Subgrupos maximais de grupos de Lie compactos

Paola Andrea Gaviria

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Michael Forger**

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro da CAPES

– São Paulo, 28 de Julho de 2006 –

Subgrupos maximais de grupos de Lie compactos

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida
por Paola Andrea Gaviria
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 28 de Julho de 2006.

COMISSÃO JULGADORA

- Prof. Dr. Frank Michael Forger (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Luiz Barrera San Martin - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny - IME-USP

Resumo

Neste trabalho, estudamos a classificação dos subgrupos maximais (não discretos) dos grupos de Lie compactos conexos. Mostramos primeiro que ela é equivalente à determinação das subálgebras maximais invariantes das álgebras de Lie compactas e como esta pode ser reduzida à classificação das subálgebras primitivas das álgebras de Lie compactas simples. Na segunda parte, apresentamos esta classificação, conforme os resultados encontrados na literatura, com algumas correções, e calculamos explicitamente, para os grupos clássicos, os subgrupos maximais correspondentes.

Abstract

In this work, we study the classification of the (non-discrete) maximal subgroups of compact connected Lie groups. First we show that it is equivalent to the determination of the maximal invariant subalgebras of compact Lie algebras and how this can be reduced to the classification of the primitive subalgebras of compact simple Lie algebras. In the second part, we present this classification, according to the results found in the literature, with some corrections, and explicitly calculate, for the classical groups, the corresponding maximal subgroups.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Michael Forger, meu orientador, pela dedicação, paciência e confiança. Seus conhecimentos e experiência profissional contribuíram na minha formação acadêmica e incentivaram-me a concluir a dissertação e dar início a uma nova etapa. Ao Dr. Fernando Antoneli, pelo tempo dedicado e disponibilidade. A minha família e amigos pelo apoio incondicional.

Conteúdo

Lista de Tabelas

Introdução

Na teoria dos grupos e suas representações, a determinação dos subgrupos maximais ocupa um papel importante, pois providencia uma ferramenta para se chegar ao reticulado completo de todos os subgrupos, por iteração. Entre as categorias de grupos estáveis sob passagem a subgrupos e para as quais este problema pode ser abordado com alguma chance de sucesso, destacam-se a dos grupos finitos e a dos grupos de Lie compactos.

No caso dos grupos de Lie, podemos relacionar essa questão com a mesma tarefa no nível "infinitesimal", ou seja, de álgebras de Lie. Assim, por exemplo, a classificação dos subgrupos maximais conexos dos grupos de Lie compactos conexos é equivalente à classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie compactas, ou ainda, das subálgebras maximais redutivas das álgebras de Lie complexas redutivas.

Porém, quando se quer encontrar os subgrupos maximais, inclusive os que não são conexos, dos grupos de Lie compactos conexos, tal equivalência deixa de valer: existem subgrupos maximais cujas correspondentes subálgebras de Lie não são maximais. No entanto, uma correspondência análoga pode ser estabelecida usando uma generalização da noção de subálgebra maximal, a saber a de subálgebra maximal invariante (que no caso de subálgebras que não contêm nenhum ideal da álgebra ambiente é idêntico à de subálgebra primitiva): existe uma correspondência biunívoca entre os subgrupos maximais, conexos ou não, de um grupo de Lie compacto G e as subalgebras maximal invariantes da álgebra de Lie correspondente $\mathfrak{g}$. Ademais, existe hoje uma classificação completa das subálgebras primitivas das álgebras de Lie compactas (semi)simples, ou ainda, das subálgebras primitivas redutivas das álgebras de Lie complexas (semi)simples, análoga à famosa classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie complexas (semi)simples de Dynkin. É esta a teoria que será apresentada no trabalho.

A motivação central de nosso trabalho surgiu do projeto iniciado por Hornos & Hornos [29] que propuseram uma abordagem matemática ao problema da evolução do código genético, através de um modelo algébrico que interpreta as degenerescências do código genético como sendo o resultado de um processo evolutivo acompanhado por uma sequência de quebras de simetria; veja [30] para uma exposição detalhada. A implementação deste procedimento na categoria dos grupos de Lie compactos consiste na escolha de um grupo de Lie compacto que possui uma representação irredutível de dimensão 64, juntamente com uma cadeia descendente de subgrupos maximais, tal que a correspondente quebra de simetria, até o último subgrupo, reproduz as degenerescências do código genético. Uma busca exaustiva já produziu uma classificação de todos os possíveis esquemas de quebra de simetria através de cadeias de subgrupos conexos [29, 17, 30, 9, 1, 2]. No entanto, esta classificação ainda não é completa, uma vez que subgrupos não conexos aparecem natural e quase inevitavelmente no processo de quebra de simetria, mas esta opção ainda não foi sistematicamente incluída na análise. Para tanto, precisa-se de uma classificação completa de subgrupos maximais de grupos de Lie compactos, conexos ou não, e neste sentido, a presente dissertação constitui um primeiro passo para finalmente completar o programa iniciado em [29].

Concretamente, dividimos o nosso trabalho em dois capítulos. No primeiro, explicamos a correspondência biunívoca entre os subgrupos maximais, conexos ou não, de um grupo de Lie compacto conexo G e as subalgebras maximal invariantes da álgebra de Lie correspondente $\mathfrak{g}$. A exposição é baseada no trabalho de Golubitsky [20] mas traz uma simplificação importante: eliminamos completamente a hipótese de que a subálgebra em questão não deva conter nenhum ideal próprio da álgebra ambiente. (Portanto, no contexto do problema de determinar subgrupos maximais, esta hipótese, que faz parte da definição de uma subálgebra primitiva e é automaticamente satisfeita caso a álgebra ambiente for simples, é realmente supérflua.) Ainda no primeiro capítulo, mostramos também como reduzir a determinação das subálgebras maximal invariantes das álgebras de Lie compactas à determinação das subálgebras maximal invariantes, ou primitivas, das álgebras de Lie compactas simples.

No segundo capítulo, o nosso principal objetivo é determinar todas as subálgebras primitivas das álgebras de Lie compactas simples. Esta classificação é tema de vários artigos na literatura [20, 11, 35] e é apresentada na forma de várias tabelas, as quais contêm uma série de correções de erros encontrados nas tabelas originais. Também exibimos tabelas com os subgrupos maximais dos grupos clássicos que decorrem desta classificação, e apresentamos alguns argumentos para consolidar e justificar os resultados obtidos.

Capítulo 1

Subgrupos maximais de grupos de Lie compactos

Neste capítulo, investigamos a classificação dos subgrupos maximais de grupos de Lie compactos. Um ingrediente essencial para tal estudo são os trabalhos clássicos de Dynkin sobre a classificação das subálgebras semisimples maximais das álgebras de Lie complexas semisimples [13, 14]; para uma apresentação recente em notação moderna (e com as devidas correções), veja [1]. No entanto, os resultados de Dynkin precisam ser adaptados em várias direções. Por exemplo, é necessário efetuar a passagem do âmbito das álgebras de Lie complexas semisimples para as álgebras de Lie reais compactas. Um problema mais grave ainda provém do fato de que a correspondência padrão entre subgrupos de Lie de um grupo de Lie e subálgebras de Lie de uma álgebra de Lie é apenas parcialmente compatível com o conceito de maximalidade, pois contrariamente a uma afirmação feita por Dynkin em um dos seus trabalhos principais [14, p. 246], existem exemplos elementares de subgrupos maximais de grupos de Lie compactos cuja álgebra de Lie não é maximal. As considerações que se fazem necessárias para lidar com esta dificuldade motivaram a introdução de novos conceitos, entre eles o de subálgebras primitivas de uma álgebra de Lie, cuja classificação foi abordada em uma série de trabalhos [11, 20, 21].

1.1 Subgrupos e subálgebras maximais

Para álgebras de Lie, a definição do conceito de uma subálgebra maximal é a óbvia:

Definição 1.1 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma **subálgebra maximal** de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra própria $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tal que se $\tilde{\mathfrak{m}}$ é qualquer subálgebra de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{m} \subset \tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{g}$, vale $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ ou $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{g}$.

Para grupos de Lie e particularmente para grupos de Lie compactos, a situação é menos clara, pois existem dois reticulados naturais de subgrupos de um grupo de Lie compacto: o dos subgrupos fechados e o dos subgrupos de Lie. Na definição formulada a seguir, adotaremos um compromisso. Por um lado, utilizaremos o reticulado mais amplo de todos os subgrupos de Lie, o que permite manter o elo com subálgebras da álgebra de Lie correspondente: um subgrupo maximal de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie "próprio" M de G tal que se $\tilde{M}$ é qualquer subgrupo de Lie de G com $M \subset \tilde{M} \subset G$, vale $\tilde{M} = M$ ou $\tilde{M} = G$. Por outro lado, observando que aplicando esta condição de maximalidade com $\tilde{M} = \bar{M}$ implica que M deve ser ou fechado ou denso, exigimos que a expressão "próprio" na frase anterior seja entendido no sentido mais restrito de que vale $\bar{M} \subsetneq G$, em vez de somente $M \subsetneq G$. Em outras palavras, entende-se que subgrupos de Lie densos não qualificam como subgrupos maximais, o que permite garantir que na passagem de um grupo de Lie compacto para um subgrupo maximal, permanecemos na categoria dos grupos de Lie compactos. Assim, chegamos à seguinte

Definição 1.2 Seja G um grupo de Lie. Um **subgrupo maximal** de G é um subgrupo fechado próprio M de G que é maximal entre todos os subgrupos de Lie de G, isto é, tal que se $\tilde{M}$ é qualquer subgrupo de Lie de G com $M \subset \tilde{M} \subset G$, vale $\tilde{M} = M$ ou $\tilde{M} = G$.

De maneira análoga, temos a seguinte

Definição 1.3 Seja G um grupo de Lie conexo. Um **subgrupo maximal conexo** de G é um subgrupo fechado conexo próprio M_0 de G que é maximal entre todos os subgrupos de Lie conexos de G, isto é, tal que se $\tilde{M}_0$ é qualquer subgrupo de Lie conexo de G com $M_0 \subset \tilde{M}_0 \subset G$, vale $\tilde{M}_0 = M_0$ ou $\tilde{M}_0 = G$.

A primeira observação é que se nos restringirmos a considerar apenas grupos e subgrupos de Lie *conexos*, o conceito de maximalidade para subgrupos corresponde plenamente ao de maximalidade para subálgebras. De fato, tendo em vista a bijeção entre o reticulado dos subgrupos de Lie conexos de um grupo de Lie conexo e o reticulado das subálgebras de Lie da sua álgebra de Lie [33, p. 47], temos a seguinte

Proposição 1.1 *Sejam G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e M_0 um subgrupo fechado conexo próprio de G com álgebra de Lie $\mathfrak{m}$. Então M_0 é subgrupo maximal conexo de G se e somente se $\mathfrak{m}$ é subálgebra maximal de $\mathfrak{g}$.*

A questão de como estender este tipo de correspondência a subgrupos de Lie que não são necessariamente conexos, mesmo para o caso em que o grupo de Lie ambiente G for compacto e conexo, constitui o problema central deste capítulo.

Como passo preliminar, investigamos como o problema de classificar os subgrupos maximais de grupos de Lie compactos pode ser reduzido a um problema análogo para grupos de Lie compactos conexos. Suponha então que G é um grupo de Lie compacto, G_0 é a componente conexa da identidade de G e Γ é o grupo de componentes de G, isto é, Γ é o grupo finito G/G_0; então denotando a projeção canônica de G sobre Γ por π, temos a seguinte sequência curta exata de grupos:

$$1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1 ,$$

Diz-se que G é uma extensão ascendente de G_0 por Γ (ou extensão descendente de Γ por G_0):

$$G = G_0 \, . \, \Gamma$$

Um caso particularmente importante é quando esta extensão *cinde*, isto é, quando existe um homomorfismo de Γ para G que é uma inversa à direita de π: então identificando Γ com sua imagem sob este homomorfismo permite considerar Γ como subgrupo de G e G como o produto semidireto de G_0 e Γ (em relação à ação de Γ em G_0 dada pela conjugação em G):

$$G = G_0 : \Gamma$$

Infelizmente, isto nem sempre é o caso [27].

Seja agora M um subgrupo maximal de G, seja Σ a imagem de M em Γ e $\tilde{M}$ a pré-imagem de Σ em G, isto é, $\tilde{M} = \pi^{-1}(\pi(M))$. Então $\tilde{M}$ é um subgrupo fechado de G tal que $M \subset \tilde{M} \subset G$, e portanto estaremos necessariamente em uma das seguintes duas situações:

(a) se $\tilde{M} = M$, então $G_0 \subset M$ e M é uma extensão ascendente de G_0 por Σ (ou extensão descendente de Σ por G_0):

$$M = G_0 \, . \, \Sigma$$

Explicitamente, podemos para cada elemento γ de Σ escolher um elemento g_γ de M na componente conexa de G que corresponde a γ, i.e., tal que $\pi(g_\gamma) = \gamma$, para obter

$$M = \dot{\bigcup_{\gamma \in \Sigma}} g_\gamma G_0 \, .$$

Ademais, Σ é subgrupo maximal de Γ.

Portanto, a classificação deste tipo de subgrupo maximal de G se reduz à classificação dos subgrupos maximais do grupo finito Γ, o que constitui um problema importante na teoria dos grupos finitos que vem sendo investigado intensamente durante a última década; vejaa, por exemplo, [6, 32, 36, 37, 39, 40].

(b) se $\tilde{M} = G$, então $\Sigma = \Gamma$, o que significa que M intersecta cada componente conexa de G e que M é uma extensão ascendente de $G_0 \cap M$ por Γ (ou extensão descendente de Γ por $G_0 \cap M$):

$$M = (G_0 \cap M) \, . \, \Gamma \, .$$

Infelizmente, $G_0 \cap M$ não é necessariamente um subgrupo maximal de G_0. De fato, dependendo da estrutura de G como extensão ascendente de G_0 por Γ, pode acontecer que certos subgrupos de Lie de G_0 não admitem nenhuma extensão ascendente por Γ para subgrupos de Lie de G. Neste caso, devemos considerar apenas subgrupos de Lie de G_0 que admitem tal extensão: é apenas entre estes que $G_0 \cap M$ será maximal. Em particular, no caso de uma extensão cindida, isto é, quando G é o produto semidireto de G_0 e Γ, os subgrupos de Lie de G_0 que admitem tal extensão são exatamente os subgrupos de Lie de G_0 Γ-invariantes. Note, porém, que no caso de uma extensão cindida trivial, isto é, quando G é o produto direto de G_0 e Γ, a ação de Γ em G_0 é trivial e portanto todos os subgrupos de Lie de G_0 são Γ-invariantes; assim, neste caso, $G_0 \cap M$ terá que ser um subgrupo maximal de G_0.

Para o resto desta dissertação, suporemos que o grupo ambiente G é *conexo*. Mas mesmo com esta restrição, a classificação dos subgrupos maximais M de G constitui um problema que está longe de poder ser reduzido à classificação dos subgrupos maximais conexos M_0 de G. Por exemplo, M_0 pode até ser trivial ($M = \{1\}$), o que significa que M deve ser um subgrupo maximal discreto (e portanto finito) de G. Por outro lado, M_0 pode até ser maximal entre os subgrupos de Lie conexos de G e mesmo assim não ser maximal entre todos os subgrupos de Lie de G.

Exemplo 1.1 No grupo $G = SO(3)$ das rotações em $\mathbb{R}^3$, temos os seguintes subgrupos finitos (veja [15, p. 192] e [19, p. 103]):

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n &= \text{o grupo cíclico de ordem } n, \\ \mathrm{D}_n &= \text{o grupo diedral de ordem } 2n, \\ \mathrm{T} &= \text{o grupo do tetraedro } \cong A_4 \, , \\ \mathrm{O} &= \text{o grupo do cubo/octaedro } \cong S_4 \, , \\ \mathrm{I} &= \text{o grupo do dodecaedro/icosaedro } \cong A_5 \, . \end{aligned}$$

Entre estes, o grupo do octaedro O e o grupo do icosaedro I são subgrupos maximais finitos e de fato são maximais entre todos os subgrupos de G.

Exemplo 1.2 No grupo $G = SO(3)$ das rotações em $\mathbb{R}^3$, considere o toro maximal $T = SO(2)$. Este subgrupo é maximal entre todos os subgrupos de Lie conexos de G, já que sua álgebra de Lie $\mathfrak{t} = \mathfrak{so}(2)$ é subálgebra maximal de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$. No entanto, T não é maximal entre todos os subgrupos de Lie de G, pois

$$T \subsetneqq M \subsetneqq G \,,$$

onde

$$G = SO(3) \quad , \quad T = SO(2) \quad , \quad M = O(2) \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes SO(2) \,.$$

Aqui, o símbolo $\ltimes$ denota o produto semidireto. Geometricamente, T é um círculo e M é a união disjunta de dois círculos, sendo que M é gerado por T e mais uma única matriz de determinante -1, por exemplo a reflexão na diagonal principal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

No segundo exemplo, note que o subgrupo M, este sim, é um subgrupo maximal de G, com $M_0 = T$. Observe também que M é o normalizador de T em G (isto é, M consiste de todas as matrizes g em G tais que conjugação com g deixa T invariante). Como veremos a seguir, é esta propriedade de M – ser o normalizador de sua própria componente conexa da identidade M_0 que por sua vez é maximal entre todos os subgrupos de Lie conexos de G – que faz com o que M seja maximal entre todos os subgrupos de Lie de G, conexos ou não. Portanto, o conceito do normalizador ocupa uma posição central na classificação dos subgrupos maximais de um grupo de Lie conexo. Assim, antes de prosseguir, precisamos registrar alguns fatos elementares sobre a construção de normalizadores.

1.2 Normalizadores

Inicialmente, estabelemos algumas notações e convenções. Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, H um subgrupo de Lie de G, H_0 a componente conexa da identidade de H e $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie de H e H_0. Denotaremos por

$$N_G(H_0) \;=\; \{\, g \in G \mid gH_0g^{-1} = H_0 \,\} \tag{1.1}$$

o normalizador de H_0 em G e por

$$N_G(\mathfrak{h}) \;=\; \{\, g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \,\} \tag{1.2}$$

o normalizador de $\mathfrak{h}$ em G em relação à representação adjunta; obviamente, estes dois subgrupos são iguais e a seguir serão simplesmente denotados por N:

$$N_G(H_0) \;=\; N \;=\; N_G(\mathfrak{h}) \,. \tag{1.3}$$

Observe que

$$H_0 \subset H \subset N \;, \tag{1.4}$$

pois para todo $h \in H$, vale $hHh^{-1} = H$ (já que H é subgrupo) e portanto $hH_0h^{-1} = H_0$ (já que conjugação por h é um homeomorfismo de H e portanto transforma componentes conexas de H em componentes conexas de H), ou seja, $h \in N$.

Lema 1.1 *Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e H_0 um subgrupo de Lie conexo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Então o normalizador N de H_0 e de $\mathfrak{h}$ em G é um subgrupo fechado de G.*

Demonstração: Obviamente, N é subgrupo de G. Para mostrar que é fechado, basta interpretar N como a imagem inversa do subgrupo fechado

$$\{\, T \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid T(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \,\}$$

do grupo geral linear $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ sob o homomorfismo $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. (Note que este subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ e de fato fechado, sendo que, em relação a uma decomposição direta qualquer de $\mathfrak{g}$ na soma direta $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ de $\mathfrak{h}$ e algum subespaço complementar $\mathfrak{m}$, seus elementos podem ser representados por matrizes bloco (2×2) triangulares.) $\square$

Retornando à inclusão $H_0 \subset N$ (veja a eq. (1.4) acima), notamos que, em geral, N pode ser bem maior do que H_0. Um caso extremo é a situação caracterizada por uma das seguintes condições equivalentes:

$$N = G \quad \Longleftrightarrow \quad H_0 \text{ subgrupo normal de } G \;. \tag{1.5}$$

A seguir, esta possibilidade deve ser explicitamente excluída para garantir que N seja um subgrupo fechado próprio de G. O outro extremo ocorre quando N tem H_0 como sua componente conexa da identidade, ou seja, quando o grupo N/H_0 for discreto.

A seguir, denotaremos a álgebra de Lie de N por $\mathfrak{n}$; obviamente,

$$\mathfrak{n} \;=\; \{\, X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(X)\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \,\} \tag{1.6}$$

é o normalizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$, e vale a inclusão

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \;. \tag{1.7}$$

Novamente, notamos que, em geral, $\mathfrak{n}$ pode ser bem maior do que $\mathfrak{h}$. Um caso extremo, como antes, é a situação caracterizada por uma das seguintes condições equivalentes:

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{h} \text{ ideal de } \mathfrak{g} \;. \tag{1.8}$$

O outro extremo ocorre quando $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$, ou seja, quando a subálgebra $\mathfrak{h}$ for auto-normalizante.

Definição 1.4 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é chamada **auto-normalizante** se $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$, onde $\mathfrak{n}$ denota o normalizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$, conforme definido pela eq. (1.6).

Observe que as condições formuladas na eq. (1.5) implicam as condições formuladas na eq. (1.8) e que todas estas condições são equivalentes se G for conexo. Da mesma forma, a condição de que N/H_0 seja discreto é equivalente à condição de que $\mathfrak{h}$ seja auto-normalizante.

Para completar a imagem, consideremos brevemente o caso intermediário de uma subálgebra $\mathfrak{h}$ qualquer. Denotando seu normalizador em $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{n}_1$, o normalizador de $\mathfrak{n}_1$ em $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{n}_2$ e assim em diante, obtemos uma sequência crescente de subálgebras de $\mathfrak{g}$ que, necessariamente, terminará em alguma subálgebra própria $\mathfrak{n}_r$ de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{n}_r \subset \mathfrak{g} \, . \tag{1.9}$$

De forma semelhante, devido à eq. (1.4), os normalizadores em G formam uma sequência crescente de subgrupos de G,

$$H \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_r \subset N_G(\mathfrak{n}_r) \subset G \, , \tag{1.10}$$

onde $N_1 = N_G(\mathfrak{h}), N_2 = N_G(\mathfrak{n}_1), \ldots, N_r = N_G(\mathfrak{n}_{r-1})$. Temos então duas possibilidades: ou $\mathfrak{n}_r$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ ou é auto-normalizante. No primeiro caso, $N_G(\mathfrak{n}_r) = G$, sendo que a iteração deixa de produzir algum resultado útil, enquanto que no segundo caso, $N_G(\mathfrak{n}_r)$ constitui um candidato a um subgrupo maximal de G, com álgebra de Lie $\mathfrak{n}_r$: é esta situação que prevalece quando $\mathfrak{g}$ for simples.

1.3 Tipos de subgrupos maximais

A nossa meta principal nesta seção é mostrar que os subgrupos maximais de um grupo de Lie conexo podem ser divididos em duas categorias distintas (e disjuntas).

Proposição 1.2 *Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e M um subgrupo maximal de G com componente conexa da identidade M_0 e álgebra de Lie $\mathfrak{m}$. Então vale uma das seguintes duas alternativas.*

1. *M_0 é subgrupo normal de G e $\mathfrak{m}$ é ideal de $\mathfrak{g}$ (sendo que estas duas condições são equivalentes pois G é conexo).*

2. *M é igual ao normalizador de M_0 e de $\mathfrak{m}$ em G.*

Demonstração: Suponha que M_0 não é subgrupo normal de G e $\mathfrak{m}$ não é ideal de $\mathfrak{g}$. Então segundo o lema na seção anterior, o normalizador N de M_0 e de $\mathfrak{m}$ em G é um subgrupo próprio fechado de G que contém M (veja a eq. (1.4)) e portanto deve ser igual a M, já que por hipótese, M é maximal. □

Nos dois casos, é possível impor, sem perda de generalidade, uma hipótese adicional:

1. M_0 e $\mathfrak{m}$ são triviais, isto é, $M_0 = \{1\}$, $\mathfrak{m} = \{0\}$.

   De fato, se M_0 for um subgrupo normal não-trivial de G, podemos substituir G pelo grupo quociente $G' = G/M_0$, que é um grupo de Lie conexo, e M pelo subgrupo quociente $M' = M/M_0$, que é um subgrupo maximal finito de G'.

2. M_0 não contém nenhum subgrupo normal não-trivial de G,
   $\mathfrak{m}$ não contém nenhum ideal não-trivial de $\mathfrak{g}$.

   De fato, se M_0 contiver algum subgrupo normal não-trivial de G, podemos introduzir o subgrupo fechado N_{M_0} de G definido por

   $$N_{M_0} \ = \ \{\, g \in G \mid g'gg'^{-1} \in M_0 \text{ para todo } g' \in G \,\} \ .$$

   observando que este é o maior subgrupo normal de G contido em M_0, e substituir G pelo grupo quociente $G' = G/N_{M_0}$ e M pelo subgrupo quociente $M' = M/N_{M_0}$.

Para grupos de Lie compactos conexos como grupo ambiente, evidencia-se que a classificação dos subgrupos maximais do primeiro tipo (i.e., cuja componente conexa da identidade é um subgrupo normal) pode ser reduzida à classificação dos subgrupos maximais finitos. De maneira semelhante, a classificação dos subgrupos maximais do segundo tipo (i.e., que são os normalizadores da sua própria componente conexa da identidade) pode ser reduzida à classificação dos subgrupos maximais cuja componente conexa da identidade não contém nenhum subgrupo normal não-trivial.

O primeiro problema – a classificação dos subgrupos maximais finitos dos grupos de Lie compactos conexos – é de alta complexidade e amplamente discutido na literatura matemática. Por exemplo, existe uma série de artigos que tratam de determinar os subgrupos finitos dos grupos de Lie simples (A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2) [24, 25, 26], sendo que o Exemplo 1.1 acima providencia a solução para o caso mais elementar de A_1.

Na discussão a seguir, abordaremos o segundo problema – a classificação dos subgrupos maximais dos grupos de Lie compactos conexos que são os normalizadores da sua própria componente conexa da identidade ou, equivalentemente, da sua própria álgebra de Lie. Como primeiro passo, daremos uma caracterização das subálgebras de Lie cujos normalizadores são subgrupos maximais: isso nos levará ao conceito de subálgebras maximais invariantes e, em particular, de subálgebras primitivas.

1.4 Subálgebras maximais invariantes e subálgebras primitivas

Retomando nossa apresentação de notações e convenções a serem usadas a seguir (sendo que, como na Seção 1.2, G é um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, H um subgrupo de Lie de G, H_0 a componente conexa da identidade de H, $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie de H e de H_0 e N o normalizador de H_0 e de $\mathfrak{h}$ em G), escrevemos $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ para o grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ para a álgebra de Lie das derivações de $\mathfrak{g}$: $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie que tem $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ como sua álgebra de Lie.[1] Também escrevemos Ad para a representação adjunta de G em $\mathfrak{g}$, como antes, e ad para a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$, substituíndo Ad por Ad_G e ad por $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ se for necessário para evitar dúvidas. Obviamente, temos $\mathrm{Ad}(G) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ e $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$, mas em geral estas inclusões não são igualdades. (Por exemplo, se $\mathfrak{g}$ for semisimples, então $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$, mas se $\mathfrak{g}$ for abeliana, então $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ enquanto que $\mathfrak{der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.) Ademais, definimos $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ como o subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ com álgebra de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ e

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \;=\; \{\, \phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \mid \phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \,\} \,.$$

Essencialmente, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é uma versão universal do grupo de automorfismos internos de $\mathfrak{g}$, pois $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é a componente conexa de 1 de $\mathrm{Ad}(G)$ e coincide com $\mathrm{Ad}(G)$ se G for conexo. (Em outras palavras, o "grupo adjunto" $\mathrm{Ad}(G)$ é independente da escolha de G, dentro da classe dos grupos de Lie conexos com álgebra de Lie igual a $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.) Mais exatamente, quando G é conexo, temos

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \;=\; \mathrm{Ad}_G(G) \quad , \quad \mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \;=\; \mathrm{Ad}_G(N) \,.$$

Para maiores detalhes, veja [33, pp. 55-58].

Definição 1.5 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma **subálgebra maximal invariante** de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra própria $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ que é maximal entre todas as subálgebras $\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{m})$-invariantes de $\mathfrak{g}$, isto é, tal que se $\tilde{\mathfrak{m}}$ é qualquer subálgebra $\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{m})$-invariante de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{m} \subset \tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{g}$, vale $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ ou $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{g}$. Uma **subálgebra primitiva** de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra maximal invariante de $\mathfrak{g}$ que não contém nenhum ideal próprio de $\mathfrak{g}$.

A título de exemplo, notamos que o normalizador $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ é $\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$-invariante, pois dado $\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ e $X \in \mathfrak{n}$, temos

$$Y \in \mathfrak{h} \;\Longrightarrow\; \mathrm{ad}(\phi(X))(Y) \;=\; [\phi(X), \phi(\phi^{-1}(Y))] \;=\; \phi\big(\mathrm{ad}(X)(\phi^{-1}(Y))\big) \in \mathfrak{h} \,,$$

[1] Aqui, todos os grupos de Lie e todas as álgebras de Lie são reais, mas conceitos análogos existem para grupos e álgebras de Lie sobre outros corpos, principalmente sobre $\mathbb{C}$.

isto é, $\phi(X) \in \mathfrak{n}$. Portanto, uma subálgebra maximal invariante ou é auto-normalizante ou é um ideal, e uma subálgebra primitiva é sempre auto-normalizante. Naturalmente, em álgebras de Lie simples, os conceitos de subálgebra maximal invariante e de subálgebra primitiva coincidem.

A nossa meta nesta seção é provar o seguinte teorema.

Teorema 1.1 *Sejam G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e H_0 um subgrupo de Lie conexo próprio de G com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ auto-normalizante. Então o normalizador N de H_0 e de $\mathfrak{h}$ em G é um subgrupo maximal de G se e somente se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra maximal invariante de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Inicialmente, notamos como antes que $\mathfrak{h}$ sendo uma subálgebra própria auto-normalizante de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ não é ideal de $\mathfrak{g}$ pois $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \subsetneqq \mathfrak{g}$ e, como G é conexo, H_0 não é subgrupo normal de G; assim, N é um subgrupo fechado próprio de G e N/H_0 é discreto.

Suponha então primeiro que $\mathfrak{h}$ seja uma subálgebra maximal invariante de $\mathfrak{g}$ e que H' seja um subgrupo de Lie de G contendo N, com álgebra de Lie $\mathfrak{h}'$; então $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$. Ademais, $\mathfrak{h}'$ é $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-invariante. (Para provar isto, observamos que para todo $h' \in H'$, o automorfismo $\mathrm{Ad}_G(h')$ de $\mathfrak{g}$ deixa a subálgebra $\mathfrak{h}'$ invariante, sendo que a sua restrição a esta subálgebra coincide com o automorfismo $\mathrm{Ad}_{H'}(h')$ de $\mathfrak{h}'$. Mas como $N \subset H'$, concluímos que $\mathfrak{h}'$ é $\mathrm{Ad}_G(N)$-invariante.) Como, por hipótese, $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra maximal invariante de $\mathfrak{g}$, segue que $\mathfrak{h} \subsetneqq \mathfrak{h}' = \mathfrak{g}$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \subsetneqq \mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}$, então $H' = G$, pois G é conexo. Se por outro lado $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$, então $H'_0 = H_0$, logo $H' \subset N_G(H'_0)$ (veja a eq. (1.4)) e portanto $H' = N$.

Para provar a afirmação recíproca, suponha agora que N seja um subgrupo maximal de G e que $\mathfrak{h}'$ seja uma subálgebra $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-invariante de $\mathfrak{g}$ contendo $\mathfrak{h}$. Seja H'_0 o subgrupo de Lie conexo de G que corresponde à subálgebra de Lie $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$, e seja N' o normalizador de H'_0 e de $\mathfrak{h}'$ em G. Então o fato de $\mathfrak{h}'$ ser $\mathrm{Ad}_G(N)$-invariante é equivalente à inclusão $N \subset N'$. Como, por hipótese, N é subgrupo maximal de G, segue que $N \subsetneqq N' = G$ ou $N = N' \subsetneqq G$. Se $N' = N$, então $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{n}' = \mathfrak{n} = \mathfrak{h}$ e portanto $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Se $N' = G$, então H'_0 é subgrupo normal de G e $\mathfrak{h}'$ é ideal de $\mathfrak{g}$. Neste caso, considere o subconjunto $N'' = N\,H'_0 = H'_0\,N$ de G, que é evidentemente um subgrupo de G e de fato um subgrupo de Lie de G cuja componente conexa da identidade é H'_0, já que N/H_0 é discreto e H_0 é contido em H'_0. Como N'' contém N e N é subgrupo maximal de G, concluímos que $N'' = N$ ou $N'' = G$. Considerando as componentes conexas da identidade, segue que $H'_0 = H_0$ e portanto $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$, no primeiro caso, e $H'_0 = G$ e portanto $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}$, no segundo caso. □

Devido a este teorema, a classificação dos subgrupos maximais dos grupos de Lie compactos conexos que são os normalizadores da sua própria álgebra de Lie é reduzida à classificação das subálgebras maximais invariantes das álgebras de Lie compactas que não são ideais. A seguir, mostraremos como esta, por sua vez, pode ser reduzida à classificação das subálgebras primitivas das álgebras de Lie compactas simples.

O primeiro passo é reduzir o caso redutivo para o caso semisimples.

Proposição 1.3 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutiva, decomposta na soma direta*

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}' \tag{1.11}$$

do seu centro $\mathfrak{z}$ e sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$, que é semisimples, e seja $\mathfrak{m}$ uma subálgebra maximal invariante de $\mathfrak{g}$ que não é ideal de $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{m}$ contém $\mathfrak{z}$ e é necessariamente da forma

$$\mathfrak{m} \;=\; \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}' \tag{1.12}$$

onde $\mathfrak{m}'$ uma subálgebra maximal invariante de $\mathfrak{g}'$ que não é ideal de $\mathfrak{g}'$.

Demonstração: Primeiro, provamos que $\mathfrak{m}$ deve conter o centro $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. Para tanto, considere a subálgebra $\tilde{\mathfrak{m}}$ de $\mathfrak{g}$ gerada por $\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{m}$ (que é simplesmente a soma $\mathfrak{z} + \mathfrak{m}$, em geral não direta, de $\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{m}$). Obviamente, $\tilde{\mathfrak{m}}$ é $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$-invariante pois $\mathfrak{m}$ é $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$-invariante e $\mathfrak{z}$ é até $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-invariante. Portanto, $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ ou $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{g}$. No primeiro caso, segue que $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{m}$, como queríamos. No segundo caso, concluímos que $\mathfrak{m}$ deve conter a álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$, pois dados quaisquer dois elementos X e Y de $\mathfrak{g}$, podemos escrever $X = X_{\mathfrak{z}} + X_{\mathfrak{m}}$ e $Y = Y_{\mathfrak{z}} + Y_{\mathfrak{m}}$ e obtemos $[X, Y] = [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}] \in \mathfrak{m}$. Mas isso implica que $\mathfrak{m}$ é ideal de $\mathfrak{g}$, o que exclui este caso, por hipótese. Portanto, vale $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{m}$, e a interseção $\mathfrak{m}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$ é uma subálgebra maximal invariante de $\mathfrak{g}'$ (pois se $\mathfrak{h}'$ é uma subálgebra $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}', \mathfrak{m}')$-invariante de $\mathfrak{g}'$ tal que $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$, então $\mathfrak{h} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}'$ é uma subálgebra $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$-invariante de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, o que implica $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ e portanto $\mathfrak{h}' = \mathfrak{m}'$ ou $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}'$) que não é ideal de $\mathfrak{g}'$ e tal que a decomposição direta (1.11) implica a decomposição direta (1.12). □

Resta reduzir o caso semisimples ao caso simples:

Proposição 1.4 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples e seja $\mathfrak{m}$ uma subálgebra maximal invariante de $\mathfrak{g}$ que não é ideal de $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{m}$ é necessariamente de um dos seguintes dois tipos:*

- *O **tipo simples**: a menos de um isomorfismo, que inclui uma permutação adequada dos ideais simples que constituem $\mathfrak{g}$, vale $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, onde $\mathfrak{g}_0$ é um dos ideais simples de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$ é a soma direta de todos os outros ideais simples de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{m}_0$ é uma subálgebra primitiva de $\mathfrak{g}_0$.*

- *O **tipo diagonal**: a menos de um isomorfismo, que inclui uma permutação adequada dos ideais simples que constituem $\mathfrak{g}$, vale $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, onde $\mathfrak{g}_0$ é um dos ideais simples de $\mathfrak{g}$ que ocorre (pelo menos) duas vezes em $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$ é a soma direta dos outros ideais simples de $\mathfrak{g}$ e o mergulho de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ é a aplicação diagonal, que leva $X_0 \in \mathfrak{g}_0$ para $(X_0, X_0) \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$.*

Demonstração: A demonstração é completamente análoga à demonstração da proposição correspondente para subálgebras maximais [13, Teorema 15.1]. □

Como corolário, notamos que uma álgebra de Lie compacta que não é simples e nem é a soma direta de duas cópias da mesma álgebra de Lie simples não admite subálgebras primitivas.

1.5 Subálgebras primitivas de posto máximo

A partir das definições 1.1 e 1.5, é óbvio que subálgebras maximais de uma álgebra de Lie simples são primitivas, e portanto, a classificação das subálgebras maximais das álgebras de Lie simples devida a Dynkin [13, 14] é de importância central para o presente trabalho. O contrário, no entanto, está longe de ser verdade: existem subálgebras primitivas relativamente "pequenas". Talvez o melhor exemplo seja a subálgebra de Cartan das álgebras de Lie simples dos tipos A, D e E (veja a proposição logo abaixo). De forma mais geral, uma grande classe de exemplos de subálgebras primitivas é fornecida pelas subálgebras primitivas de posto máximo.

Definição 1.6 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutiva. Uma subálgebra $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ é chamada **de posto máximo** se ela contém uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.

Antes de prosseguir, vamos fixar algumas notações. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutiva e $\mathfrak{m}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ de posto máximo, contendo uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Passando às complexificações $\mathfrak{g}^c$ de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}^c$ de $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{h}^c$ de $\mathfrak{h}$, denotamos o sistema de raízes de $\mathfrak{g}^c$ relativo a $\mathfrak{h}^c$ por Δ e consideramos a decomposição direta de $\mathfrak{g}^c$ em subálgebra de Cartan e espaços de raízes

$$\mathfrak{g}^c = \mathfrak{h}^c \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \,. \tag{1.13}$$

Então pondo

$$\Delta_\mathfrak{m} = \{ \alpha \in \Delta \,/\, \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{m}^c \} \,, \tag{1.14}$$

obtemos a correspondente decomposição direta de $\mathfrak{m}^c$ em subálgebra de Cartan e espaços de raízes

$$\mathfrak{m}^c = \mathfrak{h}^c \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_\mathfrak{m}} \mathfrak{g}_\alpha \,. \tag{1.15}$$

Também notamos que o grupo $\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_0$, a componente conexa da identidade do grupo $\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, é dado por

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_0 = \{ \phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \mid \phi|_\mathfrak{h} = \mathrm{id}_\mathfrak{h} \} \,,$$

e que o grupo quociente

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \,/\, \mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_0 = W(\mathfrak{g})$$

é o grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$, um grupo finito que age naturalmente sobre $\mathfrak{h}$ e, por dualidade, sobre Δ. Observe que, para qualquer subálgebra $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ de posto máximo, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_0$ é contido em $\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{m})$, e portanto podemos definir

$$\big(\mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{m})\big) \,/\, \mathrm{Int}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_0 = W_\mathfrak{m}(\mathfrak{g}) \,.$$

Alternativamente, temos

$$W_\mathfrak{m}(\mathfrak{g}) = \{ \sigma \in W(\mathfrak{g}) \mid \sigma(\Delta_\mathfrak{m}) \subset \Delta_\mathfrak{m} \} \,.$$

Finalmente, para qualquer subgrupo $W'(\mathfrak{g})$ de $W(\mathfrak{g})$, dizemos que $\mathfrak{m}$ é $W'(\mathfrak{g})$-invariante se

$$W'(\mathfrak{g}) \subset W_\mathfrak{m}(\mathfrak{g}) \,.$$

A seguir, aplicaremos estas noções ao caso em que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie compacta.

Proposição 1.5 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta simples e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{h}$ é primitiva se e somente se todas as raízes de $\mathfrak{g}$ têm o mesmo comprimento, ou seja, se $\mathfrak{g}$ for do tipo A, D ou E.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{m}$ uma subálgebra $\text{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-invariante de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{m}$, contendo $\mathfrak{h}$, é de posto máximo, e $\Delta_\mathfrak{m}$ deve ser $W(\mathfrak{g})$-invariante. Agora, se $\mathfrak{g}$ for do tipo A, D ou E, todas as raízes de $\mathfrak{g}$ têm o mesmo comprimento e formam uma única órbita sob $W(\mathfrak{g})$; portanto, $\Delta_\mathfrak{m} = \emptyset$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}$ ou $\Delta_\mathfrak{m} = \Delta$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$. Se, por outro lado, $\mathfrak{g}$ for do tipo B, C, F ou G, existem raízes de exatamente dois comprimentos diferentes, as raízes longas e as raízes curtas, que formam exatamente duas órbitas sob $W(\mathfrak{g})$. Neste caso, a subálgebra de Cartan em conjunto com os espaços de raízes longas formam uma subálgebra $\mathfrak{g}_l$ de $\mathfrak{g}$ tal que

$$\mathfrak{g}_l^c = \mathfrak{h}^c \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta \\ \alpha \text{ longa}}} \mathfrak{g}_\alpha \tag{1.16}$$

e que é $\text{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-invariante e maior do que $\mathfrak{h}$, enquanto que a subálgebra de Cartan em conjunto com os espaços de raízes curtas não, pois

$$\mathfrak{g}_s^c = \mathfrak{h}^c \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta \\ \alpha \text{ curta}}} \mathfrak{g}_\alpha$$

não é uma subálgebra de $\mathfrak{g}^c$. Isto se deve ao fato de que a soma de duas raízes longas, se for raíz, sempre é uma raíz longa, enquanto que a soma de duas raízes curtas, se for raíz, pode ser uma raíz curta ou longa.

De fato, sejam $\alpha, \beta \in \Delta$ duas raízes não-proporcionais e do mesmo comprimento (ambas longas ou ambas curtas); então

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{|\alpha|^2} = \frac{2(\beta, \alpha)}{|\beta|^2}$$

vale 0 ou ± 1. Suponhamos ainda que sua soma também é raíz: $\beta + \alpha \in \Delta$.

- Se α e β são ortogonais, então a α-sequência que passa por β é necessariamente da forma $\{\beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha\}$, e como, neste caso,

$$|\beta \pm \alpha|^2 = |\beta|^2 + |\alpha|^2 ,$$

só resta uma possibilidade: α e β são curtas enquanto que $\beta - \alpha$ e $\beta + \alpha$ são longas.

- Se α e β não são ortogonais, então a α-sequência que passa por β é da forma $\{\beta, \beta + \alpha\}$ ou $\{\beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha\}$, com

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{|\alpha|^2} = \frac{2(\beta, \alpha)}{|\beta|^2} = -1$$

e ângulo de 120° entre α e β, ou da forma $\{\beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha\}$, com

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{|\alpha|^2} = \frac{2(\beta, \alpha)}{|\beta|^2} = 1$$

e ângulo de 60° entre α e β. No primeiro caso, vem

$$|\beta + \alpha|^2 = |\beta|^2 + |\alpha|^2 + 2(\beta, \alpha) = |\alpha|^2 \left(1 + 1 - 1\right) ,$$

mostrando que $\beta + \alpha$ é raíz do mesmo comprimento que α e β. No segundo e terceiro caso, vem

$$|\beta + \alpha|^2 = |\beta|^2 + |\alpha|^2 + 2(\beta, \alpha) = |\alpha|^2 \left(1 + 1 + 1\right) ,$$

e

$$|\beta \pm 2\alpha|^2 = |\beta|^2 + 4|\alpha|^2 \pm 4(\beta, \alpha) = |\alpha|^2 \left(1 + 4 - 2\right) ,$$

o que só é possível no caso de G_2, quando α e β são curtas enquanto que $\beta + \alpha$ e $\beta \pm 2\alpha$ são longas.

□

É fácil determinar a subálgebra $\mathfrak{g}_l$ de $\mathfrak{g}$:

- Para $\mathfrak{g}$ do tipo B_n, $\mathfrak{g}_l$ é do tipo D_n:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{g}_l = \mathfrak{so}(2n) .$$

- Para $\mathfrak{g}$ do tipo C_n, $\mathfrak{g}_l$ é do tipo $A_1 \oplus \ldots \oplus A_1$ (n somandos):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{g}_l = \mathfrak{su}(2) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{su}(2) .$$

- Para $\mathfrak{g}$ do tipo F_4, $\mathfrak{g}_l$ é do tipo D_4:

$$\mathfrak{g} = F_4 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{g}_l = D_4 = \mathfrak{so}(8) .$$

- Para $\mathfrak{g}$ do tipo G_2, $\mathfrak{g}_l$ é do tipo A_2:

$$\mathfrak{g} = G_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{g}_l = A_2 = \mathfrak{su}(3) .$$

É interessante notar que nestes quatro casos, é $\mathfrak{g}_l$, em vez de $\mathfrak{h}$, que é uma subálgebra primitiva de $\mathfrak{g}$, sendo que também é uma subálgebra maximal para B_n e G_2, mas não para C_n e F_4.

Voltando ao caso mais geral das subálgebras de posto máximo, temos o seguinte critério para decidir se são maximais invariantes ou não.

Proposição 1.6 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutiva e $\mathfrak{m}$ uma subálgebra própria de $\mathfrak{g}$ de posto máximo, contendo uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{m}$ é uma subálgebra maximal invariante de $\mathfrak{g}$ se e somente se é maximal entre todos os subálgebras $W_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{g})$-invariantes de $\mathfrak{g}$ contendo $\mathfrak{h}$, isto é, tal que se $\tilde{\mathfrak{m}}$ é qualquer subálgebra $W_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{g})$-invariante de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{m} \subset \tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{g}$, vale $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ ou $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{g}$.*

A demonstração é uma consequência imediata do seguinte lema.

Lema 1.2 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta e sejam $\mathfrak{m}$ e $\tilde{\mathfrak{m}}$ duas subálgebras de $\mathfrak{g}$ de posto máximo, contendo uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, e tais que*

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m} \subset \tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{g} \,.$$

Então $\tilde{\mathfrak{m}}$ é $W_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{g})$-invariante se e somente se é $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$-invariante.

Demonstração: Obviamente, $\tilde{\mathfrak{m}}$ é $W_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{g})$-invariante se e somente se é invariante sob $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$. Portanto, precisamos mostrar apenas que se $\tilde{\mathfrak{m}}$ é invariante sob $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$, então já é invariante sob $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$. Seja então $\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$, isto é, $\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ tal que $\phi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. Para lidar com o problema de que, em geral, $\phi(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{h}$, escolhemos primeiro algum grupo de Lie compacto conexo M cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{m}$ (já que $\mathfrak{m}$, como subálgebra de Lie de uma álgebra de Lie compacta, é uma álgebra de Lie compacta) para encontrar um automorfismo interno $\phi_{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Int}(\mathfrak{m})$ de $\mathfrak{m}$ pelo qual as duas subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}$ e $\phi(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{m}$ são conjugadas [33, Theorem 4.34], no sentido de que vale $\phi_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{h}) = \phi(\mathfrak{h})$. Este pode ser estendido a um automorfismo interno $\phi_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\phi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \phi(\mathfrak{h})$, $\phi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ e $\phi_{\mathfrak{g}}(\tilde{\mathfrak{m}}) = \tilde{\mathfrak{m}}$: basta escrever $\phi_{\mathfrak{m}} = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}}(X_0))$, com $X_0 \in \mathfrak{m} \subset \tilde{\mathfrak{m}}$, e definir $\phi_{\mathfrak{g}} = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_0))$. Assim, temos $\phi \circ \phi_{\mathfrak{g}}^{-1} \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$ e, como $\tilde{\mathfrak{m}}$ é invariante sob $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$, podemos concluir que $(\phi \circ \phi_{\mathfrak{g}}^{-1})(\tilde{\mathfrak{m}}) = \tilde{\mathfrak{m}}$; portanto, vale $\phi(\tilde{\mathfrak{m}}) = \tilde{\mathfrak{m}}$. □

Capítulo 2

Classificação das subálgebras primitivas de álgebras de Lie simples

No capítulo anterior, vimos que o problema de determinar os subgrupos maximais dos grupos de Lie compactos leva naturalmente ao problema de classificar uma certa classe de subálgebras das álgebras de Lie compactas simples chamada de subálgebras primitivas, a qual inclui a das subálgebras maximais mas é estritamente maior. No entanto, o procedimento para as duas classes é muito parecido.

A classificação a ser apresentada a seguir é baseada na combinação dos resultados de vários artigos [11, 13, 14, 20, 21, 35], porém com algumas adaptações que precisam ser explicadas. A mais importante delas deve-se ao fato de que a maioria dos resultados refere-se a subálgebras maximais [13, 14] e subálgebras primitivas [11, 20, 21] de álgebras de Lie complexas simples, sendo que só um trabalho [35] trata explicitamente das formas reais. Felizmente, como será explicado a seguir, a passagem à forma real compacta é facil de se realizar. Como é de costume nesta área, os resultados finais serão apresentados na forma de várias tabelas, cujas entradas também requerem uma série de explicações. Mais especificamente, listamos primeiro, para cada uma das álgebras clássicas e excepcionais, as subálgebras primitivas e, logo em seguida, para cada um dos grupos clássicos e excepcionais, os correspondentes normalizadores (que, conforme foi mostrado no capítulo anterior, são subgrupos maximais), e seus grupos de componentes.[1]

Num trabalho posterior, pretendemos aplicar estes resultados ao estudo dos possíveis esquemas de quebra de simetria para o código genético.

[1]Lembramos que o grupo de componentes de um grupo de Lie G é o grupo discreto G/G_0 obtido tomando o quociente pela componente conexa da identidade G_0 de G.

2.1 Álgebras de Lie reais e complexas

A relação entre álgebras de Lie reais e álgebras de Lie complexas é assunto de todos os livros texto padrão sobre a área; portanto, podemos nos restringir a alguns comentários gerais sobre os aspectos que serão relevantes para o que segue. Toda álgebra de Lie real $\mathfrak{g}_0$ fornece, por extensão do corpo base de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$, uma álgebra de Lie complexa chamada a sua **complexificação** e aqui denotada por $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$. No sentido oposto, uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}_0$ é chamada uma **forma real** de uma álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$ se sua complexificação $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ é igual a $\mathfrak{g}$ (a menos de isomorfismo). Em geral, uma álgebra de Lie complexa tem várias formas reais que não são isomorfas entre si; por exemplo, a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ possui, entre outras, uma forma real compacta $\mathfrak{su}(N)$ e uma forma real normal $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{R})$.

Uma classe de álgebras de Lie de particular importância, tanto no âmbito real como no âmbito complexo, são as álgebras de Lie redutivas. Existem várias definições deste conceito, todas equivalentes, entre elas as duas seguintes (veja [33], Capítulo 1.7):

Definição 2.1 Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ real ou complexa é chamada **redutiva** se vale um dos seguintes dois critérios equivalentes:

- $\mathfrak{g}$ é a soma direta do seu centro $\mathfrak{z}$ e da sua álgebra derivada $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$,
$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \;, \tag{2.1}$$
sendo que $\mathfrak{z}$ é um ideal abeliano e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é um ideal semisimples de $\mathfrak{g}$.

- Todo ideal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ admite um ideal complementar $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$, i.e., tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

Para álgebras de Lie reais, temos o conceito de uma álgebra de Lie compacta, igualmente importante (veja [33], Capítulo 4.4):

Definição 2.2 Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ real é chamada **compacta** se vale um dos seguintes três critérios equivalentes:

- $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie compacto.
- $\mathfrak{g}$ é álgebra de Lie de algum grupo de Lie compacto.
- $\mathfrak{g}$ admite um produto escalar positivo definido invariante.

Obviamente, toda álgebra de Lie compacta é redutiva.

A maioria dos conceitos deesenvolvidos para álgebras de Lie semisimples se estende, naturalmente e sem qualquer dificuldade, a álgebras de Lie redutivas. A título de exemplo, citamos o seguinte teorema famoso de H. Weyl (veja [33], Teorema 6.11 e Corolário 6.20):

Teorema 2.1 *Toda álgebra de Lie complexa redutiva $\mathfrak{g}$ possui uma forma real compacta $\mathfrak{g}_c$, que é única a menos de isomorfismo. Mais exatamente, para quaisquer duas formas reais compactas de $\mathfrak{g}$, existe um automorfismo $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ que transforma uma na outra. (Se $\mathfrak{g}$ for semisimples, ϕ é um automorfismo interno.)*

Devido a este teorema, temos uma correspondência biunívoca

$$\text{álgebras de Lie compactas} \longleftrightarrow \text{álgebras de Lie complexas redutivas} \tag{2.2}$$

onde "$\longrightarrow$" significa complexificação e "$\longleftarrow$" significa restrição à forma real compacta, e a partir dela, obtemos outra correspondência biunívoca

$$\begin{array}{c}\text{reticulado das subálgebras}\\ \text{de uma álgebra de Lie compacta}\end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{reticulado das subálgebras redutivas}\\ \text{de uma álgebra de Lie complexa redutiva}\end{array} \tag{2.3}$$

onde "$\longrightarrow$" significa complexificação e "$\longleftarrow$" significa interseção com a forma real compacta.

Tendo em vista a restrição a subálgebras redutivas que precisa ser efetuada no âmbito complexo, evidencia-se que na procura por subálgebras maximais, podemos trabalhar no âmbito complexo desde que nos restringirmos ao reticulado das subálgebras redutivas. Isto significa que precisamos, por um lado, excluir subálgebras maximais que não sejam redutivas e, por outro lado, incluir subálgebras redutivas que são maximais entre as subálgebras redutivas mas não entre todas as subálgebras. Os mesmos cuidados devem ser aplicados para subálgebras maximais invariantes e, em particular, subálgebras primitivas, em vez de maximais.

Para eliminar qualquer possibilidade de dúvida, introduzimos a seguinte modificação do conceito de subálgebra maximal, de subálgebra maximal invariante e de subálgebra primitiva (confira as definições 1.1 e 1.5):

Definição 2.3 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutiva. Uma **subálgebra r-maximal** de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra própria redutiva $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tal que se $\tilde{\mathfrak{m}}$ é qualquer subálgebra redutiva de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{m} \subset \tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{g}$, vale $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ ou $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{g}$.

Definição 2.4 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutiva. Uma **subálgebra r-maximal invariante** de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra própria redutiva $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ que é maximal entre todas as subálgebras redutivas $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$-invariantes de $\mathfrak{g}$, isto é, tal que se $\tilde{\mathfrak{m}}$ é qualquer subálgebra redutiva $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$-invariante de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{m} \subset \tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{g}$, vale $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ ou $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{g}$. Uma **subálgebra r-primitiva** de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra r-maximal invariante de $\mathfrak{g}$ que não contém nenhum ideal próprio de $\mathfrak{g}$.

Com esta terminologia, torna-se óbvio que subálgebras maximais / maximais invariantes / primitivas de uma álgebra de Lie compacta correspondem biunivocamente a subálgebras r-maximais / r-maximais invariantes / r-primitivas de sua complexificação.

Uma classe de exemplos típicos que ilustra toda esta situação é providenciada pelas subálgebras parabólicas de álgebras de Lie simples e seus fatores de Levi (veja [33], Capítulo 5.7). Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa simples. Escolhamos uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ e denotemos por Δ o sistema de raízes correspondente. Ademais, suponhamos que também tenhamos escolhido uma ordem em Δ para definir quais são o sistema Δ^+ de raízes positivas, o sistema Δ^- de raízes negativas e o sistema de raízes simples Π correspondente. Então temos a decomposição direta

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^- \tag{2.4}$$

onde

$$\mathfrak{n}^\pm \;=\; \bigoplus_{\alpha \in \Delta^\pm} \mathfrak{g}_\alpha \,. \tag{2.5}$$

Então $\mathfrak{n}^\pm$ são subálgebras nilpotentes e

$$\mathfrak{b}^\pm \;=\; \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^\pm \tag{2.6}$$

são subálgebras solúveis de $\mathfrak{g}$ conhecidas como subálgebras de Borel. As subálgebras parabólicas $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ são as subálgebras de $\mathfrak{g}$ que contêm alguma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$. Como todas as subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$ são conjugadas, podemos nos restringir a considerar apenas subálgebras parabólicas $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ que contêm uma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$ fixa, digamos $\mathfrak{b}^+$. Estas podem ser parametrizadas pelos subconjuntos Π' de Π, da seguinte forma: Dado Π', defina Δ'_+ e Δ'_- como sendo o subconjunto de Δ formado por todas as combinações lineares das raízes simples em Π' com coeficientes não-negativos e não-positivos, respectivamente, e ponha

$$\mathfrak{p} \;=\; \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta'_-} \mathfrak{g}_\alpha \tag{2.7}$$

Reciprocamente, dada uma subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ contendo $\mathfrak{b}^+$, defina

$$\Delta' \;=\; \{\, \alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p} \ \text{ e } \ \mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{p} \,\} \tag{2.8}$$

e $\Delta'_\pm = \Delta' \cap \Delta^\pm$, $\Pi' = \Delta' \cap \Pi$. Ponha ainda

$$\mathfrak{l} \;=\; \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathfrak{g}_\alpha \tag{2.9}$$

e

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta'_+} \mathfrak{g}_\alpha \tag{2.10}$$

para obter a decomposição direta

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u} \,. \tag{2.11}$$

Então $\mathfrak{l}$ é uma subálgebra redutiva de $\mathfrak{g}$ com centro

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = \{ H \in \mathfrak{h} \mid \alpha(H) = 0 \ \text{ para todo } \alpha \in \Delta' \} \tag{2.12}$$

chamada o fator de Levi de $\mathfrak{p}$, enquanto que $\mathfrak{u}$ é o radical nilpotente de $\mathfrak{p}$. Observamos que $\mathfrak{l}$ pode ser obtido como o centralizador de $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$, ou ainda, como o centralizador de um único elemento Z_0 na subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$: basta escolher $Z_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ tal que para todo $\alpha \in \Delta \setminus \Delta'$, $\alpha(Z_0) \neq 0$. Finalmente, introduzindo a forma real compacta $\mathfrak{g}_c$ que, segundo o teorema de H. Weyl, é explicitamente dada por

$$\mathfrak{g}_c = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(iH_\alpha) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(i(X_\alpha + X_{-\alpha})) \tag{2.13}$$

verificamos que

$$\mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{p} \tag{2.14}$$

com

$$\mathfrak{k} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(iH_\alpha) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathbb{R}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathbb{R}(i(X_\alpha - X_{-\alpha})) \tag{2.15}$$

Agora notamos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{p} \text{ é subálgebra maximal de } \mathfrak{g} \\ \mathfrak{l} \text{ é subálgebra r-maximal de } \mathfrak{g} \\ \mathfrak{k} \text{ é subálgebra maximal de } \mathfrak{g}_c \end{array} \right\} \iff \operatorname{card}(\Pi \setminus \Pi') = 1 \,. \tag{2.16}$$

Mas $\mathfrak{p}$ não é r-maximal porque não é redutiva e $\mathfrak{l}$ não é maximal porque está estritamente contida em $\mathfrak{p}$.

2.2 Tipos de subálgebras maximais e primitivas

Na classificação das subálgebras redutivas $\mathfrak{s}$ das álgebras de Lie complexas simples $\mathfrak{g}$ em geral, e das subálgebras r-maximais e r-primitivas em particular, é conveniente apresentar os resultados na forma de várias tabelas, cada uma contemplando uma certa classe de casos.

Uma das divisões em classes distintas, talvez a mais óbvia, refere-se à natureza da subálgebra, dependendo de se

- $\mathfrak{s}$ é uma subálgebra simples;
- $\mathfrak{s}$ é uma subálgebra abeliana (caso denotado por a nas tabelas);
- $\mathfrak{s}$ é uma subálgebra semisimples mas não simples (caso denotado por s nas tabelas);
- $\mathfrak{s}$ é uma subálgebra redutiva com centro e álgebra derivada $\neq \{0\}$ (caso denotado por r nas tabelas).

Outra divisão importante decorre da natureza da álgebra ambiente, dependendo de se $\mathfrak{g}$ pertence a uma das quatro séries de álgebras clássicas ou é uma das cinco álgebras excepcionais. A importância desta distinção decorre do fato de que os métodos empregados na classificação das subálgebras redutivas (gerais, r-maximais ou r-primitivas) das álgebras clássicas e das álgebras excepcionais são totalmente diferentes, como já se verifica nos trabalhos pioneiros de Dynkin [13, 14]. Ocorre que no caso das álgebras excepcionais, a classificação é obtida por uma análise detalhada e exaustiva, caso a caso, enquanto que no caso das álgebras clássicas, existe uma abordagem sistemática baseada na teoria das representações. Mais especificamente, quando $\mathfrak{g}$ é uma das álgebras clássicas, do tipo A_l ($\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, com $n = l + 1$), B_l ($\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, com $n = 2l + 1$), C_l ($\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, com $n = 2l$) ou D_l ($\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, com $n = 2l$), é conveniente pensar na inclusão de $\mathfrak{s}$ em $\mathfrak{g}$ como uma representação n-dimensional de $\mathfrak{s}$. Dizemos então que a subálgebra $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ é **irredutível** ou **redutível** se esta representação é irredutível ou redutível, e podemos caracterizá-la por seu peso máximo ou conjunto de pesos máximos. Já no caso das subálgebras redutivas das álgebras excepcionais, esta distinção não faz sentido se não especificarmos qual é a representação da álgebra ambiente a que se refere, e mesmo se especificassemos esta representação, tal distinção não seria de grande utilidade.

Seja então $\mathfrak{g}$ uma das álgebras clássicas $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ e G o grupo clássico correspondente, isto é, $SL(n, \mathbb{C})$, $SO(n, \mathbb{C})$ ou $Sp(n, \mathbb{C})$, e seja $\mathfrak{s}$ uma subálgebra r-maximal ou, mais geralmente, uma subálgebra r-primitiva de $\mathfrak{g}$.

Quando $\mathfrak{s}$ é simples, é fácil ver que $\mathfrak{s}$ é necessariamente irredutível, com uma única exceção a ser especificada a seguir. De fato, se $\mathfrak{s}$ fosse redutível, o espaço $\mathbb{C}^n$ da representação pertinente poderia ser decomposto na soma direta de dois subespaços $\mathfrak{s}$-invariantes, de dimensão p e q, digamos, tal que após uma mudança de base adequada, a subálgebra $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ estaria contida em uma subálgebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ da forma $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{C})$ quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, da forma $\mathfrak{so}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(q, \mathbb{C})$ quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ou da forma $\mathfrak{sp}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(q, \mathbb{C})$ quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$. Ademais, $\tilde{\mathfrak{g}}$ é $\mathrm{Int}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g})$-invariante.

De fato, escrevendo $\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ na forma $\phi = \mathrm{Ad}(g)$ com $g \in G$, vemos que se ϕ preserva a subálgebra $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$, g transforma subespaços $\mathfrak{s}$-invariantes de $\mathbb{C}^n$ em subespaços $\mathfrak{s}$-invariantes de $\mathbb{C}^n$ e portanto ϕ também preserva a subálgebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$.

Assim, $\mathfrak{s}$ não seria r-maximal e nem r-primitiva, exceto no caso em que $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{s} = \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(n-1, \mathbb{C})$.

Por outro lado, quando $\mathfrak{s}$ não é simples, $\mathfrak{s}$ pode ser redutível ou irredutível. Para entender como funciona a construção das subálgebras r-maximais e, mais geralmente, das subálgebras r-primitivas nestes dois casos, precisamos de dois conceitos gerais da teoria das representações de álgebras de Lie: a soma direta (comum e externa) e o produto tensorial (comum e externo) de representações.

2.3 Álgebras clássicas e representações

Sejam $\pi_1 : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1)$ e $\pi_2 : \mathfrak{g}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_2)$ representações de álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ sobre espaços vetoriais V_1 e V_2. A **soma direta externa** de π_1 e π_2 é a representação $\pi_1 \boxplus \pi_2$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ na soma direta $V_1 \oplus V_2$ dos dois espaços V_1 e V_2 definida como segue:

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 \boxplus \pi_2 : & \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2) \\ & X_1 + X_2 & \longmapsto & \pi_1(X_1) \oplus \pi_2(X_2) \end{array} . \tag{2.17}$$

O **produto tensorial externo** de π_1 e π_2 é a representação $\pi_1 \boxtimes \pi_2$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ no produto tensorial $V_1 \otimes V_2$ dos dois espaços V_1 e V_2 definida como segue:

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 \boxtimes \pi_2 : & \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2) \\ & (X_1, X_2) & \longmapsto & \pi_1(X_1) \otimes 1 + 1 \otimes \pi_2(X_2) \end{array} . \tag{2.18}$$

Vale observar que a diferença entre as duas noções está exclusivamente na construção das representações e não na álgebra de Lie representada, sendo que as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ e $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ que aparecem nas equações (2.17) e (2.18) são realmente idênticas. Mesmo assim, no caso do produto tensorial, preferimos usar o símbolo $\times$, em vez de $\oplus$, para denotar a álgebra de Lie representada, pois isso tem se mostrado útil para diminuir o risco de confusão. Enfatizamos ainda que não devemos (e não vamos) empregar o símbolo $\otimes$ neste contexto, pois não existe o conceito de produto tensorial de duas álgebras de Lie: não há como construir um colchete natural sobre o produto tensorial de duas álgebras de Lie, como espaços vetoriais, exclusivamente em termos dos dois colchetes dados. Este defeito pode ser superado passando da categoria das álgebras de Lie para a categoria das álgebras associativas, considerando a correspondência biunívoca entre representações

$\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e representações $\hat{\pi} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow L(V)$ da sua álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{g})$, em conjunto com o fato de que a categoria das álgebras associativas, esta sim, admite um produto tensorial natural, e que é tal que existe um isomorfismo canônico

$$U(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2) \cong U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2) \tag{2.19}$$

gerado pela inclusão

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2) \\ (X_1, X_2) & \longmapsto & X_1 \otimes 1 + 1 \otimes X_2 \end{array} . \tag{2.20}$$

Finalmente, e é este o motivo pelo uso do adjetivo "externo" acima, tanto a soma direta externa como o produto tensorial externo de duas representações da mesma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ providenciam representações de uma *outra* álgebra de Lie, a saber a "álgebra duplicada" $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ ou $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Para reduzí-las a representações de $\mathfrak{g}$ e assim chegar à soma direta comum e ao produto tensorial comum de representações de $\mathfrak{g}$, basta precompô-las com a inclusão diagonal

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \text{ ou } \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \\ X & \longmapsto & (X, X) \end{array} . \tag{2.21}$$

A diferença essencial entre as duas construções reside no fato de que a soma direta externa $\pi_1 \boxplus \pi_2$ de uma representação π_1 de $\mathfrak{g}_1$ e uma representação π_2 de $\mathfrak{g}_2$ é sempre uma representação redutível de $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, mesmo quando π_1 e π_2 forem irredutíveis, enquanto que o produto tensorial externo $\pi_1 \boxtimes \pi_2$ de uma representação irredutível π_1 de $\mathfrak{g}_1$ e uma representação irredutível π_2 de $\mathfrak{g}_2$ é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. Ademais, toda representação irredutível de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ é desta forma: isso segue da seguinte proposição provindo da teoria das representações de álgebras associativas (veja [22], Proposição 3.1.8):

Proposição 2.1 *Sejam $\rho_1 : A_1 \to L(V_1)$ e $\rho_2 : A_2 \to L(V_2)$ representações irredutíveis de dimensão finita de álgebras associativas com unidade A_1 e A_2. Então o produto tensorial externo de ρ_1 e ρ_2, definido por*

$$\begin{array}{rccc} \rho_1 \boxtimes \rho_2 : & A_1 \otimes A_2 & \longrightarrow & L(V_1 \otimes V_2) \\ & a_1 \otimes a_2 & \longmapsto & \rho_1(a_1) \otimes \rho_2(a_2) \end{array}$$

é uma representação irredutível de dimensão finita da álgebra associativa com unidade $A_1 \otimes A_2$, e toda representação irredutível de dimensão finita de $A_1 \otimes A_2$ é desta forma.

Iterando a construção descrita acima, é claro como definir a soma direta (comum e externa) e o produto tensorial (comum e externo) de um numero finito arbitrário de representações.

2.4 Representações complexas, reais e pseudo-reais

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real e $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial complexo V de dimensão finita. Dada uma conjugação em V, isto é, uma transformação antilinear involutiva $\sigma : V \longrightarrow V$, podemos definir a *representação conjugada* $\bar{\pi} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}$ no mesmo espaço V, como segue:

$$\bar{\pi}(X) = \sigma\,\pi(X)\,\sigma \qquad \text{para } X \in \mathfrak{g}\,, \tag{2.22}$$

e dizemos que π é *auto-conjugada* se $\bar{\pi}$ e π são equivalentes, i.e., se existe uma transformação linear inversível $T : V \longrightarrow V$ tal que

$$\bar{\pi}(X) = T\,\pi(X)\,T^{-1} \qquad \text{para } X \in \mathfrak{g}\,. \tag{2.23}$$

Obviamente, a questão se π é auto-conjugada não depende da escolha da conjugação σ, pois se definirmos $\bar{\pi}_1$ e $\bar{\pi}_2$ como sendo as conjugadas de π em relação a duas conjugações diferentes σ_1 e σ_2, respectivamente, $\bar{\pi}_1$ e $\bar{\pi}_2$ serão equivalentes pela transformação linear $\sigma_1\sigma_2$. Nota-se também que combinando as equações (2.22) e (2.23) e pondo $\tau = \sigma T$, obtemos

$$\pi(X) = \tau\,\pi(X)\,\tau^{-1} \qquad \text{para } X \in \mathfrak{g}\,. \tag{2.24}$$

Um caso especial de representações auto-conjugadas são as representações reais. Dizemos que π é *real* se a transformação T acima pode ser escolhida tal que $\tau = \sigma T$ é involutiva, ou em outras palavras, se existe uma *conjugação* τ em V que satisfaz a equação (2.24). Isto é equivalente a exigir que existe uma forma real $V_{\mathbb{R}}$ de V, i.e., um subespaço real $V_{\mathbb{R}}$ de V tal que $V = V_{\mathbb{R}} \oplus iV_{\mathbb{R}}$, que é $\mathfrak{g}$-invariante. Neste caso, denotando a restrição de π a $V_{\mathbb{R}}$ por $\pi_{\mathbb{R}}$, V será a complexificação de $V_{\mathbb{R}}$ e π será a complexificação de $\pi_{\mathbb{R}}$.

Outro caso especial de representações auto-conjugadas são as representações pseudo-reais. Dizemos que π é *pseudo-real* se a transformação T acima pode ser escolhida tal que o quadrado de $\tau = \sigma T$ é -1 (em vez de $+1$). Neste caso, não existe nenhuma possibilidade de redução a um subespaço real.

A importância desta subdivisão reside no fato de que quando π é irredutível, estas são as únicas possibilidades. Para provar isto, suponha que a representação π é irredutível e auto-conjugada. Então como τ é uma transformação antilinear em V que comuta com todos os $\pi(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, é claro que τ^2 é uma transformação linear em V que comuta com todos os $\pi(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, e portanto pelo lema de Schur, τ^2 é um múltiplo da identidade, ou seja, $\tau^2 = \lambda 1$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Agora, λ deve ser real, pois $\tau^2 = \lambda 1$ implica

$$\begin{aligned} \tau^3 &= \tau^2 \cdot \tau = \lambda 1 \cdot \tau = \lambda\tau\,, \\ \tau^3 &= \tau \cdot \tau^2 = \tau \cdot \lambda 1 = \bar{\lambda}\tau\,, \end{aligned}$$

porque τ é antilinear. Finalmente, substituindo T por $|\lambda|^{-1/2}T$, podemos supor sem perda de generalidade que $|\lambda| = 1$, o que demonstra a afirmação.

De forma análoga, seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real ou complexa e $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial complexo V de dimensão finita. Agora, definimos a *representação dual* $\pi^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$ de $\mathfrak{g}$ no espaço dual V^* de V, como segue:

$$\langle \pi^*(X)v^* , v \rangle \;=\; \langle v^* , \pi(X)v \rangle \qquad \text{para } X \in \mathfrak{g},\, v^* \in V^*,\, v \in V \;, \tag{2.25}$$

e dizemos que π é *auto-dual* se π^* e π são equivalentes, i.e., se existe uma transformação linear inversível $S : V \longrightarrow V^*$ tal que

$$\pi^*(X) \;=\; S\,\pi(X)\,S^{-1} \qquad \text{para } X \in \mathfrak{g} \,. \tag{2.26}$$

Obviamente, π é auto-dual se e somente se V admite uma forma bilinear $(.\,,.)$ não-degenerada que é $\mathfrak{g}$-invariante, i.e., tal que

$$(\pi(X)v, w) + (v, \pi(X)w) \;=\; 0 \qquad \text{para } X \in \mathfrak{g},\, v, w \in V \,. \tag{2.27}$$

(Basta definir $(v, w) = \langle S(v), w \rangle$, para $v, w \in V$.) Como antes, existem dois casos especiais de representações auto-duais: dizemos que π é *ortogonal* se esta forma bilinear é simétrica e que π é *simplética* se esta forma bilinear é antissimétrica. Novamente, a importância desta subdivisão reside no fato de que quando π é irredutível, estas são as únicas possibilidades, porque neste caso, a transformação linear S acima e a forma bilinear $(.\,,.)$ são unicamente determinadas a menos de um múltiplo e portanto tanto a parte simétrica $(.\,,.)_s$ de $(.\,,.)$ como a parte antissimétrica $(.\,,.)_a$ de $(.\,,.)$ tem que ser múltiplos de $(.\,,.)$: uma das duas terá que se anular.

Finalmente, observamos que quando $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie real compacta, toda representação π de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial complexo V de dimensão finita admite um produto escalar (forma sesquilinear hermiteana positivo definido), o que equivale a um isomorfismo antilinear entre V e V^* e permite concluir que π é auto-conjugada se e somente se é auto-dual e que, neste caso, π é real se e somente se é ortogonal e é pseudo-real se e somente se é simplética. Assim, temos três classes distintas de representações irredutíveis π:

- Tipo 0: representações complexas não auto-duais ou auto-conjugadas – $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{su}(n)$;

- Tipo +1: representações reais ou ortogonais – $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{so}(n)$;

- Tipo −1: representações pseudo-reais ou simpléticas – $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sp}(n)$.

2.5 Tabelas

A seguir, apresentamos a classificação das subálgebras primitivas das álgebras de Lie compactas simples na forma de uma sequência de tabelas.

Começando pelas formas reais compactas das álgebras clássicas, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n)$, distinguimos entre subálgebras primitivas simples e não-simples.

Para subálgebras primitivas simples $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, interpretamos a inclusão de $\mathfrak{p}$ em $\mathfrak{g}$ como uma representação de $\mathfrak{p}$ de dimensão n e do tipo adequado:

- Tipo 0 (representação complexa não auto-dual ou auto-conjugada): $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{su}(n)$;
- Tipo $+1$ (representação real ou ortogonal): $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{so}(n)$;
- Tipo -1 (representação pseudo-real ou simplética): $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{sp}(n)$.

O resultado principal é que quase toda representação irredutível de $\mathfrak{p}$ providencia uma inclusão de $\mathfrak{p}$ como subálgebra maximal da álgebra clássica $\mathfrak{g}$ adequada. Existem apenas 19 casos em que $\mathfrak{p}$ deixa de ser maximal [13], e entre estes apenas 1 caso em que $\mathfrak{p}$ deixa de ser maximal mas ainda é primitiva [11]. Estes casos excepcionais são listados na Tabela 2.1, onde Λ denota o peso máximo da correspondente representação de $\mathfrak{p}$, em termos dos pesos fundamentais.

Já para subálgebras primitivas não-simples $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, listadas na Tabela 2.2 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$), na Tabela 2.4 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$) e na Tabela 2.7 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n)$ com n par), seguimos uma estratégia diferente de apresentação, distinguindo entre subálgebras abelianas (a), subálgebras semisimples (s) e subálgebras redutivas com centro e álgebra derivada não-trivial (r), entre subálgebras mergulhadas por uma representação redutível (soma direta) e subálgebras mergulhadas por uma representação irredutível (produto tensorial) e, finalmente, entre subálgebras maximais na primeira parte e subálgebras primitivas que não são maximais na segunda parte de cada tabela. Nas condições impostas sobre os parâmetros destas séries de subálgebras, algumas aparecem porque, nestas tabelas, não listamos subálgebras simples, e outras servem para eliminar duplicidades que, na sua grande maioria, são devidas aos seguintes isomorfismos entre os primeiros membros de cada série:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{su}(1) &= \{0\} \\
\mathfrak{so}(1) &= \{0\} \\
\mathfrak{so}(3) &= \mathfrak{su}(2) \\
\mathfrak{sp}(2) &= \mathfrak{su}(2) \\
\mathfrak{sp}(4) &= \mathfrak{so}(5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(2) &= \mathbb{R} \\ \mathfrak{so}(4) &= \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \\ \mathfrak{so}(6) &= \mathfrak{su}(4) \end{aligned}$$

Por exemplo, na Tabela 2.4, na linha 1 o caso $p \geqslant 3$, $q = 1$ ($\mathfrak{so}(n-1) \subset \mathfrak{so}(n)$) é excluído, e nas linhas 4, 9 e 11, a condição de que $p \neq 4$ é imposta sem perda de generalidade, para evitar repetições, devido ao isomorfismo $\mathfrak{so}(6) = \mathfrak{su}(4)$ e ao isomorfismo $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(2)$, que permite concluir que

$$\prod_{k=1}^{l} \mathfrak{so}(4) = \prod_{k=1}^{2l} \mathfrak{sp}(2) ,$$

e

$$\mathfrak{so}(4) \times \mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(2) .$$

Em seguida, nas Tabelas 2.9-2.13, listamos as subálgebras primitivas das formas reais compactas das álgebras excepcionais. Neste caso, como já foi dito anteriormente, a distinção entre subálgebras redutíveis e subálgebras irredutíveis não faz sentido, e a classe (simples, abeliana, semisimples mas não simples ou redutiva com centro e álgebra derivada $\neq \{0\}$) é óbvia. Para distinguir entre subálgebras que são isomorfas como álgebras de Lie abstratas mas não são conjugadas na álgebra de Lie ambiente e portanto devem ser consideradas como subálgebras diferentes, usamos o *índice de Dynkin* da subálgebra, definido da seguinte forma. Toda álgebra de Lie compacta simples possui uma forma bilinear simétrica positiva definida e invariante, que é unicamente determinada a menos de um múltiplo positivo. Normalmente, ela é obtida como forma de traço em alguma representação, sendo que o exemplo mais utilizado é a forma de traço na representação adjunta, ou seja, a forma de Killing. Quando normalizada de tal maneira que o comprimento das raízes longas é igual a $\sqrt{2}$, esta forma bilinear simétrica positiva definida e invariante é chamada a *forma padrão*. Explicitamente, para as álgebras clássicas, ela é dada por

$$\begin{aligned} (X,Y) &= -\operatorname{tr}(XY) && \text{para } X,Y \in \mathfrak{su}(n) , \\ (X,Y) &= -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(XY) && \text{para } X,Y \in \mathfrak{so}(n) , \\ (X,Y) &= -\operatorname{tr}(XY) && \text{para } X,Y \in \mathfrak{sp}(n) . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Agora, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra simples e $\mathfrak{s}$ é uma subálgebra simples (ou semisimples) de $\mathfrak{g}$, o "pull-back" da forma padrão de $\mathfrak{g}$ pela inclusão de (cada ideal simples de) $\mathfrak{s}$ em $\mathfrak{g}$ define uma forma bilinear simétrica positiva definida e invariante sobre (cada ideal simples de) $\mathfrak{s}$ que deve ser proporcional à forma padrão de (cada ideal simples de) $\mathfrak{s}$, e o fator de proporcionalidade é o que é chamado o índice de Dynkin desta inclusão, isto é, de (cada ideal simples de) $\mathfrak{s}$ como subálgebra de $\mathfrak{g}$. Obviamente, este índice é invariante por conjugação de $\mathfrak{s}$ em $\mathfrak{g}$. Um teorema básico formulado pela primeira vez por Dynkin afirma que este índice é sempre um inteiro (veja [8] para uma demonstração).

Finalmente, nas Tabelas 2.3, 2.5, 2.6 e 2.8, listamos os subgrupos maximais dos grupos compactos clássicos, $G = SU(n)$, $G = SO(n)$ e $G = Sp(n)$, especificando para cada tal subgrupo H sua componente conexa da identidade H_0 e o seu grupo de componentes H/H_0, sendo que H é o normalizador $N_G(H_0)$ de H_0 em G. Estas informações resultam de uma análise tediosa mas muito concreta de cada caso que apresentamos a seguir, pois pode ser considerada como uma verificação independente, adequada inclusive para eliminar um grande número de erros nas tabelas que podem ser encontradas na literatura.

Uma ferramenta importante e muito útil para efetuar esta análise consiste na introdução de um grupo "intermediário" entre H_0 e H, que a seguir denotaremos por H_i.[2] De forma geral, suponha que G é um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e H um subgrupo maximal de G com componente conexa da identidade H_0 e álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ que não é um ideal de $\mathfrak{g}$.[3] Então conforme a Proposição 1.2, H é igual ao normalizador $N_G(H_0)$ de H_0 em G. Além deste, consideramos também o centralizador $Z_G(H_0)$ de H_0 em G e definimos $H_i = H_0\, Z_G(H_0) = Z_G(H_0)\, H_0$ como sendo o subgrupo fechado de G gerado pelos dois subgrupos fechados H_0 e $Z_G(H_0)$ de G. Então vale

$$H_0 \lhd H_i \lhd H \tag{2.29}$$

onde $A \lhd B$ significa "A é subgrupo normal de B". Observe que podemos interpretar H como consistindo dos elementos de G que, por conjugação, agem sobre H_0 como automorfismos e então H_i como consistindo dos elementos de G que, por conjugação, agem sobre H_0 como automorfismos internos. (Obviamente, os elementos de $Z_G(H_0)$ agem trivialmente). Observe também que H, H_i e H_0 têm a mesma álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ (já que isso vale para H e H_0) e portanto os grupos quociente H/H_0, H/H_i e H_i/H_0 são todos discretos; ademais, o terceiro teorema do isomorfismo garante que

$$H/H_i \;=\; \frac{H/H_0}{H_i/H_0}\,. \tag{2.30}$$

Se G for compacto, os referidos grupos quociente são todos finitos, e temos a seguinte relação entre as suas ordens:

$$|H/H_0| \;=\; |H_i/H_0|\,|H/H_i|\,. \tag{2.31}$$

Em muitos casos de interesse, podemos usar propriedades adicionais para deduzir informações sobre a estrutura de H_i/H_0 e de H/H_i, e assim, também de H/H_0:

[2]Este procedimento foi sugerido por Fernando Antoneli.

[3]Se $\mathfrak{g}$ for simples, isto equivale a exigir simplesmente que $\mathfrak{h} \neq \{0\}$.

- H_i/H_0: Como $H_0 \cap Z_G(H_0) = Z(H_0)$, o segundo teorema do isomorfismo garante que

$$H_i/H_0 \;\cong\; Z_G(H_0)\,/\,Z(H_0)\;. \tag{2.32}$$

Notamos que se $\mathfrak{h}$ tiver posto máximo, ou seja, se H_0 contiver um toro máximo T de G, então $Z_G(H_0) \subset T \subset H_0$ e portanto o grupo quociente H_i/H_0 é trivial. Notamos também que sempre vale $Z(G) \subset Z_G(H_0)$. Reciprocamente, se G é um grupo clássico e se a inclusão de H_0 em G constitui uma representação irredutível, então o lema de Schur garante que $Z_G(H_0) \subset (\mathbb{C}\,\mathrm{id}) \cap G \subset Z(G)$ e portanto

$$Z_G(H_0) \;=\; Z(G) \quad , \quad H_i/H_0 \;\cong\; Z(G)\,/\,Z(H_0)\;. \tag{2.33}$$

- H/H_i: Este grupo quociente pode ser identificado com o grupo $\mathrm{Out}(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ dos automorfismos externos de $\mathfrak{h}$ que podem ser estendidos a automorfismos internos de $\mathfrak{g}$ e portanto implementados por conjugação por elementos do grupo ambiente G. Se $\mathfrak{h}$ for semisimples, pode ainda ser identificado com o grupo $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ dos automorfismos do diagrama de Dynkin Γ de $\mathfrak{h}$ que podem ser estendidos a automorfismos internos de $\mathfrak{g}$ e portanto implementados por conjugação por elementos do grupo ambiente G:

$$H/H_i \;\cong\; \mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})\;. \tag{2.34}$$

Conforme a eq. (2.30), o grupo H/H_0 é uma extensão ascendente do grupo H_i/H_0 pelo grupo H/H_i, mas em geral não se sabe "a priori" se esta extensão é cindida, e portanto um produto semidireto, ou não.

Para uma outra parte desta análise, precisaremos de alguns lemas provindo da álgebra linear. Começamos pelo caso real e depois passamos a considerar o caso complexo e o caso quaterniônico.

Lema 2.1 *Sejam v e w dois vetores quaisquer em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então existem $A_0 \in SO(n)$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que*

$$w \;=\; \lambda(A_0 - 1_n)v\;.$$

Demonstração: Se v e w são linearmente dependentes, digamos $w = \mu v$, podemos escolher A_0 tal que $A_0 v = -v$ e A_0 é uma reflexão no complemento ortogonal do espaço unidimensional gerado por v e w; então basta tomar $\lambda = -\mu/2$. Se v e w são linearmente independentes, definimos A_0 como sendo uma rotação da forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

no subespaço bidimensional gerado por v e w e como sendo a identidade no seu complemento ortogonal. Mais explicitamente, pondo $v_0 = v/|v|$, $w_0 = w/|w|$ e definindo ϕ

por $\cos\phi = v_0 \cdot w_0$, podemos empregar os vetores v_0 e $(w_0 - \cos\phi\, v_0)/\sin\phi$ como base ortonormal neste subespaço, obtendo

$$A_0 v_0 \;=\; \cos\alpha\, v_0 + \sin\alpha\, \frac{w_0 - \cos\phi\, v_0}{\sin\phi}$$

$$A_0\, \frac{w_0 - \cos\phi\, v_0}{\sin\phi} \;=\; -\sin\alpha\, v_0 + \cos\alpha\, \frac{w_0 - \cos\phi\, v_0}{\sin\phi}$$

e assim,

$$\big(A_0 - 1_n\big)v \;=\; \Big(\cos\alpha - \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\sin\alpha - 1\Big)v + \frac{\sin\alpha}{\sin\phi}\,\frac{|v|}{|w|}\,w\,.$$

O primeiro termo nesta expressão se anula se escolhermos $\alpha = 2\phi - \pi$, e neste caso, escolhendo λ tal que $\lambda^{-1} = -2\cos\phi\,|v|/|w|$, segue a afirmação do lema. □

Lema 2.2 *Sejam v e w dois vetores quaisquer em $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Então existem $A_0 \in SU(n)$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tais que*

$$w \;=\; \lambda\big(A_0 - 1_n\big)v\,.$$

Lema 2.3 *Sejam v e w dois vetores quaisquer em $\mathbb{H}^n \setminus \{0\}$. Então existem $A_0 \in Sp(2n)$ e $\lambda \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ tais que*

$$w \;=\; \lambda\big(A_0 - 1_n\big)v\,.$$

Demonstração: Identificando $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$ e $\mathbb{H}^n$ com $\mathbb{R}^{4n}$, precisamos especificar a construção de A_0 na demonstração acima de tal forma que A_0 comuta, respectivamente, com o operador de multiplicação por i e com os três operadores de multiplicação por i, j e k constituindo a estrutura adicional que permite implementar esta identificação, pela qual obtemos $SU(n) = SO(2n) \cap GL(n,\mathbb{C})$ e $Sp(2n) = SO(4n) \cap GL(n,\mathbb{H})$. Se v e w são linearmente dependentes, respectivamente, sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{H}$, isto é, $w = \mu v$ com $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $\mu \in \mathbb{H}\setminus\{0\}$, basta escolher A_0 tal que vale $A_0(v) = -v$, $A_0(iv) = -iv$ e $A_0 = \mathrm{id}$ sobre o complemento ortogonal do subespaço bidimensional real gerado por v e iv, no caso complexo, e tal que vale $A_0(v) = -v$, $A_0(iv) = -iv$, $A_0(jv) = -jv$, $A_0(kv) = -kv$ e $A_0 = \mathrm{id}$ sobre o complemento ortogonal do subespaço quadridimensional real gerado por v, iv, jv e kv, no caso quaterniônico. Se v e w são linearmente independentes, respectivamente, sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{H}$, A_0 será a rotação definida anteriormente não apenas no subespaço bidimensional real gerado por v e w mas também no subespaço bidimensional real gerado por iv e iw, sendo a identidade apenas no complemento ortogonal do subespaço real gerado por v, iv, w e iw, no caso complexo, e será a rotação definida anteriormente não apenas no subespaço bidimensional real gerado por v e w mas também nos três subespaços bidimensionais reais gerados por iv e iw, por jv e jw e por kv e kw, sendo a identidade apenas no complemento ortogonal do subespaço real gerado por v, iv, jv, kv, w, iw, jw e kw, no caso quaterniônico. □

2.5.1 Subgrupos maximais de $SU(n)$

Analisando cada uma das inclusões da Tabela 2.3, distinguimos os seguintes casos.

1. Para definir a inclusão

$$S\big(U(p) \times U(q)\big) \subset SU(n)$$

pela soma direta das representações canônicas de $U(p)$ e $U(q)$, com $n = p + q$, escrevemos vetores z em $\mathbb{C}^n$ como vetores coluna em bloco $z = \binom{x}{y}$ onde x e y são, respectivamente, vetores coluna em $\mathbb{C}^p$ e em $\mathbb{C}^q$. Então $(A, B) \in U(p) \times U(q)$ age sobre z conforme $(A, B) \cdot z = \binom{Ax}{By}$, e esta ação define um homomorfismo injetor, ou seja, uma inclusão de $U(p) \times U(q)$ em $U(n)$. A pré-imagem de $G = SU(n)$ sob esta inclusão é o subgrupo conexo

$$H_0 = S\big(U(p) \times U(q)\big) = \{ (A, B) \in U(p) \times U(q) \mid \det(A) \det(B) = 1 \} .$$

e a restrição do homomorfismo injetor introduzido acima a este grupo providencia a inclusão desejada. Note também que o centralizador $Z_G(H_0)$ de H_0 em G é contido em H_0 ; logo, $H_i = H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, representamos matrizes $(n \times n)$ por matrizes em bloco (2×2) cujas entradas são, respectivamente, matrizes $(p \times p)$, $(p \times q)$, $(q \times p)$ e $(q \times q)$, escrevendo elementos h_0 de H_0 e h de H na forma

$$h_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix} , \quad h = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad h^\dagger = \begin{pmatrix} A^\dagger & C^\dagger \\ B^\dagger & D^\dagger \end{pmatrix}$$

A condição de que $hh^\dagger = 1_n$ significa que

$$\begin{pmatrix} AA^\dagger + BB^\dagger & AC^\dagger + BD^\dagger \\ CA^\dagger + DB^\dagger & CC^\dagger + DD^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 1_q \end{pmatrix} .$$

Por outro lado, a condição de que $hh_0h^\dagger \in H_0$ significa que

$$\begin{pmatrix} AA_0A^\dagger + BD_0B^\dagger & AA_0C^\dagger + BD_0D^\dagger \\ CA_0A^\dagger + DD_0B^\dagger & CA_0C^\dagger + DD_0D^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0' & 0 \\ 0 & D_0' \end{pmatrix} .$$

Como esta condição deve valer para quaisquer $A_0 \in U(p)$ e $D_0 \in U(q)$ com $\det(A_0) \det(D_0) = 1$, podemos escolher $D_0 = 1_q$ para obter

$$A(A_0 - 1_p)C^\dagger = 0 \quad , \quad C(A_0 - 1_p)A^\dagger = 0 \qquad \text{para todo } A_0 \in SU(p) ,$$

e, da mesma forma, escolher $A_0 = 1_p$ para obter

$$B(D_0 - 1_q)D^\dagger \;=\; 0 \quad , \quad D(D_0 - 1_q)B^\dagger \;=\; 0 \qquad \text{para todo } D_0 \in SU(q) \;.$$

Pelo lema 2.2, isso implica que $A = 0$ ou $C = 0$ e que $B = 0$ ou $D = 0$. Também não é possível ter $A = 0$ e $B = 0$ nem $C = 0$ e $D = 0$, já que $\det h \neq 0$. Assim, concluímos que os elementos h de H devem ter a forma

$$h \;=\; \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad h \;=\; \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} ,$$

com $p = q$ no segundo caso, pois caso contrário, não há como satisfazer a condição

$$\begin{pmatrix} BB^\dagger & 0 \\ 0 & CC^\dagger \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 1_q \end{pmatrix} ,$$

uma vez que $BB^\dagger$ não pode ter posto maior do que q. No primeiro caso, segue que $h \in H_0$ e portanto, $H = H_0$. No segundo caso, podemos escrever h como produto de um elemento de H_0 com a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix}$$

que pertence a $SU(n)$ $(n = 2p)$, pois

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} .$$

Como o quadrado

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix}^2 \;=\; \begin{pmatrix} -1_p & 0 \\ 0 & -1_p \end{pmatrix}$$

da referida matriz pertence a H_0, concluímos que, neste caso, $H/H_0 = \mathbb{Z}_2$.

2. Para definir a inclusão

$$SU(p) \times_{\mathbb{Z}_d} SU(q) \;\subset\; SU(n)$$

pelo produto tensorial das representações canônicas de $U(p)$ e $U(q)$, com $n = p\,q$ e $d = \text{mdc}(p, q)$ (i.e., d é o maior divisor comum de p e q), escrevemos vetores z em $\mathbb{C}^n$ como tensores, entre os quais temos os tensores decomponíveis $z = x \otimes y$ onde x e y são, respectivamente, vetores em $\mathbb{C}^p$ e em $\mathbb{C}^q$. Então

$(A, B) \in U(p) \times U(q)$ age sobre z conforme $(A, B) \cdot z = Ax \otimes By$, e esta ação define um homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} U(p) \times U(q) & \longrightarrow & U(n) \\ (A, B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

que, ao contrário da situação encontrada no primeiro item, não é injetor, pois tem núcleo

$$\{ (\exp(i\alpha)1_p \, , \exp(-i\alpha)1_q) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \;\cong\; U(1) \; .$$

Devido à fórmula

$$\det(A \otimes B) \;=\; (\det(A))^q \, (\det(B))^p \; ,$$

a pré-imagem de $G = SU(n)$ sob este homomorfismo é o subgrupo

$$S'\big(U(p) \times U(q)\big) \;=\; \{ (A, B) \in U(p) \times U(q) \mid \det(A)^q \det(B)^p = 1 \} \; .$$

sendo que o homomorfismo restrito

$$\begin{array}{ccc} S'\big(U(p) \times U(q)\big) & \longrightarrow & SU(n) \\ (A, B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

ainda tem o mesmo núcleo

$$\{ (\exp(i\alpha)1_p \, , \exp(-i\alpha)1_q) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \;\cong\; U(1) \; .$$

Sua interseção com o subgrupo conexo $SU(p) \times SU(q)$ é

$$\{ (\exp(2\pi ik/d)1_p \, , \exp(-2\pi ik/d)1_q) \mid 0 \leqslant k < d \} \;\cong\; \mathbb{Z}_d \; .$$

Passando ao quociente, obtemos a inclusão desejada. Note também que o centro $Z(G)$ de G é contido no grupo quociente $S'\big(U(p) \times U(q)\big)/U(1)$ e que este é gerado por $Z(G)$ e pelo grupo quociente $\big(SU(p) \times SU(q)\big)/\mathbb{Z}_d$; logo,

$$H_0 \;\cong\; \big(SU(p) \times SU(q)\big)/\mathbb{Z}_d \; ,$$

e

$$H_i \;\cong\; S'\big(U(p) \times U(q)\big)/U(1) \; ,$$

de forma que, como foi visto antes (veja a eq. (2.33)),

$$H_i/H_0 \;\cong\; Z(G)/Z(H_0) \;\cong\; \mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_{n/d} \;\cong\; \mathbb{Z}_d \; .$$

Explicitamente, um representante da componente conexa de H_i correspondente a $k \mod d$ é dado pela matriz $\exp(2\pi ik/n)\,1_n$, uma vez que quando k for um múltiplo de d, k/n será um múltiplo de d/n que pode ser escrito na forma

$$\frac{d}{n} = \frac{r}{p} + \frac{s}{q}$$

(sendo que r e s são escolhidos de tal forma que $rq' + sp' = 1$ onde $p' = p/d$ e $q' = q/d$, o que é possível pois p' e q' são relativamente primos), e portanto $\exp(2\pi ik/n)\,1_n \in H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, observamos primeiro que (para $p \geqslant 3$) o diagrama de Dynkin de $\mathfrak{su}(p)$ admite um único automorfismo, que pode ser implementado por uma involução antilinear σ_p em $\mathbb{C}^p$. Como o produto tensorial de transformações lineares / antilineares é uma transformação linear / antilinear, enquanto que o produto tensorial de uma transformação linear e uma transformação antilinear não é bem definido, vemos que existe um único automorfismo do diagrama de Dynkin Γ de $\mathfrak{su}(p) \times \mathfrak{su}(q)$ induzido por automorfismos dos diagramas de Dynkin dos fatores que pode ser estendido a um automorfismo de $\mathfrak{su}(n)$, a saber aquele implementado por uma involução antilinear da forma $\sigma_p \otimes \sigma_q$, mas este será sempre um automorfismo externo e não interno de $\mathfrak{su}(n)$. Assim, fica claro que para $p \neq q$, $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \{1\}$, enquanto que para $p = q$, $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ pode, no máximo, ser igual ao grupo $\mathbb{Z}_2$, pois neste caso existe a possibilidade de trocar os dois fatores do produto tensorial. Explicitamente, um representante da componente conexa correspondente de H é dado pela transformação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ z = x \otimes y & \longmapsto & z^\tau = \exp(i\phi_p)\, y \otimes x \end{array} ,$$

que pertence a $SU(n)$ ($n = p^2$) se escolhermos a fase $\exp(i\phi_p)$ conforme

$$\exp(i\phi_p) = \begin{cases} +1 \text{ ou } -1 & \text{se } p = 0 \mod 4 \\ +1 & \text{se } p = 1 \mod 4 \\ \exp(i\pi/4) & \text{se } p = 2 \mod 4 \\ -1 & \text{se } p = 3 \mod 4 \end{cases} ;$$

pois a permutação que leva $x \otimes y$ em $y \otimes x$, quando escrita em uma base de $\mathbb{C}^n$ provindo de uma base de $\mathbb{C}^p$ tomando produtos tensoriais entre os vetores da última, é o produto de $\binom{p}{2} = p(p-1)/2$ transposições

$$e_i \otimes e_j \longleftrightarrow e_j \otimes e_i \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant p) ,$$

com p pontos fixos $e_i \otimes e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ e portanto é uma involução com determinante $(-1)^{p(p-1)/2}$. Assim, concluímos que para $p = q$, $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}_2$. Finalmente, a estrutura do grupo H/H_0 neste caso pode ser deduzida observando que para $p \neq 2 \mod 4$, a transformação $.^\tau$ tem ordem 2 e portanto H/H_0 é o produto direto $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2$, enquanto que para $p = 2 \mod 4$, i.e., $p = 2r$ com r impar, ela tem ordem 8, mas seu quadrado coincide com a matriz $\exp(2\pi i r^2/p^2)\, 1_n = i\, 1_n$ que representa uma das componentes conexas não-triviais de H_i, e o quadrado desta pertence a H_0, implicando que H/H_0 é uma extensão ascendente não-cindida do grupo $\mathbb{Z}_p$ pelo grupo $\mathbb{Z}_2$ $(H/H_0 = \mathbb{Z}_p \,.\, \mathbb{Z}_2)$ que pode ser explicitamente realizada como o grupo quociente $\mathbb{Z}_p \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4$.

3. Generalizando o procedimento do primeiro item, definimos a inclusão

$$S\big(U(p) \times \ldots \times U(p)\big) \;\subset\; SU(n)$$

pela soma direta de l cópias da representação canônica de $U(p)$, com $n = pl$, escrevendo vetores z em $\mathbb{C}^n$ como vetores coluna em bloco compostos de l vetores coluna em $\mathbb{C}^p$. A pré-imagem de $G = SU(n)$ sob a inclusão correspondente

$$U(p) \times \ldots \times U(p) \;\subset\; U(n)$$

é o subgrupo conexo

$$H_0 \;=\; S\big(U(p) \times \ldots \times U(p)\big)\ .$$

Note também que o centralizador $Z_G(H_0)$ de H_0 em G é contido em H_0; logo, $H_i = H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, representamos matrizes $(n \times n)$ por matrizes em bloco $(l \times l)$ cujas entradas são matrizes $(p \times p)$, escrevendo elementos h_0 de H_0 e h de H na forma

$$h_0 \;=\; \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A_l \end{pmatrix}$$

e

$$h \;=\; \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1} & \ldots & A_{ll} \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad h^\dagger \;=\; \begin{pmatrix} A_{11}^\dagger & \ldots & A_{l1}^\dagger \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1l}^\dagger & \ldots & A_{ll}^\dagger \end{pmatrix}$$

para concluir que para quaisquer três indices i, j, k com $1 \leqslant i, j, k \leqslant l$ e $i \neq j$, vale $A_{ik} = 0$ ou $A_{jk} = 0$ e portanto existe uma permutação σ de $\{1, \ldots, l\}$ tal que

$$A_{ik} \;=\; 0 \quad \text{se } i \neq \sigma(k)\ ,$$

enquanto que

$$\det\bigl(A_{\sigma(k)\,k}\bigr) \neq 0 .$$

Quando, por exemplo, σ é a transposição simples τ_{12} ($\tau_{12}(1) = 2$, $\tau_{12}(2) = 1$, $\tau_{12}(i) = i$ para $i \geqslant 3$), podemos escrever h_σ como produto de um elemento de H_0 com a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p & 0 & \ldots & 0 \\ -1_p & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1_p & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1_p \end{pmatrix}$$

que pertence a $SU(n)$ e cujo quadrado pertence a H_0. Logo, segue que, neste caso, $H/H_0 = S_l$.

4. Generalizando o procedimento do segundo item, definimos a inclusão

$$\bigl(SU(p) \times \ldots \times SU(p)\bigr)/\mathbb{Z}_p^{l-1} \subset SU(n)$$

pelo produto tensorial de l cópias da representação canônica de $U(p)$, com $n = p^l$, escrevendo vetores z em $\mathbb{C}^n$ como tensores de grau l sobre $\mathbb{C}^p$. Esta inclusão provém do homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} U(p) \times \ldots \times U(p) & \longrightarrow & U(n) \\ (A_1, \ldots, A_l) & \longmapsto & A_1 \otimes \ldots \otimes A_l \end{array}$$

que não é injetor, pois tem núcleo

$$\{\, (\exp(i\alpha_1)\, 1_p\,, \ldots, \exp(i\alpha_l)\, 1_p) \mid \exp(i(\alpha_1 + \ldots + \alpha_l)) = 1 \,\} \;\cong\; U(1)^{l-1} .$$

Devido à fórmula

$$\det\bigl(A_1 \otimes \ldots \otimes A_l\bigr) = \bigl(\det(A_1) \ldots \det(A_l)\bigr)^{p^{l-1}} ,$$

a pré-imagem de $SU(n)$ sob este homomorfismo é o subgrupo

$$S'\bigl(U(p) \times \ldots \times U(p)\bigr) = \begin{array}{l} \{\, (A_1, \ldots, A_l) \in U(p) \times \ldots \times U(p) \mid \\ \qquad\qquad \bigl(\det(A_1) \ldots \det(A_l)\bigr)^{p^{l-1}} = 1 \,\} , \end{array}$$

sendo que o homomorfismo restrito

$$\begin{array}{ccc} S'\bigl(U(p) \times \ldots \times U(p)\bigr) & \longrightarrow & SU(n) \\ (A_1, \ldots, A_l) & \longmapsto & A_1 \otimes \ldots \otimes A_l \end{array}$$

ainda tem o mesmo núcleo

$$\{ (\exp(i\alpha_1)\, 1_p\,, \ldots, \exp(i\alpha_l)\, 1_p) \mid \exp(i(\alpha_1 + \ldots + \alpha_l)) = 1 \} \;\cong\; U(1)^{l-1} \,.$$

Sua interseção com o subgrupo conexo $SU(p) \times \ldots \times SU(p)$ é

$$\{ (\exp(2\pi i k_1/p)\, 1_p\,, \ldots, \exp(2\pi i k_l/p)\, 1_p) \mid \exp(2\pi i(k_1 + \ldots + k_l)/p) = 1 \} \;\cong\; \mathbb{Z}_p^{l-1} \,.$$

Passando ao quociente, obtemos a inclusão desejada. Note também que o centro $Z(G)$ de G é contido no grupo quociente $S'\big(U(p) \times \ldots \times U(p)\big)/U(1)^{l-1}$ e que este é gerado por $Z(G)$ e pelo grupo quociente $\big(SU(p) \times \ldots \times SU(p)\big)/\mathbb{Z}_p^{l-1}$; logo,

$$H_0 \;\cong\; \big(SU(p) \times \ldots \times SU(p)\big)/\mathbb{Z}_p^{l-1} \,,$$

e

$$H_i \;\cong\; S'\big(U(p) \times \ldots \times U(p)\big)/U(1)^{l-1} \,,$$

de forma que, como foi visto antes (veja a eq. (2.33)),

$$H_i/H_0 \;\cong\; Z(G)/Z(H_0) \;\cong\; \mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_p \;\cong\; \mathbb{Z}_{p^{l-1}} \,.$$

Explicitamente, um representante da componente conexa de H_i correspondente a $k \mod p^{l-1}$ é dado pela matriz $\exp(2\pi i k/n)\, 1_n$, uma vez que quando k for um múltiplo de p^{l-1}, $\exp(2\pi i k/n)\, 1_n \in H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, observamos como antes que não existe nenhum automorfismo do diagrama de Dynkin de $\mathfrak{su}(p) \times \ldots \times \mathfrak{su}(p)$ induzido por automorfismos dos diagramas de Dynkin dos fatores que possa ser estendido a um automorfismo interno de $\mathfrak{su}(n)$. Assim, fica claro que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ pode, no máximo, ser igual ao grupo simétrico S_l, pois existe a possibilidade de permutar os l fatores do produto tensorial. Como $l \geqslant 3$, podemos implementar qualquer transposição através de uma involução de determinante $+1$ pois, por exemplo, o determinante da transformação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ z = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes \ldots \otimes x_l & \longmapsto & z^{\tau_{12}} = \pm\, x_2 \otimes x_1 \otimes x_3 \otimes \ldots \otimes x_l \end{array} ,$$

que representa a transposição simples τ_{12} ($\tau_{12}(1) = 2$, $\tau_{12}(2) = 1$, $\tau_{12}(i) = i$ para $i \geqslant 3$) é $(-1)^{p^{l-1}(p\mp 1)/2}$, que vale $+1$ quando p é par e, dependendo da escolha do sinal, também quando p é impar. Assim, concluímos que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = S_l$ e que H/H_0 é o produto direto $\mathbb{Z}_{p^{l-1}} \times S_l$.

2.5.2 Subgrupos maximais de $SO(n)$

Analisando cada uma das inclusões das Tabelas 2.5 e 2.6, distinguimos os seguintes casos.

1. Para definir a inclusão
$$SO(p) \times SO(q) \;\subset\; SO(n)$$
pela soma direta das representações canônicas de $O(p)$ e $O(q)$, com $n = p + q$, escrevemos vetores z em $\mathbb{R}^n$ como vetores coluna em bloco $z = \binom{x}{y}$ onde x e y são, respectivamente, vetores coluna em $\mathbb{R}^p$ e em $\mathbb{R}^q$. Então $(A, B) \in O(p) \times O(q)$ age sobre z conforme $(A, B) \cdot z = \binom{Ax}{By}$, e esta ação define um homomorfismo injetor, ou seja, uma inclusão de $O(p) \times O(q)$ em $O(n)$. A pré-imagem de $G = SO(n)$ sob esta inclusão é o subgrupo
$$H_+ \;=\; S\big(O(p) \times O(q)\big) \;=\; \{\,(A, B) \in O(p) \times O(q) \mid \det(A)\det(B) = 1\,\}\ ,$$
que tem duas componentes conexas, a da identidade, que é
$$H_0 \;=\; SO(p) \times SO(q) \;=\; \{\,(A, B) \in O(p) \times O(q) \mid \det(A) = 1 = \det(B)\,\}\ ,$$
e uma outra,
$$\{\,(A, B) \in O(p) \times O(q) \mid \det(A) = -1 = \det(B)\,\}\ ,$$
sendo que a restrição do homomorfismo injetor introduzido acima à primeira providencia a inclusão desejada. Note também que o centralizador $Z_G(H_0)$ de H_0 em G é contido em H_+ e que H_+ é gerado por $Z_G(H_0)$ e H_0 ; logo, $H_i = H_+$.

   Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, podemos prosseguir como no caso de $SU(n)$, aplicando o lema 2.1 para concluir que os elementos h de H devem ter a forma
$$h \;=\; \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad h \;=\; \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\ ,$$
com $p = q$ no segundo caso. No primeiro caso, segue que $h \in H_+$ e portanto, $H = H_+$, $H/H_0 = \mathbb{Z}_2$. No segundo caso, podemos escrever h como produto de um elemento de H_+ com a matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix}$$
que pertence a $SO(n)$ $(n = 2p)$, pois
$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Como o quadrado

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1_p & 0 \\ 0 & -1_p \end{pmatrix}$$

da referida matriz pertence a H_+ mas pertence a H_0 apenas se p é par, concluímos que, neste caso, $H/H_0 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ se p é par e $H/H_0 = \mathbb{Z}_4$ se p é impar.

2. De forma semelhante, considerando a inclusão

$$SO(4) \subset SO(5)$$

e mais geralmente, a inclusão

$$SO(n-1) \subset SO(n)$$

temos que o normalizador do subgrupo conexo

$$H_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in O(n-1) \ , \ \det(A) = +1 \right\} \cong SO(n-1)$$

em $SO(n)$ é o subgrupo

$$H_+ = \begin{array}{c} \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in O(n-1) \ , \ \det(A) = +1 \right\} \\ \cup \\ \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid A \in O(n-1) \ , \ \det(A) = -1 \right\} \end{array} \cong O(n-1) \ .$$

3. Este caso, como os anteriores, pode ser tratado utilizando os resultados sobre o índice de recobrimento dos espaços simétricos compactos (veja [28], Capítulo 10, Exercício C4, p. 526) para a série $DIII$, que leva à conclusão de que o normalizador de $\mathfrak{u}(p)$ no grupo $Spin(n)$ $(n = 2p)$ é conexo se p é impar e tem duas componentes conexas se p é par. O fato de que o mesmo resultado é válido se substituírmos o grupo simplesmente conexo $Spin(n)$ pelo grupo especial ortogonal $SO(n)$ pode ser deduzido usando que o automorfismo involutivo da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$ que tem a subálgebra de Lie $\mathfrak{u}(p)$ como subálgebra de estabilidade pode ser levantado para um automorfismo involutivo do grupo $SO(n)$ e portanto o seu levantamento para um automorfismo involutivo do grupo $Spin(n)$ é a identidade sobre o núcleo $\mathbb{Z}_2$ do recobrimento duplo de $SO(n)$ por $Spin(n)$.

4. Para definir a inclusão

$$\begin{array}{lcll} SO(p) \times SO(q) & \subset & SO(n) & \text{se} \quad p \text{ ou } q \text{ impar} \\ SO(p) \times_{\mathbb{Z}_2} SO(q) & \subset & SO(n) & \text{se} \quad p \text{ e } q \text{ par} \end{array}$$

pelo produto tensorial das representações canônicas de $O(p)$ e $O(q)$, com $n = pq$, escrevemos vetores z em $\mathbb{R}^n$ como tensores, entre os quais temos os tensores decomponíveis $z = x \otimes y$ onde x e y são, respectivamente, vetores em $\mathbb{R}^p$ e em $\mathbb{R}^q$. Então $(A, B) \in O(p) \times O(q)$ age sobre z conforme $(A, B) \cdot z = Ax \otimes By$, e esta ação define um homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} O(p) \times O(q) & \longrightarrow & O(n) \\ (A, B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

que, ao contrário da situação encontrada no primeiro item, não é injetor, pois tem núcleo

$$\{(1_p\,, 1_q), (-1_p\,, -1_q)\} \;\cong\; \mathbb{Z}_2\,.$$

Devido à fórmula

$$\det(A \otimes B) \;=\; (\det(A))^q\,(\det(B))^p\,,$$

a pré-imagem de $G = SO(n)$ sob este homomorfismo é o subgrupo

$$S'\big(O(p) \times O(q)\big) \;=\; \left\{ \begin{array}{cccc} S\big(O(p) \times O(q)\big) & \text{se} & p \text{ impar} & , \; q \text{ impar} \\ O(p) \times SO(q) & \text{se} & p \text{ impar} & , \; q \text{ par} \\ SO(p) \times O(q) & \text{se} & p \text{ par} & , \; q \text{ impar} \\ O(p) \times O(q) & \text{se} & p \text{ par} & , \; q \text{ par} \end{array} \right. .$$

Nos primeiros três casos, este grupo tem duas componentes conexas tais que o núcleo do homomorfismo introduzido acima intersecta cada uma delas em exatamente um elemento (pois $(-1_p\,, -1_q)$ pertence à componente conexa que não é a da identidade), e portanto a restrição do homomorfismo introduzido acima à componente conexa da identidade providencia a inclusão desejada. No último caso, o referido grupo tem quatro componentes conexas, mas o núcleo do homomorfismo introduzido acima é completamente contido na componente conexa da identidade (pois $(-1_p\,, -1_q)$ pertence à componente conexa da identidade), e portanto precisamos passar aos quocientes por este núcleo para obter a seguinte sequência de inclusões:

$$SO(p) \times_{\mathbb{Z}_2} SO(q) \;\subset\; O(p) \times_{\mathbb{Z}_2} O(q) \;\subset\; SO(n)\,.$$

Note também que o centro $Z(G)$ de G é contido em H_0; logo, $H_i = H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, observamos primeiro que (para p par, $p \geqslant 6$, $p \neq 8$) o diagrama de Dynkin de $\mathfrak{so}(p)$ admite um único automorfismo, que pode ser implementado por uma reflexão σ_p em $\mathbb{R}^p$.[4] Calculando determinantes, vemos que os automorfismos do diagrama de Dynkin Γ de $\mathfrak{so}(p) \times \mathfrak{so}(q)$ induzidos por automorfismos dos diagramas de Dynkin dos fatores podem sempre ser estendidos a automorfismos de $\mathfrak{so}(n)$ e que estes serão automorfismos externos (implementados por uma matriz em $O(n)$ que não pertence a $SO(n)$) se p ou q for impar mas serão internos (implementados por uma matriz em $SO(n)$) se p e q forem pares. Assim, fica claro que para $p \neq q$,

$$\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \;=\; \begin{cases} \{1\} & \text{se} \quad p \neq q,\ p \text{ ou } q \text{ impar} \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad p \neq q,\ p \text{ e } q \text{ par} \end{cases},$$

enquanto que para $p = q$, $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ pode, além disso, conter um grupo $\mathbb{Z}_2$ como fator adicional, pois neste caso existe a possibilidade de trocar os dois fatores do produto tensorial. Explicitamente, um representante da componente conexa correspondente de H é dado pela transformação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ z = x \otimes y & \longmapsto & z^\tau = \pm\, y \otimes x \end{array}$$

que, pelo mesmo argumento empregado no caso de $SU(n)$, tem determinante $(-1)^{p(p\mp1)/2}$ e portanto pertence a $SO(n)$, mediante uma escolha adequada do sinal, exceto quando $p = 2 \mod 4$. Assim, concluímos que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}_2$ se $p = q$ é impar mas que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ se $p = 2 \mod 4$ e $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) : \mathbb{Z}_2$ (ou $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$) se $p = 0 \mod 4$, sendo que neste caso, a estrutura deste grupo como produto semidireto se evidencia se observarmos que conjugação com a transformação $.^\tau$ leva $A \otimes B$ em $B \otimes A$ e portanto age sobre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pela troca dos fatores.

5. Para definir a inclusão

$$Sp(2p) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(2q) \;\subset\; SO(n)$$

pelo produto tensorial das representações canônicas de $Sp(2p)$ e $Sp(2q)$, com $n = 4pq$, observando que o produto tensorial de duas representações pseudo-reais (simpléticas) é real (ortogonal), podemos prosseguir da mesma forma que no item anterior, porém com algumas simplificações: o homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} Sp(2p) \times Sp(2q) & \longrightarrow & O(n) \\ (A, B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

[4]No caso de $\mathfrak{so}(8)$, há outros automorfismos não-triviais do diagrama de Dynkin, mas estes não podem ser implementados por transformações lineares em $\mathbb{R}^8$.

sempre tem imagem contida em $G = SO(n)$ e tem o mesmo núcleo que antes:

$$\{(1_{2p}\,,1_{2q}),(-1_{2p}\,,-1_{2q})\} \;\cong\; \mathbb{Z}_2\;.$$

Portanto, ele providencia a inclusão desejada do correspondente grupo quociente. Note também que o centro $Z(G)$ de G é contido em H_0 ; logo, $H_i = H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, observamos que para $p \neq q$, $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \{1\}$, enquanto que para $p = q$, $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ pode, no máximo, ser igual ao grupo $\mathbb{Z}_2$, pois neste caso existe a possibilidade de trocar os dois fatores do produto tensorial. O argumento para decidir se este operador de troca tem determinante $+1$ ou -1 também permanece inalterado e leva à conclusão de que $\mathrm{Aut}(\Gamma)\cap\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \{1\}$ se $p = q$ é impar e $\mathrm{Aut}(\Gamma)\cap\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}_2$ se $p = q$ é par.

6. Generalizando o procedimento do item 1, definimos a inclusão

$$SO(p)\times\ldots\times SO(p) \;\subset\; SO(n)$$

pela soma direta de l cópias da representação canônica de $O(p)$, com $n = pl$, escrevendo vetores z em $\mathbb{R}^n$ como vetores coluna em bloco compostos de l vetores coluna em $\mathbb{R}^p$. A pré-imagem de $G = SO(n)$ sob a inclusão correspondente

$$O(p)\times\ldots\times O(p) \;\subset\; O(n)$$

é o subgrupo

$$H_+ \;=\; S\big(O(p)\times\ldots\times O(p)\big)\;,$$

que tem 2^{l-1} componentes conexas, a da identidade sendo

$$H_0 \;=\; SO(p)\times\ldots\times SO(p)\;.$$

Note também que o centralizador $Z_G(H_0)$ de H_0 em G é contido em H_+ e que H_+ é gerado por $Z_G(H_0)$ e H_0 ; logo, $H_i = H_+$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, podemos prosseguir como no caso de $SU(n)$, para concluir que os elementos de H devem ter a forma

$$h_\sigma \;=\; \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1} & \ldots & A_{ll} \end{pmatrix}$$

onde $\sigma \in S_l$ e

$$A_{ik} \;=\; 0 \quad \text{se } i \neq \sigma(k)\;,$$

enquanto que

$$\det\big(A_{\sigma(k)\,k}\big) \;\neq\; 0\;.$$

Quando, por exemplo, σ é a transposição simples τ_{12} ($\tau_{12}(1) = 2$, $\tau_{12}(2) = 1$, $\tau_{12}(i) = i$ para $i \geqslant 3$), podemos escrever h_σ como produto de um elemento de H_+ com a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p & 0 & \ldots & 0 \\ -1_p & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1_p & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1_p \end{pmatrix}$$

que pertence a $SO(n)$ e cujo quadrado pertence a H_+ mas pertence a H_0 apenas se p for par. Logo, segue que, neste caso, H/H_0 é uma extensão ascendente do grupo $\mathbb{Z}_2^{l-1}$ pelo grupo simétrico S_l, sendo que esta extensão é cindida e portanto um produto semidireto, $H/H_0 = \mathbb{Z}_2^{l-1} : S_l$ (ou $S_l \ltimes \mathbb{Z}_2^{l-1}$), se p é par, mas não é cindida, $H/H_0 = \mathbb{Z}_2^{l-1} . S_l$, se p é impar.

7. Generalizando o procedimento do item 4, definimos a inclusão

$$\begin{array}{lcll} SO(p) \times \ldots \times SO(p) & \subset & SO(n) & \text{se } \; p \text{ impar} \\ \big(SO(p) \times \ldots \times SO(p)\big)/\mathbb{Z}_2^{l-1} & \subset & SO(n) & \text{se } \; p \text{ par} \end{array}$$

pelo produto tensorial de l cópias da representação canônica de $O(p)$, com $n = p^l$, escrevendo vetores z em $\mathbb{R}^n$ como tensores de grau l sobre $\mathbb{R}^p$. Esta inclusão provém do homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} O(p) \times \ldots \times O(p) & \longrightarrow & O(n) \\ (A_1, \ldots, A_l) & \longmapsto & A_1 \otimes \ldots \otimes A_l \end{array}$$

que não é injetor, pois tem núcleo

$$\{\,(\epsilon_1 1_p\,, \ldots, \epsilon_l 1_p) \mid \epsilon_1, \ldots, \epsilon_l = \pm 1\,,\, \epsilon_1 \ldots \epsilon_l = 1\,\} \;\cong\; \mathbb{Z}_2^{l-1}\;.$$

Devido à fórmula

$$\det\big(A_1 \otimes \ldots \otimes A_l\big) \;=\; \big(\det(A_1)\,\ldots\,\det(A_l)\big)^{p^{l-1}}\;,$$

a pré-imagem de $G = SO(n)$ sob este homomorfismo é o grupo

$$S'\big(O(p) \times \ldots \times O(p)\big) = \begin{cases} S\big(O(p) \times \ldots \times O(p)\big) & \text{se } \; p \text{ impar} \\ O(p) \times \ldots \times O(p) & \text{se } \; p \text{ par} \end{cases}\;.$$

No primeiro caso, este grupo tem 2^{l-1} componentes conexas tais que o núcleo do homomorfismo introduzido acima intersecta cada uma delas em exatamente um elemento, e portanto a restrição do homomorfismo introduzido acima à componente conexa da identidade providencia a inclusão desejada. No segundo caso, o referido grupo tem 2^l componentes conexas, mas o núcleo do homomorfismo introduzido acima é completamente contido na componente conexa da identidade, e portanto precisamos passar aos quocientes por este núcleo para obter a seguinte sequência de inclusões:

$$\big(SO(p) \times \ldots \times SO(p)\big)/\mathbb{Z}_2^{l-1} \subset \big(O(p) \times \ldots \times O(p)\big)/\mathbb{Z}_2^{l-1} \subset SO(n)\,.$$

Note também que o centro $Z(G)$ de G é contido em H_0; logo, $H_i = H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, observamos como antes que para p par, todos os automorfismos do diagrama de Dynkin de $\mathfrak{so}(p) \times \ldots \times \mathfrak{so}(p)$ induzidos por automorfismos dos diagramas de Dynkin dos fatores podem ser estendidos a automorfismos de $\mathfrak{so}(n)$ e que estes sempre serão internos. Além disso, $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ pode conter um grupo S_l como fator adicional, pois existe a possibilidade de permutar os l fatores do produto tensorial. Como $l \geqslant 3$, podemos prosseguir como no caso de $SU(n)$ para implementar qualquer transposição através de uma involução de determinante $+1$. Assim, concluímos que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = S_l$ se p é impar e $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}_2^l : S_l$ (ou $S_l \ltimes \mathbb{Z}_2^l$) se p é par, sendo que neste caso, a estrutura deste grupo como produto semidireto se evidencia se observarmos que S_l age sobre $\mathbb{Z}_2^l$ por permutações dos fatores.

8. Generalizando o procedimento do item 5, definimos a inclusão

$$\big(Sp\,(2p) \times \ldots \times Sp\,(2p)\big)/\mathbb{Z}_2^{l-1} \subset SO(n) \quad (l \text{ par})$$

pelo produto tensorial de l cópias da representação canônicaal de $Sp\,(2p)$, com $n = (2p)^l$, observando que o produto tensorial de l representações pseudo-reais (simpléticas) é real (ortogonal) se l for par. Podemos prosseguir da mesma forma que no item anterior, porém com algumas simplificações: o homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} Sp\,(2p) \times \ldots \times Sp\,(2p) & \longrightarrow & O(n) \\ (A_1, \ldots, A_l) & \longmapsto & A_1 \otimes \ldots \otimes A_l \end{array}$$

sempre tem imagem contida em $G = SO(n)$ e tem o mesmo núcleo que antes:

$$\{\,(\epsilon_1 1_{2p}, \ldots, \epsilon_l 1_{2p}) \mid \epsilon_1, \ldots, \epsilon_l = \pm 1\,,\ \epsilon_1 \ldots \epsilon_l = 1\,\} \cong \mathbb{Z}_2^{l-1}\,.$$

Portanto, ele providencia a inclusão desejada do correspondente grupo quociente. Note também que o centro $Z(G)$ de G é contido em H_0; logo, $H_i = H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, observamos como antes que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ pode, no máximo, ser igual ao grupo simétrico S_l, pois existe a possibilidade de permutar os l fatores do produto tensorial. Como $l \geqslant 3$, podemos, mais uma vez, prosseguir como no caso de $SU(n)$ para implementar qualquer transposição através de uma involução de determinante $+1$. Assim, concluímos que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = S_l$.

2.5.3 Subgrupos maximais de $Sp(n)$

Analisando cada uma das inclusões da Tabela 2.8, distinguimos os seguintes casos.

1. Para definir a inclusão
$$Sp(2p) \times Sp(2q) \subset Sp(n)$$
pela soma direta das representações canônicas de $Sp(2p)$ e $Sp(2q)$, com $n = 2(p+q)$, escrevemos vetores z em $\mathbb{C}^n$ como vetores coluna em bloco $z = \binom{x}{y}$ onde x e y são, respectivamente, vetores coluna em $\mathbb{C}^{2p}$ e em $\mathbb{C}^{2q}$. Então $(A, B) \in Sp(2p) \times Sp(2q)$ age sobre z conforme $(A, B) \cdot z = \binom{Ax}{By}$, e esta ação define um homomorfismo injetor, ou seja, uma inclusão de
$$H_0 = Sp(2p) \times Sp(2q)$$
como subgrupo conexo de $G = Sp(n)$. Note também que o centralizador $Z_G(H_0)$ de H_0 em G é contido em H_0; logo, $H_i = H_0$.

   Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, podemos prosseguir como no caso de $SU(n)$, aplicando o lema 2.3 para concluir que os elementos h de H devem ter a forma
$$h = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$
com $p = q$ no segundo caso. No primeiro caso, segue que $h \in H_0$ e portanto, $H = H_0$. No segundo caso, podemos escrever h como produto de um elemento de H_0 com a matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & 1_{2p} \\ -1_{2p} & 0 \end{pmatrix}$$
que pertence a $Sp(n)$ $(n = 4p)$, pois
$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2p} \\ -1_{2p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Como o quadrado

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_{2p} \\ -1_{2p} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1_{2p} & 0 \\ 0 & -1_{2p} \end{pmatrix}$$

da referida matriz pertence a H_0, concluímos que, neste caso, $H/H_0 = \mathbb{Z}_2$.

2. Este caso, como o anterior, pode ser tratado utilizando os resultados sobre o índice de recobrimento dos espaços simétricos compactos (veja [28], Capítulo 10, Exercício C4, p. 526) para a série $C\,I$, que leva à conclusão de que o normalizador de $\mathfrak{u}(p)$ no grupo $Sp(n)$ $(n = 2p)$ tem duas componentes conexas.

3. Para definir a inclusão

$$\begin{array}{rcll} Sp(2p) \times SO(q) & \subset & Sp(n) & \text{se } q \text{ impar} \\ Sp(2p) \times_{\mathbb{Z}_2} SO(q) & \subset & Sp(n) & \text{se } q \text{ par} \end{array}$$

pelo produto tensorial das representações canônicas de $Sp(2p)$ e $O(q)$, com $n = 2pq$, observando que o produto tensorial de uma representação pseudo-real (simplética) e uma representação real (ortogonal) é pseudo-real (simplética), podemos prosseguir da mesma forma que nos itens 4 e 5 do caso de $SO(n)$: o homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} Sp(2p) \times O(q) & \longrightarrow & Sp(n) \\ (A, B) & \longmapsto & A \otimes B \end{array}$$

sempre tem imagem contida em $G = Sp(n)$ e tem o mesmo núcleo que antes:

$$\{(1_{2p}\,, 1_q), (-1_{2p}\,, -1_q)\} \cong \mathbb{Z}_2 \,.$$

Observe que o grupo $Sp(2p) \times O(q)$ tem duas componentes conexas. Se q é impar, o núcleo do homomorfismo introduzido acima intersecta cada uma delas em exatamente um elemento (pois $(-1_{2p}\,, -1_q)$ pertence à componente conexa que não é a da identidade), e portanto a restrição do homomorfismo introduzido acima à componente conexa da identidade providencia a inclusão desejada. Se q é par, o núcleo do homomorfismo introduzido acima é completamente contido na componente conexa da identidade (pois $(-1_{2p}\,, -1_q)$ pertence à componente conexa da identidade), e portanto precisamos passar aos quocientes por este núcleo para obter a seguinte sequência de inclusões:

$$Sp(2p) \times_{\mathbb{Z}_2} SO(q) \subset Sp(2p) \times_{\mathbb{Z}_2} O(q) \subset Sp(n) \,.$$

Note também que o centro $Z(G)$ de G é contido em H_0 ; logo, $H_i = H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, observamos que podemos prosseguir da mesma forma que nos itens 4 e 5 do caso de $SO(n)$ para concluir que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \{1\}$ se q é impar e $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}_2$ se q é par.

4. Generalizando o procedimento do item 1, definimos a inclusão

$$Sp\,(2p) \times \ldots \times Sp\,(2p) \ \subset \ Sp\,(n)$$

pela soma direta de l cópias da representação canônica de $Sp\,(2p)$, com $n = 2pl$, escrevendo vetores z em $\mathbb{C}^n$ como vetores coluna em bloco compostos de l vetores coluna em $\mathbb{C}^{2p}$. Assim, obtemos

$$H_0 \ = \ Sp\,(2p) \times \ldots \times Sp\,(2p)$$

como subgrupo conexo de $G = Sp\,(n)$. Note também que o centralizador $Z_G(H_0)$ de H_0 em G é contido em H_0; logo, $H_i = H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, podemos prosseguir como no caso de $SU(n)$, para concluir que os elementos de H devem ter a forma

$$h_\sigma \ = \ \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1} & \ldots & A_{ll} \end{pmatrix}$$

onde $\sigma \in S_l$ e

$$A_{ik} \ = \ 0 \quad \text{se} \ i \neq \sigma(k) \ ,$$

enquanto que

$$\det\big(A_{\sigma(k)\,k}\big) \ \neq \ 0 \ .$$

Quando, por exemplo, σ é a transposição simples τ_1 ($\tau_1(1) = 2$, $\tau_1(2) = 1$, $\tau_1(i) = i$ para $i \geqslant 3$), podemos escrever h_σ como produto de um elemento de H_0 com a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_p & 0 & \ldots & 0 \\ -1_p & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1_p & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1_p \end{pmatrix}$$

que pertence a $Sp\,(n)$ e cujo quadrado pertence a H_0. Logo, segue que, neste caso, $H/H_0 = S_l$.

5. Generalizando procedimentos de itens anteriores, definimos a inclusão

$$\big(Sp\,(2p) \times \ldots \times Sp\,(2p)\big)/\mathbb{Z}_2^{l-1} \ \subset \ Sp\,(n) \quad (l \text{ impar})$$

pelo produto tensorial de l cópias da representação canônica de $Sp\,(2p)$, com $n = (2p)^l$, observando que o produto tensorial de l representações pseudo-reais (simpléticas) é pseudo-real (simplética) se l for impar. Podemos prosseguir da mesma forma que no item 8 do caso de $SO(n)$: o homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} Sp(2p) \times \ldots \times Sp(2p) & \longrightarrow & Sp(n) \\ (A_1, \ldots, A_l) & \longmapsto & A_1 \otimes \ldots \otimes A_l \end{array}$$

sempre tem imagem contida em $G = Sp(n)$ e tem o mesmo núcleo que antes:

$$\{ (\epsilon_1 1_{2p}, \ldots, \epsilon_l 1_{2p}) \mid \epsilon_1, \ldots, \epsilon_l = \pm 1, \, \epsilon_1 \ldots \epsilon_l = 1 \} \, \cong \, \mathbb{Z}_2^{l-1} \, .$$

Portanto, ele providencia a inclusão desejada do correspondente grupo quociente. Note também que o centro $Z(G)$ de G é contido em H_0 ; logo, $H_i = H_0$.

Para calcular o normalizador H do subgrupo conexo H_0 assim definido, observamos como antes que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ pode, no máximo, ser igual ao grupo simétrico S_l, pois existe a possibilidade de permutar os l fatores do produto tensorial. Como $l \geqslant 3$, podemos, mais uma vez, prosseguir como no caso de $SU(n)$ para implementar qualquer transposição através de uma involução de determinante $+1$. Assim, concluímos que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cap \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = S_l$.

subálgebra	peso máximo Λ	$n = \dim V_\Lambda$	tipo	primitiva
$\mathfrak{su}(r+1) \quad (r \geqslant 3)$	$\lambda_1 + \lambda_3$	$3\binom{r+2}{4}$	0	não
$\mathfrak{su}(r+1) \quad (r \geqslant 2)$	$2\lambda_1 + \lambda_2$	$3\binom{r+3}{4}$	0	não
$\mathfrak{su}(2)$	$6\lambda_1$	7	+1	não
$\mathfrak{su}(6)$	$\lambda_2 + \lambda_4$	189	+1	não
$\mathfrak{so}(4l+3) \quad (l \geqslant 1)$	$k\lambda_{2l+1} \quad (k \geqslant 2)$	$\prod_{i=1}^{2l+1} \frac{\binom{k+2i-1}{k}}{\binom{k+i-1}{k}}$	$(-1)^{(l+1)k}$	não
$\mathfrak{so}(9)$	$\lambda_1 + \lambda_4$	128	+1	não
$\mathfrak{sp}(6)$	$2\lambda_2$ $2\lambda_2 + \lambda_3$	90 350	+1 −1	não não
$\mathfrak{so}(10)$	$\lambda_2 + \lambda_4$	560	0	não
$\mathfrak{so}(12)$	λ_4 $\lambda_3 + \lambda_5$	495 4928	+1 −1	**sim** não
$\mathfrak{e}_6$	λ_2 $\lambda_4 + \lambda_6$	351 17550	0 0	não não
$\mathfrak{e}_7$	λ_2 λ_3 λ_4 $\lambda_5 + \lambda_7$	1539 27664 365750 3792096	+1 −1 +1 −1	não não não não
$\mathfrak{g}_2$	$k\lambda_1 \quad (k \geqslant 2)$	$\frac{2k+5}{5}\binom{k+4}{4}$	+1	não

Tabela 2.1: Subálgebras simples não-maximais de $\mathfrak{su}(n)$ (tipo 0), $\mathfrak{so}(n)$ (tipo +1) e $\mathfrak{sp}(n)$ com n par (tipo −1)

subálgebra	condições	classe	irredutível	maximal
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q)$	$n = p + q\,,\, p \geqslant q \geqslant 1\,,\, p \geqslant 2$	r	não	sim
$\mathbb{R}$	$n = 2$	a	não	sim
$\mathfrak{su}(p) \times \mathfrak{su}(q)$	$n = pq\,,\, p \geqslant q \geqslant 2$	s	sim	sim
$\mathbb{R}^{l-1} \oplus \bigoplus_{k=1}^{l} \mathfrak{su}(p)$	$n = pl\,,\, l \geqslant 3\,,\, p \geqslant 2$	r	não	não
$\mathbb{R}^{n-1}$	$n \geqslant 3$	a	não	não
$\prod_{k=1}^{l} \mathfrak{su}(p)$	$n = p^l\,,\, l \geqslant 3\,,\, p \geqslant 2$	s	sim	não

Tabela 2.2: Subálgebras primitivas não-simples de $\mathfrak{su}(n)$ $(n \geqslant 2)$

componente conexa H_0	grupo de componentes H/H_0		
$S\big(U(p)\times U(q)\big)$ (redutível) (soma direta)	$\{1\}$	para	$n=p+q\,,\, p>q\geqslant 1$
	$\mathbb{Z}_2$	para	$n=p+q\,,\, p=q\geqslant 1$
$SU(p)\times_{\mathbb{Z}_d} SU(q)$ (irredutível) (produto tensorial) ($d=\mathrm{mdc}(p,q)$)	$\mathbb{Z}_d$	para	$n=pq\,,\, p>q\geqslant 2$
$SU(p)\times_{\mathbb{Z}_p} SU(p)$ (irredutível) (produto tensorial)	$\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_2$	para	$n=p^2\,,\, p\geqslant 2\,,\, p\neq 2 \mod 4$
	$\mathbb{Z}_p\times_{\mathbb{Z}_2}\mathbb{Z}_4$	para	$n=p^2\,,\, p\geqslant 2\,,\, p=2 \mod 4$
$S\left(\prod_{k=1}^{l} U(p)\right)$ (redutível) (soma direta)	S_l	para	$n=pl\,,\, l\geqslant 3\,,\, p\geqslant 1$
$\prod_{k=1}^{l} SU(p)\,/\,\mathbb{Z}_p^{l-1}$ (irredutível) (produto tensorial)	$\mathbb{Z}_{p^{l-1}}\times S_l$	para	$n=p^l\,,\, l\geqslant 3\,,\, p\geqslant 2$

Tabela 2.3: Subgrupos maximais não-simples H de $SU(n)$ $(n\geqslant 2)$

subálgebra	condições	classe	irredutível	maximal
$\mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q)$	$n = p + q\,,\ p \geqslant q \geqslant 3$	s	não	sim
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(p)$	$n = p + 2\,,\ p \geqslant 3$	r	não	sim
$\mathfrak{so}(4)$	$n = 5$	s	não	sim
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(p) = \mathfrak{u}(p)$	$n = 2p\,,\ p \geqslant 3\,,\ p \neq 4$	r	não	sim
$\mathfrak{so}(p) \times \mathfrak{so}(q)$	$n = pq\,,\ p \geqslant q \geqslant 3\,,\ p\,,q \neq 4$	s	sim	sim
$\mathfrak{sp}(2p) \times \mathfrak{sp}(2q)$	$n = 4pq\,,\ p \geqslant q \geqslant 1$	s	sim	sim
$\bigoplus_{k=1}^{l} \mathfrak{so}(p)$	$n = pl\,,\ l \geqslant 3\,,\ p \geqslant 3$	s	não	não
$\mathbb{R}^l$	$n = 2l\,,\ l \geqslant 3$	a	não	não
$\prod_{k=1}^{l} \mathfrak{so}(p)$	$n = p^l\,,\ l \geqslant 3\,,\ p \geqslant 3\,,\ p \neq 4$	s	sim	não
$\prod_{k=1}^{l} \mathfrak{sp}(2p)$	$n = (2p)^l\,,\ l \geqslant 4\,,\ l$ par, $p \geqslant 1$	s	sim	não
$\mathfrak{so}(p) \times \mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(2)$	$n = 4p\,,\ p \geqslant 3\,,\ p \neq 4$	s	sim	não

Tabela 2.4: Subálgebras primitivas não-simples de $\mathfrak{so}(n)$ $(n \geqslant 5)$

componente conexa H_0	grupo de componentes H/H_0		
$SO(p) \times SO(q)$ (redutível) (soma direta)	$\mathbb{Z}_2$	para	$n = p + q$, $p > q \geqslant 2$
	$\mathbb{Z}_4$	para	$n = p + q$, $p = q \geqslant 3$ impar
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	para	$n = p + q$, $p = q \geqslant 3$ par
$SO(4)$	$\mathbb{Z}_2$	para	$n = 5$
$U(p)$	$\{1\}$	para	$n = 2p$, $p \geqslant 3$, p impar
	$\mathbb{Z}_2$	para	$n = 2p$, $p \geqslant 6$, p par
$SO(p) \times SO(q)$ (irredutível) (produto tensorial)	$\{1\}$	para	$n = pq$, $p > q \geqslant 3$, $p, q \neq 4$ p ou q impar
	$\mathbb{Z}_2$	para	$n = pq$, $p = q \geqslant 3$ $p = q$ impar
$SO(p) \times_{\mathbb{Z}_2} SO(q)$ (irredutível) (produto tensorial)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	para	$n = pq$, $p > q \geqslant 6$ p e q par
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	para	$n = pq$, $p = q \geqslant 6$ $p = q = 2 \mod 4$
	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) : \mathbb{Z}_2$	para	$n = pq$, $p = q \geqslant 8$ $p = q = 0 \mod 4$
$Sp(2p) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(2q)$ (irredutível) (produto tensorial)	$\{1\}$	para	$n = 4pq$, $p > q \geqslant 1$
	$\{1\}$	para	$n = 4pq$, $p = q$ impar
	$\mathbb{Z}_2$	para	$n = 4pq$, $p = q$ par

Tabela 2.5: Subgrupos maximais não-simples H de $SO(n)$ $(n \geqslant 5)$, Parte 1

componente conexa H_0	grupo de componentes H/H_0		
$\prod_{k=1}^{l} SO(p)$ (redutível) (soma direta)	$\mathbb{Z}_2^{l-1} \cdot S_l$ $\mathbb{Z}_2^{l-1} : S_l$	para para	$n = pl\,,\ l \geqslant 3\,,\ p \geqslant 3\,,\ p$ impar $n = pl\,,\ l \geqslant 3\,,\ p \geqslant 2\,,\ p$ par
$\prod_{k=1}^{l} SO(p)$ (irredutível) (produto tensorial)	S_l	para	$n = p^l\,,\ l \geqslant 3\,,\ p \geqslant 3\,,\ p$ impar
$\prod_{k=1}^{l} SO(p) \,/\, \mathbb{Z}_2^{l-1}$ (irredutível) (produto tensorial)	$\mathbb{Z}_2^l : S_l$	para	$n = p^l\,,\ l \geqslant 3\,,\ p \geqslant 6\,,\ p$ par
$\prod_{k=1}^{l} Sp(2p) \,/\, \mathbb{Z}_2^{l-1}$ (irredutível) (produto tensorial)	S_l	para	$n = (2p)^l\,,\ l \geqslant 4\,,\ l$ par, $p \geqslant 1$
$SO(p) \times \big(Sp(2) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(2)\big)$ (irredutível) (produto tensorial)	$\{1\}$	para	$n = 4p\,,\ p \geqslant 3\,,\ p$ impar
$SO(p) \times_{\mathbb{Z}_2} \big(Sp(2) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(2)\big)$ (irredutível) (produto tensorial)	$Z_2 \times \mathbb{Z}_2$	para	$n = 4p\,,\ p \geqslant 6\,,\ p$ par

Tabela 2.6: Subgrupos maximais não-simples H de $SO(n)$ $(n \geqslant 5)$, Parte 2

subálgebra	condições	classe	irredutível	maximal
$\mathfrak{sp}(2p) \oplus \mathfrak{sp}(2q)$	$n = 2(p+q)\,,\ p \geqslant q \geqslant 1$	s	não	sim
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(p) = \mathfrak{u}(p)$	$n = 2p\,,\ p \geqslant 2$	r	não	sim
$\mathfrak{sp}(2p) \times \mathfrak{so}(q)$	$n = 2pq\,,\ p \geqslant 1\,,\ q \geqslant 3\,,\ q \neq 4$	s	sim	sim
$\bigoplus_{k=1}^{l} \mathfrak{sp}(2p)$	$n = 2pl\,,\ l \geqslant 3\,,\ p \geqslant 1$	s	não	não
$\prod_{k=1}^{l} \mathfrak{sp}(2p)$	$n = (2p)^l\,,\ l \geqslant 3\,,\ l$ impar, $p \geqslant 1$	s	sim	não
$\mathfrak{sp}(2p) \times \mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{sp}(2)$	$n = 8p\,,\ p \geqslant 2$	s	sim	não

Tabela 2.7: Subálgebras primitivas não-simples de $\mathfrak{sp}(n)$ (n par, $n \geqslant 4$)

componente conexa H_0	grupo de componentes H/H_0
$Sp(2p) \times Sp(2q)$ (redutível) (soma direta)	$\{1\}$ para $n = 2(p+q)\,,\ p > q \geqslant 1$ $\mathbb{Z}_2$ para $n = 2(p+q)\,,\ p = q \geqslant 1$
$U(p)$	$\mathbb{Z}_2$ para $n = 2p\,,\ p \geqslant 2$
$Sp(2p) \times SO(q)$ (irredutível) (produto tensorial)	$\{1\}$ para $n = 2pq\,,\ p \geqslant 1\,,\ q \geqslant 3\,,\ q$ impar
$Sp(2p) \times_{\mathbb{Z}_2} SO(q)$ (irredutível) (produto tensorial)	$\mathbb{Z}_2$ para $n = 2pq\,,\ p \geqslant 1\,,\ q \geqslant 6\,,\ q$ par
$\prod_{k=1}^{l} Sp(2p)$ (redutível) (soma direta)	S_l para $n = 2pl\,,\ l \geqslant 3\,,\ p \geqslant 1$
$\prod_{k=1}^{l} Sp(2p) \,/\, \mathbb{Z}_2^{l-1}$ (irredutível) (produto tensorial)	S_l para $n = (2p)^l\,,\ l \geqslant 3\,,\ l$ impar, $p \geqslant 1$
$Sp(2p) \times_{\mathbb{Z}_2} \big(Sp(2) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(2)\big)$ (irredutível) (produto tensorial)	$\mathbb{Z}_2$ para $n = 8p\,,\ p \geqslant 2$

Tabela 2.8: Subgrupos maximais não-simples H de $Sp(n)$ (n par, $n \geqslant 4$)

subálgebra	maximal
$\mathfrak{sp}(8)$	sim
$\mathfrak{f}_4$	sim
$\mathfrak{su}(3)$	sim
$\mathfrak{g}_2$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(6)$	sim
$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{g}_2$	sim
$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3)$	sim
$\mathbb{R}^6$	não
$\mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{so}(8)$	não

Tabela 2.9: Subálgebras primitivas da álgebra excepcional $\mathfrak{e}_6$

subálgebra	maximal
$\mathfrak{su}(8)$	sim
$\mathfrak{su}(2)^{21}$	sim
$\mathfrak{su}(2)^{231}$	sim
$\mathfrak{su}(2)^{399}$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(12)$	sim
$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(6)$	sim
$\mathfrak{sp}(6) \oplus \mathfrak{g}_2$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{f}_4$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{g}_2$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	sim
$\mathfrak{so}(8)$	não
$\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	não
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	não
$\mathbb{R}^7$	não
$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{e}_6$	não

Tabela 2.10: Subálgebras primitivas da álgebra excepcional $\mathfrak{e}_7$

subálgebra	maximal
$\mathfrak{su}(9)$	sim
$\mathfrak{so}(16)$	sim
$\mathfrak{so}(5)$	sim
$\mathfrak{su}(2)^{520}$	sim
$\mathfrak{su}(2)^{760}$	sim
$\mathfrak{su}(2)^{1240}$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{e}_7$	sim
$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{e}_6$	sim
$\mathfrak{su}(5) \oplus \mathfrak{su}(5)$	sim
$\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{f}_4$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(3)$	sim
$\mathfrak{su}(2)$	sim
$\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$	não
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_2$	não
$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3)$	não
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	não
$\mathbb{R}^8$	não

Tabela 2.11: Subálgebras primitivas da álgebra excepcional $\mathfrak{e}_8$

subálgebra	maximal
$\mathfrak{so}(9)$	sim
$\mathfrak{su}(2)$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(6)$	sim
$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3)$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{g}_2$	sim
$\mathfrak{so}(8)$	não

Tabela 2.12: Subálgebras primitivas da álgebra excepcional $\mathfrak{f}_4$

subálgebra	maximal
$\mathfrak{su}(3)$	sim
$\mathfrak{su}(2)$	sim
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	sim

Tabela 2.13: Subálgebras primitivas da álgebra excepcional $\mathfrak{g}_2$

Bibliografia

[1] F. Antoneli, *Subálgebras Maximais das Álgebras de Lie Semisimples, Quebra de Simetria e o Código Genético*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, São Paulo 1998.

[2] F. Antoneli, L. Braggion, M. Forger & J.E.M. Hornos, *Extending the Search for Symmetries in the Genetic Code*, Int. J. Mod. Phys. B **17** (2003) 3135-3204.

[3] F. Antoneli, *Grupos Finitos e Quebra de Simetria no Código Genético*, Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo 2003.

[4] F. Antoneli, M. Forger & J.E.M. Hornos, *The Search for Symmetries in the Genetic Code: Finite Groups*, Mod. Phys. Lett. B **18** (2004) 971-978.

[5] F. Antoneli, M. Forger, P.A. Gaviria & J.E.M. Hornos, *On Amino Acid and Codon Assignment in Algebraic Models for the Genetic Code*, em preparação.

[6] M. Aschbacher & L. Scott: *Maximal Subgroups of Finite Groups*, J. Algebra **92** (1985) 44-80.

[7] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Chapters 1-8, Hermann, Paris 1975.

[8] H.W. Braden, *Integral Pairings and Dynkin Indices*, J. Lond. Math. Soc. **43** (1991) 313-323.

[9] L. Braggion, *Procura por Simetrias de Lie na Evolução do Código Genético*, Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, São Carlos 1998.

[10] T. Bröcker & T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, 2nd printing, Springer-Verlag, New York 1995.

[11] I.V. Chekalov, *Primitive Subalgebrs of Complex Lie Algebras I: Primitive Subalgebras of the Classical Complex Lie Algebras*, Pacific J. Math. **158** (1993) 273-292.

[12] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*. Princeton University Press, Princeton 1946.

[13] E.B. Dynkin, *Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras*, Mat. Sb. **30** (1952) 349-462; english transl.: AMS Translations (2) **6** (1957) 111-244.

[14] E.B. Dynkin, *Maximal Subgroups of Classical Groups*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **1** (1952) 39-166; english transl.: AMS Translations (2) **6** (1957) 245-378.

[15] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko & S.P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications. Part 1: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups and Fields*, Springer-Verlag, New York 1986.

[16] M. Forger, *Symmetry Breaking in the Genetic Code*, 41º Seminário Brasileiro de Análise, Campinas 1995.

[17] M. Forger, J.E.M. Hornos & Y.M.M. Hornos, *Global Aspects in the Algebraic Approach to the Genetic Code*, Phys. Rev. E **56** (1997) 7078-7082.

[18] W. Fulton & J. Harris. *Representation Theory: A First Course*, Springer-Verlag, New York 1991.

[19] M. Golubitsky, D. Schaffer & I. Stewart, *Groups and Singularities in Bifurcation Theory II*, Applied Mathematical Sciences **69**, Springer-Verlag, New York 1988.

[20] M. Golubitsky, *Primitive Actions and Maximal Subgroups of Lie Groups*, J. Differential Geom. **7** (1972) 175-191.

[21] M. Golubitsky & B. Rothschild, *Primitive Subalgebras of Exceptional Lie Algebras*, Pacific J. Math. **39** (1971) 371-393.

[22] R. Goodman & N.R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge University Press, London 1998.

[23] M. Goto & F.D. Grosshans, *Semisimple Lie Algebras*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Volume 38, Marcel Dekker, New York 1978.

[24] R.L. Griess Jr., *Basic Conjugacy Theorems for G_2*, Invent. Math. **121** (1995) 257-277.

[25] R.L. Griess Jr. & A.J. Ryba, *Finite Simple Groups Which Projectively Embed in an Exceptional Lie Group are Classified!*, Bull. AMS **36** (1999) nº 1, 75-93.

[26] R.L. Griess Jr. & A.J. Ryba, *Classification of Finite Quasisimple Groups Which Embed in Exceptional Algebraic Groups*, Journal of Group Theory **5** (2002) 1-39.

[27] J.-F. Hämmerli: *Some Remarks on Nonconnected Compact Lie Groups*, L. Ens. Math. **49** (2003) 67-84.

[28] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York 1978.

[29] J.E.M. Hornos & Y.M.M. Hornos, *Algebraic Model for the Evolution of the Genetic Code*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 4401-4404.

[30] J.E.M. Hornos, Y.M.M. Hornos & M. Forger, *Symmetry and Symmetry Breaking: An Algebraic Approach to the Genetic Code*, Int. J. Mod. Phys. B **13** (1999) 2795-2885.

[31] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, 3rd printing, Springer-Verlag, New York 1994.

[32] P.B. Kleidman & M.W. Liebeck: *The Subgroup Structure of Finite Classical Groups*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **129**, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[33] A.K. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser, Boston 1996.

[34] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Interscience, New York 1963.

[35] B. Komrakov, *Primitive Actions and the Sophus Lie Problem*, 187-269.

[36] M.W. Liebeck, C.E. Praeger & J. Saxl: *A Classification of the Maximal Subgroups of the Finite Alternating and Symmetric Groups*, J. Algebra **111** (1987) 365-383.

[37] M.W. Liebeck & G.M. Seitz: *Maximal Subgroups of Exceptional Groups of Lie Type, Finite and Algebraic*, Geom. Dedicata **36** (1990) 353-387.

[38] W.G. McKay & J. Patera, *Tables of Dimensions, Indices and Branching Rules of Simple Lie Algebras*, Lecture Notes in Pure and Applaied Mathematics, Volume 69, Marcel Dekker, New York 1981.

[39] S.P. Norton: *Anatomy of the Monster I, The Atlas of Finite Groups, Ten Years On*, pp. 198–214, eds.: R.T. Curtis and R.A. Wilson, Cambridge University Press, Cambridge 1998.

[40] S.P. Norton & R.A. Wilson: *Anatomy of the Monster II*, Proc. London Math. Soc. **84** (2002) 581-598.

[41] L.A.B. San Martin, *Álgebras de Lie*, Editora da UNICAMP, Campinas 1999.

[42] H. Samelson, *Notes on Lie Algebras*, Springer-Verlag, New York 1990.

[43] J.-P. Serre, *Complex Semisimple Lie Algebras*, Springer-Verlag, New York 1987.

[44] J.-P. Serre, *Lie Algebra and Lie Groups*, 2nd edition, Lecture Notes in Mathematics 1500, Springer-Verlag, New York 1992.

[45] V.S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*, Springer-Verlag, New York 1984.

[46] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I & II*, Springer-Verlag, New York 1972.

[47] D.P. Želobenko, *Compact Lie Groups and Their Representations*, Translations of Mathematical Monographs, Volume 40, American Mathematical Society, Providence 1973.