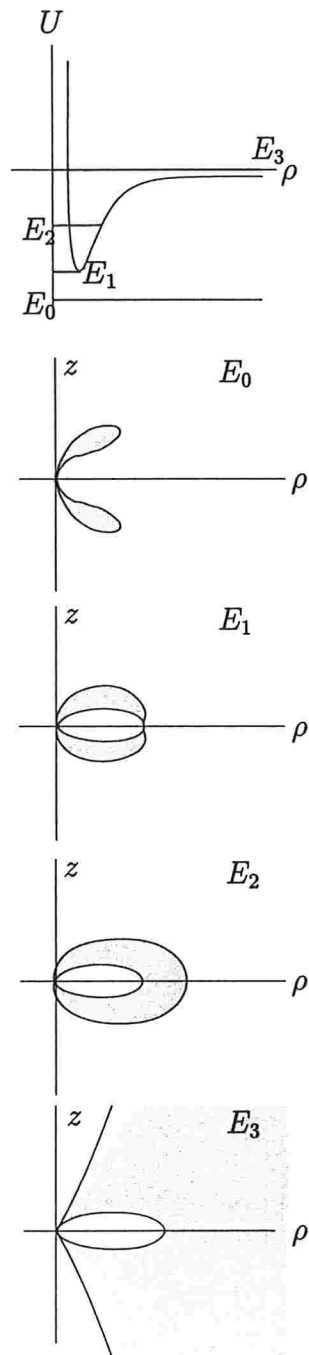


Figura 2.5: Regiões de Hill para o potencial U da região (1) da figura (2.1) acima de curva Λ_2 .

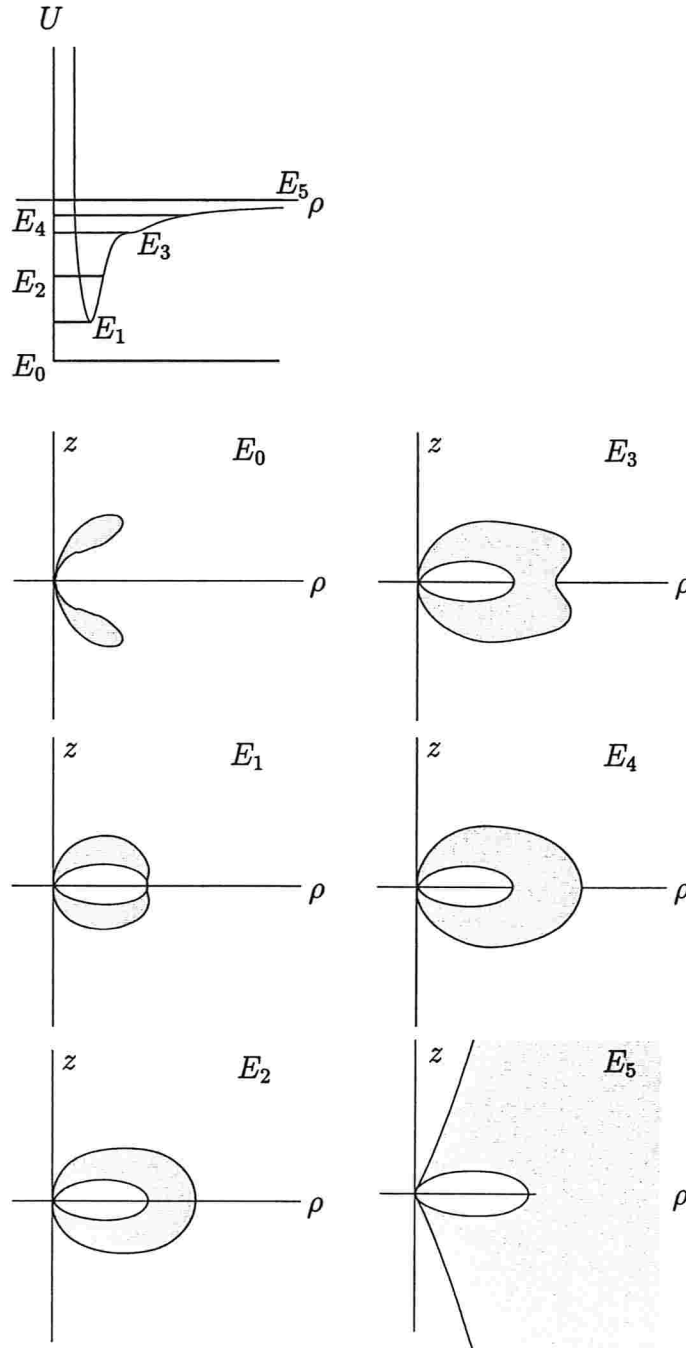


Figura 2.6: Regiões de Hill para o potencial U da região (2) da figura (2.1) sobre a curva Λ_2 .

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos: um do tipo centro-sela(energia E_1), outro do tipo sela-centro(energia E_5) e mais um do tipo centro-centro(energia E_3).

5. **Região 4:** $L > 0$ e $\Lambda = \beta_6 L^3 + 1$ e $\Lambda > \bar{\beta}L$ (Figura 2.8)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos: um do tipo centro-sela(energia E_1), outro do tipo sela-centro(energia E_5) e mais um do tipo centro-centro(energia E_3).
- Este caso difere do anterior pelo fato de que a energia do sela-centro(E_5) coincide com a energia 0.

6. **Região 5:** $L > 0$ e $\beta_6 L^3 + 1 < \Lambda < 1$ e $\Lambda > \bar{\beta}L$ (Figura 2.9)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos: um do tipo centro-sela(energia E_1), outro do tipo sela-centro(energia E_6) e mais um do tipo centro-centro(energia E_3).
- Neste caso, diferentemente dos dois anteriores, a energia do sela-centro(E_6) é maior que a energia $E_5 = 0$.

7. **Região 6:** $L > 0$ e $\Lambda = 1$ e $\Lambda > \bar{\beta}L$ (Figura 2.10)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui dois pontos críticos: um do tipo centro-sela(energia $E_1 = 0$) e outro do tipo sela-centro(energia E_3).

8. **Região 7:** $L > 0$ e $1 < \Lambda < \beta_1 L^3 + 1$ e $\Lambda > \bar{\beta}L$ (Figura 2.11)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui dois pontos críticos: um do tipo centro-sela(energia E_1) e outro do tipo sela-centro(energia E_4).

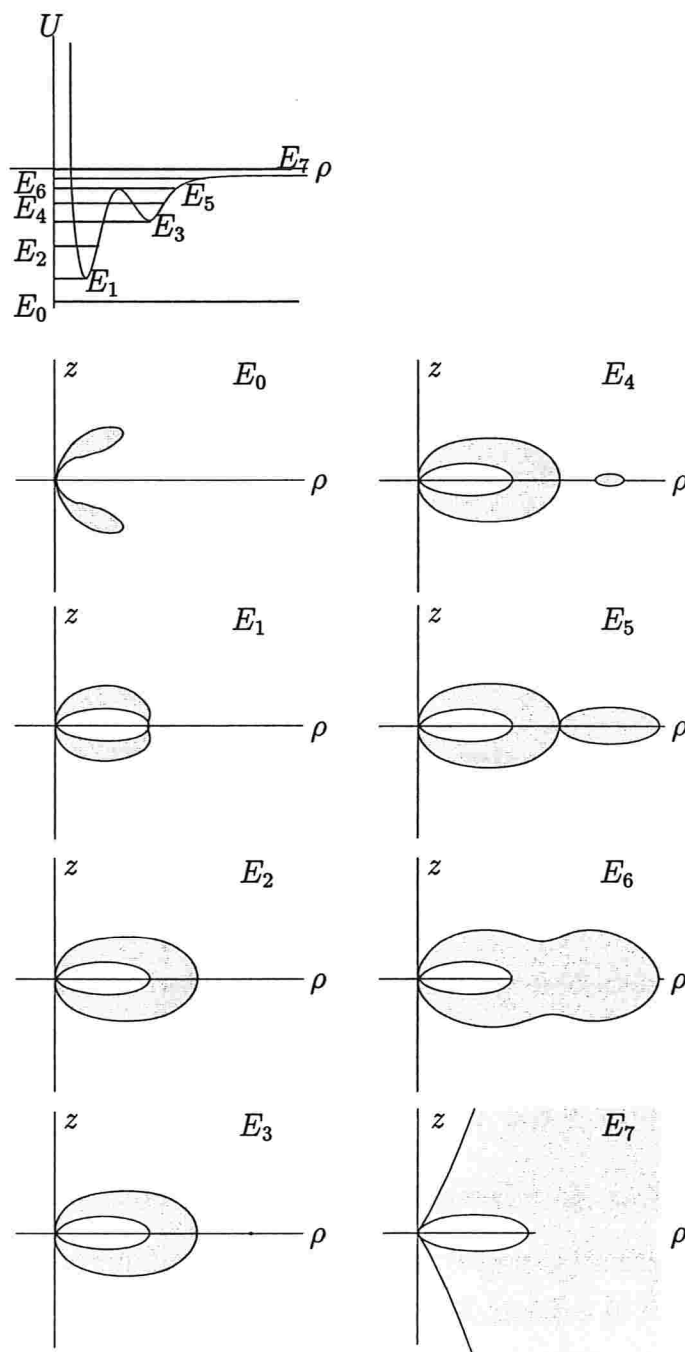


Figura 2.7: Regiões de Hill para o potencial U da região (3) da figura (2.1) entre as curvas Λ_2 e Λ_6 .

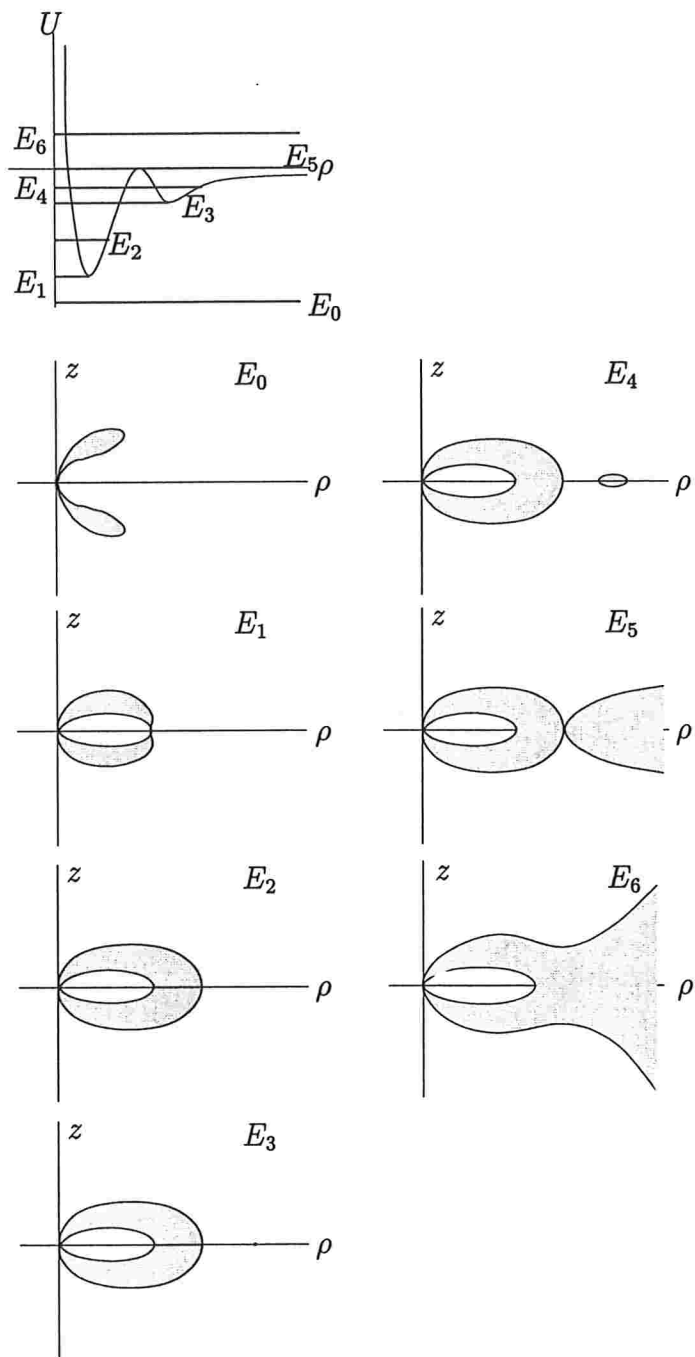


Figura 2.8: Regiões de Hill para o potencial U da região (4) da figura (2.1) sobre a curva Λ_6 .

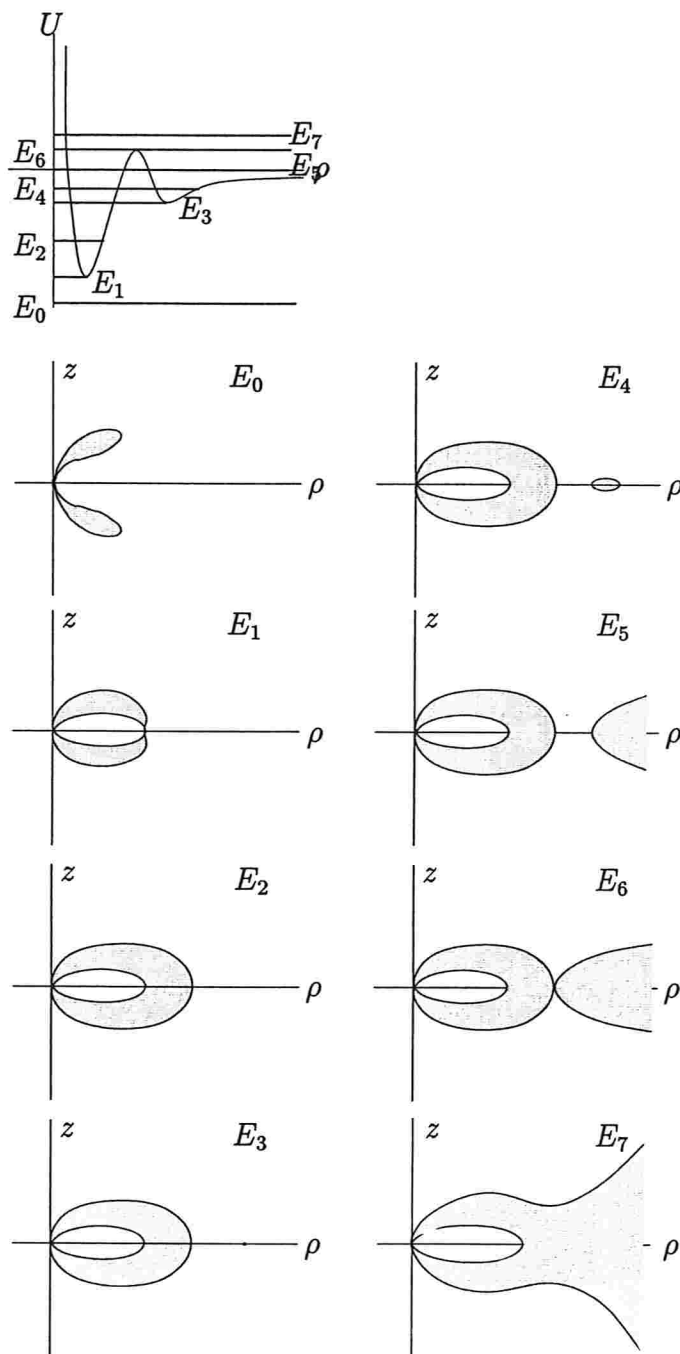


Figura 2.9: Regiões de Hill para o potencial U da região (5) da figura (2.1) entre as curvas Λ_6 e $\Lambda = 1$.

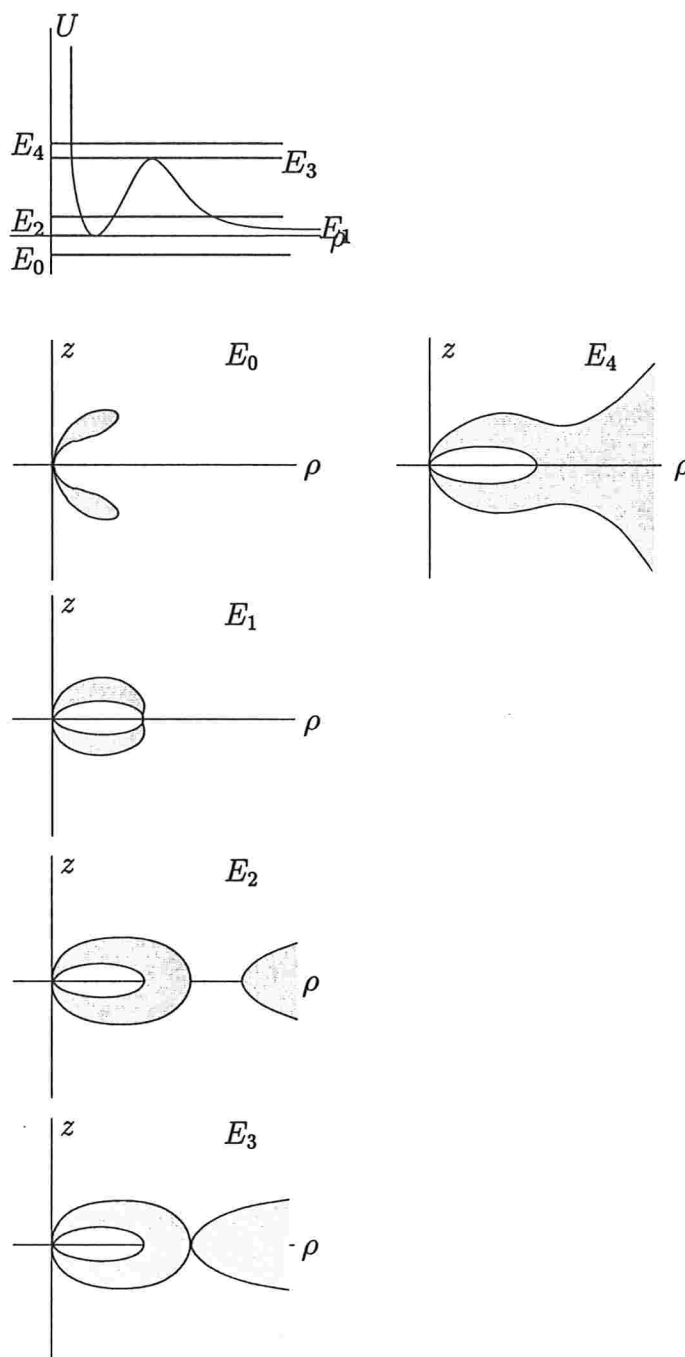


Figura 2.10: Regiões de Hill para o potencial U da região (6) da figura (2.1) sobre a curva $\Lambda = 1$.

- Este caso difere do anterior pelo fato de que a energia do centro-sela(E_1) é maior do que 0.

9. **Região 7C:** $L > 0$ e $\Lambda = 0$ e $\beta_1 L^3 + 1 < \Lambda < \bar{\beta}L$ (Figura 2.12)

- Existência da curva equipotencial quando $E_4 = L$, conforme foi visto no caso (2) da seção (2.2).
- O potencial possui dois pontos críticos: um do tipo centro-centro(energia E_2) e outro do tipo sela-centro(energia E_6).
- Neste caso, a região que se origina da “salsicha” existe mas longe da origem. Este é o caso de bifurcação entre o que possui a região “salsicha” ($\Lambda > 0$) e o que não possui ($\Lambda < 0$).

10. **Região 7D:** $L > 0$ e $\beta_1 L^3 + 1 < \Lambda < 0$ (Figura 2.13)

- Não-existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (3) da seção (2.2).
- O potencial possui dois pontos críticos: um do tipo centro-centro(energia E_2) e outro do tipo sela-centro(energia E_4).
- Neste caso, podemos ver que a região para uma energia $E_3 > E_2$ é um pouco deformada devido ao fato dela estar relacionada com a curva equipotencial(e também com a região “salsicha”) do caso anterior.

11. **Região 8:** $L > 0$ e $\Lambda = \beta_1 L^3 + 1$ (Figura 2.14)

- Não-existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (3) da seção (2.2).
- O potencial possui apenas um ponto crítico do tipo parabólico-sela(energia E_2).

12. **Região 9:** $L > 0$ e $\Lambda < \beta_1 L^3 + 1$ (Figura 2.15)

- Não-existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (3) da seção (2.2).

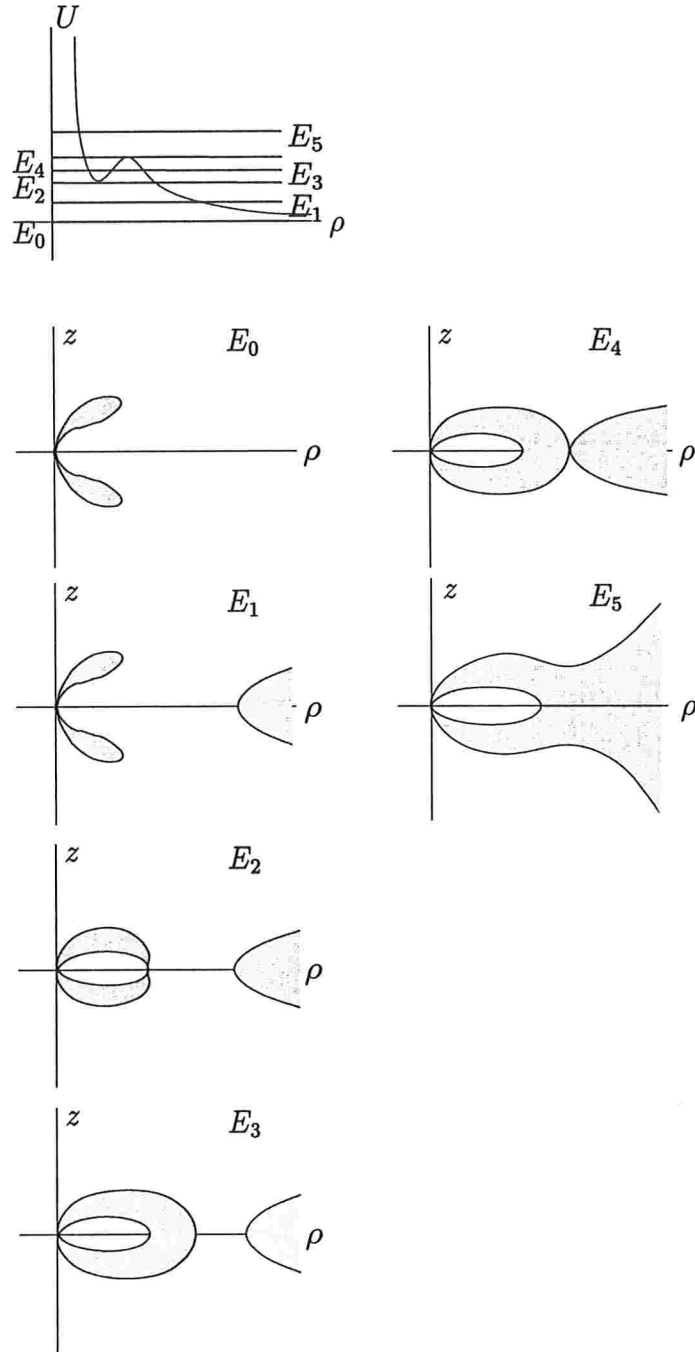


Figura 2.11: Regiões de Hill para o potencial U da região (7) da figura (2.1) entre as curvas $\Lambda = 1$ e Λ_1 .

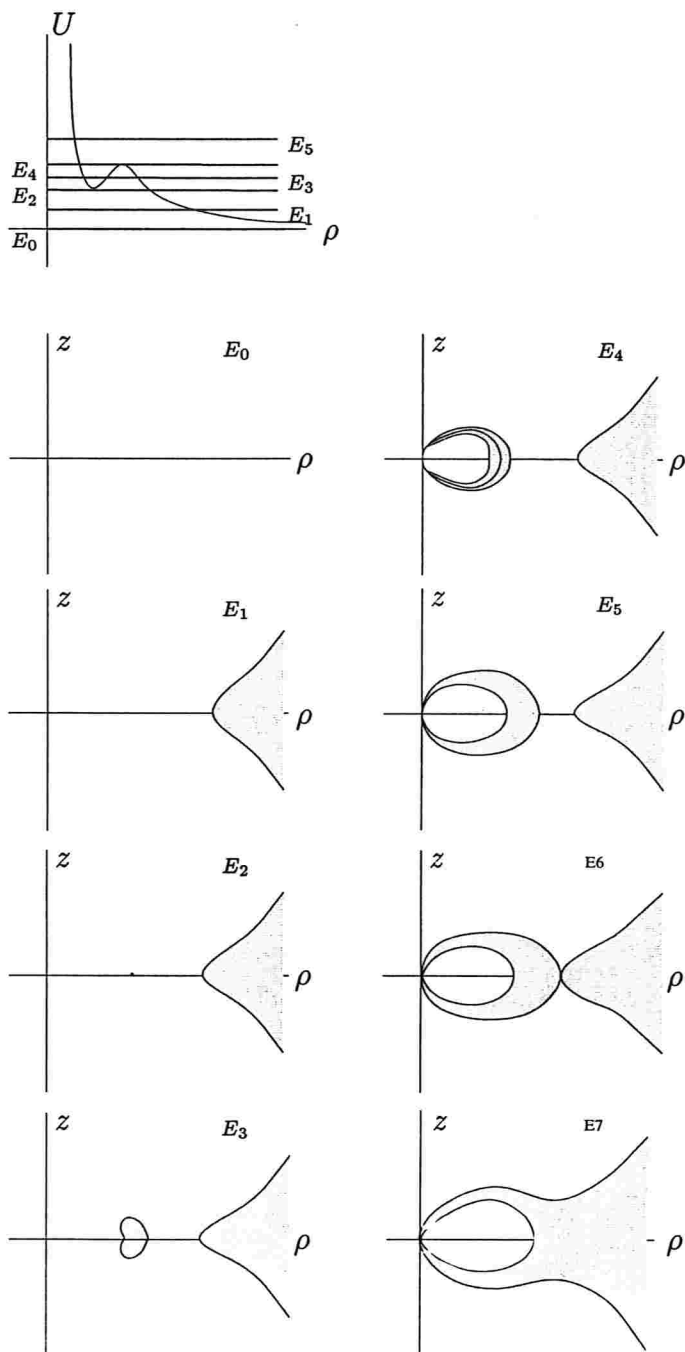


Figura 2.12: Regiões de Hill para o potencial U da região (7C) da figura (2.1) entre as curvas $\Lambda = 1$ e Λ_1 .

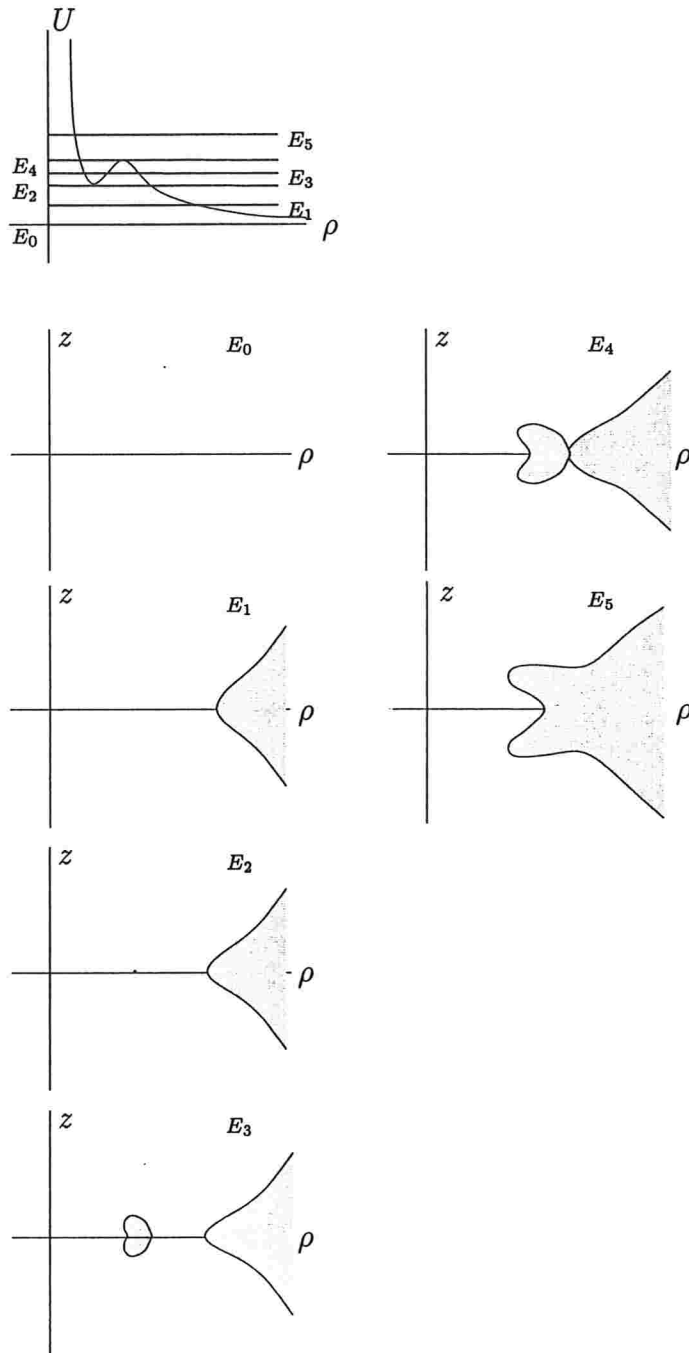


Figura 2.13: Regiões de Hill para o potencial U da região (7D) da figura (2.1) entre as curvas $\Lambda = 1$ e Λ_1 .

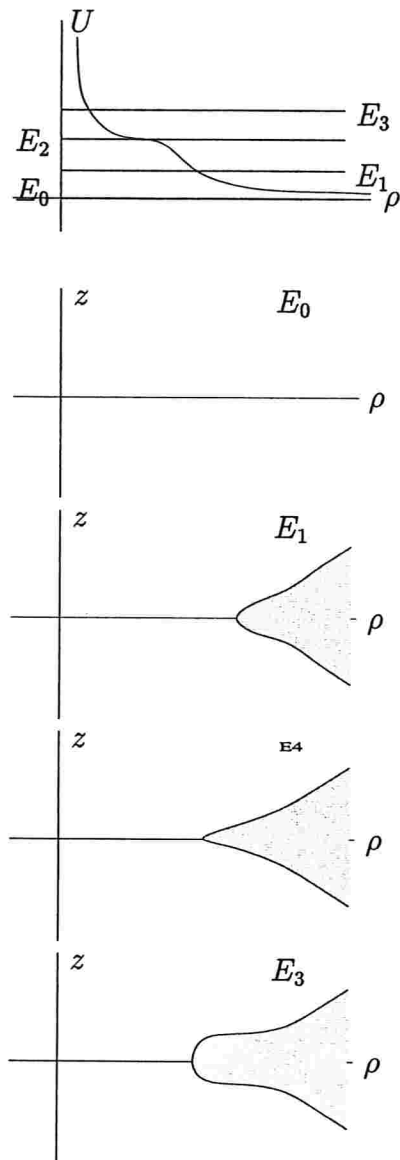


Figura 2.14: Regiões de Hill para o potencial U da região (8) da figura (2.1) sobre a curva Λ_2 .

- O potencial não possui pontos críticos.

13. Região onde $L \leq 0$ e $\Lambda \leq 1$ (Figura 2.15)

- Idêntico à região (9).

2.4 Equilíbrios Fora do Plano Equatorial

Para descobrir a existência ou não de pontos críticos fora do plano equatorial, deve-se analisar as equações dos pontos críticos em coordenadas convenientes.

A função potencial pode ser escrita como

$$U(\rho, r) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\rho} - \frac{\rho}{r^3} \right)^2 + \frac{\rho^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{r}. \quad (2.10)$$

Da expressão (2.10) para a função potencial obtêm-se as derivadas parciais da U :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho} &= - \left(\frac{L}{\rho} - \frac{\rho}{r^3} \right) \left(\frac{L}{\rho^2} + \frac{1}{r^3} \right) + \frac{2\rho}{r^3} \\ \frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{3\rho}{r^2} \left(\frac{L}{\rho} - \frac{\rho}{r^3} \right) - \frac{3\rho^2}{r^2} + \Lambda \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Após a substituição de $\tilde{u} = \frac{\rho^2}{r^3}$ e simplificações, obtêm-se que as equações dos pontos críticos são dadas por:

$$u^2(1 + 2r^3) - L^2 = 0 \quad (2.12)$$

$$3(L - u(1 + r^3)) + \Lambda r^2 = 0 \quad (2.13)$$

as quais são equivalentes a

$$u = \frac{3L + \Lambda r^2}{3(1 + r^3)} \quad (2.14)$$

$$2\Lambda^2 r^5 - 9L^2 r^4 + 12L\Lambda r^3 + \Lambda^2 r^2 + 6L\Lambda = 0 \quad (2.15)$$

Os zeros das últimas equações são os possíveis candidatos a pontos críticos do potencial U . No caso $L = 0$, é fácil verificar a não-existência de pontos críticos fora do plano equatorial.

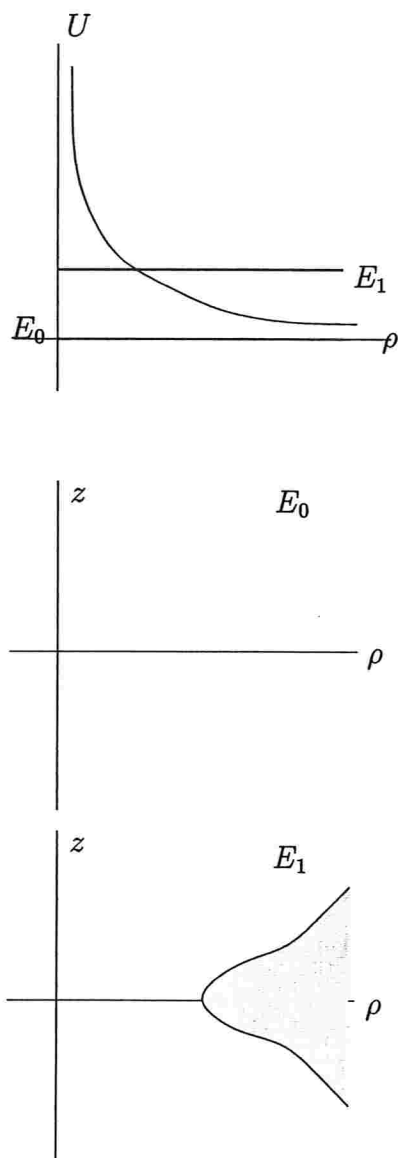


Figura 2.15: Regiões de Hill para o potencial U da região (9) da figura (2.1) abaixo da curva Λ_2 e também para $L < 0$.

Considera-se, então, o caso $L \neq 0$. Com isto, pode-se definir, a partir da equação (2.15), a função

$$f(r) = 2\beta^2 r^5 - 9r^4 + 12\beta r^3 + \beta^2 r^2 + 6\beta \quad (2.16)$$

onde

$$\beta = \frac{\Lambda}{L}.$$

Desta forma, os zeros de $f(r)$ são os candidatos a pontos críticos fora do plano equatorial. Mais ainda, pode-se obter um valor de β para o qual tais possíveis zeros bifurcam de 0 para 2 zeros. Este valor de β é tal que f e f' se anulam simultaneamente e é aproximadamente

$$\bar{\beta} \approx 0,92820323,$$

quando $\beta > 0$. No caso em que $\beta < 0$, os r 's são todos negativos e logo, não são considerados. O caso $\beta = 0$ equivale a $\Lambda = 0$, e daí $f(r) = -9r^4$, cujo único zero é $r = 0$, o qual não é considerado. Observa-se que $L > 0$ pois se $L < 0$ então $\Lambda < 0$ de onde $u < 0$, o que é um absurdo. Conclui-se que

- se $0 < \beta < \bar{\beta}$ então têm-se dois r 's que satisfazem $f = 0$;
- se $\beta = \bar{\beta}$ então tem-se um r que satisfaz $f = 0$ e;
- se $\beta > \bar{\beta}$ então não existem zeros de $f = 0$.

Resta verificar se para tais candidatos tem-se uma variável u correspondente bem definida. De fato, observa-se que isto só ocorre se a variável u é positiva e se a variável ρ , obtida a partir de u , é menor que o seu respectivo r . Logo, se além de satisfazer $f(r) = 0$, u é tal que

$$0 < u \leq \frac{1}{r}, \quad (2.17)$$

então o par (r, u) corresponde a um ponto crítico fora do plano equatorial.

Deseja-se determinar que região do plano (L, Λ) corresponde a tais pares. Para isso, considera-se novamente as equações (2.12) e (2.13) que determinam os pontos críticos fora do plano $z = 0$. Fixando L , segue da equação (2.12) que:

$$u = \frac{L}{(1 + 2r^3)^{1/2}}. \quad (2.18)$$

E da equação (2.13) obtém-se que:

$$\Lambda = 3 \left(\frac{(L-u)}{r^2} - ur \right). \quad (2.19)$$

E por fim como $r^2 = \rho^2 + z^2$ e $u = \frac{\rho^2}{r^3}$ resulta que

$$z = r(1 - ur)^{1/2} \quad (2.20)$$

e portanto através do programa (1) variando L e r , é verificado inicialmente se a condição (2.17) é satisfeita pra u dada por (2.18). Caso ela seja verdadeira, calcula-se Λ e z usando as equações (2.19) e (2.20). Se z estiver próximo de zero e Λ for positivo, tem-se o par (L, Λ) . Obtidos numericamente estes pares formam a curva χ de bifurcação entre 1 par de zeros e 2 pares de zeros fora do plano equatorial, o que pode ser visto na figura (2.16). Observa-se que tais pontos críticos aparecem aos pares, um simétrico ao outro em relação ao eixo $z = 0$.

Assim, classificando-se tais pontos de equilíbrio, as regiões de Hill podem ser esboçadas. A fim de obter tal classificação, lineariza-se o sistema (1.7), obtendo-se

$$\zeta' = M\zeta \quad (2.21)$$

onde $\zeta = (\rho, \phi, z, p_\rho, L, p_z)$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & H_{p_\rho p_\rho} & 0 & 0 \\ H_{L\rho} & 0 & H_{Lz} & 0 & H_{LL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{p_z p_z} \\ -H_{\rho\rho} & 0 & -H_{\rho z} & 0 & -H_{\rho L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -H_{z\rho} & 0 & -H_{zz} & 0 & -H_{zL} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

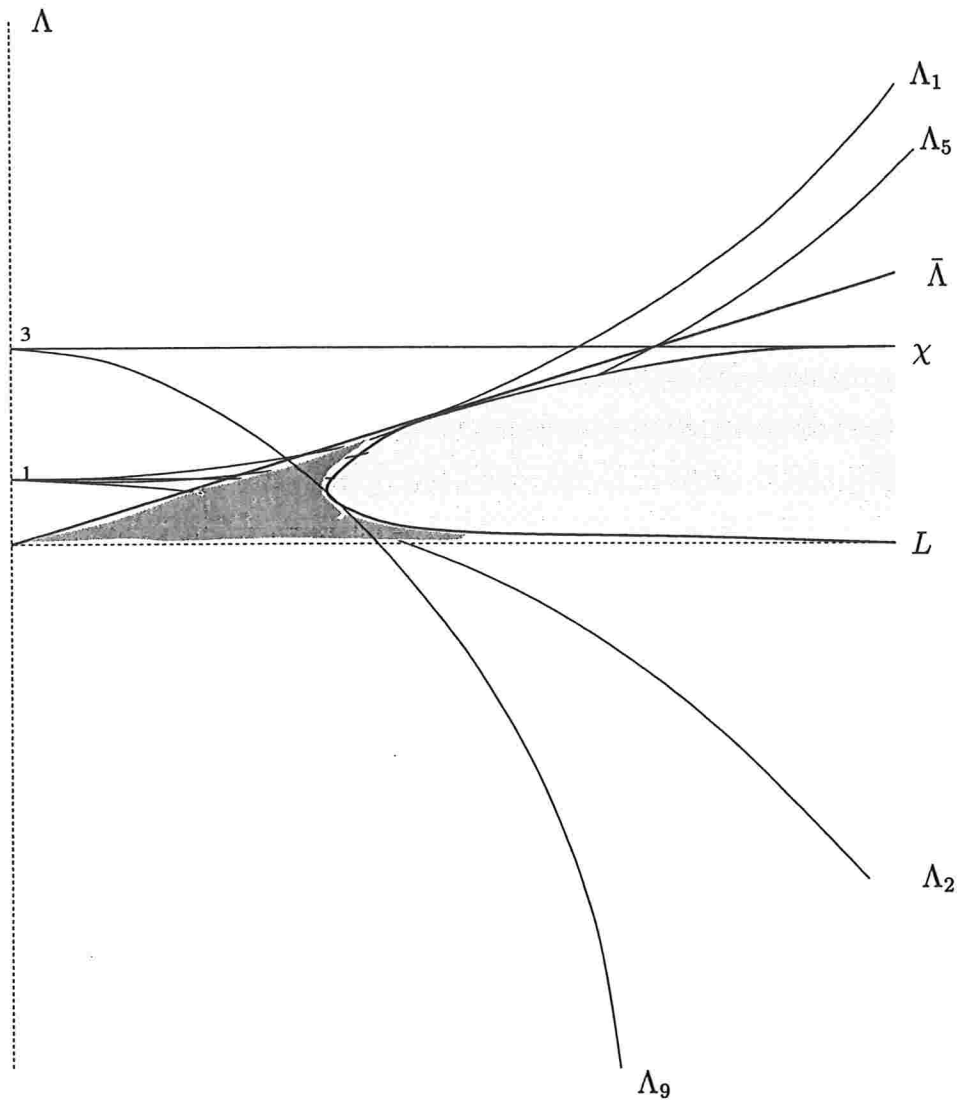
e H_{ij} são as derivadas segundas do Hamiltoniano H no ponto crítico ζ_* , com $i, j = \rho, L, z, p_\rho, p_z$.

O polinômio característico de M é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^4 + (H_{\rho\rho} + H_{zz})\lambda^2 + (H_{\rho\rho}H_{zz} - H_{\rho z}^2)), \quad (2.23)$$

onde, em ζ_* ,

$$H_{\rho\rho} = \frac{4L^2}{\rho_*^4} - \frac{3\Lambda\rho_*^2}{(\rho_*^2 + z_*^2)^{5/2}} + 3\rho_*^2 \left(\frac{\rho_*^2 - 4z_*^2 - 5L}{(\rho_*^2 + z_*^2)^{7/2}} \right) + \frac{12\rho_*^2(\rho_*^2 - z_*^2)}{(\rho_*^2 + z_*^2)^5}, \quad (2.24)$$



- 1 par de pontos críticos fora do plano equatorial
- 2 pares de pontos críticos fora do plano equatorial

Figura 2.16: Diagrama de bifurcação do número de zeros fora do plano equatorial em termos do par (L, Λ) para $Q\mu > 0$ onde $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_5$ são como na figura (1.1), Λ_9 é como na figura (1.3), $\bar{\Lambda} = 0,92820323L$ e χ obtida numericamente, conforme explicado nesta seção.

$$H_{zz} = 3z^2 \left(-\frac{\Lambda}{(\rho_*^2 + z_*^2)^{5/2}} + \frac{5(\rho^2 - L)}{(\rho_*^2 + z_*^2)^{7/2}} + \frac{8\rho_*}{(\rho_*^2 + z_*^2)^5} \right) \quad (2.25)$$

e

$$H_{\rho z} = -3\rho_* z_* \left(\frac{\Lambda}{(\rho_*^2 + z_*^2)^{5/2}} + \frac{5L + 2z_*^2 - 3\rho_*^2}{(\rho_*^2 + z_*^2)^{7/2}} + \frac{2(z_*^2 - 3\rho_*^2)}{(\rho_*^2 + z_*^2)^5} \right) \quad (2.26)$$

Após o cálculo para diversos casos conclui-se que tais pontos de equilíbrio são de dois tipos: centro-centro e sela-centro, sendo que o segundo só aparece no caso onde temos dois pares de pontos críticos fora do plano equatorial.

Neste momento esboçam-se as regiões de Hill para os casos onde existem pontos de equilíbrio fora do plano equatorial. São elas: as regiões (1B), (2B), (3A), (3B), (4A), (4B), (5A1), (5A2), (5A3), (5B), (6A), (6B), (7A), (7B) das figuras (2.1) e (2.2).

Observa-se que nos casos A tem-se o par de equilíbrios do tipo centro-centro e, nos casos B têm-se os dois pares do tipo centro-centro e sela-centro. Nas regiões (3), (4), (5), (6) e (7), o equilíbrio do tipo centro-centro de energia E_3 se bifurca em dois formando o par do tipo centro-centro que aparece nas regiões A. O par de equilíbrios do tipo centro-sela que aparece nas regiões B se origina da bifurcação do equilíbrio do tipo sela-centro das regiões A. Sobre a curva χ , estes pares coincidem com os equilíbrios no plano equatorial.

1. Região 1B: $L > 0$ e $\beta_2 L^3 + 1 < \Lambda < \bar{\beta}L$ (Figura 2.17)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui apenas um ponto crítico do tipo centro-sela(E_1) no plano equatorial e dois pares de pontos críticos fora deste plano, sendo: dois do tipo centro-centro(E_3) e dois do tipo sela-centro(E_5).

2. Região 2B: $L > 0$ e $\Lambda = \beta_2 L^3 + 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ (Figura 2.18)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui dois pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_1) e outro do tipo parabólico-sela(energia E_7) e, mais dois pares de pontos críticos fora deste plano, sendo: dois do tipo centro-centro(E_3) e dois do tipo sela-centro(E_5).

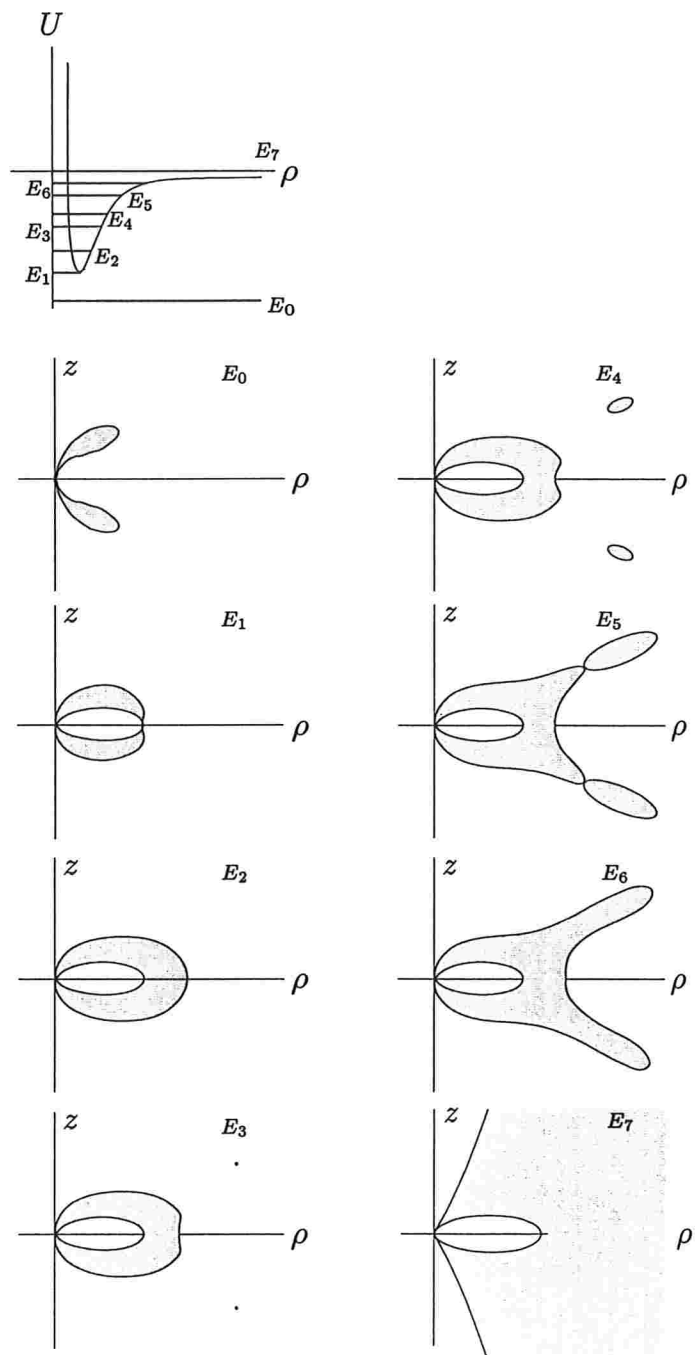


Figura 2.17: Regiões de Hill para o potencial U da região (1B) da figura (2.2) acima da curva Λ_2 .

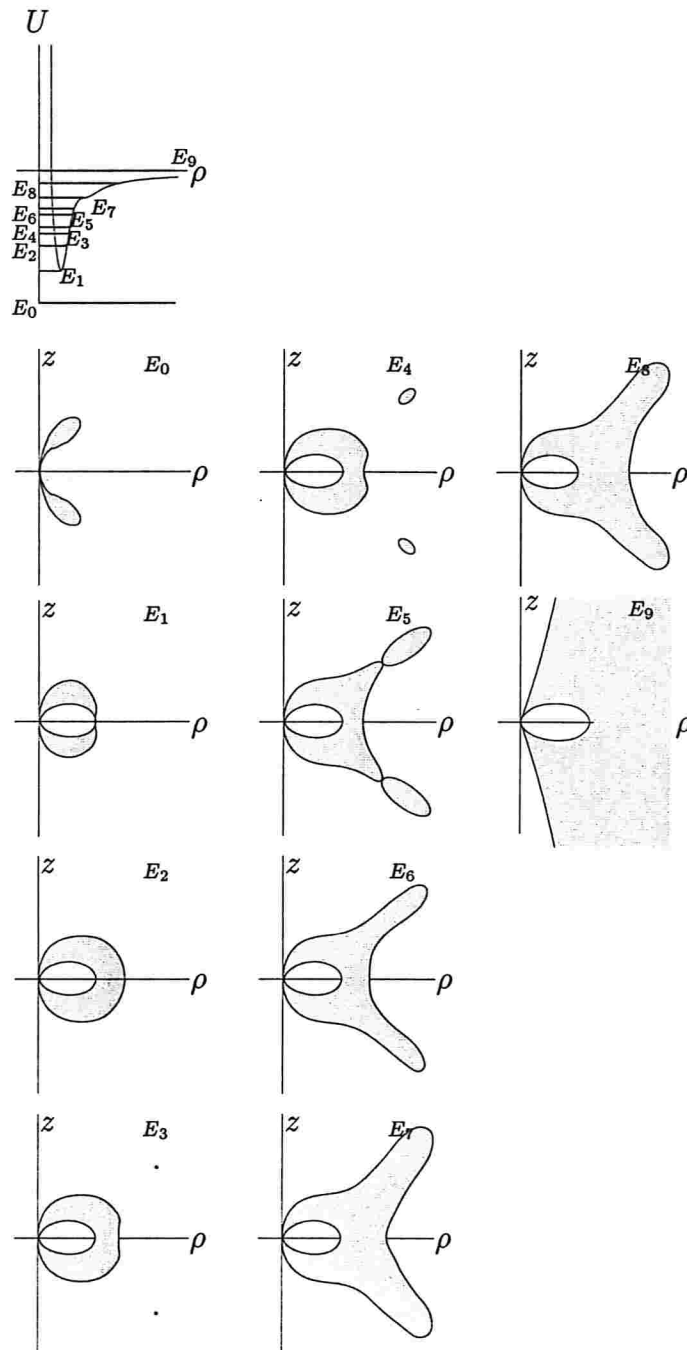


Figura 2.18: Regiões de Hill para o potencial U da região (2B) da figura (2.2) sobre a curva Λ_2 .

3. **Região 3A:** $L > 0$ e $\beta_2 L^3 + 1 < \Lambda < \beta_6 L^3 + 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ e $(L, \Lambda) \in \text{int}(\chi)$ (Figura 2.19)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_1), outro do tipo sela-centro(energia E_7) e um outro do tipo centro-sela(energia E_5) e, mais um par de pontos críticos fora deste plano do tipo centro-centro(E_3).

4. **Região 3B:** $L > 0$ e $\beta_2 L^3 + 1 < \Lambda < \beta_6 L^3 + 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ (Figura 2.20)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_1), outro do tipo sela-sela(energia E_9) e um outro do tipo centro-sela(energia E_5) e, mais dois pares de pontos críticos fora deste plano, sendo: dois do tipo centro-centro(E_3) e dois do tipo sela-centro(E_7).

5. **Região 4A:** $L > 0$ e $\Lambda = \beta_6 L^3 + 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ e $(L, \Lambda) \in \text{int}(\chi)$ (Figura 2.21)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_1), outro do tipo sela-centro(energia E_7) e um outro do tipo centro-sela(energia E_5) e, mais um par de pontos críticos fora deste plano do tipo centro-centro(E_3).
- Este caso difere do caso da região (3A) pelo fato de que a energia do sela-centro(E_7) coincide com a energia 0.

6. **Região 4B:** $L > 0$ e $\Lambda = \beta_6 L^3 + 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ (Figura 2.22)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_1), outro do tipo sela-sela(energia E_9) e um outro do tipo centro-sela(energia E_5) e, mais dois pares de pontos críticos

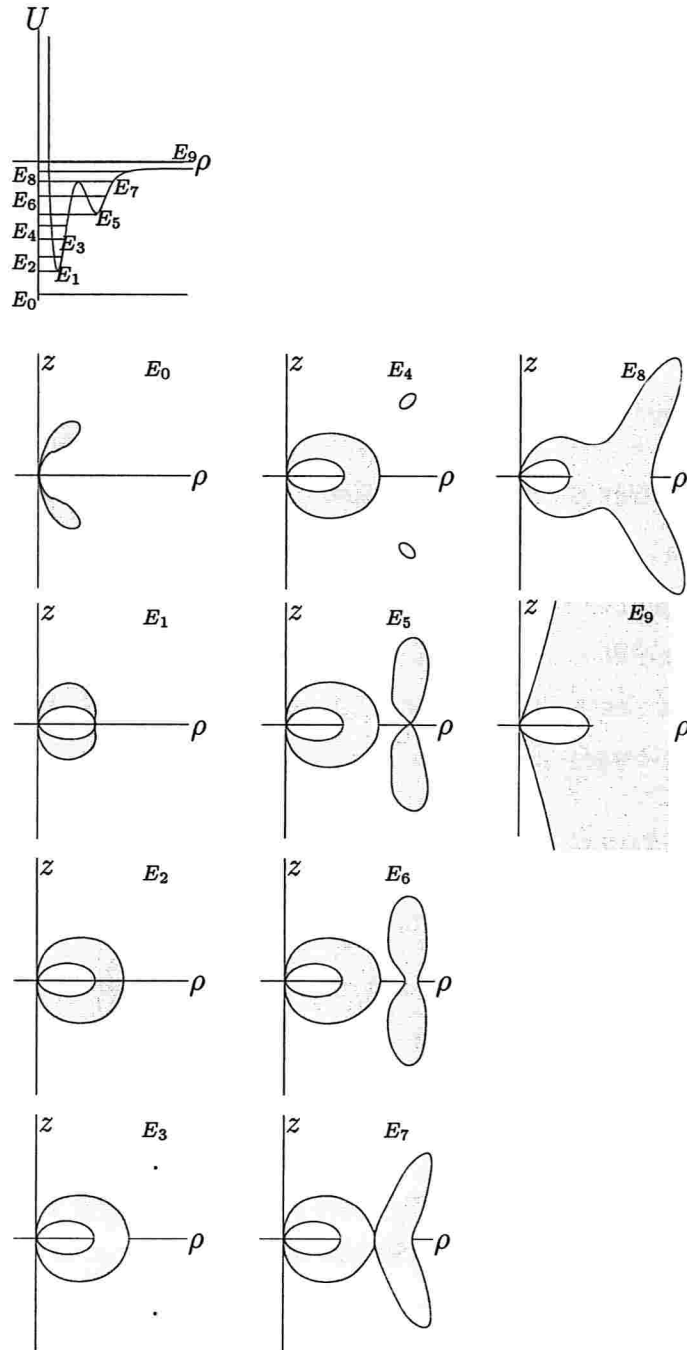


Figura 2.19: Regiões de Hill para o potencial U da região (3A) da figura (2.2) entre as curvas Λ_2 e Λ_6 .

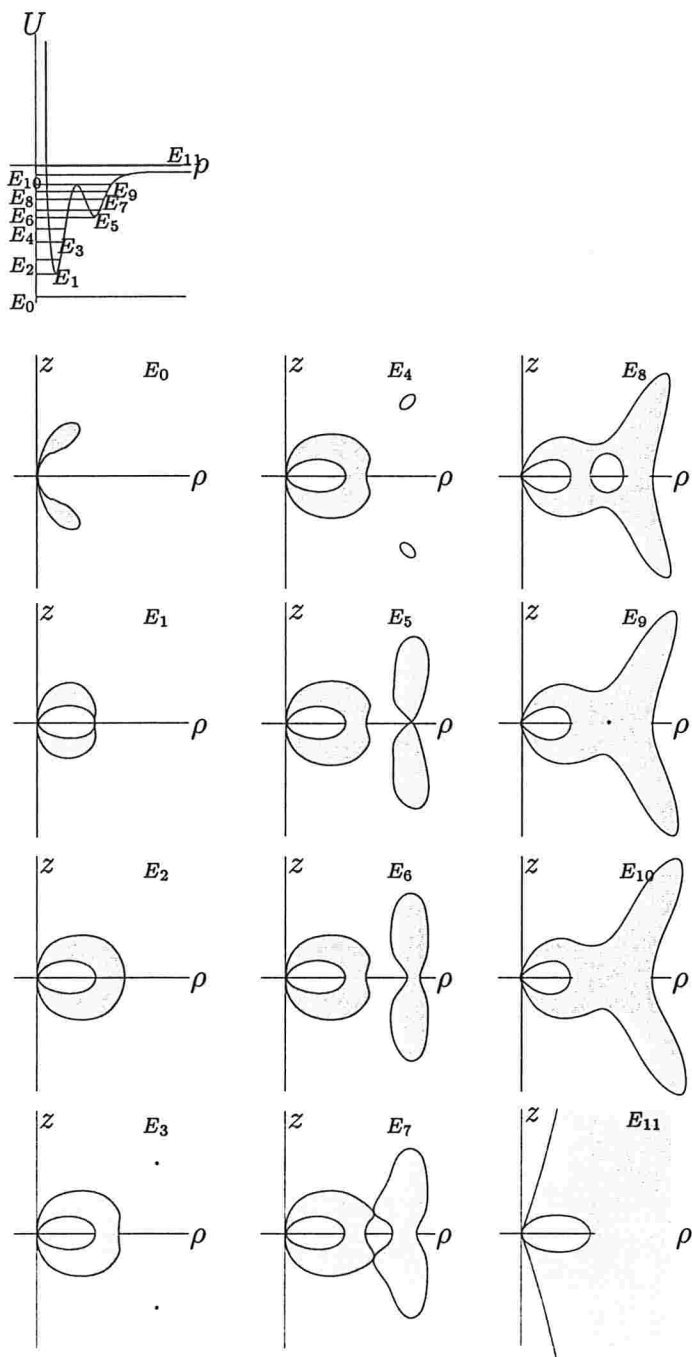


Figura 2.20: Regiões de Hill para o potencial U da região (3B) da figura (2.2) entre as curvas Λ_2 e Λ_6 .

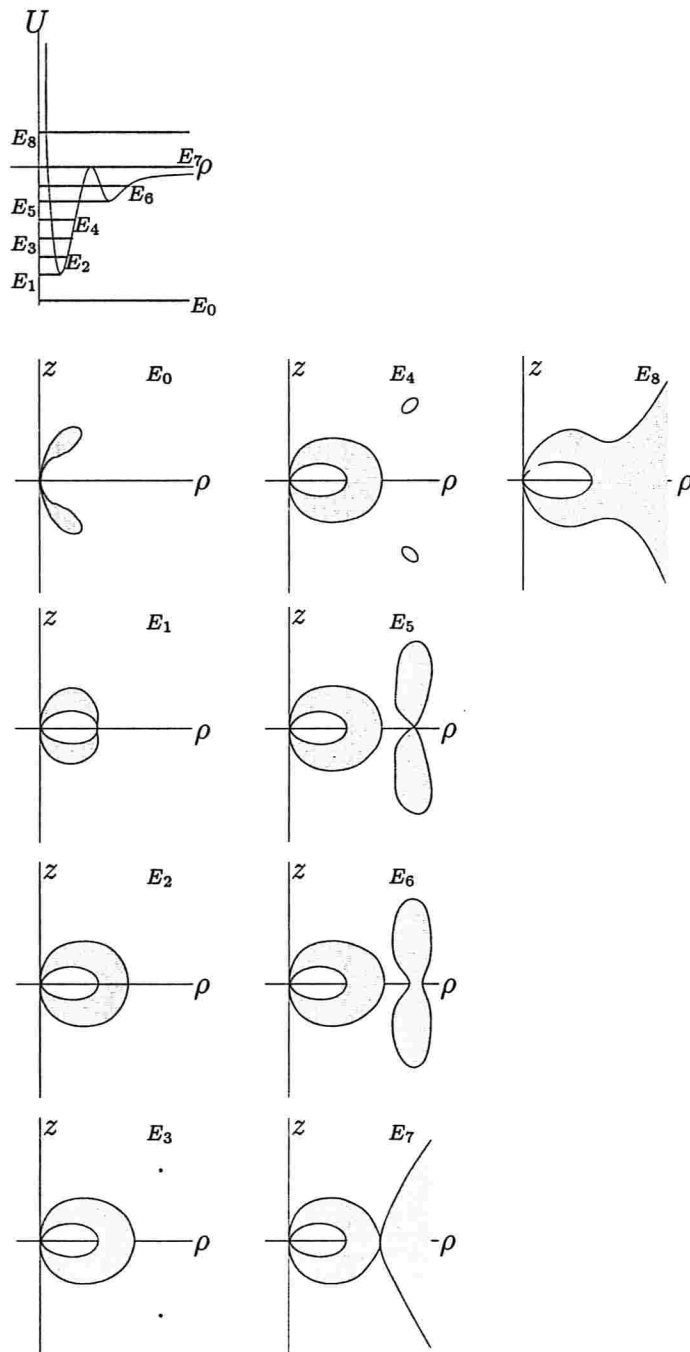


Figura 2.21: Regiões de Hill para o potencial U da região (4A) da figura (2.2) sobre a curva Λ_6 .

fora deste plano, sendo: dois do tipo centro-centro(E_3) e dois do tipo sela-centro(E_7).

- Este caso difere do caso da região (3B) pelo fato de que a energia do sela-sela(E_9) coincide com a energia 0.

No caso da região (5A) da figura (2.1) têm-se três casos a considerar onde a topologia das regiões de Hill se modifica dependendo das energias dos dois poços do potencial U .

7. **Região 5A1:** $L > 0$ e $\beta_6 L^3 + 1 < \Lambda < 1$ e $\Lambda > e$ (L, Λ) $\in \text{int}(\chi)$ (Figura 2.23)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_1), outro do tipo sela-centro(energia E_7) e um outro do tipo centro-sela(energia E_5) e, mais um par de pontos críticos fora deste plano do tipo centro-centro(E_3).
- Neste caso, diferentemente dos casos das regiões (3A) e (4A), a energia do sela-centro(E_8) é maior que a energia $E_7 = 0$.
- A energia E_1 do primeiro poço é menor que a energia E_5 do segundo poço.

8. **Região 5A2:** $L > 0$ e $\beta_6 L^3 + 1 < \Lambda < 1$ e $\Lambda > e$ (L, Λ) $\in \text{int}(\chi)$ (Figura 2.24)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_3), outro do tipo sela-centro(energia E_6) e um outro do tipo centro-sela(energia E_3) e, mais um par de pontos críticos fora deste plano do tipo centro-centro(E_1).
- Neste caso, diferentemente dos casos das regiões (3A) e (4A), a energia do sela-centro(E_6) é maior que a energia $E_5 = 0$.
- As energias dos dois poços coincidem(E_3).

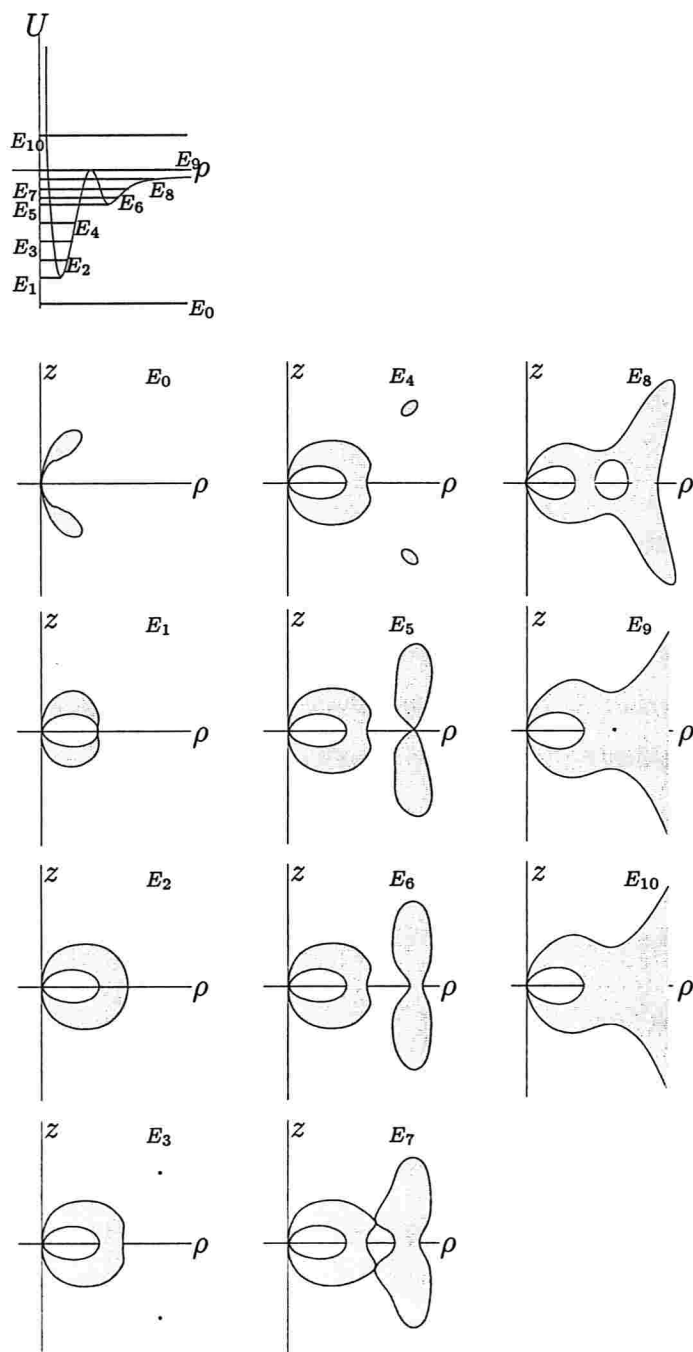


Figura 2.22: Regiões de Hill para o potencial U da região (4B) da figura (2.2) sobre a curva Λ_6 .

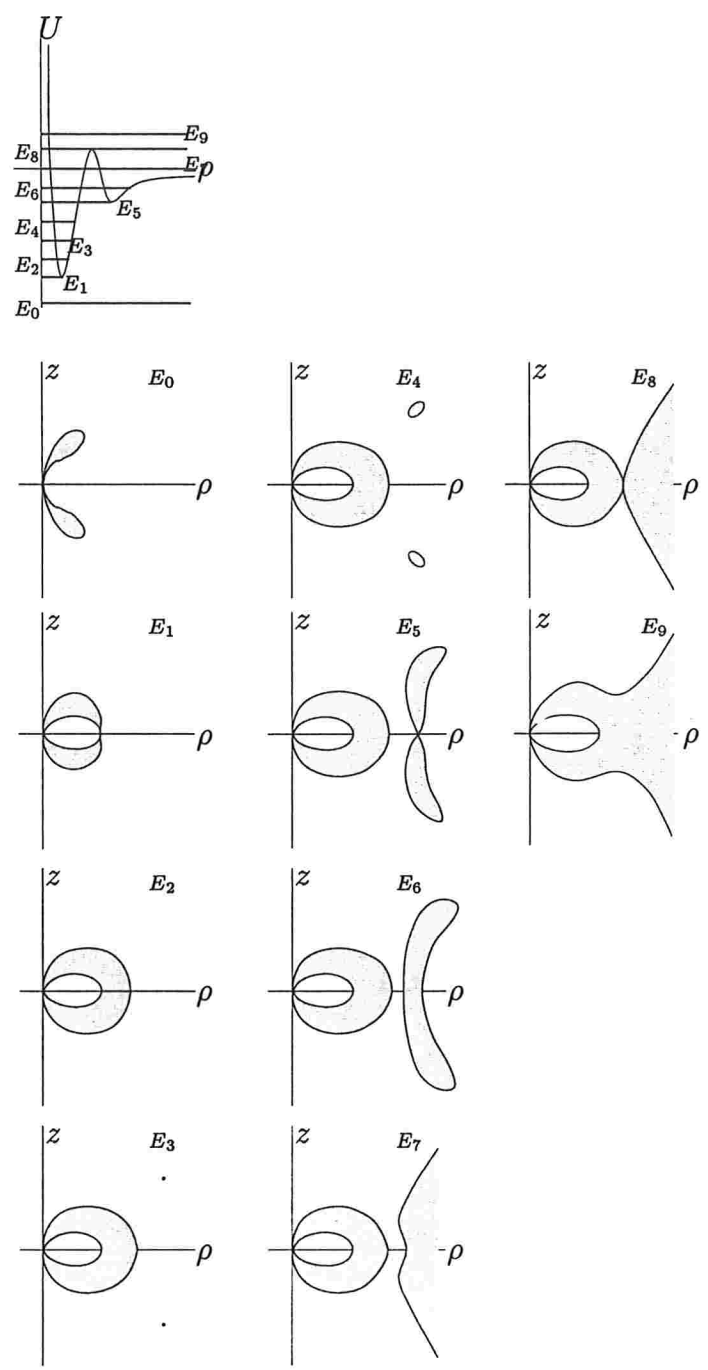


Figura 2.23: Regiões de Hill para o potencial U da região (5A1) da figura (2.1) entre as curvas Λ_6 e $\Lambda = 1$.

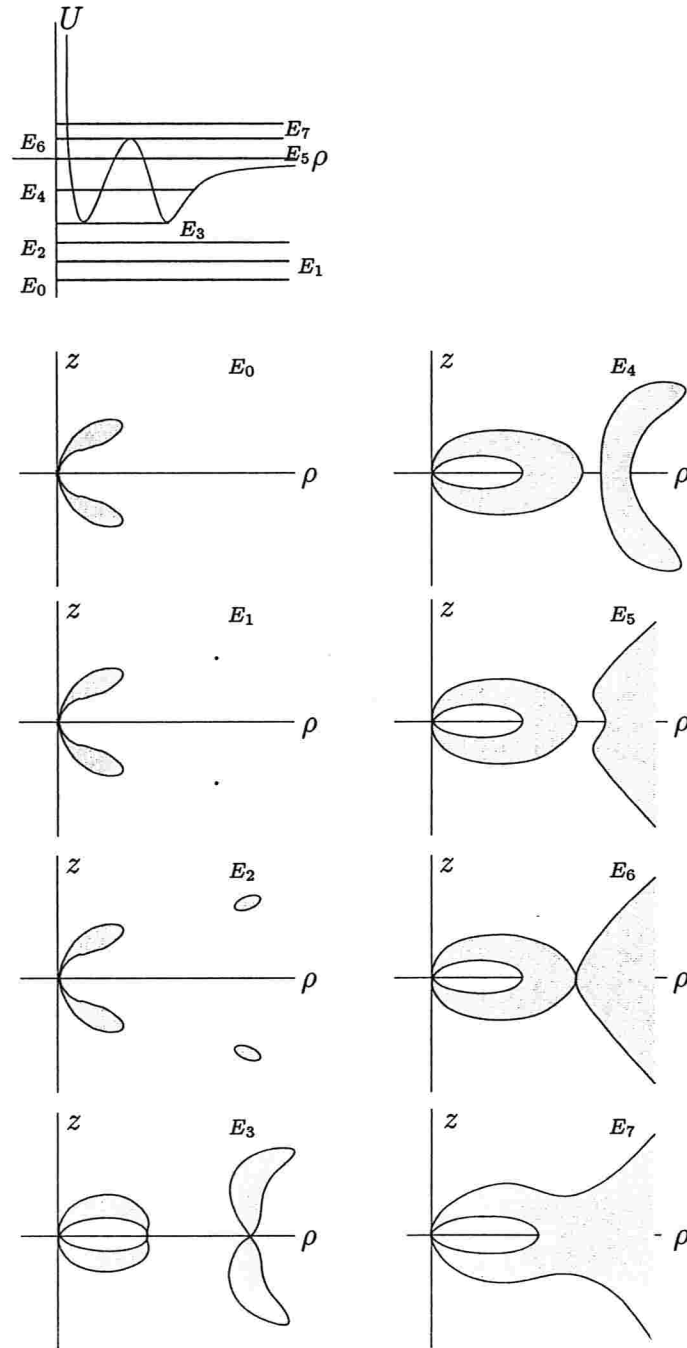


Figura 2.24: Regiões de Hill para o potencial U da região (5A2) da figura (2.1) entre as curvas Λ_6 e $\Lambda = 1$.

9. **Região 5A3:** $L > 0$ e $\beta_6 L^3 + 1 < \Lambda < 1$ e $\Lambda > e$ e $(L, \Lambda) \in \text{int}(\chi)$ (Figura 2.25)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_5), outro do tipo sela-centro(energia E_8) e um outro do tipo centro-sela(energia E_3) e, mais um par de pontos críticos fora deste plano do tipo centro-centro(E_1).
- Neste caso, diferentemente dos casos das regiões (3A) e (4A), a energia do sela-centro(E_8) é maior que a energia $E_7 = 0$.
- A energia E_5 do primeiro poço é maior que a energia E_3 do segundo poço.

10. **Região 5B:** $L > 0$ e $\beta_6 L^3 + 1 < \Lambda < 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ (Figura 2.26)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui três pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_1), outro do tipo sela-sela(energia E_{10}) e um outro do tipo centro-sela(energia E_5) e, mais dois pares de pontos críticos fora deste plano, sendo: dois do tipo centro-centro(E_3) e dois do tipo sela-centro(E_8).
- Neste caso, diferentemente dos casos das regiões (3B) e (4B), a energia do sela-centro(E_{10}) é maior que a energia $E_7 = 0$.

11. **Região 6A:** $L > 0$ e $\Lambda = 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ e $(L, \Lambda) \in \text{int}(\chi)$ (Figura 2.27)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui dois pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia $E_3 = 0$) e outro do tipo sela-centro(energia E_5) e, mais um par de pontos críticos fora deste plano do tipo centro-centro(E_1).

12. **Região 6B:** $L > 0$ e $\Lambda = 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ (Figura 2.28)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).

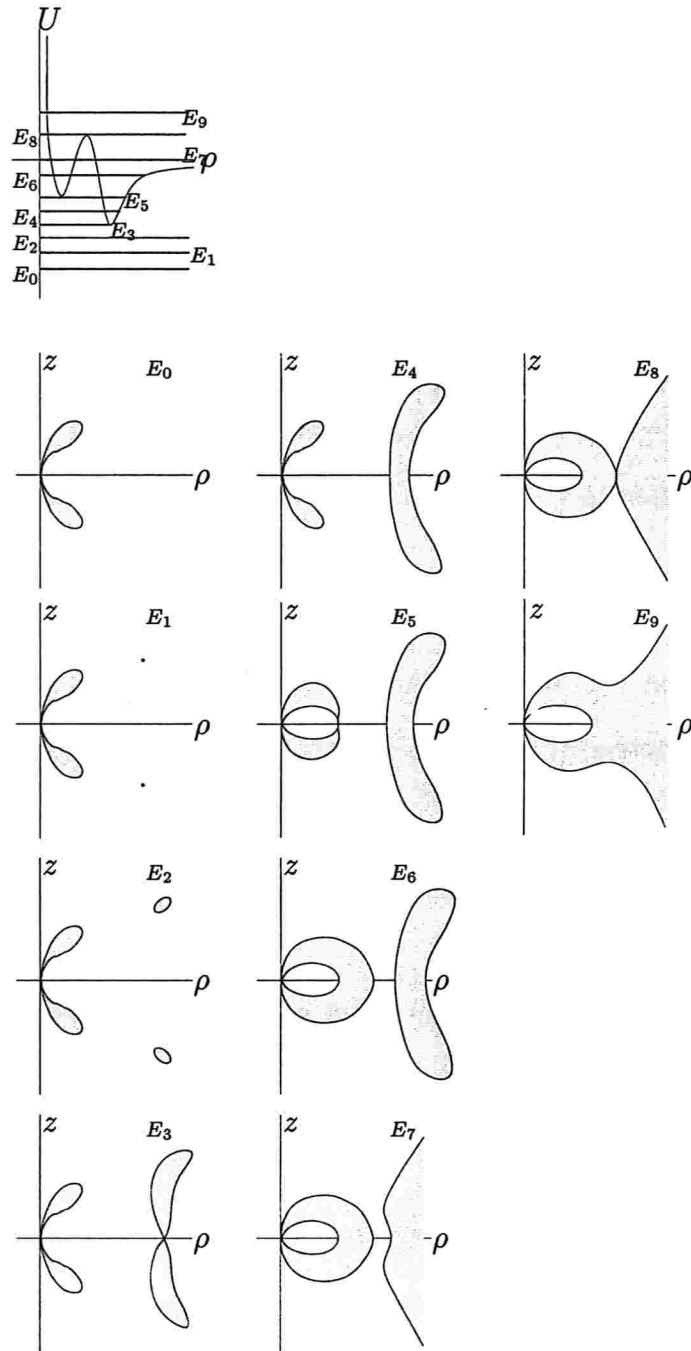


Figura 2.25: Regiões de Hill para o potencial U da região (5A3) da figura (2.1) entre as curvas Λ_6 e $\Lambda = 1$.

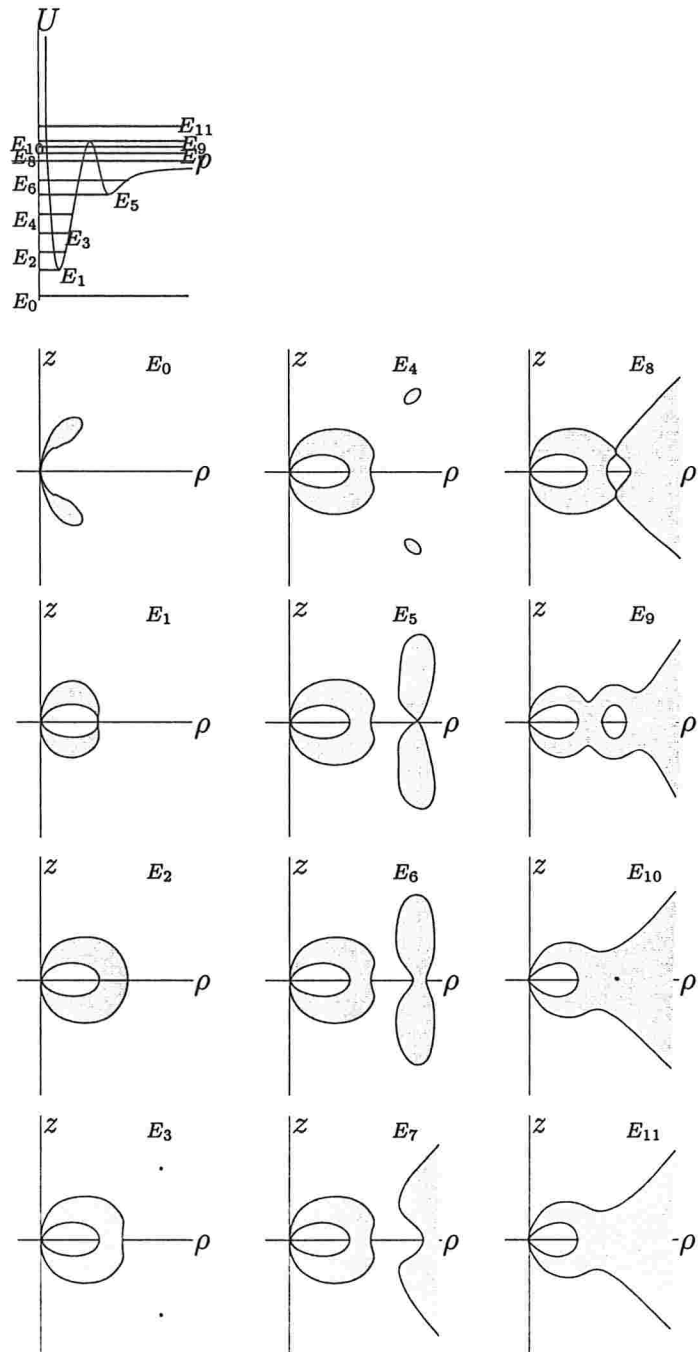


Figura 2.26: Regiões de Hill para o potencial U da região (5B) da figura (2.2) entre as curvas Λ_6 e $\Lambda = 1$.

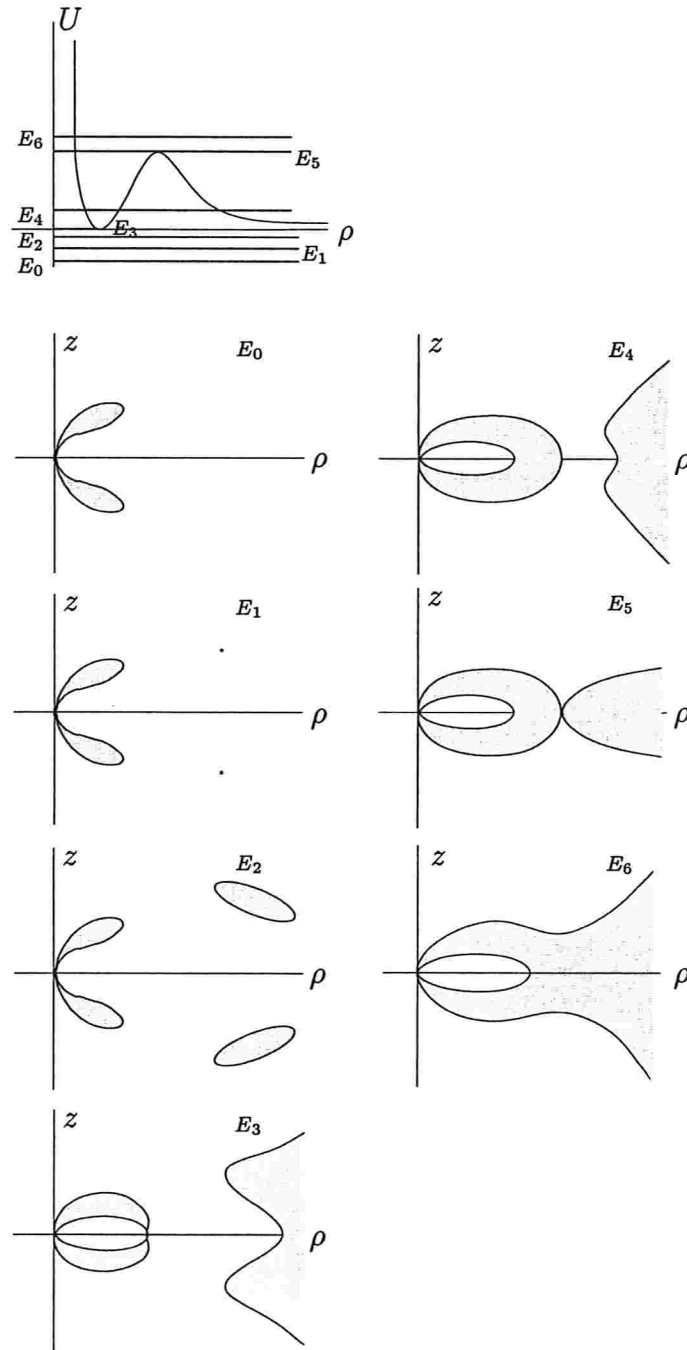


Figura 2.27: Regiões de Hill para o potencial U da região (6A) da figura (2.1) sobre a curva $\Lambda = 1$.

- O potencial possui dois pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia $E_3 = 0$) e outro do tipo sela-sela(energia E_7) e, mais dois pares de pontos críticos fora deste plano, sendo: dois do tipo centro-centro(E_1) e dois do tipo sela-centro(E_5).

13. **Região 7A:** $L > 0$ e $1 < \Lambda < \beta_1 L^3 + 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ e $(L, \Lambda) \in \text{int}(\chi)$ (Figura 2.29)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui dois pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_4) e outro do tipo sela-centro(energia E_6) e, mais um par de pontos críticos fora deste plano do tipo centro-centro(E_1).
- Este caso difere do caso da região (6A) pelo fato de que a energia do centro-sela(E_4) é maior do que 0.

14. **Região 7B:** $L > 0$ e $1 < \Lambda < \beta_1 L^3 + 1$ e $\Lambda < \bar{\beta}L$ (Figura 2.30)

- Existência da região “salsicha”, de acordo com o caso (1) da seção (2.2).
- O potencial possui dois pontos críticos no plano equatorial, sendo: um do tipo centro-sela(energia E_4) e outro do tipo sela-sela(energia E_8) e, mais dois pares de pontos críticos fora deste plano, sendo: dois do tipo centro-centro(E_1) e dois do tipo sela-centro(E_6).
- Este caso difere do caso da região (6B) pelo fato de que a energia do centro-sela(E_4) é maior do que 0.

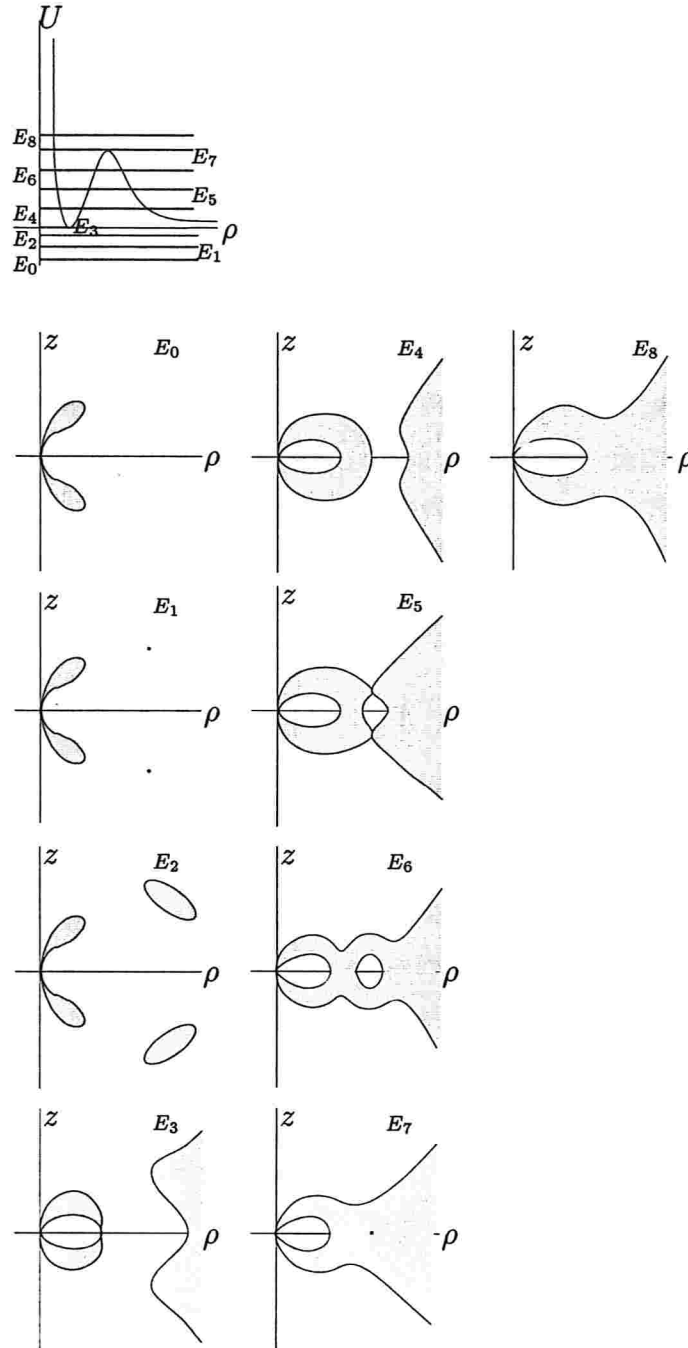


Figura 2.28: Regiões de Hill para o potencial U da região (6B) da figura (2.2) sobre a curva $\Lambda = 1$.

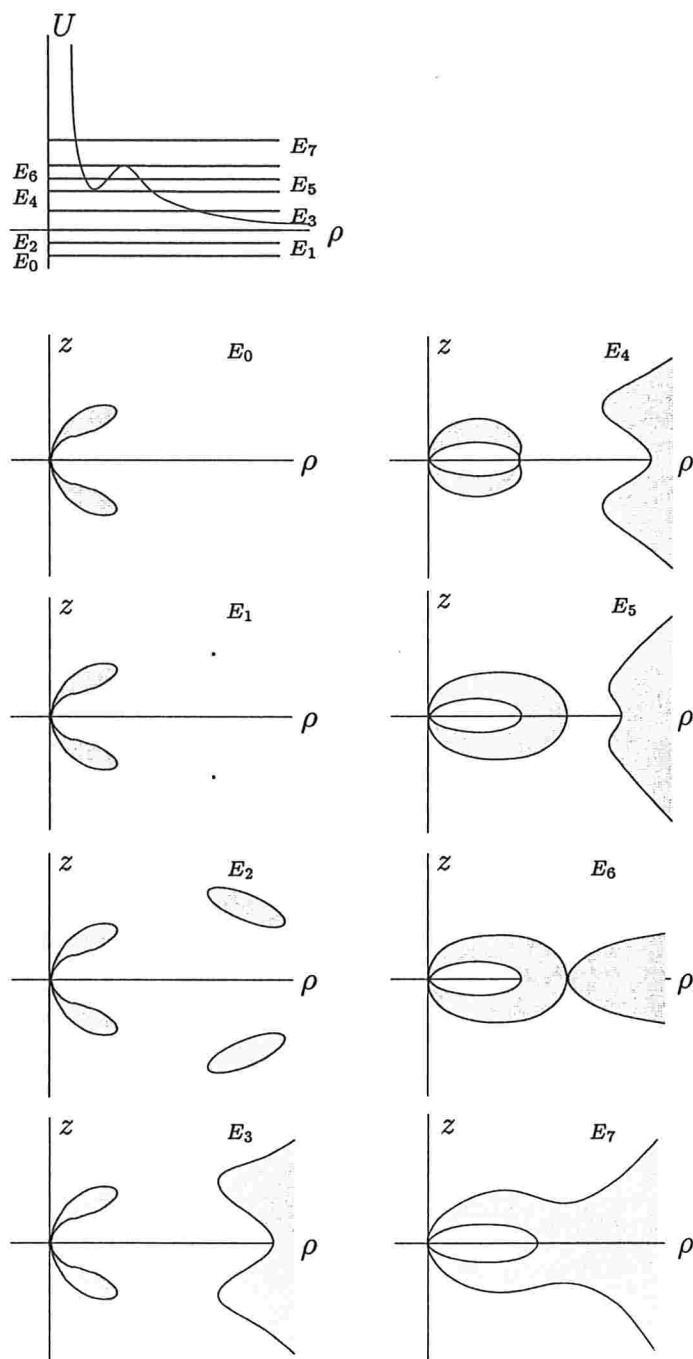


Figura 2.29: Regiões de Hill para o potencial U da região (7A) da figura (2.1) entre as curvas $\Lambda = 1$ e Λ_1 .

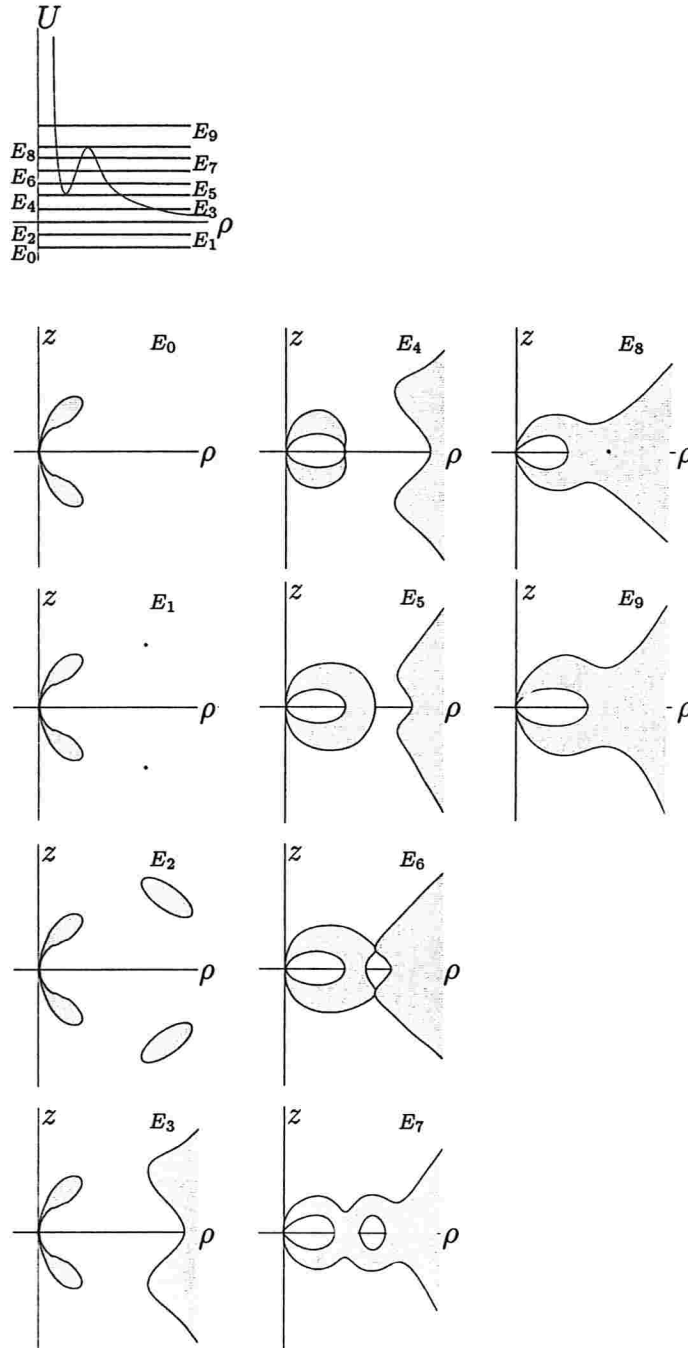


Figura 2.30: Regiões de Hill para o potencial U da região (7B) da figura (2.2) entre as curvas $\Lambda = 1$ e Λ_1 .

Dinâmica Próxima às Órbitas Homoclínicas ao Sela-Centro

Neste último capítulo apresenta-se um breve estudo da dinâmica próxima aos laços homoclínicos sela-centro. Na primeira seção é introduzida a aplicação de Poincaré e uma aproximação discreta da mesma. Esta aproximação possui dois invariantes: γ e α . O invariante γ está associado aos autovalores do sela-centro. O invariante α é definido na seção seguinte, onde também é dada uma interpretação geométrica para ele. Na seção 3, apresenta-se o algoritmo usado para o cálculo numérico do invariante α . Discorre-se um pouco sobre a estabilidade orbital dos laços sela-centro na seção 4. E finalmente, na última seção, mostra-se a existência de atratores para a aproximação discreta apresentada na seção inicial.

3.1 Aplicação de Poincaré e sua Aproximação Discreta

Neste momento, pretende-se estudar a dinâmica próxima às órbitas homoclínicas ao equilíbrio sela-centro contidas no plano equatorial. Duas tais órbitas são mostradas na figura (3.1). Para tanto, considera-se o conjunto invariante dado pelo equilíbrio sela-centro e pela órbita homoclínica a ele, o qual é denominado laço sela-centro e denotado por Γ . Observa-se que, do ponto de vista topológico, um laço sela-centro é similar a uma órbita periódica de “período infinito”, o que sugere o uso de seções de

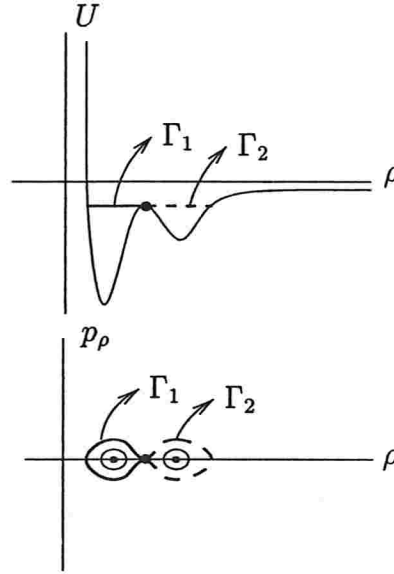


Figura 3.1: Exemplos de órbitas homoclínicas Γ_1 e Γ_2 .

Poincaré. Uma primeira dificuldade vem do fato de que o equilíbrio contido no laço é instável. De maneira que, para ultrapassar esta dificuldade, escreve-se a aplicação de Poincaré para o laço sela-centro como uma composição de duas aplicações: uma relacionada à passagem das soluções próxima ao equilíbrio sela-centro e outra devida às excursões das soluções próximas à órbita homoclínica. Para definir tais aplicações, considera-se a parte quadrática de \bar{H} (1.8), ou seja,

$$\bar{H}_Q = \frac{1}{2}[p_\rho^2 + p_z^2 - |\nu|(\rho - \rho_*)^2 + |\omega|z^2]. \quad (3.1)$$

Segue-se, então, que $(\rho_*, 0)$ tem uma variedade unidimensional estável W^s , uma variedade unidimensional instável W^u e uma variedade bidimensional central W^c . As aproximações lineares de tais variedades são dadas por:

$$W_L^s = \{\zeta = (\rho, z, p_\rho, p_z) : p_\rho = -\sqrt{|\nu|}(\rho - \rho_*), p_z = z = 0\},$$

$$W_L^u = \{\zeta = (\rho, z, p_\rho, p_z) : p_\rho = \sqrt{|\nu|}(\rho - \rho_*), p_z = z = 0\},$$

$$W_L^c = \{\zeta = (\rho, z, p_\rho, p_z) : p_\rho = 0, \rho = \rho_*\}.$$

Denota-se por $W_+^s(W_+^u)$ a parte de $W^s(W^u)$ com $\rho > \rho_*$ e por $W_-^s(W_-^u)$ a parte de $W^s(W^u)$ com $0 < \rho < \rho_*$. Observa-se que a órbita homoclínica coincide ou com W_+^s e W_+^u , ou com W_-^s e W_-^u . A figura (3.2) esboça o primeiro caso.

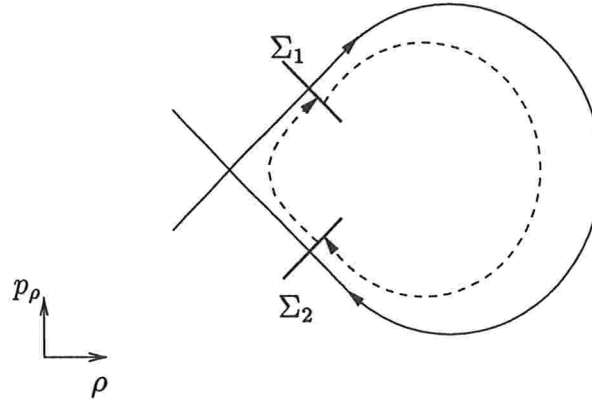


Figura 3.2: Seções de Poincaré Σ_1 e Σ_2 , transversais às variedades W_+^s e W_+^u , respectivamente.

Sejam E_0 a energia do equilíbrio sela-centro e Γ_E as órbitas periódicas com energia $E < E_0$, as quais se acumulam na órbita homoclínica ao sela-centro, conforme Grotta Ragazzo (1997c) e Bastos de Figueiredo et al. (1998). Pode-se então, definir uma seção de Poincaré Σ transversal ao laço sela-centro como

$$\Sigma = \{(\rho = \rho_0, z, p_\rho < 0, p_z)\}$$

onde ρ_0 é uma constante (conveniente).

Usando a conservação da energia, considera-se a família a 1-parâmetro de aplicações de Poincaré, $\mathbf{f}_E : \Sigma_E \rightarrow \Sigma_E$ onde Σ_E denota a restrição de Σ ao nível de energia E . Para cada E , toma-se $p_\rho = -\sqrt{2E - p_z^2 - z^2}$. Desta forma, tem-se que (z, p_z) é um sistema de coordenadas para Σ_E , desde que $2E - p_z^2 - z^2 > 0$.

Após uma adequada parametrização local de tais seções (por z, p_z e E), mostra-se (ver Lerman (1991), Mielke et al. (1992)) que, para $|E - E_0|$ e $\|\xi\| := \|(z, p_z)\|$ suficientemente pequenos, \mathbf{f}_E pode ser aproximada pela família de aplicações (ver Grotta Ragazzo (1997b), Grotta Ragazzo (1997a))

$$\mathbf{F}_E(\xi) = \mathbf{AR}[\bar{k} - \gamma \ln |\frac{1}{2} \sqrt{|\omega|} \|\xi\|^2 - (E - E_0)|] \xi \quad (3.2)$$

onde $\xi = (z, p_z) \in \mathbb{R}^2$, $\|\xi\| > \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{|\omega|}}\right)(E - E_0)}$ para $E > E_0$, $\mathbf{F}_{E_0}(\mathbf{0}) := \mathbf{0}$ para

$E = E_0$, \bar{k} é uma constante (que pode ser removida por um reescalamento), $\gamma = \sqrt{\left|\frac{\omega}{\nu}\right|}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \geq 1 \quad (3.3)$$

e

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Logo, a dinâmica do laço sela-centro está relacionada aos invariantes α e γ . O parâmetro γ é a razão entre os autovalores $\sqrt{|\omega|}$ e $\sqrt{|\nu|}$, e portanto é invariante sob mudança de variáveis. Já o parâmetro α é mais difícil de calcular e está relacionado à linearização do fluxo na órbita homoclínica.

3.2 O Invariante α e sua Interpretação Geométrica

Seguindo Grotta Ragazzo (1994) e Addas Zanata, Grotta Ragazzo (2001), denota-se

$$P(\rho) = 2(E_0 - U(\rho, 0)) \quad (3.5)$$

e

$$|\omega| + Q(\rho) = \frac{\partial^2 U(\rho, 0)}{\partial z^2}. \quad (3.6)$$

Seja $\Gamma(t)$ a solução homoclínica à ρ_* dada por:

$$\begin{aligned} \rho &= \Gamma(t) \\ p_\rho &= \dot{\Gamma}(t) \\ z &= p_z = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\Gamma(t)$ satisfaz a equação

$$\dot{x}^2 = P(x). \quad (3.8)$$

As componentes (z, P_z) do campo de vetores linearizado em Γ são

$$\begin{aligned} \dot{z} &= p_z \\ \dot{p}_z &= -[|\omega| + Q(\Gamma(t))]z. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Segue que as equações acima são equivalentes à equação diferencial de segunda ordem em z abaixo:

$$\ddot{z} = -[|\omega| + Q(\Gamma(t))]z \quad (3.10)$$

onde $Q(\Gamma(t))$ decresce exponencialmente para zero quando $t \rightarrow \pm\infty$. Esta equação tem uma solução complexa ϕ com o seguinte comportamento assintótico:

$$\begin{aligned} \phi(t) &\rightarrow ae^{i\sqrt{|\omega|}t} + be^{-i\sqrt{|\omega|}t} && \text{quando } t \rightarrow -\infty \\ \phi(t) &\rightarrow e^{i\sqrt{|\omega|}t} && \text{quando } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.11)$$

com $a, b \in \mathbb{C}$.

Em Grotta Ragazzo (1994), mostra-se que

$$\alpha = |b| + \sqrt{|b|^2 + 1} \quad (3.12)$$

onde $|b|$ é o parâmetro dado em (3.11).

Para uma interpretação geométrica de α , observa-se que a variedade central do equilíbrio sela-centro é folheada por órbitas periódicas ζ_ϵ , uma para cada energia $E > E_0$. Em uma aproximação linear, ζ_ϵ é um círculo no plano $\{\rho_*, 0, z, p_z\}$. A variedade estável de ζ_ϵ é um cilindro que intercepta a seção Σ_E em um círculo C_E . Por sua vez, \mathbf{F}_E leva C_E em uma curva fechada C'_E que é aproximadamente uma elipse, se $E - E_0$ é suficientemente pequeno, conforme a figura (3.3). Genericamente, C_E intercepta C'_E transversalmente.

Considera-se, agora, \mathcal{A}_1 como sendo a área de C_E e, \mathcal{A}_2 como sendo a área de C'_E exceto a parte desta área que pertence a C_E . Seja Δ a razão entre \mathcal{A}_2 e \mathcal{A}_1 . Em (Addas Zanata, Grotta Ragazzo (2001)), é mostrado que

$$\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{A})}{2} = \frac{1}{\cos(\Delta \frac{\pi}{2})}$$

Portanto, o invariante α e seu inverso α^{-1} podem ser interpretados não só como os autovalores de \mathbf{A} mas também como os semi-eixos de C'_E .

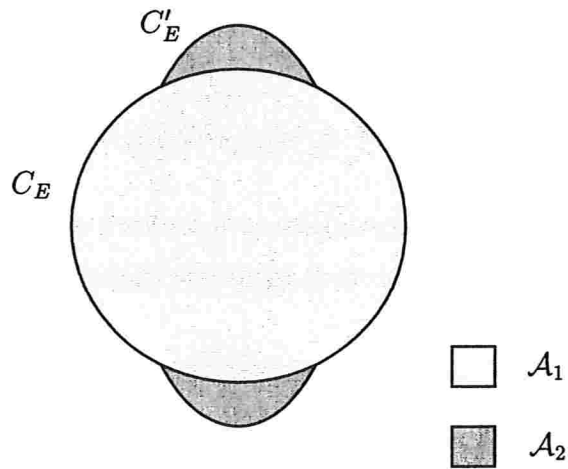


Figura 3.3: Comportamento da aplicação F_E .

3.3 Cálculo Aproximado do Invariante α

Ressalta-se que este cálculo foi feito numericamente e que a seguir dar-se-á a teoria pela qual foi desenvolvido o algoritmo. Pode-se ver no apêndice B o programa (3) usado para obter o invariante α .

O invariante α é definido por (3.12), e pode ser interpretado geometricamente como na seção anterior. Para o cálculo numérico, obtém-se inicialmente a órbita homoclínica $\Gamma(t)$, integrando-se o sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X \\ \dot{X} &= -U'(x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

com condições iniciais $x(0) = \rho_{\min}$ e $\dot{x}(0) = X(0) = 0$.

Substitui-se a solução $\Gamma(t)$ em (3.9). Observa-se que, quando $t \rightarrow -\infty$, a equação (3.9) é equivalente à

$$\begin{aligned} \dot{z} &= p_z \\ \dot{p}_z &= -|\omega|z \end{aligned} \tag{3.14}$$

cujas curvas de nível são elipses.

No entanto, pretende-se partir de um círculo. Para tanto, toma-se uma mudança canônica de variáveis dada pela função geradora

$$S = |\omega|^{1/4} zY$$

de onde, a equação (3.9) é transformada em

$$\begin{aligned} \dot{y} &= |\omega|^{1/2} Y & (3.15) \\ \dot{Y} &= -(|\omega|^{1/2} + |\omega|^{-1/2} Q(\Gamma(t))) y \end{aligned}$$

cujas curvas de nível são círculos, conforme desejado.

Neste momento, integra-se (3.15) de $-T$ à T com condições iniciais $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Desta forma, constrói-se uma matriz fundamental de soluções

$$\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix}$$

tal que $\mathbf{M}(-T) = \mathbf{I}$.

Obtido $\mathbf{M}(T)$, como $\det \mathbf{M}(T) = 1$, pode-se escrever sua representação polar

$$\mathbf{M}(T) = \mathbf{S}\mathbf{R}$$

onde \mathbf{S} é uma matriz simétrica e \mathbf{R} é uma matriz de rotação.

Com isto, resulta que

$$\mathbf{M}(T)\mathbf{M}(T)^t = \mathbf{S}^2.$$

Portanto, calculando-se os autovalores de $\mathbf{M}(T)\mathbf{M}(T)^t$, obtém-se os autovalores de \mathbf{S} que são os semi-eixos da elipse, ou seja, o invariante α e seu inverso α^{-1} .

Para obter \mathbf{M} , observa-se que não é necessário integrar (3.15) de $-T$ à T mas somente de 0 à T . Para confirmar esta observação, considera-se a função

$$g(t) = -(|\omega|^{1/2} + |\omega|^{-1/2}Q(\Gamma(t)))$$

a qual é uma função par em t .

Seja

$$\mathbf{N}(t) := \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ Z_1(t) & Z_2(t) \end{pmatrix}$$

a matriz fundamental de soluções com $\mathbf{N}(0) = \mathbf{I}$ obtida da integração a partir de $t = 0$.

De fato, de $g(t)$ ser par, prova-se que $z_1(t)$ e $Z_2(t)$ são pares e $Z_1(t)$ e $z_2(t)$ são ímpares, donde resulta que

$$\mathbf{N}(-T) = \begin{pmatrix} z_1(T) & -z_2(T) \\ -Z_1(T) & Z_2(T) \end{pmatrix}.$$

Desta forma,

$$\mathbf{M}(t) := \mathbf{N}(t)\mathbf{N}(-T)^{-1}$$

é uma matriz fundamental de soluções com $\mathbf{M}(-T) = \mathbf{I}$. Portanto, para obter $\mathbf{M} = \mathbf{M}(T)$, basta calcular $\mathbf{N}(T)$.

3.4 Estabilidade Orbital dos Laços Sela-Centro

Neste momento, considera-se aplicação(3.2) restrita à energia E_0 , ou seja, à energia do laço sela-centro. Após uma reescala conveniente de variáveis (Lerman (1991), Mielke et al. (1992), Grotta Ragazzo (1997a), Grotta Ragazzo (1997b)) tal aplicação pode ser reescrita como:

$$\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{A}\mathbf{R}(\theta)\xi \tag{3.16}$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^2$, \mathbf{A} e \mathbf{R} são dados em (3.3) e (3.4) e $\theta = \theta(x) = -2\gamma \ln |\xi|$.

Nota-se que \mathbf{F} , é invariante por dilatações discretas, ou melhor,

$$\mathbf{F}(e^{\frac{k\pi}{\gamma}} \xi) = e^{\frac{k\pi}{\gamma}} \mathbf{F}(\xi), \quad (3.17)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Usando esta simetria, pode-se obter resultados acerca da estabilidade do ponto fixo $\xi_* = (0, 0) = \mathbf{0}$.

De fato, se $\alpha = 1$, a aplicação \mathbf{F} é integrável e deixa invariantes todos os círculos centrados na origem. Logo, $\xi_* = \mathbf{0}$ é estável sob iterações de \mathbf{F} , para $\alpha = 1$. Agora, longe de $\xi_* = \mathbf{0}$, \mathbf{F} é analítica e do Teorema KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) prova-se que se $|\alpha - 1|$ é suficientemente pequeno então existem curvas invariantes perto de ξ_* . Devido à simetria, têm-se que existem infinitas outras destas curvas se acumulando em 0. Portanto, temos que $\xi_* = \mathbf{0}$ também é estável se α está suficientemente próximo de 1 (Grotta Ragazzo (1997c)).

Para $\alpha \gg 1$, usa-se novamente a simetria de dilatações e prova-se a instabilidade de ξ_* . Se \mathbf{F} tem um ponto fixo $\bar{\xi}$ diferente de $\mathbf{0}$, então a aplicação possui uma família infinita de pontos fixos dados por (Grotta Ragazzo (1997a))

$$e^{\frac{k\pi}{\gamma}} \bar{\xi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mostra-se que, para $\alpha \neq 1$, a aplicação tem quatro famílias de pontos fixos, sendo que a primeira família é dada por ξ_k , $k \in \mathbb{Z}$, onde $e^{\frac{k\pi}{\gamma}} \xi_0$ e

$$\xi_0 = \left(\left(\exp\left(\frac{\sigma}{\gamma} - \frac{\pi}{4\gamma}\right) \cos\sigma, \exp\left(\frac{\sigma}{\gamma} - \frac{\pi}{4\gamma}\right) \sin\sigma \right) \right)$$

com

$$\sigma = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

A segunda família de pontos fixos é dada por $-\xi_k$. Os autovalores (λ, λ^{-1}) da linearização de \mathbf{F} em torno de ξ_0 e $-\xi_0$ são determinados por

$$\lambda + \lambda^{-1} = 2 + 2\gamma(\alpha - \alpha^{-1})$$

o que implica que todos os pontos fixos $\pm\xi_k$ são hiperbólicos.

Admitindo-se que a variedade instável de ξ_0 intercepta transversamente a variedade estável de ξ_1 , da simetria por dilatações de \mathbf{F} , segue que a variedade instável de

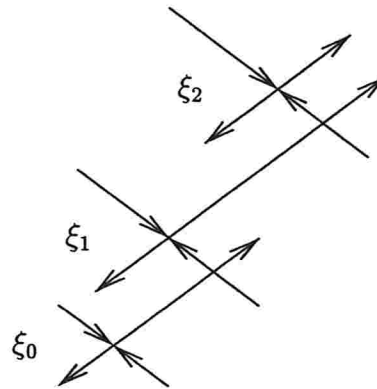


Figura 3.4: Cadeia heteroclínica transversal.

ξ_k intercepta transversalmente a variedade estável de ξ_{k+1} , conforme ilustrado em 3.4. Logo, a existência de uma órbita heteroclínica transversal conectando ξ_0 a ξ_1 implica na existência de duas cadeias heteroclínicas infinitas, ou “cadeias de transição de Arnold”, portanto, tem-se a instabilidade de $\xi = \mathbf{0}$. Foi provado em Grotta Ragazzo (1997b) a existência de tal cadeia de transição para $\gamma(\alpha - \alpha^{-1}) > 1$.

Além disso, em Grotta Ragazzo (1997c) também foi obtido numericamente uma curva Z tal que se $1 \leq \alpha < Z(\gamma)$ então ξ_* é estável; de outro modo ξ_* é instável. Tal curva Z é aproximadamente dada por

$$\gamma(\alpha - \alpha^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.18)$$

Alguns valores de α foram calculados e usando o critério acima, a estabilidade das órbitas homoclínicas correspondentes foram classificadas, conforme pode-se ver na tabela a seguir.

Observa-se que $c = \gamma(\alpha - \alpha^{-1})$ e que para cada par (L, Λ) com dois valores de α , os casos (\star) correspondem aos primeiros poços (mais próximos da origem) e os casos $(\star\star)$ correspondem aos segundos poços.

L	Λ	γ	α	c	Estabilidade
4.0	6.0	1.163755	8.241042	13.10320	instável(★)
4.0	6.0	1.613755	3.148750	4.568805	instável(★★)
4.0	7.0	2.549510	8.466394	1.000581	instável(★)
4.0	7.0	2.549510	21.28402	0.002960558	estável(★★)
5.0	11.0	1.702274	8.026729	13.45162	instável(★)
5.0	11.0	1.702274	1.223218	0.6906163	estável(★★)
10.0	80.0	1.722602	7.782857	13.18543	instável(★)
10.0	80.0	1.722602	1.021520	0.07253288	estável(★★)
4.0	5.740740740	1.544479	8.061992	12.260006	instável
5.0	10.25925926	1.588291	7.844429	12.256760	instável
3.0	3.0	1.414214	9.039812	12.627784	instável
4.0	3.0	1.245348	7.301817	8.922747	instável
4.0	4.0	1.310052	7.657177	9.860210	instável
5.0	3.0	1.229856	6.613553	7.947757	instável
4.0	1.0	1.172604	6.350896	7.262449	instável
3.0	1.0	1.097134	7.112312	7.648903	instável
5.0	1.0	1.198332	6.086740	7.097062	instável
4.0	-2.0	1.154754	4.246315	4.631505	instável
4.0	0.0	1.154736	5.763194	6.454602	instável
4.0	0.0	1.187342	5.808461	6.692213	instável

3.5 Atratores para a Aplicação Discreta no Toro

Neste momento, considera-se o caso em que o laço é instável, ou seja, quando $\gamma(\alpha - \alpha^{-1}) > 1$. E observa-se o comportamento da aplicação discreta, porém em um outro espaço, descrito a seguir.

Usando a propriedade (3.17) da simetria das dilatações discretas, define-se a seguinte relação de equivalência \sim , em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, por

$$x \sim y \Leftrightarrow x = e^{\frac{k\pi}{\gamma}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

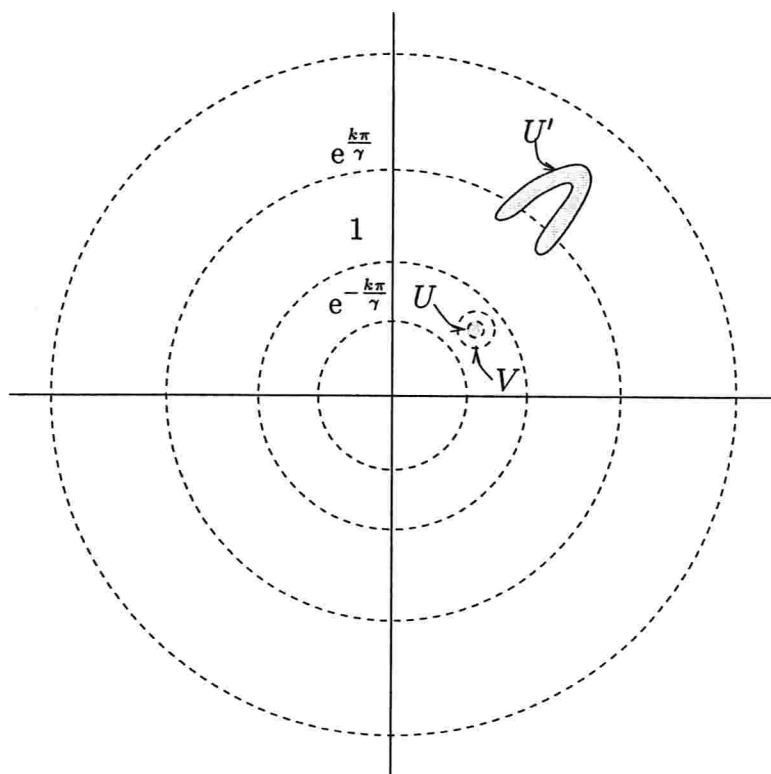


Figura 3.5: Não-preservação da área da aplicação $\hat{\mathbf{F}}_{E_0}$.

e toma-se

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R} \setminus \{0\} / \sim,$$

com a projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Com isto, pode-se definir a aplicação

$$\hat{\mathbf{F}} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

por

$$\pi \circ \mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}} \circ \pi. \quad (3.19)$$

Observa-se que $\hat{\mathbf{F}}$ não preserva área (ver figura 3.5). Mais ainda, em Addas Zanata, Grotta Ragazzo (2002), mostra-se a existência de atratores periódicos para a aplicação $\hat{\mathbf{F}}$, para alguns pares (γ, α) . Tais atratores correspondem à órbitas de \mathbf{F} que escapam com uma velocidade exponencial da origem.

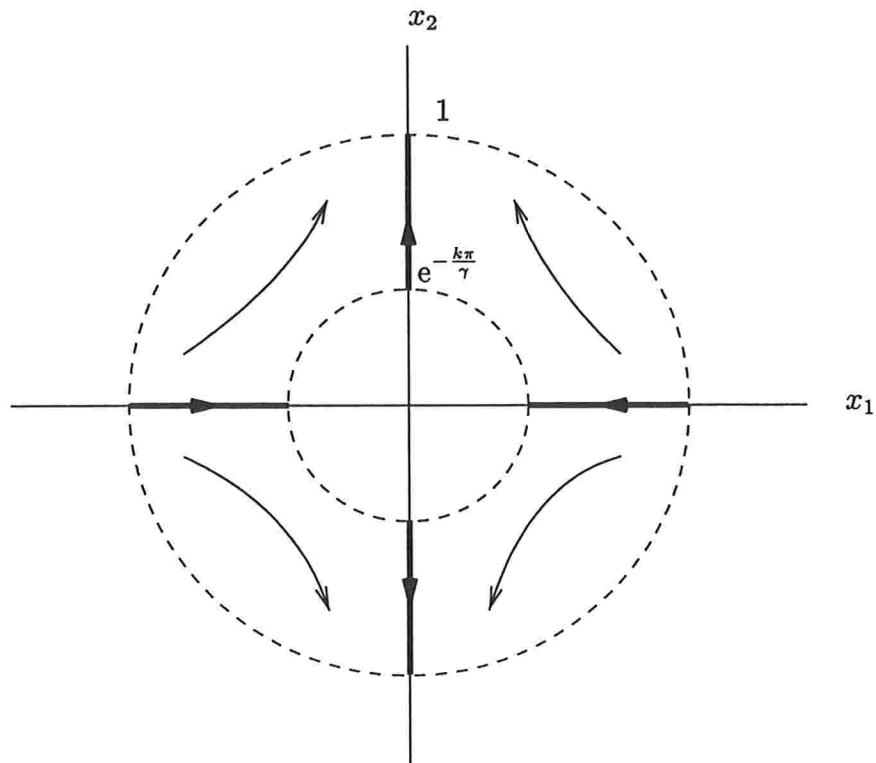


Figura 3.6: Círculos invariantes da aplicação \hat{G} induzida da aplicação hiperbólica G dada por (3.20).

Para ilustrar o comportamento de tais atratores, o exemplo seguinte é considerado. Seja G a aplicação hiperbólica dada por

$$G(x_1, x_2) = (2^{-1}x_1, 2x_2) \tag{3.20}$$

Como $\Phi(x) = e^{\frac{k\pi}{\gamma}} x$ comuta com qualquer aplicação linear, a aplicação G induz uma aplicação

$$\hat{G} : T^2 \rightarrow T^2$$

por

$$\pi \circ G = \hat{G} \circ \pi. \tag{3.21}$$

Da figura 3.6, têm-se que \hat{G} é dissipativa e tem 4 círculos invariantes, onde os 2 círculos relativos ao eixo x_1 são repulsores e os 2 círculos relativos ao eixo x_2 são atratores. Além disso, ao iterar G sobre uma vizinhança pequena de condições iniciais próxima à origem, resulta que tais iteradas se aglomeram em torno do eixo x_2 .

Verifica-se, de fato, que tais atratores existem para este caso como pode ser visto nos casos ilustrados a seguir. Primeiramente, foram obtidas as seções de Poincaré e discreta para o laço sela-centro. Em seguida, foi feito um reescalonamento do plano para o anel, onde observou-se a presença de um atrator de ordem 2. Para que o atrator ficasse mais visível, desprezou-se as primeiras iteradas, o que é visto nas figuras (3.11) e (A.1). O objetivo da obtenção das duas seções, a de Poincaré e a discreta é comprovar, mais uma vez, que a aplicação discreta é uma boa aproximação da seção de Poincaré.

Este trabalho limitou-se a apresentar a existência de exemplos de atratores. No entanto, fica em aberto um estudo do significado deles para os anéis de Júpiter.

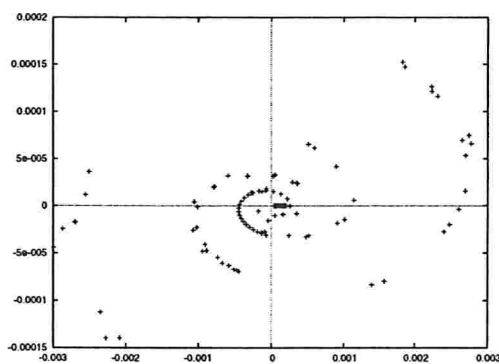


Figura 3.7: Seção de Poincaré onde $L = 4$, $\Lambda = 6$ e $\alpha = 3, 14$, obtida pelo programa (4) do apêndice B.

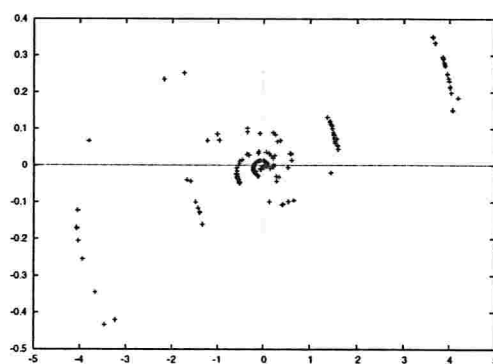


Figura 3.8: Seção discreta onde $L = 4$, $\Lambda = 6$ e $\alpha = 3, 14$, obtida pelo programa (5) do apêndice B.

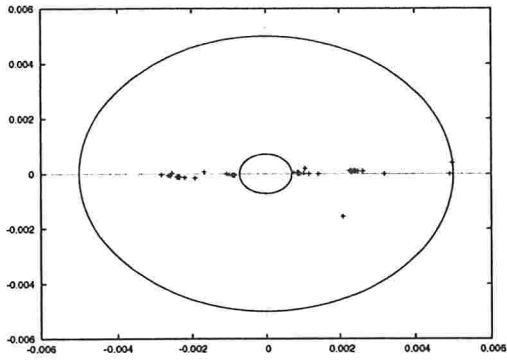


Figura 3.9: Seção (3.7) reescalada para o anel onde $L = 4$, $\Lambda = 6$ e $\alpha = 3,14$, obtida pelo programa (6) do apêndice B.

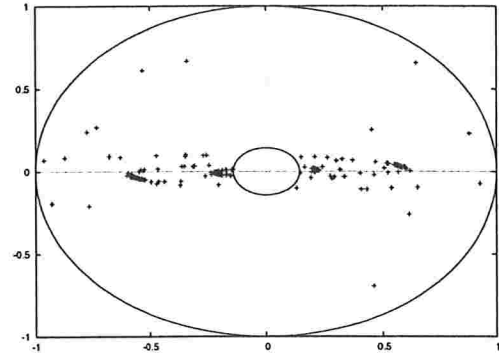


Figura 3.10: Seção (3.8) reescalada para o anel onde $L = 4$, $\Lambda = 6$ e $\alpha = 3,14$, obtida pelo programa (7) do apêndice B.

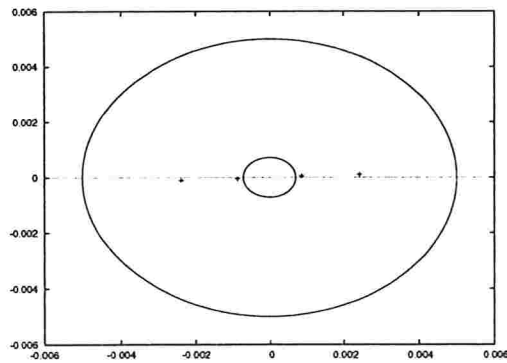


Figura 3.11: Atrator da seção (3.9), obtido pelo programa (6) do apêndice B.

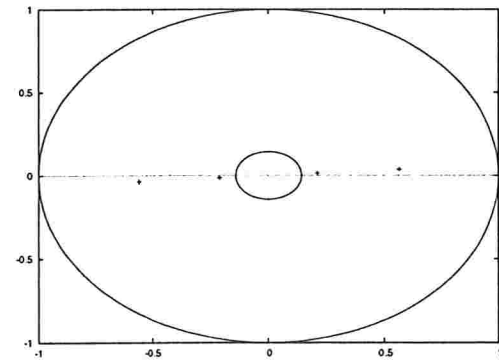


Figura 3.12: Atrator da seção (3.10), obtido pelo programa (7) do apêndice B.

Dados Planetários de Júpiter e Saturno

1. Anéis de Júpiter

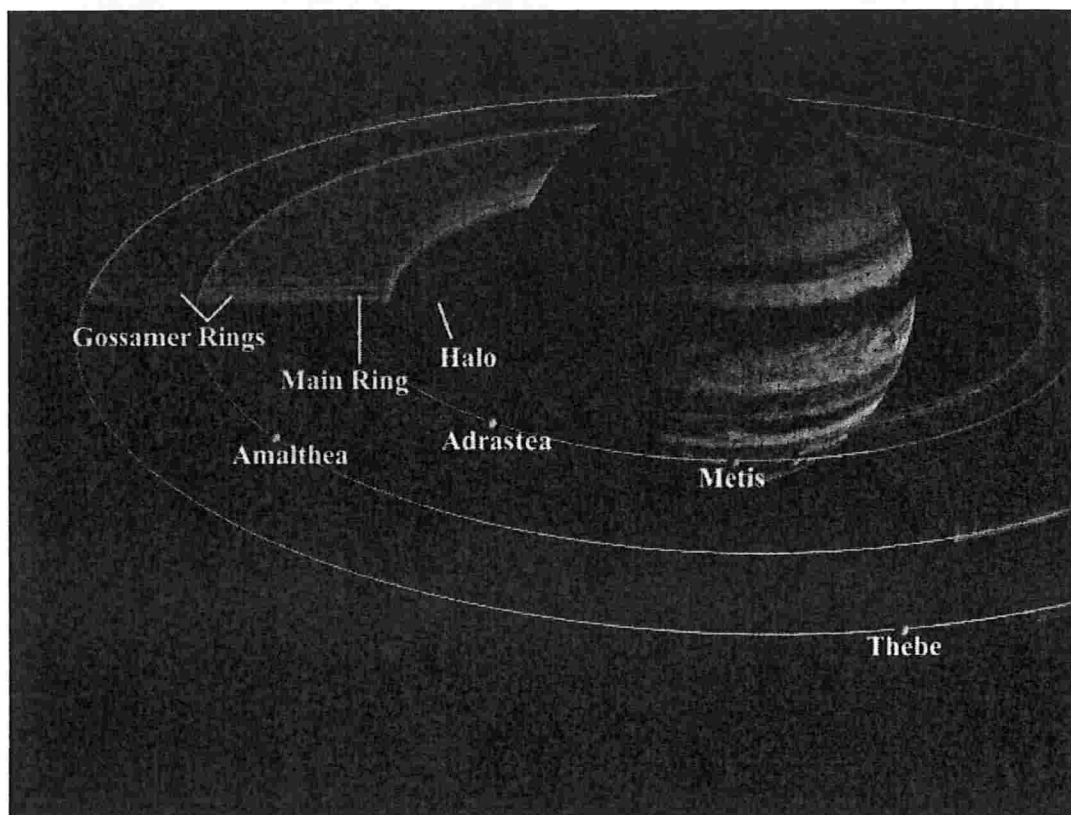


Figura A.1: Anéis de Júpiter e seus principais satélites.

2. Comparações dos dados de Júpiter com os dados da Terra

Dados	Júpiter	Terra	Razão(Júpiter/Terra)
Massa (10^{24} kg)	1.898,6	5,9736	317,83
Volume (10^{10} km ³)	143.128	108,321	1321,33
Raio (km) Equatorial	71.492	6.378,1	11,209
Polar	66.854	6.356,8	10,517
Raio Médio Volumétrico km	69.911	6.371	10,973
Elipticidade	0,06487	0,00335	19,36
Densidade Média (kg/m ³)	1.326	5.515	0,240
Gravidade (m/s ²)	24,79	9,80	2,530
Aceleração (m/s ²)	23,12	9,78	2,364
Velocidade de Escape (km/s)	59,5	11,19	5,32
GM ($\times 10^6$ km ³ /s ²)	126,686	0,3986	317,81
Momento de Inércia (I/MR ²)	0,254	0,3308	0,768
J ₂ ($\times 10^{-6}$)	14.736	1.082,63	13,611
Número de Satélites Naturais	63	1	

3. Comparações dos dados de Saturno com os dados da Terra

Dados	Saturno	Terra	Razão(Saturno/Terra)
Massa (10^{24} kg)	568,46	5,9736	95,159
Volume (10^{10} km ³)	82.713	108,321	763,59
Raio (km) Equatorial	60.268	6.378,1	9,449
Polar	54.364	6.356,8	8,552
Raio Médio Volumétrico km	58.232	6.371	9,140
Elipticidade	0,09796	0,00335	29,24
Densidade Média (kg/m ³)	687	5.515	0,125
Gravidade (m/s ²)	10,44	9,80	1,065
Aceleração (m/s ²)	8,96	9,78	0,916
Velocidade de Escape (km/s)	35,5	11,19	3,172
GM ($\times 10^6$ km ³ /s ²)	37,931	0,3936	95,16
Momento de Inércia (I/MR ²)	0,210	0,3308	0,635
J ₂ ($\times 10^{-6}$)	16.298	1.082,63	15,504
Número de Satélites Naturais	33	1	

4. Parâmetros Orbitais de Júpiter

Dados	Júpiter	Terra	Razão(Júpiter/Terra)
Semi-eixo Maior (10^6 km)	778, 57	149, 60	5, 204
Período da Órbita Sideral (dias)	4.332, 589	365.256	11, 862
Período da Órbita Tropical (dias)	4.330, 595	365, 242	11, 857
Periélio(10^6 km)	740, 52	147, 09	5, 034
Afélio (10^6 km)	816, 62	152, 10	5, 369
Período Sinódico (dias)	398, 88	–	–
Velocidade Média Orbital (km/s)	13, 07	29, 78	0, 439
Velocidade Orbital Máxima (km/s)	13, 72	30, 29	0, 453
Velocidade Orbital Mínima (km/s)	12, 44	29, 29	0, 425
Inclinação da Órbita (graus)	1, 304	0, 00	–
Excentricidade da Órbita	0, 0489	0, 0167	2, 928
Período de Rotação Sideral (horas)	9, 9250	23, 9345	0, 415
Comprimento dos dias (horas)	9, 9254	24, 0	0, 414
Obliquidade da Órbita (graus)	3, 13	23, 45	0, 133

5. Parâmetros Orbitais de Saturno

Dados	Saturno	Terra	Razão(Saturno/Terra)
Semi-eixo Maior (10^6 km)	1.433, 53	149, 60	9, 582
Período da Órbita Sideral (dias)	10.759, 22	365, 256	29, 457
Período da Órbita Tropical (dias)	10.746, 94	365, 242	29, 424
Periélio(10^6 km)	1.352, 53	147, 09	9, 195
Afélio (10^6 km)	1.514, 50	152, 10	9, 957
Período Sinódico (dias)	378, 09	–	–
Velocidade Média Orbital (km/s)	9, 69	29, 78	0, 325
Velocidade Orbital Máxima (km/s)	10, 18	30, 29	0, 336
Velocidade Orbital Mínima (km/s)	9, 09	29, 29	0, 310
Inclinação da Órbita (graus)	2, 485	0, 00	–
Excentricidade da Órbita	0, 0565	0, 0167	3, 383
Período de Rotação Sideral (horas)	10, 656	23, 9345	0, 445
Comprimento dos dias (horas)	10, 656	24, 0	0, 444
Obliquidade da Órbita (graus)	26, 73	23, 45	1, 140

6. Elementos Órbitais Médios (J2000)

Dados	Júpiter	Saturno
Semi-eixo Maior (AU)	5,20336301	9,53707032
Excentricidade Orbital	0,04839266	0,05415060
Inclinação Orbital (graus)	1,30530	2,48446
Longitude do Nodo Ascendente (graus)	100,55615	113,71504
Longitude do Periélio (graus)	14,75385	92,43194
Longitude Média (graus)	34,40438	49,94432

7. Magnetosfera de Júpiter

Dados	Júpiter
Campo de Dipolo Efetivo	4,28(gauss \times R _j ³)
Desvio do Dipolo em Relação ao Eixo de Rotação (graus)	9,6
Longitude do Desvio (graus)	201,7
Distância Offset (do Centro do Planeta ao Centro do Dipolo)	0,131R _j
Latitude/Longitude do Vetor Offset(graus)	-8,0/148,57

Nota: R_j denota o raio Jovian = 71,398 km.

8. Magnetosfera de Saturno

Dados	Saturno
Campo de Dipolo Efetivo	0,210(gauss \times R _s ³)
Desvio do Dipolo em Relação ao Eixo de Rotação (graus)	< 1
Longitude do Desvio (graus)	—
Distância Offset (do Centro do Planeta ao Centro do Dipolo)	0,04 – 0,05R _s (direção norte)

Nota: R_s denota o raio Saturniano = 60,330 km.

9. Dados dos Anéis de Júpiter e Saturno

Anel	Raio(km)	Raio Equatorial
Equador de Júpiter	71.492	1, 000
Halo	100.000 – 122.000	1, 40 – 1, 71
Principal	122.000 – 129.000	1, 71 – 1, 81
Gossamer (interno)	129.200 – 182.000	1, 81 – 2, 55
Gossamer (externo)	182.000 – 224.900	2, 55 – 3, 15
Equador de Saturno	60.268	1, 000
F (centro do anel)	140.180	2, 326
G (parte interna)	170.000	2, 82
E (parte interna)	181.000	3

Todos os dados aqui apresentados foram obtidos no site da “National Space Science Data Center”.

Programas numéricos

1. Programa para o cálculo da curva χ

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

/* Grafico de L, lambda onde ocorre a bifurcacao */

double L,Lmax;

double F(double P,double x);
double G(double P,double x,double y);
double H(double x,double y);
double I(double x,double y);
double pot(double x, double y);

main()
{
    double P,r0,rmax,h,r,u,lambda,z,rho;
    FILE *fp1,*fp2;

    /* Entrada dos Dados */
    fp1=fopen("LLAMBDA1.in","r");
    fscanf(fp1,"%lf\n",&L);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&Lmax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&r0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rmax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&h);
    fclose(fp1);

    fp2=fopen("LLAMBDA1.out","w");

    for(P=L;P<=Lmax;P+=0.001)
    {
        for(r=r0;r<=rmax;r+=h)
        {
            u=F(P,r);
            if((u>0.0)&&(u<=(1.0/r)))
            {
                lambda=G(P,r,u);
                z=H(r,u);

                if((z<0.01)&&(lambda>0.01))
                    fprintf(fp2,"%14.10lf %14.10lf\n",P,lambda);
            }
        }
    }
}
```

```

    }

    fclose(fp2);

    return(0);
}

/* Funcao que determina o valor de u em funcao de L,r */
double F(double P,double x)
{
    double a,b,c,d;
    a=2.0*x*x*x;
    b=1.0*a;
    c=pot(b,0.5);
    d=P/c;
    return(d);
}

/* Funcao que determina o valor de lambda em funcao de L,r,u */
double G(double P,double x,double y)
{
    double a,b,c,d,e,f;
    a=x*x;
    b=y-P;
    c=b/a;
    d=x*y;
    e=c+d;
    f=3.0*e;
    return(f);
}

/* Funcao que determina o valor de z em funcao de r,u */
double H(double x,double y)
{
    double a,b,c,d,e,f;
    a=x*y;
    b=1.0-a;
    c=pot(b,0.5);
    d=x*c;
    return(d);
}

/* Funcao que determina o valor de rho em funcao de r,u */
double I(double x,double y)
{
    double a,b,c;
    a=x*x*x;
    b=a*y;
    c=pot(b,0.5);
    return(c);
}

/* Funcao que fornece a potencia y de um numero real x */
double pot(double x,double y)
{
    if(x>0.0)
        return(exp(y*log(x)));
    return(0.0);
}

```

2. Programa para a verificação da região de Hill através do potencial U em função de (ρ, z)

```
#include <stdio.h>
```

```

#include <math.h>

double L,lambda,E,rho0,rhofinal,hrho,z0,h,pi;
double potencial(double rho,double z);
double pot(double x, double y);

main()
{
    double rho,z,zant,U;
    int regioa;
    FILE *fp1,*fp2;

    /* Entrada dos dados */
    fp1=fopen("VERHILL1.in","r");
    fscanf(fp1,"%lf\n",&L);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&lambda);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rho0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rhofinal);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&hrho);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&z0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&h);
    fclose(fp1);

    /* Pi */
    pi=4.0*atan(1.0);

    fp2=fopen("VERHILL1.out","w");

    for(rho=rho0;rho<=rhofinal;rho+=hrho)
    {
        regioa=0;

        /* Calculo do potencial U em funcao de rho,z */
        for(z=-z0;z<=z0;z+=h)
        {
            U=potencial(rho,z);
            if(U<=E)
            {
                if(regioa==0)fprintf(fp2,"%e %e\n",rho,z);
                regioa=1;
            }
            else
            {
                if(regioa==1)fprintf(fp2,"%e %e\n",rho,zant);
                regioa=0;
            }
            zant=z;
        }
    }
    fclose(fp2);
    return(0);
}

/* Funcao que fornece o potencial U em funcao de rho,z */
double potencial(double rho,double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,1.5);
    e=(L/rho)-(rho/d);
    f=a/d;
    g=pot(c,0.5);
    h=lambda/g;
    i=0.5*e*e+f-h;
}

```

```

        return(i);
    }

    /* Funccao que fornece a potencia y de um numero real x */
    double pot(double x,double y)
    {
        if(x>0.0)
            return(exp(y*log(x)));
        return(0.0);
    }

```

3. Programa para o cálculo do invariante α que, junto com γ , fornece o valor c com o qual temos um critério de estabilidade para o laço sela-centro

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

double L,lambda,E,rho0,rhox,rholim,w,rw,n,rn,gam,u,v;

void Runge_Kutta(int j,double x0,double y0,double tempo,double npont,int m);
double F(int j, double y[4]);
double U(double rho);
double delUdelrho(double rho);
double delUdelzz(double rho);
double omega(double rho);
double delUdelrho(rho);
double nu(double rho);
double pot(double x, double y);

main()
{
    double x0,y0,tempo,npont,A,B,C,D,F,G,H,I,J,K,alpha;
    int m;

    FILE *fp1,*fp2;

    /* Entrada dos dados */
    fp1=fopen("ALPHA1.in","r");
    fscanf(fp1,"%lf\n",&L);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&lambda);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rho0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rhox);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rholim);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&tempo);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&npont);
    fscanf(fp1,"%d\n",&m);
    fclose(fp1);

    fp2=fopen("ALPHA1.dat","w");
    w=omega(rhox);
    rw=pot(w,0.5);
    /* Impressao de omega */
    fprintf(fp2,"omega = %e\n",w);
    /* Impressao de raiz de omega */
    fprintf(fp2,"raiz de omega = %e\n",rw);
    n=nu(rhox);
    rn=pot(n,0.5);
    /* Impressao de ni */
    fprintf(fp2,"ni = %e\n",n);
    /* Impressao de raiz de ni */
    fprintf(fp2,"raiz de ni = %e\n",rn);

```

```

gam=rv/rn;
/* Impressao de gamma */
fprintf(fp2,"gamma = %e\n",gam);
/* Integracao */
Runge_Kutta(0,1.0,0.0,tempo,npont,m);
A=u;
B=v;
/* Impressao da 1a coluna da matriz */
/* fprintf(fp2,"A = %e B = %e\n",A,B); */
/* Integracao */
Runge_Kutta(1,0.0,1.0,tempo,npont,m);
C=u;
D=v;
/* Impressao da 2a coluna da matriz */
/* fprintf(fp2,"C = %e D = %e\n",C,D); */
F=A+C+B*D;
G=F*F+1.0;
H=pot(G,0.5);
if(F>0.0) alpha=F+H;
else alpha=-F+H;
/* Impressao de alpha */
fprintf(fp2,"alpha = %e\n",alpha);
I=1.0/alpha;
J=alpha-I;
K=gam*J;
/* Impressao de c */
fprintf(fp2,"c = %e\n",K);

fclose(fp2);

return(0);
}

void Runge_Kutta(int j,double x0,double y0,double tempo,double npont,int m)
{
double y[4],ya[4],yb[4],yc[4],t,k1[4],k2[4],k3[4],k4[4],k5[4],k6[4];
double E1,E2,rho1,rho2,h,delta,delta1,deltag;
int i,k;
FILE *fp3,*fp4,*fp5;

if(j==0)
{
fp3=fopen("ALPHA1R.out","w");
fp4=fopen("ALPHA1RW.out","w");
fp5=fopen("ALPHA1E.dat","a");
}
else if(j==1) fp5=fopen("ALPHA1E.dat","a");

/* Passo para o tempo */
h=tempo/(npont-1.0);

t=0.0;
k=0;
delta=0.0;

/* Condiçoes iniciais */
y[0]=rho0;
y[2]=x0;
y[3]=y0;
E1=E-U(y[0]);
/* rho1 depende de onde esta' o pocco */
printf("rhomax\n");
rho1=rhomax-rho0;
//printf("rhomin\n");
//rho1=rho0-rhomax; /* rhomax-rhomin */

if(E1<0.0) printf("Energia negativa\n");

```

```

if(E1>0.0)
{
  y[1]=pot(2.0*E1,0.5);

  if(j==0)
  {
    /* Impressao de rho(t) */
    fprintf(fp3,"%14.10lf %14.10lf\n",t,y[0]);
    /* Impressao da funcao g(t) que deve convergir para raiz de omega */
    fprintf(fp4,"%14.10lf %14.10lf\n",t,deltaUdelzz(y[0])/rw);
  }

  /* Integrador Runge-Kutta de quarta ordem*/
  do
  {
    rho2=y[0];

    for(i=0;i<=3;i++)
    {
      k1[i]=F(i,y);
      ya[i]=y[i]+0.5*h*k1[i];
    }
    for(i=0;i<=3;i++)
    {
      k2[i]=F(i,ya);
      yb[i]=y[i]+0.5*h*k2[i];
    }
    for(i=0;i<=3;i++)
    {
      k3[i]=F(i,yb);
      yc[i]=y[i]+h*k3[i];
    }
    for(i=0;i<=3;i++)
    {
      k4[i]=F(i,yc);
      k5[i]=k1[i]+2.0*k2[i]+2.0*k3[i]+k4[i];
      k6[i]=k5[i]/6.0;
      y[i]+=h*k6[i];
    }

    /* rho1 depende de onde esta' o pocco */
    rho1=rhomax-y[0];
    //rho1=y[0]-rhomax; /* rhomax`rhomin */

    /* Avaliacao da energia */
    E2=0.5*y[1]*y[1]+U(y[0]);
    E1=E-E2;
    delta=fabs(E1);
    if(delta>delta) delta=delta1;

    if(fmod(k,m)==0)
    {
      if(j==0)
      {
        /* Impressao de rho(t) */
        fprintf(fp3,"%14.10lf %14.10lf\n",t,y[0]);
        /* Impressao da funcao g(t) que deve convergir para raiz de omega */
        fprintf(fp4,"%14.10lf %14.10lf\n",t,deltaUdelzz(y[0])/rw);
      }
    }

    t+=h;
    k+=1;

    if(t>tempo) printf("tempo\n");
    if(rho1<=rholim) printf("rholim\n");
    if(y[0]<(rho2)) printf("rho2\n");
    //if(y[0]>(rho2)) printf("rho2\n");
  }
}

```



```

/* Critérios de parada dependem de onde esta' o pocco */
/* Critérios de parada: tempo, a diferenca de rho com rhomax(ou */
/* de rhomin com rho) ficar menor que um certo limite, */
/* rho(t) decrescer(ou crescer) */
/* Este ultimo criterio deve ser modificado nos casos onde*/
/* rho(t) decresce(ou cresce) "pouco" */
/* diminui-se(ou acrescenta-se) este "pouco"(1.0e-08) */
/* No entanto, isto so' deve ser feito se for no inicio */
/* da integracao, ou para poucos pontos */
}while((t<tempo)&&(rho1>rholim)&&(y[0]>=(rho2))); /* -1.0e-08 */
//}while((t<tempo)&&(rho1>rholim)&&(y[0]<=(rho2))); /* +1.0e-06 */
}

/* Impressao da variacao da energia */
fprintf(fp5,"deltaE = %e\n",delta);

/* Impressao de rho1(diferenca entre rhomax e rho) */
/* fprintf(fp5,"diferenca entre rhomax e rho = %e\n",rho1); */

/* Impressao de rho1(diferenca entre rho e rhomin) */
fprintf(fp5,"diferenca entre rho e rhomin = %e\n",rho1);

/* Impressao da diferenca entre rho e rho anterior */
fprintf(fp5,"diferenca entre rho e rho anterior = %e\n",y[0]-rho2);

/* Impressao da diferenca entre g(t) e raiz de omega */
deltag=(delUdelzz(y[0])/rw)-rw;
fprintf(fp5,"diferenca entre g(t) e raiz de omega = %e\n",deltag);

u=y[2];
v=y[3];

if(j==0)
{
fclose(fp3);
fclose(fp4);
}
fclose(fp5);
}

/* Funcao que determina as equacoes do sistema Hamiltoniano */
double F(int j, double y[4])
{
if(j==0) return(y[1]);
else if(j==1) return(-delUdelrho(y[0]));
else if(j==2) return(rw*y[3]);
else if(j==3) return(-((delUdelzz(y[0])/rw)*y[2]));
else return(0.0);
}

/* Funcao potencial */
double U(double rho)
{
double a,b,c,d,e,f;
a=L/rho;
b=rho*rho;
c=1.0/b;
d=a-c;
e=(1.0-lambda)/rho;
f=0.5*d*d+e;
return(f);
}

/* Derivada da funcao potencial em relacao 'a variavel rho */
double delUdelrho(double rho)
{
double a,b,c,d,e,f,g;

```

```

        a=rho*rho;
        b=a*rho;
        c=2.0/(a*b);
        d=(3.0*L)/(a*a);
        e=(L*L)/b;
        f=(-1.0+lambdas)/a;
        g=-c+d-e+f;
        return(g);
    }

    /* Segunda derivada da funcao potencial em relacao 'a variavel z*/
    double delUdelzz(double rho)
    {
        double a,b,c,d,e,f;
        a=rho*rho;
        b=a*rho;
        c=3.0/(b*b);
        d=(3.0*L)/(a*b);
        e=(-3.0+lambdas)/b;
        f=-c+d+e;
        return(f);
    }

    /* Funcao que fornece o autovalor omega associado 'a variavel z*/
    double omega(double rho)
    {
        double a,b;
        a=delUdelzz(rho);
        if(a>0.0) b=a;
        else b=-a;
        return(b);
    }

    /* Segunda derivada da funcao potencial em relacao 'a variavel rho */
    double delUdelrho(double rho)
    {
        double a,b,c,d,e,f;
        a=rho*rho;
        b=a*rho;
        c=(L*L)/(a*a);
        d=L/(a*b);
        e=6.0/(b*b);
        f=c-6.0*d+e;
        return(f);
    }

    /* Funcao que fornece o autovalor nu associado 'a variavel rho*/
    double nu(double rho)
    {
        double a,b;
        a=delUdelrho(rho);
        if(a>0.0) b=a;
        else b=-a;
        return(b);
    }

    /* Funcao que fornece a potencia y de um numero real x */
    double pot(double x,double y)
    {
        if(x>0.0)
            return(exp(y*log(x)));
        return(0.0);
    }
}

```

4. Programa para o cálculo da seção de Poincaré em (z, p_z) para ρ fixo

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

double L,lambda,omega,gam,E,rho0,ncond,zmax,rmax,deltamax,pi;
int nbatida;
void Runge_Kutta(double tempo,double npont,int m);
double F(int j, double y[4]);
double U(double rho,double z);
double delUdelrho(double rho,double z);
double delUdelz(double rho,double z);
double pot(double x,double y);
double interpola(double x,double y,double z,double w);
double circulo(int j,double x);
double raio(double x, double y);

main()
{
    double tempo,npont;
    int m;
    FILE *fp1;

    /* Entrada dos dados */
    fp1=fopen("POINCA1.in","r");
    fscanf(fp1,"%lf\n",&L);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&lambda);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&omega);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&gam);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rho0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&ncond);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&zmax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rmax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&deltamax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&tempo);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&npont);
    fscanf(fp1,"%d\n",&m);
    fscanf(fp1,"%d\n",&nbatida);
    fclose(fp1);

    Runge_Kutta(tempo,npont,m);

    return(0);
}

void Runge_Kutta(double tempo,double npont,int m)
{
    double E1,y[4],ya[4],yb[4],yc[4],t,ki[4],k2[4],k3[4],k4[4],k5[4],k6[4];
    double r,z0,z1,pz1,zant,pzant,ant,z2,pz2,auxcond,hcond;
    double delta,delta1,h,fatz,n;
    int i,k,batida,batidatotal;
    FILE *fp2,*fp3,*fp4,*fp5,*fp6,*fp7;

    /* Arquivos de saida */
    /* Seccao de Poincare */
    fp2=fopen("POINCA1.out","w");
    /* Variacao da energia, raio maximo atingido e numero de batidas na seccao */
    fp3=fopen("POINCA1E.dat","w");
    /* Plano rhoXz */
    fp4=fopen("POINCA1RZ.out","w");
    /* Plano rhoXprho */
    /* fp5=fopen("POINCA1R.out","w"); */
    /* Plano zXpz */
    /* fp6=fopen("POINCA1Z.out","w"); */
    /* Seccao de Poincare corrigida */
    fp7=fopen("POINCA1C.out","w");

    /* Pi */
    pi=4.0*atan(1.0);

```

```

/* Passo para as condicoes iniciais */
fatz=exp(pi/gam);
auxcond=zmax/fatz;
hcond=(zmax-auxcond)/ncond;

/* Passo para o tempo */
h=tempo/(npont-1.0);

/* Condicao inicial z0 */
n=0.0;
z0=hcond+auxcond;

/* Contador do numero de batidas final */
batidatotal=0;

/* Loop das condicoes iniciais */
do
{
t=0.0;
k=1;
delta=0.0;
batida=1;

/* Condicoes iniciais */
y[0]=rho0+0.0001;
y[1]=z0;
y[3]=0.0;
y[2]=-pot(2.0*(E-U(y[0],y[1])),0.5);
/* y[2]=pot(2.0*(E-U(y[0],y[1])),0.5); */

/* Impressao no plano rhoIz */
fprintf(fp4,"%14.101f %14.101f\n",y[0],y[1]);

/* Impressao no plano rhoIprho */
/* fprintf(fp5,"%14.101f %14.101f\n",y[0],y[2]); */

/* Impressao no plano zIpz */
/* fprintf(fp6,"%14.101f %14.101f\n",y[1],y[3]); */

/* Integrador Runge-Kutta de quarta ordem*/
do
{
ant=y[0];
zant=y[1];
pzant=y[3];

for(i=0;i<=3;i++)
{
k1[i]=F(i,y);
ya[i]=y[i]+0.5*h*k1[i];
}
for(i=0;i<=3;i++)
{
k2[i]=F(i,ya);
yb[i]=y[i]+0.5*h*k2[i];
}
for(i=0;i<=3;i++)
{
k3[i]=F(i,yb);
yc[i]=y[i]+h*k3[i];
}
for(i=0;i<=3;i++)
{
k4[i]=F(i,yc);
k5[i]=k1[i]+2.0*k2[i]+2.0*k3[i]+k4[i];
k6[i]=k5[i]/6.0;
y[i]+=h*k6[i];
}
}
}

```

```

}

/* Calculo do raio de z, pz */
r=raio(y[1],y[3]);

/* Avaliacao da energia */
E1=0.5*(y[2]*y[2]+y[3]*y[3])+U(y[0],y[1]);
delta=fabs(E-E1);
if(delta>delta) delta=delta;

if(fmod(k,m)==0)
{
/* Impressao no plano rhoXz */
fprintf(fp4,"%14.101f %14.101f\n",y[0],y[1]);

/* Impressao no plano rhoIprho */
/* fprintf(fp5,"%14.101f %14.101f\n",y[0],y[2]); */

/* Impressao no plano zIpz */
/* fprintf(fp6,"%14.101f %14.101f\n",y[1],y[3]); */
}

/* Impressao na seccao de Poincare */
if(((y[0]-rho0)*(ant-rho0)<0.0 && (y[0]-rho0)<0.0)
{
/* Interpolacao do ponto a ser graficado */
zi=interpola(ant,y[0],zant,y[1]);
pz1=interpola(ant,y[0],pzant,y[3]);
/* Mudanca de variavel para o circulo */
z2=circulo(0,z1);
pz2=circulo(1,pz1);
fprintf(fp2,"%14.101f %14.101f\n",z2,pz2);
fprintf(fp7,"%14.101f %14.101f\n",200.0*z2,200.0*pz2);

batida+=1;
}

t+=h;
k+=1;

}while((t<=tempo) && (batida<=nbatida) && (x<=rmax) && (delta<=deltamax));

/* Impressao da variacao da energia */
fprintf(fp3,"deltaE = %e\n",delta);

/* Impressao do raio maximo atingido */
fprintf(fp3,"rmax = %e\n",r);

/* Impressao do numero de batidas na seccao */
fprintf(fp3,"batida = %d\n",batida-1);

batidatotal+=(batida-1);
z0+=hcond;
n+=1.0;

}while(n<ncond);

/* Impressao do numero final de batidas na seccao */
fprintf(fp3,"batidatotal = %d\n",batidatotal);

fclose(fp2);
fclose(fp3);
fclose(fp4);
/* fclose(fp5); */
/* fclose(fp6); */
fclose(fp7);
}

```

```
/* Funcao que determina as equacoes do sistema Hamiltoniano */
double F(int j, double y[4])
{
    if(j==0) return(y[2]);
    else if(j==1) return(y[3]);
    else if(j==2) return(-delUdelrho(y[0],y[1]));
    else if(j==3) return(-delUdelz(y[0],y[1]));
    else return(0.0);
}

/* Funcao potencial */
double U(double rho, double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,1.5);
    e=(L/rho)-(rho/d);
    f=a/d;
    g=pot(c,0.5);
    h=lambda/g;
    i=0.5*e+f-h;
    return(i);
}

/* Derivada da funcao potencial em relacao 'a variavel rho */
double delUdelrho(double rho,double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,4.0);
    e=(rho*(b-2.0*a))/d;
    f=pot(c,2.5);
    g=(3.0*L*rho)/f;
    h=(L*L)/(rho*a);
    i=(rho*(2.0*b-a))/f;
    j=pot(c,1.5);
    k=(lambda*rho)/j;
    l=e+g-h+i+k;
    return(l);
}

/* Derivada da funcao potencial em relacao 'a variavel z */
double delUdelz(double rho,double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,4.0);
    e=(a*z)/d;
    f=pot(c,2.5);
    g=((L-a)*z)/f;
    h=pot(c,1.5);
    i=(lambda*z)/h;
    j=3.0*(-e+g)+i;
    return(j);
}

/* Funcao que fornece a potencia y de um numero real x */
double pot(double x,double y)
{
    if(x>0.0)
        return(exp(y*log(x)));
    return(0.0);
}
```

```

}

/* Mudanca de variavel da elipse para o circulo */
double circulo(int j,double x)
{
    double a,b;
    a=pot(omega,0.25);
    b=1.0/a;
    if(j==0) return(b*x);
    else if(j==1) return(a*x);
    else return(0.0);
}

/* Funccao que interpola o ponto a ser graficado */
double interpola(double x,double y,double z,double w)
{
    double a,b,c,d,e,f;
    a=w-z;
    b=y-rho0;
    c=a*b;
    d=y-x;
    e=c/d;
    f=w-e;
    return(f);
}

/* Funccao que calcula o raio entre z e pz */
double raio(double x, double y)
{
    double a,b,c,d;
    a=x*x;
    b=y*y;
    c=a+b;
    d=pot(c,0.5);
    return(d);
}

```

5. Programa para a iteração da aplicação discreta em (z, p_z)

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

/* Programa com correccao "c" */

double omega,gam,alpha,E0,E,pi;
double raio(double x, double y);
double theta(double x,double y);
double FE(int j,double x,double y,double w);
double pot(double x,double y);

main()
{
    double ncond,zmax,rmax,h,fatz,auxcond,zcond,z,pz,z1,pz1,t,x;
    int tempo,nitera,nfinal,i,niteratotal;
    FILE *fp1,*fp2,*fp3;

    /* Entrada dos dados */
    fp1=fopen("POINCAD.in","r");
    fscanf(fp1,"%lf\n",&omega);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&gam);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&alpha);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&ncond);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&zmax);

```

```
fscanf(fp1,"%lf\n",&rmax);
fscanf(fp1,"%d\n",&ttempo);
fscanf(fp1,"%d\n",&nitera);
fscanf(fp1,"%d\n",&nfinal);
fclose(fp1);

/* Arquivos de saida */
/* Iteradas da aplicacao discreta */
fp2=fopen("POINGAD.out","w");
/* Numero de iteradas calculadas e raio maximo atingido */
fp3=fopen("POINGAD.dat","w");

/* Pi */
pi=4.0*atan(1.0);

/* Passo para as condicoes iniciais */
fatz=exp(pi/gam);
auxcond=zmax/fatz;
h=(zmax-auxcond)/ncond;

/* Impressao da origem */
z=0.0;
pz=0.0;
fprintf(fp2,"%lf %lf\n",z,pz);

/* Contador do numero de iteradas final */
niteratotal=0;

/* Loop da condicao inicial z */
/* (seix dos z de h+auxcond ate' zmax) */
for(zcond=h+auxcond;zcond<=zmax;zcond+=h)
{
    /* Condicoes iniciais */
    i=1;
    z1=zcond;
    pz1=0.0;

    /* Loop de iteracao da aplicacao discreta FE */
    do
    {
        /* Calculo do theta */
        t=theta(z1,pz1);
        /* Calculo da iterada da aplicacao discreta FE */
        z=FE(0,t,z1,pz1);
        pz=FE(1,t,z1,pz1);
        /* Impressao da iterada da aplicacao discreta FE */
        fprintf(fp2,"%lf %lf\n",z,pz);
        /* Calculo do raio de z, pz */
        r=raio(z,pz);

        z1=z;
        pz1=pz;

        i++;
    }while((i<=ttempo)&&(r<=rmax));

    /* Impressao do numero de iteradas calculadas */
    fprintf(fp3,"nitera = %d\n",i-1);

    /* Impressao do raio maximo atingido */
    fprintf(fp3,"rmax = %e\n",r);

    niteratotal+=(i-1);
}

/* Impressao do numero de iteradas calculadas */
fprintf(fp3,"niteratotal = %d\n",niteratotal);
```



```
fclose(fp2);
fclose(fp3);

return(0);
}

/* Funccao que calcula o raio entre z e pz */
double raio(double x, double y)
{
    double a,b,c,d;
    a=x*x;
    b=y*y;
    c=a+b;
    d=pot(c,0.5);
    return(d);
}

/* Funccao que calcula theta(argumento da matriz de rotacao) */
double theta(double x,double y)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i;
    a=x*x;
    b=y*y;
    c=a+b;
    d=pot(omega,0.5);
    e=d*c;
    f=0.5*e-E+E0;
    if (f>=0.0)
        g=log(f);
    else
        g=log(-f);
    h=gam*g;
    i=2.519-h;
    return(-i);
}

/* Funccao discreta FE */
double FE(int j,double x,double y,double w)
{
    double a,b,c,d,e,f;
    a=sin(x);
    b=cos(x);
    if (j==0)
    {
        c=b*y;
        d=a*w;
        e=c-d;
        f=alpha*e;
        return(f);
    }
    else if (j==1)
    {
        c=a*y;
        d=b*w;
        e=c+d;
        f=e/alpha;
        return(f);
    }
    return(0.0);
}

/* Funccao que fornece a potencia y de um numero real x */
double pot(double x,double y)
{
    if (x>0.0)
        return(exp(y*log(x)));
    return(0.0);
}
```

6. Programa para o cálculo da seção de Poincaré em (z, p_z) para ρ fixo, com o reescalamento para o anel

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

/* Reescalamento para o anel */
/* A integracao continua com o ponto reescalado*/
/* Arquivo com todas as batidas */
/* Arquivo com apenas as batidas finais */
/* Arquivo com apenas as batidas finais e com a eliminacao das ilhas elipticas */

double L,lambda,omega,gam,E,rho0,ncond,zmax,rmax,pi,Ranel,anel,deltamax;
int nbatida,nfinal;
void Runge_Kutta(double tempo,double npont,int m);
double F(int j, double y[4]);
double U(double rho,double z);
double delUdelrho(double rho,double z);
double delUdelz(double rho,double z);
double pot(double x,double y);
double interpola(double x,double y,double z,double w);
double circulo(int j,double x);
void anel(void);
double raio(double x, double y);

main()
{
    double tempo,npont;
    int m;
    FILE *fp1;

    /* Entrada dos dados */
    fp1=fopen("POINCA1.in","r");
    fscanf(fp1,"%lf\n",&L);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&lambda);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&omega);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&gam);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rho0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&ncond);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&zmax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rmax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&deltamax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&tempo);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&npont);
    fscanf(fp1,"%d\n",&m);
    fscanf(fp1,"%d\n",&nbatida);
    fscanf(fp1,"%d\n",&nfinal);
    fclose(fp1);

    /* Integracao */
    Runge_Kutta(tempo,npont,m);

    return(0);
}

void Runge_Kutta(double tempo,double npont,int m)
{
    double E1,y[4],ya[4],yb[4],yc[4],t,k1[4],k2[4],k3[4],k4[4],k5[4],k6[4];
    double r,z0,z1,pz1,zant,pzant,ant,z2,pz2,auxcond,hcond,delta,delta1,h;
    double fatz,n,kaux1,kaux2,fataux;
    int i,k,batida,nfinalaux,ilha,batidatotal;
    FILE *fp2,*fp3,*fp4,*fp5,*fp6,*fp7,*fp8;

    /* Arquivos de saida */
    /* Seccao de Poincare reescalada para o anel */

```

```

fp2=fopen("POINCA1A.out","w");
/* Batidas finais da seccao de Poincare */
fp3=fopen("POINCA1P.out","w");
/* Batidas finais da seccao de Poincare exclusas as ilhas elipticas */
fp4=fopen("POINCA1I.out","w");
/* Plano rhoIz */
fp5=fopen("POIN1ARZ.out","w");
/* Plano rhoIprho */
/* fp6=fopen("POINCA1AR.out","w"); */
/* Plano zIpx */
/* fp7=fopen("POINCA1AZ.out","w"); */
/* Variacao da energia, raio maximo atingido e numero de batidas na seccao */
fp8=fopen("POINCA1AE.dat","w");

/* Pi */
pi=4.0*atan(1.0);

/* Passo para as condicoes iniciais */
fatz=exp(pi/gam);
auxcond=zmax/fatz;
hcond=(zmax-auxcond)/ncond;

/* Numero de iteradas desprezadas */
nfinalaux=nbatida-nfinal;

/* Raio maior do anel */
Ranel=zmax*10.0;

/* Raio menor do anel */
ranel=Ranel/fatz;

//anel();

/* Passo para o tempo */
h=tempo/(npont-1.0);

/* Condicao inicial z0 */
n=0.0;
z0=hcond+auxcond;

/* Contador do numero de batidas final */
batidatotal=0;

/* Loop das condicoes iniciais */
do
{
t=0.0;
k=1;
delta=0.0;
batida=1;

/* Variavel de eliminacao das ilhas elipticas */
ilha=0;

/* Condicoes iniciais */
y[0]=rho0+0.0001;
y[1]=z0;
y[3]=0.0;
y[2]=-pot(2.0*(E-U(y[0],y[1])),0.5);
/* y[2]=pot(2.0*(E-U(y[0],y[1])),0.5); */

/* Impressao no plano rhoIz */
fprintf(fp5,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[1]);

/* Impressao no plano rhoIprho */
/* fprintf(fp6,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[2]); */

```

```

/* Impressao no plano zXpz*/
/* fprintf(fp7,"%14.10lf %14.10lf\n",y[i],y[3]); */

/* Integrador Runge-Kutta de quarta ordem*/
do
{
  ant=y[0];
  zant=y[1];
  pzant=y[3];

  for(i=0;i<=3;i++)
  {
    k1[i]=F(i,y);
    ya[i]=y[i]+0.5*h*k1[i];
  }
  for(i=0;i<=3;i++)
  {
    k2[i]=F(i,ya);
    yb[i]=y[i]+0.5*h*k2[i];
  }
  for(i=0;i<=3;i++)
  {
    k3[i]=F(i,yb);
    yc[i]=y[i]+h*k3[i];
  }
  for(i=0;i<=3;i++)
  {
    k4[i]=F(i,yc);
    k5[i]=k1[i]+2.0*k2[i]+2.0*k3[i]+k4[i];
    k6[i]=k5[i]/6.0;
    y[i]=y[i]+h*k6[i];
  }

  /* Calculo do raio de z, pz */
  /* r=raio(y[1],y[3]); */

  /* Avaliacao da energia */
  E1=0.5*(y[2]*y[2]+y[3]*y[3])+U(y[0],y[1]);
  delta1=fabs(E-E1);
  if(delta1>delta) delta=delta1;

  /* Impressao na seccao de Poincare */
  if(((y[0]-rho0)*(ant-rho0)<0.0 && (y[0]-rho0)<0.0)
  {
    /* Interpolacao do ponto a ser graficado */
    zi=interpola(ant,y[0],zant,y[1]);
    pz1=interpola(ant,y[0],pzant,y[3]);
    /* Mudanca de variavel para o circulo */
    z2=circulo(0,zi);
    pz2=circulo(1,pz1);

    /* Calculo do raio de z, pz */
    r=raio(z2,pz2);

    /* Reescalamento para o anel */
    fataux=1.0;
    if((r>=0.0)&&(r<Ranel))
    {
      /* printf("interior\n"); */
      ilha=1;
      /* Calculo do kaux1 */
      kaux1=(gam/pi)*log(Ranel/r);
      /* Calculo do kaux2 (maior inteiro menor que kaux1) */
      kaux2=floor(kaux1);
      fataux=pot(fatz,kaux2);
    }
    else if(r>=Ranel)
    {

```

```

        /* printf("exterior\n"); */
        ilha=1;
        /* Calculo do kaux1 */
        kaux1=(gam/pi)*log(r/Ranel);
        /* Calculo do kaux2 (menor inteiro maior que kaux1) */
        kaux2=ceil(kaux1);
        fataux=pot(fatz,-kaux2);
    }

    z2=fataux*z2;
    pz2=fataux*pz2;

    fprintf(fp2,"%14.10lf %14.10lf\n",z2,pz2);

    /* Impressao na seccao de Poincare somente das batidas finais*/
    if(batida>nfinalaux) fprintf(fp3,"%14.10lf %14.10lf\n",z2,pz2);

    /* Impressao na seccao de Poincare somente das batidas finais */
    /* excluindo as ilhas elipticas */
    if(ilha==1 && batida>nfinalaux) fprintf(fp4,"%14.10lf %14.10lf\n",z2,pz2);

    batida+=1;

    /* Reescalamento da iterada */
    y[0]=rho0;
    y[1]=fataux*z1;
    y[3]=fataux*pz1;
    y[2]=-pot(2.0*(E-U(y[0],y[1]))-(y[3]*y[3]),0.5);
}

if(fmod(k,m)==0)
{
    /* Impressao no plano rhoXz */
    fprintf(fp5,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[1]);

    /* Impressao no plano rhoXrho */
    /* fprintf(fp6,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[2]); */

    /* Impressao no plano zXpz */
    /* fprintf(fp7,"%14.10lf %14.10lf\n",y[1],y[3]); */
}

t+=h;
k+=1;

}while(batida<=nbatida); /* && (r<=rmax));*/

/* Impressao da variacao da energia */
fprintf(fp8,"deltaE = %e\n",delta);

/* Impressao do raio maximo atingido */
fprintf(fp8,"rmax = %e\n",r);

/* Impressao do numero de batidas na seccao */
fprintf(fp8,"batida = %d\n",batida-1);

batidatotal+=(batida-1);
z0+=hcond;
n+=1.0;

}while(n<ncond);

/* Impressao do numero total de batidas na seccao */
fprintf(fp8,"batidatotal = %d\n",batidatotal);

fclose(fp2);
fclose(fp3);
fclose(fp4);

```

```

fclose(fp5);
/* fclose(fp6); */
/* fclose(fp7); */
fclose(fp8);
}

/* Funccao que determina as equacoes do sistema Hamiltoniano */
double F(int j, double y[4])
{
    if(j==0) return(y[2]);
    else if(j==1) return(y[3]);
    else if(j==2) return(-delUdelrho(y[0],y[1]));
    else if(j==3) return(-delUdelz(y[0],y[1]));
    else return(0.0);
}

/* Funccao potencial */
double U(double rho, double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,1.5);
    e=(L/rho)-(rho/d);
    f=a/d;
    g=pot(c,0.5);
    h=lambda/g;
    i=0.5*e+f-h;
    return(i);
}

/* Derivada da funccao potencial em relacao 'a variavel rho */
double delUdelrho(double rho,double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,4.0);
    e=(rho*(b-2.0*a))/d;
    f=pot(c,2.5);
    g=(3.0*L*rho)/f;
    h=(L*L)/(rho*a);
    i=(rho*(2.0*b-a))/f;
    j=pot(c,1.5);
    k=(lambda*rho)/j;
    l=e+g-h+i+k;
    return(l);
}

/* Derivada da funccao potencial em relacao 'a variavel z */
double delUdelz(double rho,double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,4.0);
    e=(a*z)/d;
    f=pot(c,2.5);
    g=((L-a)*z)/f;
    h=pot(c,1.5);
    i=(lambda*z)/h;
    j=3.0*(-e+g)+i;
    return(j);
}

```

```
/* Funcao que fornece a potencia y de um numero real x */
double pot(double x,double y)
{
    if(x>0.0)
        return(exp(y*log(x)));
    return(0.0);
}

/* Mudanca de variavel da elipse para o circulo */
double circulo(int j,double x)
{
    double a,b;
    a=pot(omega,0.25);
    b=1.0/a;
    if(j==0) return(b*x);
    else if(j==1) return(a*x);
    else return(0.0);
}

/* Funcao que interpola o ponto a ser graficado */
double interpola(double x,double y,double z,double w)
{
    double a,b,c,d,e,f;
    a=w-z;
    b=y-rho0;
    c=a*b;
    d=y-x;
    e=c/d;
    f=w-e;
    return(f);
}

/* Funcao que calcula o raio entre z e pz */
double raio(double x, double y)
{
    double a,b,c,d;
    a=x*x;
    b=y*y;
    c=a+b;
    d=pot(c,0.5);
    return(d);
}

/* Funcao que descreve o anel */
void anel(void)
{
    double x,y,pi1,j;
    FILE *fp9;

    fp9=fopen("ANEL.out","w");

    pi1=2*pi;

    for(j=0;j<=pi1;j+=0.001)
    {
        x=ranel*cos(j);
        y=ranel*sin(j);
        fprintf(fp9,"%lf %lf\n",x,y);
    }

    for(j=0;j<=pi1;j+=0.001)
    {
        x=Ranel*cos(j);
        y=Ranel*sin(j);
        fprintf(fp9,"%lf %lf\n",x,y);
    }

    fclose(fp9);
}
```

}

7. Programa para iteraç o da aplica o discreta com o reescalamento para o anel

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

/* Reescalamento para o anel*/
/* Arquivo com todas as batidas */
/* Arquivo com apenas as batidas finais */
/* Arquivo com apenas as batidas finais e com a eliminac o das ilhas elipticas */

double omega,gam,alpha,E0,E,pi,ranel;
double raio(double x, double y);
double theta(double x,double y);
double FE(int j,double x,double y,double w);
double pot(double x,double y);
void anel(void);

main()
{
    double ncond,zmax,rmax,h,fatz,auxcond,z,pz,zcond,z1,pz1,t;
    double r,fataux,kaux1,kaux2;
    int tempo,nitera,nfinal,nfinalaux,itera,ilha,niteratotal;
    FILE *fp1,*fp2,*fp3,*fp4,*fp5;

    /* Entrada dos dados */
    fp1=fopen("POINCAD.in","r");
    fscanf(fp1,"%lf\n",&omega);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&gam);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&alpha);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&ncond);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&zmax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rmax);
    fscanf(fp1,"%d\n",&tempo);
    fscanf(fp1,"%d\n",&nitera);
    fscanf(fp1,"%d\n",&nfinal);
    fclose(fp1);

    /* Arquivos de saida */
    /* Seccao discreta reescalada para o anel */
    fp2=fopen("POINCADA.out","w");
    /* Batidas finais da seccao discreta */
    fp3=fopen("POINCDAF.out","w");
    /* Batidas finais da seccao discreta exclusas as ilhas elipticas */
    fp4=fopen("POINCDAI.out","w");
    /* Variac o do raio maximo atingido e numero de iteradas calculadas */
    fp5=fopen("POINCADA.dat","w");

    /* Pi */
    pi=4.0*atan(1.0);

    /* Passo para as condicoes iniciais */
    fatz=exp(pi/gam);
    auxcond=zmax/fatz;
    h=(zmax-auxcond)/ncond;

    /* Contador do numero de iteradas final */
    niteratotal=0;

```



```

/* Numero de iteradas desprezadas */
nfinalaux=nitera-nfinal;

/* Raio menor do anel */
ranel=1.0/fatz;

anel();

/* Loop da condicao inicial z */
/* (eixo dos z de h+auxcond ate' zmax) */
for(zcond=h+auxcond;zcond<=zmax;zcond+=h)
{
  /* Condicoes iniciais */
  itera=1;
  z1=zcond;
  pz1=0.0;

  /* Variavel de eliminacao das ilhas elipticas */
  ilha=0;

  /* Loop de iteracao da aplicacao discreta FE */
  do
  {
    /* Calculo do theta */
    t=theta(z1,pz1);
    /* Calculo da iterada da aplicacao discreta FE */
    z=FE(0,t,z1,pz1);
    pz=FE(1,t,z1,pz1);

    /* Calculo do raio de z, pz */
    r=raio(z,pz);

    /* Reescalamento para o anel */
    fataux=1.0;
    if((r>0.0)&&(r<ranel))
    {
      /* printf("interior\n"); */
      ilha=1;
      /* Calculo do kaux1 */
      kaux1=(gam/pi)*log(1.0/r);
      /* Calculo do kaux2 (maior inteiro menor que kaux1) */
      kaux2=floor(kaux1);
      fataux=pot(fatz,kaux2);
    }
    else if(r>=1.0)
    {
      /* printf("exterior\n"); */
      ilha=1;
      /* Calculo do kaux1 */
      kaux1=(gam/pi)*log(r);
      /* Calculo do kaux2 (menor inteiro maior que kaux1) */
      kaux2=ceil(kaux1);
      fataux=pot(fatz,-kaux2);
    }
  }

  z=fataux*z;
  pz=fataux*pz;

  /* Impressao da iterada da aplicacao discreta FE reescalada para o anel */
  fprintf(fp2,"%lf %lf\n",z,pz);

  /* Impressao na seccao discreta somente das batidas finais*/
  if(itera>nfinalaux) fprintf(fp3,"%lf %lf\n",z,pz);

  /* Impressao na seccao de Poincare somente das batidas finais */
  /* excluindo as ilhas elipticas */
  if(ilha==1 && itera>nfinalaux) fprintf(fp4,"%lf %lf\n",z,pz);
}

```

```
/* Calculo do raio de z, pz */
r=raio(z,pz);

z1=z;
pz1=pz;

itera++;
}while((itera<=nitera));

/* Impressao do numero de iteradas calculadas */
fprintf(fp5,"itera = %d\n",itera-1);

/* Impressao do raio maximo atingido */
fprintf(fp5,"rmax = %e\n",r);

niteratotal+=(itera-1);
}

/* Impressao do numero total de iteradas */
fprintf(fp5,"niteratotal = %d\n",niteratotal);

fclose(fp2);
fclose(fp3);
fclose(fp4);
fclose(fp5);

return(0);
}

/* Funccao que calcula o raio entre z e pz */
double raio(double x, double y)
{
    double a,b,c,d;
    a=x*x;
    b=y*y;
    c=a+b;
    d=pot(c,0.5);
    return(d);
}

/* Funccao que calcula theta(argumento da matriz de rotacao) */
double theta(double x,double y)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i;
    a=x*x;
    b=y*y;
    c=a+b;
    d=pot(omega,0.5);
    e=d*c;
    f=0.5*e-E+E0;
    if(f>=0.0)
        g=log(f);
    else
        g=log(-f);
    h=gam*g;
    i=2.519-h;
    return(-i);
}

/* Funccao discreta FE */
double FE(int j,double x,double y,double w)
{
    double a,b,c,d,e,f;
    a=sin(x);
    b=cos(x);
    if(j==0)
    {
        c=b*y;
```

```

        d=a*w;
        e=c-d;
        f=alpha*e;
        return(f);
    }
    else if(j==1)
    {
        c=a*y;
        d=b*w;
        e=c+d;
        f=e/alpha;
        return(f);
    }
    return(0.0);
}

/* Funccao que fornece a potencia y de um numero real x */
double pot(double x,double y)
{
    if(x>0.0)
        return(exp(y*log(x)));
    return(0.0);
}

/* Funccao que descreve o anel */
void anel(void)
{
    double x,y,pi1,j;
    FILE *fp6;

    fp6=fopen("ANELD.out","w");

    pi1=2*pi;

    for(j=0;j<=pi1;j+=0.001)
    {
        x=ranel*cos(j);
        y=ranel*sin(j);
        fprintf(fp6,"%lf %lf\n",x,y);
    }

    for(j=0;j<=pi1;j+=0.001)
    {
        x=cos(j);
        y=sin(j);
        fprintf(fp6,"%lf %lf\n",x,y);
    }

    fclose(fp6);
}

```

8. Programa para o cálculo da seção global de Poincaré em (z, p_z) para ρ fixo

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

double L,lambda,omega,gam,E,rho0,ncond,zmax,rmax,deltamax,pi;
void Runge_Kutta(double tempo,double npont,int m);
double F(int j, double y[4]);
double U(double rho,double z);
double delUdelrho(double rho,double z);
double delUdelz(double rho,double z);

```

```

double pot(double x,double y);
double interpola(double x,double y,double z,double w);
double circulo(int j,double x);
double raio(double x, double y);

main()
{
    double tempo,npont;
    int m;
    FILE *fp1;

    /* Entrada dos dados */
    fp1=fopen("POINCA1.in","r");
    fscanf(fp1,"%lf\n",&L);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&lambda);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&omega);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&gam);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rho0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&ncond);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&zmax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rmax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&deltamax);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&tempo);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&npont);
    fscanf(fp1,"%d\n",&m);
    fclose(fp1);

    /* Integracao */
    Runge_Kutta(tempo,npont,m);

    return(0);
}

void Runge_Kutta(double tempo,double npont,int m)
{
    double E1,y[4],ya[4],yb[4],yc[4],t,k1[4],k2[4],k3[4],k4[4],k5[4],k6[4];
    double r,z0,z1,pz1,zant,pzant,ant,z2,pz2,auxcond,hcond;
    double delta,delta1,h,fatz,n;
    int i,k,batida,batidatotal;
    FILE *fp2,*fp3,*fp4,*fp5,*fp6;

    /* Arquivos de saida */
    /* Seccao global de Poincare */
    fp2=fopen("POINCA1G.out","w");
    /* Variacao da energia, raio maximo atingido, numero de batidas na seccao */
    fp3=fopen("POINC1GE.dat","w");
    /* Plano rhoIz */
    fp4=fopen("POIN1GRZ.out","w");
    /* Plano rhoIprho */
    /* fp5=fopen("POINC1GR.out","w"); */
    /* Plano zIpz */
    /* fp6=fopen("POINC1GZ.out","w"); */

    /* Pi */
    pi=4.0*atan(1.0);

    /* Passo para as condicoes iniciais */
    fatz=exp(pi/gam);
    auxcond=zmax/fatz;
    //hcond=(zmax-auxcond)/ncond;
    hcond=0.05;

    /* Passo para o tempo */
    h=tempo/(npont-1.0);

    /* Condicao inicial z0 */
    n=0.0;

```

```

//z0=hcond+auxcond;
z0=6.0;

/* Contador do numero de batidas final */
batidatotal=0;

/* Loop das condicoes iniciais */
do
{
t=0.0;
k=1;
delta=0.0;
batida=1;

/* Condicoes iniciais */
y[0]=rho0+0.0001;
y[1]=z0;
y[3]=0.0;
y[2]=-pot(2.0*(E-U(y[0],y[1])),0.5);
/* y[2]=pot(2.0*(E-U(y[0],y[1])),0.5); */

/* Impressao no plano rhoXz */
fprintf(fp4,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[1]);

/* Impressao no plano rhoXprho */
/* fprintf(fp5,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[2]); */

/* Impressao no plano zXpz */
/* fprintf(fp6,"%14.10lf %14.10lf\n",y[1],y[3]); */

/* Integrador Runge-Kutta de quarta ordem */
do
{
ant=y[0];
zant=y[1];
pzant=y[3];

for(i=0;i<=3;i++)
{
k1[i]=F(i,y);
ya[i]=y[i]+0.5*h*k1[i];
}
for(i=0;i<=3;i++)
{
k2[i]=F(i,ya);
yb[i]=y[i]+0.5*h*k2[i];
}
for(i=0;i<=3;i++)
{
k3[i]=F(i,yb);
yc[i]=y[i]+h*k3[i];
}
for(i=0;i<=3;i++)
{
k4[i]=F(i,yc);
k5[i]=k1[i]+2.0*k2[i]+2.0*k3[i]+k4[i];
k6[i]=k5[i]/6.0;
y[i]=y[i]+h*k6[i];
}

/* Calculo do raio de z, pz */
r=raio(y[1],y[3]);

/* Avaliacao da energia */
E1=0.5*(y[2]*y[2]+y[3]*y[3])+U(y[0],y[1]);
delta=fabs(E-E1);
if(delta>delta) delta=delta;
}
}

```

```

if(fmod(k,10.0*m)==0)
{
    /* Impressao no plano rhoIz */
    fprintf(fp4,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[1]);

    /* Impressao no plano rhoIprho */
    /* fprintf(fp5,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[2]); */

    /* Impressao no plano zIpz */
    /* fprintf(fp6,"%14.10lf %14.10lf\n",y[1],y[3]); */
}

/* Impressao na seccao de Poincare */
if(((y[0]-rho0)*(ant-rho0))<0.0 && (y[0]-rho0)<0.0)
{
    /* Interpolacao do ponto a ser graficado */
    z1=interpola(ant,y[0],zant,y[1]);
    pz1=interpola(ant,y[0],pzant,y[3]);
    /* Mudanca de variavel para o circulo */
    z2=circulo(0,z1);
    pz2=circulo(1,pz1);
    fprintf(fp2,"%14.10lf %14.10lf\n",z2,pz2);

    batida+=1;
}

t+=h;
k+=1;

}while(t<=tempo);

/* Impressao da variacao da energia */
fprintf(fp3,"deltaE = %e\n",delta);

/* Impressao do raio maximo atingido */
fprintf(fp3,"rmax = %e\n",r);

/* Impressao do numero de batidas na seccao */
fprintf(fp3,"batida = %d\n",batida-1);

batidatotal+=(batida-1);
z0+=hcond;
n+=1.0;

}while(n<ncond);

/* Impressao do numero total de batidas na seccao */
fprintf(fp3,"batidatotal = %d\n",batidatotal);

fclose(fp2);
fclose(fp3);
/* fclose(fp4); */
/* fclose(fp5); */
/* fclose(fp6); */
}

/* Funcao que determina as equacoes do sistema Hamiltoniano */
double F(int j, double y[4])
{
    if(j==0) return(y[2]);
    else if(j==1) return(y[3]);
    else if(j==2) return(-delUdelrho(y[0],y[1]));
    else if(j==3) return(-delUdelz(y[0],y[1]));
    else return(0.0);
}

/* Funcao potencial */
double U(double rho, double z)

```

```

{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,1.5);
    e=(L/rho)-(rho/d);
    f=a/d;
    g=pot(c,0.5);
    h=lambda/g;
    i=0.5*e*e+f-h;
    return(i);
}

/* Derivada da funcao potencial em relacao 'a variavel rho */
double delUdelrho(double rho,double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,4.0);
    e=(rho*(b-2.0*a))/d;
    f=pot(c,2.5);
    g=(3.0*L*rho)/f;
    h=(L*L)/(rho*a);
    i=(rho*(2.0*b-a))/f;
    j=pot(c,1.5);
    k=(lambda*rho)/j;
    l=e+g-h+i+k;
    return(l);
}

/* Derivada da funcao potencial em relacao 'a variavel z */
double delUdelz(double rho,double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,4.0);
    e=(a*z)/d;
    f=pot(c,2.5);
    g=((L-a)*z)/f;
    h=pot(c,1.5);
    i=(lambda*z)/h;
    j=3.0*(-e+g)+i;
    return(j);
}

/* Funcao que fornece a potencia y de um numero real x */
double pot(double x,double y)
{
    if(x>0.0)
        return(exp(y*log(x)));
    return(0.0);
}

/* Mudanca de variavel da elipse para o circulo */
double circulo(int j,double x)
{
    double a,b;
    a=pot(omega,0.25);
    b=1.0/a;
    if(j==0) return(b*x);
    else if(j==1) return(a*x);
    else return(0.0);
}

```

```

/* Funcao que interpola o ponto a ser graficado */
double interpola(double x,double y,double z,double w)
{
    double a,b,c,d,e,f;
    a=w-z;
    b=y-rho0;
    c=a*b;
    d=y-x;
    e=c/d;
    f=w-e;
    return(f);
}

/* Funcao que calcula o raio entre z e pz */
double raio(double x, double y)
{
    double a,b,c,d;
    a=x*x;
    b=y*y;
    c=a+b;
    d=pot(c,0.5);
    return(d);
}

```

9. Programa para o cálculo da seção global de Poincaré em (ρ, p_ρ) para z fixo

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

double L,lambda,omega,E,rho0,prho0,pi;

void Runge_Kutta(double tempo,double npont,int m);
double F(int j, double y[4]);
double U(double rho,double z);
double delUdelrho(double rho,double z);
double delUdelz(double rho,double z);
double pot(double x,double y);
double interpola(double x,double y,double z,double w);
double circulo(int j,double x);
double raio(double x, double y);

main()
{
    double tempo,npont;
    int m;
    FILE *fp1;

    /* Entrada dos dados */
    fp1=fopen("POINCA1z.in","r");
    fscanf(fp1,"%lf\n",&L);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&lambda);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&omega);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&E);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&rho0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&prho0);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&tempo);
    fscanf(fp1,"%lf\n",&npont);
    fscanf(fp1,"%d\n",&m);
    fclose(fp1);

    /* Integracao */

```



```

Runge_Kutta(tempo,npont,m);

return(0);
}

void Runge_Kutta(double tempo,double npont,int m)
{
double E1,y[4],ya[4],yb[4],yc[4],t,k1[4],k2[4],k3[4],k4[4],k5[4],k6[4];
double r,rho1,prho1,rhoant,prhoant,ant,rho2,prho2,auxcond,hcond;
double delta,delta1,h,fatz,n;
int i,k,batida;
FILE *fp2,*fp3,*fp4,*fp5,*fp6;

/* Arquivos de saida */
/* Seccao global de Poincare no plano rhoXprho com z fixo */
fp2=fopen("POINC1GZ.out","w");
/* Variacao da energia, raio maximo atingido e numero de batidas na seccao */
fp3=fopen("POINC1GZE.dat","w");
/* Plano rhoXz */
fp4=fopen("POINC1GZRZ.out","w");
/* Plano zXrho */
/* fp5=fopen("POINC1GZR.out","w"); */
/* Plano zXpz */
/* fp6=fopen("POINC1GZZ.out","w"); */

/* Pi */
pi=4.0*atan(1.0);

/* Passo para o tempo */
h=tempo/(npont-1.0);

t=0.0;
k=1;
delta=0.0;
batida=1;

/* Condiçoes iniciais */
y[0]=rho0;
y[1]=0.0001;
y[2]=prho0;
y[3]=-pot(2.0*(E-U(y[0],y[1])-(y[2]*y[2])),0.5);
/* y[3]=pot(2.0*(E-U(y[0],y[1])-(y[2]*y[2])),0.5); */

/* Impressao no plano rhoXz */
fprintf(fp4,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[1]);

/* Impressao no plano rhoXprho */
/* fprintf(fp5,"%14.10lf %14.10lf\n",y[0],y[2]); */

/* Impressao no plano zXpz */
/* fprintf(fp6,"%14.10lf %14.10lf\n",y[1],y[3]); */

/* Integrador Runge-Kutta de quarta ordem */
do
{
ant=y[1];
rhoant=y[0];
prhoant=y[2];

for(i=0;i<=3;i++)
{
k1[i]=F(i,y);
ya[i]=y[i]+0.5*h*k1[i];
}
for(i=0;i<=3;i++)
{
k2[i]=F(i,ya);
yb[i]=y[i]+0.5*h*k2[i];
}
}

```

```

}
for(i=0;i<=3;i++)
{
    k3[i]=F(i,yb);
    yc[i]=y[i]+h*k3[i];
}
for(i=0;i<=3;i++)
{
    k4[i]=F(i,yc);
    k5[i]=k1[i]+2.0*k2[i]+2.0*k3[i]+k4[i];
    k6[i]=k5[i]/6.0;
    y[i]=h*k6[i];
}

/* Calculo do raio de rho, prho */
r=raio(y[0],y[2]);

/* Avaliacao da energia */
E1=0.5*(y[2]*y[2]+y[3]*y[3])+U(y[0],y[1]);
delta1=fabs(E-E1);
if(delta1>delta) delta=delta1;

if(fmod(k,m)==0)
{
    /* Impressao no plano rhoXz */
    fprintf(fp4,"%14.101f %14.101f\n",y[0],y[1]);

    /* Impressao no plano rhoXprho */
    /* fprintf(fp5,"%14.101f %14.101f\n",y[0],y[2]); */

    /* Impressao no plano zIpz */
    /* fprintf(fp6,"%14.101f %14.101f\n",y[1],y[3]); */
}

/* Impressao na seccao de Poincare */
if((y[1]*ant)<0.0 && (y[1]-ant)<0.0)
{
    /* Interpolacao do ponto a ser graficado */
    rho1=interpola(ant,y[1],rhoant,y[0]);
    prho1=interpola(ant,y[1],prhoant,y[2]);
    /* Mudanca de variavel para o circulo */
    /* z2=circulo(0,z1); */
    /* pz2=circulo(1,pz1); */
    /* if(fmod(k,20)==0) */ fprintf(fp2,"%14.101f %14.101f\n",rho1,prho1);

    batida+=1;
}

t+=h;
k+=1;

}while(t<=tempo);

/* Impressao da variacao da energia */
fprintf(fp3,"deltaE = %e\n",delta);

/* Impressao do raio maximo atingido */
fprintf(fp3,"rmax = %e\n",r);

/* Impressao do numero de batidas na seccao */
fprintf(fp3,"batida = %d\n",batida-1);

fclose(fp2);
fclose(fp3);
fclose(fp4);
/* fclose(fp5); */
/* fclose(fp6); */
}

```

```
/* Funccao que determina as equaccoes do sistema Hamiltoniano */
double F(int j, double y[4])
{
    if(j==0) return(y[2]);
    else if(j==1) return(y[3]);
    else if(j==2) return(-delUdelrho(y[0],y[1]));
    else if(j==3) return(-delUdelz(y[0],y[1]));
    else return(0.0);
}

/* Funccao potencial */
double U(double rho, double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,1.5);
    e=(L/rho)-(rho/d);
    f=a/d;
    g=pot(c,0.5);
    h=lambda/g;
    i=0.5*e*e+f-h;
    return(i);
}

/* Derivada da funccao potencial em relacao 'a variavel rho */
double delUdelrho(double rho,double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,4.0);
    e=(rho*(b-2.0*a))/d;
    f=pot(c,2.5);
    g=(3.0*L*rho)/f;
    h=(L*L)/(rho*a);
    i=(rho*(2.0*b-a))/f;
    j=pot(c,1.5);
    k=(lambda*rho)/j;
    l=e+g-h+i+k;
    return(l);
}

/* Derivada da funccao potencial em relacao 'a variavel z */
double delUdelz(double rho,double z)
{
    double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j;
    a=rho*rho;
    b=z*z;
    c=a+b;
    d=pot(c,4.0);
    e=(a*z)/d;
    f=pot(c,2.5);
    g=((L-a)*z)/f;
    h=pot(c,1.5);
    i=(lambda*z)/h;
    j=3.0*(-e+g)+i;
    return(j);
}

/* Funccao que fornece a potencia y de um numero real x */
double pot(double x,double y)
{
    if(x>0.0)
        return(exp(y*log(x)));
}
```

```
        return(0.0);
    }

    /* Mudanca de variavel da elipse para o circulo */
    double circulo(int j,double x)
    {
        double a,b;
        a=pot(omega,0.25);
        b=1.0/a;
        if(j==0) return(b*x);
        else if(j==1) return(a*x);
        else return(0.0);
    }

    /* Funcao que interpola o ponto a ser graficado */
    double interpola(double x,double y,double z,double w)
    {
        double a,b,c,d,e;
        a=z*y;
        b=x*w;
        c=a-b;
        d=y-x;
        e=c/d;
        return(e);
    }

    /* Funcao que calcula o raio entre z e pz */
    double raio(double x, double y)
    {
        double a,b,c,d;
        a=x*x;
        b=y*y;
        c=a+b;
        d=pot(c,0.5);
        return(d);
    }
}
```

Referências Bibliográficas

ADDAS ZANATA, S., GROTTA RAGAZZO, C. 2001. Critical number in scattering and escaping problems in classical mechanics. *Phys. Rev. E* 64, 046216.

ADDAS ZANATA, S., GROTTA RAGAZZO, C. 2002. On the stability of some periodic orbitas of a new type for twist maps. *Nonlinearity* 15, 1385–1397.

BASTOS DE FIGUEIREDO, J. C., GROTTA RAGAZZO, C., MALTA, C. P. 1998. Two important numbers in the h enon-heiles dynamics. *Physics Letters A* 241, 35–40.

BURNS, J., SHOWALTER, M., MORFILL, G. E. 1984. *Planetary Rings*. University of Arizona, Chapter The Ethereal Rings of Jupiter and Saturn, 200–272.

BURNS, J. A., SHOWALTER, M. R., HAMILTON, D. P., NICHOLSON, P. D., DE PATER, I., OCKERT-BELL, M. E., THOMAS, P. C. 1999. The formation of jupiter’s faint rings. *Science* 284, 1146–1150.

CONSOLMAGNO, G. J. 1983. Lorentz forces on the dust in jupiter’s ring. *J. Geophys. Res.* 88, A7, 5607–5612.

DULLIN, H. R., HOR ANYI, M., HOWARD, J. E. 2002. Generalizations of the st ormer problem for dust grain orbits. *Physica D* 171, 178–195.

GROTTA RAGAZZO, C. 1994. Nonintegrability of some hamiltonian systems, scattering and analytic continuation. *Comm. Math. Phys.* 166, 255–277.

GROTTA RAGAZZO, C. 1997a. Irregular dynamics and homoclinic orbits to hamiltonian saddle centers. *Comm. Pure App. Math. L*, 105–147.

- GROTTA RAGAZZO, C. 1997b. On the stability of double homoclinic loops. *Comm. Math. Phys.* 184, 215–272.
- GROTTA RAGAZZO, C. 1997c. Stability of homoclinic orbits and diffusion in phase space. *Physics Letters A* 230, 183–189.
- HORÁNYI, M., CRAVENS, T. E. 1996. The structure and dynamics of jupiter's rings. *Nature* 381, 293–295.
- HOWARD, J. E., DULLIN, H. R., HORÁNYI, M. 2000. Stability of halo orbits. *Phys. Rev. Lett.* 84, 15, 3244–3247.
- HOWARD, J. E., HORÁNYI, M., STEWART, G. R. 1999. Global dynamics of charged dust particles in planetary magnetospheres. *Phys. Rev. Lett.* 83, 20, 3993–3996.
- KRIVOV, A. V., KRÜGER, H., GRÜN, E., THIESSENHUSEN, K., HAMILTON, D. P. 2002. A tenuous dust ring of jupiter formed by escaping ejecta from the galilean satellites. *J. Geophys. Res.* 107, E1, 2.1–2.13.
- LERMAN, L. M. 1991. Hamiltonian systems with loops of a separatrix of a saddle-center. *Sel. Math. Sov.* 10, 3, 297–306.
- MENDIS, D. A., HOUPIS, H. L. F., HILL, J. R. 1982. The gravito-electrodynamics of charged dust in planetary magnetospheres. *J. Geophys. Res.* 87, A5, 3449–3455.
- MIELKE, A., HOLMES, P., O'OREILLY, O. 1992. Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a hamiltonian saddle-center. *J. Dyn. Diff. Eqns.* 4, 1, 95–126.
- OCKERT-BELL, M. E., BURNS, J. A., DAUBAR, I. J., THOMAS, P. C., VEVERKA, J., BELTON, M. J. S., KLAASEN, K. P. 1999. The structure of jupiter's ring system as revealed by the galileo imaging experiment. *Icarus* 138, 188–213.
- OWEN, T., DANIELSON, G. E., COOK, A. F., HANSEN, C., HALL, V. C., DUXBURY, T. 1979. Jupiters rings. *Nature* 281, 442–446.
- SCHAFFER, L., BURNS, J. A. 1994. Charged dust in planetary magnetospheres: Hamiltonian dynamics and numerical simulations for highly charged grains. *J. Geophys. Res.* 99, A9, 17211–17223.

SMITH, B. A., SODERBLOM, L. A., JOHNSON, T. V., INGERSOLL, A. P., COLLINS, S. A., SHOEMAKER, E. M., HUNT, G. E., MASURSKY, H., CARR, M. H., DAVIES, M. E., COOK, A. F., BOYCE, J., DANIELSON, G. E., OWEN, T., SAGAN, C., BEEBE, R. F., VEVERKA, J., STROM, R. G., MCCAULEY, J. F., MORRISON, D., BRIGGS, G. A., SUOMI, V. E. 1979. Jupiter system through the eyes of voyager-1. *Science* 204, 951-972.