Sobre os Semigrupos de Burnside $x^n = x^{n+m}$.

Alair Pereira do Lago

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo

para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Área de concentração: **Ciência da Computação**
Orientador: **Prof. Dr. Imre Simon**

Durante a obtenção deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

São Paulo, novembro de 1991

Pouca observação e muito raciocínio conduzem ao erro.
Muita observação e pouco raciocínio conduzem à verdade.

(Alexis Carrel, *Reflexões sobre a conduta da vida*)
Nobel de medicina

à Mônica
a meus pais
a meus amigos

Agradecimentos

Muitas pessoas são corresponsáveis pela minha história e esta tese é devida também a elas. Em especial, quero lembrar os professores

Shigueo, Renate, Waldyr e Imre.

Com sua paixão pela matemática me levaram a apreciar o trabalho de me arriscar numa busca que, no fundo, revela o desejo de algo muito maior que a aparência deste trabalho permite ver.

Resumo

Neste trabalho provamos a reconhecibilidade das classes de congruência de A^* associadas ao semigrupo de Burnside com $|A|$ geradores definido pela equação $x^n = x^{n+m}$, para $n \geq 4$ e $m \geq 1$.

Este problema foi originalmente formulado por Brzozowski em 1969 para $m = 1$ e $n \geq 2$ e foi resolvido há dois anos por Aldo de Luca & Stefano Varricchio nos casos em que $n \geq 5$. Pouco depois, John McCammond estendeu o problema para $m \geq 1$ e o resolveu de forma independente nos casos em que $n \geq 6$ e $m \geq 1$. Nosso trabalho, que se baseia nas técnicas de Aldo de Luca & Stefano Varricchio, estende os dois resultados portanto.

Para tanto, construimos de forma efetiva, um gerador minimal Σ para a congruência em questão. Introduzimos também um conceito elementar, o de estabilidade de produções, que permite eliminar dos resultados principais quaisquer restrições adicionais sobre os valores de n ou m. Parte substancial da nossa demonstração é o resultado de que todas as produções em Σ são estáveis para $n \geq 4$ e $m \geq 1$.

Além disso fornecemos um algorítmo que resolve o problema da palavra e mostra que o semigrupo é finito $\mathcal{J}$-acima. Também mostramos que o "frame" das $\mathcal{R}$-classes é uma árvore. Caracterizamos também as $\mathcal{R}$-classes e as $\mathcal{D}$-classes do semigrupo e provamos que os subgrupos maximais são cíclicos de ordem m sempre nos casos em que $n \geq 4$ e $m \geq 1$.

Abstract

In this dissertation we prove that the congruence classes of A^* associated to the Burnside semigroup with $|A|$ generators defined by the equation $x^n = x^{n+m}$, for $n \geq 4$ e $m \geq 1$, are recognizable.

This problem was originaly formulated by Brzozowski in 1969 for $m = 1$ and $n \geq 2$. Two years ago Aldo de Luca & Stefano Varricchio solved the problem for $n \geq 5$. A little later, John McCammond extended the problem for $m \geq 1$ and solved it independently in the cases $n \geq 6$ and $m \geq 1$. Our work, wich is based on the techniques developed by Aldo de Luca & Stefano Varricchio, extends both these results.

We effectively construct a minimal generator Σ of our congruence. We introduce an elementary concept, namely the stability of productions, wich allows to eliminate all hypothesis related to the values of n and m. A substantial part of our proof consists of showing that all productions in Σ are stable, for $n \geq 4$ e $m \geq 1$.

We also give an algorithm that solves the word problem and show that the semigroup is finite $\mathcal{J}$-above. We prove that the frame of the $\mathcal{R}$-classes of the semigroup is a tree. We characterize also the $\mathcal{R}$-classes and the $\mathcal{D}$-classes of the semigroup and prove that its the subgroups are cyclic of ordem m in the cases $n \geq 4$ e $m \geq 1$.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução.

Seja A um alfabeto finito com mais que uma letra, Seja A^* o conjunto de todas as palavras com letras em A (inclusive a palavra vazia 1) e seja $A^+ \stackrel{\text{def}}{=} A^* \setminus \{1\}$.

Neste trabalho suporemos n e m inteiros fixos e satisfazendo as restrições: $n \geq 2$ e $m \geq 1$. Os resultados mais importantes, contudo, são obtidos para $n \geq 4$ e $m \geq 1$.

Seja $\pi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x^n, x^{n+m}), \forall x \in A^+\}$ uma relação e tomemos por $\sim_\pi$ a menor congruência que contém π. Seja o conjunto $\mathcal{M} = \{[w],\ w \in A^*\}$ onde $[w]$ denota a classe de congruência da palavra w pela congruência $\sim_\pi$. Seja $\varphi : A^* \xrightarrow{\text{epi}} \mathcal{M}$ definida por $\varphi(w) = [w]$ a projeção canônica de A^* sobre $\mathcal{M}$. A congruência $\varphi^{-1}\varphi$ é a menor congruência que contém π e a projeção φ induz uma operação associativa sobre $\mathcal{M}$ definida por $[u] \cdot [v] = [uv]$. Assim $(\mathcal{M}, \cdot)$ é um monóide e $(\mathcal{M} \setminus [1], \cdot)$ é um semigrupo. Estes são, respectivamente, o *monóide de Burnside* e o *semigrupo de Burnside* relativos à equação $x^n = x^{n+m}$.

Nestes termos a conjectura de Brzozowski da qual tratamos pode ser formulada como segue:

$$\forall w \in A^*, [w] \text{ é reconhecível.}$$

Em outras palavras, para toda palavra w existe um autômato finito $\mathcal{A}$ tal que o conjunto das palavras que induz um caminho de algum estado inicial deste autômato para algum estado final é exatamnte $[w]$.

A partir de uma aplicação das palavras de Thue-Morse[9] e de um trabalho de Brzozowski e outros publicado em 1971[2], sabemos que estes semigrupos de Burnside são infinitos. Somente estamos considerando os casos em que $n \geq 2$ e $m \geq 1$ neste trabalho, contudo vale a pena observar que o semigrupo idempotente — o semigrupo de Burnside para os casos em que $n = 1$ e $m = 1$ — é finito e completamente conhecido. Na verdade, por um trabalho clássico de Green & Rees[4], sabemos que os semigrupos em que $n = 1$ e $m \geq 1$ são finitos se e só se os semigrupos em que $n = 0$ e $m \geq 1$ — que são grupos neste caso — são finitos. O estudo da finitude destes grupos, também chamados grupos de Burnside, é extremamente complexo e ainda hoje é objeto de muito estudo.

A conjectura em questão foi formulada originalmente para $m = 1$ em 1969[1] e é este o caso considerado por Aldo de Luca & Stefano Varricchio. Eles provaram a conjectura original para $n \geq 5$ em 1990[3] tendo restado os casos $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. John McCammond estendeu a conjectura para $m \geq 1$ em 1991[6] e resolveu independentemente o problema para os casos em que $n \geq 6$ e $m \geq 1$.

Nosso trabalho é profundamente baseado nas técnicas desenvolvidas por Aldo de Luca & Stefano Varricchio. A possibilidade de um aprimoramento destas técnicas de modo a provar a conjectura original para o caso em que $n = 4$ era prevista pelos mesmos, sendo mais céticos com relação à possibilidade de que estas técnicas pudessem ajudar a resolver os casos em que $n < 4$. Nós estendemos as mesmas para incluir os casos em que $m \geq 1$ e melhoramos os resultados de ambos de modo a provar a conjectura estendida para $n \geq 4$ e $m \geq 1$. Ademais, abrimos caminho para a demonstração dos casos em que $n = 3$ e $m \geq 1$ ou que $n = 2$ e $m = 1$. Também temos alguns resultados parciais sobre a estrutura dos semigrupos de Burnside para os quais a conjectura foi resolvida.

O conceito principal desenvolvido por nós que permitiu estas nossas melhorias é o conceito de estabilidade. As definições necessárias serão feitas neste parágrafo. Seja Ω um subconjunto de $A^+ \times A^+$ definido como $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(c, l)$ tal que c é ao mesmo tempo sufixo e prefixo próprio de l e $c^{-1}l$ é m-potência$\}$. Observe que $\pi \subset \Omega$. A cada $\tau \in \Omega$ chamamos de *produção*. Sobre cada produção τ definimos a função *base* como $\text{base}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} (|l| - |c|)/m$. Nós dizemos que c é o *curto* de τ enquanto que l é o *longo* de τ. Observe que $\text{base}(\tau)$ é período de c e de l. Dizemos que a produção τ é *estável* quando $\text{base}(\tau)$ for justamente o menor período de c e de l.

Inspirado nas técnicas de Aldo de Luca & Stefano Varricchio, construimos de maneira efetiva uma relação $\Sigma \subset \Omega$ (com uma descrição complexa e incomparável a π) tal que a menor congruência que a contém é $\sim_\pi$. Esta construção é feita no capítulo 3, depois de algumas definições e proposições. Durante a obtenção dos principais resultados do nosso trabalho, na medida do possível, procuramos demonstrá-los de modo a independer ao máximo uns dos outros, mas também a depender o mínimo possível de restrições adicionais sobre n e sobre m (além de que $n \geq 2$ e $m \geq 1$). Este espírito originou o conceito de estabilidade de produções visto acima. Apesar de elementar, é esta a chave mais importante encontrada para uma completa reestruturação e extensão das demonstrações originais de Aldo de Luca & Stefano Varricchio que fizemos. De fato, nenhum resultado nosso supõe qualquer restrição adicional sobre n ou m mas apenas, em alguns casos, a hipótese de que as produções de Σ sejam estáveis. Esta situação contrasta com o trabalho de Aldo de Luca & Stefano Varricchio onde, por exemplo, todos os resultados principais e a quase totalidade dos auxiliares dependem do fato de que $n \geq 4$ e, em alguns casos, de que $n \geq 5$.

O primeiro resultado forte do trabalho é justamente o da demonstração de que a menor congruência que contém Σ é a mesma que contém π e vale para $n \geq 2$ e $m \geq 1$ (nem mesmo depende da estabilidade das produções de Σ). Isto é feito no capítulo 4. O segundo resultado forte é o da demonstração da estabilidade das produções de Σ quando $n \geq 4$ e $m \geq 1$. Isto é feito no capítulo 5. Sabemos que existem produções de Σ que não são estáveis quando $n = 2$ e $m \geq 2$. Ficam em aberto o caso $n = 2$ e $m = 1$ e o caso $n = 3$ e $m \geq 1$. Os nossos demais resultados supõem a estabilidade das produções de Σ e, como já dissemos, não supõem restrições adicionais sobres os valores de n ou m. Em particular, a demonstração da conjectura para $n = 3$ e $m \geq 1$ ou $n = 2$ e $m = 1$ poderia ser obtida caso tivéssemos uma demonstração de que as produções de Σ são estáveis também nestes casos. Nós temos evidências disto quando $n = 3$.

Num terceiro momento, nós mostramos que em toda classe $[w']$ existe uma única palavra w mais curta que as demais, a partir da qual, por sucessivas substituições dos curtos de produções de Σ por seus respectivos longos, obtemos qualquer palavra em $[w']$. Também mostramos que Σ é uma relação minimal tal que a menor congruência que a contém é $\sim_\pi$. Isto é feito no capítulo 6.

Por fim, no capítulo 7, provamos que o semigrupo é finito $\mathcal{J}$-acima e provamos a conjectura de Brzozowski. Isto foi provado também por Aldo de Luca & Stefano Varricchio e John McCammond nos casos por eles estudados.

O conceito de finitude $\mathcal{J}$-acima e outros conceitos da teoria de semigrupos podem ser vistos no começo do capítulo 7, podendo ser aprofundados em [5]. Também mostramos que o "frame" das $\mathcal{R}$-classes é uma árvore e que existe uma única palavra mais curta na imagem inversa por φ de uma dada $\mathcal{R}$-classe. Isto também foi mostrado por Imre Simon em 1970[8] para os casos da conjectura original. John McCammond mostrou em seu trabalho que os subgrupos maximais dos semigrupos de Burnside por ele estudados são cíclicos de ordem m e mostramos isto também para os semigrupos por nós estudados. Temos alguns resultados originais relativos à estrutura destes semigrupos. Mostramos que a estrutura interna (em particular o tamanho e as transições internas) de uma $\mathcal{R}$-classe é determinada exclusivamente pelo mais longo sufixo desta única mais curta palavra descrita acima que é um curto de alguma produção de Σ (se este sufixo não existir a $\mathcal{R}$-classe é trivial). Mostramos também que as $\mathcal{D}$-classes regulares são aquelas que contêm a classe de equivalência de alguma produção de Σ, sendo que dois elementos destes estão na mesma $\mathcal{D}$-classe se e somente se as produções em questão têm a mesma base e seus curtos têm menores períodos que são palavras conjugadas. Mostramos também que as $\mathcal{H}$-classes irregulares são triviais.

Fazemos também freqüentes alterações nas definições apresentadas no trabalho de Aldo de Luca & Stefano Varricchio para permitir melhorias nas demonstrações, por motivo de compacidade, ou por questão de estilo.

Capítulo 2

Conceitos e Proposições Combinatórias.

Se $\mathcal{C}$ é um conjunto qualquer e $\leq$ é uma ordem ou quase-ordem, total ou parcial, definimos o *subconjunto dos máximos* de $\mathcal{C}$ sob $\leq$ e o *subconjunto dos mínimos* respectivamente como: $\max_{\leq}(\mathcal{C}) = \{c \in \mathcal{C}$ tal que $\forall d \in \mathcal{C}, c \leq d \Longrightarrow d \leq c\}$; e $\min_{\leq}(\mathcal{C}) = \{c \in \mathcal{C}$ tal que $\forall d \in \mathcal{C}, d \leq c \Longrightarrow c \leq d\}$. Quando a ordem for a ordem comum sobre os inteiros, então a mesma poderá ser omitida na notação. Por convenção, e por abuso de linguagem, identificaremos um conjunto de um único elemento com o seu próprio elemento. Se $\mathrm{R} \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ é uma relação sobre $\mathcal{C}$, então $\mathrm{Dom}(\mathrm{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{c \in \mathcal{C}$ tal que existe $d \in \mathcal{C}$ com $(c, d) \in \mathrm{R}\}$ é o *domínio* de R e $\mathrm{Im}(\mathrm{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{c \in \mathcal{C}$ tal que existe $d \in \mathcal{C}$ com $(d, c) \in \mathrm{R}\}$ é a *imagem* de R.

Definimos uma *palavra* w *sobre um alfabeto* A como sendo uma *seqüência finita* de elementos de A. Dizemos que o tamanho $|w|$ da seqüência é o *comprimento* de w. Dizemos que A^* é o conjunto das palavras sobre A e A^k é conjunto das palavras sobre A de comprimento k. Neste trabalho, manteremos fixo o alfabeto A e, portanto, somente nos referenciaremos a w como uma *palavra*. Dizemos que $\mathrm{Let}(w)$ é o *conjunto das letras* de w. Assim a palavra *ababbaba* tem comprimento 8 e o conjunto de suas letras é $\{a, b\}$. Permitiremos deliberadamente a confusão de letras e palavras de comprimento 1, sem perigo de ambiguidade.

Dadas duas palavras u e v quaisquer, definimos a sua concatenação uv (ou $u\,v$) como sendo a palavra obtida pelo acréscimo da seqüência v ao fim da seqüência u. Observe que uv assim definida é uma operação, associativa por sinal. Observemos também que $|uv| = |u| + |v|$. Naturalmente, a concatenação de dois conjuntos é o conjunto das concatenações de seus elementos, respeitando-se a ordem. Definimos a quase-ordem $\leq$ e sua ordem estrita $<$ sobre as palavras como segue: $v \leq u \stackrel{\text{def}}{\iff} |v| \leq |u|$; $v < u \stackrel{\text{def}}{\iff} v \leq u$ e $u \not\leq v \iff |v| < |u|$. Esta será a ordem implícita sobre duas palavras quaisquer.

Definimos também uma função *potenciação* (denotamos como na potenciação usual) que aplica $A^* \times \mathbb{N}$ em A^* como se segue: $u^0 = 1; u^n = u\,u^{n-1}$ para $n \geq 1$. Definimos u^* como sendo o conjunto $u^* \stackrel{\text{def}}{=} \{u^k, k \in \mathbb{N}\}$ e definimos u^+ como $u^+ \stackrel{\text{def}}{=} u^* \setminus \{1\}$. Para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dizemos que uma palavra w é uma *k-potência* de u, ou que u é uma *k-subpotência* de w, quando $w = u^k$. Dizemos também que w é uma k-potência ou simplesmente uma potência. Definimos também o *grau* de uma palavra w em A^+ como sendo $\text{grau}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \max(\{k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \exists u \in A^+,\ w = u^k\})$. Dizemos que w é *primitiva* se a mais curta subpotência de w é w.

Definiremos algumas funções de A^* sobre os subconjuntos de A^* como segue: $\text{Fat}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in A^* \text{ tal que } w \in A^*uA^*\}$ é o conjunto dos *fatores* de w; $\text{Pref}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in A^* \text{ tal que } w \in uA^*\}$ é o conjunto dos *prefixos* de w; e $\text{Suf}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in A^* \text{ tal que } w \in A^*u\}$ o conjunto de *sufixos* de w. Se $k \leq |w|$ então existe um único prefixo de w de comprimento k e o denotaremos por $\text{pref}(w, k)$. Analogamente, $\text{suf}(w, k)$ é o *sufixo* de w de mesmo comprimento. Para $v \in \text{Suf}(u)$ dizemos que $uv^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{pref}(u, |u| - |v|)$. Quando $v \in \text{Pref}(u)$ dizemos que $v^{-1}u \stackrel{\text{def}}{=} \text{suf}(u, |u| - |v|)$. Seja $k \in \mathbb{N}$ e $0 < k \leq |u|$ definimos $uA^{-k} \stackrel{\text{def}}{=} \text{pref}(u, |u| - k)$ e também $A^{-k}u \stackrel{\text{def}}{=} \text{suf}(u, |u| - k)$. Por simplicidade de notação, definimos $uv^{-k} \stackrel{\text{def}}{=} u(v^k)^{-1}$. Definimos o *encaixe* de duas palavras u e v como: $u \rightleftharpoons v \stackrel{\text{def}}{=} \max(\text{Suf}(u) \cap \text{Pref}(v))$, ou seja, a palavra de maior comprimento que seja sufixo de u e prefixo de v simultaneamente.

Dizemos que duas palavras u e u' são *conjugadas* se $\exists v, v' \in A^*$ tais que $u = vv'$ e $u' = v'v$. A relação definida pelos pares de palavras conjugadas é uma relação de equivalência.

Dizemos que $u \in A^+$ (possivelmente mais comprido que w) é um *período* de w quando $w \in \text{Fat}(u^*)$. Neste caso também dizemos que $i = |u|$ é um *período* de w. Quando este inteiro i é mínimo, então dizemos que este é *o menor período* de w e denotamos: $i = \text{per}(w)$. Permitimo-nos dizer que este u é um menor periodo de w. Se u for um período de w, então definimos a *freqüência* de u (ou de seu comprimento) em w por $\mathrm{freq}(w,u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{freq}(w,|u|) \stackrel{\text{def}}{=} |w|/|u|$ que, intuitivamente, corresponde ao número de repetições de u em w. Definimos ainda o *índice* de w como sendo a freqüência de seu menor período: $\mathrm{indice}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{freq}(w,\mathrm{per}(w)) = \max(\{\mathrm{freq}(w,u)$ tal que u é período de $w\})$.

Seja $u = abcab$ e seja $v = bcaba$. A concatenação de u e v foi convensionalmente assumida como sendo a palavra $uv = abcabbcaba$, obtida conactenando-se v à direita de u. Esta escolha é unilateral e poderíamos também ter definido como sendo a concatenação à esquerda de u. Neste caso (chamamos de caso *dual*), teríamos que o que antes era sufixo viraria prefixo e o que era prefixo viraria sufixo. Uma conseqüência deste fato, a grosso modo, é que se uma propriedade vale para sufixos, então vale para prefixos também. Dizemos que prefixos e sufixos são *conceitos duais*. Assim sendo, mencionaremos as proposições somente em termos de sufixos e a propriedade dual deve ser assumida como verdadeira também.

As duas proposições sobre sufixos, prefixos e fatores que se seguem são básicas e conhecidas, não sendo portanto demonstradas.

Proposição 2.1 *Sejam $w, u, v, u', v' \in A^*$ tais que $w = u'u = v'v$. Então, existe $x \in A^*$ tal que $u = xv$ e $v' = u'x$ se e só se $|v| \leq |u|$ se e só se $|u'| \leq |v'|$. Em particular, $v \in \mathrm{Suf}(u)$ ou $u \in \mathrm{Suf}(v)$.*

Proposição 2.2 *Se $u \in \mathrm{Pref}(w), v \in \mathrm{Suf}(w)$ e $|u| + |v| \leq |w|$ então $u \in \mathrm{Pref}(wv^{-1})$, $v \in \mathrm{Suf}(u^{-1}w)$ e $u^{-1}(wv^{-1}) = (u^{-1}w)v^{-1}$. Em particular, $w = uv \iff |u| + |v| = |w|$.*

Devido ao fato de que se $x \in \mathrm{Suf}(u) \cap \mathrm{Pref}(v)$ então $(ux^{-1})v = u(x^{-1}v)$ permitimo-nos representar $(ux^{-1})v$ por $ux^{-1}v$ quando $x \in \mathrm{Suf}(u) \cap \mathrm{Pref}(v)$. Devido à proposição 2.2, permitimo-nos representar $(u^{-1}w)v^{-1}$ por $u^{-1}wv^{-1}$ quando $u \in \mathrm{Pref}(w)$ e $v \in \mathrm{Suf}(w)$.

Proposição 2.3 *Seja $u \in A^+$ um período de $w \in A^*$ e seja $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $w \in \mathrm{Fat}(u^k)$. Então existem $x, y \in A^*$ tais que $u^k = xwy$ com $x \in \mathrm{Pref}(u)$, $y \in \mathrm{Suf}(u)$ e $0 \leq |x|, |y| < |u|$. Se além disso $k \geq 2$, então $u^{k-2} \in \mathrm{Fat}(w)$.*

Demonstração.

Vamos provar a primeira parte da tese. Sejam $x, y \in A^*$ tais que $u^k = xwy$. Temos que $u, y \in \mathrm{Suf}(u^k)$. Como $u \in \mathrm{Suf}(y)$ implica que $u^{k-1} = xw(yu^{-1})$ que é uma contradição com a minimalidade de k, usando a proposição 2.1, temos que $0 \leq |y| < |u|$ e $y \in \mathrm{Suf}(u)$. De maneira dual temos que $x \in \mathrm{Pref}(u)$ e $0 \leq |x| < |u|$.

Vamos provar a segunda parte da tese. Admita que $k \geq 2$. Temos que $u^{k-1}, wy \in \mathrm{Suf}(u^k)$. Devido à minimalidade de k temos que $wy \notin \mathrm{Suf}(u^{k-1})$ e, usando a proposição 2.1, temos que $|u^{k-1}| < |wy|$ e que $u^{k-1} \in \mathrm{Suf}(wy)$. Como $y \in \mathrm{Suf}(u) \subseteq \mathrm{Suf}(u^{k-1})$, então temos que $u^{k-1}y^{-1} \in \mathrm{Suf}(w)$. Como $|y| < |u|$, então $|u^{k-1}y^{-1}| = (k-1)|u| - |y| > (k-2)|u|$. Ora, $u^{k-1}y^{-1}, u^{k-2} \in \mathrm{Pref}(u^{k-1})$, logo, usando a proposição 2.1, temos que $u^{k-2} \in \mathrm{Pref}(u^{k-1}y^{-1})$. Portanto, $u^{k-2} \in \mathrm{Fat}(u^{k-1}y^{-1}) \subseteq \mathrm{Fat}(w)$. ∎

Proposição 2.4 *Seja w uma k-potência, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então k divide $|w|$ e $w = \mathrm{pref}(w, |w|/k)^k = \mathrm{suf}(w, |w|/k)^k$.*

Demonstração.

Seja u tal que $w = u^k$. A demonstração é imediata uma vez que $|w| = k|u|$, $u = \mathrm{pref}(u^k, |u|) = \mathrm{pref}(w, |w|/k)$. Analogamente temos que $u = \mathrm{suf}(w, |w|/k)$. ∎

As duas proposições que se seguem são de imediata demonstração a partir das definições.

Proposição 2.5 *Para toda palavra v, para todo inteiro positivo k, temos que $\mathrm{Fat}(v^*) = \mathrm{Fat}((v^k)^*)$. Em particular, dada uma palavra w, temos que v é período de de w se e só se toda potência (ou subpotência) de v é período de w se e só se existe uma potência (subpotência) de v que é período de w.*

Proposição 2.6 *Se w é potência de u então u é período de w.*

A recíproca do proposição anterior não é, geralmente, verdadeira. Veremos agora uma condição necessária e suficiente para que isto aconteça.

Proposição 2.7 *Seja u um período de w. Então w é uma k-potência de algum conjugado de u se e só se $\mathrm{freq}(w, u) = k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Demonstração.

Suponha que w seja uma k-potência de u' onde u' é um conjugado de u e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neste caso $w = u'^k$ e $|u'| = |u|$. Assim $\text{freq}(w, u) = |w|/|u| = |u'|k/|u| = k$.

Sendo $k = \text{freq}(w, u)$, suponha que $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Assim $|w| = k|u|$. Tome k' mínimo tal que $w \in \text{Fat}(u^{k'})$. Sejam $x, y \in A^*$ tais que $u^{k'} = xwy$. Usando a proposição 2.3, temos que $x \in \text{Pref}(u)$, $y \in \text{Suf}(u)$ e $0 \leq |x|, |y| < |u|$. Nestas condições temos que $(k' - k)|u| = |u^{k'}| - k|u| = |xwy| - |w| = |x| + |y| < 2|u|$ e portanto $k' - k \in \{0, 1\}$. Se $k' = k$ então $x = y = 1$, $w = u^k$ e w é uma k-potência de um conjugado de u. Se $k' - k = 1$ então concluimos que $|x| + |y| = |u|$ e, usando a proposição 2.2, temos que $u = xy$. Neste contexto, temos que $w = x^{-1}u^{k'}y^{-1} = x^{-1}(xy)^{k+1}y^{-1} = (yx)^k$ e, portanto, w é uma k-potência de yx que é um conjugado de u. ∎

Proposição 2.8 *A palavra u' é conjugada de u se e só se $u' \in \text{Fat}(u^*) \cap A^{|u|}$ se e só se $u' \in \text{Fat}(u^2) \cap A^{|u|}$.*

Demonstração.

Admita $v, v' \in A^*$ tais que $u = vv'$ e $u' = v'v$. Então $u^2 = vv'vv' = vu'v'$ e, portanto, $u' \in \text{Fat}(u^2) \cap A^{|u|} \subseteq \text{Fat}(u^*) \cap A^{|u|}$.

Tome $u' \in \text{Fat}(u^*) \cap A^{|u|}$. Tome $k > 0$ mínimo segundo o qual $u' \in \text{Fat}(u^k) \cap A^{|u|}$. Sejam $v, v' \in A^*$ tais que $u^k = vu'v'$. Usando a proposição 2.3, temos que $v \in \text{Pref}(u)$, $v' \in \text{Suf}(u)$ e $0 \leq |v|, |v'| < |u|$. Assim $|u^k| = |v| + |v'| + |u'| < 3|u|$. Donde $k = 1$ ou $k = 2$ e $\text{Fat}(u^*) \cap A^{|u|} \subseteq \text{Fat}(u^2) \cap A^{|u|}$. Se $k = 1$ então $v = v' = 1$, e $u' = u$ é conjugado de u, trivialmente. Admitamos $k = 2$ e $|v| + |v'| = |u|$. Como $|v| + |v'| = |u|$, usando a proposição 2.2, temos que $u = vv'$ e, portanto, $u' = v^{-1}u^2v'^{-1} = v'v$. Assim u e u' são conjugados. ∎

A proposição 2.8 nos permite relacionar os conceitos de conjugado e período. Embora não seja o nosso objetivo, podemos desenvolver esta proposição de modo a caracterizar o conjunto dos conjugados de uma palavra. Podemos mostrar que o conjunto dos conjugados de u é $\text{Fat}(u\,\text{pref}(u, |u|/\text{grau}(u) - 1)) \cap A^{|u|}$ e sua cardinalidade é $|u|/\text{grau}(u)$.

Faremos algumas observações sobre os conjugados dos períodos.

Proposição 2.9 *Sejam u e u' conjugados. Então* $\mathrm{Fat}(u^*) = \mathrm{Fat}(u'^*)$, *em particular, dada uma palavra w qualquer, temos que u é um período de w se e só se u' é um período de w.*

Demonstração.

Sejam v, v' tais que $u = vv'$ e $u' = v'v$. Então teremos $\mathrm{Fat}(u^k) = \mathrm{Fat}((vv')^k) \subseteq \mathrm{Fat}(v'(vv')^k v) = \mathrm{Fat}(u'^{k+1})$. Assim $\mathrm{Fat}(u^*) \subseteq \mathrm{Fat}(u'^*)$ e, analogamente, $\mathrm{Fat}(u'^*) \subseteq \mathrm{Fat}(u^*)$ e, portanto, $\mathrm{Fat}(u'^*) = \mathrm{Fat}(u^*)$. Naturalmente, então, $w \in \mathrm{Fat}(u'^*) \Longleftrightarrow w \in \mathrm{Fat}(u^*)$. ∎

Uma investigação interessante seria a de verificar se a recíproca vale. A resposta é não. Ela vale para períodos mais curtos que a palavra, como veremos na proposição abaixo.

Proposição 2.10 *Sejam u e u' dois períodos de w satisfazendo: $|u| = |u'| \leq |w|$. Então u e u' são conjugados.*

Demonstração.

Tome $u'' \in \mathrm{Fat}(w) \cap A^{|u|}$. Ora, $|u| = |u'|$ e, usando a proposição 2.12, temos que u'' é conjugado de u como também de u'. Por transitividade temos que u e u' são conjugados. ∎

Proposição 2.11 *Sejam u e u' dois conjugados. Se u é uma k-potência de x então u' é uma k-potência de um conjugado de x. Em particular,* $\mathrm{grau}(u) = \mathrm{grau}(u')$.

Demonstração.

Sejam $x \in A^+$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $u = x^k$ e $u^2 = x^{2k}$. Da proposição 2.6 temos que x é um período de u e de u^2. Da proposição 2.8 temos que $u' \in \mathrm{Fat}(u^2) \cap A^{|u|}$ e pela proposição 2.22 temos que x é período de u'. Ora, $\mathrm{freq}(u', x) = |u'|/|x| = |u|/|x| = k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e, usando a proposição 2.7, temos que u' é uma k-potência de um conjugado (chamemo-lo de x') de x. Assim $u' = x'^k$ e $\mathrm{grau}(u') \geq \mathrm{grau}(u)$. Analogamente temos o outro sentido da desigualdade e, portanto, temos que $\mathrm{grau}(u) = \mathrm{grau}(u')$. ∎

As proposições que se seguem agora se referem a fatores que são períodos.

Proposição 2.12 *Seja u um período de w satisfazendo $|u| \leq |w|$ e seja u' um fator de w de mesmo comprimento que u. Então u' é um conjugado de u e também é período de w.*

Demonstração.

Como $u' \in \text{Fat}(w) \subseteq \text{Fat}(u^*)$ e $|u'| = |u|$, temos que $u' \in \text{Fat}(u^*) \cap A^{|u|}$. Usando a proposição 2.8, teremos que u' é um conjugado de u e, pela proposição 2.9, também é período de w. ∎

Observe que a proposição anterior não nos garante que u seja um fator de w mas somente um conjugado seu. De fato isto nem sempre ocorre. A proposição que se segue nos dá uma condição suficiente para que isto ocorra.

Proposição 2.13 *Seja u um período de w. Se* $\text{freq}(w, u) \geq 2$ *então* $u \in \text{Fat}(w)$.

Demonstração.

Tome k mínimo tal que $w \in \text{Fat}(u^k)$ e sejam $x, y \in A^*$ tais que $u^k = xwy$. Temos que $2 \leq \text{freq}(w, u) = |w|/|u| = |x^{-1}u^k y^{-1}|/|u| = k - (|x| + |y|)/|u|$. Se $k = 2$ então $x = y = 1$, $w = u^2$ e obviamente $u \in \text{Fat}(w)$. Admita que $k \geq 3$. Usando a proposição 2.3, temos que $u \in \text{Fat}(u^{k-2}) \subseteq \text{Fat}(w)$. ∎

Proposição 2.14 *Seja* $u \in \text{Suf}(w) \setminus \{1\}$. *Então u é período de w se e só se* $wu^{-1} \in \text{Suf}(w)$.

Demonstração.

Admita que u seja período de w. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $w \in \text{Fat}(u^k)$. Sejam $x, y \in A^*$ tais que $u^k = xwy$. Assim $xwyu = u^{k+1} = uxwy = ux(wu^{-1})uy$ e, portanto, $xw = \text{pref}(u^{k+1}, |x| + |w|) = ux(wu^{-1})$. Como $|(wu^{-1})| < |w|$, usando a proposição 2.1, temos que $wu^{-1} \in \text{Suf}(w)$.

Admita que $wu^{-1} \in \text{Suf}(w)$. Seja $k = \lfloor |w|/|u| \rfloor$. Tome $k' \in \mathbb{N}$, $1 \leq k' \leq k$. Provaremos, por indução em k', que $u^k \in \text{Suf}(w)$ e que $wu^{-k} \in \text{Suf}(w)$. Para $k' = 1$ é imediato pois $u \in \text{Suf}(w)$ e $wu^{-1} \in \text{Suf}(w)$ por hipótese. Admita $1 \leq k' < k$ e que $wu^{-k'} \in \text{Suf}(w)$. Neste caso $|wu^{-k'}| = |w| - k'|u| \geq (k - k')|u| \geq |u|$. Como $u, wu^{-k'} \in \text{Suf}(w)$, usando a proposição 2.1, temos $u \in \text{Suf}(wu^{-k'})$ e, portanto, temos que $u^{k'+1} \in \text{Suf}(w)$. Como $wu^{-k'} \in \text{Suf}(w)$, então teremos que $wu^{-(k'+1)} \in \text{Suf}(wu^{-1}) \subseteq \text{Suf}(w)$.

Desta maneira temos que $wu^{-k}, u \in \text{Suf}(w)$ e como $|wu^{-k}| \leq |u|$, usando a proposição 2.1, temos que $wu^{-k} \in \text{Suf}(u)$. Portanto $w \in \text{Suf}(u^{k+1}) \subseteq \text{Suf}(u^*) \subseteq \text{Fat}(u^*)$. ∎

Corolário 2.15 *Seja $u \in \text{Suf}(w)$. Então u é período de w se e só se $w \in \text{Suf}(u^*)$. Neste caso $w \in \text{Suf}(u^{\lceil \text{freq}(w,u) \rceil})$ e $u^{\lfloor \text{freq}(w,u) \rfloor} \in \text{Suf}(w)$.*

Proposição 2.16 *Sejam $w \in A^+$ e $u, v \in \text{Suf}(w)$ dois períodos de w tais que $|u| > |v|$. Então uv^{-1} é período de wv^{-1}.*

Demonstração.

De $u \in \text{Suf}(w)$ e u é período de w temos, pela proposição 2.14, que $wu^{-1} \in \text{Suf}(w)$. Analogamente temos que $wv^{-1} \in \text{Suf}(w)$. Como $|u| > |v|$, então temos que $|wv^{-1}| > |wu^{-1}|$, donde $wu^{-1} \in \text{Suf}(wv^{-1})$ devido à proposição 2.1. Também temos que $v \in \text{Suf}(u)$ e uv^{-1} é definido. Como $|u| > |v|$, temos que $wv^{-1} = (wu^{-1})(uv^{-1})$ e, portanto, temos que $uv^{-1} \in \text{Suf}(wv^{-1}) \setminus \{1\}$ e que $(wv^{-1})(uv^{-1})^{-1} = wu^{-1} \in \text{Suf}(wv^{-1})$. Então, pela proposição 2.14, temos que uv^{-1} é período de wv^{-1}. ∎

Observe que $\text{mdc}(|u|, |v|) \leq |u|, |v|$. Donde temos que $|u| + |v| - \text{mdc}(|u|, |v|) \geq |u|, |v|, \text{mdc}(|u|, |v|)$.

Teorema 2.17 (Teorema de Fine & Wilf) *Sejam u' e v' dois períodos de w. Admita que $|w| \geq |u'| + |v'| - \text{mdc}(|u'|, |v'|)$. Então podemos definir $x = \text{suf}(w, \text{mdc}(|u'|, |v'|))$, $u = \text{suf}(w, |u'|)$ e $v = \text{suf}(w, |v'|)$. Então x é um período de w; $u = x^{|u|/|x|}$ e u' é uma $(|u|/|x|)$-potência de um conjugado de x e; $v = x^{|v|/|x|}$ e v' é uma $(|v|/|x|)$-potência de um conjugado de x.*

Demonstração.

Pela proposição 2.12, temos que u e v são períodos de w.

Admita que $|w| \geq |u| + |v| - \text{mdc}(|u|, |v|)$. Admitamos, sem perda de generalidade, que $|u| \geq |v|$. Então $|x| \leq |v| \leq |u| \leq |w|$ e, usando a proposição 2.1, temos que $x \in \text{Suf}(v) \subseteq \text{Suf}(u) \subseteq \text{Suf}(w)$.

Provaremos por indução em $\max(|u|, |v|)$. Admita que $|u| = 1$. Então $|u| = |v| = 1$, $x = v = u$ e a proposição se torna trivial.

Admita que $|u| > 1$.

Admita que $|v|$ divide $|u|$. Então temos que $x = v$, portanto x é período de w e, naturalmente, v é uma potência de x. Assim, usando a proposição 2.22, temos que $x = v$ é um período de $u \in \mathrm{Fat}(w)$. Como $\mathrm{freq}(u, x) = |u|/|v| \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, usando a proposição 2.7, temos que u é uma $(|u|/|x|)$-potência de um conjugado de x. Pela proposição 2.4, este conjugado é $\mathrm{suf}(u, |x|) = \mathrm{suf}(w, |x|) = x$.

Admitamos pois que $|v|$ não divide $|u|$. Assim $|x| < |v| < |u| < |w|$. Usando a proposição 2.16, temos que uv^{-1} é período de wv^{-1}. Observe que $uv^{-1} \in \mathrm{Suf}((wu^{-1})(uv^{-1})) = \mathrm{Suf}(wv^{-1})$. Usando a proposição 2.22, temos que v é período de wv^{-1} e, usando a proposição 2.14, temos que $wv^{-1} \in \mathrm{Suf}(w)$. Ora, $|x| = \mathrm{mdc}(|u|, |v|) = \mathrm{mdc}(|u| - |v|, |v|) = \mathrm{mdc}(|uv^{-1}|, |v|)$, portanto $|wv^{-1}| = |w| - |v| \geq |u| + |v| - \mathrm{mdc}(|u|, |v|) - |v| = |uv^{-1}| + |v| - \mathrm{mdc}(|uv^{-1}|, |v|) \geq |uv^{-1}|, |v|, |x|$. Ora, usando a proposição 2.1, temos que $x, v \in \mathrm{Suf}(wv^{-1})$. Como $\max(|uv^{-1}|, |v|) < \max(|u|, |v|) = |u|$, usando a hipótese de indução, temos que $v = x^{|v|/|x|}$ e que $uv^{-1} = x^{|uv^{-1}|/|x|}$. Assim $u = (uv^{-1})v = x^{|uv^{-1}|/|x|}x^{|v|/|x|} = x^{|u|/|x|}$. Usando a proposição 2.5, concluimos que x é um período de w.

Quanto a u' e v' serem potências de conjugados de x, segue imediatamente da proposição 2.11. ∎

A condição sobre o comprimento de $|w|$ acima é a melhor possível. Neste trabalho, no entanto, como $\mathrm{mdc}(|u|, |v|)$ pode ser muito pequeno relativamente a $|u| + |v|$, desprezaremos aquela parcela.

As três proposições seguintes relacionam os conceitos de menor período e primitividade.

Proposição 2.18 *Se u é um menor período de w então u é primitiva.*

Demonstração.

Seja $u = v^k$. Então, pela proposição 2.5, temos que este v é um período de w. Donde $|v| \geq \mathrm{per}(w) = |u| = |v^k| = k|v|$ e portanto $k = 1$. Assim $\mathrm{grau}(u) = 1$ e u é primitiva. ∎

Proposição 2.19 *Seja u primitiva um período de w. Seja v um período de w. Se $|v| < |u|$, então $|w| < |u| + |v|$.*

Demonstração.

Admita que $|v| < |u|$. Se $|w| \geq |u|+|v|$, usando o Teorema de Fine & Wilf, temos que $\mathrm{mdc}(|u|, |v|)$ é um período de w. Pela proposição 2.12, temos que $u' = \mathrm{suf}(w, |u|)$ é um conjugado de u. Como $\mathrm{mdc}(|u|, |v|)$ é período de

w, existe $x \in A^+$ tal que $|x| = \text{mdc}(|u|, |v|)$ e $u' \in \text{Fat}(w) \subseteq \text{Fat}(x^*)$. Assim temos que $\text{mdc}(|u|, |v|)$ é período também de u'. Usando a proposição 2.7 temos que u' é uma $(|u|/\text{mdc}(|u|, |v|))$-potência. Como u' é primitiva, pela proposição 2.11, então $\text{grau}(u') = 1$ e $|u|/\text{mdc}(|u|, |v|) = 1$. Portanto $|u| \leq |v|$ que é uma contradição. ∎

Corolário 2.20 *Seja u primitiva um período de w. Então* $\text{freq}(w, u) \geq 2$ *implica que u é um menor período de w.*

Demonstração.

Se, por absurdo, u não for um menor período de w, então existe $v \in A^*$ um menor período de w com $|v| < |u|$. Usando a proposição 2.19, temos que $|w| < |u| + |v| < 2|u|$, portanto $\text{freq}(w, u) = |w|/|u| < 2$. O que contradiz com as hipóteses. ∎

Teorema 2.21 *O conjunto das palavras das quais u é período é o mesmo conjunto das palavras das quais v é período se e só se as menores subpotências de u e v forem conjugadas.*

Demonstração.

Observe que o conjunto das palavras das quais u é período é exatamente $\text{Fat}(u^*)$. Sejam x e y as menores subpotências de u e v respectivamente. Pela proposição 2.5, temos que $\text{Fat}(u^*) = \text{Fat}(x^*)$ e que $\text{Fat}(v^*) = \text{Fat}(y^*)$.

Admita que x e y sejam conjugadas. Pela proposição 2.9, temos que $\text{Fat}(y^*) = \text{Fat}(x^*)$. Assim sendo, temos que $\text{Fat}(u^*) = \text{Fat}(v^*)$.

Admita que $\text{Fat}(u^*) = \text{Fat}(v^*)$. Assim podemos escolher uma palavra w em $\text{Fat}(y^*) = \text{Fat}(x^*)$ tal que $|w| \geq 2\max(\{|x|, |y|\})$. Como x e y são menores subpotências, então são primitivas e, pelo corolário 2.20, temos que são menores períodos de w e, portanto, têm o mesmo comprimento. Assim $x \in \text{Fat}(x^*) \cap A^{|x|} = \text{Fat}(y^*) \cap A^{|y|}$ e, pela proposição 2.8, temos que x e y são conjugadas. ∎

As duas proposições seguintes tratam da transmissão de periodicidade para os fatores.

Proposição 2.22 *Seja $w \in A^*$ com período u e seja w' um fator de w. Então w' tem período u e* $\text{per}(w') \leq \text{per}(w)$.

Demonstração.

É imediato uma vez que $w' \in \text{Fat}(w) \subseteq \text{Fat}(u^*)$ e que o mesmo ocorrerá para um menor período de w. ∎

A proposição 2.22 é de fato imediata. Não vale, em geral, a igualdade $\text{per}(w') = \text{per}(w)$. A proposição 2.23 nos dá uma condição suficiente para que isto ocorra.

Proposição 2.23 *Seja u um menor período de w. Seja $w' \in \text{Fat}(w)$. Se $|w'| \geq 2|u|$ então u continuará sendo um menor período de w'.*

Demonstração.

A partir da proposição 2.18 temos que u é primitiva. Da proposição 2.22 temos que u é período de w' e, usando o corolário 2.20, temos que u é um menor período de w'. ∎

A recíproca da proposição 2.22 certamente não vale. A proposição 2.24 nos dá uma condição para que, dado um período de um prefixo e um sufixo de uma palavra, também seja um período da palavra inteira.

Proposição 2.24 *Sejam $w, u, u', v, v' \in A^*$ tais que $w = uu' = v'v$. Seja x um período de u e x' um período de v com $|x| = |x'|$. Se $|u| + |v| \geq |w| + |x|$ então x e x' são períodos conjugados de w.*

Demonstração.

Admita que $|u| + |v| \geq |w| + |x|$. Seja $x'' = \text{suf}(u, |x|)$. Assim, temos que $x''u' \in \text{Suf}(uu') = \text{Suf}(w)$. Como $|x''u'| = |x| + |w| - |u| \leq |v|$ e $v \in \text{Suf}(w)$, usando a proposição 2.1, então temos que $x''u' \in \text{Suf}(v)$ e $x'' \in \text{Fat}(v)$. Usando a proposição 2.12, temos que x, x' e x'' são palavras conjugadas e que x'' é período de u e de v e, usando a proposição 2.22, temos que também é período de $x''u'$. Assim, pelo corolário 2.15, temos que existem naturais k e k' tais que $u \in \text{Suf}(x''^k)$ e $x''u' \in \text{Pref}(x''^{k'})$. Assim, temos que $u' \in \text{Pref}(x''^{k'-1})$ e, portanto, $uu' \in \text{Fat}(x''^k x''^{k'-1}) \subseteq \text{Fat}(x''^*)$ e x'', mas também x e x' devido à proposição 2.9, é período de $uu' = w$. ∎

Proposição 2.25 *Seja $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $k' \in \mathbb{N}$. Seja x um período de $w = ux^k v = u'x'^k v'$, com $|x| = |x'|$. Então $ux^{k'}v = u'x'^{k'}v'$ e x é período de $ux^{k'}v$.*

Demonstração.

Seja $y = \mathrm{suf}(w, |x|)$. Devido à proposição 2.12, temos que x, x' e y são períodos conjugados de w e, pela proposição 2.22, também de ux, ux^k e xv. Usando o corolário 2.15, temos que existem i e j tais que $ux \in \mathrm{Suf}(x^i)$, $xv \in \mathrm{Pref}(x^j)$ e $ux^{k'}v \in \mathrm{Fat}(x^{i-1}x^{k'}x^{j-1}) \subseteq \mathrm{Fat}(x^*)$. Assim x, mas também y devido à proposição 2.9, é período de $ux^{k'}v$. Analogamente, x' e y são períodos de $u'x'^{k'}v'$.

Vamos mostrar que $ux^{k'}v = u'x'^{k'}v'$. Seja $i = |u'x'^{k'}v'| = |u'x'^{k}v'| - (k - k')|x'| = |ux^kv| - (k - k')|x| = |ux^{k'}v|$. Admita que $k' > 0$. Como $y, xv \in \mathrm{Suf}(w)$ e, como $|y| = |x| \leq |xv|$, usando a proposição 2.1, temos que $y \in \mathrm{Suf}(xv) \subseteq \mathrm{Suf}(ux^{k'}v)$. Devido ao corolário 2.15, temos que $ux^{k'}v = \mathrm{suf}(y^{\lceil i/|y| \rceil}, i)$. Analogamante, temos que $u'x'^{k'}v' = \mathrm{suf}(y^{\lceil i/|y| \rceil}, i) = ux^{k'}v$. Admita que $k' = 0$. Devido à proposição 2.5, temos que x^k é período de ux^k e, devido à proposição 2.14, temos que $u \in \mathrm{Suf}(ux^k)$. Assim $uv = \mathrm{suf}(w, i)$. Analogamante, $u'v' = \mathrm{suf}(w, i) = uv$. ∎

A proposição que se segue relaciona os conceitos de índice e grau das palavras.

Proposição 2.26 *Se w é não primitiva, então* $\mathrm{indice}(w) = \mathrm{grau}(w)$.

Demonstração.

Se w é não primitiva, então $\mathrm{grau}(w) \geq 2$. Seja $u \in A^*$ tal que $w = u^{\mathrm{grau}(w)}$. Tome $v \in A^*$ tal que $u = v^{\mathrm{grau}(u)}$. Assim temos que $w = u^{\mathrm{grau}(w)} = v^{\mathrm{grau}(u)\mathrm{grau}(w)}$. Pela definição de grau(w), temos que $\mathrm{grau}(w) \geq \mathrm{grau}(u)\mathrm{grau}(w)$, donde $\mathrm{grau}(u) = 1$ e u é primitiva. Usando a proposição 2.6, temos que u é período de w. Temos ainda que $\mathrm{freq}(w, u) = |w|/|u| = |u^{\mathrm{grau}(w)}|/|u| = \mathrm{grau}(w) \geq 2$. Usando o corolário 2.20 teremos que $|u| = \mathrm{per}(w)$ e portanto $\mathrm{indice}(w) = \mathrm{freq}(w, u) = \mathrm{grau}(w)$. ∎

A seguinte proposição nos dá uma propriedade interessante relativa ao encaixe de duas palavras e nos permite demonstrar a proposição 2.28:

Proposição 2.27 *Temos que* $u(u \rightleftharpoons v)^{-1}v = \min(uA^* \cap A^*v)$.

Demonstração.

Temos que $u(u \rightleftharpoons v)^{-1}v \in uA^* \cap A^*v$ pois $u \in \mathrm{Pref}(u((u \rightleftharpoons v)^{-1}v))$ e $v \in \mathrm{Suf}((u(u \rightleftharpoons v)^{-1})v)$.

Admita que exista $x \in uA^* \cap A^*v$ satisfazendo $|x| \leq |u(u \rightleftharpoons v)^{-1}v| \leq |u| + |v|$. Nestas condições, existem $u', v' \in A^*$ tais que $x = u'v = uv'$ com $|v'| \leq |x| - |u| \leq |v|$, $|u'| \leq |x| - |v| \leq |u|$ e $|v'| + |u'| = 2|x| - |u| - |v| \leq |x|$. Usando a proposição 2.2, temos que existe $y \in A^*$ tal que $y = u'^{-1}(xv'^{-1}) = u'^{-1}u \in \mathrm{Suf}(u)$, $y = (u'^{-1}x)v'^{-1} = vv'^{-1} \in \mathrm{Pref}(v)$ e $|y| = |x| - |u'| - |v'| = |x| - (|x| - |v|) - (|x| - |u|) = |u| + |v| - |x| \geq |u| + |v| - |u(u \rightleftharpoons v)^{-1}v| = |u \rightleftharpoons v|$. Assim $|u \rightleftharpoons v| \leq |y|$ e, pela definição de encaixe, $|y| \leq |u \rightleftharpoons v|$. Donde $y = \mathrm{suf}(u, |u \rightleftharpoons v|) = |u \rightleftharpoons v|$ e segue imediato que $x = |u(u \rightleftharpoons v)^{-1}v|$. ∎

A seguinte proposição será freqüentemente usada nas demonstrações do capítulo 6:

Proposição 2.28 *Sejam $\mu, x, \eta, \mu', x', \eta' \in A^*$ tais que $\mu x \eta = \mu' x' \eta'$. Admita que $|\mu| \leq |\mu'|$.*

1. *Se $|\eta| \leq |\eta'|$ então existem $u, v \in A^*$ tais que: $\mu u = \mu'$, $v\eta = \eta'$, $x = ux'v$, e portanto $x' \in \mathrm{Fat}(x)$.*
2. *Se $|\eta| \geq |\eta'|$ então existem $u, v \in A^*$ tais que: $\mu u = \mu'$, $\eta = v\eta'$, $xv = ux'$, $|u| \geq |x| - |x \rightleftharpoons x'|$ e $|v| \geq |x'| - |x \rightleftharpoons x'|$.*

Demonstração.

Usando a proposição 2.1, podemos escolher $u \in A^*$ tal que $\mu' = \mu u$ e $ux'\eta' = x\eta$.

Admita que $|\eta| \leq |\eta'|$. Como $ux'\eta' = x\eta$, usando a proposição 2.1, temos que existe $v \in A^*$ tal que $\eta' = v\eta$, $ux'v = x$, donde $x' \in \mathrm{Fat}(x)$.

Admita que $|\eta| \geq |\eta'|$. Como $ux'\eta' = x\eta$, usando a proposição 2.1, temos que existe $v \in A^*$ tal que $\eta = v\eta'$ e $ux' = xv$. Nesta situação, temos que $ux' = xv \in xA^* \cap A^*x'$. Usando a proposição 2.27, temos que $|x| + |x'| - |x \rightleftharpoons x'| = |x(x \rightleftharpoons x')^{-1}x'| = |\min(xA^* \cap A^*x')| \leq |ux'| = |xv|$. Assim, segue imediato que $|u| \geq |x| - |x \rightleftharpoons x'|$ e $|v| \geq |x'| - |x \rightleftharpoons x'|$. ∎

Capítulo 3

Relações equivalentes a π.

3.1 Produções, Estabilidade e a ordem $\leq_r$.

Sendo $\tau = (x, y) \in A^+ \times A^+$ um par ordenado de palavras, definimos duas funções sobre τ: $c_\tau \stackrel{\text{def}}{=} x$ denota o *curto* de τ e $l_\tau \stackrel{\text{def}}{=} y$ denota o *longo* de τ. (Esta nomenclatura se justifica pois, neste trabalho, esta notação será usada sobre pares ordenados τ que satisfaçam $|c_\tau| < |l_\tau|$.)

Tomemos uma relação $\mathcal{T} \subseteq A^+ \times A^+$ e seja $\tau \in \mathcal{T}$. Definimos $\sim_\mathcal{T}$ como sendo a *menor conguência* que contém $\mathcal{T}$ e dizemos que τ é *necessário* em $\mathcal{T}$ quando a menor congruência que contém $\mathcal{T} \setminus \{\tau\}$ for um subconjunto próprio de $\sim_\mathcal{T}$. Dada uma relação $\equiv$ de equivalência (ou de congruência, em particular), dizemos que $[w]_\equiv \stackrel{\text{def}}{=} \{w' \in A^* \text{ tal que } w \equiv w'\}$ é a *classe de equivalência* (ou de congruência) de w sob a equivalência $\equiv$. Como a congruência $\sim_\pi$ é a equivalência mais usada neste trabalho, permitimo-nos representar suas classes de congruência simplesmente por $[w]$. Duas relações $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são ditas *equivalentes* se $\sim_{\mathcal{T}_1}$ e $\sim_{\mathcal{T}_2}$ são iguais. Denotamos $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{T}_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \sim_{\mathcal{T}_1} = \sim_{\mathcal{T}_2}$.

Dados $\tau, \sigma \in A^+ \times A^+$ e dada uma palavra $u \in A^*$, definimos a *concatenação* de τ e u como $\tau u \stackrel{\text{def}}{=} (c_\tau u, l_\tau u)$ e a concatenação de u e τ como $u\tau \stackrel{\text{def}}{=} (uc_\tau, ul_\tau)$. Se U é um conjunto de palavras, então o conjunto $U\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{u\tau, u \in U\}$ é a concatenação de U e τ, e $\tau U \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau u, u \in U\}$ é a concatenação de τ e U. Se $u \in \text{Suf}(c_\tau) \cap \text{Suf}(l_\tau)$, podemos definir $\tau u^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (c_\tau u^{-1}, l_\tau u^{-1})$ e se $u \in \text{Pref}(c_\tau) \cap \text{Pref}(l_\tau)$, podemos definir $u^{-1}\tau \stackrel{\text{def}}{=} (u^{-1}c_\tau, u^{-1}l_\tau)$. Definimos algumas funções de $A^+ \times A^+$ sobre os subconjuntos de $A^+ \times A^+$ como segue: $\mathrm{Pref}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in A^+ \times A^+ \text{ tal que } \tau \in \sigma A^*\}$ é o conjunto dos *prefixos* de τ; e $\mathrm{Suf}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in A^+ \times A^+ \text{ tal que } \tau \in A^*\sigma\}$ o conjunto de *sufixos* de τ.

Também definimos uma ordem parcial $\leq_r$ sobre $A^+ \times A^+$ e a ordem estrita $<_r$ como segue: $\sigma \leq_r \tau \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists u, v \in A^*$ tais que $\tau = u\sigma v$; e $\sigma <_r \tau \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sigma \leq_r \tau$ e $\sigma \neq \tau$. Dizemos que τ é *irredutível* em $\mathcal{T}$ quando τ for minimal em $\mathcal{T}$ segundo a ordem $\leq_r$ e definimos $\mathrm{irred}(\mathcal{T})$ como sendo a sub-relação de $\mathcal{T}$ que possui todas os elementos *irredutíveis* de $\mathcal{T}$, ou seja, $\mathrm{irred}(\mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\leq_r}(\mathcal{T})$. Definimos o *conjunto das expansões sob* $\mathcal{T}$ como sendo o conjunto $\Rightarrow_{\mathcal{T}} = A^*\mathcal{T}A^*$, ou seja, a relação definida por: $w \Rightarrow_{\mathcal{T}} w' \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\sigma \in \mathcal{T}$ tal que $\sigma \leq_r (w, w')$. A cada elemento de $\Rightarrow_{\mathcal{T}}$, chamamos simplesmente de *expansão*.

Como já definimos na introdução, $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(c,l)$ tal que $c \in \mathrm{Suf}(l) \cap \mathrm{Pref}(l) \setminus \{l\}$ e $c^{-1}l$ é m-potência$\}$ e a cada elemento de Ω chamamos de *produção*. Sobre cada produção τ já definimos a *base* de τ como sendo $\mathrm{base}(\tau) = |c_\tau^{-1}l_\tau|/m$ e definiremos mais duas funções sobre as produções de Ω: $\mathrm{b_{esq}}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pref}(l_\tau, \mathrm{base}(\tau))$ é a *base esquerda* de τ; $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{suf}(l_\tau, \mathrm{base}(\tau))$ é a *base direita* de τ. Dizemos que $|\tau| \stackrel{\text{def}}{=} |c_\tau|$ é o *comprimento* de τ. Definamos $\Omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau \in \Omega$ tal que $\mathrm{base}(\tau) = i\}$ e também $\Omega_{\leq i} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau \in \Omega$ tal que $\mathrm{base}(\tau) \leq i\}$, para $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Observe que, dado $\mathcal{T} \subseteq \Omega$, então $\mathcal{T} \cap \Omega_i$ é o subconjunto formado por todas as produções de $\mathcal{T}$ que têm base i e $\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq i}$ é o formado por aquelas que têm base menor ou igual a i.

Dizemos que duas produções τ e σ são *conjugadas*, quando $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ são conjugadas. A relação definida pelos pares de produções conjugadas é uma relação de equivalência. Dizemos que uma produção τ é *estável* quando $\mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{per}(l_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$. Observe que se τ for estável então $|c_\tau| \geq \mathrm{base}(\tau)$.

A proposição que seguirá é básica para aplicações posteriores, e omitiremos referências à mesma. Veremos algumas proposições sobre estes conceitos.

Proposição 3.1 *Seja τ uma produção em Ω. Então $c_\tau^{-1}l_\tau = \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m$ e $l_\tau c_\tau^{-1} = \mathrm{b_{esq}}(\tau)^m$ são palavras conjugadas e são períodos de c_τ e de l_τ, o mesmo acontecendo com $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$.*

Demonstração.

Usando a proposição 2.14 a partir da definição de Ω, temos que $c_\tau^{-1}l_\tau$ é um período de l_τ e como $c_\tau^{-1}l_\tau$ é uma m-potência, por definição, usando a proposição 2.4, teremos $c_\tau^{-1}l_\tau = \mathrm{suf}(c_\tau^{-1}l_\tau, \mathrm{base}(\tau))^m = \mathrm{suf}(l_\tau, \mathrm{base}(\tau))^m = \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m$. Usando a proposição 2.12, temos que $l_\tau c_\tau^{-1}$ é conjugado de $c_\tau^{-1}l_\tau$, também é um período de l_τ e, pela proposição 2.11, é uma m-potência de um conjugado de $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ que, pela proposição 2.4, é a própria $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$. Para concluir, $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ são períodos de l_τ devido à proposição 2.5, e todos os períodos de l_τ são também períodos de c_τ devido à proposição 2.22. ∎

Corolário 3.2 *Duas produções τ e σ são conjugadas se e só se $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{esq}}(\sigma)$ são conjugadas se e só se as palavras $\mathrm{b_{esq}}(\tau), \mathrm{b_{dir}}(\tau), \mathrm{b_{esq}}(\sigma)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ são todas conjugadas e são períodos de c_τ, c_σ, l_τ e l_σ.*

As proposições seguintes nos dão um conjunto de propriedades interessante sobre a ordem parcial $\leq_{\mathrm{r}}$:

Proposição 3.3 *Seja $\tau \in \Omega$ e seja $\sigma \in A^+ \times A^+$ com $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$. Então temos que $\sigma \in \Omega$ e que τ e σ são conjugadas.*

Demonstração.

Como $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$ então $\exists u, v \in A^*$ tais que $\tau = u\sigma v$. Assim $c_\tau, c_\sigma, l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Ora, $\tau \in \Omega$ implica que $c_\tau = uc_\sigma v \in \mathrm{Pref}(l_\tau) \cap \mathrm{Suf}(l_\tau) \setminus \{l_\tau\} = \mathrm{Pref}(ul_\sigma v) \cap \mathrm{Suf}(ul_\sigma v) \setminus \{ul_\sigma v\}$. Como $uc_\sigma v \in \mathrm{Pref}(ul_\sigma v) \setminus \{ul_\sigma v\}$, temos que $c_\sigma v \in \mathrm{Pref}(l_\sigma v)$ e $|c_\sigma| < |l_\sigma|$. Como $c_\sigma, l_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma v)$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$. Analogamente temos que $c_\sigma \in \mathrm{Suf}(l_\sigma)$ e temos que $c_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma) \cap \mathrm{Suf}(l_\sigma) \setminus \{l_\sigma\}$. donde $c_\sigma = u^{-1}c_\tau v^{-1} = u^{-1}(\mathrm{Pref}(ul_\sigma v) \cap \mathrm{Suf}(ul_\sigma v) \setminus \{ul_\sigma v\})v^{-1} = \mathrm{Pref}(l_\sigma) \cap \mathrm{Suf}(l_\sigma) \setminus \{l_\sigma\}$. Temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é um período de l_τ e, pela proposição 2.22, também o será de $c_\tau, c_\sigma, l_\sigma, c_\sigma{}^{-1}l_\sigma$. Observe que $|c_\sigma{}^{-1}l_\sigma| = |l_\sigma| - |c_\sigma| = (|l_\tau| - |u| - |v|) - (|c_\tau| - |u| - |v|)) = |l_\tau| - |c_\tau| = m\mathrm{base}(\tau) = m|\mathrm{b_{dir}}(\tau)|$ e portanto $\mathrm{freq}(c_\sigma{}^{-1}l_\sigma, \mathrm{b_{dir}}(\tau)) = m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e, usando a proposição 2.7, temos que $c_\sigma{}^{-1}l_\sigma$ é uma m-potência de um conjugado de $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$. Assim $\sigma \in \Omega$. Usando a proposição 2.4, temos que este conjugado de $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ do qual $c_\sigma^{-1}l_\sigma$ é m-potência é $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ e, portanto, σ e τ são produções conjugadas. ∎

Proposição 3.4 *Sejam $\tau, \sigma \in \Omega$. Então $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau \iff \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$ e $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Se $|c_\sigma| \geq \mathrm{base}(\sigma)$, então $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau \iff \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$ e $c_\sigma \in \mathrm{Fat}(c_\tau)$.*

Demonstração.

Suponha que $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$. Então existem $u, v \in A^*$ tais que $\tau = u\sigma v$. Assim $c_\sigma \in \mathrm{Fat}(c_\tau)$ e $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Usando a proposição 3.3, temos que τ e σ são produções conjugadas e, portanto, $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$.

Suponha que $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$ e que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Sejam $u, v \in A^*$ tais que $l_\tau = ul_\sigma v$. Então temos que $|uc_\sigma v| = |u| + (|l_\sigma|) - (m\mathrm{base}(\sigma)) + |v| = |u| + (|l_\tau| - |u| - |v|) - (m\mathrm{base}(\tau)) + |v| = |c_\tau|$. Como $c_\sigma \in \mathrm{Suf}(l_\sigma)$, então $c_\sigma v \in \mathrm{Suf}(l_\sigma v) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\tau)$. Como $c_\tau, c_\sigma v \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$ e como $c_\tau, u \in \mathrm{Pref}(l_\tau)$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\sigma v \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$ e $u \in \mathrm{Pref}(c_\tau)$. Usando a proposição 2.2, temos que $c_\tau = uc_\sigma v$ e, portanto, $\tau = u\sigma v$ e $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$.

Suponha que $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$ e que $c_\sigma \in \mathrm{Fat}(c_\tau)$ com $|c_\sigma| \geq \mathrm{base}(\sigma)$. Sejam $u, v \in A^*$ tais que $c_\tau = uc_\sigma v$. Como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma), c_\sigma \in \mathrm{Suf}(l_\sigma)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\tau), c_\tau \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$, como $|c_\tau| \geq |c_\sigma| \geq \mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\tau)$, usando a proposição 2.1, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$. Assim temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período de $(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{-1})\,\mathrm{b_{dir}}(\tau)^1\,1 = u(c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{-1})\,\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^1\,v$ e $|\mathrm{b_{dir}}(\tau)| = |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)|$. Concluimos então que $(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{-1})\,\mathrm{b_{dir}}(\tau)^{1+m}\,1 = u(c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{-1})\,\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{1+m}\,v$ devido à proposição 2.25 e, simplificando, temos que $l_\tau = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m = uc_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m v = ul_\sigma v$. Portanto $\tau \doteq u\sigma v$ e $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$. ∎

Proposição 3.5 *Sejam $\tau, \sigma \in \Omega$. Então, τ e σ são conjugadas se e só se existe uma produção $\rho \in \Omega$ tal que $\tau, \sigma \leq_{\mathrm{r}} \rho$.*

Demonstração.

Admita que τ e σ sejam conjugadas. Então, usando o corolário 3.2, temos que $u = \mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é um período de l_τ e de l_σ e, portanto, temos que $l_\tau, l_\sigma \in \mathrm{Fat}(u^*)$. Seja $k > m$ tal que $l_\tau, l_\sigma \in \mathrm{Fat}(u^k)$ e seja $\rho = (u^{k-m}, u^k) \in \Omega$. Como $\mathrm{base}(\rho) = |u^m|/m = \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$ e $l_\tau, l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\rho)$, usando a proposição 3.4, temos que $\tau, \sigma \leq_{\mathrm{r}} \rho$.

Admita que exista $\rho \in \Omega$ tal que $\tau, \sigma \leq_{\mathrm{r}} \rho$. Usando a proposição 3.3, temos que as produções τ, ρ e σ são todas conjugadas. ∎

A próxima proposição nos será útil na demonstração do Teorema da Equivalência, como veremos mais tarde.

Proposição 3.6 *Seja* $\mathcal{T} \subset A^+ \times A^+$. *Então* $\mathrm{irred}(\mathcal{T}) \equiv \mathcal{T}$.

Demonstração.

Note que $\mathrm{irred}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ e portanto $\sim_{\mathrm{irred}(\mathcal{T})} \subseteq \sim_{\mathcal{T}}$.

Seja $\tau \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{irred}(\mathcal{T})$. Então existe $\sigma \in \mathrm{irred}(\mathcal{T})$ tal que $\sigma <_{\mathrm{r}} \tau$, mas também $\exists u, v \in A^*$ tais que $\tau = u\sigma v$ e, portanto, $c_\tau = uc_\sigma v$ e $l_\tau = ul_\sigma v$. Donde $\tau \in \sim_{\{\sigma\}} \subseteq \sim_{\mathrm{irred}(\mathcal{T})}$, $\mathcal{T} \subseteq \sim_{\mathrm{irred}(\mathcal{T})}$ e $\sim_{\mathcal{T}} \subseteq \sim_{\sim_{\mathrm{irred}(\mathcal{T})}} = \sim_{\mathrm{irred}(\mathcal{T})}$.

Concluindo, $\sim_{\mathrm{irred}(\mathcal{T})} = \sim_{\mathcal{T}}$ e, por definição, $\mathrm{irred}(\mathcal{T}) \equiv \mathcal{T}$. ∎

Seguem-se algumas propriedades relativas à estabilidade.

Proposição 3.7 *Toda produção* $\tau \in \Omega$ *satisfaz* $\mathrm{per}(c_\tau) \leq \mathrm{per}(l_\tau) \leq \mathrm{base}(\tau)$. *Assim* τ *é estável se e somente se* $\mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$.

Demonstração.

Temos que $\mathrm{base}(\tau)$ é período de l_τ e portanto $\mathrm{per}(l_\tau) \leq \mathrm{base}(\tau)$. Da proposição 2.22 temos que $\mathrm{per}(c_\tau) \leq \mathrm{per}(l_\tau)$, pois $c_\tau \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$ por definição. O restante é imediato a partir da desigualdade demonstrada. ∎

Proposição 3.8 *Seja* τ *uma produção estável. Então* $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ *é primitiva.*

Demonstração.

Temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período de l_τ. Como τ é estável, então $\mathrm{per}(l_\tau) = \mathrm{base}(\tau) = |\mathrm{b_{dir}}(\tau)|$. Assim, pela proposição 2.18, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é primitiva. ∎

Diante da proposição 3.8, é natural perguntarmo-nos se a recíproca é verdadeira. A resposta é não. Na proposição 3.9 veremos uma condição suficiente para que a recíproca valha.

Proposição 3.9 *Seja* $\tau \in \Omega$ *com* $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ *primitiva. Se* $|c_\tau| \geq 2\mathrm{base}(\tau)$ *então* τ *é estável.*

Demonstração.

Temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período de l_τ. Assim sendo, $\mathrm{freq}(c_\tau, \mathrm{b_{dir}}(\tau)) = |c_\tau|/\mathrm{base}(\tau) \geq 2$ e, usando o corolário 2.20, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é um menor período de c_τ. Assim $\mathrm{per}(c_\tau) = |\mathrm{b_{dir}}(\tau)| = \mathrm{base}(\tau)$ e, pela proposição 3.7, temos que τ é estável. ∎

O coeficiente 2 visto na proposição anterior é o melhor possível. Para mostrar isto veja o exemplo 3.10 a seguir:

Exemplo 3.10 *Seja um real positivo* ϵ *e seja* $k \geq \max(\{3/\epsilon, 3\})$ *um inteiro. Seja* $\tau = (A^{-3}x^2, A^{-3}x^{2+m})$ *onde* $x = aba^{k-2}$. *Então* $\mathrm{b_{dir}}(\tau) = x$ *é primitiva,* $|c_\tau| \geq (2-\epsilon)\mathrm{base}(\tau)$ *mas* τ *não é estável.*

Demonstração.

É imediato verificar que $x = \mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é primitiva. Observe que $c_\tau = a^{k-2}ba^{k-2}$. Observe também que $|c_\tau| = 2k-3 = 2\mathrm{base}(\tau) - 3 = (2 - 3/k)\mathrm{base}(\tau) \geq (2-\epsilon)\mathrm{base}(\tau)$. Finalmente, como temos que $\mathrm{per}(c_\tau) = |a^{k-2}b| = k-1 < k = |x| = \mathrm{base}(\tau)$, temos, portanto, que τ não é estável. ∎

Proposição 3.11 *Se* $\tau \in \Omega$ *é estável, então* $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$.

Demonstração.

Como $c_\tau, \mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$ e como $|c_\tau| \geq \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{base}(\tau) = |\mathrm{b_{dir}}(\tau)|$, usando a proposição 2.1, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$. ∎

3.2 Reduções e fecho por redução.

Faremos agora uma apresentação do que vem a ser a já mencionada relação Σ.

Primeiramente, vamos mostrar que existem produções em π que não são minimais em $\sim_\pi$ segundo a ordem $\leq_{\mathrm{r}}$ e existem algumas que são conseqüência direta de outras produções de π (não são necessárias em π). Para tanto observemos os exemplos a seguir.

Exemplo 3.12 *Seja* $\tau = (x^n, x^{n+m}) \in \pi$ *onde* $x = (b(ab)^{n+m-1})$. *Seja* $\sigma = ((ab)^n x^{n-2}(ba)^n, (ab)^n x^{n+m-2}(ba)^n)$. *Então temos que* $\sigma <_{\mathrm{r}} \tau$ *e* $\sigma \in \sim_\pi$, *muito embora* σ *não seja da forma* (y^n, y^{n+m}) *para nenhum* $y \in A^+$. *Temos também que* σ *não é estável quando* $n = 2$ *e* $m \geq 2$.

Demonstração.

Note que $((ab)^n, (ab)^{n+m}) = ((ab)^n, ax) \in \pi$ e que $((ba)^n, (ba)^{n+m}) = ((ba)^n, xa) \in \pi$. Observe que $(ab)^n x^{n-2}(ba)^n \sim_\pi (ab)^{n+m}x^{n-2}(ba)^{n+m} = axx^{n-2}xa \sim_\pi axx^{n+m-2}xa = (ab)^{n+m}x^{n+m-2}(ba)^{n+m} \sim_\pi (ab)^n x^{n+m-2}(ba)^n$, donde temos que $\sigma \in \sim_\pi$. Assim temos que $\tau = b(ab)^{m-1}\,\sigma\, b(ab)^{m-1}$, que $\sigma <_{\mathrm{r}} \tau$, que $\sigma \in \sim_\pi$ e que σ não é da forma (y^n, y^{n+m}) para nenhum $y \in A^+$.

Suponha que $n = 2$ e que $m \geq 2$. Temos que $c_\sigma = ababbaba$ e que $\mathrm{per}(c_\sigma) = 5 < 3 + 2m = |x| = \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$ devido à proposição 3.3. Assim temos que σ não é estável nestes casos. ∎

Exemplo 3.13 *Seja $x = aa$ e seja $\tau = (x^n, x^{n+m}) \in \pi$ uma produção não estável. Então a produção τ não é necessária em π.*

Demonstração.

Como $\mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{per}(a^{2n}) = 1 < 2 = \mathrm{base}(\tau)$, temos que τ não é estável. Como $(a^n, a^{n+m}) \in \pi$, temos que $x^{n+m} = a^{2(n+m)} = a^{n+m}a^{n+m} \sim_\pi a^n a^{n+m} \sim_\pi a^n a^n = x^n$ e, portanto, τ não é necessária em π pois τ é uma conseqüência direta da produção (a^n, a^{n+m}). ∎

Exemplo 3.14 *Seja $\tau = (x^n, x^{n+m}) \in \pi$ uma produção de π onde $x = c(ab)^{n+m}d$. Então a produção τ é estável mas não é necessária em π.*

Demonstração.

Como $\mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{per}((c(ab)^{n+m}d)^n) = |(c(ab)^{n+m}d)| = \mathrm{base}(\tau)$, segue que τ seja estável devido à proposição 3.7. Seja $x' = c(ab)^n d \neq x$. Observe que $(x'^n, x'^{n+m}), ((ab)^n, (ab)^{n+m}) \in \pi$. Assim temos que $x^{n+m} = (c(ab)^{n+m}d)^{n+m} \sim_\pi (c(ab)^n d)^{n+m} = (x')^{n+m} \sim_\pi (x')^n = (c(ab)^n d)^n \sim_\pi (c(ab)^{n+m}d)^n = x^n$ e, portanto, τ é uma conseqüência imediata das produções (x'^n, x'^{n+m}) e $((ab)^n, (ab)^{n+m})$, não sendo necessária em π. ∎

Assim, o primeiro objetivo nosso é o de construir uma relação $\Sigma \subseteq \Omega$ que tenha as seguintes propriedades:

- A menor congruência que contém π é a mesma que contém Σ.
- As produções de Σ são todas irredutíveis em $\sim_\pi$.
- Todas as produções de Σ são necessárias em Σ.

Estas propriedades serão provadas a posteriori (no Teorema da Equivalência e no Teorema da Expansibilidade) e nos dão uma intuição interessante do que vem a ser esta relação Σ. Mostramos também que todas as palavras de uma da classe $[w]$ podem ser obtidas somente por expansões sob Σ a partir da palavra mais curta em $[w]$. O trabalho de Aldo de Luca & Stefano Varricchio usa um superconjunto deste Σ e não trabalha com o conceito de necessidade.

Faremos algumas definições agora de modo a construir uma operação sobre o conjunto das relações com produções em Ω que será empregada na construção de Σ. Dados $\mathcal{T} \subseteq \Omega$ e $\tau, \sigma \in \mathcal{T}$ definimos a relação $\mathrm{R_{dir}}$ como

$$\tau \ \mathrm{R_{dir}} \ \sigma \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma| \ \text{ e } \ \mathrm{base}(\tau) > \mathrm{base}(\sigma).$$

Note que $c_\sigma, c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$ e que se $\tau \ \mathrm{R_{dir}} \ \sigma$ então, pela proposição 2.1, temos que $c_\sigma \in \mathrm{Pref}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma)$. Assim definimos uma função que aplica um par de produções em A^*: $\mathrm{M_{dir}}(\tau, \sigma) \overset{\text{def}}{=} {c_\sigma}^{-1}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma)$ quando $\tau \ \mathrm{R_{dir}} \ \sigma$ e 1 caso contrário. Observe que $\mathrm{M_{dir}}(\tau, \sigma) \in \mathrm{Suf}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma) \subseteq \mathrm{Suf}(c_\tau) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\tau)$. Assim podemos definir a operação binária $\otimes_{\mathrm{dir}}$ em Ω como

$$\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma \overset{\text{def}}{=} \tau\,(\mathrm{M_{dir}}(\tau,\sigma))^{-1} = (c_\tau\,(\mathrm{M_{dir}}(\tau,\sigma))^{-1}, l_\tau\,(\mathrm{M_{dir}}(\tau,\sigma))^{-1})$$

e dizemos que $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma$ é a *redução à direita* de τ por σ. De maneira dual, podemos definir a relação $\mathrm{R_{esq}}$ como

$$\tau \ \mathrm{R_{esq}} \ \sigma \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |l_\sigma \rightleftharpoons c_\tau| > |c_\sigma| \ \text{ e } \ \mathrm{base}(\tau) > \mathrm{base}(\sigma),$$

mas também a função $\mathrm{M_{esq}}(\tau, \sigma) \overset{\text{def}}{=} (l_\sigma \rightleftharpoons c_\tau){c_\sigma}^{-1}$ quando $\tau \ \mathrm{R_{esq}} \ \sigma$ e 1 caso contrário, e finalmente definimos a *redução à esquerda* de τ por σ como sendo

$$\sigma \otimes_{\mathrm{esq}} \tau \overset{\text{def}}{=} (\mathrm{M_{esq}}(\tau,\sigma))^{-1}\,\tau = ((\mathrm{M_{esq}}(\tau,\sigma))^{-1}c_\tau, (\mathrm{M_{esq}}(\tau,\sigma))^{-1}l_\tau).$$

Assim a operação sobre as relações com produções em Ω acima citada é definida como: $\otimes(\mathcal{T}) \overset{\text{def}}{=}$ o fecho de $\mathcal{T}$ pelos operadores $\otimes_{\mathrm{dir}}$ e $\otimes_{\mathrm{esq}}$. Dizemos que $\otimes(\mathcal{T})$ é o *fecho por reduções* de $\mathcal{T}$.

Seja $\mathcal{T} \subseteq \Omega$. Tomemos $\tau \in \otimes(\mathcal{T})$. Definimos uma *dedução* s para τ como a quádrupla ordenada $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \mathcal{T})$, onde: $k \in \mathbb{N}$; $\{\tau_i\}$ é a seqüência $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k$ de comprimento $k+1$; $\{\sigma_i\}$ é a seqüência $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ de comprimento k; valem as seguintes restrições:

$$\begin{array}{l} \tau_0 \in \mathcal{T} \\ \tau = \tau_k \\ \sigma_i, \tau_i \in \otimes(\mathcal{T}), \ i = 1, 2, \ldots, k \\ \tau_i \in \{\sigma_i \otimes_{\mathrm{esq}} \tau_{i-1}, \tau_{i-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_i\} \setminus \{\tau_{i-1}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \end{array}$$

Observe que esta dedução para τ é, na realidade, uma árvore de reduções que descreve a obtenção de τ a partir de τ_0 através de sucessivas reduções pelas produções de $\{\sigma_i\}$. Dizemos que k é o *comprimento* de s e, fixados $\mathcal{T}$ e τ, dizemos que s é *ótima* quando seu comprimento for mínimo. Dizemos que τ_0 é o *patriarca* de τ por esta dedução. Dizemos que um certo τ_0 é um patriarca de τ se existir uma dedução segundo a qual ele seja o patriarca de τ. Quando as seqüências $\{\tau_i\}$ e $\{\sigma_i\}$ são tais que $\tau_i = \tau_{i-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, dizemos que esta é uma *dedução à direita*. Analogamente, definimos *dedução à esquerda*.

Definimos uma ordem parcial $\leq_{\mathrm{k}}$ sobre Ω e a ordem estrita $<_{\mathrm{k}}$ como segue: $\rho \leq_{\mathrm{k}} \tau \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{base}(\rho) < \mathrm{base}(\tau)$ ou $\tau \leq_{\mathrm{r}} \rho$; e $\rho <_{\mathrm{k}} \tau \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \rho \leq_{\mathrm{k}} \tau$ e $\rho \neq \tau$.

Seguem-se algumas proposições relativas a estes conceitos.

Proposição 3.15 *Sejam* $\tau, \sigma \in \Omega$. *Então* $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma \in \Omega$, $\mathrm{base}(\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma) = \mathrm{base}(\tau)$ *e* $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$ *sendo que a desigualdade é estrita se e só se* $\tau \; \mathrm{R}_{\mathrm{dir}} \; \sigma$.

Demonstração.

Observe que $\tau = 1\,(\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma)\, \mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau, \sigma)$ e que $|\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau, \sigma)| > 0$ se e só se $\tau \; \mathrm{R}_{\mathrm{dir}} \; \sigma$. Assim temos que $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$, que a desigualdade é estrita se e só se $\tau \; \mathrm{R}_{\mathrm{dir}} \; \sigma$ e, pela proposição 3.3, que $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma \in \Omega$ e também que $\mathrm{base}(\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma) = \mathrm{base}(\tau)$. ∎

Uma conseqüência da proposição 3.15 é que dado $\mathcal{T} \subseteq \Omega$ então $\otimes(\mathcal{T}) \subseteq \Omega$.

Proposição 3.16 *Sejam* $\tau, \sigma \in \Omega$. *Então* $|\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau, \sigma)| \leq \mathrm{mbase}(\sigma)$ *sendo que a igualdade vale somente se* $l_\sigma \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$.

Demonstração.

Caso $(\tau, \sigma) \notin \mathrm{R}_{\mathrm{dir}}$ é imediato já que $\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau, \sigma) = 1$. Admita que $\tau \; \mathrm{R}_{\mathrm{dir}} \; \sigma$. Como $c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$, então $|\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau, \sigma)| = |c_\sigma^{-1}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma)| = |c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| - |c_\sigma| \leq |l_\sigma| - |c_\sigma| = \mathrm{mbase}(\sigma)$ e, naturalmente, a igualdade só vale se $|l_\sigma| = |c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma|$ que equivale a dizer $l_\sigma \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$. ∎

Proposição 3.17 *Sejam* τ, σ *duas produções tais que* $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma \neq \tau$. *Então temos que* $c_\sigma \in \mathrm{Suf}(c_{\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma})$.

Demonstração.

Como $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma \neq \tau$, usando a proposição 3.15, temos que $\tau \ \mathrm{R}_{\mathrm{dir}} \ \sigma$. Como $\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau,\sigma) = c_\sigma^{-1}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma)$, e como $c_\tau = c_{\tau\otimes_{\mathrm{dir}}\sigma}\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau,\sigma)$, temos que $c_\sigma = (c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma)\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau,\sigma)^{-1} \in \mathrm{Suf}(c_\tau \mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau,\sigma)^{-1}) = \mathrm{Suf}(c_{\tau\otimes_{\mathrm{dir}}\sigma})$. ∎

Proposição 3.18 *Seja $\mathcal{T} \subseteq \Omega$. Seja $\tau \in \otimes(\mathcal{T})$ e seja uma dedução $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \mathcal{T})$ para τ. Seu patriarca $\tau_0 \in \mathcal{T}$ é tal que $\tau \leq_{\mathrm{r}} \tau_0$ e $\mathrm{base}(\tau_0) = \mathrm{base}(\tau)$. Temos também que $\tau_{i-1}, \sigma_i <_{\mathrm{k}} \tau$, $i = 1, 2, \ldots, k$; em particular, $\mathrm{base}(\tau_{i-1}) = \mathrm{base}(\tau)$ e $\mathrm{base}(\sigma_i) < \mathrm{base}(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Demonstração.

Da definição de dedução, obteremos que $\mathrm{base}(\tau_i) \in \mathrm{base}(\{\}\sigma_i \otimes_{\mathrm{esq}} \tau_{i-1}, \tau_{i-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_i\} = \{\mathrm{base}(\tau_{i-1})\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Assim sendo temos que $\mathrm{base}(\tau_i) = \mathrm{base}(\tau_k) = \mathrm{base}(\tau)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. Usando a proposição 3.15, obtemos que $\tau_i <_{\mathrm{r}} \tau_{i-1}$ e que $(\tau_{i-1}, \sigma_i) \in \mathrm{R}_{\mathrm{dir}} \cup \mathrm{R}_{\mathrm{esq}}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Donde $\tau = \tau_k <_{\mathrm{r}} \tau_{i-1}$ e $\tau_{i-1} <_{\mathrm{k}} \tau$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Pela definição das relações $\mathrm{R}_{\mathrm{dir}}$ e $\mathrm{R}_{\mathrm{esq}}$, temos que $\mathrm{base}(\sigma_i) < \mathrm{base}(\tau_{i-1}) = \mathrm{base}(\tau)$ e, portanto, $\sigma_i <_{\mathrm{k}} \tau$, $i = 1, 2, \ldots, k$. ∎

As três proposições seguintes nos dão propriedades importantes sobre o operador fecho por reduções definido anteriormente.

Proposição 3.19 *Seja $\mathcal{T} \subseteq \Omega$. Então $\otimes(\mathcal{T}) \equiv \mathcal{T}$.*

Demonstração.

Como $\mathcal{T} \subseteq \otimes(\mathcal{T})$ então $\sim_{\mathcal{T}} \subseteq \sim_{\otimes(\mathcal{T})}$. Falta-nos, somente, provar a outra inclusão.

Primeiro provaremos $\otimes(\mathcal{T}) \subseteq \sim_{\mathcal{T}}$. Para tanto faremos uma indução dupla sobre $\tau \in \otimes(\mathcal{T})$. A mais externa é sobre $\mathrm{base}(\tau)$ e a mais interna é sobre a distância de τ a $\mathcal{T}$.

Tome $\tau \in \otimes(\mathcal{T})$. Seja $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \mathcal{T})$ uma dedução para τ com k mínimo. Se $\mathrm{base}(\tau) = 1$ então $k = 0$ pois, caso contrário, usando a proposição 3.18, teríamos o absurdo de que $\mathrm{base}(\sigma_1) < \mathrm{base}(\tau) = 1$. Se $k = 0$, usando a proposição 3.18, temos que $\tau = \tau_0 \in \mathcal{T} \subseteq \sim_{\mathcal{T}}$. Assim já temos as bases da indução dupla.

Assuma que $k > 0$ e que $\mathrm{base}(\tau) > 1$. Assim temos que $\tau = \tau_k \in \{\sigma_k \otimes_{\mathrm{esq}} \tau_{k-1}, \tau_{k-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_k\}$. Assuma que $\tau = \tau_{k-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_k$. O caso $\tau = \sigma_k \otimes_{\mathrm{esq}} \tau_{k-1}$ é perfeitamente dual. Assuma, por hipótese de indução, que se $\sigma \in \otimes(\mathcal{T})$ com σ com $\mathrm{base}(\tau) > \mathrm{base}(\sigma)$ ou $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$ mas com a distância de σ até $\mathcal{T}$ menor que a de τ a $\mathcal{T}$, então $\sigma \in \sim_{\mathcal{T}}$. Assim $\tau_{k-1}, \sigma_k \in \sim_{\mathcal{T}}$.

Pela definição de dedução temos que $\tau = \tau_k \neq \tau_{k-1}$ e, pela proposição 3.15, temos que $\tau_{k-1} \ \mathrm{R}_{\mathrm{dir}} \ \sigma_k$. Seja $x = c_{\tau_{k-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_k}$. Ora, $c_{\tau_k} = c_{\tau_{k-1}} \mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_{k-1}, \sigma_k)^{-1} = (c_{\tau_{k-1}} x^{-1}) c_{\sigma_k} \sim_{\mathcal{T}} (c_{\tau_{k-1}} x^{-1}) l_{\sigma_k} = c_{\tau_{k-1}}(x^{-1} l_{\sigma_k}) \sim_{\mathcal{T}} l_{\tau_{k-1}}(x^{-1} l_{\sigma_k}) = (l_{\tau_{k-1}} x^{-1}) l_{\sigma_k} \sim_{\mathcal{T}} (l_{\tau_{k-1}} x^{-1}) c_{\sigma_k} = l_{\tau_{k-1}} \mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_{k-1}, \sigma_k)^{-1} = l_{\tau_k}$, donde $\tau = \tau_{k-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_k \in \sim_{\mathcal{T}}$. Logo temos que $\otimes(\mathcal{T}) \subseteq \sim_{\mathcal{T}}$, que $\sim_{\otimes(\mathcal{T})} \subseteq \sim_{\sim_{\mathcal{T}}} = \sim_{\mathcal{T}} \subseteq \sim_{\otimes(\mathcal{T})}$ e, por definição, concluimos que $\otimes(\mathcal{T}) \equiv \mathcal{T}$. ∎

Proposição 3.20 *Seja* $\mathcal{T} \subseteq \Omega_{\leq k}$. *Então* $\otimes(\mathcal{T}) \subseteq \Omega_{\leq k}$.

Demonstração.

Tome $\tau \in \otimes(\mathcal{T})$. Escolha um patriarca ρ para τ. Pela proposição 3.18, temos que $\rho \in \mathcal{T} \subseteq \Omega_{\leq k}$. Portanto $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\rho) \leq k$, $\tau \in \Omega_{\leq k}$ e $\otimes(\mathcal{T}) \subseteq \Omega_{\leq k}$. ∎

Proposição 3.21 *Seja* $\mathcal{T} \subseteq \Omega$. *Então* $\otimes(\mathcal{T}) \cap \Omega_{\leq k} = \otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k})$.

Demonstração.

Provaremos que $\otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k}) \subseteq \otimes(\mathcal{T}) \cap \Omega_{\leq k}$. Como $\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k} \subseteq \mathcal{T}$ então $\otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k}) \subseteq \otimes(\mathcal{T})$. Como $\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k} \subseteq \Omega_{\leq k}$, usando a proposição 3.20, concluimos que $\otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k}) \subseteq \Omega_{\leq k}$. Assim $\otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k}) \subseteq \otimes(\mathcal{T}) \cap \Omega_{\leq k}$.

Provaremos que $\otimes(\mathcal{T}) \cap \Omega_{\leq k} \subseteq \otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k})$. Admita, por absurdo, que seja possível escolher um elemento τ em $(\otimes(\mathcal{T}) \cap \Omega_{\leq k}) \setminus \otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k})$. Escolhamos então τ de forma que $\mathrm{base}(\tau)$ seja mínima e, dentre estes, de forma que a distância de τ para $\mathcal{T}$ seja mínima. Escolha uma dedução $s = (k', \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \mathcal{T})$ para τ. Observe que $k' > 0$ pois senão $\tau \in \mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k} \subseteq \otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k})$. Ora, $\tau_{k'-1}, \sigma_{k'} \in \otimes(\mathcal{T})$ pela definição de dedução, e, pela proposição 3.18, temos que $\mathrm{base}(\sigma_{k'}) < \mathrm{base}(\tau) \leq k$ e $\mathrm{base}(\tau_{k'-1}) = \mathrm{base}(\tau) \leq k$, portanto $\tau_{k'-1}, \sigma_{k'} \in \otimes(\mathcal{T}) \cap \Omega_{\leq k}$. Além disso, a distância de $\tau_{k'-1}$ a $\mathcal{T}$ é menor que a de τ. Por conseguinte, pela escolha de τ, temos que $\tau_{k'-1}, \sigma_k' \in \otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k})$ e, portanto, $\tau \in \{\sigma_{k'} \otimes_{\mathrm{esq}} \tau_{k'-1}, \tau_{k'-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_{k'}\} \subseteq \otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k})$ que é uma contradição. Assim a escolha de τ não é possível e $\otimes(\mathcal{T}) \cap \Omega_{\leq k} \subseteq \otimes(\mathcal{T} \cap \Omega_{\leq k})$. ∎

Construiremos outras relações equivalentes a π, inclusive Σ. Observe que obtemos, implicitamente, um algoritmo para obter as produções de

Σ que tenham base menor ou igual a um dado inteiro, como conseqüência das definições e da proposição 3.22. Para entender melhor estas definições, lembremos que se $\tau \otimes_{\text{dir}} \sigma \neq \tau$, então temos que $\tau \otimes_{\text{dir}} \sigma <_{\text{r}} \tau$ e que $\text{base}(\sigma) < \text{base}(\tau) = \text{base}(\tau \otimes_{\text{dir}} \sigma)$ devido à proposição 3.15 e à proposição 3.3. A proposição 3.22 nos dará uma boa descrição também.

Seja $\Sigma_0 = \emptyset$. Então definimos:

$$
\begin{aligned}
\pi_i &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x^n, x^{n+m}), \forall x \in A^i\} \\
\pi'_i &\stackrel{\text{def}}{=} \{\tau \in \pi_i \text{ tal que } \tau \text{ é estável e } \nexists \sigma \in \Sigma_{\lfloor \frac{i-1}{m} \rfloor},\ l_\sigma \in \text{Fat}(l_\tau)\} \\
\Sigma'_i &\stackrel{\text{def}}{=} \otimes(\pi'_i \cup \Sigma_{i-1}) \\
\Sigma_i &\stackrel{\text{def}}{=} \text{irred}(\Sigma'_i).
\end{aligned}
$$

Definimos ainda os conjuntos:

$$
\begin{aligned}
\pi &= \cup_{i=1}^{\infty} \pi_i = \{(x^n, x^{n+m}), \forall x \in A^+\} \\
\pi' &\stackrel{\text{def}}{=} \cup_{i=1}^{\infty} \pi'_i \\
\Sigma' &\stackrel{\text{def}}{=} \cup_{i=1}^{\infty} \Sigma'_i \\
\Sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \cup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i = \text{irred}(\Sigma') \\
\Sigma'' &\stackrel{\text{def}}{=} \Rightarrow_\Sigma \cap\, \Omega = A^* \Sigma A^* \cap \Omega.
\end{aligned}
$$

Como conseqüência da proposição 3.15, temos que se $\mathcal{T} \subseteq \Omega$ então $\otimes(\mathcal{T}) \subseteq \Omega$, como já vimos. De posse deste fato, é de fácil verificação que todas estas relações são subconjuntos de Ω. Isto será assumido naturalmente a partir daqui.

É interessante observar que $\pi_1 = \pi'_1 = \Sigma'_1 = \Sigma_1 = \pi \cap \Omega_1$. Fica, no entanto, a pergunta sobre quem são os conjuntos $\pi_i, \pi'_i, \Sigma'_i, \Sigma_i$ para valores quaisquer de i. Na proposição 3.22, veremos que π_i e π'_i são, na realidade, os subconjuntos formados por todas as produções de π e π', respectivamente, que têm base igual a i. Já Σ_i é o subconjunto formado por todas as produções de Σ que têm base menor ou igual a i. Assim Σ_i é o conjunto Σ_{i-1} acrescido das proposições de Σ que têm base i. Veremos uma descrição de Σ'' na proposição 3.23.

Na proposição seguinte, o símbolo $+$ representa união disjunta.

Proposição 3.22 *As seguintes propriedades se verificam:*

1. $\pi_i = \pi \cap \Omega_i$.

2. $\pi'_i = \pi' \cap \Omega_i$.

3. $\Sigma_i = \Sigma \cap \Omega_{\leq i}$.

4. $\Sigma'_i = (\Sigma' \cap \Omega_i) + \Sigma_{i-1}$.

5. $\otimes(\Sigma_i) = \Sigma_i$.

Demonstração.

Os ítens 1 e 2 decorrem imediatamente das definições e não nos preocuparemos em demonstrar.

Vamos mostrar que $\otimes(\Sigma_i) = \Sigma_i$. Observe que $\Sigma_i \subseteq \otimes(\Sigma_i)$. Tome $\tau \in \otimes(\Sigma_i)$. Da proposição 3.18, existe $\rho \in \Sigma_i$ tal que $\tau \leq_r \rho$. Mas $\otimes(\Sigma_i) \subseteq \otimes(\Sigma'_i) = \Sigma'_i$, donde $\tau \in \Sigma'_i$. Como ρ é irredutível em Σ'_i, então $\tau = \rho$ e $\otimes(\Sigma_i) \subseteq \Sigma_i$. Assim $\otimes(\Sigma_i) = \Sigma_i$.

Vamos mostrar que $\Sigma_i \subseteq \Sigma'_i \subseteq \Omega_{\leq i}$. Faremos uma indução em i. Para $i = 1$ temos então que $\pi_1 = \Sigma_1 = \Sigma'_1 \subseteq \Omega_1 = \Omega_{\leq 1}$. Para $i > 1$, admitindo que $\Sigma_{i-1} \subseteq \Omega_{\leq i-1} \subseteq \Omega_{\leq i}$ e sabendo que $\pi'_i \subseteq \Omega_i \subseteq \Omega_{\leq i}$, temos que $\pi'_i \cup \Sigma_{i-1} \subseteq \Omega_{\leq i}$. Usando a proposição 3.20, temos que $\Sigma_i \subseteq \Sigma'_i = \otimes(\pi'_i \cup \Sigma_{i-1}) \subseteq \Omega_{\leq i}$.

Vamos mostrar que $\Sigma'_i \cap \Omega_{\leq i-1} = \Sigma_{i-1}$. Usando a proposição 3.21 temos que $\Sigma'_i \cap \Omega_{\leq i-1} = \otimes(\pi'_i \cup \Sigma_{i-1}) \cap \Omega_{\leq i-1} = \otimes((\pi'_i \cup \Sigma_{i-1}) \cap \Omega_{\leq i-1}) = \otimes(\Sigma_{i-1}) = \Sigma_{i-1}$.

Vamos mostrar que $\Sigma_i = \Sigma_{i+k} \cap \Omega_{\leq i} \subseteq \Sigma_{i+k}$, para $k \geq 0$. Faremos uma indução em k. Para $k = 0$ é trivial. Admita que $k > 0$ e que $\Sigma_i = \Sigma_{i+k-1} \cap \Omega_{\leq i} \subseteq \Sigma_{i+k-1}$. Temos que $\Sigma_{i+k-1} = \text{irred}(\Sigma_{i+k-1}) = \text{irred}(\Sigma'_{i+k} \cap \Omega_{\leq i+k-1}) = \text{irred}(\Sigma'_{i+k}) \cap \Omega_{\leq i+k-1} = \Sigma_{i+k} \cap \Omega_{\leq i+k-1} \subseteq \Sigma_{i+k}$. Donde $\Sigma_i = \Sigma_{i+k-1} \cap \Omega_{\leq i} = \Sigma_{i+k} \cap \Omega_{\leq i+k-1} \cap \Omega_{\leq i} = \Sigma_{i+k} \cap \Omega_{\leq i} \subseteq \Sigma_{i+k}$.

Vamos mostrar que $\Sigma_i = \Sigma \cap \Omega_{\leq i}$. Ora, $\Sigma \cap \Omega_{\leq i} = (\cup_{j=1}^{\infty} \Sigma_j) \cap \Omega_{\leq i} = (\cup_{j=i}^{\infty} \Sigma_j) \cap \Omega_{\leq i} = \cup_{j=i}^{\infty} (\Sigma_j \cap \Omega_{\leq i}) = \cup_{j=i}^{\infty} (\Sigma_i) = \Sigma_i$.

Finalmente, vamos mostrar que $\Sigma'_i = (\Sigma' \cap \Omega_i) + \Sigma_i$. Como $\Sigma'_i \subseteq \Omega_{\leq i}$, temos que $\Sigma'_i = (\Sigma'_i \cap \Omega_i) + (\Sigma'_i \cap \Omega_{\leq i-1}) \subseteq (\Sigma' \cap \Omega_i) + \Sigma_{i-1}$. Seja $\tau \in (\Sigma' \cap \Omega_i)$. Seja k mínimo tal que $\tau \in \Sigma'_k$. Assim temos que $\tau \in \Omega_i \cap \Sigma'_k \subseteq \Omega_i \cap \Omega_{\leq k}$ e temos que $i \leq k$. Ora, se $i < k$ teríamos que $\tau \in \Sigma'_k \cap \Omega_{\leq k-1} = \Sigma_{k-1} \subseteq \Sigma'_{k-1}$ que é contradição com a minimalidade de k. Logo temos que $k = i$ e que $(\Sigma' \cap \Omega_i) \subseteq \Sigma'_i$. Como $\Sigma_{i-1} \subseteq \pi'_i \cap \Sigma_{i-1} \subseteq \otimes(\pi'_i \cap \Sigma_{i-1}) = \Sigma'_i$, temos então que $(\Sigma' \cap \Omega_i) + \Sigma_{i-1} \subseteq \Sigma'_i$. ∎

A proposição 3.23 nos dá uma descrição um pouco mais intuitiva do que vem a ser a relação Σ''. A grosso modo, é o conjunto de producõs de Ω

obtidas a partir da concatenação "coerente" de alguma produção de Σ com mais períodos desta produção, tanto "concatenação à direita" da produção quanto "à esquerda". Entenderemos qual a utilidade desta nova relação nas proposições 6.5 e 6.6, quando tivermos definido o conceito de expansor.

Proposição 3.23 *Temos que* $\Sigma'' = \{\mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^*)\,\tau\,\mathrm{Pref}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^*),\ \tau \in \Sigma\}$ *e que* $\Sigma \subset \Sigma' \subset \Sigma''$.

Demonstração.

Seja B o conjunto $\{\mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^*)\,\tau\,\mathrm{Pref}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^*),\ \tau \in \Sigma\}$.

Vamos mostrar que $\Sigma'' \subseteq B$. Tome $\rho \in \Sigma'' = A^*\Sigma A^* \cap \Omega$. Seja $\tau \in \Sigma$ e sejam $u, v \in A^*$ tais que $\rho = u\,\tau\,v$. Seja $\sigma = (u, u\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m)$. Como $\sigma c_\tau v = u\tau v = \rho$ e $\rho \in \Omega$, temos então que $\sigma \in \Omega$ devido à proposição 3.3. Ora, temos que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma) = \mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)$ e que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)$ é um período e sufixo de l_σ; usando então o corolário 2.15, temos que $u = c_\sigma \in \mathrm{Suf}(l_\sigma) \subseteq \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^*) = \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^*)$. De forma dual temos que $v \in \mathrm{Pref}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^*)$, que $\rho = u\tau v \in B$ e que $\Sigma'' \subseteq B$.

Vamos mostrar que $B \subseteq \Sigma''$. Seja $\rho \in B$. Seja $\tau \in \Sigma$ e sejam $u \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^*)$ e $v \in \mathrm{Pref}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^*)$ tais que $\rho = u\tau v$. Naturalmente temos que $\rho \in A^*\Sigma A^*$. Assim, para mostrarmos que $\rho \in \Sigma'' = A^*\Sigma A^* \cap \Omega$ e, portanto que $B \subseteq \Sigma''$, falta-nos apenas mostrar $\rho \in \Omega$ e, por conseguinte, que $uc_\tau v \in \mathrm{Pref}(ul_\tau v) \cap \mathrm{Suf}(ul_\tau v) \setminus \{ul_\tau v\}$ e que $(uc_\tau v)^{-1}(ul_\tau v)$ é uma m-potência. Como $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)$ é período e sufixo de l_τ, temos que $c_\tau \in \mathrm{Suf}(l_\tau) \subseteq \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^*)$ devido ao corolário 2.15. Assim temos que $c_\tau v, l_\tau v \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^*)\mathrm{Pref}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^*) \subseteq \mathrm{Fat}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^*) = \mathrm{Fat}((\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m)^*)$ devido ao teorema 2.21. Logo temos que $\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m = (l_\tau v)(c_\tau v)^{-1}$ é período de $l_\tau v$ e, devido ao dual da proposição 2.14, temos que $c_\tau v = \mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^{-m}(l_\tau v) \in \mathrm{Pref}(l_\tau v)$ e, portanto, que $uc_\tau v \in \mathrm{Pref}(ul_\tau v)$. De forma dual, temos que $uc_\tau v \in \mathrm{Suf}(ul_\tau v)$. Como $c_\tau \neq l_\tau$, então temos que $uc_\tau v \neq ul_\tau v$ e que $uc_\tau v \in \mathrm{Pref}(ul_\tau v) \cap \mathrm{Suf}(ul_\tau v) \setminus \{ul_\tau v\}$. Como $(uc_\tau v)^{-1}(ul_\tau v) \in \mathrm{Suf}(l_\tau v)$, como $\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m$ é período de $l_\tau v$, como $|(uc_\tau v)^{-1}(ul_\tau v)| = |\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m|$, usando a proposição 2.12, temos que $(uc_\tau v)^{-1}(ul_\tau v)$ é conjugado de $\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m$ e, portanto, é uma m-potência também devido à proposição 2.11.

Vamos mostrar que $\Sigma \subset \Sigma' \subset \Sigma''$. Seja σ, τ e x conforme as definições do exemplo 3.12. Como $\Sigma = \mathrm{irred}(\Sigma')$, temos que $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Temos que esta inclusão é própria pois temos que $\sigma <_{\mathrm{r}} \tau$, que $\sigma \in \Sigma'$ e, portanto, que $\tau \notin \Sigma$ mas que $\tau \in \Sigma'$. Como $\Sigma' \subseteq \Omega$ e $\Sigma' \subseteq A^*\Sigma A^*$, temos que $\Sigma' \subseteq \Sigma''$. Temos que esta inclusão é própria pois $\tau x \in \Sigma'' \setminus \Sigma'$. ∎

Na proposição seguinte veremos que as produções de Σ além de serem irredutíveis em Σ', não podem sofrer reduções à direita ou à esquerda estritas por produções de Σ.

Proposição 3.24 *Sejam $\tau, \sigma \in \Sigma$. Então $(\tau, \sigma) \notin \mathrm{R}_{\mathrm{dir}} \cup \mathrm{R}_{\mathrm{esq}}$.*

Demonstração.

Tome duas produções $\tau, \sigma \in \Sigma$. Seja $k = \max(\{\mathrm{base}(\tau), \mathrm{base}(\sigma)\})$. Portanto $\tau, \sigma \in \Sigma \cap \Omega_{\leq k}$. Pela proposição 3.22 temos que $\Sigma_k = \Sigma \cap \Omega_{\leq k}$. Assim $\tau, \sigma \in \Sigma_k \subseteq \Sigma'_k = \otimes(\pi'_k \cup \Sigma_{k-1})$. Logo $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma \in \Sigma'_k$. Usando a proposição 3.15, temos que $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$. Como τ é irredutível em Σ'_k, então $\tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma = \tau$ e, pela mesma proposição 3.15, temos que $(\tau, \sigma) \notin \mathrm{R}_{\mathrm{dir}}$.

Analogamente temos que $(\tau, \sigma) \notin \mathrm{R}_{\mathrm{esq}}$. ∎

Proposição 3.25 *Seja $\tau \in \Sigma'$ e seja $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \pi'_j \cup \Sigma_{j-1})$ uma dedução para τ onde $j = \mathrm{base}(\tau)$. Então $\tau_0 \in \pi'_j \subset \pi'$ e $\sigma_i \in \Sigma_{j-1} \subset \Sigma$, para $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Demonstração.

Usando a proposição 3.18, temos que $\tau \leq_{\mathrm{r}} \tau_0$, que $\tau_0 \in \pi'_j \cup \Sigma_{j-1}$, que $\mathrm{base}(\tau_i) = j = \mathrm{base}(\tau)$ para $i = 0, 1, \ldots, k$, que $\mathrm{base}(\sigma_i) < j$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ e que $\sigma_i, \tau_{i-1} <_{\mathrm{k}} \tau$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Pela proposição 3.22, temos que $\tau_0 \in (\pi'_j \cup \Sigma_{j-1}) \cap \Omega_j = \pi'_j \subset \pi'$. Usando também a proposição 3.21, temos $\sigma_i \in \otimes(\pi'_j \cup \Sigma_{j-1}) \cap \Omega_{\leq j-1} = \otimes((\pi'_j \cup \Sigma_{j-1}) \cap \Omega_{\leq j-1}) = \otimes(\Sigma_{j-1}) = \Sigma_{j-1} \subset \Sigma$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. ∎

Demonstraremos agora algumas proposições importantes relacionadas ao conceito de estabilidade das produções de π, π', Σ' e Σ.

Proposição 3.26 *Uma produção $\tau = (x^n, x^{n+m})$ em π é estável se e somente se x for primitiva.*

Demonstração.

Temos que $x = \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)$ é um período de l_τ e de c_τ. Suponha que τ seja estável. Então, usando a proposição 3.8, temos que x é primitiva. Suponha que x seja primitiva. Então, $|c_\tau| = |x^n| = n\mathrm{base}(\tau) \geq 2\mathrm{base}(\tau)$ e, usando a proposição 3.9, temos que τ é estável. ∎

Esta proposição é particularmente interessante pois ajuda-nos a caracterizar as produções de π'. Em particular, ajuda-nos a obter propriedades para Σ' ou Σ, como veremos na proposição 3.27.

Proposição 3.27 *Se $\tau \in \Sigma'$ então $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ são primitivas.*

Demonstração.

Pela proposição 3.22, temos que $\tau \in \Sigma'_j = \otimes(\pi'_j \cup \Sigma_{j-1})$ onde $j = \mathrm{base}(\tau)$. Tome uma dedução $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \pi'_j \cup \Sigma_{j-1})$ para τ. Usando a proposição 3.25, temos que $\rho \in \pi'$ e, portanto, que ρ é estável devido à definição de π'. Usando a proposição 3.18, temos que $\tau \leq_{\mathrm{r}} \rho$. Temos que $\mathrm{b_{dir}}(\rho)$ é um período de l_ρ. Da proposição 3.26 temos que $\mathrm{b_{dir}}(\rho)$ é primitiva e portanto $\mathrm{grau}(\mathrm{b_{dir}}(\rho)) = 1$. Da proposição 3.3 e do corolário 3.2, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\rho), \mathrm{b_{dir}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ são conjugados. Da proposição 2.11 temos que $\mathrm{b_{dir}}(\rho), \mathrm{b_{dir}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ têm o mesmo grau e portanto $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ são primitivas. ∎

Uma questão crucial neste trabalho é a de investigar se as produções de Σ' são ou não estáveis. As proposições 3.8, 3.9, 3.26 e 3.27 apontam nesta direção. Como já dissemos, isto será visto no Teorema da Estabilidade.

Vale observar que, para $n = 2$ e para $m \geq 2$, nem todas as produções de Σ são estáveis. Para mostrar isto, observe que σ visto no exemplo 3.12 da página 23 é uma produção não estável para estes valores de n e m, que $\sigma \in \Sigma'$, que existe uma produção $\sigma' \in \Sigma$ tal que $\sigma' \leq_{\mathrm{r}} \sigma$ e que isto implica que $\mathrm{per}(c_{\sigma'}) \leq \mathrm{per}(c_\sigma)$ devido à proposição 2.22, que $\mathrm{per}(c_\sigma) < \mathrm{base}(\sigma)$ devido à proposição 3.7, que $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\sigma')$ devido à proposição 3.3 e, portanto, que $\mathrm{per}(c_{\sigma'}) < \mathrm{base}(\sigma')$ e que σ' também não é estável devido à proposição 3.7.

Capítulo 4

Equivalência das novas relações e π.

O teorema abaixo mostra a equivalência das relações Σ e π, sendo que nenhuma restrição adicional (além de que $n \geq 2$ e $m \geq 1$) é feita.

Teorema 4.1 (Teorema da Equivalência) *As relações π, π', Σ'', Σ' e Σ são equivalentes.*

Demonstração. Decorre da proposição 4.2 e do lema 4.3. ∎

Proposição 4.2 *Temos que $\Sigma \cap \Omega_{\leq i} \equiv \Sigma' \cap \Omega_{\leq i} \equiv \pi' \cap \Omega_{\leq i}$ e $\Sigma \equiv \Sigma' \equiv \pi' \equiv \Sigma''$.*

Demonstração.

Provaremos que $\Sigma_i \subseteq \Sigma'_i \subseteq \otimes(\pi')$. Faremos uma indução em i. Para $i = 1$ é imediato já que $\pi_1 = \Sigma'_1 = \Sigma_1 \subset \pi' \subset \otimes(\pi')$. Admitindo que $\Sigma_{i-1} \subseteq \otimes(\pi')$, então temos que $\Sigma_i \subseteq \Sigma'_i = \otimes(\pi'_i \cup \Sigma_{i-1}) \subseteq \otimes(\pi'_i \cup \otimes(\pi')) = \otimes(\otimes(\pi')) = \otimes(\pi')$.

Provaremos que $\pi' \cap \Omega_{\leq i} \equiv \Sigma' \cap \Omega_{\leq i}$ e que $\pi' \equiv \Sigma'$. Como $\pi'_j \subseteq \Sigma'_j$, temos que $\pi' = \cup_{j=1}^{\infty} \pi'_j \subseteq \Sigma' = \cup_{j=1}^{\infty} \Sigma'_j \subseteq \otimes(\pi')$. Assim sendo, usando as proposições 3.21 e 3.19, temos que $\sim_{\pi' \cap \Omega_{\leq i}} \subseteq \sim_{\Sigma' \cap \Omega_{\leq i}} \subseteq \sim_{\otimes(\pi') \cap \Omega_{\leq i}} = \sim_{\otimes(\pi' \cap \Omega_{\leq i})} = \sim_{\pi' \cap \Omega_{\leq i}}$, mas também que $\sim_{\pi'} \subseteq \sim_{\Sigma'} \subseteq \sim_{\otimes(\pi')} = \sim_{\pi'}$.

Provaremos que $\Sigma \cap \Omega_{\leq i} \equiv \Sigma' \cap \Omega_{\leq i}$ e que $\Sigma \equiv \Sigma' \equiv \Sigma''$. Usando a proposição 3.6, temos que $\Sigma' \cap \Omega_{\leq i} \equiv \mathrm{irred}(\Sigma' \cap \Omega_{\leq i}) = \mathrm{irred}(\Sigma') \cap \Omega_{\leq i} = \Sigma \cap \Omega_{\leq i}$, mas também que $\Sigma'' \equiv \mathrm{irred}(\Sigma'') = \Sigma = \mathrm{irred}(\Sigma') \equiv \Sigma'$. ∎

Observe que uma conseqüência da demonstração da proposição 4.2 é que $\Sigma' \subseteq \otimes(\pi')$. Acredito que possamos provar que $\Sigma = \text{irred}(\otimes(\pi'))$. Não fiz esta demonstração nem uso este fato neste trabalho.

Lema 4.3 *Temos que* $\pi \equiv \pi'$.

Demonstração.

Segundo a definição de $\equiv$ devemos mostrar que $\sim_\pi = \sim_{\pi'}$. De $\pi' \subseteq \pi$ decorre imediatamente que $\sim_{\pi'} \subseteq \sim_\pi$. Nos preocuparemos em demonstrar que para todo $\tau \in \pi$, temos que $c_\tau \sim_{\pi'} l_\tau$. Nesta situação teremos que $\pi \subseteq \sim_{\pi'}$ donde $\sim_\pi \subseteq \sim_{\sim_{\pi'}} = \sim_{\pi'}$.

Seja $\tau = (u^n, u^{n+m}) \in \pi$. Provaremos, fazendo uma indução em $k = \text{base}(\tau) = |u|$, que $u^n \sim_{\pi'} u^{n+m}$. Para $k = 1$ é óbvio pois $\pi_1 = \pi'_1 \subset \pi' \subset \sim_{\pi'}$. Assim já temos a base de indução.

Admita que $k > 1$ e, por hipótese de indução, que $\pi \cap \Omega_{\leq k-1} \subseteq \sim_{\pi'}$. Note que $\tau \in \pi_k$. Se $\tau \in \pi'_k$ então, naturalmente, $c_\tau \sim_{\pi'} l_\tau$.

Admitamos, pois, que $\tau \notin \pi'_k$. Pela definição de π'_k temos que: ou τ não é estável, ou τ é estável e $\exists \sigma \in \Sigma_{\lfloor \frac{k-1}{m} \rfloor}$ com $l_\sigma \in \text{Fat}(l_\tau)$.

Admita que τ não seja estável. Neste caso, pela a proposição 3.26, u não é primitiva e $\exists x \in A^+$, $\exists k' > 1$ tais que $x^{k'} = u$. Logo $|x| = |u|/k' \leq k-1$, donde $(x^n, x^{n+m}) \in \pi \cap \Omega_{\leq k-1}$ e, pela hipótese de indução, temos que $x^n \sim_{\pi'} x^{n+m}$. Portanto $u^n = x^{k'n} \sim_{\pi'} x^{k'(n+m)} = u^{n+m}$. Assim $\tau \in \sim_{\pi'}$ e a tese de indução está provada.

A partir de agora, admitamos que τ seja estável e seja $\sigma \in \Sigma_{\lfloor (k-1)/m \rfloor}$ com $l_\sigma \in \text{Fat}(l_\tau)$. Pelas proposições 3.22 e 4.2, temos que $\sigma \in \Sigma_{\lfloor (k-1)/m \rfloor} \subseteq \Sigma \cap \Omega_{\leq k-1} \subseteq \sim_{\Sigma \cap \Omega_{\leq k-1}} = \sim_{\pi' \cap \Omega_{\leq k-1}} \subseteq \sim_{\pi'}$. Assim $c_\sigma \sim_{\pi'} l_\sigma$.

Seja $v = \text{b}_{\text{esq}}(\sigma)$, $w = l_\sigma$ e $w' = c_\sigma$. Assim $w' \in \text{Pref}(w) \cap \text{Suf}(w)$. Lembrando que $c_\sigma \sim_{\pi'} l_\sigma$, teremos que $w = v^m w' \sim_{\pi'} w'$ e que v é um período de w. Temos também que $\text{base}(\tau) = |u| = k > m\lfloor \frac{k-1}{m} \rfloor \geq m\text{base}(\sigma) = m|v|$ e, portanto,

$$|v^m| < |u|. \tag{4.1}$$

Observe ainda que tanto u, pela proposição 3.26, quanto v, pela proposição 3.27, são primitivas. Pela proposição 2.22, temos que u é período de w. Como não é o menor, usando a proposição 2.19, temos que $|w| < |u| + \text{per}(w) \leq |u| + |v| < 2|u|$. Observe que w é fator de u^{n+m} e seja k' o mínimo inteiro tal que $w \in \text{Fat}(u^{k'})$. Naturalmente que $k' \in \{1, 2, \ldots, n+m\}$. Usando a proposição 2.3, podemos escolher $\mu, \eta \in A^*$ tais que $u^{k'} = \mu w \eta$

com $\mu \in \mathrm{Pref}(u)$, $\eta \in \mathrm{Suf}(u)$ e $0 \leq |\mu|, |\eta| < |u|$. Assim, temos que $2|u| > |u| + |v| > |w| = |u^{k'}| - |\mu| - |\eta| > (k'-2)|u|$ que implica $k' < 4$.

Temos três casos possíves, portanto:

1. Admita $k' = 1$. Neste caso, $u = \mu w \eta$.

   Seja $x = \mu w' \eta$. Temos que $|x| = |\mu| + |w'| + |\eta| = |\mu| + |w| - |v^m| + |\eta| = |u| - |v^m| \leq k - 1$. Donde $(x^n, x^{n+m}) \in \pi \cap \Omega_{\leq k-1}$ e, pela hipótese de indução, temos que $x^n \sim_{\pi'} x^{n+m}$. Neste caso, temos que $u = \mu w \eta \sim_{\pi'} \mu w' \eta = x$. Assim $u^{n+m} \sim_{\pi'} x^{n+m} \sim_{\pi'} x^n \sim_{\pi'} u^n$ e, portanto, $\tau \in \sim_{\pi'}$.

2. Admita $k' = 2$. Neste caso, $u^2 = \mu w \eta$.

   Nesta situação temos dois subcasos possíveis:

   $|w'\eta| \geq |u|$

   Usando (4.1), seja $x = \mathrm{pref}(u, |u| - |v^m|)$. Seja $y = x^{-1}u$. Vamos mostrar que $\mu w' \eta = xu = x^2 y$. Temos que $\mu w \eta = u^2 = xyu$. Ora, $|u| > |\eta|$ devido à escolha de η e $|x| = |u| - |v^m| \geq |u| - |v^m| + |u| - |w'\eta| = |u^2| - |v^m w' \eta| = |\mu|$, donde, usando o ítem 1 da proposição 2.28, temos que existem $z, z' \in A^*$ tais que $\mu z = x$, $z'\eta = u$ e $zyz' = w = 1 v^m w'$. Pela proposição 2.25, temos que $1w' = zz'$ e, portanto, $\mu w' \eta = \mu z z' \eta = xu = x^2 y$.

   Vamos mostrar que $u^i \sim_{\pi'} x^i y$. Faremos uma indução em i. Para $i = 1$ é trivial. Assuma $i \geq 2$ e que $u^{i-1} \sim_{\pi'} x^{i-1}y$. Então $u^i = (u^{i-1})u \sim_{\pi'} (x^{i-1}y)u = (x^{i-1}(x^{-1}u))u = (x^{i-1}x^{-1})uu = (x^{i-2})\mu w \eta \sim_{\pi'} x^{i-2}\mu w' \eta = x^{i-2}x^2 y = x^i y$.

   Vamos mostrar que $\tau \in \sim_{\pi'}$. Temos que $|x| = |u| - |v^m| < |u| = k$, donde $(x^n, x^{n+m}) \in \pi \cap \Omega_{\leq k-1}$ e, pela hipótese de indução, temos que $x^n \sim_{\pi'} x^{n+m}$. Teremos portanto: $u^{n+m} \sim_{\pi'} x^{n+m}y \sim_{\pi'} x^n y \sim_{\pi'} u^n$.

   $|w'\eta| < |u|$

   Como $\mu \in \mathrm{Pref}(u)$ devido à própria escolha de μ, definimos $v_1 = \mu^{-1}u$. Como $w'\eta, u \in \mathrm{Suf}(u^2)$, e $|w'\eta| < |u|$, usando a proposição 2.1, temos que $w'\eta \in \mathrm{Suf}(u)$ e podemos definir $v_2 = u(w'\eta)^{-1}$. Então $u = \mu v_1 = v_2 w' \eta$. Ora, temos que $v^m = (\mu^{-1}(\mu v^m w' \eta))(w'\eta)^{-1} = (\mu^{-1}(uu))(w'\eta)^{-1} = (\mu^{-1}u)(u(w'\eta)^{-1}) = v_1 v_2$. Assim, usando (4.1), temos que $|u| > |v^m| = |v_1| + |v_2|$ e, usando a proposição 2.2, podemos definir $x = v_2{}^{-1}uv_1{}^{-1}$. Logo $w'\eta = v_2^{-1}u = xv_1$.

Vamos mostrar que $u^i \sim_{\pi'} v_2x^iv_1$. Faremos uma indução em i. Para $i = 1$ é trivial. Assuma que $i > 1$ e que $u^{i-1} \sim_{\pi'} v_2x^{i-1}v_1$. Então temos que $u^i = (u^{i-1})u \sim_{\pi'} (v_2x^{i-1}v_1)u = (v_2x^{i-1}v_1)v_2w'\eta = v_2x^{i-1}v^m w'\eta \sim_{\pi'} v_2x^{i-1}w'\eta = v_2x^{i-1}xv_1 = v_2x^iv_1$.

Vamos mostrar que $\tau \in \sim_{\pi'}$. Temos que $|x| = |u| - |v_1| - |v_2| = |u| - |v^m| < |u| = k$, donde $(x^n, x^{n+m}) \in \pi \cap \Omega_{\leq k-1}$ e, pela hipótese de indução, temos que $x^n \sim_{\pi'} x^{n+m}$. Teremos portanto: $u^{n+m} \sim_{\pi'} v_2x^{n+m}v_1 \sim_{\pi'} v_2x^nv_1 \sim_{\pi'} u^n$.

3. Admita $k' = 3$. Neste caso, $u^3 = \mu w\eta$.

   Como $\mu \in \text{Pref}(u)$, definimos $v_1 = \mu^{-1}u$. Como vimos que $|w| < |u| + |v|$, temos que $|w'\eta| = |w'| + |\eta| < |w| - |v^m| + |u| < |u| + |v| - m|v| + |u| \leq |u^2|$. Como $w'\eta, u^2 \in \text{Suf}(u^3)$, usando a proposição 2.1, temos que $w'\eta \in \text{Suf}(u^2)$ e podemos definir $v_2 = u^2(w'\eta)^{-1}$. Ora, $v^m = (\mu^{-1}(\mu v^m w'\eta))(w'\eta)^{-1} = (\mu^{-1}(uu^2))(w'\eta)^{-1} = (\mu^{-1}u)(u^2(w'\eta)^{-1}) = v_1v_2$. Assim, usando (4.1), temos que $|u| > |v^m| = |v_1| + |v_2|$ e, usando a proposição 2.2, podemos definir $x = v_2{}^{-1}uv_1{}^{-1}$. Neste caso, $w'\eta = v_2{}^{-1}u^2 = xv_1u$. Ora, $x, w' \in \text{Pref}(xv_1u)$ e $|x| = |u| - |v_1| - |v_2| = |u| - |v^m| < |u^3| - |\mu| - |\eta| - |v^m| = |w| - |v^m| = |w'|$. Assim, usando a proposição 2.1, temos que $x \in \text{Pref}(w') \subseteq \text{Pref}(w) \subseteq \text{Pref}(\mu^{-1}u^3)$. Como $v_1u = \mu^{-1}uu \in \text{Pref}(\mu^{-1}u^3)$ e $|x| < |u| < |v_1u|$ então, usando a proposição 2.1, temos que $x \in \text{Pref}(v_1u)$ e podemos definir $y = x^{-1}(v_1u)$.

   Vamos mostrar que $u^i \sim_{\pi'} v_2x^iy$, para $i \geq 2$. Para $i = 2$ temos que $u^2 = v_2xv_1u = v_2x^2y$. Admita $i > 2$ e $u^{i-1} \sim_{\pi'} v_2x^{i-1}y$. Temos que $xyu = v_1uu = \mu^{-1}uu^2 = w\eta \sim_{\pi'} w'\eta = xv_1u = x^2y$. Assim $u^i = (u^{i-1})u \sim_{\pi'} (v_2x^{i-1}y)u = v_2x^{i-2}xyu \sim_{\pi'} v_2x^{i-2}x^2y = v_2x^iy$.

   Vamos mostrar que $\tau \in \sim_{\pi'}$. Temos que $|x| = |u| - |v_1| - |v_2| = |u| - |v^m| < |u| = k$, donde $(x^n, x^{n+m}) \in \pi \cap \Omega_{\leq k-1}$ e, pela hipótese de indução, temos que $x^n \sim_{\pi'} x^{n+m}$. Teremos portanto: $u^{n+m} \sim_{\pi'} v_2x^{n+m}y \sim_{\pi'} v_2x^ny \sim_{\pi'} u^n$.

$\blacksquare$

Capítulo 5

O Teorema da Estabilidade.

Neste capítulo, o principal resultado é a demonstração do Teorema da Estabilidade. Provamos que toda produção de Σ (também de Σ' e de Σ'') é estável quando $n \geq 4$ e $m \geq 1$.

A proposição 5.1 nos dá um conjunto de propriedades muito interessante sobre as produções de Σ'' e de Σ. Será usado na demonstração do Teorema da Estabilidade, mais adiante, como também do Teorema da Expansibilidade e outras proposições.

Proposição 5.1 *Sejam $\tau, \sigma \in \Sigma''$ duas produções estáveis. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(c_\tau)$ então $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$.*
2. *Se $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$, então $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$.*
3. *Se $c_\sigma \in \mathrm{Fat}(c_\tau)$, então $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$ ou $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau)$.*
4. *Se $c_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$, então σ e τ são produções conjugadas, ou $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau)$. Seja $l_\tau = uc_\sigma v$. Admita que $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau) \leq |c_\tau|/3$. Então existem $u' \in \mathrm{Suf}(u)$, $v' \in \mathrm{Pref}(v)$ tais que $c_\tau = u'c_\sigma v'$ satisfazendo $u' = 1 \iff u = 1$ e $v' = 1 \iff v = 1$. Em particular, $c_\sigma \in \mathrm{Fat}(c_\tau)$.*

Demonstração.

Da definição de Σ'', segue que existem $\tau', \sigma' \in \Sigma$ tais que $\sigma' \leq_{\mathrm{r}} \sigma$ e $\tau' \leq_{\mathrm{r}} \tau$. Devido à proposição 3.3, temos que σ e σ' são produções conjugadas, o mesmo acontecendo com τ e τ'. Como τ e σ são estáveis, temos que $|c_\tau| \geq \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{per}(l_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$ e $|c_\sigma| \geq \mathrm{per}(c_\sigma) = \mathrm{per}(l_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$.

Usando a proposição 3.8, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ são palavras primitivas. Observe que $c_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\sigma)$ e $\mathrm{Fat}(c_\tau) \subseteq \mathrm{Fat}(l_\tau)$, donde, em todos os casos, temos que $c_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Usando a proposição 2.22, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período de c_σ (ou também de l_σ no caso dos ítens 1 e 2) e teremos que $\mathrm{base}(\sigma) \leq \mathrm{base}(\tau)$, em todos os casos.

Provaremos os ítens 1 e 2. Nestes dois casos, temos que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Usando a proposição 3.18 e a proposição 3.25, escolhamos $\rho = (x^n, x^{n+m}) \in \pi'$ um patriarca de τ' com $\tau' \leq_{\mathrm{r}} \rho$. Usando a proposição 3.3, temos que ρ, τ e τ' são produções conjugadas, donde $x = \mathrm{b_{dir}}(\rho)$ é um período de l_τ, devido ao corolário 3.2, e também de l_σ, devido à proposição 2.22. Seja k' mínimo tal que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(x^{k'})$. Temos dois casos a analisar: ou $k' > n+m$ ou $k' \leq n+m$. Admita que $k' > n+m$. Assim podemos admitir que $k' \geq n+m+1 \geq 4$. Usando a proposição 2.3, temos que $x^2 \in \mathrm{Fat}(x^{k'-2}) \subseteq \mathrm{Fat}(l_\sigma)$. Como $x^2 \in \mathrm{Fat}(l_\sigma) \subseteq \mathrm{Fat}(l_\tau)$, usando a proposição 2.22, temos que $\mathrm{per}(x^2) \leq \mathrm{per}(l_\sigma) \leq \mathrm{per}(l_\tau)$. Como ρ é estável, então x é um menor período de $c_\rho = x^n$ e, usando a proposição 2.23, temos que $\mathrm{per}(x^2) = \mathrm{per}(x^n) = \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{per}(l_\tau)$. Assim sendo $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{per}(l_\tau) = \mathrm{per}(l_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$. Admita que $k' \leq n+m$. Assim $l_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(l_\sigma) \subseteq \mathrm{Fat}(x^{k'}) \subseteq \mathrm{Fat}(l_\rho)$. Sendo $i = \mathrm{base}(\rho)$, usando a proposição 3.22 e a definição de π'_i, temos que $\rho \in \pi'_i$ e que $\sigma' \notin \Sigma_{\lfloor (i-1)/m \rfloor}$; donde $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\sigma') > \lfloor (i-1)/m \rfloor$ e $m\mathrm{base}(\sigma) \geq i = \mathrm{base}(\rho)$. Portanto, $|l_\sigma| = |c_\sigma| + m\mathrm{base}(\sigma) \geq |c_\sigma| + \mathrm{base}(\rho) \geq |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)| + |\mathrm{b_{dir}}(\tau)|$. Ora, devido à proposição 2.19, temos que $\mathrm{base}(\sigma) = |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)| = |\mathrm{b_{dir}}(\tau)| = \mathrm{base}(\tau)$. Assim, nos dois casos, temos que $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$ e, devido à proposição 3.4, temos que $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$.

Provaremos o ítem 3. Já vimos que $\mathrm{base}(\sigma) \leq \mathrm{base}(\tau)$. Caso $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$, usando a proposição 3.4, temos que $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$.

Provaremos o ítem 4. Já vimos que $\mathrm{base}(\sigma) \leq \mathrm{base}(\tau)$. Admita que $|\mathrm{b_{dir}}(\sigma)| = \mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\tau) = |\mathrm{b_{dir}}(\tau)|$. Usando a proposição 3.11, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Fat}(c_\sigma) \subseteq \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Usando a proposição 2.12, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ são palavras conjugadas e, portanto, as produções τ e σ são conjugadas. Admita que $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau) \leq |c_\tau|/3$. Usando a proposição 2.19, temos que $|c_\sigma| < |\mathrm{b_{dir}}(\tau)| + |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)| < 2\mathrm{base}(\tau) < |c_\tau|$. Naturalmente, se $v = 1$ então temos que $u \neq 1$, que $c_\sigma, c_\tau \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$ e, usando a proposição 2.1, temos que existe $u' \in \mathrm{Suf}(u) \setminus \{1\}$ tal que $u'c_\sigma = c_\tau$. Vale também o dual, caso $u = 1$. Admita, pois, que $v \neq 1 \neq u$. Seja $k = \min(m, \max\{i \in \mathbb{N}$ tal que $|v| > |\mathrm{b_{dir}}(\tau)^i|\})$. Como $\mathrm{b_{dir}}(\tau)^k, v \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$, usando a proposição 2.1, então temos que existe $v' \in \mathrm{Pref}(v) \setminus \{1\}$ tal que $v'\mathrm{b_{dir}}(\tau)^k = v$

e $uc_\sigma v' = l_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{-k} \in \mathrm{Pref}(l_\tau)$. Se $k = m$, então $uc_\sigma v' = c_\tau$ e não mais há o que fazer. Admita que $k = \max\{i \in \mathbb{N}$ tal que $|v| > |\mathrm{b_{dir}}(\tau)^i|\} < m$. Ora, $|u| = |l_\tau| - |c_\sigma| - |v| > m\mathrm{base}(\tau) + |c_\tau| - 2\mathrm{base}(\tau) - |\mathrm{b_{dir}}(\tau)^{k+1}| \geq (m+3-2-k-1)\mathrm{base}(\tau) = |\mathrm{b_{esq}}(\tau)^{m-k}|$, donde, usando a proposição 2.1, temos que existe $u' \in \mathrm{Suf}(u) \setminus \{1\}$ tal que $u = \mathrm{b_{esq}}(\tau)^{m-k}u'$ e $u'c_\sigma v' = \mathrm{b_{esq}}(\tau)^{-(m-k)} l_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{-k}$. Assim $|u'c_\sigma v'| = |c_\tau|$. Usando a proposição 2.5, temos que $\mathrm{b_{esq}}(\tau)^{m-k}$ é um período de $uc_\sigma v'$ e, usando o dual da proposição 2.14, temos que $u'c_\sigma v' \in \mathrm{Pref}(uc_\sigma v') \subseteq \mathrm{Pref}(l_\tau)$. Donde concluimos que $c_\tau = u'c_\sigma v'$. ∎

Corolário 5.2 *Sejam τ, σ duas produções distintas e estáveis de Σ. Então temos que $l_\sigma \notin \mathrm{Fat}(c_\tau)$ e que $l_\sigma \notin \mathrm{Fat}(l_\tau)$.*

Demonstração.

Observe que $\mathrm{Fat}(c_\tau) \subset \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Caso $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$, usando o ítem 2 da proposição 5.1, temos que $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau$. Como $\tau, \sigma \in \Sigma = \mathrm{irred}(\Sigma')$, temos então que $\sigma = \tau$, que é uma contradição com a hipótese de que as produções sejam distintas. ∎

Vejamos agora algumas proposições que nos ajudam na demonstração do Teorema da Estabilidade.

Proposição 5.3 *Seja σ uma produção estável e seja $x \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$ de comprimento maior ou igual ao de c_σ. Então $\mathrm{per}(x) = \mathrm{base}(\sigma)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é um menor período de x.*

Demonstração.

Como σ é estável, temos que $\mathrm{per}(c_\sigma) = \mathrm{per}(l_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$. Como $x, c_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$ e $|x| \geq |c_\sigma|$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\sigma \in \mathrm{Pref}(x)$ seguindo então que $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{per}(c_\sigma) \leq \mathrm{per}(x)$ devido à proposição 2.22. Ora, como $x \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$, usando a mesma proposição 2.22, temos que $\mathrm{per}(x) \leq \mathrm{per}(l_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$ e que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é um período de x. Logo, temos que $\mathrm{per}(x) = \mathrm{base}(\sigma)$ e que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é, inclusive, um menor período de x. ∎

A proposição 5.3 será particularmente usada quando σ for estável e tivermos, para algum τ, que $|c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$. Nestes casos, teremos que $\mathrm{per}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$.

Proposição 5.4 *Sejam τ, σ duas produções estáveis de Σ. Então* $|c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| \leq |c_\sigma|$.

Demonstração.

Suponha, por absurdo, que $|c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$. Usando a proposição 5.3, temos que $\text{per}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma) = \text{base}(\sigma)$. Como $c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma \in \text{Suf}(c_\tau)$, usando a prosição 2.22, temos que $\text{base}(\sigma) = \text{per}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma) \leq \text{per}(c_\tau) = \text{base}(\tau)$ também devido à estabilidade de τ. Suponha que $\text{base}(\sigma) < \text{base}(\tau)$. Neste caso temos que $\tau \ \mathrm{R}_{\text{dir}} \ \sigma$, contradizendo com a proposição 3.24. Deveremos supor então que $\text{base}(\sigma) = \text{base}(\tau)$. Como $c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma, c_\sigma \in \text{Pref}(l_\sigma)$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\sigma \in \text{Pref}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma) \subseteq \text{Fat}(c_\tau)$. Como σ é estável e portanto $\text{base}(\sigma) = \text{per}(c_\sigma) \leq |c_\sigma|$, usando a proposição 3.4, temos que $\sigma \leq_{\text{r}} \tau$. Como $\sigma, \tau \in \Sigma = \text{irred}(\Sigma')$ temos que $\sigma = \tau$ e que $c_\sigma = c_\tau$. Assim temos que $c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma = c_\sigma \rightleftharpoons l_\sigma = c_\sigma$ que é uma contradição com $|c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$. ∎

A proposição seguinte nos mostra que reduções à esquerda, desde que feitas para produções estáveis, não interferem nas possíveis reduções à direita.

Proposição 5.5 *Sejam ρ, σ, σ' produções em Ω e seja $\tau = \sigma' \otimes_{\text{esq}} \rho$. Se τ é estável, então temos que* $\mathrm{M}_{\text{dir}}(\tau, \sigma) = \mathrm{M}_{\text{dir}}(\rho, \sigma)$.

Demonstração.

Usando a proposição 3.15, temos que $\tau \leq_{\text{r}} \rho$ e, portanto, que $\text{base}(\rho) = \text{base}(\tau)$ devido à proposição 3.3. Caso $\text{base}(\sigma) \geq \text{base}(\rho) = \text{base}(\tau)$, teremos então que $\rho \ \not\mathrm{R}_{\text{dir}} \ \sigma$ e que $\tau \ \not\mathrm{R}_{\text{dir}} \ \sigma$. Assim $\mathrm{M}_{\text{dir}}(\tau, \sigma) = 1 = \mathrm{M}_{\text{dir}}(\rho, \sigma)$ e a tese já está demonstrada.

Suponhamos então, a partir de agora, que $\text{base}(\sigma) < \text{base}(\rho) = \text{base}(\tau)$ e que τ seja estável.

Vamos provar que $c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma = c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma$. Ora, $c_\rho = \mathrm{M}_{\text{esq}}(\rho, \sigma')c_\tau$, donde temos que $c_\tau \in \text{Suf}(c_\rho)$. Assim sendo $c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma \in \text{Suf}(c_\tau) \cap \text{Pref}(l_\sigma) \subseteq \text{Suf}(c_\rho) \cap \text{Pref}(l_\sigma)$. Logo, temos que $|c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| \leq |\max(\text{Suf}(c_\rho) \cap \text{Pref}(l_\sigma))| = |c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma|$. Ora, $c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma \in \text{Pref}(l_\sigma)$, usando a proposição 2.22, e como $\mathrm{b}_{\text{dir}}(\sigma)$ é período de σ, temos que $\text{per}(c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma) \leq \text{per}(l_\sigma) \leq \text{base}(\sigma)$. Como τ é estável, então $\text{per}(c_\tau) = \text{base}(\tau) > \text{base}(\sigma) \geq \text{per}(c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma)$ e, usando a proposição 2.22, temos que $c_\tau \notin \text{Suf}(c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma)$. Como $c_\tau, c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma \in \text{Suf}(c_\rho)$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma \in \text{Suf}(c_\tau)$. Assim sendo, $c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma \in$

$\mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma)$ e portanto $|c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma| \leq |\max(\mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma))| = |c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma|$. Assim os dois encaixes acima têm o mesmo comprimento e, como são prefixos de l_σ, são idênticos.

Como $c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma = c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma$ e como $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\rho)$, temos então que: $\rho \mathrel{\mathrm{R_{dir}}} \sigma \iff |c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma| \iff |c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma| \iff \tau \mathrel{\mathrm{R_{dir}}} \sigma$. Caso $\rho \not\mathrel{\mathrm{R}}_{\mathrm{dir}} \sigma$, teremos então que $\mathrm{M_{dir}}(\tau, \sigma) = 1 = \mathrm{M_{dir}}(\rho, \sigma)$ e a tese já está demonstrada. Caso $\rho \mathrel{\mathrm{R_{dir}}} \sigma$, teremos então que $\mathrm{M_{dir}}(\rho, \sigma) = c_\sigma{}^{-1}(c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma) = c_\sigma{}^{-1}(c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma) = \mathrm{M_{dir}}(\tau, \sigma)$ e a tese novamente está demonstrada. ∎

Lema 5.6 *Sejam ρ, σ, σ' produções tais que $\sigma' \otimes_{\mathrm{esq}} \rho$ e que $\rho \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma$ sejam produções estáveis. Então temos que $(\sigma' \otimes_{\mathrm{esq}} \rho) \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma = \sigma' \otimes_{\mathrm{esq}} (\rho \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma)$.*

Demonstração.

Seja $\tau = \sigma' \otimes_{\mathrm{esq}} \rho$ e seja $\tau' = \rho \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma$. Temos então que $\rho = \mathrm{M_{esq}}(\rho, \sigma')\, \tau = \tau'\, \mathrm{M_{dir}}(\rho, \sigma)$. Usando a proposição 5.5, temos que $\mathrm{M_{dir}}(\rho, \sigma) = \mathrm{M_{dir}}(\tau, \sigma)$ e que $\mathrm{M_{esq}}(\rho, \sigma') = \mathrm{M_{esq}}(\tau', \sigma')$ devido ao dual da mesma proposição. Assim temos que $(\sigma' \otimes_{\mathrm{esq}} \rho) \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma = \tau \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma = \tau \mathrm{M_{dir}}(\tau, \sigma)^{-1} = (\mathrm{M_{esq}}(\rho, \sigma')^{-1}\, \rho)\, \mathrm{M_{dir}}(\rho, \sigma)^{-1} = \mathrm{M_{esq}}(\tau', \sigma')^{-1}\, (\rho\, \mathrm{M_{dir}}(\rho, \sigma)^{-1}) = \sigma' \otimes_{\mathrm{esq}} \tau' = \sigma' \otimes_{\mathrm{esq}} (\rho \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma)$. ∎

Seja $\mathcal{T} \subseteq \Omega$, seja $\tau \in \otimes(\mathcal{T})$ e seja $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \mathcal{T})$ uma dedução para τ. Definiremos algumas funções sobre s. Definimos $\mathrm{Dir}(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \{j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\tau_j = \tau_{j-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_j\}$ e, $\mathrm{Esq}(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \{j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\tau_j = \sigma_j \otimes_{\mathrm{esq}} \tau_{j-1}\}$. Dizemos que $\sigma_{\mathrm{Dir}(s)}$ é a subseqüência de $\{\sigma_i\}$ formada pelas produções com índices em $\mathrm{Dir}(s)$ e $\sigma_{\mathrm{Esq}(s)}$ é a formada pelas produções com índice em $\mathrm{Esq}(s)$. Definimos também $\mathrm{Inv}(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \{(i, j) \in \mathrm{Esq}(s) \times \mathrm{Dir}(s)$ tal que $i < j\}$. Usaremos estes conceitos na demonstração do lema 5.7.

O lema seguinte aplica o lema anterior de uma maneira global e permite-nos concluir que dada uma dedução para uma produção τ a partir de um patriarca ρ, podemos obter a mesma produção se antes fizermos todas as reduções de um lado para depois fazer as do outro lado.

Lema 5.7 *Seja $\tau \in \Sigma'$ e $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \pi'_{\mathrm{base}(\tau)} \cup \Sigma_{\mathrm{base}(\tau)-1})$ uma dedução para τ. Sejam $\mu, \eta \in A^*$ tais que $\tau_0 = \mu\tau\eta$. Admita que toda produção de Σ' menor que τ pela ordem $<_{\mathrm{k}}$ seja estável. Então $\mathrm{Dir}(s)$ e $\mathrm{Esq}(s)$ são disjuntos e existem uma dedução $s' = (k', \{\tau'_i\}, \{\sigma'_i\}, \pi'_{\mathrm{base}(\tau)} \cup \Sigma_{\mathrm{base}(\tau)-1})$ para τ e $k'' \leq k$ satisfazendo: $k' = k$; $\tau'_0 = \tau_0$ e $\tau'_k = \tau_k = \tau$; $\mathrm{Inv}(s') = \emptyset$; $\sigma_{\mathrm{Dir}(s)} = \sigma'_{\mathrm{Dir}(s')} = \sigma'_1 \sigma'_2 \cdots \sigma'_{k''}$; $\sigma_{\mathrm{Esq}(s)} = \sigma'_{\mathrm{Esq}(s')} = \sigma'_{k''+1} \sigma'_{k''+2} \cdots \sigma'_k$; $\tau'_{k''} = (\mu c_\tau, \mu l_\tau)$.*

Demonstração.

Primeiro vamos mostrar que $\mathrm{Dir}(s) \cap \mathrm{Esq}(s) = \emptyset$. Suponha, por absurdo, que exista i tal que $i \in \mathrm{Dir}(s) \cap \mathrm{Esq}(s)$. Assim temos que $\tau_i = \sigma_i \otimes_{\mathrm{esq}} \tau_{i-1} = \tau_{i-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_i$ e, portanto, que $c_{\tau_i} \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_{i-1}}) \cap \mathrm{Pref}(c_{\tau_{i-1}})$. Logo $\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_{i-1}, \sigma_i) = c_{\tau_i}^{-1} c_{\tau_{i-1}}$ é período de $c_{\tau_{i-1}}$ devido à proposição 2.14. Como σ_i, τ_{i-1} são estáveis, temos que $|\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_{i-1}, \sigma_i)| \geq \mathrm{per}(c_{\tau_{i-1}}) = |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau_{i-1})|$ e que $|c_{\sigma_i}| \geq \mathrm{per}(c_{\sigma_i}) = |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma_i)|$. Como $c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_i} \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_{i-1}})$, temos que $\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_{i-1}, \sigma_i)$ é período de $c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_i}$ devido à proposição 2.22. Usando a proposição 5.3, temos que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma_i)$ é período de $c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_i}$, sendo que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau_{i-1})$ é primitiva devido à proposição 3.27. Como $|c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_i}| = |c_{\sigma_i}| + |\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_{i-1}, \sigma_i)| \geq |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma_i)| + |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau_{i-1})|$, usando a proposição 2.19, temos que $|\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma_i)| \geq |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau_{i-1})|$, que é uma contradição com a proposição 3.18.

Para demonstrar o restante, faremos uma indução em $|\mathrm{Inv}(s)|$. Se $\mathrm{Inv}(s) = \emptyset$, tomemos $s' = s$ e $k'' = \max(\mathrm{Dir}(s))$ e a tese é imediata. Admita que $\mathrm{Inv}(s) \neq \emptyset$ e que a tese valha para qualquer dedução s' tal que $|\mathrm{Inv}(s')| < |\mathrm{Inv}(s)|$. Seja $j = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{Inv}(s)))$. Então $j < k$, $j \in \mathrm{Esq}(s)$ e $j+1 \in \mathrm{Dir}(s)$. Portanto, $\tau_j = \sigma_j \otimes_{\mathrm{esq}} \tau_{j-1}$ e $\tau_{j+1} = \tau_j \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_{j+1}$. Da proposição 3.18, teremos que $\mathrm{base}(\sigma_j), \mathrm{base}(\sigma_{j+1}) < \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\tau_{j-1}) = \mathrm{base}(\tau_j) = \mathrm{base}(\tau_{j+1})$, que $\tau_j <_{\mathrm{k}} \tau$ e, portanto, que $\tau_j = \sigma_j \otimes_{\mathrm{esq}} \tau_{j-1}$ é estável. Usando a proposição 5.5, temos que $\mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_{j-1}, \sigma_{j+1}) = \mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_j, \sigma_{j+1})$, temos que $\tau_{j+1} = \tau_j \mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_j, \sigma_{j+1})^{-1} <_{\mathrm{r}} \tau_{j-1} \mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_j, \sigma_{j+1})^{-1} = \tau_{j-1} \mathrm{M}_{\mathrm{dir}}(\tau_{j-1}, \sigma_{j+1})^{-1} = \tau_{j-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_{j+1}$, temos que $\tau_{j-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_{j+1} <_{\mathrm{k}} \tau_{j+1} \leq_{\mathrm{k}} \tau$ e, portanto, temos que $\tau_{j-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_{j+1}$ é estável. Usando o lema 5.6, temos que $\tau_{j+1} = \sigma_j \otimes_{\mathrm{esq}} (\tau_{j-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_{j+1})$. Assim sendo, as seqüências $\{\tau'_i\}, \{\sigma'_i\}$, obtidas, a primeira a partir de $\{\tau_i\}$ substituindo τ_j por $(\tau_{j-1} \otimes_{\mathrm{dir}} \sigma_{j+1})$, e a segunda a partir de $\{\sigma_i\}$ trocando de lugar σ_j e σ_{j+1}, formam a dedução $s' = (k, \{\tau'_i\}, \{\sigma'_i\}, \pi'_{\mathrm{base}(\tau)} \cup \Sigma_{\mathrm{base}(\tau)-1})$ para τ satisfazendo: $k' = k$; $\tau'_0 = \tau_0$ e $\tau'_k = \tau_k = \tau$; $\sigma_{\mathrm{Dir}(s)} = \sigma'_{\mathrm{Dir}(s')}$; $\sigma_{\mathrm{Esq}(s)} = \sigma'_{\mathrm{Esq}(s')}$; e $\mathrm{Inv}(s') = \mathrm{Inv}(s) \setminus \{(j, j+1)\} \subset \mathrm{Inv}(s)$. Aplicando a hipótese de indução sobre s', segue imediatamente a tese. ∎

Lema 5.8 *Seja* $\tau \in \Sigma'$ *e seja* $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \pi'_{\mathrm{base}(\tau)} \cup \Sigma_{\mathrm{base}(\tau)-1})$ *uma dedução ótima à direita para* τ *com* $k \geq 1$. *Suponha que todas as produções da seqüência* $\{\sigma_i\}$ *sejam estáveis.*
Então temos que $\mathrm{base}(\sigma_k) > \beta \mathrm{base}(\sigma_{k-1}) > \cdots > \beta^{k-1} \mathrm{base}(\sigma_1)$, *onde* $\beta = \max(\{1, \varphi - 1\})$ *e* φ *é tal que* $|c_\sigma| \geq \varphi \mathrm{base}(\sigma)$ *para todo* σ *na seqüência* $\{\sigma_i\}$. *Temos ainda que* $c_{\sigma_i} \in \mathrm{Fat}(l_{\sigma_{i+1}})$, *para* $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Demonstração.

Se $k = 1$ isto é imediato. Admitamos, pois que $k > 1$.

Como $\tau_i \neq \tau_{i-1}$, usando a proposição 3.17, temos que $c_{\sigma_i} \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_i})$, para $1 \leq i \leq k$. Definamos $m_i \stackrel{\text{def}}{=} c_{\tau_i}^{-1} c_{\tau_{i-1}} = \mathrm{M}_{\text{dir}}(\tau_{i-1}, \sigma_i) \neq 1$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Observe que $c_{\sigma_i} m_i = c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_i}$, para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Fixemos i tal que $1 \leq i < k$.

Vamos mostrar que $\mathrm{b}_{\text{dir}}(\sigma_{i+1})$ é um menor período de $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}$ e que $\mathrm{b}_{\text{dir}}(\sigma_i)$ é um menor período de $c_{\sigma_i} m_i$. Como temos que $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} = c_{\tau_i} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}} \in \mathrm{Suf}(l_{\sigma_{i+1}})$ e $|c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}| > |c_{\sigma_{i+1}}|$, usando a proposição 5.3, temos que $\mathrm{b}_{\text{dir}}(\sigma_{i+1})$ é um menor período de $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}$. Analogamente, temos que $\mathrm{b}_{\text{dir}}(\sigma_i)$ é um menor período de $c_{\sigma_i} m_i$.

Vamos mostrar que $c_{\sigma_i} \in \mathrm{Suf}(c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}) \subseteq \mathrm{Fat}(l_{\sigma_{i+1}})$. Suponha, por absurdo, que $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} \in \mathrm{Suf}(c_{\sigma_i})$. Então temos que $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} = c_{\tau_i} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}} \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_i}) \cap \mathrm{Pref}(l_{\sigma_{i+1}}) \cap \mathrm{Suf}(c_{\sigma_i})$. Como $|c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}| > |c_{\sigma_{i+1}}|$ então temos que $|c_{\sigma_i} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}}| = |\max(\mathrm{Suf}(c_{\sigma_i}) \cap \mathrm{Pref}(l_{\sigma_{i+1}}))| \geq |c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}| > |c_{\sigma_{i+1}}|$, contradizendo com a proposição 5.4. Assim temos que $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} \notin \mathrm{Suf}(c_{\sigma_i})$. Como $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}, c_{\sigma_i} \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_i})$; usando a proposição 2.1, temos que c_{σ_i} é um sufixo próprio de $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}$, que por sua vez é um prefixo de $l_{\sigma_{i+1}}$.

Vamos mostrar que $\mathrm{base}(\sigma_i) < \mathrm{base}(\sigma_{i+1})$. Como temos que $c_{\sigma_i} \in \mathrm{Suf}(c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1})$, usando a proposição 2.22, temos que $\mathrm{base}(\sigma_i) = \mathrm{per}(c_{\sigma_i}) \leq \mathrm{per}(c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}) = \mathrm{base}(\sigma_{i+1})$. Suponhamos, por absurdo, que $\mathrm{base}(\sigma_{i+1}) = \mathrm{base}(\sigma_i)$. Assim sendo, $\mathrm{b}_{\text{esq}}(\sigma_{i+1})$ e $\mathrm{b}_{\text{esq}}(\sigma_i)$ são períodos de $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}$ e de $c_{\sigma_i} m_i$, respectivamente, e têm mesmo comprimento. Ora, temos que $|c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}| + |c_{\sigma_i} m_i| = |c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i| + |c_{\sigma_i}| \geq |c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i| + |\mathrm{b}_{\text{esq}}(\sigma_{i+1})|$, donde, usando a proposição 2.24, temos que $\mathrm{b}_{\text{esq}}(\sigma_{i+1})$ é período de $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i$. Usando o corolário 2.15, temos que $l_{\sigma_{i+1}}, c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i \in \mathrm{Pref}(\mathrm{b}_{\text{esq}}(\sigma_{i+1})^*)$. Admita que $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i \in \mathrm{Pref}(l_{\sigma_{i+1}})$. Então $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_{i-1}}) \cap \mathrm{Pref}(l_{\sigma_{i+1}})$ e $|c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}}| = |\max(\mathrm{Suf}(c_{\tau_{i-1}}) \cap \mathrm{Pref}(l_{\sigma_{i+1}}))| \geq |c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i|$. Observe também que $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i, c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}} \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_{i-1}})$, donde temos que $m_i \in \mathrm{Suf}(c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i) \subseteq \mathrm{Suf}(c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}})$ devido à proposição 2.1. Assim temos que $(c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}}) m_i{}^{-1} \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_{i-1}} m_i{}^{-1}) \cap \mathrm{Pref}(l_{\sigma_{i+1}}) = \mathrm{Suf}(c_{\tau_i}) \cap \mathrm{Pref}(l_{\sigma_{i+1}})$. Logo, temos que $|c_{\tau_i} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}}| = |\max(\mathrm{Suf}(c_{\tau_i}) \cap \mathrm{Pref}(l_{\sigma_{i+1}}))| \geq |c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}} m_i{}^{-1}| \geq |c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i| - |m_i| = |c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1}| = |c_{\tau_i} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}}|$ e, portanto, temos que $c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_{i+1}} = c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i$ pois são prefixos de $l_{\sigma_{i+1}}$ de mesmo coprimento (que é maior que $|c_{\sigma_{i+1}}|$). Assim sendo, temos que $\tau_{i-1}\ \mathrm{R}_{\text{dir}}\ \sigma_{i+1}$, e que $\tau_{i+1} = \tau_{i-1} \otimes_{\text{dir}} \sigma_{i+1}$, contradizendo com a minimalidade de k. Neste caso, podemos admitir que $c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i \notin \mathrm{Pref}(l_{\sigma_{i+1}})$. Usando a proposição 2.1, temos que $l_{\sigma_{i+1}} \in \mathrm{Pref}(c_{\sigma_{i+1}} m_{i+1} m_i) \subseteq \mathrm{Fat}(c_{\tau_0})$. Ora, τ_0 e σ_{i+1}

são estáveis e, portanto, podemos usar o ítem 1 da proposição 5.1. Assim concluimos que $\sigma_{i+1} \leq_{\mathrm{r}} \tau_0$, que é uma contradição pois, devido à proposição 3.3, teríamos que $\mathrm{base}(\sigma_{i+1}) = \mathrm{base}(\tau_0) = \mathrm{base}(\tau)$.

Vamos concluir a demonstração. Já temos que $\mathrm{base}(\sigma_i) < \mathrm{base}(\sigma_j)$ para $1 \leq i < j \leq k$. Isto conclui a demonstração no caso em que $\beta = 1$. Admita que $\beta = \varphi - 1 \geq 1$. Como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma_{i+1})$ é primitiva devido à proposição 3.27, como não somente $\mathrm{b_{dir}}(\sigma_i)$ é período de c_{σ_i} mas também $\mathrm{b_{dir}}(\sigma_{i+1})$ devido à proposição 2.22 e ao fato de que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma_{i+1})$ é período de $l_{\sigma_{i+1}}$ e ao de que $c_{\sigma_i} \in \mathrm{Fat}(l_{\sigma_{i+1}})$, usando a proposição 2.19, temos então que $\varphi\mathrm{base}(\sigma_i) \leq |c_{\sigma_i}| < |\mathrm{b_{dir}}(\sigma_i)| + |\mathrm{b_{dir}}(\sigma_{i+1})|$ e, portanto, que $\mathrm{base}(\sigma_{i+1}) \geq (\varphi - 1)\mathrm{base}(\sigma_i) = \beta\mathrm{base}(\sigma_i)$. ∎

A proposição seguinte nos mostra que dada uma dedução à direita conforme diz o enunciado, não pode existir uma produção estável σ de base maior que a de σ_k tal que seu curto seja fator de c_{τ_0} e que termine depois de c_τ, pois isto siguinificaria que esta produção σ também foi reduzida por alguma das produções de $\{\sigma_i\}$. Se admitirmos que σ tenha a mesma base que σ_k e que ocorre em c_{τ_0} como o descrito acima, então teremos que σ e σ_k são conjugados e que esta ocorrência de c_σ ocorre toda dentro do encaixe de $c_{\tau_{k-1}}$ com l_{σ_k}.

Lema 5.9 *Seja $\tau \in \Sigma'$ e seja $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \pi'_{\mathrm{base}(\tau)} \cup \Sigma_{\mathrm{base}(\tau)-1})$ uma dedução ótima à direita para τ com $k \geq 1$. Suponha que todas as produções da seqüência $\{\sigma_i\}$ sejam estáveis.*
Seja $\sigma \in \Sigma$ uma produção estável e seja $x \in A^*$ tais que $xc_\sigma \in \mathrm{Pref}(c_{\tau_0})$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. *Se $\mathrm{base}(\sigma) > \mathrm{base}(\sigma_k)$ temos então que $|xc_\sigma| \leq |c_\tau|$.*
2. *Se $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\sigma_k)$ e $|c_\tau| < |xc_\sigma|$ temos então que $|c_\tau| < |xc_\sigma| \leq |c_{\tau_{k-1}}|$ e que σ e σ_k são conjugadas.*

Demonstração.

Caso $|xc_\sigma| \leq |c_\tau|$ ou $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\sigma_k)$, então temos que ambos os ítens já estão provados.

Admitiremos pois que $|xc_\sigma| > |c_\tau|$ e que $\mathrm{base}(\sigma) \geq \mathrm{base}(\sigma_k)$.

Como $xc_\sigma, c_\tau \in \mathrm{Pref}(c_{\tau_0})$, temos que $\mathrm{Pref}(c_\tau) \subset \mathrm{Pref}(xc_\sigma)$ devido à proposição 2.1. Como $\mathrm{Pref}(c_\tau) = \mathrm{Pref}(c_{\tau_k}) \subset \mathrm{Pref}(c_{\tau_{k-1}}) \subset \cdots \subset \mathrm{Pref}(c_{\tau_0})$ e como $\mathrm{Pref}(c_\tau) \doteq \mathrm{Pref}(c_{\tau_k}) \subset \mathrm{Pref}(xc_\sigma) \subseteq \mathrm{Pref}(c_{\tau_0})$, então temos que existe único i tal que $\mathrm{Pref}(c_{\tau_i}) \subset \mathrm{Pref}(xc_\sigma) \subseteq \mathrm{Pref}(c_{\tau_{i-1}})$. Naturalmente, temos que $1 \leq i \leq k$ e, portanto que $\mathrm{base}(\sigma_i) \leq \mathrm{base}(\sigma_k) \leq \mathrm{base}(\sigma)$ devido à proposição 5.8. Usando a proposição 2.1, temos que existe $m'' \in A^+$ e $m' \in A^*$ tais que $c_{\tau_i}m'' = xc_\sigma$, que $xc_\sigma m' = c_{\tau_{i-1}}$ e que $m''m' = \mathrm{M_{dir}}(\tau_{i-1}, \sigma_i) = c_{\tau_i}^{-1}c_{\tau_{i-1}}$. Usando a proposição 3.17, temos que $c_{\sigma_i} \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_i})$. Seja $y \in A^*$ tal que $c_{\tau_i} = yc_{\sigma_i}$ e, portanto, tal que $xc_\sigma = c_{\tau_i}m'' = yc_{\sigma_i}m''$.

Vamos provar o primeiro ítem. Suponha que $\mathrm{base}(\sigma) > \mathrm{base}(\sigma_k)$. Vamos mostrar que isto leva a uma contradição pois já estamos supondo que $|c_\tau| < |xc_\sigma|$. Observe que $c_{\sigma_i}m'' \in \mathrm{Pref}(c_{\sigma_i}\mathrm{M_{dir}}(\tau_{i-1}, \sigma_i)) = \mathrm{Pref}(c_{\tau_{i-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_i}) \subseteq \mathrm{Pref}(l_{\sigma_i})$ e assim temos que $\mathrm{per}(c_{\sigma_i}m'') = \mathrm{base}(\sigma_i)$ devido à proposição 5.3. Como temos que $\mathrm{base}(\sigma_i) \leq \mathrm{base}(\sigma_k) < \mathrm{base}(\sigma)$ devido à proposição 5.8, então temos que $\mathrm{per}(c_{\sigma_i}m'') = \mathrm{base}(\sigma_i) < \mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{per}(c_\sigma)$. Usando a proposição 2.22, temos que $c_\sigma \notin \mathrm{Suf}(c_{\sigma_i}m'')$. Como já vimos que $yc_{\sigma_i}m'' = xc_\sigma$, usando a proposição 2.22, temos que $c_{\sigma_i}m'' \in \mathrm{Suf}(c_\sigma) \cap \mathrm{Pref}(l_{\sigma_i})$. Assim temos que $|c_\sigma \rightleftharpoons l_{\sigma_i}| = |\max(\mathrm{Suf}(c_\sigma) \cap \mathrm{Pref}(l_{\sigma_i})| \geq |c_{\sigma_i}m''| > |c_{\sigma_i}|$, que é uma contradição com a proposição 5.4.

Suponha, a partir de agora, que $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\sigma_k)$.

Vamos mostrar que $i = k$ e que $|xc_\sigma| \leq |c_{\tau_{k-1}}|$. Caso $k = 1$ nem há outra possibilidade para i e também já sabemos que $|xc_\sigma| \leq |c_{\tau_0}| = |c_{\tau_{k-1}}|$. Suponhamos então que $k \geq 2$. Usando a proposição 5.8, temos que $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\sigma_k) > \mathrm{base}(\sigma_{k-1})$. A dedução s induz uma dedução ótima á direita s' para $c_{\tau_{k-1}}$ de comprimento $k - 1 \geq 1$. Usando o primeiro ítem baseado nesta dedução s', temos que $|xc_\sigma| \leq |c_{\tau_{k-1}}|$. Como $xc_\sigma, c_{\tau_{k-1}} \in \mathrm{Pref}(c_{\tau_0})$, usando a proposição 2.1, temos então que $\mathrm{Pref}(c_{\tau_k}) \subset \mathrm{Pref}(xc_\sigma) \subseteq \mathrm{Pref}(c_{\tau_{k-1}})$ e, portanto, que $i = k$.

Vamos provar o segundo ítem. Observe que já estamos supondo as hipóteses do segundo ítem. Usando a proposição 3.11, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(c_\sigma) \subseteq \mathrm{Suf}(xc_\sigma) = \mathrm{Suf}(yc_{\sigma_i}m'')$. Como σ_i é estável, temos que $|c_{\sigma_i}m''| \geq |c_{\sigma_i}| \geq \mathrm{per}(c_{\sigma_i}) = \mathrm{base}(\sigma_i) = \mathrm{base}(\sigma_k) = \mathrm{base}(\sigma) = |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)|$ e, usando a proposição 2.1, temos então que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(c_{\sigma_i}m'') \subseteq \mathrm{Fat}(l_{\sigma_i}) = \mathrm{Fat}(l_{\sigma_k})$. Como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Fat}(l_{\sigma_k})$, como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)$ é um período de l_{σ_k} e $|\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)| = |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)|$, usando a proposição 2.12, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ são conjugadas. Portanto, temos que σ_k e σ são produções conjugadas. ∎

O Teorema da Estabilidade, é importante a ponto de que a demonstração da conjectura para casos como $m \geq 1$ e $n = 3$ esteja dependendo unicamente dele, como já afirmamos anteriormente. Observe, pela construção de

Σ, que se $\tau \in \Sigma'$ então existe um $\tau_0 \in \pi'$ a partir do qual foram feitas sucessivas reduções, à direita e/ou à esquerda, até obtermos τ; mas também existem palavras μ, η tais que $\tau_0 = \mu\tau\eta$. O nosso objetivo é mostrar que as produções de Σ são estáveis, mas para isto, mostramos que $|\mu|, |\eta| < \mathrm{base}(\tau)$ usando o lema seguinte. Neste caso, teremos que $|c_\tau| = |\mu^{-1}c_{\tau_0}\eta^{-1}| \geq 2\mathrm{base}(\tau)$ e, usando a proposição 3.9, teremos que τ é estável, demonstrando o Teorema da Estabilidade.

Lema 5.10 *Seja $\tau \in \Sigma'$ e seja $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \pi'_{\mathrm{base}(\tau)} \cup \Sigma_{\mathrm{base}(\tau)-1})$ uma dedução ótima à direita para τ. Suponha que todas as produções da seqüência $\{\sigma_i\}$ sejam estáveis.*
Seja $\eta \in A^*$ tal que $\tau_0 = \tau\eta$. Então $\tau_0 \in \pi'$ e $|\eta| < \mathrm{base}(\tau)$.

Demonstração.

Pela proposição 3.25, temos que $\tau_0 \in \pi'$ e que $\sigma_k \in \Sigma$ e, usando a proposição 3.18, temos que $\mathrm{base}(\sigma_k) < \mathrm{base}(\tau)$.

Suponha, por absurdo, que $|\eta| \geq \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\tau_0)$. Neste caso teremos que $k \geq 1$. Seja $u \in A^+$ tal que $\tau_0 = (u^n, u^{n+m})$. Como $c_\tau\eta = u^n = u^{n-1}u$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\tau \in \mathrm{Pref}(u^{n-1})$ e que $uc_\tau \in \mathrm{Pref}(u^n)$. Usando a proposição 3.17, temos que $c_{\sigma_k} \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$. Seja $x \in A^*$ tal que $xc_{\sigma_k} = uc_\tau \in \mathrm{Pref}(u^n) = \mathrm{Pref}(c_{\tau_0})$. Como $|c_\tau| < |uc_\tau| = |xc_{\sigma_k}|$, usando o ítem 2 do lema 5.9, temos que $|xc_{\sigma_k}| \leq |c_{\tau_{k-1}}|$ e, portanto, que $|\mathrm{M_{dir}}(\tau_{k-1}, \sigma_k)| = |c_\tau^{-1}c_{\tau_{k-1}}| = |c_{\tau_{k-1}}| - |c_\tau| \geq |xc_\sigma| - |c_\tau| = |uc_\tau| - |c_\tau| = |u|$. Como σ_k é estável, temos que $|\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)| = \mathrm{base}(\sigma_k) = \mathrm{per}(c_{\sigma_k}) \leq |c_{\sigma_k}|$. Assim temos que $|c_{\tau_{k-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_k}| = |c_{\sigma_k}\mathrm{M_{dir}}(\tau_{k-1}, \sigma_k)| \geq |c_{\sigma_k}| + |\mathrm{M_{dir}}(\tau_{k-1}, \sigma_k)| \geq |\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)| + |u|$. Como $c_{\tau_{k-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_k} \in \mathrm{Suf}(c_{\tau_{k-1}}) \subseteq \mathrm{Fat}(u^n)$, temos que u é período de $c_{\tau_{k-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_k}$. Como $c_{\tau_{k-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_k} \in \mathrm{Pref}(l_{\sigma_k})$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)$ é período de l_{σ_k}, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)$ é período de $c_{\tau_{k-1}} \rightleftharpoons l_{\sigma_k}$ devido à proposição 2.22. Usando o Teorema de Fine & Wilf, temos então que $\mathrm{mdc}(|\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)|, |u|) \leq |\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)| < \mathrm{base}(\tau) = |u|$ e que u é uma $(|u|/\mathrm{mdc}(|\mathrm{b_{dir}}(\sigma_k)|, |u|))$-potência, não sendo primitiva e contradizendo com a proposição 3.26. ∎

Vamos mostrar, no exemplo seguinte, que as razões $|\mu|/\mathrm{base}(\tau)$, $|\eta|/\mathrm{base}(\tau)$ podem chegar a valores muito próximos de 1, simultaneamente inclusive. Temos que 1 é, portanto, o melhor limite superior possível. Fixado n, isto pode supor valores altos de m, contudo.

Fixados n e m, podemos mostrar que podemos diminuir o valor deste limite superior, que por sua vez, depende de n e m. Conforme os valores de n e m, podemos obter um limite superior tão próximo de 0 quanto queiramos. Temos uma demostração destes fatos que, no entanto, não se encontra neste trabalho.

Exemplo 5.11 *Seja ϵ um real tal que $0 < \epsilon < 1$. Para todo $n \geq 2$, existe $m \geq 1$ tal que existem $\tau \in \pi'$ e $\sigma \in \Sigma'$, existem $\mu, \eta \in A^+$ tais que $\tau = \mu\sigma\eta$ e $\epsilon \leq |\mu|/\text{base}(\tau), |\eta|/\text{base}(\tau) < 1$.*

Demonstração.

Tome por τ e σ as produções do exemplo 3.12. Para aquele caso, podemos tomar $\mu = x(ab)^{-n}$ e $\eta = (ba)^{-n}x$ onde $x = b(ab)^{n+m-1}$. Temos ainda que $\tau = (x^n, x^{n+m}) = \mu\sigma\eta$. Assim temos que $\text{base}(\tau) = |x| = 2n + 2m - 1$ e que $|\mu| = |\eta| = |x| - |(ba)^n| = 2m - 1$. É suficiente escolhermos $m \geq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\frac{2n-1}{2}$ para que $|\mu|/\text{base}(\tau), |\eta|/\text{base}(\tau) \geq \epsilon$. ∎

Teorema 5.12 (Teorema da Estabilidade) *Admita que $n \geq 4$ e $m \geq 1$. Então toda produção de Σ'' (e portanto de Σ e de Σ') é estável.*

Demonstração.

Pela proposição 3.23, temos que $\Sigma \subset \Sigma' \subset \Sigma''$. Por isso toda produção de Σ' e de Σ é estável se toda produção de Σ'' o for.

Vamos mostrar que se as produções de Σ' são estáveis, então as de Σ'' também são. Suponha que já tenhamos provado que as produções de Σ' são estáveis. Seja $\rho \in \Sigma''$. Pela definição de Σ'', tome $\sigma \in \Sigma \subset \Sigma'$ tal que $\sigma \leq_r \rho$. Então $c_\sigma \in \text{Fat}(c_\rho)$ e, devido à proposição 2.22, temos que $\text{per}(c_\sigma) \leq \text{per}(c_\rho)$. Como σ é estável, então temos que $\text{per}(c_\sigma) = \text{base}(\sigma)$ e, devido à proposição 3.3, temos que $\text{base}(\sigma) = \text{base}(\rho)$. Assim temos que $\text{per}(c_\rho) \geq \text{base}(\rho)$ e, usando a proposição 3.7, temos que ρ é estável.

Vamos mostrar que as produções de Σ' são estáveis. Seja $\tau \in \Sigma'$ e seja $j = \text{base}(\tau)$. Pela proposição 3.22, temos que $\tau \in \Sigma'_j = \otimes(\pi'_j \cup \Sigma_{j-1})$. Tome uma dedução ótima $s = (k, \{\tau_i\}, \{\sigma_i\}, \pi'_j \cup \Sigma_{j-1})$ para τ. Faremos uma indução dupla em j (mais externa) e em $nj - |c_\tau|$ (mais interna). Pela proposição 3.25, temos que $\tau_0 \in \pi' \subset \Sigma'$ e que $\sigma_i \in \Sigma \subset \Sigma'$. Para $nj - |c_\tau| = 0$ é imediato pois $\tau = \tau_0 \in \pi'$ e, pela construção de π'_j, temos que τ é estável. Também se $j = \text{base}(\tau) = 1$ é imediato pois teremos $k = 0$, necessariamente, e novamente teremos que τ é estável. Assim já temos a nossa base de indução. Admita que $j = \text{base}(\tau) > 1$ e que $nj - |c_\tau| > 0$. Portanto $k \geq 1$. Seja $\sigma \in \Sigma'$

tal que $\sigma <_{\mathrm{k}} \tau$. Então base($\sigma$) < base($\tau$), e neste caso σ é estável devido à hipótese de indução, ou então $\tau <_{\mathrm{r}} \sigma$, e neste caso $|c_\sigma| > |c_\tau|$ e σ é estável pela hipótese de indução. Sejam $\mu, \eta \in A^*$ tais que $\tau_0 = \mu\tau\eta$. Usando o lema 5.7, podemos tomar uma dedução $s' = (k', \{\tau'_i\}, \{\sigma'_i\}, \pi'_{\mathbf{base}(\tau)} \cup \Sigma_{\mathbf{base}(\tau)-1})$ para τ e $k'' \leq k' = k$ satisfazendo $\tau'_{k''} = (\mu c_\tau, \mu l_\tau)$. Como s é ótima e s' tem o mesmo comprimento que s, temos que a dedução s' é ótima. Seja s'' a dedução ótima à direita para $\tau'_{k''}$ induzida por s'. Usando o lema 5.10 sobre a seqüência s'', temos que $|\eta| <$ base(τ). De forma dual, temos que $|\mu| <$ base(τ). Portanto, temos que $|c_\tau| = |c_{\tau_0}| - |\mu| - |\eta| > (n-2)$base($\tau$) ≥ 2base(τ) e, usando a proposição 3.9, temos que τ é estável. ∎

Capítulo 6

Sobre a expansibilidade de Σ.

6.1 Definições.

Dada uma relação $\mathcal{T}$ com produções em Ω, definiremos três funções sobre uma expansão ϵ qualquer de $\Rightarrow_{\mathcal{T}}$: a função *começo* da expansão ϵ definida como $\text{com}(\epsilon) = \min_{\leq_r}(\text{Pref}(\epsilon) \cap (\Rightarrow_{\mathcal{T}}))$; a função *motivo* da expansão ϵ definida como $\text{mot}(\epsilon) = \min_{\leq_r}(\text{Suf}(\text{com}(\epsilon)) \cap (\Rightarrow_{\mathcal{T}}))$; e estenderemos a definição da função base, anteriormente definida sobre Ω, para *base* de uma expansão ϵ como sendo: $\text{base}(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (|l_\epsilon| - |c_\epsilon|)/m$. Observe que $\text{mot}(\epsilon) \in \text{irred}(\mathcal{T})$ e que $\text{base}(\epsilon) = \text{base}(\text{com}(\epsilon)) = \text{base}(\text{mot}(\epsilon))$.

Na ausência da especificação de uma relação $\mathcal{T}$ com produções em Ω com a qual estamos trabalhando, aceitaremos, implicitamente, a relação Σ.

Sendo $\mathcal{T} \subseteq \Omega$, chamamos de *contração* sob $\mathcal{T}$ a inversa $(\Rightarrow_{\mathcal{T}})^{-1}$ de uma expansão sob $\mathcal{T}$, denotando por $\Rightarrow_{\mathcal{T}}^{-1}$, e definimos a relação *passo* sob $\mathcal{T}$ como sendo $\vdash_{\mathcal{T}} \stackrel{\text{def}}{=} (\Rightarrow_{\mathcal{T}}) \cup (\Rightarrow_{\mathcal{T}})^{-1}$. Definimos também as relações $\Rightarrow_{\mathcal{T}}^{k} \stackrel{\text{def}}{=} (\Rightarrow_{\mathcal{T}})^k$ e $\vdash_{\mathcal{T}}^{k} \stackrel{\text{def}}{=} (\vdash_{\mathcal{T}})^k$, onde $k \in \mathbb{N}$. Temos ainda que as relações $\Rightarrow_{\mathcal{T}}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{i=0}^{\infty}(\Rightarrow_{\mathcal{T}})^i$ e $\vdash_{\mathcal{T}}^{*} \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{i=0}^{\infty}(\vdash_{\mathcal{T}})^i$ são os fechos reflexivo-transitivos de $\Rightarrow_{\mathcal{T}}$ e $\vdash_{\mathcal{T}}$, respectivamente. Se $w \Rightarrow_{\mathcal{T}}^{k} w'$, podemos associar ao menos uma seqüência s de expansões sob $\mathcal{T}$, de comprimento k, pelas quais as expansões de w para w' são seqüencialmente realizadas. Denotamos $s : w \Rightarrow w'$ e dizemos que *s expande w para w'*. Embora os conceitos de seqüências finitas e palavras sejam o mesmo, não nos referiremos às seqüências de expansões como palavras sobre $\Rightarrow_{\mathcal{T}}$ para evitar confusão. Usaremos, contudo, as funções e operações definidas sobre as palavras, tais como prefixos, sufixos e concatenação. Em particular, caso uma seqüência s de expansões sob $\mathcal{T}$ satisfaça $\mathrm{base}(\epsilon) \leq \mathrm{base}(\epsilon')$ para todo $\epsilon'\epsilon \in \mathrm{Fat}(s)$, neste caso dizemos que a seqüência s é *decrescente*.

6.2 O Teorema da Expansibilidade.

A proposição 6.1 nos ajudará a demonstrar o Teorema da Expansibilidade, mais adiante.

Proposição 6.1 *Sejam* $\tau, \sigma \in \mathcal{T} \subseteq \Omega$ *duas produções estáveis. Então temos que:*

1. *Se* $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$, *então* $c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma = l_\tau \rightleftharpoons c_\sigma = c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma = l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma$ *se e só se* τ *e* σ *não são produções conjugadas.*
2. *Se* $\mathrm{base}(\tau) > \mathrm{base}(\sigma)$, *então* $c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma = l_\tau \rightleftharpoons c_\sigma$ *e* $c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma = l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma$. *Teremos ainda que* $c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma = l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma$ *se e só se* $(\tau, \sigma) \notin \mathrm{R}_{\mathrm{dir}}$.

Demonstração.

Como τ e σ são estáveis, temos que $|c_\tau| \geq \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{per}(l_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$ e, usando a proposição 3.11, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$. Analogamente temos que $|c_\sigma| \geq \mathrm{per}(c_\sigma) = \mathrm{per}(l_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$ e que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$.

Vamos mostrar a ida do ítem 1. Suponha que τ e σ sejam produções conjugadas. Suponha que $|l_\sigma| \leq |l_\tau|$ (o outro caso é perfeitamente dual). Como $|l_\sigma| = m\mathrm{base}(\sigma) + |c_\sigma| \geq 2\mathrm{base}(\sigma)$ e como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(l_\sigma)$, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^2 \in \mathrm{Suf}(l_\sigma)$ devido ao corolário 2.15. Usando o corolário 3.2, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período de l_σ. Assim, devido à proposição 2.22, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período também de $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^2$ e temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Fat}(\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^2)$ devido à proposição 2.13. Seja $v \in A^*$ tal que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)v \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^2) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\sigma)$ com $|v| < \mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\tau)$. Como $v \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^2) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\sigma)$, podemos definir $u = l_\sigma v^{-1} \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$. Usando a proposição 2.22, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período de u além de l_τ. Observe que $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(u)$ pois $\mathrm{b_{dir}}(\tau)v \in \mathrm{Suf}(l_\sigma) = \mathrm{Suf}(uv)$ e que $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$. Assim, usando o corolário 2.15, temos que $u, l_\tau \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b_{dir}}(\tau)^*)$. Como $|u| = |l_\sigma| - |v| \leq |l_\tau|$, usando a proposição 2.1, temos que $u \in \mathrm{Suf}(l_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma)$. Como $|u| = |l_\sigma| - |v| > |l_\sigma| - \mathrm{base}(\sigma) \geq |c_\sigma|$, então temos que $|c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma| \leq |c_\sigma| < |u| \leq |l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma|$ implicando finalmente que $c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma \neq l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma$.

Vamos mostrar a volta do ítem 1. Suponha que τ e σ não sejam produções conjugadas, embora base(τ) = base(σ). Seja $w \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$ uma palavra em que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ são períodos de w. Ora, se $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(w)$, como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de w e $|\mathrm{b_{dir}}(\tau)| = |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)|$, usando a proposição 2.12, teríamos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ seriam palavras conjugadas, contradizendo com o fato de que τ e σ não são produções conjugadas. Assim $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \notin \mathrm{Suf}(w)$. Como $w, \mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$, usando a proposição 2.1, temos que w é sufixo próprio de $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ que por sua vez é sufixo de $\mathrm{Suf}(c_\tau)$. De forma dual, temos que se $w \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$ é uma palavra em que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ são dois períodos de w, então $w \in \mathrm{Pref}(c_\sigma)$. Assim sendo, temos que $\mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(c_\sigma) = \mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma) = \mathrm{Suf}(l_\tau) \cap \mathrm{Pref}(c_\sigma) = \mathrm{Suf}(l_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma)$ e a igualdade dos encaixes em questão deriva imediatamente de sua definição. Observe que demonstramos também que todos estes encaixes têm comprimento menor que base(τ).

Vamos mostrar a primeira parte do ítem 2. Suponhamos base(τ) > base(σ). Seja $w \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$ uma palavra em que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ são períodos de w. Caso $c_\tau \in \mathrm{Suf}(w)$, como base($\sigma$) é período de w, usando a proposição 2.22, teríamos que base(τ) = per(c_τ) $\leq$ per(w) $\leq$ base(σ), que é contradição com a hipótese. Assim, $c_\tau \notin \mathrm{Suf}(w)$. Como $w, c_\tau \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$, usando a proposição 2.1, temos então que $w \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$. Desta maneira temos que $\mathrm{Suf}(l_\tau) \cap \mathrm{Pref}(c_\sigma) = \mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(c_\sigma)$ e que $\mathrm{Suf}(l_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma) = \mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma)$ e os encaixes são iguais.

Vamos mostrar a segunda parte do ítem 2. Suponha que $(\tau, \sigma) \notin \mathrm{R_{dir}}$, embora tenhamos que base(τ) > base(σ). Seja $w \in \mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma)$. Então temos que $|w| \leq |c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| \leq |c_\sigma|$ pois $\tau \not\mathrm{R}_{\mathrm{dir}}\ \sigma$, e concluimos que $w \in \mathrm{Pref}(c_\sigma)$ devido ao fato de que $w, c_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$ e à proposição 2.1. Por fim, temos que $\mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma) = \mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(c_\sigma)$ e $l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma = c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma = c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma$. Admita que $\tau\ \mathrm{R_{dir}}\ \sigma$. Assim sendo, concluimos que $|l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| = |c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma| \geq |c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma|$ e, portanto, $l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma \neq c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma$. ∎

A seguinte proposição não será demonstrada:

Proposição 6.2 *Seja $\mathcal{T} \subseteq \Omega$. Então $\sim_{\mathcal{T}} = \vdash_{\mathcal{T}}^*$.*

Lema 6.3 *Sejam $\mu, \eta, \mu', \eta' \in A^*$, sejam $\tau, \sigma \in \Sigma$ duas produções estáveis e sejam $\epsilon = (w', w'') = \mu'\sigma\eta'$ e $\epsilon' = (w''', w'') = \mu\tau\eta$ duas expansões distintas entre si tais que $l_\epsilon = l_{\epsilon'}$. Então existe $w'''' \in A^+$ tal que $\tau \leq_{\mathrm{r}} \epsilon'' = (w'''', w')$ e $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \epsilon''' = (w'''', w''')$ onde ϵ''' e ϵ'' são duas expansões distintas entre si tais que $c_{\epsilon''} = c_{\epsilon'''}$. Temos também que $l_{\mathrm{com}(\epsilon')} \in \mathrm{Pref}(c_\epsilon)$ ou $l_{\mathrm{com}(\epsilon)} \in \mathrm{Pref}(c_{\epsilon'})$.*

Demonstração.

Nas condições do enunciado temos que $w'' = \mu l_\tau \eta = \mu' l_\sigma \eta'$. Como $\epsilon \neq \epsilon$, então $w''' \neq w'$. Como τ, σ são estáveis, então $\mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{per}(l_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$, mas também $\mathrm{per}(c_\sigma) = \mathrm{per}(l_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$.

Admitiremos, a partir de agora, que $|\mu| \leq |\mu'|$, já que o outro caso ($|\mu'| \leq |\mu|$) é perfeitamente análogo.

Vamos mostrar que existem $u, v \in A^*$ tais que $\mu' = \mu u$, $\eta = v\eta'$ e $ul_\sigma = l_\tau v$ com $|u| \geq m\mathrm{base}(\tau)$ e $|v| \geq m\mathrm{base}(\sigma)$. Caso $|\eta| \leq |\eta'|$, como $\mu l_\tau \eta = \mu' l_\sigma \eta'$, usando o ítem 1 da proposição 2.28, teríamos que existiriam $u, v \in A^*$ tais que $\mu u = \mu'$, $v\eta = \eta'$ e $l_\tau = ul_\sigma v$. Como $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$, usando o corolário 5.2, teríamos que $\tau = \sigma$, donde $|l_\sigma| = |l_\tau| = |u| + |l_\sigma| + |v|$ e, por conseguinte, teríamos que $u = v = 1$, $\mu = \mu'$ e $\eta = \eta'$; contradizendo, pois, com o fato já mostrado de que $w''' \neq w'$. Assim temos que $|\eta| > |\eta'|$ e, usando o ítem 2 da mesma proposição 2.28, temos que existem $u, v \in A^*$ tais que $\mu u = \mu'$, $\eta = v\eta'$, $l_\tau v = ul_\sigma$, $|u| \geq |l_\tau| - |l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma|$ e $|v| \geq |l_\sigma| - |l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma|$. Suponha o caso em que τ e σ sejam produções conjugadas e, portanto, que $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$ e que $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ é período de l_τ e l_σ devido ao corolário 3.2. Suponha, por absurdo, que $|v| < m\mathrm{base}(\sigma)$. Assim temos que $|l_\tau| + |l_\sigma| = |l_\tau| + |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m| + |c_\sigma| \geq |l_\tau| + m\mathrm{base}(\sigma) + \mathrm{per}(c_\sigma) > |l_\tau| + |v| + \mathrm{base}(\sigma) = |l_\tau v| + |\mathrm{b_{esq}}(\tau)|$. Como $l_\tau \in \mathrm{Pref}(l_\tau v)$, como $l_\sigma \in \mathrm{Suf}(ul_\sigma) = \mathrm{Suf}(l_\tau v)$, como $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ é período de l_τ e de l_σ, pela proposição 2.24, temos que $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ é período de $l_\tau v$. Como $\mathrm{b_{esq}}(\tau)^m\, c_\tau v = uc_\sigma\, \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m$, como $\mathrm{b_{esq}}(\tau)$ é período de $\mathrm{b_{esq}}(\tau)^m c_\tau v$ e como $|\mathrm{b_{esq}}(\tau)| = |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)|$, usando a proposição 2.25, concluimos que $\mathrm{b_{esq}}(\tau)^0\, c_\tau v = uc_\sigma\, \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^0$ e, portanto, que $c_\tau v = uc_\sigma$. Donde, temos que $w''' = \mu c_\tau \eta = \mu c_\tau v \eta' = \mu u c_\sigma \eta' = \mu' c_\sigma \eta' = w'$ que é uma contradição pois já vimos que $w''' \neq w'$. Assim temos que $|v| \geq m\mathrm{base}(\sigma)$ e, por dualidade, temos também que $|u| \geq m\mathrm{base}(\tau)$. Suponhamos agora o caso em que τ e σ não são produções conjugadas. Caso $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\sigma)$, pelo ítem 1 da proposição 6.1, temos que $l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma = c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma$. Caso $\mathrm{base}(\tau) > \mathrm{base}(\sigma)$, temos que $(\tau, \sigma) \notin \mathrm{R_{dir}}$ devido à proposição 3.24 e que $l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma = c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma$ devido ao ítem 2 da proposição 6.1. Caso $\mathrm{base}(\sigma) > \mathrm{base}(\tau)$, temos que $(\sigma, \tau) \notin \mathrm{R_{esq}}$ devido à proposição 3.24 e que $l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma = c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma$ devido ao dual do ítem 2 da proposição 6.1. Assim, sempre temos que $l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma = c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma$. Da obtenção da existência de u, vimos que $|u| \geq |l_\tau| - |l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma|$ e, portanto, que $|u| \geq |l_\tau| - |l_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| = |l_\tau| - |c_\tau \rightleftharpoons c_\sigma| \geq |l_\tau| - |c_\tau| = m\mathrm{base}(\tau)$. De forma dual, temos que $|v| \geq m\mathrm{base}(\sigma)$.

Como $b_{esq}(\tau)^m c_\tau v = l_\tau v = u l_\sigma = u c_\sigma b_{dir}(\sigma)^m$, como $|b_{esq}(\tau)^m| \leq |u|$ e $|v| \geq |b_{dir}(\sigma)^m|$, então, usando o ítem 2 da proposição 2.28, temos que existem $u', v' \in A^*$ tais que $b_{esq}(\tau)^m u' = u$, $v = v' b_{dir}(\sigma)^m$ e $c_\tau v' = u' c_\sigma$. Seja $w'''' \stackrel{\text{def}}{=} \mu u' c_\sigma \eta' = \mu c_\tau v' \eta'$.

Vamos mostrar que $\tau \leq_r \epsilon''$ onde $\epsilon'' = (w'''', w')$, que $\sigma \leq_r \epsilon'''$ onde $\epsilon''' = (w'''', w''')$ e que $\mu l_\tau \in \text{Pref}(w')$. Temos que $w''' = \mu c_\tau \eta = \mu c_\tau v \eta' = \mu c_\tau v' b_{dir}(\sigma)^m \eta' = \mu u' c_\sigma b_{dir}(\sigma)^m \eta' = \mu u' l_\sigma \eta'$, donde temos que $\epsilon''' = (w'''', w''') = \mu u' \, \sigma \, \eta'$. Temos também que $w' = \mu' c_\sigma \eta' = \mu u c_\sigma \eta' = \mu b_{esq}(\tau)^m u' c_\sigma \eta' = \mu b_{esq}(\tau)^m c_\tau v' \eta' = \mu l_\tau v' \eta'$ donde também temos que $\epsilon'' = (w'''', w') = \mu \, \tau \, v' \eta'$ e que $\mu l_\tau \in \text{Pref}(\mu l_\tau v' \eta') = \text{Pref}(w')$.

Vamos mostrar que $l_{\text{com}(\epsilon')} \in \text{Pref}(c_\epsilon)$ ou que $l_{\text{com}(\epsilon)} \in \text{Pref}(c_{\epsilon'})$, concluindo a demonstração. Observe que $\mu\tau \in \text{Pref}(\epsilon') \cap \Rightarrow_\Sigma$ e, então, temos que $\text{com}(\epsilon') \in \text{Pref}(\mu\tau)$ devido à definição de começo. Assim, como já vimos que $l_\tau \in \text{Pref}(w')$, temos que $l_{\text{com}(\epsilon')} \in \text{Pref}(\mu l_\tau) \subseteq \text{Pref}(w') = \text{Pref}(c_\epsilon)$. Caso $|\mu| \geq |\mu'|$ teríamos a outra alternativa. ∎

O lema anterior demonstra uma propriedade bastante semelhante à da confluência local, estudada na teoria dos Sistemas de Reescritura. Na verdade, pode-se mostrar que a contração sob Σ é um sistema de reescritura com esta propriedade. Isto demonstraria mais imediatamente o ítem 5 do Teorema da Expansibilidade. Pode-se ver uma definição dos principais conceitos envolvidos em [10] e uma aplicação interessante desta teoria na demonstração da finitude do semigrupo idempotente em [7].

Teorema 6.4 (Teorema da Expansibilidade) *Admita que as produções de Σ sejam estáveis. Seja w' uma palavra qualquer. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *As produções de Σ são necessárias em Σ.*
2. *As produções de Σ são irredutíveis em $\sim_\pi$.*
3. *Existe uma única palavra de menor comprimento em $[w']$.*
4. *Uma palavra w é a palavra de menor comprimento em $[w']$ se e só se não tem entre seus fatores o longo de nenhuma produção de Σ.*
5. *Existe uma seqüência s de expansões sob Σ segundo a qual $s : w \Rightarrow w'$, onde w é uma palavra de menor comprimento em $[w']$.*

Demonstração.

Vamos mostrar que dados $u, v \in A^+$ e s uma seqüência de expansões sob Σ tais que $s : u \Rightarrow v$ então $|u| \leq |v|$ sendo que $|u| = |v|$ se e só se $|s| = 0$ se e só se $u = v$. Isto é imediato porque se $|s| = 0$ então $u = v$ e $|u| = |v|$ e, por uma simples indução sobre $|s|$, podemos mostrar que se $|s| > 0$ então $|u| < |v|$ pois o comprimento do curto de uma expansão é estritamente menor que o comprimento do respectivo longo.

Começaremos demonstrando uma forma mais mais geral que a do ítem 5. Dado $\mathcal{T} \subseteq \Sigma$, dado $w \in \min([w']_{\sim_\mathcal{T}})$, demonstraremos então que existe uma seqüência s de expansões sob $\mathcal{T}$ tal que $s : w \Rightarrow w'$. Observe que, tomando por $\mathcal{T}$ a própria relação Σ e usando o Teorema da Equivalência, isto demonstra o ítem 5. Se $w' = w$ não há o que provar, pois podemos tomar por s a seqüência vazia. Portanto suporemos $w' \neq w$. Por definição, temos que $|w| \leq |w'|$ e $w' \sim_\mathcal{T} w$. Usando a proposição 6.2, existe um menor k onde $w \vdash_\mathcal{T}^k w'$. Demonstraremos fazendo uma indução em k. Como $w' \neq w$, então $k > 0$. Para $k = 1$, temos que $w \vdash_\mathcal{T} w'$. Assim $w \Rightarrow_\mathcal{T} w'$ ou $w \Rightarrow_\mathcal{T}^{-1} w'$. Admita que $w \Rightarrow_\mathcal{T}^{-1} w'$. Seja $\tau = \mathrm{mot}((w', w))$ e $u, v \in A^*$ tais que $u\tau v = (w', w)$. Assim $|w'| = |uc_\tau v| < |ul_\tau v| = |w|$ e temos uma contradição pois já vimos que $|w| \leq |w'|$. Donde $w \Rightarrow_\mathcal{T} w'$ e tomando $s = (w, w')$ já temos a base da indução. Suponhamos que $k > 1$ e que $\forall x \in A^*$, $w \vdash_\mathcal{T}^{k-1} x$ implica que $w \Rightarrow_\mathcal{T}^{k-1} x$ e a existência de uma seqüência r de expansões sob $\mathcal{T}$ de comprimento $k-1$ segundo a qual $r : w \Rightarrow x$. Como $k > 1$, $\exists w'' \in A^*$ tal que $w \vdash_\mathcal{T}^{k-1} w'' \vdash_\mathcal{T} w'$. Assim $w \Rightarrow_\mathcal{T}^{k-1} w''$ e existe uma seqüência r de expansões sob $\mathcal{T}$ de comprimento $k - 1$ segundo a qual $r : w \Rightarrow w''$. Se $w'' \Rightarrow_\mathcal{T} w'$, tome por s a concatenação de r por (w'', w') e a demonstração está pronta. Admitamos, então, que $w'' \Rightarrow_\mathcal{T}^{-1} w'$ e seja $\epsilon = (w', w'')$ uma expansão sob $\mathcal{T}$. Como $k > 1$, temos que $|r| = k - 1 > 0$. Seja $\epsilon' = (w''', w'')$ a última expansão de r. Assim temos que $w \Rightarrow_\mathcal{T}^{k-2} w''' \Rightarrow_\mathcal{T} w'' \Rightarrow_\mathcal{T}^{-1} w'$. Observe que $w''' \neq w'$ pois, caso contrário, teríamos que $w \Rightarrow_\mathcal{T}^{k-2} w''' = w'$, contradizendo com a minimalidade de k. Assim $\epsilon' = (w''', w'')$ e $\epsilon = (w', w'')$ são duas expansões sob $\mathcal{T}$. São distintas porque $w''' \neq w'$. Como $\mathcal{T} \subseteq \Sigma$, usando o lema 6.3, temos que existe $w'''' \in A^+$ tal que $\epsilon'' = (w'''', w')$ e $\epsilon''' = (w'''', w''')$ são duas expansões sob $\mathcal{T}$. Assim temos que $w \Rightarrow_\mathcal{T}^{k-2} w''' \Rightarrow_\mathcal{T}^{-1} w'''' \Rightarrow_\mathcal{T} w'$. Como $w \vdash_\mathcal{T}^{k-1} w''''$, pela hipótese de indução temos que $w \Rightarrow_\mathcal{T}^{k-1} w''''$ e existe uma seqüência r' de expansões sob $\mathcal{T}$ de comprimento $k - 1$ segundo a qual $r' : w \Rightarrow w'$. Donde $w \Rightarrow_\mathcal{T}^{k-1} w'''' \Rightarrow_\mathcal{T} w'$ e concluimos que a seqüência $s = r'\epsilon''$ de comprimento k é tal que $s : w \Rightarrow w'$.

Vamos demonstrar o ítem 1. Seja $\sigma \in \Sigma$ e suponha, por absurdo, que σ não seja necessária em Σ. Seja $\mathcal{T} = \Sigma \setminus \{\sigma\}$. Então $\sigma \in \sim_{\mathcal{T}}$. Seja x uma palavra de menor comprimento em $[l_\sigma]_{\sim_{\mathcal{T}}}$. Usando a generalização do ítem 5 já demonstrada, temos que existe uma seqüência s de expansões sob $\mathcal{T}$ tal que $s : x \Rightarrow l_\sigma$. Como $c_\sigma \in [l_\sigma]_{\sim_{\mathcal{T}}}$ temos que $|x| \leq |c_\sigma| < |l_\sigma|$. Assim temos que $|s| > 0$ e existe uma última expansão sob $\mathcal{T}$ em s. Chamemo-la de ϵ e seja $\tau \in \mathcal{T} \subset \Sigma$ uma produção distinta de σ tal que $\tau \leq_{\mathrm{r}} \epsilon$. Então $l_\tau \in \mathrm{Fat}(l_\epsilon) = \mathrm{Fat}(l_\sigma)$, contradizendo com o corolário 5.2.

Vamos mostrar o ítem 2. Seja $\tau \in \Sigma \subseteq \sim_\Sigma = \sim_\pi$. Seja $\theta \in \sim_\pi$ tal que $\theta \leq_{\mathrm{r}} \tau$. Observe que $\theta \in \Omega$ devido à proposição 3.3. Seja x uma palavra de menor comprimento em $[l_\theta]$. Usando o ítem 5, temos que existe uma seqüência s de expansões sob Σ tal que $s : x \Rightarrow l_\theta$. Como $c_\theta \in [l_\theta]$, temos que $|x| \leq |c_\theta| < |l_\theta|$. Assim temos que $|s| > 0$ e existe uma última expansão de s. Chamemo-la de ϵ e seja $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \epsilon$. Então $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\epsilon) = \mathrm{Fat}(l_\theta) \subseteq \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Usando o corolário 5.2, temos que $\sigma = \tau$. Como $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\theta) \subseteq \mathrm{Fat}(l_\tau)$ e $l_\sigma = l_\tau$, então temos que $l_\sigma = l_\theta = l_\tau$ e, por conseguinte que $\theta = \tau$ pois $\theta \leq_{\mathrm{r}} \tau$. Assim τ é irredutível em $\sim_\pi$.

Vamos mostrar o ítem 4 e o ítem 3. Vamos mostrar a ida do ítem 4. Suponha que w seja uma palavra de menor comprimento em $[w']$. Admita, por absurdo, que exista $\sigma \in \Sigma$ e $u, v \in A^*$ tais que $w = ul_\sigma v$. Neste caso $uc_\sigma v \Rightarrow_\Sigma w$. Donde temos que $|uc_\sigma v| < |w|$ e, usando o Teorema da Equivalência, temos que $uc_\sigma v \sim_\pi w$ e $uc_\sigma v \in [w] = [w']$, que é uma contradição. Vamos mostrar a volta do ítem 4 e o ítem 3. Suponhamos que w seja uma palavra em $[w']$ tal que $\nexists \sigma \in \Sigma$ tal que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(w)$. Vamos mostrar que w é uma palavra de menor comprimento em $[w']$. Escolha uma palavra x de menor comprimento em $[w']$. Usando o ítem 5, existe uma seqüência de expansões s tal que $s : x \Rightarrow w$. Caso $x \neq w$ então teríamos que $|s| > 0$, e sendo ϵ a última expansão de s, então teríamos que $l_{\mathrm{mot}(\epsilon)} \in \mathrm{Fat}(l_\epsilon) = \mathrm{Fat}(w)$ que seria uma contradição; portanto temos que $w = x$ é uma palavra de menor comprimento em $[w]$ e que existe uma única palavra x nas circunstâncias em que foi escolhida. ∎

6.3 Expansores.

Como conseqüência da proposição 6.5, logo a seguir, podemos definir a função *expansor* sobre uma dada expansão ϵ definida por $\exp(\epsilon) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{\leq_{\mathrm{r}}}(\{\rho \in \Sigma''$

tal que $\rho \leq_{\mathrm{r}} \epsilon\}$). A utilidade, da definição de Σ'' reside no fato de que o expansor de uma expansão é único enquanto que podem existir várias produções de Σ (todas conjugadas entre si, por sinal), que "levem" a uma mesma expansão.

Proposição 6.5 *Seja ϵ uma expansão sob Σ, sejam $\tau, \sigma \in \Rightarrow_\Sigma \cap \Omega = \Sigma''$ e sejam $\mu, \eta, \mu', \eta' \in A^*$ tais que $\epsilon = \mu\tau\eta = \mu'\sigma\eta'$. Então τ e σ são produções conjugadas e $\rho = \min(\{\mu, \mu'\})^{-1}\epsilon\min(\{\eta, \eta'\})^{-1}$ é tal que $\tau, \sigma \leq_{\mathrm{r}} \rho$, e $\rho \in \Sigma''$.*

Demonstração.

Observe que $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\epsilon) = \mathrm{base}(\sigma)$.

Suporemos que $|\mu| \leq |\mu'|$. O outro caso é perfeitamente análogo.

Suponha que $|\eta| \leq |\eta'|$. Assim, temos que $\min(\{\mu, \mu'\}) = \mu$ e que $\min(\{\eta, \eta'\}) = \eta$. Donde $\rho = \mu^{-1}\epsilon\eta^{-1} = \tau$. Como $l_\epsilon = \mu l_\tau \eta = \mu' l_\sigma \eta'$, usando o ítem 1 da proposição 2.28, temos que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$ e, devido à proposição 3.4, concluimos que $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \tau = \rho$ sendo conjugadas devido à proposição 3.3.

Suponha que $|\eta| \geq |\eta'|$. Como $\mu l_\tau \eta = \mu' l_\sigma \eta'$, usando o ítem 2 da proposição 2.28, temos que existem $u, v \in A^*$ tais que $\mu u = \mu'$, $\eta = v\eta'$ e $l_\tau v = u l_\sigma$. Como $\mu c_\tau v \eta' = \mu c_\tau \eta = c_\epsilon = \mu' c_\sigma \eta' = \mu u c_\sigma \eta'$, temos que $c_\tau v = u c_\sigma$ e que $\tau v = u\sigma$. Assim, temos que $\rho = \min(\{\mu, \mu'\})^{-1}\epsilon\min(\{\eta, \eta'\})^{-1} = \mu^{-1}(\mu\tau\eta)\eta'^{-1} = \tau v = u\sigma = (uc_\sigma, ul_\sigma)$. Temos que $uc_\sigma \in \mathrm{Pref}(ul_\sigma) \setminus \{ul_\sigma\}$, que $uc_\sigma = c_\tau v \in \mathrm{Suf}(l_\tau v) = \mathrm{Suf}(ul_\sigma)$ e que $(uc_\sigma)^{-1}(ul_\sigma) = \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m$. Assim $\rho \in \Omega$. Como $\rho = u\sigma \in \Rightarrow_\Sigma$, temos que $\rho \in \Rightarrow_\Sigma \cap \Omega = \Sigma''$. Finalmente, temos que $\tau, \sigma \leq_{\mathrm{r}} \rho$ sendo que τ, σ e ρ são conjugadas devido à proposição 3.3. ∎

Dada uma expansão $\epsilon = (w, w')$, a proposição 6.6 nos dá uma outra interpretação para o expansor: se $\sigma = \exp(\epsilon)$, então c_σ e l_σ são, respectivamente, fatores "maximais" de w e w' que têm período $\mathrm{base}(\epsilon)$; também nos permite saber quem são o prefixo e o sufixo comuns a w e a w' de máximo comprimento.

Proposição 6.6 *Seja $\sigma \in \Sigma''$. Seja $\epsilon = u\sigma v$ uma expansão sob Σ. Considere as seguintes afirmações abaixo:*

1. *$\sigma = \exp(\epsilon)$,*
2. *$\mathrm{Pref}(c_\epsilon) \cap \mathrm{Pref}(l_\epsilon) = \mathrm{Pref}(uc_\sigma)$ e $\mathrm{Suf}(c_\epsilon) \cap \mathrm{Suf}(l_\epsilon) = \mathrm{Suf}(c_\sigma v)$,*
3. *Seja $u' \in \mathrm{Suf}(u)$ e $v' \in \mathrm{Pref}(v)$. Então $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)$ é um período de $u' l_\sigma v'$ implica que $u' = v' = 1$.*

4. *Seja* $u' \in \mathrm{Suf}(u)$ *e* $v' \in \mathrm{Pref}(v)$*. Então* $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ *é um período de* $u'c_\sigma v'$ *implica que* $u' = v' = 1$.

Temos então que (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) $\Longleftarrow$ (4) *sendo que* (3) $\Longrightarrow$ (4) *quando* $|c_\sigma| \geq |\mathrm{base}(\sigma)|$.

Demonstração.

Vamos mostrar que (1) implica (2). Suponha que $\sigma = \exp(\epsilon)$. Como $\mathrm{Suf}(c_\sigma) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\sigma)$, temos que $\mathrm{Suf}(c_\sigma v) = \mathrm{Suf}(c_\sigma v) \cap \mathrm{Suf}(l_\sigma v) \subseteq \mathrm{Suf}(c_\epsilon) \cap \mathrm{Suf}(l_\epsilon)$. Escolha $x \in \mathrm{Suf}(c_\epsilon) \cap \mathrm{Suf}(l_\epsilon)$. Seja $x' = \max(\{x, c_\sigma v\})$. De qualquer forma, temos que $x' \in \mathrm{Suf}(c_\epsilon) \cap \mathrm{Suf}(l_\epsilon)$. Como $x', x, c_\sigma v \in \mathrm{Suf}(uc_\sigma v)$, usando a proposição 2.1, temos que existe $u' \in \mathrm{Suf}(u)$ tal que $x' = u'c_\sigma v$ e que $x \in \mathrm{Suf}(u'c_\sigma v)$. Observe que $\sigma \leq_\mathrm{r} u'\sigma \leq_\mathrm{r} \epsilon$. Ora, temos que $u'c_\sigma v, u'l_\sigma v \in \mathrm{Suf}(l_\epsilon)$, como $|u'c_\sigma v| < |u'l_\sigma v|$, usando a proposição 2.1, temos que $u'c_\sigma v \in \mathrm{Suf}(u'l_\sigma v)$ e, portanto, temos que $u'c_\sigma \in \mathrm{Pref}(u'l_\sigma) \cap \mathrm{Suf}(u'l_\sigma) \setminus \{u'l_\sigma\}$ e que $(u'c_\sigma)^{-1}(u'l_\sigma) = \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m$ que é uma m-potência. Donde, temos que $u'\sigma \in \Omega$. Como $\sigma \in A^*\Sigma A^*$, temos também que $u'\sigma \in A^*\Sigma A^* \cap \Omega = \Sigma''$. Como $u'\sigma \leq_\mathrm{r} \max_{\leq_\mathrm{r}}(\{\rho \in \Sigma'' \text{ tal que } \rho \leq_\mathrm{r} \epsilon\}) = \exp(\epsilon) = \sigma$, então $u' = 1$, e $x \in \mathrm{Suf}(u'c_\sigma v) = \mathrm{Suf}(c_\sigma v)$. Assim provamos que $\mathrm{Suf}(c_\sigma v) = \mathrm{Suf}(c_\epsilon) \cap \mathrm{Suf}(l_\epsilon)$. De forma dual, temos que $\mathrm{Pref}(uc_\sigma) = \mathrm{Pref}(c_\epsilon) \cap \mathrm{Pref}(l_\epsilon)$.

Vamos mostrar que (2) implica (3). Admita que valha (2). Sejam $u' \in \mathrm{Suf}(u)$ e $v' \in \mathrm{Pref}(v)$ tais que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $u'l_\sigma v'$. Usando a proposição 2.22, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $u'l_\sigma$. Pela proposição 2.5, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m = (u'c_\sigma)^{-1}(u'l_\sigma)$ é período de $u'l_\sigma$ e, usando a proposição 2.14, temos que $u'c_\sigma \in \mathrm{Suf}(u'l_\sigma) \subseteq \mathrm{Suf}(ul_\sigma)$. Donde, temos que $u'c_\sigma v \in \mathrm{Suf}(uc_\sigma v) \cap \mathrm{Suf}(ul_\sigma v) = \mathrm{Suf}(c_\epsilon) \cap \mathrm{Suf}(l_\epsilon) = \mathrm{Suf}(c_\sigma v)$ e, portanto, $u' = 1$. De forma dual, temos que $v' = 1$.

Vamos mostrar que (3) implica (4) quando $|c_\sigma| \geq \mathrm{base}(\sigma)$. Admita que valha (3). Sejam $u' \in \mathrm{Suf}(u)$ e $v' \in \mathrm{Pref}(v)$ tais que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $u'c_\sigma v'$. Como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $u'c_\sigma$ devido à proposição 2.22 e de l_σ, como $|u'c_\sigma| + |l_\sigma| = |u'l_\sigma| + |c_\sigma| \geq |u'l_\sigma| + |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)|$, usando a proposição 2.14, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $u'l_\sigma$ também. Assim temos que $u' = 1$ devido a (3) e, de forma dual, também temos que $v' = 1$.

Vamos mostrar que (3) ou (4) implica (1). Seja $\tau = \exp(\epsilon) = \max_{\leq_\mathrm{r}}(\{\rho \in \Sigma'' \text{ tal que } \rho \leq_\mathrm{r} \epsilon\})$. Sejam $u'', v'' \in A^*$ tais que $\epsilon = u''\tau v'' = u\sigma v$. Então, pela definição de expansor e pela proposição 6.5, temos que $\min(\{u, u''\}) = u''$ e como $u, u'' \in \mathrm{Pref}(c_\epsilon)$, usando a proposição 2.1, temos que existe $u' \in A^*$ tal que $u = u''u'$. Analogamente existe $v' \in A^*$ tal que

$v = v'v''$. Assim sendo, temos que $\tau = u''^{-1}\epsilon v''^{-1} = u''^{-1}(u\sigma v)v''^{-1} = u'\sigma v'$. Usando a proposição 3.3, temos que σ e τ são produções conjugadas, e, usando o corolário 3.2, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $c_\tau = u'c_\sigma v'$ e de $l_\tau = u'l_\sigma v'$. Assumindo (3) ou (4), temos que $u' = v' = 1$, e então temos que $\sigma = \tau = \exp(\epsilon)$. ∎

6.4 Biexpansões.

Dada uma seqüência s de expansões sob Σ, dizemos que s é uma *biexpansão* quando $|s| = 2$. Dada uma seqüência s de expansões sob Σ qualquer, definimos a função *conjunto das biexpansões de* s como sendo $\mathrm{Bi}(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{s' \in \mathrm{Fat}(s) \text{ tal que } |s'| = 2\}$. Definiremos agora, alguns casos particulares de biexpansões. Dada uma biexpansão $s = \epsilon'\epsilon$ tal que $s : w \Rightarrow w'$, seja $\tau = \exp(\epsilon')$, seja $\sigma = \exp(\epsilon)$ e seja $w'' = c_\epsilon = l_{\epsilon'}$. Sejam $\mu, \eta, \mu', \eta' \in A^*$ tais que $\epsilon' = \mu\tau\eta$ e $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$. Note que $w'' = \mu l_\tau \eta = \mu' c_\sigma \eta'$ e que μ, μ', η e η' são unicamente determinadas devido à definição de expansor e à proposição 6.5. Dizemos que s é uma *biexpansão empilhada* quando $|\mu| \leq |\mu'|$, $|\eta| \leq |\eta'|$ sem que a igualdade ocorra simultaneamente. Quando $\mu = \mu'$, $\eta = \eta'$, dizemos que s é uma *biexpansão trivial*. Dizemos que s é uma *biexpansão indiferente mais a esquerda* quando $|\mu| < |\mu'|$ e $|\eta| > |\eta'|$. Dizemos que s é uma *biexpansão indiferente mais a direita* quando $|\mu| > |\mu'|$ e $|\eta| < |\eta'|$. Dizemos que s é uma *biexpansão indiferente* quando for indiferente mais a esquerda ou mais a direita. Ao invés de dizermos que τ e σ são os expansores das expansões de s, permitimo-nos simplificar dizendo que τ e σ são os expansores de s.

Na proposição seguinte, mostramos que os únicos tipos de biexpansões existentes são os acima definidos.

Proposição 6.7 *Toda biexpansão cujos expansores são estáveis se classifica somente entre trivial, empilhada ou indiferente.*

Demonstração.

Seja $s = \epsilon'\epsilon = (w''', w'')(w'', w')$ uma biexpansão cujos expansores são estáveis. Seja $\tau = \exp(\epsilon')$ e seja $\sigma = \exp(\epsilon)$. Sejam $\mu, \mu', \eta, \eta' \in A^*$ tais que $\epsilon' = \mu\tau\eta$ e $\epsilon = \mu'\sigma\mu'$. Como τ e σ são produções estáveis, então $\mathrm{per}(l_\tau) = \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$ e $\mathrm{per}(l_\sigma) = \mathrm{per}(c_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$. Usando a proposição 3.11, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$ e que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$.

Assim $w'' = \mu l_\tau \eta = \mu' c_\sigma \eta'$.

Temos quatro casos possíveis:

1. $|\mu| \geq |\mu'|$ e $|\eta| \geq |\eta'|$ — Neste caso temos que $\mu = \mu'$, $\eta = \eta'$ e s é trivial.

   Neste caso, usando o ítem 1 da proposição 2.28, temos que existem u, v tais que $\mu = \mu' u$, $\eta = v\eta'$ e $ul_\tau v = c_\sigma$. Usando o ítem 1 da proposição 5.1, temos que $\tau \leq_{\mathrm{r}} \sigma$ e, pela proposição 3.3, temos que τ e σ são produções conjugadas e base(τ) = base(σ).

   Vamos mostrar que s é trivial. Pelo corolário 3.2, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período de $c_\sigma = ul_\tau v$. Como $\tau = \exp(\epsilon')$, $\epsilon' = \mu\tau\eta$, $u \in \mathrm{Suf}(\mu)$ e $v \in \mathrm{Pref}(\eta)$, usando a proposição 6.6, temos que $u = v = 1$. Assim temos que $\mu = \mu'$, $\eta = \eta'$ e, por definição, s é trivial.

2. $|\mu| \leq |\mu'|$ e $|\eta| \leq |\eta'|$ sem igualdade simultânea — Neste caso s é empilhada por definição.

3. $|\mu| < |\mu'|$ e $|\eta| > |\eta'|$. Neste caso temos que s é indiferente mais à esquerda por definição.

4. $|\mu| > |\mu'|$ e $|\eta| < |\eta'|$. Neste caso temos que s é indiferente mais à direita por definição.

∎

Veremos, agora, algumas propriedades interessantes a respeito das biexpansões e, ao final, veremos um teorema que nos permite limitar as produções de Σ que possam ser motivo de expansão numa seqüência de expansões a partir de uma dada palavra.

Proposição 6.8 *Seja $s = \epsilon'\epsilon$ uma biexpansão trivial cujos expansores são estáveis. Sejam $\tau = \exp(\epsilon')$ e $\sigma = \exp(\epsilon)$. Então $\sigma = \tau\mathrm{b_{dir}}(\tau)^m$.*

Demonstração.

Sejam $\mu, \eta \in A^*$ tais que $\epsilon' = \mu\tau\eta$ e $\epsilon = \mu\sigma\eta$. Como $c_\sigma = \mu^{-1}(\mu l_\tau \eta)\eta^{-1} = l_\tau = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$ devido à proposição 3.11, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau) = \mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ e que $l_\sigma = c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m = l_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m$. Assim sendo $\sigma = \tau\mathrm{b_{dir}}(\tau)^m$. ∎

Proposição 6.9 *Seja* $s = \epsilon'\epsilon = (w, w'')(w'', w')$ *uma biexpansão empilhada cujos expansores são estáveis. Sejam* $\tau = \exp(\epsilon')$ *e* $\sigma = \exp(\epsilon)$*. Então* $\text{base}(\epsilon') = \text{base}(\tau) > \text{base}(\sigma) = \text{base}(\epsilon)$*.*
Admita que $|c_\tau| \geq 3\text{base}(\tau)$*. Sejam* $\mu, \eta, \mu', \eta' \in A^*$ *tais que* $\epsilon' = \mu\tau\eta$ *e* $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$*. Então existem* $x, y \in A^*$ *tais que* $xc_\sigma y = c_\tau$ *e* $\epsilon'' = \mu x\, \sigma\, y\eta$ *é uma expansão sob* Σ *tal que* $\exp(\epsilon'') = \sigma$ *e* $c_{\epsilon''} = c_{\epsilon'}$*.*

Demonstração.

Como τ, σ são produções estáveis, então $\text{per}(l_\tau) = \text{per}(c_\tau) = \text{base}(\tau)$ e $\text{per}(l_\sigma) = \text{per}(c_\sigma) = \text{base}(\sigma)$. Observe que $w'' = \mu l_\tau \eta = \mu' c_\sigma \eta'$ e que $|\mu| \leq |\mu'|$ e $|\eta| \leq |\eta'|$ pois s é uma biexpansão empilhada. Usando o ítem 1 da proposição 2.28, temos que existem $u, v \in A^*$ tais que $\mu u = \mu'$, $v\eta = \eta'$, e $l_\tau = uc_\sigma v$.

Vamos mostrar que $\text{base}(\tau) > \text{base}(\sigma)$. Como $c_\sigma \in \text{Fat}(l_\tau)$, usando a proposição 2.22, temos que $\text{base}(\sigma) = \text{per}(c_\sigma) \leq \text{per}(l_\tau) = \text{base}(\tau)$. Suponha, por absurdo, que $\text{base}(\sigma) = \text{base}(\tau)$. Neste caso, usando a proposição 3.11, temos que $\text{b}_{\text{dir}}(\sigma) \in \text{Suf}(c_\sigma) \subseteq \text{Fat}(l_\tau)$. Como $\text{b}_{\text{dir}}(\tau)$ é período de l_τ e $|\text{b}_{\text{dir}}(\sigma)| = |\text{b}_{\text{dir}}(\tau)|$, usando a proposição 2.12, temos que $\text{b}_{\text{dir}}(\sigma)$ é período de $l_\tau = uc_\sigma v$. Como $\sigma = \exp(\epsilon)$, $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$, $u \in \text{Suf}(\mu')$, $v \in \text{Pref}(\eta')$ e $|c_\sigma| \geq \text{per}(c_\sigma) = \text{base}(\sigma)$, usando a proposição 6.6, temos que $u = v = 1$. Portanto, temos que $\mu = \mu'$, $\eta = \eta'$, o que contradiz com a definição de biexpansão empilhada. Assim temos que $\text{base}(\epsilon) = \text{base}(\sigma) < \text{base}(\tau) = \text{base}(\epsilon')$.

Assim já temos provada a primeira parte da proposição. Provaremos, agora, a segunda parte. Admita que $|c_\tau| \geq 3\text{base}(\tau)$.

Como τ e σ são estáveis, como $l_\tau = uc_\sigma v$ e como $|c_\tau|/3 \geq \text{base}(\tau) > \text{base}(\sigma)$, usando o ítem 4 da proposição 5.1, temos que existem $x \in \text{Suf}(u)$ e $y \in \text{Pref}(v)$ tais que $c_\tau = xc_\sigma y$ com $x = 1 \iff u = 1$, e $y = 1 \iff v = 1$. Assim $w = \mu c_\tau \eta = \mu x\, c_\sigma\, y\eta$. Seja $w''' = \mu x\, l_\sigma\, y\eta$ e seja $\epsilon'' = (w, w''') = \mu x\, \sigma\, y\eta$. Note que $c_{\epsilon''} = w = c_{\epsilon'}$.

Vamos mostrar que $\exp(\epsilon'') = \sigma$. Tome $x' \in \text{Suf}(\mu x)$ e $y' \in \text{Pref}(y\eta)$ tais que $\text{b}_{\text{dir}}(\sigma)$ seja período de $x'c_\sigma y'$. Primeiramente vamos mostrar que $x' = 1$. Suponha que $u = 1$ e, portanto, que $x = 1$. Então $\mu' = \mu u = \mu$ e $x' \in \text{Suf}(\mu x) = \text{Suf}(\mu')$. Como $\text{b}_{\text{dir}}(\sigma)$ é período de $x'c_\sigma$ devido à proposição 2.22, como $\sigma = \exp(\epsilon)$, $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$, $x' \in \text{Suf}(\mu')$ e $|c_\sigma| \geq \text{per}(c_\sigma) = \text{base}(\sigma)$, usando a proposição 6.6, então temos que $x' = 1$. Suponha agora que $u \neq 1$ e, portanto, que $x \neq 1$. Seja $x'' = \min(\{x, x'\})$. Como $x'', x', x \in \text{Suf}(\mu x)$, usando a proposição 2.1, temos que $x'' \in \text{Suf}(x) \subseteq \text{Suf}(u) \subseteq \text{Suf}(\mu')$ e que

$x'' \in \mathrm{Suf}(x')$. Portanto, temos que $x''c_\sigma \in \mathrm{Suf}(x'c_\sigma) \subseteq \mathrm{Fat}(x'c_\sigma y')$ e, pela proposição 2.22, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $x''c_\sigma$. Como $\sigma = \exp(\epsilon)$, $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$, $x'' \in \mathrm{Suf}(\mu')$ e $|c_\sigma| \geq \mathrm{per}(c_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$, usando a proposição 6.6, então temos que $x'' = 1$. Como $x \neq 1$, concluimos que $x' = x'' = 1$. Mostramos então que $x' = 1$ tanto quando $u = 1$ como quando $u \neq 1$ e, de forma dual, podemos mostrar que $y' = 1$. Portanto, que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ seja período de $x'c_\sigma y'$ para $x' \in \mathrm{Suf}(\mu x)$ e $y' \in \mathrm{Pref}(y\eta)$ implica que $x' = y' = 1$. Usando a proposição 6.6, concluimos que $\sigma = \exp(\mu x\, \sigma\, y\eta) = \exp(\epsilon'')$. ∎

Olhando para o lema 6.3 sob o ponto de vista das biexpansões, obtemos duas biexpansões de w'''' para w'': $\epsilon'''\epsilon' = (w'''', w''')(w''', w'')$ e a biexpansão $\epsilon''\epsilon = (w'''', w')(w', w'')$, sendo que existem produções $\tau, \sigma \in \Sigma$ tais que $\sigma \leq_\mathrm{r} \epsilon, \epsilon'''$ e $\tau \leq_\mathrm{r} \epsilon', \epsilon''$. A proposição seguinte, é bastante relacionada a esta situação, como veremos:

Proposição 6.10 *Seja $s = \epsilon'\epsilon = (w, w'')(w'', w')$ uma biexpansão indiferente mais a esquerda cujos expansores e os motivos dos mesmos são estáveis. Sejam $\tau = \exp(\epsilon')$ e $\sigma = \exp(\epsilon)$. Sejam $\mu, \eta, \mu', \eta' \in A^*$ tais que $\epsilon' = \mu\tau\eta$ e $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$. Seja $w''' = \mu c_\tau(\eta\eta'^{-1})\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m\eta'$, sejam $\epsilon''' = (w, w''')$ e $\epsilon'' = (w''', w')$ e seja $s' = \epsilon'''\epsilon''$. Então temos os seguintes casos possíveis:*

$|\mu'| - |\mu| > m\mathrm{base}(\tau)$.
Neste caso, s' é uma biexpansão indiferente mais a direita, $\exp(\epsilon'') = \tau$ e $\exp(\epsilon''') = \sigma$.

$|\mu'| - |\mu| = m\mathrm{base}(\tau)$.
Neste caso, s' é uma biexpansão empilhada, $\exp(\epsilon'') = \tau$ e $\exp(\epsilon''') = u'\,\sigma$ onde u' é o mais comprido sufixo de μ tal que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $u'c_\sigma$.

$|\mu'| - |\mu| < m\mathrm{base}(\tau)$.
Neste caso, s' é uma biexpansão empilhada, $\exp(\epsilon'') = \tau$ e $\exp(\epsilon''') = \tau \otimes_{\mathrm{esq}} \sigma <_\mathrm{r} \sigma$.

Demonstração.
Como s é indiferente mais à esquerda, então temos que $|\mu| < |\mu'|$ e $|\eta| > |\eta'|$. Neste caso, usando o ítem 2 da proposição 2.28, temos que existem $u, v \in A^+$ tais que $\mu u = \mu'$, $\eta = v\eta'$ e $l_\tau v = uc_\sigma$. Nesta situação, temos que $|\mu'| - |\mu| = |u|$ e que $w''' = \mu c_\tau v \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m\eta'$.

Vamos mostrar que $\epsilon'' = \mu\,\tau\,v\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m\eta'$ e que ϵ'' é uma expansão sob Σ. Observe que $w' = \mu' l_\sigma \eta' = \mu u c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \eta' = \mu l_\tau v \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \eta'$, donde temos que $\epsilon'' = (w''', w') = \mu\,\tau\,v\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m\eta'$, que $\mathrm{mot}(\tau) \leq_{\mathrm{r}} \tau \leq_{\mathrm{r}} \epsilon''$ e que ϵ'' é uma expansão sob Σ.

Vamos mostrar que $\exp(\epsilon'') = \tau$. Tome $v' \in \mathrm{Pref}(v\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m\eta')$ e $u' \in \mathrm{Suf}(\mu)$ tais que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ seja período de $u' l_\tau v'$. Seja $v'' = \min(\{v, v'\})$. Como $v, v', v'' \in \mathrm{Pref}(v\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m\eta')$, usando a proposição 2.1, temos que $v'' \in \mathrm{Pref}(v) \subseteq \mathrm{Pref}(v\eta') = \mathrm{Pref}(\eta)$ e que $v'' \in \mathrm{Pref}(v')$. Como $u' l_\tau v'' \in \mathrm{Pref}(u' l_\tau v')$, então $u' l_\tau v''$ tem período $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ devido à proposição 2.22. Como $\tau = \exp(\epsilon')$, $\epsilon' = \mu\tau\eta$, $u' \in \mathrm{Suf}(\mu)$ e $v'' \in \mathrm{Pref}(\eta)$, usando a proposição 6.6, temos que $u' = v'' = 1$. Como $v \in A^+$, pela definição de v'', temos então que $v' = v'' = 1 = u'$. Portanto, que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ seja período de $u' l_\tau v'$ onde $u' \in \mathrm{Suf}(\mu)$ e $v' \in \mathrm{Suf}(v\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m\eta')$ implica que $u' = v' = 1$. Usando a mesma proposição 6.6, temos então que $\tau = \exp(\epsilon'')$.

Observe que o demonstrado acima vale para todos os casos do enunciado. A partir de agora precisamos analisar os casos separadamente.

Suponhamos o caso em que:

$|\mu'| - |\mu| = |u| > |\mathrm{b_{esq}}(\tau)^m|$.

Vamos mostrar que $\epsilon''' = \mu x\,\sigma\,\eta'$ para um certo $x \in A^+$ e que s' é uma biexpansão. Como $\mathrm{b_{esq}}(\tau)^m c_\tau v = l_\tau v = u c_\sigma$, usando a proposição 2.1, temos que existe $x \in A^+$ tal que $u = \mathrm{b_{esq}}(\tau)^m x$ e $c_\tau v = x c_\sigma$. Como $w''' = \mu c_\tau v \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \eta' = \mu x c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \eta' = \mu x l_\sigma \eta'$ e como $w = \mu c_\tau \eta = \mu c_\tau v \eta' = \mu x c_\sigma \eta'$, então temos que $\epsilon''' = (w, w''') = \mu x\,\sigma\,\eta'$ e ϵ''' é uma expansão sob Σ. Como ϵ'' também é uma expansão sob Σ, temos que s' é uma biexpansão.

Vamos mostrar que $\exp(\epsilon''') = \sigma$. Tome $u' \in \mathrm{Suf}(\mu x)$ e $v' \in \mathrm{Pref}(\eta')$ tais que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ seja período de $u' l_\sigma v'$. Seja $u'' = \min(\{x, u'\})$. Como $x, u', u'' \in \mathrm{Suf}(\mu x)$, usando a proposição 2.1, temos então que $u'' \in \mathrm{Suf}(x) \subseteq \mathrm{Suf}(u) \subseteq \mathrm{Suf}(\mu')$, que $u'' \in \mathrm{Suf}(u')$ e que $u'' l_\sigma v' \in \mathrm{Suf}(u' l_\sigma v')$. Usando a proposição 2.22, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $u'' l_\sigma v'$. Como $\sigma = \exp(\epsilon)$, $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$, $u'' \in \mathrm{Suf}(\mu')$ e $v' \in \mathrm{Pref}(\mu')$, usando a proposição 6.6, temos que $u'' = v' = 1$. Como $x \in A^+$, pela definição de u'', podemos então concluir que $u' = u'' = 1 = v'$. Portanto, que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ seja período de $u' l_\sigma v'$ onde $u' \in \mathrm{Suf}(\mu x)$ e $v' \in \mathrm{Pref}(\eta')$ implica que $u' = v' = 1$. Usando a mesma proposição 6.6, temos então que $\exp(\epsilon''') = \sigma$.

Vamos mostrar que s' é uma biexpansão indiferente mais à direita. Isto é imediato pois temos que $\sigma = \exp(\epsilon''')$, que $\tau = \exp(\epsilon'')$ e $s' = \epsilon'''\epsilon'' = (\mu x\, \sigma\, \eta')(\mu\, \tau\, v \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \eta')$.

$|\mu'| - |\mu| = |u| = |\mathrm{b_{esq}}(\tau)^m|$.

Seja u' é o mais comprido sufixo de μ tal que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ seja período de $u'c_\sigma$. Seja $\theta = u'\sigma$ e seja $\mu'' = \mu u'^{-1}$.

Vamos mostrar que $\theta \in \Sigma''$ e que $\mathrm{base}(\theta) = \mathrm{base}(\sigma)$. Pela proposição 3.11, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$. Desta forma, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $u'c_\sigma = u'c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{-1}\, \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^1\, 1$ e, pela proposição 2.25, também o será de $uc_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{-1}\, \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{1+m}\, 1 = u'l_\sigma$. Como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \in \mathrm{Suf}(u'l_\sigma)$ e $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m$ é período de $u'l_\sigma$ devido ao teorema 2.21, temos que $u'c_\sigma = u'l_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{-m} \in \mathrm{Suf}(u'l_\sigma)$ devido à proposição 2.14. Também temos que $u'c_\sigma \in \mathrm{Pref}(u'l_\sigma) \setminus \{u'l_\sigma\}$ pois $c_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma) \setminus \{l_\sigma\}$, e que $(u'c_\sigma)^{-1}(u'l_\sigma) = \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m$. Assim $\theta = (u'c_\sigma, u'l_\sigma) \in \Omega$. Como $\mathrm{mot}(\epsilon) \leq_{\mathrm{r}} \sigma \leq_{\mathrm{r}} \theta$, temos que $\theta \in \Rightarrow_\Sigma$ e portanto $\theta \in \Rightarrow_\Sigma \cap\, \Omega = \Sigma''$. Como $\sigma \leq_{\mathrm{r}} \theta$, temos que $\mathrm{base}(\theta) = \mathrm{base}(\sigma)$ devido à proposição 3.3.

Vamos mostrar que $\epsilon''' = \mu''\, \theta\, \eta'$ e que s' é uma biexpansão. Como $\mathrm{b_{esq}}(\tau)^m c_\tau v = l_\tau v = uc_\sigma$, e $|\mathrm{b_{esq}}(\tau)^m| = |u|$, temos que $\mathrm{b_{esq}}(\tau)^m = u$ e $c_\tau v = c_\sigma$. Assim temos que $w''' = \mu c_\tau v \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \eta' = \mu c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \eta' = \mu l_\sigma \eta'$ e que $w = \mu c_\tau \eta = \mu c_\tau v \eta' = \mu c_\sigma \eta'$. Donde $\epsilon''' = \mu\sigma\eta' = \mu'' u'\sigma\eta' = \mu''\theta\eta'$. Como $\mathrm{mot}(\epsilon) \leq_{\mathrm{r}} \sigma \leq_{\mathrm{r}} \theta \leq_{\mathrm{r}} \epsilon'''$, temos que ϵ''' é uma expansão sob Σ, assim como ϵ'', e s' é uma biexpansão.

Vamos mostrar que $\exp(\epsilon''') = u'\sigma$. Sejam $u'' \in \mathrm{Suf}(\mu'')$ e $v' \in \mathrm{Pref}(\eta')$ tais que $\mathrm{b_{dir}}(\theta)$ seja período de $u''c_\theta v'$. Pela proposição 2.22, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\theta)$ é período também de $u''c_\theta$ e de $c_\sigma v' \in \mathrm{Suf}(c_\theta v')$. Como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$ devido à proposição 3.11, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(u'c_\sigma) = \mathrm{Suf}(c_\theta) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\theta)$. Como $|\mathrm{b_{dir}}(\theta)| = |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)|$, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\theta) = \mathrm{b_{dir}}(\sigma)$. Assim $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) = \mathrm{b_{dir}}(\theta)$ é período de $c_\sigma v'$. Como $\sigma = \exp(\epsilon)$, $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$, $v' \in \mathrm{Pref}(\eta')$ e $|c_\sigma| \geq \mathrm{per}(c_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$, usando a proposição 6.6, temos que $v' = 1$. Também temos $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) = \mathrm{b_{dir}}(\theta)$ é período de $u''c_\theta = u''u'c_\sigma$ e que $u''u' \in \mathrm{Suf}(\mu''u') = \mathrm{Suf}(\mu)$. Pela escolha de u', temos que $|u'| \geq |u''u'|$ e, portanto, temos que $u'' = 1$. Portanto, que $\mathrm{b_{dir}}(\theta)$ seja período de $u''c_\theta v'$ onde $u'' \in \mathrm{Suf}(\mu'')$ e $v' \in \mathrm{Pref}(\eta')$ implica que $u'' = v' = 1$. Usando a proposição 6.6, concluimos que $\exp(\epsilon''') = \theta$.

Vamos mostrar que s' é empilhada. Isto é imediato, pois temos que $\theta = \exp(\epsilon''')$, $\tau = \exp(\epsilon'')$ e que $s' = \epsilon'''\epsilon'' = (\mu''\,\theta\,\eta')(\mu''u'\,\tau\,v\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m\eta')$.

$|\mu'| - |\mu| = |u| < |\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m|$.

Como $\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m c_\tau v = l_\tau v = uc_\sigma$, usando a proposição 2.1, temos que existe $x \in A^+$ tal que $\mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m = ux$ e $xc_\tau v = c_\sigma$.

Vamos mostrar que $\mathrm{base}(\tau) < \mathrm{base}(\sigma)$. Como $c_\tau \in \mathrm{Fat}(c_\sigma)$, como τ e σ são estáveis, usando o ítem 3 da proposição 5.1, temos que $\mathrm{base}(\tau) < \mathrm{base}(\sigma)$ ou que $\tau \leq_{\mathrm{r}} \sigma$. Suponha, por absurdo, que $\tau \leq_{\mathrm{r}} \sigma$. Pela proposição 3.3, temos que τ e σ são conjugadas e, usando o corolário 3.2, temos então que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)$ é período de $c_\sigma = xc_\tau v$ e de $c_\tau v$ devido à proposição 2.22. Como $\tau = \exp(\epsilon')$, $\epsilon' = \mu\tau\eta$, $v \in \mathrm{Pref}(\eta)$ e $|c_\sigma| \geq \mathrm{per}(c_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$, usando a proposição 6.6, temos que $v = 1$ e que $\eta = v\eta' = \eta'$ contradizendo com o fato de que s é independente.

Vamos mostrar que $l_\tau \rightleftharpoons c_\sigma = xc_\tau$. Como $c_\sigma = xc_\tau v$ e $l_\tau = \mathrm{b}_{\mathrm{esq}}(\tau)^m c_\tau = uxc_\tau$, temos que $xc_\tau \in \mathrm{Suf}(l_\tau) \cap \mathrm{Pref}(c_\sigma)$ e que $|l_\tau \rightleftharpoons c_\sigma| = |\max(\mathrm{Suf}(l_\tau) \cap \mathrm{Pref}(c_\sigma))| \geq |xc_\tau|$. Como $xc_\tau, l_\tau \rightleftharpoons c_\sigma \in \mathrm{Pref}(c_\sigma)$, usando a proposição 2.1, temos que existe $v' \in A^*$ tal que $xc_\tau v' = l_\tau \rightleftharpoons c_\sigma$. Assim sendo, temos que $xc_\tau v' \in \mathrm{Pref}(c_\sigma) = \mathrm{Pref}(xc_\tau v)$ e, portanto, temos que $v' \in \mathrm{Pref}(v) \subseteq \mathrm{Pref}(\eta)$. Como $c_\tau v' \in \mathrm{Fat}(xc_\tau v') \subseteq \mathrm{Fat}(l_\tau)$, temos que $c_\tau v'$ tem período $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)$ devido à proposição 2.22. Como $\tau = \exp(\epsilon')$, $\epsilon' = \mu\tau\eta$, $v' \in \mathrm{Pref}(\eta)$ e $|c_\tau| \geq \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$, usando a proposição 6.6, temos que $v' = 1$ e, portanto, que $xc_\tau = xc_\tau v' = l_\tau \rightleftharpoons c_\sigma$.

Seja $\theta = \tau \otimes_{\mathrm{esq}} \sigma = x^{-1}\sigma$. Seja $\sigma' = \mathrm{mot}(\epsilon) \leq_{\mathrm{r}} \sigma$ e seja $\tau' = \mathrm{mot}(\epsilon') \leq_{\mathrm{r}} \tau$. Por hipótese, temos que σ' e τ' são estáveis.

Vamos mostrar que $\sigma' \leq_{\mathrm{r}} \theta$, que $\theta \in \Sigma''$ e que $\mathrm{base}(\sigma') = \mathrm{base}(\theta) = \mathrm{base}(\sigma)$. Sejam $z, y, z', y' \in A^*$ tais que $\tau = z\tau'y$ e $\sigma = z'\sigma'y'$. Então $z'c_{\sigma'}y' = c_\sigma = xc_\tau v = xzc_{\tau'}yv$. Como σ' é estável, usando também a proposição 3.3, temos que $\mathrm{per}(c_{\sigma'}) = \mathrm{base}(\sigma') = \mathrm{base}(\sigma)$. Como τ é estável, como $xc_\tau \in \mathrm{Suf}(uxc_\tau) = \mathrm{Suf}(l_\tau)$, usando o dual da proposição 5.3, temos que $\mathrm{per}(xc_\tau) = \mathrm{base}(\tau) < \mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{per}(c_{\sigma'})$. Usando a proposição 2.22, temos que $c_{\sigma'} \notin \mathrm{Fat}(xc_\tau)$ e, em particular, $z'c_{\sigma'} \notin \mathrm{Pref}(xc_\tau)$. Como $z'c_{\sigma'}y' = xc_\tau v$, temos que $|y'| < |v|$ devido à proposição 2.1. Suponha por absurdo, que $|z'| < |xz|$. Como $z'c_{\sigma'}y' = xzc_{\tau'}yv$, usando o ítem 1 da proposição 2.28, teríamos que existe $z'' \in \mathrm{Suf}(xz) \setminus \{1\}$ tal que $z''c_{\tau'} \in \mathrm{Pref}(c_{\sigma'})$. Observe que devido à proposição 3.3 e ao corolário 3.2 temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau')$ é período de l_τ e, como $z''c_{\tau'} \in \mathrm{Suf}(xzc_{\tau'}) \subseteq \mathrm{Fat}(uxzc_{\tau'}y) = \mathrm{Fat}(l_\tau)$, usando a proposição 2.22, também o é de $z''c_{\tau'}$. Como τ' é estável, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau') \in \mathrm{Suf}(c_{\tau'})$ devido à proposição 3.11 e, usando o corolário 2.15, temos que $z''c_{\tau'}, l_{\tau'} \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b_{dir}}(\tau')^*)$. Como $\mathrm{base}(\tau') = \mathrm{base}(\tau) < \mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\sigma')$, temos que $\tau' \neq \sigma'$ e que $l_{\tau'} \notin \mathrm{Fat}(c_{\sigma'})$ devido ao corolário 5.2 e, como $z''c_{\tau'} \in \mathrm{Pref}(c_{\sigma'})$, temos então que $l_{\tau'} \notin \mathrm{Suf}(z''c_{\tau'})$. Assim sendo, usando a proposição 2.1, temos que $z''c_{\tau'} \in \mathrm{Suf}(l_{\tau'}) \cap \mathrm{Pref}(c_{\sigma'})$ e que $|l_{\tau'} \rightleftharpoons c_{\sigma'}| = |\max(\mathrm{Suf}(l_{\tau'}) \cap \mathrm{Pref}(c_{\sigma'}))| \geq |z''c_{\tau'}| > |c_{\tau'}|$, contradizendo com a proposição 3.24. Portanto temos que $|z'| \geq |xz|$. Usando a proposição 2.1, temos que $c_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(c_{\tau'}yv) \subseteq \mathrm{Fat}(c_\tau v) = \mathrm{Fat}(x^{-1}c_\sigma) = \mathrm{Fat}(c_\theta)$. Como $|c_{\sigma'}| \geq \mathrm{per}(c_{\sigma'}) = \mathrm{base}(\sigma')$ pois σ' é estável, usando a proposição 3.4, concluimos que $\sigma' \leq_{\mathrm{r}} \theta$. Assim $\theta \in \Rightarrow_\Sigma$. Como $\sigma' \leq_{\mathrm{r}} \theta = x^{-1}\sigma \leq_{\mathrm{r}} \sigma$, usando a proposição 3.4, temos que $\mathrm{base}(\sigma') = \mathrm{base}(\theta) = \mathrm{base}(\sigma)$ e que $\theta \in \Omega$. Logo, $\theta \in \Rightarrow_\Sigma \cap \Omega = \Sigma''$.

Vamos mostrar que $\epsilon''' = (w, w''') = \mu\,\theta\,\eta'$ e que s' é uma biexpansão. Como $w''' = \mu c_\tau v \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \eta' = \mu(x^{-1}c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m)\eta' = \mu l_\theta \eta'$ e como $w = \mu c_\tau \eta = \mu c_\tau v \eta' = \mu(x^{-1}c_\sigma)\eta' = \mu c_\theta \eta'$, então temos que $\epsilon''' = (w, w''') = \mu\,\theta\,\eta'$, que $\sigma' \leq_{\mathrm{r}} \theta \leq_{\mathrm{r}} \epsilon'''$ e, portanto que ϵ''' é uma expansão sob Σ. Como ϵ'' também é uma expansão sob Σ, temos que s' é, de fato, uma biexpansão.

Vamos mostrar que $\exp(\epsilon''') = \theta$. Como τ' é estável e como $c_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(c_\theta)$, temos que $\mathrm{base}(\theta) = \mathrm{base}(\sigma') = \mathrm{per}(c_{\sigma'}) \leq \mathrm{per}(c_\theta)$ devido à proposição 2.22 e, portanto, que θ é estável devido à proposição 3.7. Usando a proposição 3.11, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$ e que $\mathrm{b_{dir}}(\theta) \in \mathrm{Suf}(c_\theta) \subseteq \mathrm{Suf}(c_\sigma)$. Assim, $\mathrm{b_{dir}}(\theta) = \mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ pois $\mathrm{base}(\theta) = \mathrm{base}(\sigma)$. Sejam $u' \in \mathrm{Suf}(\mu)$ e $v' \in \mathrm{Pref}(\eta')$ tais que $\mathrm{b_{dir}}(\theta)$ seja período de $u'c_\theta v'$ mas também de $c_\theta v'$ e de $u'c_\theta$ devido à proposição 2.22. Como $c_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(c_\theta)$, temos que $|c_\theta| \geq |c_{\sigma'}| > \mathrm{per}(c_{\sigma'}) = \mathrm{base}(\sigma') = |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)|$, e que $|c_\sigma| + |c_\theta v'| = |c_\sigma v'| + |c_\theta| \geq |c_\sigma v'| + |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)|$. Como também temos que $c_\sigma \in \mathrm{Pref}(c_\sigma v')$, que $c_\theta v' \in \mathrm{Suf}(xc_\theta v') = \mathrm{Suf}(c_\sigma v')$, que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) = \mathrm{b_{dir}}(\theta)$ é período de c_σ e de $c_\theta v'$, concluimos que $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $c_\sigma v'$ devido à proposição 2.24. Como $\sigma = \exp(\epsilon)$, $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$, $v' \in \mathrm{Pref}(\eta')$ e $|c_\sigma| \geq \mathrm{per}(\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$, usando a proposição 6.6, temos que $v' = 1$. Seja $y = \min(\{x, u'\})$. Observe que $u'c_\theta, xc_\theta, yc_\theta \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^*)$ devido ao corolário 2.15. Usando a proposição 2.1, temos que $yc_\theta \in \mathrm{Suf}(u'c_\theta)$

e que $y \in \mathrm{Suf}(u') \subseteq \mathrm{Suf}(\mu)$; também temos que $yc_\theta \in \mathrm{Suf}(xc_\theta)$ e que $y \in \mathrm{Suf}(x)$ e, portanto, que $yc_\tau \in \mathrm{Suf}(xc_\tau) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\tau)$. Assim sendo, pela proposição 2.22, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período de yc_τ. Como $\tau = \exp(\epsilon')$, $\epsilon' = \mu\tau\eta$, $y \in \mathrm{Suf}(\mu)$ e $|c_\tau| \geq \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$, usando a proposição 6.6, temos que $y = 1$. Como $x \neq 1$, pela definição de y, então temos que $u' = y = 1$. Portanto, que $\mathrm{b_{dir}}(\theta)$ seja período de $u'c_\theta v'$ onde $u' \in \mathrm{Suf}(\mu)$ e $v' \in \mathrm{Pref}(\eta')$ implica que $u' = v' = 1$. Assim, usando a proposição 6.6, temos que $\exp(\epsilon''') = \theta$.

Vamos mostrar que s' é empilhada. Isto é imediato, pois temos que $\theta = \exp(\epsilon''')$, $\tau = \exp(\epsilon'')$ e $s' = \epsilon'''\epsilon'' = (\mu\,\theta\,\eta')(\mu\,\tau\,v\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m\eta')$.

Desta forma, temos todos os casos demonstrados. ∎

Proposição 6.11 *Sejam $w, w' \in A^*$ tais que $w \Rightarrow^*_\Sigma w'$. Então existe uma seqüência de expansões decrescente s tal que $s : w \Rightarrow w'$.*

Demonstração.

Seja s' uma seqüência de expansões sob Σ tal que $s' : w \Rightarrow w'$. Vamos demonstrar fazendo uma indução em $|s'|$. Precisaremos incrementar a tese um pouco mais: provaremos que dada s' tal que $s' : w \Rightarrow w'$ então existe s decrescente tal que $s : w \Rightarrow w'$ satisfazendo $\min(\mathrm{base}(\mathrm{Let}(s))) = \min(\mathrm{base}(\mathrm{Let}(s')))$.

Se $|s'| \leq 1$, basta tomar $s = s'$. Já temos a base de indução.

Admitamos pois, a partir de agora, que $|s'| > 1$. Seja $\epsilon = (w'', w')$ a última expansão de s'. Aplicando a hipótese de indução sobre $s'\epsilon^{-1}$, temos que existe uma seqüência de expansões r decrescente segundo a qual $r : w \Rightarrow w''$. Seja $\epsilon' = (w''', w'')$ a última expansão de r e seja $r' = r\epsilon'^{-1}$. Assim temos que $\mathrm{base}(\epsilon') \leq \min(\mathrm{base}(\mathrm{Let}(r')))$.

Se $\mathrm{base}(\epsilon) \leq \mathrm{base}(\epsilon')$ então temos que $s = r\epsilon$ é a seqüência procurada e não há mais o que provar.

Admitamos pois, a partir de agora, o caso em que $\mathrm{base}(\epsilon') < \mathrm{base}(\epsilon)$.

Seja $\tau = \exp(\epsilon')$ e seja $\sigma = \exp(\epsilon)$. A biexpansão $\epsilon'\epsilon$ é tal que $\epsilon'\epsilon : w''' \Rightarrow w'$. Usando a proposição 6.7, temos que $\epsilon'\epsilon$ é trivial, empilhada ou indiferente. Ora, usando a proposição 6.8 temos que a biexpansão em questão não pode ser trivial pois neste caso teríamos que $\sigma = \tau\mathrm{b_{dir}}(\tau)^m$ e portanto teríamos que $\mathrm{base}(\epsilon) = \mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\epsilon')$ devido à proposição 3.3, o que seria uma contradição com $\mathrm{base}(\epsilon') < \mathrm{base}(\epsilon)$. Ora, usando a proposição 6.9 temos que a biexpansão em questão não pode ser empilhada pois neste caso teríamos que base(ϵ) = base(σ) < base(τ) = base(ϵ') que seria uma contradição com base(ϵ') < base(ϵ). Assim a biexpansão é indiferente. Usando a proposição 6.10 (ou sua dual), temos que existe uma biexpansão $\epsilon'''\epsilon'' = (w''', w'''')(w'''', w')$ tal que $\tau = \exp(\epsilon'')$ e base(σ) = base(ϵ'''). De qualquer forma, temos que base(ϵ'') = base(τ) = base(ϵ') $\leq$ min(base(Let($r'\epsilon'''$))) pois já vimos que base(ϵ') $\leq$ min(base(Let(r'))) e que base(ϵ') < base(ϵ) = base(σ) = base(ϵ'''). Como $r'\epsilon''' : w \Rightarrow w''''$, usando a hipótese de indução, temos que existe uma seqüência de expansões decrescente r'' tal que $r'' : w \Rightarrow w''''$ e min(base(Let(r''))) = min(base(Let($r'\epsilon'''$))) $\geq$ base(ϵ''). Portanto, temos que $s = r''\epsilon''$ é uma seqüência decrescente de expansões sob Σ tal que $s : w \Rightarrow w'$. ∎

Se w é a palavra mais curta em $[w]$, o lema seguinte mostra que todos os motivos de expansões das sucessões decrescentes de expansões sob Σ de w para qualquer outra palavra de $[w]$ têm seus curtos como fatores de w se admitirmos que as produções de Σ têm comprimento maior ou igual ao triplo da sua base. O lema 5.10 nos garante isto para os casos em que $n \geq 5$ e $m \geq 1$. Para os casos em que $n = 4$ e $m \geq 1$ nada podemos dizer à priori. Este lema não será usado por nenhuma outra proposição, mas poderia sê-lo no lema 7.24, por exemplo. Neste caso, obteríamos índices de finitude relativamente pequenos para os possíveis motivos das expansões.

Lema 6.12 *Admita que as produções de Σ'' são estáveis e seus curtos têm comprimento maior ou igual ao triplo da sua base. Seja w uma palavra de menor comprimento em sua classe $[w]$. Seja ϵ uma expansão de uma seqüência decrescente de expansões sob Σ a partir de w e seja $\sigma = \exp(\epsilon)$. Então existe uma única palavra x da forma $c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{-km}$ para $k \in \mathbb{N}$ tal que $c_{\mathrm{mot}(\epsilon)} \in \mathrm{Fat}(x)$ mas que $l_{\mathrm{mot}(\epsilon)} \notin \mathrm{Fat}(x)$, e existem $u, v \in A^*$ tais que $w = uxv$. Também temos que x tem período $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ e, para $u' \in \mathrm{Suf}(u)$ e $v' \in \mathrm{Pref}(v)$, $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ é período de $u'xv'$ implica que $u' = v' = 1$.*

Demonstração.

Vamos mostrar que existe uma única palavra da forma $c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{-im}$ para $i \in \mathbb{N}$ tal que $c_{\mathrm{mot}(\epsilon)} \in \mathrm{Fat}(x)$ mas que $l_{\mathrm{mot}(\epsilon)} \notin \mathrm{Fat}(x)$. Seja $\sigma' = \mathrm{mot}(\epsilon)$. Seja $k = \lfloor |c_\sigma| / |\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m| \rfloor$. Como $c_\sigma \in \mathrm{Suf}(l_\sigma) \subseteq \mathrm{Suf}(\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^*)$ devido ao corolário 2.15, como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{km} \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^*)$, como $|\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{km}| =$

$k|\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m| = \lfloor |c_\sigma|/|\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m| \rfloor |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m| \leq |c_\sigma|$, usando a proposição 2.1, temos que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^{km} \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$. Também temos que $|c_\sigma \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^{-km}| = |c_\sigma| - \lfloor |c_\sigma|/|\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m| \rfloor |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m| = (|c_\sigma|/|\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m| - \lfloor |c_\sigma|/|\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m| \rfloor)|\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m| < |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m|$. Assim temos que k é o máximo natural tal que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^{km} \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$. Seja a seguinte função definida por $\mathrm{f}(i) = c_\sigma \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^{-im}$ para $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Assim $|\mathrm{f}(k)| < |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m| = m\mathrm{base}(\sigma) = m\mathrm{base}(\sigma') < |l_{\sigma'}|$ e, portanto, $l_{\sigma'} \notin \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(k))$. Temos também que $c_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(0))$ pois $\sigma' \leq_{\mathrm{r}} \sigma$ e $c_\sigma = \mathrm{f}(0)$. Seja k' mínimo inteiro em $\{0, 1, \ldots, k\}$ tal que $l_{\sigma'} \notin \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(k'))$ e seja k'' máximo inteiro em $\{0, 1, \ldots, k\}$ tal que $c_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(k''))$. Vamos mostrar que $k' = k''$. Num primeiro momento, mostraremos que $k'' \geq k'$. Se $k' = 0$, isto é imediato. Suponhamos agora que $k' > 0$. Assim temos que $c_{\sigma'} \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma')^m = l_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(k'-1)) = \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(k')\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m)$ e, portanto, que $c_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(k'))$ pois $|\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma')^m| = |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m|$. Isto demonstra que $k'' \geq k'$. Num segundo momento, mostraremos que $k' \geq k''$. Se $k'' = 0$, isto é imediato. Suponhamos agora que $k'' > 0$. Sejam $y, y' \in A^*$ tais que $\mathrm{f}(k'') = yc_{\sigma'}y'$. Como σ' é estável, temos que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma') \in \mathrm{Suf}(c_{\sigma'})$ devido à proposição 3.11. Como $|\mathrm{f}(k'')| \geq |c_{\sigma'}| \geq \mathrm{per}(c_{\sigma'}) = \mathrm{base}(\sigma') = \mathrm{base}(\sigma) = |\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)|$ e $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma), \mathrm{f}(k'') \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^*)$, temos que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(\mathrm{f}(k''))$ devido à proposição 2.1. Como $yc_{\sigma'}\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma')^{-1}\, \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma')^1\, y' = \mathrm{f}(k'')\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^{-1}\, \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^1\, 1$, temos que $yc_{\sigma'}\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma')^{-1}\, \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma')^{1+m}\, y' = \mathrm{f}(k'')\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^{-1}\, \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^{1+m}\, 1$ devido à proposição 2.25, e, simplificando, temos que $yl_{\sigma'}y' = \mathrm{f}(k'')\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m = \mathrm{f}(k''-1)$ e que $l_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(k''-1)$. Como $l_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(k''-1)) \subset \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(k''-2)) \subset \cdots \subset \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(1)) \subset \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(0))$, teremos que $k' > k'' - 1$ e, portanto, que $k' \geq k''$. Assim temos, de fato, $k' = k''$ e, portanto, existe e é única a palavra x da forma $\mathrm{f}(i)$ tal que $c_{\sigma'} \in \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(i))$ e $l_{\sigma'} \notin \mathrm{Fat}(\mathrm{f}(i))$.

Seja x esta palavra cuja existência e unicidade acabamos de mostrar.

Seja s uma seqüência decrescente de expansões sob Σ a partir de w tal que ϵ é sua última expansão. Vamos provar o restante da tese a partir de uma indução em $|s|$.

Para $|s| = 1$ então temos que $s = \epsilon$, que $w = c_\epsilon$ e que existem $u, v \in A^*$ tais que $\epsilon = u\sigma v$ e que $w = uc_\sigma v$. Pela proposição 6.6, temos que para $u' \in \mathrm{Suf}(u)$ e $v' \in \mathrm{Pref}(v)$, $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)$ é período de $u'c_\sigma v'$ implica que $u' = v' = 1$. Assim, é suficiente provarmos que $x = c_\sigma$. Mas isto é imediato pois $c_{\mathrm{mot}(\epsilon)} \in \mathrm{Fat}(c_\sigma)$ pois $\mathrm{mot}(\epsilon) \leq_{\mathrm{r}} \sigma$ devido à definição de expansor e $l_{\mathrm{mot}(\epsilon)} \notin \mathrm{Fat}(c_\sigma) \subseteq \mathrm{Fat}(w)$ devido ao ítem 4 do Teorema da Expansibilidade.

Suponha que $|s| > 1$ e que a tese de indução valha para as últimas expansões de seqüências decrescentes de expansões sob Σ a partir de w com menos que $|s|$ expansões. Seja ϵ' a última expansão de $s\epsilon^{-1}$ e seja $r = (s\epsilon^{-1})\epsilon'^{-1}$. Assim $\epsilon'\epsilon$ é uma biexpansão. Seja $\tau = \exp(\epsilon')$ e sejam $\mu, \mu', \eta, \eta' \in A^*$ tais que $\epsilon' = \mu\tau\eta$ e que $\epsilon = \mu'\sigma\eta'$. Usando a proposição 6.7, temos que $\epsilon'\epsilon$ pode ser trivial, empilhada ou indiferente. Analisaremos estes casos a seguir:

Suponha o caso em que $\epsilon'\epsilon$ é trivial. Assim sendo, usando a proposição 6.8, temos que $\sigma = \tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m$ e que $\mathrm{b_{dir}}(\tau) = \mathrm{b_{dir}}(\sigma)$ pois $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) \in \mathrm{Suf}(l_\sigma) = \mathrm{Suf}(l_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m)$ e $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\tau)$ devido à proposição 3.3. Como $\mu\tau \in \mathrm{Pref}(\mu\sigma) \subseteq \mathrm{Pref}(\epsilon)$, $\mu\tau \in \mathrm{Pref}(\epsilon')$ e $\mu\tau \in \Rightarrow_\Sigma$, temos que $\mathrm{com}(\epsilon) = \mathrm{com}(\mu\tau) = \mathrm{com}(\epsilon')$ e, portanto, que $\mathrm{mot}(\epsilon) = \mathrm{mot}(\epsilon')$ e que $l_{\mathrm{mot}(\epsilon)} = l_{\mathrm{mot}(\epsilon')} \in \mathrm{Fat}(l_\tau) = \mathrm{Fat}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m) = \mathrm{Fat}(c_\sigma)$. Ora, isto implica que $x \neq c_\sigma$ e portanto que $x \in \{c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^{-km},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} = \{c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{-km}$ para $k \in \mathbb{N}\}$, logo x é da forma $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{-km}$ para $k \in \mathbb{N}$ e $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é um seu período. Usando a hipótese de indução sobre $s\epsilon^{-1}$ temos a tese.

Suponha o caso em que $\epsilon'\epsilon$ é empilhada. Assim sendo, usando a proposição 6.9, temos que existe uma expansão ϵ'' sob Σ tal que $c_{\epsilon''} = c_{\epsilon'}$ e que $\exp(\epsilon'') = \sigma$. Deste modo, usando a hipótese de indução sobre $r\epsilon''$, temos que vale a tese.

Suponha o caso em que $\epsilon'\epsilon$ é indiferente. Admita que a biexpansão seja indiferente mais à esquerda (o caso mais à direita é perfeitamente dual). Assim sendo, usando a proposição 6.10, temos que existe uma biexpansão (indiferente mais à direita ou empilhada) $\epsilon'''\epsilon''$ que expande $c_{\epsilon'}$ para l_ϵ e tal que $\mathrm{base}(\epsilon''') = \mathrm{base}(\epsilon) \leq \mathrm{base}(\epsilon') = \mathrm{base}(\epsilon'')$. Usando a proposição 6.9, temos que $\epsilon'''\epsilon''$ não pode ser empilhada. Neste caso, a proposição 6.10 nos diz ainda que $\exp(\epsilon''') = \sigma$. Assim sendo, usando a hipótese de indução sobre $r\epsilon'''$, temos que vale a tese. ∎

Capítulo 7

Estrutura do Semigrupo de Burnside.

7.1 As Relações de Green.

Dado um semigrupo qualquer $(S, \cdot)$, definimos S^1 como sendo: S, se S for um monóide ou; S acrescido de um elemento neutro, caso contrário. Dados também $u, v \in S$, definimos as quase-ordens e as relações de Green como segue:

$$\begin{array}{rcl}
v \leq_{\mathcal{R}} u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & \exists x \in S^1 \text{ tq } v = u \cdot x \\
v \leq_{\mathcal{L}} u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & \exists x \in S^1 \text{ tq } v = x \cdot u \\
v \leq_{\mathcal{J}} u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & \exists x, y \in S^1 \text{ tq } v = x \cdot u \cdot y \\
v \,\mathcal{R}\, u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & v \leq_{\mathcal{R}} u \leq_{\mathcal{R}} v \\
v \,\mathcal{L}\, u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & v \leq_{\mathcal{L}} u \leq_{\mathcal{L}} v \\
v \,\mathcal{J}\, u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & v \leq_{\mathcal{J}} u \leq_{\mathcal{J}} v \\
v \,\mathcal{H}\, u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & v \,\mathcal{R}\, u \,\mathcal{L}\, v \\
v \,\mathcal{D}\, u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & \exists x \in S^1 \text{ tq } v \,\mathcal{L}\, x \,\mathcal{R}\, u \\
v <_{\mathcal{R}} u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & v \leq_{\mathcal{R}} u \not\mathcal{R}\, v \\
v <_{\mathcal{L}} u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & v \leq_{\mathcal{L}} u \not\mathcal{L}\, v \\
v <_{\mathcal{J}} u & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & v \leq_{\mathcal{J}} u \not\mathcal{J}\, v
\end{array}$$

onde as relações $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$ são todas relações de equivalência, sendo que $\mathcal{R}$ é uma congruência à esquerda e $\mathcal{L}$ é uma à direita. Pode-se facilmente mostrar que $\mathcal{R}, \mathcal{L} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Para $\rho \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}\}$, definimos também o *conjunto dos elementos ρ-acima* de u como sendo $\mathrm{Up}_\rho(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in S$ tal que $u \leq_\rho w\}$. Dizemos que o semigrupo s é finito ρ-acima quando $\mathrm{Up}_\rho(u)$ é finito para todo $u \in S$. Dada uma classe de equivalência sob uma das relações $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$, dizemos que a mesma é trivial se contiver um único elemento.

Dizemos que um elemento e do semigrupo é *idempotente* quando $e \cdot e = e$ e dizemos que um elemento de S é regular quando existe $v \in S$ tal que $u \cdot v \cdot u = u$.

Seguem-se agora, o enunciado de dois lemas bastante conhecidos na área de semigrupos. Estes lemas são ferramenta básica para a melhor compreensão da estrutura de um semigrupo. Pode-se encontrar mais sobre o assunto em [5].

Lema 7.1 (Lema de Green) *Sejam $u, v, x \in S$ tais que $v \mathrel{\mathcal{R}} u = v \cdot x$. Então a aplicação $\rho : [v]_\mathcal{L} \longrightarrow [v]_\mathcal{L} \cdot x$ definida por $v'\rho = v' \cdot x$ é uma bijeção entre $[v]_\mathcal{L}$ e $[u]_\mathcal{L}$ que preserva as $\mathcal{H}$-classes.*

Uma conseqüência do Lema de Green é que, fixada uma mesma $\mathcal{D}$-classe, todas as $\mathcal{R}$-classes têm a mesma cardinalidade, o mesmo ocorrendo com as $\mathcal{L}$-classes e com as $\mathcal{H}$-classes, separadamente. Também temos que os semigrupos maximais, que são as $\mathcal{H}$-classes com idempotentes, na mesma $\mathcal{D}$-classe, são isomorfos.

Lema 7.2 *Seja D uma $\mathcal{D}$-classe. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *D é regular.*
2. *D tem um elemento regular.*
3. *Cada $\mathcal{R}$-classe de D tem um idempotente.*
4. *Cada $\mathcal{L}$-classe de D tem um idempotente.*
5. *D contém um idempotente.*
6. *Existem $u, v \in D$ tais que $u \cdot v \in D$.*

7.2 Um Monóide Isomorfo ao de Burnside.

Se admitirmos que as produções em Σ são estáveis, face ao ítem 3 do Teorema da Expansibilidade, podemos definir a função *representante* de uma dada palavra w, por $\text{rep}(w)$ = a palavra mais curta de $[w]$. Dado um conjunto de palavras W, temos que $\text{rep}(W) = \{\text{rep}(w),\ w \in W\}$. Temos que a função representante é uma bijeção entre os elementos de $\mathcal{M}$ e os de $\mathcal{M}'$ onde $\mathcal{M}' \stackrel{\text{def}}{=} \text{rep}(A^*)$. Assim, definimos uma operação induzida em $\mathcal{M}'$ da operação $\cdot$ em $\mathcal{M}$ e teremos que $u \cdot v = \text{rep}([u] \cdot [v]) = \text{rep}([uv]) = \text{rep}(uv)$. É fácil verificar que $u_1 \cdot u_2 \cdot \cdots \cdot u_k = \text{rep}(u_1 u_2 \cdots u_k)$. Desta maneira, temos que o monóide $(\mathcal{M}', \cdot)$ é isomorfo ao monóide de Burnside $(\mathcal{M}, \cdot)$. Usando a proposição 6.2 e o fato de que nenhuma produção de π tem a palavra 1 como curto ou longo, é imediato verificar que $[1] = \{1\}$ e também que a $\mathcal{D}$-classe de 1, relativamente ao monóide $\mathcal{M}'$, é trivial. Definindo $\mathcal{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}' \setminus \{1\}$, também temos que $(\mathcal{S}', \cdot)$ é isomorfo ao semigrupo de Burnside.

Por comodidade, analisaremos a estrutura do monóide de Burnside a partir do seu isomorfo $(\mathcal{M}', \cdot)$ (e muitas vezes também sobre o semigrupo $(\mathcal{S}', \cdot)$). Observe que A é um conjunto de geradores para $\mathcal{M}'$ e para $\mathcal{S}'$.

Como a definição de $\mathcal{M}'$ supõem que as produções de Σ'' sejam estáveis, e isto nos é garantido pelo Teorema da Estabilidade quando $n \geq 4$ e $m \geq 1$, admitiremos, a partir de agora, que as produções de Σ'' são estáveis.

A proposição seguinte, não usa a definição de $\mathcal{M}'$ para obter informações sobre o monóide de Burnside. Todas as demais proposições que se seguem, implicitamente, usam a hipótese de que as produções de Σ'' são estáveis. Nem será mencionada esta hipótese nestes casos.

Proposição 7.3 *Seja $[u] \in \mathcal{M}$. Então temos que $[u]^{n+m-n \bmod m}$ é um idempotente, que $[u]^n = [u]^{n+m}$ e que as relações $\mathcal{J}$ e $\mathcal{D}$ são iguais.*

Demonstração.

Vamos mostrar que $[u]^n = [u]^{n+m}$. Durante este parágrafo, $[u]^k$ denota a potenciação relativa ao produto $\cdot$ no monóide $(\mathcal{M}, \cdot)$ e u^k denota a potenciação já definida relativamente à concatenação sobre a palavra u. Primeiro vamos mostrar que $[u]^p = [u^p]$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Para $p = 0$, é imediato pois o elemento neutro de $\mathcal{M}'$ é $[1]$. Admitindo $p > 0$ e $[u]^{p-1} = [u^{p-1}]$, temos que $[u]^p = [u] \cdot [u]^{p-1} = [u] \cdot [u^{p-1}] = [u\,u^{p-1}] = [u^p]$. Como $(u^n, u^{n+m}) \in \pi \subseteq \sim_\pi$,temos finalmente que $[u]^n = [u^n] = [u^{n+m}] = [u]^{n+m}$.

Para simplificar a notação, durante o resto da demonstração, representaremos os elementos de $\mathcal{M}$ por letras e suas linhas, e representaremos o produto $u \cdot v$ simplesmente por uv.

Seja $k = n + m - n \bmod m$. Vamos mostrar, para qualquer $x \in \mathcal{M}$, que x^k é um idempotente. Primeiro vamos mostrar que $x^{n+jm} = x^n$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para $j = 0$ é imediato. Admitindo que $j > 0$ e que $x^{n+(j-1)m} = x^n$, temos que $x^{n+jm} = x^m x^{n+(j-1)m} = x^m x^n = x^{n+m} = x^n$. Como m divide $n + m - n \bmod m$, temos que $x^{2k} = x^{m-n\bmod m} x^{n+(n+m-n\bmod m)} = x^{m-n\bmod m} x^n = x^k$ e x^k é idempotente.

Vamos mostrar que $\mathcal{J} = \mathcal{D}$. Já vimos que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ em qualquer semigrupo, assim provaremos apenas que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$. Tome $(w, w') \in \mathcal{J}$. Então existem $u, u', v, v' \in A^*$ tais que $w = u'w'v'$ e que $w' = uwv$. Sejam $e = (u'u)^k$ e $f = (vv')^k$ dois idempotentes. Assim temos que $w = (u'u)w(vv')$ e, por uma indução simples, temos que $w = (u'u)^i w (vv')^i$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$ e, em particular, para $i = k$. Então temos que $ew = e^2wf = ewf = w = ewf = ewf^2 = wf$. Como temos que $w = ew = (u'u)^k w \leq_{\mathcal{L}} uw \leq_{\mathcal{L}} w$, então temos que $uw \,\mathcal{L}\, w$. Como temos que $uw = uwf = uw(vv')^k \leq_{\mathcal{R}} uwv = w' \leq_{\mathcal{R}} uw$, temos que $uw \,\mathcal{R}\, w'$. Donde $w \,\mathcal{L}\, uw \,\mathcal{R}\, w'$ e $w \,\mathcal{D}\, w'$. ∎

Proposição 7.4 *Todo fator de um elemento em $\mathcal{M}'$ é um elemento de $\mathcal{M}'$.*

Demonstração.

Seja $u \in \mathcal{M}' = \mathrm{rep}(A^*)$ e seja $v \in \mathrm{Fat}(u)$. Pelo ítem 4 do Teorema da Expansibilidade, temos que $\nexists \sigma \in \Sigma$ tal que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(u)$. Assim sendo, temos que $\nexists \sigma \in \Sigma$ tal que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(v) \subseteq \mathrm{Fat}(u)$ e, usando o mesmo ítem do Teorema da Expansibilidade, temos que $v \in \mathcal{M}'$. ∎

Proposição 7.5 *Seja $\tau \in \Sigma$. Todo fator próprio de l_τ é elemento de $\mathcal{M}'$.*

Demonstração.

Seja v um fator próprio qualquer de l_τ. Suponha, por absurdo, que $v \notin \mathcal{M}'$. Usando o ítem 4 do Teorema da Expansibilidade, temos que existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(v) \subset \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Usando o corolário 5.2 temos que $\sigma = \tau$, que é uma contradição com o fato de v ser um fator próprio de l_τ. ∎

Proposição 7.6 *Sejam $u, v \in \mathcal{M}'$. As afirmações abaixo são verdadeiras:*

1. $u \leq_{\mathcal{R}} v \iff \exists u' \in [u], \exists v' \in [v]$ *tais que* $v' \in \mathrm{Pref}(u')$*;*

2. $u \leq_{\mathcal{L}} v \iff \exists u' \in [u], \exists v' \in [v]$ *tais que* $v' \in \mathrm{Suf}(u')$*;*

3. $u \leq_{\mathcal{J}} v \iff \exists u' \in [u], \exists v' \in [v]$ *tais que* $v' \in \mathrm{Fat}(u')$*;*

Demonstração.

Como a demonstração dos três ítens é perfeitamente análoga, mostraremos somente a de um deles. Demostraremos o ítem 3. Suponha que $u \leq_{\mathcal{J}} v$. Então existem $x, y \in \mathcal{M}'$ tais que $u = x \cdot v \cdot y = \mathrm{rep}(x\,v\,y) \sim_\pi xvy$. Tomando $u' = xvy \in [u]$ e $v' = v \in [v]$ temos que $v' \in \mathrm{Fat}(u')$. Suponha que existam $u' \in [u]$ e $v' \in [v]$ tais que $v' \in \mathrm{Fat}(u')$. Sejam $x', y' \in A^*$ tais que $u' = x'v'y'$ e sejam $x = \mathrm{rep}(x')$ e $y = \mathrm{rep}(y')$. Então temos que $xvy \sim_\pi x'vy \sim_\pi x'v'y \sim_\pi x'v'y' = u'$ e que $x \cdot v \cdot y = \mathrm{rep}(xvy) = \mathrm{rep}(u') = u$. Portanto, temos que $u \leq_{\mathcal{J}} v$. ∎

Dado $u \in \mathcal{M}'$, uma conseqüência imediata da proposição anterior é que $\mathrm{Pref}(u) \subseteq \mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(u) = \mathrm{rep}(\mathrm{Pref}([u]))$, que $\mathrm{Suf}(u) \subseteq \mathrm{Up}_{\mathcal{L}}(u) = \mathrm{rep}(\mathrm{Suf}([u]))$ e também que $\mathrm{Fat}(u) \subseteq \mathrm{Up}_{\mathcal{J}}(u) = \mathrm{rep}(\mathrm{Fat}([u]))$.

7.3 $\mathcal{R}$-entradas, $\mathcal{L}$-entradas e $\mathcal{D}$-entradas.

Seja $u \in \mathcal{S}'$. Dizemos que u é uma *$\mathcal{R}$-entrada* em sua $\mathcal{R}$-classe quando $\exists v \in \mathcal{M}'$ e $\exists a \in A$ tais que $v \cdot a = u \not\mathcal{R}\, v$. Dizemos que u é uma *$\mathcal{L}$-entrada* em sua $\mathcal{L}$-classe quando $\exists v \in \mathcal{M}'$ e $\exists a \in A$ tais que $a \cdot v = u \not\mathcal{L}\, v$. Dizemos que u é uma *$\mathcal{D}$-entrada* em sua $\mathcal{D}$-classe quando for $\mathcal{R}$-entrada e $\mathcal{L}$-entrada simultaneamente.

Intuitivamente, as $\mathcal{R}$-entradas são as "portas" pelas quais devemos entrar caso estejamos fora da $\mathcal{R}$-classe e, por multiplicação à direita e/ou à esquerda, pretendemos entrar na mesma. As $\mathcal{L}$-classes têm uma interpretação dual. No caso de uma $\mathcal{D}$-classe, permitimos multiplicação à direita e toda $\mathcal{R}$-entrada ou $\mathcal{L}$-classe seria uma tal porta. Definimos por $\mathcal{D}$-entradas somente as portas "mais importantes": são as portas de entrada para multiplicação à direita e à esquerda, são as portas "mais largas".

Definimos também os conjuntos $R \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathcal{S}' \text{ tal que } |w \rightleftharpoons l_\sigma| \leq |c_\sigma| \text{ para todo } \sigma \in \Sigma\}$ e $L \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathcal{S}' \text{ tal que } |l_\sigma \rightleftharpoons w| \leq |c_\sigma| \text{ para todo } \sigma \in \Sigma\}$. Mostraremos, no teorema 7.14, que R é o conjunto das $\mathcal{R}$-entradas, que L é o das $\mathcal{L}$-entradas e que $R \cap L$ é o das $\mathcal{D}$-entradas.

Proposição 7.7 *Seja $u \in \mathcal{M}'$ e seja $a \in A$. Então temos que $u \cdot a \neq ua$ se e somente se existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $l_\sigma \in \mathrm{Suf}(ua)$ que por sua vez implica que $u \cdot a = u(\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m a^{-1})^{-1} \mathcal{R}\, u$.*

Demonstração.

Suponha que $u \cdot a = \mathrm{rep}(ua) \neq ua$. Usando o ítem 4 do Teorema da Expansibilidade, temos que existem $\sigma \in \Sigma$ e $x, y \in A^*$ tais que $xl_\sigma y = ua$. Caso tenhamos que $|y| \geq 1 = |a|$, usando a proposição 2.1, temos que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(u)$, contradizendo com $u \in \mathcal{M}'$ e com o ítem 4 do Teorema da Expansibilidade. Assim sendo, temos que $y = 1$ e que $l_\sigma \in \mathrm{Suf}(ua)$.

Suponha que exista $\sigma \in \Sigma$ tal que $l_\sigma \in \mathrm{Suf}(ua)$ e seja $x \in A^*$ tal que $xl_\sigma = ua$. Então temos que $ua \notin \mathcal{M}'$ devido ao ítem 4 do Teorema da Expansibilidade e que $ua \neq u \cdot a \in \mathcal{M}'$. Usando o Teorema da Equivalência, segue que $ua = xl_\sigma = xc_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m \sim_\pi xc_\sigma$. Como $|\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m| \geq 1 = |a|$, usando a proposição 2.1, temos que existe $x' \in \mathrm{Suf}(u)$ tal que $xc_\sigma x' = u$ e que $x'a = \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m$. Usando a proposição 7.4, temos que $xc_\sigma, x' \in \mathcal{M}'$. Assim sendo, temos que $u(\mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m a^{-1})^{-1} = ux'^{-1} = xc_\sigma = \mathrm{rep}(ua) = u \cdot a$. Como $xc_\sigma \in \mathrm{Pref}(u)$ e como $u \in \mathrm{Pref}(xl_\sigma) \subseteq \mathrm{Pref}([xc_\sigma])$, temos que $u \cdot a = xc_\sigma \mathcal{R}\, u$ devido à proposição 7.6. ∎

Proposição 7.8 *Seja $w \in \mathcal{S}'$ uma $\mathcal{R}$-entrada. Então existem únicos $a \in A$ e $u \in \mathcal{M}'$ tais que $w = u \cdot a \not\mathcal{R}\, u$, sendo que $w = ua$.*

Demonstração.

Sejam $u \in \mathcal{M}'$ e $a \in A$ tais que $u \cdot a = w \not\mathcal{R}\, u$. Como $u \cdot a \neq ua$ implica que $w = u \cdot a \mathcal{R}\, u$ devido à proposição 7.7, temos que $w = u \cdot a = ua$ e a unicidade é imediata. ∎

Proposição 7.9 *Seja $w \in \mathcal{S}'$. Então w é uma $\mathcal{R}$-entrada se e só se o único prefixo de w na sua $\mathcal{R}$-classe é o próprio w.*

Demonstração.

Seja $a \in A$ e $u \in \mathrm{Pref}(w)$ tais que $w = ua$. Suponha que w seja uma $\mathcal{R}$-entrada. Usando a proposição 7.8, temos que $w \not\mathcal{R}\, u$. Seja $v \in \mathrm{Pref}(w)$ tal que $w \mathcal{R}\, v$. Suponha, por absurdo, que $v \neq w$. Neste caso, temos que $|v| < |w|$ e, portanto, que $|v| \leq |w| - 1 = |u|$. Usando a proposição 2.1, temos que $\mathrm{Pref}(v) \subseteq \mathrm{Pref}(u) \subseteq \mathrm{Pref}(w)$. Assim temos que

$w \leq_{\mathcal{R}} u \leq_{\mathcal{R}} v \mathrel{\mathcal{R}} w$ devido à proposição 7.6, contradizendo com $u \not\mathrel{\mathcal{R}} w$. Suponha que $\mathrm{Pref}(w) \cap [w]_{\mathcal{R}} = \{w\}$. Neste caso, temos que $w = u \cdot a$ e $u \not\mathrel{\mathcal{R}} w$. Por definição, temos que w é uma $\mathcal{R}$-entrada. ∎

Dado um elemento numa $\mathcal{R}$-classe de S', naturalmente podemos escolher o mais curto entre seus prefixos que esteja na mesma $\mathcal{R}$-classe, já que certamente pertencerá a $\mathcal{M}'$ devido à proposição 7.4. Assim este prefixo é uma $\mathcal{R}$-entrada desta $\mathcal{R}$-classe devido à proposição 7.9.

Lema 7.10 *Seja $w \in \mathcal{S}'$ uma $\mathcal{R}$-entrada de sua $\mathcal{R}$-classe. Seja v um elemento da $\mathcal{R}$-classe de w. Seja $y \in \mathcal{M}'$ mínimo em seu comprimento tal que $w = v \cdot y$. Existe $s = \epsilon_1\epsilon_2 \ldots \epsilon_k$ uma seqüência de expansões sob Σ tal que $s : w \Rightarrow vy$. Seja $\sigma_i = \exp(\epsilon_i)$ e sejam $\mu_i, \eta_i \in A^*$ tais que $\epsilon_i = \mu_i\sigma_i\eta_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $v = w \iff |y| = 0 \iff |s| = 0$.
2. *s é unicamente determinada e decrescente.*
3. *Todas as biexpansões de s são empilhadas.*
4. $\mathrm{com}(\epsilon_1) = \epsilon_1$.
5. *Temos que* $\mathrm{Pref}(\mu_1 c_{\sigma_1}) \subset \mathrm{Pref}(\mu_2 c_{\sigma_2}) \subset \cdots \subset \mathrm{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k}) \subset \mathrm{Pref}(v) \subset \mathrm{Pref}(l_{\mathrm{com}(\sigma_k)}) \subseteq \mathrm{Pref}(\mu_k l_{\sigma_k})$ *e que* $\mathrm{Pref}(\mu_{i+1} c_{\sigma_{i+1}}) \subset \mathrm{Pref}(l_{\mathrm{com}(\epsilon_i)})$ *para* $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Demonstração.

Como $w = v \cdot y$, temos que $w = \mathrm{rep}(vy) \sim_\pi vy$. Usando o ítem 5 do Teorema da Expansibilidade, existe s uma seqüência de expansões sob Σ tal que $s : w \Rightarrow vy$. Seja k seu comprimento e sejam $\epsilon_i, \mu_i, \eta_i, \sigma_i$ para $i = 1, 2, \ldots k$ conforme o enunciado.

Vamos mostrar o ítem 1. Suponha, que $|s| = 0$. Então temos que $w = vy$. Como $v \in \mathrm{Pref}(w) \cap [w]_{\mathcal{R}}$, usando a proposição 7.9, temos que $v = w$. Suponha que $v = w$. Então, pela definição de y, temos que $y = 1$ e que $|y| = 0$. Suponha que $|y| = 0$. Suponha, por absurdo, que $|s| > 0$. Então temos que $v = vy = l_{\epsilon_k}$ e $l_{\mathrm{mot}(\epsilon_k)} \in \mathrm{Fat}(l_{\epsilon_k}) = \mathrm{Fat}(v)$, contradizendo com a definição de $\mathcal{M}'$ e com o ítem 4 do Teorema da Expansibilidade.

Vamos mostrar que

$$vy' \sim_\pi w \Longrightarrow |y| \leq |y'|, \qquad \forall y' \in A^*. \tag{7.1}$$

(não somente para $y \in \text{rep}(A^*)$). É só observar que $vy \sim_\pi w \sim_\pi vy' \sim_\pi v\text{rep}(y')$, que $|y| \leq |\text{rep}(y')|$ pela escolha de y e que $|\text{rep}(y')| \leq |y'|$ pela definição de representante.

Demonstraremos os ítens de 2 a 5 fazendo uma indução em $|y|$. Observe que se $|y| = 0$, então temos que $k = |s| = 0$ devido ao ítem 1. Assim, os ítens de 2 a 5 são imediatamente verdadeiros e já temos a base da indução.

Admitamos, a partir de agora, que $|y| \geq 1$.

Como ϵ_k é a última expansão de s, temos que $vy = l_{\epsilon_k} = \mu_k l_{\sigma_k} \eta_k$. Pelo Teorema da Equivalência, temos que $l_{\sigma_k} \in [c_{\sigma_k}]$.

Vamos mostrar que $v \notin \text{Pref}(c_{\epsilon_k})$. Suponha, por absurdo, que $v \in \text{Pref}(c_{\epsilon_k})$, neste caso, tomando $y' = v^{-1}c_{\epsilon_k}$, temos que $s\epsilon_k{}^{-1} : w \Rightarrow vy'$ e $|y'| = |c_{\epsilon_k}| - |v| < |l_{\epsilon_k}| - |v| = |y|$, o que é uma contradição com (7.1).

Vamos mostrar que η_k é sufixo próprio de y e que $\text{Pref}(c_{\text{com}(\epsilon_k)}) \subseteq \text{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k}) \subset \text{Pref}(v) \subset \text{Pref}(l_{\text{com}(\epsilon_k)}) \subseteq \text{Pref}(\mu_k l_{\sigma_k})$. Usando a definição de começo de uma expansão, segue imediato que existe $z \in A^*$ tal que $\text{com}(\epsilon_k)z = \mu_k \sigma_k$ e, portanto, que $\text{Pref}(c_{\text{com}(\epsilon_k)}) \subseteq \text{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k})$ e também que $\text{Pref}(l_{\text{com}(\epsilon_k)}) \subseteq \text{Pref}(\mu_k l_{\sigma_k})$. Como $v \in \text{rep}(A^*)$, usando o ítem 4 do Teorema da Expansibilidade, temos que $l_{\text{com}(\epsilon_k)} \notin \text{Pref}(v)$ e, como $l_{\text{com}(\epsilon_k)}, v \in \text{Pref}(l_{\epsilon_k})$, usando a proposição 2.1, teremos então que v é prefixo próprio de $l_{\text{com}(\epsilon_k)}$. Como $\mu_k l_{\sigma_k} \eta_k = vy$ e $|v| < |l_{\text{com}(\epsilon_k)}| \leq |\mu_k l_{\sigma_k}|$, usando a proposição 2.1, teremos então que η_k é sufixo próprio de y. Como já mostramos que $v \notin \text{Pref}(c_{\epsilon_k})$ e como $\text{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k}) \subseteq \text{Pref}(c_{\epsilon_k})$, temos que $v \notin \text{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k})$. Donde, como $v, \mu_k c_{\sigma_k} \in \text{Pref}(\mu_k l_{\sigma_k})$, usando a proposição 2.1, temos que $\text{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k}) \subset \text{Pref}(v)$.

Vamos mostrar que $\mu_k c_{\sigma_k}, \eta_k, c_{\text{com}(\epsilon_k)} \in \mathcal{M}'$, que $\mu_k c_{\sigma_k} \;\mathcal{R}\; w \;\mathcal{R}\; c_{\text{com}(\epsilon_k)}$ e que η_k é de comprimento mínimo tal que $\mu_k c_{\sigma_k} \cdot \eta_k = w$. Como $\text{Pref}(c_{\text{com}(\epsilon_k)}) \subseteq \text{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k}) \subset \text{Pref}(v) \subset \text{Pref}(\mu_k l_{\sigma_k})$ e $\mu_k l_{\sigma_k} \eta_k = vy$, como η_k é sufixo próprio de y, usando a proposição 7.4, temos então que $c_{\text{com}(\sigma_k)}, \mu_k c_{\sigma_k}, \eta_k \in \mathcal{M}'$. Ora, $c_{\text{com}(\sigma_k)} \sim_\pi l_{\text{com}(\sigma_k)}$ devido ao Teorema da Equivalência, donde temos que $c_{\text{com}(\epsilon_k)} = \text{rep}(l_{\text{com}(\epsilon_k)}) \leq_{\mathcal{R}} v \leq_{\mathcal{R}} \mu_k c_{\sigma_k} \leq_{\mathcal{R}} c_{\text{com}(\epsilon_k)}$ devido à proposição 7.6 e, portanto que $c_{\text{com}(\epsilon_k)} \;\mathcal{R}\; \mu_k c_{\sigma_k} \;\mathcal{R}\; v \;\mathcal{R}\; w$. Como $vy = \mu_k l_{\sigma_k} \eta_k$ e $|v| < |\mu_k l_{\sigma_k}|$, usando a proposição 2.1, temos que existe $x \in A^+$ tal que $y = x\eta_k$ e que $\mu_k l_{\sigma_k} = vx$. Seja $z \in \mathcal{M}'$ tal que $\mu_k c_{\sigma_k} \cdot z = w$ e, portanto, tal que $\mu_k c_{\sigma_k} z \sim_\pi w$. Observe que $v\,xz = \mu_k l_{\sigma_k} z \sim_\pi \mu_k c_{\sigma_k} z \sim_\pi w$, logo, por (7.1), temos que $|z| = |xz| - |x| \geq |y| - |x| = |\eta_k|$. Donde $|\eta_k|$ é de comprimento mínimo tal que $\mu_k c_{\sigma_k} \cdot \eta_k = w$.

Observe que $\mu_k c_{\sigma_k}$ $\mathcal{R}$ w, que $\mu_k c_{\sigma_k} \cdot \eta_k = w$, que $\eta_k \in \mathcal{M}'$ é uma palavra de comprimento mínimo nestas condições e que $|\eta_k| < |y|$. Assim podemos aplicar a hipótese de indução sobre $|\eta_k|$ (relativa a $\mu_k c_{\sigma_k}$). Em particular, temos que existe uma única seqüência de expansões, portanto igual a $s\epsilon_k{}^{-1}$, tal que $s\epsilon_k{}^{-1} : w \Rightarrow \mu_k c_{\sigma_k} \eta_k = c_{\epsilon_k}$.

Vamos provar o ítem 5. Da hipótese de indução sobre $|\eta_k|$, temos que $\mathrm{Pref}(\mu_1 c_{\sigma_1}) \subset \mathrm{Pref}(\mu_2 c_{\sigma_2}) \subset \cdots \subset \mathrm{Pref}(\mu_{k-1} c_{\sigma_{k-1}}) \subset \mathrm{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k}) \subset \mathrm{Pref}(l_{\mathrm{com}(\epsilon_{k-1})}) \subseteq \mathrm{Pref}(\mu_{k-1} l_{\sigma_{k-1}})$ e $\mathrm{Pref}(\mu_{i+1} c_{\sigma_{i+1}}) \subset \mathrm{Pref}(l_{\mathrm{com}(\epsilon_i)})$ para $i = 1, 2, \ldots, k-2$. Como já vimos que $\mathrm{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k}) \subset \mathrm{Pref}(v) \subset \mathrm{Pref}(l_{\mathrm{com}(\epsilon_k)}) \subseteq \mathrm{Pref}(\mu_k l_{\sigma_k})$, a demonstração do ítem 5 já está feita.

Vamos provar o ítem 4. Ainda da hipótese de indução sobre $|\eta_k|$, temos que a primeira expansão de $s\epsilon_k{}^{-1}$ é tal que seu começo é a própria expansão. Naturalmente, se $|s| > 1$ então a primeira expansão de $s\epsilon_k{}^{-1}$ é a primeira expansão de s. Assim, para acabar de provar o ítem 4, falta-nos provar apenas que $\mathrm{com}(\epsilon_k) = \epsilon_k$ quando $k = |s| = 1$. Suponha que $k = |s| = 1$. Assim $\epsilon_k = (w, vy)$. Como $c_{\mathrm{com}(\epsilon_k)} \in \mathrm{Pref}(c_{\epsilon_k}) = \mathrm{Pref}(w)$ e w é uma $\mathcal{R}$-entrada, como já mostramos que $c_{\mathrm{com}(\epsilon_k)}$ $\mathcal{R}$ w, temos então que $c_{\mathrm{com}(\epsilon_k)} = w = c_{\epsilon_k}$ devido à proposição 7.9. Assim, sendo $x \in A^*$ tal que $\mathrm{com}(\epsilon_k)x = \epsilon_k$, temos então que $x = 1$ e que $\mathrm{com}(\epsilon_1) = \mathrm{com}(\epsilon_k) = \epsilon_k = \epsilon_1$.

Vamos mostrar o ítem 2. Para concluir a demonstração do ítem 2 vamos mostrar que vy não é longo de nenhuma outra expansão sob Σ que não ϵ_k pois, neste caso, teremos que s é única (e decrescente devido à proposição 6.11), já que já vimos que $s\epsilon_k{}^{-1}$ é a única seqüência de expansões que expande w para c_{ϵ_k}. Seja ϵ uma expansão sob Σ tal que $l_\epsilon = vy = l_{\epsilon_k}$. Admita, por absurdo, que $\epsilon \neq \epsilon_k$. Usando o lema 6.3, temos que $l_{\mathrm{com}(\epsilon)} \in \mathrm{Pref}(c_{\epsilon_k})$ ou $l_{\mathrm{com}(\epsilon_k)} \in \mathrm{Pref}(c_\epsilon)$. Suponha o caso em que $l_{\mathrm{com}(\epsilon)} \in \mathrm{Pref}(c_{\epsilon_k})$ então teremos que $l_{\mathrm{com}(\epsilon)} \in \mathrm{Pref}(c_{\epsilon_k}) \cap \mathrm{Pref}(l_\epsilon) = \mathrm{Pref}(c_{\epsilon_k}) \cap \mathrm{Pref}(l_{\epsilon_k}) = \mathrm{Pref}(\mu_k c_{\sigma_k})$ devido à proposição 6.6. Também teremos que $l_{\mathrm{mot}(\epsilon)} \in \mathrm{Fat}(l_{\mathrm{com}(\epsilon)}) \subseteq \mathrm{Fat}(\mu_k c_{\sigma_k}) \subset \mathrm{Fat}(v)$ pois já mostramos que $\mu_k c_{\sigma_k} \in \mathrm{Pref}(v)$, contradizendo com o fato de que $v \in \mathcal{M}'$ e com o ítem 4 do Teorema da Expansibilidade. Assim sendo, devemos ter o caso em que $l_{\mathrm{com}(\epsilon_k)} \in \mathrm{Pref}(c_\epsilon)$. Como $\mathrm{com}(\epsilon_k) = \min_{\leq_{\mathrm{r}}}(\mathrm{Pref}(\epsilon_k) \cap \Rightarrow_\Sigma)$ e $\mu_k \sigma_k \in \mathrm{Pref}(\epsilon_k) \cap \Rightarrow_\Sigma$, teremos que $\mathrm{com}(\epsilon_k) \in \mathrm{Pref}(\mu_k \sigma_k)$ e que $l_{\mathrm{com}(\epsilon_k)} \in \mathrm{Pref}(\mu_k l_{\sigma_k})$. Como $l_{\mathrm{mot}(\epsilon_k)} \in \mathrm{Fat}(l_{\mathrm{com}(\epsilon_k)})$ e $l_{\mathrm{mot}(\epsilon_k)} \notin \mathrm{Fat}(v)$ devido ao ítem 4 do Teorema da Expansibilidade, temos que $l_{\mathrm{com}(\epsilon_k)} \notin \mathrm{Pref}(v)$. Como $l_{\mathrm{com}(\epsilon_k)}, v \in \mathrm{Pref}(\mu_k l_{\sigma_k})$ pois já mostramos que $\mathrm{Pref}(v) \subseteq \mathrm{Pref}(\mu_k l_{\sigma_k})$, usando a proposição 2.1, temos que $v \in \mathrm{Pref}(l_{\mathrm{com}(\epsilon_k)}) \subseteq \mathrm{Pref}(c_\epsilon)$. Seja

$y' = v^{-1}c_\epsilon$. Neste caso, usando o Teorema da Equivalência, teremos que $vy' = c_\epsilon \sim_\pi l_\epsilon = vy \sim_\pi w$ e que $|y'| = |c_\epsilon| - |v| < |l_\epsilon| - |v| = |y|$, que é contradição com (7.1). Assim sendo, $\epsilon = \epsilon_k$ e existe uma única expansão ϵ_k tal que $l_{\epsilon_k} = vy$.

Vamos mostrar o ítem 3. Usando a hipótese de indução sobre $|\eta_k|$, também temos que as biexpansões de $s{\epsilon_k}^{-1}$ são empilhadas. Para acabar de provar o ítem 3, teremos que provar que a última biexpansão de s é empilhada. Caso $k \leq 2$ não há o que fazer. Admitiremos, portanto, que $k = |s| \geq 2$. Usando a proposição 6.7, temos que a biexpansão $\epsilon_{k-1}\epsilon_k$ se classifica entre trivial, indiferente ou empilhada. Suponha que $\epsilon_{k-1}\epsilon_k$ seja trivial. Usando a proposição 6.8, temos que $\sigma_k = \sigma_{k-1}\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma_{k-1})^m$. Em particular, temos que $l_{\mathrm{mot}(\epsilon_{k-1})} \in \mathrm{Fat}(\mu_k c_{\sigma_{k-1}}\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma_{k-1})^m) = \mathrm{Fat}(\mu_k c_{\sigma_k}) \subset \mathrm{Fat}(v)$, contradizendo com o fato de que $v \in \mathcal{M}'$ e com o ítem 4 do Teorema da Expansibilidade. Suponha que $\epsilon_{k-1}\epsilon_k$ seja uma biexpansão indiferente. Usando a proposição 6.10 (ou sua proposição dual caso seja indiferente mais à direita), temos que existe uma biexpansão $\epsilon'''\epsilon''$, diferente de $\epsilon_{k-1}\epsilon_k$, que expande $c_{\epsilon_{k-1}}$ para $l_{\epsilon_k} = vy$. Isto é uma contradição com a unicidade de s já mostrada no ítem 2 pois $\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{k-2}\epsilon'''\epsilon''$ é uma seqüência diferente de s que expande w para vy. Assim sendo, a biexpansão $\epsilon_{k-1}\epsilon_k$ é empilhada. ∎

O teorema que se segue é fundamental para uma análise mais aprimorada da estrutura das $\mathcal{R}$-classes e para as demais propriedades estruturais de $\mathcal{M}'$ a serem demonstradas.

Teorema 7.11 *Cada $\mathcal{R}$-classe de $\mathcal{S}'$, tem exatamente uma $\mathcal{R}$-entrada, que por sua vez é prefixo de todos os elementos de sua $\mathcal{R}$-classe.*

Demonstração.

Seja v um elemento qualquer de uma $\mathcal{R}$-classe de $\mathcal{S}'$. Então $v \neq 1$ e, como já observamos antes, podemos escolher o mais curto prefixo de v que esteja na mesma $\mathcal{R}$-classe, já que certamente pertencerá a $\mathcal{M}'$ devido à proposição 7.4. Este prefixo é diferente de 1 pois a $\mathcal{R}$-classe de 1 em $\mathcal{M}'$ é trivial. Logo este prefixo é uma $\mathcal{R}$-entrada desta $\mathcal{R}$-classe devido à proposição 7.9. Assim toda $\mathcal{R}$-classe de $\mathcal{S}'$ tem ao menos uma $\mathcal{R}$-entrada. Seja w uma $\mathcal{R}$-entrada da $\mathcal{R}$-classe de v. Seja $y \in \mathcal{M}'$ de menor comprimento tal que $v \cdot y = w$. Usando o lema 7.10, temos que existe uma seqüência de expansões s sob Σ tal que $s : w \Rightarrow vy$. Caso $|s| = 0$, então temos que $w = v$ devido ao ítem 1 do mesmo lema e, portanto, temos que $w \in \mathrm{Pref}(v)$.

Caso $|s| > 0$, temos que $w = c_{\epsilon_1} = c_{\mathrm{com}(\epsilon_1)}$ devido ao ítem 4 do lema 7.10. Como $c_{\mathrm{com}(\epsilon_1)} \in \mathrm{Pref}(\mu_1 c_{\sigma_1}) \subset \mathrm{Pref}(v)$ devido à definição de começo de uma exansão e ao ítem 5 do mesmo lema, temos que $w \in \mathrm{Pref}(v)$. Assim temos que $w \in \mathrm{Pref}(v)$ em qualquer um dos casos e, portanto, que w é prefixo de todo elemento de sua $\mathcal{R}$-classe. Segue imediato que w é a única $\mathcal{R}$-entrada da $\mathcal{R}$-classe de w devido à proposição 7.9. ∎

Corolário 7.12 *O "frame" das $\mathcal{R}$-classes é uma árvore.*

Demonstração.

Usando o teorema 7.11 e a proposição 7.8, para uma dada $\mathcal{R}$-classe, existe somente uma $\mathcal{R}$-classe imediatamente $\mathcal{R}$-acima. ∎

Proposição 7.13 *Seja uma $\mathcal{R}$-classe não trivial de $\mathcal{S}'$ com dois elementos distintos, w e v, sendo o primeiro sua $\mathcal{R}$-entrada. Então existem $\tau, \sigma \in \Sigma$ tais que:*

- $|v \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$;
- c_τ *é o mais comprido sufixo de w que é curto de alguma produção de Σ;*
- $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau)$, *ou* $\sigma = \tau$ *e* $\mathrm{Pref}(w) \subset \mathrm{Pref}(v) \subset \mathrm{Pref}(w \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^m)$.

Demonstração.

Seja $y \in \mathcal{M}'$ de menor comprimento tal que $v \cdot y = w$. Usando o lema 7.10, temos que existe uma seqüência s de expansões sob Σ tal que $s : w \Rightarrow vy$. Pelo teorema 7.11, temos que $w \in \mathrm{Pref}(v)$ e, como $v \neq w$, usando o ítem 1 do lema 7.10, temos que $|s| > 0$. Seja ϵ a última expansão de s e sejam $\mu, \eta \in A^*$ e $\sigma' \in \Sigma''$ tais que $\epsilon = \mu\sigma'\eta$ e $\sigma' = \exp(\epsilon)$. Seja $\sigma = \mathrm{mot}(\epsilon)$ e sejam $x, y \in A^*$ tais que $\sigma' = x\sigma y$ e que $\mathrm{com}(\epsilon) = \mu x \sigma$. Neste caso, usando o ítem 5 do lema 7.10, temos que $\mathrm{Pref}(\mu x c_\sigma y) = \mathrm{Pref}(\mu c_{\sigma'}) \subset \mathrm{Pref}(v) \subset \mathrm{Pref}(l_{\mathrm{com}(\epsilon)}) = \mathrm{Pref}(\mu x l_\sigma) \subseteq \mathrm{Pref}(\mu l_{\sigma'})$. Usando a proposição 2.1, temos que existe $x' \in \mathrm{Suf}(v) \setminus \{1\}$ tal que $\mu x c_\sigma y x' = v \in \mathrm{Pref}(\mu x l_\sigma)$ e, portanto, que $(\mu x)^{-1} v = c_\sigma y x' \in \mathrm{Pref}(l_\sigma) \cap \mathrm{Suf}(v)$. Donde $|v \rightleftharpoons l_\sigma| = |\max(\mathrm{Suf}(v) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma))| \geq |c_\sigma y x'| > |c_\sigma|$. Como a seqüência s é decrescente devido ao ítem 2 do lema 7.10, temos que $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\epsilon) \leq \mathrm{base}(\epsilon') = \mathrm{base}(\mathrm{mot}(\epsilon'))$ onde ϵ' é a primeira expansão de s. Como $c_{\mathrm{mot}(\epsilon')} \in \mathrm{Suf}(c_{\mathrm{com}(\epsilon')})$ por definição, usando o ítem 4 do lema 7.10, temos que $c_{\mathrm{mot}(\epsilon')} \in \mathrm{Suf}(c_{\mathrm{com}(\epsilon')}) = \mathrm{Suf}(c_{\epsilon'}) = \mathrm{Suf}(w)$ e existe $\tau \in \Sigma$ tal que c_τ é o mais comprido sufixo de w que é curto de alguma produção de Σ. Por esta escolha de τ e pela proposição 2.1, temos que $c_{\mathrm{mot}(\epsilon')} \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$ e que $\mathrm{base}(\mathrm{mot}(\epsilon')) = \mathrm{per}(c_{\mathrm{mot}(\epsilon')}) \leq \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$ devido à proposição 2.22. Assim temos que $\mathrm{base}(\sigma) \leq \mathrm{base}(\mathrm{mot}(\epsilon')) \leq \mathrm{base}(\tau)$. Caso $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau)$, a demonstração estará concluida. Suponha que $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\mathrm{mot}(\epsilon')) = \mathrm{base}(\tau)$. Como $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\mathrm{mot}(\epsilon'))$ e como $c_{\mathrm{mot}(\epsilon')} \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$, usando a proposição 3.4, temos que $\mathrm{mot}(\epsilon') \leq_{\mathrm{r}} \tau$ e como $\tau, \mathrm{mot}(\epsilon') \in \Sigma = \mathrm{irred}(\Sigma')$, temos que $\mathrm{mot}(\epsilon') = \tau$. Como s é decrescente e suas biexpansões são empilhadas devido ao ítem 3 do lema 7.10, usando a proposição 6.9, temos que $\mathrm{base}(\epsilon) < \mathrm{base}(\epsilon')$ a não ser que $\epsilon = \epsilon'$. Como $\mathrm{base}(\epsilon) = \mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\mathrm{mot}(\epsilon')) = \mathrm{base}(\epsilon')$, temos então que $\epsilon = \epsilon'$ e, portanto, $\tau = \mathrm{mot}(\epsilon') = \mathrm{mot}(\epsilon) = \sigma$. Também temos que $\mathrm{Pref}(w) = \mathrm{Pref}(c_{\mathrm{com}(\epsilon)'}) \subset \mathrm{Pref}(v) \subset \mathrm{Pref}(l_{\mathrm{com}(\epsilon')}) = \mathrm{Pref}(c_{\mathrm{com}(\epsilon')}\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\mathrm{mot}(\epsilon'))^m) = \mathrm{Pref}(w\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^m)$. ∎

A proposição seguinte nos diz quem é a $\mathcal{R}$-entrada da $\mathcal{R}$-classe de um dado elemento de $\mathcal{S}'$. De maneira informal, é a palavra obtida apagando-se letras do lado direito até obtermos uma palavra em R, o conjunto definido abaixo. De maneira análoga, apagando letras à esquerda da mesma até obtermos uma palavra em L, obtemos a $\mathcal{L}$-entrada da sua $\mathcal{L}$-classe. Se apagarmos o mesmo conjunto de letras à direita até obtermos um elemento de R e em seguida apagarmos à esquerda até obter um elemento de L, obtemos uma $\mathcal{D}$-entrada de sua $\mathcal{D}$-classe (pode haver outras $\mathcal{D}$-entradas, conforme veremos no teorema 7.19).

Teorema 7.14 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *O conjunto das $\mathcal{R}$-entradas das $\mathcal{R}$-classes de $\mathcal{S}'$ é o conjunto R. Dada uma palavra $w \in \mathcal{S}'$, a $\mathcal{R}$-entrada de sua $\mathcal{R}$-classe é o seu mais comprido prefixo que pertence ao conjunto R.*

2. *O conjunto das $\mathcal{L}$-entradas das $\mathcal{L}$-classes de $\mathcal{S}'$ é o conjunto L. Dada uma palavra $w \in \mathcal{S}'$, a $\mathcal{L}$-entrada de sua $\mathcal{L}$-classe é o seu mais comprido sufixo que pertence ao conjunto L.*

3. *O conjunto das $\mathcal{D}$-entradas é $R \cap L$, a intersecção dos dois conjuntos descritos nos ítens acima. Dada uma palavra $w \in \mathcal{S}'$ existem únicos $w', u, v \in \mathcal{M}'$ tais que: $w = uw'v$; uw' é a $\mathcal{R}$-entrada de sua $\mathcal{R}$-classe;*

w' é a $\mathcal{L}$-entrada da $\mathcal{L}$-classe de uw'. Neste caso, w' é uma $\mathcal{D}$-entrada da $\mathcal{D}$-classe de w.

Demonstração.

Vamos mostrar que as $\mathcal{R}$-entradas são elementos de R. Seja w uma $\mathcal{R}$-entrada qualquer. Suponha, por absurdo, que $w \notin R$. Então existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $|w \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$. Seja $x = w(w \rightleftharpoons l_\sigma)^{-1}$ e seja $y = (w \rightleftharpoons l_\sigma)^{-1} l_\sigma$. Como $w \rightleftharpoons l_\sigma, c_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$, temos que $c_\sigma \in \mathrm{Pref}(w \rightleftharpoons l_\sigma)$ e que $xc_\sigma \in \mathrm{Pref}(x(w \rightleftharpoons l_\sigma)) = \mathrm{Pref}(w)$ devido à proposição 2.1. Usando a proposição 7.4, temos que $xc_\sigma \in \mathcal{M}'$ e, usando o Teorema da Equivalência, temos que $wy = x(w \rightleftharpoons l_\sigma)y = xl_\sigma \sim_\pi xc_\sigma$. Como $w \in \mathcal{M}' \cap \mathrm{Pref}(wy) \subseteq \mathcal{M}' \cap \mathrm{Pref}([xc_\sigma])$, como $xc_\sigma \in \mathcal{M}' \cap \mathrm{Pref}(w) \subseteq \mathcal{M}' \cap \mathrm{Pref}([w])$, temos então que $xc_\sigma \; \mathcal{R} \; w$ devido à proposição 7.6. Usando a proposição 7.9, temos que $xc_\sigma = w = x(w \rightleftharpoons l_\sigma)$, contradizendo com $|c_\sigma| < |w \rightleftharpoons l_\sigma|$.

Vamos mostrar agora que todo elemento de R é uma $\mathcal{R}$-entrada. Seja $v \in R$. Seja w a $\mathcal{R}$-entrada da $\mathcal{R}$-classe de v. Suponha, por absurdo, que $v \neq w$. Usando a proposição 7.13, temos que existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $|v \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$ e chegamos a uma contradição com o fato de que $v \in R$. Neste caso $w = v$ e v é uma $\mathcal{R}$-entrada.

Vamos mostrar os ítens 1 e 2. Ora, de posse dos dois parágrafos anteriores temos que o conjunto das $\mathcal{R}$-entradas é R. Seja $v \in \mathcal{M}'$ e seja w a $\mathcal{R}$-entrada da $\mathcal{R}$-classe de v. Como já vimos, $w \in R$. Usando o teorema 7.11, temos que $w \in \mathrm{Pref}(v)$. Tome $u \in \mathrm{Pref}(v) \cap R$ e suponha que $|u| \geq |w|$. Usando a proposição 2.1, temos que $w \in \mathrm{Pref}(u)$. Como u é uma $\mathcal{R}$-entrada pois é um elemento de R, usando a proposição 7.9, temos que $w = u$. Assim, w é o mais comprido sufixo de v que pertence a R. Por dualidade, também demonstramos o ítem 2.

Vamos provar o ítem 3. De fato, pela definição, uma $\mathcal{D}$-entrada é uma $\mathcal{R}$-entrada e uma $\mathcal{L}$-entrada simultaneamente e, portanto, o conjunto das $\mathcal{D}$-entradas é $R \cap L$. Seja $u' \in \mathcal{S}'$ a $\mathcal{R}$-entrada da $\mathcal{R}$-classe de w. Usando o teorema 7.11, existe $v \in A^*$ tal que $w = u'v$. Como conseqüência do ítem 1 já demonstrado, temos que $u' \in R$. Pela própria definição de R, temos que $\mathrm{Suf}(u') \setminus \{1\} \subseteq R$. Seja w' a $\mathcal{L}$-entrada da $\mathcal{L}$-classe de u'. Usando o dual do teorema 7.11, existe $u \in A^*$ tal que $u' = uw'$ e, portanto, temos que $w = u'v = uw'v$ sendo que $u, v, w' \in \mathcal{M}'$ devido à proposição 7.4. Então $w' \in L \cap (\mathrm{Suf}(u') \setminus \{1\}) \subseteq R \cap L$ e, portanto, é uma $\mathcal{D}$-entrada. Como $w' \; \mathcal{L} \; uw' \; \mathcal{R} \; uw'v = w$, temos que $w' \; \mathcal{D} \; w$ e, portanto, que w' é uma $\mathcal{D}$-

entrada da $\mathcal{D}$-classe de w. ∎

Corolário 7.15 *Os curtos das produções de Σ são $\mathcal{D}$-entradas de suas $\mathcal{D}$-classes.*

Demonstração.

Seja $\tau \in \Sigma$. Vamos mostrar que c_τ é uma $\mathcal{D}$-entrada. Usando a proposição 5.4, temos que $|c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| \leq |c_\sigma|$ para todo $\sigma \in \Sigma$. Assim temos que $c_\tau \in R$. Por dualidade, temos que $c_\tau \in L$ e é uma $\mathcal{D}$-entrada devido ao ítem 3 do teorema 7.14. ∎

7.4 As $\mathcal{R}$-classes triviais de $\mathcal{S}'$.

O teorema que se segue nos dá uma caracterização das $\mathcal{R}$-classes triviais (aquelas que têm um único elemento).

Teorema 7.16 *Seja w uma $\mathcal{R}$-entrada. Então temos que a $\mathcal{R}$-classe de w é trivial se e somente se não existe sufixo de w que seja curto de nenhuma produção τ de Σ satisfazendo* $m\mathrm{base}(\tau) > 1$.

Demonstração.

Vamos mostrar o "se". Suponhamos que não exista sufixo de w que seja curto de nenhuma produção τ de Σ satisfazendo $m\mathrm{base}(\tau) > 1$. Seja $v \in [w]_\mathcal{R}$ e seja $y \in \mathcal{M}'$ de comprimento mínimo tal que $v \cdot y = w$. Então existe uma seqüência de expansões s tal que $s : w \Rightarrow vy$ devido ao lema 7.10. Suponha, por absurdo, que $v \neq w$. Usando o ítem 1 do lema 7.10, temos que $|s| \geq 0$. Seja ϵ a primeira expansão de s e seja $\tau = \mathrm{mot}(\epsilon)$. Usando o ítem 4 do lema 7.10, temos que $c_{\mathrm{com}(\epsilon)} = c_\epsilon = w$. Pela definição de motivo de uma expansão, temos que $c_\tau \in \mathrm{Suf}(c_{\mathrm{com}(\epsilon)}) = \mathrm{Suf}(w)$, e, portanto, $m\mathrm{base}(\tau) \leq 1$. Isto já é uma contradição quando $m \geq 2$. Analisaremos agora somente o caso em que $m = 1$. Neste caso temos que $s = \epsilon$, já que caso $|s| \geq 2$, sendo ϵ' a primeira expansão em $\epsilon^{-1}s$, a biexpansão $\epsilon\epsilon'$ seria empilhada devido ao ítem 3 do lema 7.10 e, usando a proposição 6.9, teríamos que $\mathrm{base}(\epsilon') < \mathrm{base}(\epsilon) \leq 1/m = 1$, que seria um absurdo. Pelos ítens 4 e 5 do mesmo lema 7.10, temos que $\mathrm{Pref}(w) = \mathrm{Pref}(c_{\mathrm{com}(\epsilon)}) \subset \mathrm{Pref}(v) \subset \mathrm{Pref}(l_{\mathrm{com}(\epsilon)})$ e, portanto, temos que $|l_{\mathrm{com}(\epsilon)}| - |c_{\mathrm{com}(\epsilon)}| \geq 2$, contradizendo com $|l_{\mathrm{com}(\epsilon)}| - |c_{\mathrm{com}(\epsilon)}| = m\mathrm{base}(\epsilon) = m\mathrm{base}(\tau) = 1$. Portanto, $v = w$ e a $\mathcal{R}$-classe só pode ser trivial.

Vamos mostrar o "somente se". Suponhamos que exista $\tau \in \Sigma$ satisfazendo $m\mathrm{base}(\tau) > 1$ tal que $c_\tau \in \mathrm{Suf}(w)$. Seja $a \in A$ e $v' \in A^+$ tal que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^m = av'$. Vamos mostrar que $wa \in \mathcal{M}'$, que $wa \; \mathcal{R} \; w$ e, então, que a $\mathcal{R}$-classe de w não é trivial. Suponha, por absurdo, que $wa \notin \mathcal{M}'$. Então temos que $w \cdot a \neq wa$ e que existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $l_\sigma \in \mathrm{Fat}(wa)$ e que $w(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m a^{-1})^{-1} \; \mathcal{R} \; w$ devido à proposição 7.7. Como w é uma $\mathcal{R}$-entrada, temos que $w(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m a^{-1})^{-1} = w$ devido à proposição 7.9 e, portanto, que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^m = a$. No caso em que $m > 1$ isto já é uma contradição. No caso em que $m = 1$ teremos que $\mathrm{base}(\sigma) = 1 < m\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\tau)$ e que $c_\sigma = l_\sigma \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\sigma)^{-m} = l_\sigma a^{-1} \in \mathrm{Suf}(waa^{-1}) = \mathrm{Suf}(w)$. Caso $c_\tau \in \mathrm{Suf}(c_\sigma)$ teríamos que $\mathrm{base}(\tau) = \mathrm{per}(c_\tau) \leq \mathrm{per}(c_\sigma) = \mathrm{base}(\sigma)$ devido à proposição 2.22 e ao fato de que as produções τ e σ são estáveis, contradizendo com o fato já mostrado de que $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau)$. Assim temos que $c_\tau \notin \mathrm{Suf}(c_\sigma)$. Como $c_\tau, c_\sigma \in \mathrm{Suf}(w)$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\sigma \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$. Assim temos que $l_\sigma = c_\sigma a \in \mathrm{Suf}(c_\tau a) \subseteq \mathrm{Fat}(c_\tau av') = \mathrm{Fat}(c_\tau \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^m) = \mathrm{Fat}(l_\tau)$, contradizendo com o corolário 5.2. Assim temos uma contradição também no caso em que $m = 1$ e, portanto, $wa \in \mathcal{M}'$. Usando o Teorema da Equivalência, temos que $wa \in \mathrm{Pref}(wav') = \mathrm{Pref}(uc_\tau \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^m) \subseteq \mathrm{Pref}([uc_\tau]) = \mathrm{Pref}([w])$ e que $w \leq_{\mathcal{R}} wa = w \cdot a \leq_{\mathcal{R}} w$ devido á proposição 7.6, e, portanto, que $wa \; \mathcal{R} \; w$. Assim, a $\mathcal{R}$-classe de w não é trivial. ∎

7.5 As $\mathcal{D}$-classes Regulares e as Irregulares de $\mathcal{S}'$.

O lema que se segue nos dá uma informação bastante semelhante à do Lema de Green (lema 7.1) para as $\mathcal{R}$-classes dentro de uma mesma $\mathcal{D}$-classe com a diferença de que, aqui, estamos tratando de bijeções entre $\mathcal{R}$-classes de $\mathcal{D}$-classes distintas, possivelmente. Mostramos que a estrutura interna de uma $\mathcal{R}$-classe (e em particular seu tamanho) é determinada unica e exclusivamente pelo mais comprido sufixo de sua $\mathcal{R}$-entrada que é curto de uma produção de Σ.

Lema 7.17 *Seja w uma $\mathcal{R}$-entrada tal que existe $\tau \in \Sigma$ tal que c_τ é o mais comprido sufixo de w que é curto de alguma produção de Σ e seja $u \in \mathrm{Pref}(w)$*

tal que $w = uc_\tau$*. Seja* $\rho_u : [c_\tau]_{\mathcal{R}} \longrightarrow A^*$ *a função definida por* $v\rho_u \stackrel{\text{def}}{=} uv$*. Então* $v\rho_u = uv = u \cdot v$ *e a função* ρ_u *é uma bijeção entre* $[c_\tau]_{\mathcal{R}}$ *e* $[w]_{\mathcal{R}}$*. Dados* $v \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$ *e* $w' \in [w]_{\mathcal{R}}$ *tais que* $v\rho_u = w'$*, para todo* $x \in \mathcal{M}'$*, temos também que* $v \cdot x \in [c_\tau]_{\mathcal{R}} \Longrightarrow w' \cdot x = (v \cdot x)\rho_u \in [w]_{\mathcal{R}}$ *e que* $w' \cdot x \in [w]_{\mathcal{R}} \Longrightarrow v \cdot x = (w' \cdot x){\rho_u}^{-1} \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$*.*

Demonstração.

Devido à proposição 7.4, temos que $u \in \mathcal{M}'$. Temos também que c_τ é a $\mathcal{R}$-entrada de sua $\mathcal{R}$-classe devido ao corolário 7.15.

Vamos mostrar que $u \cdot v = uv = v\rho_u$, para todo $v \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$. Suponha, por absurdo, que exista $v \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$ de comprimento mínimo tal que $u \cdot v \neq uv$. Como $u \cdot c_\tau = uc_\tau$, temos que $v \neq c_\tau$. Sejam $a \in A$ e $v' \in A^*$ tais que $v = v'a$ sendo que $v' \in \mathcal{M}'$ devido à proposição 7.4. Como $v', c_\tau \in \text{Pref}(v)$ devido ao teorema 7.11, como $c_\tau \neq v$ e então $|c_\tau| \leq |v| - 1 = |v'|$, usando a proposição 2.1, temos então que $\text{Pref}(c_\tau) \subseteq \text{Pref}(v') \subset \text{Pref}(v)$ e, portanto, que $v \leq_{\mathcal{R}} v' \leq_{\mathcal{R}} c_\tau \; \mathcal{R} \; v$ devido à proposição 7.6. Como temos então que $v' \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$ e que $|v'| < |v|$, temos também que $uv' = u \cdot v' \in \mathcal{M}'$ devido à escolha de v. Assim $uv' \cdot a = u \cdot v' \cdot a = u \cdot v \neq uv = uv'a$. Pela proposição 7.7, temos que existe $\rho \in \Sigma$ tal que $l_\rho \in \text{Suf}(uv'a) = \text{Suf}(uv)$. Seja $x \in A^*$ tal que $xl_\rho = uv$. Como $v \in \mathcal{M}'$, usando o ítem 4 do Teorema da Expansibilidade, temos que $l_\rho \notin \text{Suf}(v)$. Como $xl_\rho = uv$, temos então que existe $y \in A^+$ tal que $xy = u$ e que $l_\rho = yv$ devido à proposição 2.1. Assim $c_\tau \in \text{Pref}(v) \subseteq \text{Fat}(l_\rho)$. Usando o ítem 4 da proposição 5.1, temos que $\text{base}(\tau) \leq \text{base}(\rho)$. Como $v \neq c_\tau$, como $v \; \mathcal{R} \; c_\tau$, como c_τ é uma $\mathcal{R}$-entrada de sua $\mathcal{R}$-classe conforme já vimos, usando a proposição 7.13, temos que existem $\sigma, \tau' \in \Sigma$ tais que $|v \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$, que $\text{base}(\sigma) \leq \text{base}(\tau')$ e que $c_{\tau'}$ é o mais longo sufixo de c_τ que é curto de alguma produção de Σ. Assim, $c_{\tau'} = c_\tau$ e $\text{base}(\tau') = \text{per}(c_{\tau'}) = \text{per}(c_\tau) = \text{base}(\tau)$. Temos também que $\text{b}_{\text{dir}}(\tau'), \text{b}_{\text{dir}}(\tau) \in \text{Suf}(c_\tau) = \text{Suf}(c_{\tau'})$ devido à proposição 3.11 e que $\text{b}_{\text{dir}}(\tau') = \text{b}_{\text{dir}}(\tau)$ pois são sufixos de c_τ de mesmo comprimento. Logo, temos que $c_{\tau'} = c_\tau$, que $l_{\tau'} = c_{\tau'}\text{b}_{\text{dir}}(\tau')^m = c_\tau\text{b}_{\text{dir}}(\tau)^m = l_\tau$ e, portanto, que $\tau' = \tau$. Concluimos que $\text{base}(\sigma) \leq \text{base}(\tau) \leq \text{base}(\rho)$. Temos dois casos a analisar: ou $\text{base}(\sigma) < \text{base}(\rho)$, ou $\text{base}(\sigma) = \text{base}(\tau) = \text{base}(\rho)$. Suponhamos o caso em que $\text{base}(\sigma) < \text{base}(\rho)$. Observe que $\text{per}(v \rightleftharpoons l_\sigma) = \text{base}(\sigma) < \text{base}(\rho) = \text{per}(c_\rho)$ devido à proposição 5.3, e, portanto, que $c_\rho \notin \text{Suf}(v \rightleftharpoons l_\sigma)$ devido à proposição 2.22. Como $v \rightleftharpoons l_\sigma \in \text{Suf}(v) \subseteq \text{Suf}(l_\rho)$ e $c_\rho \in \text{Suf}(l_\rho)$, usando a proposição 2.1, temos que $v \rightleftharpoons l_\sigma \in \text{Suf}(c_\rho)$ e, portanto, que $|c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma| = |\max(\mathrm{Suf}(c_\rho) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma))| \geq |v \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$ contradizendo com a proposição 5.4. Suponhamos agora o caso em que $\mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{base}(\tau) = \mathrm{base}(\rho)$. Observe que $c_\rho, yc_\tau \in \mathrm{Pref}(l_\rho)$. Caso $|yc_\tau| \leq |c_\rho|$, temos que $yc_\tau \in \mathrm{Pref}(c_\rho)$ devido à proposição 2.1 e, por causa da proposição 3.4, temos que $\tau \leq_{\mathrm{r}} \rho$ já que $|c_\tau| \geq \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$. Como $\tau, \rho \in \Sigma = \mathrm{irred}(\Sigma')$, temos que $\tau = \rho$, contradizendo com o fato de que $yc_\tau \in \mathrm{Pref}(c_\rho) = \mathrm{Pref}(c_\tau)$ e com $y \in A^+$. Assim podemos supor que $|yc_\tau| > |c_\rho|$. Observe então que $yc_\tau \in \mathrm{Pref}(l_\rho)$ devido à proposição 2.1 e que $yc_\tau \in \mathrm{Suf}(w)$. Portanto, temos que $|w \rightleftharpoons l_\rho| = |\max(\mathrm{Suf}(w) \cap \mathrm{Pref}(l_\rho))| \geq |yc_\tau| > |c_\rho|$, contradizendo com o fato de que $w \in R$ devido ao ítem 1 do teorema 7.14. Assim temos uma contradição também no segundo caso e, portanto, temos que não existe $v \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$ tal que $uv \notin \mathcal{M}'$.

Vamos mostrar que a função ρ_u é uma injeção de $[c_\tau]_{\mathcal{R}}$ em $[w]_{\mathcal{R}}$. Seja $v \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$. Então existe $y \in \mathcal{M}'$ tal que $v \cdot y = c_\tau$ e, usando o teorema 7.11, temos que também existe $x \in \mathcal{M}'$ tal que $v = c_\tau x = c_\tau \cdot x$. Assim $uv \cdot y = u \cdot v \cdot y = u \cdot c_\tau = w$ e $uv = uc_\tau x = wx = w \cdot x$. Donde temos que $v\rho_u = uv \; \mathcal{R} \; w$ e, de fato, ρ_u aplica $[c_\tau]_{\mathcal{R}}$ dentro de $[w]_{\mathcal{R}}$. Como para $v', v \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$ temos que $v\rho_u = uv$, que $v'\rho_u = uv'$ e que $uv = uv' \iff v = v'$, temos então que ρ_u é uma injeção.

Dado $w' \in [w]_{\mathcal{R}}$ e dado $y' \in \mathcal{M}'$ de menor comprimento tal que $w' \cdot y' = w$, vamos mostrar que $w'\rho_u^{-1} \cdot y' = c_\tau$. Usando o lema 7.10, seja $s = \epsilon_1\epsilon_2 \cdots \epsilon_k$ uma seqüência de expansões sob Σ tal que $s : w \Rightarrow w'y'$ onde k é o comprimento de s. Sejam $\sigma_i = \exp(\epsilon_i)$ e $\mu_i, \eta_i \in A^*$ tais que $\epsilon_i = \mu_i\sigma_i\eta_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Vamos mostrar que $\mathrm{base}(\epsilon_i) \leq \mathrm{base}(\tau)$, que $u \in \mathrm{Pref}(\mu_i c_{\sigma_i}) \subseteq \mathrm{Pref}(c_{\epsilon_i})$ e que que $u^{-1}\epsilon_i$ é uma expansão sob Σ, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Faremos isto a partir de uma pequena indução em i. Usando o ítem 4 do lema 7.10, temos que $\mathrm{com}(\epsilon_1) = \epsilon_1$. Seja $\sigma = \mathrm{mot}(\epsilon_1)$. Pela definição de motivo, temos então que $c_\sigma \in \mathrm{Suf}(c_{\mathrm{com}(\epsilon_1)}) = \mathrm{Suf}(c_{\epsilon_1}) = \mathrm{Suf}(w)$ e seja $u' \in A^*$ tal que $u'c_\sigma = w = uc_\tau$. Como c_τ é o mais comprido sufixo de w que é curto de alguma produção de Σ, temos então que $|c_\sigma| \leq |c_\tau|$. Como $c_\tau, c_\sigma \in \mathrm{Suf}(w)$, temos então que $c_\sigma \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$ e que $u \in \mathrm{Pref}(u')$ devido à proposição 2.1. Assim $\mathrm{base}(\epsilon_1) = \mathrm{base}(\sigma) = \mathrm{per}(c_\sigma) \leq \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$ devido à proposição 2.22 e ao fato de que τ e σ são estáveis. Temos também que $\sigma \leq_{\mathrm{r}} (u^{-1}u')\sigma = u^{-1}\epsilon_1$ já que $u \in \mathrm{Pref}(u')$ e também que $u \in \mathrm{Pref}(w) = \mathrm{Pref}(c_{\mathrm{com}(\epsilon_1)}) \subseteq \mathrm{Pref}(\mu_1 c_{\sigma_1}) \subseteq \mathrm{Pref}(c_{\epsilon_1})$. Desta forma, já temos a nossa base de indução. Admita que $1 < i \leq k$, que $\mathrm{base}(\epsilon_{i-1}) \leq \mathrm{base}(\tau)$, que $u \in \mathrm{Pref}(\mu_{i-1} c_{\sigma_{i-1}}) \subseteq \mathrm{Pref}(c_{\epsilon_{i-1}})$ e que que $u^{-1}\epsilon_{i-1}$ é uma expansão sob Σ. Usando o ítem 3 do lema 7.10, temos que $\epsilon_{i-1}\epsilon_i$ é uma biexpansão empilhada e que base(ϵ_i) $<$ base(ϵ_{i-1}) $\leq$ base(τ) devido à proposição 6.9. Usando o ítem 5 do lema 7.10, temos que $u \in \mathrm{Pref}(\mu_{i-1}c_{\sigma_{i-1}}) \subset \mathrm{Pref}(\mu_i c_{\sigma_i}) \subseteq \mathrm{Pref}(c_{\epsilon_i})$. Suponha, por absurdo, que $u \notin \mathrm{Pref}(\mu_i)$. Como $uc_\tau = \mu_1 c_{\sigma_1} \in \mathrm{Pref}(\mu_i c_{\sigma_i})$ devido ao ítem 5 do lema 7.10, temos que $c_\tau \in \mathrm{Fat}(c_{\sigma_i})$ devido à proposição 2.1 e que base(τ) $=$ per(c_τ) $\leq$ per(c_{σ_i}) $=$ base(σ_i) $=$ base(ϵ_i) contradizendo com base(ϵ_i) $<$ base(ϵ_{i-1}) $\leq$ base(τ). Neste caso, temos que $u \in \mathrm{Pref}(\mu_i)$, que $\sigma_i \leq_{\mathrm{r}} (u^{-1}\mu_i)\sigma_i\eta_i = u^{-1}\epsilon_i$ e que $u^{-1}\epsilon_i$ é uma expansão sob Σ. Desta forma, $s' = (u^{-1}\epsilon_1)(u^{-1}\epsilon_2)\ldots(u^{-1}\epsilon_k)$ é uma seqüência de expansões sob Σ tal que $s' : u^{-1}w \Rightarrow (u^{-1}w')y'$ e, portanto, $(u^{-1}w')\cdot y' = \mathrm{rep}(u^{-1}w'y') = u^{-1}w = c_\tau$.

Vamos mostrar que $[w]_{\mathcal{R}} \subseteq \mathrm{Im}(\rho_u)$ e, portanto, que ρ_u é uma bijeção entre $[c_\tau]_{\mathcal{R}}$ e $[w]_{\mathcal{R}}$. Seja $w' \in [w]_{\mathcal{R}}$. Seja $y' \in \mathcal{M}'$ de comprimento mínimo tal que $w' \cdot y' = w$. Usando o resultado do perágrafo anterior, temos que $u^{-1}w' \cdot y' = c_\tau$ e $c_\tau \leq_{\mathcal{R}} u^{-1}w'$. Como $uc_\tau = w \in \mathrm{Pref}(w')$ devido ao teorema 7.11, então $c_\tau \in \mathrm{Pref}(u^{-1}w')$ e, pela proposição 7.6, temos que $u^{-1}w' \leq_{\mathcal{R}} c_\tau$. Assim $c_\tau \mathrel{\mathcal{R}} u^{-1}w'$ e $w' = (u^{-1}w')\rho_u \in \mathrm{Im}(\rho_u)$.

Fixemos $v \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$ e $w' \in [w]_{\mathcal{R}}$ tais que $v\rho_u = w'$.

Seja $x \in \mathcal{M}'$ tal que $v \cdot x \in [c_\tau]$. Vamos mostrar que $w' \cdot x = (v \cdot x)\rho_u \in [w]_{\mathcal{R}}$. Observe que $w' \cdot x = v\rho_u \cdot x = uv \cdot x = (u \cdot v) \cdot x = u \cdot (v \cdot x) = \mathrm{rep}(u(v \cdot x))$. Como $(v \cdot x) \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$, temos que $u(v \cdot x) = u \cdot (v \cdot x) \in \mathcal{M}'$ como já mostramos. Assim, $w' \cdot x = \mathrm{rep}(u(v \cdot x)) = u(v \cdot x) = (v \cdot x)\rho_u \in \mathrm{Im}(\rho_u) = [w]_{\mathcal{R}}$.

Seja $x \in \mathcal{M}'$ tal que $w' \cdot x \in [w]_{\mathcal{R}}$. Vamos mostrar que $v \cdot x = (w' \cdot x){\rho_u}^{-1} \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$. Primeiramente vamos mostrar que isto é verdadeiro quando $|x| = 1$. Seja $a \in A$ tal que $x = a$. Assim temos que $w' \cdot a \in [w]_{\mathcal{R}}$. Suponha que $w' \cdot a = w'a$. Como $w'a = uva$, temos que $va \in \mathcal{M}'$ devido à proposição 7.4 e, portanto, que $v \cdot a = \mathrm{rep}(va) = va = (u^{-1}w')a = u^{-1}(w'a) = (w'a){\rho_u}^{-1} = (w' \cdot a){\rho_u}^{-1} \in \mathrm{Dom}(\rho_u) = [c_\tau]_{\mathcal{R}}$. Suponha, agora, que $w' \cdot a \neq w'a$. Usando a proposição 7.7, temos que existe $\rho \in \Sigma$ tal que $l_\rho \in \mathrm{Suf}(w'a)$ e que $w' \cdot a = w'(\mathrm{b_{dir}}(\rho)^m a^{-1})^{-1} \mathrel{\mathcal{R}} w' \mathrel{\mathcal{R}} w$. Seja $v' = w'(\mathrm{b_{dir}}(\rho)^m a^{-1})^{-1}{\rho_u}^{-1}$. Assim $w'(\mathrm{b_{dir}}(\rho)^m a^{-1})^{-1} = uv'$ e $v' = v(\mathrm{b_{dir}}(\rho)^m a^{-1})^{-1}$. Como $c_\rho \mathrm{b_{dir}}(\rho)^m = l_\rho \in \mathrm{Suf}(w'a) = \mathrm{Suf}(uv'\mathrm{b_{dir}}(\rho)^m)$, temos que $c_\rho \in \mathrm{Suf}(uv')$. Dividiremos em dois casos, de modo a mostrar que $c_\rho \in \mathrm{Suf}(v')$. Suponha que $v' \neq c_\tau$. Então, pela proposição 7.13, temos que existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $|v' \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$. Como $|c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma| \leq |c_\sigma| < |v' \rightleftharpoons l_\sigma|$ devido à proposição 5.4, temos que $v' \rightleftharpoons l_\sigma \notin \mathrm{Suf}(c_\rho) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma)$ pois $c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma$ é a palavra mais comprida deste conjunto. Como

$v' \rightleftharpoons l_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$, temos que $v' \rightleftharpoons l_\sigma \notin \mathrm{Suf}(c_\rho)$. Como $v' \rightleftharpoons l_\sigma \in \mathrm{Suf}(v') \subseteq \mathrm{Suf}(uv')$, como já mostramos que $c_\rho \in \mathrm{Suf}(uv')$, temos que $c_\rho \in \mathrm{Suf}(v' \rightleftharpoons l_\sigma) \subseteq \mathrm{Suf}(v')$ devido à proposição 2.1. Suponha que $v' = c_\tau$. Como c_τ é o mais longo sufixo de w que é curto de alguma produção de Σ, como $c_\rho \in \mathrm{Suf}(uv') = \mathrm{Suf}(uc_\tau) = \mathrm{Suf}(w)$, temos que $|c_\rho| \leq |c_\tau|$ e que $c_\rho \in \mathrm{Suf}(c_\tau) = \mathrm{Suf}(v')$ devido à proposição 2.1. Nos dois casos temos que $c_\rho \in \mathrm{Suf}(v')$ e, portanto, que $l_\rho \in \mathrm{Suf}(v'\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\rho)^m) = \mathrm{Suf}(va)$. Usando a proposição 7.7, temos que $v \cdot a = v' = w'(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\rho)^m a^{-1})^{-1} {\rho_u}^{-1} = (w' \cdot a){\rho_u}^{-1} \in \mathrm{Dom}(\rho_u) = [c_\tau]_{\mathcal{R}}$. Tendo provado que $v \cdot x = (w' \cdot x){\rho_u}^{-1} \in [c_\tau]_{\mathcal{R}}$, quando $|x| = 1$, como o mesmo é trivial quando $|x| = 0$, por uma indução primária sobre $|x|$, segue a validade para qualquer $x \in \mathcal{M}'$. ∎

Corolário 7.18 *O tamanho de uma $\mathcal{R}$-classe de $\mathcal{S}'$ é determinado exclusivamente pelo mais longo sufixo de sua $\mathcal{R}$-entrada que é um curto de uma produção de Σ (se este sufixo não existir a $\mathcal{R}$-classe é trivial).*

No teorema seguinte mostramos que as únicas $\mathcal{D}$-classes regulares são aquelas em que há uma $\mathcal{D}$-entrada que é curto de uma produção de Σ; mostramos quais são as $\mathcal{D}$-entradas de uma $\mathcal{D}$-classe e qual a cardinalidade de suas $\mathcal{H}$-classes.

Teorema 7.19 *Uma $\mathcal{D}$-classe regular de $\mathcal{S}'$ tem por únicas $\mathcal{D}$-entradas o curto de uma produção de Σ e os das produções de Σ conjugadas à mesma, sendo que todo curto de alguma produção de Σ é $\mathcal{D}$-entrada de alguma $\mathcal{D}$-classe regular.*

Demonstração.

Seja $\tau \in \Sigma$. Então c_τ é uma $\mathcal{D}$-entrada devido ao corolário 7.15.

Seja $\tau \in \Sigma$. Vamos mostrar que $[c_\tau]_{\mathcal{D}}$ é regular. Usando a proposição 3.11, temos que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)$ é sufixo de c_τ. Usando o corolário 2.15, temos que $c_\tau \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^*)$. Seja $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $c_\tau \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^{km})$ e seja $x = \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^{km} c_\tau^{-1}$. Temos que $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^m \notin \mathrm{Pref}(x)$, pois, caso contrário, teríamos que $c_\tau \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^{-m} x c_\tau) = \mathrm{Suf}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^{(k-1)m})$, contradizendo com a minimalidade de k. Como $\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^m, x \in \mathrm{Pref}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^{km})$, usando a proposição 2.1, temos que $x \in \mathrm{Pref}(\mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^m) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\tau)$ e que $x \in \mathcal{M}'$ devido à proposição 7.5. Temos que $c_\tau \Rightarrow_\Sigma^k c_\tau \mathrm{b}_{\mathrm{dir}}(\tau)^{km} = c_\tau x c_\tau$ e $c_\tau x c_\tau \in [c_\tau]$ devido ao fato de que $\Rightarrow_\Sigma^k \subset \Rightarrow_\Sigma^* \subseteq \vdash_\Sigma^* = \sim_\Sigma = \sim_\pi$ devido à proposição 6.2 e ao

Teorema da Equivalência. Assim temos que $c_\tau \cdot x \cdot c_\tau = \mathrm{rep}(c_\tau\, x\, c_\tau) = c_\tau$. Como c_τ é regular, usando o lema 7.2 (lema 7.2), temos que $[c_\tau]_{\mathcal{D}}$ é regular.

A este ponto já temos uma demonstração para a segunda parte da tese. Nos próximos parágrafos, demonstraremos a primeira parte.

Seja w uma $\mathcal{D}$-entrada de uma $\mathcal{D}$-classe regular. Vamos provar que w é curto de alguma produção de Σ. Suponha que não exista sufixo de w que seja curto de nenhuma produção de Σ. Neste caso, temos que $[w]_{\mathcal{R}}$ é trivial devido ao teorema 7.16 e w é idempotente pois toda $\mathcal{R}$-classe regular tem ao menos um idempotente, como nos garante o lema 7.2 (lema 7.2). Assim $w \cdot w = w$. Seja a a primeira letra de w. Temos que $a, a^{-1}w \in \mathcal{M}'$ devido à proposição 7.4. Assim temos que $w = w \cdot w = w \cdot a \cdot a^{-1}w \leq_{\mathcal{R}} w \cdot a \leq_{\mathcal{R}} w$ e, portanto, $w \cdot a \,\mathcal{R}\, w$. Como $[w]_{\mathcal{R}}$ é trivial, temos que $w \cdot a = w \neq wa$. Usando a proposição 7.7, temos que existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $l_\sigma \in \mathrm{Suf}(wa)$. Assim temos que $l_\sigma a^{-1} \in \mathrm{Suf}(waa^{-1}) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma) = \mathrm{Suf}(w) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma)$. Como w é uma $\mathcal{R}$-entrada, pelo ítem 1 do teorema 7.14, temos que $|c_\sigma| \leq |l_\sigma| - 1 = |l_\sigma a^{-1}| \leq |\max(\mathrm{Suf}(w) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma))| = |w \rightleftharpoons l_\sigma| \leq |c_\sigma|$ e, portanto, que $c_\sigma = w \rightleftharpoons l_\sigma$ já que c_σ e $w \rightleftharpoons l_\sigma$ são prefixos de l_σ de mesmo comprimento. Assim temos que $c_\sigma = w \rightleftharpoons l_\sigma \in \mathrm{Suf}(w)$, contradizendo a própria hipótese de absurdo. Seja $\tau \in \Sigma$ tal que c_τ é o mais comprido sufixo de w. Seja $u \in \mathrm{Pref}(w)$ tal que $w = uc_\tau$. Como w é regular, temos que existe $x \in \mathcal{M}'$ tal que $w = w \cdot x \cdot w$. Usando o lema 7.17, temos que $c_\tau \cdot (x \cdot w) = u^{-1}(w \cdot (x \cdot w)) = u^{-1}w = c_\tau$. Assim temos que $w = u \cdot c_\tau \leq_{\mathcal{L}} c_\tau = c_\tau \cdot x \cdot w \leq_{\mathcal{L}} w$, e , portanto, temos que $w \,\mathcal{L}\, c_\tau$. Como w é uma $\mathcal{L}$-entrada, e como $c_\tau \in \mathrm{Suf}(w)$, usando o dual da proposição 7.9, temos que $w = c_\tau$.

Sejam $\tau, \rho \in \Sigma$ tais que $c_\tau \,\mathcal{D}\, c_\rho$. Vamos mostrar que τ e ρ são produções conjugadas. Como $c_\tau \,\mathcal{D}\, c_\rho$, temos que existe $x \in \mathcal{M}'$ tal que $c_\tau \,\mathcal{R}\, x \,\mathcal{L}\, c_\rho$. Naturalmente c_τ é a $\mathcal{R}$-entrada de sua $\mathcal{R}$-classe e c_ρ é a $\mathcal{L}$-entrada de sua $\mathcal{L}$-classe, como já mostramos anteriormente. Usando o teorema 7.11 e seu dual, temos que existem $u, v \in \mathcal{M}'$ tais que $x = c_\tau v = uc_\rho$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathrm{base}(\rho) \geq \mathrm{base}(\tau)$, já que o outro caso é perfeitamente dual. Suponha o caso em que $v = 1$. Temos então que $c_\rho \in \mathrm{Fat}(c_\tau)$. Usando o ítem 3 da proposição 5.1 e o fato de que $\mathrm{base}(\rho) \geq \mathrm{base}(\tau)$, temos que $\rho \leq_{\mathrm{r}} \tau$. Como $\rho, \tau \in \Sigma = \mathrm{irred}(\Sigma')$, temos que $\rho = \tau$ e, certamente, são produções conjugadas. Suponhamos agora o caso em que $v \neq 1$. Assim $c_\tau \neq c_\tau v = x \,\mathcal{R}\, c_\tau$. Usando a proposição 7.13, temos que existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $|c_\tau v \rightleftharpoons l_\sigma| \geq |c_\sigma|$ e $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau)$ ou $\sigma = \tau$. Suponha, por absurdo, que $c_\rho \notin \mathrm{Suf}(c_\tau v \rightleftharpoons l_\sigma)$. Como $c_\tau v \rightleftharpoons l_\sigma, c_\rho \in \mathrm{Suf}(c_\tau v)$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\tau v \rightleftharpoons l_\sigma \in \text{Suf}(c_\rho)$. Assim temos que $c_\tau v \rightleftharpoons l_\sigma \in \text{Suf}(c_\rho) \cap \text{Pref}(l_\sigma)$ e que $|c_\rho \rightleftharpoons l_\sigma| = |\max(\text{Suf}(c_\rho) \cap \text{Pref}(l_\sigma))| \geq |c_\tau v \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$, contradizendo com a proposição 5.4. Assim sendo, temos que $c_\rho \in \text{Suf}(c_\tau v \rightleftharpoons l_\sigma)$. Usando a proposição 2.22 e a proposição 5.3, temos que $\text{base}(\rho) = \text{per}(c_\rho) \leq \text{per}(c_\tau v \rightleftharpoons l_\sigma) = \text{base}(\sigma) \leq \text{base}(\tau) \leq \text{base}(\rho)$. Desta maneira temos que $\text{base}(\rho) = \text{base}(\sigma) = \text{base}(\tau)$ e como ou acontece que $\text{base}(\sigma) < \text{base}(\tau)$ ou acontece que $\sigma = \tau$, temos que $\sigma = \tau$. Usando a proposição 3.11, temos que $\text{b}_{\text{dir}}(\rho) \in \text{Suf}(c_\rho) \subseteq \text{Suf}(c_\tau v \rightleftharpoons l_\sigma) \subseteq \text{Fat}(l_\sigma) = \text{Fat}(l_\tau)$. Como $\text{b}_{\text{dir}}(\tau)$ é período de l_τ e como $|\text{b}_{\text{dir}}(\rho)| = |\text{b}_{\text{dir}}(\tau)|$, segue então que $\text{b}_{\text{dir}}(\tau)$ e $\text{b}_{\text{dir}}(\rho)$ são conjugadas devido à proposição 2.12 e, por definição, temos que ρ e τ são conjugadas.

Sejam τ, ρ duas produções conjugadas. Vamos mostrar que $c_\tau \; \mathcal{D} \; c_\rho$. Primeiro vamos mostrar que $c_\rho \in \text{Fat}(l_\tau)$. Sejam $u, v \in A^*$ tais que $\text{b}_{\text{dir}}(\tau) = uv$ e $\text{b}_{\text{dir}}(\rho) = vu$ e seja $k = \lceil |c_\rho| / \text{base}(\rho) \rceil$. Como $\text{b}_{\text{dir}}(\rho)$ não somente é período mas também sufixo de c_ρ devido à proposição 3.11, usando o corolário 2.15, temos que $c_\rho \in \text{Suf}(\text{b}_{\text{dir}}(\rho)^k) = \text{Suf}((vu)^k)$ e, portanto, que $c_\rho v \in \text{Suf}(v(uv)^k) \subset \text{Suf}((uv)^*) = \text{Suf}(\text{b}_{\text{dir}}(\tau)^*)$. Como pelo corolário 2.15 temos que $l_\tau \in \text{Suf}(\text{b}_{\text{dir}}(\tau)^*)$, usando a proposição 2.1, temos dois casos possíveis: ou $c_\rho v \in \text{Suf}(l_\tau)$ e já temos que $c_\rho \in \text{Fat}(l_\tau)$, ou então temos que $l_\tau = c_\tau \text{b}_{\text{dir}}(\tau)^m \in \text{Suf}(c_\rho v)$. Admitamos este último caso agora. Como $|v| \leq |\text{b}_{\text{dir}}(\tau)| \leq |\text{b}_{\text{dir}}(\tau)^m|$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\tau \in \text{Fat}(c_\rho)$ e que $\tau \leq_{\text{r}} \rho$ devido à proposição 3.4. Como $\rho, \tau \in \Sigma = \text{irred}(\Sigma')$, temos que $\tau = \rho$ e, portanto $c_\rho = c_\tau \in \text{Fat}(l_\tau)$. Assim temos que $c_\rho \in \text{Fat}(l_\tau)$ nos dois casos possíveis. Sejam $x, y \in A^*$ tais que $l_\tau = x c_\rho y$. Usando a proposição 7.5, temos que $x, c_\rho, y \in \mathcal{M}'$. Como $c_\tau \sim_\pi l_\tau$ devido ao Teorema da Equivalência, temos que $x \cdot c_\rho \cdot y = \text{rep}(x\, c_\rho\, y) = \text{rep}(l_\tau) = c_\tau$ e, portanto, temos que $c_\tau \leq_{\mathcal{J}} c_\rho$. Analogamente temos que $c_\rho \leq_{\mathcal{J}} c_\tau$ e, usando a proposição 7.3, temos que $c_\rho \; \mathcal{D} \; c_\tau$.

Neste ponto, completamos a demonstração. ∎

O lema que se segue leva a dois corolários que descrevem as $\mathcal{D}$-classes irregulares, bem como mostra que suas $\mathcal{H}$-classes são triviais.

Lema 7.20 *Seja w uma $\mathcal{D}$-entrada de uma $\mathcal{D}$-classe irregular de S'. Seja $w' \in [w]_{\mathcal{L}}$. Então w' é uma $\mathcal{R}$-entrada.*

Demonstração.

Como w é $\mathcal{D}$-entrada, por definição é também uma $\mathcal{L}$-entrada e, usando o dual do teorema 7.11, temos que existe $x \in A^*$ tal que $w' = xw$. Suponha, por absurdo, que xw não seja $\mathcal{R}$-entrada. Como por definição temos que w é também uma $\mathcal{R}$-entrada, usando o ítem 1 do teorema 7.14, temos que $ux \notin R$ mas que $w \in R$. Assim temos existe $\tau \in \Sigma$ tal que $|xw \rightleftharpoons l_\tau| > |c_\tau| \geq |w \rightleftharpoons l_\tau|$. Como $w \rightleftharpoons l_\tau$ é a palavra mais comprida de $\mathrm{Suf}(w) \cap \mathrm{Pref}(l_\tau)$ temos que $xw \rightleftharpoons l_\tau \notin \mathrm{Suf}(w) \cap \mathrm{Pref}(l_\tau)$. Como $xw \rightleftharpoons l_\tau \in \mathrm{Pref}(l_\tau)$, temos então que $xw \rightleftharpoons l_\tau \notin \mathrm{Suf}(w)$. Assim, como $w, xw \rightleftharpoons l_\tau \in \mathrm{Suf}(xw)$, temos que $w \in \mathrm{Suf}(xw \rightleftharpoons l_\tau) \subseteq \mathrm{Fat}(l_\tau)$. Observe que $c_\tau = \mathrm{rep}(l_\tau)$ devido à proposição 7.5 e ao Teorema da Equivalência. Como $x \in \mathrm{Fat}(l_\tau)$, pela proposição 7.6, temos que $c_\tau = \mathrm{rep}(l_\tau) \leq_{\mathcal{J}} w$. Observemos agora que $c_\tau, xw \rightleftharpoons l_\tau \in \mathrm{Pref}(l_\tau)$. Assim, como $|xw \rightleftharpoons l_\tau| > |c_\tau|$, usando a proposição 2.1, temos que $c_\tau \in \mathrm{Pref}(xw \rightleftharpoons l_\tau) \subseteq \mathrm{Fat}(xw)$. Usando novamente a proposição 7.6, temos que $xw \leq_{\mathcal{J}} c_\tau$. Assim $xw \leq_{\mathcal{J}} c_\tau \leq_{\mathcal{J}} w \;\mathcal{L}\; xw$ e $c_\tau \;\mathcal{D}\; w$ devido ao fato de que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$ e à proposição 7.3. Usando o teorema 7.19, temos que $[w]_{\mathcal{D}} = [c_\tau]_{\mathcal{D}}$ é regular, o que é contradição. Assim $xw = w'$ é $\mathcal{R}$-entrada. ∎

Corolário 7.21 *Uma $\mathcal{D}$-classe irregular de S' têm uma única $\mathcal{D}$-entrada, que por sua vez é fator de todos os elementos da $\mathcal{D}$-classe.*

Demonstração.

Seja w uma $\mathcal{D}$-entrada de uma $\mathcal{D}$-classe irregular e seja w' um elemento desta $\mathcal{D}$-classe. Como $w' \;\mathcal{D}\; w$, temos que existe $z \in [w]_{\mathcal{L}} \cap [w']_{\mathcal{R}}$. Usando o lema 7.20, temos que z é uma $\mathcal{R}$-entrada. Como w é $\mathcal{D}$-entrada, por definição é também uma $\mathcal{L}$-entrada e, usando o dual do teorema 7.11, temos que existe $x \in A^*$ tal que $z = xw$. Como $w' \;\mathcal{R}\; z$, usando o teorema 7.11, temos que existe $y \in \mathcal{M}'$ tal que $w' = zy = xwy$ e temos que $w \in \mathrm{Fat}(w')$. Assim, dada w'' uma segunda $\mathcal{D}$-entrada de $[w]_{\mathcal{D}}$, teremos que $\mathrm{Fat}(w) \subseteq \mathrm{Fat}(w'') \subseteq \mathrm{Fat}(w)$ e $w'' = w$. ∎

Corolário 7.22 *As $\mathcal{H}$-classes irregulares de S' são triviais.*

Demonstração.

Seja w uma $\mathcal{D}$-entrada de uma $\mathcal{D}$-classe irregular qualquer. Como todas as $\mathcal{H}$-classes de uma mesma $\mathcal{D}$-classes têm a mesma cardinalidade devido a uma aplicação do Lema de Green, é suficiente mostrarmos que a $\mathcal{H}$-classe de w é trivial. Tome $w' \in [w]_{\mathcal{H}}$ qualquer. Como $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$, temos que $w' \mathrel{\mathcal{L}} w$ e que $w' \mathrel{\mathcal{R}} w$. Usando o lema 7.20, temos que w' é uma $\mathcal{R}$-entrada de sua $\mathcal{R}$-classe. Como $w' \mathrel{\mathcal{R}} w$ e ambos são $\mathcal{R}$-entradas, temos que $w' = w$ por decorrência do teorema 7.11. ∎

Teorema 7.23 *As $\mathcal{H}$-classes regulares de S' têm ordem m e os subgrupos maximais de S' são todos cíclicos de ordem m.*

Demonstração.

Seja D uma dada $\mathcal{D}$-classe regular qualquer. Usando o teorema 7.19, seja $\tau \in \Sigma$ tal que c_τ é uma $\mathcal{D}$-entrada de D. Seja $H = \{c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1\}$.

Vamos mostrar que $H \subset [c_\tau]_{\mathcal{H}}$. Seja $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Observe que $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k$ é um prefixo próprio de $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m = l_\tau$. Usando a proposição 7.5, temos que $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k \in \mathcal{M}'$. Como $c_\tau = \mathrm{rep}(l_\tau)$ devido ao Teorema da Equivalência, como $\mathrm{Pref}(c_\tau) \subseteq \mathrm{Pref}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k) \subseteq \mathrm{Pref}(l_\tau)$, temos que $c_\tau = \mathrm{rep}(l_\tau) \leq_{\mathcal{R}} c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k \leq_{\mathcal{R}} c_\tau$ devido à proposição 7.6. Assim $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k \mathrel{\mathcal{R}} c_\tau$. Observe também que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)^{m-k}$ é período de l_τ devido ao teorema 2.21 e que $\mathrm{b_{dir}}(\tau)^{m-k} \in \mathrm{Suf}(\mathrm{b_{dir}}(\tau)^m) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\tau)$. Usando a proposição 2.14, temos que $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k = l_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{-(m-k)} \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$. Como $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k, c_\tau \in \mathrm{Suf}(l_\tau)$, usando a proposição 2.1, decorre que $\mathrm{Suf}(c_\tau) \subseteq \mathrm{Suf}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k) \subseteq \mathrm{Suf}(l_\tau)$. Usando a proposição 7.6, temos que $c_\tau = \mathrm{rep}(l_\tau) \leq_{\mathcal{L}} c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k \leq_{\mathcal{L}} c_\tau$ devido à proposição 7.6. Assim $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k \mathrel{\mathcal{L}} c_\tau$. Isto mostra que $H \subseteq [c_\tau]_{\mathcal{R}} \cap [c_\tau]_{\mathcal{L}} = [c_\tau]_{\mathcal{H}}$.

Vamos mostrar que $[c_\tau]_{\mathcal{H}} \subseteq H$. Naturalmente $c_\tau \in [c_\tau]_{\mathcal{H}}$ e $c_\tau \in H$. Se não existir outro elemento em $[c_\tau]_{\mathcal{H}}$ a demonstração já estará concluída. Tomemos então $w \in [c_\tau]_{\mathcal{H}} = [c_\tau]_{\mathcal{R}} \cap [c_\tau]_{\mathcal{L}}$ um elemento diferente de c_τ. Como c_τ é uma $\mathcal{R}$-entrada e uma $\mathcal{L}$-entrada, usando o teorema 7.11 e seu dual, temos que existem $x, y \in A^+$ tais que $w = xc_\tau = c_\tau y$. Usando a proposição 7.13, temos que existem $\sigma, \tau' \in \Sigma$ tais que $|w \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma|$, que $c_{\tau'}$ é o mais longo sufixo de c_τ que é curto de alguma produção de Σ e que $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau')$ ou que $\sigma = \tau'$. Assim, $c_{\tau'} = c_\tau$ e $\mathrm{base}(\tau') = \mathrm{per}(c_{\tau'}) = \mathrm{per}(c_\tau) = \mathrm{base}(\tau)$. Temos também que $\mathrm{b_{dir}}(\tau'), \mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(c_\tau) = \mathrm{Suf}(c_{\tau'})$ devido à proposição 3.11 e que $\mathrm{b_{dir}}(\tau') = \mathrm{b_{dir}}(\tau)$ pois são sufixos de c_τ de mesmo comprimento. Logo, temos que $c_{\tau'} = c_\tau$, que $l_{\tau'} = c_{\tau'} \mathrm{b_{dir}}(\tau')^m = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m = l_\tau$ e, portanto, que $\tau' = \tau$. Também temos que $|w \rightleftharpoons l_\sigma| =$

$|xc_\tau \rightleftharpoons l_\sigma| > |c_\sigma| \geq |c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma|$ devido à proposição 5.4. Como $c_\tau \rightleftharpoons l_\sigma$ é a palavra mais longa em $\mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma)$, temos que $w \rightleftharpoons l_\sigma \notin \mathrm{Suf}(c_\tau) \cap \mathrm{Pref}(l_\sigma)$. Como $w \rightleftharpoons l_\sigma \in \mathrm{Pref}(l_\sigma)$, então $w \rightleftharpoons l_\sigma \notin \mathrm{Suf}(c_\tau)$. Como $w \rightleftharpoons l_\sigma, c_\tau \in \mathrm{Suf}(w)$, temos então que $c_\tau \in \mathrm{Suf}(w \rightleftharpoons l_\sigma) \subseteq \mathrm{Fat}(l_\sigma)$. Assim temos que $\mathrm{base}(\tau') = \mathrm{base}(\tau) \leq \mathrm{base}(\sigma)$ devido ao ítem 4 da proposição 5.1. Como já vimos que ou $\mathrm{base}(\sigma) < \mathrm{base}(\tau')$ ou então que $\sigma = \tau'$, temos que $\sigma = \tau' = \tau$ e, portanto, como conseqüência ainda da proposição 7.13, temos que $\mathrm{Pref}(c_\tau) \subset \mathrm{Pref}(w) \subset \mathrm{Pref}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m) = \mathrm{Pref}(l_\tau)$. Assim $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é período de w devido à proposição 2.22. Como $w = c_\tau y$ e c_τ é sufixo de w, usando a proposição 2.14, temos que y também é período de w. Como $|w| = |c_\tau| + |y| \geq \mathrm{per}(c_\tau) + |y| = |\mathrm{b_{dir}}(\tau)| + |y|$, como $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$ é primitiva devido à proposição 3.27, usando o teorema 2.21, temos que y é uma potência de algum conjugado de $\mathrm{b_{dir}}(\tau)$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $|y| = k|\mathrm{b_{dir}}(\tau)|$. Como $\mathrm{Pref}(w) = \mathrm{Pref}(c_\tau y) \subset \mathrm{Pref}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m)$ e como $w \neq c_\tau$, temos que $y \in \mathrm{Pref}(\mathrm{b_{dir}}(\tau)^m)$, que $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ e que $y = \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k$. Assim temos que $w = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k \in H$ e, portanto, que $[c_\tau]_{\mathcal{H}} \subseteq H$.

Neste ponto, temos que $[c_\tau]_{\mathcal{H}} = H$ e que toda $\mathcal{H}$-classe de D tem tamanho $|H| = m$ devido a uma aplicação do Lema de Green.

Vamos mostrar que existe $c_\tau x$ um idempotente da $\mathcal{R}$-classe de c_τ tal que $c_\tau \cdot x \cdot c_\tau = c_\tau$. Como c_τ é regular, seja $x' \in \mathcal{M}'$ tal que $c_\tau \cdot x' \cdot c_\tau = c_\tau$. Assim $c_\tau = c_\tau \cdot x' \cdot c_\tau \leq_{\mathcal{R}} c_\tau \cdot x' \leq_{\mathcal{R}} c_\tau$ e $c_\tau \cdot x' \,\mathcal{L}\, c_\tau$. Usando o teorema 7.11, temos que existe $x \in A^*$ tal que $c_\tau \cdot x' = c_\tau x$. Usando a proposição 7.4, temos que $x \in \mathcal{M}'$. Assim temos que $c_\tau \cdot x \cdot c_\tau = c_\tau x \cdot c_\tau = (c_\tau \cdot x') \cdot c_\tau = c_\tau$ e que $c_\tau x \cdot c_\tau x = c_\tau \cdot x \cdot c_\tau \cdot x = c_\tau \cdot x = c_\tau x$ e $c_\tau x$ é um idempotente da $\mathcal{R}$-classe de c_τ.

Vamos mostrar que $[c_\tau x]_{\mathcal{H}}$ é um subgrupo maximal cíclico de ordem m. Que $[c_\tau x]_{\mathcal{H}}$ seja um subgrupo maximal isto é bem conhecido na teoria de semigrupos como já vimos pois $[c_\tau x]_{\mathcal{H}}$ tem um idempotente. Já sabemos que tem ordem m pois já mostramos que toda $\mathcal{H}$-classe de D tem ordem m. Usando o Lema de Green, temos que a função definida por $u\rho_x = u \cdot x$ induz uma bijeção entre $[c_\tau]_{\mathcal{H}} = H$ e $[c_\tau x]_{\mathcal{H}}$. Mostraremos, a partir de agora, que $y = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)\rho_x$ é um gerador do subgrupo em questão. Seja $y' \in [c_\tau x]_{\mathcal{H}}$ e seja $x' = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k$, para algum $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ tal que $y' = x'\rho_x$. Devido à proposição 3.11 e sua dual, temos que $\mathrm{b_{dir}}(\tau) \in \mathrm{Suf}(c_\tau)$ e que $\mathrm{b_{esq}}(\tau) \in \mathrm{Pref}(c_\tau)$. Assim temos que $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{-1} \mathrm{b_{dir}}(\tau)^1\, 1 = 1\, \mathrm{b_{esq}}(\tau)^1 \mathrm{b_{esq}}(\tau)^{-1} c_\tau$ e, usando a proposição 2.25, temos também que $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{-1} \mathrm{b_{dir}}(\tau)^2\, 1 = 1\, \mathrm{b_{esq}}(\tau)^2 \mathrm{b_{esq}}(\tau)^{-1} c_\tau$. Simplificando, temos que $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau) = \mathrm{b_{esq}}(\tau)c_\tau$. Seja $y'' = y \cdot y' = (c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau) \cdot x) \cdot (c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k \cdot x) = \mathrm{rep}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)x\, c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k x)$. Como $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)x\, c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k x = \mathrm{b_{esq}}(\tau)\, c_\tau x c_\tau\, \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k x \sim_\pi \mathrm{b_{esq}}(\tau)\mathrm{rep}(c_\tau x c_\tau)\mathrm{b_{dir}}(\tau)^k x$ que por sua vez é igual a $\mathrm{b_{esq}}(\tau)(c_\tau \cdot x \cdot c_\tau)\mathrm{b_{dir}}(\tau)^k x = \mathrm{b_{esq}}(\tau)\, c_\tau\, \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k x = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)\mathrm{b_{dir}}(\tau)^k x = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{k+1} x$, então $y'' = \mathrm{rep}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)x\, c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^k x) = \mathrm{rep}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{k+1} x)$. Quando $k+1 < m$, temos que $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{k+1} \in \mathcal{M}'$ e, portanto, que $y'' = \mathrm{rep}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{k+1} x) = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{k+1} \cdot x = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{k+1} \rho_x$. Quando $k+1 = m$, temos que $y'' = \mathrm{rep}(c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{k+1} x) = \mathrm{rep}(c_\tau x) = c_\tau \cdot x$ pois temos que $c_\tau \sim_\pi l_\tau = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^m$ devido ao Teorema da Equivalência. Isto mostra que $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^i \rho_x \cdot y = c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{i+1} \rho_x$ para $i \in \{0, 1, \ldots m-2\}$ e que $c_\tau \mathrm{b_{dir}}(\tau)^{m-1} \rho_x \cdot y = c_\tau \cdot x = c_\tau \rho_x$ devido ao fato de que $c_\tau = \mathrm{rep}(l_\tau)$. Portanto $[c_\tau x]_{\mathcal{H}} = H\rho_x$ é cíclico. ∎

7.6 A Conjectura de Brzozowski e a Finitude $\mathcal{J}$-acima.

O lema e o corolário que se seguem nos dão informações de finitude sobre o semigrupo de Burnside.

Lema 7.24 *As $\mathcal{R}$-classes são finitas e* $\mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w)$ *é finito para* $w \in \mathcal{M}'$.

Demonstração.

Vamos mostrar que para qualquer palavra u existem finitas expansões ϵ sob Σ tais que $c_\epsilon = u$. Tome uma expansão ϵ tal que $c_\epsilon = u$. Seja $\sigma = \exp(\epsilon)$. Então $c_\sigma \in \mathrm{Fat}(u)$ e, como σ é estável devido ao Teorema da Estabilidade, temos que $l_\sigma = c_\sigma \mathrm{b_{dir}}(\sigma)^m$ e como $\mathrm{b_{dir}}(\sigma) = \mathrm{suf}(c_\sigma, \mathrm{per}(c_\sigma))$ devido à proposição 3.11, temos que l_σ é unicamente determinado por c_σ. Como $\mathrm{Fat}(u)$ é finito, então existem finitas expansões possíveis a partir de u. Observe que podemos obter melhores limitações sobre estas expansões usando a proposição 6.6, mas também usando o comprimento mínimo do curto de cada produção obtido no lema 5.10.

Vamos mostrar que as $\mathcal{R}$-classes são finitas. Usando o teorema 7.11, seja $u \in \mathrm{Pref}(w)$ a $\mathcal{R}$-entrada da sua $\mathcal{R}$-classe. Seja v um elemento qualquer da mesma $\mathcal{R}$-classe. Usando os ítens 2 e 3 lema 7.10, temos que existe $y \in \mathcal{M}'$ de menor comprimento tal que $vy \sim_\pi u$, existe uma única seqüência de expansões s tal que $s : u \Rightarrow vy$ e suas biexpansões são todas empilhadas. Vamos mostrar que existem finitos elementos v possíveis. Faremos isto mostrando que existem um número finito de expansões s possíveis. Uma tal seqüência s é limitada em seu comprimento, pois, devido à proposição 6.9, temos que sua bases são estritamente decrescentes. Assim temos que $|s| \leq |u|$. Também neste caso podemos obter limitações melhores (da ordem do logarítmo de $|u|$) usando o Teorema de Fine & Wilf e a proposição 6.12. Como para cada palavra u existem finitas expansões possíveis e as possíveis seqüências s são limitadas em seus comprimentos, as expansões s possíveis a partir de u são em número finito e também são finitos os possíveis prefixos dos longos de suas expansões finais. Nos casos em que $n \geq 5$, podemos limitar os possíveis expansores das possíveis seqüências s usando o lema 5.10 e o lema 6.12.

Vamos mostrar que $\mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w)$ é finito. Faremos uma indução em $|w|$. Se $|w| = 0$, então $w = 1$ e $\mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w) = \{1\}$, não havendo o que demonstrar. Admita que $|w| > 0$ e que $\mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(x)$ seja finito sempre que $|x| < |w|$. Se w não for uma $\mathcal{R}$-entrada, então seja x a $\mathcal{R}$-entrada de $[w]_{\mathcal{R}}$. Usando o teorema 7.11, temos que x é um prefixo próprio de w, que $|x| < |w|$ e, portanto, que $\mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(x)$ é finito por hipótese de indução. Também é imediato verificar que $\mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w) = \mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(x)$. A partir de agora, suponhamos então que w seja uma $\mathcal{R}$-entrada. Seja $v \in \mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w)$. Então $w \leq_{\mathcal{R}} v$. Se $v \mathrel{\mathcal{R}} w$, há certamente finitas possíveis escolhas de v pois, como já demonstramos, as $\mathcal{R}$-classes são finitas. Admita que $w <_{\mathrm{r}} v$. Seja $y \in \mathcal{M}'$ de mínimo comprimento tal que $v \cdot y \mathrel{\mathcal{R}} w$. Como $v \not\mathrel{\mathcal{R}} w$, temos que $|y| > 0$. Seja $a \in A$ a última letra de y e seja $y' = ya^{-1}$. Como $y' \in \mathcal{M}'$ devido à proposição 7.4 podemos definir $u = v \cdot y'$. Então $u = v \cdot y' \not\mathrel{\mathcal{R}} w$ devido à escolha de y e ao fato de que $|y'| < |y|$, e $u \cdot a = v \cdot y' \cdot a = v \cdot y \mathrel{\mathcal{R}} w$. Assim, $u \cdot a$ é uma $\mathcal{R}$-entrada de $[w]_{\mathcal{R}}$ e, pelo teorema 7.11, temos que $u \cdot a = w$. Como usando a proposição 7.8 temos que $w = ua$ e que $|u| = |w| - 1$, como $u = v \cdot y'$ e portanto $v \in \mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(u)$, temos então que existem finitas possibilidades de escolha para v pois $\mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(u)$ é finito por hipótese de indução. ∎

Corolário 7.25 *As $\mathcal{J}$-classes são finitas e* $\mathrm{Up}_{\mathcal{J}}(w)$ *é finito para* $w \in \mathcal{M}'$.

Demonstração.

Seja $w' \in \mathrm{Up}_{\mathcal{J}}(w)$. Sejam $x, y \in \mathcal{M}'$ tais que $w = x \cdot w' \cdot y$. Então temos que $w' \cdot y \leq_{\mathcal{L}} w$ e, portanto, $w' \cdot y \in \mathrm{Up}_{\mathcal{L}}(w)$. Como $\mathrm{Up}_{\mathcal{L}}(w)$ é finito devido ao dual do lema 7.24, temos que existem finitas possibilidades de escolha para os possíveis valores de $w' \cdot y$. Como $w' \cdot y \leq_{\mathcal{R}} w'$, temos que

$w' \in \mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w' \cdot y)$. Como $\mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w' \cdot y)$ é finito devido ao lema 7.24, temos que existem finitas possibilidades de escolha de w' para cada uma das finitas e possíveis escolhas de $w' \cdot y$ já feitas. Assim existem finitas escolhas de w' e $\mathrm{Up}_{\mathcal{J}}(w)$ é finito. ∎

Teorema 7.26 *A conjectura de Brzozowski enunciada na introdução é verdadeira para os casos em que $n \geq 4$ e $m \geq 1$.*

Demonstração.

Seja $w' \in A^*$ e seja $w = \mathrm{rep}(w')$. Basta observar que o autômato determinístico definido a seguir reconhece a classe de congruência de w'. Tome como conjunto de estados os elementos de $\mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w)$ acrescido de um estado morto 0. Tome por estado inicial a palavra vazia e por estado final a palavra w. Tome como função de transição a seguinte função: para cada letra $a \in A$, a função de transição associada a esta letra leva o estado $v \in \mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w)$ ao estado: $v \cdot a$, se $v \cdot a \in \mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w)$ ou; 0, caso contrário. Este autômato é finito devido ao lema 7.24. Sejam $v \in A^*$ e $u \in \mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w)$. Por indução em $|v|$, é fácil mostrar que o estado a que se chega pelo passeio de rótulo v a partir de u é o estado: $u \cdot \mathrm{rep}(v)$, se $u \cdot \mathrm{rep}(v) \in \mathrm{Up}_{\mathcal{R}}(w)$ ou; 0 , caso contrário. Assim temos que o conjunto das palavras que levam 1 a w é $[w] = [w']$. ∎

Bibliografia

[1] J. Brzozowski. Open problems about regular languages. In R. V. Book, editor, *Formal Language Theory, Perspectives and Open Problems*, pages 23–47, New York, NY, 1980. Academic Press.

[2] J. Brzozowski, K. Culik, and A. Gabrielian. Classification of non-counting events. *J. Comp. Syst. Sci.*, 5:41–53, 1971.

[3] A. de Luca and S. Varricchio. On non-counting regular classes. In M.S.Patersen, editor, *Automata, Languages and Programming*, pages 74–87, Berlin, 1990. Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science, 443.

[4] J. A. Green and D. Rees. On semigroups in wich $x^r = x$. *Proc. Cambridge. Philos. Soc.*, 48:35–40, 1952.

[5] G. Lallement. *Semigroups and Combinatorial Applications.* John Wiley & Sons, New York, NY, 1979.

[6] J. McCammond. The solution to the word problem for the relatively free semigroups satisfying $t^a = t^{a+b}$ with $a \geq 6$. *Int. J. of Algebra and Computation*, 1:1–32, 1991.

[7] J. Siekmann and P. Szabó. A noetherian and confluent rewrite system for idempotent semigroups. *Semigroup Forum*, 25:83–110, 1982.

[8] I. Simon. Notes on non-counting languages of order 2. manuscript, 1970.

[9] A. Thue. Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen. *Norske Vid. Selsk. Skr. I Mat. Nat. Kl.*, 1:1–67, 1912.

[10] G. Huet and D. C. Oppen. Equations and rewrite rules: a survey. In R. V. Book, editor, *Formal Language Theory, Perspectives and Open Problems*, pages 349–405, New York, NY, 1980. Academic Press.