Estruturas de Lie-Poisson e Aplicações em Sistemas Mecânicos Vinculados

Gláucio Terra [1]

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientadora: **Profa. Dra. Helena Maria Ávila de Castro**

24 de Fevereiro de 1999

[1] *Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq e CAPES*

Estruturas de Lie-Poisson e Aplicações em Sistemas Mecânicos Vinculados

Este exemplar corresponde à redação final devidamente corrigida e defendida por Gláucio Terra *e aprovada pela comissão julgadora.*

São Paulo, 22 de abril de 1999.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Helena Maria Ávila de Castro
- Prof. Dr. Waldir Muniz Oliva
- Prof. Dr. Cláudio Gorodski

Dedicada aos *meus pais, Ilze e Gentil.*

Arquimedes será lembrado, enquanto Ésquilo foi esquecido, porque os idiomas morrem, mas as idéias matemáticas permanecem. "Imortalidade" pode ser uma idéia tola, mas, provavelmente, um matemático tem a melhor chance que pode existir de obtê-la.

G. H. Hardy

Agradecimentos

Gostaria de mencionar os nomes de algumas das pessoas que estiveram ao meu lado nos últimos anos e que são especiais para mim, sem o apoio das quais seria impossível a conclusão deste trabalho.

À *Luciana*, pelo amor e carinho, por sua constante e inestimável presença em todos os momentos, e pela paciência nos fins-de-semana tomados em função dos estudos.

A toda a minha família, em especial aos meus pais, *Ilze* e *Gentil*, e à minha irmã, *Andrea*, também pelo amor e carinho, por sua constante e incondicional presença em todos os momentos, e por tudo que significam, *pais*.

Aos amigos *Plínio*, *Ana Paula*, *Marcos* e *Luciana*, pelo apoio, pela companhia nos fins-de-semana, no futebol, no tênis e no xadrez, e pela amizade.

À *Alice, Édson, Leandro, Mário, Pedro, Salvador*, e todos os amigos e colegas de graduação, mestrado e doutorado, pelo companheirismo.

A todos professores com os quais tive o prazer de ter assistido aulas e através delas enriquecer o meu conhecimento em Matemática.

Ao *CNPq* e *CAPES* pelo apoio financeiro.

Finalmente, um agradecimento especial merece a *Profa. Helena*, pelo convívio, pela excelente orientação, pela paciência e dedicação.

Resumo:

Estruturas de Poisson têm-se tornado, recentemente, importantes em face da teoria de sistemas completamente integráveis e da formulação hamiltoniana da teoria de campos.

Neste trabalho, são estudados alguns fatos gerais da teoria de variedades de Poisson e grupos de Lie-Poisson. Também investigamos a existência de estruturas de Poisson satisfazendo certas propriedades geométricas no espaço de fase de momentos de sistemas mecânicos com vínculos. Precisamente, fixado o vínculo, provamos que a existência de uma tal estrutura de Poisson satisfazendo a condição de que todo sistema conservativo com este vínculo seja hamiltoniano (em relação à estrutura de Poisson) é equivalente à integrabilidade do vínculo. Além disso, se for este o caso (i.e., se o vínculo for integrável), as folhas simpléticas desta estrutura de Poisson são canonicamente isomorfas aos fibrados cotangentes (com a sua estrutura simplética canônica) das folhas integrais do vínculo.

Abstract:

Poisson structures have recently become important in connection with completely integrable systems and for the hamiltonian formulation of field theories.

In this work, some general facts on the theory of Poisson manifolds and Lie-Poisson groups are studied. We also investigate the existence of Poisson structures satisfying certain geometrical properties on the momentum phase space of mechanical systems with constraints. Precisely, for a fixed constraint, we prove that the existence of such a Poisson structure satisfying the condition that any conservative mechanical system with this constraint be itself hamiltonian (with respect to the Poisson structure) is equivalent to the integrability of the constraint. Moreover, if this is the case (i.e., the constraint is integrable), the sympletic leaves of this Poisson structure are naturally isomorphic to the cotangent bundles (with their natural symplectic structure) of the integral manifolds of the constraint.

Sumário

Introdução **3**

1 Variedades de Poisson **9**
1.1 Definições e Notação 9
1.1.1 Álgebra Tensorial 9
1.1.2 Variedades Diferenciáveis e Fibrados Vetoriais 11
1.1.3 Grupos e Álgebras de Lie 16
1.2 Colchete de Schouten 21
1.3 Variedades de Poisson 24
1.4 A π-cohomologia de uma variedade de Poisson 35
1.5 Teorema da Folheação Simplética 39
1.6 Estrutura de Poisson Produto 42
1.7 Splitting Theorem e Estrutura de Poisson Transversa 46
1.8 Estruturas de Poisson Lineares 68

2 Grupos de Poisson-Drinfeld **85**
2.1 Introdução 85
2.2 Construção de Grupos de Poisson-Drinfeld 86
2.3 Álgebras de Lie-Drinfeld 90

3 Estruturas de Poisson e Sistemas Mecânicos Vinculados **99**
3.1 Introdução 101
3.2 Sistemas Mecânicos com Vínculos 103
3.3 Estruturas de Poisson em Sistemas Mecânicos com Vínculo 113
3.4 Métrica de Jacobi 125

A Teorema da Órbita **133**

B Teorema de Poincaré-Volterra **149**

Bibliografia **153**

Índice **155**

Introdução

O colchete clássico de Poisson, definido para funções $\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$, é dado por:

$$\{f,g\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \tag{1}$$

No início do século XIX, Poisson observou que o fato de $\{f,g\}$ e $\{f,h\}$ se anularem identicamente implica que $\{f,\{g,h\}\}$ se anula identicamente; quase trinta anos depois, Jacobi descobriu a identidade:

$$\{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\} \tag{2}$$

que "explica" a observação de Poisson.

Em seu estudo sobre leis de composição gerais satisfazendo a identidade de Jacobi, Lie definiu em coordenadas locais o que é hoje chamado de *estrutura de Poisson*. No $\mathbb{R}^r$, uma tal estrutura é dada por funções $w_{ij} : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes identidades:

$$w_{ij} + w_{ji} = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{l=1}^{r} \left(w_{lj} \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_l} + w_{li} \frac{\partial w_{kj}}{\partial x_l} + w_{lk} \frac{\partial w_{ji}}{\partial x_l} \right) = 0 \tag{4}$$

as quais implicam que a operação bilinear:

$$\{F,G\} = \sum_{i,j=1}^{r} w_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} \tag{5}$$

é anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi; ou seja, a álgebra das funções $C^\infty(\mathbb{R}^r)$ se torna uma *álgebra de Lie*. Uma estrutura abstrata de álgebra de Lie $\{\cdot,\cdot\}$ em $C^\infty(\mathbb{R}^r)$ pode ser obtida desta forma se, e somente se, satisfizer a identidade de Leibniz:

$$\{F,GH\} = \{F,G\}\,H + G\,\{F,H\} \tag{6}$$

e isto nos motiva a definir uma *estrutura de Poisson numa variedade diferenciável* M como sendo uma estrutura de álgebra de Lie $\{\cdot,\cdot\}$ em $C^\infty(M)$ que satisfaz a identidade de Leibniz. As funções w_{ij} podem ser interpretadas como as componentes de um 2-campo tensorial

contravariante anti-simétrico, e a identidade de Jacobi é equivalente a ser identicamente nulo um certo colchete deste campo tensorial com ele mesmo, colchete este que, como veremos, é, num certo sentido, uma extensão do colchete de Lie para campos de vetores e se chama *colchete de Schouten-Nijenhuis.*

Estruturas de Poisson têm-se tornado, recentemente, importantes em face da teoria de sistemas completamente integráveis e da formulação hamiltoniana da teoria de campos.

Variedades simpléticas são o espaço natural para a definição de sistemas hamiltonianos. Tratam-se de variedades diferenciáveis munidas de uma estrutura de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ que é localmente isomorfa à estrutura de Poisson canônica do $\mathbb{R}^{2n}$; ou seja, tal que, em torno de cada ponto da variedade, existe um sistema de coordenadas locais $(\mathcal{U}, \varphi = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n))$ no qual $\{\cdot,\cdot\}$ é dado por (1). As coordenadas $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ são, então, chamadas de *coordenadas canônicas.* Existe uma extensão desta definição para variedades de dimensão infinita, mas neste texto só será abordado o caso de dimensão finita. Um critério para que uma estrutura de Poisson seja simplética é que o tensor w tenha posto igual à dimensão da variedade em todos os pontos da mesma.

Um *sistema hamiltoniano* numa variedade simplética é uma terna $(\mathrm{M}, w, \mathrm{H})$, onde M é uma variedade diferenciável, w é uma estrutura de Poisson simplética em M e $\mathrm{H} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ é a *hamiltoniana.* Uma *trajetória* do sistema hamiltoniano $(\mathrm{M}, w, \mathrm{H})$ é uma curva $h : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ tal que, dado um sistema de coordenadas qualquer em M $(\mathcal{U}, \varphi = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n))$, tenhamos, para $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q_i \circ h) &= \{q_i, H\} \circ h \\ \frac{d}{dt}(p_i \circ h) &= \{p_i, H\} \circ h \end{aligned} \tag{7}$$

A motivação desta definição é que, no $\mathbb{R}^{2n}$ com a estrutura de Poisson canônica, acima descrita, se tomarmos a hamiltoniana H da forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{H} : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\longmapsto \tfrac{\|p\|^2}{2m} + \mathrm{V}(q) \end{aligned} \tag{8}$$

para alguma $\mathrm{V} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, então as equações (7) são equivalentes às *equações de Hamilton*:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{9}$$

para $1 \leqslant i \leqslant n$.

O exemplo mais simples de uma estrutura de Poisson *não-simplética* é o $\mathbb{R}^{2n+s}$ com coordenadas $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, c_1, \ldots, c_s)$ e com o colchete de Poisson ainda definido por (1). As funções *seqcls* têm colchete de Poisson com qualquer função identicamente nulo, e foram chamadas por Lie de *funções distintas.* Hoje, elas são chamadas de *funções de*

Casimir. Cada subvariedade de $\mathbb{R}^{2n+s}$ na qual todas as funções c_j forem constantes herda uma estrutura de Poisson, a qual é não-degenerada, de modo que temos uma folheação por subvariedades simpléticas no $\mathbb{R}^{2n+s}$. Na realidade, localmente, é esta a situação que ocorre em torno da "maioria" dos pontos de uma variedade de Poisson genérica: Lie demonstrou que, qualquer estrutura de Poisson no $\mathbb{R}^{2n+s}$ para a qual o posto de w for constante e igual a $2n$ admite s funções distintas independentes, e portanto é localmente isomorfa à estrutura de Poisson canônica do $\mathbb{R}^{2n+s}$ acima descrita. Além disso, o posto de qualquer estrutura de Poisson é constante (e par) no conjunto aberto onde ele atinge o seu valor máximo[1].

Um outro exemplo importante de estrutura de Poisson, também introduzido por Lie, aparece quando são dadas as constantes de estrutura de uma álgebra de Lie, ou seja, r^3 constantes c_{ijk} satisfazendo as identidades:

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0 \tag{10}$$

$$c_{ijk} + c_{jki} + c_{kij} = 0 \tag{11}$$

As funções:

$$\begin{aligned} w_{ij} : \mathbb{R}^r &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \textstyle\sum_{k=1}^{r} c_{ijk}\, x_k \end{aligned} \tag{12}$$

definem, então, uma estrutura de Poisson no $\mathbb{R}^r$. O posto de (w_{ij}) não é mais constante (por exemplo, é zero em $x = \mathbb{0}$), de modo que a teoria de Lie agora só pode ser aplicada nos "pontos regulares", nos quais o posto de w é máximo.

Atualmente, pensa-se no $\mathbb{R}^r$ como o dual $\mathfrak{g}^*$ de uma álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot\})$, cuja base $(X_1, \ldots, X_r)$ satisfaz:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk}\, X_k \tag{13}$$

Sendo G o grupo de Lie conexo e simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$, a estrutura simplética de w em $\mathfrak{g}^*$ é dada pelas órbitas da representação coadjunta Ad^* de G. Este resultado foi redescoberto na década de 60 (já havia sido descoberto por Lie, numa outra linguagem, naturalmente) por Kirillov, Kostant e Souriau. Na realidade, Kirillov descobriu que, em cada ponto de qualquer variedade de Poisson, passa uma subvariedade simplética cuja dimensão é igual ao posto da estrutura de Poisson naquele ponto.

Esta propriedade de ser folheada por variedades simpléticas de dimensões diferentes parece tornar variedades de Poisson espaços adequados para se estudar alguns fenômenos bastante comuns em Mecânica: se um sistema mecânico for modelado por uma variedade simplética, então, quando um parâmetro do sistema atinge um valor limite (normalmente 0 ou ∞), o sistema limite também admite uma formulação simplética, mas, possivelmente, com menos graus de liberdade. Como exemplos, podem-se citar:

[1] estes resultados foram redescobertos por Lichnerowicz [Lic] e Hermann

- o problema de três corpos restrito, em mecânica celeste (massa $\to 0$);
- o limite de vórtices discretos no movimento de fluidos imcompressíveis (concentração da vorticidade $\to \infty$);
- o limite clássico da mecânica quântica ($\hbar \to 0$).

Também há exemplos nos quais o número de graus de liberdade permanece o mesmo, mas a estrutura global da formulação simplética muda, como no caso do limite newtoniano da relatividade especial ($c \to \infty$); também espera-se poder estudar estes exemplos em termos de estruturas de Poisson.

Tem-se por objetivo, na presente dissertação, fazer um estudo da estrutura básica de variedades de Poisson e de *grupos de Lie-Poisson* ou *Poisson-Drinfeld*, e de situações em que estruturas de Lie-Poisson aparecem em sistemas mecânicos vinculados.

Por "sistemas mecânicos vinculados", está-se referindo a sistemas dinâmicos sobre uma variedade riemanniana, diferenciável, munida de uma distribuição diferenciável, de dimensão constante, que em geral não é integrável (i.e., um *vínculo*, não necessariamente *holônomo*).

Existem, basicamente, duas formas de se construir sistemas dinâmicos sobre estes espaços, ambas inspiradas na Mecânica Clássica. Na primeira, a chamada Mecânica de D'Alembert, as trajetórias compatíveis com a distribuição são determinadas pelo seguinte princípio: a diferença entre a aceleração de uma trajetória e a força externa conservativa é sempre ortogonal à distribuição. Do ponto de vista geométrico, esta construção é a generalização natural de fluxos geodésicos, e poderia ser descrita como a "mecânica dos caminhos mais retos". A outra alternativa, que não será abordada neste texto, é a chamada "mecânica vakonômica", onde as trajetórias compatíveis com os vínculos são determinadas por princípios variacionais, e poderia ser descrita como a "mecânica dos caminhos mais curtos".

Além de sua importância na Mecânica Clássica, os sistemas dinâmicos vinculados têm aplicações em diversas áreas. Problemas de controle ótimo têm muito em comum com os problemas variacionais relacionados a estes sistemas. Problemas em Termodinâmica e em Teoria Quântica também recaem nestes problemas variacionais.

Nos dois primeiros capítulos, serão estudadas generalidades sobre *variedades de Poisson* e *grupos de Lie-Poisson* ou *Poisson-Drinfeld*. As principais referências são os trabalhos de *A. Weinstein* [Wei] e *A. Lichnerowicz* [Lic] para o primeiro, e os de *Y. Kosmann – Schwarzbach* [KS] e *V. G. Drinfeld* [Dri] para o segundo capítulo.

No terceiro — e último — capítulo, para o qual as principais referências são os trabalhos de *H. M. A. Castro - W. M. Oliva* [CO] e de *G. Fusco - W. M. Oliva* [FO], será investigado o aparecimento de estruturas de Poisson no estudo de sistemas mecânicos vinculados, que serão descritas, sucintamente, a seguir, para finalizar este capítulo introdutório.

Sejam (M^n, g) variedade riemanniana conexa de classe C^∞(*espaço de configurações*), ∇ a *conexão de Levi-Civita* de M, (TM, M, Π) o fibrado tangente de M, (T^*M, M, Π^*) o

fibrado cotangente de M,

$$\begin{aligned} \mathrm{T} : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_q &\longmapsto \tfrac{1}{2}\langle v_q, v_q\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

uma aplicação C^∞ que será chamada de *energia cinética*,

$$\begin{aligned} \mu := \mathrm{g}^\flat : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathrm{T}^*\mathrm{M} \\ v_q &\longmapsto \langle v_q, \cdot\rangle \in \mathrm{T}_q^*\mathrm{M} \end{aligned} \tag{15}$$

a *transformação de Legendre* e $F : \mathrm{TM} \longrightarrow \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ uma aplicação C^∞ entre fibrados vetoriais, chamada *campo de forças*.

A equação de segunda ordem:

$$F = \mu(\nabla_{\dot{q}}\dot{q}) \tag{16}$$

é uma versão intrínseca da *segunda lei de Newton*.

Quando o campo de forças F "deriva de um potencial", ou seja, quando F é da forma:

$$\begin{aligned} F : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathrm{T}^*\mathrm{M} \\ (q, v) &\longmapsto -d\mathrm{V}(q) \in \mathrm{T}_q^*\mathrm{M} \end{aligned} \tag{17}$$

para alguma $\mathrm{V} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, então, como já seria intuitivo esperar, o sistema definido pela lei de Newton (16) é hamiltoniano, ou seja, suas trajetórias coincidem com as do sistema hamiltoniano $(\mathrm{T}^*\mathrm{M}, \omega, \mathrm{H})$, onde ω é a forma simplética canônica do fibrado cotangente de M, dada por $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ num sistema de coordenadas $(\mathrm{T}^*\mathcal{U}, \mathrm{T}^*\varphi = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n))$ induzido por uma carta $(\mathcal{U}, \varphi = (q^1, \ldots, q^n))$ qualquer de M, e a hamiltoniana H é dada por $\mathrm{H} := \mathrm{T} \circ \mu^{-1} + \mathrm{V} \circ \Pi_{\mathrm{M}}^* : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Considere-se, agora, um *vínculo* no espaço de configurações, ou seja, uma distribuição diferenciável m-dimensional sobre M, $\Sigma : q \in \mathrm{M} \longmapsto \Sigma_q \subset \mathrm{T}_q\mathrm{M}$. Uma curva $q : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ no espaço de configurações M diz-se *compatível com o vínculo* Σ se, $(\forall t \in I)\, \dot{q}(t) \in \Sigma_{q(t)}$.

Uma distribuição $\Sigma : q \in \mathrm{M} \longmapsto \Sigma_q \subset \mathrm{T}_q\mathrm{M}$, como acima, define um subfibrado vetorial $\Sigma\mathrm{M}$ de TM. Também está bem definida uma distribuição $\Sigma^\perp : q \in \mathrm{M} \longmapsto \Sigma_q^\perp := (\Sigma_q)^\perp \in \mathrm{T}_q\mathrm{M}$ e um subfibrado correspondente $\Sigma^\perp\mathrm{M}$. Vou denotar por P e $P^\perp$ as projeções ortogonais $P : \mathrm{TM} \longrightarrow \Sigma\mathrm{M}$ e $P^\perp : \mathrm{TM} \longrightarrow \Sigma^\perp\mathrm{M}$.

Através da transformação de Legendre μ, pode-se definir objetos correspondentes a estes em $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$: $\Sigma^*\mathrm{M}$, $\Sigma^{\perp *}\mathrm{M}$, P^* e $P^{\perp *}$ ($P^* = \mu \circ P \circ \mu^{-1}$ e $P^{\perp *} = \mu \circ P^\perp \circ \mu^{-1}$).

Dado um campo de forças F, *Fusco* e *Oliva* provaram em [FO] que existe um único campo de forças $R : \mathrm{TM} \longrightarrow \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ "ortogonal ao vínculo" (ou seja, tal que $R(v_q) \in \Sigma^{\perp *}\mathrm{M}$, $\forall v_q \in \mathrm{TM}$) e satisfazendo $R = R \circ P$, chamado *campo de forças reativo*, tal que as curvas integrais da lei de Newton generalizada:

$$F + R = \mu(\nabla_{\dot{q}}\dot{q}) \tag{18}$$

são compatíveis com o vínculo Σ.

Além disso — vide [FO], as trajetórias do sistema definido por (18) coincidem com as curvas integrais de base de um campo de vetores no fibrado tangente de M que define uma equação de segunda ordem em M, denominado *campo GMA*. Em ΣM, existe uma relação simples entre o campo GMA, E, e o campo GMA do sistema mecânico sem vínculo correspondente, X_F, a saber:

$$E|_{\Sigma M} = TP \circ X_F|_{\Sigma M} \tag{19}$$

Uma pergunta natural a se fazer é se existe, e sob que condições, uma estrutura de Poisson em Σ^*M tal que o sistema dinâmico definido por (18) seja hamiltoniano, quando o campo de forças F "deriva de um potencial", isto é, for da forma (17).

O principal resultado do terceiro capítulo, descoberto por *Castro* e *Oliva* em [CO], dá uma resposta a esta pergunta. Impondo a condição de que a projeção P^* seja uma *aplicação de Poisson* (ou seja, uma aplicação C^∞ entre variedades de Poisson que preserva o colchete), que é uma condição natural, em face de (19), a existência de uma tal estrutura de Poisson em Σ^*M é equivalente a ser *holônomo* o vínculo (i.e., Σ involutiva).

No caso de o vínculo ser holônomo, será demonstrado que as folhas simpléticas desta estrutura de Poisson são canonicamente isomorfas ao fibrados cotangentes das folhas integrais da distribuição Σ, munidos da estrutura de Poisson simplética usual.

Capítulo 1

Variedades de Poisson

Estruturas de Poisson têm um papel crucial na Mecânica Hamiltoniana, e recentemente seu estudo tem-se tornado importante em face da teoria de sistemas completamente integráveis e da teoria de campos.

Tem-se por objetivo, neste capítulo, o desenvolvimento da teoria básica de variedades e aplicações de Poisson.

A primeira seção é introdutória; nela fixarei notações e terminologia a serem usadas no restante do texto.

Na segunda seção, será definido o colchete de Schouten, que é a única extensão graduada do colchete de Lie entre campos de vetores de uma variedade diferenciável para a álgebra exterior contravariante desta variedade. Um *tensor de Poisson* numa variedade diferenciável é um 2-campo tensorial contravariante anti-simétrico que comuta consigo próprio segundo o colchete de Schouten; como veremos, isto é equivalente a definir, na variedade, um *colchete de Poisson*, ou seja, um colchete $\{\cdot,\cdot\}$ no conjunto das funções C^∞ da variedade que satisfaz as identidades de Jacobi e de Leibniz.

Por fim, nas seções seguintes serão estudados assuntos genéricos sobre a referida teoria.

1.1 Definições e Notação

Nesta primeira seção, fixarei algumas notações e terminologia básicas que serão usadas no decorrer do texto. Também apresentarei, para referência, alguns fatos básicos relativos ao *Cálculo em Variedades* e *Álgebra Tensorial*, que também serão usados no decorrer do texto. Para maiores detalhes, vide [War83], [Boo75], [Die74], [Yok92] e [dL65], entre outros.

1.1.1 Álgebra Tensorial

Todos os espaços vetoriais deste texto serão considerados $\mathbb{R}$-espaços vetoriais de dimensão finita, salvo menção explícita em contrário.

Dado um espaço vetorial V, a notação $\mathsf{W} < \mathsf{V}$ será usada para indicar que W é um subespaço vetorial de V.

Dados $r, s \in \mathbb{N}$ e um espaço vetorial V, denotarei por V^r_s ou $\mathrm{T}^r_s(\mathsf{V})$ a (r,s)-*ésima potência tensorial* de V:

$$\mathsf{V}^r_s := \begin{cases} \underbrace{\mathsf{V} \otimes \cdots \otimes \mathsf{V}}_{\text{r fatores}} \otimes \underbrace{\mathsf{V}^* \otimes \cdots \otimes \mathsf{V}^*}_{\text{s fatores}} & \text{se } r \neq 0 \text{ ou } s \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{se } r = s = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Vou escrever $\mathsf{V}^r := \mathsf{V}^r_0$ e $\mathsf{V}_s := \mathsf{V}^0_s$.
Denotarei por $\wedge^r(\mathsf{V})$ a *r-ésima potência exterior* de V:

$$\overset{r}{\wedge}(\mathsf{V}) := \begin{cases} \mathsf{V} \wedge \overset{r}{\cdots} \wedge \mathsf{V} := \mathrm{Alt}_r(\mathsf{V}^r) & \text{se } r > 0 \\ \mathbb{R} & \text{se } r = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

onde:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Alt}_r : \mathsf{V}^r \longrightarrow \mathsf{V}^r \\ &\mathrm{Alt}_r := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} P_\sigma \\ &\text{onde} \begin{cases} S_r \text{ é o conjunto das permutações do conjunto } \{1, \ldots, r\} \\ P_\sigma : \mathsf{V}^r \longrightarrow \mathsf{V}^r \qquad \text{para } v_i \in \mathsf{V} \text{ e } \sigma \in S_r \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \longmapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Usarei a seguinte definição para o *produto exterior*:

$$\left(\forall v \in \overset{r}{\wedge}(\mathsf{V}), \forall w \in \overset{s}{\wedge}(\mathsf{V})\right) v \wedge w := \frac{(r+s)!}{r!\, s!} \mathrm{Alt}\,(v \otimes w) \in \overset{r+s}{\wedge}(\mathsf{V}) \tag{1.4}$$

Também farei uso das seguintes identificações: $\forall r, s \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}^r_s(\mathsf{V})^* \equiv \mathrm{T}^r_s(\mathsf{V}^*) = \mathrm{T}^s_r(\mathsf{V})$ e $\wedge^r(\mathsf{V})^* \equiv \wedge^r(\mathsf{V}^*)$, através dos seguintes produtos internos:

$$\begin{aligned} &\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{T}^r_s(\mathsf{V}) \times \mathrm{T}^s_r(\mathsf{V}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\langle v_{s+1} \otimes \cdots \otimes v_{r+s} \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^s, v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \otimes f^{s+1} \otimes \cdots \otimes f^{r+s} \rangle := f^1(v_1) \cdots f^{r+s}(v_{r+s}) \\ &\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \wedge^r(\mathsf{V}^*) \times \wedge^r(\mathsf{V}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\langle f^1 \wedge \cdots \wedge f^r \mid v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \rangle := \det\left(f^i(v_j)\right) = \frac{1}{r!} \langle f^1 \wedge \cdots \wedge f^r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \rangle \end{aligned} \tag{1.5}$$

Denotarei por $\left(\wedge(\mathsf{V}), \wedge\right)$ a *álgebra exterior* ou *álgebra de Grassmann* de V, por $\left(\mathrm{T}(\mathsf{V}), \otimes\right)$ a *álgebra tensorial contravariante* de V, e por $\left(\mathrm{A}(\mathsf{V}), \otimes\right)$ a *álgebra tensorial* de V:

$$\begin{aligned} \wedge(\mathsf{V}) &:= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \overset{k}{\wedge}(\mathsf{V}) \\ \mathrm{T}(\mathsf{V}) &:= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{T}^k(\mathsf{V}) \\ \mathrm{A}(\mathsf{V}) &:= \bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}} \mathrm{T}^r_s(\mathsf{V}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

sendo as multiplicações "$\otimes$" e "$\wedge$" definidas de maneira óbvia, $\wedge^k(\mathsf{V}) = \mathrm{T}^k(\mathsf{V}) = \{\mathbb{O}\}$ se $k < 0$ e $\mathrm{T}^r_s(\mathsf{V}) := \{\mathbb{O}\}$ se $r < 0$ ou $s < 0$.

Através das identificações feitas acima, por meio de (1.5), também identificarei $\mathrm{T}(\mathsf{V})^* \equiv \mathrm{T}(\mathsf{V}^*)$, $\wedge(\mathsf{V})^* \equiv \wedge(\mathsf{V}^*)$ e $\mathrm{A}(\mathsf{V})^* \equiv \mathrm{A}(\mathsf{V}^*)$.

Sejam V e W espaços vetoriais, e $f : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{W} \in \mathrm{Hom}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$. Então existem e são únicas as seguintes extensões de f como homomorfismos entre álgebras:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(f) : \mathrm{T}(\mathsf{V}) &\longrightarrow \mathrm{T}(\mathsf{V}) \qquad \in \mathrm{End}\left(\mathrm{T}(\mathsf{V})\right) \\ \wedge(f) : \wedge(\mathsf{V}) &\longrightarrow \wedge(\mathsf{V}) \qquad \in \mathrm{End}\left(\wedge(\mathsf{V})\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

$\mathrm{T}(f)$ e $\wedge(f)$ são definidas por:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(f)|_{\mathbb{R}} = \wedge(f)|_{\mathbb{R}} &:= \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \\ \mathrm{T}(f)|_{\mathrm{T}^r(\mathsf{V})} := \mathrm{T}^r(f) &= f \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes f \\ \wedge(f)|_{\wedge^r(\mathsf{V})} := \overset{r}{\wedge}(f) &= f \wedge \overset{r}{\cdots} \wedge f \end{aligned} \tag{1.8}$$

$\forall r \in \mathbb{Z}^{++}$.

Eventualmente, também usarei a notação f_* no lugar de $\mathrm{T}(f)$ ou de $\wedge(f)$, e f^* no lugar de $\mathrm{T}(f^t)$ ou de $\wedge(f^t)$, onde $f^t : \mathsf{W}^* \longrightarrow \mathsf{V}^*$ é a transposta de f. Quando fizer uso desta notação, ficará evidenciado pelo contexto quando se trata de um ou de outro objeto. Esta "economia" de notação pode parecer confusa a princípio, mas simplificará sobremaneira a leitura.

Sejam $X \in \wedge(\mathsf{V})$ e

$$\begin{aligned} \epsilon^\lambda(X) : \wedge(\mathsf{V}) &\longrightarrow \wedge(\mathsf{V}) \\ Y &\longmapsto X \wedge Y \\ \epsilon^\rho(X) : \wedge(\mathsf{V}) &\longrightarrow \wedge(\mathsf{V}) \\ Y &\longmapsto Y \wedge X \\ i^\lambda(X) := \left(\epsilon^\lambda(X)\right)^t &: \wedge(\mathsf{V}^*) \longrightarrow \wedge(\mathsf{V}^*) \\ i^\rho(X) := \left(\epsilon^\rho(X)\right)^t &: \wedge(\mathsf{V}^*) \longrightarrow \wedge(\mathsf{V}^*) \end{aligned} \tag{1.9}$$

A aplicação $i^\lambda(X)$ é chamada *produto interior à esquerda por* X, e a aplicação $i^\rho(X)$ é o *produto interior à direita por* X. Daqui em diante, omitirei os índices "λ" e "ρ", e usarei a convenção adotada em [dL65]: o produto interior por X será *à esquerda se* X *for contravariante*, e será *à direita se* X *for covariante*, ou seja, se $X \in \wedge(\mathsf{V})$, $\mathrm{i}(X) := i^\lambda(X) : \wedge(\mathsf{V}^*) \longrightarrow \wedge(\mathsf{V}^*)$, e se $X \in \wedge(\mathsf{V}^*)$, $\mathrm{i}(X) := i^\rho : \wedge(\mathsf{V}) \longrightarrow \wedge(\mathsf{V})$.

1.1.2 Variedades Diferenciáveis e Fibrados Vetoriais

Neste texto, todas as variedades diferenciáveis serão paracompactas e de classe C^∞. Ou seja, por *variedade diferenciável*, entenda-se um par $(\mathrm{M}, \mathfrak{A})$, onde M é um espaço topológico

de Hausdorff, localmente euclidiano e de dimensão n, com base enumerável de abertos, e $\mathfrak{A}$uma estrutura diferenciável de classe C^∞ em M.

Denotarei por $\mathcal{F}(M)$ o anel das funções C^∞ $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Dado $p \in M$, usarei a notação $\mathfrak{A}_p(M) := \{(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathfrak{A}(M) : p \in \mathcal{U}\}$.

Dadas variedades diferenciáveis M, N e f uma aplicação C^∞ $f : M \longrightarrow N$, direi que:

(i) (M, f) é uma *subvariedade imersa* de N se f for uma imersão injetiva;

(ii) (M, f) é uma *subvariedade mergulhada* de N se f for um mergulho.

Um *fibrado vetorial diferenciável de classe* C^∞, ou, mais simplesmente, um *fibrado vetorial* sobre uma variedade diferenciável M é uma quádrupla $(\mathsf{E}, \Pi, M, \mathsf{V})$, onde:

(i) E e M são variedades diferenciáveis, denominadas *espaço total* e *espaço de base*, respectivamente;

(ii) $\Pi : \mathsf{E} \longrightarrow M$ é uma aplicação C^∞ sobrejetiva, e, $\forall p \in M$, $\mathsf{E}_p := \Pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial, denominado *fibra sobre* p;

(iii) V é um espaço vetorial, denominado *fibra típica*;

tais que, $\forall x \in M$, existe um aberto $\mathcal{U}$ de M contendo x e um difeomorfismo $\varphi_\mathcal{U} : \Pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathsf{V}$ tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{-1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\varphi_\mathcal{U}} & \mathcal{U} \times \mathsf{V} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_1} \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathcal{U}} & \mathcal{U} \end{array} \tag{1.10}$$

e tal que, $\forall p \in \mathcal{U}$, $\varphi_\mathcal{U}|_{\mathsf{E}_p} : \mathsf{E}_p \longrightarrow \{p\} \times \mathsf{V} \equiv \mathsf{V}$ seja linear.

Dado um fibrado vetorial $(\mathsf{E}, \Pi, M, \mathsf{V})$ e $\mathcal{U}$ um aberto de M, direi que uma aplicação C^∞ $X : \mathcal{U} \longrightarrow \mathsf{E}$ é uma *seção (local)* C^∞ *de* E se $\Pi \circ X = \mathrm{id}_\mathcal{U}$. Denotarei o conjunto das seções C^∞ de E definidas em $\mathcal{U}$ por $\Gamma^\infty(\mathcal{U}, \mathsf{E})$, ou $\Gamma^\infty(\mathsf{E})$ caso $\mathcal{U} = M$. Dados $X, Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{U}, \mathsf{E})$ e $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, podemos definir $fX \in \Gamma^\infty(\mathcal{U}, \mathsf{E})$ e $X + Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{U}, \mathsf{E})$ de maneira óbvia, de modo que estão bem definidas em $\Gamma^\infty(\mathcal{U}, \mathsf{E})$ uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e uma estrutura de módulo sobre $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

Dados fibrados vetoriais $(\mathsf{E}, \Pi_\mathsf{E}, M, \mathsf{V})$ e $(\mathsf{F}, \Pi_\mathsf{F}, N, \mathsf{W})$ e uma aplicação $f : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{F}$, direi que f é uma *aplicação* C^∞ *entre fibrados* se for uma aplicação C^∞ entre variedades e preservar fibras, ou seja, se existir $\widetilde{f} : M \longrightarrow N$ tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{E} & \xrightarrow{f} & \mathsf{F} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_\mathsf{E}} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_\mathsf{F}} \\ M & \xrightarrow{\widetilde{f}} & N \end{array} \tag{1.11}$$

Nestas condições, dado $p \in \mathrm{M}$, chamarei de f_p à aplicação $f_p := f|_{\mathsf{E}_p} : \mathsf{E}_p \longrightarrow \mathsf{F}_{f(p)}$, e direi que f é um *homomorfismo entre fibrados vetoriais* se for uma aplicação C^∞ entre fibrados vetoriais e se for linear nas fibras; f é um *isomorfismo entre fibrados vetoriais* se for um homomorfismo bijetivo entre fibrados vetoriais cujo inverso também for um homomorfismo.

Dados um fibrado vetorial $(\mathsf{E}, \Pi, \mathrm{M}, \mathsf{V})$, uma variedade diferenciável N, uma aplicação C^∞ $f : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}$ e uma aplicação C^∞ $X : \mathcal{U} \longrightarrow \mathsf{E}$ de um aberto de N em E, direi que X é uma *seção* C^∞ *(local) de* E *ao longo de* f se for tal que $\Pi \circ X = f|_{\mathcal{U}}$. Denotarei o conjunto das seções de E ao longo de f definidas em $\mathcal{U}$ por $\Gamma^\infty(\mathcal{U}, \mathsf{E})$; novamente, estão definidas de maneira óbvia em $\Gamma^\infty(\mathcal{U}, \mathsf{E})$ uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e uma estrutura de módulo sobre $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

As duas proposições seguintes serão úteis para caracterizar homomorfismos/isomorfismos entre fibrados vetoriais:

1.1.1 Proposição: *Sejam* $(\mathsf{E}, \Pi_\mathsf{E}, \mathrm{M}, \mathsf{V})$, $(\mathsf{F}, \Pi_\mathsf{F}, \mathrm{N}, \mathsf{W})$ *fibrados vetoriais e* $f : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{F}$. *Para que* f *seja um homomorfismo entre fibrados vetoriais, é necessário e suficiente que preserve fibras, seja linear nas fibras, e que leve seções locais* C^∞ *de* E *em seções locais* C^∞ *de* F *ao longo de* $\widetilde{f}$, *onde* $\widetilde{f}$ *é a aplicação que completa o diagrama* (1.11).

PROVA : Vou provar apenas a implicação ($\Leftarrow$), pois a outra é imediata. Como o problema é local, pela condição de trivialização local dos fibrados é suficiente demonstrar para $\mathsf{E} = \mathrm{M} \times \mathbb{R}^k$ e $\mathsf{F} = \mathrm{N} \times \mathbb{R}^l$.

Seja $\widetilde{f} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ que completa o diagrama (1.11), ou seja, tal que $\widetilde{f} \circ \Pi_\mathsf{E} = \Pi_\mathsf{F} \circ f$. Como f é linear nas fibras, para cada $p \in \mathrm{M}$, existe $A_p \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ tal que:

$$\begin{aligned} f = (\widetilde{f}, A) : \mathrm{M} \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathrm{N} \times \mathbb{R}^l \\ (p, v) &\longmapsto (\widetilde{f}(p), A_p \cdot v) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Então:

(i) $\widetilde{f}$ é C^∞.

Com efeito, tome $\mathbb{O}_\mathsf{E} := (\mathrm{id}_\mathrm{M}, \mathbb{O}) : \mathrm{M} \longrightarrow \mathsf{E} = \mathrm{M} \times \mathbb{R}^k \in \Gamma^\infty(\mathsf{E})$ seção nula de E. Então, por hipótese, $f \circ \mathbb{O}_\mathsf{E} = (\widetilde{f}, zero) \in \Gamma^\infty(\mathrm{M}, \mathsf{F})$, donde $\widetilde{f}$ é C^∞.

(ii) f é C^∞.

Com efeito, como $f(p, \cdot) = (\widetilde{f}(p), A(p, \cdot))$ é linear, $\forall\, p \in \mathrm{M}$, é suficiente verificar que $f(\cdot, v)$ é C^∞, $\forall\, v \in \mathbb{R}^k$. Dado $v \in \mathbb{R}^k$, tome $\{e_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ base canônica do $\mathbb{R}^k$ e $\alpha^i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, tais que $v = \sum_{i=1}^k \alpha^i e_i$. Sejam, para $1 \leqslant i \leqslant k$:

$$\begin{aligned} E_i : \mathrm{M} &\longrightarrow \mathrm{M} \times \mathbb{R}^k \\ p &\longmapsto (p, e_i) \end{aligned}$$

Então $E_i \in \Gamma^\infty(M, E)$, logo:

$$f(\cdot, v) = \sum_{i=1}^{k} \left(\widetilde{f}(\cdot), A(\cdot, \alpha^i e_i)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha^i \left(\widetilde{f}(\cdot), A(\cdot, e_i)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha^i \, f \circ E_i \quad \in \Gamma^\infty(M, F) \text{ por hipótese}$$

$\therefore f(\cdot, v)$ é C^∞ e isto conclui a demonstração. ■

1.1.2 Proposição: *Sejam* (E, Π_E, M, V), (F, Π_F, N, W) *fibrados vetoriais e* $f : E \longrightarrow F$ *um homomorfismo entre fibrados vetoriais. Para que* f *seja um isomorfismo entre fibrados, é necessário e suficiente que seja um isomorfismo linear em cada fibra e que* $\widetilde{f} : M \longrightarrow N$ *que completa o diagrama* (1.11) *seja um difeomorfismo.*

PROVA: Demonstrarei apenas a implicação ($\Leftarrow$), pois a outra é imediata. É suficiente mostrar que f^{-1} é uma aplicação C^∞ entre variedades, pois neste caso levará seções C^∞ de F em seções C^∞ de E ao longo de $\widetilde{f}^{-1}$ e a tese segue da proposição anterior.

Como o problema é local, novamente posso usar o argumento usado na demonstração da proposição anterior e supor, pela condição de trivialização local dos fibrados, que $E = M \times \mathbb{R}^k$ e $F = N \times \mathbb{R}^k$.

Pelo teorema do posto, é suficiente verificar que a aplicação:

$$f = (\widetilde{f}, A) : M \times \mathbb{R}^k \longrightarrow N \times \mathbb{R}^k$$
$$(p, v) \longmapsto \left(\widetilde{f}(p), A_p \cdot v\right)$$

$A_p \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, como em (1.12), tem posto máximo em cada ponto.

Com efeito, dado $(p, v) \in M \times \mathbb{R}^k$, e fazendo identificações $T_{(p,v)}(M \times \mathbb{R}^k) \equiv T_pM \oplus \mathbb{R}^k$ e $T_{(q,w)}(N \times \mathbb{R}^k) \equiv T_qN \oplus \mathbb{R}^k$, temos:

$$\begin{aligned} df(p, v) \cdot T_{(p,v)}(M \times \mathbb{R}^k) &= d\widetilde{f}(p) \cdot T_pM \oplus dA(p, v) \cdot T_{(p,v)}(M \times \mathbb{R}^k) \overset{\widetilde{f} \text{ difeo}}{=} \\ &= T_{\widetilde{f}(p)}N \oplus (\partial_1 A(p, v) \cdot T_pM + \partial_2 A(p, v) \cdot \mathbb{R}^k) = \\ &= T_{\widetilde{f}(p)}N \oplus (\partial_1 A(p, v) \cdot T_pM + dA_p(v) \cdot \mathbb{R}^k) \overset{A_p \text{ iso linear}}{=} \\ &= T_{\widetilde{f}(p)}N \oplus (\partial_1 A(p, v) \cdot T_pM + \mathbb{R}^k) = \\ &= T_{\widetilde{f}(p)}N \oplus \mathbb{R}^k = \\ &= T_{f(p,v)}(N \times \mathbb{R}^k) \end{aligned} \tag{1.13}$$

logo $df(p,v)$ tem posto máximo, e isto conclui a demonstração. ■

Dado um fibrado vetorial $(\mathsf{E},\Pi,\mathrm{M},\mathsf{V})$, está bem definido um fibrado $(\mathsf{E}^*,\Pi^*,\mathrm{M},\mathsf{V})$, onde, para cada $p\in\mathrm{M}$, $(\mathsf{E}^*)_p := (\mathsf{E}_p)^*$. Também podemos tomar "potências tensoriais" deste fibrado, tomando-se as potências tensoriais fibra por fibra. Assim, $\forall r,s\in\mathbb{N}$, também estão bem definidos os fibrados vetoriais $(\mathsf{E}^r_s = \mathrm{T}^r_s(\mathsf{E}),\Pi^r_s,\mathrm{M},\mathsf{V}^r_s)$, $(\wedge^r\mathsf{E},\wedge^r\Pi,\mathrm{M},\wedge^r\mathsf{V})$, $\big(\mathrm{T}(\mathsf{E}),\mathrm{T}(\Pi),\mathrm{M},\mathrm{T}(\mathsf{V})\big)$, $\big(\mathrm{A}(\mathsf{E}),\mathrm{A}(\Pi),\mathrm{M},\mathrm{A}(\mathsf{V})\big)$ e $\big(\wedge(\mathsf{E}),\wedge(\Pi),\mathrm{M},\wedge(\mathsf{V})\big)$, nos quais as fibras sobre $p\in\mathrm{M}$ são definidas por, respectivamente, $(\mathsf{E}_p)^r_s$, $\wedge^r(\mathsf{E}_p)$, $\mathrm{T}(\mathsf{E}_p)$, $\mathrm{A}(\mathsf{E}_p)$ e $\wedge(\mathsf{E}_p)$.

Dados M variedade diferenciável, TM o fibrado tangente de M e $r,s\in\mathbb{N}$, usarei a notação $\mathrm{T}^*\mathrm{M} := \mathrm{TM}^*$ e $\mathrm{T}^r_s(\mathrm{M}) := (\mathrm{TM})^r_s$.

Dados $r,s\in\mathbb{N}$, também usarei a seguinte notação para denotar as seções dos fibrados TM, T*M, $\mathrm{T}^r_s(\mathrm{M})$, $\wedge^r\mathrm{TM}$, $\wedge^s\mathrm{T}^*\mathrm{M}$, T(TM), T(T*M), A(TM), $\wedge$(TM) e $\wedge$(T*M), respectivamente: $\mathfrak{X}(\mathrm{M})$, $\mathfrak{X}^*(\mathrm{M})$, $\mathcal{T}^r_s(\mathrm{M})$, $\phi^r(\mathrm{M})$, $\Omega_s(\mathrm{M})$, $\mathcal{T}(\mathrm{M})$, $\mathcal{T}^*(\mathrm{M})$, $\mathcal{A}(\mathrm{M})$, $\phi(\mathrm{M})$ e $\Omega(\mathrm{M})$. Os elementos destes conjuntos são denominados, genericamente, de *campos tensoriais.*

Podem ser definidas, de maneira óbvia multiplicações "$\otimes$" entre campos tensoriais e "$\wedge$" entre campos tensoriais alternados, de modo que $\mathcal{T}(\mathrm{M})$, $\mathcal{T}^*(\mathrm{M})$, $\mathcal{A}(\mathrm{M})$, $\phi(\mathrm{M})$ e $\Omega(\mathrm{M})$, além da estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou de módulo sobre $\mathcal{F}(\mathrm{M})$ discutida anteriormente, também têm estrutura de álgebra sobre $\mathbb{R}$(ou sobre $\mathcal{F}(\mathrm{M})$).

Observe que a notação T(TM) está sobrecarregada, pois está sendo usada tanto para denotar a álgebra tensorial contravariante do fibrado tangente de M como para denotar o fibrado tangente do fibrado tangente de M. Ficará evidenciado pelo contexto quando se tratar de um ou de outro objeto. Um comentário análogo vale para T(T*M), e para outras notações que forem sobrecarregadas daqui em diante.

Dados fibrados vetoriais $(\mathsf{E},\Pi_\mathsf{E},\mathrm{M},\mathsf{V})$ e $(\mathsf{F},\Pi_\mathsf{F},\mathrm{N},\mathsf{W})$ e um homomorfismo $f:\mathsf{E}\longrightarrow\mathsf{F}\in\mathrm{Hom}(\mathsf{E},\mathsf{F})$, podemos tomar extensões de f_p como em (1.7), de modo que estão bem definidas as seguintes aplicações:

(a) $f_* = \mathrm{T}(f):\mathrm{T}(\mathsf{E})\longrightarrow\mathrm{T}(\mathsf{F})\in\mathrm{Hom}\big(\mathrm{T}(\mathsf{E}),\mathrm{T}(\mathsf{F})\big)$ entre as álgebras tensoriais contravariantes de E e de F, definida em cada fibra por $\mathrm{T}(f)_p := \mathrm{T}(f_p)$, para cada $p\in\mathrm{M}$.

(b) $f_* = \wedge(f):\wedge(\mathsf{E})\longrightarrow\wedge(\mathsf{F})\in\mathrm{Hom}\big(\wedge(\mathsf{E}),\wedge(\mathsf{F})\big)$, definida em cada fibra por $(\wedge(f))_p := \wedge(f_p)$, para cada $p\in\mathrm{M}$.

(c) $f^*:\Gamma^\infty\big(\mathrm{N},\mathrm{T}(\mathsf{F}^*)\big)\longrightarrow\Gamma^\infty\big(\mathrm{M},\mathrm{T}(\mathsf{E}^*)\big)$, definida por $\langle(f^*\theta)(p),v\rangle = \langle\theta\circ\widetilde{f}(p),f_*\cdot v\rangle$, $\forall p\in\mathrm{M}$, $\forall\theta\in\Gamma^\infty\big(\mathrm{N},\mathrm{T}(\mathsf{F}^*)\big)$, $\forall v\in\mathrm{T}(\mathsf{E}_p)$.

$f^*:\Gamma^\infty\big(\mathrm{N},\wedge(\mathsf{F}^*)\big)\longrightarrow\Gamma^\infty\big(\mathrm{M},\wedge(\mathsf{E}^*)\big)$, definida por $\langle(f^*\theta)(p)\mid v\rangle = \langle\theta\circ f(p)\mid f_*\cdot v\rangle$, $\forall p\in\mathrm{M}$, $\forall\theta\in\Gamma^\infty\big(\mathrm{N},\wedge(\mathsf{F}^*)\big)$, $\forall v\in\wedge(\mathsf{E}_p)$.

Estas duas aplicações são chamadas de *pull back por f.*

Se f for um isomorfismo, também estão bem definidas as aplicações:

(d) $f^t:\mathsf{F}^*\longrightarrow\mathsf{E}^*$ definida por $(f^t)_p := (f_{\widetilde{f}^{-1}(p)})^t$, para cada $p\in\mathrm{N}$, e $f^* := \mathrm{T}(f^t):\mathrm{T}(\mathsf{F}^*)\longrightarrow\mathrm{T}(\mathsf{E}^*)$, $f^* := \wedge(f^t):\wedge(\mathsf{F}^*)\longrightarrow\wedge(\mathsf{E}^*)$ homomorfismos entre álgebras.

(e) $f_* : \Gamma^\infty(M, T(E)) \longrightarrow \Gamma^\infty(N, T(F))$, definida por $\langle (f_*X)_p, \theta \rangle := \langle X \circ \widetilde{f}^{-1}(p), f^* \cdot \theta \rangle$, $\forall p \in N$, $\forall X \in \Gamma^\infty(M, T(E))$, $\forall \theta \in T(F_p)$.

$f_* : \Gamma^\infty(M, \wedge(E)) \longrightarrow \Gamma^\infty(N, \wedge(F))$, definida por $\langle (f_*X)_p \mid \theta \rangle := \langle X \circ \widetilde{f}^{-1}(p) \mid f^* \cdot \theta \rangle$, $\forall p \in N$, $\forall X \in \Gamma^\infty(M, \wedge(E))$, $\forall \theta \in \wedge(F_p)$.

Estas duas aplicações são chamadas de *push forward por f*.

Além disso, sendo f um isomorfismo, também é possível estender o f^* e f_* para vetores/campos de vetores contravariantes e covariantes, respectivamente, pondo $f^*X := {f^{-1}}_*X$ para X contravariante e $f_*\theta := (f^{-1})^*\theta$ para θ covariante, de modo a obter os seguintes isomorfismos, inversos um do outro:

$$f_* : A(E) \longrightarrow A(F) \text{ e } f^* : A(F) \longrightarrow A(E)$$
$$f_* : \Gamma^\infty(M, A(E)) \longrightarrow \Gamma^\infty(N, A(F)) \text{ e } f^* : \Gamma^\infty(N, A(F)) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, A(E))$$
$$f_* : \wedge(E) \longrightarrow \wedge(F) \text{ e } f^* : \wedge(F) \longrightarrow \wedge(E)$$
$$f_* : \Gamma^\infty(M, \wedge(E)) \longrightarrow \Gamma^\infty(N, \wedge(F)) \text{ e } f^* : \Gamma^\infty(N, \wedge(F)) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, \wedge(E))$$
$$f_* : \wedge(E^*) \longrightarrow \wedge(F^*) \text{ e } f^* : \wedge(F^*) \longrightarrow \wedge(E^*)$$
$$f_* : \Gamma^\infty(M, \wedge(E^*)) \longrightarrow \Gamma^\infty(N, \wedge(F^*)) \text{ e } f^* : \Gamma^\infty(N, \wedge(F^*)) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, \wedge(E^*))$$

Dada uma aplicação C^∞ $f : M \longrightarrow N$ entre variedades diferenciáveis M e N, vou denotar por $df(p)$ ou $T_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ a *derivada* ou *aplicação tangente* de f em $p \in M$ e por df ou $Tf : TM \longrightarrow TN$ a aplicação tangente de f. Tf é um homomorfismo entre os fibrados tangentes de M e N. Se $N = \mathbb{R}$, posso identificar $\mathrm{Hom}(TM, T\mathbb{R}) \equiv \mathfrak{X}^*(M)$, de modo que $df \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Eventualmente, usarei a notação $f_* := (Tf)_*$ e $f^* := (Tf)^*$.

Sejam M variedade diferenciável e $X \in \phi(M)$. Vou denotar por $i(X) : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M) \in \mathrm{End}(\Omega(M))$ a *multiplicação interior por X*, definida por $i(X)_p := i(X_p) \in \mathrm{End}(\wedge(T_pM))$, para cada $p \in M$. Analogamente, dada $\theta \in \Omega(M)$, vou denotar por $i(\theta) : \phi(M) \longrightarrow \phi(M) \in \mathrm{End}(\phi(M))$ a *multiplicação interior por* θ, definida por $i(\theta)_p := i((\theta_p)) \in \mathrm{End}(\wedge(T_p^*M))$.

Vou denotar por $\mathfrak{L}_X : \mathcal{A}(M) \longrightarrow \mathcal{A}(M)$ a *derivada de Lie* ao longo de $X \in \mathfrak{X}(M)$, por $d : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M)$ a *derivada exterior de Cartan*, e por $[\cdot, \cdot]$ o *colchete de Lie* entre campos de vetores de M.

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, vou denotar por $\Phi^X : \mathcal{D} \longrightarrow M$ o fluxo local de X, onde $\mathcal{D}$ é um aberto de $\mathbb{R} \times M$. Se $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times M$, direi que X é *completo*. Dado $(t, p) \in \mathcal{D}$, usarei a notação $\Omega^t := \{p \in M : (t, p) \in \mathcal{D}\} \subset M$ e $\Omega_p := \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}$. Então $\Phi_t^X := \Phi^X(t, \cdot) : \Omega^t \longrightarrow \Omega^{-t}$ é um difeomorfismo e $\Phi_p^X := \Phi^X(\cdot, p) : \Omega_p \longrightarrow M$ é a curva integral maximal de X que se inicia em p.

1.1.3 Grupos e Álgebras de Lie

Um *grupo de Lie* G é uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo tal que a multiplicação do grupo $\mu : G \times G \longrightarrow G$ seja uma aplicação C^∞.

Como conseqüência, as aplicações:

$$\begin{aligned} \lambda_g : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{G} \\ h &\longmapsto g\,h \\ \rho_g : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{G} \\ h &\longmapsto h\,g \end{aligned} \tag{1.14}$$

são difeomorfismos, denominados *translação à esquerda* e *translação à direita por* g, respectivamente. Decorre do teorema das funções implícitas que a aplicação *inversão*:

$$\begin{aligned} I : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{G} \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned} \tag{1.15}$$

também é um difeomorfismo.

Daqui em diante, denotarei por e o elemento neutro da multiplicação de G.

Dada uma aplicação $f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$ entre grupos de Lie, direi que f é um *homomorfismo de Lie* ou homomorfismo entre grupos de Lie se for uma aplicação C^∞ e um homomorfismo (algébrico) de grupos. Direi que f é um *isomorfismo de Lie* ou *isomorfismo entre grupos de Lie* se for um difeomorfismo e um isomorfismo (algébrico) de grupos.

Um *subgrupo de Lie* (H, f) de um grupo de Lie G é uma subvariedade (H, f) de G tal que f seja um homomorfismo de Lie.

Uma *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de uma aplicação bilinear $[\cdot\,,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, chamada *colchete de* $\mathfrak{g}$, tal que, $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}$:

(i) $[x, y] = -[y, x]$ (*anti-comutatividade*);

(ii) $\oint_{xyz} [[x, y], z] \equiv \mathbb{0}$ (*identidade de Jacobi*).

Observação sobre a notação:

Usarei o símbolo $\oint$ para denotar somas sobre permutações cíclicas, ou seja, sendo $A := \{i_1 < \cdots < i_k\}$, $\mathfrak{S}_A := \{\text{permutações dos elementos de } A\}$, $\mathfrak{C}_A(\sigma) := \{\text{permutações cíclicas de } \sigma\} \subset \mathfrak{S}_A$, para $\sigma \in \mathfrak{S}_A$, X um conjunto onde esteja definida uma operação "+", $f : \mathfrak{S}_A \longrightarrow X$, e $(j_1, \ldots, j_k) = \tau(i_1, \ldots, i_k)$ para algum $\tau \in \mathfrak{S}_A$, definirei:

$$\oint_{i_1,\ldots,i_k} f(j_1, \ldots, j_k) := \oint_{\tau} f := \sum_{\sigma \in \mathfrak{C}_A(\tau)} f(\sigma) \tag{1.16}$$

Por exemplo, dada uma variedade diferenciável M, $(\mathfrak{X}(\mathrm{M}), [\cdot\,,\cdot])$ é uma álgebra de Lie.

Dada uma álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$, direi que uma subálgebra $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ é uma *subálgebra de Lie* de $\mathfrak{g}$.

Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g} := \mathrm{T}_e\mathrm{G}$.

Direi que um campo de tensores $t \in \mathcal{A}(\mathrm{M})$ é *invariante à esquerda* se, para qualquer $g \in \mathrm{G}$, t for λ_g-relacionado com ele mesmo, ou seja, se $(\lambda_g)_* t = t \circ \lambda_g$. Analogamente, direi que um campo de tensores $t \in \mathcal{A}(\mathrm{M})$ é *invariante á direita* se, $\forall\, g \in \mathrm{G}$, $(\rho_g)_* t = t \circ \rho_g$. Daqui em diante, usarei índices "λ" e "ρ" para denotar objetos referentes a campos tensoriais invariantes à esquerda ou à direita, respectivamente. Assim, por exemplo, denotarei por $\mathfrak{X}^\lambda(\mathrm{G})$ o conjunto dos campos de vetores de G invariantes à esquerda, e por $\mathfrak{X}^\rho(\mathrm{G})$ o conjunto dos campos de vetores de G invariantes à direita. É uma tarefa trivial provar que campos tensoriais invariantes à esquerda ou à direita são C^∞; vide [War83], por exemplo. Além disso, o colchete de Lie de campos de vetores invariantes à esquerda (respectivamente, à direita) também é invariante à esquerda (respectivamente, à direita), logo $\mathfrak{X}^\lambda(\mathrm{G})$ e $\mathfrak{X}^\rho(\mathrm{G})$ são subálgebras de Lie de $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$.

Dado $t \in \mathrm{A}(\mathfrak{g})$, denotarei por $t^\lambda \in \mathcal{A}^\lambda(\mathrm{G})$ e $t^\rho \in \mathcal{A}^\rho(\mathrm{G})$ os campos tensoriais definidos por, $\forall\, g \in \mathrm{G}$:

$$\begin{aligned} t^\lambda(g) &:= (\lambda_g)_* \cdot t \\ t^\rho(g) &:= (\rho_g)_* \cdot t \end{aligned} \tag{1.17}$$

Também é uma tarefa trivial verificar que as aplicações:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\lambda : \mathrm{A}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathcal{A}^\lambda(\mathrm{G}) \\ t &\longmapsto t^\lambda \\ \mathcal{J}^\rho : \mathrm{A}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathcal{A}^\rho(\mathrm{G}) \\ t &\longmapsto t^\rho \end{aligned} \tag{1.18}$$

são isomorfismos lineares, e podemos usar a sua restrição a $\mathfrak{g}$, ou seja, $\mathcal{J}^\lambda|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}^\lambda(\mathrm{G})$ ou $\mathcal{J}^\rho|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}^\rho(\mathrm{G})$ para definir uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{g}$. Escolherei $\mathcal{J}^\lambda$, e porei

$$(\forall X, Y \in \mathfrak{g})\ [X, Y]_{\mathfrak{g}} := [X^\lambda, Y^\lambda] \tag{1.19}$$

Chamarei $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ de a *álgebra de Lie* do grupo de Lie G, e, eventualmente, identificá-la-ei com a álgebra de Lie $\left(\mathfrak{X}^\lambda(\mathrm{G}), [\cdot\,,\cdot]\right)$, tacitamente, através do isomorfismo de álgebras de Lie $\mathcal{J}^\lambda|_{\mathfrak{g}}$.

Sejam G grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G e $X \in \mathfrak{g}$. Então X^λ e X^ρ são completos. Vou usar a notação $\exp_X := \Phi_e^{X^\lambda} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G}$, curva integral de X^λ que se inicia em e, e chamarei de *exponencial* a aplicação:

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{G} \\ X &\longmapsto \exp X := \exp_X(1) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Então, temos, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\exp(t\,X) = \exp_X(t)$, e existem vizinhanças $\mathcal{U} \in \tau(\mathfrak{g})$ em torno de $\mathbb{0} \in \mathfrak{g}$ e $\mathcal{V} \in \tau(\mathrm{G})$ em torno de $e \in \mathrm{G}$, tais que $\exp|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ seja

um difeomorfismo. Se G for conexo. tem-se $G = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}^n = \cup_{n=1}^{\infty} (\exp \mathcal{U})^n$. Além disso, também é fácil verificar que, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall X \in \mathfrak{g}$, tem-se $\Phi_t^{X^\lambda} = \rho_{\exp(tX)}$ e $\Phi_t^{X^\rho} = \lambda_{\exp(tX)}$. Como translações à direita e à esquerda comutam, temos $\Phi_t^{X^\lambda} \circ \Phi_\tau^{Y^\rho} = \Phi_\tau^{Y^\rho} \circ \Phi_t^{X^\lambda}$, $\forall t, \tau \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, e deste fato segue que $[X^\lambda, Y^\rho] \equiv \mathbb{O}$.

Seja $\varphi : G \longrightarrow H$ homomorfismo entre grupos Lie; então $d\varphi(e) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo entre álgebras de Lie, onde $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são as álgebras de Lie de G e H, respectivamente. Denotarei $d\varphi(e)$ por $d\varphi$. Reciprocamente, se G for conexo e simplesmente conexo, dado $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ homomorfismo de álgebras de Lie, existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $d\varphi = \psi$.

Dado V espaço vetorial, Aut (V) é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é End (V). Um homomorfismo de Lie $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ é chamado de *representação do grupo de Lie* G; um homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ é chamado de *representação da álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$. Assim, como visto no parágrafo anterior, uma representação $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ do grupo de Lie G induz uma representação $d\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Finalizarei esta seção introdutória com a definição de produtos tensoriais/exteriores de representações.

1.1.3 Proposição: *Dadas representações* $\phi_i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, *do grupo de Lie* G, ***então a aplicação:***

$$\begin{aligned} \phi_1 \otimes \phi_2 : G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(V_1 \otimes V_2) \\ g &\longmapsto \phi_1(g) \otimes \phi_2(g) \end{aligned} \tag{1.21}$$

é uma representação, e $d(\phi_1 \otimes \phi_2)$ *é a aplicação:*

$$\begin{aligned} d\phi_1 \otimes d\phi_2 : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto d\phi_1(X) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes d\phi_2(X) \end{aligned} \tag{1.22}$$

PROVA:
Com efeito, $\phi_1 \otimes \phi_2$ é composição das sequintes aplicações C^∞:

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\phi} \mathrm{Aut}(V_1) \times \mathrm{Aut}(V_2) \xrightarrow{\mu} \mathrm{Aut}(V_1 \otimes V_2) \\ g &\longmapsto (\phi_1(g), \phi_2(g)) \\ (f, g) &\longmapsto f \otimes g \end{aligned} \tag{1.23}$$

ou seja, $\phi_1 \otimes \phi_2 = \mu \circ \phi$. Então $\phi_1 \otimes \phi_2$ é C^∞ e, usando a regra da cadeia e o fato de μ ser bilinear, temos, $\forall X \in \mathfrak{g}$:

$$
\begin{aligned}
d(\phi_1 \otimes \phi_2)(e) \cdot X &= d\mu\big(\phi(e)\big) \cdot d\phi(e) \cdot X = \\
&= d\mu\big(\phi_1(e), \phi_2(e)\big) \cdot \big(d\phi_1(e) \cdot X, d\phi_2(e) \cdot X\big) \overset{\mu \text{ bilinear}}{=} \\
&= \mu\big(d\phi_1(X), \phi_2(e)\big) + \mu\big(\phi_1(e), d\phi_2(X)\big) \overset{\phi_1,\phi_2 \text{ homomorfismos}}{=} \\
&= d\phi_1(X) \otimes \mathrm{id}_{\mathsf{V}_2} + \mathrm{id}_{\mathsf{V}_1} \otimes d\phi_2(X) \overset{\text{def}}{=} \\
&= (d\phi_1 \otimes d\phi_2)(X)
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

Resta apenas mostrar que $\phi_1 \otimes \phi_2$ é um homomorfismo (algébrico) de grupos. De fato, $\forall\, g, h \in \mathrm{G}$:

$$
\begin{aligned}
\phi_1 \otimes \phi_2(g\,h) &= \phi_1(g\,h) \otimes \phi_2(g\,h) \overset{\phi_1,\phi_2 \text{ homomorfismos}}{=} \\
&= \big(\phi_1(g) \circ \phi_1(h)\big) \otimes \big(\phi_2(g) \circ \phi_2(h)\big) = \\
&= \big(\phi_1(g) \otimes \phi_2(g)\big) \circ \big(\phi_1(h) \otimes \phi_2(h)\big) = \\
&= (\phi_1 \otimes \phi_2)(g) \circ (\phi_1 \otimes \phi_2)(h)
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

e isto conclui a demonstração. ■

O enunciado e a demonstração da proposição acima continuam válidos se for substituído "$\wedge$" no lugar de "$\otimes$".

A representação $\phi_1 \otimes \phi_2 : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathsf{V}_1 \otimes \mathsf{V}_2)$ (respectivamente, $\phi_1 \wedge \phi_2 : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathsf{V}_1 \wedge \mathsf{V}_2)$) é chamada de *produto tensorial* (respectivamente, *produto exterior*) das representações ϕ_1 e ϕ_2. Analogamente, a representação $d\phi_1 \otimes d\phi_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathsf{V}_1 \otimes \mathsf{V}_2)$ (respectivamente, $d\phi_1 \wedge d\phi_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathsf{V}_1 \wedge \mathsf{V}_2)$), é chamada de *produto tensorial* (respectivamente, *produto exterior*) das representações $d\phi_1$ e $d\phi_2$.

Através de uma aplicação judiciosa da proposição (1.1.3), podemos, dados uma representação $\phi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathsf{V})$ do grupo de Lie G e $r \in \mathbb{N}^{++}$, construir as r-ésimas potências tensoriais e as r-ésimas potências exteriores de ϕ e de $d\phi$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}^r\phi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathsf{V}^r) \\
&\qquad g \longmapsto \mathrm{T}^r\phi(g) = \phi(g) \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes \phi(g) \\
&\wedge^r \phi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\wedge^r \mathsf{V}) \\
&\qquad g \longmapsto \wedge^r \phi(g) = \phi(g) \wedge \overset{r}{\cdots} \wedge \phi(g) \\
&\mathrm{T}^r d\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathsf{V}^r) \\
&\qquad X \longmapsto \mathrm{T}^r d\phi(X) = \textstyle\sum_{k=1}^{r} \underbrace{\mathrm{id}_{\mathsf{V}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{\mathsf{V}}}_{k-1 \text{ fatores}} \otimes d\phi(X) \otimes \underbrace{\mathrm{id}_{\mathsf{V}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{\mathsf{V}}}_{r-k \text{ fatores}} \\
&\wedge^r d\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}\,(\wedge^r \mathsf{V}) \\
&\qquad X \longmapsto \wedge^r d\phi(X) = \textstyle\sum_{k=1}^{r} \underbrace{\mathrm{id}_{\mathsf{V}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{id}_{\mathsf{V}}}_{k-1 \text{ fatores}} \wedge d\phi(X) \wedge \underbrace{\mathrm{id}_{\mathsf{V}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{id}_{\mathsf{V}}}_{r-k \text{ fatores}}
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

E também não há dificuldade alguma em definir, usando notação coerente com a das seções anteriores, as representações:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\phi) = \phi_* : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathrm{T}(\mathsf{V})) \\
g &\longmapsto (\phi(g))_* = \mathrm{T}(\phi(g)) = \oplus_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{T}^r \phi(g) \\
\wedge(\phi) = \phi_* : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\wedge(\mathsf{V})) \\
g &\longmapsto (\phi(g))_* = \wedge(\phi(g)) = \oplus_{r\in\mathbb{Z}} \wedge^r \phi(g) \\
\mathrm{T}(d\phi) = d\phi_* : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathrm{T}(\mathsf{V})) \\
X &\longmapsto \mathrm{T}(d\phi(X)) = \oplus_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{T}^r d\phi(X) \\
\wedge(d\phi) = d\phi_* : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{End}\,(\wedge(\mathsf{V})) \\
X &\longmapsto \wedge(d\phi(X)) = \oplus_{r\in\mathbb{Z}} \wedge^r d\phi(X)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

1.2 Colchete de Schouten-Nijenhuis

1.2.1 Definição (Colchetes de Lie graduados num espaço vetorial)
Um **colchete de Lie graduado** num espaço vetorial graduado $\mathcal{V} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{V}_n$ é uma aplicação bilinear

$$[\cdot\,,\cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

tal que $\forall n, m \in \mathbb{Z}, \forall x, y, z \in \mathcal{V}$ homogêneos:

(C1) $[\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m] \subset \mathcal{V}_{n+m}$

(C2) $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$

(C3) Identidade de Jacobi:

$$(-1)^{|x||z|}[[x, y], z] + (-1)^{|y||x|}[[y, z], x] + (-1)^{|z||y|}[[z, x], y] = 0 \tag{1.28}$$

onde $|x| := \mathrm{gr}\,(x)$.

Dada uma variedade diferenciável M, existem associados a ela vários colchetes de Lie graduados de campos tensoriais; vide [Gra], por exemplo. Historicamente, provavelmente o primeiro foi o famoso *colchete de Schouten-Nijenhuis*, descoberto por Schouten em 1940, para campos tensoriais contravariantes. É a única extensão graduada do colchete de Lie em $\mathfrak{X}(\mathrm{M})$ para $\phi(\mathrm{M})$. Este colchete será usado para definir uma estrutura de Poisson em M, pois, como veremos, o fato de o tensor de Poisson comutar consigo mesmo, em relação ao colchete de Schouten, é equivalente à identidade de Jacobi.

1.2.2 Definição (Colchete de Schouten-Nijenhuis numa variedade diferenciável) Sejam M uma variedade diferenciável, $\phi(\mathrm{M})$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial graduado das seções C^∞ do fibrado exterior contravariante $\wedge \mathrm{TM}$:

$$\begin{aligned} \phi(\mathrm{M}) &:= \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\, \phi^n(\mathrm{M}) \\ \phi^n(\mathrm{M}) &:= \begin{cases} \{0\} & \text{se } \mathrm{n} < 0, \\ \Gamma^\infty(\mathrm{M}, \wedge^n \mathrm{TM}) & \text{se } \mathrm{n} \geqslant 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Seja

$$[\cdot\,,\cdot]^{S-N} : \phi(\mathrm{M}) \times \phi(\mathrm{M}) \longrightarrow \phi(\mathrm{M})$$

bilinear tal que, dados $A \in \phi^i(\mathrm{M}), B \in \phi^j(\mathrm{M})$ e $\beta \in \Omega_{i+j-1}(\mathrm{M})$, tenhamos

(i) $[A, B]^{S-N} \in \phi^{i+j-1}(\mathrm{M})$

(ii) $\langle [A, B]^{S-N} \mid \beta \rangle = (-1)^{(i+1)\,j}\, \mathrm{i}(A) d\, \mathrm{i}(B)\beta + (-1)^i \mathrm{i}(B) d\, \mathrm{i}(A)\beta$

Então $[\cdot\,,\cdot]^{S-N}$ está bem definido e é um colchete de Lie graduado no $\mathbb{R}$-espaço vetorial graduado $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n(\mathrm{M})$, onde $A^n(\mathrm{M}) := \phi^{n+1}(\mathrm{M}), \forall n \in \mathbb{Z}$.

Com efeito, (C1), (C2) e (C3) da definição (1.2.1) são imediatamente verificadas a partir da definição de $[\cdot\,,\cdot]^{S-N}$.

Notação. Usarei a seguinte notação:
Dados $p, n \in \mathbb{N}, p \leqslant n$:

$$\begin{aligned} I_n &:= \{1, \ldots, n\} \\ I_{n,p} &= \{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n\} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Dado um conjunto A, vou denotar por $\mathfrak{S}_A$ ou $\mathfrak{S}(A)$ o conjunto das permutações de A; dado $n \in \mathbb{N}$ vou definir $S_n := \mathfrak{S}(I_n)$.

Dados $p, q \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \mathbb{N}$, vou definir o *símbolo de Kronecker generalizado* $\epsilon^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$ da seguinte forma:

(i) Se $p = q$, se os $\{i_k : 1 \leqslant k \leqslant p\}$ forem todos distintos, se os $\{j_k : 1 \leqslant k \leqslant q\}$ forem todos distintos, se $\{i_k : 1 \leqslant k \leqslant p\} = \{j_k : 1 \leqslant k \leqslant q\} = A$ e se existir $\sigma \in \mathfrak{S}_A$ tal que

$$(i_1, \ldots, i_p) = \sigma(j_1, \ldots, j_q)$$

então

$$\epsilon^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} := \mathrm{sgn}\,(\sigma)$$

(ii)

$$\epsilon^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} := 0$$

caso contrário.

Dados $p, q \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \mathbb{N}$, $K_{i_1} = \{k_1^{i_1} < \cdots < k_{i_1}^{i_1}\} \subset \mathbb{N}, \cdots, K_{j_q} = \{k_1^{j_q} < \cdots < k_{j_q}^{j_q}\} \subset \mathbb{N}$, vou definir

$$\epsilon^{K_{j_1},\ldots,K_{j_q}}_{K_{i_1},\ldots,K_{i_p}} := \epsilon^{k_1^{j_1},\ldots,k_{j_1}^{j_1},\ldots,k_1^{j_q},\ldots,k_{j_q}^{j_q}}_{k_1^{i_1},\ldots,k_{i_1}^{i_1},\ldots,k_1^{i_p},\ldots,k_{i_p}^{i_p}} \tag{1.31}$$

Neste caso, se $1 \in \{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\}$, escreverei k_1^1 no lugar de $K_1 = \{k_1^1\}$.

1.2.3 Proposição: *Dados $A \in \phi^i(\mathrm{M})$ e $B \in \phi^j(\mathrm{M})$, as componentes de $[A, B]^{S-N}$ numa carta local são:*

$$\begin{aligned}[A, B]^{k_2,\ldots,k_{i+j}} =& \frac{1}{(i-1)!j!}\, \epsilon^{k_2,\ldots,k_{i+j}}_{I_2,\ldots,I_i J_1,\ldots,J_j} A^{RI_2,\ldots,I_i} \partial_R B^{J_1,\ldots,J_j} + \\ &+ \frac{(-1)^i}{i!(j-1)!}\, \epsilon^{k_2,\ldots,k_{i+j}}_{I_1,\ldots,I_i J_2,\ldots,J_j} B^{RJ_2,\ldots,J_j} \partial_R A^{I_1,\ldots,I_i}\end{aligned} \tag{1.32}$$

PROVA:
Sejam $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M})$ e $K = \{k_2 < \cdots < k_{i+j}\} \in I_{n,i+j-1}$. Temos:

$$\mathrm{i}(B) dx^K = \sum_{J \in I_{n,i-1}} \epsilon^K_{K-J,J}\, B^{K-J}\, dx^J \tag{1.33}$$

donde:

$$d\,\mathrm{i}(B) dx^K = \sum_{J \in I_{n,i-1}} \epsilon^K_{K-J,J} \sum_{R=1}^{n} \partial_R B^{K-J}\, dx^R \wedge dx^J \tag{1.34}$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(A) d\,\mathrm{i}(B) dx^K &= \sum_{\substack{I \in I_{n,i} \\ J \in I_{n,i-1}}} \sum_{R=1}^{n} \epsilon^K_{K-J,J}\, A^I\, \partial_R B^{K-J}\, \mathrm{i}_{\partial^I}(dx^R \wedge dx^J) = \\ &= \sum_{\substack{I \in I_{n,i} \\ J \in I_{n,i-1}}} \sum_{R=1}^{n} \epsilon^K_{K-J,J}\, \epsilon^{R,J}_I\, A^I\, \partial_R B^{K-J}\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}\sum_{I \in I_{n,i}} \epsilon^{R,J}_I\, A^I &= \epsilon^{R,J}_{R \cup J}\, A^{R \cup J} = \\ &= A^{R,J} = \\ &= \frac{1}{(i-1)!}\, \epsilon^J_{I_2,\ldots,I_i}\, A^{R,I_2,\ldots,I_i}\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$B^{K-J} = \frac{1}{j!}\epsilon^{K-J}_{J_1,\dots,J_j} B^{J_1,\dots,J_j} \tag{1.37}$$

Substituindo (1.37) e (1.36) em (1.35), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(A)d\mathrm{i}(B)dx^K &= \sum_{J\in I_{n,i-1}}\sum_{R=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!\,j!}\epsilon^{K}_{K-J,J}\,\epsilon^{J}_{I_2,\dots,I_i}\,\epsilon^{K-J}_{J_1,\dots,J_j} A^{R,I_2,\dots,I_i}\partial_R B^{J_1,\dots,J_j} = \\ &= \frac{1}{(i-1)!\,j!}\epsilon^{K}_{J_1,\dots,J_j\,I_2,\dots,I_i} A^{R,I_2,\dots,I_i}\partial_R B^{J_1,\dots,J_j} = \\ &= \frac{(-1)^{j(i-1)}}{(i-1)!\,j!}\epsilon^{K}_{I_2,\dots,I_i,J_1,\dots,J_j} A^{R,I_2,\dots,I_i}\partial_R B^{J_1,\dots,J_j} \end{aligned} \tag{1.38}$$

Analogamente,

$$\mathrm{i}(B)d\mathrm{i}(A)dx^K = \frac{1}{(j-1)!\,i!}\epsilon^{K}_{I_1,\dots,I_i\,J_2,\dots,J_j} B^{R,J_2,\dots,J_j}\partial_R A^{I_1,\dots,I_i} \tag{1.39}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} [A,B]^{k_2,\dots,k_{i+j}} &= \epsilon^{K}_{k_2,\dots,k_{i+1}}\,[A,B]^K = \\ &= \epsilon^{K}_{k_2,\dots,k_{i+j}}\left[(-1)^{(i+1)\,j}\,\mathrm{i}(A)d\mathrm{i}(B)dx^K + (-1)^i \mathrm{i}(B)d\mathrm{i}(A)dx^K\right] = \\ &= \frac{1}{(i-1)!j!}\epsilon^{k_2,\dots,k_{i+j}}_{I_2,\dots,I_i J_1,\dots,J_j} A^{RI_2,\dots,I_i}\partial_R B^{J_1,\dots,J_j} + \\ &\quad + \frac{(-1)^i}{i!(j-1)!}\epsilon^{k_2,\dots,k_{i+j}}_{I_1,\dots,I_i J_2,\dots,J_j} B^{RJ_2,\dots,J_j}\partial_R A^{I_1,\dots,I_i} \end{aligned} \tag{1.40}$$

e isto conclui a demonstração. ■

1.3 Variedades e Aplicações de Poisson

1.3.1 Definição: Uma **variedade de Poisson** é um par (M,π) onde M é uma variedade diferenciável e π é um **tensor de Poisson**, i.e., $\pi \in \phi^2(\mathrm{M})$ e $[\pi,\pi]^{S-N} \equiv 0$.

1.3.2 Observação
Dado $\pi \in \phi^2(\mathrm{M})$, está canonicamente definido um homomorfismo entre fibrados vetoriais:

$$\begin{aligned} \pi^\sharp : \mathrm{T^*M} &\longrightarrow \mathrm{TM} \\ \theta_p &\longmapsto \mathrm{i}(\theta_p)\pi_p \end{aligned} \tag{1.41}$$

Com efeito, dada $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathrm{M})$, temos $\pi^\sharp \circ \theta = \mathrm{i}_\theta \pi \in \mathfrak{X}(\mathrm{M})$, logo $\pi^\sharp$ leva seções C^∞ em seções C^∞ e é linear nas fibras, portanto é um homomorfismo entre fibrados vetoriais, pela proposição (1.1.1).

Além disso, se π for não degenerado, $\pi^\sharp$ será um isomorfismo linear em cada fibra, e como $\widetilde{\pi^\sharp} = \mathrm{id}_M$, segue da proposição (1.1.2) que $\pi^\sharp$ será um isomorfismo entre fibrados vetoriais. Neste caso, usarei a notação $\pi^\flat := (\pi^\sharp)^{-1}$.

De acordo com as observações e notações da seção (1.1), $\pi^\sharp$ induz as seguintes aplicações:

(i) um homomorfismo C^∞ entre fibrados vetoriais:

$$\begin{aligned} \pi^\sharp{}_* : \wedge T^*(M) &\longrightarrow \wedge T(M) \\ \theta_p \in \wedge^n T(T^*_p M) &\longmapsto (\wedge^n \pi^\sharp_p)(\theta_p) \end{aligned}$$

(ii) um homomorfismo entre $\mathcal{F}(M)$-módulos:

$$\begin{aligned} \pi^\sharp{}_* : \Omega(M) &\longrightarrow \phi(M) \\ \theta &\longmapsto \pi^\sharp{}_* \circ \theta \end{aligned}$$

Daqui em diante omitirei o $*$ e chamarei todas estas aplicações pelo mesmo nome $\pi^\sharp$.

Analogamente, dada $\omega \in \Omega_2(M)$, está canonicamente definido um homomorfismo entre fibrados vetoriais:

$$\begin{aligned} \omega^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ X_p &\longmapsto i(X_p)\omega_p \end{aligned} \tag{1.42}$$

Se ω for não-degenerada, $\omega^\flat$ será um isomorfismo entre fibrados vetoriais, e usarei a notação $\omega^\sharp := (\omega^\flat)^{-1}$, e também valem as outras observações e notações análogas feitas para $\pi^\sharp$.

1.3.3 Definição: Um **colchete de Poisson** numa variedade diferenciável M é uma aplicação $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ que:

(i) satisfaz a identidade de Jacobi (∴ torna $\mathcal{F}(M)$ uma $\mathbb{R}$-álgebra de Lie):

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} \equiv 0 \tag{1.43}$$

(ii) satisfaz a propriedade de Leibniz:

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g \tag{1.44}$$

$\forall f,g,h \in \mathcal{F}(M)$.

1.3.4 Proposição: *Seja* $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ *satisfazendo* (1.44) *e tome* $H \in \mathcal{F}(M)$. ***Então*** *está bem definido um campo de vetores* $\xi_H \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que*

$$\xi_H[f] = \{f,H\}$$

$\forall f \in \mathcal{F}(M)$.

PROVA: Com efeito, o fato de $\{\cdot,\cdot\}$ satisfazer a propriedade de Leibniz (1.44) significa que $\{\cdot, H\} \in \mathfrak{D}(\mathrm{M})$ (i.e., é uma derivação sobre $\mathcal{F}(\mathrm{M})$). Então $\exists!\ \xi_H \in \mathfrak{X}(\mathrm{M}) \equiv \mathfrak{D}(\mathrm{M})$ tal que $\xi_H[\cdot] = \{\cdot, H\}$. ■

1.3.5 Teorema

(I) Dado $\pi \in \phi^2(\mathrm{M})$, o colchete

$$\begin{aligned} \{\cdot,\cdot\}^\pi : \mathcal{F}(\mathrm{M}) \times \mathcal{F}(\mathrm{M}) &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathrm{M}) \\ (f,g) &\longmapsto \langle \pi \mid df \wedge dg \rangle \end{aligned} \tag{1.45}$$

está bem definido, satisfaz a propriedade de Leibniz (1.44) *e é anti-simétrico.*

Reciprocamente, dado $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(\mathrm{M}) \times \mathcal{F}(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathrm{M})$ satisfazendo (1.44) *e anti-simétrico, $\exists!\ \pi \in \phi^2(\mathrm{M})$ tal que $\{\cdot,\cdot\}$ seja dado por* (1.45).

(II) Em (I), $\{\cdot,\cdot\}^\pi$ satisfaz a identidade de Jacobi (1.43) *see $[\pi,\pi]^{S-N} \equiv 0$, i.e., $\{\cdot,\cdot\}^\pi$ é um colchete de Poisson see π é tensor de Poisson*

PROVA:

(I) (1) Seja $\pi \in \phi^2(\mathrm{M})$ e $\{\cdot,\cdot\}^\pi$ dado por (1.45). Então é claro que $\{\cdot,\cdot\}^\pi$ está bem definido e satisfaz (1.44), pois:
$(\forall p \in \mathrm{M})$

$$\begin{aligned} \{fg,h\}^\pi(p) &= \langle \pi \mid d(fg) \wedge dh \rangle(p) = \\ &= \langle \pi(p) \mid \big(g(p)df(p) + f(p)dg(p)\big) \wedge dh(p) \rangle = \\ &= g(p)\langle \pi(p) \mid df(p) \wedge dh(p) \rangle + f(p)\langle \pi(p) \mid dg(p) \wedge dh(p) \rangle = \\ &= f\{g,h\}^\pi(p) + g\{f,h\}^\pi(p) \end{aligned} \tag{1.46}$$

□

(2) Por outro lado, suponha que seja dado $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(\mathrm{M}) \times \mathcal{F}(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathrm{M})$ satisfazendo (1.44) e anti-simétrico. Seja $\pi \in \phi^2(\mathrm{M})$ definido por (1.45), i.e., $\langle \pi \mid df \wedge dg \rangle := \{f,g\}$. Vou mostrar que π está bem definido:

(a) É claro que π é alternado, pois $\{\cdot,\cdot\}$ é anti-simétrico.

(b) Resta verificar que π é $\mathcal{F}(\mathrm{M})$-bilinear. Pelo item (a), é suficiente verificar que é $\mathcal{F}(\mathrm{M})$-linear no primeiro fator.
Dado $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathrm{M})$, vou mostrar que $\mathrm{i}_\theta\pi$ é $\mathcal{F}(\mathrm{M})$-linear.
Dado $p \in \mathrm{M}$, existem $\mathcal{U} \in \tau_p(\mathrm{M})$ e $H \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ tais que $\theta \equiv dH$ em $\mathcal{U}$, por causa do lema de Poincaré. Então, em $\mathcal{U}$ $\mathrm{i}_\theta\pi = \mathrm{i}_{dH}\pi$ é $\mathcal{F}(\mathrm{M})$-linear,pois, pela proposição (1.3.4) temos

$$\langle \mathrm{i}_{dH}\pi, \cdot \rangle = \{\cdot, H\} = \xi_H(\cdot)$$

donde

$$i_\theta\pi(f\gamma)(p) = f(p)i_\theta\pi(\gamma)(p)$$

$\forall f \in \mathcal{F}(M)$ e $\forall \gamma \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Como p foi tomado arbitrariamente, isto vale $\forall p \in M$. □

Como a unicidade é evidente, segue a tese. ■

(II) Seja

$$t : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

$$(u_1, u_2, u_3) \longmapsto \oint \{\{u_1, u_2\}^\pi, u_3\}^\pi$$

Vou mostrar que

$$t(u, v, w) = \langle [\pi, \pi]^{S-N} \mid du \wedge dv \wedge dw \rangle$$

$\forall u, v, w \in \mathcal{F}(M)$

Em uma carta local $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$, temos:

(1) Por (1.32):

$$([\pi, \pi]^{S-N})^{ABC} = \frac{1}{2!}\epsilon^{ABC}_{I_2J_1J_2}\pi^{RI_2}\partial_R\pi^{J_1J_2} + \frac{(-1)^2}{2!}\epsilon^{ABC}_{I_1I_2J_2}\pi^{RJ_2}\partial_R\pi^{I_1I_2} =$$

$$= \epsilon^{ABC}_{I_1I_2J_2}\pi^{RJ_2}\partial_R\pi^{I_1I_2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}([\pi, \pi]^{S-N})^{ABC} = \frac{1}{2}\Big[\oint_{ABC} \pi^{RC}\partial_R\pi^{AB} - \oint_{ABC} \pi^{RC}\partial_R\pi^{BA}\Big] = \tag{1.47}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\oint_{ABC} \pi^{RC}\partial_R\pi^{AB} - \oint_{ABC} \pi^{RC}\partial_R(-\pi^{AB})\Big] =$$

$$= \oint_{ABC} \pi^{RC}\partial_R\pi^{AB}.$$

(2)

$$\{u, v\}^\pi := \langle \pi \mid du \wedge dv \rangle = \pi^{AB}\partial_A u\partial_B v$$

Então segue

$$\begin{aligned}\{\{u, v\}^\pi, w\}^\pi &= \pi^{CD}\partial_C(\pi^{AB}\partial_A u\partial_B v)\partial_D w = \\ &= \pi^{CD}\partial_C\pi^{AB}\partial_A u\partial_B v\partial_D w + \\ &\quad + \sum_{C<D}\sum_{A<B}\{\pi^{CD}\pi^{AB}(\partial_C\partial_A - \partial_D\partial_A)u\partial_B v\partial_D w - \\ &\qquad - \pi^{CD}\pi^{AB}(\partial_C\partial_B - \partial_D\partial_B)u\partial_A v\partial_D w + \\ &\qquad + \pi^{CD}\pi^{AB}\partial_A u(\partial_C\partial_B - \partial_D\partial_B)v\partial_D w - \\ &\qquad - \pi^{CD}\pi^{AB}\partial_B u(\partial_C\partial_A - \partial_D\partial_A)v\partial_D w\Big\}\end{aligned} \tag{1.48}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
t(u,v,w)\big|_{\mathcal{U}} &= \oint \{\{u,v\}^{\pi},w\}^{\pi}\big|_{\mathcal{U}} = \\
&= \oint \langle \pi^{CD}\partial_C\pi^{AB}\partial_A\otimes\partial_B\otimes\partial_D, du\otimes dv\otimes dw\rangle \overset{por(a)}{=} \\
&\overset{por(a)}{=} \frac{1}{2}\langle [\pi,\pi]^{ABC}\partial_A\otimes\partial_B\otimes\partial_C, du\otimes dv\otimes dw\rangle \overset{[\pi,\pi]^{S-N}\ \text{alternado}}{=} \\
&= \frac{1}{2}\langle [\pi,\pi]^{S-N}, du\wedge dv\wedge dw\rangle \overset{(1.5)}{=} \\
&= \langle [\pi,\pi]^{S-N} \mid du\wedge dv\wedge dw\rangle
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

$\therefore t\equiv 0$ *see* $[\pi,\pi]^{S-N}\equiv 0$ ■

1.3.6 Observação: Segue deste teorema que, numa variedade diferenciável M, colchete e tensor de Poisson são estruturas equivalentes, i.e., dado $\pi\in\phi^2(\mathrm{M})$ tensor de Poisson $\exists!$ $\{\cdot,\cdot\}$ colchete de Poisson induzido por π e vice-versa.

Desta forma, direi que uma **estrutura de Poisson** está definida em M quando for dado um tensor ou um colchete de Poisson em M.

1.3.7 Observação: Também segue da demonstração do teorema acima que, dados M variedade diferenciável e $\{\cdot,\cdot\}$ em M anti-simétrico e satisfazendo a propriedade de Leibniz (1.44), então $\{\cdot,\cdot\}$ satisfaz a identidade de Jacobi (1.43) se, e somente se, dado um sistema de coordenadas arbitrário $(\mathcal{U},\varphi=(x^1,\ldots,x^n))\in\mathfrak{A}(\mathrm{M})$, então, $\forall i,j,k\in\{1,\ldots,n\}$:

$$
\oint_{ijk}\{\{x^i,x^j\},x^k\} = \oint_{ijk}\sum_{R=1}^{n}\{x^i,x^R\}\partial_R\{x^j,x^k\}\equiv 0 \tag{1.50}
$$

1.3.8 Definição: Dada (M,π) variedade de Poisson, está bem definida uma aplicação

$$
\begin{aligned}
\xi : \mathcal{F}(\mathrm{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathrm{M}) \\
H &\longmapsto \xi_H := \pi^{\sharp}(dH) = \{\cdot,H\}^{\pi}
\end{aligned}
$$

Digo que (M,π,H) é um **sistema hamiltoniano**, ξ_H é o **campo hamiltoniano** induzido pela **hamiltoniana** H e as curvas integrais de ξ_H são as **trajetórias** ou **curvais integrais** do sistema hamiltoniano (M,π,H).

Vou denotar por $\mathfrak{H}(\mathrm{M})$ o conjunto $\{\xi_H : H\in\mathcal{F}(\mathrm{M})\}\subset\mathfrak{X}(\mathrm{M})$ dos campos de vetores hamiltonianos em M. Decorre da proposição seguinte que $(\mathfrak{H}(\mathrm{M}),[\cdot,\cdot])$ é uma subálgebra de Lie de $(\mathfrak{X}(\mathrm{M}),[\cdot,\cdot])$.

1.3.9 Proposição: *Nas hipóteses da definição* (1.3.8),

$$\begin{aligned} -\xi : (\mathcal{F}(\mathrm{M}), \{\cdot,\cdot\}^{\pi}) &\longrightarrow (\mathfrak{X}(\mathrm{M}), [\cdot,\cdot]) \\ H &\longmapsto -\xi_H = -\pi^{\sharp}(dH) = -\{\cdot, H\}^{\pi} \end{aligned} \tag{1.51}$$

é um homomorfismo entre álgebras de Lie.

PROVA:

Obviamente ξ_H é $\mathbb{R}$-linear, pois $\pi^{\sharp}$ e d o são. Resta verificar que preserva o colchete. Com efeito:
$\forall H, K, F \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ tem-se:

$$\begin{aligned} -\xi_{\{H,K\}}[F] = -\{F,\{H,K\}\} &\overset{por(1.43)}{=} \\ &\overset{por(1.43)}{=} \{H,\{K,F\}\} + \{K,\{F,H\}\} = \xi_H[\{K,F\}] + \xi_K[\{F,H\}] = \\ &= \xi_H\xi_K[F] - \xi_K\xi_H[F] = [H,K][F] \end{aligned} \tag{1.52}$$

■

1.3.10 Proposição: *Seja* (M,π) *uma variedade de Poisson e* $H \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$. ***Então*** $h : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ *é curva integral do campo hamiltoniano* ξ_H ***see***
$\forall t \in I, \forall G \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ *tem-se:*

$$\frac{d}{dt}(G \circ h)(t) = \{G,H\} \circ h(t)$$

PROVA:

($\Longrightarrow$) Com efeito, se h é curva integral de ξ_H, $(\forall t \in I)\, h'(t) = \xi_H(h(t)) \Rightarrow (\forall t \in I, \forall G \in \mathcal{F}(\mathrm{M}))\, h'(t)[G] = \xi_H(h(t))[G] \Leftrightarrow (\forall t \in I)\, \frac{d}{dt}(G \circ h)(t) = \{G,H\}(t)$ □

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, $(\forall t \in I, \forall G \in \mathcal{F}(\mathrm{M}))\, h'(t)[G] = \xi_H(h(t))[G] \Rightarrow (\forall t \in I)\, h'(t) = \xi_H(h(t))$. ■

1.3.11 Corolário: *Nas mesmas hipóteses,* $G \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ *é constante ao longo das trajetórias de* ξ_H ***see*** $\{G,H\} \equiv 0$. *Em particular,* H *é constante ao longo das trajetórias* ξ_H.

1.3.12 Proposição: *Seja* (M^n,π) *uma variedade de Poisson e* $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1,\ldots,x^n))$ *uma carta de* M. ***Então,*** *em* $\mathcal{U}$, *o tensor de Poisson fica univocamente determinado pelas funções* $w^{ij} = \{x^i, x^j\}, 1 \leqslant i,j \leqslant n$.

PROVA:
Com efeito,
$(\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{M}), \forall p \in \mathcal{U})$

$$\begin{aligned} \{f,g\}(p) &= \langle \pi \mid df \wedge dg \rangle(p) = \\ &= \langle \pi(p) \mid (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i(p)) \wedge (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^j}(p) dx^j(p)) \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \frac{\partial g}{\partial x^j}(p) w^{ij}(p). \end{aligned} \tag{1.53}$$

■

1.3.13 Definição: Uma variedade de Poisson (M^n, π) é dita **simplética** se $(\forall p \in \mathrm{M})$ rk $\pi(p) = n$. Nestas condições, também direi que o tensor de Poisson π é **simplético**.

1.3.14 Proposição: *Seja* (M^n, π) *uma variedade de Poisson simplética.* ***Então:***

(i) $\pi^\sharp$ *é um isomorfismo entre fibrados vetoriais;*

(ii) Seja $\pi^\flat := (\pi^\sharp)^{-1}$ *e* $\omega := \pi^\flat(\pi)$. ***Então*** ω *é uma forma simplética em* M, *i.e., é uma 2-forma fechada e não-degenerada;*

(iii) Reciprocamente, dada uma forma simplética ω *em* M, $\exists!$ *tensor de Poisson* π *simplético tal que* $\omega = \pi^\flat(\pi)$.

PROVA:

(i)

Com efeito, rk $\pi^\sharp = n \Rightarrow \pi^\sharp$ isomorfismo linear nas fibras, logo um isomorfismo entre fibrados vetoriais, como já vimos. □

(ii)

(1) $\omega \in \Omega_2(\mathrm{M})$ é não-degenerada, pois $\omega = \pi^\flat(\pi) = (\pi^\sharp)^{-1}(\pi)$ e $\pi^\sharp$ é isomorfismo.

(2) Resta verificar que ω é fechada.
Seja $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M})$. Então $(\xi_{x^1}, \ldots, \xi_{x^n})$ é um referencial móvel em $\mathcal{U}$. De fato, $(dx^1, \ldots, dx^n)$ é L.I., $\pi^\sharp$ é não-degenerado e $(\forall 1 \leqslant i \leqslant n)\ \xi_{x^i} = \pi^\sharp(dx^i)$. Além disso, $(\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n)\ \langle \omega \mid \xi_{x^i} \wedge \xi_{x^j} \rangle = \langle \pi \mid dx^i \wedge dx^j \rangle = \{x^i, x^j\}$.
Então, em $\mathcal{U}$ temos:

$(\forall i,j,k) \in \{1,\ldots,n\}$

$$\begin{aligned}\langle d\omega \mid \xi_{x^i} \wedge \xi_{x^j} \wedge \xi_{x^k}\rangle &= \xi_{x^i}\langle \omega \mid \xi_{x^j} \wedge \xi_{x^k}\rangle - \xi_{x^j}\langle \omega \mid \xi_{x^i} \wedge \xi_{x^k}\rangle + \xi_{x^k}\langle \omega \mid \xi_{x^i} \wedge \xi_{x^j}\rangle - \\ &\quad - \langle \omega \mid [\xi_{x^i}, \xi_{x^j}] \wedge \xi_{x^k}\rangle + \langle \omega \mid [\xi_{x^i}, \xi_{x^k}] \wedge \xi_{x^j}\rangle - \langle \omega \mid [\xi_{x^j}, \xi_{x^k}] \wedge \xi_{x^i}\rangle = \\ &= 2 \oint_{i,j,k} \{\{x^i, x^j\}, x^k\} = 0\end{aligned} \tag{1.54}$$

donde $d\omega|_{\mathcal{U}} \equiv 0$. Como $\mathcal{U}$ foi tomado arbitrariamente, segue $d\omega \equiv 0$. □

(iii)

Por outro lado, dada $\omega \in \Omega_2(\mathrm{M})$ simplética, seja $\pi := \omega^\sharp(\omega)$. Então é claro que $\pi^\flat(\pi) = \omega$, π é um tensor de Poisson por causa de (1.54) e é simplético porque $\pi^\sharp = \omega^\sharp$ é isomorfismo. A unicidade de π é evidente. ■

Segue desta proposição que, dada M variedade diferenciável, um tensor de Poisson simplético em M e uma 2-forma simplética em M são estruturas equivalentes.

1.3.15 Exemplo (a forma simplética canônica do fibrado cotangente)
Seja M uma variedade diferenciável. Vou mostrar que existe uma forma simplética canonicamente definida no fibrado cotangente de M, $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$.

Seja $\Pi^*_{\mathrm{M}} : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ projeção canônica e $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ definida por

$$\begin{aligned}\theta : \mathrm{T}^*\mathrm{M} &\longrightarrow \mathrm{T}^*(\mathrm{T}^*\mathrm{M}) \\ (q,p) &\longmapsto \theta_{(q,p)} := p \circ \mathrm{T}\Pi^*_{\mathrm{M}}(q,p)\end{aligned} \tag{1.55}$$

Tomando cartas

$$\begin{aligned}&(\mathcal{U}, \varphi = (q^1,\ldots,q^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M}) \\ &(\mathrm{T}\mathcal{U}, \mathrm{T}\varphi = (q^1,\ldots,q^m,\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{TM}) \\ &(\mathrm{T}^*\mathcal{U}, \mathrm{T}^*\varphi = (q_1,\ldots,q_m,p_1,\ldots,p_m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T}^*\mathrm{M})\end{aligned} \tag{1.56}$$

temos:

$$\theta|_{\mathrm{T}^*\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i \tag{1.57}$$

e isto mostra que, de fato, $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$. θ é chamada de **1-forma canônica** do $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$.

Tome

$$\omega := -d\theta \in \Omega(\mathrm{T}^*\mathrm{M}) \tag{1.58}$$

Então ω é simplética, pois é claro que é fechada e

$$\omega|_{\mathrm{T}^*\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \tag{1.59}$$

e desta expressão em coordenadas é fácil concluir que ω é não-degenerada. Esta ω é chamada de a **forma simplética canônica do** $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$.

1.3.16 Definição: Sejam $(\mathrm{M}, \pi_{\mathrm{M}})$ e $(\mathrm{N}, \pi_{\mathrm{N}})$ variedades de Poisson e $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ uma aplicação tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} \wedge^2\mathrm{T(M)} & \xrightarrow{\wedge^2 \mathrm{T}f} & \wedge^2\mathrm{T(N)} \\ {\scriptstyle \pi_{\mathrm{M}}}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \pi_{\mathrm{N}}} \\ \mathrm{M} & \xrightarrow{f} & \mathrm{N} \end{array} \tag{1.60}$$

ou seja, tal que π_M e π_N sejam f-relacionados. Direi que uma tal f é uma **aplicação de Poisson** ou um **homomorfismo** entre variedades de Poisson. Se f também for um difeo, direi que é um **isomorfismo** entre variedades de Poisson. Finalmente, se $\mathrm{N} = \mathrm{M}$, usarei **endomorfismo** no lugar de homomorfismo e **automorfismo** no lugar de isomorfismo.

1.3.17 Proposição: *Sejam* (M, π_M) *e* (N, π_N) *variedades de Poisson e* $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$. *São equivalentes:*

(i) f *é uma aplicação de Poisson*

(ii) f *preserva colchetes, i.e.,*

$$\{H, K\}^{\pi_{\mathrm{N}}} \circ f = \{H \circ f, K \circ f\}^{\pi_{\mathrm{M}}} \tag{1.61}$$

$\forall H, K \in \mathcal{F}(\mathrm{N})$

(iii) $\forall H \in \mathcal{F}(\mathrm{N})$, ξ_H *e* $\xi_{H \circ f}$ *são* f*-relacionados, i.e.,*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TM} & \xrightarrow{\mathrm{T}f} & \mathrm{TN} \\ {\scriptstyle \xi_{H\circ f}}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \xi_H} \\ \mathrm{M} & \xrightarrow{f} & \mathrm{N} \end{array}$$

PROVA:

(i) $\Rightarrow$(ii)

Com efeito, suponha que o diagrama (1.60) comute. Então:
$(\forall H, K \in \mathcal{F}(\mathrm{N}), \forall p \in \mathrm{M})$

$$\begin{aligned}\{H,K\}^{\pi_{\mathrm{N}}} \circ f(p) = \langle \pi_{\mathrm{N}} \mid dH \wedge dK \rangle \circ f(p) &\overset{por(1.60)}{=} \left\langle \overset{2}{\wedge} \mathrm{T}f \cdot \pi_{\mathrm{M}}(p) \,\middle|\, dH(p) \wedge dK(p) \right\rangle = \\ &= \left\langle \pi_{\mathrm{M}}(p) \,\middle|\, \left(\overset{2}{\wedge} \mathrm{T}f(p)\right)^{*} (dH(p) \wedge dK(p)) \right\rangle = \\ &= \left\langle \pi_{\mathrm{M}}(p) \,\middle|\, d(H \circ f)(p) \wedge d(K \circ f)(p) \right\rangle = \\ &= \{H \circ f, K \circ f\}^{\pi_{\mathrm{M}}}(p)\end{aligned} \tag{1.62}$$

□

(ii) ⇒(iii)

Por hipótese, $(\forall H, K \in \mathcal{F}(\mathrm{N}), \forall p \in \mathrm{M})$

$$\{H,K\}^{\pi_{\mathrm{N}}} \circ f(p) = \{H \circ f, K \circ f\}^{\pi_{\mathrm{M}}}(p)$$

ou seja, $(\forall H, K \in \mathcal{F}(\mathrm{N}), \forall p \in \mathrm{M})$

$$\begin{aligned}&(\forall H, K \in \mathcal{F}(\mathrm{N}), \forall p \in \mathrm{M})\ \langle \xi_K(f(p)), dH(f(p)) \rangle = \langle \xi_{K \circ f}(p), (d(H \circ f)(p)) \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall K \in \mathcal{F}(\mathrm{N}), \forall p \in \mathrm{M})\ \xi_K(f(p)) = \mathrm{T}f \cdot \xi_{K \circ f}(p)\end{aligned} \tag{1.63}$$

□

(iii) ⇒(i)

Por hipótese, $(\forall K \in \mathcal{F}(\mathrm{N}), \forall p \in \mathrm{M})$

$$\xi_K(f(p)) = \mathrm{T}f \cdot \xi_{K \circ f}(p)$$

Então,

$$\begin{aligned}&(\forall H, K \in \mathcal{F}(\mathrm{N}), \forall p \in \mathrm{M})\ \langle \xi_K(f(p)), dH(f(p)) \rangle = \langle \xi_{K \circ f}(p), (d(H \circ f)(p)) \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall H, K \in \mathcal{F}(\mathrm{N}), \forall p \in \mathrm{M})\ \langle \pi_{\mathrm{N}} \,|\, dH \wedge dK \rangle \circ f(p) = \langle \overset{2}{\wedge} \mathrm{T}f \cdot \pi_{\mathrm{M}}(p) \mid dH(p) \wedge dK(p) \rangle\end{aligned} \tag{1.64}$$

■

1.3.18 Proposição: *Sejam* (M, π) *variedade de Poisson,* $H \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ *e* Φ^{ξ_H} *o fluxo local de* ξ_H*:*

$$\begin{aligned}\Phi^{\xi_H} : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathrm{M} \\ (t,p) &\longmapsto \Phi^{\xi_H}(t,p) = \Phi_t^{\xi_H}(p)\end{aligned}$$

onde $\mathcal{D} \in \tau(\mathbb{R} \times \mathrm{M})$.

Então, $\forall t \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathcal{D}_t := \mathrm{dom}\ \Phi_t^{\xi_H} \neq \emptyset$, $\Phi_t^{\xi_H} : \mathcal{D}_t \longrightarrow \mathrm{M}$ *é uma aplicação de Poisson.*

PROVA:

(i) Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{M})$ um campo de vetores localmente hamiltoniano, i.e., $\forall p \in \mathrm{M}, \exists \mathcal{U} \in \tau_p(\mathrm{M})$ tal que $X|_{\mathcal{U}}$ é hamiltoniano. Então, $(\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{M}))$

$$\mathfrak{L}_X\{f,g\} = \{\mathfrak{L}_X f, g\} + \{f, \mathfrak{L}_X g\}$$

Com efeito, dado $p \in \mathrm{M}$, tome $\mathcal{U} \in \tau_p(\mathrm{M})$ e $h \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tais que $X|_{\mathcal{U}} = \xi_h$. Então, em $\mathcal{U}$ temos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_X\{f,g\} = \mathfrak{L}_{\xi_h}\{f,g\} &\overset{por(1.43)}{=} -\{\{g,h\},f\} - \{\{h,f\},g\} = \\ &= \{\mathfrak{L}_X f, g\} + \{f, \mathfrak{L}_X g\} \end{aligned} \tag{1.65}$$

□

(ii) $(\forall H \in \mathcal{F}(\mathrm{M}))\, \mathfrak{L}_{\xi_H}\pi \equiv 0$

Com efeito:

$(\forall F, G, H \in \mathcal{F}(\mathrm{M}))$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}_{\xi_H}\langle \pi \mid dF \wedge dG\rangle = \langle \mathfrak{L}_{\xi_H}\pi \mid dF \wedge dG\rangle + \\ &\qquad + \langle \pi \mid \mathfrak{L}_{\xi_H} dF \wedge dG\rangle + \langle \pi \mid dF \wedge \mathfrak{L}_{\xi_H} dG\rangle \overset{d\mathfrak{L}_{\xi_H} = \mathfrak{L}_{\xi_H} d}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{L}_{\xi_H}\{F,G\} = \langle \mathfrak{L}_{\xi_H}\pi \mid dF \wedge dG\rangle + \{\mathfrak{L}_{\xi_H} F, G\} + \{F, \mathfrak{L}_{\xi_H} G\} \overset{por(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \langle \mathfrak{L}_{\xi_H}\pi \mid dF \wedge dG\rangle = 0 \end{aligned} \tag{1.66}$$

$\therefore \mathfrak{L}_{\xi_H}\pi \equiv 0$ □

(iii) Como $(\forall t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{D}_t \neq \emptyset)$

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} (\Phi_{-s}^{\xi_H})_*\pi = (\Phi_{-t}^{\xi_H})_* \mathfrak{L}_{\xi_H}\pi$$

(vide [AM78], por exemplo), segue de (2) que $(\forall t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{D}_t \neq \emptyset)$

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} (\Phi_{-s}^{\xi_H})_*\pi = 0$$

$\therefore (\Phi_t^{\xi_H})_*\pi = \pi$, i.e., $\Phi_t^{\xi_H}$ é uma aplicação de Poisson. ■

1.3.19 Definição: Uma **função de Casimir** ou **invariante** numa variedade de Poisson (M, π) é uma função $C \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ tal que $\{C, f\} \equiv 0, \forall f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$.

1.3.20 Proposição: *São equivalentes, dada uma variedade de Poisson* (M, π)*:*

(i) C é função de Casimir;

(ii) $\xi_C \equiv 0$;

(iii) C é constante ao longo das órbitas de qualquer campo hamiltoniano ξ_f

PROVA:

(i) $\Rightarrow$(ii)

Com efeito, seja $C \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ tal que $\{C, f\} \equiv 0, \forall f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$.
Então $(\forall f \in \mathcal{F}(\mathrm{M}))\, \xi_C(f) \equiv 0 \therefore \xi_C \equiv 0$. □

(ii) $\Rightarrow$(iii)

Seja $\gamma_{\xi_f} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ curva integral do campo hamiltoniano ξ_f. Temos:

$$\xi_C \equiv 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(C \circ \gamma_{\xi_f}) \overset{\text{proposição (1.3.10)}}{=} \{C, f\} \circ \gamma_{\xi_f} \equiv 0$$

$\therefore C$ é constante ao longo de γ_{ξ_f}.

(iii) $\Rightarrow$(i)

Sejam $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ e $p \in \mathrm{M}$. Vou mostrar que $\{C, f\}(p) = 0$. Tome $\gamma_p : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ curva integral de ξ_f que se inicia em p. Por hipótese $C \circ \gamma_p = cte.$, logo:

$$\{C, f\}(p) = \{C, f\} \circ \gamma_p(0) \overset{\text{proposição (1.3.10)}}{=} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (C \circ \gamma_p)(t) = 0$$

■

1.4 A π-cohomologia de uma variedade de Poisson

Dada (M, π) variedade de Poisson, sejam

$$\begin{aligned} &\partial := -[\pi, \cdot]^{S-N} : \phi(\mathrm{M}) \longrightarrow \phi(\mathrm{M}) \\ &\partial^p := \partial|_{\phi^p(\mathrm{M})} : \phi^p(\mathrm{M}) \longrightarrow \phi^{p+1}(\mathrm{M}), \quad \text{para cada } p \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{1.67}$$

1.4.1 Proposição:

$$\cdots \longrightarrow \phi^{-1}(\mathrm{M}) = \{\mathbb{O}\} \xrightarrow{\partial^{-1}} \phi^0(\mathrm{M}) \xrightarrow{\partial^0} \phi^1(\mathrm{M}) \xrightarrow{\partial^1} \phi^2(\mathrm{M}) \xrightarrow{\partial^2} \phi^3(\mathrm{M}) \longrightarrow \cdots \tag{1.68}$$

é um complexo de co-cadeias ($\therefore \partial$ é um operador de cohomologia).

PROVA:

Com efeito, ∂ é um homomorfismo, $\partial(\phi^p(\mathrm{M})) \subset \phi^{p+1}(\mathrm{M})$, para cada $p \in \mathbb{Z}$, e $\partial \circ \partial \equiv \mathbb{O}$, pois, pela identidade de Jacobi (1.28), $\forall A \in \phi(\mathrm{M})$:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{(|\pi|-1)(|A|-1)}\overbrace{[[\pi,\pi]^{S-N}}^{\equiv\mathbb{O}},A]^{S-N} + \overbrace{(-1)^{(|\pi|-1)(|\pi|-1)}}^{=-1}[[\pi,A]^{S-N},\pi]^{S-N} + \\
&\quad + \overbrace{(-1)^{(|A|-1)(|\pi|-1)}}^{=(-1)^{|A|-1}}[[A,\pi]^{S-N},\pi]^{S-N} \equiv \mathbb{O} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mathbb{O} = -[[\pi,A]^{S-N},\pi]^{S-N} + (-1)^{|A|-1}[[A,\pi]^{S-N},\pi]^{S-N} = \\
&\quad = -(-1)^{|A|}[\pi,[\pi,A]^{S-N}]^{S-N} + (-1)^{2(|A|-1)+|A|+1}[\pi,[\pi,A]^{S-N}]^{S-N} = \\
&\quad = 2(-1)^{|A|+1}[\pi,[\pi,A]^{S-N}]^{S-N} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \partial \circ \partial(A) = [\pi,[\pi,A]^{S-N}]^{S-N} \equiv \mathbb{O}
\end{aligned} \tag{1.69}$$

■

1.4.2 Definição

Sejam (M,π) variedade de Poisson, ∂ dado por (1.67) e $p \in \mathbb{Z}$. Vou definir:

$$\mathrm{H}_\pi{}^p(\mathrm{M}) := \frac{\mathrm{Ker}\ \partial^p}{\mathrm{Im}\ \partial^{p-1}} \tag{1.70}$$

é o ***p*-ésimo módulo da π-cohomologia de** M.

A cohomologia definida por ∂ sobre a álgebra exterior dos campos tensoriais contravariantes de M, $\phi(\mathrm{M})$, é chamada **π-cohomologia** da variedade de Poisson M.

A próxima proposição diz que, se (M,π) for uma variedade de Poisson simplética, a cohomologia de *de Rham* e a π-cohomologia de M coincidem. Um resultado mais geral pode ser encontrado em [Lic].

1.4.3 Proposição: *Dada* (M,π) *variedade de Poisson simplética, tem-se,* $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}_\pi{}^p(\mathrm{M}) \equiv \mathrm{H}_{\mathrm{deR}}{}^p(\mathrm{M})$, *onde* $\mathrm{H}_{\mathrm{deR}}{}^p(\mathrm{M})$ *é o p-ésimo módulo da cohomologia de* de Rham *de* M.

Para demonstrar esta proposição, precisarei dos lemas seguintes:

1.4.4 Lema: *Sejam* (M,π) *variedade de Poisson,* $k,l \in \mathbb{N}$, $X \in \phi^k(\mathrm{M})$, $Y \in \phi^l(\mathrm{M})$ *e* $Z \in \phi(\mathrm{M})$. ***Então:***

$$[X, Y \wedge Z]^{S-N} = [X,Y]^{S-N} \wedge Z + (-1)^{(k-1)l} Y \wedge [X,Z]^{S-N} \tag{1.71}$$

PROVA:

Farei apenas uma indicação da demonstração.

Para $Y \in \phi^0(\mathrm{M}) = \mathcal{F}(\mathrm{M})$, (1.71) pode ser obtida imediatamente a partir da definição (1.2.2). É suficiente, pois, verificar (1.71) para $Y \in \phi^1(\mathrm{M})$, pois o caso geral $Y \in \phi^n(\mathrm{M})$ sairá facilmente por indução sobre n.

Para demonstrar o lema para $Y \in \phi^1(\mathrm{M}) = \mathfrak{X}(\mathrm{M})$, verifiquei que a expressão em coordenadas de ambos os membros de (1.71), numa carta local, coincidem; basta usar a expressão em coordenadas do colchete de Schouten (1.32) e do produto exterior:

$$\begin{aligned} &\left(\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall A \in \phi^p(\mathrm{M}), \forall B \in \phi^q(\mathrm{M})\right) \\ &(A \wedge B)^{k_1,\dots,k_{p+q}} = \frac{1}{p!\,q!}\, \epsilon^{k_1,\dots,k_{p+q}}_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q}\, A^{i_1,\dots,i_p}\, B^{j_1,\dots,j_q} \end{aligned} \tag{1.72}$$

e, fazendo algumas contas, segue (1.71). ■

1.4.5 Lema: *Sejam* (M, ω) *variedade simplética,*

$$\begin{aligned} \mu : \mathfrak{X}(\mathrm{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}^*(\mathrm{M}) \\ X &\longmapsto -\mathrm{i}(X)\omega \end{aligned} \tag{1.73}$$

e

$$\mu_* : \phi(\mathrm{M}) \longrightarrow \Omega(\mathrm{M}) \tag{1.74}$$

induzida por μ*, como na seção* (1.1)*, que daqui em diante também chamarei de* μ*.* **Então:**

(i) μ *é um isomorfismo;*

(ii) $\pi := \mu^{-1}(\omega)$ *é tensor de Poisson;*

(iii) O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \phi(\mathrm{M}) & \xrightarrow{\ \mu\ } & \Omega(\mathrm{M}) \\ {\scriptstyle \partial := [\pi,\cdot]^{S-N}}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle d} \\ \phi(\mathrm{M}) & \xrightarrow{\ \mu\ } & \Omega(\mathrm{M}) \end{array} \tag{1.75}$$

PROVA:

Os itens (i) e (ii) já foram mostrados na proposição (1.3.14). Resta mostrar o item (iii). Com efeito:

Seja $\left(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n)\right) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M})$ carta simplética, dada pelo teorema de Darboux. Uma demonstração de uma generalização do teorema de Darboux será dada na seção (1.7). Como ω tem componentes constantes em $\mathcal{U}$, digamos:

$$\omega|_{\mathcal{U}} = \omega_{ab}\, dx^a \otimes dx^b, \quad \omega_{ab} \in \mathbb{R} \tag{1.76}$$

segue:

$$\begin{aligned} \left(\forall c \in \{1, \dots, n\}\right) \mu(\partial_c) &= -\mathrm{i}(\partial_c)\omega = \\ &= -\omega_{ca}\, dx^a \end{aligned} \tag{1.77}$$

logo:

$$\begin{aligned}
&\mu(\pi) = \omega \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mu(\pi^{cd}\,\partial_c \otimes \partial_d) = \omega_{ab}\,dx^a \otimes dx^b \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \pi^{cd}\,\mu(\partial_c) \otimes \mu(\partial_d) = \pi^{cd}\,\omega_{ca}\,\omega_{db}\,dx^a \otimes dx^b = \\
&\qquad\qquad = \omega_{ab}\,dx^a \otimes dx^b \Rightarrow \\
&\Rightarrow \pi^{cd}\,\omega_{ca}\,\omega_{db} = \omega_{ab} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \pi^{cd}\,\omega_{ca} = \omega_{ab}\,\omega^{bd} = \delta_a^d
\end{aligned} \tag{1.78}$$

logo π também tem componentes constantes nesta carta e, de (1.32), segue que, em $\mathcal{U}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall X^{\in}\phi^i(\mathrm{M})$:

$$[\pi, X]^{k_0,\ldots,k_i} = \frac{1}{i!}\,\epsilon^{k_0,\ldots,k_i}_{J,I_1,\ldots,I_i}\,\pi^{RJ}\,\partial_R X^{I_1,\ldots,I_i} \tag{1.79}$$

(1) Para $X \in \phi^0(\mathrm{M}) = \mathcal{F}(\mathrm{M})$, temos, em $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
\mu\big([\pi, X]^{S-N}\big) &\overset{(1.79)}{=} \mu(\pi^{RJ}\,\partial_R X\,\partial_J) \overset{(1.77)}{=} \\
&= -\pi^{RJ}\,\partial_R X\,\omega_{Ja}\,dx^a \overset{(1.78)}{=} \\
&= \partial_R X\,\delta_a^R\,dx^a = \\
&= \partial_R X\,dx^R = \\
&= dX = d\,\mu(X)
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Como $\mathcal{U}$ é arbitrário, temos $\mu\big([\pi, X]^{S-N}\big) = d\,\mu(X)$ em M, $\forall X \in \phi^0(\mathrm{M})$. □

(2) Para $X \in \phi^1(\mathrm{M}) = \mathfrak{X}(\mathrm{M})$, temos, em $\mathcal{U}$, pondo $X|_{\mathcal{U}} = X^i\,\partial_i$:

$$\begin{aligned}
\mu\big([\pi, X]^{S-N}\big) &= \mu\big([\pi, X^i\,\partial_i]^{S-N}\big) \overset{\text{lema (1.4.4)}}{=} \\
&= \mu\big([\pi, X^i]^{S-N} \wedge \partial_i + X^i \wedge [\pi, \partial_i]^{S-N}\big) = \\
&= \mu\big([\pi, X^i]^{S-N}\big) \wedge \mu(\partial_i) + \mu(X^i) \wedge \mu\big(\underbrace{[\pi, \partial_i]^{S-N}}_{\overset{(1.79)}{=}0}\big) \overset{(1.80),(1.77)}{=} \\
&= d\,X^i \wedge (-\omega_{ia}\,dx^a) \overset{\omega \text{ tem componentes ctes.}}{=} \\
&= d\,(-X^i\,\omega_{ia}\,dx^a) \overset{(1.77)}{=} \\
&= d\,\big(X^i\,\mu(\partial_i)\big) = \\
&= d\,\mu(X^i\,\partial_i) = d\,\mu(X)
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Como $\mathcal{U}$ é arbitrário, temos $\mu\big([\pi, X]^{S-N}\big) = d\,\mu(X)$ em M, $\forall X \in \phi^1(\mathrm{M})$. □

(3) Dado $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 1$, suponha que o diagrama (1.75) seja comutativo para $X \in \phi^i(\mathrm{M})$, ou seja, $\forall X \in \phi^i(\mathrm{M})$:

$$\mu\big([\pi, X]^{S-N}\big) = d\,\mu(X) \tag{1.82}$$

Então, dados $Y \in \phi^1(\mathrm{M}) = \mathfrak{X}(\mathrm{M}), X \in \phi^i(\mathrm{M})$, temos:

$$\begin{aligned}\mu\big([\pi, X \wedge Y]^{S-N}\big) &\overset{\text{lema (1.4.4)}}{=} \mu\big([\pi, X]^{S-N}\big) \wedge \mu(Y) + (-1)^i\,\mu(X) \wedge \mu\big([\pi, Y]^{S-N}\big) \overset{\text{hipótese de indução}}{=} \\ &= d\,\mu(X) \wedge \mu(Y) + (-1)^i\,\mu(X) \wedge d\,\mu(Y) = \\ &= d\,\big(\mu(X) \wedge \mu(Y)\big) = \\ &= d\,\mu(X \wedge Y)\end{aligned} \tag{1.83}$$

e, pela $\mathbb{R}$-linearidade de $[\pi, \cdot]^{S-N}$ e de μ, isto mostra que (1.82) vale para $X \in \phi^{i+1}(\mathrm{M})$, fato que conclui a demonstração, por indução sobre i. ■

PROVA DA PROPOSIÇÃO (1.4.3):
Com efeito, pelo lema (1.4.5), temos que $\mu : \phi(\mathrm{M}) \longrightarrow \Omega(\mathrm{M})$, dada por (1.74), é um isomorfismo, e, $\forall X \in \phi(\mathrm{M})$:

$$\mu(\partial X) = -d\,\big(\mu(X)\big) \tag{1.84}$$

logo, dado $p \in \mathbb{N}$, $\mu^p := \mu|_{\phi^p(\mathrm{M})} : \phi^p(\mathrm{M}) \longrightarrow \Omega^p(\mathrm{M})$ é um isomorfismo e leva p-vetores fechados (respectivamente, exatos) em p-formas fechadas (respectivamente, exatas), portanto induz um isomorfismo:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu^p} : \mathrm{H}_\pi{}^p(\mathrm{M}) &\longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{deR}}{}^p(\mathrm{M}) \\ [X] &\longmapsto [\mu(X)]\end{aligned} \tag{1.85}$$

e isto conclui a demonstração, pois $p \in \mathbb{N}$ foi tomado arbitrariamente. ■

1.5 Teorema da Folheação Simplética

Nesta seção, demonstrarei o teorema que leva o seu nome, segundo o qual toda variedade de Poisson admite uma folheação com singularidades por folhas simpléticas.

1.5.1 Definição: Seja $(\mathrm{M}, \pi_\mathrm{M})$ uma variedade de Poisson. Uma **subvariedade de Poisson** de $(\mathrm{M}, \pi_\mathrm{M})$ é um par $\big((\mathrm{N}, \pi_\mathrm{N}), f\big)$ tal que (N, f) seja uma subvariedade de M e $f : (\mathrm{N}, \pi_\mathrm{N}) \longrightarrow (\mathrm{M}, \pi_M)$ seja uma aplicação de Poisson.

1.5.2 Proposição: *Seja* $(\mathrm{M}, \pi_{\mathrm{M}})$ *variedade de Poisson e* (N, i) *subvariedade de* M, *onde* i *é a inclusão. Se existe tensor de Poisson* π_{N} *que torna* N *subvariedade de Poisson de* M, *então* π_{N} *é único.*

PROVA:

Com efeito, suponha que exista π_{N} que torna N subvariedade de Poisson de M. Dados $f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{N})$ e $x \in \mathrm{N}$, tome $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ extensões locais de f e g em torno de $i(x)$, respectivamente. Então:

$$\{f, g\}^{\mathrm{N}}(x) = \{\widetilde{f}, \widetilde{g}\}^{\mathrm{M}} \circ i(x) \tag{1.86}$$

e isto mostra que $\{\cdot, \cdot\}^{\mathrm{N}}$ fica univocamente determinado por $\{\cdot, \cdot\}^{\mathrm{M}}$. ■

1.5.3 Proposição: *Sejam* $(\mathrm{M}, \pi_{\mathrm{M}})$ *variedade de Poisson e* (N, i) *subvariedade de* M, *onde* i *é a inclusão. Então existe tensor de Poisson* π_{N} *em* N *que a torna subvariedade de Poisson de* M *see* $\forall p \in \mathrm{N}$

$$\pi_{\mathrm{M}}^{\sharp}(p) : \mathrm{T}_p^*\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{T}_p\mathrm{M}$$

é tal que $\pi_{\mathrm{M}}^{\sharp}(p)(\mathrm{T}_p^*\mathrm{M}) \subset \mathrm{T}_p\mathrm{M}$, *ou seja, se qualquer campo hamiltoniano de* $(\mathrm{M}, \pi_{\mathrm{M}})$ *é tangente à* N.

PROVA:

$(\Rightarrow)$

Com efeito, suponha (N, i) subvariedade de Poisson de M. Então, dada $f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, segue da proposição (1.3.17) que $\xi_f \circ i = di \cdot \xi_{f \circ i}$, logo ξ_f é tangente à N. □

$(\Leftarrow)$

Dadas $f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{N})$ e $x \in \mathrm{N}$, sejam $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ extensões locais de f e g em torno de $i(x)$, respectivamente. Vou definir:

$$\{f, g\}^{\mathrm{N}}(x) := \{\widetilde{f}, \widetilde{g}\}^{\mathrm{M}} \circ i(x) \tag{1.87}$$

Vou mostrar que $\{\cdot, \cdot\}^{\mathrm{N}}$ está bem definido; se isto for verdade, é claro que este colchete é de Poisson e torna (N, i) subvariedade de Poisson de M.

É suficiente verificar que, se $\overline{f}$ for outra extensão de f em torno de x, então $\xi_{\overline{f}}(i(x)) = \xi_{\widetilde{f}}(i(x))$, ou, equivalentemente, que $\xi_{\overline{f}-\widetilde{f}}(i(x)) \equiv \mathbb{O}$.

Com efeito, sejam $n = \dim(\mathrm{N}), m = \dim(\mathrm{M})$ e $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M})$ sistema de coordenadas centrado em $i(x)$ e adapatado à N, ou seja, tal que $(\mathcal{V}, \psi = (\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{N})$, onde $\mathcal{V} := \{u \in \mathcal{U}$ tal que $x^{n+1}(u) = \cdots = x^m(u) = 0\}$ e $\widetilde{x}^j := x^j \circ i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Como todos os campos hamiltonianos de M são tangentes à N, por hipótese, temos:

$$\begin{aligned}\xi_{\overline{f}-\widetilde{f}}(i(x)) &= \sum_{j,k=1}^{n}\{x^j,x^k\}\frac{\partial(\overline{f}-\widetilde{f})}{\partial x^j}(i(x))\partial_{x^k}(i(x)) = \\ &= \sum_{j,k=1}^{n}\{x^j,x^k\}\frac{\partial(f-f)}{\partial \widetilde{x}^j}(x)\partial_{x^k}(i(x)) = \\ &= \mathbb{O}\end{aligned} \tag{1.88}$$

e isto conclui a demonstração. ■

1.5.4 Teorema (da folheação simplética, [Wei])
Seja (M,π) *uma variedade de Poisson. Dados* $x,y\in\mathrm{M}$ *direi* $x\sim y$ *se existir curva* C^∞ *por partes ligando* x *e* y*, cada segmento da qual é curva integral de um campo hamiltoniano.*

Então $\sim$ *é uma relação de equivalência em* M*,* $\mathrm{M}/\sim$ *é uma folheação de* M *com singularidades*[1] *e cada folha é uma subvariedade de Poisson simplética de* M*.*

PROVA:
Seja S a família em $\mathfrak{X}(\mathrm{M})$ formada por todos os campos hamiltonianos em M, ou seja,

$$S := \{\xi_H = \pi^\sharp(dH) : H\in\mathcal{F}(\mathrm{M})\}$$

É imediato verificar que as classes de equivalência de $M/\sim$ são as órbitas[2] de S, ou seja, $M/\sim = \mathfrak{F}(S)$. Então segue do teorema (A.14), no apêndice A, que $M/\sim$ é uma folheação de M com singularidades.

Resta mostrar que cada folha é uma subvariedade de Poisson simplética de (M,π).

Afirmação: S é homogênea, isto é, $(\forall x\in\mathrm{M})\ S(x)=\overline{S}(x)$ (vide definição (A.13)).

Então segue da proposição (1.5.3) que cada folha é uma subvariedade de Poisson simplética de (M,π), pois, neste caso,

$$(\forall x\in\mathrm{M})\ \pi^\sharp(\mathrm{T}^*_x\mathrm{M}) = S(x) \overset{\text{S homogênea}}{=} \overline{S}(x) \overset{\text{teorema (A.14)}}{=} \mathrm{T}_x(\mathrm{M},\mathfrak{F})$$

Prova da Afirmação:
Obviamente $(\forall x\in\mathrm{M})\ S(x) = \mathrm{Lie}\,S(x)$, pois $S = \mathrm{Lie}\,S$, uma vez que S é involutiva por causa da proposição (1.3.9).

É suficiente verificar, então, pela proposição (A.15), que

$$\left(\forall X\in S,\forall Y\in\mathrm{Lie}\,S,\forall t\in\Omega_x := \mathrm{dom}\,\Phi^X(\cdot,x)\right)\mathrm{T}X^t\circ Y\circ X^{-t}(x)\in\mathrm{Lie}\,S(x) \tag{1.89}$$

Mas, dados X,Y e t nestas condições, segue da proposição (1.3.18) que X^t é uma aplicação de Poisson, portanto segue da proposição (1.3.17) que o campo

$$\mathrm{T}X^t\circ Y\circ X^{-t} : \mathrm{dom}\,\Phi^X_t \longrightarrow \mathrm{TM}$$

é hamiltoniano, donde $\mathrm{T}X^t\circ Y\circ X^{-t}(x)\in S(x)$ e está verificada (1.89). ■

[1] vide definição (A.2) no apêndice A
[2] vide definição (A.13)

1.5.5 Observação: Sejam (M, π) uma variedade de Poisson e $C \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ uma função de Casimir. Então segue da proposição (1.3.20) que C é constante ao longo das folhas simpléticas de (M, π). Após demonstrar o *splitting theorem* (vide seção (1.7)), mostrarei que, se o posto do tensor de Poisson for localmente constante, dado $p \in \mathrm{M}$, existe uma vizinhança de p na qual a folha simplética que passa por p coincide com a intersecção das hiperfícies de nível regulares por p das funções de Casimir definidas nesta vizinhança.

1.6 Estrutura de Poisson Produto

Sejam M e N variedades diferenciáveis. Sabe-se que, no produto M×N, munido da topologia produto, é possível definir canonicamente uma estrutura diferenciável $\mathfrak{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{N})$ (estrutura diferenciável produto), induzida pelo seguinte atlas:

$$\mathcal{A} := \{(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \varphi \times \psi) : (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M}) \text{ e } (\mathcal{V}, \psi) \in \mathfrak{A}(\mathrm{N})\} \tag{1.90}$$

Com esta estrutura de variedade diferenciável (topologia produto mais estrutura diferenciável produto), $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ é chamada *variedade produto.*

Vou denotar por Π_{M} e Π_{N} as projeções canônicas de $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ em M e N, respectivamente. Dado $(m, n) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$, vou definir:

$$\begin{aligned} i_n : \mathrm{M} &\longrightarrow \mathrm{M} \times \mathrm{N} \\ x &\longmapsto (x, n) \end{aligned} \tag{1.91}$$

$$\begin{aligned} j_m : \mathrm{N} &\longrightarrow \mathrm{M} \times \mathrm{N} \\ x &\longmapsto (m, x) \end{aligned} \tag{1.92}$$

É imediato verificar que i_n e j_m são mergulhos de M e N em $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$, respectivamente. Os seguintes fatos acerca da variedade produto $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ também são de verificação imediata (vide [War83] ou [Boo75], por exemplo):

(i) Π_{M} e Π_{N} são submersões, e vale:

$$\Pi_{\mathrm{M}} \circ i_n = \mathrm{id}_{\mathrm{M}} \tag{1.93}$$

$$\Pi_{\mathrm{N}} \circ j_m = \mathrm{id}_{\mathrm{N}} \tag{1.94}$$

(ii) Dada P variedade diferenciável, então $f : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ é C^∞ *see* $\Pi_{\mathrm{M}} \circ f$ e $\Pi_{\mathrm{N}} \circ f$ o forem.

(iii)

$$F : \mathrm{T}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{TM} \times \mathrm{TN} \tag{1.95}$$
$$v_{(m,n)} \longmapsto (d\Pi_{\mathrm{M}} \cdot v, d\Pi_{\mathrm{N}} \cdot v)_{(m,n)}$$

é um isomorfismo entre fibrados vetoriais.

(iv)

$$\mathrm{T}_{(m,n)}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}) = di_n \cdot \mathrm{T}_m\mathrm{M} \oplus dj_m \cdot \mathrm{T}_n\mathrm{N} \tag{1.96}$$

(v)

$$\mathrm{TM}|_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} := \bigcup_{(m,n)\in\mathrm{M}\times\mathrm{N}} di_n \cdot \mathrm{T}_m\mathrm{M} \tag{1.97}$$

admite, canonicamente, uma estrutura de fibrado vetorial sobre $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$, munido da qual é um subfibrado vetorial de $\mathrm{T}(\mathrm{M} \times \mathrm{N})$.

Analogamente,

$$\mathrm{TN}|_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} := \bigcup_{(m,n)\in\mathrm{M}\times\mathrm{N}} dj_m \cdot \mathrm{T}_n\mathrm{N} \tag{1.98}$$

é um subfibrado vetorial de $\mathrm{T}(\mathrm{M} \times \mathrm{N})$, e segue do item anterior que

$$\mathrm{T}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}) = \mathrm{TM}|_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} \underset{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}{\oplus} \mathrm{TN}|_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} \tag{1.99}$$

(vi) Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{M})$, então

$$\widetilde{X} : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}) \tag{1.100}$$
$$(m, n) \longmapsto di_n \cdot X(m)$$

$\in \Gamma^\infty(\mathrm{T}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}))$ e é tal que $\widetilde{X}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}) \subset \mathrm{TM}|_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$. $\widetilde{X}$ é chamado de *levantamento* de X.

Algo análogo vale para $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{N})$.

O principal resultado desta seção, enunciado a seguir, nos diz que, se $(\mathrm{M}, \pi_{\mathrm{M}})$ e $(\mathrm{N}, \pi_{\mathrm{N}})$ forem variedades de Poisson, é possível definir canonicamente uma estrutura de Poisson em $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$, denominada **estrutura de Poisson produto**, de tal modo que $\Pi_{\mathrm{M}}{}^*(\mathcal{F}(\mathrm{M}))$ e $\Pi_{\mathrm{N}}{}^*(\mathcal{F}(\mathrm{N}))$ sejam subálgebras comutativas de $(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \pi_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}})$.

1.6.1 Teorema: *Sejam* $(\mathrm{M}, \pi_{\mathrm{M}})$, $(\mathrm{N}, \pi_{\mathrm{N}})$ *variedades de Poisson e* $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$, $\forall (x,y) \in (\mathrm{M}\times\mathrm{N})$,

$$\{f,g\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}(x,y) := \{f\circ i_y, g\circ i_y\}^{\mathrm{M}}(x) + \{f\circ j_x, g\circ j_x\}^{\mathrm{N}}(y) \tag{1.101}$$

Então $\{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$ *é um colchete de Poisson em* $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$.

PROVA:

(i) $\{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$ satisfaz a propriedade de Leibniz (1.44). Com efeito, $\forall f,g,h \in \mathcal{F}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$, $\forall (x,y)\in(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$, temos:

$$\begin{aligned}
\{f, gh\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}(x,y) &= \{f\circ i_y, (gh)\circ i_y\}^{\mathrm{M}}(x) + \{f\circ j_x, (gh)\circ j_x\}^{\mathrm{N}}(y) = \\
&= \{f\circ i_y, (g\circ i_y)(h\circ i_y)\}^{\mathrm{M}}(x) + \{f\circ j_x, (g\circ j_x)(h\circ j_x)\}^{\mathrm{N}}(y) = \\
&= g(x,y)\{f\circ i_y, h\circ i_y\}^{\mathrm{M}}(x) + h(x,y)\{f\circ i_y, g\circ i_y\}^{\mathrm{M}}(x) + \\
&\quad + g(x,y)\{f\circ j_x, h\circ j_x\}^{\mathrm{N}}(y) + h(x,y)\{f\circ j_x, g\circ j_x\}^{\mathrm{N}}(y) = \\
&= (g\{f,h\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} + h\{f,g\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}})(x,y)
\end{aligned} \tag{1.102}$$

□

(ii) $\{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} : \mathcal{F}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})\times\mathcal{F}(\mathrm{M}\times\mathrm{N}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$.

Com efeito, dados $f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$ e $(x_0,y_0)\in \mathrm{M}\times\mathrm{N}$, existem $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1,\ldots,x^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M})$, $(\mathcal{V}, \psi = (y^1,\ldots,y^n)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{N})$, $(\mathcal{U}\times\mathcal{V}, \varphi\times\psi = (z^1 := x^1\circ\Pi_{\mathrm{M}}, \ldots, z^m := x^m\circ\Pi_{\mathrm{M}}, z^{m+1} := y^1\circ\Pi_{\mathrm{N}}, \ldots, z^{m+n} := y^n\circ\Pi_{\mathrm{N}})) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$ sistema de coordenadas centrado em (x_0,y_0) e $\widetilde{f}_{ij}, \widetilde{g}_{ij} \in \mathcal{F}(\mathcal{U}\times\mathcal{V})$ para $1 \leqslant i,j \leqslant m+n$, tais que:

$$\begin{aligned}
f|_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} &= f(x_0,y_0) + \sum_{i=1}^{m+1} z^i \frac{\partial f}{\partial z^i} + \sum_{i,j=1}^{m+n} z^i z^j \widetilde{f}_{ij} \\
g|_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} &= g(x_0,y_0) + \sum_{i=1}^{m+1} z^i \frac{\partial g}{\partial z^i} + \sum_{i,j=1}^{m+n} z^i z^j \widetilde{g}_{ij}
\end{aligned} \tag{1.103}$$

donde, por (1.44):

$$\begin{aligned}
\{f,g\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}(x_0,y_0) &= \sum_{i,j=1}^{m+n} \frac{\partial f}{\partial z^i}(x_0,y_0)\frac{\partial g}{\partial z^j}(x_0,y_0)\{z^i,z^j\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}(x_0,y_0) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^i}(x_0,y_0)\frac{\partial g}{\partial z^j}(x_0,y_0)\{x^i,x^j\}^{\mathrm{M}}(x_0) + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z^{i+m}}(x_0,y_0)\frac{\partial g}{\partial z^{j+m}}(x_0,y_0)\{y^i,y^j\}^{\mathrm{N}}(y_0)
\end{aligned} \tag{1.104}$$

Como $(x_0, y_0) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ é arbitrário e, por (1.44) $\{f, \cdot\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} \equiv \mathbb{0}$ se f for constante, não é difícil concluir de (1.104) que:

$$\{f,g\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}|_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^i}\,\frac{\partial g}{\partial z^j}\,\{x^i,x^j\}^{\mathrm{M}} \circ \Pi_{\mathrm{M}} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z^{i+m}}\,\frac{\partial g}{\partial z^{j+m}}\,\{y^i,y^j\}^{\mathrm{N}} \circ \Pi_{\mathrm{N}} \tag{1.105}$$

portanto $\{f,g\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}|_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} \in \mathcal{F}(\mathcal{U}\times\mathcal{V})$, donde $\{f,g\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} \in \mathcal{F}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$. □

(iii) $\{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$ satisfaz a identidade de Jacobi (1.43).

Com efeito, dado $\big(\mathcal{U}\times\mathcal{V}, \varphi\times\psi = (z^1 := x^1 \circ \Pi_{\mathrm{M}}, \ldots, z^m := x^m \circ \Pi_{\mathrm{M}}, z^{m+1} := y^1 \circ \Pi_{\mathrm{N}}, \ldots, z^{m+n} := y^n \circ \Pi_{\mathrm{N}})\big) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$ sistema de coordenadas, com $\big(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^m)\big) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M})$, $\big(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \ldots, y^n)\big) \in \mathfrak{A}(\mathrm{N})$, temos, em $\mathcal{U}\times\mathcal{V}$, $\forall\, 1 \leqslant i,j,k \leqslant m+n$:

$$\oint_{ijk} \{\{z^i,z^j\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}, z^k\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} \equiv 0 \tag{1.106}$$

pois:

$$\{\{z^i,z^j\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}, z^k\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} = \begin{cases} \{\{x^i,x^j\}^{\mathrm{M}}, x^k\}^{\mathrm{M}} \circ \Pi_{\mathrm{M}} & \text{se } 1 \leqslant i,j,k \leqslant m \\ \{\{y^{i-m},y^{j-m}\}^{\mathrm{M}}, y^{k-m}\}^{\mathrm{N}} \circ \Pi_{\mathrm{N}} & \text{se } m+1 \leqslant i,j,k \leqslant m+n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1.107}$$

Pela observação (1.3.7), isto conclui a demonstração. ■

1.6.2 Proposição: *Sejam* $(\mathrm{M}, \pi_{\mathrm{M}})$ *e* $(\mathrm{N}, \pi_{\mathrm{N}})$ *variedades de Poisson e* $\{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}$ *estrutura de Poisson produto em* $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$. ***Então*** ${\Pi_{\mathrm{M}}}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{M})\big)$ *e* ${\Pi_{\mathrm{N}}}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{N})\big)$ *são subálgebras comutativas de* $(\mathrm{M}\times\mathrm{N}, \pi_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}})$.

PROVA:

(1) ${\Pi_{\mathrm{M}}}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{M})\big)$ é subálgebra de $(\mathrm{M}\times\mathrm{N}, \pi_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}})$.

Com efeito:

(a) $\forall\, f,g \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, temos $\alpha\,{\Pi_{\mathrm{M}}}^*(f) + \beta\,{\Pi_{\mathrm{M}}}^*(f) = {\Pi_{\mathrm{M}}}^*(\alpha f + \beta g) \in {\Pi_{\mathrm{M}}}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{M})\big)$.

(2) $\forall (x,y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$, $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, temos:

$$\begin{aligned} \{\Pi_{\mathrm{M}}{}^* f, \Pi_{\mathrm{M}}{}^* g\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}(x,y) &= \{f \circ \Pi_{\mathrm{M}}, g \circ \Pi_M\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}(x,y) = \\ &= \{f,g\}^{\mathrm{M}}(x) = \\ &= \{f,g\}^{\mathrm{M}} \circ \Pi_{\mathrm{M}}(x,y) = \\ &= \Pi_{\mathrm{M}}{}^*\big(\{f,g\}^{\mathrm{M}}\big)(x,y) \end{aligned} \tag{1.108}$$

donde $\{\Pi_{\mathrm{M}}{}^* f, \Pi_{\mathrm{M}}{}^* g\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} = \Pi_{\mathrm{M}}{}^*\big(\{f,g\}^{\mathrm{M}}\big) \in \Pi_{\mathrm{M}}{}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{M})\big)$. □

Analogamente, $\Pi_{\mathrm{N}}{}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{N})\big)$ é subálgebra de $(\mathrm{M}\times\mathrm{N}, \pi_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}})$.

(3) $\Pi_{\mathrm{M}}{}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{M})\big)$ e $\Pi_{\mathrm{N}}{}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{N})\big)$ comutam.

Com efeito, dados $\Pi_{\mathrm{M}}{}^* f \in \Pi_{\mathrm{M}}{}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{M})\big)$, $\Pi_{\mathrm{N}}{}^* g \in \Pi_{\mathrm{N}}{}^*\big(\mathcal{F}(\mathrm{N})\big)$ e $(x,y) \in \mathrm{M}\times\mathrm{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \{\Pi_{\mathrm{M}}{}^* f, \Pi_{\mathrm{N}}{}^* g\}^{\mathrm{M}\times\mathrm{N}}(x,y) &= \{\Pi_{\mathrm{M}}{}^* f \circ i_y, \underbrace{\Pi_{\mathrm{N}}{}^* g \circ i_y}_{cte.}\}^{\mathrm{M}}(x) + \{\underbrace{\Pi_{\mathrm{M}}{}^* f \circ j_x}_{cte.}, \Pi_{\mathrm{N}}{}^* g \circ j_x\}^{\mathrm{N}}(y) = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.109}$$

e isto conclui a demonstração. ■

1.7 Splitting Theorem e Estrutura de Poisson Transversa

O principal objetivo, nesta seção, é enunciar e demonstrar o *splitting theorem* e uma generalização do teorema de Darboux para variedades de Poisson . Para tal, será necessário um resultado preliminar.

Seja (M, π) uma variedade de Poisson. Às vezes é possível definir uma estrutura de Poisson numa subvariedade de M que não seja uma subvariedade de Poisson. Por exemplo, as únicas subvariedades de Poisson de uma variedade simplética são as suas componentes conexas; porém, qualquer subvariedade na qual a forma simplética seja não-degenerada admite uma forma simplética induzida, portanto uma estrutura de Poisson.

A seguinte proposição fornece um método para se definir canonicamente uma estrutura de Poisson em certas subvariedades de (M, π) que não sejam subvariedades de Poisson, que será útil na demonstração do *splitting theorem.*

1.7.1 Proposição: ([Wei]) *Seja* (M, π) *uma variedade de Poisson e* (Q, i) *uma subvariedade de* M *tal que,* $\forall x \in \mathrm{Q}$*:*

(i) $\pi_x^\sharp(T_xQ^\perp) \cap T_xQ = \{0\}$;

(ii) $T_xQ^\perp \cap \text{Ker } \pi_x^\sharp = \{0\}$;

onde $T_xQ^\perp$ *é o anulador de* T_xQ *em* T_x^*M.

Então *existe em* Q *uma estrutura de Poisson canonicamente induzida por* π.

PROVA:

(1) (i) e (ii) são equivalentes a

(iii) $T_xM = \pi_x^\sharp(T_xQ^\perp) \oplus T_xQ$.

Com efeito:

(i) e (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Por (i), $\pi_x^\sharp|_{T_xQ^\perp}$ é injetiva $\therefore \dim \pi^\sharp(T_xQ^\perp) = \dim T_xQ^\perp$, logo

$$\dim \pi^\sharp(T_xQ^\perp) + \dim T_xQ = \dim T_xM \tag{1.110}$$

E é claro que (i) e (1.110) implicam (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) e (ii)

De fato, (i) segue imediatamente, e (ii) segue de $T_xM = \pi_x^\sharp(T_xQ^\perp) \oplus T_xQ \Leftrightarrow (T_xM)^* = (\pi_x^\sharp(T_xQ^\perp))^\perp \oplus (T_xQ)^\perp \Leftrightarrow T_x^*M = \ker \pi_x^\sharp \oplus (T_xQ)^\perp$. □

Observação: A condição (iii) implica $T_xQ + \text{Im } \pi_x^\sharp = T_xM$, ou seja, Q intersecta cada folha simplética transversalmente. Então Q se decompõe numa união disjunta de variedades, cada qual é uma subvariedade de uma variedade simplética. O espaço nulo da 2-forma induzida em $T_xQ \cap \text{Im } \pi_x^\sharp$ é a intersecção $T_xQ \cap \pi_x^\sharp(T_xQ^\perp)$; então a condição (i) nos diz que, de fato, as variedades que compõem Q, mencionadas acima, são simpléticas. Desta forma, podemos usar os colchetes de Poisson destas variedades para definir um colchete em Q, que será de Poisson se for C^∞, pois a identidade de Jacobi (1.43) é trivialmente verificada. Nos itens seguintes, formalizarei esta idéia com maiores detalhes.

(2) Vou denotar por $\pi_Q^\sharp$ a restrição de $\pi^\sharp$ a $T^*M|_Q$. Segue de (1) que

$$TM|_Q = \pi_Q^\sharp(TQ^\perp) \underset{Q}{\oplus} TQ$$

logo está bem definida a aplicação C^∞ entre fibrados vetoriais

$$\Pi : TM|_Q \longrightarrow TQ$$

Seja $\pi_T{}^\sharp := \Pi \circ \pi_Q^\sharp \circ \Pi^* : T^*Q \longrightarrow TQ$

$$\begin{array}{ccc} T^*M|_Q & \xrightarrow{\pi_Q^\sharp} & TM|_Q \\ \uparrow{\scriptstyle \Pi^*} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \Pi} \\ T^*Q & \xrightarrow{\pi_T{}^\sharp} & TQ \end{array}$$

Os passos seguintes mostrarão que $\pi_T{}^\sharp$ define um tensor de Poisson $\pi_T \in \phi^2(Q)$ que coincide com aquele descrito na observação do item (1).

(3) Como $\pi_T{}^\sharp$ é uma aplicação C^∞ entre fibrados vetoriais, temos $\pi_T \in \mathfrak{T}_0^2(Q)$. Então, pelo teorema (1.3.5), é suficiente verificar que o colchete

$$\{\cdot,\cdot\}^Q : \mathcal{F}(Q) \times \mathcal{F}(Q) \longrightarrow \mathcal{F}(Q)$$

induzido por π_T (conforme (1.45)) é anti-simétrico e satisfaz a identidade de Jacobi (1.43).

(4) Pelo teorema da folheação simplética (1.5.4), M se decompõe numa folheação com singularidades, sendo cada folha uma subvariedade de Poisson simplética de M.

Dado $x \in Q$, seja (S,ω) a folha simplética de M que passa por x. Segue de (1) que

$$T_xS + T_xQ = T_xM$$

Como x foi tomado arbitrariamente, isto vale $\forall x \in S \cap Q \therefore$ S e Q são transversais. Então $S \cap Q$ é uma subvariedade de M e $T_x(S \cap Q) = T_xS \cap T_xQ < T_xM$.

Afirmação 1 *Seja i a inclusão $i : S \cap Q \longrightarrow (S,\omega)$. **Então** $(S \cap Q, i^*\omega)$ é uma variedade simplética.*

Afirmação 2 *Sejam $\{\cdot,\cdot\}^{S\cap Q} : \mathcal{F}(S \cap Q) \times \mathcal{F}(S \cap Q) \longrightarrow \mathcal{F}(S \cap Q)$ o colchete induzido por $i^*\omega$ e j a inclusão $j : S \cap Q \longrightarrow Q$. **Então***

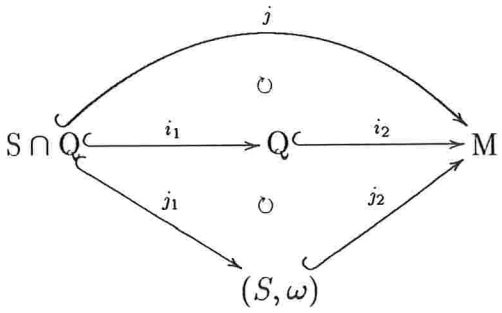
$$\{f,g\}^Q \circ j = \{f \circ j, g \circ j\}^{S\cap Q} \tag{1.111}$$

$\forall f,g \in \mathcal{F}(Q)$.

(5) Como $x \in Q$ foi tomado arbitrariamente e $\{\cdot,\cdot\}^{S\cap Q}$ é colchete de Poisson em $S\cap Q$, segue da afirmação (2) que $\{\cdot,\cdot\}^Q$ satisfaz a identidade de Jacobi (1.43) e é anti-simétrico, portanto é um colchete de Poisson em Q e j é uma aplicação de Poisson. Então π_T é um tensor de Poisson em Q, e as folhas simpléticas de Q são as subvariedades $S \cap Q$.

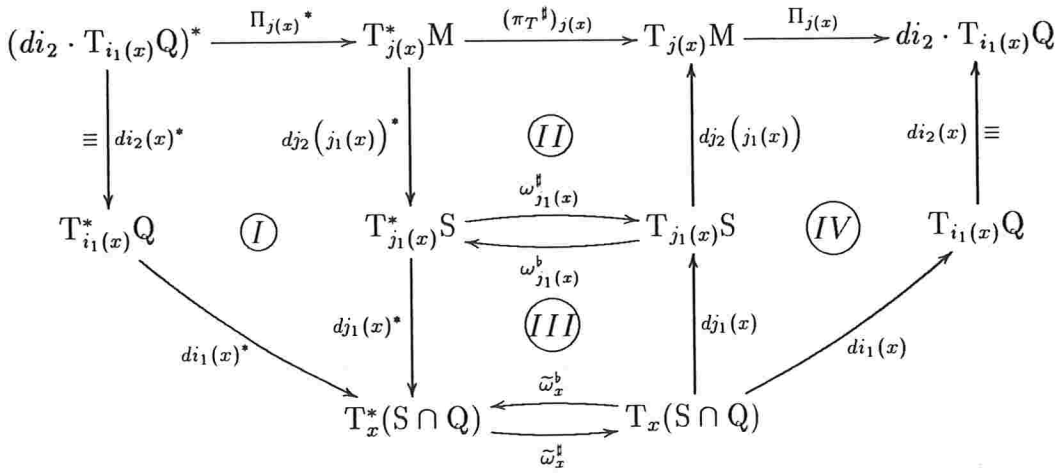
Para concluir a demonstração, resta provar as afirmações (1) e (2).

(6) Considere o seguinte diagrama:



(1.112)

Sejam $x \in \mathrm{S} \cap \mathrm{Q}$ e $\widetilde{\omega} := {j_1}^*\omega \in \Omega^2(\mathrm{Q})$. Considere também o seguinte diagrama (ainda vou mostrar que existe $\widetilde{\omega}^\sharp := (\widetilde{\omega}^\flat)^{-1}$):



(1.113)

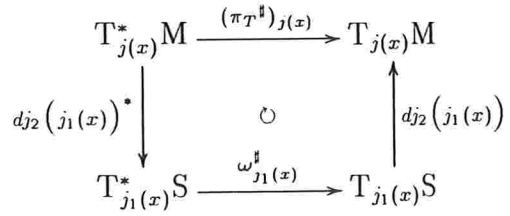
Temos:

(a) (IV) comuta: dado $v \in \mathrm{T}_x(\mathrm{S} \cap \mathrm{Q})$, como $dj \cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S} \cap \mathrm{Q}) < di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}$, temos:

$$\Pi_{j(x)}\big(dj(x) \cdot v\big) = dj(x) \cdot v = d(i_2 \circ i_1) \cdot v = di_2 \cdot di_1 \cdot v$$

Analogamente, (I) também comuta.

(b) (II) comuta, ou seja:



o que é imediato, pelo fato de (S, ω) ser folha simplética de M.

(c) (III) comuta, ou seja,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}^*_{j_1(x)}\mathrm{S} & \xleftarrow{\quad\omega^\flat_{j_1(x)}\quad} & \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle dj_1(x)^*} & \circlearrowleft & \Big\uparrow{\scriptstyle dj_1(x)} \\ \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q}) & \xleftarrow{\quad\widetilde{\omega}^\flat_x\quad} & \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q}) \end{array}$$

o que também é imediato, pelo fato de $\widetilde{\omega} := j_1{}^*\omega \in \Omega^2(\mathrm{Q})$.

(d) Como (II) comuta e $\omega^\sharp_{j_1(x)}, dj_2\big(j_1(x)\big)$ são injetivas, temos

$$\mathrm{Ker}\ \pi^\sharp_{j(x)} = \mathrm{Ker}\ dj_2\big(j_1(x)\big)^* = \big(dj_2\cdot \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S}\big)^\perp \tag{1.114}$$

Além disso,

$$\pi^\sharp_{j(x)}(\mathrm{T}^*_{j(x)}\mathrm{M}) = dj_2\cdot \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S} \tag{1.115}$$

pois S é folha simplética de M.

(e) Por (iii),

$$\pi^\sharp_{j(x)}(di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^\perp \oplus di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q} = \mathrm{T}_{j(x)}\mathrm{M} \tag{1.116}$$

Como $\big(\pi^\sharp_{j(x)}(di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^\perp\big)^\perp = \Pi_{j(x)}{}^*(di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^*$, (1.116) é equivalente a

$$\Pi_{j(x)}{}^*(di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^* \oplus (di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^\perp = \mathrm{T}^*_{j(x)}\mathrm{M} \tag{1.117}$$

(f) *Afirmação:*

$$(di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^\perp \oplus (dj_2\cdot \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S})^\perp = \big(dj\cdot \mathrm{T}_p(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})\big)^\perp \tag{1.118}$$

Com efeito, como

$$dj\cdot \mathrm{T}_p(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q}) = di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}\cap dj_2\cdot \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S} \tag{1.119}$$

temos:

(I) $(di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^\perp < \big(dj\cdot \mathrm{T}_p(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})\big)^\perp$

(II) $(dj_2\cdot \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S})^\perp < \big(dj\cdot \mathrm{T}_p(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})\big)^\perp$

(III) $\dim(di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^\perp + \dim(dj_2\cdot \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S})^\perp = \dim\big(dj\cdot \mathrm{T}_p(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})\big)^\perp$

(IV) $(di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^\perp \cap (dj_2\cdot \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S})^\perp \overset{(1.114)}{=} (di_2\cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^\perp \cap \mathrm{Ker}\ \pi^\sharp_{j(x)} \overset{\text{(ii)}}{=} \{\mathbb{O}\}$

(g) *Afirmação:* $\pi^\sharp_{j(x)}\big(dj\cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)\cap dj\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})=\{\mathbb{O}\}$

Com efeito, de (1.114) e de (1.118) segue

$$\pi^\sharp_{j(x)}\big(dj\cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)=\pi^\sharp_{j(x)}\big(di_2\cdot\mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}^\perp\big) \tag{1.120}$$

e como $\pi^\sharp_{j(x)}\big(dj\cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)<\operatorname{Im}\pi^\sharp_{j(x)}\overset{(1.115)}{=}dj_2\cdot\mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S}$ segue

$$\begin{aligned}\pi^\sharp_{j(x)}\big(dj\cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)\cap di_2\cdot\mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}=\\ =\pi^\sharp_{j(x)}\big(dj\cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)\cap di_2\cdot\mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}\cap dj_2\cdot\mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S}\end{aligned} \tag{1.121}$$

Então:

$$\begin{aligned}&\pi^\sharp_{j(x)}\big(dj\cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)\cap dj\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})\overset{(1.119)}{=}\\ &=\pi^\sharp_{j(x)}\big(dj\cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)\cap di_2\cdot\mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}\cap dj_2\cdot\mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S}\overset{(1.121)}{=}\\ &=\pi^\sharp_{j(x)}\big(dj\cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)\cap di_2\cdot\mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}\overset{(1.120)}{=}\\ &=\pi^\sharp_{j(x)}\big(di_2\cdot\mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}^\perp\big)\cap di_2\cdot\mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}\overset{\text{(i)}}{=}\{\mathbb{O}\}\end{aligned} \tag{1.122}$$

(7) *Prova da afirmação* (1)*:*

(a) É suficiente verificar que $\operatorname{Ker}\widetilde{\omega}^\flat_x=\{\mathbb{O}\}$. Como (III) comuta e $dj_1(x),\omega^\flat_{j_1(x)}$ são injetivas, é suficiente verificar

$$\operatorname{Ker} dj_1(x)^*\cap\omega^\flat_{j_1(x)}\circ dj_1(x)\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})=\{\mathbb{O}\} \tag{1.123}$$

(b) *Afirmação:* $\operatorname{Ker}\big(dj_1(x)\big)^*=dj_2\big(j_1(x)\big)^*\big(dj\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)$

Com efeito:

(I) Dado $\theta\in\operatorname{Ker}\big(dj_1(x)\big)^*$, temos $dj_1(x)^*\theta=\theta\circ dj_1(x)=\mathbb{O}$.
Como $dj_2\big(j_1(x)\big)^*$ é sobre (pois a sua transposta é injetiva), existe $\widetilde{\theta}\in\mathrm{T}^*_{j(x)}\mathrm{M}$ tal que $dj_2\big(j_1(x)\big)^*(\widetilde{\theta})=\theta$. Então $\widetilde{\theta}\circ dj(x)=dj_2\big(j_1(x)\big)^*(\widetilde{\theta})\circ dj_1(x)=\theta\circ dj_1(x)=\mathbb{O}$, logo $\widetilde{\theta}\in dj\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp$, donde

$$\operatorname{Ker}\big(dj_1(x)\big)^*\subset dj_2\big(j_1(x)\big)^*\big(dj\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)$$

(II) Por outro lado, dado $\theta\in dj_2\big(j_1(x)\big)^*\big(dj\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)$, existe $\widetilde{\theta}\in dj\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp$ tal que $dj_2\big(j_1(x)\big)^*\widetilde{\theta}=\theta$. Então

$$\theta\circ dj_1(x)=\widetilde{\theta}\circ dj(x)\overset{\widetilde{\theta}\in dj\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp}{=}\mathbb{O}$$

donde $\theta\in\operatorname{Ker} dj_1(x)^*\therefore dj_2\big(j_1(x)\big)^*\big(dj\cdot\mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big)\subset\operatorname{Ker}\big(dj_1(x)\big)^*$, e está provada a afirmação.

(c) Seja $\theta \in \operatorname{Ker} dj_1(x)^* \cap \omega^\flat_{j_1(x)} \circ dj_1(x) \cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})$. Por (b), existe $\widetilde{\theta} \in dj \cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp$ tal que $dj_2(j_1(x))^*(\widetilde{\theta}) = \theta$, donde

$$\begin{aligned} dj_2(j_1(x)) \circ \omega^\sharp_{j_1(x)}(\theta) &= dj_2(j_1(x)) \circ \omega^\sharp_{j_1(x)} \circ dj_2(j_1(x))^*(\widetilde{\theta}) \overset{\text{(II) comuta}}{=} \\ &= \pi^\sharp_{j(x)}(\widetilde{\theta}) \in dj \cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q}) \end{aligned} \tag{1.124}$$

então

$$\pi^\sharp_{j(x)}(\widetilde{\theta}) \in dj \cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q}) \cap \pi^\sharp_{j(x)}\big(dj \cdot \mathrm{T}_x(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})^\perp\big) \overset{(6.g)}{=} \{\mathbb{O}\} \tag{1.125}$$

$\therefore \widetilde{\theta} \in \operatorname{Ker} \pi^\sharp_{j(x)} \overset{(1.114)}{=} \operatorname{Ker} dj_2(j_1(x))^*$, donde

$$\theta = dj_2(j_1(x))^*\widetilde{\theta} = \mathbb{O} \tag{1.126}$$

e está verificada (1.123), logo $\operatorname{Ker} \widetilde{\omega}^\flat_x = \{\mathbb{O}\}$.
Então $\widetilde{\omega}_x$ é não-degenerada, e como isto vale para todo $x \in \mathrm{S}\cap\mathrm{Q}$, segue que $\widetilde{\omega}$ é não-degenerada.
Como $d\widetilde{\omega} = d(j_1{}^*\omega) = j_1{}^*d\omega = \mathbb{O}$, segue que $\widetilde{\omega}$ é simplética, e isto prova a afirmação (1).
Também prova que existe $\widetilde{\omega}^\sharp := (\widetilde{\omega}^\flat)^{-1}$. □

(8) *Prova da afirmação* (2)*:*

(a) Pela proposição (1.3.17), (1.111) é equivalente a

$$(\forall\, x \in \mathrm{S}\cap\mathrm{Q})\ \pi_{T^\sharp_{i_1(x)}} = di_1(x) \circ \widetilde{\omega}^\sharp_x \circ di_1(x)^* \tag{1.127}$$

ou seja, que

$$\begin{aligned} (\forall\, x \in \mathrm{S}\cap\mathrm{Q})\ di_2(i_1(x))^{-1} \circ \Pi_{j(x)} \circ \pi^\sharp_{j(x)} \circ \Pi_{j(x)}{}^* \circ \big(di_2(i_1(x))^*\big)^{-1} = \\ = di_1(x) \circ \widetilde{\omega}^\sharp_x \circ di_1(x)^* \end{aligned} \tag{1.128}$$

ou seja, que o diagrama (1.113) seja comutativo.
Como os diagramas (I) e (IV) comutam, isto é equivalente a mostrar que, $\forall\, x \in \mathrm{S}\cap\mathrm{Q}$:

$$\Pi_{j(x)} \circ \pi^\sharp_{j(x)} \circ \Pi_{j(x)}{}^* = \Pi_{j(x)} \circ dj(x) \circ \widetilde{\omega}^\sharp_x \circ \big(dj(x)\big)^* \circ \Pi_{j(x)}{}^* \tag{1.129}$$

(b) Sejam $\theta \in \Pi_{j(x)}{}^*\big(di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}\big)^* < \mathrm{T}^*_{j(x)}\mathrm{M}$, $\mathsf{F} := \operatorname{Ker}\big(dj_1(x)\big)^* \cap dj_2(j_1(x))^* \circ \Pi_{j(x)}{}^*(di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^*$ e $\mathsf{E} < \mathrm{T}^*_{j_1(x)}\mathrm{S}$ tal que

$$\mathsf{E} \oplus \mathsf{F} = dj_2(j_1(x))^* \circ \Pi_{j(x)}{}^*(di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^* \tag{1.130}$$

Sendo $dj_2(j_1(x))^*$ sobrejetiva, podemos tomar $\theta_1, \theta_2 \in \Pi_{j(x)}{}^*(di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^*$ tais que $\theta = \theta_1 + \theta_2$, $dj_2(j_1(x))^*(\theta_1) \in \mathsf{E}$ e $dj_2(j_1(x))^*(\theta_2) \in \mathsf{F}$.
Além disso, $dj_1(p)^*|_{\mathsf{E}} : \mathsf{E} \longrightarrow \mathrm{T}^*_p(\mathrm{S}\cap\mathrm{Q})$ é um isomorfismo linear, pois:

(I) É injetiva, pois, por (1.130), $\mathsf{E} \cap \operatorname{Ker}\left(dj_1(x)\right)^* = \{\mathbb{O}\}$

(II) É sobre, pois (I) comuta e $di_1(x)^* \circ di_2(x)^*$ é sobre (pois a sua transposta é injetiva), logo:

$$\begin{aligned} dj_1(p)^*|_{\mathsf{E}}(\mathsf{E}) &\overset{\mathsf{F}<\operatorname{Ker}\left(dj_1(x)\right)^*}{=} dj_1(p)^*|_{\mathsf{E}}(\mathsf{E} \oplus \mathsf{F}) \overset{(1.130)}{=} \\ &= dj_1(p)^*|_{\mathsf{E}} \circ dj_2\big(j_1(x)\big)^* \circ \Pi_{j(x)}{}^*(di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^* \overset{\text{(I) comuta}}{=} \\ &= di_1(x)^* \circ di_2(x)^*(\mathrm{T}^*_{i_1(x)}\mathrm{Q}) = \\ &= \mathrm{T}^*_x(\mathrm{S} \cap \mathrm{Q}) \end{aligned} \tag{1.131}$$

Então segue da comutatividade de (III) que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{E} & \xrightarrow{\omega^\sharp_{j_1(x)}} & \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S} \\ {\scriptstyle dj_1(p)^*|_{\mathsf{E}}}\downarrow & \circlearrowright & \uparrow{\scriptstyle dj_1(x)} \\ \mathrm{T}^*_x(\mathrm{S} \cap \mathrm{Q}) & \xrightarrow{\widetilde{\omega}^\sharp_x} & \mathrm{T}_x(\mathrm{S} \cap \mathrm{Q}) \end{array} \tag{1.132}$$

donde

$$\pi^\sharp_{j(x)}(\theta_1) = dj(x) \circ \widetilde{\omega}^\sharp_x \circ dj(x)^*(\theta_1) \tag{1.133}$$

Afirmação:

$$\Pi_{j(x)} \circ \pi^\sharp_{j(x)}(\theta_2) = \mathbb{O} \tag{1.134}$$

Então, como

$$dj(x)^*(\theta_2) = dj_1(x)^* \circ dj_2\big(j_1(x)\big)^*(\theta_2) \overset{\mathsf{F}<\operatorname{Ker} dj_1(x)^*}{=} \mathbb{O} \tag{1.135}$$

segue:

$$\Pi_{j(x)} \circ dj(x) \circ \widetilde{\omega}^\sharp_x \circ dj(x)^*(\theta_2) \overset{(1.134)\text{ e }(1.135)}{=} \Pi_{j(x)} \circ \pi^\sharp_{j(x)}(\theta_2) = \mathbb{O} \tag{1.136}$$

donde

$$\begin{aligned} \Pi_{j(x)} \circ \pi^\sharp_{j(x)}(\theta) &= \Pi_{j(x)} \circ \pi^\sharp_{j(x)}(\theta_1 + \theta_2) = \\ &= \Pi_{j(x)} \circ \pi^\sharp_{j(x)}(\theta_1) + \Pi_{j(x)} \circ \pi^\sharp_{j(x)}(\theta_2) \overset{(1.133)\text{ e }(1.136)}{=} \\ &= \Pi_{j(x)} \circ \widetilde{\omega}^\sharp_x \circ dj(x)^*(\theta_1) + \Pi_{j(x)} \circ \widetilde{\omega}^\sharp_x \circ dj(x)^*(\theta_2) = \\ &= \Pi_{j(x)} \circ \widetilde{\omega}^\sharp_x \circ dj(x)^*(\theta) \end{aligned} \tag{1.137}$$

e como $\theta \in \Pi_{j(x)}{}^{*}\big(di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q}\big)^{*}$ foi tomado arbitrariamente, está verificada (1.129).

Prova da afirmação:
Com efeito, por (1.135), temos:

$$\begin{aligned}\theta_2 \in \operatorname{Ker} dj(x)^{*} &= \big(dj \cdot \mathrm{T}_p(\mathrm{S} \cap \mathrm{Q})\big)^{\perp} \overset{(1.118)}{=} \\ &= (di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^{\perp} \oplus (dj_2 \cdot \mathrm{T}_{j_1(x)}\mathrm{S})^{\perp} \overset{(1.114)}{=} \\ &= (di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^{\perp} \oplus \operatorname{Ker} \pi^{\sharp}_{j(x)}\end{aligned} \tag{1.138}$$

portanto:

$$\begin{aligned}\Pi_{j(x)} \circ \pi^{\sharp}_{j(x)}(\theta_2) \in \Pi_{j(x)} \circ \pi^{\sharp}_{j(x)}\big((di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^{\perp} \oplus \operatorname{Ker} \pi^{\sharp}_{j(x)}\big) = \\ = \Pi_{j(x)} \circ \pi^{\sharp}_{j(x)}\big((di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^{\perp}\big) \overset{\pi^{\sharp}_{j(x)}((di_2 \cdot \mathrm{T}_{i_1(x)}\mathrm{Q})^{\perp}) = \operatorname{Ker} \Pi_{j(x)}}{=} \\ = \{\mathbb{O}\}\end{aligned} \tag{1.139}$$

donde $\Pi_{j(x)} \circ \pi^{\sharp}_{j(x)}(\theta_2) = \mathbb{O}$ e está provada a afirmação. ■

O principal teorema desta seção nos diz que, localmente, toda variedade de Poisson é o produto de uma variedade simplética e de uma variedade de Poisson com um ponto no qual o posto do tensor de Poisson é zero.

1.7.2 Teorema (Splitting, [Wei])
Seja (M, π) *variedade de Poisson e* $x_0 \in \mathrm{M}$. ***Então*** *existem* $(\mathrm{S}, \pi_{\mathrm{S}})$ *variedade simplética,* $(\mathrm{N}, \pi_{\mathrm{N}})$ *variedade de Poisson,* $\mathcal{U} \in \tau_{x_0}(\mathrm{M})$ *e* $\phi = \phi_{\mathrm{S}} \times \phi_{\mathrm{N}} : \mathcal{U} \longrightarrow (\mathrm{S} \times \mathrm{N}, \pi_{\mathrm{S}\times\mathrm{N}})$ *isomorfismo entre variedades de Poisson tais que* $\operatorname{rk} \pi_{\mathrm{N}}\big(\phi_{\mathrm{N}}(x_0)\big) = 0$. *Além disso,* S *e* N *são únicas, a menos de isomorfismos locais.*

PROVA:

(A) Existência

(i) Se $\operatorname{rk} \pi(x_0) = 0$, a tese é óbvia: basta tomar $\mathrm{N} := \{x_0\}$ e S a folha simplética de M que passa por x_0.

(ii) Seja, então, $\operatorname{rk} \pi(x_0) > 0$.

(1) Neste caso, existe $p^1 \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$ tal que $\xi_{p^1}(x_0) \neq \mathbb{O}$.
Pelo teorema do fluxo tubular, existe uma carta $\big(\mathcal{V}, \psi = (q^1, \ldots, q^n)\big) \in \mathfrak{A}_{x_0}(\mathrm{M})$ tal que $\partial_{q^1} = \xi_{p^1}|_{\mathcal{V}}$, portanto

$$\xi_{p^1}(q^1) = 1 = \{q^1, p^1\} \tag{1.140}$$

em $\mathcal{V}$, donde

$$[\xi_{q^1}, \xi_{p^1}] = -\xi_{\{q^1, p^1\}} = 0 \tag{1.141}$$

em $\mathcal{V}$.

(2) *Afirmação:* existe uma vizinhança de x_0 em M na qual ξ_{q^1} e ξ_{p^1} são L.I.

Com efeito, vou mostrar que $\{q^1, p^1\}(x_0) \neq 0 \Rightarrow (\xi_{q^1} \wedge \xi_{p^1})(x_0) \neq \mathbb{O}$.
Supondo $(\xi_{q^1} \wedge \xi_{p^1})(x_0) = \mathbb{O}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\xi_{p^1}(x_0) = \alpha \xi_{q^1}(x_0) \Rightarrow \{q^1, p^1\}(x_0) = (\xi_{p^1}(q^1))(x_0) = \alpha(\xi_{q^1}(q^1))(x_0) = \alpha\{q^1, q^1\}(x_0) = 0$.
Então, por (1.140), segue $(\xi_{q^1} \wedge \xi_{p^1})(x_0) \neq \mathbb{O}$, e, por continuidade, $\xi_{q^1} \wedge \xi_{p^1}$ é diferente de $\mathbb{O}$ numa vizinhança de x_0, o que prova a afirmação. □

(3) $[\xi_{q^1}, \xi_{p^1}] = 0$ em $\mathcal{V}$(por (1.141)) e ξ_{q^1} e ξ_{p^1} são L.I. numa vizinhança de x_0 implica (vide [dL65], por exemplo) que existe uma carta $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\varphi} = (x^1, \ldots, x^n)) \in \mathfrak{A}_{x_0}(\mathrm{M})$ com $\widetilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{V}$ tal que

$$\begin{aligned} \partial_{x^1} &= \xi_{q^1}|_{\widetilde{\mathcal{U}}} \\ \partial_{x^2} &= \xi_{p^1}|_{\widetilde{\mathcal{U}}} \end{aligned} \tag{1.142}$$

(4) *Afirmação:* $(y^1 := q^1, y^2 := p^1, y^3 := x^3, \ldots, y^n := x^n)$ forma um sistema de coordenadas numa vizinhança $\mathcal{U}$ de x_0 e, $\forall i \in \{1, \ldots, 3\}$, temos $\{q^1, x^i\} = \{p^1, x^i\} = 0$.

Prova:

(I) $\forall i \in \{1, \ldots, 3\}$, temos:

$$\begin{aligned} \{q^1, x^i\} &= \xi_{q^1}(x^i) = dx^i(\xi_{q^1}) = dx^i(\partial_{x^1}) = 0 \\ \{p^1, x^i\} &= \xi_{p^1}(x^i) = dx^i(\xi_{p^1}) = dx^i(\partial_{x^2}) = 0 \end{aligned} \tag{1.143}$$

(II)

$$(dq^1 \wedge dp^1 \wedge x^3 \wedge \cdots \wedge x^n)(x_0) \neq \mathbb{O} \tag{1.144}$$

De fato, seja $\mathsf{W} := [\xi_{q^1}(x_0), \xi_{p^1}(x_0)] < \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{M}$. Temos:

$$\begin{aligned} \langle dq^1 \wedge dp^1 \mid \xi_{q^1} \wedge \xi_{p^1} \rangle(x_0) &= \begin{vmatrix} \langle dq^1, \xi_{q^1} \rangle(x_0) & \langle dq^1, \xi_{p^1} \rangle(x_0) \\ \langle dp^1, \xi_{q^1} \rangle(x_0) & \langle dp^1, \xi_{p^1} \rangle(x_0) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{aligned} \tag{1.145}$$

e disto segue $[dq^1(x_0), dp^1(x_0)] \oplus \mathsf{W}^\perp = \mathrm{T}^*_{x_0}\mathrm{M}$; então, como $\{dx^3(x_0), \ldots, dx^n(x_0)\}$ é base de $\mathsf{W}^\perp$, segue

$$[dq^1(x_0), dp^1(x_0)] \oplus [dx^3(x_0), \ldots, dx^n(x_0)] = \mathrm{T}^*_{x_0}\mathrm{M} \tag{1.146}$$

e está verificada (1.144).

(III) Segue do item anterior e do teorema da função inversa que $\varphi := (y^1 = q^1, y^2 = p^1, y^3 = x^3, \ldots, y^n = x^n)$ é um difeo numa vizinhança $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{U}}$ de x_0, donde $(\mathcal{U}, \varphi = (y^1 = q^1, y^2 = p^1, y^3 = x^3, \ldots, y^n = x^n)) \in \mathfrak{A}_{x_0}(\mathrm{M})$. □

Sem perda de generalidade, vou supor que $(\mathcal{U}, \varphi = (y^1, \ldots, y^n))$ é um sistema de coordenadas cúbico centrado em x_0.

(5) Segue de (4) que, $\forall i, j \in \{3, \ldots, n\}$:

$$\{\{x^i, x^j\}, q^1\} \overset{(1.43)}{=} -\{\{x^j, q^1\}, x^i\} - \{\{q^1, x^i\}, x^j\} = 0 \tag{1.147}$$

e, analogamente,

$$\{\{x^i, x^j\}, p^1\} = 0 \tag{1.148}$$

Então segue:

$$\begin{aligned} \{\{x^i, x^j\}, q^1\} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\{x^i, x^j\}}{\partial y^k} \{y^k, y^1\} = \\ &= \frac{\partial\{x^i, x^j\}}{\partial p^1} \{p^1, q^1\} = -\frac{\partial\{x^i, x^j\}}{\partial p^1} = 0 \end{aligned} \tag{1.149}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial\{x^i, x^j\}}{\partial q^1} = 0 \tag{1.150}$$

Portanto, existem $\nu^{ij} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, $3 \leqslant i, j \leqslant n$, tais que:

$$\{x^i, x^j\} = \nu^{ij}(x^3, \ldots, x^n) \tag{1.151}$$

(6) Considere $\mathrm{S}^1 := \{x \in \mathcal{U} : x^3(x) = x^3(x_0) = 0, \cdots, x^n(x) = x^n(x_0) = 0\}$, $\mathrm{N}^1 := \{x \in \mathcal{U} : q^1(x) = q^1(x_0) = 0, p^1(x) = p^1(x_0) = 0\}$ e $i : \mathrm{S}^1 \longrightarrow \mathrm{M}$ e $j : \mathrm{N}^1 \longrightarrow \mathrm{M}$ respectivas inclusões.

Os atlas maximais gerados por $(\mathrm{S}^1, \varphi_{\mathrm{S}^1} = (\widetilde{y}_1 := y_1 \circ i, \widetilde{y}_2 := y_2 \circ i))$ e $(\mathrm{N}^1, \varphi_{\mathrm{N}^1} = (\widetilde{y}_3 := y_3 \circ j, \ldots, \widetilde{y}_n := y_n \circ j))$ tornam (S^1, i) e (N^1, j) subvariedades mergulhadas de M.

Além disso:

(I) $(\forall k, j \in \{1, 2\})$ $\widetilde{w}^{kj} := \{\widetilde{y}^k, \widetilde{y}^j\}^{\mathrm{S}^1} := \{y^k, y^j\} \circ i \in \mathcal{F}(\mathrm{S}^1)$ definem uma estrutura de Poisson em S^1:

(a) $\{\cdot, \cdot\}^{\mathrm{S}^1}$ é, obviamente, anti-simétrico;

(b) $(\forall i, j \in \{1, 2\})$ $\widetilde{w}^{ij} = cte.$, logo:

$$\sum_{l=1}^{2} \oint_{ijk} \left(\widetilde{w}^{lj} \frac{\partial \widetilde{w}^{ik}}{\partial \widetilde{y}^l} \right) = 0 \tag{1.152}$$

donde $\{\cdot, \cdot\}^{\mathrm{S}^1}$ satisfaz a identidade de Jacobi (1.43).

(II) $(\forall k,l \in \{3,\ldots,n\})\ \widetilde{w}^{kl} := \{\widetilde{y}^k,\widetilde{y}^l\}^{\mathrm{N}^1} := \{y^k,y^l\} \circ j \in \mathcal{F}(\mathrm{N}^1)$ definem uma estrutura de Poisson em N^1:

(a) $\{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{N}^1}$ é, obviamente, anti-simétrico;

(b) por (1.151), temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=3}^{n} \oint_{rst} \left(\widetilde{w}^{ls} \frac{\partial \widetilde{w}^{rt}}{\partial \widetilde{y}^l} \right) = \\
&= \sum_{l=3}^{n} \oint_{rst} \left(w^{ls} \frac{\partial w^{rt}}{\partial y^l} \right) \circ j \overset{(1.151)}{=} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \oint_{rst} \left(w^{ls} \frac{\partial w^{rt}}{\partial y^l} \right) \circ j \overset{\{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{M}} \text{ satisfaz } (1.43)}{=} 0
\end{aligned} \tag{1.153}$$

donde $\{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{N}^1}$ satisfaz a identidade de Jacobi (1.43).

(III) *Afirmação:*

$$\begin{aligned}
\phi^1 = \phi_{\mathrm{S}^1} \times \phi_{\mathrm{N}^1} : (\mathcal{U}, \{\cdot,\cdot\}) &\longrightarrow (\mathrm{S}^1 \times \mathrm{N}^1, \{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{S}^1 \times \mathrm{N}^1}) \\
x &\longmapsto (\varphi_{\mathrm{S}^1} \times \varphi_{\mathrm{N}^1})^{-1} \circ \varphi(x)
\end{aligned}$$

é um isomorfismo entre variedades de Poisson.

Com efeito:

(a) é um difeo, pois $(\varphi_{\mathrm{S}^1} \times \varphi_{\mathrm{N}^1}) \circ \phi^1 \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi(\mathcal{U})}$

(b) Em $\mathcal{U}$, temos $(\varphi_{\mathrm{S}^1} \times \varphi_{\mathrm{N}^1}) \circ \phi^1 = \varphi$, ou seja,

$$\begin{aligned}
y^1 \circ i \circ \Pi_{\mathrm{S}^1} \circ \phi^1 &= y^1 \\
y^2 \circ i \circ \Pi_{\mathrm{S}^1} \circ \phi^1 &= y^2 \\
y^3 \circ j \circ \Pi_{\mathrm{N}^1} \circ \phi^1 &= y^3 \\
\vdots \qquad &\quad \vdots \\
y^n \circ j \circ \Pi_{\mathrm{N}^1} \circ \phi^1 &= y^n
\end{aligned} \tag{1.154}$$

Além disso, como $i \circ \phi^1_{\mathrm{S}^1}(\mathcal{U}) \subset i(\mathrm{S}^1)$ e $j \circ \phi^1_{\mathrm{N}^1}(\mathcal{U}) \subset j(\mathrm{N}^1)$, temos:

$$\begin{aligned}
y^1 \circ i \circ \Pi_{\mathrm{N}^1} \circ \phi^1 &= 0 \\
y^2 \circ i \circ \Pi_{\mathrm{N}^1} \circ \phi^1 &= 0 \\
y^3 \circ j \circ \Pi_{\mathrm{S}^1} \circ \phi^1 &= 0 \\
\vdots \qquad &\quad \vdots \\
y^n \circ j \circ \Pi_{\mathrm{S}^1} \circ \phi^1 &= 0
\end{aligned} \tag{1.155}$$

donde:

$$\begin{aligned} \varphi \circ i \circ \phi^1_{S^1} : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \left(y^1(x), y^2(x), 0, \ldots, 0\right) \end{aligned} \tag{1.156}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi \circ j \circ \phi^1_{N^1} : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \left(0, 0, y^3(x), \ldots, y^n(x)\right) \end{aligned} \tag{1.157}$$

Então segue, pondo $\varphi_{S^1} \times \varphi_{N^1} = (\widetilde{x}^1 := \widetilde{y}^1 \circ \Pi_{S^1}, \widetilde{x}^2 := \widetilde{y}^2 \circ \Pi_{S^1}, \widetilde{x}^3 := \widetilde{y}^3 \circ \Pi_{N^1}, \ldots, \widetilde{x}^n := \widetilde{y}^n \circ \Pi_{N^1})$, $\forall x \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \{\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2\}^{S^1 \times N^1} \circ \phi^1(x) &= \{\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2\}^{S^1 \times N^1}\left(\phi_{S^1}(x), \phi_{N^1}(x)\right) = \\ &= \{\widetilde{x}^1 \circ i_{\phi_{N^1}(x)}, \widetilde{x}^2 \circ i_{\phi_{N^1}(x)}\}^{S^1} \circ \phi_{S^1}(x) \\ &\quad + \{\widetilde{x}^1 \circ j_{\phi_{S^1}(x)}, \widetilde{x}^2 \circ j_{\phi_{S^1}(x)}\}^{N^1} \circ \phi_{N^1}(x) = \\ &= \{\widetilde{y}^1 \circ \Pi_{S^1} \circ i_{\phi_{N^1}(x)}, \widetilde{y}^2 \circ \Pi_{S^1} \circ i_{\phi_{N^1}(x)}\}^{S^1} \circ \phi_{S^1}(x) \\ &\quad + \{\widetilde{y}^1 \circ \Pi_{S^1} \circ j_{\phi_{S^1}(x)}, \widetilde{y}^2 \circ \Pi_{S^1} \circ j_{\phi_{S^1}(x)}\}^{N^1} \circ \phi_{N^1}(x) = \\ &= \{\widetilde{y}^1, \widetilde{y}^2\}^{S^1} \circ \phi_{S^1}(x) = \\ &= \{y^1, y^2\}^{S^1} \circ i \circ \phi_{S^1}(x) = \\ &= 1 = \\ &= \{y^1, y^2\}^{S^1}(x) \overset{(1.154)}{=} \\ &= \{y^1 \circ i \circ \Pi_{S^1} \circ \phi^1, y^2 \circ i \circ \Pi_{S^1} \circ \phi^1\}^{S^1}(x) = \\ &= \{\widetilde{x}^1 \circ \phi^1, \widetilde{x}^2 \circ \phi^1\}(x) \end{aligned} \tag{1.158}$$

e, $\forall 3 \leqslant k < l \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\{\widetilde{x}^k, \widetilde{x}^l\}^{\mathrm{S}^1\times\mathrm{N}^1} \circ \phi^1(x) &= \{\widetilde{x}^k, \widetilde{x}^l\}^{\mathrm{S}^1\times\mathrm{N}^1}\big(\phi_{\mathrm{S}^1}(x), \phi_{\mathrm{N}^1}(x)\big) = \\
&= \{\widetilde{x}^k \circ i_{\phi_{\mathrm{N}^1}(x)}, \widetilde{x}^l \circ i_{\phi_{\mathrm{N}^1}(x)}\}^{\mathrm{S}^1} \circ \phi_{\mathrm{S}^1}(x) \\
&\quad + \{\widetilde{x}^k \circ j_{\phi_{\mathrm{S}^1}(x)}, \widetilde{x}^l \circ j_{\phi_{\mathrm{S}^1}(x)}\}^{\mathrm{N}^1} \circ \phi_{\mathrm{N}^1}(x) = \\
&= \{\widetilde{y}^k \circ \Pi_{\mathrm{S}^1} \circ i_{\phi_{\mathrm{N}^1}(x)}, \widetilde{y}^l \circ \Pi_{\mathrm{S}^1} \circ i_{\phi_{\mathrm{N}^1}(x)}\}^{\mathrm{S}^1} \circ \phi_{\mathrm{S}^1}(x) \\
&\quad + \{\widetilde{y}^k \circ \Pi_{\mathrm{S}^1} \circ j_{\phi_{\mathrm{S}^1}(x)}, \widetilde{y}^l \circ \Pi_{\mathrm{S}^1} \circ j_{\phi_{\mathrm{S}^1}(x)}\}^{\mathrm{N}^1} \circ \phi_{\mathrm{N}^1}(x) = \\
&= \{\widetilde{y}^k, \widetilde{y}^l\}^{\mathrm{N}^1} \circ \phi_{\mathrm{N}^1}(x) = \\
&= \{y^k, y^l\}^{\mathrm{N}^1} \circ j \circ \phi_{\mathrm{N}^1}(x) \overset{(1.151)}{=} \\
&= \nu^{kl}\big(y^3 \circ j \circ \phi_{\mathrm{N}^1}(x), \ldots, y^n \circ j \circ \phi_{\mathrm{N}^1}(x)\big) \overset{(1.157)}{=} \\
&= \nu^{kl}\big(y^3(x), \ldots, y^n(x)\big) \overset{(1.151)}{=} \\
&= \{y^k, y^l\}^{\mathrm{N}^1}(x) \overset{(1.154)}{=} \\
&= \{y^k \circ j \circ \Pi_{\mathrm{N}^1} \circ \phi^1, y^l \circ j \circ \Pi_{\mathrm{N}^1} \circ \phi^1\}^{\mathrm{N}^1}(x) = \\
&= \{\widetilde{x}^k \circ \phi^1, \widetilde{x}^l \circ \phi^1\}(x)
\end{aligned} \tag{1.159}$$

De (1.158) e (1.159) e das proposições (1.3.12) e (1.3.17) segue que ϕ^1 é uma aplicação de Poisson, e isto conclui a prova da afirmação.

(IV) Como $(\mathrm{S}^1, \{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{S}^1})$ é simplética, $\dim \mathrm{S}^1 = 2$ e

$$\operatorname{rk} \pi(x_0) \overset{\phi^1 \text{ isomorfismo}}{=} \operatorname{rk} \pi_{\mathrm{S}^1\times\mathrm{N}^1}\big(\phi^1(x_0)\big) = \operatorname{rk} \pi_{\mathrm{S}^1}\big(\phi_{\mathrm{S}^1}(x_0)\big) + \operatorname{rk} \pi_{\mathrm{N}^1}\big(\phi_{\mathrm{N}^1}(x_0)\big) \tag{1.160}$$

conseguimos obter um isomorfismo de Poisson $\phi^1 : \mathcal{U} \subset \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{S}^1 \times \mathrm{N}^1$ em torno de x_0 com $(\mathrm{S}^1, \{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{S}^1})$ simplética, $\dim \mathrm{S}^1 = 2$ e

$$\operatorname{rk} \pi_{\mathrm{N}^1}\big(\phi_{\mathrm{N}^1}(x_0)\big) = \operatorname{rk} \pi(x_0) - 2 \tag{1.161}$$

(iii) Se $\operatorname{rk} \pi_{\mathrm{N}^1}\big(\phi_{\mathrm{N}^1}(x_0)\big) = 0$, não há mais nada a fazer. Se for maior que zero, podemos reaplicar o argumento da parte (ii) para obter um isomorfismo de Poisson

$$\widetilde{\phi^2} = \widetilde{\phi_{\mathrm{S}^2}} \times \widetilde{\phi_{\mathrm{N}^2}} : \widetilde{\mathcal{U}} \subset \mathrm{N}^1 \longrightarrow \mathrm{S}^2 \times \mathrm{N}^2 \tag{1.162}$$

em torno de $\phi_{\mathrm{N}^1}(x_0)$, com S^2 simplética e de dimensão 2 e com $\operatorname{rk} \pi_{\mathrm{N}^2}\big(\widetilde{\phi_{\mathrm{N}^2}} \circ \phi_{\mathrm{N}^1}(x_0)\big) = \operatorname{rk} \pi_{\mathrm{N}^1}\big(\phi_{\mathrm{N}^1}(x_0)\big) - 2$.

Diminuindo o tamanho de $\mathcal{U}$, se necessário, podemos compor $\widetilde{\phi^2}$ com ϕ_{N^1}, e assim obter um isomorfismo de Poisson

$$\phi^2 = \phi_{\mathrm{S}^1} \times \phi_{\mathrm{S}^2} \times \phi_{\mathrm{N}^2} : \mathcal{U} \subset \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \times \mathrm{N}^2 \tag{1.163}$$

em torno de x_0, com $S^1 \times S^2$ simplética e de dimensão 4 e com rk $\pi_{N^2}(\phi_{N^2}(x_0)) =$ rk $\pi(x_0) - 4$.

Assim, após repetir este processo um número finito de vezes, obteremos um isomorfismo de Poisson

$$\phi^k = \phi_{S^1} \times \cdots \times \phi_{S^k} \times \phi_{N^k} : \mathcal{U} \subset M \longrightarrow S^1 \times \cdots \times S^k \times N^k \tag{1.164}$$

em torno de x_0, com $S^1 \times \cdots \times S^k$ simplética e de dimensão $2k$ e com rk $\pi_{N^k}(\phi_{N^k}(x_0)) = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Isto conclui a parte (A).

(B) Unicidade

Vou mostrar que $S := S^1 \times \cdots \times S^k$ e $N := N^k$ da parte (A) são únicas, a menos de isomorfismos locais, i.e., se existirem $(\widetilde{S}, \{\cdot,\cdot\}^{\widetilde{S}})$, $(\widetilde{N}, \{\cdot,\cdot\}^{\widetilde{N}})$ e $\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}_{\widetilde{S}} \times \widetilde{\phi}_{\widetilde{N}} : \mathcal{U} \longrightarrow \widetilde{S} \times \widetilde{N}$ satisfazendo (A), então existem $\mathcal{V} \in \tau_{\phi_S(x_0)}(S)$, $\mathcal{W} \in \tau_{\phi_{\phi_N}(x_0)}(N)$ e isomorfismos de Poisson $\psi_S : \mathcal{V} \longrightarrow \psi_S(\mathcal{V}) \in \tau(\widetilde{S})$, $\psi_N : \mathcal{W} \longrightarrow \psi_N(\mathcal{W}) \in \tau(\widetilde{N})$ tais que $\psi_S \circ \phi_S(x_0) = \widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x_0)$ e $\psi_N \circ \phi_N(x_0) = \widetilde{\phi}_{\widetilde{N}}(x_0)$.

(i) Como rk $\pi_N(\phi_N(x_0)) =$ rk $\pi_{\widetilde{N}}(\widetilde{\phi}_{\widetilde{N}}(x_0)) = 0$, segue do lema lema (1), abaixo, que $(S, \phi^{-1} \circ i_{\phi_N(x_0)})$ e $(\widetilde{S}, \widetilde{\phi}^{-1} \circ i_{\widetilde{\phi}_{\widetilde{N}}(x_0)})$ são subvariedades de Poisson simpléticas, mergulhadas em M, logo estão contidas na folha simplética de M por x_0.

Seja $\overline{S}$ folha simplética de M por x_0, com a topologia relativa. Como $\phi^{-1} \circ i_{\phi_N(x_0)}(S) \subset \overline{S}$ e $\dim S = \dim \overline{S}$, segue $\phi^{-1} \circ i_{\phi_N(x_0)}(S) \in \tau_{x_0}(\overline{S})$. Analogamente, $\widetilde{\phi}^{-1} \circ i_{\widetilde{\phi}_{\widetilde{N}}(x_0)}(\widetilde{S}) \in \tau_{x_0}(\overline{S})$.

Tome $\widetilde{\mathcal{V}} := \phi^{-1} \circ i_{\phi_N(x_0)}(S) \cap \widetilde{\phi}^{-1} \circ i_{\widetilde{\phi}_{\widetilde{N}}(x_0)}(\widetilde{S}) \in \tau_{x_0}(\overline{S})$ e $\mathcal{V} := i^{-1}_{\phi_N(x_0)} \circ \phi(\widetilde{\mathcal{V}})$; $\mathcal{V}$ é aberto em S, pois $\phi^{-1} \circ i_{\phi_N(x_0)} : S \longrightarrow \overline{S}$ é contínua.

Como S e $\widetilde{S}$ estão mergulhadas em M, segue que

$$\begin{aligned} \psi_S : \mathcal{V} &\longrightarrow \psi_S(\mathcal{V}) \subset \widetilde{S} \\ s &\longmapsto i^{-1}_{\widetilde{\phi}_{\widetilde{N}}(x_0)} \circ \widetilde{\phi} \circ \phi^{-1} \circ i_{\phi_N(x_0)}(s) \end{aligned} \tag{1.165}$$

é um difeo, $\psi_S \circ \phi_S(x_0) = \widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x_0)$ e ψ_S é aplicação de Poisson, pois $\phi^{-1} \circ i_{\phi_N(x_0)}$ e $\widetilde{\phi}^{-1} \circ i_{\widetilde{\phi}_{\widetilde{N}}(x_0)}$ o são. Então ψ_S é o isomorfismo procurado.

(ii) Resta mostrar a unicidade de N.

Sendo $\overline{S}$ a folha simplética de M por x_0, segue do item anterior que $\phi^{-1} \circ j_{\phi_S(x_0)}(N)$ e $\widetilde{\phi}^{-1} \circ j_{\widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x_0)}(\widetilde{N})$ intercectam $\overline{S}$ em x_0 transversalmente, e do lema (1), abaixo, segue

que $\pi_{\phi^{-1}\circ j_{\phi_S(x_0)}(N)}$ e $\pi_{\widetilde{\phi}^{-1}\circ j_{\widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x_0)}(\widetilde{N})}$ coincidem com a estrutura de Poisson dada pela proposição (1.7.1).

Pelo lema (2), existe $H \in \mathrm{Aut}(M)$ e existem $\widetilde{\mathcal{W}} \in \tau_{x_0}\left(\phi^{-1}\circ j_{\phi_S(x_0)}(N)\right)$ e $\widetilde{\mathcal{Z}} \in \tau_{x_0}\left(\widetilde{\phi}^{-1}\circ j_{\widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x_0)}(\widetilde{N})\right)$ tais que $H(\widetilde{\mathcal{W}}) = \widetilde{\mathcal{Z}}$ e $H(x_0) = x_0$.

Como $\widetilde{\mathcal{W}}$ e $\widetilde{\mathcal{Z}}$ estão mergulhadas em M e têm a estrutura de Poisson (1.7.1), o lema (3) nos garante que

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_N : \widetilde{\mathcal{W}} &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{Z}} \\ x &\longmapsto H(x) \end{aligned} \tag{1.166}$$

é um isomorfismo de Poisson.

Pondo $\mathcal{W} := j^{-1}_{\phi_S(x_0)} \circ \phi(\widetilde{\mathcal{W}})$ e

$$\begin{aligned} \psi_N : \mathcal{W} &\longrightarrow \psi_N(\mathcal{W}) \in \tau(\widetilde{N}) \\ x &\longmapsto j^{-1}_{\widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x_0)} \circ \widetilde{\phi} \circ \phi^{-1} \circ j_{\phi_S(x_0)}(x) \end{aligned} \tag{1.167}$$

segue que ψ_N é isomorfismo de Poisson e $\psi_N \circ \phi_N(x_0) = \widetilde{\phi}_{\widetilde{N}}(x_0)$. ■

Lema 1 *Sejam* $(S, \{\cdot,\cdot\}^S)$ *variedade de Poisson simplética,* $(N, \{\cdot,\cdot\}^N)$ *variedade de Poisson,* $(M := S \times N, \{\cdot,\cdot\}^{S\times N})$ *e* $n_0 \in N$ *tal que* $\mathrm{rk}\ \pi_N(n_0) = 0$. ***Então:***

(i) (S, i_{n_0}) *é subvariedade de Poisson simplética, mergulhada em* M*;*

(ii) $(\forall s_0 \in S)$ (N, j_{s_0}) *é subvariedade mergulhada em* M *e* $\{\cdot,\cdot\}^N$ *é a estrutura de Poisson dada pela proposição* (1.7.1).

PROVA:

(i) É suficiente verificar que i_{n_0} é aplicação de Poisson, pois S é simplética por hipótese e é óbvio que (S, i_{n_0}) é subvariedade mergulhada deM.

$\forall f, g \in \mathcal{F}(M), \forall s \in S$, temos:

$$\begin{aligned} \{f,g\}^{S\times N} \circ i_{n_0}(s) &= \{f\circ i_{n_0}, g\circ i_{n_0}\}^S(s) + \{f\circ j_s, g\circ j_s\}^N(n_0) \overset{\mathrm{rk}\ \pi_N(n_0)=0}{=} \\ &= \{f\circ i_{n_0}, g\circ i_{n_0}\}^S(s) \end{aligned} \tag{1.168}$$

□

(ii) Dado $s_0 \in S$, é imediato que (N, j_{s_0}) é subvariedade mergulhada de M. Resta verificar que: (1)(N, j_{s_0}) admite a estrutura de Poisson definida em (1.7.1); (2)$\{\cdot,\cdot\}^N$ coincide com a referida estrutura de Poisson.

(1) (N, j_{s_0}) admite a estrutura de Poisson definida em (1.7.1).

Com efeito, pela proposição (1.7.1), é suficiente verificar que, $\forall n \in \mathrm{N}$, temos

$$\pi^{\sharp}_{(s_0,n)}\big((dj_{s_0} \cdot \mathrm{T}_n\mathrm{N})^{\perp}\big) \oplus dj_{s_0} \cdot \mathrm{T}_n\mathrm{N} = \mathrm{T}_{(s_0,n)}\mathrm{M} \tag{1.169}$$

Dado $n \in \mathrm{N}$, tome cartas $\big(\mathcal{U}, \varphi = (\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^k)\big) \in \mathfrak{A}_{s_0}(\mathrm{S})$, $\big(\mathcal{V}, \psi = (\widetilde{y}^1, \ldots, \widetilde{y}^l)\big) \in \mathfrak{A}_n(\mathrm{N})$ e $\big(\mathcal{U}\times\mathcal{V}, \varphi\times\psi = (x^1 := \widetilde{x}^1 \circ \Pi_{\mathrm{S}}, \ldots, x^k := \widetilde{x}^k \circ \Pi_{\mathrm{S}}, y^1 := \widetilde{y}^1 \circ \Pi_{\mathrm{N}}, \ldots, y^l := \widetilde{y}^l \circ \Pi_{\mathrm{N}})\big) \in \mathfrak{A}_{(s_0,n)}(\mathrm{M})$.

Temos:

$$(dj_{s_0} \cdot \mathrm{T}_n\mathrm{N})^{\perp} = [dx^1(s_0,n), \ldots, dx^k(s_0,n)] \tag{1.170}$$

donde

$$\begin{aligned} \pi^{\sharp}_{(s_0,n)}\big((dj_{s_0} \cdot \mathrm{T}_n\mathrm{N})^{\perp}\big) &= [\xi_{x^1}(s_0,n), \ldots, \xi_{x^k}(s_0,n)] = \\ &= [di_n \cdot \xi_{\widetilde{x}^1}(s_0), \ldots, di_n \cdot \xi_{\widetilde{x}^k}(s_0)] = \\ &= di_n \cdot [\xi_{\widetilde{x}^1}(s_0), \ldots, \xi_{\widetilde{x}^k}(s_0)] \overset{\text{S simplética}}{=} \\ &= di_n \cdot \mathrm{T}_{s_0}\mathrm{S} \end{aligned} \tag{1.171}$$

Como

$$dj_{s_0}\mathrm{T}_n\mathrm{N} \oplus di_n\mathrm{T}_{s_0}\mathrm{S} = \mathrm{T}_{(s_0,n)}\mathrm{M} \tag{1.172}$$

segue de (1.171) que está verificada (1.169), ou seja, (N, j_{s_0}) está nas hipóteses da proposição (1.7.1).

(2) $\{\cdot,\cdot\}^{\mathrm{N}}$ coincide com a estrutura de Poisson (1.7.1).

Com efeito, seja π_T a estrutura de Poisson em (N, j_{s_0}) definida por (1.7.1), ou seja,

$$\begin{aligned} &\pi_T{}^{\sharp} : \mathrm{T}^*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{TN} \\ &\pi_T{}^{\sharp}(n) := \Pi\big(j_{s_0}(n)\big) \circ \pi^{\sharp}\big(j_{s_0}(n)\big) \circ \Pi\big(j_{s_0}(n)\big)^* \end{aligned} \tag{1.173}$$

onde $\Pi : \mathrm{TM}|_{\mathrm{N}} = \mathrm{TN} \oplus_{\mathrm{N}} \pi^{\sharp}(\mathrm{TN}^{\perp}) \longrightarrow \mathrm{TN}$.

Tomando as mesmas cartas da parte (1), temos, $\forall n \in \mathrm{N}, \forall r \in \{1,\ldots,l\}$:

$$\begin{aligned}
&\pi_T^\sharp(n)\cdot d\widetilde{y}^r(n) = \\
&= dj_{s_0}(n)^{-1} \circ \Pi\big(j_{s_0}(n)\big) \circ \pi_{\mathrm{N}}^\sharp\big(j_{s_0}(n)\big) \circ \Pi\big(j_{s_0}(n)\big)^* \circ \big(dj_{s_0}(n)^*\big)^{-1}\big(d\widetilde{y}^r(n)\big) = \\
&= \big[dj_{s_0}(n)\big]^{-1} \circ \Pi\big(j_{s_0}(n)\big) \circ \pi_{\mathrm{N}}^\sharp\big(j_{s_0}(n)\big) \circ \Pi\big(j_{s_0}(n)\big)^*\big[dy^r\big(j_{s_0}(n)\big)\big] \overset{(*)}{=} \\
&= \big[dj_{s_0}(n)\big]^{-1} \circ \Pi\big(j_{s_0}(n)\big) \circ \pi_{\mathrm{N}}^\sharp\big(j_{s_0}(n)\big)\big[dy^r\big(j_{s_0}(n)\big)\big] = \\
&= \big[dj_{s_0}(n)\big]^{-1} \circ \Pi\big(j_{s_0}(n)\big)\big[\xi_{y^r}\big(j_{s_0}(n)\big)\big] = \\
&= \big[dj_{s_0}(n)\big]^{-1} \circ \Pi\big(j_{s_0}(n)\big)\big(dj_{s_0}\cdot\xi_{\widetilde{y}^r}(n)\big) \overset{dj_{s_0}\cdot\xi_{\widetilde{y}^r}(n)\in dj_{s_0}\cdot \mathrm{T}_n\mathrm{N}}{=} \\
&= \big[dj_{s_0}(n)\big]^{-1}\cdot dj_{s_0}\cdot\xi_{\widetilde{y}^r}(n) = \\
&= \xi_{\widetilde{y}^r}(n) = \\
&= \pi_{\mathrm{N}}^\sharp(n)\cdot d\widetilde{y}^r(n)
\end{aligned} \tag{1.174}$$

onde a igualdade $(*)$ vale porque $\Pi\big(j_{s_0}(n)\big)|_{dj_{s_0}\cdot \mathrm{T}_n\mathrm{N}} = \mathrm{id}$, donde:

$$\Pi\big(j_{s_0}(n)\big)^*\Big|_{\left[\pi^\sharp_{(s_0,n)}\left((dj_{s_0}\cdot \mathrm{T}_n\mathrm{N})^\perp\right)\right]^\perp = (di_n\cdot \mathrm{T}_{s_0}\mathrm{S})^\perp} = \mathrm{id}$$

Como $dy^r\big(j_{s_0}(n)\big) \in (di_n\cdot \mathrm{T}_{s_0}\mathrm{S})^\perp$, segue $\Pi\big(j_{s_0}(n)\big)^*\big[dy^r\big(j_{s_0}(n)\big)\big] = dy^r\big(j_{s_0}(n)\big)$.

■

Lema 2 *Sejam* N_0 *e* N_1 *subvariedades da variedade de Poisson* M, *com codimensão igual à dimensão de uma folha simplética* S. *Suponha que cada* N_i *intersecta* S *em um único ponto, transversalmente.* ***Então*** *existe* $H \in \mathrm{Aut}(\mathrm{M})$ *que leva uma vizinhança de* $\mathrm{N}_0 \cap \mathrm{S}$ *em* N_0 *numa vizinhança de* $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{S}$ *em* N_1, *com* $H(\mathrm{N}_0 \cap \mathrm{S}) = \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{S}$.

PROVA: Vide [Wei]. ■

Lema 3 *Sejam* (M,π) *variedade de Poisson,* $H \in \mathrm{Aut}(\mathrm{M})$, N_0 *e* N_1 *folhas de* M *que admitem a estrutura de Poisson* (1.7.1) *e tais que* $H(\mathrm{N}_0) = \mathrm{N}_1$. ***Então***

$$\begin{aligned}
\widetilde{H} : \mathrm{N}_0 &\longrightarrow \mathrm{N}_1 \\
x &\longmapsto H(x)
\end{aligned}$$

é um isomorfismo de Poisson.

PROVA:

(i)

$$\begin{array}{l} H : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M} \text{ difeo} \\ \mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1 \text{ folhas de M} \Rightarrow \widetilde{H} : \mathrm{N}_0 \longrightarrow \mathrm{N}_1 \quad difeo \\ \qquad H(\mathrm{N}_0) = \mathrm{N}_1 \qquad\qquad x \longmapsto H(x) \end{array} \tag{1.175}$$

(ii) Resta mostrar que $\widetilde{H}$ é aplicação de Poisson.

Sejam $i_0 : \mathrm{N}_0 \longrightarrow \mathrm{M}$ e $i_1 : \mathrm{N}_1 \longrightarrow \mathrm{M}$ inclusões de N_0 e N_1 em M, respectivamente.

(1) Dados $q \in \mathrm{N}_0$ e $p = \widetilde{H}(q) \in \mathrm{N}_1$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}_{i_0(q)}\mathrm{M} & \xrightarrow{dH} & \mathrm{T}_{i_1(p)}\mathrm{M} \\ {\scriptstyle di_0}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle di_1} \\ \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0 & \xrightarrow{d\widetilde{H}} & \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1 \end{array} \tag{1.176}$$

Com efeito, $\widetilde{H} = (i_1)^{-1} \circ H \circ i_0 : \mathrm{N}_0 \longrightarrow \mathrm{N}_1$, logo basta aplicar a regra da cadeia.

(2) Segue de (1) que

$$H^*(di_1 \cdot \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1)^\perp = (di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0)^\perp \tag{1.177}$$

Com efeito: dado $\theta \in (di_1 \cdot \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1)^\perp$, temos $(H^*\theta)_q = \theta \circ dH_q \in (di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0)^\perp$, pois $\theta \circ dH_q(di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0) \overset{(1)}{=} \theta(di_1 \cdot \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1) = \{\mathbb{O}\}$. Então $H^*(di_1 \cdot \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1)^\perp \subset (di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0)^\perp$; como têm a mesma dimensão, segue a igualdade.

(3) Sejam π_{N_0} e π_{N_1} tensores de Poisson de N_0 e N_1, respectivamente, conforme definido em proposição (1.7.1), ou seja:

$$\begin{array}{l} \pi^\sharp_{\mathrm{N}_0} : \mathrm{T}^*\mathrm{N}_0 \longrightarrow \mathrm{T}\mathrm{N}_0 \\ \pi^\sharp_{\mathrm{N}_0}(q) := \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big) \circ \pi^\sharp\big(i_0(q)\big) \circ \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big)^* \end{array} \tag{1.178}$$

onde $\Pi_{\mathrm{N}_0} : \mathrm{TM}|_{\mathrm{N}_0} = \mathrm{TN}_0 \oplus_{\mathrm{N}_0} \pi^\sharp(\mathrm{TN}_0{}^\perp) \longrightarrow \mathrm{TN}_0$, e

$$\begin{array}{l} \pi^\sharp_{\mathrm{N}_1} : \mathrm{T}^*\mathrm{N}_1 \longrightarrow \mathrm{T}\mathrm{N}_1 \\ \pi^\sharp_{\mathrm{N}_1}(p) := \Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big) \circ \pi^\sharp\big(i_1(p)\big) \circ \Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big)^* \end{array} \tag{1.179}$$

onde $\Pi_{\mathrm{N}_1} : \mathrm{TM}|_{\mathrm{N}_1} = \mathrm{TN}_1 \oplus_{\mathrm{N}_1} \pi^\sharp(\mathrm{TN}_1{}^\perp) \longrightarrow \mathrm{TN}_1$.

Vou mostrar que $\widetilde{H}$ é aplicação de Poisson, i.e.,

$$\widetilde{H}_* \pi_{\mathrm{N}_0} = \pi_{\mathrm{N}_1} \tag{1.180}$$

ou, equivalentemente:

$$\mathrm{T}\widetilde{H} \circ \pi^{\sharp}_{\mathrm{N}_0} \circ (\mathrm{T}\widetilde{H})^* = \pi^{\sharp}_{\mathrm{N}_1} \tag{1.181}$$

Como H é aplicação de Poisson, temos

$$\mathrm{T}H \circ \pi^{\sharp} \circ (\mathrm{T}H)^* = \pi^{\sharp} \tag{1.182}$$

portanto, $\forall\, q \in \mathrm{N}_0$, sendo $p := \widetilde{H}(q)$, temos:

$$\pi^{\sharp}\big(i_1(p)\big) = \mathrm{T}H \circ \pi^{\sharp}\big(i_0(q)\big) \circ (\mathrm{T}H)^* \tag{1.183}$$

donde

$$\pi^{\sharp}_{\mathrm{N}_1}(p) = \Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big)\mathrm{T}H \circ \pi^{\sharp}\big(i_0(q)\big) \circ (\mathrm{T}H)^* \circ \Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big)^* \tag{1.184}$$

Afirmação: o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{T}_{i_0(q)}\mathrm{M} & \xrightarrow{\;dH\;} & \mathrm{T}_{i_1(p)}\mathrm{M} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_{\mathrm{N}_0}(i_0(q))} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_{\mathrm{N}_1}(i_1(p))} \\
di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0 & \circlearrowleft & di_1 \cdot \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1 \\
\Big\uparrow{\scriptstyle di_0} \equiv & & \equiv \Big\uparrow{\scriptstyle di_1} \\
\mathrm{T}_q\mathrm{N}_0 & \xrightarrow{\;d\widetilde{H}\;} & \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1
\end{array} \tag{1.185}$$

Então segue (de (1.184) e da afirmação):

$$\begin{aligned}
\pi^{\sharp}_{\mathrm{N}_1}(p) &= \mathrm{T}\widetilde{H} \circ \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big) \circ \pi^{\sharp}\big(i_0(q)\big) \circ \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big)^* \circ \mathrm{T}\widetilde{H}^* \overset{(1.178)}{=} \\
&= \mathrm{T}\widetilde{H} \circ \pi^{\sharp}_{\mathrm{N}_0}(q) \circ \mathrm{T}\widetilde{H}^*
\end{aligned} \tag{1.186}$$

Como $q \in \mathrm{N}_0$ foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\pi^{\sharp}_{\mathrm{N}_1} = \mathrm{T}\widetilde{H} \circ \pi^{\sharp}_{\mathrm{N}_0} \circ \mathrm{T}\widetilde{H}^* \tag{1.187}$$

donde $\widetilde{H}$ é aplicação de Poisson, como queria mostrar.

Prova da afirmação: Com efeito:

$$\mathrm{T}_{i_0(q)}\mathrm{M} = \pi^{\sharp}\big(i_0(q)\big) \cdot (di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0)^{\perp} \oplus di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0 \tag{1.188}$$

Dadò $v \in \mathrm{T}_{i_0(q)}\mathrm{M}$, seja $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in \pi^{\sharp}\big(i_0(q)\big) \cdot (di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0)^{\perp}$ e $v_2 \in di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0$. Temos:

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{T}H \circ \pi^\sharp\big(i_0(q)\big) \cdot (di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0)^\perp &\overset{(1.177)}{=} \mathrm{T}H \circ \pi^\sharp\big(i_0(q)\big) \circ (\mathrm{T}H)^*(di_1 \cdot \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1)^\perp \overset{H\in\mathrm{Aut}\,(\mathrm{M})}{=} \\ &= \pi^\sharp\big(i_1(p)\big) \cdot (di_1 \cdot \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1)^\perp \end{aligned} \tag{1.189}$$

ou seja,

$$\mathrm{T}H \cdot \mathrm{Ker}\ \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big) = \mathrm{Ker}\ \Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big) \tag{1.190}$$

então:

$$\Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big) \circ \mathrm{T}H(v_1) = 0 = \mathrm{T}\widetilde{H} \circ \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big)(v_1) \tag{1.191}$$

(b) Por outro lado, o seguinte diagrama comuta :

$$\begin{tikzcd} di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0 \arrow[r, "dH"] \arrow[d, "\Pi_{\mathrm{N}_0}(i_0(q))"'] & di_1 \cdot \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1 \arrow[d, "\Pi_{\mathrm{N}_1}(i_1(p))"] \\ di_0 \cdot \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0 \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & di_1 \cdot \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1 \\ \mathrm{T}_q\mathrm{N}_0 \arrow[u, "di_0"', "\equiv"] \arrow[r, "d\widetilde{H}"] & \mathrm{T}_p\mathrm{N}_1 \arrow[u, "\equiv"', "di_1"] \end{tikzcd} \tag{1.192}$$

pois o diagrama (1.176) comuta, $\Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big)|_{di_0\cdot\mathrm{T}_q\mathrm{N}_0} = \mathrm{id}$ e $\Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big)|_{di_1\cdot\mathrm{T}_p\mathrm{N}_1} = \mathrm{id}$.
Então:

$$\Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big) \circ \mathrm{T}H(v_2) = \mathrm{T}\widetilde{H} \circ \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big)(v_2) \tag{1.193}$$

Segue de (1.191) e (1.193) que:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big) \circ \mathrm{T}H(v) &= \Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big) \circ \mathrm{T}H(v_1 + v_2) = \\ &= \Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big) \circ \mathrm{T}H(v_1) + \Pi_{\mathrm{N}_1}\big(i_1(p)\big) \circ \mathrm{T}H(v_2) = \\ &= \mathrm{T}\widetilde{H} \circ \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big)(v_1) + \mathrm{T}\widetilde{H} \circ \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big)(v_2) = \\ &= \mathrm{T}\widetilde{H} \circ \Pi_{\mathrm{N}_0}\big(i_0(q)\big)(v) \end{aligned} \tag{1.194}$$

e, como v foi tomado arbitrariamente, segue a tese. ■

Uma conseqüência da demonstração *splitting theorem* (1.7.2) é o conceito de *estrutura de Poisson transversa*:

1.7.3 Definição: Dados (M, π) uma variedade de Poisson, S folha simplética de M e N uma seção transversal a S , suficientemente pequena, então N está nas hipóteses da proposição (1.7.1), logo está bem definida uma estrutura de Poisson π_N em N, como na referida proposição. Chamarei π_N de **estrutura de Poisson transversa** em N.

Observe que, se $\widetilde{N}$ for outra seção transversal a S e $\pi_{\widetilde{N}}$ for o tensor de Poisson em $\widetilde{N}$ dado pela proposição (1.7.1), então a parte (B) - unicidade - do teorema (1.7.2) garante que π_N e $\pi_{\widetilde{N}}$ são isomorfas (pelo menos numa vizinhança das intersecções). Ou seja, as estruturas de Poisson transversas induzidas nas seções transversais a uma folha simplética são localmente isomorfas.

Uma outra conseqüência do *splitting theorem* é a seguinte generalização do teorema de Darboux para variedades de Poisson de posto localmente constante:

1.7.4 Teorema (de Darboux, [Wei])
Seja (M, π) *uma variedade de Poisson e* $x_0 \in M$. *Suponha que o posto do tensor de Poisson seja constante numa vizinhança* $\mathcal{U} \in \tau(M)$ *de* x_0. ***Então:***

(i) o posto do tensor de Poisson em $\mathcal{U}$ *é par, ou seja, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\text{rk}\ \pi(x) = 2k, \forall x \in \mathcal{U}$;

(ii) existe uma carta $(\mathcal{V}, \psi = (q^1, \ldots, q^k, p^1, \ldots, p^k, y^1, \ldots, y^l)) \in \mathfrak{A}_{x_0}(M)$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, *tal que* $\{q^i, q^j\} = \{p^i, p^j\} = \{q^i, y^j\} = \{p^i, y^j\} = \{y^i, y^j\} = 0$ *e* $\{q^i, p^j\} = \delta^{ij}$. *Ou seja, em* $\mathcal{V}$ *temos:*

$$\pi|_{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^{k} \partial_{q^i} \wedge \partial_{p^i} \tag{1.195}$$

PROVA: Vide demonstração da parte (A) - existência - do *splitting theorem* (1.7.2).

1.7.5 Corolário: *Se S é folha simplética de uma variedade de Poisson M, então S tem dimensão par. Em particular, toda variedade simplética tem dimensão par.*

Para finalizar esta seção, demonstrarei um resultado que havia sido enunciado na observação (1.5.5).

1.7.6 Proposição: ([Wei]) *Seja* (M, π) *uma variedade de Poisson e* $x_0 \in M$. *Suponha que o posto do tensor de Poisson seja constante numa vizinhança* $\mathcal{U} \in \tau(M)$ *de* x_0. ***Então*** *existe uma vizinhança de* x_0 *na qual a folha simplética que passa por* x_0 *coincide com a intersecção das hiperfícies de nível regulares por* x_0 *das funções de Casimir definidas nesta vizinhança.*

PROVA:

Com efeito, seja $(\mathcal{V}, \psi = (q^1, \ldots, q^k, p^1, \ldots, p^k, y^1, \ldots, y^l)) \in \mathfrak{A}_{x_0}(\mathrm{M})$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, carta em torno de x_0 dada pelo teorema de Darboux (1.7.4). Sem perda de generalidade, vou supor que esta carta é cúbica e centrada em x_0. Em $\mathcal{V}$, portanto, π é dado por (1.195).

Sejam C a intersecção das hiperfícies de nível regulares por x_0 das funções de Casimir definidas em $\mathcal{V}$, e S a folha simplética de $(\mathcal{V}, \pi|_{\mathcal{V}})$ por x_0.

(1) Por (1.195), S é a fatia $\{x \in \mathcal{V} : y^1(x) = \ldots = y^l(x) = 0\}$. Como $y^1, \ldots, y^l$ são funções de Casimir regulares definidas em $\mathcal{V}$, segue $\mathrm{C} \subset \mathrm{S}$.

(2) Por outro lado, pela proposição (1.3.20), as funções de Casimir definidas em $\mathcal{V}$ são constantes ao longo das folhas simpléticas de $(\mathcal{V}, \pi|_{\mathcal{V}})$, e deste fato é imediato que $\mathrm{S} \subset \mathrm{C}$, e do item anterior segue a igualdade. ■

1.8 Estruturas de Poisson Lineares

Finalizarei este capítulo com uma versão moderna de um tipo de estrutura de Poisson que foi introduzido por Lie:

1.8.1 Definição
Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, e $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(\mathsf{V}) \times \mathcal{F}(\mathsf{V}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathsf{V})$ um colchete de Poisson em V. Direi que $\{\cdot,\cdot\}$ é um **colchete de Poisson linear** se $\{f, g\} \in \mathsf{V}^*, \forall f, g \in \mathsf{V}^*$.

1.8.2 Proposição: *Sejam* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *álgebra de Lie sobre* $\mathbb{R}$, $\mathsf{V} = \mathfrak{g}^*$, $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^{**}$ *inclusão canônica e*
$\forall F, G \in \mathcal{F}(\mathsf{V}), \forall \mu \in \mathsf{V}$*:*

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \mu} &:= J^{-1}(dF(\mu)) \\ \{F, G\}(\mu) &:= \langle \mu, [\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu}] \rangle \end{aligned} \tag{1.196}$$

Então $\{\cdot,\cdot\}$ *é um colchete de Poisson linear em* $\mathsf{V} = \mathfrak{g}^*$, *chamado* ***colchete de Lie-Poisson*** *em* $\mathfrak{g}^*$.

PROVA:

(1) *Afirmação:* $\forall F, G \in \mathcal{F}(\mathsf{V})$:

$$\begin{aligned} \{F, G\} : \mathsf{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mu &\longmapsto \langle \mu, [\tfrac{\delta F}{\delta \mu}, \tfrac{\delta G}{\delta \mu}] \rangle \end{aligned}$$

é C^∞.

Com efeito, $\{F,G\}$ é a composição das seguintes aplicações C^∞:

$$\begin{aligned} dF \times dG \times \mathrm{id} : \mathsf{V} &\longrightarrow \mathsf{V}^* \times \mathsf{V}^* \times \mathsf{V} \\ \mu &\longmapsto \big(dF(\mu), dG(\mu), \mu\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J^{-1} \times J^{-1} \times \mathrm{id} : \mathsf{V}^* \times \mathsf{V}^* \times \mathsf{V} &\longrightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathsf{V} \\ \big(dF(\mu), dG(\mu), \mu\big) &\longmapsto \big(\tfrac{\delta F}{\delta \mu}, \tfrac{\delta G}{\delta \mu}, \mu\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\cdot\,,\cdot] \times \mathrm{id} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathsf{V} &\longrightarrow \mathfrak{g} \times \mathsf{V} \\ \big(\tfrac{\delta F}{\delta \mu}, \tfrac{\delta G}{\delta \mu}, \mu\big) &\longmapsto \big([\tfrac{\delta F}{\delta \mu}, \tfrac{\delta G}{\delta \mu}], \mu\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta : \mathfrak{g} \times (\mathsf{V} = \mathfrak{g}^*) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \big([\tfrac{\delta F}{\delta \mu}, \tfrac{\delta G}{\delta \mu}], \mu\big) &\longmapsto \langle \mu, [\tfrac{\delta F}{\delta \mu}, \tfrac{\delta G}{\delta \mu}] \rangle \end{aligned}$$

$\therefore \{F,G\} = \delta \circ ([\cdot\,,\cdot] \times \mathrm{id}) \circ (J^{-1} \times J^{-1} \times \mathrm{id}) \circ (dF \times dG \times \mathrm{id})$ é C^∞. □

(2) *Afirmação:* $\{\cdot\,,\cdot\}$ é anti-simétrico.

Com efeito, $\forall F, G \in \mathcal{F}(\mathsf{V}), \forall \mu \in \mathsf{V}$:

$$\begin{aligned} \{G,F\}(\mu) &= \langle \mu, [\frac{\delta G}{\delta \mu}, \frac{\delta F}{\delta \mu}] \rangle \overset{[\cdot,\cdot] \text{ anti-simétrico}}{=} \\ &= \langle \mu, -[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu}] \rangle \overset{\mu \text{ linear}}{=} \\ &= -\langle \mu, [\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu}] \rangle \\ &= -\{F,G\}(\mu) \end{aligned} \tag{1.197}$$

□

(3) *Afirmação:* $\{\cdot\,,\cdot\}$ satisfaz a propriedade de Leibniz (1.44).

De fato, $\forall F, G, H \in \mathcal{F}(\mathsf{V}), \forall \mu \in \mathsf{V}$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(GH)}{\delta \mu} &= J^{-1}\big(d(GH)(\mu)\big) = \\ &= J^{-1}\big(H(\mu) dG_\mu + G(\mu) dH_\mu\big) \overset{J \text{ iso linear}}{=} \\ &= H(\mu)\frac{\delta G}{\delta \mu} + G(\mu)\frac{\delta H}{\delta \mu} \end{aligned} \tag{1.198}$$

donde:

$$\begin{aligned}\{F,GH\}(\mu) &= \langle \mu, [\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta GH}{\delta \mu}]\rangle \overset{(1.198)}{=} \\ &= \langle \mu, [\frac{\delta F}{\delta \mu}, H(\mu)\frac{\delta G}{\delta \mu} + G(\mu)\frac{\delta H}{\delta \mu}]\rangle \overset{\mu \text{ linear, } [\cdot,\cdot] \text{ bilinear}}{=} \\ &= H(\mu)\langle \mu, [\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu}]\rangle + G(\mu)\langle \mu, [\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta H}{\delta \mu}]\rangle = \\ &= \big(H\{F,G\} + G\{F,H\}\big)(\mu)\end{aligned} \tag{1.199}$$

□

(4) *Afirmação:* $\{\cdot,\cdot\}$ é linear.

Com efeito, se $F, G \in \mathcal{F}(\mathsf{V})$ são lineares, então $(\forall \mu \in \mathsf{V})\, dF(\mu) = F \in \mathsf{V}^*$, $dG(\mu) = G \in \mathsf{V}^*$, logo:

$$\begin{aligned}\{F,G\} : \mathsf{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mu &\longmapsto \langle \mu, [\tfrac{\delta F}{\delta \mu}, \tfrac{\delta G}{\delta \mu}]\rangle = \langle \mu, [J^{-1}(F), J^{-1}(G)]\rangle\end{aligned}$$

é linear em μ, $\therefore \{\mathsf{V}^*, \mathsf{V}^*\} \subset \mathsf{V}^*$. □

(5) *Afirmação:* $\{\cdot,\cdot\}$ satisfaz a identidade de Jacobi (1.43).

Com efeito, sejam $\{X_1, \ldots, X_n\}$ base de $\mathfrak{g}$. Então $\{x^i := J(X_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ é base de $\mathsf{V}^* = \mathfrak{g}^{**}$, donde:

$$(\mathsf{V}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)) \in \mathfrak{A}(V) \tag{1.200}$$

Como $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\, x^i \in \mathsf{V}^*$, segue de (4) que $(\forall i,j \in \{1, \ldots, n\})\, \{x^i, x^j\} \in \mathsf{V}^*$, donde:

$$\frac{\delta\{x^i, x^j\}}{\delta \mu} = J^{-1}\big(d\{x^i, x^j\}(\mu)\big) = J^{-1}(\{x^i, x^j\}) \tag{1.201}$$

$\forall i,j \in \{1 \ldots, n\}, \forall \mu \in \mathsf{V}$.

Mas, por (1.196), $\forall i,j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{\delta x^i}{\delta \mu} = J^{-1}\big(dx^i(\mu)\big) = J^{-1}(x^i) = X_i$$

$$\begin{aligned}\therefore \{x^i, x^j\}(\mu) &= \langle \mu, [\frac{\delta x^i}{\delta \mu}, \frac{\delta x^j}{\delta \mu}]\rangle = \\ &= \langle \mu, [X_i, X_j]\rangle = \\ &= \big(J([X_i, X_j])\big)(\mu)\end{aligned} \tag{1.202}$$

logo $J^{-1}(\{x^i, x^j\}) = [X_i, X_j]$, e, de (1.201), segue:

$$\frac{\delta\{x^i, x^j\}}{\delta\mu} = [X_i, X_j] \tag{1.203}$$

donde, $\forall i, j, k \in \{1, \ldots, n\}, \forall \mu \in \mathsf{V}$:

$$\begin{aligned} \{\{x^i, x^j\}, x^k\}(\mu) &= \langle \mu, [\frac{\delta\{x^i, x^j\}}{\delta\mu}, \frac{\delta x^k}{\delta\mu}] \rangle \overset{(1.203)}{=} \\ &= \langle \mu, [[X_i, X_j], X_k] \rangle \end{aligned} \tag{1.204}$$

$\therefore \{\cdot, \cdot\}$ satisfaz Jacobi, pois $[\cdot, \cdot]$ satisfaz. ■

1.8.3 Observação

(i)

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) &\longrightarrow (\mathcal{F}(\mathsf{V}), \{\cdot, \cdot\}) \\ X &\longmapsto J(X) \in \mathfrak{g}^{**} = \mathsf{V}^* < \mathcal{F}(\mathsf{V}) \end{aligned} \tag{1.205}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} : (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) &\longrightarrow (\mathfrak{X}(\mathsf{V}), [\cdot, \cdot]) \\ X &\longmapsto -\xi_{J(X)} \end{aligned} \tag{1.206}$$

são homomorfismos entre álgebras de Lie.

Com efeito, sejam $\{X_1, \ldots, X_n\}$ base de $\mathfrak{g}$, $\{x^1 := J(X_1), \ldots, x^n := J(X_n)\}$ base de $\mathfrak{g}^{**}$ e $(\mathsf{V}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)) \in \mathfrak{A}(\mathsf{V})$ carta global de V, como na demonstração anterior (1.200). Temos:

(i)

$$J : (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) \longrightarrow (\mathsf{V}^*, \{\cdot, \cdot\}) \tag{1.207}$$

é isomorfismo entre álgebras de Lie, pois é isomorfismo entre espaços vetoriais e, como já vimos, $J([X_i, X_j]) = \{x^i, x^j\} = \{J(X_i), J(X_j)\}$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Como $\{\cdot, \cdot\}$ é linear, $(\mathsf{V}^*, \{\cdot, \cdot\})$ é subálgebra de Lie de $(\mathcal{F}(\mathsf{V}), \{\cdot, \cdot\})$, então segue do exposto no parágrafo anterior que $\mathcal{J}$ é um homomorfismo entre álgebras de Lie.

(ii) Pela proposição (1.3.9),

$$\begin{aligned} -\xi : (\mathcal{F}(\mathsf{V}), \{\cdot, \cdot\}) &\longrightarrow (\mathfrak{X}(\mathsf{V}), [\cdot, \cdot]) \\ H &\longmapsto -\xi_H = -\pi^\sharp(dH) = -\{\cdot, H\} \end{aligned} \tag{1.208}$$

é um homomorfismo entre álgebras de Lie; então segue do item anterior que $\mathfrak{J} = -\xi \circ \mathcal{J}$ é um homomorfismo entre álgebras de Lie.

1.8.4 Observação

Afirmação: Dado V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita, um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{V}) \equiv \mathfrak{D}(\mathcal{F}(\mathsf{V}))$ fica determinado univocamente por seus valores em V^*, i.e., dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathsf{V})$ tais que $(\forall f \in \mathsf{V}^* < \mathcal{F}(V))\, Xf = Yf$, então $X = Y$.

Prova: Com efeito, sejam $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ base de V e $B^* = \{x^1, \ldots, x^n\}$ base de V^* dual de B. Então $(\mathsf{V}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)) \in \mathfrak{A}(\mathsf{V})$ é uma carta global em V; dado $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{V})$, temos

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x^i)\partial_{x^i} \tag{1.209}$$

e, como $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\, x^i \in \mathsf{V}^*$, é claro que de (1.209) segue a tese. ■

1.8.5 Observação

Na observação anterior, se for dado um colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ em V, o mesmo fica univocamente determinado por seus valores em V^*; com efeito, pela proposição (1.3.12), $\{\cdot, \cdot\}$ fica determinado pelas funções $\{x^i, x^j\}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, dados $r, s \in \mathbb{N}$, o fibrado vetorial $\mathrm{T}^r_s(\mathsf{V})$ é trivializável, i.e., existe um isomorfismo

$$\mathrm{T}^r_s(\mathsf{V}) \equiv \mathsf{V} \times \mathsf{V}^r_s \tag{1.210}$$

onde $\mathsf{V}^r_s = \mathsf{V} \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes \mathsf{V} \otimes \mathsf{V}^* \otimes \overset{s}{\cdots} \otimes \mathsf{V}^*$.

Este isomorfismo induz um isomorfismo entre $\mathbb{R}$-espaços vetoriais

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{J}} : \mathcal{T}^r_s(\mathsf{V}) = \Gamma^\infty(\mathsf{V}, \mathrm{T}^r_s(\mathsf{V})) &\longrightarrow \Gamma^\infty(\mathsf{V}, \mathsf{V} \times \mathsf{V}^r_s) \\ X &\longmapsto \mathrm{id} \times \widetilde{X} \end{aligned} \tag{1.211}$$

onde $\widetilde{X} \in \mathrm{C}^\infty(\mathsf{V}, \mathsf{V}^r_s)$.

Desta forma, existe uma bijeção

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{T}^r_s(\mathsf{V}) &\longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathsf{V}, \mathsf{V}^r_s) \\ X &\longmapsto \widetilde{X} \end{aligned} \tag{1.212}$$

e vou usar esta bijeção para identificar $\mathcal{T}^r_s(\mathsf{V}) = \Gamma^\infty(\mathsf{V}, \mathrm{T}^r_s(\mathsf{V}))$ com $\mathrm{C}^\infty(\mathsf{V}, \mathsf{V}^r_s)$.

Além disso, pode ser facilmente verificado que, dados $X \in \mathcal{T}^r_s(\mathsf{V})$ e $Y \in \mathcal{T}^s_r(\mathsf{V})$, temos, $\forall p \in \mathsf{V}$:

$$\langle X, Y \rangle(p) = \langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle(p) := \langle \widetilde{X}(p), \widetilde{Y}(p) \rangle \tag{1.213}$$

1.8.6 Definição: Através da identificação anterior, direi que um campo de (r,s)-tensores $X \in \mathfrak{T}^r_s(\mathsf{V}) \equiv \mathrm{C}^\infty(\mathsf{V}, \mathsf{V}^r_s)$ é **linear** se $\widetilde{X} \in \mathrm{Hom}\,(\mathsf{V}, \mathsf{V}^r_s) < \mathrm{C}^\infty(\mathsf{V}, \mathsf{V}^r_s)$, e denotarei o conjunto dos campos de (r,s)-tensores lineares em V por $(\mathfrak{T}_{lin})^r_s(\mathsf{V})$. Obviamente, $(\mathfrak{T}_{lin})^r_s(\mathsf{V})$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{T}^r_s(\mathsf{V})$.

Em particular, quando $r = 1$ e $s = 0$, um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{V})$ é linear se $\widetilde{X} \in \mathrm{End}\,(\mathsf{V})$, e denotarei o conjunto dos campos de vetores lineares por $\mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$.

1.8.7 Proposição: *Na definição anterior, a restrição de $-\mathfrak{I}$ a $\mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$ (que também denotarei por $-\mathfrak{I}$) preserva colchetes de Lie, ou seja, a aplicação*

$$-\mathfrak{I} : \big(\mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V}), [\cdot\,,\cdot]\big) \longrightarrow \big(\mathrm{End}\,(\mathsf{V}), [\cdot\,,\cdot]\big) \tag{1.214}$$

preserva colchetes de Lie, onde os colchetes tomados são os usuais em $\mathfrak{X}(\mathsf{V}) > \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$ e $\mathrm{End}\,(\mathsf{V})$.

Segue imediatamente desta proposição o seguinte corolário:

1.8.8 Corolário: (1.214) *é um isomorfismo entre álgebras de Lie e $\mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V}) \equiv \mathrm{End}\,(\mathsf{V})$ é uma subálgebra de Lie de dimensão finita de $\mathfrak{X}(\mathsf{V})$.*

PROVA DA PROPOSIÇÃO:

Com efeito, sejam $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ base de V e $B^* = \{x^1, \ldots, x^n\}$ base de V^* dual de B. Então $\big(\mathsf{V}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)\big) \in \mathfrak{A}(\mathsf{V})$ é uma carta global em V, e $\big(\forall i \in \{1, \ldots, n\}\big)\, \mathfrak{I}(\partial_{x^i}) = x_i$. Então:

(1) Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{V})$, temos:

$$X = \sum_{i=1}^n X(x^i)\partial_{x^i} = \sum_{i=1}^n X^i \partial_{x_i} \tag{1.215}$$

donde

$$\widetilde{X} := \mathfrak{I}(X) = \sum_{i=1}^n X^i x_i \tag{1.216}$$

logo $X \in \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V}) \equiv \mathrm{End}\,(\mathsf{V}) \Leftrightarrow \big(\forall i \in \{1, \ldots, n\}\big)\, X^i \in \mathsf{V}^*$.

Usando o isomorfismo canônico $\mathrm{End}\,(\mathsf{V}) \equiv \mathsf{V}^* \otimes \mathsf{V}$, dada $f \in \mathrm{End}\,(\mathsf{V})$, posso escrever

$$f = \sum_{i=1}^n f^i \otimes x_i = \sum_{i,j=1}^n f^i_j x^j \otimes x_i$$

onde $f^i_j = \langle x^i, f(x_j)\rangle \in \mathbb{R}$.

(2) Dados $X, Y \in \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$ temos, pelo item anterior:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x^i)\partial_{x^i} = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_{x_i} \tag{1.217}$$

$$\widetilde{X} := \mathcal{I}(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^i x^j\right) \otimes x_i \in \mathrm{End}\,(\mathsf{V}) \tag{1.218}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y(x^i)\partial_{x^i} = \sum_{i=1}^{n} Y^i \partial_{x_i} \tag{1.219}$$

$$\widetilde{Y} := \mathcal{I}(Y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j^i x^j\right) \otimes x_i \in \mathrm{End}\,(\mathsf{V}) \tag{1.220}$$

onde $(\forall i, j \in \{1, \ldots, n\})\ X_j^i, Y_j^i \in \mathbb{R}$.

Então:

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\partial_{x^i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X^j Y_j^i - Y^j X_j^i\right)\partial_{x^i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n} (X_k^j Y_j^i - Y_k^j X_j^i) x^k \partial_{x^i}
\end{aligned} \tag{1.221}$$

donde

$$-\widetilde{[X, Y]} = -\mathcal{I}([X, Y]) == \sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n} (X_k^i Y_j^k - Y_k^i X_j^k) x^j \otimes x_i \tag{1.222}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
[-\mathcal{I}(X), -\mathcal{I}(Y)] &= [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \\
&= \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} - \widetilde{Y} \circ \widetilde{X} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n} (X_k^i Y_j^k - Y_k^i X_j^k) x^j \otimes x_i
\end{aligned} \tag{1.223}$$

Então segue de (1.222) e (1.223) que:

$$-\mathcal{I}([X, Y]) = [-\mathcal{I}(X), -\mathcal{I}(Y)] \tag{1.224}$$

e como $X, Y \in \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$ foram tomados arbitrariamente, segue a tese. ■

1.8.9 Observação: *Afirmação:* Usando a notação da observação (1.8.5), $(\forall X \in \mathfrak{X}(\mathsf{V}), \forall f \in \mathsf{V}^*)\ Xf = \widetilde{X}^*(f)$.

Prova: Com efeito, dada $f \in \mathsf{V}^*$, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{df} = \mathcal{I}(df) : \mathsf{V} &\longrightarrow \mathsf{V}^* \\ x &\longmapsto f \end{aligned}$$

Por (1.213), temos, $\forall p \in \mathsf{V}$:

$$\begin{aligned} (Xf)(p) &= \langle df, X\rangle(p) = \\ &= \langle \widetilde{df}(p), \widetilde{X}(p)\rangle \\ &= \langle f, \widetilde{X}(p)\rangle = \\ &= f \circ \widetilde{X}(p) = \big(\widetilde{X}^*(f)\big)(p) \end{aligned} \tag{1.225}$$

■

1.8.10 Definição: Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\{\cdot,\cdot\}$ um colchete de Poisson linear em V. Denotarei o conjunto dos campos de vetores hamiltonianos lineares em V por $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$. Como $\mathfrak{H}(\mathsf{V})$ e $\mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$ são subálgebras de Lie de $\mathfrak{X}(\mathsf{V})$, segue que $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) = \mathfrak{H}(\mathsf{V}) \cap \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$ é uma subálgebra de Lie de dimensão finita de $\mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V}) \equiv \mathrm{End}\,(\mathsf{V})$.

Também vou definir o conjunto dos automorfismos de Poisson lineares de V $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}) := \{f \in \mathrm{Aut}\,(\mathsf{V}) :$ f é aplicação de Poisson$\}$ e $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}) := \{X \in \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V}) \equiv \mathrm{End}\,(\mathsf{V}) : X\{f,g\} = \{Xf,g\} + \{f,Xg\}, \forall f,g \in \mathcal{F}(\mathsf{V})\}$.

1.8.11 Proposição: *Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\{\cdot,\cdot\}$ um colchete de Poisson linear em V. Então:*

(i) $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$ *é subgrupo de Lie de* $\mathrm{Aut}\,(\mathsf{V})$ *e* $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$ *é a álgebra de Lie de* $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$*;*

(ii) $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$ *é subálgebra de Lie de* $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$.

PROVA:

(i) Consideremos $\mathrm{Aut}\,(\mathsf{V})$ e $\mathrm{Aut}\,(\mathsf{V}^*)$ com a estrutura de grupo de Lie usual. Seja:

$$\begin{aligned} H : \mathrm{Aut}\,(\mathsf{V}) &\longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathsf{V}^*) \\ f &\longmapsto (f^{-1})^* \end{aligned} \tag{1.226}$$

Temos:

(1) *Afirmação:* H é um isomorfismo de Lie e:

$$\begin{aligned} dH : \mathrm{End}(\mathsf{V}) &\longrightarrow \mathrm{End}(\mathsf{V}^*) \\ f &\longmapsto -f^* \end{aligned} \tag{1.227}$$

Com efeito, é claro que H é um difeo, pois é a composição dos seguintes difeomorfismos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\mathsf{V}) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{V}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{V}^*) \\ f &\longmapsto f^{-1} \\ g &\longmapsto g^* \end{aligned} \tag{1.228}$$

Uma aplicação da regra da cadeia também nos mostra que vale (1.227).

Além disso, H é um homomorfismo (algébrico) de grupos:

$$H(f \circ g) = (f \circ g^{-1})^* = (g^{-1} \circ f^{-1})^* = (f^{-1})^* \circ (g^{-1})^* = H(f) \circ H(g) \tag{1.229}$$

$\forall f, g \in \mathrm{Aut}(\mathsf{V})$. □

(2) Sejam $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*) := \{P^* \in \mathrm{Aut}(\mathsf{V}^*) : P^*(\{f^*, g^*\}) = \{P^*(f^*), P^*(g^*)\}, \forall f^*, g^* \in \mathsf{V}^*\}$ e $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*) := \{X^* \in \mathrm{End}(\mathsf{V}^*) : X^*(\{f^*, g^*\}) = \{X^*(f^*), g^*\} + \{f^*, X^*(g^*)\}, \forall f^*, g^* \in \mathsf{V}^*\}$.

Pelo teorema (3.54) de [War83], como $\{\cdot,\cdot\} : \mathsf{V}^* \times \mathsf{V}^* \longrightarrow \mathsf{V}^*$ é bilinear, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*)$ é um subgrupo de Lie fechado de $\mathrm{Aut}(\mathsf{V}^*)$ e $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*)$ é a álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*)$.

(3) *Afirmação:* $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}) = H^{-1}\big(\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*)\big)$ e $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}) = dH^{-1}\big(\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*)\big)$.

Com efeito:

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}) &:= \{P \in \mathrm{Aut}(\mathsf{V}) : \{f \circ P, g \circ P\} = \{f, g\} \circ P, \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathsf{V})\} \overset{\text{observação (1.8.5)}}{=} \\ &= \{P \in \mathrm{Aut}(\mathsf{V}) : \{f \circ P, g \circ P\} = \{f, g\} \circ P, \forall f, g \in \mathsf{V}^*\} \end{aligned} \tag{1.230}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}) &:= \{X \in \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V}) \equiv \mathrm{End}(\mathsf{V}) : X\{f, g\} = \{Xf, g\} + \{f, Xg\}, \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathsf{V})\} \overset{\text{observação (1.8.5)}}{=} \\ &= \{X \in \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V}) \equiv \mathrm{End}(\mathsf{V}) : X\{f, g\} = \{Xf, g\} + \{f, Xg\}, \forall f, g \in \mathsf{V}^*\} \end{aligned} \tag{1.231}$$

(b) De (1.230) e (1.231), segue:

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}) &\Leftrightarrow (\forall f,g \in \mathsf{V}^*)\,\{f\circ P, g\circ P\} = \{f,g\}\circ P \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall f,g \in \mathsf{V}^*)\,\{P^*(f),P^*(g)\} = P^*(\{f,g\}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow H(P^{-1}) \overset{H \text{ homomorfismo}}{=} \big(H(P)\big)^{-1} \in \operatorname{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*) \overset{\operatorname{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*) \text{ grupo}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow H(P) \in \operatorname{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*) \end{aligned} \tag{1.232}$$

$\therefore H\big(\operatorname{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})\big) = \operatorname{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*)$. Analogamente:

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}) &\Leftrightarrow (\forall f,g \in \mathsf{V}^*)\, X\{f,g\} = \{Xf,g\} + \{f,Xg\} \overset{\text{observação (1.8.9)}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow (\forall f,g \in \mathsf{V}^*)\, X^*(\{f,g\}) = \{X^*(f),g\} + \{f,X^*(g)\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow X^* = -dH(X) \in \mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dH(X) \in \mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*) \end{aligned} \tag{1.233}$$

$\therefore dH\big(\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})\big) = \mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}^*)$.qedp

(4) Segue de (2) e (3) que $\operatorname{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$ é subgrupo de Lie de $\operatorname{Aut}(\mathsf{V})$ e $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$ é a álgebra de Lie de $\operatorname{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$, e isto conclui a prova da parte (i).

(ii) $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$ é subálgebra de Lie de $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$.

Com efeito, já mostrei que $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) = \mathfrak{H}(\mathsf{V}) \cap \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V}) \equiv \operatorname{End}(\mathsf{V})$. Como $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$ também é subálgebra de Lie de $\operatorname{End}(\mathsf{V})$, é suficiente mostrar que $\mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V}) \subset \operatorname{End}(\mathsf{V})$.

Dado $\xi_h \in \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$, temos, $\forall f,g \in \mathsf{V}^*$:

$$\begin{aligned} \xi_h\{f,g\} &= \{\{f,g\},h\} \overset{(1.43)}{=} \\ &= -\{\{g,h\},f\} - \{\{h,f\},g\} = \\ &= \{\xi_h f,g\} + \{f,\xi_h g\} \end{aligned} \tag{1.234}$$

$\therefore \xi_h \in \mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$ e $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) \subset \mathfrak{d}_{\mathcal{P}}(\mathsf{V})$. ■

1.8.12 Proposição: *Sejam* V $\mathbb{R}$*-espaço vetorial de dimensão finita,* $\{\cdot,\cdot\}$ *colchete de Poisson linear em* V, $B = \{x_1,\ldots,x_n\}$ *base de* V, $B^* = \{x^1,\ldots,x^n\}$ *base de* V^*, *dual de* B, $k := \max\{\operatorname{rk}\,\pi(p) : p \in \mathsf{V}\}$ *e* $p_0 \in \mathsf{V}$ *tal que* $\operatorname{rk}\,\pi(p_0) = k$. ***Então:***

(i) $\dim \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) = k$;

(ii) se $k > 0$, *dados* $\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}$ *tais que* $\{\xi_{x^{i_1}}(p_0),\ldots,\xi_{x^{i_k}}(p_0)\}$ *é base de* $\operatorname{Im}\,\pi(p_0)$, *então* $\{\xi_{x^{i_1}},\ldots,\xi_{x^{i_k}}\}$ *é base de* $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$.

PROVA:
Se $k = 0$, é claro que $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) = \mathbb{O} \subset \mathrm{End}\,(\mathsf{V})$. Suponhamos, então, $k > 0$. Temos:

(1) $\dim \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) \leqslant k$.

Com efeito, suponha que existe $\{\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}\} \subset \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$ L.I., ou seja, tal que $\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{k+1} \neq \mathbb{O}$. Então existe $\widetilde{p} \in \mathsf{V}$ tal que $\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{k+1}(\widetilde{p}) \neq \mathbb{O}$ (se não existisse, teríamos $\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{k+1} = \mathbb{O}$), e isto contradiz $k := \max\{\mathrm{rk}\ \pi(p) : p \in \mathsf{V}\}$.

(2) Como $\dim \pi(p_0) = k$ e $\big(\mathsf{V}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)\big) \in \mathfrak{A}(\mathsf{V})$, existem $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ tais que $\{\xi_{x^{i_1}}(p_0), \ldots, \xi_{x^{i_k}}(p_0)\}$ é base de $\mathrm{Im}\ \pi(p_0)$, ou seja,

$$\xi_{x^{i_1}}(p_0) \wedge \cdots \wedge \xi_{x^{i_k}}(p_0) = (\xi_{x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \xi_{x^{i_k}})(p_0) \neq \mathbb{O} \tag{1.235}$$

Então $\xi_{x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \xi_{x^{i_k}} \neq \mathbb{O}$, donde $\dim \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) \geqslant k$. Logo, pelo item anterior, $\dim \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) = k$ e $\{\xi_{x^{i_1}}, \ldots, \xi_{x^{i_k}}\}$ é base de $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$. ■

1.8.13 Corolário: *Sejam* $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$ *álgebra de Lie sobre* $\mathbb{R}$, $\mathsf{V} := \mathfrak{g}^*$ *e* $\{\cdot\,,\cdot\}$ *colchete de Lie-Poisson em* $\mathsf{V} = \mathfrak{g}^*$, *conforme proposição* (1.8.2), *e*

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} : (\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot]) &\longrightarrow (\mathfrak{X}(\mathsf{V}), [\cdot\,,\cdot]) \\ X &\longmapsto \mathfrak{J}(X) := -\xi_{J(X)} \end{aligned} \tag{1.236}$$

o homomorfismo (1.206), *onde* $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^{**}$ *é a inclusão canônica.*
Então $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$.

PROVA:
Com efeito, a inclusão $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$ é imediata. Por outro lado, sejam $\{X_1, \ldots, X_n\}$ base de $\mathfrak{g}$ e $\{x^1 := J(X_1), \ldots, x^n := J(X_n)\}$ base de $\mathfrak{g}^{**}$. Então $\big(\mathsf{V}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)\big) \in \mathfrak{A}(\mathsf{V})$ é uma carta global de V. Pela proposição anterior, se $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) \neq \{\mathbb{O}\}$ (se for, é claro que $\widetilde{\mathfrak{J}}$ é sobrejetiva), existem $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ tais que $\{\xi_{x^{i_1}}, \ldots, \xi_{x^{i_k}}\}$ é base de $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$, e está contida na imagem de $\widetilde{\mathfrak{J}}$, logo $\mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V}) \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{g})$. ■

1.8.14 Definição (Representação Coadjunta)
Sejam G grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie e H o isomorfismo de Lie

$$\begin{aligned} H : \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}^*) \\ f &\longmapsto (f^{-1})^* \end{aligned} \tag{1.237}$$

como em (1.226). Vou definir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}^* := H \circ \mathrm{Ad} : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}^*) \\ g &\longmapsto H \circ \mathrm{Ad}\,(g) = \big(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)^* \end{aligned} \tag{1.238}$$

é a representação coadjunta de G, e

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}^* := dH \circ \mathrm{ad} \; : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathfrak{g}^*) \\ X &\longmapsto dH \circ \mathrm{ad}\,(X) = \left(\mathrm{ad}_{-X}\right)^* \end{aligned} \tag{1.239}$$

é a representação coadjunta de $\mathfrak{g}$.

1.8.15 Proposição: ([Wei]) *Sejam* $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$ *álgebra de Lie sobre* $\mathbb{R}$, $\mathsf{V} := \mathfrak{g}^*$, $\{\cdot\,,\cdot\}$ *colchete de Lie-Poisson em* $\mathsf{V} = \mathfrak{g}^*$, *conforme proposição* (1.8.2), $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathsf{V}) \equiv \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$ *a representação coadjunta de* $\mathfrak{g}$ *e*

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} : (\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot]) &\longrightarrow (\mathfrak{X}(\mathsf{V}), [\cdot\,,\cdot]) \\ X &\longmapsto \mathfrak{J}(X) := -\xi_{J(X)} \end{aligned} \tag{1.240}$$

o homomorfismo (1.206), *onde* $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^{**}$ *é a inclusão canônica.*

Então $\left(\forall\, X \in \mathfrak{g}\right) \mathrm{ad}^*(X) = -\mathfrak{J}(X)$.

PROVA: Pela observação (1.8.4), é suficiente verificar que, $\forall Y \in \mathsf{V}^* = \mathfrak{g}^{**}$, tem-se:

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{ad}^* X} Y = -\mathfrak{L}_{\mathfrak{J}(X)} Y \tag{1.241}$$

Com efeito:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\mathrm{ad}^* X} Y &\overset{\text{observação (1.8.9)}}{=} \left(\mathrm{ad}^* X\right)^*(Y) = \\ &= \left(\mathrm{ad}_{-X}\right)^{**}(Y) = \\ &= \left(\mathrm{ad}_{-X}\right)^{**} \circ J\left(J^{-1}(Y)\right) \overset{\forall f \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}),\, J \circ f = f^{**} \circ J}{=} \\ &= J \circ \mathrm{ad}_{-X}\left(J^{-1}(Y)\right) = \\ &= -J\left([X, J^{-1}(Y)]\right) \overset{J \text{ homomorfismo}}{=} \\ &= -\{J(X), Y\} = \\ &= \{Y, J(X)\} = \\ &= \xi_{J(X)}(Y) = \\ &= -\mathfrak{L}_{\mathfrak{J}(X)}(Y) \end{aligned} \tag{1.242}$$

e está verificada (1.241). ■

1.8.16 Corolário: $\mathrm{ad}^*(\mathfrak{g}) = \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$

PROVA: Decorre imediatamente da proposição anterior e do corolário (1.8.13). ■

1.8.17 Proposição: ([Wei]) *Nas hipóteses da proposição anterior, seja* G *o grupo de Lie conexo e simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é* $\mathfrak{g}$. ***Então*** *as órbitas da representação coajunta de* G *coincidem com as folhas simpléticas de* $\mathsf{V} = \mathfrak{g}^*$, *ou seja, dado* $x \in \mathsf{V}$, *a órbita* $\mathrm{G} \cdot x$ *da ação*

$$\begin{aligned} \eta_{\mathrm{Ad}^*} : \mathrm{G} \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x := \mathrm{Ad}^*_g(x) \end{aligned} \tag{1.243}$$

coincide com a folha simplética de V *por* x.

1.8.18 Corolário: *Nas mesmas hipóteses, seja* $C \in \mathcal{F}(\mathsf{V})$ *função de Casimir. Então* C *é invariante pela representação coadjunta, i.e.,* $(\forall\, g \in \mathrm{G})\, C \circ \mathrm{Ad}^*_g = C$

PROVA: Com efeito, C é função de Casimir ***see*** C é constante ao longo das folhas simpléticas de V. ■

Antes de mostrar a proposição, provarei o seguinte lema:

1.8.19 Lema: *Sejam* G *um grupo de Lie conexo,* M *uma variedade diferenciável, e*

$$\eta : \mathrm{G} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M} \tag{1.244}$$

uma ação de G *sobre* M. ***Então*** *as órbitas de* η *decompõem* M *numa folheação com singularidades.*

PROVA: Vou construir uma família de flechas A em M tal que, para todo $x \in \mathrm{M}$, a órbita $\mathrm{G} \cdot x$ por x é o conjunto acessível de x em relação a A, $\mathcal{O}(A, x)$. Então a tese seguirá do teorema da órbita (A.7).

Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Tome $\mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{O}}(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{V} \in \tau_e(\mathrm{G})$ tais que $\exp|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ seja um difeo.

(A) Vou definir $\widetilde{A} := \{\Phi^X : X \in \mathcal{U}\}$, onde $\Phi^X : \mathbb{R} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ é o fluxo de X (está definido em $\mathbb{R} \times \mathrm{G}$, de fato, pois todo campo invariante à esquerda é completo). Então:

(1) $\widetilde{A}$ é uma coleção de flechas sobre M.
Com efeito, cada $\Phi^X \in \widetilde{A}$ é uma flecha, pois dom $\Phi^X = \mathbb{R} \times \mathrm{G}$, $(\forall t \in \mathbb{R})\, \Phi^X_t := \Phi^X(t, \cdot) : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ é um difeo e $\Phi^X_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$;

(2) $\widetilde{A}$ é simétrica, pois $a_t \in \theta A \Rightarrow a_t^{-1} = a_{-t} \in \theta A$;

(3) $\widetilde{A}$ tem a seguinte propriedade: dados $a^1_{t_1} = \Phi^{X_1}_{t_1}, \ldots, a^k_{t_k} = \Phi^{X_k}_{t_k}$, então:

$$\prod_{i=1}^{k} a^i_{t_i}(e) = a^k_{t_k} \circ \cdots \circ a^1_{t_1}(e) \tag{1.245}$$

Com efeito:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k} a_{t_i}^i(e) &= \prod_{i=1}^{k} \Phi_{t_i}^{X_i}(e) = \\ &= \rho_{\exp t_k X_k} \circ \rho_{\exp t_{k-1} X_{k-1}} \circ \cdots \circ \rho_{\exp t_2 X_2} \circ \rho_{\exp t_1 X_1}(e) = \\ &= \Phi_{t_k}^{X_k} \circ \cdots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(e) = \\ &= a_{t_k}^k \circ \cdots \circ a_{t_1}^1(e)\end{aligned} \tag{1.246}$$

(4) como G é conexo, temos:

$$\begin{aligned}\mathrm{G} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}^n = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (\exp(\mathcal{U}))^n\end{aligned} \tag{1.247}$$

Então, dado $g \in \mathrm{G}$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{U}$ tais que:

$$\begin{aligned}g &= \prod_{i=1}^{k} \exp X_i \overset{(1.245)}{=} \\ &= \Phi_1^{X_k} \circ \cdots \circ \Phi_1^{X_1}(e) \in \mathcal{O}(\widetilde{A}, e)\end{aligned} \tag{1.248}$$

e isto prova $\mathrm{G} \subset \mathcal{O}(\widetilde{A}, e)$. Como a outra inclusão é óbvia, segue $\mathrm{G} = \mathcal{O}(\widetilde{A}, e)$.

(B) Considere $A := \{\eta(a(\cdot, e), \cdot) : \mathbb{R} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M} : a \in \widetilde{A}\}$. Afirmo que A é uma coleção de flechas em M, e $(\forall x \in \mathrm{M})\, \mathcal{O}(A, x) = \mathrm{G} \cdot x$. Isto concluirá a demonstração, pois, neste caso, a tese seguirá imediatamente do teorema da órbita (A.7), como já vimos.

Vou usar a notação $\eta^a := \eta(a(\cdot, e), \cdot)$ e $\eta_t^a := \eta^a(t, \cdot)$ para $t \in \mathbb{R}$.

(1) De fato, A é uma coleção de flechas em M, pois, dado $\eta^a = \eta(a(\cdot, e), \cdot) \in A$, temos $\operatorname{dom} \eta^a = \mathbb{R} \times \mathrm{M}$, $\eta^a(0, \cdot) = \eta(a(0, e), \cdot) = \eta(e, \cdot) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ e $(\forall t \in \mathbb{R})\, \eta^a(t, \cdot) : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ é um difeomorfismo.

(2) Dado $x \in \mathrm{M}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(A, x) &= \{\varphi(x) : \varphi \in \Psi A\} = \\ &= \{\eta_{t_1}^{a^1} \circ \cdots \circ \eta_{t_k}^{a^k}(x) : k \in \mathbb{N}, \text{ e } \eta_{t_i}^{a^i} \text{ ou } (\eta_{t_i}^{a^i})^{-1} \in \theta A \text{ para } 1 \leqslant i \leqslant k\}\end{aligned} \tag{1.249}$$

Mas

$$\begin{aligned}\eta_{t_1}^{a^1} \circ \cdots \circ \eta_{t_k}^{a^k}(x) &= \eta(a^1(t_1, e), \cdot) \circ \cdots \circ \eta(a^k(t_k, e), \cdot)(x) = \\ &= \eta\Big(\prod_{i=1}^{k} a_{t_i}^i(e), \cdot\Big)(x) \overset{(1.245)}{=} \\ &= \eta(a_{t_k}^k \circ \cdots \circ a_{t_1}^1(e), x)\end{aligned} \tag{1.250}$$

e

$$\begin{aligned} \eta_{t_i}^{a^i} &= \eta(a_{t_i}^i(e), \cdot) \in \theta A \Leftrightarrow a_{t_i}^i \in \theta\widetilde{A} \\ (\eta_{t_i}^{a^i})^{-1} &= \eta((a_{t_i}^i)^{-1}(e), \cdot) \in \theta A \Leftrightarrow (a_{t_i}^i)^{-1} \in \theta\widetilde{A} \end{aligned} \tag{1.251}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(A,x) &= \{\eta(a_{t_k}^k \circ \cdots \circ a_{t_1}^1(e), x) : k \in \mathbb{N}, \text{ e } a_{t_i}^i \text{ ou } (a_{t_i}^i)^{-1} \in \theta\widetilde{A} \text{ para } 1 \leqslant i \leqslant k\} = \\ &= \{\eta(\varphi(e), x) : \varphi \in \Psi\widetilde{A}\} \\ &= \eta(\mathcal{O}(\widetilde{A}, x), e) \overset{\text{parte (A)}}{=} \\ &= \eta(\mathrm{G}, x) = \\ &= \mathrm{G} \cdot x \end{aligned} \tag{1.252}$$

■

PROVA DA PROPOSIÇÃO:
Sejam $x \in \mathsf{V}$ e S a folha simplética de V que passa por x. Vou mostrar que $\mathrm{G} \cdot x = \mathrm{S}$.

(1) Como G é conexo, decorre do lema (1.8.19) que $(\mathrm{G} \cdot x, i)$, onde i é a inclusão, é uma folha ($\therefore$ subvariedade imersa e conexa) de M.

(2) Dado $y = g \cdot x \in \mathrm{G} \cdot x$, $g \in \mathrm{G}$, vou mostrar que existe uma curva C^∞ por partes em V, cujos segmentos são curvas integrais de campos hamiltonianos, ligando x e y. Isto implicará que $y \in \mathrm{S}$, donde $\mathrm{G} \cdot x \subset \mathrm{S}$.

Sejam $\mathcal{U} \in \tau_0(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{V} \in \tau_e(\mathrm{G})$ tais que $\exp|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ seja um difeo. Como G é conexo, temos $\mathrm{G} = \cup_{n=1}^\infty \mathcal{U}^n = \cup_{n=1}^\infty (\exp \mathcal{V})^n$, logo existem $k \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V} \subset \mathfrak{g}$ tais que $g = \prod_{n=1}^k \exp X_n$. Como o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}^*} & \mathrm{Aut}(\mathsf{V}) \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle\exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{ad}^*} & \mathrm{End}(\mathsf{V}) \end{array} \tag{1.253}$$

segue:

$$\begin{aligned} y = g \cdot x = \mathrm{Ad}_g{}^*(x) = \\ = \big(\mathrm{Ad}^*(\prod_{n=1}^{k} \exp X_n)\big)(x) \overset{\text{Ad}^* \text{ homomorfismo}}{=} \\ = (\prod_{n=1}^{k} \mathrm{Ad}^* \circ \exp X_n)(x) \overset{(1.253)}{=} \\ = (\prod_{n=1}^{k} \exp \circ \mathrm{ad}^* X_n)(x) = \\ = (\prod_{n=1}^{k} \widetilde{\Phi}_1^{\mathrm{ad}^* X_n}(\mathrm{id}_{\mathsf{V}}))(x) \overset{(1.246)}{=} \\ = (\widetilde{\Phi}_1^{\mathrm{ad}^* X_k} \circ \cdots \circ \widetilde{\Phi}_1^{\mathrm{ad}^* X_1}(\mathrm{id}_{\mathsf{V}}))(x) = \\ = \Phi_1^{\mathrm{ad}^* X_k} \circ \cdots \circ \Phi_1^{\mathrm{ad}^* X_1}(x) \end{aligned} \tag{1.254}$$

onde, para $1 \leqslant n \leqslant k$, $\widetilde{\Phi}^{\mathrm{ad}^* X_n} : \mathbb{R} \times \mathrm{Aut}(\mathsf{V}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ é o fluxo do campo invariante à esquerda $\mathrm{ad}^* X_n \in \mathrm{End}(\mathsf{V}) \subset \mathfrak{X}(\mathrm{Aut}(\mathsf{V}))$, e $\Phi^{\mathrm{ad}^* X_n} : \mathbb{R} \times \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ é o fluxo do campo de vetores linear $\mathrm{ad}^* X_n \in \mathrm{End}(\mathsf{V}) \equiv \mathfrak{X}_{lin}(\mathsf{V})$.

Seja γ_n definida por

$$\begin{aligned} \gamma_n : [0,1] &\longrightarrow \mathsf{V} \\ t &\longmapsto \begin{cases} \Phi^{\mathrm{ad}^* X_1}(t, x) & \text{se } n = 1 \\ \Phi^{\mathrm{ad}^* X_n}\big(t, \gamma_{n-1}(1)\big) & \text{se } 2 \leqslant n \leqslant k \end{cases} \end{aligned} \tag{1.255}$$

e $\Gamma := \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_k$. Então Γ é uma curva C^∞ por partes ligando x e y, por (1.254). Além disso, cada segmento de Γ é curva integral de um campo hamiltoniano, pois, pelo corolário (1.8.16), temos $\mathrm{ad}^*(\mathfrak{g}) = \mathfrak{H}_{lin}(\mathsf{V})$, portanto $\mathrm{ad}^* X_n$ é hamiltoniano, para $1 \leqslant n \leqslant k$. Disto segue que $\mathrm{G} \cdot x \subset \mathrm{S}$. □

(3) Resta mostrar a outra inclusão, i.e., $\mathrm{S} \subset \mathrm{G} \cdot x$. É suficiente verificar que, dados $p \in \mathrm{G} \cdot x$ e $f \in \mathcal{F}(\mathsf{V})$, a curva integral do campo hamiltoniano ξ_f que se inicia em p está contida em $\mathrm{G} \cdot x$. Para tal, é suficiente verificar que ξ_f é sempre tangente a $\mathrm{G} \cdot x$.

Com efeito, sejam $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ base de V e $B^* = \{x^1, \ldots, x^n\}$ base de V^* dual de B. Então $(\mathsf{V}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)) \in \mathfrak{A}(\mathsf{V})$ é uma carta global em V, $\{X_i := J^{-1}(x^i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ é base de $\mathfrak{g}$, e, dado $y \in \mathrm{G} \cdot x$, temos:

$$\xi_f(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(y) \xi_{x^i}(y) \tag{1.256}$$

Então é suficiente verificar $\xi_{x^i}(y) \in \mathrm{T}_y(\mathrm{G}\cdot x), \forall i \in \{1,\ldots,n\}$, pois, por (1.256), isto implica $\xi_f(y) \in \mathrm{T}_y(\mathrm{G}\cdot x)$, logo ξ_f é sempre tangente a $\mathrm{G}\cdot x$, pois $y \in \mathrm{G}\cdot x$ foi tomado arbitrariamente.

Mas, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, temos $\xi_{x^i} = \mathrm{ad}^*(-X_i)$, donde, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\exp t\xi_{x^i})(y) &= \big(\exp \circ \mathrm{ad}^*(-tX_i)\big)(y) \overset{(1.253)}{=} \\ &= \big(\mathrm{Ad}^* \circ \exp(-tX_i)\big)(y) \subset \mathrm{G}\cdot y \overset{y\in \mathrm{G}\cdot x}{=} \mathrm{G}\cdot x\end{aligned} \tag{1.257}$$

Como

$$\begin{aligned}\Phi_y^{\xi_{x^i}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathsf{V} \\ t &\longmapsto (\exp t\xi_{x^i})(y)\end{aligned} \tag{1.258}$$

é a curva integral de ξ_{x^i} que se inicia em y, segue de (1.257) que $\xi_{x^i}(y) \in \mathrm{T}_y(\mathrm{G}\cdot x)$.■

Capítulo 2

Grupos de Poisson-Drinfeld

2.1 Introdução

Neste capítulo, serão estudados alguns fatos básicos da teoria de *Grupos de Poisson-Drinfeld* ou *Lie-Poisson*. Tais grupos têm um papel central em teorias matemáticas de quantização, e seu estudo está intimamente ligado ao de *estruturas bihamiltonianas*, cuja importância na teoria de sistemas integráveis é, hoje, amplamente reconhecida. As principais referências são os trabalhos de *Y. Kosmann – Schwarzbach* [KS] e *V. G. Drinfeld*, nos quais encontram-se enunciados todos os teoremas deste capítulo.

2.1.1 Definição: Dado um grupo de Lie G, um **tensor de Poisson-Drinfeld** em G é um tensor de Poisson π em G tal que a multiplicação do grupo seja uma aplicação de Poisson.

Um **grupo de Poisson-Drinfeld** é um par (G, π), onde G é um grupo de Lie e π é um tensor de Poisson-Drinfeld em G.

2.1.2 Proposição: *Seja* G *um grupo de Lie e* π *um tensor de Poisson em* G. *Dado* $g \in \mathrm{G}$, *denote por* λ_g *e* ρ_g *as translações à esquerda e à direita por* g, *respectivamente.* ***Então*** π *é um tensor de Poisson-Drinfeld* ***see***

$$(\forall\, x, y \in \mathrm{G})\ \pi_{xy} = \left((\lambda_x)_* \pi\right)_{xy} + \left((\rho_y)_* \pi\right)_{xy} \tag{2.1}$$

PROVA:

Com efeito, seja $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ a multiplicação do grupo. Por definição, π é um tensor de Poisson-Drinfeld em G se, e somente se, $\forall x, y \in \mathrm{G}$:

$$\begin{aligned}
(\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{G}))\ \{f,g\}(xy) &= \{f \circ \mu, g \circ \mu\}(x,y) \overset{(1.101)}{=} \quad \Leftrightarrow \\
&= \{f \circ \mu \circ i_y, g \circ \mu \circ i_y\}(x) + \{f \circ \mu \circ j_x, g \circ \mu \circ j_x\}(y) = \\
&= \{f \circ \rho_y, g \circ \rho_y\}(x) + \{f \circ \lambda_x, g \circ \lambda_x\}(y) \\
\Leftrightarrow \langle \pi_{xy} \mid df_{xy} \wedge dg_{xy} \rangle &= \langle \pi_y \mid d(f \circ \lambda_x)_y \wedge d(g \circ \lambda_x)_y \rangle + \langle \pi_x \mid d(f \circ \rho_y)_x \wedge d(g \circ \rho_y)_x \rangle = \quad \Leftrightarrow \\
&= \langle \pi_y \mid {\lambda_x}^*(df_{xy}) \wedge {\lambda_x}^*(dg_{xy}) \rangle + \langle \pi_x \mid {\rho_y}^*(df_{xy}) \wedge {\rho_y}^*(dg_{xy}) \rangle = \\
&= \langle \left((\lambda_x)_* \pi \right)_{xy} + \left((\rho_y)_* \pi \right)_{xy} \mid df_{xy} \wedge dg_{xy} \rangle \\
\Leftrightarrow \pi_{xy} &= \left((\lambda_x)_* \pi \right)_{xy} + \left((\rho_y)_* \pi \right)_{xy}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

■

2.1.3 Observação

Dado (G, π) grupo de Poisson-Drinfeld, segue de (2.1) que:

(i) π não é invariante à esquerda, nem à direita;

(ii) Pondo $x = y = e$, obtemos $\pi_e = 2\,\pi_e$, logo $\pi_e = \mathbb{O}$.

2.2 Construção de Grupos de Poisson-Drinfeld a partir de soluções da equação de Yang-Baxter

2.2.1 Definição: Sejam $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie e $r \in \wedge^2(\mathfrak{g})$. Vou definir $[r,r] \in \wedge^3(\mathfrak{g})$ por

$$(\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}^*)\ \langle [r,r] \mid \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \rangle = 2 \oint_{123} \langle \xi_3, [\mathrm{i}_{\xi_1} r, \mathrm{i}_{\xi_2} r] \rangle \tag{2.3}$$

Dados G grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie de G e $r \in \wedge^2(\mathfrak{g})$, verificarei posteriormente que (2.3) coincide com o colchete de Schouten se identificarmos $\mathfrak{g}$ com o conjunto dos campos invariantes à esquerda de G, i.e., $[r,r] = [r,r]^{S-N}$.

Notação. Dados V espaço vetorial, $v \in \wedge^r(\mathrm{V})$ e $\theta \in \wedge^s(\mathrm{V}^*)$, vou usar a seguinte notação abreviada para o produto interior, quando não causar confusão:

$$v\,\theta := \mathrm{i}_v \theta$$

2.2.2 Teorema: *Sejam* G *grupo de Lie,* $\mathfrak{g}$ *álgebra de Lie de* G, $r \in \wedge^2(\mathfrak{g})$ *solução da equação de Yang-Baxter:*

$$[r,r] = \mathbb{O} \tag{2.4}$$

Então:

(i) r^λ *e* r^ρ *são tensores de Poisson;*

(ii) se $R \in \wedge^2(\mathfrak{g})$ *é uma outra solução de* (2.4), ***então*** $\alpha\, r^\lambda + \beta\, R^\rho$ *é um tensor de Poisson,* $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

PROVA:

Parte (i)

Lema 1 *Dados* M *variedade diferenciável,* $H, K \in \phi^2(\mathrm{M})$, $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{X}^*(\mathrm{M})$, ***então***

$$\left\langle [H,K]^{S-N} \,|\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3\right\rangle = \oint_{123} \left(\left\langle \mathrm{i}_{\mathfrak{L}_{\xi_1} H \xi_2} K, \xi_3 \right\rangle + \left\langle \mathrm{i}_{\mathfrak{L}_{\xi_1} K \xi_2} H, \xi_3 \right\rangle \right) \tag{2.5}$$

Então, $\forall\, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}^*$, temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle [r^\rho, r^\rho]^{S-N} \,|\xi_1^\rho \wedge \xi_2^\rho \wedge \xi_3^\rho\right\rangle &\overset{\text{lema (1)}}{=} 2 \oint_{123} \left\langle \left(\mathfrak{L}_{\xi_1^\rho r^\rho \xi_2^\rho} r^\rho, \xi_3^\rho \right\rangle = \\
&= -2 \oint_{123} \left\langle \mathfrak{L}_{(\xi_1 r)^\rho \xi_2^\rho}, (\xi_3 r)^\rho \right\rangle \overset{\langle \xi_2^\rho, (\xi_3 r)^\rho \rangle = cte.}{=} \\
&= -2 \oint_{123} \left\langle \xi_2^\rho, [(\xi_1 r)^\rho, (\xi_3 r)^\rho] \right\rangle = \\
&= 2 \oint_{123} \left\langle \xi_2^\rho, [\xi_1, \xi_3]^\rho \right\rangle = \\
&= 2 \oint_{123} \left\langle \xi_2, [\xi_1, \xi_3] \right\rangle = \\
&= \left\langle -[r,r] \,|\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \right\rangle = \quad cte.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

logo $[r^\rho, r^\rho]^{S-N}$ é invariante à direita e, $\forall\, g \in \mathrm{G}$, temos

$$[r^\rho, r^\rho]^{S-N}(g) = -(\rho_g)_* [r,r] \tag{2.7}$$

Analogamente, $[r^\lambda, r^\lambda]^{S-N}$ é invariante à esquerda e, $\forall\, g \in \mathrm{G}$, temos:

$$[r^\lambda, r^\lambda]^{S-N}(g) = (\lambda_g)_* [r,r] \tag{2.8}$$

Então segue de (2.7) e de (2.8) que

$$[r^\rho, r^\rho]^{S-N} \equiv \mathbb{O} \Leftrightarrow [r^\lambda, r^\lambda]^{S-N} \equiv \mathbb{O} \Leftrightarrow [r,r] \equiv \mathbb{O} \tag{2.9}$$

e isto conclui a prova da parte (i). ■

Parte (ii)

Temos, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}[\alpha r^\lambda + \beta R^\rho, \alpha r^\lambda + \beta R^\rho]^{S-N} &= \alpha^2 [r^\lambda, r^\lambda]^{S-N} + \beta^2 [R^\rho, R^\rho]^{S-N} + \alpha\beta [r^\lambda, R^\rho]^{S-N} \overset{\text{parte (i)}}{=} \\ &= \alpha\beta [r^\lambda, R^\rho]^{S-N}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Então é suficiente mostrar que $[r^\lambda, R^\rho]^{S-N} \equiv \mathbb{O}$, $\forall r, R \in \wedge^2(\mathfrak{g})$ soluções de (2.4). Mas isto decorre do seguinte lema:

Lema 2 *Sejam* G *grupo de Lie,* $X \in \wedge^k(\mathfrak{g})$ *e* $Y \in \wedge^l(\mathfrak{g})$. ***Então*** $[X^\lambda, Y^\rho]^{S-N} \equiv \mathbb{O}$.

■

Prova do lema (1)*:*
Com efeito:

(i) Uma verificação imediata mostra que o segundo membro de (2.5) é $\mathcal{F}(M)$-linear em ξ_1, ξ_2 e ξ_3.

(ii) Tomando uma carta $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n)) \in \mathfrak{A}(M)$, temos, $\forall\, 1 \leqslant i < j < k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}\left\langle [H, K]^{S-N} \mid dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \right\rangle &= \mathrm{i}_H d\, \mathrm{i}_K (dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) + \\ &\quad + \mathrm{i}_K d\, \mathrm{i}_H (dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k)\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}_K (dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) = \oint_{ijk} \langle K \mid dx^i \wedge dx^j \rangle\, dx^k \Rightarrow \\ \Rightarrow &d\, \mathrm{i}_K (dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) = \oint_{ijk} d\langle K \mid dx^i \wedge dx^j \rangle \wedge dx^k \Rightarrow \\ \Rightarrow &\mathrm{i}_H d\, \mathrm{i}_K (dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) + \mathrm{i}_K d\, \mathrm{i}_H (dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) = \\ &= \oint_{ijk} \Big(\langle \mathrm{i}_{dx^k} H, d\langle K \mid dx^i \wedge dx^j \rangle \rangle + \langle \mathrm{i}_{dx^k} K, d\langle H \mid dx^i \wedge dx^j \rangle \rangle \Big)\end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\mathrm{i}_{dx^i} K} dx^j &= \left(\mathrm{i}_{\mathrm{i}_{dx^i} K} d + d\, \mathrm{i}_{\mathrm{i}_{dx^i} K} \right) dx^j = \\ &= d\langle dx^j \mid \mathrm{i}_{dx^i} K \rangle = \\ &= d\langle K \mid dx^j \wedge dx^i \rangle\end{aligned} \tag{2.13}$$

donde:

$$\langle \mathrm{i}_{dx^k} H, \mathfrak{L}_{\mathrm{i}_{dx^i} K} dx^j \rangle = \langle \mathrm{i}_{dx^k} H, d\langle K \mid dx^j \wedge dx^i \rangle \rangle \tag{2.14}$$

logo:

$$\begin{aligned}
&\oint_{ijk}\Big(\langle \mathrm{i}_{\mathfrak{L}_{dx^i H}dx^j}K, dx^k\rangle + \langle \mathrm{i}_{\mathfrak{L}_{dx^i K}dx^j}H, dx^k\rangle\Big) = \\
&= -\oint_{ijk}\Big(\langle \mathrm{i}_{dx^k}K, \mathfrak{L}_{\mathrm{i}_{dx^i H}dx^j}\rangle + \langle \mathrm{i}_{dx^k}H, \mathfrak{L}_{\mathrm{i}_{dx^i K}dx^j}\rangle\Big) \overset{(2.14)}{=} \\
&= \oint_{ijk}\Big(\langle \mathrm{i}_{dx^k}H, d\langle K \mid dx^i\wedge dx^j\rangle\rangle + \langle \mathrm{i}_{dx^k}K, d\langle H \mid dx^i\wedge dx^j\rangle\rangle\Big)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

e, comparando (2.15) com (2.12), segue a tese. ■

Prova do lema (2)*:*
Por bilinearidade, é suficiente provar para X e Y decomponíveis. Sejam, então

$$\begin{aligned}
X &= X_1\wedge\cdots\wedge X_k \\
Y &= Y_1\wedge\cdots\wedge Y_l
\end{aligned} \tag{2.16}$$

portanto:

$$\begin{aligned}
X^\lambda &= X_1^\lambda\wedge\cdots\wedge X_k^\lambda \\
Y^\rho &= Y_1^\rho\wedge\cdots\wedge Y_l^\rho
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Então, pelo lema (1.4.4) temos:

$$\begin{aligned}
[X^\lambda, Y^\rho]^{S-N} &= \sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}(-1)^{m+n}[X_m^\lambda, Y_n^\rho]\wedge X_1^\lambda\wedge\cdots\wedge\widehat{X_m^\lambda}\wedge\cdots\wedge X_k^\lambda\wedge Y_1^\rho\wedge\cdots\wedge\widehat{Y_n^\rho}\wedge\cdots\wedge Y_l^\rho \equiv \\
&\equiv \mathbb{O}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

pois $(\forall m,n)\,[X_m^\lambda, Y_n^\rho]\equiv\mathbb{O}$. ■

2.2.3 Teorema: *Sejam* G *grupo de Lie,* $\mathfrak{g}$ *álgebra de Lie de* G, $r\in\wedge^2(\mathfrak{g})$ *tal que* $[r,r]$ *seja invariante sob a representação adjunta de* G*,i.e.,*

$$(\forall\, g\in \mathrm{G})\,(\mathrm{Ad}_g)_*[r,r] = [r,r] \tag{2.19}$$

Então $\pi_r := r^\lambda - r^\rho$ *é um tensor de Poisson-Drinfeld em* G.

2.2.4 Corolário: *Em particular,* π_r *é um tensor de Poisson-Drinfeld em* G *se* r *for solução da equação de Yang-Baxter* (2.4).

PROVA DO TEOREMA:

(1) Temos, $\forall x \in \mathrm{G}$:

$$\begin{aligned}
[\pi_r, \pi_r]^{S-N}(x) &= [r^\lambda - r^\rho, r^\lambda - r^\rho]^{S-N}(x) \overset{\text{teorema (2.2.2)}}{=} \\
&= [r^\lambda, r^\lambda]^{S-N}(x) + [r^\rho, r^\rho]^{S-N}(x) \overset{(2.8),(2.7)}{=} \\
&= (\lambda_x)_*[r,r] - (\rho_x)_*[r,r] = \\
&= (\rho_x)_*\big((\mathrm{Ad}_x)_*[r,r] - [r,r]\big)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$\therefore [r,r]^{S-N} \equiv \mathbb{O} \Leftrightarrow r$ satisfaz (2.19).

(2) Resta verificar que π_r satisfaz (2.1). Com efeito, $\forall x, y \in \mathrm{G}$:

$$\begin{aligned}
\pi_r(x\,y) &= r^\lambda(x\,y) - r^\rho(x\,y) = \\
&= (\lambda_{x\,y})_* r - (\rho_{x\,y})_* r = \\
&= (\lambda_x)_*(\lambda_y)_* r - (\rho_y)_*(\rho_x)_* r = \\
&= (\lambda_x)_*\big[(\lambda_y)_* r - (\rho_y)_* r\big] + (\rho_y)_*\big[(\lambda_x)_* r - (\rho_x)_* r\big] = \\
&= (\lambda_x)_*\big(r^\lambda(y) - r^\rho(y)\big) + (\rho_y)_*\big(r^\lambda(x) - r^\rho(x)\big) = \\
&= \big((\lambda_x)_*(r^\lambda - r^\rho)\big)(x\,y) + \big((\rho_y)_*(r^\lambda - r^\rho)\big)(x\,y) = \\
&= \big((\lambda_x)_*\pi_r\big)(x\,y) + \big((\rho_y)_*\pi_r\big)(x\,y)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

e isto conclui a demonstração. ■

2.3 Álgebras de Lie-Drinfeld

2.3.1 Definição: Seja (G, π) um grupo de Poisson-Drinfeld, e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. É possível definir em $\mathfrak{g}^*$ uma estrutura de álgebra de Lie, dada pelo colchete:

$$[\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} := d\{f_1, f_2\}(e) \tag{2.22}$$

onde $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathrm{G})$ são tais que $df_1(e) = \xi_1$ e $df_2(e) = \xi_2$.

O fato de $[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}^*}$ estar bem definido decorre do lema abaixo. É claro que é anti-simétrico e satisfaz a identidade de Jacobi (1.43).

2.3.2 Lema: *Sejam* (G, π) *grupo de Poisson-Drinfeld e*

$$\begin{aligned}
l : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \\
x &\longmapsto (\rho_{x^{-1}})_*\pi(x) \\
\epsilon := dl(e) &: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \\
\gamma := \epsilon^* &: \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Então $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^*$, *temos*

$$[\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = \gamma(\xi_1 \wedge \xi_2) \tag{2.24}$$

PROVA:
Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathrm{G})$ tais que $df_1(e) = \xi_1$ e $df_2(e) = \xi_2$. Considere as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} i : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{G} \times \mathrm{G} \\ g &\longmapsto (g, g) \\ F = (F^1, F^2) : \mathrm{G} \times \mathrm{G} &\longrightarrow (\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}) \times (\mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*) \\ (x, y) &\longmapsto \Big(l(x), (\rho_y)^*\big(df_1(y) \wedge df_2(y)\big)\Big) \\ \delta : (\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}) \times (\mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, \theta) &\longmapsto \langle X \mid \theta \rangle \end{aligned} \tag{2.25}$$

Então, temos:

$$\{f_1, f_2\} = \delta \circ F \circ i \tag{2.26}$$

Com efeito, $\forall g \in \mathrm{G}$:

$$\begin{aligned} \{f_1, f_2\}(g) &= \big\langle \pi(g) \,\big|\, df_1(g) \wedge df_2(g) \big\rangle = \\ &= \big\langle (\rho_g)_*\big(l(g)\big) \,\big|\, df_1(g) \wedge df_2(g) \big\rangle = \\ &= \big\langle l(g) \,\big|\, (\rho_g)^*\big(df_1(g) \wedge df_2(g)\big) \big\rangle = \\ &= \delta \circ F \circ i(g) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Além disso, temos:

$$\big(\forall v \in \mathfrak{g} = \mathrm{T}_e\mathrm{G}\big)\ \mathrm{T}i \cdot v = (v, v) \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} \big(\forall (v, w) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}\big)\ \mathrm{T}F \cdot (v, w) &= \partial_1 F(e, e) \cdot v + \partial_2 F \cdot w = \\ &= \big(dl(e) \cdot v, dF^2(e) \cdot w\big) \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\big(\forall (h_u, k_v) \in \mathrm{T}\big((\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}) \times (\mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*)\big)\big)\ \mathrm{T}\delta \cdot (h_u, k_v) \overset{\delta \text{ bilinear}}{=} \delta(u, k) + \delta(v, h) \tag{2.30}$$

Como $l(e) = \mathbb{O}$, pela observação (2.1.3), temos, aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \big(\forall v \in \mathfrak{g}\big)\ \mathrm{T}(\delta \circ F \circ i) \cdot v &= d\delta\big(F(e, e)\big) \cdot dF(e, e) \cdot di(e) \cdot v \overset{(2.30),(2.29),(2.28)}{=} \\ &= \delta\big(l(e), dF^2(e) \cdot v\big) + \delta\big(dl(e) \cdot v, \xi_1 \wedge \xi_2\big) = \\ &= \big\langle dl(e) \cdot v \,\big|\, \xi_1 \wedge \xi_2 \big\rangle = \\ &= \big\langle \epsilon(v) \,\big|\, \xi_1 \wedge \xi_2 \big\rangle = \\ &= \big\langle v \,\big|\, \gamma(\xi_1 \wedge \xi_2) \big\rangle \end{aligned} \tag{2.31}$$

Portanto, segue de (2.26) que, $\forall X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \langle [\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} \,|X\rangle &= \langle d\{f_1, f_2\}(e) \,|X\rangle = \\ &= \langle \gamma(\xi_1 \wedge \xi_2) \,|v\rangle \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde $[\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = \gamma(\xi_1 \wedge \xi_2)$. ■

2.3.3 Teorema: *Nas condições do lema* (2.3.2) *e da definição* (2.3.1), *os colchetes de Lie* $[\cdot,\cdot]$ *em* $\mathfrak{g}$ *e* $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}^*}$ *em* $\mathfrak{g}^*$ *satisfazem a condição de distributividade:*

$$\begin{aligned} \langle [\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, [X_1, X_2] \rangle = &- \langle [\mathrm{ad}^*_{X_1} \xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, X_2 \rangle - \langle [\xi_1, \mathrm{ad}^*_{X_1} \xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, X_2 \rangle + \\ &+ \langle [\mathrm{ad}^*_{X_2} \xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, X_1 \rangle + \langle [\xi_1, \mathrm{ad}^*_{X_2} \xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, X_1 \rangle \end{aligned} \tag{2.33}$$

$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^*$, $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$.

Para demonstrar este teorema, usarei as definições e lema seguintes:

2.3.4 Definição: Sejam G um grupo de Lie, V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\eta : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{V})$ uma representação de G.

Direi que uma aplicação C^∞ $L : \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{V}$ é um **cociclo de G em relação à η** se, $\forall x, y \in \mathrm{G}$:

$$L(x\,y) = \eta(x) \cdot l(y) + l(x) \tag{2.34}$$

2.3.5 Definição: Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\eta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathsf{V})$ uma representação de $\mathfrak{g}$.

Direi que um homomorfismo $l : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathsf{V}$ é um **cociclo de $\mathfrak{g}$ em relação à η** se, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$l([X,Y]) = \eta(X) \cdot l(Y) - \eta(Y) \cdot l(X) \tag{2.35}$$

2.3.6 Lema: *Sejam* G *um grupo de Lie,* V *um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial de dimensão finita e* $\eta : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{V})$ *uma representação de* G. *Se* $l : \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{V}$ *for um cociclo de* G *em relação à* η, **então** $dl(e) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathsf{V}$ *é um cociclo de* $\mathfrak{g}$ *em relação à* $d\eta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathsf{V})$.

PROVA:
Também vou denotar por η a ação de G em V:

$$\eta : \mathrm{G} \times \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$$

definida de maneira óbvia.

(1) Por hipótese, temos, $\forall y \in \mathrm{G}$:

$$l \circ \rho_y = \eta^{l(y)} + l \tag{2.36}$$

logo:

$$d(l \circ \rho_y)(e) = d\big(\eta^{l(y)}\big)(e) + dl(e) \tag{2.37}$$

donde, $\forall g \in G$, $\forall X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} dl(g) \cdot X^{\rho}(g) &= d\big(\eta^{l(g)}\big)(e) \cdot X + dl(e) \cdot X = \\ &= d\eta(X) \cdot l(g) + dl(e) \cdot X \end{aligned} \tag{2.38}$$

(2) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $\forall f \in \mathcal{F}(V)$, temos:

$$\begin{aligned} \big(dl(e) \cdot [X,Y]\big)(f) &= [X,Y](f \circ l) = \\ &= -\big([X^{\rho}, Y^{\rho}](e)\big)(f \circ l) = \\ &= X\big(Y^{\rho}(f \circ l)\big) - Y\big(X^{\rho}(f \circ l)\big) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Como, $\forall g \in G$, $\forall X \in \mathfrak{g} \forall f \in \mathcal{F}(V)$:

$$\begin{aligned} \big(X^{\rho}(f \circ l)\big)(g) &= \big(dl(g) \cdot X^{\rho}(g)\big)(f) \overset{(2.38)}{=} \\ &= \big(d\eta(X) \cdot l(g) + dl(e) \cdot X\big)(f) = \\ &= \big[\big(d\eta(X) \circ l\big)(f)\big](g) + \ cte. \end{aligned} \tag{2.40}$$

temos, $\forall X, Y \in \mathfrak{g} \forall f \in \mathcal{F}(V)$:

$$\begin{aligned} X\big(Y^{\rho}(f \circ l)\big) &\overset{(2.40)}{=} X\big[\big(d\eta(Y) \circ l\big)(f)\big] = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Big[\big[\big(d\eta(Y) \circ l\big)(f)\big] \circ \exp tX\Big] = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big\langle df, d\eta(Y) \circ l \circ \exp tX \big\rangle = \\ &= \Big\langle df, \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} d\eta(Y) \circ l \circ \exp tX \Big\rangle \overset{d\eta(Y) \in \mathrm{End}(V)}{=} \\ &= \Big\langle df, d\eta(Y) \cdot \big(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} l \circ \exp tX\big) \Big\rangle = \\ &= \Big\langle df, d\eta(Y) \cdot \big(dl(e) \cdot X\big) \Big\rangle = \\ &= \big[d\eta(Y) \cdot \big(dl(e) \cdot X\big)\big](f) \end{aligned} \tag{2.41}$$

donde, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$dl(e) \cdot [X,Y] = d\eta(X) \cdot \big(dl(e) \cdot Y\big) - d\eta(Y) \cdot \big(dl(e) \cdot X\big) \tag{2.42}$$

e isto conclui a demonstração. ■

PROVA DO TEOREMA (2.3.3):

Seja $l : G \longrightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ dada por (2.23) e $\wedge^2 \mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g})$ a segunda potência exterior da representação adjunta de G, como em (1.26).

Temos, $\forall x, y \in G$:

$$\begin{aligned} l(x\,y) &= {\rho_{x\,y}}^*\pi(x\,y) = \\ &= {\rho_{x\,y}}^*\big((\lambda_x)_*\pi(y) + (\rho_y)_*\pi(x)\big) = \\ &= {\rho_x}^*{\rho_y}^*(\lambda_x)_*\pi(y) + {\rho_x}^*{\rho_y}^*(\rho_y)_*\pi(x) = \\ &= {\rho_x}^*(\lambda_x)_*{\rho_y}^*\pi(y) + {\rho_x}^*\pi(x) = \\ &= (\mathrm{Ad}_x)_*\big(l(y)\big) + l(x) = \\ &= (\mathrm{Ad}_x \wedge \mathrm{Ad}_x)\big(l(y)\big) + l(x) = \\ &= \big(\overset{2}{\wedge}\mathrm{Ad}\big)(x)\cdot l(y) + l(x) \end{aligned} \tag{2.43}$$

ou seja, l é um cociclo de G em relação à $\wedge^2 \mathrm{Ad}$. Então segue do lema (2.3.6) que $\epsilon = dl(e)$ é um cociclo de $\mathfrak{g}$ em relação à $\wedge^2 \mathrm{ad} = d(\wedge^2 \mathrm{Ad}) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g})$,i.e., $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \epsilon\big([X,Y]\big) &= \overset{2}{\wedge}\mathrm{ad}\,(X)\cdot\epsilon(Y) - \overset{2}{\wedge}\mathrm{ad}\,(Y)\cdot\epsilon(X) \overset{(1.22)}{=} \\ &= \epsilon(Y)\wedge \mathrm{ad}_X\cdot\epsilon(Y) + \mathrm{ad}_X\cdot\epsilon(Y)\wedge\epsilon(Y) - \\ &\quad - \epsilon(X)\wedge \mathrm{ad}_Y\cdot\epsilon(X) - \mathrm{ad}_Y\cdot\epsilon(X)\wedge\epsilon(X) \end{aligned} \tag{2.44}$$

portanto, $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^*$, $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \big\langle [\xi_1,\xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, [X_1,X_2]\big\rangle &= \big\langle \gamma(\xi_1\wedge\xi_2), [X_1,X_2]\big\rangle = \\ &= \big\langle \xi_1\wedge\xi_2 \,\big|\epsilon([X_1,X_2])\big\rangle \overset{(2.44)}{=} \\ &= -\big\langle [\mathrm{ad}^*_{X_1}\xi_1,\xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, X_2\big\rangle - \big\langle [\xi_1, \mathrm{ad}^*_{X_1}\xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, X_2\big\rangle + \\ &\quad + \big\langle [\mathrm{ad}^*_{X_2}\xi_1,\xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, X_1\big\rangle + \big\langle [\xi_1, \mathrm{ad}^*_{X_2}\xi_2]_{\mathfrak{g}^*}, X_1\big\rangle \end{aligned} \tag{2.45}$$

e isto conclui a demonstração. ■

2.3.7 Definição: Uma **bi-álgebra de Lie** é um par $\big((\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot]),(\mathfrak{g}^*,[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}^*})\big)$, onde $(\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot])$ e $(\mathfrak{g}^*,[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}^*})$ são álgebras de Lie satisfazendo a propriedade distributiva (2.33).

2.3.8 Definição: Uma **álgebra de Lie-Drinfeld** é um par $\big((\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot]),\epsilon\big)$, onde $(\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot])$ é uma álgebra de Lie e $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ é um cociclo de $\mathfrak{g}$ em relação à ad_* (2.44) tal que, sendo $\gamma := \epsilon^*$:

$$(\forall \xi_1,\xi_2,\xi_3 \in \mathfrak{g}^*)\ \oint_{123} \gamma(\xi_3\wedge\gamma(\xi_1\wedge\xi_2)) \equiv \mathbb{0} \tag{2.46}$$

2.3.9 Proposição: *$\mathfrak{g}$ é uma bi-álgebra de Lie see é uma álgebra de Lie-Drinfeld.*

PROVA:

(1) Dada $((\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]),(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}^*}))$ bi-álgebra de Lie, sejam

$$\begin{aligned} \gamma : \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \xi_2 \wedge \xi_2 &\longmapsto [\xi_1,\xi_2]_{\mathfrak{g}^*} \end{aligned} \tag{2.47}$$

e $\epsilon := \gamma^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$. Então γ satisfaz (2.46), por causa da identidade de Jacobi, e ϵ é um cociclo de $\mathfrak{g}$ em relação à ad_*, por causa da propriedade distributiva (2.33).□

(2) Por outro lado, seja $((\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]),\epsilon)$ álgebra de Lie-Drinfeld. Sejam $\gamma := \epsilon^*$ e, $\forall \xi_1,\xi_2 \in \mathfrak{g}^*$, $[\xi_1,\xi_2]_{\mathfrak{g}^*} := \gamma(\xi_1 \wedge \xi_2)$. Então é claro que $((\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]),(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}^*}))$ é uma bi-álgebra de Lie. ■

2.3.10 Teorema: *Seja* G *um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo, e* $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}^*})$ *álgebra de Lie-Drinfeld, onde* $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ *é a álgebra de Lie de* G.
Então $\exists!$ π *tensor de Poisson-Drinfeld em* G *que induz* $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}^*}$ *em* $\mathfrak{g}^*$.

PROVA: Vide teorema (4), em [KS].

2.3.11 Teorema: *Sejam* G *grupo de Lie,* $\mathfrak{g}$ *álgebra de Lie de* G, $r \in \wedge^2(\mathfrak{g})$ *satisfazendo* (2.19) *e* $\pi_r := r^\lambda - r^\rho$ *tensor de Poisson-Drinfeld, como no teorema* (2.2.3). ***Então*** $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}^*}$ *é dado por*

$$(\forall \xi_1,\xi_2 \in \mathfrak{g}^*)\,[\xi_1,\xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = \mathrm{ad}^*_{\xi_1 r}\xi_2 - \mathrm{ad}^*_{\xi_2 r}\xi_1 \tag{2.48}$$

PROVA:
Com efeito, $\forall x \in \mathrm{G}$:

$$\pi_x = (\lambda_x)_* r - (\rho_x)_* r \tag{2.49}$$

logo:

$$\begin{aligned} l : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \\ x &\longmapsto (\rho_{x^{-1}})_*\pi(x) = (\mathrm{Ad}_x \wedge \mathrm{Ad}_x)r - r \end{aligned} \tag{2.50}$$

então, sendo $\epsilon := dl(e)$ e $\gamma := \epsilon^*$, temos, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall xi_1,\xi_2 \in \mathfrak{g}^*$:

$$
\begin{aligned}
\langle [\xi_1,\xi_2]_{\mathfrak{g}^*} \,|X\rangle &= \langle \gamma(\xi_1\wedge\xi_2)\,|X\rangle = \\
&= \langle \xi_1\wedge\xi_2\,|\epsilon(X)\rangle = \\
&= \left\langle \xi_1\wedge\xi_2 \left| \frac{d}{dt}\right|_{t=0} l(\exp tX)\right\rangle \overset{(2.50)}{=} \\
&= \left\langle \xi_1\wedge\xi_2 \left| \frac{d}{dt}\right|_{t=0} [(\mathrm{Ad}\,(\exp tX)\wedge \mathrm{Ad}\,(\exp tX))r - r]\right\rangle = \\
&= \langle \xi_1\wedge\xi_2\,|(\mathrm{ad}_X\wedge \mathrm{id} + \mathrm{id}\wedge \mathrm{ad}_X)r\rangle = \\
&= \langle (\mathrm{ad}_X\wedge\mathrm{id})^*(\xi_1\wedge\xi_2)\,|r\rangle + \langle (\mathrm{id}\wedge \mathrm{ad}_X)^*(\xi_1\wedge\xi_2)\,|r\rangle = \\
&= \langle -\mathrm{ad}^*_X\xi_1\wedge\xi_2\,|r\rangle + \langle -\xi_1\wedge \mathrm{ad}^*_X\xi_2\,|r\rangle \overset{r \text{ anti-simétrico}}{=} \\
&= \langle r\,|\xi_2\wedge \mathrm{ad}^*_X\xi_1\rangle - \langle r\,|\xi_1\wedge \mathrm{ad}^*_X\xi_2\rangle = \\
&= \langle \xi_2 r\,|\mathrm{ad}^*_X\xi_1\rangle - \langle \xi_1 r\,|\mathrm{ad}^*_X\xi_2\rangle = \\
&= -\langle \mathrm{ad}_X(\xi_2 r)\,|\xi_1\rangle + \langle \mathrm{ad}_X(\xi_1 r)\,|\xi_2\rangle = \\
&= \langle \mathrm{ad}_{\xi_2 r}X\,|\xi_1\rangle - \langle \mathrm{ad}_{\xi_1 r}X\,|\xi_2\rangle = \\
&= -\langle X\,|\mathrm{ad}^*_{\xi_2 r}\xi_1\rangle + \langle X\,|\mathrm{ad}^*_{\xi_1 r}\xi_2\rangle = \\
&= \langle \mathrm{ad}^*_{\xi_1 r}\xi_2 - \mathrm{ad}^*_{\xi_2 r}\xi_1\,|X\rangle
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

e isto conclui a demonstração. ■

2.3.12 Definição: Uma **ação de Poisson-Drinfeld** de um grupo de Poisson-Drinfeld G numa variedade de Poisson M é uma ação $\phi : \mathrm{G}\times\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{M}$ que também é uma aplicação de Poisson de $\mathrm{G}\times\mathrm{M}$ (com a estrutura de Poisson produto) em M.

2.3.13 Teorema: *Sejam* G *um grupo de Poisson-Drinfeld,* M *uma variedade de Poisson,* $\phi : \mathrm{G}\times\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{M}$ *ação de Poisson-Drinfeld,* $\mathfrak{g}$ *a álgebra de Lie de* G, $X\in\mathfrak{g}$ *e* $X^{\mathrm{M}}\in\mathfrak{X}(\mathrm{M})$ *o campo fundamental em* M *induzido por* X, *i.e.,*

$$
\begin{aligned}
X^{\mathrm{M}} : \mathrm{M} &\longrightarrow \mathrm{TM} \\
x &\longmapsto \mathrm{T}\phi_x\cdot X
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Então, $\forall f_1, f_2\in\mathcal{F}(\mathrm{M})$*:*

$$
X^{\mathrm{M}}\{f_1,f_2\} = \{X^{\mathrm{M}}f_1, f_2\} + \{f_1, X^{\mathrm{M}}f_2\} + \langle [\xi_{f_1},\xi_{f_2}]_{\mathfrak{g}^*}, X\rangle \tag{2.53}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
\xi_{f_i} : \mathrm{M} &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\
x &\longmapsto d(f_i\circ\phi_x)_e \\
[\xi_{f_1},\xi_{f_2}]_{\mathfrak{g}^*} : \mathrm{M} &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\
x &\longmapsto [\xi_{f_1}(x),\xi_{f_2}(x)]_{\mathfrak{g}^*}
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

A prova será feita após a demonstração do seguinte lema:

2.3.14 Lema: *Sejam* $\phi : \mathrm{G} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *uma ação de um grupo de Lie numa variedade diferenciável* M, $\mathfrak{g}$ *a álgebra de Lie de* G, $X \in \mathfrak{g}$ *e* X^{M} *o campo fundamental em* M *induzido por* X, *dado por* (2.52).

Então $X^{\mathrm{M}} \in \mathfrak{X}(\mathrm{M})$, X^{M} *é completo e,* $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t^{X^{\mathrm{M}}} = \phi_{\exp(t\,X)}$.

PROVA:

O fato de ϕ ser uma ação implica que

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \phi_{\exp(t\,X)} = \phi\big(\exp(t\,X), \cdot\big) \in \mathrm{Aut}\,(\mathrm{M}) \tag{2.55}$$

é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos de M. Concluirei a demonstração verificando que X^{M} é gerado por este grupo a um parâmetro de difeomorfismos. Com efeito, $\forall\, p \in \mathrm{M}$, temos:

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{M}}(p) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{T}\phi_p \cdot X = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(\phi_p \circ \exp(t\,X)\big) = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big[\phi\big(p, \exp(t\,X)\big)\big] = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(\phi_{exp(t\,X)}(p)\big) \end{aligned} \tag{2.56}$$

como afirmado. ■

PROVA DO TEOREMA:
$\forall\, p \in \mathrm{M}$, $\forall\, f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, temos:

$$
\begin{aligned}
X^{\mathrm{M}}\{f,g\}^{\mathrm{M}}(p) &= X^{\mathrm{M}}(p)\{f,g\}^{\mathrm{M}} \overset{\text{lema (2.3.14)}}{=} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{f,g\}^{\mathrm{M}} \circ \phi\big(\exp(t\,X), p\big) \overset{\phi \text{ aplicação de Poisson}}{=} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{f\circ\phi, g\circ\phi\}^{\mathrm{G}\times\mathrm{M}}\big(\exp(t\,X), p\big) \overset{\text{def}}{=} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big[\{f\circ\phi_p, g\circ\phi_p\}^{\mathrm{G}}\big(\exp(t\,X)\big) + \{f\circ\phi_{\exp(t\,X)}, g\circ\phi_{\exp(t\,X)}\}^{\mathrm{M}}(p)\big] = \\
&= \underbrace{d\big(\{f\circ\phi_p, g\circ\phi_p\}^{\mathrm{G}}\big)_e}_{\overset{\text{def}}{=}[\xi_f(p),\xi_g(p)]_{\mathfrak{g}^*}} \cdot X + \\
&\quad + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big\langle \pi^{\mathrm{M}}(p) \,\big|\, d\big(f\circ\phi_{\exp(t\,X)}\big)_p \wedge d\big(g\circ\phi_{\exp(t\,X)}\big)_p \big\rangle \overset{\text{regra da cadeia, } \pi^{\mathrm{M}}(p) \text{ bilinear}}{=} \\
&= \big\langle [\xi_f,\xi_g]_{\mathfrak{g}^*}, X\big\rangle(p) + \\
&\quad + \big\langle \pi^{\mathrm{M}}(p) \,\big|\, \big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_{\exp(t\,X)}{}^* df)_p\big) \wedge dg_p \big\rangle + \big\langle \pi^{\mathrm{M}}(p) \,\big|\, df_p \wedge \big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_{\exp(t\,X)}{}^* dg)_p\big) \big\rangle = \\
&= \big\langle [\xi_f,\xi_g]_{\mathfrak{g}^*}, X\big\rangle(p) + \big\langle \pi^{\mathrm{M}}(p) \,\big|\, (\mathfrak{L}_{X^{\mathrm{M}}} df)_p \wedge dg_p \big\rangle + \big\langle \pi^{\mathrm{M}}(p) \,\big|\, df_p \wedge (\mathfrak{L}_{X^{\mathrm{M}}} dg)_p \big\rangle = \\
&= \big\langle [\xi_f,\xi_g]_{\mathfrak{g}^*}, X\big\rangle(p) + \big\langle \pi^{\mathrm{M}}(p) \,\big|\, d(X^{\mathrm{M}} f)_p \wedge dg_p \big\rangle + \big\langle \pi^{\mathrm{M}}(p) \,\big|\, df_p \wedge d(X^{\mathrm{M}} g)_p \big\rangle = \\
&= \big\langle [\xi_f,\xi_g]_{\mathfrak{g}^*}, X\big\rangle(p) + \{X^{\mathrm{M}} f, g\}(p) + \{f, X^{\mathrm{M}} g\}(p)
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

e isto conclui a demonstração. ■

Capítulo 3

Estruturas de Poisson e Sistemas Mecânicos Vinculados

Por "sistemas mecânicos vinculados", está-se referindo a sistemas dinâmicos sobre uma variedade riemanniana, diferenciável, munida de uma distribuição diferenciável, de dimensão constante, que em geral não é integrável (i.e., um *vínculo*, não necessariamente *holônomo*).

Existem, basicamente, duas formas de se construir sistemas dinâmicos sobre estes espaços, ambas inspiradas na Mecânica Clássica. Na primeira, a chamada Mecânica de D'Alembert, as trajetórias compatíveis com a distribuição são determinadas pelo seguinte princípio: a diferença entre a aceleração de uma trajetória e a força externa conservativa é sempre ortogonal à distribuição. Do ponto de vista geométrico, esta construção é a generalização natural de fluxos geodésicos, e poderia ser descrita como a "mecânica dos caminhos mais retos". A outra alternativa, que não será abordada neste texto, é a chamada "mecânica vakonômica", onde as trajetórias compatíveis com os vínculos são determinadas por princípios variacionais, e poderia ser descrita como a "mecânica dos caminhos mais curtos".

Sejam (M^m, g) variedade riemanniana conexa (*espaço de configurações*), ∇ a *conexão de Levi-Civita* de M, (TM, M, Π) o fibrado tangente de M, (T^*M, M, Π^*) o fibrado cotangente de M,

$$\begin{aligned} T : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_q &\longmapsto \tfrac{1}{2}\langle v_q, v_q\rangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

uma aplicação C^∞ que será chamada de *energia cinética*,

$$\begin{aligned} \mu := g^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ v_q &\longmapsto \langle v_q, \cdot\rangle \in T_q^*M \end{aligned} \tag{3.2}$$

a *transformação de Legendre* e $F : TM \longrightarrow T^*M$ uma aplicação C^∞ entre fibrados vetoriais, chamada *campo de forças*.

A equação de segunda ordem:

$$F = \mu(\nabla_{\dot{q}}\dot{q}) \tag{3.3}$$

é uma versão intrínseca da *segunda lei de Newton.*

Quando o campo de forças F "deriva de um pontencial", ou seja, quando F é da forma:

$$\begin{aligned} F : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathrm{T^*M} \\ (q,v) &\longmapsto -d\mathrm{V}(q) \in \mathrm{T}^*_q\mathrm{M} \end{aligned} \tag{3.4}$$

para alguma $\mathrm{V} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, então, como já seria intuitivo esperar, o sistema definido pela lei de Newton (3.3) é hamiltoniano, ou seja, suas trajetórias coincidem com as do sistema hamiltoniano $(\mathrm{T^*M}, \omega, \mathrm{H})$, onde ω é a forma simplética canônica do fibrado cotangente de M, dada por $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ num sistema de coordenadas $\left(\mathrm{T^*}\mathcal{U}, \mathrm{T^*}\varphi = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\right)$ induzido por uma carta $\left(\mathcal{U}, \varphi = (q^1, \ldots, q^n)\right)$ qualquer de M, e a hamiltoniana H é dada por $\mathrm{H} := \mathrm{T} \circ \mu^{-1} + \mathrm{V} \circ \Pi^*_{\mathrm{M}} : \mathrm{T^*M} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Considere-se, agora, um *vínculo* no espaço de configurações, ou seja, uma distribuição diferenciável n-dimensional sobre M, $\Sigma : q \in \mathrm{M} \longmapsto \Sigma_q \subset \mathrm{T}_q\mathrm{M}$. Uma curva $q : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ no espaço de configurações M diz-se *compatível com o vínculo* Σ se, $(\forall\, t \in I)\ \dot{q}(t) \in \Sigma_{q(t)}$.

Uma distribuição $\Sigma : q \in \mathrm{M} \longmapsto \Sigma_q \subset \mathrm{T}_q\mathrm{M}$, como acima, define um subfibrado vetorial $\Sigma\mathrm{M}$ de TM. Também está bem definida uma distribuição $\Sigma^\perp : q \in \mathrm{M} \longmapsto \Sigma^\perp_q := (\Sigma_q)^\perp \in \mathrm{T}_q\mathrm{M}$ e um subfibrado correspondente $\Sigma^\perp\mathrm{M}$. Vou denotar por P e $P^\perp$ as projeções ortogonais $P : \mathrm{TM} \longrightarrow \Sigma\mathrm{M}$ e $P^\perp : \mathrm{TM} \longrightarrow \Sigma^\perp\mathrm{M}$.

Através da transformação de Legendre μ, pode-se definir objetos correspondentes a estes em T*M: $\Sigma^*\mathrm{M}$, $\Sigma^{\perp *}\mathrm{M}$, P^* e $P^{\perp *}$ ($P^* = \mu \circ P \circ \mu^{-1}$ e $P^{\perp *} = \mu \circ P^\perp \circ \mu^{-1}$).

Dado um campo de forças F, *Fusco* e *Oliva* provaram em [FO] que existe um único campo de forças $R : \mathrm{TM} \longrightarrow \mathrm{T^*M}$ "ortogonal ao vínculo" (ou seja, tal que $R(v_q) \in \Sigma^{\perp *}\mathrm{M}$, $\forall\, v_q \in \mathrm{TM}$) e satisfazendo $R = R \circ P$, chamado *campo de forças reativo*, tal que as curvas integrais da lei de Newton generalizada:

$$F + R = \mu(\nabla_{\dot{q}}\dot{q}) \tag{3.5}$$

são compatíveis com o vínculo Σ.

Além disso, as trajetórias do sistema definido por (3.5) coincidem com as curvas integrais de base de um campo de vetores no fibrado tangente de M que define uma equação de segunda ordem em M, denominado *campo GMA*. Em $\Sigma\mathrm{M}$, existe uma relação simples entre o campo GMA, E, e o campo GMA do sistema mecânico sem vínculo correspondente, X_F, a saber:

$$E|_{\Sigma\mathrm{M}} = \mathrm{T}P \circ X_F|_{\Sigma\mathrm{M}} \tag{3.6}$$

Uma pergunta natural a se fazer é se existe, e sob que condições, uma estrutura de Poisson em $\Sigma^*\mathrm{M}$ tal que o sistema dinâmico definido por (3.5) seja hamiltoniano, quando o campo de forças F "deriva de um potencial", isto é, for da forma (3.4).

O principal resultado deste capítulo, descoberto por *Castro* e *Oliva* em [CO], dá uma resposta a esta pergunta. Impondo a condição de que a projeção P^* seja uma *aplicação de Poisson* (ou seja, uma aplicação C^∞ entre variedades de Poisson que preserva o colchete), que é uma condição natural, em face de (3.6), a existência de uma tal estrutura de Poisson em Σ^*M é equivalente a ser *holônomo* o vínculo (i.e., Σ involutiva).

No caso de o vínculo ser holônomo, será demonstrado que as folhas simpléticas desta estrutura de Poisson são canonicamente isomorfas ao fibrados cotangentes das folhas integrais da distribuição Σ, munidos da estrutura de Poisson simplética usual.

3.1 Introdução

Sejam (M, g) variedade riemanniana conexa e

$$\begin{aligned} T : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_q &\longmapsto \tfrac{1}{2}\langle v_q, v_q\rangle \end{aligned} \tag{3.7}$$

uma aplicação C^∞ que vou chamar de **energia cinética**.

Seja $F : TM \longrightarrow T^*M$ uma aplicação C^∞ entre fibrados vetoriais (**campo de forças**).

3.1.1 Definição: Nas condições acima, vou chamar o par $\big((M, g), F\big)$ de **sistema mecânico**.

Seja μ a **transformação de Legendre**

$$\begin{aligned} \mu := g^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ v_q &\longmapsto \langle v_q, \cdot\rangle \in T^*_qM \end{aligned} \tag{3.8}$$

Estou interessado em estudar o sistema dinâmico definido pela lei de Newton:

$$F = \mu(\nabla_{\dot q}\dot q) \tag{3.9}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de (M, g).

3.1.2 Exemplo
Sejam (M, g) e T como acima, $V \in \mathcal{F}(M)$ e F definida por

$$\begin{aligned} F : TM &\longrightarrow T^*M \\ (q, v) &\longmapsto -dV(q) \in T^*_qM \end{aligned} \tag{3.10}$$

Então o sistema definido pela lei de Newton (3.9) é hamiltoniano, i.e., suas trajetórias coincidem com as trajetórias do sistema hamiltoniano (T^*M, ω, H), onde ω é a forma simplética canônica do T^*M e $H := T \circ \mu^{-1} + V \circ \Pi^*_M : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Verificarei este fato posteriormente.

3.1.3 Observação

Tomando cartas

$$\begin{aligned}&(\mathcal{U}, \varphi = (q^1, \ldots, q^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M})\\ &(\mathrm{T}\mathcal{U}, \mathrm{T}\varphi = (q^1, \ldots, q^m, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{TM})\\ &(\mathrm{T}^*\mathcal{U}, \mathrm{T}^*\varphi = (q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T}^*\mathrm{M})\end{aligned} \tag{3.11}$$

e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$, temos:

$$\mu(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma) = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot q^r} \circ \dot\gamma\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^r} \circ \dot\gamma\right) dq^r \circ \gamma \tag{3.12}$$

e assim obtemos a lei de Newton (3.9) em coordenadas locais, numa forma mais conhecida.

Com efeito, pondo $(\forall i \in \{1, \ldots, m\})\ \gamma^i := q^i \circ \gamma$, temos:

$$\begin{aligned}&\nabla_{\partial_{q^i}} \partial_{q^j} = \Gamma^k_{ij}\, \partial_{q^k}\\ &\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\, \mathrm{g}^{kl}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{il}}{\partial q^j} + \frac{\partial \mathrm{g}_{jl}}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial q^l}\right)\\ &\therefore \Gamma^i_{jk}\, \dot q^j\, \dot q^k = \frac{1}{2}\, \mathrm{g}^{il}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{jl}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathrm{g}_{kl}}{\partial q^j} - \frac{\partial \mathrm{g}_{jk}}{\partial q^l}\right)\dot q^j\, \dot q^k =\\ &\qquad = \mathrm{g}^{il}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{jl}}{\partial q^k} - \frac{1}{2}\, \frac{\partial \mathrm{g}_{jk}}{\partial q^l}\right)\dot q^j\, \dot q^k\end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$\mathrm{T}|_{\mathrm{T}\mathcal{U}} = \frac{1}{2}\, (\mathrm{g}_{ij} \circ \Pi_{\mathrm{M}})\dot q^i\, \dot q^j \tag{3.14}$$

donde, em $\mathrm{T}\mathcal{U}$:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot q^r} = (\mathrm{g}_{ir} \circ \Pi_{\mathrm{M}})\dot q^i \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial q^r} \circ \Pi_{\mathrm{M}}\right)\dot q^i\, \dot q^j \tag{3.16}$$

logo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot q^r} \circ \dot\gamma\right) &= \frac{d}{dt}\left((\mathrm{g}_{ir} \circ \gamma)\dot\gamma^i\right) =\\ &= (\mathrm{g}_{ir} \circ \gamma)\ddot\gamma^i + \left(\frac{\partial \mathrm{g}_{ri}}{\partial q^k} \circ \gamma\right)\dot\gamma^k \dot\gamma^i\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^r} \circ \dot\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial q^r} \circ \gamma\right)\dot\gamma^i \dot\gamma^j \tag{3.18}$$

Então segue:

$$\begin{aligned}
\mu(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma) &= \mu\big((\ddot\gamma^i + \Gamma^i_{jk}\,\dot\gamma^j\,\dot\gamma^k)\partial_{q^i}\circ\gamma\big) \overset{(3.13)}{=} \\
&= \left(\mathrm{g}_{ri}\,\ddot\gamma^i + \mathrm{g}_{ri}\,\mathrm{g}^{il}\Big(\frac{\partial \mathrm{g}_{jl}}{\partial q^k} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{g}_{jk}}{\partial q^l}\Big)\dot\gamma^j\dot\gamma^k\right) dq^r\circ\gamma = \\
&= \left(\Big(\mathrm{g}_{ri}\ddot\gamma^i + \frac{\partial \mathrm{g}_{ri}}{\partial q^k}\,\dot\gamma^k\dot\gamma^i\Big) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial q^r}\,\dot\gamma^i\,\dot\gamma^j\right) dq^r\circ\gamma \overset{(3.17),(3.18)}{=} \\
&= \left(\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot q^r}\circ\dot\gamma\Big) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^r}\circ\dot\gamma\right) dq^r\circ\gamma
\end{aligned} \tag{3.19}$$

■

3.2 Sistemas Mecânicos com Vínculos

Sejam (M,g), $\mathrm{T}:\mathrm{TM}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $\mu := \mathrm{g}^\flat : \mathrm{TM}\longrightarrow\mathrm{T}^*\mathrm{M}$ como na seção anterior.

3.2.1 Definição: Um **vínculo** em M é uma distribuição C^∞ n-dimensional

$$\Sigma : q\in\mathrm{M}\longmapsto\Sigma_q\subset\mathrm{T}_q\mathrm{M}$$

Direi que o vínculo é **holônomo** ou **não-holônomo** se Σ for integrável ou não-integrável, respectivamente.

3.2.2 Definição: Seja $q : I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathrm{M}$ uma curva em M de classe C^k, $k\geqslant 2$, e Σ um vínculo em M. Direi que q é um **movimento compatível com Σ** se $(\forall t\in I)\ \dot q(t)\in\Sigma_{q(t)}$.

3.2.3 Definição
Uma distribuição $\Sigma : q\in\mathrm{M}\longmapsto\Sigma_q\subset\mathrm{T}_q\mathrm{M}$, como acima, define um subfibrado vetorial $\Sigma\mathrm{M}$ de TM. Também está bem definida uma distribuição $\Sigma^\perp : q\in\mathrm{M}\longmapsto\Sigma_q^\perp := (\Sigma_q)^\perp\in\mathrm{T}_q\mathrm{M}$ e um subfibrado correspondente $\Sigma^\perp\mathrm{M}$. Vou denotar por P e $P^\perp$ as projeções ortogonais $P:\mathrm{TM}\longrightarrow\Sigma\mathrm{M}$ e $P^\perp:\mathrm{TM}\longrightarrow\Sigma^\perp\mathrm{M}$.

Através da transformação de Legendre μ, pode-se definir objetos correspondentes a estes em $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$: $\Sigma^*\mathrm{M}$, $\Sigma^{\perp^*}\mathrm{M}$, P^* e $P^{\perp^*}$ ($P^* = \mu\circ P\circ\mu^{-1}$ e $P^{\perp^*} = \mu\circ P^\perp\circ\mu^{-1}$).

Vou denotar por $\mathcal{F}^k$ e $\mathcal{F}^k_\Sigma$, $k\geqslant 1$, os conjuntos

$$\mathcal{F}^k := \{F:\mathrm{TM}\longrightarrow\mathrm{T}^*\mathrm{M}\quad \mathrm{C}^k \text{ entre fibrados vetoriais}\}$$

$$\mathcal{F}^k_\Sigma := \{F\in\mathcal{F}^k : F\circ P = F\}$$

3.2.4 Definição: Um **sistema mecânico com vínculo** é uma terna $\big((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F\big)$, onde (M,g) é uma variedade riemanniana, Σ é um vínculo em M e $F\in\mathcal{F}^k$ (**campo de forças ativo**).

Dado um sistema mecânico com vínculo $\big((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F\big)$, chamarei o par $\big((\mathrm{M},\mathrm{g}),F\big)$ de **sistema mecânico sem vínculo correspondente.**

Daqui em diante, considerarei $k=\infty$.

Os teoremas do restante desta seção podem ser encontrados em [FO].

3.2.5 Teorema
Seja $\big((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F\big)$ *um sistema mecânico com vínculo.* ***Então:***

(a) $\exists!\ R\in\mathcal{F}^\infty_\Sigma$ *tal que:*

(i) $P^*\circ R\equiv\mathbb{0}$

(ii) $\forall v_q\in\Sigma\mathrm{M}$, *a curva integral maximal* $q:I_{v_q}\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathrm{M}$ *do sistema definido pela lei de Newton generalizada*

$$F+R=\mu\big(\nabla_{\dot q}\dot q\big) \tag{3.20}$$

com condição inicial $\dot q(0)=v_q$, *é compatível com* Σ.

(b) Dados $\mathcal{U}\in\tau(\mathrm{M})$ *e* $Y_1,\dots,Y_r\in\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ *tais que* $\{Y_1,\dots,Y_r\}$ *é ortonormal e gera* $\Sigma^\perp\mathrm{M}|_\mathcal{U}$, *então* $R|_{\mathrm{T}\mathcal{U}}$ *é dado por:*

$$\begin{aligned}\big(\forall v_q\in\Sigma\mathrm{M}|_\mathcal{U}\big)\ R(v_q)=&Q(v_q)-P^{\perp^*}\circ F(v_q)\\ &\text{onde } Q(v_q):=-\mu\big(\langle v_q,\nabla_{v_q}Y_i\rangle Y_i(q)\big)\end{aligned} \tag{3.21}$$

(c) Seja

$$\begin{aligned}E:\mathrm{TM}&\longrightarrow\mathrm{T}(\mathrm{TM})\\ v_q&\longmapsto S(v_q)+C_{v_q}\big(\mu^{-1}\circ(F+R)(v_q)\big)\end{aligned} \tag{3.22}$$

onde S *é o spray geodésico e* C_{v_q} *é o levantamento vertical em* $v_q\in\mathrm{T}_q\mathrm{M}$:

$$\begin{aligned}C_{v_q}:\mathrm{T}_q\mathrm{M}&\longrightarrow\mathrm{T}_{v_q}(\mathrm{TM})\\ w_q&\longmapsto\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v_q+tw_q)\end{aligned} \tag{3.23}$$

Então $E\in\mathfrak{X}(\mathrm{TM})$ *define uma equação de segunda ordem em* M, *e as curvas integrais de base de* E *são as curvas integrais de* (3.20). *Além disso,* E *é tangente a* $\Sigma\mathrm{M}$, *i.e.,* $\mathrm{T}P\circ E|_{\Sigma\mathrm{M}}=E|_{\Sigma\mathrm{M}}$.

PROVA:

Parte (a)
(I) Unicidade

Supondo que existe $R \in \mathcal{F}_{\Sigma}^{\infty}$ satisfazendo (a.i) e (a.ii), vou mostrar que R é dado localmente por (b), portanto é único.

Com efeito, sejam $\widetilde{F} := \mu^{-1} \circ F$, $\widetilde{R} := \mu^{-1} \circ R$, $v_q \in \Sigma\mathrm{M}$, $\mathcal{U} \in \tau_q(\mathrm{M})$ e $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ como em (b). Temos:

$$\begin{aligned}(\forall t \in I_{v_q})\, \mu(\nabla_{\dot{q}}\dot{q}) = (F+R)(\dot{q}) &\Leftrightarrow \nabla_{\dot{q}}\dot{q} = (\widetilde{F}+\widetilde{R})(\dot{q}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(P^{\perp}\nabla_{\dot{q}}\dot{q}\right)\big|_{t=0} = P^{\perp}(\widetilde{F}+\widetilde{R})(\dot{q})\big|_{t=0} \overset{P^{\perp}\widetilde{R}=\widetilde{R}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow P^{\perp}\nabla_{v_q}\dot{q} = P^{\perp}\widetilde{F}(v_q) + \widetilde{R}(v_q)\end{aligned} \tag{3.24}$$

Sendo $\Sigma^{\perp}\mathrm{M}|_{\mathcal{U}}$ gerada por $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ ortonormal, temos:

$$(\forall t \in I_{v_q})\; P^{\perp}\left(\nabla_{\dot{q}}\dot{q}\right) = \langle \nabla_{\dot{q}}\dot{q}, Y_i \circ q\rangle Y_i \circ q \tag{3.25}$$

Lema 1
$p : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ *compatível com* $\Sigma \Rightarrow (\forall t \in I)\; \langle \nabla_{\dot{p}}\dot{p}, Y_i \circ p\rangle = -\langle \dot{p}, \nabla_{\dot{p}}Y_i\rangle$

Aplicando o lema (1) para $q : I_{v_q} \longrightarrow \mathrm{M}$, obtemos:

$$\begin{aligned}(\forall t \in I)\, \langle \nabla_{\dot{q}}\dot{q}, Y_i \circ q\rangle = -\langle \dot{q}, \nabla_{\dot{q}}Y_i\rangle &\overset{(3.25)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow P^{\perp}\left(\nabla_{\dot{q}}\dot{q}\right) = -\langle \dot{q}, \nabla_{\dot{q}}Y_i\rangle Y_i \circ q &\overset{t=0}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow P^{\perp}\nabla_{v_q}\dot{q} = \langle -v_q, \nabla_{v_q}Y_i\rangle Y_i(q) &\overset{(3.24)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow P^{\perp}\widetilde{F}(v_q) + \widetilde{R}(v_q) = -\langle v_q, \nabla_{v_q}Y_i\rangle Y_i(q)&\end{aligned} \tag{3.26}$$

logo R é dado por (b), como afirmado, e isto conclui a prova da unicidade. □

Prova do lema (1)*:*

$$\begin{aligned}&p : t \longmapsto p(t) \text{ compatível com } \Sigma \overset{\dot{p}\in\Sigma_p}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \langle \dot{p}, Y_i \circ p\rangle \equiv 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \dot{p}, Y_i \circ p\rangle \equiv 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \nabla_{\dot{p}}\dot{p}, Y_i \circ p\rangle + \langle \dot{p}, \nabla_{\dot{p}}Y_i\rangle \equiv 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \nabla_{\dot{p}}\dot{p}, Y_i \circ p\rangle = -\langle \dot{p}, \nabla_{\dot{p}}Y_i\rangle\end{aligned} \tag{3.27}$$

□

(II) Existência

Dado $(\mathcal{U}, \varphi = (q^1, \ldots, q^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M})$, tome $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ ortonormal e que gera $\Sigma^{\perp}\mathrm{M}|_{\mathcal{U}}$. Seja R definido em $\Sigma^{\perp}\mathrm{M}|_{\mathcal{U}}$ por (b).

Vou mostrar que R satisfaz (a.i) e (a.ii); então seguirá da parte (I) que R estará, de forma óbvia, bem definido globalmente.

(1)

$$\begin{aligned}(\forall v_q \in \Sigma\mathrm{M}|_{\mathcal{U}})\ P^*R(v_q) &= -P^*P^{\perp *}F(v_q) - \langle v_q, \nabla_{v_q} Y_i\rangle P^*\mu\big(Y_i(q)\big) \overset{P^*P^{\perp *}\equiv \mathbb{O}}{=} \\ &= -\langle v_q, \nabla_{v_q} Y_i\rangle \mu P \mu^{-1}\mu\big(Y_i(q)\big) = \\ &= -\langle v_q, \nabla_{v_q} Y_i\rangle \mu P\big(Y_i(q)\big) \overset{Y_i(q)\in\Sigma_q^{\perp}}{=} \mathbb{O}\end{aligned} \tag{3.28}$$

$\therefore$ R satisfaz (a.i).

(2) Vou mostrar que R satisfaz (a.ii), ou seja, $\forall v_q \in \Sigma\mathrm{M}|_{\mathcal{U}}$, a curva integral maximal de

$$F|_{\mathrm{T}\mathcal{U}} + R = \mu\big(\nabla_{\dot{q}}\dot{q}\big) \tag{3.29}$$

com condição inicial $\dot{q}(0) = v_q$, é compatível com Σ.

Seja

$$\begin{aligned} E : \mathrm{T}\mathcal{U} &\longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{T}\mathcal{U}) \\ v_q &\longmapsto S(v_q) + C_{v_q}\big(\mu^{-1} \circ \overline{F}(v_q)\big)\end{aligned} \tag{3.30}$$

onde $\overline{F} := F|_{\mathrm{T}\mathcal{U}} + R$, S é o spray geodésico e C_{v_q} é o levantamento vertical em $v_q \in \Sigma_q$ (3.23).

Lema 2 *E define uma equação de segunda ordem em $\mathcal{U}$, e as curvas integrais de base de E são as curvas integrais de* (3.29).

Lema 3 *Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ uma curva em* M. ***Então*** $(\forall t \in I)\, C_{\dot{\gamma}}(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) = \ddot{\gamma} - S(\dot{\gamma})$.

Segue do lema (2) que, para verificar que a curva integral maximal de (3.29) com condição inicial $\dot{q}(0) = v_q$ é compatível com Σ, é suficiente mostrar que E é tangente a $\Sigma\mathrm{M}|_{\mathcal{U}}$, i.e., $E(\Sigma\mathrm{M}|_{\mathcal{U}}) \subset \mathrm{T}(\Sigma\mathrm{M}|_{\mathcal{U}})$.

(i) $\forall v_q \in \Sigma\mathrm{M}, \forall w_q \in \mathrm{T}_q\mathrm{M}$, temos:

$$\begin{aligned} C_{v_q}(Pw_q) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (v_q + tPw_q) = \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P(v_q + tw_q) \overset{\text{regra da cadeia}}{=} \\ &= \mathrm{T}P \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (v_q + tw_q) \overset{(3.23)}{=} \\ &= \mathrm{T}P \cdot C_{v_q}(w_q) \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde

$$(\forall v_q \in \Sigma\mathrm{M})\ \mathrm{T}P \circ C_{v_q} = C_{v_q} \circ P|_{\mathrm{T}_q\mathrm{M}} \tag{3.32}$$

(ii) Usando (i), segue que, $\forall v_q \in \Sigma\mathrm{M}|_{\mathrm{U}}$:

$$\begin{aligned} E(v_q) &= S(v_q) + C_{v_q}\big(P(\widetilde{F} + \widetilde{R})(v_q)\big) + C_{v_q}\big(P^{\perp}(\widetilde{F} + \widetilde{R})(v_q)\big) \overset{(3.32)}{=} \\ &= \mathrm{T}P \cdot \big[S(v_q) + C_{v_q}\big((\widetilde{F} + \widetilde{R})(v_q)\big)\big] + \\ &\quad + S(v_q) - \mathrm{T}P \cdot S(v_q) + C_{v_q}\big(P^{\perp}(\widetilde{F} + \widetilde{R})(v_q)\big) \end{aligned} \tag{3.33}$$

(iii) Seja $p : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ compatível com Σ tal que $\dot{p}(0) = v_q$. Segue do lema (1) que:

$$\begin{aligned} &(\forall t \in I)\ \langle \nabla_{\dot{p}}\dot{p}, Y_i \circ p\rangle = -\langle \dot{p}, \nabla_{\dot{p}} Y_i\rangle \overset{t=0}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \langle \nabla_{v_q}\dot{p}, Y_i(q)\rangle = -\langle v_q, \nabla_{v_q} Y_i\rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow P^{\perp}(\nabla_{v_q}\dot{p}) = \langle \nabla_{v_q}\dot{p}, Y_i(q)\rangle Y_i(q) = \\ &\qquad = -\langle v_q, \nabla_{v_q} Y_i\rangle Y_i(q) \overset{(3.21)}{=} \\ &\qquad = P^{\perp}\widetilde{F}(v_q) + \widetilde{R}(v_q) \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_{v_q}\big(P^{\perp}\widetilde{F}(v_q) + \widetilde{R}(v_q)\big) = C_{v_q}P^{\perp}(\nabla_{v_q}\dot{p}) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} C_{v_q}P^{\perp}(\nabla_{v_q}\dot{p}) &= C_{v_q}(\nabla_{v_q}\dot{p}) - C_{v_q}P(\nabla_{v_q}\dot{p}) \overset{(3.32)}{=} \\ &= C_{v_q}(\nabla_{v_q}\dot{p}) - \mathrm{T}P \cdot C_{v_q}(\nabla_{v_q}\dot{p}) \overset{\text{lema (3)}}{=} \\ &= \ddot{p}(0) - S(v_q) - \mathrm{T}P \cdot \big(\ddot{p}(0) - S(v_q)\big) \end{aligned} \tag{3.35}$$

donde

$$\begin{aligned} &S(v_q) - \mathrm{T}P \cdot S(v_q) + C_{v_q}\big(P^{\perp}(\widetilde{F} + \widetilde{R})(v_q)\big) \overset{(3.34)}{=} \\ &= S(v_q) - \mathrm{T}P \cdot S(v_q) + C_{v_q}P^{\perp}(\nabla_{v_q}\dot{p}) \overset{(3.35)}{=} \\ &= S(v_q) - \mathrm{T}P \cdot S(v_q) + \ddot{p}(0) - S(v_q) - \mathrm{T}P \cdot \big(\ddot{p}(0) - S(v_q)\big) = \\ &= \ddot{p}(0) - \mathrm{T}P \cdot \ddot{p}(0) \overset{p \text{ compatível com } \Sigma}{=} \mathbb{0} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Então segue de (3.33) e (3.36) que, $\forall v_q \in \Sigma\mathrm{M}|_{\mathcal{U}}$

$$\begin{aligned} E(v_q) &= \mathrm{T}P \cdot \left[S(v_q) + C_{v_q}\big((\widetilde{F} + \widetilde{R})(v_q)\big)\right] \\ &= \mathrm{T}P \cdot \big(E(v_q)\big) \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde E é tangente a $\Sigma\mathrm{M}|_{\mathcal{U}}$, como afirmado, e isto conclui a prova da parte (II). □

Prova do lema (3)*:*
Dados $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ e $\tau \in I$, tome cartas

$$\begin{aligned} &\big(\mathcal{U}, \varphi = (q^1, \ldots, q^m)\big) \in \mathfrak{A}_{\gamma(\tau)}(\mathrm{M}) \\ &\Big(\mathrm{T}\mathcal{U}, \mathrm{T}\varphi = \big(q = (q^1, \ldots, q^m), \dot{q} = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^m)\big)\Big) \in \mathfrak{A}(\mathrm{TM}) \\ &\big(\mathrm{TT}\mathcal{U}, \mathrm{TT}\varphi = (q, \dot{q}, \ddot{q}^1, \ddot{q}^2)\big) \in \mathfrak{A}\big(\mathrm{T}(\mathrm{TM})\big) \end{aligned} \tag{3.38}$$

Em relação a estas cartas, temos, pondo $p := \varphi \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(\mathcal{U})}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{TT}\varphi \circ C_{v_q} \circ \mathrm{T}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \mathbb{R}^{4m} \\ (q, w) &\longmapsto (q, v, \mathbb{0}, w) \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{TT}\varphi \circ S \circ \mathrm{T}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \mathbb{R}^{4m} \\ (q, v) &\longmapsto \big(q, v, v, \Gamma(v)\big) \end{aligned} \tag{3.40}$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\longmapsto -\Gamma^k_{ij} v^i v^j e_k \end{aligned} \tag{3.41}$$

sendo $\{\Gamma^k_{ij} : 1 \leqslant i, j, k \leqslant m\}$ os símbolos de Christoffel de ∇ em relação à carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ e $\{e_k : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned} \mathrm{TT}\varphi \circ \ddot{\gamma} : \gamma^{-1}(\mathcal{U}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{4m} \\ t &\longmapsto \big(p(t), \dot{p}(t), \dot{p}(t), \ddot{p}(t)\big) \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\varphi \circ \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} : \gamma^{-1}(\mathcal{U}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ t &\longmapsto \Big(p(t), \ddot{p}(t) - \Gamma\big(\dot{p}(t)\big)\Big) \end{aligned} \tag{3.43}$$

Então, temos, por (3.40) e (3.42) :

$$\begin{aligned} \mathrm{TT}\varphi \circ (\ddot{\gamma} - S \circ \dot{\gamma}) : \gamma^{-1}(\mathcal{U}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{4m} \\ t &\longmapsto \big(p(t), \dot{p}(t), \mathbb{O}, \ddot{p}(t) - \Gamma \circ \dot{p}(t)\big) \end{aligned} \tag{3.44}$$

e, por (3.39) e (3.43):

$$\begin{aligned} \mathrm{TT}\varphi \circ C_{\dot{\gamma}}(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) : \gamma^{-1}(\mathcal{U}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{4m} \\ t &\longmapsto \big(p(t), \dot{p}(t), \mathbb{O}, \ddot{p}(t) - \Gamma \circ \dot{p}(t)\big) \end{aligned} \tag{3.45}$$

logo, $C_{\dot{\gamma}(\tau)} \circ (\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})(\tau) = \ddot{\gamma}(\tau) - S\big(\dot{\gamma}(\tau)\big)$, e como $\tau \in I$ foi tomado arbitrariamente, segue tese. □

Prova do lema (2)*:*

(1) Reduzindo o tamanho de $\mathcal{U}$, se necessário, podemos tomar cartas $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M})$, $(\mathrm{T}\mathcal{U}, \mathrm{T}\varphi) \in \mathfrak{A}(\mathrm{TM})$ e $(\mathrm{TT}\mathcal{U}, \mathrm{TT}\varphi) \in \mathfrak{A}\big(\mathrm{T}(\mathrm{TM})\big)$, como em (3.38).

Em relação a estas cartas, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\varphi \circ \mathrm{T}\Pi_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{TT}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{4m} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ (q, v, w^1, w^2) &\longmapsto (q, w^1) \end{aligned} \tag{3.46}$$

portanto, de (3.39), segue:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\varphi \circ (\mathrm{T}\Pi_{\mathrm{M}} \circ C_{v_q}) \circ \mathrm{T}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ (q, w) &\longmapsto (q, \mathbb{O}) \end{aligned} \tag{3.47}$$

então, $\forall\, v_q \in \mathrm{T}\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\Pi_{\mathrm{M}} \circ E(v_q) &= \mathrm{T}\Pi_{\mathrm{M}} \circ S(v_q) + \mathrm{T}\Pi_{\mathrm{M}} \circ C_{v_q}\big(\mu^{-1} \circ \overline{F}(v_q)\big) \overset{(3.47)}{=} \\ &= \mathrm{T}\Pi_{\mathrm{M}} \circ S(v_q) + \mathbb{O}_q = \\ &= \mathrm{T}\Pi_{\mathrm{M}} \circ S(v_q) \overset{S \text{ é spray}}{=} \\ &= v_q \end{aligned} \tag{3.48}$$

$\therefore\ \mathrm{T}\Pi_{\mathrm{M}} \circ E = \mathrm{id}_{\mathrm{T}\mathcal{U}}$, donde E define uma equação de segunda ordem em $\mathcal{U}$.

(2) Resta verificar que as curvas integrais de base de E são as curvas integrais de (3.29).

Como, pelo item anterior, E define uma equação de segunda ordem em $\mathcal{U}$, suas curvas integrais são da forma $(\gamma, \dot{\gamma})$, onde $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$. Então é suficiente verificar, para uma curva deste tipo, que:

$$(\forall t \in I)\, \overline{F}(\gamma(t)) = \mu(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})(t) \Leftrightarrow \ddot{\gamma}(t) = E(\dot{\gamma}(t)) \tag{3.49}$$

De fato, $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned}
&\overline{F} \circ \dot{\gamma} = \mu(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) \overset{\mu \text{ injetiva}}{\Leftrightarrow} \\
\Leftrightarrow &\mu^{-1} \circ \overline{F} \circ \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \overset{C_{\dot{\gamma}} \text{ injetiva}}{\Leftrightarrow} \\
\Leftrightarrow &C_{\dot{\gamma}}(\mu^{-1} \circ \overline{F} \circ \dot{\gamma}) = C_{\dot{\gamma}}(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) \overset{\text{lema (3)}}{\Leftrightarrow} \\
\Leftrightarrow &C_{\dot{\gamma}}(\mu^{-1} \circ \overline{F} \circ \dot{\gamma}) = \ddot{\gamma} - S \circ \dot{\gamma} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow &\ddot{\gamma} = S \circ \dot{\gamma} + C_{\dot{\gamma}}(\mu^{-1} \circ \overline{F} \circ \dot{\gamma}) = E \circ \dot{\gamma}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

e isto conclui a prova do lema. □

Como a parte (b) já foi demonstrada na parte (a), resta apenas mostrar a

Parte (c)

Sejam E dado por (3.22) e $\gamma_{v_q} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ curva integral maximal de (3.20) com condição inicial $\dot{\gamma}_{v_q}(0) = v_q$.

Do lema (2) segue que E define uma equação de segunda ordem em M e que suas curvas integrais de base são as curvas integrais de (3.20). Além disso, como

$$(\forall v_q \in \mathrm{TM})\, E(v_q) = \ddot{\gamma}_{v_q}(0) \tag{3.51}$$

segue do teorema de dependência diferenciável em relação a condições iniciais que E é C^∞, logo $E \in \mathfrak{X}(\mathrm{TM})$.

Também já provei na parte (a.II.2) que $\mathrm{T}P \circ E|_{\Sigma\mathrm{M}} = E|_{\Sigma\mathrm{M}}$. ■

3.2.6 Definição: O campo $E \in \mathfrak{X}(\mathrm{TM})$ da proposição anterior é denominado **campo GMA** (devido a Gibbs, Maggi e Appell).

3.2.7 Definição: Seja $((\mathrm{M}, \mathrm{g}), \Sigma, F)$ um sistema mecânico com vínculo. Chamarei as curvas integrais de (3.20) de **movimentos** ou **trajetórias** de $((\mathrm{M}, \mathrm{g}), \Sigma, F)$.

3.2.8 Teorema: $((\mathrm{M}, \mathrm{g}), \Sigma, F_1)$ *e* $((\mathrm{M}, \mathrm{g}), \Sigma, F_2)$ *têm os mesmos movimentos see* $P^*F_1 = P^*F_2$.

PROVA:
Com efeito, sejam E_1 e E_2 os campos GMA correspondentes a $((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F_1)$ e $((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F_2)$, respectivamente. Então segue do teorema (3.2.5) que $((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F_1)$ e $((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F_2)$ têm os mesmos movimentos *see* $(\forall\, v_q \in \mathrm{TM})\ E_1(v_q) = E_2(v_q)$. Mas, dado $v_q \in \mathrm{TM}$, temos:

$$
\begin{aligned}
&E_1(v_q) = E_2(v_q) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow S(v_q) + C_{v_q}\big(\mu^{-1}F_1(v_q) + \mu^{-1}R_1(v_q)\big) = S(v_q) + C_{v_q}\big(\mu^{-1}F_2(v_q) + \mu^{-1}R_2(v_q)\big) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow S(v_q) + C_{v_q}\big(P\mu^{-1}F_1(v_q) + \mu^{-1}Q(v_q)\big) = S(v_q) + C_{v_q}\big(P\mu^{-1}F_2(v_q) + \mu^{-1}Q(v_q)\big) \overset{C_{v_q}\ \text{injetiva}}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow P\mu^{-1}F_1(v_q) = P\mu^{-1}F_2(v_q) \overset{\mu\ \text{injetiva}}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow P^*F_1(v_q) = P^*F_2(v_q)
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

■

O próximo teorema nos diz que, dado um sistema mecânico com vínculo, existe uma relação simples entre o campo GMA do sistema mecânico com vínculo e o campo GMA do sistema mecânico sem vínculo correspondente.

3.2.9 Teorema: *Seja* $((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F)$ *um sistema mecânico com vínculo e* E *o seu campo GMA. Seja* X_F *o campo GMA do sistema mecânico sem vínculo correspondente.* ***Então:***

$$E|_{\Sigma\mathrm{M}} = \mathrm{T}P \circ X_F|_{\Sigma\mathrm{M}}. \tag{3.53}$$

PROVA: Temos:

$$
\begin{aligned}
E : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{TM}) \\
v_q &\longmapsto S(v_q) + C_{v_q} \circ (P\mu^{-1}F + \mu^{-1}Q)(v_q)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
X_F : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{TM}) \\
v_q &\longmapsto S(v_q) + C_{v_q}(P\mu^{-1}F)(v_q)
\end{aligned}
$$

Então segue, $\forall\, v_q \in \Sigma\mathrm{M}$:

$$E(v_q) = X_F(v_q) + C_{v_q}\mu^{-1}Q(v_q) \tag{3.54}$$

e, como $\mathrm{T}P \circ E|_{\Sigma\mathrm{M}} = E|_{\Sigma\mathrm{M}}$, segue, $\forall\, v_q \in \Sigma\mathrm{M}$:

$$
\begin{aligned}
E(v_q) &= \mathrm{T}P \cdot E(v_q) \overset{(3.54)}{=} \\
&= \mathrm{T}P \cdot X_F(v_q) + \mathrm{T}P \cdot C_{v_q}\mu^{-1}Q(v_q) \overset{\text{lema (3)}}{=} \\
&= \mathrm{T}P \cdot X_F(v_q) + C_{v_q}P\mu^{-1}Q(v_q) = \\
&= \mathrm{T}P \cdot X_F(v_q) + C_{v_q}\mu^{-1}P^*Q(v_q) \overset{P^*Q\equiv\mathbb{0}}{=} \\
&= \mathrm{T}P \cdot X_F(v_q)
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

■

3.2.10 Exemplo (Continuação do exemplo (3.1.2))
Retomemos o exemplo (3.1.2). Dado um sistema mecânico $\big((\mathrm{M},\mathrm{g}),F\big)$, com F dada por (3.10):

$$\begin{aligned} F : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathrm{T^*M} \\ (q,v) &\longmapsto -d\mathrm{V}(q) \in \mathrm{T}^*_q\mathrm{M} \end{aligned}$$

onde $\mathrm{V} \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, havia sido afirmado que o sistema definido pela lei de Newton (3.9) é hamiltoniano, i.e., suas trajetórias coincidem com as trajetórias do sistema hamiltoniano $(\mathrm{T^*M},\omega,\mathrm{H})$, onde ω é a forma simplética canônica de $\mathrm{T^*M}$ e $\mathrm{H} := \mathrm{T}\circ\mu^{-1} + \mathrm{V}\circ\Pi^*_{\mathrm{M}} : \mathrm{T^*M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Provarei esta afirmação agora.

É suficiente verificar que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T(TM)} & \xrightarrow{\mathrm{T}\mu} & \mathrm{T(T^*M)} \\ {\scriptstyle E}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \xi_{\mathrm{H}}} \\ \mathrm{TM} & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{T^*M} \end{array} \tag{3.56}$$

onde E é o campo GMA de $\big((\mathrm{M},\mathrm{g}),F\big)$.

Com efeito, o fato de o diagrama (3.56) ser comutativo, significa que E e ξ_{H} são μ-relacionados, e como $\Pi^*_{\mathrm{M}}\circ\mu = \Pi_{\mathrm{M}}$, suas curvas integrais serão projetadas nas mesmas curvas em M, e neste caso a tese seguirá do teorema (3.2.5).

Dado $(\overline{q},\overline{p}) \in \mathrm{T^*M}$, mostrarei que

$$\xi_{\mathrm{H}}(\overline{q},\overline{p}) = \mathrm{T}\mu\circ E\circ\mu^{-1}(\overline{q},\overline{p}) \tag{3.57}$$

e isto concluirá a demonstração.

Tome cartas

$$\begin{aligned} &(\mathcal{U},\varphi = (q^1,\ldots,q^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{M}) \\ &(\mathrm{T}\mathcal{U},\mathrm{T}\varphi = (q^1,\ldots,q^m,\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{TM}) \\ &(\mathrm{T^*}\mathcal{U},\mathrm{T^*}\varphi = (q_1,\ldots,q_m,p_1,\ldots,p_m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T^*M}) \end{aligned} \tag{3.58}$$

com $(\mathcal{U},\varphi)$ sistema de coordenadas normal centrado em $\overline{q}$.

Temos, no ponto $\overline{q}$, $\forall i,j,k \in \{1,\ldots,m\}$:

$$\Gamma^k_{ij}(\overline{q}) = \mathrm{g}_{ij,k}(\overline{q}) = \mathrm{g}^{ij}_{,k}(\overline{q}) = 0 \tag{3.59}$$

Assim, em relação a estas cartas:

(i)

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\circ\mu^{-1}\circ\mathrm{T^*}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q,p) &\longmapsto \tfrac{1}{2}\langle p_q,p_q\rangle = \tfrac{1}{2}\,p_i\,p_j\,\mathrm{g}^{ij}(q) \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{V} \circ \Pi_{\mathrm{M}}^{*} \circ \mathrm{T}^{*}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q,p) &\longmapsto V \circ \varphi^{-1}(q) \end{aligned} \tag{3.61}$$

então:

$$\begin{aligned} d(\mathrm{T} \circ \mu^{-1})(\overline{q},\overline{p}) &= \left[\partial^{q_i}(\mathrm{T} \circ \mu^{-1})dq_i + \partial^{p_i}(\mathrm{T} \circ \mu^{-1})dp_i\right]_{(\overline{q},\overline{p})} = \\ &= \left[\tfrac{1}{2} p_i\, p_j\, \mathrm{g}^{ij}_{,k}\, dq_k + p_j\, \mathrm{g}^{kj}\, dp_k\right]_{(\overline{q},\overline{p})} \overset{(3.59)}{=} \\ &= \left[p_j\, \mathrm{g}^{kj}\, dp_k\right]_{(\overline{q},\overline{p})} \end{aligned} \tag{3.62}$$

e

$$\begin{aligned} d(\mathrm{V} \circ \Pi_{\mathrm{M}}^{*})(\overline{q},\overline{p}) &= \left[\partial^{q_i}(\mathrm{V} \circ \Pi_{\mathrm{M}}^{*})dq_i + \partial^{p_i}(\mathrm{V} \circ \Pi_{\mathrm{M}}^{*})dp_i\right]_{(\overline{q},\overline{p})} = \\ &= \left[\mathrm{V}_{,k}\, dq_k\right]_{(\overline{q},\overline{p})} \end{aligned} \tag{3.63}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \xi_{\mathrm{H}}(\overline{q},\overline{p}) &= \left[\partial^{p_i} H \partial_{q_i} - \partial^{q_i} H \partial_{p_i}\right]_{(\overline{q},\overline{p})} = \\ &= \left[p_j\, \mathrm{g}^{kj}\, \partial^{q_k} - \mathrm{V}_{,k}\, \partial^{p_k}\right]_{(\overline{q},\overline{p})} \end{aligned} \tag{3.64}$$

(ii) Por outro lado, após fazer algumas contas:

$$\mathrm{T}\mu \circ E \circ \mu^{-1}(q,p) = \left[\mathrm{g}^{kj}\, p_j\, \partial^{q_k} - \mathrm{g}_{lk}\, (\Gamma^{l}_{ij}\, \mathrm{g}^{ir}\, p_r\, \mathrm{g}^{js}\, p_s + \mathrm{g}^{il}\, \mathrm{V}_{,i}\, \partial^{p_k})\right]_{(q,p)} \tag{3.65}$$

$\forall (q,p) \in \mathrm{T}^{*}\mathcal{U}$. Então, por (3.59):

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\mu \circ E \circ \mu^{-1}(\overline{q},\overline{p}) &= \left[\mathrm{g}^{kj}\, p_j\, \partial^{q_k} - \mathrm{g}_{lk}\, \mathrm{g}^{il}\, \mathrm{V}_{,i}\, \partial^{p_k}\right]_{(\overline{q},\overline{p})} = \\ &= \left[\mathrm{g}^{kj}\, p_j\, \partial^{q_k} - \mathrm{V}_{,k}\, \partial^{p_k}\right]_{(\overline{q},\overline{p})} \overset{(3.64)}{=} \\ &= \xi_{\mathrm{H}}(\overline{q},\overline{p}) \end{aligned} \tag{3.66}$$

e isto conclui a demonstração. ■

3.3 Estruturas de Poisson no Espaço de Fase de Sistemas Mecânicos com Vínculo

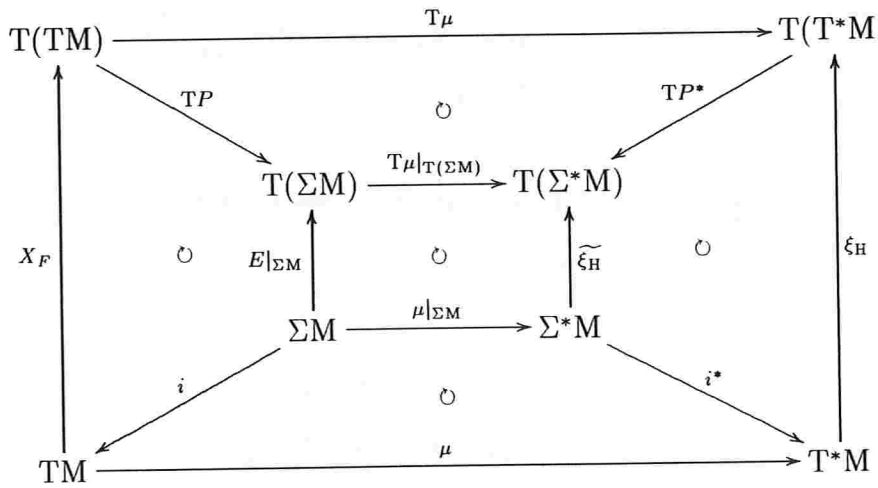
Coloquemos um vínculo no sistema mecânico do último exemplo da seção anterior (3.2.10). Ou seja, consideremos agora o sistema mecânico com vínculo $((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F)$, onde Σ é um vínculo em M e F é dada por (3.10):

$$\begin{aligned} F : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathrm{T}^{*}\mathrm{M} \\ (q,v) &\longmapsto -d\mathrm{V}(q) \in \mathrm{T}^{*}_{q}\mathrm{M} \end{aligned}$$

onde $V \in \mathcal{F}(M)$.

Foi provado que o sistema mecânico sem vínculo correspondente é hamiltoniano, i.e., suas trajetórias coincidem com as trajetórias do sistema hamiltoniano (T^*M, ω, H), onde ω é a forma simplética canônica do T^*M e $H := T \circ \mu^{-1} + V \circ \Pi_M^* : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sejam $i : \Sigma M \longrightarrow TM$ e $i^* : \Sigma^* M \longrightarrow T^*M$ inclusões, E o campo GMA de $((M,g), \Sigma, F)$ e X_F o campo GMA do sistema mecânico sem vínculo correspondente, e $\widetilde{\xi_H} := TP^* \circ \xi_H \circ i^*$. Então segue do teorema (3.2.9) e do exemplo (3.2.10) que o seguinte diagrama comuta:



(3.67)

Isto significa que as curvas integrais de E que se iniciam em ΣM são levadas por μ nas curvas integrais de $\widetilde{\xi_H}$ que se iniciam em $\Sigma^* M$. Como $\Pi_M^* \circ \mu = \Pi_M$, segue de (3.67) que as projeções em M das curvas integrais de E que se iniciam em ΣM coincidem com as projeções em M das curvas integrais de $\widetilde{\xi_H}$ que se iniciam em $\Sigma^* M$. Logo, pelo teorema (3.2.5), as curvas integrais da lei de Newton generalizada (3.20) são as curvas integrais de base do campo $\widetilde{\xi_H}$.

Uma pergunta natural a se fazer é se existe, e sob que condições, uma estrutura de Poisson em $\Sigma^* M$ tal que $\widetilde{\xi_H}$ seja hamiltoniano.

Este problema foi estudado em [CO]. Uma primeira condição seria impor que todo campo hamiltoniano de T^*M seja projetado num campo hamiltoniano de $\Sigma^* M$, ou seja:

$$(\forall f \in \mathcal{F}(T^*M))\; TP^* \circ \xi_f \circ i^* = \xi_{f \circ i^*} \tag{3.68}$$

No entanto, o problema da existência de uma estrutura de Poisson em $\Sigma^* M$ satisfazendo esta propriedade não tem solução, se $\dim M > \dim \Sigma$. Porém, sob condições mais fracas, foi obtido o resultado enunciado no primeiro teorema desta seção, a seguir. Foram consideradas as seguintes condições:

Condição (I):

$P^* : T^*M \longrightarrow \Sigma^* M$ é aplicação de Poisson, ou seja

$$(\forall f \in \mathcal{F}(\Sigma^* M))\; TP^* \circ \xi_{f \circ P^*} = \xi_f \circ P^* \tag{3.69}$$

Condição (II):

A condição (3.68) vale para funções $f \in \mathcal{F}(T^*M)$ que são da forma

$$\begin{aligned} f : T^*M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p_q &\longmapsto \tfrac{1}{2}\langle p_q, p_q\rangle + V(q) \end{aligned} \tag{3.70}$$

onde $V \in \mathcal{F}(M)$.

Note que, se existir um tensor de Poisson em Σ^*M satisfazendo uma destas duas condições, então $\widetilde{\xi_H}$ será hamiltoniano, como se desejava.

De acordo com [CO], a existência de um tensor de Poisson π em Σ^*M satisfazendo a condição (I) é equivalente à existência de um tensor de Poisson π em Σ^*M satisfazendo a condição (II).

3.3.1 Teorema ([CO])
Seja $\pi \in \phi^2(\Sigma^*M)$ tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} \wedge^2 T(T^*M) & \xrightarrow{\wedge^2 TP^*} & \wedge^2 T(\Sigma^*M) \\ {\scriptstyle \pi^c}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \pi} \\ T^*M & \xrightarrow{P^*} & \Sigma^*M \end{array} \tag{3.71}$$

onde π^c é o tensor de Poisson canônico do T^*M (1.58).

***Então** são equivalentes:*

(i) Σ é involutiva.

(ii) π é tensor de Poisson e satisfaz a condição (I).

PROVA:

É claro que $\pi \in \phi^2(\Sigma^*M)$ tensor de Poisson tal que o diagrama (3.71) comute satisfaz a condição (I), ou seja, P^* é aplicação de Poisson, pela definição (1.3.16).

É suficiente verificar, portanto, que π é tensor de Poisson *see* Σ é involutiva. É suficiente, ainda, verificar isto localmente, num sistema de coordenadas.

(1) Tome cartas

$$\begin{aligned} &(\mathcal{U}, \varphi = (q^1, \ldots, q^m)) \in \mathfrak{A}(M) \\ &(T\mathcal{U}, T\varphi = (q^1, \ldots, q^m, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^m)) \in \mathfrak{A}(TM) \\ &(T^*\mathcal{U}, T^*\varphi = (q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)) \in \mathfrak{A}(T^*M) \end{aligned} \tag{3.72}$$

Considere, ainda, $(\mathcal{U}, (v_1, \ldots, v_m))$ referencial móvel ortonormal adaptado a Σ M, i.e., tal que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ gere $\Sigma M|_{\mathcal{U}}$. Seja $(\mathcal{U}, (v^1, \ldots, v^m))$ correferencial dual do referencial acima mencionado.

Temos, $\forall i, j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\mu(v_i) \cdot v_j = \langle v_i, v_j \rangle = \delta^i_j = v^i(v_j) \tag{3.73}$$

$\therefore \mu(v_i) = v^i$ e $\{v^1, \ldots, v^n\}$ gera $\Sigma^* \mathrm{M}|_{\mathcal{U}}$.

Também vou usar as cartas

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{T}\mathcal{U}, \psi = (Q^1, \ldots, Q^m, v^1, \ldots, v^m)\right) \in \mathfrak{A}(\mathrm{TM}) \\ &\left(\mathrm{T}^*\mathcal{U}, \psi^* = (Q_1, \ldots, Q_m, v_1, \ldots, v_m)\right) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T}^*\mathrm{M}) \end{aligned} \tag{3.74}$$

onde, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, $v^i : \mathrm{T}\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v_i : \mathrm{T}^*\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ induzidas por $v^i \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{U})$ e $v_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, respectivamente, e $Q^i := q^i$, $Q_i := q_i$.

Considere também, para $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $\alpha^i_j, \beta^i_j \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tais que

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \alpha^i_j \, v^j \\ p_i &= \beta^j_i \, v_j \end{aligned} \tag{3.75}$$

Então, como $\{v^j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ e $\{v_j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ são referenciais móveis ortonormais, temos:

$$\begin{aligned} \alpha^i_j &= \langle \dot{q}^i, v^j \rangle \\ \beta^j_i &= \langle p_i, v_j \rangle \\ \text{e} \quad \delta^j_i &= \dot{q}^j(p_i) = \alpha^j_k \, v^k(\beta^l_i \, v_l) = \alpha^j_k \, \beta^l_i \, \delta^k_l = \alpha^j_k \, \beta^k_i \end{aligned} \tag{3.76}$$

(2) Vou calcular, a seguir, as componentes de $\pi = \wedge^2 \mathrm{T}P^* \circ \pi^c \circ i^*$ e de $[\pi, \pi]^{S-N}$ no referencial móvel $\left(\mathrm{T}(\Sigma^*\mathcal{U}), (\partial^{Q_1}, \ldots, \partial^{Q_m}, \partial^{v_1}, \ldots, \partial^{v_n})\right)$.

(a) Temos, em $\mathrm{T}^*\mathcal{U}$:

$$\pi^c|_{\mathrm{T}^*\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{m} \partial^{q_i} \wedge \partial^{p_i} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned} \partial^{q_i} &= \partial^{q_i} Q_k \, \partial^{Q_k} + \partial^{q_i} v_k \, \partial^{v_k} \\ \partial^{p_i} &= \partial^{p_i} Q_k \, \partial^{Q_k} + \partial^{p_i} v_k \, \partial^{v_k} \end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned} \partial^{q_i} Q_k &= \delta^i_k \\ \partial^{p_i} Q_k &= 0 \\ \partial^{q_i} v_k &= \partial^{q_i}(\alpha^j_k \, p_j) = \alpha^j_{k,i} \, p_j \\ \partial^{p_i} v_k &= \partial^{p_i}(\alpha^j_k \, p_j) = \alpha^i_k \end{aligned} \tag{3.79}$$

Substituindo (3.79) em (3.78), obtemos:

$$\begin{aligned} \partial^{q_i} &= \partial^{Q_i} + \sum_{j,k=1}^{m} \alpha_{k,i}^{j}\, p_j\, \partial^{v_k} \\ \partial^{p_i} &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^i\, \partial^{v_k} \end{aligned} \tag{3.80}$$

Então, de (3.77), segue:

$$\begin{aligned} \pi^c|_{\mathrm{T}^*\mathcal{U}} &= \sum_{i=1}^{m} \partial^{q_i} \wedge \partial^{p_i} \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\partial^{Q_i} + \sum_{j,k=1}^{m} \alpha_{k,i}^{j}\, p_j\, \partial^{v_k}) \wedge (\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^i\, \partial^{v_k}) \\ &= \sum_{i,k=1}^{m} \alpha_k^i\, \partial^{Q_i} \wedge \partial^{v_k} + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant m} \sum_{i,l=1}^{m} (\alpha_k^i\, \alpha_{j,i}^{l}\, p_l - \alpha_j^i\, \alpha_{k,i}^{l}\, p_l) \partial^{v_i} \wedge \partial^{v_k} \end{aligned} \tag{3.81}$$

(b) Temos, na carta $(\mathrm{T}^*\mathcal{U}, \psi^*)$:

$$P^* : (Q_1, \ldots, Q_m, v_1, \ldots, v_m) \longmapsto (Q_1, \ldots, Q_m, v_1, \ldots, v_n) \tag{3.82}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}P^* \cdot \partial^{Q_i} &= \partial^{Q_i} \\ \mathrm{T}P^* \cdot \partial^{v_i} &= \begin{cases} \partial^{v_i} & 1 \leqslant i \leqslant n \\ 0 & n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases} \end{aligned} \tag{3.83}$$

Logo, em $\Sigma^*\mathcal{U}$, temos:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\wedge} \mathrm{T}P^* \cdot \pi^c &= \sum_{i,k=1}^{m} \alpha_k^i\, \mathrm{T}P^* \cdot \partial^{Q_i} \wedge \mathrm{T}P^* \cdot \partial^{v_k} + \\ &\quad + \sum_{1, \leqslant j < k \leqslant m} \sum_{i,l=1}^{m} (\alpha_k^i\, \alpha_{j,i}^{l}\, p_l - \alpha_j^i\, \alpha_{k,i}^{l}\, p_l) \mathrm{T}P^* \cdot \partial^{v_i} \wedge \mathrm{T}P^* \cdot \partial^{v_k} \overset{(3.83)}{=} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i\, \partial^{Q_i} \wedge \partial^{v_k} + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \sum_{i,l=1}^{m} (\alpha_k^i\, \alpha_{j,i}^{l}\, p_l - \alpha_j^i\, \alpha_{k,i}^{l}\, p_l) \partial^{v_i} \wedge \partial^{v_k} \end{aligned} \tag{3.84}$$

(c)

$$\begin{aligned} [v_i, v_j] &\overset{(3.75)}{=} [\alpha_i^k\, \partial_{q^k}, \alpha_j^l\, \partial_{q^l}] = \\ &= (\alpha_i^k\, \alpha_{j,k}^{l} - \alpha_j^k\, \alpha_{i,k}^{l}) \partial_{q^l} \end{aligned} \tag{3.85}$$

Identificando $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ com $\{f : \mathrm{T}^*\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathrm{C}^\infty$ e linear nas fibras$\}$, obtemos $\partial_{q^l} = p_l$, donde:

$$[v_i, v_j] \overset{(3.85)}{=} (\alpha_i^k \, \alpha_{j,k}^l - \alpha_j^k \, \alpha_{i,k}^l) p_l \tag{3.86}$$

(d) Para simplificar a notação, vou escrever:

$$\begin{aligned} \pi|_{\Sigma^*\mathcal{U}} = & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} \, \partial^{Q_i} \wedge \partial^{v_j} + \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} L_{ij} \, \partial^{Q_i} \wedge \partial^{Q_j} + \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} K_{ij} \, \partial^{v_i} \wedge \partial^{v_j} \end{aligned} \tag{3.87}$$

e segue de (3.84) e (3.86) que:

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \alpha_j^i|_{\Sigma^*\mathcal{U}} \\ L_{ij} &= 0 \\ K_{ij} &= -[v_i, v_j]|_{\Sigma^*\mathcal{U}} = \\ &= -\sum_{k=1}^{m} (f_{ij}^k \, v_k)|_{\Sigma^*\mathcal{U}} \in \mathcal{F}(\Sigma^*\mathcal{U}) \end{aligned} \tag{3.88}$$

onde $f_{ij}^k \in \mathcal{F}(\mathrm{T}^*\mathcal{U})$ são as constantes de estrutura de $[\cdot\,,\cdot]$ em relação ao referencial móvel $\big(\mathcal{U}, (v_1, \ldots, v_m)\big)$.

De (3.88), temos:

$$\begin{aligned} \partial^{Q_R} W_{ij} &= \alpha_{j,R}^i|_{\Sigma^*\mathcal{U}} \\ \partial^{v_R} W_{ij} &= 0 \\ \partial^{Q_R} L_{ij} &= \partial^{v_R} L_{ij} = 0 \\ \partial^{Q_R} K_{ij} &= -\sum_{k=1}^{m} (f_{ij,R}^k \, v_k)|_{\Sigma^*\mathcal{U}} \\ \partial^{v_R} K_{ij} &= -(f_{ij}^R)|_{\Sigma^*\mathcal{U}} \end{aligned} \tag{3.89}$$

(e) Por (1.47), temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\pi,\pi]^{S-N}_{ABC} &= \oint_{ABC} \pi_{RC}\,\partial^R\pi_{AB} = \\ &= \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant m} A_{ijk}\,\partial^{Q_i}\wedge\partial^{Q_j}\wedge\partial^{Q_k} + \\ &+ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\sum_{k=1}^{n} B_{ijk}\,\partial^{Q_i}\wedge\partial^{Q_j}\wedge\partial^{v_k} + \\ &+ \sum_{i=1}^{m}+\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} C_{ijk}\,\partial^{Q_i}\wedge\partial^{v_j}\wedge\partial^{v_k} + \\ &+ \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n} D_{ijk}\,\partial^{v_i}\wedge\partial^{v_j}\wedge\partial^{v_k}\end{aligned} \tag{3.90}$$

onde, após fazer algumas contas:

$$\begin{aligned}A_{ijk} &= B_{ijk} = 0\\ C_{ijk} &= \sum_{R=1}^{m}(W_{Rk}\,\partial^{Q_R}W_{ij} - W_{iR}\,\partial^{Q_R}W_{ik}) - \sum_{R=1}^{n} W_{iR}\,\partial^{v_R}K_{jk} \overset{(3.89)}{=}\\ &= \sum_{R=1}^{m}(\alpha^R_k\,\alpha^i_{j,R} - \alpha^R_j\,\alpha^i_{k,R}) + \sum_{R=1}^{n}\alpha^i_R\,f^R_{jk} =\\ &= \sum_{R=1}^{m} f^R_{kj}\,\alpha^i_R + \sum_{R=1}^{n}\alpha^i_R\,f^R_{jk} \overset{f^R_{kj}=-f^R_{jk}}{=}\\ &= -\sum_{R=n+1}^{m}\alpha^i_R\,f^R_{jk}\\ D_{ijk} &= \oint_{ijk}\sum_{R=1}^{m} W_{Rk}\,\partial^{Q_R}K_{ij} + \sum_{R=1}^{n} K_{Rk}\,\partial^{v_R}K_{ij} \overset{(3.89)}{=}\\ &= \oint_{ijk} -\sum_{R=1}^{m}\alpha^R_k\,f^k_{ij,R}\,v_k + \sum_{R=1}^{n} f^R_{ij}[v_R,v_k]\end{aligned} \tag{3.91}$$

(3) Como

$$[[v_i,v_j],v_k] = -\sum_{R=1}^{m}\alpha^R_k\,f^l_{ij,R}\,v_l + \sum_{R=1}^{m} f^R_{ij}\,[v_R,v_k] \tag{3.92}$$

temos:

(a)

$$\begin{aligned}\pi \text{ tensor de Poisson } &\Rightarrow [\pi,\pi]^{S-N} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_{ijk} \overset{(3.91)}{=} -\sum_{R=n+1}^{m} \alpha_R^i f_{jk}^R = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_{kj}^R = 0 \quad \forall k,j \in \{1,\ldots,m\},\ \forall R \in \{n+1,\ldots,m\}\end{aligned} \tag{3.93}$$

ou seja, Σ é involutiva.

(b) Por outro lado,

$$\Sigma \text{ involutiva } \Rightarrow f_{kj}^R = 0 \quad \forall k,j \in \{1,\ldots,m\},\ \forall R \in \{n+1,\ldots,m\} \tag{3.94}$$

logo:

$$C_{ijk} = \sum_{R=n+1}^{m} \alpha_R^i f_{kj}^R = 0 \tag{3.95}$$

e

$$\begin{aligned}D_{ijk} &= \oint_{ijk} -\sum_{R=1}^{m} \alpha_k^R f_{ij,R}^k v_k + \sum_{R=1}^{n} f_{ij}^R [v_R, v_k] \overset{(3.94)}{=} \\ &= \oint_{ijk} -\sum_{R=1}^{m} \alpha_k^R f_{ij,R}^k v_k + \sum_{R=1}^{m} f_{ij}^R [v_R, v_k] \overset{(3.92)}{=} \\ &= \oint_{ijk} [[v_i, v_j], v_k] = 0\end{aligned} \tag{3.96}$$

logo $[\pi,\pi]^{S-N} = 0 \Leftrightarrow \pi$ é tensor de Poisson.

Então π é tensor de Poisson *see* Σ é involutiva, como havia sido afirmado. ■

Suponhamos agora que, no teorema anterior, Σ seja involutiva, portanto existe um tensor de Poisson em $\Sigma^*\mathrm{M}$ tal que P^* seja uma aplicação de Poisson. O próximo teorema nos diz que existe uma relação simples entre este tensor de Poisson e a forma simplética canônica do fibrado cotangente das folhas integrais da distribuição Σ.

3.3.2 Teorema

Nas mesmas hipóteses do teorema (3.3.1), *suponha que* Σ *seja involutiva, portanto* π *é um tensor de Poisson em* $\Sigma^*\mathrm{M}$ *e* P^* *é uma aplicação de Poisson. Sejam* S *uma folha integral de* Σ, $\Sigma^*S := \Sigma^*\mathrm{M}|_S = \mu(\Sigma\mathrm{M}|_S \equiv \mathrm{T}S)$ *e* π_S^c *o tensor de Poisson canônico em* T^*S.

Então:

(i) Σ^*S *é uma folha simplética de* $\Sigma^*\mathrm{M}$;

(ii) Existe um isomorfismo de Poisson canônico entre $\Sigma^* S$ *e* $\mathrm{T}^* S$.

PROVA:

Parte (i)

Dado $q \in S$, vou considerar as seguintes cartas:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{U}, \varphi = (q^1, \ldots, q^m)) \in \mathfrak{A}_q(\mathrm{M}) \text{ centrada em } q \text{ e adaptada a } S \\
&(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\varphi} = (\widetilde{q}^1, \ldots, \widetilde{q}^n)) \in \mathfrak{A}_q(S) \\
&(\mathrm{T}\mathcal{U}, \mathrm{T}\varphi = (q^1, \ldots, q^m, \dot{q}^1 = dq^1, \ldots, \dot{q}^m = dq^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{TM}) \\
&(\mathrm{T}^*\mathcal{U}, \mathrm{T}^*\varphi = (q_1, \ldots, q_m, p_1 = \partial_{q^1}, \ldots, p_m = \partial_{q^m})) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T}^*\mathrm{M}) \\
&(\mathrm{T}\mathcal{U}, \psi = (Q^1, \ldots, Q^m, v^1, \ldots, v^m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{TM}) \text{ como em (3.74)} \\
&(\mathrm{T}^*\mathcal{U}, \psi^* = (Q_1, \ldots, Q_m, v_1, \ldots, v_m)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T}^*\mathrm{M}) \text{ como em (3.74)} \\
&(\mathrm{T}\widetilde{\mathcal{U}}, \mathrm{T}\widetilde{\varphi} = (\widetilde{q}^1, \ldots, \widetilde{q}^n, d\widetilde{q}^1, \ldots, d\widetilde{q}^n)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T}S \equiv \Sigma\mathrm{M}|_S) \\
&(\mathrm{T}^*\widetilde{\mathcal{U}}, \mathrm{T}^*\widetilde{\varphi} = (\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n, \widetilde{p}_1 = \partial_{\widetilde{q}^1}, \ldots, \widetilde{p}_n = \partial_{\widetilde{q}^n})) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T}^*S) \\
&(\mathrm{T}\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\psi} = (Q^1, \ldots, Q^n, v^1, \ldots, v^n)) \in \mathfrak{A}(\mathrm{T}S \equiv \Sigma\mathrm{M}|_S) \\
&(\mathrm{T}^*\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\psi}^* = (Q_1, \ldots, Q_n, v_1, \ldots, v_n)) \in \mathfrak{A}(\Sigma^* S)
\end{aligned} \tag{3.97}$$

onde $\widetilde{\mathcal{U}} := \{x \in \mathcal{U} \text{ tal que } q^{n+1}(x) = \cdots = q^m(x) = 0\}$ e $\widetilde{q}^j := q^j \circ i$ para $1 \leqslant j \leqslant n$, sendo $i : S \longrightarrow \mathrm{M}$ a inclusão.

(1) Temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_q\mathrm{M} &= [\partial_{q^1}(q), \ldots, \partial_{q^m}(q)] \\
\Sigma_q = \mathrm{T}_q S &= [\partial_{q^1}(q), \ldots, \partial_{q^n}(q)] = \\
&= [v_1(q), \ldots, v_n(q)] \\
\mathrm{T}_q^*\mathrm{M} &= [dq^1(q), \ldots, dq^m(q)] = \\
&= [v^1(q), \ldots, v^m(q)] \\
\Sigma_q^* = \Sigma_q^* S &= [v^1(q), \ldots, v^n(q)]
\end{aligned} \tag{3.98}$$

(2) Temos, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$v_i(q) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_i^j(q)\, \partial_{q^j}(q) \tag{3.99}$$

Como, por (3.98), $[\partial_{q^1}(q), \ldots, \partial_{q^n}(q)] = [v_1(q), \ldots, v_n(q)]$, segue, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{O} &= v_i(q) \wedge \partial_{q^1}(q) \wedge \cdots \wedge \partial_{q^n}(q) = \\
&= \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_i^j(q) \partial_{q^j}(q) \wedge \partial_{q^1}(q) \wedge \cdots \wedge \partial_{q^n}(q)
\end{aligned} \tag{3.100}$$

donde

$$\alpha_i^j(q) = 0,\ \forall j \in \{n+1,\ldots,m\},\ \forall i \in \{1,\ldots,n\} \tag{3.101}$$

e, por um argumento análogo,

$$\beta_i^j(q) = 0,\ \forall j \in \{n+1,\ldots,m\},\ \forall i \in \{1,\ldots,n\} \tag{3.102}$$

(3) $\forall (q,p) \in \Sigma^* S$, temos:

$$\mathrm{T}_{(q,p)}(\Sigma^* S) = [\partial^{Q_1}(q,p),\ldots,\partial^{Q_n}(q,p),\partial^{v_1}(q,p),\ldots,\partial^{v_n}(q,p)] \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
\pi(q,p) &\overset{(3.87),(3.88)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}(q,p)\,\partial^{Q_i}(q,p)\wedge\partial^{v_j}(q,p) + \\
&\quad + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} K_{ij}(q,p)\,\partial^{v_i}(q,p)\wedge\partial^{v_j}(q,p) = \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i(q)\,\partial^{Q_i}(q,p)\wedge\partial^{v_j}(q,p) + \\
&\quad + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} K_{ij}(q,p)\,\partial^{v_i}(q,p)\wedge\partial^{v_j}(q,p) \overset{(3.101)}{=} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j^i(q)\,\partial^{Q_i}(q,p)\wedge\partial^{v_j}(q,p) + \\
&\quad + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} K_{ij}(q,p)\,\partial^{v_i}(q,p)\wedge\partial^{v_j}(q,p) \qquad \in \overset{2}{\wedge}\mathrm{T}_{(q,p)}(\Sigma^* S)
\end{aligned} \tag{3.104}$$

(4) Segue da proposição (1.5.3) e de (3.104) que está bem definido um tensor de Poisson π_S em $\Sigma^* S$ tal que $\Sigma^* S$ seja subvariedade de Poisson de $\Sigma^*\mathrm{M}$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc}
\wedge^2\mathrm{T}(\Sigma^* S) & \xrightarrow{\wedge^2\,\mathrm{T}i} & \wedge^2\mathrm{T}(\Sigma^*\mathrm{M}) \\
\uparrow{\scriptstyle \pi_S} & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \pi} \\
\Sigma^* S & \xrightarrow{\ i\ } & \Sigma^*\mathrm{M}
\end{array} \tag{3.105}$$

onde $i : \Sigma^* S \longrightarrow \Sigma^*\mathrm{M}$ é a inclusão.

Temos, portanto, $(\forall (q,p) \in \Sigma^* S)\ \pi_S(q,p) = \pi(q,p)$.

(5) Na base $\{\partial^{Q_1}(q,p),\ldots,\partial^{Q_n}(q,p),\partial^{v_1}(q,p),\ldots,\partial^{v_n}(q,p)\}$ de $\mathrm{T}_{(q,p)}(\Sigma^* S)$, temos:

$$[\pi_S(q,p)] = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & (\alpha^i_j(q)) \\ -(\alpha^i_j(q)) & (K_{ij}(q,p)) \end{bmatrix} \tag{3.106}$$

$\therefore \det[\pi_S(q,p)] = \left(\det[\alpha^i_j(q)]\right)^2 \neq 0$, pois segue do item (2) que:

$$v_1(q) \wedge \cdots \wedge v_n(q) = \det[\alpha^i_j(q)]\, \partial_{q^1}(q) \wedge \cdots \wedge \partial_{q^n}(p) \neq 0 \tag{3.107}$$

(6) Segue do item anterior que $\pi_S(q,p)$ é não-degenerado, e, como $(q,p) \in \Sigma^* S$ foi tomado arbitrariamente, segue que $(\Sigma^* S, i)$ é folha simplética de $\Sigma^*\mathrm{M}$, e isto conclui a prova da parte (i).

Parte (ii)

(1) Dado $q \in S$, como $\mathrm{T}_q S \equiv \Sigma_q$, existe um isomorfismo canônico

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_q : \Sigma^*_q S &\longrightarrow \mathrm{T}^*_q S \\ \theta_q &\longmapsto \theta_q|_{\Sigma_q} = \langle \mu^{-1}(\theta_q), \cdot \rangle|_{\Sigma_q} \end{aligned} \tag{3.108}$$

Com efeito, $\mathcal{J}_q$ é linear, injetiva (pois $\langle \cdot\,, \cdot \rangle|_{\Sigma_q}$ é não-degenerado) e $\dim \Sigma^*_q S = \dim \mathrm{T}^*_q S$.

Seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \Sigma^* S &\longrightarrow \mathrm{T}^* S \\ \theta_q &\longmapsto \mathcal{J}_q(\theta_q) \end{aligned} \tag{3.109}$$

então $\mathcal{J}$ é um isomorfismo entre fibrados vetoriais. Vou mostrar que também é uma aplicação de Poisson, e isto concluirá a demonstração.

Em relação às bases $\{v^1(q),\ldots,v^n(q)\}$ de $\Sigma^*_q S$ e $\{d\widetilde{q}^1(q),\ldots,d\widetilde{q}^n(q)\}$ de $\mathrm{T}^*_q S$, temos, $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(v^i(q)) &= \langle \mu^{-1}(v^i(q)), \cdot \rangle|_{\Sigma_q} = \\ &= \langle v_i(q), \cdot \rangle|_{\Sigma_q} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle v_i(q), \partial_{\widetilde{q}^j}(q) \rangle d\widetilde{q}^j(q) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle v_i(q), \partial_{q^j}(q) \rangle d\widetilde{q}^j(q) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta^i_j(q)\, d\widetilde{q}^j(q) \end{aligned} \tag{3.110}$$

então:

$$\mathcal{J}^{-1}\big(d\widetilde{q}^{j}(q)\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j(q)\, v^i(q) \tag{3.111}$$

(2) Em relação às cartas $(\mathrm{T}^*\widetilde{\mathcal{U}}, \mathrm{T}^*\widetilde{\varphi})$ e $(\mathrm{T}^*\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\psi}^*)$, temos:

(a) Por (3.111):

$$\begin{aligned} J := \mathcal{J}^{-1} : \mathrm{T}^*S &\longrightarrow \Sigma^*S \\ (\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n, \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n) &\longmapsto \big(\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n, \textstyle\sum_{j=1}^n \alpha_i^j(\widetilde{q})\widetilde{p}_j, \ldots, \sum_{j=1}^n \alpha_n^j(\widetilde{q})\widetilde{p}_j\big) \end{aligned} \tag{3.112}$$

(b) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}J \cdot \partial^{\widetilde{q}_i} &= \sum_{k=1}^{n} \partial^{\widetilde{q}_i} Q_k\, \partial^{Q_k} + \sum_{k=1}^{n} \partial^{\widetilde{q}_i} v_k\, \partial^{v_k} \\ \mathrm{T}J \cdot \partial^{\widetilde{p}_i} &= \sum_{k=1}^{n} \partial^{\widetilde{p}_i} Q_k\, \partial^{Q_k} + \sum_{k=1}^{n} \partial^{\widetilde{p}_i} v_k\, \partial^{v_k} \end{aligned} \tag{3.113}$$

e, de (3.112), segue, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} \partial^{\widetilde{q}_i} Q_k &= \delta_i^k \\ \partial^{\widetilde{q}_i} v_k &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,i}^j\, \widetilde{p}_j \\ \partial^{\widetilde{p}_i} Q_k &= 0 \\ \partial^{\widetilde{p}_i} v_k &= \alpha_k^i \end{aligned} \tag{3.114}$$

Logo, de (3.113) e (3.114), segue, em $(q, p) \in \mathrm{T}^*S$:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}J \cdot \partial^{\widetilde{q}_i}(q,p) &= \partial^{Q_i}\big(J(q,p)\big) + \sum_{k,j=1}^{n} \alpha_{k,i}^j(q)\, \widetilde{p}_j(q,p)\, \partial^{v_k}\big(J(q,p)\big) \\ \mathrm{T}J \cdot \partial^{\widetilde{p}_i} &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i(q)\, \partial^{v_k}\big(J(q,p)\big) \end{aligned} \tag{3.115}$$

(c) Como, $\big(\forall k \in \{1,\dots,n\}\big)\, p_k \circ J = \widetilde{p}_k$, de (3.115) segue:

$$\begin{aligned}\overset{2}{\wedge}\mathrm{T}J\cdot\pi_S^c(q,p) &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{T}J\cdot\partial^{\widetilde{q}_i}(q,p)\wedge\mathrm{T}J\cdot\partial^{\widetilde{p}_i}(q,p) = \\ &= \Bigg[\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_k^i\,\partial^{Q_i}\wedge\partial^{v_k} + \\ &\quad + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\sum_{i,l=1}^{n}(\alpha_k^i\,\alpha_{j,i}^l\,p_l - \alpha_j^i\,\alpha_{k,i}^l\,p_l)\partial^{v_i}\wedge\partial^{v_k}\Bigg]\big(J(q,p)\big)\end{aligned} \tag{3.116}$$

(d) Por outro lado, de (3.101) e de (3.88), segue que, em $\Sigma^*\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}K_{jk} &= \sum_{i,l=1}^{n}\alpha_k^i\,\alpha_{j,i}^l\,p_l - \alpha_i^j\,\alpha_{k,i}^l\,p_l \\ W_{jk} &= \alpha_k^j\end{aligned} \tag{3.117}$$

Portanto, de (3.116) e (3.117), temos:

$$\begin{aligned}\overset{2}{\wedge}\mathrm{T}J\cdot\pi_S^c(q,p) &= \sum_{i,j=1}^{n}W_{ij}\big(J(q,p)\big)\,\partial^{Q_i}\big(J(q,p)\big)\wedge\partial^{v_j}\big(J(q,p)\big) + \\ &\quad + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}K_{ij}\big(J(q,p)\big)\,\partial^{v_i}\big(J(q,p)\big)\wedge\partial^{v_j}\big(J(q,p)\big) \\ &= \pi_S\big(J(q,p)\big)\end{aligned} \tag{3.118}$$

Como $(q,p)\in\mathrm{T}^*S$ foi tomado arbitrariamente, segue de (3.118) que $J:(\mathrm{T}^*S,\pi_S^c)\longrightarrow(\Sigma^*S,\pi_S)$ é uma aplicação de Poisson, e isto conclui a demonstração. ■

3.4 Métrica de Jacobi

Seja $\big((\mathrm{M},\mathrm{g}),F\big)$ um sistema mecânico, com F definida por (3.10):

$$\begin{aligned}F:\mathrm{TM} &\longrightarrow \mathrm{T}^*\mathrm{M} \\ (q,v) &\longmapsto -d\mathrm{V}(q)\in\mathrm{T}_q^*\mathrm{M}\end{aligned}$$

onde $\mathrm{V}\in\mathcal{F}(\mathrm{M})$.

Como já vimos, este sistema é hamiltoniano, i.e., suas trajetórias coincidem com as trajetórias do sistema hamiltoniano $(\mathrm{T}^*\mathrm{M},\omega,\mathrm{H})$, onde ω é a forma simplética canônica do $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$ e $\mathrm{H}:=\mathrm{T}\circ\mu^{-1}+\mathrm{V}\circ\Pi_{\mathrm{M}}^*:\mathrm{T}^*\mathrm{M}\longrightarrow\mathbb{R}$.

Nesta seção, mostrarei que as trajetórias com energia e deste sistema (ou seja, ao longo das quais H assume valor constante e) coincidem com as geodésicas da conexão riemanniana induzida por uma certa métrica g_e em M, chamada *métrica de Jacobi*. Também generalizarei este resultado para um sistema mecânico com vínculo $\big((\mathrm{M},\mathrm{g}),\Sigma,F\big)$.

3.4.1 Definição: Sejam (M, g) uma variedade riemanniana, $V \in \mathcal{F}(M)$ e $e > 0$ tal que $(\forall x \in M)\, V(x) < e$. Vou definir a **métrica de Jacobi**:

$$g_e := (e - V)\, g \tag{3.119}$$

3.4.2 Teorema
Seja $((M, g), F)$ *um sistema mecânico, com* F *definida por* (3.10)*:*

$$\begin{aligned} F : TM &\longrightarrow T^*M \\ (q, v) &\longmapsto -dV(q) \in T_q^*M \end{aligned}$$

onde $V \in \mathcal{F}(M)$. *Seja* $e > 0$, *e suponha que* $(\forall x \in M)\, V(x) < e$ *(se isto não acontecer, basta restringir-se à subvariedade aberta* $N := V^{-1}((-\infty, e))$ *de* M*). Então as curvas integrais de base de* ξ_H *com energia* e *são, a menos de reparametrizações, geodésicas da conexão riemanniana induzida por* g_e.

3.4.3 Corolário: *Decorre deste teorema e do visto no exemplo* (3.2.10) *que as soluções de* (3.9) *com energia* e *são, a menos de reparametrizações, geodésicas da conexão riemanniana induzida por* g_e.

Para demonstrar o teorema, usarei o seguinte lema:

3.4.4 Lema: *Seja* (M, ω) *variedade simplética,* $H_1, H_2 \in \mathcal{F}(M)$, $\Sigma := H_1^{-1}(e_1) = H_2^{-1}(e_2)$ *hiperfície de nível regular (tanto para* H_1 *como para* H_2*). Então as curvas integrais de* ξ_{H_1} *e* ξ_{H_2} *que se iniciam em* Σ *são as mesmas, a menos de reparametrizações.*

PROVA:
Como as curvas integrais de ξ_{H_1} e ξ_{H_2} que se iniciam em Σ não saem de Σ, é suficiente verificar que ξ_{H_1} e ξ_{H_2} são tangentes, ao longo de Σ.

(1) *Afirmação:* Dado $x \in \Sigma$, então $E_x := \{v \in T_x\Sigma : i_v\omega_x|_{T_x\Sigma} \equiv \mathbb{0}\}$ é um subespaço vetorial unidimensional de $T_x\Sigma$.

Com efeito:

(i) Dado $v \in T_xM$, vou definir $v^\perp := \operatorname{Ker} i_v\omega_x = \{w \in T_xM : i_v\omega_x \cdot w = 0\}$.
Sejam $v, w \in T_xM \setminus \{\mathbb{0}\}$ tais que $v^\perp = w^\perp = A < T_xM$ com $\dim A = \dim M - 1$.
Seja $B < T_xM$ complementar a A.
Como $\dim B^* = \dim B = 1$, e $\omega_x(v, \cdot)|_B \in B^*$, $\omega_x(w, \cdot)|_B \in B^*$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\omega_x(v, \cdot)|_B = \lambda\, \omega_x(w, \cdot)|_B$.
Por outro lado, como $A \oplus B = T_xM$, temos:

$$\begin{aligned} \omega_x(v, \cdot) &= \omega_x(v, \cdot)|_A + \omega_x(v, \cdot)|_B \overset{A=v^\perp}{=} \\ &= \omega_x(v, \cdot)|_B \\ \omega_x(w, \cdot) &= \omega_x(w, \cdot)|_A + \omega_x(w, \cdot)|_B \overset{A=w^\perp}{=} \\ &= \omega_x(w, \cdot)|_B \end{aligned} \tag{3.120}$$

portanto:

$$\begin{aligned} &\omega_x(v,\cdot) = \lambda\,\omega_x(w,\cdot) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\omega_x(v-\lambda\,w,\cdot) \equiv \mathbb{O} \overset{\omega_x \text{ não-degenerada}}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow &v = \lambda\,w \end{aligned} \tag{3.121}$$

(ii) Temos $\dim \mathrm{T}_x\Sigma = \dim \mathrm{T}_x\mathrm{M} - 1$. Supondo que existem v, w não-nulos em E_x, temos $v^\perp = w^\perp = \mathrm{T}_x\Sigma$. Então segue do item anterior que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda\,w$, donde $\dim E_x \leqslant 1$.

(iii) $\xi_{H_1}(x) \in E_x$.
Com efeito:

$$\begin{aligned} &(\forall\, v \in \mathrm{T}_x\Sigma)\; dH_1(v) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &(\forall\, v \in \mathrm{T}_x\Sigma)\; \omega_x\big(\xi_{H_1}(x), v\big) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\mathrm{i}_{\xi_{H_1}(x)}\omega_x|_{\mathrm{T}_x\Sigma} \equiv \mathbb{O} \end{aligned} \tag{3.122}$$

Como $\xi_{H_1}(x) \neq \mathbb{O}$ (pois $dH_1(x) \neq \mathbb{O}$ e ω_x não-degenerada), segue $E_x = [\xi_{H_1}(x)]$ e $\dim E_x = 1$, e isto prova a afirmação.

(2) Pelo mesmo argumento de (1.iii), temos $\xi_{H_2}(x) \in E_x$, logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\xi_{H_2}(x) = \lambda\,\xi_{H_1}(x)$.

(3) Como $x \in \Sigma$ foi tomado arbitrariamente, ξ_{H_1} e ξ_{H_2} são sempre tangentes em Σ, e isto conclui a demonstração. ∎

PROVA DO TEOREMA (3.4.2):
Vou denotar por $G := (\mathrm{g}^\flat \otimes_\mathrm{M} \mathrm{g}^\flat)(\mathrm{g})$ e $G_e := (\mathrm{g}_e^\flat \otimes_\mathrm{M} \mathrm{g}_e^\flat)(\mathrm{g}_e)$. Seja:

$$\begin{aligned} H_e : \mathrm{T}^*\mathrm{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q,p) &\longmapsto \tfrac{1}{2}\,G_e(p_q, p_q) \end{aligned} \tag{3.123}$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} p_q \in H^{-1}(e) \Leftrightarrow H(p_q) = e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,G(p_q,p_q) + \mathrm{V}(q) = e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,\frac{G(p_q,p_q)}{e - V(q)} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,G_e(p_q,p_q) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in H_e^{-1}(1) \end{aligned} \tag{3.124}$$

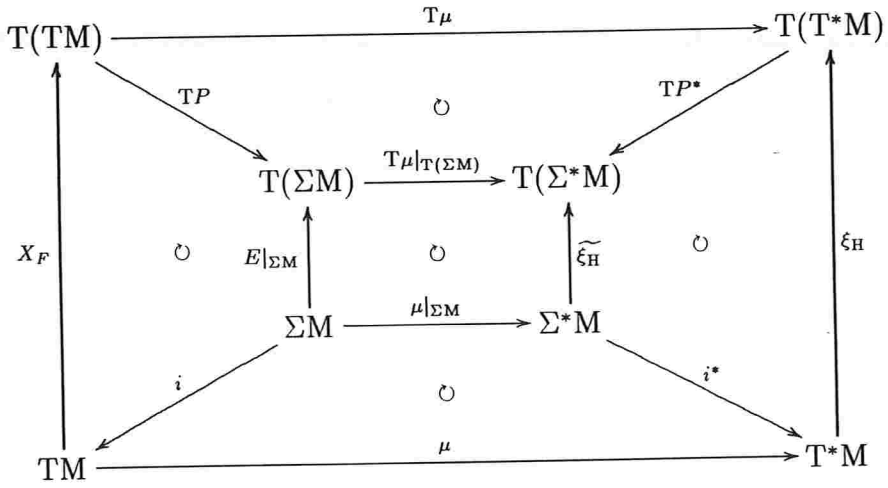
logo $H^{-1}(e) = H_e^{-1}(1)$. Além disso, é fácil verificar que $H^{-1}(e)$ e $H_e^{-1}(1)$ são hiperfícies de nível regulares, após algumas contas. Então segue do lema (3.4.4) que as curvas integrais de ξ_H e ξ_{H_e} que se iniciam em $H^{-1}(e)$ são as mesmas, a menos de reparametrizações. Mas, como vimos no exemplo (3.2.10), as curvas integrais de base de ξ_{H_e} são as geodésicas da conexão riemanniana induzida por g_e, e isto conclui a demonstração. ■

Coloquemos, agora, um vínculo Σ no sistema mecânico do teorema (3.4.2). Ou seja, vou considerar $\big((M,g),\Sigma,F\big)$ um sistema mecânico com vínculo, com F definida por (3.10):

$$\begin{aligned} F : TM &\longrightarrow T^*M \\ (q,v) &\longmapsto -dV(q) \in T_q^*M \end{aligned}$$

onde $V \in \mathcal{F}(M)$.

Como já vimos, tomando $i : \Sigma M \longrightarrow TM$ e $i^* : \Sigma^* M \longrightarrow T^*M$ inclusões, E o campo GMA de $\big((M,g),\Sigma,F\big)$ e X_F o campo GMA do sistema mecânico sem vínculo correspondente, H como anteriormente e $\widetilde{\xi_H} := TP^* \circ \xi_H \circ i^*$, segue do teorema (3.2.9) e do exemplo (3.2.10) que o seguinte diagrama (3.67) comuta:



Em decorrência deste fato, as curvas integrais de E que se iniciam em ΣM são levadas por μ nas curvas integrais de $\widetilde{\xi_H}$ que se iniciam em $\Sigma^* M$. Como $\Pi_M^* \circ \mu = \Pi_M$, segue de (3.67) que as projeções em M das curvas integrais de E que se iniciam em ΣM coincidem com as projeções em M das curvas integrais de $\widetilde{\xi_H}$ que se iniciam em $\Sigma^* M$. Logo, pelo teorema (3.2.5), as curvas integrais da lei de Newton generalizada (3.20) são as curvas integrais de base do campo $\widetilde{\xi_H}$.

3.4.5 Teorema
Nas hipóteses acima, seja $\mathcal{H} := H \circ \mu \in \mathcal{F}(TM)$. ***Então*** $\mathcal{H}$ *é constante ao longo das trajetórias de* E.

PROVA:
Temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_q &\longmapsto \tfrac{1}{2}\langle v_q, v_q\rangle + \mathrm{V}(q) \end{aligned} \tag{3.125}$$

Dada $q : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ solução de (3.20) ($\therefore$ curva integral de base de E), temos:

$$\mathcal{H}(\dot{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, \dot{q}\rangle + \mathrm{V}(q) \tag{3.126}$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{H}(\dot{q}, \dot{q}) &= \langle \nabla_{\dot{q}}\dot{q}, \dot{q}\rangle + \langle \mathrm{grad}\ \mathrm{V}(q), \dot{q}\rangle = \\ &= \langle \widetilde{F}(\dot{q}), \dot{q}\rangle + \langle \widetilde{R}(\dot{q}), \dot{q}\rangle + \langle \mathrm{grad}\ \mathrm{V}(q), \dot{q}\rangle \overset{\dot{q}\ \text{compatível com}\ \Sigma}{=} \\ &= \langle \widetilde{F}(\dot{q}), \dot{q}\rangle + \langle \mathrm{grad}\ \mathrm{V}(q), \dot{q}\rangle = \\ &= -\langle \mathrm{grad}\ \mathrm{V}(q), \dot{q}\rangle + \langle \mathrm{grad}\ \mathrm{V}(q), \dot{q}\rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.127}$$

onde $\widetilde{F} := \mu^{-1} \circ F = -\,\mathrm{grad}\ \mathrm{V}$ e $\widetilde{R} := \mu^{-1} \circ R$, como na demonstração do teorema (3.2.5).
Isto conclui a demonstração. ■

3.4.6 Teorema
Seja $((\mathrm{M}, \mathrm{g}), \Sigma, F)$ *um sistema mecânico com vínculo, com* F *definida por* (3.10)*:*

$$\begin{aligned} F : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathrm{T}^*\mathrm{M} \\ (q, v) &\longmapsto -d\mathrm{V}(q) \in \mathrm{T}_q^*\mathrm{M} \end{aligned}$$

onde $\mathrm{V} \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$. *Seja* $e > 0$, *e suponha que* $(\forall x \in \mathrm{M})\, \mathrm{V}(x) < e$ *(se isto não acontecer, basta restringir-se à subvariedade aberta* $\mathrm{N} := \mathrm{V}^{-1}((-\infty, e))$ *de* M*). Seja* g_e *a métrica de Jacobi* (3.119) *e* ∇^e *a conexão riemanniana induzida por* g_e.

Então *as projeções em* M *das curvas integrais* E *com energia* e *(i.e., ao longo das quais* $\mathcal{H}$ *assume valor constante* e*) são, a menos de reparametrizações, soluções da lei de Newton generalizada* (3.20) *(na métrica de Jacobi) com campo de forças ativo nulo:*

$$R = \mu(\nabla^e_{\dot{q}}\dot{q}) \tag{3.128}$$

PROVA:
Vou usar um índice e para denotar os objetos correspondentes a μ, P, P^*, E, X_F, etc., na métrica de Jacobi: $\mu_e, P_e, P_e^*, E_e, X_F^e$.

Pelo que foi observado nos comentários que antecedem o teorema (3.4.5), é suficiente verificar que as curvas integrais de $\widetilde{\xi_{\mathrm{H}}} := \mathrm{T}P^* \circ \xi_{\mathrm{H}} \circ i^*$ coincidem, em $H^{-1}(e) \cap \Sigma^*\mathrm{M}$, com as curvas integrais de $\widetilde{\xi_{\mathrm{H}^e}} := \mathrm{T}P_e^* \circ \xi_{\mathrm{H}^e} \circ i^*$, a menos de reparametrizações.

Como o tensor métrico g_e foi obtido de g pela multiplicação de uma funcão em $\mathcal{F}(V)$, o comprimento dos vetores será mudado de uma métrica para a outra, mas a ortogonalidade será preservada, ou seja, dados $x \in M$ e $v, w \in T_xM$, temos $\langle v, w\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, w\rangle^e = 0$. Então segue $P^* = {P_e}^*$, logo é suficiente mostrar que $TP^* \circ \xi_H$ é tangente a $T{P_e}^* \circ \xi_{H^e} = TP^* \circ \xi_{H^e}$, ao longo de $H^{-1}(e) \cap \Sigma^*M$, onde H^e é dada por

$$\begin{aligned} H^e : T^*M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q,p) &\longmapsto \tfrac{1}{2}\langle p_q, p_q\rangle^e \end{aligned} \tag{3.129}$$

Já foi provado no teorema (3.4.2), ξ_H e ξ_{H^e} são tangentes em $H^{-1}(e)$. Então, como $P^* = {P_e}^*$ é linear nas fibras, TP^* também o será, logo leva vetores tangentes em vetores tangentes, e isto mostra que $TP^* \circ \xi_H$ é tangente a $T{P_e}^* \circ \xi_{H^e} = TP^* \circ \xi_{H^e}$, ao longo de $H^{-1}(e) \cap \Sigma^*M$, como afirmado. ■

3.4.7 Teorema

Nas hipóteses do teorema anterior, sejam $\Gamma(M) := \Gamma^\infty(M, \Sigma M)$, $\Gamma^\perp(M) := \Gamma^\infty(M, \Sigma^\perp M)$ *e*

$$\begin{aligned} B : \Gamma(M) \times \Gamma(M) &\longrightarrow \Gamma^\perp(M) \\ (X,Y) &\longmapsto P^\perp \circ \nabla^e_X Y \end{aligned} \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned} \nabla^\Sigma : \Gamma(M) \times \Gamma(M) &\longrightarrow \Gamma(M) \\ (X,Y) &\longmapsto \nabla^\Sigma_X Y := P \circ \nabla^e_X Y \end{aligned} \tag{3.131}$$

Então:

(i) B é um tensor ; ∇^Σ *é* $\mathcal{F}(M)$*-linear no primeiro fator e uma derivação no segundo. Além disso,* $\forall X, Y \in \Gamma(M)$*, temos:*

$$\nabla^e_X Y = B(X,Y) + \nabla^\Sigma_X Y \tag{3.132}$$

(ii) As curvas integrais da lei de Newton generalizada (3.20) *(na métrica de Jacobi) com campo de forças ativo nulo:*

$$R = \mu(\nabla^e_{\dot q}\dot q) \tag{3.133}$$

satisfazem:

$$\nabla^\Sigma_{\dot q}\dot q = 0 \tag{3.134}$$

PROVA:

(i) Com efeito, $\forall X, Y \in \Gamma(\mathrm{M})$ e $\forall f \in \mathcal{F}(\mathrm{M})$, temos:

(a)

$$\begin{aligned} B(fX,Y) &= P^{\perp}(\nabla^{e}_{fX}Y) = \\ &= P^{\perp}(f\,\nabla^{e}_{X}Y) = \\ &= f\,P^{\perp}(\nabla^{e}_{X}Y) = \\ &= f\,B(X,Y) \end{aligned} \tag{3.135}$$

$$\begin{aligned} B(X,fY) &= P^{\perp}(\nabla^{e}_{X}fY) = \\ &= P^{\perp}(X(f)Y + f\,\nabla^{e}_{X}Y) = \\ &= X(f)\,P^{\perp}(Y) + f\,P^{\perp}(\nabla^{e}_{X}Y) \overset{P^{\perp}(Y)\equiv\mathbb{O}}{=} \\ &= f\,B(X,Y) \end{aligned} \tag{3.136}$$

(b)

$$\begin{aligned} \nabla^{\Sigma}_{fX}Y &= P(f\,\nabla^{e}_{X}Y) = \\ &= f\,P(\nabla^{e}_{X}Y) = \\ &= f\,\nabla^{\Sigma}_{X}Y \end{aligned} \tag{3.137}$$

$$\begin{aligned} \nabla^{\Sigma}_{X}fY &= P(X(f)Y + f\,\nabla^{e}_{X}Y) = \\ &= f\,P(\nabla^{e}_{X}Y) = \\ &= X(f)YP(Y) + f\,P(\nabla^{e}_{X}Y) = \\ &= X(f)Y + f\,\nabla^{\Sigma}_{X}Y \end{aligned} \tag{3.138}$$

(c)

$$\begin{aligned} \nabla^{e}_{X}Y &= P\circ\nabla^{e}_{X}Y + P^{\perp}\circ\nabla^{e}_{X}Y = \\ &= \nabla^{\Sigma}_{X}Y + B(X,Y) \end{aligned} \tag{3.139}$$

□

(ii) Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$ curva integral de (3.133). Temos:

$$\begin{aligned} &\mu^{-1}\circ R\circ\dot{\gamma} = \nabla^{e}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla^{\Sigma}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = P\circ\nabla^{e}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = P\circ\mu^{-1}\circ R\circ\dot{\gamma} = \mathbb{O} \end{aligned} \tag{3.140}$$

■

3.4.8 Corolário: *Nas hipóteses do teorema anterior, se Σ for involutiva, seja (S,i) folha integral de Σ.* **Então** $B|_{\mathfrak{X}(S)\times\mathfrak{X}(S)}$ *é a segunda forma fundamental de (S,i), $\nabla^{\Sigma}|_{\mathfrak{X}(S)\times\mathfrak{X}(S)}$ é a conexão riemanniana induzida em S e* (3.132) *é a equação de Weingarten. Além disso, as curvas integrais de* (3.133) *são geodésicas de S.*

Apêndice A

Teorema da Órbita

O teorema da órbita, que será demonstrado neste capítulo, tem um papel central na teoria do controle e pode ser usado para generalizar o teorema de Frobenius. Usei este teorema no capítulo 1 para demonstrar o teorema da folheação simplética, e para demonstrar que as órbitas da ação de um grupo de Lie sobre uma variedade a decompõem numa folheação com singularidades. Todos os resultados deste apêndice foram extraídos de [Ste].

A.1 Definição: Seja M uma variedade diferenciável e (N, i) uma subvariedade imersa de M. Direi que (N, i) é uma **folha** se:

(i) N é conexa

(ii) Dados L espaço topológico localmente conexo e $f : \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{M}$ contínua com $f(\mathrm{L}) \subset \mathrm{N}$, então $f : \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{N}$ é contínua.

A.2 Definição: Seja M^m uma variedade diferenciável e $\mathfrak{F}$ uma decomposição de M em folhas disjuntas. Direi que $\mathfrak{F}$ é uma **C^∞-folheação com singularidades** de M se $(\forall p \in \mathrm{M})$ $\exists \psi : \mathcal{U} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathrm{M}$ parametrização local em torno de p tal que:

(i) $\mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{O}}(\mathbb{R}^k), \mathcal{W} \in \tau_{\mathbb{O}}(\mathbb{R}^{m-k})$, onde k é a dimensão da folha que passa por p ;

(ii) $\psi(\mathbb{O}, \mathbb{O}) = p$;

(iii) Se $\mathrm{L} \in \mathfrak{F}$, então $\mathrm{L} \cap \psi(\mathcal{U} \times \mathcal{W}) = \psi(\mathcal{U} \times l)$, onde $l := \{w \in \mathcal{W}$ tal que $\psi(\mathbb{O}, w) \in \mathrm{L}\}$.

Notação. Vou denotar por $\mathrm{T}_p(\mathrm{M}, \mathfrak{F})$ o espaço tangente em p da folha de $\mathfrak{F}$ que passa por p.

A.3 Definição: Seja M uma variedade diferenciável. Um **difeomorfismo local** em M é um difeo $a : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$, onde $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são abertos de M. Dado $\Omega \in \tau(\mathbb{R} \times \mathrm{M})$, vou usar a seguinte notação: $\Omega^t := \{x \in \mathrm{M}$ tal que $(t, x) \in \Omega\}$ e $\Omega_x := \{t \in \mathbb{R}$ tal que $(t, x) \in \Omega\}$. Direi que uma função diferenciável $a : \Omega \longrightarrow \mathrm{M}$ é uma **flecha** se $(\forall t \in \mathbb{R}$ tal que $\Omega^t \neq \emptyset)$ tem-se:

(i) $a^t := a(t,\cdot) : \Omega^t \longrightarrow \mathrm{M}$ é um difeo local;

(ii) $(t,x) \in \Omega \Rightarrow (s,x) \in \Omega, \forall\, s \in [0,t]$ e $a(0,x) = x$.

Notação.

$$\dot{a}(t,x) := \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} a(s,x)$$

A.4 Exemplo: Sejam M variedade diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{M})$ e $\Phi^X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{M}$ o fluxo local de X. Então Φ^X é uma flecha e satisfaz

$$X^{t+s} = X^t \circ X^s$$

onde $X^t := \Phi^X(t,\cdot)$

Notação.
Seja A uma coleção de flechas numa variedade diferenciável M. Vou usar a seguinte notação:

(I) $\theta A := \{a^t : \Omega_a^t \longrightarrow \mathrm{M}$ tal que $a \in A, t \in \mathbb{R}$ e $\Omega_a^t \neq \emptyset\}$

(II) $\Psi A := \{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p$ tal que $p \in \mathbb{N}^*, \varphi_i$ ou $\varphi_i^{-1} \in \theta A$ para $1 \leqslant i \leqslant p\}$

(III) Dados $x, y \in \mathrm{M}, y = x \pmod{A}$ se $y = \varphi(x)$ para alguma $\varphi \in \Psi A$.

Note que $= (\mathrm{mod}\ A)$ é uma relação de equivalência em M.

A.5 Definição: Nas condições acima, dado $x \in \mathrm{M}$, a **órbita de A** por x é a classe de equivalência de x segundo a relação de equivalência acima:

$$\mathcal{O}(A,x) := [x] = \{y \in \mathrm{M} \text{ tal que } y = x \pmod{A}\}$$

Notação. Nas condições acima, também vou considerar os seguintes subespaços de $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$:

(I) $A_0(x) := \mathrm{span}\,\{\dot{a}(0,x)$ tal que $a \in A$ e $(0,x) \in \Omega_a := \mathrm{dom}\ a\}$

(II) $A(x) := \mathrm{span}\,\{\dot{a}(t,y)$ tal que $a \in A$ e $a(t,y) = x\}$

(III) $\overline{A}(x) := \mathrm{span}\,\{\mathrm{T}\varphi(y) \cdot w$ tal que $\varphi \in \Psi A, \varphi(y) = x$ e $w \in A(y)\}$

A.6 Definição: Nas condições acima, direi que a coleção de flechas A é **homogênea** se $(\forall x \in \mathrm{M})\ A(x) = \overline{A}(x)$; A é **simétrica** se $\varphi \in \theta A \Rightarrow \varphi^{-1}$ é composição de um número finito de elementos de θA.

A.7 Teorema (da Órbita)
Sejam M *uma variedade diferenciável, A uma coleção de flechas sobre* M *e* $\mathfrak{F}$ *o quociente* $\mathrm{M}/=\ (\mathrm{mod}\ A)$. ***Então*** $\mathfrak{F}$ *é uma folheação de* M *com singularidades, e* $(\forall\, x \in \mathrm{M})\ \mathrm{T}_x(\mathrm{M}, \mathfrak{F}) = \overline{A}(x)$.

Em particular, cada órbita de A é uma folha de M, *logo admite uma única estrutura de variedade diferenciável munida da qual é uma subvariedade imersa de* M.

A prova deste teorema será feita após a demonstração dos seguintes lemas:

A.8 Lema: *Dados* $\varphi \in \Psi A$ *e* $x, y \in \mathrm{M}$ *tais que* $y = \varphi(x)$, ***então*** $\mathrm{T}\varphi(x) \cdot \overline{A}(x) = \overline{A}(y)$

PROVA:

(i) $\mathrm{T}\varphi(x) \cdot \overline{A}(x) \subset \overline{A}(y)$

Com efeito, seja $v \in \overline{A}(x)$. Existem $z \in \mathrm{M}$, $w \in A(z)$ e $\psi \in \Psi A$ tais que $v = \mathrm{T}\psi(z) \cdot w$. Então segue da regra da cadeia que

$$\mathrm{T}\varphi(x) \cdot v = \mathrm{T}(\varphi \circ \psi)(z) \cdot w$$

e como $\varphi \circ \psi \in \Psi A$, segue $\mathrm{T}\varphi(x) \cdot v \in \overline{A}(y) \therefore \mathrm{T}\varphi(x) \cdot \overline{A}(x) \in \overline{A}(y)$. □

(ii) Por outro lado, dado $v \in \overline{A}(y)$, existem $z \in \mathrm{M}$, $w \in A(z)$ e $\psi \in \Psi A$ tais que $v = \mathrm{T}\psi(z) \cdot w$. Tomando $\tilde{v} := \mathrm{T}(\varphi^{-1} \circ \psi) \cdot w$, temos $\tilde{v} \in \overline{A}(x)$, pois $\varphi^{-1} \circ \psi \in \Psi A$ (note que $\varphi \in \Psi A \Rightarrow \varphi^{-1} \in \Psi A$).

Então $v = \mathrm{T}\varphi(x) \cdot (\tilde{v})$, por causa da regra da cadeia, donde $\mathrm{T}\varphi(x) \cdot \overline{A}(x) \supset \overline{A}(y)$. ■

A.9 Corolário: $(\forall\, y \in \mathcal{O}(A, x))\ \dim \overline{A}(y) = cte. = \dim \overline{A}(x)$.

A.10 Lema: *Seja* $A^\sharp$ *a coleção de flechas sobre* M *dada por*

$A^\sharp := \{b$ *flecha tal que* $b^t = a^{t+s} \circ (a^s)^{-1}$ *ou* $b^t = a^{-t+s} \circ (a^s)^{-1}$ *para algum* $a \in A$ *e* $s \in \mathbb{R}\}$

Então:

(a) $\Psi A^\sharp = \Psi A \quad (\therefore \mathcal{O}(A^\sharp, x) = \mathcal{O}(A, x) \forall\, x \in \mathrm{M})$;

(b) $A^\sharp$ *é simétrica;*

(c) $A_0^\sharp(x) = A^\sharp(x) = A(x)$;

(d) A *homogênea* $\Rightarrow$ $A^\sharp$ *homogênea.*

PROVA:

(i) (a) e (c) $\Rightarrow$ (d), pois:

$$(\forall x \in \mathrm{M})\, \overline{A}(x) \overset{A \text{ homogênea}}{=} A(x) \overset{por(c)}{=} A^\sharp(x)$$

Mas $\Psi A^\sharp = \Psi A$(por (a)) e $(\forall x \in \mathrm{M})\, A(x) = A^\sharp(x) \Rightarrow (\forall x \in \mathrm{M})\, \overline{A}(x) = \overline{A^\sharp}(x)$. Então segue

$$A^\sharp(x) = \overline{A}(x) = \overline{A^\sharp}(x)$$

donde a homogeneidade de $A^\sharp$. □

(ii) Sejam $b^t = a^{t+s} \circ (a^s)^{-1}$ e $c^t = a^{-t+s} \circ (a^s)^{-1}$. Se $x \in \mathrm{dom}\, b^t$, então $(\forall \tau \in [0,t])\, x \in \mathrm{dom}\, b^\tau$, pois a é uma flecha; idem para c^t. Então b e c são, de fato, flechas.

Tomando $s = 0$, obtemos $b^t = a^t$, donde

$$\theta A \subset \theta A^\sharp \tag{A.1}$$

Tomando $s = t$, obtemos $c^t = (a^t)^{-1}$, donde

$$(\theta A)^{-1} \subset \theta A^\sharp \tag{A.2}$$

De (A.1) segue $\Psi A \subset \Psi A^\sharp$. Por outro lado, $\theta A^\sharp \subset \Psi A \Rightarrow \Psi A^\sharp \subset \Psi A$. Então $\Psi A = \Psi A^\sharp$, e isto prova o item (a). Também:

$$b^t = a^{t+s} \circ (a^s)^{-1} \Rightarrow (b^t)^{-1} = a^s \circ (a^{t+s})^{-1} = b^s \circ c^{t+s}$$
$$c^t = a^{-t+s} \circ (a^s)^{-1} \Rightarrow (c^t)^{-1} = a^s \circ (a^{-t+s})^{-1} = b^s \circ c^{-t+s}$$

Então $(\theta A^\sharp)^{-1} = \{(b^t)^{-1}, (c^t)^{-1} \text{ tal que } a \in A\} = (\theta A^\sharp)^2 \therefore A^\sharp$ é simétrica, e isto prova o item (b).

(iii) Resta provar (c). Temos, pela regra da cadeia:

$$\dot{b}(t,x) = \dot{a}\big(t+s, (a^s)^{-1}(x)\big) \therefore \dot{b}\big(0, a^s(x)\big) = \dot{a}(s,x) \tag{A.3}$$

$$\dot{c}(t,x) = -\dot{a}\big(-t+s, (a^s)^{-1}(x)\big) \therefore \dot{c}\big(0, a^s(x)\big) = -\dot{a}(s,x) \tag{A.4}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{b}\big(0, a^s(x)\big) &= \dot{a}(s,x) \\ \dot{c}\big(0, a^s(x)\big) &= -\dot{a}(s,x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_0^\sharp\big(a^s(x)\big) = A\big(a^s(x)\big) \tag{A.5}$$
$$\therefore (\forall x \in \mathrm{M})\, A_0^\sharp(x) = A(x)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{b}(t,x) &= \dot{a}\big(t+s,(a^s)^{-1}(x)\big) \in A\big(b(t,x)\big)\\ \dot{c}(t,x) &= -\dot{a}\big(-t+s,(a^s)^{-1}(x)\big) \in A\big(b(t,x)\big)\end{aligned}\right\} \Rightarrow A^\sharp\big(b(t,x)\big) \subset A\big(b(t,x)\big) \tag{A.6}$$

$$\therefore (\forall x \in \mathrm{M})\ A^\sharp(x) \subset A(x) \overset{por(A.5)}{=} A_0^\sharp(x)$$

E como $A_0^\sharp(x) \subset A^\sharp(x)$, só podemos ter

$$A_0^\sharp(x) = A^\sharp(x) = A(x), \forall x \in \mathrm{M}$$

■

A.11 Lema: *Seja A uma coleção de flechas em* M. ***Então*** *existe uma coleção de flechas B homogênea e simétrica tal que* $(\forall x \in \mathrm{M})\ \mathcal{O}(A,x) = \mathcal{O}(B,x)$ *e* $\overline{A}(x) = B(x) = B_0(x)$.

PROVA:
Seja A^* a coleção de todas as flechas a em M tais que:

(i) dom $a = \mathcal{J} \times \mathcal{V}$, onde $\mathcal{J}$ é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ e $\mathcal{V}$ um aberto de M.

(ii) $\exists b \in A^\sharp$ e $\varphi \in \Psi A$ tais que $\forall t \in \mathcal{J}$ e $\forall x \in \mathcal{V}$, $a(t,x) = \varphi \circ b^t \circ varphi^{-1}(x)$.

Temos:

(a) Dado $\varphi \in \Psi A^*$, então $\varphi = \widetilde{\varphi}|_{\mathrm{dom}\ \varphi}$ para algum $\widetilde{\varphi} \in \Psi A$ $(\therefore \varphi \in \Psi A)$.
Com efeito, é suficiente verificar que isto vale para $\varphi \in \theta A^*$. Dado $\varphi \in \theta A^*, \exists t \in Rn, \exists \psi \in \Psi A$ e $\exists b \in A^\sharp$ tais que $\varphi = \psi \circ b^t \circ \psi^{-1}|_{\mathrm{dom}\ \varphi}$, por hipótese.
Mas, pelo lema (A.10), $\Psi A = \Psi A^\sharp \therefore \psi \circ b^t \circ \psi^{-1} \in \Psi A$. □

(b) $\mathcal{O}(A^*,x) = \mathcal{O}(A,x), \forall x \in \mathrm{M}$.
Com efeito, de (a) segue $\Psi A^* \subset \Psi A \therefore \mathcal{O}(A^*,x) \subset \mathcal{O}(A,x)$.
É suficiente, pois, verificar a outra inclusão.
Dado $y \in \mathcal{O}(A,x)$, temos $y = \varphi(x)$ para algum $\varphi \in \Psi A$. Mas $\exists \mathcal{U} \in \tau_x(\mathrm{M})$ tal que $\varphi|_{\mathcal{U}} \in \Psi A^*$, donde $y = \varphi|_{\mathcal{U}}(x) \in \mathcal{O}(A^*,x)$ e $\mathcal{O}(A,x) \subset \mathcal{O}(A^*,x)$. □

(c) $A^*(x) = \overline{A}(x), \forall x \in \mathrm{M}$.

(1) $A^*(x) \subset \overline{A}(x)$.
Temos $\Psi A^* \subset \Psi A$; dado $v = \dot{a}(t,y) \in A^*(x)$, digamos $a^t = \psi \circ b^t \circ \psi^{-1}$, temos

$$v = \dot{a}(t,y) = \frac{d}{dt}\left(\psi \circ b^t \circ \psi^{-1}(y)\right) = \mathrm{T}\psi \cdot \dot{b}\big(t,\psi^{-1}(y)\big)$$

Como $\dot{b}\big(t,\psi^{-1}(y)\big) \in A^\sharp\big(b(t,\psi^{-1}(y))\big) = A\big(b(t,\psi^{-1}(y))\big)$ (pelo lema (A.10)) e $\psi \in \Psi A$, segue $v \in \overline{A}(x) \therefore A^*(x) \subset \overline{A}(x)$. □

(2) $\overline{A}(x) \subset A^*(x)$.

Seja $v \in \overline{A}(x)$. Então $\exists \varphi \in \Psi A, \exists y \in \mathrm{M}, \exists w \in A(y)$ tais que $y = \varphi(x)$ e $v = \mathrm{T}\varphi(y) \cdot w$. Pelo lema (A.10), $A(y) = A_0^\sharp(y) \therefore \exists b \in A^\sharp$ tal que $w = \dot{b}(0, y)$. Sem perda de generalidade, podemos supor $\operatorname{dom} b = (-\delta, \delta) \times \widetilde{\mathcal{V}}$, onde $\delta \in \mathbb{R}^{++}$ e $\widetilde{\mathcal{V}} \in \tau_y(\mathrm{M})$. Como $\varphi^{-1}(x) = y$, existe $\mathcal{V} \in \tau_x(\mathrm{M})$ tal que $\varphi^{-1}(\mathcal{V}) \subset \widetilde{\mathcal{V}}$. Então está bem definida

$$a^t = \varphi \circ b^t \circ \varphi^{-1} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{M} \qquad \text{para } |t| < \delta$$

e como $a^t = a(t, \cdot)$ onde $a : \mathcal{J} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{M}$ e $\varphi \in \Psi A, b \in A^\sharp$, segue $a \in A^*$ e $a^t \in \theta A^*$. Pela regra da cadeia, temos:

$$\dot{a}(0, x) = \mathrm{T}\varphi \cdot \dot{b}\big(0, \varphi^{-1}(x)\big) = \mathrm{T}\varphi \cdot \dot{b}(0, y) = w$$

$\therefore w = \dot{a}(0, x) \in A_0^*(x) \subset A^*(x)$, donde

$$\overline{A}(x) \subset A_0^*(x) \subset A^*(x)$$

Então segue de (1) que

$$\overline{A}(x) = A_0^*(x) = A^*(x)$$

□

(d) A^* é homogênea.

Com efeito, por (a) temos $\Psi A^* \subset \Psi A$ e por (c) temos $A^*(x) = \overline{A}(x)$. Então, dado $v \in \overline{A^*}(x)$, temos $v = \mathrm{T}\varphi(y) \cdot w$ para $\varphi \in \Psi A^* \subset \Psi A, y \in \mathrm{M}$ tal que $\varphi(y) = x$ e $w \in A^*(y) = \overline{A}(y)$. Ora,

$$\left.\begin{array}{r} \varphi \in \Psi A \\ w \in \overline{A}(y) \end{array}\right\} \overset{\text{lema (A.8)}}{\Longrightarrow} v \in \overline{A}(x)$$

donde $\overline{A^*}(x) \subset \overline{A}(x) \subset A^*(x)$. Como a outra inclusão é óbvia, segue a tese. □

(e) Tome $B := (A^*)^\sharp$.

Então B é simétrica, homogênea (pois A^* o é e por causa do lema (A.10)) e $(\forall x \in \mathrm{M})$ temos $\mathcal{O}(B, x) = \mathcal{O}(A^*, x) = \mathcal{O}(A, x)$, por (b) e lema (A.10).

Também segue do lema (A.10) que $(\forall x \in \mathrm{M})\ B_0(x) = B(x)$, donde:

$$(\forall x \in \mathrm{M})\ B_0(x) \overset{\text{lema (A.10)}}{=} B(x) = (A^*)^\sharp \overset{\text{lema (A.10)}}{=} A^*(x) \overset{\text{por(c)}}{=} \overline{A}(x)$$

Então B é a coleção de flechas procurada. ■

A.12 Lema: *Seja* M^n *uma variedade diferenciável e* L *um subconjunto conexo de* M*; para cada* $x \in \mathrm{L}$*, seja* $\mathcal{L}(x)$ *um subespaço de* $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$*. Suponha que* $(\forall x \in \mathrm{L})\ \dim\mathcal{L}(x) = k$ *e* $\exists\psi$ *parametrização local de* M *em torno de* x *tal que:*

(a) $\mathrm{dom}\,\psi = \mathcal{U} \times \mathcal{W}$*, onde* $\mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{O}}(\mathbb{R}^k)$ *e* $\mathcal{W} \in \tau_{\mathbb{O}}(\mathbb{R}^{n-k})$*;*

(b) $\psi(\mathbb{O}, \mathbb{O}) = x$*;*

(c) $\psi(\mathcal{U} \times \mathcal{W}) \cap \mathrm{L} = \psi(\mathcal{U} \times l)$*, onde* $l := \{w \in \mathcal{W}$ *tal que* $\psi(\mathbb{O}, w) \in \mathrm{L}\}$*;*

(d) $\partial_i\psi(t,s) \in \mathcal{L}\big(\psi(t,s)\big), \forall i \in \{1, \ldots, k\}$ *e* $\forall (t,s) \in \psi^{-1}(\mathrm{L})$*.*

Então:

$\exists!$ *topologia Hausdorff com base enumerável* τ *em* L *e* $\exists!$ *estrutura diferenciável* σ *em* (L, τ) *tal que* (L, i) *seja uma folha de* M*(onde* i *é a inclusão) e* $(\forall x \in \mathrm{L})\ \mathrm{T}_x\mathrm{L} = \mathcal{L}(x)$*.*

PROVA:

Chamarei de **carta privilegiada** de M uma ψ satisfazendo os itens (a), (c) e (d) acima.

(A) Sejam $\psi : \mathcal{U} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathrm{M}$ privilegiada, N variedade diferenciável conexa e $f : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}$ C^∞ tais que $f(\mathrm{N}) \subset \psi(\mathcal{U} \times \mathcal{W})$ e $(\forall \xi \in \mathrm{N})\ \mathrm{T}f(\xi) \cdot \mathrm{T}_\xi\mathrm{N} \subset \mathcal{L}\big(f(\xi)\big)$. Então $\exists w \in \mathcal{W}$ tal que $f(\mathrm{N}) \subset \psi(\mathcal{U} \times \{w\})$.

Com efeito, seja $\pi_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ projeção na segunda coordenada e $g := \pi_2 \circ \psi^{-1}$. Temos:

$$(\forall (t,s) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W})\ g \circ \psi(t,s) = s$$

$$\therefore (\forall i \in \{1, \ldots, k\})\ \partial_i(g \circ \psi)(t,s) \overset{\text{regra da cadeia}}{=} \mathrm{T}g\big(\psi(t,s)\big) \cdot \partial_i\psi(t,s) = 0$$

Como $\dim\mathcal{L}\big(\psi(t,s)\big) = k$, temos

$$\mathcal{L}\big(\psi(t,s)\big) = \mathrm{span}\,\{\partial_i\psi(t,s) : 1 \leqslant i \leqslant k\}$$

Então segue $\mathrm{T}g\big(\psi(t,s)\big) \cdot \mathcal{L}\big(\psi(t,s)\big) = \{\mathbb{O}\}$, donde

$$\mathrm{T}(g \circ f)(\xi) = \mathbb{O}, \forall \xi \in \mathrm{N} \overset{\mathrm{N\ conexa}}{\Longrightarrow} g \circ f = \text{cte. em N}$$

□

(B) Seja Ψ a coleção de todas as aplicações da forma

$$\psi_w = \psi(\cdot, w) : \mathcal{U}_\psi \longrightarrow \mathrm{L}$$

onde $\psi : \mathcal{U}_\psi \times \mathcal{W}_\psi \longrightarrow \mathrm{M}$ é uma carta privilegiada e $w \in \mathcal{W}_\psi$ tal que $\psi(\mathbb{O}, w) \in \mathrm{L}$.

Sejam N uma variedade diferenciável e $f : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}$ C^∞ tais que $f(\mathrm{N}) \subset \mathrm{L}$ e $(\forall \xi \in \mathrm{N})\ \mathrm{T}f(\xi) \cdot \mathrm{T}_\xi\mathrm{N} \subset \mathcal{L}\big(f(\xi)\big)$.

Então $(\forall \psi_w \in \Psi)\ \mathrm{G} := f^{-1}\big(\psi_w(\mathcal{U}_\psi)\big)$ é aberto em N e $\psi_w^{-1} \circ f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é C^∞.

Prova:

(1) Sejam $\psi : \mathcal{U}_\psi \times \mathcal{W}_\psi \longrightarrow \mathrm{M}$ privilegiada e $w \in \mathcal{W}_\psi$ tal que $\psi(\mathbb{O}, w) \in \mathrm{L}$ e $\psi_w = \psi(\cdot, w)$. Seja $\widetilde{(\mathrm{N})} := f^{-1}\big(\psi(\mathcal{U}_\psi \times \mathcal{W}_\psi)\big)$ subvariedade aberta de N, e $\widetilde{\mathrm{N}} = \cup_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{N}_k$ as suas componentes conexas.

Temos:

$$f(\mathrm{N}) \cap \psi(\mathcal{U}_\psi \times \mathcal{W}_\psi) = f(\widetilde{\mathrm{N}}) = \cup_{k\in\mathbb{N}} f(\mathrm{N}_k)$$

Por (A), para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists w_k \in \mathcal{W}_\psi$ tal que $f(\mathrm{N}_k) \subset \psi(\mathcal{U}_\psi \times \{w_k\})$.

$$\therefore f(\mathrm{N}) \cap \psi(\mathcal{U}_\psi \times \mathcal{W}_\psi) = \cup_{k\in\mathrm{N}}(\mathcal{U}_\psi \times \{w_k\})$$

Como $f(\mathrm{N}_k) \subset \mathrm{L}$, é claro que $w \in \mathcal{W}_\psi$ é tal que $\psi(\mathbb{O}, w_k) \in \mathrm{L}$.
$\therefore$ *se* $f^{-1}\big(\psi_w(\mathcal{U}_\psi)\big) = f^{-1}\big(\psi(\mathcal{U}_\psi \times \{w\})\big) \neq \emptyset$, existe $N' \subset \mathrm{N}$ talque $w_k = w$ para $k \in N'$.

Então segue que

$$f(\mathrm{N}) \cap \psi_w(\mathcal{U}_\psi) = \cup_{k\in N'} f(\mathrm{N}_k)$$

donde $\mathrm{G} = \cup_{k\in N'}\mathrm{N}_k$ é aberto, pois cada N_k é uma componente conexa ($\therefore$ aberta) de $\widetilde{\mathrm{N}}$ e $\widetilde{\mathrm{N}}$ é aberto em N.

(2) $\psi_w^{-1} \circ f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é C^∞, pois

$$\psi_w^{-1} \circ f = \pi_1 \circ \psi^{-1} \circ f|_{\mathrm{G}} : G \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

□

(C) Seja $\psi_w \in \Psi$. Então $\big(\psi_w(\mathcal{U}_\psi), i\big)$ é uma subvariedade mergulhada em M, pois

$$\psi_w(\mathcal{U}_\psi) = \psi(\mathcal{U}_\psi \times \{w\})$$

$\therefore$ uma fatia de $\psi(\mathcal{U}_\psi \times \mathcal{W}_\psi)$.

Seja

$$\mathcal{B} := \{A \text{ aberto em } \psi_w(\mathcal{U}_\psi) \text{ tal que } \psi_w \in \Psi\}$$

Então $\mathcal{B}$ gera uma topologia Hausdorff sobre L.

Prova: Com efeito:

(1) $(\forall x \in \mathrm{L})\, \exists \psi : \mathcal{U}_\psi \times \mathcal{W}_\psi \longrightarrow \mathrm{M}$ privilegiada tal que $\psi(\mathbb{O}, \mathbb{O}) = x \therefore x \in \psi_{\mathbb{O}}(\mathcal{U}_\psi) \in \mathcal{B}$

(2) Dados $A, B \in \mathcal{B}$ tais que $A \cap B \neq \emptyset$, digamos $A = \psi_{w_1}(\mathcal{U}_p si)$ e $B = \varphi_{w_2}(\mathcal{U}_\varphi)$, temos:

$$A \cap B = \psi_{w_1}(\mathcal{U}_p si) \cap \varphi_{w_2}(\mathcal{U}_\varphi) = \psi_{w_1}\big[\psi_{w_1}^{-1}(\varphi_{w_2}(\mathcal{U}_\varphi))\big] \in \mathcal{B}$$

pois $\psi_{w_1}^{-1}(\varphi_{w_2}(\mathcal{U}_\varphi))$ é aberto em $\mathcal{U}_\psi$, por (B).

. Isto mostra que $\mathcal{B}$ gera uma topologia τ sobre L. Esta topologia é Hausdorff, pois é mais fina que a topologia de subespaço (que é Hausdorff):

Dado $\mathcal{U} \in \tau(\mathrm{M})$, temos:

$$\mathcal{U} \cap \mathrm{L} = \bigcup_{\psi_w \in \Psi} \mathcal{U} \cap \psi_w(\mathcal{U}_\psi) \in \tau$$

pois cada $\mathcal{U} \cap \psi_w(\mathcal{U}_\psi) \in \mathcal{B}$, por ser aberto em $\psi_w(\mathcal{U}_\psi)$ subespaço de (M, τ). □

(D) Consideremos $((\mathrm{L}, \tau) \xrightarrow{i} \mathrm{M}$, onde i é a inclusão e *tau* é a topologia definida em (C). Temos:

(i) (L, τ) é Hausdorff conexo;

(ii) $(\forall x \in \mathrm{L})\, \exists \psi_w \in \Psi$ tal que $x \in \psi_w(\mathcal{U}_\psi) \in \tau \therefore i|_{\psi_w(\mathcal{U}_\psi)} : \psi_w(\mathcal{U}_\psi) \longrightarrow \psi_w(\mathcal{U}_\psi)$ é homeomorfismo sobre uma subvariedade mergulhada de M.

Então segue do teorema de Poincaré-Volterra(teorema (B)) que (L, τ) é separável e metrizável ($\therefore$ tem base enumerável) e admite uma única estrutura diferenciável σ tal que i seja uma imersão. Como i é injetiva, segue que $((\mathrm{L}, \sigma, \tau), i)$ é subvariedade imersa em M, e $\mathrm{T}_x\mathrm{L} = \mathrm{T}_x(\psi_w(\mathcal{U}_\psi)) = \mathcal{L}x$.

Resta provar que $((\mathrm{L}, \sigma, \tau), i)$ é uma folha (e disto segue que a topologia τ é única).

Tomemos N espaço topológico localmente conexo e $f : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}$ contínua, tal que $f(\mathrm{N}) \subset \mathrm{L}$. Vou mostrar que $f : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{L}$ é contínua.

Sejam $x \in \mathrm{N}$ e $y = f(x)$. Tome $\mathcal{W} \in \tau_y(\mathrm{L})$ e $\varphi_w \in \Psi$ tais que $y \in \varphi_w(\mathcal{U}_\varphi) \subset \mathcal{W}$.

Seja $\widetilde{V} = f^{-1}(\varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi))$. $\widetilde{V}$ é um aberto de N em torno de x, pois f é contínua. Seja V componente conexa de $\widetilde{V}$ que contém x; V também é um aberto de N, pois N é localmente conexo. Ora,

$$\left.\begin{array}{r} V \text{ conexo} \\ f \text{ contínua} \\ x \in V \end{array}\right\} \Rightarrow f(V) \text{ conexo e contém } y = f(x)$$

Afirmo que $f(V) \subset \varphi_w(\mathcal{U}_\varphi)$. Então, como V é aberto, disto segue que $f : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{L}$ é contínua em x, e como x foi tomado arbitrariamente, segue $f : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{L}$ contínua em N.

Prova da afirmação:

Como $f(V)$ é conexo, está contido numa componente conexa de $f(V) \cap \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi)$. Então é suficiente verificar que cada componente conexa de $f(V) \cap \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi)$ está contida numa fatia $\varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \{z\})$, pois, como $f(x) \in \varphi_w(\mathcal{U}_\varphi)$, disto seguirá $f(V) \subset \varphi_w(\mathcal{U}_\varphi)$.

De fato, $f(V) \cap \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi) \subset \mathrm{L} \cap \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi)$, logo se $\widetilde{\mathcal{C}}$ é uma componente conexa de $f(V) \cap \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi)$, $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ componente conexa de $\mathrm{L} \cap \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi)$.

Mas $\mathrm{L} \cap \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi) = \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times l)$, onde $l = \{s \in \mathcal{W}_\varphi \text{ tal que } \varphi(\mathbb{O}, s) \in \mathrm{L}\}$. Ou seja,

$$\mathrm{L} \cap \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi) = \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times l) = \bigcup_{s \in l} \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \{s\})$$

e como cada $\varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \{s\})$ é aberto e conexo em L e a união é disjunta, é uma componente conexa de $\mathrm{L} \cap \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \mathcal{W}_\varphi)$ $\therefore \exists s_0 \in l$ tal que $\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \{s_0\})$, donde $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C} \subset \varphi(\mathcal{U}_\varphi \times \{s_0\})$. ■

PROVA DO TEOREMA DA ÓRBITA (A.7):

Sem perda de generalidade podemos supor, por causa do lema (A.11), que A é simétrica, homogênea e $(\forall x \in \mathrm{M})\ A_0(x) = A(x)$.

Seja $x_0 \in \mathrm{M}$ e $\mathrm{L} = \mathcal{O}(x_0, A)$.

(i) L é conexo.

Com efeito, $(\forall y \in \mathrm{L})\ \exists \varphi \in \Psi A$ tal que $y = \varphi(x)$. Digamos $y = a_1^{t_1} \circ \cdots \circ a_p^{t_p}(x)$, com os $a_i^{t_i} \in \theta A$.

$$\text{Pondo} \begin{cases} \gamma_i : [0, t_i] \longrightarrow \mathrm{M} & 1 \leqslant i \leqslant p \\ \qquad t \longmapsto a_i^{t_i}\left(a_{i-1}^{t_{i-1}} \circ \cdots \circ a_1^{t_1}(x)\right) \\ \gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_p \end{cases}$$

Temos que γ é uma curva contínua, $\gamma^* \in \mathrm{L}$ e γ liga x e y. Isto mostra que L é conexo por caminhos.

(ii) Dado $x \in \mathrm{L}$, tome $a_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant k$, tais que $\dot{a}_i(0, x)$ formem uma base de $A(x) = \overline{A}(x)$.

Seja $\Phi : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{M}$, onde $\mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{O}}(\mathbb{R}^k)$ e $\mathcal{V} \in \tau_x(\mathrm{M})$. Temos:

$$(t_1, \ldots, t_k, y) \longmapsto a_1^{t_1} \circ \cdots \circ a_k^{t_k}(y)$$

(1) $(\forall x \in \mathcal{U}, \forall y \in \mathcal{V})\ \Phi(t, y) = y \pmod{A}$ e $\Phi(0, y) = y$.

(2) $(\forall i \in \{1, \ldots, k\})$

$$\begin{aligned} \partial_i \Phi(0, x) &= \mathrm{T}(a_1^0 \circ \cdots \circ a_{i-1}^0) \cdot \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} a_i^t(a_{i+1}^0 \circ \cdots \circ a_k^0(x)) = \\ &= \mathrm{T}(a_1^0 \circ \cdots \circ a_{i-1}^0) \cdot \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} a_i^t(\mathrm{id}(x)) = \\ &= \dot{a}_i(0, x) \end{aligned}$$

$\therefore \{\partial_i \Phi(0, x) : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ é base de $A(x) = \overline{A}(x)$.

(3) Afirmação: $(\forall t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{U}, \forall y \in \mathcal{V}, \forall i \in \{1, \dots, k\})\ \partial_i\Phi(t,y) \in \overline{A}(\Phi(t,y))$

Prova:

$$\partial_i\Phi(t,y) \overset{\text{regra da cadeia}}{=} \mathrm{T}(a_1^{t_1} \circ \cdots \circ a_{i-1}^{t_{i-1}})\big|_{a_i^{t_i}(w)} \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_i} a_i^t\big(a_{i+1}^{t_{i+1}} \circ \cdots \circ a_k^{t_k}(y)\big)$$

onde $w := a_{i+1}^{t_{i+1}} \circ \cdots \circ a_k^{t_k}(y)$.

Como

$$\begin{cases} a_1^{t_1} \circ \cdots \circ a_i^{t_i} \in \Psi A \\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_i} a_i^t(w) \in A\big(a_i^{t_i}(w)\big) \end{cases}$$

segue $\partial_i\Phi(t,y) \in \overline{A}(\Phi(t,y))$. □

(4) Seja $n = \dim \mathrm{M}$ e (Q^{n-k}, i) subvariedade mergulhada em M tal que $x \in \mathrm{Q}$ e $\mathrm{T}_x\mathrm{M} = \mathrm{T}_x\mathrm{Q} + A(x)$. Existe, pois basta tomar carta $(\mathcal{V}, \varphi = (x^1, \dots, x^n)) \in \mathfrak{A}_x(\mathrm{M})$ tal que

(A) $(\forall i \in \{1, \dots, k\})\ \partial_i(x) = \partial_i\Phi(0,x)$

(B) $\varphi(x) = \mathbb{O}$

e Q a fatia $\{y \in \mathcal{V}$ tal que $x^{k+1}(y) = \cdots = x^n(y) = 0\}$.

Tome $f : \mathcal{W} \longrightarrow \mathrm{Q}$, onde $\mathcal{W} \in \tau_{\mathbb{O}}(\mathbb{R}^{n-k})$, parametrização local de Q tal que $f(\mathbb{O}) = x$ e $f(\mathcal{W}) \in \mathcal{V}$.

Seja $\psi : \mathcal{U} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathrm{M}$ Temos rk $\psi(\mathbb{O}, \mathbb{O}) = \dim(\mathrm{T}\psi|_{\mathbb{O}} \cdot \mathbb{R}^n) = n$, pois

$$(t,s) \longmapsto \Phi\big(t, f(s)\big)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\psi|_{\mathbb{O}} \cdot \mathbb{R}^n &= \partial_1\psi|_{\mathbb{C}} \cdot \mathbb{R}^k + \partial_2\psi|_{\mathbb{O}} \cdot \mathbb{R}^{n-k} = \\ &= \partial_1\Phi|_{\mathbb{C}} \cdot \mathbb{R}^k + \partial_2\Phi|_{(\mathbb{O},x)} \cdot \mathrm{T}f|_{\mathbb{O}} \cdot \mathbb{R}^{n-k} \overset{\text{por (2)}}{=} \\ &= A(x) + \mathrm{T}_x\mathrm{Q} = \\ &= \mathrm{T}_x\mathrm{M} \end{aligned}$$

Então segue que ψ é uma parametrização local de M em torno de x para $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ suficientemente pequenos, por causa do teorema da função inversa.

Além disso:

(a) $\mathrm{L} \cap \psi(\mathcal{U} \times \mathcal{W}) = \psi(\mathcal{U} \times l)$, onde $l := \{s \in \mathcal{W}$ tal que $\psi(\mathbb{O}, s) \in \mathrm{L}\}$.
Com efeito:

(I) Dado $s \in \mathcal{W}$ tal que $\psi(\mathbb{O}, s) \in \mathrm{L}$, temos $\psi(\mathcal{U} \times \{s\}) \subset \mathrm{L}$, pois

$$\psi(\mathcal{U} \times \{s\}) = \Phi\big(\mathcal{U}, f(s)\big) \overset{\text{por (1)}}{=} f(s) \pmod{A}$$

Como $f(s) = \Phi\big(\mathbb{O}, f(s)\big) = \psi(0, s) \in \mathrm{L}$, segue

$$\psi(\mathcal{U} \times \{s\}) \subset \mathrm{L} \cap \psi(\mathcal{U} \times \mathcal{W})$$

(II) Por outro lado, dado $y \in \mathrm{L} \cap \psi(\mathcal{U} \times \mathcal{W})$, seja $(t,s) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ tal que $y = \psi(t,s) = \Phi\big(t, f(s)\big)$.
Então, por (1) segue que $y = \Phi\big(\mathbb{O}, f(s)\big) \pmod{A}$, donde $\Phi\big(\mathbb{O}, f(s)\big) = \psi(\mathbb{O}, s) \in \mathrm{L}$
$\therefore s \in l$ e $y \in \psi(\mathcal{U} \times \{s\}) \subset \psi(\mathcal{U} \times l)$, donde

$$\mathrm{L} \cap \psi(\mathcal{U} \times \mathcal{W}) \subset \psi(\mathcal{U} \times l)$$

Então $\mathrm{L} \cap \psi(\mathcal{U} \times \mathcal{W}) = \psi(\mathcal{U} \times l)$. □

(b) $\big(\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \forall (t,s) \in \psi^{-1}(\mathrm{L})\big)$

$$\partial_i \psi(t,s) = \partial_i \Phi\big(t, f(s)\big) \overset{\text{por (3)}}{\in} \overline{A}\big[\Phi\big(t, f(s)\big)\big] = \overline{A}\big(\psi(t,s)\big)$$

(5) Como $x \in \mathrm{L}$ foi tomado arbitrariamente, tomando $\mathcal{L}(x) := \overline{A}(x)$ e ψ como em (4), segue de (i), de (ii.4.a) e de (ii.4.b) que estão satisfeitas as hipóteses do lema (A.12).
Então segue que L admite uma única topologia τ Hausdorff e com base enumerável e uma única estrutura diferenciável σ tal que (L, i) seja uma folha de M, e $\mathrm{T}_x\mathrm{L} = \overline{A}(x), \forall x \in \mathrm{L}$.
Também é imediato verificar, a partir da definição (A.2), tomando cartas ψ como em (ii.4), que $\mathfrak{F} = \big(\mathrm{M}/= \pmod{A}\big) = \{\mathcal{O}(x_0, A) : x_0 \in \mathrm{M}\}$ é uma folheação de M com singularidades. ■

A.13 Definição
Sejam M uma variedade diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{M})$ e $\Phi^X : \Omega \longrightarrow \mathrm{M}$ o fluxo local de X, onde $\Omega \in \tau(\mathbb{R} \times \mathrm{M})$. Então Φ^X é uma flecha e satisfaz $X^{t+s} = X^t \circ X^s$, onde $X^t := \Phi^X(t, \cdot)$.
Seja S uma família de campos de vetores C^∞ em M. Vou denotar por $\Phi^S := \{\Phi^X : X \in S\}$. É imediato verificar que Φ^S é uma coleção simétrica de flechas. Vou chamar de **órbitas de** S as órbitas de Φ^S.
Dado $x \in \mathrm{M}$, vou escrever $\theta S, \Psi S, S(x), \overline{S}(x), S_0(x)$ no lugar de $\theta\Phi^S, \Psi\Phi^S, \Phi^S(x), \overline{\Phi^S}(x), \Phi^S_0(x)$, respectivamente. Denotarei por $\mathrm{Lie}\, S$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\mathrm{M})$ gerada por S.
Direi que S é **homogênea** se Φ^S o for.

A.14 Teorema (da Órbita II)
Seja S uma família em $\mathfrak{X}(\mathrm{M})$ e $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(S)$ a partição de M *nas órbitas de S. Então $\mathfrak{F}$ é uma folheação de* M *com singularidades e* $\mathrm{T}_x(\mathrm{M}, \mathfrak{F}) = \overline{S}(x), \forall x \in \mathrm{M}$.

PROVA:
É imediata, a partir do teorema da órbita (teorema (A.7)). ■

As proposições seguintes fornecem informações sobre o espaço tangente, num dado ponto da variedade, à órbita que passa por este ponto.

A.15 Proposição: *Sejam* M *uma variedade diferenciável e S uma família em $\mathfrak{X}$(M). Tem-se, $\forall x \in \mathrm{M}$:*

(i) $S_0(x) = S(x) \subset \mathrm{Lie}\, S(x) \subset \overline{S}(x)$;

(ii) $\operatorname{Lie} S(x) = \overline{S}(x) \Leftrightarrow \left(\forall X \in S, \forall Y \in \operatorname{Lie} S, \forall t \in \Omega_x := \operatorname{dom} \Phi^X(\cdot, x)\right) \mathrm{T}X^t \circ Y \circ X^{-t}(x) \in \operatorname{Lie} S(x)$.

PROVA:

(i) Obviamente $S_0(x) \subset S(x) \subset \operatorname{Lie} S(x)$.

(a) Dado $v \in S(x), \exists X \in S, \exists y \in \mathrm{M}, \exists t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} X^t(y) = x \\ \frac{d}{ds}\Big|_{s=t} X^s(y) = v \end{cases}$$

Como $X^{t+s} = X^t \circ X^s$, temos:

$$v = \frac{d}{ds}\Big|_{s=t} X^s(y) \overset{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} X^s\big(X^t(y)\big) =$$
$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} X^s(x) \in S_0(x)$$

donde $S(x) \in S_0(x) \therefore S(x) = S_0(x)$.

(b) Dados $X, Y \in S$, temos:

$$[X,Y](x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\mathrm{T}X^{-t}\big|_{X^t(x)} \cdot Y\big(X^t(x)\big)\right]$$

Como

(1)

$$\begin{cases} X^{-t} \in \Psi S \\ Y\big(X^t(x)\big) \in S\big(X^t(x)\big) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{T}X^{-t}\big|_{X^t(x)} \cdot Y\big(X^t(x)\big) \in \overline{S}(x), \forall t \in \mathbb{R}$$

(2) $\overline{S}(\mathrm{x})$ é subespaço vetorial de dimensão finita de $\mathrm{T}_x\mathrm{M} \therefore$ fechado em $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$.

segue

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{T}X^{-t}\big|_{X^t(x)} \cdot Y\big(X^t(x)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{T}X^{-t} \cdot Y\big(X^t(x)\big) - Y(x)}{t} \in \overline{S}(x)$$

Isto prova $\operatorname{Lie} S(x) \subset \overline{S}(x)$. □

(ii) Sejam $Y \in \operatorname{Lie} S$, $X \in S$ e $t \in \Omega_x := \operatorname{dom} \Phi^X(\cdot, x)$. Então, para s suficientemente pequeno, está bem definida

$$\sigma_t(s) := X^t \circ Y^s \circ X^{-t}(x) \in \mathcal{O}(x, s)$$
$$\therefore \frac{d\sigma_t}{ds}\Big|_{s=0} = \mathrm{T}X^t \circ Y \circ X^{-t}(x) \in \overline{S}(x) = \mathrm{T}_x(\mathrm{M}, \mathfrak{F}_S)$$

Então:

(a)

$$\operatorname{Lie} S(x) = \overline{S}(x) \Rightarrow \left.\frac{d\sigma_t}{ds}\right|_{s=0} = \mathrm{T}X^t \circ Y \circ X^{-t}(x) \in \operatorname{Lie} S(x)$$

(b) $(\forall X \in S, \forall Y \in \operatorname{Lie} S, \forall t \in \Omega_x)\, \mathrm{T}X^t \circ Y \circ X^{-t}(x) \in \operatorname{Lie} S(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\forall \varphi \in \Psi S, \forall Y \in \operatorname{Lie} S)\, \mathrm{T}\varphi \circ Y \circ \varphi^{-1}(x) \in \operatorname{Lie} S(x) \qquad \text{(A.7)}$$

pois, dado $\varphi \in \Psi S$, existem $X^{t_1}, \ldots, X^{t_p} \in \theta S$ tais que $\varphi = X^{t_1} \circ \cdots \circ X^{t_p}$, então basta aplicar a regra da cadeia e (b) p vezes.

Mas (A.7) significa que $\overline{S}(x) \subset \operatorname{Lie} S(x)$, donde $\overline{S}(x) = \operatorname{Lie} S(x)$. ■

A.16 Proposição: *São equivalentes:*

(i) $(\forall X \in S, \forall x \in \mathrm{M}), \exists \epsilon > 0, \exists \{X_1, \ldots, X_p\} \subset S$, *existem funções contínuas* $\lambda_{ij} : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \leqslant i, j \leqslant p$, *tais que:*

(a) $\operatorname{span}\{X_1(x), \ldots, X_p(x)\} = S(x)$;

(b) $(\forall t \in (-t, t), \forall j \in \{1, \ldots, p\})$

$$[X, X_j](X^t(x)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(t) X_i(X^t(x)) \qquad \text{(A.8)}$$

$$S(X^t(x)) = \operatorname{span}\{X_i(X^t(x)) : 1 \leqslant i \leqslant p\} \qquad \text{(A.9)}$$

(ii) $(\forall x \in \mathrm{M})\, S(x) = \overline{S}(x)$.

PROVA:

(ii) $\Rightarrow$(i)

Pelo teorema da órbita (teorema (A.14)), $(\forall x \in \mathrm{M})\, \mathcal{O}(x, S)$ é uma folha de M.

Então, dado $x \in \mathrm{M}$, $\exists \mathcal{U} \in \tau(\mathcal{O}(x, S))$, $\exists (X_1, \ldots, X_p)$ referencial móvel em $\mathcal{U}$ e $(X^1, \ldots, X^p)$ correferencial dual.

Dado $X \in S$, tome $\epsilon > 0$ tal que $X^t(x) \in \mathcal{U}, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Então:

$$(\forall t \in (-\epsilon, \epsilon))\, S(X^t(x)) = \operatorname{span}\{X_i(X^t(x)) : 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

E isto prova (A.9). Pela proposição (A.15), temos $S(x) \subset \operatorname{Lie} S(x) \subset \overline{S}(x)$. Então, pela hipótese (ii), segue $S(x) = \operatorname{Lie} S(x) = \overline{S}(x)$. Portanto, por (A.9), tem-se, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon), \forall j \in \{1, \ldots, p\}$:

$$[X, X_j](X^t(x)) \in \operatorname{span}\{X_i(X^t(x)) : 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

$\therefore \exists \lambda_{ij}(t) \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i,j \leqslant p$, tais que

$$[X, X_j](X^t(x)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(t) X_i(X^t(x))$$

As funções $\lambda_{ij} : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definidas são contínuas (até mesmo C^∞), pois:

$$(\forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon), \forall i,j \in \{1, \ldots, p\})\ \lambda_{ij}(t) = \langle X^i, [X, X_j] \rangle \circ \Phi^X(\cdot, x)(t)$$

□

(i) $\Rightarrow$(ii)

É suficiente verificar $\overline{S}(x) \subset S(x)$. Para tal, é suficiente verificar que, dados $\varphi \in \Psi S$ e $y \in \mathrm{M}$ tais que $\varphi(y) = x$, tem-se $\mathrm{T}\varphi \cdot S(y) \subset S(x)$, pois $\overline{S}(x) = \{\mathrm{T}\varphi(y) \cdot w : \varphi \in \Psi S, y \in \mathrm{M}, \varphi(y) = x, w \in S(y)\}$.

Como $(\forall \varphi \in \Psi S)\ \exists X_1, \ldots, X_p \in S$ tais que $\varphi = X_1^{t_1} \circ \cdots \circ X_p^{t_p}$ com $|t_i| < \epsilon, 1 \leqslant i \leqslant p$, é suficiente verificar

$$(\forall\, X^t \in \theta S \text{ tal que } |t| < \epsilon \text{ e } y = X^{-t}(x))\ \mathrm{T}X^t(y) \cdot S(y) \subset S(x) \tag{A.10}$$

Dado $j \in \{1, \ldots, p\}$, seja

$$\begin{aligned} V_j : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \overline{S}(x) < \mathrm{T}_x\mathrm{M} \\ t &\longmapsto \mathrm{T}X^{-t} \cdot X_j(X^t(x)) \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(t) &\overset{\text{regra da cadeia}}{=} \mathrm{T}X^{-t} \cdot [X, X_j](X^t(x)) \overset{(A.9)}{=} \\ &= \mathrm{T}X^{-t} \cdot \Big[\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(t) X_i(X^t(x))\Big] = \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(t) V_i(t) \in \overline{S}(x) < \mathrm{T}_x\mathrm{M} \end{aligned} \tag{A.11}$$

Dada $H \in \mathrm{T}_x^*\mathrm{M}$, pondo $h_i := H \circ V_i, 1 \leqslant i \leqslant p$, de (A.11) segue:

$$(\forall\, j \in \{1, \ldots, p\}, \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon))\ \dot{h}_j(t) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(t) h_i(t) \tag{A.12}$$

Como o sistema acima é linear, segue do teorema de existência e unicidade que

$$(\forall\, j \in \{1, \ldots, p\}, \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon))\ h_j(t) = 0 \Leftrightarrow h_j(0) = 0$$

ou seja,

$$\big(\forall\, j \in \{1, \ldots, p\}, \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon)\big)\, V_j(t) \in {}^{\perp}H \Leftrightarrow V_j(0) \in {}^{\perp}H$$

Como isto deve valer $\forall\, H \in \mathrm{T}^*_x\mathrm{M}$, segue, $\forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{V_j(t) : 1 \leqslant j \leqslant p\} &= \operatorname{span}\{V_j(0) : 1 \leqslant j \leqslant p\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{span}\{\mathrm{T}X^{-t} \cdot X_j\big(X^t(x)\big) : 1 \leqslant j \leqslant p\} &= \operatorname{span}\{X_j(x) : 1 \leqslant j \leqslant p\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathrm{T}X^{-t} \cdot S\big(X^t(x)\big) &= S(x) \end{aligned}$$

e isto prova (A.10). ■

Apêndice B

Teorema de Poincaré-Volterra

Este teorema foi usado no apêndice A para demonstrar o teorema da órbita (teorema (A.7)).

B.1 Teorema (Poincaré-Volterra)
Seja M^m *uma variedade diferenciável,* N *espaço topológico de Hausdorff,* $f : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}$ *tal que* $\forall x \in \mathrm{N}, \exists \mathcal{V} \in \tau_x(\mathrm{N})$ *tal que* $f|_{\mathcal{V}}$ *seja um homeomorfismo do subespaço* $\mathcal{V}$ *sobre uma subvariedade mergulhada de* M.

Então *cada componente conexa* N_0 *de* N *é separável e metrizável e admite uma única estrutura diferenciável tal que* $f|_{\mathrm{N}_0}$ *seja uma imersão.*

B.2 Corolário: *Se* $f|_{\mathrm{N}_0}$ *for injetiva,* ***então*** $(\mathrm{N}_0, f|_{\mathrm{N}_0})$ *é uma subvariedade imersa de* M.

PROVA DO TEOREMA DE POINCARÉ-VOLTERRA:

(a) N é localmente conexo.

Com efeito, sejam $x \in \mathrm{N}$, $\mathcal{V} \in \tau_x(\mathrm{N})$ e (S^n, i) uma subvariedade mergulhada de M tal que $f|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow S$ seja homeomorfismo. Tome $\widetilde{S}$ componente conexa de S que contém $f(x)$; então $\widetilde{V} := (f|_{\mathcal{V}})^{-1}(\widetilde{S})$ é uma vizinhança conexa de x. □

(b) *Afirmação:*

f é contínua e, dada N_0 componente conexa de N, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in \mathrm{N}_0$:

(i) $\exists \mathcal{V}_x \in \tau_x(\mathrm{N}), \exists (S_x^n, i)$ subvariedade mergulhada em M tais que $f|_{\mathcal{V}_x} : \mathcal{V}_x \longrightarrow S_x$ seja um homeomorfismo;

(ii) (S_x, i) é uma fatia de uma carta $(\mathcal{U}_x, \varphi_x) \in \mathfrak{A}_{f(x)}(\mathrm{M})$ com $\varphi_x : \mathcal{U}_x \longrightarrow B_3(\mathbb{O})$.

Prova da afirmação:

Com efeito, dado $x \in \mathrm{N}_0$, por hipótese existem $\widetilde{\mathcal{V}}_x \in \tau_x(\mathrm{N})$, $n = n(x) \in \mathbb{N}$ e $(\widetilde{S}_x^n, i)$ subvariedade mergulhada de M tais que $f|_{\widetilde{\mathcal{V}}_x} : \widetilde{\mathcal{V}}_x \longrightarrow \widetilde{S}_x$ seja um homeomorfismo.

Então f é contínua em x, pois $f|_{\widetilde{\mathcal{V}}_x}$ o é; como x foi tomado arbitrariamente, disto segue a continuidade de f.

Como $(\widetilde{S}_x, i)$ é subvariedade mergulhada de M, existe uma carta $(\mathcal{U}_x, \varphi_x) \in \mathfrak{A}_{f(x)}(\mathrm{M})$ com $\varphi_x : \mathcal{U}_x \longrightarrow B_3(\mathbb{O})$ e tal que $\widetilde{S}_x \cap \mathcal{U}_x$ seja uma fatia (S_x, i) de $(\mathcal{U}_x, \varphi_x)$. Então basta tomar $\mathcal{V}_x := (f|_{\widetilde{\mathcal{V}}_x})^{-1}(S_x)$ e teremos $x \in \mathcal{V}_x$ e $f|_{\mathcal{V}_x} : \mathcal{V}_x \longrightarrow S_x$ é um homeomorfismo.

Além disto,

$$n : \mathrm{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$x \longmapsto n(x) := \dim S_x$$

é contínua (pois é constante numa vizinhança de cada ponto de N_0), e como N_0 é conexo segue que n é constante em N_0. □

(c) Seja $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base de $\tau(\mathrm{M})$ formada por abertos relativamente compactos que sejam domínios de sistemas de coordenadas $\varphi_n : \mathcal{U}_n \longrightarrow B_3(\mathbb{O})$.

Vou chamar um par $(\mathcal{W}, \mathcal{U})$ de **privilegiado** se $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, $\mathcal{W}$ é uma componente conexa de $f^{-1}(\mathcal{U})$, $\overline{\mathcal{W}}$ é compacto e metrizável e $f|_{\overline{\mathcal{W}}}$ é um homeo de $\overline{\mathcal{W}}$ sobre um subespaço de M.

Afirmação: $\forall x \in \mathrm{N}, \exists (\mathcal{W}, \mathcal{U})$ par privilegiado tal que $x \in \mathcal{W}$.

Prova da afirmação:

Com efeito, dado $x \in \mathrm{N}$, seja N_0 componente conexa de N que contém x. Pelo item (b) existem $\mathcal{V}_x \in \tau_x(\mathrm{N})$, $(\mathcal{U}_x, \varphi_x = (x^1, \ldots, x^m)) \in \mathfrak{A}_{f(x)}(\mathrm{M})$ e (S_x^n, i) fatia de $(\mathcal{U}_x, \varphi_x)$, digamos $S_x = \{u \in \mathcal{U}_x \text{ tal que } x^{n+1}(u) = \cdots = x^m(u) = 0\}$, tais que $f|_{\mathcal{V}_x} : \mathcal{V}_x \longrightarrow S_x$ seja um homeomorfismo.

Como $\mathcal{B}$ é uma base enumerável de $\tau(\mathrm{M})$ e (M, τ) é normal, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{U}_{n_0} \in \mathcal{B}$ tais que $f(x) \subset \mathcal{U}_{n_0}$ e $\overline{\mathcal{U}_{n_0}} \subset \mathcal{U}_x$.

Seja $\widetilde{\mathcal{W}}_x := (f|_{\mathcal{V}_x})^{-1}(S_x \cap \mathcal{U}_{n_0})$ e $\mathcal{W}_x$ a componente conexa de $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ que contém x. Vou mostrar que $(\mathcal{W}_x, \mathcal{U}_{n_0})$ é um par privilegiado, e isto concluirá a prova.

(1) $\overline{\widetilde{\mathcal{W}}_x}$ é compacto e metrizável, pois $f|_{\mathcal{V}_x} : \mathcal{V}_x \longrightarrow S_x$ é homeomorfismo, $\overline{\widetilde{\mathcal{W}}_x} = (f|_{\mathcal{V}_x})^{-1}(\overline{S_x \cap \mathcal{U}_{n_0}})$ e $\overline{S_x \cap \mathcal{U}_{n_0}}$ é compacto e metrizável, uma vez que é fechado e $\overline{S_x \cap \mathcal{U}_{n_0}} \subset \overline{\mathcal{U}_{n_0}}$ compacto e metrizável.
Também é claro que $f|_{\overline{\widetilde{\mathcal{W}}_x}} : \overline{\widetilde{\mathcal{W}}_x} \longrightarrow \overline{S_x \cap \mathcal{U}_{n_0}}$ é um homeomorfismo.

(2) Segue do item anterior que $\overline{\mathcal{W}_x}$ é compacto e metrizável e que $f|_{\overline{\mathcal{W}_x}}$ é um homeomorfismo sobre um subespaço de (M, τ).

(3) Resta verificar que $\mathcal{W}_x$ é uma componente conexa de $f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0})$.
Com efeito, $\mathcal{W}_x \neq \emptyset$ e é conexo, pois é a componente conexa de $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ que contém x. É aberto em $f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0})$, pois é aberto em $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ (por ser uma compomponente conexa do mesmo e por ser N localmente conexo) e $\widetilde{\mathcal{W}}_x = (f|_{\mathcal{V}_x})^{-1}(\mathcal{U}_{n_0})$ é aberto em $f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0})$. Finalmente, $\mathcal{W}_x$ é fechado em $f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0})$, pois:

(I) $\widetilde{\mathcal{W}}_x = \{u \in \mathcal{V}_x \text{ tal que } x^{n+1} \circ f(u) = \cdots = x^m \circ f(u) = 0\}$ é fechado em $\mathcal{V}_x$;

(II) $f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0}) \cap \mathcal{V}_x \overset{f|_{\mathcal{V}_x}\text{homeo}}{=} (f|_{\mathcal{V}_x})^{-1}(\mathcal{U}_{n_0}) = \widetilde{\mathcal{W}_x}$, então segue do item anterior que $\widetilde{\mathcal{W}_x}$ é fechado em $f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0})$ (pois $f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0}) \setminus \widetilde{\mathcal{W}_x} = f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0}) \setminus \mathcal{V}_x \cup \mathcal{V}_x \setminus \widetilde{\mathcal{W}_x}$ é aberto em $f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0})$;

(III) Como $\mathcal{W}_x$ é fechado em $\widetilde{\mathcal{W}_x}$, segue do item anterior que $\mathcal{W}_x$ é fechado em $f^{-1}(\mathcal{U}_{n_0})$.

□

(d) Seja $(\mathcal{W}, \mathcal{U})$ um par privilegiado. Então o conjunto $\mathcal{C}_{(\mathcal{W},\mathcal{U})} = \{(\mathcal{W}', \mathcal{U}')$ par privilegiado tal que $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}' \neq \emptyset\}$ é enumerável.

Com efeito, temos

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{W},\mathcal{U})} = \bigcup_{\mathcal{U}' \in \mathcal{B}} \mathcal{C}_{\mathcal{U}'}$$

onde $\mathcal{C}_{\mathcal{U}'} := \{(\mathcal{W}', \mathcal{U}')$ par privilegiado tal que $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}' \neq \emptyset\}$.

Como $\mathcal{B}$ é enumerável, é suficiente mostrar que cada $\mathcal{C}_{\mathcal{U}'}$ é enumerável. De fato, cada $\mathcal{C}_{\mathcal{U}'}$ é unitário pois, se $(\mathcal{W}', \mathcal{U}') \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}'}$, então $\mathcal{W}'$ é a componente conexa de $f^{-1}(\mathcal{U}')$ que contém $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}'$, e só existe uma tal componente. □

(e) *Lema:* Seja E um espaço topológico, $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta de E tal que, $\forall n \in$ N, o subespaço $\overline{\mathcal{U}_n}$ é separável e metrizável. ***Então*** E é separável e metrizável.

Prova: Vide [Die74], volume II, capítulo XII, §(12.4.7). □

(f) Seja $\sim$ em N definida por $x \sim x'$ se existe uma seqüência finita $\{(\mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i) : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ de pares privilegiados tal que $x \in \mathcal{W}_1$, $x' \in \mathcal{W}_r$ e $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_{i+1} \neq \emptyset$ para $1 \leqslant i \leqslant r-1$.

Então $\sim$ é uma relação de equivalência em N e $[x_0] \in$ N$/\sim$ é a componente conexa $\mathcal{C}_{x_0}$ de N que contém x_0.

Com efeito:

(1) $[x_0]$ é conexo (pois cada $\cup_{1\leqslant i\leqslant r}\mathcal{W}_i$ é conexo por caminhos $\therefore$ $[x_0]$ é conexo por caminhos) e $x_0 \in [x_0]$, logo $[x_0] \in \mathcal{C}_{x_0}$;

(2) Por outro lado, $\mathcal{C}_{x_0}$ é conexo por caminhos (pois é conexo e N é localmente conexo por caminhos); portanto, dado $y \in \mathcal{C}_{x_0}$ $\exists \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{C}_{x_0}$ contínua com $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = y$. Como $\gamma([0,1])$ é compacto, podemos cobri-lo com um número finito de $\mathcal{W}_i'$s, com cada $(\mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i)$ par privilegiado; então $y \in [x_0]$ $\therefore$ $\mathcal{C}_{x_0} \subset [x_0]$, e do item anterior segue $\mathcal{C}_{x_0} = [x_0]$.

Afirmação: Dado $x_0 \in$ N, $[x_0]$ admite uma cobertura enumerável $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sendo $(\mathcal{W}_n, \mathcal{U}_n)$ um par privilegiado para cada $n \in \mathbb{N}$. Como cada $\overline{\mathcal{W}_n}$ é separável e metrizável, segue do lema (e) que $[x_0] = \mathcal{C}_{x_0}$ é separável e metrizável.

Prova:

(I) Seja $C_k := \{$k-uplas $(\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k)$ tais que $x_0 \in \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_{i+1} \neq \emptyset$ para $1 \leqslant i \leqslant k-1$ e $(\mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i)$ par privilegiado para $1 \leqslant i \leqslant k$, com $(\mathcal{W}_1, \mathcal{U}_1)$ fixo $\}$. Então $[x_0] = \cup_{k\in\mathbb{N}} C_k$.

Com efeito, dado $y \in [x_0]$, seja $\{(\mathcal{V}_i, \mathcal{U}_i) : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ seqüência de pares privilegiados tal que $x_0 \in \mathcal{V}_1$, $y \in \mathcal{V}_r$ e $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_{i+1} \neq \emptyset$. Como $x_0 \in \mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$, segue $(\mathcal{W}_1, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k) \in C_{r+1}$, donde $y \in \cup_{k\in\mathbb{N}} C_k \therefore [x_0] \in \cup_{k\in\mathbb{N}} C_k$; a outra inclusão é óbvia.

(II) Pelo item anterior, é suficiente mostrar que cada C_k é enumerável. Mas

$$C_k = \prod_{2\leqslant i\leqslant k} \widetilde{C}_i$$

onde $\widetilde{C}_i = \{\mathcal{W}$ tal que $(\mathcal{W}, \mathcal{U})$ privilegiado, $\mathcal{W}' \in \widetilde{C}_{i-1}$ e $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}' \neq \emptyset\}$ para $3 \leqslant i \leqslant k$ e $\widetilde{C}_2 = \mathcal{C}_{(\mathcal{W}_1, \mathcal{U}_1)}$.

Segue do item (d) que

(A) $\widetilde{C}_2 = \mathcal{C}_{(\mathcal{W}_1, \mathcal{U}_1)}$ é enumerável;

(B) $\widetilde{C}_{i-1}$ enumerável $\Rightarrow \widetilde{C}_i$ enumerável.

Então todos os $\widetilde{C}_i$'s são enumeráveis, donde C_k é enumerável e $\{C_k : k \in \mathbb{N}\}$ é enumerável. □

(g) Seja $y \in [x_0]$ e $(\mathcal{W}_y, \mathcal{U}_y)$ par privilegiado tal que $y \in \mathcal{W}_y$. Seja $\varphi_y = (x^1, \dots, x^m) : \mathcal{U}_y \longrightarrow B_3(\mathbb{O})$ carta local tal que $f(\mathcal{W}_y)$ seja uma fatia de $\mathcal{U}_y$, digamos $f(\mathcal{W}_y) = \{u \in \mathcal{U}_y$ tal que $x^{n+1}(u) = \cdots = x^m(u) = 0\}$, e tal que $f|_{\mathcal{W}_y} : \mathcal{W}_y \longrightarrow f(\mathcal{W}_y)$ seja um homeomorfismo, o que podemos tomar por causa dos itens (b) e (c).

Então

$$\psi_y = (x^1 \circ f, \cdots, x^n \circ f) : \mathcal{W}_y \longrightarrow B_3(\mathbb{O}) \subset \mathbb{R}$$

é um homeomorfismo; além disso,

$$\psi'_y \circ \psi_y^{-1} = \psi'_y|_{f(\mathcal{W}'_y)} \circ \psi_y|^{-1}_{f(\mathcal{W}_y)} : \psi_y(\mathcal{W}_y \cap \mathcal{W}'_y) \longrightarrow \psi'_y(\mathcal{W}_y \cap \mathcal{W}'_y)$$

é C^∞.

Portanto $\{(\mathcal{W}_y, \psi_y) : y \in [x_0]\}$ gera uma estrutura diferenciável C^∞ sobre $[x_0]$, e como $\tau([x_0])$ é separável e metrizável ($\therefore$ tem base enumerável), está bem definida uma estrutura de variedade diferenciável C^∞ sobre $[x_0]$.

Além disso, como $f|_{\mathcal{W}_y} : \mathcal{W}_y \longrightarrow M$ é um mergulho, para cada y, segue que $f : N \longrightarrow M$ é uma imersão. ■

Referências Bibliográficas

[AM78] R. Abraham and J. Marsden. *Foundations of mechanics.* Benjamin Cummings, Massaschusetts, 2nd edition, 1978.

[Arn78] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, 1978.

[Boo75] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press, New York, 1975.

[BV] K. H. Bhaskara and K. Viswanath. Calculus on poisson manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 20(1988):68–72.

[CO] H. M. A. Castro and W. M. Oliva. Poisson structures on the phase space of mechanical systems with constraints. *Resenhas IME-USP*, 1(1997):85–92.

[Die74] J. Dieudonne. *Treatise on Analysis*, volume 2-4. Academic Press, New York, 1974.

[Dri] V. G. Drinfeld. Hamiltonian structures on lie groups, lie bialgebras and the geometric meaning of the classical yang-baxter equations. *Soviet Math. Dokl.*, 27(1983):68–71.

[FO] G. Fusco and W. M. Oliva. Dissipative systems with constraints. *J. Differential Equations*, 63(1986):362–388.

[Gra] J. Grabowsky. $\mathbb{Z}$-graded extensions of poisson brackets. *Rev. Math. Phys.*, 9(1997):1–27.

[KS] Y. Kosmann and Schwarzbach. Poisson-drinfeld groups. *UFR de Mathématiques, Université de Lille I*, (1986):191–215.

[Lic] A. Lichnerowicz. Les variétés de poisson et leurs algèbres de lie associées. *J. Differential Geometry*, 12(1977):253–300.

[Lim65] E. L. Lima. *Cálculo Tensorial*, volume 32 of *Notas de Matemática.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1965.

[O'N83] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry — with Applications to Relativity.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York, 1983.

[Ste] P. Stefan. Accessible sets, orbits and foliations with singularities. *Proc. London Math. Soc.*, 29(1974):699–713.

[Sus] H. J. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 180(1973):171–188, June.

[War83] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1983.

[Wei] A. Weinstein. The local structure of poisson manifolds. *J. Differential Geometry*, 18(1983):523–557.

[Yok92] T. Yokonuma. *Tensor Spaces and Exterior Algebra*, volume 108 of *Translations of Mathematical Monongraphs*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1992.

Índice Remissivo

álgebra de Grassman
    de um espaço vetorial, 10
álgebra de Lie, 17
    de um grupo de Lie, 18
álgebra de Lie-Drinfeld, 94
álgebra exterior
    de um espaço vetorial, 10
álgebra tensorial
    de um espaço vetorial, 10
álgebra tensorial contravariante
    de um espaço vetorial, 10
órbitas
    de uma coleção de campos de vetores numa variedade diferenciável, 144
    de uma coleção de flechas numa variedade diferenciável, 134

ação de Poisson-Drinfeld, 96
aplicação
    C^∞ entre fibrados vetoriais, 12
    de Poisson, 32
    exponencial, 18
    tangente, 16

bi-álgebra de Lie, 94

campo de forças, 101
    ativo, 104
campo de vetores completo, 16
campo GMA, 110
campo hamiltoniano, 28
campo tensorial, 15
    invariante à direita, 18
    invariante à esquerda, 18
    linear, 72
cociclo
    de um grupo de Lie em relação a uma representação, 92
    de uma álgebra de Lie em relação a uma representação, 92
π-cohomologia de uma variedade de Poisson, 36
colchete de Lie
    entre campos de vetores de uma variedade diferenciável, 16
    graduado, 21
colchete de Poisson, 25
    linear, 67
    no dual de uma álgebra de Lie, 68
Colchete de Schouten-Nijenhuis, 22
coleção de flechas
    homogênea, 134
    simétrica, 134
curvas integrais
    de um sistema hamiltoniano, 28
    de um sistema mecânico, 110

derivada
    de Lie, 16
    de uma aplicação entre variedades diferenciáveis, 16
    exterior de Cartan, 16
difeomorfismo local, 133

energia cinética, 101
estrutura de Poisson, 28
estrutura de Poisson produto, 43
estrutura de Poisson transversa, 66

fibra de um fibrado vetorial, 12
fibrado vetorial, 12
flecha, 133

folha, 133
folheação com singularidades, 133
forma simplética canônica do fibrado cotangente, 32
função de Casimir, 34

grupo de Lie, 16
grupo de Poisson-Drinfeld, 85

homomorfismo
  entre fibrados vetoriais, 13
  entre grupos de Lie, 17
  entre variedades de Poisson, 32

identidade de Jacobi, 17, 21, 25, 28
isomorfismo
  entre fibrados vetoriais, 13
  entre grupos de Lie, 17
  entre variedades de Poisson, 32

levantamento
  de um campo de vetores, 43
  vertical, 104

métrica de Jacobi, 126
movimento compatível com um vínculo, 103

potência exterior
  de um espaço vetorial, 10
potência tensorial
  de um espaço vetorial, 10
produto exterior, 10
  de representações de um grupo de Lie, 20
  de representações de uma álgebra de Lie, 20
produto interior, 11
  por um campo tensorial contravariante, 16
  por um campo tensorial covariante, 16
produto tensorial
  de representações de um grupo de Lie, 20
  de representações de uma álgebra de Lie, 20
propriedade de Leibniz, 25
pull back
  por uma aplicação entre variedades diferenciáveis, 15
push forward
  por uma aplicação entre variedades diferenciáveis, 16

representação
  de um grupo de Lie, 19
  de uma álgebra de Lie, 19

símbolo de Kronecker generalizado, 22
seção
  de um fibrado vetorial, 12
  de um fibrado vetorial
    ao longo de uma aplicação, 13
sistema hamiltoniano, 28
sistema mecânico, 101
  vinculado, 104
subálgebra de Lie, 17
subgrupo de Lie, 17
subvariedade
  de Poisson, 39
  de uma variedade diferenciável
    imersa, 12
    mergulhada, 12

tensor de Poisson, 24
  simplético, 30
tensor de Poisson-Drinfeld, 85
teorema
  da Órbita, 135
  da Órbita II, 144
  da folheação simplética, 41
  de Darboux, 66
  de Poincaré-Volterra, 149
  Splitting, 54
trajetórias
  de um sistema hamiltoniano, 28
  de um sistema mecânico, 110
transformação de Legendre, 101

translação à direita, 17
translação à esquerda, 17

vínculo, 103
    holônomo, 103
    não-holônomo, 103
variedade de Poisson, 24
variedade diferenciável, 11
variedade produto, 42
variedade simplética, 30