UM TEOREMA MINI-MAX PARA CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS FINITOS

MARIA ANGELA MELO DE CAMPOS GURGEL

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR: *Prof. Dr. IMRE SIMON*

- SÃO PAULO, MARÇO DE 1978 -

a meus pais,

ã fernanda, henrique

e antonio luiz

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Imre Simon, pelo estímulo que possibilitou a conclusão deste trabalho. Agradeço à sua orientação segura e objetiva, suas críticas e sugestões.

Ao Prof. Valdemar Waingort Setzer, pelo apoio durante meus primeiros passos dentro do Instituto de Matemática e Estatística.

Aos companheiros de departamento pelos "palpites" oportunos; aos funcionários, pela dedicação e amizade.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo suporte financeiro concedido durante grande parte do meu programa.

Ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira, pela ótima datilografia e ao Sr. Armando Garcia Segura, pela excelente qualidade da impressão.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar um teorema mini-max demonstrado recentemente por Greene e Kleitman.

Com a finalidade de enunciar este resultado, seja P um conjunto finito parcialmente ordenado e k um inteiro não negativo. Vamos considerar subconjuntos de P que não contêm cadeias de comprimento k+1, chamados k-famílias em P. O teorema mini-max afirma que:

> Dados P e k, existe uma k-família X em P e uma partição τ de P em cadeias, tal que
>
> $$|X| = \sum_{C_i \in \tau} \min\{|C_i|, k\}.$$

O enunciado não apresenta uma igualdade mini-max. Entretanto, é fácil verificar que se Y é uma k-família em P e δ é uma partição de P em cadeias, então

$$|Y| \leq \sum_{D_i \in \delta} \min\{|D_i|, k\}.$$

Portanto, se a igualdade contida no enunciado do teorema se verifica, concluímos que X é uma k-família em P de cardinalidade máxima (denominada Sperner k-família em P) e τ é uma partição de P em cadeias que minimiza a somatória à direita da igualdade.

Neste trabalho, encontra-se uma demonstração de uma generalização deste teorema, provada inicialmente por Greene e Kleitman [GK]. Outras provas deste resultado foram obtidas por Cláudio Lucchesi e por Hoffman e Schwartz [HS].

Teoremas demonstrados anteriormente inspiraram a definição de Sperner k-família em P. Apresentamos abaixo uma visão histórica destes resultados.

Em 1928, Sperner [S2] determina a cardinalidade máxima de uma anticadeia do conjunto P(X) dos subconjuntos de um conjunto finito X, parcialmente ordenado por inclusão. Várias demonstrações deste resultado surgiram posteriormente, destacando-se entre elas a elegante prova de Lubell [L].

Em 1945, Erdös [E] determina a cardinalidade de uma Sperner k-família em P(X), estendendo o teorema combinatório acima.

Generalizações destes resultados foram conjecturadas quando P(X) é substituido pelo conjunto P(N) dos divisores de um número natural N, parcialmente ordenado por divisibilidade. A extensão do teorema de Sperner nestes termos foi proposta como um problema prêmio em 1949(*).

Paralelamente à estes resultados, surgiu em 1950 um teorema mini-max que se tornou célebre. Este resultado está enunciado abaixo e foi demonstrado inicialmente por Dilworth [D1].

> A cardinalidade máxima de uma anticadeia de um conjunto finito parcialmente ordenado P é igual ao número mínimo de blocos numa partição de P em cadeias.

Após o aparecimento deste teorema, surgiram novas demonstrações do teorema de Erdös e as conjecturas referidas foram provadas. Estas provas envolvem partições de P(X) ou P(N) em cadeias que possuem determinadas propriedades.

O teorema de Dilworth é um corolário do teorema mini-max de Greene e Kleitman, pois se $k = 1$, estes resultados se coincidem.

Analisando os conceitos utilizados na demonstração que apresentamos do teorema central, conseguimos unificar os resultados dos capítulos III e IV e apresentamos no capítulo IV uma demonstração mais simples de uma generalização do teorema de Erdös, demonstrada por Schönheim [S1]. Esta foi uma das razões que nos levou a dispor o trabalho da seguin-

(*) - Proposto como um problema prêmio no Wiskundig Genootschap em 1949.

te forma:

No capítulo I são introduzidas definições e conceitos básicos.

O capítulo II contém uma demonstração do teorema mini-max de Greene e Kleitman e o enunciado do dual deste. Inicialmente, definimos uma relação de ordem no conjunto das k-famílias em P e mostramos que o conjunto das Sperner k-famílias em P, parcialmente ordenado por esta ordem, é um reticulado. Para atingirmos este resultado, que será fundamental na demonstração apresentada do teorema mini-max, tomamos contacto com propriedades estruturais das k-famílias em P.

No capítulo III, encontram-se demonstrações construtivas dos teoremas de Sperner e de Erdös.

O capítulo IV contém provas de generalizações dos resultados do capítulo III, quando P(X) é substituido por P(N).

Finalmente, apresentamos a bibliografia contendo as referências diretamente ligadas aos resultados apresentados ou referidos.

Os capítulos serão denotados por algarismos romanos. As seções de cada capítulo serão numeradas seqüencialmente. Também os teoremas, os lemas, etc. serão numerados seqüencialmente dentro de cada capítulo. Para referências, o teorema 3 do capítulo II será referido pelo número 3 dentro do mesmo capítulo e por 3.II em outros capítulos.

O símbolo ◆ será usado no final das demonstrações e a expressão "sse" será utilizada como abreviatura de "se e somente se".

- ¤ -

CAPÍTULO I

DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS

1 - PARTIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO

Uma coleção $X_1, X_2, \ldots, X_k$ de subconjuntos de um conjunto X é uma *decomposição* de X sse $X_i \cap X_j = \emptyset$ $(1 \leq i < j \leq k)$ e $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$. Cada X_i $(1 \leq i \leq k)$ é denominado *bloco* da decomposição.

Uma *partição* de um conjunto não vazio X é uma *decomposição* de X que não possui blocos vazios.

2 - CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Diz-se que uma relação θ sobre um conjunto X é uma relação de ordem sse as seguintes condições estão verificadas, para quaisquer x, y e $z \in X$:

a) $x \theta x$ (propriedade reflexiva)

b) se $x \theta y$ e $y \theta x$, então $x = y$ (propriedade anti-simétrica)

c) se $x \theta y$ e $y \theta z$, então $x \theta z$ (propriedade transitiva)

Um *conjunto parcialmente ordenado* é um conjunto não vazio P munido de uma relação de ordem, que denotaremos freqüentemente por "$\leq$".

No decorrer do nosso trabalho, um conjunto parcialmente ordenado será denotado por um par ordenado $(P,\leq)$, ou simplesmente por P, quando não houver ambigüidade.

Se x e $y \in P$, $x \leq y$ e $x \neq y$, escrevemos $x < y$.

Prosseguimos definindo alguns conceitos usuais da teoria dos conjuntos parcialmente ordenados. Com esta finalidade, seja P um conjunto parcialmente ordenado, X um subconjunto de P e x e y elementos quaisquer de P.

Os elementos x e y são *comparáveis* sse $x \leq y$ ou $y \leq x$. Em caso contrário, x e y são *incomparáveis* ou *independentes* e escrevemos $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$.

Diz-se que x *cobre* y sse $x > y$ e não existe $z \in P$ tal que $x > z > y$.

X é uma *anticadeia* de P sse os elementos de X são dois a dois incomparáveis. X é uma *cadeia* de P sse os elementos de X são dois a dois comparáveis. O *comprimento* da cadeia X é igual à $|X|$ e denotaremos uma cadeia de comprimento $\underline{n}$ por uma seqüência $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ tal que $x_i < x_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

X é um *ideal inferior em* P sse para todo $x \in X$, se $y < x$, então $y \in X$. A intersecção de todos os ideais inferiores em P que contém X é o *ideal inferior em* P *gerado por* X e será denotado por X_*. Dualmente define-se um *ideal superior em* P e o ideal superior em P gerado por X, denotado por X^*.

Seja $X \neq \emptyset$ e $x \in X$. x é um elemento *maximal* de X sse não existe $z \in X$ tal que $z > x$. x é um *limite superior* de X sse $x \geq z$ para todo $z \in X$. x é o *menor limite superior* de X sse x é um limite superior de X e se y é um limite superior de X, então $y \geq x$. O menor limite superior de X será denotado por *l.u.b de* X ou *sup* X. Dualmente define-se um elemento *minimal* de X, um *limite inferior* de X e o *maior limite inferior de* X, que será denotado por *g.l.b de* X ou *inf* X.

Em seguida definimos isomorfismo e produto direto de dois conjuntos parcialmente ordenados, $(P,\leq)$ e $(Q,\leq)$.

Um *isomorfismo* de P em Q é uma função bijetora $\psi: P \longrightarrow Q$ tal que $x \leq y$ sse $\psi(x) \leq \psi(y)$. P e Q são *isomorfos* sse existe um isomorfismo entre eles.

Produto Direto de P e Q é o conjunto dos pares ordenados $(x,z) \in P \times Q$, parcialmente ordenado pela relação de ordem:

$$(x_1,z_1) \leq (x_2,z_2) \text{ sse } x_1 \leq x_2 \text{ em P e } z_1 \leq z_2 \text{ em Q.}$$

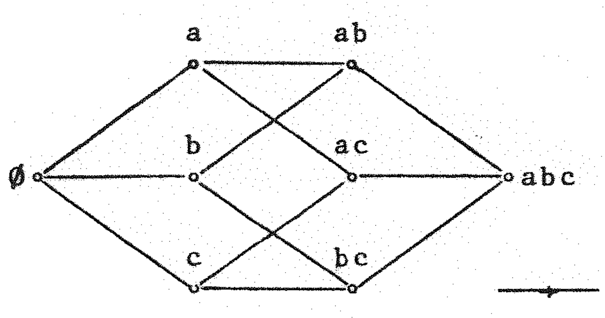
Facilmente podemos definir produto direto de um número fini to de conjuntos parcialmente ordenados, generalizando a definição acima.

Descrevemos abaixo uma representação gráfica de um conjunto parcialmente ordenado.

Se P é um conjunto parcialmente ordenado finito, P possui uma representação gráfica, chamada *diagrama de Hasse*. Neste diagrama, elementos distintos de P são representados por pontos distintos e existe um segmento orientado de x para y sse y cobre x em P.

Na maioria de exemplos que apresentamos nesta dissertação, a figura representa o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado em questão e indicamos com uma seta a direção dos segmentos.

EXEMPLO - Seja P(S) o conjunto dos subconjuntos do conjunto finito S = {a,b,c}. P(S) com a relação de inclusão é um conjunto parcialmente ordenado. Mostramos abaixo o diagrama de Hasse de P(S) e ilustramos alguns conceitos definidos.



Observe que:

ab *cobre* a em P(S).

c e abc são *comparáveis* em P(S).

<$\emptyset$,c,bc> é uma *cadeia* de P(S) de *comprimento* 3.

{ab,ac,bc} é uma *anticadeia* de P(S).

abc é *l.u.b* de P(S).

$\emptyset$ é *g.l.b.* de P(S).

Se X = {b,c}, então X^* = {b,c,ab,ac,bc,abc}.

Se X = {c,b,ab,ac,bc}, então ab,ac e bc são elementos *maximais* de X.

3 - RETICULADOS

Vamos definir reticulados considerando ainda P um conjunto parcialmente ordenado qualquer.

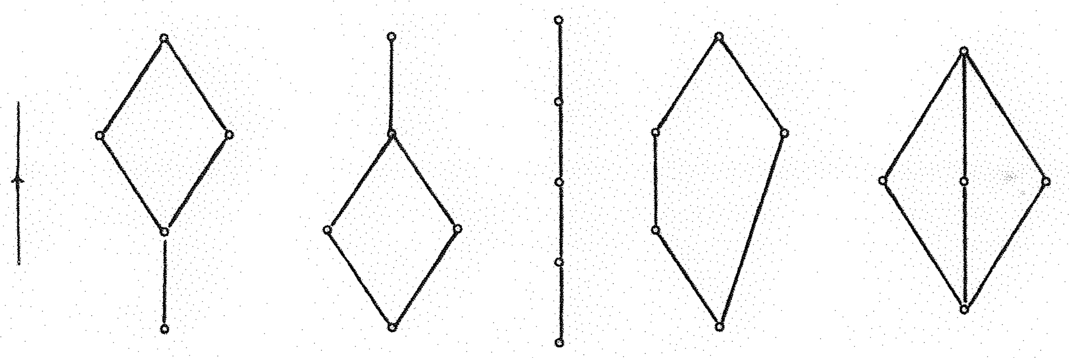
P é um *reticulado* sse existe *sup*{x,y} e *inf*{x,y}, para quaisquer x e y $\in$ P. Denotaremos freqüentemente sup{x,y} e inf{x,y} por $x \vee y$ e $x \wedge y$, respectivamente.

Q é um *subreticulado* do reticulado P sse $Q \subseteq P$ e se x e y são elementos de Q, então sup{x,y} em P e inf{x,y} em P são elementos de Q.

Um *isomorfismo* de um reticulado P em um reticulado Q é uma função bijetora ψ: P $\longrightarrow$ Q tal que:

$$\psi(x \vee y) = \psi(x) \vee \psi(y) \text{ e } \psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge \psi(y).$$

Como exemplo de reticulados, mostramos abaixo os diagramas de Hasse de todos os reticulados que consistem de cinco elementos, a menos de isomorfismo.



Enunciamos abaixo duas proposições bem conhecidas, cujas demonstrações podem ser encontradas em textos da teoria de reticulados.

PROPOSIÇÃO 1 - Seja P um conjunto finito parcialmente ordenado e x e y dois elementos quaisquer de P. P é um reticulado sse P possui um único elemento minimal e existe l.u.b de $\{x,y\}$.

PROPOSIÇÃO 2 - Se P e Q são reticulados, o produto direto de P e Q é um reticulado e se (x_1,z_1) e $(x_2,z_2) \in P \times Q$, então:

$$(x_1,z_1) \vee (x_2,z_2) = (x_1 \vee x_2, z_1 \vee z_2)$$

e

$$(x_1,z_1) \wedge (x_2,z_2) = (x_1 \wedge x_2, z_1 \wedge z_2).$$

Os objetos usuais em Matemática serão usados no decorrer deste trabalho e denotaremos por:

$|X|$, a cardinalidade do conjunto X.

X-Y, a diferença entre dois conjuntos X e Y.

$\lfloor x \rfloor$, o maior inteiro menor ou igual ao número x.

$\binom{n}{k}$, combinação de n elementos k a k.

Se X é um subconjunto de Y, usaremos a notação $X \subseteq Y$. A negação de $X \subseteq Y$ será denotada por $X \not\subseteq Y$.

- ¤ -

CAPÍTULO II

SPERNER k-FAMÍLIAS E PARTIÇÕES k-SATURADAS

Neste capítulo apresentamos o resultado central deste trabalho. Vamos considerar P um conjunto finito parcialmente ordenado qualquer e k um inteiro não negativo.

1 - ESTRUTURA DAS SPERNER k-FAMÍLIAS

DEFINIÇÃO 1 - Seja $X \subseteq P$. X é uma k-família em P sse X não contém cadeias de comprimento k+1. Uma k-família em P de cardinalidade máxima é chamada Sperner k-família em P.

Vamos usar freqüentemente a expressão k-família ou Sperner k-família, significando k-família em P ou Sperner k-família em P, respectivamente.

É fácil ver que uma 1-família em P é uma anticadeia de P e que toda k-família em P é uma j-família em P se $j > k$.

No decorrer deste trabalho, $\gamma_k(P)$ denota o conjunto das k-famílias em P, $\beta_k(P)$ denota o conjunto das Sperner k-famílias em P, $d_k(P)$ designa a cardinalidade de uma Sperner k-família em P e $(\gamma(P))^k$ denota o conjunto das k-tuplas ordenadas $\alpha = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ de anticadeias X_i de P, $1 \leq i \leq k$. Para simplificar a notação, denotamos por $\gamma(P)$ o conjunto das anticadeias de P e por $\beta(P)$ o conjunto das anticadeias de cardinalidade máxima de P.

O objetivo desta seção é definir uma relação de ordem "$\leq$" sobre $\gamma_k(P)$ e mostrar que $(\beta_k(P), \leq)$ é um reticulado. Este resultado será utilizado na demonstração do teorema minimax. Ele estende um teorema provado por Dilworth em [D2] mostrando que $(\beta(P), \leq)$ é um reticulado.

Com esta finalidade, iniciamos mostrando que $(\gamma(P), \leq)$ e $(\beta(P), \leq)$ são reticulados. Provamos em seguida que $(\gamma_k(P), \leq)$ é um reticulado. Durante este processo, examinamos propriedades estruturais das k-famílias, que serão utilizadas posteriormente. As demonstrações destes resultados são de acordo com [GK]. Para atingirmos o resultado principal, usamos dualidade, diferindo da demonstração contida no artigo mencionado.

<u>DEFINIÇÃO 2</u> - Sejam X e Y $\in \gamma(P)$. $X \leq Y$ sse $X_* \subseteq Y_*$.

Facilmente verifica-se que $(\gamma(P), \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Também $((\gamma(P))^k, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Se $X \subseteq P$, vamos denotar por $M(X)$ o conjunto dos elementos maximais de X, por $m(X)$ o conjunto dos elementos minimais de X e por NM(X) o conjunto dos elementos não maximais de X.

DEFINIÇÃO 3 - Dados X e Y $\in \gamma(P)$, definimos: (veja exemplo 1)

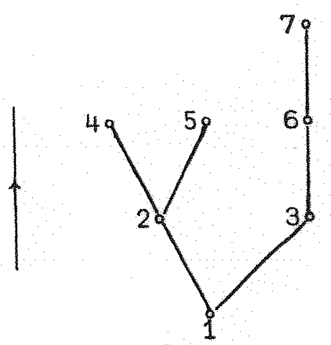
$$X \vee Y = M(X \cup Y)$$

$$X \wedge Y = M(X_* \cap Y_*)$$

$$X \tau Y = NM(X \cup Y) \cup (X \cap Y)$$

É óbvio que $X \vee Y$ e $X \wedge Y \in \gamma(P)$. Também $X \tau Y \in \gamma(P)$. De fato, podemos concluir isto, observando que $NM(X \cup Y) \in \gamma(P)$, desde que $X \cup Y \in \gamma_2(P)$.

EXEMPLO 1 - Dados X e Y $\in \gamma(P)$, X = {4,6} e Y = {5,7}, temos:



$X \vee Y = \{4,5,7\}$

$X \wedge Y = \{2,6\}$

$X \tau Y = \{6\}$

TEOREMA 1 - $(\gamma(P), \leq)$ é um reticulado. Se X e Y $\in \gamma(P)$, então

$$\sup\{X,Y\} = X \vee Y \quad \text{e} \quad \inf\{X,Y\} = X \wedge Y.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja $\tau(P)$ o conjunto dos ideais inferiores em P, parcialmente ordenado por inclusão; X e Y $\in \gamma(P)$ e ϕ a função de $\gamma(P)$ em $\tau(P)$ tal que $\phi(X) = X_*$.

É fácil ver que ϕ bijetora e que $\phi^{-1}(X_*) = M(X_*)$.

ϕ é um isomorfismo. De fato, $X \leqslant Y$ sse $X_* \subseteq Y_*$.

Como a união e a intersecção de ideais inferiores em P são ideais inferiores em P, então $(\tau(P), \subseteq)$ é um reticulado, $\sup\{X_*, Y_*\} = X_* \cup Y_*$ e $\inf\{X_*, Y_*\} = X_* \cap Y_*$.

Logo $(\gamma(P), \leqslant)$ é um reticulado, $\sup\{X,Y\} = M(X_* \cup Y_*)$ e $\inf\{X,Y\} = M(X_* \cap Y_*)$. Mas $M(X_* \cup Y_*) = M(X \cup Y)$. O teorema está assim demonstrado. ◆

<u>COROLÁRIO 1</u> - $((\gamma(P))^k, \leqslant)$ é um reticulado. Se $\alpha = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ e $\beta = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ são elementos de $(\gamma(P))^k$, então

$$\alpha \vee \beta = (X_1 \vee Y_1, X_2 \vee Y_2, \ldots, X_k \vee Y_k)$$

e

$$\alpha \wedge \beta = (X_1 \wedge Y_1, X_2 \wedge Y_2, \ldots, X_k \wedge Y_k).$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Imediata usando o teorema 1 e resultados da teoria de reticulados. ◆

<u>LEMA 1</u> - Sejam X e $Y \in \gamma(P)$. Então:

i) $|X| + |Y| = |X \vee Y| + |X \top Y|$

ii) $X \top Y \subseteq X \wedge Y$

iii) Se $|X| = |Y| = d_1(P)$, então $|X \vee Y| = |X \wedge Y| = |X \top Y| = d_1(P)$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> -

i) Imediata.

ii) Se $x \in X \top Y$, então $x \in X \wedge Y$. De fato, se $x \in NM(X \cup Y)$ ou $x \in X \cap Y$, então x é maximal em X_* ou em Y_*, $x \in X_*$ e $x \in Y_*$. Portanto $x \in M(X_* \cap Y_*)$.

iii) Pela hipótese e por i), segue que $|X \vee Y| + |X \tau Y| = 2d_1(P)$. Como $X \vee Y$ e $X \tau Y \in \gamma(P)$, então $|X \vee Y| \leq d_1(P)$ e $|X \tau Y| \leq d_1(P)$. Logo $|X \vee Y| = |X \tau Y| = d_1(P)$. Também $|X \wedge Y| = d_1(P)$, desde que $X \wedge Y \in \gamma(P)$, $|X \tau Y| = d_1(P)$ e $X \tau Y \subseteq X \wedge Y$ por ii). ◆

<u>TEOREMA 2</u> - $(\beta(P), \leqslant)$ é um reticulado. Se X e $Y \in \beta(P)$,

$$\sup\{X,Y\} = X \vee Y \quad \text{e} \quad \inf\{X,Y\} = X \tau Y.$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Sejam X e $Y \in \beta(P)$. Usando o lema 1 concluímos que $X \vee Y$, $X \wedge Y$ e $X \tau Y \in \beta(P)$ e $X \tau Y = X \wedge Y$. Logo $(\beta(P), \leqslant)$ é um subreticulado do reticulado $(\gamma(P), \leqslant)$, $\sup\{X,Y\} = X \vee Y$ e $\inf\{X,Y\} = X \wedge Y = X \tau Y$. ◆

A fim de estendermos alguns resultados vistos, definimos a seguir uma decomposição de uma k-família em k-anticadeias.

<u>DEFINIÇÃO 4</u> - Seja a função $\psi: \gamma_k(P) \longrightarrow (\gamma(P))^k$ tal que $\psi(X) = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$, sendo $X_1 = M(X)$ e $X_j = M(X - \bigcup_{i=1}^{j-1} X_i)$, $2 \leqslant j \leqslant k$. A imagem de X pela função ψ será chamada decomposição canônica superior de X.

Segue imediatamente da definição acima que esta é a única decomposição de X em k anticadeias que satisfaz às duas propriedades abaixo:

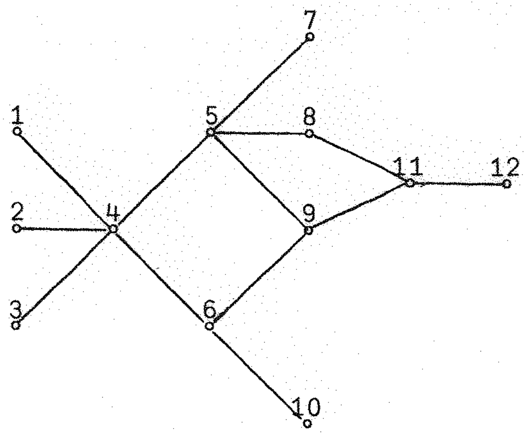
I) $X_i \cap X_j = \emptyset$, $1 \leqslant i < j \leqslant k$

II) $X_1 \geqslant X_2 \geqslant \ldots \geqslant X_k$

Sempre que $X \in \gamma_k(P)$, X_i $(1 \leq i \leq k)$ denotará a i-ésima componente da decomposição canônica superior de X.

O exemplo abaixo mostra as anticadeias da decomposição canônica superior de uma 5-família.

<u>EXEMPLO 2</u> - Seja $X = \{1,3,4,5,6,8,9,10,11\} \in \gamma_5(P)$.



Então $X_1 = \{10,11\}$, $X_2 = \{8,9\}$, $X_3 = \{5,6\}$, $X_4 = \{4\}$ e $X_5 = \{1,3\}$.

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> - Seja $X \subseteq P$. X é uma k-família em P sse X é a união de k-anticadeias de P.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Se X é uma k-família em P, então $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$.

Para verificarmos a implicação contrária, suponhamos que X é a união de k anticadeias de P e que $X \notin \gamma_k(P)$.

Então, existe uma cadeia C em X tal que $|C| \geq k+1$. Logo, existe uma cadeia $\langle x,y \rangle$ em C tal que x e y pertencem à mesma anticadeia de P, uma contradição. ◆

<u>DEFINIÇÃO 5</u> - Sejam X e $Y \in \gamma_k(P)$. $X \leq Y$ sse $X_i \leq Y_i$, $1 \leq i \leq k$.

É imediato verificar que "$\leq$" é uma relação de ordem sobre $\gamma_k(P)$.

DEFINIÇÃO 6 - Se X e $Y \in \gamma_k(P)$, definimos:

$$X \vee Y = \bigcup_{i=1}^{k} X_i \vee Y_i$$

$$X \top Y = \bigcup_{i=1}^{k} X_i \top Y_i$$

Pela proposição 1, $X \vee Y$ e $X \top Y \in \gamma_k(P)$.

LEMA 2 - Se X e $Y \in \gamma_k(P)$, $\psi(X \vee Y) = (X_1 \vee Y_1, X_2 \vee Y_2, \ldots, X_k \vee Y_k)$, sendo ψ a função descrita na definição 4.

DEMONSTRAÇÃO - Para mostrar que $X_j \vee Y_j$ $(1 \leq j \leq k)$ são os blocos da decomposição canônica superior de $X \vee Y$, vamos mostrar inicialmente que $(X_i \vee Y_i) \cap (X_j \vee Y_j) = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq k$.

Seja x um elemento pertencente à intersecção acima. Vamos supor, sem perda de generalidade que $x \in X_i$. Como $x \in X_j \vee Y_j$ e $X_j \cap X_i = \emptyset$, $x \in Y_j$. Então existe $z \in Y_i$ tal que $x \leq z$. Desde que $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, $x < z$. Logo $x \notin X_i \vee Y_i$. Isto é uma contradição.

Resta verificarmos que $X_1 \vee Y_1 \geq X_2 \vee Y_2 \geq \ldots \geq X_k \vee Y_k$.

Seja $1 \leq i \leq k-1$. Como $X_i \vee Y_i = \sup\{X_i, Y_i\}$, $X_i \vee Y_i \geq X_i$ e $X_i \vee Y_i \geq Y_i$. Mas $X_i \geq X_{i+1}$ e $Y_i \geq Y_{i+1}$. Logo $X_i \vee Y_i$ é um limite superior de $\{X_{i+1}, Y_{i+1}\}$. Desde que $X_{i+1} \vee Y_{i+1} = \sup\{X_{i+1}, Y_{i+1}\}$, segue que $X_i \vee Y_i \geq X_{i+1} \vee Y_{i+1}$.

Portanto, o lema está provado. ◆

TEOREMA 3 - $(\gamma_k(P),\leqslant)$ é um reticulado. Se X e $Y \in \gamma_k(P)$, $\sup\{X,Y\} = X \vee Y$.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam X e $Y \in \gamma_k(P)$. Pelo corolário 1, $(X_1 \vee Y_1, X_2 \vee Y_2, \ldots, X_k \vee Y_k)$ é $\sup\{(X_1,X_2,\ldots,X_k),(Y_1,Y_2,\ldots,Y_k)\}$ em $((\gamma(P))^k,\leqslant)$. Pelo lema 2, $(X_1 \vee Y_1, X_2 \vee Y_2, \ldots, X_k \vee Y_k)$ é a decomposição canônica superior de k-família $X \vee Y$. Logo $X \vee Y$ é $\sup\{X,Y\}$ em $(\gamma_k(P),\leqslant)$. Como o conjunto vazio pertence a $\gamma_k(P)$ e é seu único elemento minimal, concluímos pela proposição 1.I que $(\gamma_k(P),\leqslant)$ é um reticulado.

◆

LEMA 3 - Se X e $Y \in \gamma_k(P)$, então:

i) $|X| + |Y| = |X \vee Y| + |X \tau Y|$

ii) Se $|X| = |Y| = d_k(P)$, então $X \vee Y \in \beta_k(P)$.

DEMONSTRAÇÃO -

i) Vamos verificar que $(X_i \tau Y_i) \cap (X_j \tau Y_j) = \emptyset$ se $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

Seja x pertencente à intersecção acima e suponhamos sem perda de generalidade que $x \in X_i$. Como $X_j \cap X_i = \emptyset$ e $x \in X_j \tau Y_j$, $x \in Y_j$. Logo existe $z \in X_j$ tal que $x \leqslant z$. Como $X_j \cap X_i = \emptyset$, $x < z$. Isto é uma contradição, pois $X_i \geqslant X_j$.

Seja $1 \leqslant j \leqslant k$. $X_j, Y_j, X_j \vee Y_j$ e $X_j \tau Y_j$ são os blocos de uma decomposição de X, Y, $X \vee Y$ e $X \tau Y$, respectivamente. Pelo lema 1, $|X_j| + |Y_j| = |X_j \vee Y_j| + |X_j \tau Y_j|$. Somando sob j, obtemos a igualdade $|X| + |Y| = |X \vee Y| + |X \tau Y|$.

ii) Por hipótese e por i), segue que $|X \vee Y| + |X \tau Y| = 2d_k(P)$.

Segue imediatamente que $|X \vee Y| = d_k(P)$ e $|X \tau Y| = d_k(P)$, pois $X \vee Y$ e $X \tau Y \in \gamma_k(P)$. Logo $X \vee Y \in \beta_k(P)$. ◆

Os lemas 4 e 5 que agora apresentamos serão usados somente na próxima seção.

LEMA 4 - Sejam $X \in \beta_k(P)$ e $Y \in \beta_{k+1}(P)$. Então $X \vee Y \in \beta_{k+1}(P)$ e $X \tau Y \in \beta_k(P)$.

DEMONSTRAÇÃO - Como $X \in \beta_k(P)$, $X_{k+1} = \emptyset$. Logo $X_{k+1} \tau Y_{k+1} = \emptyset$ e portanto $X \tau Y \in \gamma_k(P)$. Pelo lema 3, $|X| + |Y| = |X \vee Y| + |X \tau Y|$. Então $|X \vee Y| + |X \tau Y| = d_k(P) + d_{k+1}(P)$. Como $X \vee Y \in \gamma_{k+1}(P)$, $|X \vee Y| \leq d_{k+1}(P)$. Desde que $|X \tau Y| \leq d_k(P)$, segue que $|X \vee Y| = d_{k+1}(P)$ e $|X \tau Y| = d_k(P)$. Portanto $X \vee Y \in \beta_{k+1}(P)$ e $X \tau Y \in \beta_k(P)$, como queríamos demonstrar.

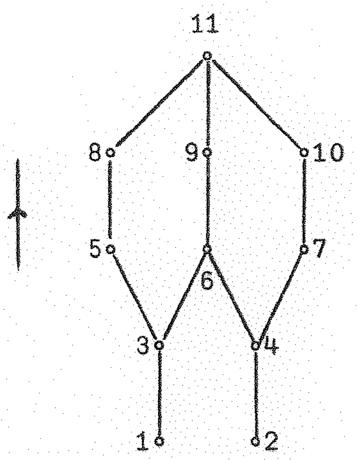
◆

LEMA 5 - Sejam X e $Y \in \gamma_k(P)$ e $|X| = d_k(P)$. Então $|X \vee Y| \geq |Y|$.

DEMONSTRAÇÃO - Pelo lema 3, $|X| + |Y| = |X \vee Y| + |X \tau Y|$. Logo, $|X \vee Y| = |Y| + d_k(P) - |X \tau Y|$. Como $X \tau Y \in \gamma_k(P)$, $|X \tau Y| \leq d_k(P)$ e portanto $|X \vee Y| \geq |Y|$. ◆

Usando o lema 3, concluímos que as operações $\vee$ e τ são fechadas em $\beta_k(P)$. Entretanto, não conseguimos mostrar que $(\beta_k(P), \leq)$ é um subreticulado de $(\gamma_k(P), \leq)$, pois se X e Y pertencem a $\gamma_k(P)$, $X \tau Y$ não é necessariamente $\inf\{X,Y\}$ em $(\gamma_k(P), \leq)$. Também $X \bar{\wedge} Y = \bigcup_{i=1}^{k} X_i \wedge Y_i$ não é necessariamente $\inf\{X,Y\}$ em $(\gamma_k(P), \leq)$. (Veja exemplo 3).

EXEMPLO 3 - Sejam X e $Y \in \gamma_2(P)$, $X = \{6,7,9,10\}$ e $Y = \{5,8\}$.



$\sup\{X,Y\} = X \vee Y = \{8,9,10,5,6,7\}$

$\inf\{X,Y\} = X \wedge Y = \{1,3\}$

$X \top Y = \emptyset$

$X \bar{\wedge} Y = \{3\}$

A fim de mostrar que $(\beta_k(P),\leqslant)$ é um reticulado, vamos usar dualidade. Consideremos as operações $\wedge$ e $\perp$ definidas sobre $\gamma_k(P)$, duais das operações $\vee$ e $\top$ da definição 6, respectivamente. Denotamos por "$\lessdot$" a relação de ordem sobre $\gamma_k(P)$, dual da relação de ordem "$\leqslant$" sobre $\gamma_k(P)$. Trocando cada operação pela sua operação dual e cada conceito por seu dual, obtemos definições, teoremas e lemas duais dos resultados apresentados nesta seção.

As definições 7, 8 e 9 enunciadas abaixo são duais das definições 2, 4 e 5, respectivamente.

<u>DEFINIÇÃO 7</u> - Sejam X e $Y \in \gamma(P)$. $X \lessdot Y$ sse $Y^* \subseteq X^*$.

Verifica-se que "$\lessdot$" é uma relação de ordem sobre $\gamma(P)$.

<u>DEFINIÇÃO 8</u> - Seja a função θ: $\gamma_k(P) \longrightarrow (\gamma(P))^k$ tal que $\theta(X) = (\dot{X}_1,\dot{X}_2,\ldots,\dot{X}_k)$, sendo $\dot{X}_1 = m(X)$ e $\dot{X}_j = m(X - \bigcup_{\ell=1}^{j-1} \dot{X}_\ell)$, $2 \leqslant j \leqslant k$. A imagem de X pela função θ será chamada decomposição canônica inferior de X. $\dot{X}_\ell$ $(1 \leqslant \ell \leqslant k)$ denotará a ℓ-ésima componen-

te da decomposição canônica inferior da k-família X.

<u>DEFINIÇÃO 9</u> - Sejam X e $Y \in \gamma_k(P)$. $X \dot{\leqslant} Y$ sse $\dot{X}_\ell \dot{\leqslant} \dot{Y}_\ell$, $1 \leqslant \ell \leqslant k$. Verifica-se que "$\dot{\leqslant}$" é uma relação de ordem sobre $\gamma_k(P)$.

Os resultados que agora enunciamos, duais do teorema 3 e da parte ii) do lema 3 serão utilizados na demonstração do teorema 6.

<u>TEOREMA 4</u> - $(\gamma_k(P), \dot{\leqslant})$ é um reticulado. Se X e $Y \in \gamma_k(P)$, então

$$\inf\{X,Y\} = X \wedge Y.$$

<u>LEMA 6</u> - Se X e $Y \in \beta_k(P)$, então $X \wedge Y \in \beta_k(P)$.

O teorema abaixo é interessante por si só e será usado na demonstração do teorema 6.

<u>TEOREMA 5</u> - Sejam X e Y k-famílias maximais em P com relação à inclusão. Então $X \leqslant Y$ sse $X \dot{\leqslant} Y$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Vamos demonstrar a parte "somente se" por contradição.

Suponhamos que $X \not\dot{\leqslant} Y$. Seja j o menor inteiro, $(1 \leqslant j \leqslant k)$ tal que $\dot{X}_j \not\dot{\leqslant} \dot{Y}_j$. Então $\dot{Y}_j^* \not\subseteq \dot{X}_j^*$. Portanto existe $y \in \dot{Y}_j$ e não existe $x \in \dot{X}_j$ tal que $x \leqslant y$. Podemos concluir que:

I) Existe uma cadeia $y_1 < y_2 < \ldots < y_{j-1} < y_j = y$ em Y, $y_\ell \in \dot{Y}_\ell$, $(1 \leqslant \ell \leqslant j)$;

II) Não existe $x \in \dot{X}_n$, $(j \leqslant n \leqslant k)$ tal que $x \leqslant y$.

Vamos examinar os casos:

1) <u>$y \in X$</u>. Por II, $j > 1$. Como $\dot{Y}_{j-1}^* \subseteq \dot{X}_{j-1}^*$, existe $x_{j-1} \in \dot{X}_{j-1}$ tal que $x_{j-1} \leqslant y_{j-1}$. Portanto, existe uma cadeia $x_1 < x_2 < \ldots < x_{j-1}$ em X, $x_\ell \in \dot{X}_\ell$ $(1 \leqslant \ell \leqslant j-1)$. Como $x_{j-1} \leqslant y_{j-1} < y_j$, existe uma cadeia

$x_1 < x_2 < \ldots < x_{j-1} < y_j$ em X. Logo, $y \in \dot{X}_\ell$, $(j \leq \ell \leq k)$, contradizendo II.

2) $\underline{y \notin X}$ - Como X é uma k-família maximal em P com relação à inclusão, existe uma cadeia C em $X \cup \{y\}$ tal que $|C| = k+1$.

Seja $C = \langle x_1, x_2, \ldots, y, \ldots, x_j, \ldots, x_k \rangle$.

É fácil ver que $x_i \in \dot{X}_i \cap X_{k-i+1}$, $(1 \leq i \leq k)$. Verifica-se que $y < x_j$, caso contrário teríamos $x_j < y$, contradizendo II.

Como $X \leq Y$ por hipótese, existe $z_j \in Y_{k-j+1}$ tal que $x_j \leq z_j$. Logo existe uma cadeia $z_j < z_{j+1} < \ldots < z_k$ em Y, $z_i \in Y_{k-i+1}$ $(j \leq i \leq k)$.

Desde que $y < x_j \leq z_j$, então $y_1 < y_2 < \ldots < y_j = y < z_j < z_{j+1} < \ldots < z_k$ é uma cadeia em Y de comprimento k+1, uma contradição.

A implicação contrária pode ser provada usando dualidade. ◆

Apresentamos finalmente o resultado principal desta seção.

<u>TEOREMA 6</u> - $(\beta_k(P), \leq)$ é um reticulado. Dados X e Y $\in \beta_k(P)$,

$$X \wedge Y = \inf\{X, Y\}.$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Sejam X e Y $\in \beta_k(P)$. Pelo teorema 4 e lema 6, concluímos que $X \wedge Y$ é $\inf\{X,Y\}$ em $(\beta_k(P), \lessdot)$. Logo $X \wedge Y \lessdot X$, $X \wedge Y \lessdot Y$ e não existe $Z \in \beta_k(P)$ tal que $Z \lessdot X$, $Z \lessdot Y$ e $X \wedge Y \lessdot Z$. Por outro lado, X, Y e $X \wedge Y$ são k-famílias maximais com relação à inclusão. Portanto, pelo teorema 5, $X \wedge Y \leq X$ e $X \wedge Y \leq Y$. Logo $X \wedge Y$ é

um limite inferior de $\{X,Y\}$ em $(\beta_k(P),\leqslant)$.

Seja $S = \{W \in \beta_k(P) \mid W \leqslant X \text{ e } W \leqslant Y\}$. Como $X \wedge Y \in S$, $S \neq \emptyset$. Seja $T = \sup S$. T existe, pois S é finito e $X \vee Y = \sup\{X,Y\}$ em $(\beta_k(P),\leqslant)$.

Suponhamos que $T \neq X \wedge Y$. Então $T \leqslant X$, $T \leqslant Y$ e $X \wedge Y \leqslant T$. Como $T \in \beta_k(P)$, pelo teorema 5, temos $T \leqslant\!\cdot X$, $T \leqslant\!\cdot Y$ e $X \wedge Y \leqslant\!\cdot T$. Logo, $X \wedge Y$ não é *inf* de $\{X,Y\}$ em $(\beta_k(P),\leqslant\!\cdot)$, uma contradição.

Portanto $T = X \wedge Y$. Logo $X \wedge Y$ é *inf* de $\{X,Y\}$ em $(\beta_k(P),\leqslant)$. Então $(\beta_k(P),\leqslant)$ é um reticulado, como queríamos demonstrar. ◆

2 - O TEOREMA MINI-MAX

<u>DEFINIÇÃO 10</u> - Seja τ uma partição de P em cadeias $C_1, C_2, \ldots, C_j$ e $p_k(\tau) = \sum_{i=1}^{j} \min\{|C_i|,k\}$. τ é k-saturada sse $p_k(\tau) = d_k(P)$. Nesta seção, $q_k(\tau)$ designa o número de cadeias de τ de comprimento maior do que k.

O resultado principal desta dissertação pode agora ser enunciado:

<u>TEOREMA 7</u> - Dados P e k, existe uma partição τ de P em cadeias que é k-saturada, isto é,

$$d_k(P) = p_k(\tau).$$

Se $k = 1$, o teorema acima torna-se o teorema de Dilworth.

É oportuno observar que $d_k(P) \leq p_k(\tau)$ para qualquer partição τ de P em cadeias. De fato, se $C \in \tau$ e $X \in \gamma_k(P)$, então X possui no máximo k elementos de C se $|C| \geq k$ ou $|C|$ elemento de C, caso contrário. Esta é a desigualdade trivial do teorema 7 e será usada freqüentemente em demonstrações posteriores.

Vamos demonstrar uma extensão do teorema 7, que agora enunciamos:

<u>TEOREMA 8</u> - Dados P e k, existe uma partição τ de P em cadeias que é k e k+1 saturada, isto é,

$$d_k(P) = p_k(\tau)$$

e

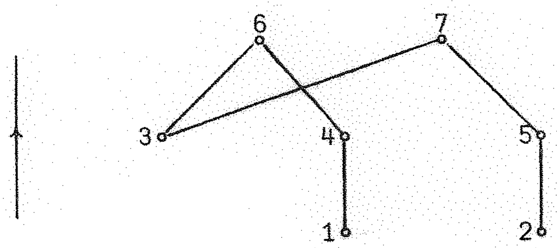
$$d_{k+1}(P) = p_{k+1}(\tau).$$

A demonstração que apresentaremos do teorema 8 é devida a Greene e Kleitman [GK]. Ela não induz um algoritmo polinomial para se obter uma partição de P em cadeias que é k e k+1 saturada.

Uma outra demonstração deste resultado foi obtida recentemente por Cláudio Lucchesi. Baseando-se nesta demonstração, obtém-se um algoritmo polinomial que encontra uma partição de P em cadeias que é k e k+1 saturada, uma Sperner k-família em P e uma Sperner k+1-família em P.

Prosseguimos, apresentando alguns exemplos de partições k-saturadas.

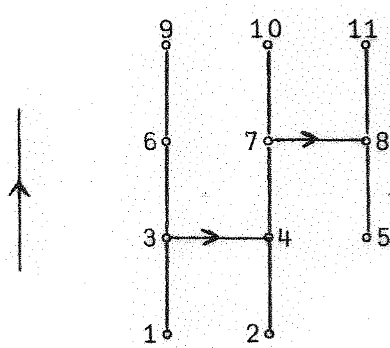
EXEMPLO 4 -



Seja $\tau = \{C_1, C_2, C_3\}$, sendo $C_1 = \langle 3,6\rangle$, $C_2 = \langle 1,4\rangle$ e $C_3 = \langle 2,5,7\rangle$ e $\bar{\tau} = \{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3\}$, sendo $\bar{C}_1 = \langle 3\rangle$, $\bar{C}_2 = \langle 1,4,6\rangle$ e $\bar{C}_3 = \langle 2,5,7\rangle$. Note que τ é 1 e 3-saturada, mas não é 2-saturada. $\bar{\tau}$ é 1,2 e 3-saturada. Como $d_i(P) = d_3(P)$ para $i > 3$, concluímos que $\bar{\tau}$ é simultaneamente k-saturada para todo k.

Existem conjuntos parcialmente ordenados que não possuem partições simultaneamente k-saturadas para todo k, como podemos observar no exemplo abaixo.

EXEMPLO 5 -



Vamos verificar que P não possui uma partição τ que é 1 e 3-saturada.

Como $d_1(P) = 3$, τ é uma partição 1-saturada sse $|\tau| = 3$. A única partição de P em três cadeias é a partição $\tau = \langle C_1, C_2, C_3 \rangle$, sendo $C_1 = \langle 1,3,6,9 \rangle$, $C_2 = \langle 2,4,7,10 \rangle$ e $C_3 = \langle 5,8,11 \rangle$. τ não é 3-saturada, pois $d_3(P) = 8$ e $p_3(\tau) = 9$. A partição $\bar{\tau} = \{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4\}$, sendo $\bar{C}_1 = \langle 1,3,4,7,8,11 \rangle$, $\bar{C}_2 = \langle 6,9 \rangle$, $\bar{C}_3 = \langle 2,10 \rangle$ e $\bar{C}_4 = \langle 5 \rangle$ é 3-saturada.

Para simplificar a notação, no que segue, X^+ e X^- denotarão a Sperner k-família maximal e minimal em P, respectivamente.

Com o objetivo de demonstrarmos o resultado fundamental, demonstramos os lemas:

<u>LEMA 7</u> - Sejam X,Y e $Z \in \gamma(P)$, tais que $X \leq Y \leq Z$. Então $X \cap Z \subseteq Y$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Se $X \cap Z = \emptyset$, o lema é válido.

Seja $x \in X \cap Z$. Como $X_* \subseteq Y_* \subseteq Z_*$ por hipótese, então existe $y \in Y$ e $z \in Z$ tal que $x \leq y \leq z$.

Se $z \neq x$, então $\langle x,z \rangle$ é uma cadeia em Z, um absurdo. Sendo P um conjunto parcialmente ordenado, $x \leq y$ e $y \leq x$ implica que $x = y$. Portanto $X \cap Z \subseteq Y$. ◆

<u>LEMA 8</u> - Seja $X \in \beta_k(P)$. Então $X_1^+ \cap X_1^- \subseteq X_1$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Como $\beta_k(P)$ é um reticulado, $X^- \leq X \leq X^+$ para todo $X \in \beta_k(P)$. Logo $X_1^- \leq X_1 \leq X_1^+$. Conforme o lema 7, $X_1^+ \cap X_1^- \subseteq X_1$.

◆

LEMA 9 - Seja $X \in \beta_k(P)$. Então $d_k(P) - d_{k-1}(P) \leq |X_i|$, $1 \leq i \leq k$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $1 \leq i \leq k$. $(X-X_i) \in \gamma_{k-1}(P)$ e portanto $|X-X_i| \leq \leq d_{k-1}(P)$. Mas $|X-X_i| = |X| - |X_i| = d_k(P) - |X_i|$. Logo $d_k(P) - |X_i| \leq \leq d_{k-1}(P)$ e o resultado segue. ◆

LEMA 10 - Sejam $Y \in \beta_{k+1}(P)$ e $X_1^+ \cap X_1^- = W \neq \emptyset$.

i) Se $X^+ \leq Y$ e $W \cap Y_1 = \emptyset$, então $W \subseteq Y_2$.

ii) $W \leq Z_1$ para todo $Z \in \beta_{k+1}(P)$.

DEMONSTRAÇÃO - i) Como $X_1^- \leq X_1^+ \leq Y_1$ e $W \cap Y_1 = \emptyset$, então $X_1^- \cap Y_1 = \emptyset$ pelo lema 7. Logo $X^- \cap Y_1 = \emptyset$ e portanto $|X^- \cup Y_1| = |X^-| + |Y_1| \geq d_k(P) + +d_{k+1}(P) - d_k(P) = d_{k+1}(P)$ pelo lema 9. Por outro lado, $(X^- \cup Y_1) \in \gamma_{k+1}(P)$.

Concluímos então que $|X^-| + |Y_1| = d_{k+1}(P)$. Como $|Y| = = |Y-Y_1| + |Y_1| = d_{k+1}(P)$, segue que $|Y-Y_1| = |X^-|$. Portanto, $(Y-Y_1) \in \beta_k(P)$. Pelo lema 8, $W \subseteq Y_2$.

ii) Sejam $Z \in \beta_{k+1}(P)$ e $\bar{Z} = Z - Z_{k+1}$. Como $\bar{Z} \in \gamma_k(P)$ e $X^+ \in \beta_k(P)$, $|\bar{Z} \vee X^+| \geq |\bar{Z}|$ pelo lema 5. Suponhamos que $|\bar{Z} \vee X^+| > |\bar{Z}|$. Pelo lema 7, $(\bar{Z} \vee X^+) \cap Z_{k+1} = \emptyset$ e portanto $|(\bar{Z} \vee X^+) \cup Z_{k+1}| > d_{k+1}(P)$. Isto é um absurdo, pois $((\bar{Z} \vee X^+) \cup Z_{k+1}) \in \gamma_{k+1}(P)$. Logo $|\bar{Z} \vee X^+| = = |\bar{Z}|$. Pelo lema 3, $|\bar{Z} \tau X^+| = |X^+|$ e portanto $W \subseteq (\bar{Z} \tau X^+)_1$, pelo lema 8. Logo $W \leq Z_1$. ◆

Os lemas 11 e 12 serão usados na demonstração do teorema 8.

LEMA 11 - Seja τ uma partição k-saturada de P em cadeias. Então ou τ é k+1 saturada, ou existe $x \in P$ que é maximal em toda

Sperner k-família em P.

DEMONSTRAÇÃO -

É claro que $p_{k+1}(\tau) = p_k(\tau) + \alpha_k(\tau)$. Logo, como τ é k-saturada, $p_{k+1}(\tau) = d_k(P) + \alpha_k(\tau)$.

Como $d_{k+1}(P) \leq p_{k+1}(\tau)$, segue que $d_{k+1}(P) \leq d_k(P) + \alpha_k(\tau)$.

Se $d_{k+1}(P) = d_k(P) + \alpha_k(\tau)$, então $p_{k+1}(\tau) = d_{k+1}(P)$ e τ é k+1-saturada.

Vamos analisar o caso em que $d_{k+1}(P) < d_k(P)+\alpha_k(\tau)$.

Suponhamos que $X_1^- \cap X_1^+ = \emptyset$. Então $X^- \cap X_1^+ = \emptyset$. Logo, $|X^- \cup X_1^+| = |X^-| + |X_1^+| \geq d_k(P) + d_k(P) - d_{k-1}(P)$ pelo lema 9.Mas $d_k(P) - d_{k-1}(P) \geq \alpha_k(\tau)$, pois $d_{k-1}(P) \leq p_{k-1}(\tau) = p_k(\tau) - \alpha_{k-1}(\tau) \leq$ $\leq p_k(\tau) - \alpha_k(\tau) = d_k(P) - \alpha_k(\tau)$.

Logo $|X^- \cup X_1^+| \geq d_k(P) + \alpha_k(\tau) > d_{k+1}(P)$, uma contradição, pois $(X^- \cup X_1^+) \in \gamma_{k+1}(P)$.

Portanto $X_1^+ \cap X_1^- \neq \emptyset$.

Concluímos então que $X_1^+ \cap X_1^- \subseteq X_1$ para todo $X \in \beta_k(P)$, pelo lema 8.

Ficou assim demonstrado que se τ não é k+1-saturada, existe $x \in P$ que é maximal em toda Sperner k-família.

LEMA 12 - Seja τ uma partição k-saturada de P em cadeias tal que $d_{k+1}(P) < p_{k+1}(\tau)$. Então existe $x \in P$ tal que:

a) x é maximal em toda Sperner k-família.

b) x pertence à toda Sperner k+1-família.

DEMONSTRAÇÃO -

Seja $W = X_1^+ \cap X_1^-$. Como τ é k-saturada e não é k+1-saturada, então $W \neq \emptyset$ pelo lema 11.

Vamos provar este lema, verificando as condições i) e ii).

i) Se $W \cap Y_1 = \emptyset$ para todo $Y \in \beta_{k+1}(P)$, então $W \subseteq Y_2$ para todo $Y \in \beta_{k+1}(P)$.

Seja $Y \in \beta_{k+1}(P)$ e $\bar{Y} = X^+ \vee Y$. $\bar{Y} \in \beta_{k+1}(P)$, pelo lema 4. Logo $\bar{Y}_1 \cap W = \emptyset$ por hipótese. Por outro lado, $X^+ \leq \bar{Y}$. Então, conforme o lema 10, $W \subseteq \bar{Y}_2 = (X^+ \vee Y)_2 = X_2^+ \vee Y_2$. Como $W \subseteq X_1^+$ e $X_1^+ \cap X_2^+ = \emptyset$, $X_2^+ \cap W = \emptyset$ e portanto $W \subseteq Y_2$.

ii) Se $Y_1 \cap W \neq \emptyset$ para algum $Y \in \beta_{k+1}(P)$, seja $\bar{Y}$ maximal em $\beta_{k+1}(P)$ com esta propriedade, $\bar{W} = W \cap \bar{Y}_1$ e $Y \in \beta_{k+1}(P)$. Então, ou $\bar{W} \subseteq Y_1$ ou $\bar{W} \subseteq Y_2$.

Seja $Y' = X^+ \vee \bar{Y}$. Pelo lema 4, $Y' \in \beta_{k+1}(P)$. Como

$\bar{W}\subseteq X_1^+\cap\bar{Y}_1$, então $\bar{W}\subseteq Y_1'$. Desde que $Y'\geqslant\bar{Y}$ e $Y_1'\cap W\neq\emptyset$, segue que $Y'=\bar{Y}$.

Logo $X^+\leqslant\bar{Y}$. (1)

Seja $Y\in\beta_{k+1}(P)$. Pelo lema 10, $W\leqslant Y_1$.

Se $Y\leqslant\bar{Y}$, então $Y_1\leqslant\bar{Y}_1$ e portanto $W\leqslant Y_1\leqslant\bar{Y}_1$. Como $\bar{W}\subseteq\bar{Y}_1\cap W$, então $\bar{W}\subseteq Y_1$ pelo lema 7.

Se $Y\nleqslant\bar{Y}$, então $Y\vee\bar{Y}>\bar{Y}$. Logo $(Y\vee\bar{Y})_1\cap W=\emptyset$, por hipótese. Por outro lado, por (1) verificamos que $X^+<Y\vee\bar{Y}$. Então, pelo lema 10, segue que $W\subseteq(Y\vee\bar{Y})_2=Y_2\vee\bar{Y}_2$. Como $\bar{W}\subseteq W$ e $\bar{W}\cap\bar{Y}_2=\emptyset$, então $\bar{W}\subseteq Y_2$.

Está assim provado o lema. ◆

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 8

Vamos provar por indução em $|P|$ e em k.

Se $k=0$ existe uma partição τ de P em cadeias que é zero e 1-saturada pelo teorema de Dilworth. Suponhamos que existe uma partição τ de P em cadeias que é k-1 e k-saturada. Vimos pelo lema 11 que $d_{k+1}(P)\leqslant d_k(P)+\alpha_k(\tau)$. Temos dois casos a examinar:

Caso 1 - $d_{k+1}(P)=d_k(P)+\alpha_k(\tau)$. Neste caso o lema 11 mos tra que τ é k+1-saturada.

Caso 2 - $d_{k+1}(P) < d_k(P) + \alpha_k(\tau)$. Então τ não é k+1-saturada. Conforme o lema 12, existe $x \in P$ que pertence à toda Sperner k e k+1 famílias em P. Seja $P' = P - \{x\}$. Então,

$$d_k(P) = d_k(P') + 1$$
e (I)
$$d_{k+1}(P) = d_{k+1}(P') + 1$$

Como $|P'| = |P| - 1$, por hipótese da indução existe uma partição τ' de P' em cadeias $C_1, C_2, \ldots, C_j$ que é k e k+1 saturada, isto é,

$$d_k(P') = p_k(\tau')$$
e (II)
$$d_{k+1}(P') = p_{k+1}(\tau')$$

Se $C_{j+1} = \langle x \rangle$, então $C_1, C_2, \ldots, C_{j+1}$ são os blocos de uma partição $\bar{\tau}$ de P em cadeias. $\bar{\tau}$ é k e k+1 saturada. De fato,

$$p_k(\bar{\tau}) = p_k(\tau')+1 = d_k(P')+1 = d_k(P) \text{ por (II) e (I).}$$

e $$p_{k+1}(\bar{\tau}) = p_{k+1}(\tau')+1 = d_{k+1}(P')+1 = d_{k+1}(P) \text{ por (II) e (I).}$$

A demonstração do teorema 8 está completa. ◆

3 - DUAL DO TEOREMA MINI-MAX

Considerando partições de P em anticadeias e subconjuntos de P que não contêm anticadeias de cardinalidade k+1, isto é, trocando os conceitos de cadeia e anticadeia de P, obtém-se um teorema mini-max que generaliza o dual do teorema de Dilworth e é o dual do teorema 8. Analisando as partições mencionadas, outros resultados interessantes podem ser obtidos.

Nesta seção, apenas enunciamos o teorema referido. A demonstração deste resultado é devida a Curtis Greene e pode ser encontrada em [G].

Inicialmente, introduzimos as definições:

DEFINIÇÃO 11 - Seja $X \subseteq P$. X é uma k-cofamília em P sse X não contém anticadeias de cardinalidade k+1. $d_k^*(P)$ designa a cardinalidade máxima de uma k-cofamília em P.

DEFINIÇÃO 12 - Seja δ uma partição de P em anticadeias $A_1, A_2, \ldots, A_j$ e $p_k^*(\delta) = \sum_{i=1}^{j} \min\{k, |A_i|\}$. δ é k-saturada sse $d_k^*(P) = p_k^*(\delta)$.

Prosseguimos com algumas observações.

– $d_k^*(P) \leq p_k^*(\delta)$ para toda partição δ de P em anticadeias.

– Seja $k \geq 1$ a cardinalidade máxima de uma anticadeia de P. Pelo teorema de Dilworth, toda j-cofamília ($j \leq k$) pode ser particionada em j cadeias de P. Logo, $d_1^*(P)$ é igual à cardinalidade da cadeia de P de comprimento máximo e $d_j^*(P)$ $(j\leq k)$ é igual à cardinalidade máxima da união de j cadeias disjuntas de P.

TEOREMA 9 (dual do teorema 8) - Dados P e k, existe uma partição δ de P em anticadeias que é k e k+1 saturada, isto é,

$$d_k^*(P) = p_k^*(\delta)$$

e

$$d_{k+1}^*(P) = p_{k+1}^*(\delta).$$

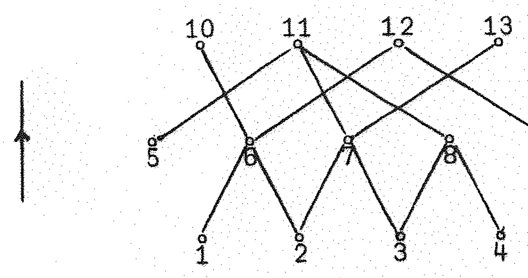
Este resultado generaliza o dual do teorema de Dilworth, que agora enunciamos:

O comprimento máximo de uma cadeia de P é igual ao número mínimo de blocos numa partição de P em anticadeias.

Para finalizar esta seção, apresentamos alguns exemplos onde exibimos partições de P em anticadeias que são k-saturadas.

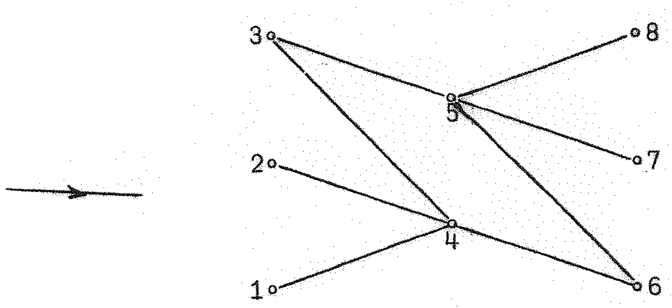
Apresentamos no exemplo 7 um conjunto parcialmente ordenado que não possui uma partição em anticadeias que é simultaneamente k saturada para todo k.

EXEMPLO 6 - Seja $\delta = \{A_1, A_2, A_3\}$ uma partição de P em anticadeias, sendo $A_1 = \{5,1,2,3,4,9\}$, $A_2 = \{6,7,8\}$ e $A_3 = \{10, 11, 12, 13\}$.



δ é simultaneamente k-saturada para todo k, pois $d_1^*(P) = 3$, $d_2^*(P) = 6$, $d_3^*(P) = 9$, $d_4^*(P) = 11$, $d_5^*(P) = 12$ e $d_i^*(P) = 13$ para $i \geq 6$.

EXEMPLO 7 - Seja o diagrama de Hasse de P:



Vamos mostrar que não existe uma partição δ de P em anticadeias que é 1 e 3-saturada.

Observe que $d_1^*(P) = 3$ e $d_3^*(P) = 7$.

Seja δ uma partição de P em anticadeias. δ é 1-saturada sse $|\delta| = 3$. Por outro lado, δ é 3-saturada sse δ contém a anticadeia $A = \{1,2,7,8\}$.

Suponhamos que δ é 3-saturada. Então $|\delta| \geq 4$. De fato, se τ é uma partição do conjunto parcialmente ordenado

$(P-A,\leqslant)$ em anticadeias, então $|\tau| \geqslant 3$, pois P-A contém uma cadeia de comprimento três. (Dual do Teorema de Dilworth). Logo, δ não é 1-saturada.

A partição $\delta = \{A_1, A_2, A_3\}$, sendo $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4,5\}$ e $A_3 = \{6,7,8\}$ é k-saturada para todo $k \neq 3$.

- ¤ -

CAPÍTULO III

TEOREMAS COMBINATÓRIOS NO CONJUNTO DOS SUBCONJUNTOS DE UM CONJUNTO FINITO

Neste capítulo, k designa um número natural, S denota um conjunto finito e P(S) denota o conjunto dos subconjuntos de S, parcialmente ordenado por inclusão.

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar a generalização do teorema de Sperner, provada originalmente por Erdös.

Inicialmente, definimos partições de P(S) em cadeias que possuem determinadas propriedades. Isto foi feito independentemente por Katona e Kleitman em [K1] e [K2]. Verificamos então, que estas partições são k-saturadas para todo k. Com este resultado, a demonstração do teorema central é imediata.

Vamos introduzir os enunciados dos teoremas combinatórios:

TEOREMA 1 (Sperner) - Seja X uma anticadeia de P(S). Então

$$|X| \leqslant \binom{|S|}{\left\lfloor \frac{|S|}{2} \right\rfloor}$$

TEOREMA 2 (Erdös) - Seja X uma k-família em P(S). Então |X| é menor ou igual à soma dos k maiores coeficientes binomiais

$$\binom{|S|}{j}.$$

É fácil ver que o teorema 1 é um corolário do teorema 2.

Em seguida apresentamos uma definição e alguns lemas.

DEFINIÇÃO 1 - Seja $C = \langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle$ uma cadeia de P(S). C é simétrica se satisfaz as propriedades:

1) $|A_j| = |A_{j+1}| - 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k-1$

2) $|A_1| + |A_k| = |S|$

LEMA 1 - Existe uma partição de P(S) em cadeias simétricas.

DEMONSTRAÇÃO - A prova será por indução em |S|. Se |S| = 1, trivial. Seja $\bar{S} = S - \{x\}$, $x \in S$. Pela hipótese de indução existe uma partição $\bar{\tau} = \{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_j\}$ de $P(\bar{S})$ em cadeias simétricas. Vamos definir uma partição τ de P(S) em cadeias simétricas a partir de $\bar{\tau}$. A cada cadeia $\bar{C}_i \in \bar{\tau}$, construímos as cadeias C_i e $D_i \in \tau$, se $|\bar{C}_i| \geq 2$. Em caso contrário, construímos apenas a cadeia $C_i \in \tau$, conforme descrevemos abaixo:

Seja $\bar{C}_i = \langle X_1, X_2, \ldots, X_k \rangle$

Então $C_i = \langle X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1} \rangle$ sendo $X_{k+1} = X_k \cup \{x\}$ e $D_i = \langle Y_1, Y_2, \ldots, Y_{k-1} \rangle$, sendo $Y_j = X_j \cup \{x\}$, $1 \leq j \leq k-1$.

Todo elemento de $P(S)$ pertence à uma cadeia de τ, pois se $X \in P(S)$, então ou X é um subconjunto de $\bar{S}$ ou é a união de $\{x\}$ a um subconjunto de $\bar{S}$.

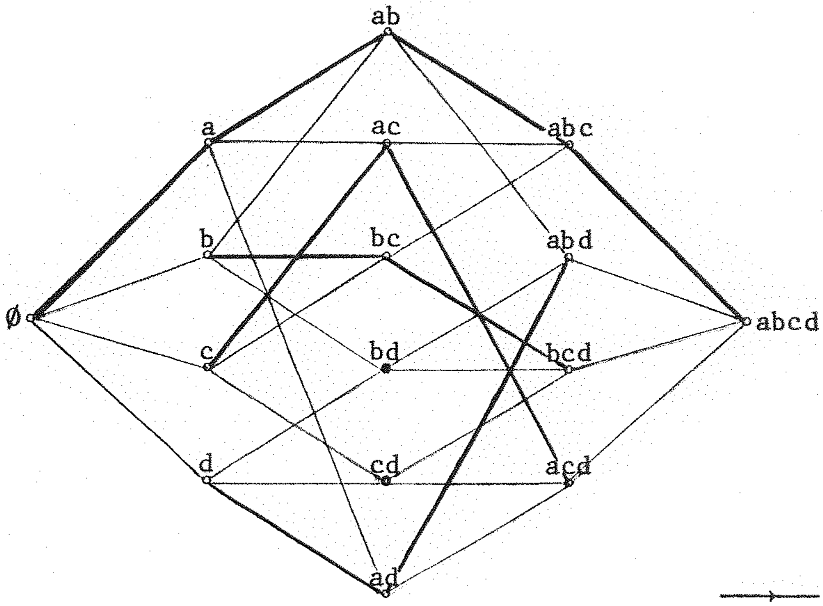
É fácil verificar que C_i e D_i $(1 \leq i \leq j)$ são cadeias simétricas em $P(S)$, desde que $\bar{C}_i$ é uma cadeia simétrica em $P(\bar{S})$.

Também as cadeias de τ são disjuntas duas a duas, pois as cadeias de $\bar{\tau}$ são duas a duas disjuntas.

Logo, τ é uma partição de $P(S)$ em cadeias simétricas, como queríamos demonstrar. ◆

Mostramos no exemplo abaixo uma partição τ de $P(S)$ em cadeias simétricas, dado $S = \{a, b, c, d\}$.

EXEMPLO 1 -



$\tau = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$, sendo:

$C_1 = \langle \emptyset,\ a,\ ab,\ abc,\ abcd \rangle$

$C_2 = \langle b,\ bc,\ bcd \rangle$

$C_3 = \langle c,\ ac,\ acd \rangle$

$C_4 = \langle d,\ ad,\ abd \rangle$

$C_5 = \langle bd \rangle$

$C_6 = \langle cd \rangle$

τ é mostrada em traço forte no diagrama de Hasse de P(S).

<u>LEMA 2</u> - Se τ é uma partição de P(S) em cadeias simétricas, τ contém $\binom{|S|}{\left\lfloor \frac{|S|+k}{2} \right\rfloor}$ cadeias de comprimento maior ou igual

a k.

DEMONSTRAÇÃO - Seja τ uma partição de $P(S)$ em cadeiras simétricas e $C \in \tau$. Se $|C| = k$, então o elemento maximal de C terá cardinalidade igual a $\frac{|S|+k-1}{2}$.

Suponhamos que $|C| \geq k$. C possui um subconjunto de S de cardinalidade igual a $\left\lfloor \frac{|S|+k}{2} \right\rfloor$. De fato, C possui um subconjunto de S de cardinalidade igual a $\frac{|S|+k-1}{2}$ se este número for inteiro, caso contrário, $|C| > k$ e C possui um subconjunto de S de cardinalidade igual a $\frac{|S|+k}{2}$. Como dois subconjuntos distintos de S, de mesma cardinalidade pertencem à cadeias distintas de τ existem $\binom{|S|}{\left\lfloor \frac{|S|+k}{2} \right\rfloor}$ cadeias em τ que contêm um elemento de cardinalidade igual a $\left\lfloor \frac{|S|+k}{2} \right\rfloor$. Como cada uma destas cadeias tem comprimento maior ou igual a k, o lema está demonstrado.

COROLÁRIO 1 - Seja τ como no teorema acima. Então

$$|\tau| = \binom{|S|}{\left\lfloor \frac{|S|}{2} \right\rfloor}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Pelo lema 2,

$$|\tau| = \binom{|S|}{\left\lfloor \frac{|S|+1}{2} \right\rfloor}. \text{ Como } \binom{|S|}{\left\lfloor \frac{|S|+1}{2} \right\rfloor} = \binom{|S|}{\left\lfloor \frac{|S|}{2} \right\rfloor},$$

o corolário está provado. ◆

Apresentamos abaixo uma demonstração do teorema de Sperner.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1 -

Seja $X \in \gamma(P(S))$.

Pelo lema 1 e corolário 1, existe uma partição τ de $P(S)$ em $\binom{|S|}{\lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor}$ cadeias simétricas. Desde que cada cadeia de τ possui no máximo um elemento de X, então $|X| \leq \binom{|S|}{\lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor}$, como queríamos demonstrar. ◆

Usando o lema 2, provamos o lema abaixo:

LEMA 3 - Seja $\tau = \{C_1, C_2, \ldots, C_j\}$ uma partição de $P(S)$ em cadeias simétricas. Então τ é k-saturada para todo $k \geq 1$, isto é,

$$d_k(P(S)) = \sum_{i=1}^{j} \min\{|C_i|, k\} .$$

DEMONSTRAÇÃO - τ induz um limite superior em $d_k(P(S))$, calculado abaixo:

$$d_k(P(S)) \leqslant k\binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+k}{2}\right\rfloor} + (k-1)\left(\binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+k-1}{2}\right\rfloor} - \binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+k}{2}\right\rfloor}\right) +$$

$$+ (k-2)\left(\binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+k-2}{2}\right\rfloor} - \binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+k-1}{2}\right\rfloor}\right) + \ldots + \left(\binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+1}{2}\right\rfloor} -\right.$$

$$\left. + \binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+2}{2}\right\rfloor}\right) = \binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+k}{2}\right\rfloor} + \binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+k-1}{2}\right\rfloor} + \ldots + \binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|+1}{2}\right\rfloor} = K.$$

Vamos verificar que $d_k(P(S)) = K$. Seja $-\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor \leqslant i \leqslant \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$ e $Z_i = \left\{X \subseteq S \mid |X| = \left\lfloor\frac{|S|}{2}\right\rfloor + i\right\}$. Trivialmente verificamos que $Z_i \in \gamma(P(S))$. Seja $Y = \bigcup_{i=-\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} Z_i$. Então Y é uma k-família em P(S) e $|Y| = \sum_{i=-\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} \binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|}{2}\right\rfloor + i}$. Podemos verificar que K é igual a esta somatória com uma demonstração análoga à da proposição 3.IV. Logo, $d_k(P(S)) = K$ e τ é k-saturada para todo k. ◆

Finalizando este capítulo, observamos pelo lema 3 que a cardinalidade máxima de uma k-família em P(S) é igual a $\sum_{i=-\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} \binom{|S|}{\left\lfloor\frac{|S|}{2}\right\rfloor + i}$. Desde que esta somatória é igual à soma dos k maiores coeficientes binomiais $\binom{|S|}{j}$, concluímos então que o teorema 2 é um corolário imediato do lema 3.

- ¤ -

CAPÍTULO IV

TEOREMAS COMBINATÓRIOS NO CONJUNTO DOS DIVISORES DE UM NÚMERO

Com a finalidade de generalizar os resultados do capítulo III, vamos considerar P(N) o conjuntos dos divisores de um número natural N, parcialmente ordenado por divisibilidade e k um número natural.

Expomos inicialmente a extensão do lema 1.III, provada por Bruijn, Tengbergen e Kruyswijk [BTK]. Provamos então o teorema 1 que é uma extensão do teorema 2.III, com uma demonstração análoga à deste.

Uma outra demonstração deste resultado foi feita por J. Schönheim em [S1]. Como corolário deste teorema, obtemos o teorema 2, que generaliza o teorema de Sperner.

Prosseguimos com as definições.

DEFINIÇÃO 1 - Se $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}$ é a fatoração canônica de N, então $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_i$ é denominado grau de N e será denotado por

$g(N)$.

Vamos denotar por $L^k(N)$ o número de divisores de N de grau k. Convencionamos que $L^i(N) = 0$ se $i > g(N)$ ou $i < 0$ e $L^0(N) = 1$.

DEFINIÇÃO 2 - Uma cadeia $<d_1, d_2, \ldots, d_k>$ de divisores de N é simétrica se satisfaz as propriedades:

1) O quociente d_{i+1}/d_i é um número primo, $1 \leqslant i \leqslant k-1$.
2) $g(d_1) + g(d_k) = g(N)$.

LEMA 1 - Existe uma partição de P(N) em cadeias simétricas.

DEMONSTRAÇÃO -

A prova será por indução no número i de primos distintos que dividem N. Se $i = 0$, trivial. Suponhamos que o lema é válido para o número natural M tal que $N = Mp^{\alpha}$, p é um primo e p não divide M. Pela hipótese da indução existe uma partição $\bar{\tau} = \{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_i\}$ de P(M) em cadeias simétricas. Vamos definir uma partição τ de P(N) a partir de $\bar{\tau}$. Seja $\bar{C}_\ell = <d_1, d_2, \ldots, d_k>$ uma cadeia de $\bar{\tau}$. Vamos considerar os divisores $d_j p^{\beta}$ de N, $1 \leqslant j \leqslant k$ e $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Vamos mostrar através da figura a seguir que este conjunto de divisores de N pode ser particionado em j cadeias, $1 \leqslant j \leqslant k$.

$$\begin{array}{c|c|c|ccc}
d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots & d_k \\
d_1p & d_2p & d_3p & \vdots & \cdots & \vdots \\
d_1p^2 & d_2p^2 & d_3p^2 & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
d_1p^{\alpha-2} & d_2p^{\alpha-2} & d_3p^{\alpha-2} & \vdots & \cdots & d_kp^{\alpha-2} \\
d_1p^{\alpha-1} & d_2p^{\alpha-1} & d_3p^{\alpha-1} & \vdots & \cdots & d_kp^{\alpha-1} \\
d_1p^{\alpha} & d_2p^{\alpha} & d_3p^{\alpha} & \vdots & \cdots & d_kp^{\alpha}
\end{array}$$

As cadeias $< d_i, d_ip, d_ip^2, \ldots, d_ip^{\alpha-i+1}, d_{i+1}p^{\alpha-i+1}, \ldots, d_kp^{\alpha-i+1} >$ são simétricas, $1 \leq i \leq j$. De fato, elas satisfazem trivialmente a propriedade 1) da definição 2 e também a propriedade 2), pois:

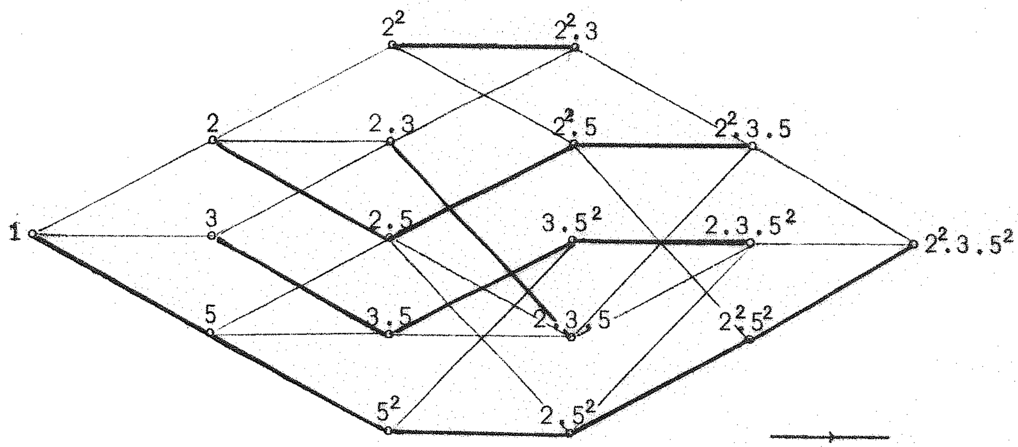
$$g(d_i) + g(d_kp^{\alpha-i+1}) = g(d_1) + i - 1 + g(d_k) + \alpha - (i-1) =$$

$$= g(d_1) + g(d_k) + \alpha = g(M) + \alpha = g(N).$$

Verifica-se que as cadeias acima são disjuntas duas a duas.

Desde que $P(M)$ é particionado em cadeias simétricas, podemos concluir este lema, baseados nas cadeias construídas acima. ◆

O exemplo descrito abaixo mostra uma partição τ de $P(300)$ em cadeias simétricas. τ é mostrada no diagrama de Hasse de $P(300)$, em traço forte.



$\tau = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, sendo:

$C_1 = <1, 5, 5^2, 2.5^2, 2^2.5^2, 2^2.3.5^2>$

$C_2 = <2, 2.5, 2^2.5, 2^2.3.5>$

$C_3 = <2^2, 2^2.3>$

$C_4 = <3, 3.5, 3.5^2, 2.3.5^2>$

$C_5 = <2.3, 2.3.5>$

Mostramos nas proposições 2 e 3, propriedades dos números $L^k(N)$, análogas a algumas propriedades dos coeficientes binomiais. Para a demonstração da proposição 2, usamos a proposição 1 que apresenta uma propriedade das cadeias simétricas.

PROPOSIÇÃO 1 - Seja $C = <d_1, d_2, \ldots, d_n>$ uma cadeia simétrica de $P(N)$. Então, existe $d \in C$ tal que $g(d) = \left\lfloor \frac{g(N)}{2} \right\rfloor$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que a tese é falsa. Podemos ter os casos:

a) $g(d_1) > \left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor$ e $g(d_n) > \left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor$. Então

$g(d_1) + g(d_n) \geqslant 2\left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor + 2 > g(N)$.

b) $g(d_1) < \left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor$ e $g(d_n) < \left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor$. Então

$g(d_1) + g(d_n) < 2\left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor \leqslant g(N)$.

Em qualquer caso, temos um absurdo, pois C é simétrica.

◆

PROPOSIÇÃO 2 -

i) $L^j(N) = L^{g(N)-j}(N)$.

ii) $L^0(N) \leqslant L^1(N) \leqslant \ldots \leqslant L^{\left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor}(N)$.

DEMONSTRAÇÃO -

i) Se $j < 0$ ou $j > g(N)$, $L^j(N) = L^{g(N)-j}(N)$, trivialmente.

Seja $0 \leqslant j \leqslant g(N)$. Sejam X e Y os conjuntos dos divisores de N de graus j e $g(N)-j$, respectivamente e ψ a função de X em Y tal que $\psi(d) = \frac{N}{d}$. É fácil ver que ψ é bijetora. Logo $|X| = |Y|$ e portanto $L^j(N) = L^{g(N)-j}(N)$.

ii) Seja τ uma partição de P(N) em cadeias simétricas, $0 \leqslant j < \left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor$ e $d \in P(N)$ tal que $g(d) = j$. Seja C a cadeia de τ que contém d. Pela proposição 1, C possui um elemento de grau $\left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor$. Então existe $d' \in C$ tal que $g(d') = j+1$. Logo $L^j(N) \leqslant L^{j+1}(N)$ e portanto a seqüência $L^0(N), L^1(N), \ldots, L^{\left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor}(N)$ é monotônica não decrescente. ◆

<u>PROPOSIÇÃO 3</u> -

$\sum_{j=1}^{k} L^{\left\lfloor \frac{g(N)+j}{2} \right\rfloor}(N)$ é igual à soma dos k maiores valores de $L^{i}(N)$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> -

Verificamos pela proposição 2 que $\displaystyle\sum_{j=-\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} L^{\left\lfloor \frac{g(N)}{2} \right\rfloor + j}(N)$

é a soma dos k maiores valores de $L^{i}(N)$. Mas,

$$\sum_{j=-\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} L^{\left\lfloor \frac{g(N)}{2} \right\rfloor + j}(N) = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} L^{\left\lfloor \frac{g(N)}{2} \right\rfloor + j}(N) + \sum_{j=-\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor}^{0} L^{\left\lfloor \frac{g(N)}{2} \right\rfloor + j}(N)$$

$$= \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} L^{\left\lfloor \frac{g(N)}{2} \right\rfloor + j}(N) + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} L^{\left\lfloor \frac{g(N)}{2} \right\rfloor - j}(N)$$

$$= \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} L^{\left\lfloor \frac{g(N)+2j}{2} \right\rfloor}(N) + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} L^{g(N) - \left\lfloor \frac{g(N)}{2} \right\rfloor + j}(N) \quad \text{(pela proposição 2)}$$

$$= \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} L^{\left\lfloor \frac{g(N)+2j}{2} \right\rfloor}(N) + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} L^{\left\lfloor \frac{g(N)+2j+1}{2} \right\rfloor}(N) = \sum_{j=1}^{k} L^{\left\lfloor \frac{g(N)+j}{2} \right\rfloor}(N).$$ ◆

Vamos agora generalizar o lema 2.III.

<u>LEMA 2</u> - Se τ é uma partição de $P(N)$ em cadeias simétricas, então τ possui $L^{\left\lfloor \frac{g(N)+k}{2} \right\rfloor}(N)$ cadeias de comprimento maior ou igual a k.

DEMONSTRAÇÃO - Seja τ uma partição de P(N) em cadeias simétricas e $C \in \tau$. Se $|C| = k$, então o elemento maximal de C terá cadinalidade $\frac{g(N)+k-1}{2}$. Logo, se $|C| \geq k$, C possui um divisor de N de grau $\frac{g(N)+k-1}{2}$ se este número for inteiro;caso contrário, $|C| > k$ e C possui um divisor de N de grau $\frac{g(N)+k}{2}$. Em qualquer caso, C possui um divisor de N de grau $\left\lfloor\frac{g(N)+k}{2}\right\rfloor$. Como dois divisores distintos de N, de mesmo grau pertencem à cadeias distintas de τ, existem $L^{\left\lfloor\frac{g(N)+k}{2}\right\rfloor}(N)$ cadeias em τ que contêm um elemento de grau $\left\lfloor\frac{g(N)+k}{2}\right\rfloor$. Como cada uma destas cadeias tem comprimento maior ou igual a k, o lema está provado.

LEMA 3 - Seja τ uma partição de P(N) em cadeias simétricas. Então τ é k-saturada para todo $k \geq 1$, isto é,

$$d_k(P(N)) = \sum_{C_i \in \tau} \min\{|C_i|, k\}$$

DEMONSTRAÇÃO - Com o auxílio do lema 2, verificamos que:

$$d_k(P(N)) \leq k \cdot L^{\left\lfloor\frac{g(N)+k}{2}\right\rfloor}(N) + (k-1)\left(L^{\left\lfloor\frac{g(N)+k-1}{2}\right\rfloor}(N) - L^{\left\lfloor\frac{g(N)+k}{2}\right\rfloor}(N)\right) +$$

$$+ \ldots + \left(L^{\left\lfloor\frac{g(N)+1}{2}\right\rfloor}(N) - L^{\left\lfloor\frac{g(N)+2}{2}\right\rfloor}(N)\right) = \sum_{j=1}^{k} L^{\left\lfloor\frac{g(N)+j}{2}\right\rfloor}(N) = K.$$

Vamos mostrar que existe $X \in \gamma_k(P(N))$ tal que $|X| = K$. Seja $-\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor \leq j \leq \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$ e $Z_j = \left\{d \in P(N) \mid g(d) = \left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor + j\right\}$. Verifica-se facilmente que $Z_j \in \gamma(P(N))$. Seja $X = \bigcup_{j=-\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} Z_j$. Então

$X \in \gamma_k(P(N))$ e $|X| = \sum_{j=-\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} L^{\left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor+j}(N)$. Mas $K = \sum_{j=-\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} L^{\left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor+j}(N)$, pela proposição 3. Logo $d_k(P(N)) = K$ e τ é k-saturada para todo k. ◆

<u>TEOREMA 1</u> - Seja $X \in \gamma_k(P(N))$. Então a cardinalidade de X é menor ou igual à soma dos k maiores valores de $L^i(N)$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Imediata, pelo lema 3. ◆

<u>TEOREMA 2</u> - Seja $X \in \gamma(P(N))$. Então

$$|X| \leq L^{\left\lfloor\frac{g(N)}{2}\right\rfloor}(N).$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Segue trivialmente do teorema 1. ◆

Uma outra demonstração do teorema 2 pode ser obtida diretamente do lema 1 e da proposição 1.

Se N é um número natural livre de quadrados, os teoremas 1 e 2 tornam-se teorema 2.III e teorema 1.III, respectivamente, portanto estes resultados generalizam o teorema de Sperner.

- ¤ -

BIBLIOGRAFIA

[B] - Birkhoff,G., *Lattice Theory*, AMS Colloquium Publications, Vol. 25, American Mathematical Society, Providence,R.I., 1967.

[BTK] - Bruijn,N.G.de; Van Ebbenhorst Tengbergen,C. & Kruyswijk,D., On the set of divisors of a number. *Nieuw Arch. Wisk*, *23* (2), 191-3, 1951.

[D1] - Dilworth,R.P., A decomposition theorem for partially ordered sets. *Ann.of Math.*, *51* (1), 161-6, 1950.

[D2] - Dilworth,R.P., Some combinatorial problems on partially ordered sets, in *Combinatorial Analysis*, 85-90, Proc. Symp. Appl. Math., American Mathematical Society,Providence,R.I.,1960.

[E] - Erdös,P., On a lemma of Littlewood and Offord. *Bull. Am. Math. Soc.*, *51*, 898-902, 1945.

[G] - Greene,C., Some partitions associated with a partially ordered set. *J.Combinatorial Theory, Ser. A*, *20* (1), 69-79, 1976.

[GK] - Greene,C. & Kleitman,D.J., The structure of Sperner k-families. *J.Combinatorial Theory, Ser. A*, *20* (1), 41-68, 1976.

[HS] - Hoffman,A.J. & Schwartz,D.E.,On partitions of a partially ordered set. *J.Combinatorial Theory, Ser. B*, *23* (1), 3-13, 1977.

[K1] - Katona,G., On a conjecture of Erdös and a stronger form of Sperner's theorem. *Studia Sci.Math.Hungar.*,*1*, 59-63, 1966.

[K2] - Kleitman,D.J., On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums. *Math.Z.*,*90* (4), 251-9, 1965.

[L] - Lubell,D., A short proof of Sperner's lemma. *J. Combinatorial Theory*, *1*, 299, 1966.

[S1] - Schönheim,J., A generalization of results of P.Erdös, G. Katona and D.J.Kleitman concerning Sperner's theorem. *J.Combinatorial Theory*, *11*, 111-7, 1971.

[S2] - Sperner,E., Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. *Math. Z.*, *27*, 544-8, 1928.

- ¤ -