

Frequências de Espalhamento e a Propagação
de onda Elásticas no exterior
de um corpo Tridimensional

Luis Antonio Cortés Vega

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração : EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala

*Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio do CNPq, Direção de
Investigação da Universidade do Bio-Bio-Chile e Depto. de Matemática da Universidade
do Bio-Bio Concepción-Chile.*

-São Paulo, Março de 2000-

Frequências de Espalhamento e a Propagação de ondas Elásticas no exterior de um corpo Tridimensional

*Este exemplar corresponde à redação final devidamente
corrigida e defendida por Luis Antonio Cortés Vega
e aprovada pela comissão julgadora.*

São Paulo, 04 de Outubro de 2000.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala -IME-USP
- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo -IME-USP
- Prof. Dr. Rafael Iório Junior -IMPA
- Prof. Dr. José Luiz Boldrini -IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Jaime Muñoz Rivera -LNCC-UFRJ

Dedicatoria

Tudo aqui escrito é dedicado a minha esposa Daniza Elizabeth e Filinha Fernanda Belen, com muito amor.

Faço uma dedicatoria especial a meus pais Yubisa e Hernan, com amor.

Finalmente registro uma dedicatoria a meus sogros Marta e Gabriel, com amor.

Agradecimentos

Em verdade, se necessário fosse colocar aqui os nomes de todas as pessoas que ajudaram para que este trabalho fosse realizado, com certeza esta seção seria maior que o corpo da mesma. Assim, gostaria apenas de ressaltar alguns nomes que de forma direta ou indireta contribuíram.

A primeira delas, é o professor Gustavo Alberto Perla Menzala, excelente orientador, conselheiro e amigo, pelas inúmeras sugestões e apoio constante.

Sou grato ao professor Manoel Valentim de Pera García por sua amizade e incansável vontade.

Gostaria de registrar minha gratidão aos professores Celso Fabrisio Costa e Rodolfo Baesa por ter confiança em mim. Ao professor Humberto Prado Castillo, obrigado pelos passos iniciais.

Aos professores do Depto. de Matemática da Universidade do Norte, Oscar Rojo, Ricardo Soto, Arnaldo Prado, Jaime Vera, Fernando Jorquera, a eles obrigado.

Aos professores do Depto. De Matemática da Universidade do Bio-Bio, obrigado pelo apoio. Ao Director do Depto, Gabriel Sanhueza Daroch, obrigado pela disposição e confiança.

Aproveito a oportunidade para agradecer:

A meu amigo Juan Egaña por seu apoio e amizade, à família Bethania, Luciano, Iris e Andrés por sua boa vontade, a Fransisca, Pinho e Feijao pelo trabalho que eles fazem, a meus amigos Peruanos, Argentinos, Brasileños, Colombianos e Chilenos por os bons momentos. A Raul, Filidor, Cristian, Roberto, Ivan, Carlos, Waghinton, Bernando y Gonzalo, obrigado pela amizade.

A Isidro, Adriana, Daysi, Zunilda, obrigado por todo o apoio.

A Silbana, Antonia, Alicia, Brenda, Dinka, Guillermo e Raquel, obrigado.

Finalmente agradeço a Deus pela vida.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Motivação	2
2	Preliminares	15
2.1	Apresentação	15
2.2	O problema direto de espalhamento associado com a propagação de ondas elásticas .	16
2.3	Resultados de Existência e Unicidade	23
3	Acoplamento entre a formulação variacional e a representação integral na propagação de ondas elásticas	44
3.1	Apresentação	44
3.2	Redução a um Domínio Limitado	47
3.3	Os modelos do tipo Neumann e Dirichlet	66
4	Frequências de Espalhamento	71
4.1	Apresentação	71
4.2	Extensão Meromorfa do Resolvente	72
5	Apêndices	83

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Um processo físico de espalhamento pode ser descrito, de uma maneira simplificada, da seguinte forma : Um feixe de partículas incide sobre um alvo, e o resultado da colisão é registrado em detectores. Da análise da interação das partículas incidentes com o alvo tiram-se conclusões sobre, por exemplo, a estrutura do alvo. Na física quântica, são de importância as experiências de espalhamento; por exemplo, a descoberta do núcleo feita por Rutherford em 1911 foi baseada no seu estudo de partículas α espalhadas por finas folhas de ouro. Na teoria quântica não relativística o feixe de partículas (ou ondas) incidentes é geralmente representado pelas ondas monocromáticas planas $\exp[i(d \cdot x - \omega t)]$, onde $i = \sqrt{-1}$, ω é a frequência e d é o vetor de onda (o qual dá as direções de propagação das ondas). Por exemplo, no caso unidimensional, se a direção da onda incidente vem dada pelo vetor $d = (-1, 0, 0)$, ela é descrita na forma $\exp(-i\tau)$, onde $\tau = x + \omega t$ e ω é a velocidade de fase da onda. Assim, a onda pode ser imaginada deslocando-se de $\tau = +\infty$ a $\tau = -\infty$. O espalhador é representado por um potencial $V(x, t)$, que é uma função suficientemente regular nas variáveis reais x, t , e se anula suficientemente rápido quando x tende a $\pm\infty$. O processo de espalhamento, isto é, a dinâmica da partícula incidente é governado pela equação de Schrödinger unidimensional e dependente do tempo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) - \frac{2m}{\hbar} V(x, t) \psi(x, t) = \frac{-2mi}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t), \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

onde m denota a massa da partícula e $\hbar = h/2\pi$, aqui h é a constante de Planck. Note que a equação (1.1) pode ser escrita na forma

$$i \frac{d}{dt} \psi = A(t) \psi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

onde o operador $A(t)$ é definido por

$$A(t) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V,$$

aqui o operador V denota um operador de multiplicação pelo potencial $V(x, t)$. Definindo o Hamiltoniano via

$$H(t) = \hbar A(t),$$

a equação (1.2) torna-se

$$i \hbar \frac{d}{dt} \psi = H(t) \psi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Agora, para fixar as idéias, suponha que o potencial não depende do tempo, isto é, $V(x, t) = V(x)$, ponhamos

$$H(t) = H = H_0 + V,$$

onde V é o operador de multiplicação pela função $V(x)$ e H_0 é o Hamiltoniano associado com a dinâmica “livre” da partícula, isto é

$$H_0 = -\frac{2m}{\hbar} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Então é possível provar que a (única) solução do problema de Cauchy

$$i \hbar \frac{d}{dt} \psi = H \psi(t), \quad \psi(s) = \psi_s, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

é dada pela fórmula explícita

$$\psi(t) = \exp(-i(t-s)H) \psi_s.$$

A partir daqui, um dos principais problemas da teoria de espalhamento é o estudo do comportamento assintótico da solução $\psi(t)$ (quando $t \rightarrow \pm\infty$), por exemplo, se o potencial $V(x)$ é tal que $|V(x)| \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$ o suficientemente rápido, (isto é, o efeito do potencial é pequeno muito longe da origem) e como de forma intuitiva, temos que para grandes distâncias correspondem grandes tempos de viagem, se espera que $\exp(-itH)$ se comporte como $\exp(-itH_0)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. A teoria de espalhamento mede isto da seguinte forma: A função de onda $\psi(t) = \exp(-itH) \psi_0$ se comporta

como a partícula livre quando $t \rightarrow \pm\infty$ se, e só se, existem duas únicas soluções ψ^\pm do modelo livre, tais que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\exp(-itH)\psi_0 - \exp(-itH_0)\psi^\pm| = 0,$$

isto é, a onda $\psi(t)$ é praticamente indistingível da onda $\exp(-itH_0)\psi^-$ no passado remoto e da onda $\exp(-itH_0)\psi^+$ no futuro distante. A norma $|\cdot|$ deve ser fisicamente significativa. O fato acima se escreve

$$\exp(-itH)\psi_0 \sim \exp(-itH_0)\psi^\pm.$$

Se introduzem os “operadores de onda” associados com o par (H, H_0) , a saber os limites fortes

$$W_\pm = W_\pm(H, H_0) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(-itH)\exp(-itH_0).$$

Os principais objetivos da teoria (veja, por exemplo, os Textos de W.O Amrein, J.M Jauch e K.B Sinha [1], H.L Cycon, R.G Froese, W. Kirsch e B. Simon [14] e T. Kato [28]) são mostrar que tais operadores existem e tem as seguintes propriedades

- W_\pm são isometrias que entrelaçam H e H_0 .
- Os contradomínios $Ran(W_\pm)$ são subespaços fechados do espaço de Hilbert \mathcal{H} , fisicamente significativo. Eles reduzem o operador H e estão contidos em um espaço de funções “absolutamente contínuas”.
- $Ran(W_-) = Ran(W_+)$.

De fato, suponhamos que os itens acima são válidos, então dado ψ^- existe uma única ψ , a saber $\psi = W_- \psi^-$, tal que

$$\exp(-itH)\psi \sim \exp(-itH_0)\psi^-.$$

Mas, então existe uma única ψ^+ tal que $\psi = W_+ \psi^+$, pois os operadores de onda W_\pm são isometrias. É claro que a função ψ^+ é tal que

$$\exp(-itH)\psi \sim \exp(-itH_0)\psi^+.$$

Portanto $W_- \psi^- = W_+ \psi^+$ de modo que $\psi^+ = W_+^* W_- \psi^-$, onde W_+^* denota o operador adjunto de W_+ . Em outras palavras, se os operadores W_\pm existem e suas imagens coincidem, ψ^+ fica determinada pelo estado ψ^- através do operador :

$$S : \psi^- \rightarrow \psi^+,$$

dado por

$$S = W_+^* W_-.$$

O operador S está bem definido sempre que os operadores de onda existam, além disso S é um operador unitário se, e só se, $Ran(W_+) = Ran(W_-)$. O operador S recebe o nome de operador de espalhamento. Ele é a peça importante da teoria, pois toda a informação a respeito da dinâmica da partícula está contida nele. Tratamentos especializados do processo físico do espalhamento a maiores dimensões e operadores bem mais gerais do que o Hamiltoniano dado pela equação de Schrödinger unidimensional, podem ser encontrados nos textos de M. Reed e B. Simon [49, 50] e o texto de R.J Iorio, Jr [26] no qual podemos achar varios outros comentarios interessantes do assunto.

Existem importantes processos de espalhamento que não são de natureza quântica mas clássica, neste sentido, mencionamos três problemas básicos, a saber, o espalhamento de ondas de som (acústica), o espalhamento de ondas eletromagnéticas e o espalhamento de ondas elásticas. A teoria para estes modelos tem tido um grande desenvolvimento desde os anos 50 até o presente. Podemos citar, por exemplo, os textos e referências de D. Colton e R. Kress [7, 8], o texto e referências de A.G. Ramm [47], J.B. Bidnar, R. Redner, E. Robinson e A. Weighn [4], e o texto e referências de C.H. Wilcox [58], e no caso de ondas elásticas o texto e referências de V.D. Kuprazde [32] e Y-H. Pao, F. Santosa, W.W. Symes e C. Holland [42], entre outros. Somente para fixar ideias, consideremos a propagação de ondas de som num meio isotrópico e homogêneo de \mathbb{R}^3 com densidade ρ e velocidade do som c , o movimento da onda pode-se descrever por um potencial de velocidade $U(x, t)$ do qual o campo de velocidade é obtido via

$$v = \frac{1}{\rho} \text{grad } U(x, t)$$

e a pressão, que denotamos por p , bem dada pela fórmula

$$p - p_0 = -\frac{\partial U(x, t)}{\partial t},$$

onde p_0 descreve a pressão do meio não perturbado. Na teoria linearizada, o potencial de velocidade $U(x, t)$ satisfaz a equação de ondas

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta U(x, t) = 0. \quad (1.5)$$

No contexto do espalhamento, a solução $U(x, t)$ da equação (1.5), é procurada na forma

$$U(x, t) = u(x) \exp(-i \omega t),$$

com frequência $w > 0$. Daí segue que a função $u(x)$ satisfaz a equação reduzida de ondas chamada também de equação de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1.6)$$

com número de onda $k^2 = w^2/c^2$. Assim, o espalhamento direto de ondas planas harmônicas no tempo, por um obstáculo $D \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\bar{D}$, conduz a um problema exterior para a equação (1.6) com valores na fronteira. O campo total do processo de espalhamento é a soma

$$u(x, d, k) = u^{in}(x, d, k) + u^{sc}(x, d, k),$$

de um feixe de ondas espalhadas (desconhecido) $u^{sc}(x, d, k)$, e um feixe de ondas incidentes (os dados) $u^{in}(x, d, k)$ o qual satisfaz a equação (1.6) em \mathbb{R}^3 no sentido das distribuições. O feixe de ondas incidentes é dado geralmente na forma de ondas monocromáticas planas

$$u^{in}(x, d, k) = \exp(ikd \cdot x),$$

e direções de impacto $|d| = 1$. Além disso, o campo $u^{sc}(x, d, k)$ satisfaz o seguinte requisito adicional

$$\frac{\partial u^{sc}}{\partial |x|} - ik u^{sc} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

uniformemente em todas as direções $\hat{x} \in S^2$, com $S^2 = \{\hat{y} \in \mathbb{R}^3 : |\hat{y}| = 1\}$. A condição acima é chamada de “ condição de radiação de Sommerfeld ”. Os seguintes problemas (chamados problemas de espalhamento direto) são importantes :

- Dada $g = -\tau u^{in}$, achar $u = u^{in} + u^{sc}$ tal que :

$$\begin{cases} \Delta u^{sc}(x) + k^2 u^{sc}(x) = 0, & x \in \Omega = \mathbb{R}^3/\bar{D}, \\ (\tau u^{sc})(x) = g(x), & x \in \partial\bar{D}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial |x|} u^{sc} - ik u^{sc}\right) = o(1/|x|), & |x| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

onde τ denota um operador de traço, dado geralmente por uma das seguintes condições em $\partial\bar{D}$:

$$\tau u^{in} = \begin{cases} u^{in}, & \text{(No caso Dirichlet),} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u^{in}, & \text{(No caso Neumann),} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u^{in} + \lambda u^{in}, & \text{(No caso Robin).} \end{cases}$$

Na terceira condição, λ é o parâmetro de impedância. Notamos que a condição de radiação de Sommerfeld assegura a unicidade da solução do problema, e o seguinte comportamento no infinito

$$u^{sc}(x, d, k) = \frac{\exp(i k |x|)}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}, d, k) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

uniformemente em todas as direções $\hat{x} \in S^2$. A função

$$u_\infty : S^2 \times S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

é chamada de “amplitude de espalhamento”. Defina o “operador de espalhamento” como sendo a aplicação

$$F(k) : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2),$$

o qual é conectado com a amplitude de espalhamento via

$$(F(k)g)(\hat{x}) = \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d, k) g(d) dS(d), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Considere agora $S(k)$ dado por

$$S(k) = I + \frac{i k}{2 \pi} F, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Na teoria, o estudo da extensão meromorfa ao plano complexo da amplitude de espalhamento é significativo. Observe que pela identidade acima isto conduz ao estudo da extensão meromorfa ao plano complexo do operador $S(k)$, $k \in \mathbb{R}$ (chamado de matriz de espalhamento). As singularidades da extensão meromorfa da matriz são significativas. Considere o modelo (1.5) com a condição de fronteira de tipo Dirichlet (e velocidade $c = 1$) no interior de um obstáculo D , o qual é um domínio compacto em \mathbb{R}^3 . Sabemos que as soluções do problema

$$(\text{Int}) \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t) - \Delta U(x, t) = 0, & \text{em } D \times \mathbb{R}, \\ U(x, 0) = U_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, 0) = U_1(x) & \text{em } D, \\ U(x, t) = 0 & \text{em } \partial \bar{D} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

podem ser representadas, utilizando-se a decomposição espectral do Laplaciano Δ em D , como superposição de movimentos harmônicos com frequências $\mu_n = \mu_n(D)$ do tipo :

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \exp(i \mu_n t) + b_n \exp(-i \mu_n t)] W_n(x),$$

onde μ_n^2 são os valores próprios do Laplaciano $-\Delta$ obtidos da forma

$$0 < \mu_1^2 \leq \mu_2^2 \leq \mu_3^2 \leq \dots \rightarrow +\infty,$$

e $W_n \in L^2(D)$ são as correspondentes funções próprias, isto é :

$$\begin{cases} \Delta W_n(x) + \mu_n^2 W_n(x) = 0, & \text{em } D, \\ W_n(x) = 0, & \text{em } \partial\bar{D}. \end{cases}$$

Consideramos agora as soluções da equação de ondas no meio exterior a D , i.e., $\Omega = \mathbb{R}^3/\bar{D}$, com a condição de fronteira tipo Dirichlet :

$$\text{(Ext)} \begin{cases} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} - \Delta U(x, t) = 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}, \\ U(x, 0) = U_0(x), \quad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = U_1(x) & \text{em } \Omega, \\ U(x, t) = 0 & \text{em } \partial\bar{D} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pode-se então mostrar (veja, por exemplo, o texto de P.D Lax e R.S Phillips [34]) que a extensão autoadjunta do operador

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

é o gerador infinitesimal do problema acima e não tem autovalores (nem funções próprias em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$), e que, na verdade seu espectro é contínuo. No entanto, as soluções do problema (Ext) podem ser expressas como superposições de movimentos harmônicos envolvendo todas as frequências, de fato, para t muito grande, elas se comportam assintoticamente na forma

$$U(x, t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j \exp(-i\sigma_j t) W_j(x), \quad (1.7)$$

onde os números c_j dependem dos dados iniciais; entretanto os valores complexos σ_j (as frequências de espalhamento) e as funções W_j são determinadas somente pelo obstáculo D e são, num sentido generalizado, os valores próprios e funções próprias do operador de Laplace Δ no domínio exterior Ω . Em outras palavras, o papel desempenhado pelos valores próprios μ_n , no modelo interior (Int), passa a ser feito pelas frequências de espalhamento σ_j , i.e., os pólos da extensão meromorfa ao plano complexo \mathcal{C} da matriz de espalhamento $\mathcal{S}(k)$. Assim, as frequências de espalhamento associadas

com a evolução do modelo, são números complexos, os quais, como no exemplo acima, são os valores próprios de um operador auxiliar, eles caracterizam o comportamento assintótico das soluções com energia finita. Pode-se provar que elas formam um conjunto discreto no plano complexo \mathcal{C} , e se espera que as soluções do modelo de evolução tenham um comportamento assintótico do tipo (1.7). Resultados importantes nesta direção são dados nos artigos de P.D.Lax, C.S. Morawetz e R.S Phillips [33], C.S Morawetz, J. Ralston e W.A Strauss [40], P.D Lax e R.S Phillips [34], C. Morawetz [39], J. Ralston [46], J. Cooper, G. Perla Menzala e W.A Strauss [13] e A.G. Ramm [47], entre outros, e via métodos estacionários (isto é após a separação de variáveis), citamos, por exemplo, os artigos de M. Lenoir, M. Vuillerme-Ledard e C. Hazard [35], B. Loe [36] e O. Poisson [45].

Na atualidade a pesquisa se concentra nos seguintes itens

- Mostrar a existência das frequências de espalhamento.
- Qual é a distribuição das frequências de espalhamento no plano complexo.
- Em que forma elas podem dar informações sobre as propriedades geométricas do obstáculo.

Para os dois primeiros itens acima e no caso de ondas acústicas citamos, por exemplo, os artigos de P.D Lax e R.S Phillips [34], O. Poisson [45], M. Ikawa [24, 25], C. Gérard [16], C. Fernández e R. Lavine [18], A. Sa Barreto e M. Zworski [51], M. Wei, G. Majda e W.A Strauss [57] e no caso de ondas elásticas citamos, por exemplo, as contribuições de R. Coimbra Charao e G. Perla Menzala [5], P. Stefanov e G. Vodev [55] e M.A Astaburuaga, R. Coimbra Charao, C. Fernández e G. Perla Menzala [3].

Uma questão associada ao terceiro ponto acima é : Se conhecemos as frequências de espalhamento, é possível recuperar a forma do corpo D ? Esta questão é parte do que é conhecido como problema inverso de espalhamento. Especificamente um desses problemas consiste em recuperar o obstáculo (ou potencial) a partir de $u_\infty(\hat{x}, d, k)$. Resultados, nesta direção, no caso acústico e eletromagnético foram obtidos por T.S Angell, D. Colton e A. Kirsch [2], G. Perla Menzala [43], D. Colton e P. Monk [10, 11, 12], D. Colton e P. Hånher [6], A. Kirsch e R. Kress [29, 30, 31], P. Maponi, L. Misici e F. Zirilli [37], entre outros, e no caso de modelos associados a ondas elásticas citamos, por exemplo, os resultados de P. Hånher [21] e P. Hånher e G.C. Hsiao [22].

Na literatura existem várias formas de definir o conceito de frequências de espalhamento (veja, por exemplo, o artigo de J. Cooper, G. Perla Menzala e W.A Strauss [13]). Neste trabalho

adotaremos aquela através do método das singularidades da matriz S , isto é, separamos variáveis e consideramos o modelo de ondas elásticas reduzidas, assim, as frequências de espalhamento são as singularidades da extensão meromorfa do operador Resolvente associado ao modelo.

O objetivo deste trabalho é estender o método chamado de “ Acoplamento entre uma formulação variacional e uma representação integral ” introduzido no artigo de M. Lenoir, M. Vuillerme-Ledard e C. Hazard em [35]. Nesse trabalho, eles usam o método para localizar as frequências de espalhamento associadas ao modelo de ondas acústicas propagando-se no exterior $\Omega = \mathbb{R}^3/\overline{D}$ de um corpo rígido. Nós estudamos o modelo de ondas elásticas propagando-se no exterior de um corpo compacto \overline{D} , com uma condição de fronteira de tipo Neumann ou Dirichlet. Nossos modelos tem a forma

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & \text{se } x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial \overline{D}, \\ \text{Condição de radiação,} \end{cases} \quad (1.8)$$

onde \mathbf{h} pertence a $[L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp} \mathbf{h} = \cap_j^3 \text{supp} h_j \subset \Omega_R$, $\sigma \in \mathcal{C}$, a e b são tais que $a > 0$, $b > 0$ e $\text{Im}(\sigma) > 0$. O operador de traço $\Lambda_{\mathbf{n}}$ dado acima denota uma das seguintes condições sobre $\partial \overline{D}$:

$$\Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}|_{\partial \overline{D}}, & \text{No caso Dirichlet,} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{u}|_{\partial \overline{D}}, & \text{No caso Neumann,} \end{cases} \quad (1.9)$$

onde $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ denota o operador de tração :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{n}(x)} \mathbf{u}(x) = 2b^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + (a^2 - 2b^2) \mathbf{n}(x) \text{div} \mathbf{u}(x) + b^2 \mathbf{n}(x) \times \text{rot} \mathbf{u}(x), \quad x \in \partial \overline{D}$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \left[\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}, \frac{\partial u_3}{\partial n} \right].$$

O aberto limitado Ω_R dado acima tem a forma $\Omega_R = \Omega \cap B(0, R)$, onde $R > 0$ é o raio da bola $B(0, R)$, com centro na origem de \mathbb{R}^3 , i.e.,

$$B(0, R) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R \}$$

com

$$\partial \overline{D} \subset B(0, R) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R \}.$$

Mostramos que as frequências de espalhamento associadas ao modelo (1.8) podem ser obtidas a partir da formulação variacional do modelo

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & \text{se } x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_{\nu} \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{D}_{\nu} \mathbf{u}](z), & \text{se } z \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{u}](z), & \text{se } z \in \partial B(0, R), \end{array} \right. \quad (1.10)$$

onde $\partial B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}$ é a fronteira da bola $B(0, R)$ e \mathbf{D}_{ν} , \mathbf{N}_{α} são operadores que atuam em soluções do modelo (1.8) na forma

$$[\mathbf{D}_{\nu} \mathbf{u}](z) = (\mathbf{n}(z) \times \text{rot} \mathbf{u}(z)) + \text{Re}(\sigma) \nu \mathbf{n}(z) \times (\mathbf{u}(z) \times \mathbf{n}(z)), \quad z \in \partial B(0, R),$$

$$[\mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{u}](z) = \text{div} \mathbf{u}(z) + \frac{a^2}{b^2} \text{Re}(\sigma) \alpha \mathbf{u}(z) \cdot \mathbf{n}(z), \quad z \in \partial B(0, R),$$

com $\nu, \alpha \in \mathbb{C}$. Estes tipos de operadores são semelhantes aos operadores introduzidos no artigo de C. Hazard e M. Lenoir [23], no estudo do espalhamento que gera a interação de um feixe de ondas eletromagnéticas planas com um corpo condutor perfeito, imerso num meio localmente não homogêneo. Note que no modelo (1.8) o domínio Ω é não limitado; no entanto no modelo (1.10) o domínio Ω_R é limitado. Esta é uma vantagem, pois é mais fácil detectar os polos da solução do modelo (1.10) que do modelo não limitado (1.8). Nossa demonstração da existência de polos associadas ao modelo (1.10) difere daquela dada no artigo de M. Lenoir, M. Vullerme-Ledard e C. Hazard em [35] para o caso acústico. Nós usamos várias idéias contidas nos artigos de R.S. Phillips [44] e A.G. Ramm [47].

Apresentamos a seguir uma breve descrição de cada capítulo :

No capítulo 2 apresentamos o problema direto de espalhamento associado ao modelo reduzido de ondas elásticas num meio homogêneo e isotrópico exterior a um corpo compacto \bar{D} com uma condição de fronteira de tipo Neumann ou Dirichlet. Mostramos resultados de existência e unicidade. As ferramentas utilizadas baseiam-se em técnicas de R.S. Phillips [44] e A.G. Ramm [47]. As consequências destes resultados são dadas nos capítulos 3 e 4 do trabalho. O principal resultado do Capítulo é o seguinte:

“ Seja $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$. Então, para todo $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R = \Omega \cap B(0, R)$ o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), \quad \text{se } x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, \quad \text{se } x \in \partial \overline{D}, \\ \text{Condição de radiação,} \end{array} \right. \quad (1.11)$$

tem uma (única) solução $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$ ”.

No capítulo 3 estudamos o modelo de ondas elásticas reduzidas no aberto limitado Ω_R dado acima. Apresentamos resultados de existência e unicidade semelhantes aos de M. Lenoir, M. Vuillerme-Ledard e C. Hazard [35] e C. Hazard e M. Lenoir [23]. Nosso principal resultado mostra que soluções do problema acima são soluções do problema (restritas a Ω_R)

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), \quad \text{se } x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, \quad \text{se } x \in \partial \overline{D}, \\ [\mathbf{D}_{\nu} \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{D}_{\nu} \mathbf{u}](z), \quad \text{se } z \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{u}](z), \quad \text{se } z \in \partial B(0, R). \end{array} \right. \quad (1.12)$$

No capítulo 4 estudamos a extensão meromorfa ao plano complexo \mathcal{C} do operador resolvente associado ao problema (1.12). Na prova utilizamos técnicas de R.S. Phillips [44] e A.G. Ramm [47]. Aqui, é fundamental um resultado dado no artigo de S. Steinberg [54] (veja, também o artigo de R.T. Seeley [53]) sobre famílias meromorfas de operadores compactos. Além disso, mostramos que os polos da extensão meromorfa do operador resolvente associado com o modelo (1.12) coincidem com aqueles da extensão meromorfa do operador resolvente do modelo não limitado (1.11). Em seguida, apresentamos um problema variacional associado com o modelo limitado (1.12) do qual podem-se obter as frequências de espalhamento da extensão meromorfa do operador resolvente associado ao modelo (1.11). No apêndice mostramos alguns lemas técnicos usados nas demonstrações de varios teoremas nos capítulos anteriores.

Notações

- \mathbb{R}^n : Espaço Euclidiano n-dimensional.
- Ω : Um conjunto aberto em \mathbb{R}^n .
- $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$: a norma em \mathbb{R}^n .
- $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| < r\}$.
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i inteiro ≥ 0 , $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
- $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.
- $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$.
- $C^m(\Omega)$: Conjunto das funções contínuas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) tais que suas derivadas parciais $\partial^\alpha f$ até ordem $|\alpha| \leq m$ são contínuas em Ω .
- $C_0^m(\Omega)$: Conjunto das funções $C^m(\Omega)$ com suporte compacto em Ω .
- $L^p(\Omega)$: Espaço das (classes de equivalência das) funções reais (ou complexas) mensuráveis f , tais que a p-ésima potência do valor absoluto $|f|$ é Lebesgue integrável em Ω ($1 \leq p < \infty$) munido da norma

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |f|^p dx \right\}^{1/p} .$$

- $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$, isto é $H^m(\Omega)$ é o conjunto das funções em $L^2(\Omega)$ que possuem derivadas distribucionais até ordem m em $L^2(\Omega)$.
- $[C_0^m(\Omega)]^3 = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) : u_i \in C_0^m(\Omega), i = 1, 2, 3\}$.
- $[H^m(\Omega)]^3 = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) : u_i \in H^m(\Omega), i = 1, 2, 3\}$.
- O Laplaciano (vectorial) é

$$\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3),$$

onde Δ é o Laplaciano usual, i.e.,

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

- O operador grad é o gradiente usual, isto é,

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

- O operador div denota o operador

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Estes operadores são considerados durante todo o trabalho no sentido das distribuições .

Utilizamos sempre (no sentido das distribuições) as seguintes identidades:

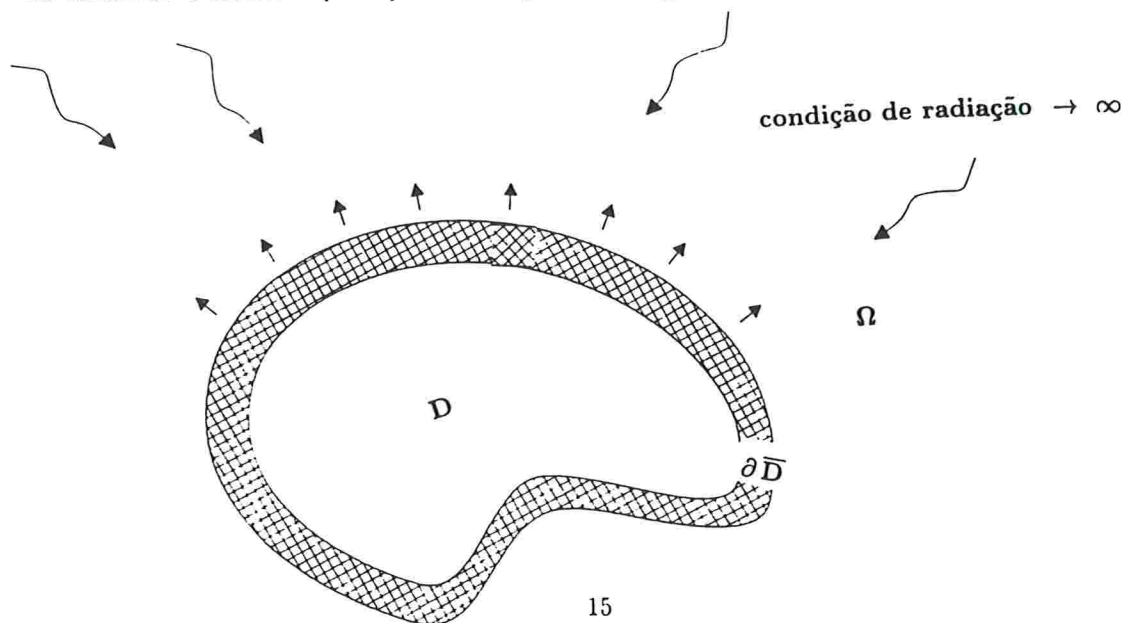
- $\text{rot } \mathbf{w} = (\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w},$
- $\text{grad } \psi = (\text{grad } \delta) * \psi,$
- $\text{div } \mathbf{w} = (\text{grad } \delta)^t * \mathbf{w},$
- $(\text{rot } \delta \mathbf{I})^t = -\text{rot } \delta \mathbf{I},$
- $\text{div}(\phi \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \text{grad } \phi + \phi \text{div } \mathbf{w},$
- $\text{rot}(\phi \mathbf{w}) = \text{grad } \phi \times \mathbf{w} + \phi \text{rot } \mathbf{w},$
- $\text{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \text{rot } \mathbf{u},$
- $\text{grad}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{w} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \times \text{rot } \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{w}),$
- $\text{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \text{div } \mathbf{u} - \mathbf{u} \text{div } \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \text{grad}) \mathbf{u},$
- $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{w}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{w}) - \Delta \mathbf{w},$
- $\text{div}(\text{rot } \mathbf{w}) = 0,$
- $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0.$

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Apresentação

A seguir apresentamos o problema direto de espalhamento associado ao modelo de ondas elásticas propagando-se num meio homogêneo e isotrópico Ω exterior a um corpo compacto \bar{D} com uma condição na fronteira do tipo Neumann ou Dirichlet. Mostramos um resultado de existência e unicidade. As ferramentas que utilizaremos baseiam-se em técnicas do artigo de R.S. Phillips [44] e o livro de A.G. Ramm [47]. Algumas conseqüências destes resultados são dadas no capítulos 3 e 4 do trabalho. O resultado principal neste capítulo é o seguinte:



“ Seja $\sigma \in \mathbb{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$. Então, para todo $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} = \bigcap_{j=1}^3 \text{supp } h_j \subset \Omega_R = \Omega \cap B(0, R)$ o sistema de ondas elásticas

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ \text{Condição de radiação,} \end{cases}$$

tem uma (única) solução $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$, onde $\Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}$ denota o operador de traço

$$\Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}|_{\partial \bar{D}}, & \text{No caso Dirichlet,} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{u}|_{\partial \bar{D}}, & \text{No caso Neumann,} \end{cases}$$

$a > 0$, $b > 0$ e $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ é o operador de tração :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{n}(x)} \mathbf{u}(x) = 2b^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + (a^2 - 2b^2) \mathbf{n}(x) \text{div } \mathbf{u}(x) + b^2 \mathbf{n}(x) \times \text{rot } \mathbf{u}(x), \quad x \in \partial \bar{D}$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \left[\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}, \frac{\partial u_3}{\partial n} \right].$$

2.2 O problema direto de espalhamento associado com a propagação de ondas elásticas

No que segue vamos considerar uma região compacta \bar{D} do \mathbb{R}^3 com fronteira suficientemente regular. O meio é considerado isotrópico e homogêneo. Assumiremos por simplicidade que a origem pertence a D .

Considere um obstáculo $\bar{D} \subset \mathbb{R}^3$, com fronteira $\partial\bar{D}$, e ondas elásticas propagando-se em $\Omega = \mathbb{R}^3/\bar{D}$ (veja figura 1 acima). O movimento da onda pode ser descrito através do vetor de deslocamentos $\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$, que na teoria linearizada satisfaz a equação de ondas elásticas

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i(x, t) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}(x, t)) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

em $\Omega \times \mathbb{R}$ com $\sigma_{i,j}(\mathbf{u}(x, t))$ dado por

$$\sigma_{i,j}(\mathbf{u}(x, t)) = (a^2 - 2b^2)\delta_{i,j} \operatorname{div}(\mathbf{u}(x, t)) + b^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x, t) \right), \quad (2.2)$$

onde a e b são constantes tais que $a > 0$ e $b > 0$. Denotemos por $e_{i,j}[\mathbf{u}(x, t)]$, a quantidade

$$e_{i,j}[\mathbf{u}(x, t)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x, t) \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Se define a energia específica $e[\mathbf{u}(x, t), \mathbf{v}(x, t)]$ por

$$e[\mathbf{u}(x, t), \mathbf{v}(x, t)] = \sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} e_{i,j}[\mathbf{u}(x, t)] e_{k,l}[\mathbf{v}(x, t)],$$

onde

$$a_{ijkl} = (a^2 - 2b^2)\delta_{i,j}\delta_{j,k} + b^2(\delta_{i,k} + \delta_{j,k} + \delta_{i,k}\delta_{j,l}), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

são chamadas de constantes elásticas. Aqui, $\delta_{p,q}$ denota o delta de Kronecker

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{se } p = q \\ 0, & \text{se } p \neq q. \end{cases}$$

Note também que $e[\mathbf{u}(x, t), \mathbf{v}(x, t)]$ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} e[\mathbf{u}(x, t), \mathbf{v}(x, t)] &= (a^2 - 2b^2) \operatorname{div}(\mathbf{v}(x, t)) \operatorname{div}(\mathbf{u}(x, t)) \\ &+ b^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Em particular, se $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}$ resulta que

$$\begin{aligned} e[\bar{\mathbf{v}}(x, t), \mathbf{v}(x, t)] &= \frac{3a^2 - 4b^2}{3} |\operatorname{div}(\mathbf{v}(x, t))|^2 \\ &+ \frac{b^2}{2} \sum_{p \neq q} \left| \frac{\partial v_p(x, t)}{\partial x_q} + \frac{\partial v_q(x, t)}{\partial x_p} \right|^2 + \frac{b^2}{3} \sum_{p,q=1}^3 \left| \frac{\partial v_p(x, t)}{\partial x_p} - \frac{\partial v_q(x, t)}{\partial x_q} \right|^2. \end{aligned}$$

Observe que em nosso caso existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} e_{k,l} \overline{e_{i,j}} \geq c \sum_{i,k=1}^3 |e_{i,j}|^2.$$

Agora, pela Lei de Hooke, temos que

$$\sigma_{i,j}(\mathbf{u}(x, t)) = \sum_{l,k=1}^3 a_{ijkl} e_{i,j}(\mathbf{u}(x, t)), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

Substituindo (2.2) em (2.1) temos em $\Omega \times \mathbb{R}$ a relação

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i(x, t) - b^2 \Delta u_i(x, t) - (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \mathbf{u}(x, t)) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Em linguagem vetorial, equação acima toma a forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(x, t) - b^2 \Delta \mathbf{u}(x, t) - (a^2 - b^2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

No sistema (2.4) os parametros $\mu = b^2$ e $\lambda = a^2 - 2\mu$ são chamados de constantes de Lamé e satisfazem $3\lambda + 2\mu > 0$.

No contexto do espalhamento, a solução $\mathbf{u}(x, t)$ (de energia finita) da equação de onda elásticas (2.4), é procurada na forma

$$\mathbf{u}(x, t) = \operatorname{Re} \{ [\mathbf{u}^{in}(x, \sigma) + \mathbf{u}^{sc}(x, \sigma)] \exp(-i\sigma t) \}, \quad \sigma \in \mathbb{C}, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

O campo

$$\mathbf{v}(x, \sigma) = \mathbf{u}^{in}(x, \sigma) + \mathbf{u}^{sc}(x, \sigma), \quad \sigma \in \mathbb{C},$$

é denotado por simplicidade na forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^{in} + \mathbf{u}^{sc},$$

e ele satisfaz a equação reduzida de ondas

$$b^2 \Delta \mathbf{v} + (a^2 - b^2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) + \sigma^2 \mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.5)$$

As funções \mathbf{u}^{in} , que são em geral da forma

$$\mathbf{u}^{in}(x, \sigma) = -\sigma^{-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} [\mathbf{p}_o \exp(i\sigma_p d \cdot x)] + \sigma^{-2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{p}_o \exp(i\sigma_s d \cdot x)], \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

com $\sigma_p = \sigma/a$, $\sigma_s = \sigma/b$, vetor de polarização \mathbf{p}_o (constante) e direções de impacto d ($|d| = 1$) satisfazem, no sentido das distribuições, o sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{u}^{in}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}^{in})(x) + \sigma^2 \mathbf{u}^{in}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.6)$$

É conhecido, (veja, V.D Kuprazde [32], p.p 85 – 89) que a matriz solução fundamental do sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.7)$$

é do tipo

$$\Gamma_\sigma(x, y) = (\Gamma_\sigma^{kj}(x, y))_{3 \times 3}, \quad k, j = 1, 2, 3,$$

onde para cada par $k, j = 1, 2, 3$ temos

$$\Gamma_\sigma^{kj}(x, y) = \sum_{l=1}^2 \left(\delta_{k,j} \alpha_l + \beta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) \frac{\exp(i \sigma_l |x - y|)}{|x - y|} \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y$$

com $i = \sqrt{-1}$, $\sigma_1 = \sigma_p = \sigma/a$, e $\sigma_2 = \sigma_s = \sigma/b$,

$$\alpha_l = \delta_{2l} (2\pi b^2)^{-2} \quad \text{e} \quad \beta_l = (-1)^l (2\pi \sigma^2)^{-1}, \quad l = 1, 2.$$

Agora, seja

$$\Gamma_\sigma^j(x, y) = (\Gamma_\sigma^{1j}(x, y), \Gamma_\sigma^{2j}(x, y), \Gamma_\sigma^{3j}(x, y)), \quad j = 1, 2, 3, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y.$$

O vetor $\Gamma_\sigma^j(x, y)$ satisfaz a equação (2.7) para $j = 1, 2, 3$, a matriz $\Gamma_\sigma(x, y)$ é chamada de matriz de Kuprazde, cada coluna e linha da matriz é solução da equação (2.7), escreve-se isto para $x, y \in \mathbb{R}^3$ com $x \neq y$ na forma

$$b^2 \Delta \Gamma_\sigma(x, y) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \Gamma_\sigma(x, y)) + \sigma^2 \Gamma_\sigma(x, y) = 0, \quad (2.8)$$

ou

$$b^2 \Delta \Gamma_\sigma(x, y) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \Gamma_\sigma(x, y)) + \sigma^2 \Gamma_\sigma(x, y) = \delta_y \mathbf{I}, \quad \text{em } \mathbb{R}^3. \quad (2.9)$$

onde δ_y denota o delta de Dirac no ponto y e \mathbf{I} é a matriz identidade. Escrevendo $\Gamma_\sigma(x, y)$ na forma

$$\Gamma_\sigma(x, y) = \Gamma_\sigma^p(x, y) + \Gamma_\sigma^s(x, y),$$

onde

$$\Gamma_\sigma^p(x, y) = \frac{-1}{\sigma^2} \partial [\phi_p(x, y)] \quad \text{e} \quad \Gamma_\sigma^s(x, y) = \frac{1}{\sigma^2} [\sigma_s^2 \mathbf{I} + \partial] \phi_s(x, y),$$

com $\mathbf{I} = (\delta_{i,j})_{3 \times 3}$, $\partial = (\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j})_{3 \times 3}$, $\sigma_s^2 = \frac{\sigma^2}{b^2}$,

$$\phi_s(x, y) = \frac{\exp(i \sigma_s |x - y|)}{4 \pi}, \quad \phi_p(x, y) = \frac{\exp(i \sigma_p |x - y|)}{4 \pi},$$

$x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$ e $\sigma_p^2 = \frac{\sigma^2}{a^2}$.

Se \mathbf{v} verifica o sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

onde a função \mathbf{f} tem suporte $\text{supp } \mathbf{f} = K$ compacto em \mathbb{R}^3 . Então, ela é da forma

$$\mathbf{v}(x) = \Gamma_\sigma^p(x, y) * \mathbf{f} + \Gamma_\sigma^s(x, y) * \mathbf{f}.$$

Agora, as funções

$$\mathbf{u}^p(x) = \Gamma_\sigma^p(x, y) * \mathbf{f} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}^s(x) = \Gamma_\sigma^s(x, y) * \mathbf{f},$$

isto é

$$\mathbf{u}^s = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{f} + [\phi_s(x, y) * \text{rot rot } \mathbf{f}]),$$

e

$$\mathbf{u}^p = \frac{-1}{\sigma^2} [\phi_p(x, y) * \text{grad}(\text{div } \mathbf{f})],$$

são tais que

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s \tag{2.10}$$

e fora do K verificam,

$$(\Delta + \sigma_p^2) \mathbf{u}^p = 0, \quad \text{rot } \mathbf{u}^p = 0 \quad \text{e}$$

$$(\Delta + \sigma_s^2) \mathbf{u}^s = 0, \quad \text{div } \mathbf{u}^s = 0.$$

Definição 2.1

Seja D_1 um aberto do \mathbb{R}^3 . Dizemos que a função $\phi : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) é regular se, e só se, $\phi \in C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D_1})$.

Uma matriz $A = (a_{i,j})_{3 \times 3}$ (ou vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$) é regular se todas as $a_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3$, (v_k , $k = 1, 2, 3$) são regulares no sentido da definição acima.

Definição 2.2

Seja \mathbf{v} uma solução, regular em Ω , da equação (2.5). Dizemos que \mathbf{v} satisfaz a condição de radiação, chamada condição de radiação de Kuprazde, $(C.R.K)_\infty$, se, e só se, os campos \mathbf{u}^p e \mathbf{u}^s dados em (2.10) satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}^p(x) = o(1), & \text{se } |x| \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial}{\partial |x|} \mathbf{u}^p(x) - i\sigma_p \mathbf{u}^p(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{se } |x| \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}^s(x) = o(1), & \text{se } |x| \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial}{\partial |x|} \mathbf{u}^s(x) - i\sigma_s \mathbf{u}^s(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{se } |x| \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

uniformemente em todas as direções $\hat{x} = x/|x| \in S^2$.

Seja D_1 um aberto do \mathbb{R}^3 com fronteira regular e \mathbf{T}_n o operador de tração, isto é

$$\mathbf{T}_n = 2b^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + (a^2 - 2b^2) \mathbf{n} \operatorname{div} + b^2 \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \quad (2.11)$$

sendo $\mathbf{n}(y)$ a normal unitária externa a $\partial \bar{D}_1$ no ponto y . As identidades de Betti-Green dadas a seguir são conhecidas (V.D. Kuprazde [32] ou G. Fichera [17]):

Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in [H^2(D_1)]^3$. Então, as identidades

$$\int_{D_1} \mathbf{v} \cdot (\bar{\Delta} \mathbf{u}) \, dx + \int_{D_1} e(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \, dx = \int_{\partial \bar{D}_1} \mathbf{v}(y) \cdot (\mathbf{T}_n \mathbf{u})(y) \, dS \quad (2.12)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} \{\mathbf{v} \cdot (\bar{\Delta} \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\bar{\Delta} \mathbf{v})\} \, dx = \\ & = \int_{\partial \bar{D}_1} \{\mathbf{v}(y) \cdot (\mathbf{T}_n \mathbf{u})(y) - \mathbf{u}(y) \cdot (\mathbf{T}_n \mathbf{v})(y)\} \, dS, \end{aligned} \quad (2.13)$$

são válidas. Usamos a notação

$$\bar{\Delta} = b^2 \Delta + (a^2 - b^2) \operatorname{grad} \operatorname{div}$$

e $e(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ é dado pela identidade (2.3).

Agora, se $\mathbf{u} \in [H^2(D_1)]^3$ é solução da equação

$$b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = 0, \quad \text{em } D_1,$$

então, a terceira identidade de Betti-Green

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial \bar{D}_1} \{ \Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_n \mathbf{u})(y) - [\mathbf{T}_n \Gamma_\sigma(x, y)]^t \cdot \mathbf{u}(y) \} dS, \quad x \in D_1. \quad (2.14)$$

é válida.

Lema 2.1 (V.D Kuprazde [32], p.p, 127-129)

Suponha que $\mathbf{v} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s$ é uma solução regular do sistema (2.5) em Ω . Seja \mathbf{T}_n definido como em (2.11). Se \mathbf{v} satisfaz a condição de radiação de Kuprazde $(C.R.K)_\infty$ e $|x| = R$, então as seguintes estimativas,

- i) $\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p \pm i\sigma a \mathbf{u}^p = O(R^{-2}),$ se $R \rightarrow \infty,$
- ii) $\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s \pm i\sigma b \mathbf{u}^s = O(R^{-2}),$ se $R \rightarrow \infty,$
- iii) $\bar{\mathbf{u}}^p \cdot \mathbf{u}^s = O(R^{-3}),$ se $R \rightarrow \infty,$
- iv) $\bar{\mathbf{u}}^p \cdot \bar{\mathbf{u}}^s = O(R^{-3}),$ se $R \rightarrow \infty,$
- v) $\mathbf{u}^p = O(R^{-1}),$ se $R \rightarrow \infty,$
- vi) $\mathbf{u}^s = O(R^{-1}),$ se $R \rightarrow \infty,$

são válidas uniformemente em todas as direções $\hat{x} = x/|x| \in S^2$.

Demonstração:

Veja, o apêndice B. ■

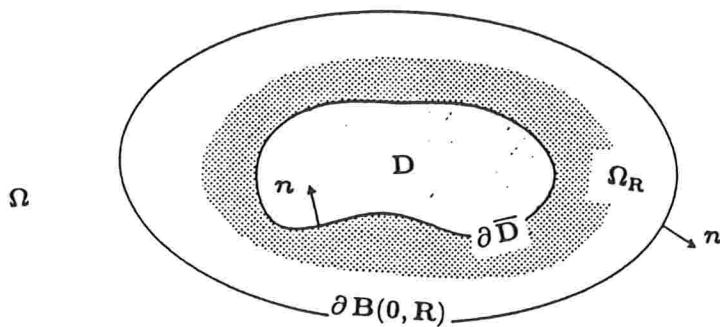


fig. 2

2.3 Resultados de Existência e Unicidade

Usaremos a alternativa de Fredholm:

Teorema 2.1 (*D. Gilbert e N. Trudinger [20], p.p, 71.*)

Seja \mathcal{M} um espaço linear normado complexo e $B : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ uma aplicação linear compacta. Então, uma das seguintes situações vale :

- (a) A equação homogênea $v - Bv = 0$ possui uma solução não-trivial $v \in \mathcal{M}$, ou
- (b) Para cada $f \in \mathcal{M}$ a equação $v - Bv = f$, possui uma única solução $v \in \mathcal{M}$. Além disso, no caso (b), o operador $(I - B)^{-1}$ é limitado.

Seja D aberto limitado do \mathbb{R}^3 com $\partial\bar{D}$ regular e $\Omega = \mathbb{R}^3/\bar{D}$. Sejam $R > 0$ e $R_0 > 0$, tais que $B(0, R_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R_0\} \subset D$, $\partial\bar{D} \subset B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ e $\Omega_R = \Omega \cap B(0, R)$.

Considere a função :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_R, \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega_R, \end{cases} \quad (2.15)$$

e $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, satisfazendo as seguintes condições

- $\text{supp } \chi \subset B(0, R)/B(0, R_0)$,
- $\chi = 1$, numa pequena vizinhança de $\partial\bar{D}$,
- $\chi = 0$, se $|x| = R$.

Seja $f \in [L^2(\Omega)]^3$ e defina

$$f_0(x) = \begin{cases} \psi(x)f(x), & \text{se } x \in \Omega, \\ 0, & \text{se } x \in \bar{D}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Das estimativas (i)-(vi) do lema (2.1) obtemos o seguinte

Lema 2.2

Seja $\sigma \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Im}(\sigma) > 0$ e $\mathbf{u} \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ solução do sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{u} + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \sigma^2 \mathbf{u} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

onde $a > 0$ e $b > 0$, a qual satisfaz a condição de radiação de Kuprazde $(C.R.K)_\infty$. Então,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}_n \mathbf{u} \, dS = 0.$$

Demonstração:

De fato, seja $\mathbf{u} \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ com as hipóteses do lema acima. Considere a bola

$$B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$$

com $\mathbf{n}(y)$ a normal unitária exterior à fronteira $\partial B(0, R) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| = R\}$ no ponto y .

Reescrevendo

$$\int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{T}_n \mathbf{u}) \, dS = \sum_{j=0}^3 I_j(R) + \sum_{k=0}^1 J_k(R) + \sum_{l=0}^1 K_l(R),$$

onde,

$$I_0(R) = \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^p \cdot [(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p)(y) - i a \sigma \mathbf{u}^p(y)] \, dS,$$

$$I_1(R) = \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^s \cdot [(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s)(y) - i b \sigma \mathbf{u}^s(y)] \, dS,$$

$$I_2(R) = \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^s \cdot [(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s)(y) - i b \sigma \mathbf{u}^s(y)] \, dS,$$

$$I_3(R) = \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^s \cdot [(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p)(y) - i a \sigma \mathbf{u}^p(y)] \, dS,$$

e

$$J_0(R) = i b \sigma \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^p \cdot \mathbf{u}^s(y) \, dS,$$

$$J_1(R) = i a \sigma \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^s \cdot \mathbf{u}^p(y) \, dS,$$

$$K_0(R) = i a \sigma \int_{|y|=R} |\mathbf{u}^s|^2(y) dS \quad e$$

$$K_1(R) = i b \sigma \int_{|y|=R} |\mathbf{u}^p|^2(y) dS.$$

Usando o ítem (i) do lema (2.1) obtemos,

$$\int_{|y|=R} |(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p)(y) - i a \sigma \mathbf{u}^p(y)|^2 dS \leq C \int_{|y|=R} R^{-4} dS = (C/R^2) \int_{|w|=1} dS \rightarrow 0,$$

se $R \rightarrow \infty$. O ítem (v) do mesmo lema conduz a,

$$\int_{|y|=R} |\bar{\mathbf{u}}^p(y)|^2 dS \leq C_1 \int_{|y|=R} R^{-2} dS = C_1 \int_{|w|=1} dS = C_2, \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Agora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e as estimativas acima obtemos,

$$|I_0(R)| \leq \left[\int_{|y|=R} |\bar{\mathbf{u}}^p(y)|^2 dS \right]^{1/2} \left[\int_{|y|=R} |(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p)(y) - i a \sigma \mathbf{u}^p(y)|^2 dS \right]^{1/2} \rightarrow 0,$$

se $R \rightarrow \infty$. Assim,

$$I_0(R) \rightarrow 0, \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

De forma analoga se mostra que

$$I_j(R) \rightarrow 0, \quad \text{se } R \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, 3.$$

O ítem (iii) do lema (2.1) diz que

$$\bar{\mathbf{u}}^p \cdot \mathbf{u}^s = O(R^{-3}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$$

daí,

$$\begin{aligned} |J_0(R)| &\leq b |\sigma| \int_{|y|=R} |\bar{\mathbf{u}}^p(y) \cdot \mathbf{u}^s| dS \leq b |\sigma| C \int_{|y|=R} R^{-3} dS = \\ &= (b |\sigma| C/R) \int_{|w|=1} dS \rightarrow 0, \end{aligned}$$

se $R \rightarrow \infty$, logo,

$$J_0(R) \rightarrow 0, \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Pelo mesmo argumento tem-se que

$$J_1(R) \rightarrow 0, \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Mostraremos a seguir que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} |\mathbf{u}^p|^2 dS = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} |\mathbf{u}^s|^2 dS = 0.$$

Isto conjuntamente com as observações anteriores de que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_k = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} I_j = 0 \quad (j = 0, 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad k = 0, 1)$$

completam a demonstração do lema.

Com efeito, note que a fórmula de Betti-Green (2.13) na bola $B(0, R)$ diz que

$$\begin{aligned} & \int_{B(0, R)} \{ \bar{\mathbf{u}} \cdot (\bar{\Delta} \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}}) \} dx = \\ & = \int_{|y|=R} \{ \bar{\mathbf{u}}(y) \cdot (\mathbf{T}_n \mathbf{u})(y) - \mathbf{u}(y) \cdot (\mathbf{T}_n \bar{\mathbf{u}})(y) \} dS, \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\bar{\Delta} \mathbf{u} = -\sigma^2 \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}} = -\bar{\sigma}^2 \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em} \quad B(0, R) \subset \mathbb{R}^3.$$

Da identidade acima obtemos que

$$[\bar{\sigma}^2 - \sigma^2] \int_{B(0, R)} |\mathbf{u}|^2 dx = \int_{|y|=R} \{ \bar{\mathbf{u}}(y) \cdot (\mathbf{T}_n \mathbf{u})(y) - \mathbf{u}(y) \cdot (\mathbf{T}_n \bar{\mathbf{u}})(y) \} dS. \quad (2.17)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[\int_{|y|=R} \{ \bar{\mathbf{u}}(y) \cdot (\mathbf{T}_n \mathbf{u})(y) - \mathbf{u}(y) \cdot (\mathbf{T}_n \bar{\mathbf{u}})(y) \} dS \right] = \\ & = \operatorname{Re} \left\{ \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^p \cdot [(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p)(y) - i \sigma a \mathbf{u}^p(y)] dS \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^s \cdot [(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s)(y) - i \sigma b \mathbf{u}^s(y)] dS \right\} \\ & + i \operatorname{Re} \left\{ \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^s \cdot [(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p)(y) - i \sigma a \mathbf{u}^p(y)] dS \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}}^s \cdot [(\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s)(y) - i \sigma b \mathbf{u}^s(y)] dS \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \int_{|y|=R} \mathbf{u}^p \cdot [(\mathbf{T}_n \bar{\mathbf{u}}^p)(y) + i \sigma a \bar{\mathbf{u}}^p(y)] dS \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \int_{|y|=R} \mathbf{u}^p \cdot [(\mathbf{T}_n \bar{\mathbf{u}}^s)(y) + i \sigma b \bar{\mathbf{u}}^s(y)] dS \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \int_{|y|=R} \mathbf{u}^s \cdot [(\mathbf{T}_n \bar{\mathbf{u}}^p)(y) + i \sigma a \bar{\mathbf{u}}^p(y)] dS \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \int_{|y|=R} \mathbf{u}^s \cdot [(\mathbf{T}_n \bar{\mathbf{u}}^s)(y) + i \sigma b \bar{\mathbf{u}}^s(y)] dS \right\} \\ & - 2 \operatorname{Im}(\sigma) a \int_{|y|=R} |\mathbf{u}^p|^2 dS - 2 \operatorname{Im}(\sigma) b \int_{|y|=R} |\mathbf{u}^s|^2 dS - 2 \operatorname{Im}(\sigma) (b + a) \int_{|y|=R} \operatorname{Re}(\bar{\mathbf{u}}^p \cdot \mathbf{u}^s) dS = 0. \end{aligned}$$

Aquí, podemos proceder de modo semelhante ao prova da primeira parte, isto é, fazendo $R \rightarrow \infty$ obtemos de (2.17) as identidades

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} |\mathbf{u}^p|^2 dS = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} |\mathbf{u}^s|^2 dS = 0.$$

Isto prova o lema. ■

Representa-se por $[L^2_R(\mathbb{R}^3)]^3$ o espaço vetorial das funções $\mathbf{u} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ tais que $\mathbf{u} = 0$, se $|x| \geq R$, i.e.,

$$[L^2_R(\mathbb{R}^3)]^3 = \{\mathbf{u} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3 : \mathbf{u} = 0, \text{ se } |x| \geq R\}.$$

Lema 2.3

Seja $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$. Então, se $\mathbf{g} \in [L^2_R(\mathbb{R}^3)]^3$, o sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (2.18)$$

tem solução $\mathbf{v} \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\mathbf{v} = \mathbf{A}(\sigma) \mathbf{g}$, onde o operador

$$\mathbf{A}(\sigma) : [L^2_R(\mathbb{R}^3)]^3 \rightarrow [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$$

é linear e contínuo. Além disso, a solução \mathbf{v} de (2.18) é única se satisfaz a $(C.R.K)_\infty$.

Demonstração:

A existência do operador linear contínuo

$$\mathbf{A}(\sigma) : [L^2_R(\mathbb{R}^3)]^3 \rightarrow [H^2(\mathbb{R}^3)]^3,$$

com $\mathbf{A}(\sigma) \mathbf{g} = \mathbf{v}$ para todo $\sigma \in \mathcal{C}$ tal que $\text{Im}(\sigma) > 0$ segue do teorema 3.2 p.p. 273 – 277 no artigo de B.R. Vainberg [56], veja seu enunciado no apêndice C.

Unicidade

É suficiente mostrar que para todo $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ o problema homogêneo

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ (C.R.K)_\infty, \end{cases} \quad (2.19)$$

tem somente a solução trivial. De fato, seja $\mathbf{v} \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ uma solução de problema (2.19).

Considere a bola

$$B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\},$$

e seja \mathbf{n} a normal unitária $\mathbf{n}(y) = y/R$ exterior ao fronteira $\partial B(0, R)$ no ponto y .

A fórmula de Betti-Green (2.12) diz que

$$\int_{B(0, R)} \bar{\mathbf{v}} \bar{\Delta} \mathbf{v} \, dx + \int_{B(0, R)} e(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \, dx = \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{v} \, dS,$$

isto é,

$$\int_{B(0, R)} e(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \, dx = \sigma^2 \int_{B(0, R)} |\mathbf{v}|^2 \, dx + \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{v} \, dS. \quad (2.20)$$

Segue do lema (2.2) que,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{v} \, dS = 0,$$

pois \mathbf{v} satisfaz $(C.R.K)_{\infty}$. Portanto, tomando $R \rightarrow \infty$ na equação (2.20) obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^3} e(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \, dx = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 \, dx. \quad (2.21)$$

Assim, temos duas possibilidades:

(a) Se $\operatorname{Re}(\sigma) = 0$, a identidade (2.21) diz que

$$\int_{\mathbb{R}^3} e(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \, dx = -(\operatorname{Im}(\sigma))^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 \, dx. \quad (2.22)$$

Sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} e(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \, dx \geq 0,$$

e que $\operatorname{Im}(\sigma) > 0$ logo da identidade (2.22) segue que $\mathbf{v} = 0$ em \mathbb{R}^3 .

(b) Se $\operatorname{Re}(\sigma) \neq 0$, tomando a parte imaginária da identidade (2.21), obtemos

$$0 = 2 \operatorname{Im}(\sigma) \operatorname{Re}(\sigma) \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 \, dx.$$

Divida por $2 \operatorname{Im}(\sigma) \operatorname{Re}(\sigma)$ nesta identidade para obter,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 \, dx = 0,$$

daí, segue que $\mathbf{v} = 0$ em \mathbb{R}^3 . Assim, para todo $\sigma \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Im}(\sigma) > 0$, temos $\mathbf{v} = 0$ em \mathbb{R}^3 . Isto completa a prova do lema. ■

Note que a solução do problema (2.18) é do tipo convolução por \mathbf{g} , i.e.,

$$\mathbf{v}(x) = \Gamma_\sigma(x, y) * \mathbf{g}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

A função \mathbf{v} pode ser escrita explicitamente na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x) &= (4\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{\exp(i\sigma_p |x-y|)}{b^2 |x-y|} \left[\frac{(x-y)}{|x-y|^2} \mathbf{g}(y) \cdot (x-y) - \mathbf{g}(y) \right] \right\} dy \\ &\quad - (4\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{\exp(i\sigma_s |x-y|)}{a^2 |x-y|^3} (x-y) \mathbf{g}(y) \cdot (x-y) \right\} dy \\ &\quad + (4\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |x-y|^{-3} \int_{a^{-1}|x-y|}^{b^{-1}|x-y|} r \exp(i\sigma r) dr \left[\mathbf{g}(y) - \frac{3(x-y)}{|x-y|^2} \mathbf{g}(y) \cdot (x-y) \right] dy. \end{aligned}$$

Veja, por exemplo, o artigo de R. Coimbra Charao e G. Perla Menzala [5], fórmulas (3.1) – (3, 4).

Esta expressão induz o operador solução $\mathbf{A}(\sigma) \mathbf{g} = \mathbf{v} \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$, da forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\sigma) \mathbf{g})(x) &= (4\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{\exp(i\sigma_p |x-y|)}{b^2 |x-y|} \left[\frac{(x-y)}{|x-y|^2} \mathbf{g}(y) \cdot (x-y) - \mathbf{g}(y) \right] \right\} dy \\ &\quad - (4\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{\exp(i\sigma_s |x-y|)}{a^2 |x-y|^3} (x-y) \mathbf{g}(y) \cdot (x-y) \right\} dy \\ &\quad + (4\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |x-y|^{-3} \int_{a^{-1}|x-y|}^{b^{-1}|x-y|} r \exp(i\sigma r) dr \left[\mathbf{g}(y) - \frac{3(x-y)}{|x-y|^2} \mathbf{g}(y) \cdot (x-y) \right] dy, \end{aligned}$$

e resulta do lema (2.3) que

$$\mathbf{A}(\sigma) : [L^2_R(\Omega_R)]^3 \rightarrow [H^2(\mathbb{R}^3)]^3.$$

de maneira contínua.

Teorema 2.2

Seja $\mathbf{w} \in [H^2(B(0, R))]^3$ solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{w}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{w}(x)) = 0, & x \in B(0, R), \\ \mathbf{w}(x) = 0, & x \in \partial B(0, R). \end{cases} \quad (2.23)$$

Então, $\mathbf{w} = 0$ em $B(0, R)$.

Demonstração:

Veja, por exemplo, J. Necăs [41] ou apêndice B. ■

Seja D aberto limitado do \mathbb{R}^3 com ∂D regular, $\Omega = \mathbb{R}^3/\overline{D}$, $\Omega_R = \Omega \cap B(0, R)$ e Λ_n o operador de traço definido por

$$\Lambda_n \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}|_{\partial \overline{D}}, & \text{No caso Dirichlet,} \\ \mathbf{T}_n \mathbf{u}|_{\partial \overline{D}}, & \text{No caso Neumann.} \end{cases}$$

Teorema 2.3

O sistema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{w}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{w}(x)) = \mathbf{g}(x), & \text{se } x \in \Omega_R, \\ \Lambda_n \mathbf{w}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial \overline{D}, \\ \mathbf{w}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial B(0, R). \end{cases} \quad (2.24)$$

tem uma (única) solução $\mathbf{w} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ se $\mathbf{g} \in [L^2(\Omega_R)]^3$.

Demonstração:

Veja, por exemplo, H. Iwashita e Y. Shibata [27], Teorema Ap 1, p.p, 310. ■

Observe que a solução \mathbf{w} do problema (2.24) pode ser representada via um operador solução, a saber,

$$\mathbf{P} \mathbf{g} = \mathbf{w} \in [H^2(\Omega_R)]^3,$$

que é induzido pela formulação variacional do problema (2.24) e atua de maneira contínua :

$$\mathbf{P} : [L^2(\Omega_R)]^3 \rightarrow [H^2(\Omega_R)]^3.$$

Seja $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^3$ e \mathbf{f}_0 definida como em (2.16). Seja $\mathbf{v}_0 \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ a única solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}_0(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}_0(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}_0(x) = \mathbf{f}_0(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}^3, \\ (C.R.K)_\infty. \end{cases} \quad (2.25)$$

Defina $\mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma)$ como sendo o operador

$$\mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma) \mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{v}_0|_{\Omega_R}. \quad (2.26)$$

Isto é, a aplicação $\mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma)$ restringe a solução do problema (2.25) ao aberto limitado Ω_R . Note-se que ele atua de maneira contínua de $[H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ em $[H^2(\Omega_R)]^3$ pois, para todo multi-índice $\beta \in \mathcal{I}^3$ com $|\beta| \leq 2$ temos a relação

$$\partial^\beta [\mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma) \mathbf{v}_0] = \mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma) [\partial^\beta \mathbf{v}_0]$$

no sentido das distribuições .

Agora, do lema 2.3 segue a existência de um operador linear e contínuo associado a \mathbf{v}_0 , a saber,

$$\mathbf{A}(\sigma) : [L^2_R(\mathbb{R}^3)]^3 \rightarrow [H^2(\mathbb{R}^3)]^3.$$

tal que

$$\mathbf{v}_0(x) = (\mathbf{A}(\sigma) \mathbf{f}_0)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.27)$$

É oportuno observar que a fórmula (2.27) induz um operador:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\sigma) : [L^2(\Omega_R)]^3 \rightarrow [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 \quad (2.28)$$

linear e contínuo. De fato, tome-se a função ψ definida em (2.15) e o operador M_ψ de multiplicação em $[L^2(\Omega_R)]^3$:

$$(M_\psi \mathbf{r})(x) = \psi(x) \mathbf{r}(x) = \begin{cases} \mathbf{r}(x), & \text{se } x \in \Omega_R, \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega_R. \end{cases}$$

Note que

$$\|M_\psi \mathbf{r}\|_{[L^2(\mathbb{R}^3)]^3}^2 = \|\psi \mathbf{r}\|_{[L^2(\mathbb{R}^3)]^3}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi \mathbf{r}|^2 dx = \int_{\Omega_R} |\mathbf{r}|^2 dx < \infty.$$

Daí, M_ψ é um operador bem definido e contínuo:

$$M_\psi : [L^2(\Omega_R)]^3 \rightarrow [L^2_R(\mathbb{R}^3)]^3,$$

já que, em particular $M_\psi \mathbf{r} = 0$, se $|x| \geq R$ e portanto, $M_\psi \mathbf{r} \in [L^2_R(\mathbb{R}^3)]^3$ para todo $\mathbf{r} \in [L^2(\Omega_R)]^3$.

Defina-se agora, o operador $\tilde{\mathbf{A}}(\sigma)$ pela composição

$$\tilde{\mathbf{A}}(\sigma) \mathbf{r} = \mathbf{A}(\sigma) M_\psi \mathbf{r},$$

logo

$$\tilde{\mathbf{A}}(\sigma) : [L^2(\Omega_R)]^3 \rightarrow [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$$

de maneira contínua. Além disso, $\tilde{\mathbf{A}}(\sigma) \mathbf{f}_0 = \mathbf{v}_0$. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}^3$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 = \mathbf{A}(\sigma) \mathbf{f}_0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{f}_0(y) dy = \int_{\Omega_R} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{f}(y) dy = \\ &= \int_{\Omega_R} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{f}_0(y) dy = (\tilde{\mathbf{A}}(\sigma) \mathbf{f}_0)(x). \end{aligned}$$

Sejam \mathbf{f}_0 , χ e $\tilde{\mathbf{v}}_0$ onde $\mathbf{f}_0(x) = \mathbf{f}(x)$ se $x \in \Omega_R$ e $\mathbf{f}_0 = 0$ se $x \notin \Omega_R$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, com as propriedades

- $\text{supp } \chi \subset B(0, R)/B(0, R_0)$,
- $\chi = 1$, numa pequena vizinhança de $\partial\bar{D}$,
- $\chi = 0$, se $|x| = R$,

e $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{v}_0|_{\Omega_R}$. Seja \mathbf{g}_0 a função definida em Ω_R do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \chi \mathbf{f}_0 + (a^2 + b^2)[(\text{grad } \chi \cdot \text{grad } \tilde{\mathbf{v}}_0) + [b^2 \Delta \chi - \sigma^2 \chi] \tilde{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad + (a^2 - b^2)[(\tilde{\mathbf{v}}_0 \cdot \text{grad } \chi) \text{grad } \chi + \text{grad } \chi \times \text{rot } \tilde{\mathbf{v}}_0 + \text{grad } \chi \text{ div } \tilde{\mathbf{v}}_0]. \end{aligned}$$

Observe-se que $\mathbf{g}_0 \in [L^2(\Omega_R)]^3$.

Lema 2.4

O problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) = 0, & \text{se } x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = -\Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v}_0, & \text{se } x \in \partial\bar{D}, \\ \mathbf{u}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial B(0, R). \end{cases} \quad (2.29)$$

tem uma (única) solução $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega_R)]^3$.

Demonstração:

Existência

Seja \mathbf{u} uma função definida em \mathbb{R}^3 do seguinte modo:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \chi \mathbf{v}_0, \quad (2.30)$$

onde a função \tilde{u} é a extensão de Calderón da solução do problema (2.24) (veja, teorema 2.3 acima) com $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0$. Note que em $\partial\bar{D}$ temos

$$\mathbf{T}_n(\chi \mathbf{v}_0) = 2b^2 \frac{\partial(\chi \mathbf{v}_0)}{\partial n} + (a^2 - 2b^2) n \operatorname{div}(\chi \mathbf{v}_0) + b^2 n \times \operatorname{rot}(\chi \mathbf{v}_0).$$

Agora, valem

$$(a) \quad \frac{\partial \chi \mathbf{v}_0}{\partial n} = \chi \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial n} + \mathbf{v}_0 \frac{\partial \chi}{\partial n}, \quad \text{em } \partial\bar{D},$$

$$(b) \quad \operatorname{div}(\chi \mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \chi + \chi \operatorname{div} \mathbf{v}_0, \quad \text{em } \partial\bar{D},$$

$$(c) \quad \operatorname{rot}(\chi \mathbf{v}_0) = \operatorname{grad} \chi \times \mathbf{v}_0 + \chi \operatorname{rot} \mathbf{v}_0, \quad \text{em } \partial\bar{D}.$$

Assim, em $\partial\bar{D}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n(\chi \mathbf{v}_0) &= \chi [2b^2 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial n} + (a^2 - 2b^2) n \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + b^2 n \times \operatorname{rot} \mathbf{v}_0] + \\ &+ 2b^2 \mathbf{v}_0 \frac{\partial \chi}{\partial n} + (a^2 - 2b^2) n [\mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \chi] + b^2 [\operatorname{grad} \chi \times \mathbf{v}_0]. \end{aligned}$$

Dai, como $\chi = 1$ numa vizinhança de $\partial\bar{D}$, obtemos

$$\mathbf{T}_n(\chi \mathbf{v}_0) = 2b^2 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial n} + (a^2 - 2b^2) n \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + b^2 n \times \operatorname{rot} \mathbf{v}_0.$$

Logo,

$$\mathbf{T}_n(\chi \mathbf{v}_0) = \mathbf{T}_n(\mathbf{v}_0), \quad \text{em } \partial\bar{D}. \quad (2.31)$$

Portanto, das equações (2.31) e (2.30), em $\partial\bar{D}$ verifica-se

$$\Lambda_n \mathbf{u} = \Lambda_n \tilde{u} - \Lambda_n \mathbf{v}_0 = -\Lambda_n \mathbf{v}_0.$$

Além disso, $\mathbf{u} = 0$, em $\partial B(0, R)$, pois $\chi = 0$ e $\tilde{u} = 0$ em $\partial B(0, R)$. Agora bem, em Ω_R obtemos,

$$\begin{aligned} b^2 \Delta \mathbf{u} + (a^2 - b^2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) &= b^2 \Delta \mathbf{w} + (a^2 - b^2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{w}) - \\ - b^2 \Delta(\chi \tilde{\mathbf{v}}_0) + (a^2 - b^2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \chi \tilde{\mathbf{v}}_0) &= \mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_0 = 0, \end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned}
& b^2 \Delta (\chi \tilde{\mathbf{v}}_0) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \chi \tilde{\mathbf{v}}_0) = \\
& = a^2 (\tilde{\mathbf{v}}_0 \cdot \text{grad}) \chi + a^2 (\text{grad } \chi \cdot \text{grad}) \tilde{\mathbf{v}}_0 + a^2 \tilde{\mathbf{v}}_0 \times [\text{rot}(\text{grad } \chi)] + \\
& + a^2 \text{grad } \chi \times \text{rot } \tilde{\mathbf{v}}_0 + a^2 \chi \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{v}}_0) + a^2 \text{div } \tilde{\mathbf{v}}_0 \text{grad } \chi - \\
& - b^2 \text{grad } \chi \text{div } \tilde{\mathbf{v}}_0 + b^2 \tilde{\mathbf{v}}_0 \Delta \chi - b^2 (\tilde{\mathbf{v}}_0 \cdot \text{grad}) \text{grad } \chi + \\
& + b^2 (\text{grad } \chi \cdot \text{grad}) \tilde{\mathbf{v}}_0 - b^2 \text{grad } \chi \times \text{rot } \tilde{\mathbf{v}}_0 - b^2 \chi \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{v}}_0) + b^2 \Delta \tilde{\mathbf{v}}_0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& b^2 \Delta (\chi \tilde{\mathbf{v}}_0) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \chi \tilde{\mathbf{v}}_0) = \\
& = \chi [b^2 \Delta \tilde{\mathbf{v}}_0 + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{v}}_0)] + (a^2 + b^2) [(\text{grad } \chi \cdot \text{grad}) \tilde{\mathbf{v}}_0] + \\
& + (a^2 - b^2) [(\tilde{\mathbf{v}}_0 \cdot \text{grad}) \text{grad } \chi + \text{grad } \chi \times \text{rot } \tilde{\mathbf{v}}_0 + \text{grad } \chi \text{div } \tilde{\mathbf{v}}_0] + b^2 \Delta \chi \tilde{\mathbf{v}}_0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& b^2 \Delta (\chi \tilde{\mathbf{v}}_0) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \chi \tilde{\mathbf{v}}_0) = \\
& = \chi \mathbf{f}_0 + (a^2 + b^2) [(\text{grad } \chi \cdot \text{grad}) \tilde{\mathbf{v}}_0] + [b^2 \Delta \chi - \sigma^2 \chi] \tilde{\mathbf{v}}_0 + \\
& + (a^2 - b^2) [(\tilde{\mathbf{v}}_0 \cdot \text{grad}) \text{grad } \chi + \text{grad } \chi \times \text{rot } \tilde{\mathbf{v}}_0 + \text{grad } \chi \text{div } \tilde{\mathbf{v}}_0] = \mathbf{g}_0.
\end{aligned}$$

Mais ainda, $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ pois $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ com $\text{supp } \chi \subset B(0, R)/B(0, R_0)$ e as funções $\tilde{\mathbf{u}}_{|\Omega_R} = \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0$ pertencem a $[H^2(\Omega_R)]^3$ (lembre que $\mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma)(\mathbf{v}_0) = \tilde{\mathbf{v}}_0 \in [H^2(\Omega_R)]^3$). Portanto, a função

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} - \chi \mathbf{v}_0,$$

satisfaz $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ e

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) = 0, & \text{se } x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = -\Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v}_0, & \text{se } x \in \partial \bar{D}, \\ \mathbf{u}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial B(0, R). \end{cases} \quad (2.32)$$

Isto prova a existência. A unicidade é consequência do teorema 2.3. ■

O principal resultado desta seção é

Teorema 2.4

Seja $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$. Então, para todo $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$ o sistema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & \text{se } x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_{\infty}, \end{cases} \quad (2.33)$$

tem uma (única) solução $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$.

Demonstração:

Unicidade

É suficiente mostrar que para todo $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ o problema homogêneo

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = 0, & \text{se } x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_{\infty} \end{cases}$$

tem somente a solução trivial. Com efeito, seja $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$ solução do problema acima, e seja $R > 0$ tal que a bola $\overline{B(0, R)} = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq R\}$ tenha sua fronteira $\partial B(0, R)$ em $\mathbb{R}^3 / \bar{D} = \Omega$.

Denote por $\Omega_R = \{y \in \Omega : |y| \leq R\}$, usando a identidade de Betti-Green (2.12) em Ω_R segue que

$$\int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\Delta} \mathbf{u} \, dx + \int_{\Omega_R} e(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \, dx = \int_{\partial\Omega_R} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}_n \mathbf{u} \, dS.$$

Lembrando que $\tilde{\Delta} \mathbf{u} = -\sigma^2 \mathbf{u}$ em $\Omega_R \subset \Omega$ e $\partial\Omega_R = \{y \in \Omega : |y| = R\} \cup \partial\bar{D}$ obtemos,

$$-\sigma^2 \int_{\Omega_R} |\mathbf{u}|^2 \, dx + \int_{\Omega_R} e(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \, dx = \int_{|y|=R} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}_n \mathbf{u} \, dS - \int_{\partial\bar{D}} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}_n \mathbf{u} \, dS. \quad (2.34)$$

Agora, fazendo $R \rightarrow \infty$ na identidade (2.34), do lema 2.2 e

$$\Lambda_n \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}|_{\partial\bar{D}} = 0, & \text{No caso Dirichlet,} \\ \mathbf{T}_n \mathbf{u}|_{\partial\bar{D}} = 0, & \text{No caso Neumann.} \end{cases} \quad (2.35)$$

Obtemos

$$\int_{\Omega} e(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \, dx = \sigma^2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx. \quad (2.36)$$

Logo,

$$\int_{\Omega} e(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \, dx = [(\operatorname{Re}(\sigma))^2 - (\operatorname{Im}(\sigma))^2 + 2i \operatorname{Re}(\sigma)\operatorname{Im}(\sigma)] \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx. \quad (2.37)$$

Portanto,

$$0 = 2 \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\sigma) \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx. \quad (2.38)$$

e

$$[(\operatorname{Re}(\sigma))^2 - (\operatorname{Im}(\sigma))^2] \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx = \int_{\Omega} e(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \, dx, \quad (2.39)$$

Assim, temos duas possibilidades

(a) Se $\operatorname{Re}(\sigma) = 0$, então a identidade (2.39) diz que

$$\int_{\Omega} e(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \, dx = -(\operatorname{Im}(\sigma))^2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx. \quad (2.40)$$

Agora, da hipótese em σ , e o fato

$$\int_{\Omega} e(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \, dx \geq 0,$$

segue que

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega.$$

(b) Se $\operatorname{Re}(\sigma) \neq 0$, como $\operatorname{Im}(\sigma) > 0$, então de (2.38) segue que

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx = 0.$$

Conseqüentemente,

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega.$$

E a unicidade está provada para todo $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$.

Existência

Por um argumento análogo ao usado na prova da existência de solução no lema 2.4, mostramos a existência de soluções no teorema. De fato, considere a seguinte função

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{v}_0 + \chi(x) \tilde{\mathbf{u}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (2.41)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}$ é a extensão de Calderón ao \mathbb{R}^3 (Veja, por exemplo, o teorema 5.3.1 no livro de J.T. Marti [38] e o enunciado no apêndice desta tese.) da solução $\mathbf{w}_0 \in [H^2(\Omega_R)]^3$ do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{w}_0(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{w}_0(x)) = 0, & \text{se } x \in \Omega_R, \\ \Lambda_n \mathbf{w}_0(x) = -\Lambda_n \mathbf{v}_0, & \text{se } x \in \partial \bar{D}, \\ \mathbf{w}_0(x) = 0, & \text{se } x \in \partial B(0, R), \end{cases} \quad (2.42)$$

\mathbf{v}_0 é a solução do sistema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}_0(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}_0(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}_0(x) = \mathbf{f}_0(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}^3, \\ (C.R.K)_\infty \end{cases} \quad (2.43)$$

e $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ é tal que

- $\text{supp } \chi \subset B(0, R)/B(0, R_0)$,
- $\chi = 1$, numa pequena vizinhança de $\partial \bar{D}$,
- $\chi = 0$, se $|x| = R$.

Assim, de (2.41) obtemos em pontos de $\partial \bar{D}$ a identidade

$$\text{a) } \Lambda_n \mathbf{u} = \Lambda_n \mathbf{v}_0 + \Lambda_n(\chi \tilde{\mathbf{u}}) = \Lambda_n \mathbf{v}_0 + \Lambda_n(\chi \mathbf{w}_0) = \Lambda_n \mathbf{v}_0 - \Lambda_n \mathbf{v}_0 = 0.$$

b) Além disso, $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0$ em $\mathbb{R}^3/B(0, R)$, pois $\text{supp } \chi \subset B(0, R)/B(0, R_0)$. Conseqüentemente, a função \mathbf{u} satisfaz $(C.R.K)_\infty$, pois \mathbf{v}_0 tem essa propriedade.

c) Portanto, para todo $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$ e todo $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$. A função

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{v}_0(x) + \chi(x) \tilde{\mathbf{u}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), \quad x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty, \end{array} \right. \quad (2.44)$$

se, e só se, para todo $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x) &= b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) \\ &= \mathbf{f}_0(x) + b^2 \Delta \chi(x) \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}[\text{div}(\chi(x) \tilde{\mathbf{u}}(x))] + \sigma^2 \chi(x) \tilde{\mathbf{u}}(x). \end{aligned} \quad (2.45)$$

É claro que a equação acima se verifica para

$$x \in \Omega^R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > R\}$$

pois, $\text{supp } \chi \subset B(0, R)/B(0, R_0)$, $\chi = 0$ em $|x| = R$, $\psi(x) = 0$ em \mathbb{R}^3/Ω_R e $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Portanto, a função

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{v}_0(x) + \chi(x) \tilde{\mathbf{u}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

será solução do problema (2.33) se, e só se, a equação (2.45) se verifica no aberto limitado Ω_R , i.e., se, e só se, para todo $x \in \Omega_R$ temos

$$\mathbf{h}(x) = \mathbf{f}(x) + b^2 \Delta \chi(x) \mathbf{w}_0(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}[\text{div}(\chi(x) \mathbf{w}_0(x))] + \sigma^2 \chi(x) \mathbf{w}_0(x). \quad (2.46)$$

Agora, a função \mathbf{w}_0 em Ω_R satisfaz

$$b^2 \Delta \mathbf{w}_0 + (a^2 + b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{w}_0(x)) = 0.$$

Logo, a equação (2.46) fica na forma

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{G}_\chi(\sigma) \mathbf{w}_0, \quad (2.47)$$

onde o operador $\mathbf{G}_\chi(\sigma)$ é uma aplicação linear e contínua

$$\mathbf{G}_\chi(\sigma) : [H^2(\Omega_R)]^3 \rightarrow [H^1(\Omega_R)]^3$$

dada pela fórmula

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\chi(\sigma) \mathbf{w}_0 = & (a^2 + b^2)[(\text{grad } \chi \cdot \text{grad}) \mathbf{w}_0] + [b^2 \Delta \chi + \sigma^2 \chi] \mathbf{w}_0 + \\ & (a^2 - b^2)[(\mathbf{w}_0 \cdot \text{grad}) \text{grad } \chi + \text{grad } \chi \times \text{rot } \mathbf{w}_0 + \text{grad } \chi \text{ div } \mathbf{w}_0]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Por outro lado, o operador solução \mathbf{P} associado ao problema (2.42), isto é, $\mathbf{P} \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{w}_0$ com $\tilde{\mathbf{g}} = -\Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v}_0$ depende analiticamente de σ , pois \mathbf{v}_0 tem essa propriedade. Além disso, ele atua de maneira contínua na forma

$$\mathbf{P}(\sigma) : \mathcal{M} \rightarrow [H^2(\Omega_R)]^3, \quad (2.49)$$

onde $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\sigma)$ e \mathcal{M} é o espaço de traço dado por

$$\mathcal{M} = \begin{cases} [H^{1/2}(\partial\bar{D})]^3, & \text{No caso Dirichlet,} \\ [H^{-1/2}(\partial\bar{D})]^3, & \text{No caso Neumann,} \end{cases} \quad (2.50)$$

Mais ainda, o operador de traço $\Lambda_{\mathbf{n}}$ atua de maneira contínua

$$\Lambda_{\mathbf{n}} : [H^2(\Omega_R)]^3 \rightarrow \mathcal{M}. \quad (2.51)$$

Assim, com estes operadores e tomando em conta o fato de que $\mathbf{v}_0 = \tilde{\mathbf{v}}_0$ em Ω_R , a equação (2.47) torna-se

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{G}_\chi(\sigma) \mathbf{P}(\sigma) \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma) \tilde{\mathbf{A}}(\sigma) \mathbf{f}. \quad (2.52)$$

Isto é

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{B}_\chi(\sigma) \mathbf{f}, \quad (2.53)$$

onde,

$$\mathbf{B}_\chi(\sigma) \mathbf{f} = -\mathbf{G}_\chi(\sigma) \mathbf{P}(\sigma) \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma) \tilde{\mathbf{A}}(\sigma) \mathbf{f}. \quad (2.54)$$

É claro que a demonstração do teorema estaria concluída se provamos que

i) O conjunto de operadores $\{\mathbf{B}_\lambda(\sigma)\}$ definido na identidade (2.54) representa uma família de operadores compactos no espaço $[L^2(\Omega_R)]^3$.

ii) A equação homogênea

$$\mathbf{B}_\lambda(\sigma) \mathbf{f} + \mathbf{f} = 0,$$

tem só solução trivial.

Pois, pela alternativa de Fredholm a equação não homogênea

$$\mathbf{B}_\lambda(\sigma) \mathbf{f} + \mathbf{f} = \mathbf{h}, \quad (2.55)$$

teria solução para todo $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega_R)]^3$. A afirmação (i) segue do

Lema 2.5

O conjunto de operadores $\{\mathbf{B}_\lambda(\sigma)\}$, com $\sigma \in \mathcal{C}$ tal que $\text{Im}(\sigma) > 0$, representa uma família de operadores compactos no espaço $[L^2(\Omega_R)]^3$.

Demonstração:

De fato, denotemos por $\mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{g}}} \subset [H^2(\Omega_R)]^3$ o espaço de soluções (a qual depende do dado $\tilde{\mathbf{g}} = -\Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{v}}_0$) do problema (2.42). As definições de $\mathbf{G}_\chi(\sigma)$, $\mathbf{P}(\sigma)$, $\mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma)$, $\tilde{\mathbf{A}}(\sigma)$ e $\Lambda_{\mathbf{n}}$ dadas em (2.48), (2.49), (2.26), (2.28) e (2.51) respectivamente, em conjunto com a identidade (2.54) conduzem ao esquema

$$\begin{array}{ccccc}
 [H^2(\Omega_R)]^3 & \xrightarrow[\text{cont.}]{\Lambda_{\mathbf{n}}} & \mathcal{M} & \xrightarrow[\text{cont.}]{\mathbf{P}(\sigma)} & \mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{g}}} \subset [H^2(\Omega_R)]^3 \\
 \uparrow \text{cont. } \mathbf{F}_{\hat{\Omega}}(\sigma) & & & & \downarrow \text{cont. } \mathbf{G}_\chi(\sigma) \\
 [H^2(\mathbb{R}^3)]^3 & & & & [H^1(\Omega_R)]^3 \\
 \uparrow \text{cont. } \tilde{\mathbf{A}}(\sigma) & & & & \downarrow \text{comp. } \mathbf{i} \\
 [L^2(\Omega_R)]^3 & \xleftarrow[\text{comp.}]{\mathbf{B}_\chi(\sigma)} & & & [L^2(\Omega_R)]^3
 \end{array}$$

do qual, segue a compacidade de $\mathbf{B}_\chi(\sigma)$.

Agora, para a prova de (ii), tome-se $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega_R)]^3$ tal que

$$\mathbf{B}_\lambda(\sigma)\mathbf{f} + \mathbf{f} = 0.$$

Logo, da equação (2.55) vem que $\mathbf{h} = 0$. Portanto a função \mathbf{u} é solução do problema homogêneo

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_{\infty}, \end{cases}$$

Daquí, em particular temos (pela unicidade do problema (2.33)) que $\mathbf{u} = 0$ em Ω isto leva a

$$-\chi \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_0, \quad \text{em } \Omega. \quad (2.56)$$

de (2.56) segue que $\mathbf{v}_0 = 0$ em $\Omega^R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > R\}$, pois $\text{supp } \chi \subset B(0, R)/B(0, R_0)$. Além disso, $\mathbf{v}_0 = 0$ em $\partial B(0, R)$ já que $\chi = 0$ em $\partial B(0, R)$.

Defina-se em $\overline{B(0, R)}$ a função

$$\Upsilon = \tilde{\chi} \mathbf{v}_0 + [1 - \tilde{\chi}] \tilde{\mathbf{u}},$$

onde

$$\tilde{\chi}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \bar{D}, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_R \cup \partial B(0, R), \end{cases}$$

Note-se que $\Upsilon \in [H^2(B(0, R))]^3$. Mais ainda,

a) $\Upsilon = \mathbf{v}_0$ em D . Daí, tem-se

$$\bar{\Delta} \Upsilon(x) = b^2 \Delta \Upsilon(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \Upsilon(x)) = -\sigma^2 \mathbf{v}_0(x), \text{ se } x \in D,$$

pois $\mathbf{f}_0(x) = 0$, se $x \in D$, já que $\psi(x) = 0$, caso $x \notin \Omega_R$.

b) $\Upsilon(x) = \tilde{\mathbf{u}}(x)$ se $x \in \Omega_R$. Logo,

$$\bar{\Delta} \Upsilon(x) = b^2 \Delta \Upsilon(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \Upsilon)(x) = 0, \quad \text{se } x \in \Omega_R,$$

pois $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{w}_0$ em Ω_R .

c) $\Upsilon = 0$ em $\partial B(0, R)$, pois $\mathbf{v}_0 = \tilde{\mathbf{u}} = 0$ em $\partial B(0, R)$.

Agora, pela identidade de Betti-Green (2.12) em $B(0, R)$, tem-se

$$\int_{B(0,R)} \bar{\Upsilon} \bar{\Delta} \Upsilon dx + \int_{B(0,R)} e(\bar{\Upsilon}, \Upsilon) dx = - \int_{\partial B(0,R)} \bar{\Upsilon} \mathbf{T}_n \Upsilon dS = 0.$$

Daí,

$$\int_{B(0,R)} e(\bar{\Upsilon}, \Upsilon) dx = \sigma^2 \int_D |\mathbf{v}_0|^2 dx.$$

Desta expressão segue que

$$\int_{B(0,R)} e(\bar{\Upsilon}, \Upsilon) dx = [\operatorname{Re}(\sigma)^2 - \operatorname{Im}(\sigma)^2] \int_D |\mathbf{v}_0|^2 dx \quad (2.57)$$

e

$$2 \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\sigma) \int_D |\mathbf{v}_0|^2 dx = 0. \quad (2.58)$$

Se $\operatorname{Re}(\sigma) \neq 0$, da hipótese em σ e a identidade (2.58) temos

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad \text{em } D.$$

Agora, se $\operatorname{Re}(\sigma) = 0$, da identidade (2.57) e a hipótese em σ , vem

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad \text{em } D,$$

pois

$$\int_{B(0,R)} e(\bar{\Upsilon}, \Upsilon) dx \geq 0.$$

Portanto, para todo $\sigma \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Im}(\sigma) > 0$, obtemos $\mathbf{v}_0 = 0$ em D . Daí a função Υ é tal que

$$\begin{cases} \Upsilon \in [H^2(B(0, R))]^3, \\ b^2 \Delta \Upsilon(x) + (a^2 - b^2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \Upsilon(x)) = 0, & x \in B(0, R), \\ \Upsilon(x) = 0, & x \in \partial B(0, R). \end{cases}$$

Logo, o teorema 2.2 implica $\Upsilon = 0$ em $B(0, R)$, ou seja, $\tilde{\mathbf{u}} = 0$ em Ω_R . Isto, e a identidade

$$-\chi \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_0, \quad \text{em } \Omega_R \subset \Omega,$$

levam a $\mathbf{v}_0 = 0$ em Ω_R . Daí,

$$0 = b^2 \Delta \mathbf{v}_0(x) + (a^2 - b^2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}_0(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}_0(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega_R.$$

Isto prova o teorema. ■

Observação 2.1

Do teorema acima decorrem os seguintes resultados

Teorema 2.5

Seja $\sigma \in \mathbb{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$. Então, para todo $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$ o problema tipo Neumann

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \mathbf{T}_{\mathbf{n}(x)} \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty, \end{cases}$$

tem no máximo uma solução $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$.

Demonstração:

A demonstração segue do teorema (2.4) fazendo $\Lambda_{\mathbf{n}} = \mathbf{T}_{\mathbf{n}}$. ■

Teorema 2.6

Seja $\sigma \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Im}(\sigma) > 0$. Então, para todo $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$ o problema tipo Dirichlet

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty, \end{cases}$$

tem no máximo uma solução $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$.

Demonstração:

A demonstração segue do teorema (2.4) com $\Lambda_{\mathbf{n}} = \mathbf{I}$. ■

Com estes resultados concluímos esta seção .

Capítulo 3

Acoplamento entre a formulação variacional e a representação integral na propagação de ondas elásticas

3.1 Apresentação

Neste capítulo estudamos o modelo de ondas elásticas num aberto limitado de \mathbb{R}^3 . Resultados de existência e unicidade são apresentados via uma técnica exposta recentemente para o caso escalar de ondas e as equações de Maxwell nos artigos de M. Lenoir, M. Vuillerme-Ledard, C. Hazard [35] e C. Hazard e M. Lenoir [23], chamada por esses autores de “Método de acoplamento entre a formulação variacional e a representação integral”. Nossos principais resultados mostram que uma solução do problema de espalhamento direto (no domínio exterior $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$) estudado no capítulo anterior leva a uma solução (restrita ao aberto limitado Ω_R) do problema limitado correspondente. E reciprocamente, sob certas hipóteses, a única solução do problema no aberto limitado $\Omega_R = \Omega \cap B(0, R)$ leva a uma única solução do problema definido no domínio exterior Ω . Os resultados

principais desta seção são

I:

Sejam $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$, $\alpha, \nu \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha\sigma_p^{-2}) < 0$, $\text{Im}(\nu\sigma_s^{-2}) < 0$ e $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Seja $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$ a única solução do sistema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial\bar{D}, \\ (C.R.K)_{\infty}. \end{cases}$$

Então, o problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial\bar{D}, \\ [\mathbf{D}_{\nu} \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_{\nu} \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \end{cases} \quad (3.1)$$

tem uma única solução $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ que coincide com a solução \mathbf{u} do primeiro modelo, quando \mathbf{u} é restrita ao domínio Ω_R . Os operadores \mathbf{D}_{ν} , \mathbf{N}_{α} que atuam em soluções do primeiro modelo têm a forma

$$[\mathbf{D}_{\nu} \mathbf{u}](x) = (\mathbf{n}(x) \times \text{rot } \mathbf{u}(x)) + \text{Re}(\sigma) \nu \mathbf{n}(x) \times (\mathbf{u}(x) \times \mathbf{n}(x)), \quad x \in \partial B(0, R),$$

$$[\mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{u}](x) = \text{div } \mathbf{u}(x) + \frac{a^2}{b^2} \text{Re}(\sigma) \alpha \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}(x), \quad x \in \partial B(0, R).$$

c

II:

Sejam $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$, $\alpha, \nu \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$, $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Seja $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ a única solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \end{array} \right. \quad (3.2)$$

onde a função \mathbf{u} é da forma

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) - \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(y) \} dS + \int_{\Omega} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Então, o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty \end{array} \right.$$

tem no máximo uma solução $\mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^3$ a qual é a extensão ao aberto Ω da solução $\tilde{\mathbf{u}}$ do primeiro modelo. O operador de traço $\Lambda_{\mathbf{n}}$, dado nos modelos acima denota uma das seguintes condições sobre $\partial \bar{D}$:

$$\Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}|_{\partial \bar{D}}, & \text{No caso Dirichlet,} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{u}|_{\partial \bar{D}}, & \text{No caso Neumann,} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ em (3.3), é o operador de tração:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{n}(x)} \mathbf{u}(x) = 2b^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + (a^2 - 2b^2) \mathbf{n}(x) \text{div } \mathbf{u}(x) + b^2 \mathbf{n}(x) \times \text{rot } \mathbf{u}(x). \quad x \in \partial \bar{D}$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \left[\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}, \frac{\partial u_3}{\partial n} \right].$$

Para isto, demonstraremos alguns lemas preliminares.

3.2 Redução a um Domínio Limitado

No decorrer desta seção usamos a fórmula vetorial de Green :

Sejam $D_1 \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado, $\mathbf{u} \in [H^1(D_1)]^3$ e $\mathbf{v} \in [H^2(D_1)]^3$, então

$$\int_{D_1} [\mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} + \text{div } \mathbf{u} \text{ div } \mathbf{v}] dx = \int_{\partial D_1} [(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \text{rot } \mathbf{v} + (\mathbf{n} \text{ div } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}] dS. \quad (3.4)$$

Fixemos um número $R > 0$, tal que $\partial \bar{D} \subset B(0, R)$, onde $B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ com $\partial B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}$.

Definimos o produto de convolução de duas matrizes por

$$(\mathbf{A} * \mathbf{Q})^i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{A}^{i,j} * \mathbf{Q}^j. \quad (3.5)$$

Note que esta definição é similar ao produto de matrizes e temos

$$(\mathbf{A} * \mathbf{B})^t = \mathbf{B}^t * \mathbf{A}^t.$$

Lema 3.1

Da definição do produto de convolução dado em (3.5), obtemos no sentido das distribuições as seguintes identidades:

- (i) $\text{rot } \mathbf{w} = (\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w}$,
- (ii) $\text{grad } \psi = (\text{grad } \delta) * \psi$,
- (iii) $\text{div } \mathbf{w} = (\text{grad } \delta)^t * \mathbf{w}$,
- (iv) $(\text{rot } \delta \mathbf{I})^t = -\text{rot } \delta \mathbf{I}$.

Demonstração:

Veja, o apêndice A. ■

Seja D_1 um aberto limitado do \mathbb{R}^3 , com fronteira regular e \mathbf{n} a normal externa a $\partial \bar{D}_1$. Seja $\Omega_1 = \mathbb{R}^3 / \bar{D}_1$. Sejam $\mathbf{h} \in [L^2(D_1)]^3$ e $\mathbf{v} \in [H^2(D_1)]^3$ uma função a qual verifica (no sentido das distribuições) o sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x), \quad x \in D_1. \quad (3.6)$$

Considere as funções \mathbf{V} e \mathbf{H} em $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ definidas pelas seguintes fórmulas

$$\mathbf{V}(x) = \begin{cases} \mathbf{v}(x), & x \in D_1, \\ 0, & x \in \Omega_1, \end{cases}$$

e

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} \mathbf{h}(x), & x \in D_1, \\ 0, & x \in \Omega_1, \end{cases}$$

Lema 3.2

No domínio $\mathbb{R}^3/\partial\bar{D}_1$, a função \mathbf{V} acima tem a seguinte representação integral

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x) = & b^2 \int_{\partial\bar{D}_1} (\text{rot } \Gamma_\sigma(x, y)) \cdot (\mathbf{v}(y) \times \mathbf{n}(y)) dS + b^2 \int_{\partial\bar{D}_1} [\text{div } \Gamma_\sigma(x, y)]^t (\mathbf{v}(y) \cdot \mathbf{n}(y)) dS - \\ & - b^2 \int_{\partial\bar{D}_1} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \{(\text{rot } \mathbf{v}(y) \times \mathbf{n}(y)) + \mathbf{n}(y) \text{div } \mathbf{v}(y)\} dS + \int_{D_1} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dS. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Observação 3.1

Na fórmula (3.7) todas as integrais sobre $\partial\bar{D}_1$ na verdade corresponde a dualidade entre $H^{-1/2}(\partial\bar{D}_1)$ e $H^{1/2}(\partial\bar{D}_1)$. De fato, como $\mathbf{v} \in [H^2(D_1)]^3$ então $(\mathbf{v} \times \mathbf{n})$ e $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ são elementos de $[H^{-1/2}(\partial\bar{D}_1)]^3$ e $H^{-1/2}(\partial\bar{D}_1)$ respectivamente (veja, por exemplo o livro de V. Girault e P.A. Raviart [19]). Além disto, com a condição adicional de que

$$-b^2 \text{rot}(\text{rot } \mathbf{v}) + a^2 \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) \in [L^2(D_1)]^3,$$

a qual vem do sistema (3.6), pois

$$\Delta \mathbf{v} = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{v}) - \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}),$$

a quantidade

$$\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{div } \mathbf{v}$$

é uma distribuição em $[H^{1/2}(\partial\bar{D}_1)]^3$. Nós, por simplicidade, mantemos a notação integral dada em (3.7).

Demonstração:

A demonstração é feita nos dois passos seguintes:

(I) Provamos que no sentido das distribuições vale

$$\mathbf{V} = \Gamma_\sigma * \mathbf{Q} + \Gamma_\sigma * \mathbf{H}, \quad (3.8)$$

onde \mathbf{Q} e a distribuição

$$\mathbf{Q} = -b^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{V}) + a^2 \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{V}) + \sigma^2 \mathbf{V} - \mathbf{H}.$$

Para isto, usamos o lema 3.1. Com efeito, pelos itens (i) e (iii) do lema 3.1 temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma^t * \mathbf{Q} &= \Gamma_\sigma^t * [-b^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{V}) + a^2 \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{V}) + \sigma^2 \mathbf{V} - \mathbf{H}] \\ &= \Gamma_\sigma^t * [-b^2 \operatorname{rot}((\operatorname{rot} \delta \mathbf{I}) * \mathbf{V}) + a^2 \operatorname{grad}((\operatorname{grad} \delta)^t * \mathbf{V}) + \sigma^2 \mathbf{V} - \mathbf{H}]. \end{aligned}$$

Agora, usando os itens (i) e (ii) do mesmo lema, obtemos

$$\Gamma_\sigma^t * \mathbf{Q} = \Gamma_\sigma^t * [-b^2 (\operatorname{rot} \delta \mathbf{I}) * (\operatorname{rot} \delta \mathbf{I} * \mathbf{V}) + a^2 (\operatorname{grad} \delta) * ((\operatorname{grad} \delta)^t * \mathbf{V}) + \sigma^2 \mathbf{V} - \mathbf{H}].$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma^t * \mathbf{Q} &= -b^2 \Gamma_\sigma^t * (\operatorname{rot} \delta \mathbf{I}) * (\operatorname{rot} \delta \mathbf{I} * \mathbf{V}) + \\ &+ a^2 \Gamma_\sigma^t * (\operatorname{grad} \delta) * ((\operatorname{grad} \delta)^t * \mathbf{V}) + \sigma^2 \Gamma_\sigma^t * \mathbf{V} - \Gamma_\sigma^t * \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Usando o ítem (iv) do lema 3.1 a identidade acima fica na forma

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma^t * \mathbf{Q} &= -b^2 \Gamma_\sigma^t * (\operatorname{rot} \delta \mathbf{I})^t * (\operatorname{rot} \delta \mathbf{I})^t * \mathbf{V} + \\ &+ a^2 \Gamma_\sigma^t * [(\operatorname{grad} \delta)^t]^t * [(\operatorname{grad} \delta)^t * \mathbf{V}] + \sigma^2 \Gamma_\sigma^t * \mathbf{V} - \Gamma_\sigma^t * \mathbf{H} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma^t * \mathbf{Q} &= -b^2 [(\operatorname{rot} \delta \mathbf{I}) * \Gamma_\sigma]^t * [\mathbf{V}^t * (\operatorname{rot} \delta \mathbf{I})]^t \\ &+ a^2 [(\operatorname{grad} \delta)^t * \Gamma_\sigma]^t * [\mathbf{V}^t * (\operatorname{grad} \delta)]^t + \sigma^2 [\mathbf{V}^t * \Gamma_\sigma]^t - \Gamma_\sigma^t * \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma^t * \mathbf{Q} &= -b^2 ([\mathbf{V}^t * (\operatorname{rot} \delta \mathbf{I})]^t * [(\operatorname{rot} \delta \mathbf{I}) * \Gamma_\sigma])^t + \\ &+ a^2 ([\mathbf{V}^t * (\operatorname{grad} \delta)] * [(\operatorname{grad} \delta)^t * \Gamma_\sigma])^t + \sigma^2 [\mathbf{V}^t * \Gamma_\sigma]^t - \Gamma_\sigma^t * \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}\Gamma'_\sigma * \mathbf{Q} &= \left[\mathbf{V}^t * (-b^2 * (\text{rot } \delta \mathbf{I})^t * (\text{rot } \delta \mathbf{I} * \Gamma_\sigma + a^2(\text{grad } \delta) * (\text{grad } \delta)^t * \Gamma_\sigma + \sigma^2 \Gamma_\sigma)^t \right]^t \\ &\quad - \Gamma'_\sigma * \mathbf{H}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\Gamma'_\sigma * \mathbf{Q} = \left[\mathbf{V}^t * (-b^2 (\text{rot rot } \Gamma_\sigma + a^2(\text{grad}(\text{div} * \Gamma_\sigma) + \sigma^2 \Gamma_\sigma))^t \right]^t - \Gamma'_\sigma * \mathbf{H}.$$

Portanto,

$$\Gamma'_\sigma * \mathbf{Q} = [\mathbf{V}^t * (\delta_y \mathbf{I})^t]^t - \Gamma'_\sigma * \mathbf{H}.$$

Daí,

$$\Gamma'_\sigma * \mathbf{Q} + \Gamma'_\sigma * \mathbf{H} = \mathbf{V},$$

mais ainda, a restrição aos domínios D_1 e $\mathbb{R}^3/\overline{D}_1$ da distribuição \mathbf{Q} é zero pela construção da função \mathbf{V} ; e o suporte de \mathbf{Q} está contido em $\partial\overline{D}_1$. Agora a simetria da matriz de Kuprazde conduz ao afirmação .

(II) Agora, calculamos a distribuição \mathbf{Q} . Com efeito, note que para todo $\mathbf{U} \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} [-b^2 \text{rot}(\text{rot } \mathbf{V}) + a^2 \text{grad}(\text{div } \mathbf{V}) + \sigma^2 \mathbf{V} - \mathbf{H}] \cdot \mathbf{U} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} [-b^2 \text{rot}(\text{rot } \mathbf{V}) + a^2 \text{grad}(\text{div } \mathbf{V}) + \sigma^2 \mathbf{V}] \cdot \mathbf{U} \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H} \cdot \mathbf{U} \, dx \\ &= \int_{D_1} \mathbf{v} \cdot [-b^2 \text{rot}(\text{rot } \mathbf{U}) + a^2 \text{grad}(\text{div } \mathbf{U}) + \sigma^2 \mathbf{U}] \, dx - \int_{D_1} \mathbf{h} \cdot \mathbf{U} \, dx \\ &= \int_{D_1} \mathbf{v} \cdot [b^2 \Delta \mathbf{U} + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{U}) + \sigma^2 \mathbf{U}] \, dx - \int_{D_1} \mathbf{h} \cdot \mathbf{U} \, dx \\ &= b^2 \int_{D_1} [\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{v}] \, dx + b^2 \int_{D_1} \mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{v} \, dx + \\ &\quad + \int_{D_1} \mathbf{U} \cdot [(a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) + \sigma^2 \mathbf{v}] \, dx - \int_{D_1} \mathbf{h} \cdot \mathbf{U} \, dx\end{aligned}$$

$$= b^2 \int_{D_1} [\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{v}] dx$$

pois, a distribuição \mathbf{v} , satisfaz a equação

$$b^2 \Delta \mathbf{v} + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) + \sigma^2 \mathbf{v} = \mathbf{h}, \text{ em } D_1.$$

Assim,

$$\int_{R^3} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} dx = b^2 \int_{D_1} [\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{v}] dx.$$

Agora, da fórmula vectorial de Green (3.4), temos

$$\begin{aligned} \int_{R^3} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} dx &= b^2 \int_{\partial \bar{D}_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \text{rot } \mathbf{U} dS + b^2 \int_{\partial \bar{D}_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \text{div } \mathbf{U} dS - \\ &\quad - b^2 \int_{\partial \bar{D}_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{U}) \cdot \text{rot } \mathbf{v} dS - b^2 \int_{\partial \bar{D}_1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) \text{div } \mathbf{v} dS. \end{aligned}$$

Se denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre o espaço $[C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$ e $([C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^3)'$, identidade acima, é

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{U} \rangle &= -b^2 \int_{\partial \bar{D}_1} [(\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \text{div } \mathbf{v}] \cdot \mathbf{U} dS + \\ &\quad + b^2 \int_{\partial \bar{D}_1} [(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot \text{rot } \mathbf{U} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \text{div } \mathbf{U}] dS. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a distribuição \mathbf{Q} na forma

$$\mathbf{Q} = -b^2 [\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{div } \mathbf{v}] \delta_{\partial \bar{D}_1} + b^2 \text{rot}[(\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \delta_{\partial \bar{D}_1}] - b^2 \text{grad}[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \delta_{\partial \bar{D}_1}] \quad (3.9)$$

Na identidade acima a função $f \delta_{\partial \bar{D}_1}$, denota uma distribuição no espaço $([C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^3)'$ dada pela fórmula

$$\langle f \delta_{\partial \bar{D}_1}, \phi \rangle = \int_{\partial \bar{D}_1} f \phi dS, \quad \phi \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^3.$$

Agora, as equações (3.9) e (3.8), nós levam a

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x) &= -b^2 \Gamma_\sigma * [\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{div } \mathbf{v}] \delta_{\partial \bar{D}_1} + b^2 \Gamma_\sigma * \text{rot}[(\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \delta_{\partial \bar{D}_1}] + \\ &\quad + b^2 \Gamma_\sigma * \text{grad}[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \delta_{\partial \bar{D}_1}] + \Gamma_\sigma * \mathbf{H}, \end{aligned}$$

o qual para todo $x \in \mathbb{R}^3 / \partial \bar{D}_1$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x) &= b^2 \int_{\partial \bar{D}_1} (\text{rot } \Gamma_\sigma(x, y)) \cdot (\mathbf{v}(y) \times \mathbf{n}(y)) dS + b^2 \int_{\partial \bar{D}_1} [\text{div } \Gamma_\sigma(x, y)]^t (\mathbf{v}(y) \cdot \mathbf{n}(y)) dS \\ &- b^2 \int_{\partial \bar{D}_1} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \{(\text{rot } \mathbf{v}(y) \times \mathbf{n}(y)) + \mathbf{n}(y) \text{div } \mathbf{v}(y)\} dS + \int_{D_1} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy. \end{aligned}$$

Concluí-se assim a demonstração do lema. ■

Observação 3.2

Cada termo do lado direito da identidade acima é a convolução entre uma função que é infinitamente diferenciável (para $x \neq y$) é uma medida com suporte compacto (em $\partial \bar{D}_1$). Além disso, fora do suporte desta medida, ela é uma função infinitamente diferenciável a qual pode-se representar via a fórmula integral acima (veja, por exemplo, L. Schwartz, p.p, 165-169 [52]).

Lema 3.3

Sejam $\sigma \in \mathbb{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ e $\nu, \alpha \in \mathbb{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$ e $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$, onde $\sigma_p = \sigma/a$ e $\sigma_s = \sigma/b$. Se $\mathbf{u}^* \in [H^2(B(0, R))]^3$ é solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}^*(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}^*(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}^*(x) = 0, & x \in B(0, R), \\ \mathbf{D}_\nu \mathbf{u}^*(x) = 0, \quad \mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}^*(x) = 0, & x \in \partial B(0, R), \end{cases}$$

onde \mathbf{D}_ν e \mathbf{N}_α são definidos como

$$[\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}^*](x) = (\mathbf{n}(x) \times \text{rot } \mathbf{u}^*(x)) + \text{Re}(\nu) \nu \mathbf{u}^*(x) \times (\mathbf{u}^*(x) \times \mathbf{n}(x)), \quad x \in \partial B(0, R),$$

$$[\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}^*](x) = \text{div } \mathbf{u}^*(x) + \frac{a^2}{b^2} \text{Re}(\sigma) \alpha \mathbf{u}^*(x) \cdot \mathbf{n}(x), \quad x \in \partial B(0, R).$$

Então, $\mathbf{u}^* = 0$, em $B(0, R)$.

Demonstração:

Pelo lema 3.2 segue que \mathbf{u}^* tem a representação

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^*(x) &= b^2 \int_{\partial B(0,R)} (\text{rot } \Gamma_\sigma(x,y)) \cdot (\mathbf{u}^*(y) \times \mathbf{n}(y)) dS + b^2 \int_{\partial B(0,R)} [\text{div } \Gamma_\sigma(x,y)]^t (\mathbf{u}^*(y) \cdot \mathbf{n}(y)) dS - \\
&\quad - b^2 \int_{\partial B(0,R)} \Gamma_\sigma(x,y) \cdot \{(\text{rot } \mathbf{u}^*(y) \times \mathbf{n}(y)) + \mathbf{n}(y) \text{div } \mathbf{u}^*(y)\} dS, \quad x \in B(0,R).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora, a fórmula vetorial de Green (3.4), nos leva a

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} \bar{\mathbf{u}}^* \cdot \Delta \mathbf{u}^* + \int_{B(0,R)} \text{div } \bar{\mathbf{u}}^* \text{div } \mathbf{u}^* dx + \int_{B(0,R)} \text{rot } \bar{\mathbf{u}}^* \cdot \text{rot } \mathbf{u}^* dx = \\
\int_{\partial B(0,R)} (\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{u}}^*) \cdot \text{rot } \mathbf{u}^* dS + \int_{\partial B(0,R)} (\mathbf{n} \text{div } \bar{\mathbf{u}}^*) \cdot \mathbf{u}^* dS,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{(a^2 - b^2)}{b^2} \int_{B(0,R)} |\text{div } \mathbf{u}^*|^2 dx - \frac{\sigma^2}{b^2} \int_{B(0,R)} |\mathbf{u}^*|^2 dx + \\
\int_{B(0,R)} |\text{rot } \mathbf{u}^*|^2 dx + \int_{B(0,R)} |\text{div } \mathbf{u}^*|^2 dx = \\
-\frac{a^2}{b^2} \text{Re}(\sigma) \alpha \int_{\partial B(0,R)} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^*|^2 dS - \text{Re}(\sigma) \nu \int_{\partial B(0,R)} |\mathbf{n} \times \mathbf{u}^*|^2 dS,
\end{aligned}$$

pois,

$$D_\nu(\mathbf{u}^*) = 0, \text{ e } N_\alpha(\mathbf{u}^*) = 0, \quad \text{em } \partial B(0,R).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{b^2} \int_{B(0,R)} |\text{div } \mathbf{u}^*|^2 dx - \frac{\sigma^2}{b^2} \int_{B(0,R)} |\mathbf{u}^*|^2 dx + \int_{B(0,R)} |\text{rot } \mathbf{u}^*|^2 dx \\
+ \frac{a^2}{b^2} \text{Re}(\sigma) \alpha \int_{\partial B(0,R)} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^*|^2 dS + \text{Re}(\sigma) \nu \int_{\partial B(0,R)} |\mathbf{n} \times \mathbf{u}^*|^2 dS = 0.
\end{aligned}$$

Multiplique esta identidade por σ_s^{-2} para obter

$$\begin{aligned}
\sigma_p^{-2} \int_{B(0,R)} |\text{div } \mathbf{u}^*|^2 dx + \sigma_s^{-2} \int_{B(0,R)} |\text{rot } \mathbf{u}^*|^2 dx + \sigma_p^{-2} \text{Re}(\sigma) \alpha \int_{\partial B(0,R)} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^*|^2 dS \\
+ \sigma_s^{-2} \text{Re}(\sigma) \nu \int_{\partial B(0,R)} |\mathbf{n} \times \mathbf{u}^*|^2 dS = \int_{B(0,R)} |\mathbf{u}^*|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Note que

$$\sigma_s^{-2} = \frac{b^2(\text{Re}(\sigma)^2 - \text{Im}(\sigma)^2) - i 2b^2 \text{Re}(\sigma) \text{Im}(\sigma)}{(\text{Re}(\sigma)^2 - \text{Im}(\sigma)^2)^2 + 4 \text{Im}(\sigma)^2 \text{Re}(\sigma)^2} \tag{3.12}$$

e

$$\sigma_p^{-2} = \frac{a^2(\operatorname{Re}(\sigma)^2 - \operatorname{Im}(\sigma)^2) - i 2 a^2 \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\sigma)}{(\operatorname{Re}(\sigma)^2 - \operatorname{Im}(\sigma)^2)^2 + 4 \operatorname{Im}(\sigma)^2 \operatorname{Re}(\sigma)^2}. \quad (3.13)$$

Agora, se $\operatorname{Re}(\sigma) = 0$, das equações (3.12) e (3.13) obtemos,

$$\sigma_s^{-2} = \frac{-b^2}{\operatorname{Im}(\sigma)^2}$$

e

$$\sigma_p^{-2} = \frac{-a^2}{\operatorname{Im}(\sigma)^2},$$

a hipótese $\operatorname{Im}(\sigma) > 0$, implica então que $\mathbf{u}^* = 0$ em $B(0, R)$.

Agora, se $\operatorname{Re}(\sigma) > 0$ das equações (3.12) e (3.13) vem

$$\operatorname{Im}(\sigma_s^{-2}) = \frac{-2 b^2 \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\sigma)}{(\operatorname{Re}(\sigma)^2 - \operatorname{Im}(\sigma)^2)^2 + 4 \operatorname{Im}(\sigma)^2 \operatorname{Re}(\sigma)^2} < 0$$

e

$$\operatorname{Im}(\sigma_p^{-2}) = \frac{-2 a^2 \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\sigma)}{(\operatorname{Re}(\sigma)^2 - \operatorname{Im}(\sigma)^2)^2 + 4 \operatorname{Im}(\sigma)^2 \operatorname{Re}(\sigma)^2} < 0$$

pois $\operatorname{Im}(\sigma) > 0$. Agora, como pela hipótese temos $\operatorname{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$ e $\operatorname{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$, segue que $\operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$ e $\operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$. Tomando a parte imaginária da identidade (3.11) obtemos,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u}^* = 0, \text{ e } \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* = 0, \text{ em } \partial B(0, R), \quad (3.14)$$

daí,

$$\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}^* = 0, \text{ e } \operatorname{div} \mathbf{u}^* = 0, \text{ em } \partial B(0, R), \quad (3.15)$$

assim, de (3.10) conclui-se que $\mathbf{u}^* = 0$, em $B(0, R)$.

Agora, no caso $\operatorname{Re}(\sigma) < 0$, das equações (3.12) e (3.13) obtemos,

$$\operatorname{Im}(\sigma_s^{-2}) = \frac{-2 b^2 \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\sigma)}{(\operatorname{Re}(\sigma)^2 - \operatorname{Im}(\sigma)^2)^2 + 4 \operatorname{Im}(\sigma)^2 \operatorname{Re}(\sigma)^2} > 0$$

e

$$\operatorname{Im}(\sigma_p^{-2}) = \frac{-2 a^2 \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\sigma)}{(\operatorname{Re}(\sigma)^2 - \operatorname{Im}(\sigma)^2)^2 + 4 \operatorname{Im}(\sigma)^2 \operatorname{Re}(\sigma)^2} > 0$$

pois $\operatorname{Im}(\sigma) > 0$. Além disso, como pela hipótese temos $\operatorname{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$ e $\operatorname{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$, segue que $\operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) > 0$ e $\operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) > 0$, tomando a parte imaginária da identidade (3.11) obtemos,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u}^* = 0, \text{ e } \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* = 0, \text{ em } \partial B(0, R), \quad (3.16)$$

assim,

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u}^* = 0, \text{ e } \text{div } \mathbf{u}^* = 0, \text{ em } \partial B(0, R). \quad (3.17)$$

Portanto, de (3.10) conclui-se que $\mathbf{u}^* = 0$, em $B(0, R)$. Isto finaliza a prova do lema. \blacksquare

Observação 3.3

Note que

$$\text{Im}(\alpha \sigma_s^{-2}) = \frac{b^2 \text{Im}(\alpha)(\text{Re}(\sigma)^2 - \text{Im}(\sigma)^2) - 2b^2 \text{Re}(\alpha) \text{Re}(\sigma) \text{Im}(\sigma)}{(\text{Re}(\sigma)^2 - \text{Im}(\sigma)^2)^2 + 4 \text{Im}(\sigma)^2 \text{Re}(\sigma)^2} \quad (3.18)$$

e

$$\text{Im}(\nu \sigma_p^{-2}) = \frac{a^2 \text{Im}(\nu)(\text{Re}(\sigma)^2 - \text{Im}(\sigma)^2) - 2a^2 \text{Re}(\nu) \text{Re}(\sigma) \text{Im}(\sigma)}{(\text{Re}(\sigma)^2 - \text{Im}(\sigma)^2)^2 + 4 \text{Im}(\sigma)^2 \text{Re}(\sigma)^2}, \quad (3.19)$$

portanto, sempre é possível escolher $\alpha, \nu \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\nu \sigma_p^{-2}) < 0$ e $\text{Im}(\alpha \sigma_s^{-2}) < 0$, para $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$. De fato

a) Se $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ é tal que $(\text{Re}(\sigma))^2 = 0$, então das equações (3.18) e (3.19) temos que $\text{Im}(\alpha \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\text{Im}(\nu \sigma_p^{-2}) < 0$, se, e só se,

$$\alpha, \nu \in \{\eta \in \mathcal{C} : \text{Im}(\eta) > 0, \text{Re}(\eta) \in \mathbb{R}\}.$$

b) Se $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ é tal que $(\text{Re}(\sigma))^2 > (\text{Im}(\sigma))^2$, então das equações (3.18) e (3.19) temos que $\text{Im}(\alpha \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\text{Im}(\nu \sigma_p^{-2}) < 0$, se, e só se,

$$\alpha, \nu \in \{\eta \in \mathcal{C} : \text{Im}(\eta) < c(\sigma) \text{Re}(\eta)\},$$

onde

$$c(\sigma) = \frac{2 \text{Re}(\sigma) \text{Im}(\sigma)}{[(\text{Re}(\sigma))^2 - (\text{Im}(\sigma))^2]} > 0,$$

se $\text{Re}(\sigma) > 0$ e $c(\sigma) < 0$ no caso $\text{Re}(\sigma) < 0$.

c) Se $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ é tal que $(\text{Re}(\sigma))^2 < (\text{Im}(\sigma))^2$, então das equações (3.18) e (3.19) temos que $\text{Im}(\alpha \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\text{Im}(\nu \sigma_p^{-2}) < 0$, se, e só se,

$$\alpha, \nu \in \{\eta \in \mathcal{C} : \text{Im}(\eta) < d(\sigma) \text{Re}(\eta), \},$$

onde

$$d(\sigma) = \frac{-2 \operatorname{Re}(\sigma) \operatorname{Im}(\sigma)}{[(\operatorname{Im}(\sigma))^2 - (\operatorname{Re}(\sigma))^2]} > 0,$$

se $\operatorname{Re}(\sigma) < 0$ e $d(\sigma) < 0$ no caso $\operatorname{Re}(\sigma) > 0$.

d) Se $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\operatorname{Im}(\sigma) > 0$ é tal que $(\operatorname{Re}(\sigma))^2 = (\operatorname{Im}(\sigma))^2$, então das equações (3.18) e (3.19) temos que $\operatorname{Im}(\alpha \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\operatorname{Im}(\nu \sigma_p^{-2}) < 0$, se, e só se,

$$\alpha, \nu \in \{\eta \in \mathcal{C} : \operatorname{Re}(\eta) > 0, \operatorname{Im}(\eta) \in \mathbb{R}\}.$$

Os seguintes teoremas, são os resultados principais nesta seção .

Teorema 3.1

Sejam $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\operatorname{Im}(\sigma) > 0$, $\alpha, \nu \in \mathcal{C}$ tais que $\operatorname{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$, $\operatorname{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\operatorname{supp} \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Seja $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$ a única solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), \quad x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_{\infty}. \end{array} \right.$$

Então, o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), \quad x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, \quad x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_{\nu} \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_{\nu} \mathbf{u}](x), \quad x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{u}](x), \quad x \in \partial B(0, R), \end{array} \right. \quad (3.20)$$

tem uma única solução $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ a qual coincide com a solução \mathbf{u} do primeiro modelo, quando \mathbf{u} é restrita ao domínio Ω_R . Os operadores \mathbf{D}_{ν} , \mathbf{N}_{α} que atuam em soluções do segundo modelo tem

a forma

$$[\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x) = (\mathbf{n}(z) \times \text{rot } \mathbf{u}(x)) + \text{Re}(\sigma) \nu \mathbf{n}(x) \times (\mathbf{u}(x) \times \mathbf{n}(x)), \quad x \in \partial B(0, R),$$

$$[\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x) = \text{div } \mathbf{u}(x) + \frac{a^2}{b^2} \text{Re}(\sigma) \alpha \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}(x), \quad x \in \partial B(0, R).$$

O operador de traço Λ_n dado nos modelos acima denota uma das seguintes condições sobre $\partial \bar{D}$:

$$\Lambda_n \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}|_{\partial \bar{D}}, & \text{No caso Dirichlet,} \\ \mathbf{T}_n \mathbf{u}|_{\partial \bar{D}}, & \text{No caso Neumann,} \end{cases} \quad (3.21)$$

onde \mathbf{T}_n em (3.21), é o operador de tração :

$$\mathbf{T}_{n(x)} \mathbf{u}(x) = 2b^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + (a^2 - 2b^2) \mathbf{n}(x) \text{div } \mathbf{u}(x) + b^2 \mathbf{n}(x) \times \text{rot } \mathbf{u}(x), \quad x \in \partial \bar{D}$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \left[\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}, \frac{\partial u_3}{\partial n} \right].$$

Demonstração:

Existência

Denotamos:

$$\Gamma_{1,\sigma}(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^3 = [\mathbf{T}_n \Gamma_\sigma(x, y)]^t, \quad x \neq y.$$

Sejam $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ e $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. O problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \Lambda_n \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty. \end{cases} \quad (3.22)$$

tem solução, a saber, $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$. Daí, em Ω é representada por

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \mathbf{u}(y) - \Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_n \mathbf{u})(y) \} dS + \int_\Omega \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy. \quad (3.23)$$

Sejam $R_1 > R > 0$ tais que

$$\Omega_R = \{ x \in \Omega : |x| < R \} \subset \Omega_{R_1} = \{ x \in \Omega : |x| < R_1 \}$$

Seja

$$\mathbf{F}_{\Omega_{R_1}} : [L^2(\Omega)]^3 \rightarrow [L^2(\Omega_{R_1})]^3$$

a aplicação que leva uma função \mathbf{w} na sua restrição a Ω_{R_1} , isto é,

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{F}_{\Omega_{R_1}} \mathbf{w}.$$

Segue que o operador $\mathbf{F}_{\Omega_{R_1}}$ é linear e contínuo, de fato, para todo multi-índice β com $|\beta| < m$ tem-se

$$\partial^\beta [\mathbf{F}_{\Omega_{R_1}} \mathbf{w}] = \mathbf{F}_{\Omega_{R_1}} [\partial^\beta \mathbf{w}]$$

no sentido das distribuições. Em outras palavras, para todo $m \in \mathbb{N}$ a aplicação

$$\mathbf{F}_{\Omega_{R_1}} : [H^m(\Omega)]^3 \rightarrow [H^m(\Omega_{R_1})]^3$$

é contínua. Considere agora a função $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_{\Omega_{R_1}} \mathbf{u}$, onde $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$ é a solução do problema (3.22). Daí, $\tilde{\mathbf{u}}$ restrita a Ω_R é tal que $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$. Além disso, em $\partial\bar{D}$ tem-se

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \tag{3.24}$$

e

$$\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{T}_n \mathbf{u}. \tag{3.25}$$

portanto a representação (3.23) toma a forma

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial\bar{D}} \{\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) - \Gamma_\sigma(x,y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{u}})(y)\} dS + \int_{\Omega} \Gamma_\sigma(x,y) \cdot \mathbf{h}(y) dy, \quad x \in \Omega. \tag{3.26}$$

Note que

$$b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) =$$

$$\mathbf{F}_{\Omega_R} [b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x)] = \mathbf{h}(x), \quad x \in \Omega_R.$$

Também, sobre $\partial B(0, R)$ obtemos,

$$[\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](z),$$

e análogamente,

$$[\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](z).$$

Agora, das equações (3.24) e (3.25) em $\partial\bar{D}$ temos

$$\Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}} = \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u} = 0.$$

Assim, dos fatos acima vem que a função $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial\bar{D}, \\ [\mathbf{D}_{\nu} \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{D}_{\nu} \mathbf{u}](z), & z \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{u}](z), & x \in \partial B(0, R). \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Unicidade

Sejam $\tilde{\mathbf{u}}_1$ e $\tilde{\mathbf{u}}_2$ duas soluções do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial\bar{D}, \\ [\mathbf{D}_{\nu} \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{D}_{\nu} \mathbf{u}](z), & z \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_{\alpha} \tilde{\mathbf{u}}](z) = [\mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{u}](z), & x \in \partial B(0, R). \end{array} \right. \quad (3.28)$$

onde a função \mathbf{u} é dada pela fórmula

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial\bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \mathbf{u}(y) - \Gamma_{\sigma}(x, y) \cdot (\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{u})(y) \} dS + \int_{\Omega} \Gamma_{\sigma}(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy. \quad (3.29)$$

Considere a função $\tilde{\mathbf{v}}(x) = \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2$, então ela resolve o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{v}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \tilde{\mathbf{v}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{v}}(x) = 0, & x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{v}}(x) = 0, & x \in \partial\bar{D}, \\ [\mathbf{D}_{\nu} \tilde{\mathbf{v}}](x) = \mathbf{g}_1(x), & x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_{\alpha} \tilde{\mathbf{v}}](x) = \mathbf{g}_0(x), & x \in \partial B(0, R). \end{array} \right. \quad (3.30)$$

onde as funções g_0 e g_1 são dadas por

$$g_0(z) = N_\alpha \left[\int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(z,y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y) - \Gamma_\sigma(z,y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) \} dS \right], \quad z \in \partial B(0,R)$$

e

$$g_1(z) = D_\nu \left[\int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(z,y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y) - \Gamma_\sigma(z,y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) \} dS \right], \quad z \in \partial B(0,R).$$

Mostremos que $\tilde{\mathbf{v}} = 0$, em Ω_R . De fato, da fórmula de Betti-Green (2.14), a solução do problema (3.30) em Ω_R pode ser representada na forma

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(x) &= - \int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_\sigma(x,y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) - \Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y) \} dS \\ &\quad + \int_{\partial B(0,R)} [\Gamma_\sigma(x,y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) - \Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y)] dS, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(x) &= \int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y) - \Gamma_\sigma(x,y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) \} dS \\ &\quad + \int_{\partial B(0,R)} [\Gamma_\sigma(x,y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) - \Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y)] dS, \end{aligned}$$

Denotando por

$$\psi(x) = \int_{\partial B(0,R)} [\Gamma_\sigma(x,y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) - \Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y)] dS, \quad x \in \Omega_R,$$

e

$$\mathbf{v}(x) = \int_{\partial \bar{D}} [\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) - \Gamma_\sigma(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y)] dS, \quad x \in \Omega_R,$$

a identidade acima toma a forma

$$\tilde{\mathbf{v}}(x) = \mathbf{v}(x) + \psi(x), \quad x \in \Omega_R, \quad (3.31)$$

Note que as distribuições $\Gamma_{1,\sigma}(x,y)$ e $\Gamma_\sigma(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, restritas a $B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ satisfazem as equações

$$b^2 \Delta \Gamma_{1,\sigma}(x,y) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \Gamma_{1,\sigma}(x,y)) + \sigma^2 \Gamma_{1,\sigma}(x,y) = 0$$

e

$$b^2 \Delta \Gamma_\sigma(x,y) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \Gamma_\sigma(x,y)) + \sigma^2 \Gamma_\sigma(x,y) = 0.$$

Logo, podemos estender usando a representação integral a função ψ acima, a toda a bola $B(0, R_1)$ de forma que ψ restrita a $B(0, R)$ seja solução do sistema

$$b^2 \Delta \psi(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \psi(x)) + \sigma^2 \psi(x) = 0, \quad x \in B(0, R).$$

Logo, da identidade de Betti-Green (2.14) ψ toma a forma

$$\psi(x) = \int_{\partial B(0, R)} [\Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_n \psi(y)) - \Gamma_{1, \sigma}(x, y) \cdot \psi(y)] dS, \quad x \in B(0, R). \quad (3.32)$$

Da mesma forma, estende-se a função \mathbf{v} ao aberto Ω , como uma solução do sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Além disso, a função $\tilde{\mathbf{v}}$ é solução do problema (3.30) (e daí ela satisfaz as condições impostas em $\partial B(0, R)$) da identidade (3.31) que esta definida na bola $B(0, R_1)$ obtemos em $\partial B(0, R)$ as identidades

$$[\mathbf{D}_\nu \psi](x) =$$

$$[\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{v}}](x) - \mathbf{D}_\nu \left[\int_{\partial \Omega} \{ \Gamma_{1, \sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y) - \Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) \} dS \right] = 0,$$

e

$$[\mathbf{N}_\alpha \psi](x) =$$

$$[\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{v}}](x) - \mathbf{N}_\alpha \left[\int_{\partial \Omega} \{ \Gamma_{1, \sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(y) - \Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{v}})(y) \} dS \right] = 0,$$

assim, ψ dada pela expressão acima é e solução do problema homogêneo

$$\begin{cases} b^2 \Delta \psi(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \psi(x)) + \sigma^2 \psi(x) = 0, & x \in B(0, R), \\ \mathbf{D}_\nu \psi(z) = 0, \quad \mathbf{N}_\alpha \psi(z) = 0, & z \in \partial B(0, R). \end{cases}$$

Daí, obtem-se $\psi = 0$ em $B(0, R)$, mas então, a identidade (3.31) leva a

$$\tilde{\mathbf{v}}(x) = \mathbf{v}(x). \quad (3.33)$$

Mais ainda, pelo fato de ser $\tilde{\mathbf{v}}$ solução do problema (3.30) segue que

$$\mathbf{\Lambda}_n \mathbf{v} = 0, \quad \text{em } \partial \bar{D}.$$

Agora, note também que a função \mathbf{v} satisfaz a condição de radiação de Kuprazde $(C.R.K)_\infty$, pois as distribuições $\Gamma_{1,\sigma}(x,y)$ e $\Gamma_\sigma(x,y)$ têm essa propriedade. Portanto, dos fatos acima vem que a função \mathbf{v} é solução do problema homogêneo

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty. \end{cases}$$

Daí, pelo teorema 2.4 da seção anterior, obtemos $\mathbf{v} = 0$ em Ω . Portanto, $\tilde{\mathbf{v}} = 0$, em Ω_R , pois $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}|_{\Omega_R}$. Isto finaliza a prova do teorema. ■

Teorema 3.2

Sejam $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$, $\alpha, \nu \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$, $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Seja $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ a única solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \end{cases} \quad (3.34)$$

onde a função \mathbf{u} é da forma

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) - \Gamma_\sigma(x,y) \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(y) \} dS + \int_{\Omega} \Gamma_\sigma(x,y) \cdot \mathbf{h}(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Então, o sistema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty \end{cases}$$

tem no máximo uma solução $\mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^3$ a qual é a extensão ao aberto Ω da solução $\tilde{\mathbf{u}}$ do primeiro modelo. Os operadores $\Lambda_{\mathbf{n}}$, \mathbf{D}_ν e \mathbf{N}_α são como no teorema 3.1.

Demonstração:

Existência

Seja $\tilde{\mathbf{u}}$ solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R). \end{array} \right. \quad (3.35)$$

onde \mathbf{u} é uma função definida em Ω pela fórmula

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) - \Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}})(y) \} dS + \int_{\Omega} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy. \quad (3.36)$$

Agora, a solução do problema (3.35), via Betti-Green (2.14) representa-se na forma

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(x) &= - \int_{\bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) - \Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}})(y) \} dS \\ &+ \int_{\partial B(0,R)} [\Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}})(y) - \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)] dS + \int_{\Omega_R} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy, \end{aligned}$$

isto é,

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{v}(x) + \psi(x), \quad x \in \Omega_R, \quad (3.37)$$

onde \mathbf{v} e ψ em Ω_R são dadas pelas expressões

$$\mathbf{v}(x) = \int_{\bar{D}} \{ \Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}})(y) \} - \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) \} dS + \int_{\Omega_R} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy,$$

e

$$\psi(x) = \int_{\partial B(0,R)} [\Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{u}})(y) - \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)] dS.$$

Como antes, do fato que as distribuições $\Gamma_{1,\sigma}(x, y)$ e $\Gamma_\sigma(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, restritas aos domínios $B(0, R)$ e Ω satisfazem as equações

$$b^2 \Delta \Gamma_{1,\sigma}(x, y) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \Gamma_{1,\sigma}(x, y)) + \sigma^2 \Gamma_{1,\sigma}(x, y) = 0$$

e

$$b^2 \Delta \Gamma_\sigma(x, y) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \Gamma_\sigma(x, y)) + \sigma^2 \Gamma_\sigma(x, y) = 0,$$

extendendo a $B(0, R_1)$ a função ψ acima, obtemos uma função, que restrita a $B(0, R)$ é solução do sistema

$$b^2 \Delta \psi(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \psi(x)) + \sigma^2 \psi(x) = 0, \quad x \in B(0, R),$$

assim, da identidade de Betti-Green (2.14), ψ toma a forma

$$\psi(x) = \int_{\partial B(0,R)} [\Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_n \psi(y)) - \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \psi(y)] dS, \quad x \in B(0, R), \quad (3.38)$$

Agora, extendendo a função \mathbf{v} ao aberto Ω , ela torna-se uma solução do sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x), \quad x \in \Omega.$$

mais ainda, a função $\tilde{\mathbf{u}}$ satisfaz as condições impostas em $\partial B(0, R)$, daí temos

$$[\mathbf{D}_\nu \psi](z) = [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](z) - [\mathbf{D}_\nu \mathbf{v}](z) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](z) - [\mathbf{D}_\nu \mathbf{v}](z) =$$

$$\mathbf{D}_\nu \left[\int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(z, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) - \Gamma_\sigma(z, y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{u}})(y) \} dS + \int_\Omega \Gamma_\sigma(z, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy \right]$$

$$- \mathbf{D}_\nu \left[\int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(z, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) - \Gamma_\sigma(z, y) \cdot (\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{u}})(y) \} dS + \int_{\Omega_R} \Gamma_\sigma(z, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy \right] =$$

$$\mathbf{D}_\nu \left[\int_\Omega \Gamma_\sigma(z, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy - \int_{\Omega_R} \Gamma_\sigma(z, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy \right] =$$

$$\mathbf{D}_\nu \left[\int_{\Omega/\Omega_R} \Gamma_\sigma(z, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy \right] = 0,$$

pois $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Análogamente tem-se

$$[\mathbf{N}_\alpha \psi](x) = 0, \quad \text{em } \partial B(0, R),$$

assim, concluímos que a função ψ dada pela representação integral (3.38) é solução do problema homogêneo

$$\begin{cases} b^2 \Delta \psi(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \psi(x)) + \sigma^2 \psi(x) = 0, & x \in B(0, R), \\ \mathbf{D}_\nu \psi(z) = 0, \quad \mathbf{N}_\alpha \psi(z) = 0, & z \in \partial B(0, R), \end{cases}$$

daí, segue-se que $\psi = 0$ em $B(0, R)$. Assim,

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{v}(x), \quad x \in \Omega_R. \quad (3.39)$$

Logo, o fato de ser $\tilde{\mathbf{u}}$ solução do primeiro modelo, leva a que em $\partial \bar{D}$ temos

$$\Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v} = 0,$$

Ainda mais, a função \mathbf{v} satisfaz a condição de radiação de Kuprazde $(C.R.K)_\infty$. Assim, \mathbf{v} estendida, satisfaz

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x), & z \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty. \end{cases}$$

O que mostra a existência.

Unicidade

Seja \mathbf{v} solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty, \end{cases} \quad (3.40)$$

Se demonstra que $\mathbf{v} = 0$ em Ω . Com efeito, da fórmula de Betti-Green (2.14) segue-se que \mathbf{v} tem a forma

$$\mathbf{v}(x) = \int_{\partial \bar{D}} \{[\Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \mathbf{v}(y) - \Gamma_\sigma(x, y) \cdot (\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{v})(y)]\} dS, \quad x \in \Omega,$$

então ela stisfaz as condições em $\partial B(0, R)$, logo a função \mathbf{v} acima restrita ao domínio Ω_R , i.e., $\mathbf{v}|_{\Omega_R} = \tilde{\mathbf{v}}$ é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{v}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{v}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{v}}(x) = 0, & x \in \Omega_R, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{v}}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{v}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{v}](x), & z \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{v}}](z) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{v}](z), & x \in \partial B(0, R). \end{array} \right. \quad (3.41)$$

este fato, implica que $\mathbf{v}|_{\Omega_R} = 0$ (pela hipótese), isto é, a solução \mathbf{v} do problema (3.40) se anula perto da fronteira do corpo D . Assim, pela continuação analítica que exibem as soluções do problema (3.40) fora do obstáculo D temos $\mathbf{v} = 0$ em Ω . Isto completa a demonstração do teorema. ■

Ressumindo, dos teoremas acima obtemos os seguintes resultados

3.3 Os modelos do tipo Neumann e Dirichlet

Teorema 3.3

Sejam $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$, $\alpha, \nu \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$, $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Seja $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$ a única solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty. \end{array} \right.$$

Então, o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \end{array} \right. \quad (3.42)$$

tem uma única solução $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ a qual coincide com a solução \mathbf{u} do primeiro modelo, quando \mathbf{u} é restrita ao domínio Ω_R .

Demonstração:

A demonstração deste teorema resulta do teorema (3.1) com $\Lambda_n = \mathbf{T}_n$. ■

Teorema 3.4

Sejam $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$, $\alpha, \nu \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$, $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Seja $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$ a única solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty. \end{array} \right.$$

Então, o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \end{array} \right. \quad (3.43)$$

tem uma única solução $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ a qual coincide com a solução \mathbf{u} do primeiro modelo, quando \mathbf{u} é restrita ao domínio Ω_R .

Demonstração:

A demonstração deste teorema também segue-se do teorema (3.1) com $\Lambda_n = \mathbf{I}$. ■

Teorema 3.5

Sejam $\sigma \in \mathbb{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$, $\alpha, \nu \in \mathbb{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$, $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Seja $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ a única solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \end{array} \right. \quad (3.44)$$

onde a função \mathbf{u} é da forma

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) - \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{u}}(y) \} dS + \int_{\Omega} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Então, o sistema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \mathbf{T}_n \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty \end{cases}$$

tem no máximo uma solução $\mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^3$ a qual é a extensão ao aberto Ω da solução $\tilde{\mathbf{u}}$ do primeiro modelo.

Demonstração:

A demonstração deste teorema segue-se diretamente do teorema 3.2 com $\Lambda_n = \mathbf{T}_n$. ■

Teorema 3.6

Sejam $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$, $\alpha, \nu \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$, $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$ e $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$. Seja $\tilde{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega_R)]^3$ a única solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ [D_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [D_\nu \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \\ [N_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [N_\alpha \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \end{cases} \quad (3.45)$$

onde a função \mathbf{u} é da forma

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial \bar{D}} \{ \Gamma_{1,\sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) - \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{u}}(y) \} dS + \int_{\Omega} \Gamma_\sigma(x, y) \cdot \mathbf{h}(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Então, o sistema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty \end{cases}$$

tem no máximo uma solução $\mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^3$ a qual é a extensão ao aberto Ω da solução $\hat{\mathbf{u}}$ do primeiro modelo.

Demonstração:

A demonstração deste teorema segue-se diretamente do teorema 3.2 com $\Lambda_n = \mathbf{I}$. ■

Capítulo 4

Frequências de Espalhamento

4.1 Apresentação

O objetivo deste capítulo é obter a extensão meromorfa a todo o plano complexo \mathcal{C} do operador resolvente associado ao problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & \text{se } x \in \Omega_R, \\ \Lambda_n \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x), & \text{se } x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x), & \text{se } x \in \partial B(0, R). \end{array} \right. \quad (4.1)$$

No capítulo anterior vimos que a existência e unicidade do problema acima é assegurada para todo $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ e $\nu, \alpha \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$ e $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$. Agora, vamos mostrar que é possível estender a solução para aqueles $\sigma \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\sigma) \leq 0$, exceto por um número enumerável de polos. Na demonstração utilizamos técnicas de R.S. Phillips [44] e A.G. Ramm [47]. É fundamental também um resultado devido a S.Steinberg [54] (veja, também, o artigo de R.T. Seeley [53]) sobre famílias meromorfas de operadores compactos. Além disso, mostramos que o conjunto de tais polos e aqueles (chamados de frequências de espalhamento ou ressonâncias) da extensão meromorfa do operador resolvente associado ao problema no domínio

exterior $\Omega = \mathbb{R}^3/\overline{D}$, a saber

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = 0, & \text{se } x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial\overline{D}, \\ (C.R.K)_{\infty} \end{cases} \quad (4.2)$$

são os mesmos. A seguir é formulado um problema variacional associado com o modelo (4.1), do qual é possível obter as frequências de espalhamento da extensão meromorfa do operador resolvente associado com o modelo (4.2). Assim, no caso do problema tipo Neumann, elas são tais que

$$[\tilde{\mathbf{E}}(\sigma)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}] = [\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}], \quad \text{para todo } \mathbf{w} \in X(\Omega_R).$$

com $\tilde{\mathbf{u}} \neq 0$ (veja a formulação variacional no final da seção).

4.2 Extensão Meromorfa do Resolvente

Definição 4.1

Uma frequência de espalhamento do problema (4.2) é um número complexo σ , para o qual o problema admite solução \mathbf{u} não identicamente nula. A função \mathbf{u} é chamada de função de espalhamento associada a σ .

Seja D aberto limitado do \mathbb{R}^3 com $\partial\overline{D}$ regular e $\Omega = \mathbb{R}^3/\overline{D}$.

Sejam $R > 0$ e $R_0 > 0$, tais $B(0, R_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R_0\} \subset D$, $\partial\overline{D} \subset B(0, R)$ e $\Omega_R = \Omega \cap B(0, R)$ dado como na figura 3 abaixo.

Sejam \mathbf{f}_0 , χ e $\tilde{\mathbf{v}}_0$, onde $\mathbf{f}_0(x) = \mathbf{f}(x)$ se $x \in \Omega_R$ e $\mathbf{f}_0(x) = 0$ se $x \notin \Omega_R$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, com as propriedades

- $\text{supp } \chi \subset B(0, R)/B(0, R_0)$,
- $\chi = 1$, numa pequena vizinhança de $\partial\overline{D}$,
- $\chi = 0$, se $|x| = R$,

e $\hat{v}_0 = v_0|_{\Omega_R}$ com $v_0 \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ a única solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta v_0(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} v_0(x)) + \sigma^2 v_0(x) = f_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ (C.R.K)_\infty, \end{cases} \quad (4.3)$$

Tomemos $w \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$, como sendo a extensão de Calderón ao \mathbb{R}^3 da solução $w_0 \in [H^2(\Omega_R)]^3$ do sistema

$$\begin{cases} b^2 \Delta w_0 + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} w_0) = 0, & \text{em } \Omega_R, \\ \Lambda_n w_0 = -\Lambda_n v_0, & \text{em } \partial \bar{D}, \\ w_0 = 0, & \text{em } \partial B(0, R), \end{cases} \quad (4.4)$$

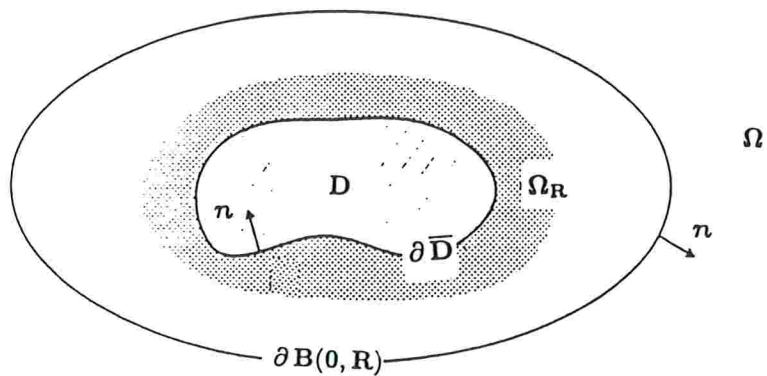


fig. 3

Lema 4.1

Seja $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$. Fixada $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, com as propriedades acima. Então, para toda $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$ a função

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 + \chi \mathbf{w}, \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

é solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \Lambda_n \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty \end{cases} \quad (4.5)$$

se, e só se, $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega_R)]^3$ é solução da equação

$$\mathbf{B}_\chi(\sigma) \mathbf{f} + \mathbf{f} = \mathbf{h},$$

com

$$\mathbf{B}_\chi(\sigma) \mathbf{f} = -\mathbf{G}_\chi(\sigma) \mathbf{P}(\sigma) \Lambda_n \mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma) \tilde{\mathbf{A}}(\sigma) \mathbf{f}, \quad (4.6)$$

sendo $\mathbf{G}_\chi(\sigma)$, $\mathbf{P}(\sigma)$, \mathbf{F}_{Ω_R} , Λ_n e $\tilde{\mathbf{A}}(\sigma)$ dados como no teorema 2.4.

Demonstração:

A demonstração do lema está implícita na prova do teorema 2.4. ■

Lema 4.2

O conjunto de operadores $\{\mathbf{B}_\chi(\sigma)\}$ dados pela identidade (4.6) com $\sigma \in \mathcal{C}$ tal que $\text{Im}(\sigma) > 0$, representa uma família analítica de operadores compactos no espaço $[L^2(\Omega_R)]^3$.

Demonstração:

Denotemos por $\mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{g}}} \subset [H^2(\Omega_R)]^3$ o espaço de soluções (a qual depende do dado $\tilde{\mathbf{g}} = -\Lambda_n \tilde{\mathbf{v}}_0$) do problema (4.4). Como os operadores $\mathbf{G}_\chi(\sigma)$, $\mathbf{P}(\sigma)$, $\mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma)$ e $\tilde{\mathbf{A}}(\sigma)$ dependem analiticamente de σ então, da identidade (4.6), o operador $\mathbf{B}_\chi(\sigma)$, tem essa propriedade e como antes, do esquema

$$\begin{array}{ccccc}
[H^2(\Omega_R)]^3 & \xrightarrow[\text{cont.}]{\Lambda_n} & \mathcal{M} & \xrightarrow[\text{cont.}]{\mathbf{P}(\sigma)} & \mathcal{S}_{\tilde{g}} \subset [H^2(\Omega_R)]^3 \\
\uparrow \text{cont.} & & & & \downarrow \text{cont.} \\
[H^2(\mathbb{R}^3)]^3 & & & & [H^1(\Omega_R)]^3 \\
\uparrow \text{cont.} & & & & \downarrow \text{comp.} \\
[L^2(\Omega_R)]^3 & & & & [L^2(\Omega_R)]^3 \\
& & \xleftarrow[\text{comp.}]{\mathbf{B}_\chi(\sigma)} & &
\end{array}$$

segue a compacidade. ■

Teorema 4.1

Seja $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ e $\alpha, \nu \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$ e $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$. Fixada $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, com as propriedades acima. Então, para toda $\mathbf{h} \in [L^2(\Omega)]^3$ com $\text{supp } \mathbf{h} \subset \Omega_R$ a função

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 + \chi \mathbf{w}, \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

restrita ao Ω_R é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll}
b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & \text{se } x \in \Omega_R, \\
\Lambda_n \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & \text{se } x \in \partial \bar{D}, \\
[\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x), & \text{se } x \in \partial B(0, R), \\
[\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x), & \text{se } x \in \partial B(0, R).
\end{array} \right. \quad (4.7)$$

se, e só se, $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega_R)]^3$ é solução da equação funcional

$$\mathbf{B}_\chi(\sigma) \mathbf{f} + \mathbf{f} = \mathbf{h},$$

com

$$\mathbf{B}_\chi(\sigma) \mathbf{f} = -\mathbf{G}_\chi(\sigma) \mathbf{P}(\sigma) \Lambda_n \mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma) \tilde{\mathbf{A}}(\sigma) \mathbf{f},$$

sendo $G_\chi(\sigma)$, $\mathbf{P}(\sigma)$, $\mathbf{F}_{\Omega_R}(\sigma)$, Λ_n e $\tilde{\mathbf{A}}(\sigma)$ dados como no lema acima.

Demonstração:

Seja $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega_R)]^3$ solução da equação

$$\mathbf{B}_\chi(\sigma) \mathbf{f} + \mathbf{f} = \mathbf{h}.$$

Já que $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$, pelo lema (4.1) temos que a função

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 + \chi \mathbf{w}, \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

restrita a Ω é solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \Lambda_n \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \partial\bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty \end{cases} \quad (4.8)$$

Agora, α, ν em \mathcal{C} são tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$ e $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$, daí, segue do teorema 3.1 que a função

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}|_{\Omega_R} = [\mathbf{v}_0 + \chi \mathbf{w}]|_{\Omega_R}$$

é solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega_R, \\ \Lambda_n \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial\bar{D}, \\ [D_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [D_\nu \mathbf{u}](x), & \text{se } x \in \partial B(0, R), \\ [N_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [N_\alpha \mathbf{u}](x), & \text{se } x \in \partial B(0, R). \end{cases} \quad (4.9)$$

Como queríamos.

Recíprocamente, seja

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 + \chi \mathbf{w} \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

restrita a Ω_R , solução do problema (4.9). Pelas hipóteses, o teorema 3.2 leva a que $\mathbf{u}|_{\Omega_R}$ vem de uma função, digamos $\mathbf{v} \in [H^2(\mathbb{R}^3)]^3$ a qual é solução do sistema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{v}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}(x)) + \sigma^2 \mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x), & x \in \Omega, \\ \Lambda_{\mathbf{n}} \mathbf{v}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ (C.R.K)_{\infty}, \end{cases} \quad (4.10)$$

e $\mathbf{v}|_{\Omega_R} = \mathbf{u}|_{\Omega_R}$. Note agora que

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 + \chi \mathbf{w}, \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

restrita a Ω também é solução do sistema (4.10), daí, pela unicidade da solução do problema acima, temos que $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ em Ω . A conclusão segue do lema 4.1. ■

Teorema 4.2

Com as hipóteses do teorema (4.1) o operador resolvente $[\mathbf{B}_{\chi}(\sigma) + \mathbf{I}]^{-1}$, da equação

$$\mathbf{B}_{\chi}(\sigma) \mathbf{f} + \mathbf{f} = \mathbf{h},$$

tem uma extensão meromorfa dos $\sigma \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\sigma) > 0$, aos $\sigma \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\sigma) \leq 0$, exceto por um conjunto enumerável de polos. Além disso, $\sigma \in \{\theta \in \mathcal{C} : \text{Im}(\theta) \leq 0\}$ é um polo de $[\mathbf{B}_{\chi}(\sigma) + \mathbf{I}]^{-1}$ se, e só se, o problema (4.1), com $\mathbf{h} = 0$ em Ω_R , tem soluções $\tilde{\mathbf{u}}$ não nulas, i.e., $\sigma \in \{\theta \in \mathcal{C} : \text{Im}(\theta) \leq 0\}$ é um polo da extensão meromorfa do operador resolvente associado a problema (4.1).

Demonstração:

$\{\mathbf{B}_{\chi}(\sigma)\}$ é uma família analítica de operadores compactos em $[L^2(\Omega_R)]^3$ para $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$, logo pelo teorema de S.L. Steinberg [54] (veja seu enunciado no apêndice C) ou (i) o operador $[\mathbf{B}_{\chi}(\sigma) + \mathbf{I}]$ nunca pode ser invertido para $\sigma \in \mathcal{C}$, ou (ii) existe, digamos $\sigma_0 \in \mathcal{C}$ tal que $[\mathbf{B}_{\chi}(\sigma_0) + \mathbf{I}]$ pode ser invertido. Agora, a existência e unicidade do problema (4.1) para $\sigma \in \mathcal{C}$ com $\text{Im}(\sigma) > 0$ e ν , $\alpha \in \mathcal{C}$ tais que $\text{Im}(\alpha \sigma_p^{-2}) < 0$ e $\text{Im}(\nu \sigma_s^{-2}) < 0$ e a equivalência dada no teorema (4.1), dizem que deve acontecer (ii). Neste caso, o resultado de S. Steinberg, também estabelece que o operador $[\mathbf{B}_{\chi}(\sigma) + \mathbf{I}]^{-1}$ é definido analiticamente em todo o plano complexo \mathcal{C} , exceto por um conjunto enumerável de polos. Agora, pelo mesmo teorema (4.1) segue-se a equivalência proposta. ■

Teorema 4.3

Com as mesmas hipóteses do lema 4.1. Então, $\sigma \in \mathcal{C}$ é um polo de $[\mathbf{B}_\chi(\sigma) + \mathbf{I}]^{-1}$ se, e só se, o problema (4.2), com $\mathbf{h} = 0$ em Ω , tem soluções \mathbf{u} não nulas, i.e., $\sigma \in \mathcal{C}$ é uma frequência de espalhamento da extensão meromorfa do operador resolvente associado com o problema (4.2).

Demonstração:

A demonstração segue da análise feita na demonstração do teorema 4.2, usando a existência e unicidade do problema (4.2) (veja, Capítulo 2) e a equivalência dada no lema 4.1. ■

Teorema 4.4

O conjunto de polos,

$$\mathcal{A} \subset \{ \sigma \in \mathcal{C} : \text{Im}(\sigma) \leq 0 \}$$

da extensão meromorfa do operador resolvente associado ao modelo (4.1) e aqueles polos da extensão meromorfa do operador resolvente,

$$\mathcal{B} \subset \{ \sigma \in \mathcal{C} : \text{Im}(\sigma) \leq 0 \}$$

associado ao modelo (4.2) são os mesmos.

Demonstração:

O teorema segue como consequência dos teoremas 4.3 e 4.2. ■

Para finalizar, observamos que do teorema acima, os polos (frequências de espalhamento) da extensão meromorfa do operador resolvente associado, por exemplo, com o problema tipo Neumann no exterior $\Omega = \mathbb{R}^3/\bar{D}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 \Delta \mathbf{u}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}(x)) + \sigma^2 \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{T}_n \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\bar{D}, \\ (C.R.K)_\infty, \end{array} \right. \quad (4.11)$$

podem-se obter a partir dos polos do operador resolvente associado ao problema de Neumann definido no aberto limitado Ω_R :

$$\left\{ \begin{array}{ll} b^2 \Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \tilde{\mathbf{u}}(x)) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \Omega_R, \\ \mathbf{T}_{\mathbf{n}(x)} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0, & x \in \partial \bar{D}, \\ [\mathbf{D}_\nu \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{D}_\nu \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R), \\ [\mathbf{N}_\alpha \tilde{\mathbf{u}}](x) = [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{u}](x), & x \in \partial B(0, R). \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Com efeito, seja $\tilde{\mathbf{u}}$ solução do problema (4.12), pela fórmula vetorial de Green no aberto Ω_R , obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{(a^2 - b^2)}{b^2} \int_{\Omega_R} \text{grad}(\text{div} \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{w}} \, dx - \sigma_s^2 \int_{\Omega_R} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{w}} \, dx + \int_{\Omega_R} \text{div} \tilde{\mathbf{u}} \text{div} \bar{\mathbf{w}} \, dx + \\ & + \int_{\Omega_R} \text{rot} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \text{rot} \bar{\mathbf{w}} \, dx = \int_{\partial B(0, R)} [(\mathbf{n} \times \text{rot} \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{w}} \, dS + \text{div} \tilde{\mathbf{u}} (\bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n})] \, dS - \\ & - \int_{\partial \bar{D}} [(\mathbf{n} \times \text{rot} \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{w}} \, dS + \text{div} \tilde{\mathbf{u}} (\bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n})] \, dS, \quad \text{para todo } \mathbf{w} \in [H^1(\Omega_R)]^3. \end{aligned}$$

Assim, a identidade acima fica

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b^2} \int_{\Omega_R} \text{div} \tilde{\mathbf{u}} \text{div} \bar{\mathbf{w}} \, dx - \sigma_s^2 \int_{\Omega_R} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{w}} \, dx + \int_{\Omega_R} \text{rot} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \text{rot} \bar{\mathbf{w}} \, dx = \\ & = \underbrace{\int_{\partial B(0, R)} [(\mathbf{n} \times \text{rot} \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{w}} \, dS + \text{div} \tilde{\mathbf{u}} (\bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n})] \, dS}_{\mathbf{A}} - \underbrace{\int_{\partial \bar{D}} [(\mathbf{n} \times \text{rot} \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{w}} \, dS + \text{div} \tilde{\mathbf{u}} (\bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n})] \, dS}_{\mathbf{B}}. \end{aligned}$$

Ponhamos

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,$$

onde

$$\mathbf{A}_1 = \int_{\partial B(0, R)} (\mathbf{n} \times \text{rot} [\int_{\partial \bar{D}} \{\Gamma_{1, \sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)\} \, dS(y)]) \cdot \bar{\mathbf{w}}(x) \, dS(x),$$

e

$$\mathbf{A}_2 = \int_{\partial B(0, R)} \text{div} [\int_{\partial \bar{D}} \{\Gamma_{1, \sigma}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)\} \, dS(y)] (\bar{\mathbf{w}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) \, dS(x).$$

Das identidades acima, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \int_{\partial B(0,R)} \left\{ \int_{\partial \bar{D}} \mathbf{D}_\nu [\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)] \cdot \bar{\mathbf{w}}(x) dS(y) \right\} dS(x) \\ &\quad - \operatorname{Re}(\sigma) \nu \int_{\partial B(0,R)} \left\{ \int_{\partial \bar{D}} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)))] \cdot \bar{\mathbf{w}}(x) dS(y) \right\} dS(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \int_{\partial B(0,R)} \left\{ \int_{\partial \bar{D}} \mathbf{N}_\alpha [\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)] (\bar{\mathbf{w}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) dS(y) \right\} dS(x) \\ &\quad - \frac{a^2}{b^2} \operatorname{Re}(\sigma) \alpha \int_{\partial B(0,R)} \left\{ \int_{\partial \bar{D}} [(\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)) \cdot \mathbf{n}(x)] (\bar{\mathbf{w}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) dS(y) \right\} dS(x) \end{aligned}$$

o qual, leva a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \int_{\partial B(0,R)} \left\{ \int_{\partial \bar{D}} \mathbf{D}_\nu [\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)] \cdot \bar{\mathbf{w}} dS(y) \right\} dS(x) \\ &\quad - \operatorname{Re}(\sigma) \nu \int_{\partial B(0,R)} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \overbrace{\left\{ \int_{\partial \bar{D}} (\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)) dS(y) \right\}}^{\tilde{\mathbf{u}}})] \cdot \bar{\mathbf{w}}(x) dS(x), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \int_{\partial B(0,R)} \left\{ \int_{\partial \bar{D}} \mathbf{N}_\alpha [\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)] (\bar{\mathbf{w}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) dS(y) \right\} dS(x) \\ &\quad - \frac{a^2}{b^2} \operatorname{Re}(\sigma) \alpha \int_{\partial B(0,R)} \underbrace{\left\{ \int_{\partial \Omega} \Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y) dS(y) \right\}}_{\tilde{\mathbf{u}}} (\bar{\mathbf{w}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) dS(x). \end{aligned}$$

Por outro lado, em $\partial \bar{D}$ temos

$$\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}} = -2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{(a^2 - 2b^2)}{b^2} \mathbf{n} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int_{\partial \bar{D}} \{ (\mathbf{n}(y) \times \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}}(y)) \cdot \bar{\mathbf{w}}(y) + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(y) (\bar{\mathbf{w}}(y) \cdot \mathbf{n}(y)) \} dS(y) = \\ &= -2 \int_{\partial \bar{D}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{n}}(y) \cdot \bar{\mathbf{w}}(y) dS - \frac{(a^2 - 3b^2)}{b^2} \int_{\partial \bar{D}} \mathbf{n}(y) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(y) \cdot \bar{\mathbf{w}}(y) dS(y), \end{aligned}$$

onde

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \text{grad } \bar{u}_1, \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \text{grad } \bar{u}_2, \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \text{grad } \bar{u}_3), \quad \mathbf{y} \in \partial \bar{D}.$$

Escrevemos

$$\text{grad } \bar{\mathbf{u}} = (\text{grad } \bar{u}_1, \text{grad } \bar{u}_2, \text{grad } \bar{u}_3),$$

onde o operador grad é o operador gradiente usual. Também, denotamos por

$$\text{grad } \bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^3 \text{grad } \bar{u}_i \cdot \text{grad } \bar{v}_i.$$

Em $X(\Omega_R) = [H^1(\Omega_R)]^3$ denotamos o produto escalar $[\cdot, \cdot]_{X(\Omega_R)} = [\cdot, \cdot]$, por

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \sum_{j=1}^3 (u_j, v_j)_{H^1(\Omega_R)},$$

onde, o produto escalar $(u_j, v_j)_{H^1(\Omega_R)}$ é o produto usual em o espaço de Sobolev $H^1(\Omega_R)$, i.e.,

$$(u_j, v_j)_{H^1(\Omega_R)} = (u_j, v_j)_{L^2(\Omega_R)} + (\text{grad } u_j, \text{grad } v_j)_{L^2(\Omega_R)}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Note que com as notações acima, temos a identidade

$$[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}] = \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, dx + \int_{\Omega_R} \text{grad } \bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} \, dx,$$

com

$$\text{grad } \bar{\mathbf{v}} = (\text{grad } \bar{v}_1, \text{grad } \bar{v}_2, \text{grad } \bar{v}_3).$$

Assim, então, é fácil ver que em termos de operadores a formulação variacional no espaço $X(\Omega_R)$, do problema (4.12), tem a forma

$$[\tilde{\mathbf{E}}(\sigma) \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}] = [\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}]$$

com

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{E}}(\sigma) \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}] &= \int_{\Omega_R} \text{rot } \bar{\mathbf{u}}(x) \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{w}}(x) \, dx + \frac{a^2}{b^2} \int_{\Omega_R} \text{div } \bar{\mathbf{u}}(x) \text{div } \bar{\mathbf{w}}(x) \, dx \\ &\quad - \frac{(a^2 - 3b^2)}{b^2} \int_{\partial \bar{D}} \mathbf{n} \text{div } \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \cdot \bar{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\ &\quad - (\sigma_s^2 - 1) \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{u}}(x) \cdot \bar{\mathbf{w}}(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_R} \text{grad } \tilde{\mathbf{u}}(x) \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{w}}(x) dx \\
& + \text{Re}(\sigma) \nu \int_{\partial B(0,R)} [\mathbf{n}(x) \times (\mathbf{n}(x) \times \tilde{\mathbf{u}}(x))] \cdot \bar{\mathbf{w}}(x) dS(x) \\
& + \frac{a^2}{b^2} \text{Re}(\sigma) \alpha \int_{\partial B(0,R)} (\tilde{\mathbf{u}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) (\bar{\mathbf{w}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) dS(x) \\
& - 2 \int_{\partial \bar{D}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \bar{\mathbf{n}}}(y) \cdot \bar{\mathbf{w}}(y) dS(y) \\
& - \int_{\partial B(0,R)} \left\{ \int_{\partial \bar{D}} \mathbf{D}_\nu[\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)] \cdot \bar{\mathbf{w}}(x) dS(y) \right\} dS(x) \\
& - \int_{\partial B(0,R)} \left\{ \int_{\partial \bar{D}} \mathbf{N}_\alpha[\Gamma_{1,\sigma}(x,y) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(y)] (\bar{\mathbf{w}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) dS(y) \right\} dS(x).
\end{aligned}$$

Assim, levando em conta a formulação variacional acima, os polos são aqueles números complexos σ pertencentes a $\{\theta \in \mathcal{C} : \text{Im}(\theta) \leq 0\}$ tais que

$$[\tilde{\mathbf{E}}(\sigma) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}] = [\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}], \quad \text{para todo } \mathbf{w} \in X(\Omega_R)$$

com $\tilde{\mathbf{u}} \neq 0$, pois $\mathbf{h} = 0$, em Ω_R .

Capítulo 5

Apêndices

APÊNDICE A

Definimos o produto de convolução de duas matrizes por

$$(\mathbf{A} * \mathbf{Q})^i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{A}^{i,j} * \mathbf{Q}^j. \quad (5.1)$$

Note que esta definição é similar ao produto de matrizes e temos

$$(\mathbf{A} * \mathbf{B})^t = \mathbf{B}^t * \mathbf{A}^t.$$

Lema 5.1

Da definição do produto de convolução dado em (5.1) obtemos, no sentido das distribuições as seguintes identidades:

- (i) $\text{rot } \mathbf{w} = (\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w},$
- (ii) $\text{grad } \psi = (\text{grad } \delta) * \psi,$
- (iii) $\text{div } \mathbf{w} = (\text{grad } \delta)^t * \mathbf{w},$
- (iv) $(\text{rot } \delta \mathbf{I})^t = -\text{rot } \delta \mathbf{I}.$

Demonstração:

Dadas $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1]$ calculamos :

$$\text{rot}(e_1 \delta) = 0 e_1 + \frac{\partial \delta}{\partial x_3} e_2 - \frac{\partial \delta}{\partial x_2} e_3 = \left[0, \frac{\partial \delta}{\partial x_3}, -\frac{\partial \delta}{\partial x_2} \right],$$

$$\text{rot}(e_2 \delta) = -\frac{\partial \delta}{\partial x_3} e_1 + 0 e_2 + \frac{\partial \delta}{\partial x_1} e_3 = \left[-\frac{\partial \delta}{\partial x_3}, 0, \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \right],$$

$$\text{rot}(e_3 \delta) = \frac{\partial \delta}{\partial x_2} e_1 - \frac{\partial \delta}{\partial x_1} e_2 + 0 e_3 = \left[\frac{\partial \delta}{\partial x_2}, -\frac{\partial \delta}{\partial x_1}, 0 \right].$$

Assim,

$$(\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \delta}{\partial x_3} & \frac{\partial \delta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \delta}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \delta}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \delta}{\partial x_2} & \frac{\partial \delta}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

Daí, para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ temos

$$\begin{aligned} [(\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w}]^1(\psi) &= \langle [(\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w}]^1, \psi \rangle = \left\langle -\frac{\partial \delta}{\partial x_3} * w_2, \psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \delta}{\partial x_2} * w_3, \psi \right\rangle = \\ &= \left\langle \delta * \left(-\frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right), \psi \right\rangle + \left\langle \delta * \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right), \psi \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial w_3}{\partial x_2}, \psi \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial w_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_2}, \psi \right\rangle \end{aligned}$$

Assim, temos

$$[(\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w}]^1(\psi) = \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \right)(\psi).$$

Analogamente, segue que

$$[(\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w}]^2(\psi) = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right)(\psi),$$

$$[(\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w}]^3(\psi) = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right)(\psi),$$

o qual pode ser escrito como

$$(\text{rot } \delta \mathbf{I}) * \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{w}.$$

Note que

$$\left\langle \frac{\partial \delta}{\partial x_1} * \phi, \psi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \psi \right\rangle$$

é válida para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Isto se denota por

$$\left\langle \frac{\partial \delta}{\partial x_1} * \phi, \psi \right\rangle = \left(\frac{\partial \delta}{\partial x_1} * \phi \right)(\psi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)(\psi).$$

Analogamente, segue

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial x_2} * \phi \right)(\psi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)(\psi),$$

e

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial x_3} * \phi \right)(\psi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)(\psi).$$

Daí, para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } \delta * \phi, \psi \rangle &= \left\langle \left[\frac{\partial \delta}{\partial x_1} * \phi, \frac{\partial \delta}{\partial x_2} * \phi, \frac{\partial \delta}{\partial x_3} * \phi \right], \psi \right\rangle = \\ &= \left\langle \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right], \psi \right\rangle = \langle \text{grad } \phi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ temos

$$\begin{aligned} (\text{rot } \delta \mathbf{I})^t(\psi) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \delta}{\partial x_3} & -\frac{\partial \delta}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \delta}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \delta}{\partial x_2} & -\frac{\partial \delta}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} (\psi) = \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \delta}{\partial x_3} & \frac{\partial \delta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \delta}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \delta}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \delta}{\partial x_2} & \frac{\partial \delta}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} (\psi) = (-\text{rot } \delta \mathbf{I})(\psi). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle \text{div } \mathbf{w}, \psi \rangle &= \left\langle \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3}, \psi \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial \delta}{\partial x_1} * w_1 + \frac{\partial \delta}{\partial x_2} * w_2 + \frac{\partial \delta}{\partial x_3} * w_3, \psi \right\rangle = \left([\text{grad } \delta]^t * \mathbf{w} \right)(\psi). \end{aligned}$$

O que prova o lema. ■

APÊNDICE B

Lema 5.2 (V.D Kuprazde [32], p.p, 127-129)

Suponha que $\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s$ é uma solução regular do sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{u} + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) + \sigma^2 \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega.$$

Seja \mathbf{T}_n o operador de tração

$$\mathbf{T}_n \mathbf{u} = 2b^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + (a^2 - 2b^2) \mathbf{n} \text{div } \mathbf{u} + b^2 \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u},$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \left[\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}, \frac{\partial u_3}{\partial n} \right].$$

Se \mathbf{u} satisfaz a condição de radiação de Kuprazde $(C.R.K)_\infty$ e $|x| = R$, então as seguintes estimativas

- i) $\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p \pm i\sigma a \mathbf{u}^p = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$
- ii) $\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s \pm i\sigma b \mathbf{u}^s = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$
- iii) $\bar{\mathbf{u}}^p \cdot \mathbf{u}^s = O(R^{-3}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$
- iv) $\bar{\mathbf{u}}^p \cdot \bar{\mathbf{u}}^s = O(R^{-3}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$
- v) $\mathbf{u}^p = O(R^{-1}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$
- vi) $\mathbf{u}^s = O(R^{-1}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$

são válidas uniformemente em todas as direções $\hat{x} = x/|x| \in S^2$.

Demonstração:

Provamos os itens (v) e (vi). Com efeito, escrevamos $\mathbf{u}^p = (u_1^p, u_2^p, u_3^p)$. Note que

$$\left| \frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial |y|} - i\sigma_p \mathbf{u}^p \right|^2 = \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} - i\sigma_p u_j^p \right|^2.$$

Usando a condição de radiação de Kuprazde deduzimos

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial |y|} - i\sigma_p \mathbf{u}^p \right|^2 dS.$$

Logo, para $j = 1, 2, 3$ temos

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} - i \sigma_p u_j^p \right|^2 dS = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left[\left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} \right|^2 + |\sigma_p|^2 |u_j^p|^2 + 2 \operatorname{Im} \left(\sigma_p u_j^p \frac{\partial \bar{u}_j^p}{\partial |y|} \right) \right] dS$$

pois, para todo $j = 1, 2, 3$ temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} - i \sigma_p u_j^p \right|^2 &= \left(\frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} - i \sigma_p u_j^p \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_j^p}{\partial |y|} + i \bar{\sigma}_p \bar{u}_j^p \right) = \left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} \right|^2 + |\sigma_p|^2 |u_j^p|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(-i \sigma_p \bar{u}_j^p \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} \right) = \\ &= \left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} \right|^2 + |\sigma_p|^2 |u_j^p|^2 + 2 \operatorname{Im} \left(\sigma_p u_j^p \frac{\partial \bar{u}_j^p}{\partial |y|} \right). \end{aligned}$$

Seja $R > 0$ tal que a bola $B(0, R) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| < R\}$ tenha sua fronteira $\partial B(0, R)$ contida em \mathbb{R}^3/\bar{D} . Denote com $\Omega_R = \{y \in \mathbb{R}^3/\bar{D} : |y| < R\}$. A identidade de Green no domínio Ω_R diz que

$$\int_{\Omega_R} u_j^p \Delta \bar{u}_j^p dx + \int_{\Omega_R} |\operatorname{grad} u_j^p|^2 dx = \int_{\partial \bar{\Omega}_R} u_j^p \frac{\partial \bar{u}_j^p}{\partial |y|} dS.$$

Lembrando que $\Delta \bar{u}_j^p + \bar{\sigma}_p^2 \bar{u}_j^p = 0$, para $j = 1, 2, 3$ e $\partial \bar{\Omega}_R = \partial \bar{D} \cup \partial B(0, R)$ obtemos:

$$-\bar{\sigma}_p^2 \int_{\Omega_R} |u_j^p|^2 dx + \int_{\Omega_R} |\operatorname{grad} u_j^p|^2 dx = \int_{|y|=R} u_j^p \frac{\partial \bar{u}_j^p}{\partial |y|} dS - \int_{\partial \bar{D}} u_j^p \frac{\partial \bar{u}_j^p}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

assim, multiplicando a identidade acima por σ_p temos:

$$\sigma_p \int_{|y|=R} u_j^p \frac{\partial \bar{u}_j^p}{\partial |y|} dS = \sigma_p \int_{\partial \bar{D}} u_j^p \frac{\partial \bar{u}_j^p}{\partial \mathbf{n}} dS - \bar{\sigma}_p |\sigma_p|^2 \int_{\Omega_R} |u_j^p|^2 dx + \sigma_p \int_{\Omega_R} |\operatorname{grad} u_j^p|^2 dx.$$

Daí, tomando a parte imaginária obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{|y|=R} \left(\left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} \right|^2 + |\sigma_p|^2 |u_j^p|^2 \right) dS + 2 \operatorname{Im}(\sigma_p) \int_{\Omega_R} (|\sigma_p|^2 |u_j^p|^2 + |\operatorname{grad} u_j^p|^2) dx \right] = \\ = -2 \operatorname{Im} \left(\sigma_p \int_{\partial \bar{D}} u_j^p \frac{\partial \bar{u}_j^p}{\partial \mathbf{n}} dS \right). \end{aligned}$$

Assim, cada integrando no lado esquerdo da identidade acima é maior ou igual a zero, portanto para cada $j = 1, 2, 3$, temos

$$\int_{|y|=R} |u_j^p|^2 dS = O(1), \quad \text{quando } R \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

Agora, somando e subtraindo na identidade

$$u_j^p = \int_{|y|=R} \left[u_j^p \frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial |y|} - \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} \phi_p(x, y) \right] dS,$$

a expressão $i \sigma_p \phi_p(x, y)$ onde,

$$\phi_p(x, y) = \frac{\exp(i \sigma_p |x - y|)}{4 \pi |x - y|}, \quad x \neq y, \quad x, y \in \mathbb{R}^3$$

obtemos

$$\begin{aligned} u_j^p &= \int_{|y|=R} \left[u_j^p \frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial |y|} - \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} \phi_p(x, y) \right] dS = \\ &= \int_{|y|=R} u_j^p \left(\frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial |y|} - i \sigma_p \phi_p(x, y) \right) dS - \int_{|y|=R} \phi_p(x, y) \left(\frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} - i \sigma_p u_j^p \right) dS = \\ &= I_1(x, R) + I_2(x, R). \end{aligned}$$

Estimando I_1 pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e usando (5.2) obtemos

$$\begin{aligned} |I_1(x, R)| &\leq \left[\int_{|y|=R} |u_j^p|^2 dS \right]^{1/2} \left[\int_{|y|=R} \left| \frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial |y|} - i \sigma_p \phi_p(x, y) \right|^2 dS \right]^{1/2} \\ &\leq C_0 \left[\int_{|y|=R} \left| \frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial |y|} - i \sigma_p \phi_p(x, y) \right|^2 dS \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Usando a estimativa

$$\frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial |y|} - i \sigma_p \phi_p(x, y) = O(R^{-2}),$$

quando $R \rightarrow \infty$, temos que $I_1(x, R) = O(R^{-1})$, quando $R \rightarrow \infty$. Análogamente, da desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos,

$$|I_2(x, R)| \leq \left[\int_{|y|=R} |\phi_p(x, y)|^2 dS \right]^{1/2} \left[\int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} - i \sigma_p u_j^p \right|^2 dS \right]^{1/2}.$$

Daí,

$$|I_2(x, R)| \leq C_1 \left[\int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} - i \sigma_p u_j^p \right|^2 dS \right]^{1/2}, \quad (5.3)$$

pois, $\phi_p(x, y) = O(R^{-1})$ quando $R \rightarrow \infty$. Por hipótese temos que

$$\left| \frac{\partial u_j^p}{\partial |y|} - i \sigma_p u_j^p \right|^2 = o(R^{-2}),$$

de (5.3) segue que $I_2(x, R) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Assim, para $j = 1, 2, 3$ temos :

$$u_j^p(x) = O(R^{-1}), \quad \text{quando } R \rightarrow \infty,$$

isto é,

$$\mathbf{u}^p(x) = O(R^{-1}), \quad \text{quando } R \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Analogamente se mostra

$$\mathbf{u}^s(x) = O(R^{-1}), \quad \text{quando } R \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Prova dos itens (i) e (ii).

Seja \mathbf{u} uma solução regular do sistema

$$b^2 \Delta \mathbf{u} + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) + \sigma^2 \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^3 / \bar{D}$$

satisfazendo a condição de radiação de Kuprazde $(C.R.K)_\infty$, então as seguintes estimativas

$$\frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x_k} + O(R^{-2}), \quad \text{quando } R \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.6)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x_k} + O(R^{-2}), \quad \text{quando } R \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.7)$$

são validas.

Com efeito, a função \mathbf{u}^p satisfaz :

(a) A equação de Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{u}^p + \sigma_p^2 \mathbf{u}^p = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^3 / \bar{D}$$

e

(b) A condição de radiação de Kuprazde (e daí, a condição de radiação de Sommerfeld). Assim, fora da bola $B(0, \rho)$ que contem a $\partial \bar{D}$ temos

$$\mathbf{u}^p(x) = \int_{|y|=\rho} \left(\phi_p(x, y) \frac{\partial \mathbf{u}^p(y)}{\partial |y|} - \mathbf{u}^p(y) \frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial |y|} \right) dS \quad (5.8)$$

Logo,

$$\frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial x_k} = \int_{|y|=\rho} \frac{\partial v(r, y)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k} dS, \quad (5.9)$$

onde $r = |x - y|$ e

$$v(r, y) = \phi_p(x, y) \frac{\partial \mathbf{u}^p(y)}{\partial |y|} - \mathbf{u}^p(y) \frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial |y|}.$$

Ponhamos $R = |x|$, então, temos

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial R} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_k} \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} - \frac{\partial R}{\partial x_k} \right)$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} - \frac{\partial R}{\partial x_k} = O(R^{-1}).$$

De fato,

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2\rho R(\cos)(\gamma),$$

daí

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \frac{R - \rho \cos(\gamma)}{r}.$$

Agora,

$$\frac{\partial v}{\partial R} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{R - \rho \cos(\gamma)}{r} \right).$$

Também,

$$\frac{\partial R}{\partial x_j} = \frac{x_j}{R}, \quad j = 1, 2, 3$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{(x_j - y_j)}{r}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_j} \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} - \frac{\partial R}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} - \frac{\partial R}{\partial x_j} \right) = \\ & = \frac{\partial v}{\partial r} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial r}{\partial x_j} \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} - \frac{\partial R}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial v}{\partial r} \sum_{j=1}^3 \frac{(x_j - y_j)}{r} \left[\frac{(x_j - y_j)}{r} - \frac{x_j}{R} \right] = \\ & = \frac{\partial v}{\partial r} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{x_j^2 - 2x_j y_j + y_j^2}{r^2} \right] - \frac{\partial v}{\partial r} \sum_{j=1}^3 \frac{(x_j^2 - x_j y_j)}{R r} = \\ & = \frac{\partial v}{\partial r} \left[\frac{R^2 - 2R\rho \cos(\gamma) + \rho^2}{r^2} \right] + \frac{\partial v}{\partial r} \left[\frac{R^2 - R\rho \cos(\gamma)}{R r} \right] = \\ & = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{R - \rho \cos(\gamma)}{r} \right) = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial R}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial R} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_j} \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} - \frac{\partial R}{\partial x_j} \right). \quad (5.10)$$

Agora, as estimativas

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = O(R^{-1}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial R} = O(R^{-1}),$$

quando $R \rightarrow \infty$ em conjunto com (5.10) levam a que (5.7) tome a forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial x_k} = \int_{|y|=\rho} \frac{\partial v(r, y)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x_k} dS + O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty. \quad (5.11)$$

Desta estimativa segue (5.6). De forma similar obtemos (5.7).

Agora bem, de

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial R} &= \frac{\partial v}{\partial r} + O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial r} - i \sigma_p \phi_p(x, y) &= O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

e

$$\frac{r}{R} = 1 + O(R^{-1}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$$

em conjunto com a representação

$$\mathbf{u}^p(x) = \int_{|y|=\rho} \left(\phi_p(x, y) \frac{\partial \mathbf{u}^p(y)}{\partial |y|} - \mathbf{u}^p(y) \frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial |y|} \right) dS, \quad x \in \mathbb{R}^3/B(0, \rho), \quad (5.12)$$

obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial R} - i \sigma_p \mathbf{u}^p(x) = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty, \quad (5.13)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial R} - i \sigma_s \mathbf{u}^s(x) = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

Agora, pelas estimativas (5.6), (5.7), (5.4), (5.5), (5.13) e (5.14), obtemos

- (a) $\hat{x} \cdot \mathbf{u}^s = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$
- (b) $\hat{x} \times \mathbf{u}^p = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$
- (c) $\operatorname{div} \mathbf{u}^p - i \sigma_p \hat{x} \cdot \mathbf{u}^p = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$
- (d) $\operatorname{rot} \mathbf{u}^s - i \sigma_s [\hat{x} \times \mathbf{u}^s] = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$

Com efeito, já que $\operatorname{div} \mathbf{u}^s = 0$, obtemos

$$\hat{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial R} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial R}{\partial x_k} \frac{\partial u_k^s}{\partial R} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k^s}{\partial x_k} + O(R^{-2}) = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty. \quad (5.15)$$

Analogamente, $\text{rot } \mathbf{u}^p = 0$ e (5.6) levam a

$$\left[\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial R} \right] = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty. \quad (5.16)$$

Agora, de (5.14) segue que

$$\hat{x} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial R} - i \sigma_s \mathbf{u}^s \right] = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty. \quad (5.17)$$

Isto e (5.15) levam a

$$\hat{x} \cdot \mathbf{u}^s = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

O que mostra o ítem (a). Agora, note que a estimativa (5.13) conduz a

$$\hat{x} \times \left[\frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial R} - i \sigma_p \mathbf{u}^p \right] = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty. \quad (5.18)$$

Assim, de (5.18) e (5.16), obtemos

$$\hat{x} \times \mathbf{u}^p = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

O que mostra (b). Mais ainda, de (5.6) segue que

$$\begin{aligned} O(R^{-2}) &= \hat{x} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial R} - i \sigma_p \mathbf{u}^p \right] = \\ &= \hat{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial R} - i \sigma_p \hat{x} \cdot \mathbf{u}^p = \text{div } \mathbf{u}^p - i \sigma_p \hat{x} \cdot \mathbf{u}^p + O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

O que prova (c). Analogamente, de (5.7) temos que

$$\begin{aligned} O(R^{-2}) &= \hat{x} \times \left[\frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial R} - i \sigma_s \mathbf{u}^s \right] = \\ &= \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial R} - i \sigma_s \hat{x} \times \mathbf{u}^s = \text{rot } \mathbf{u}^s - i \sigma_p [\hat{x} \times \mathbf{u}^s] + O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

O que mostra (d). Observe agora que

$$\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p = 2b^2 \frac{\partial \mathbf{u}^p}{\partial R} + (a^2 - 2b^2) \hat{x} \text{div } \mathbf{u}^p,$$

pois $\text{rot } \mathbf{u}^p = 0$. Também,

$$\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s = 2b^2 \frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial R} + b^2 [\hat{x} \times \text{rot } \mathbf{u}^s],$$

pois $\text{div } \mathbf{u}^s = 0$. Assim, das estimativas (c) e (5.13), obtemos

$$\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p = 2b^2 i \sigma_p \mathbf{u}^p + (a^2 - 2b^2) i \sigma_p \hat{x} (\hat{x} \cdot \mathbf{u}^p) + O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Agora, da identidade

$$\hat{x}(\hat{x} \cdot \mathbf{u}^p) = \mathbf{u}^p + [\hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{u}^p)],$$

que segue da fórmula vetorial

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (5.19)$$

em conjunto com (b), levam a

$$\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p - i\sigma a \mathbf{u}^p = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Análogamente, se mostra que

$$\mathbf{T}_n \mathbf{u}^p + i\sigma a \mathbf{u}^p = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

O qual mostra o ítem (i) do lema 2.1. Da mesma forma, obtemos a estimativa

$$\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s = 2b^2 i\sigma_s \mathbf{u}^s + b^2 [\hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{u}^s)] i\sigma_s + O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Agora, de (5.19) e (a), obtemos

$$\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s - i\sigma b \mathbf{u}^s = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Análogamente, se prova que

$$\mathbf{T}_n \mathbf{u}^s + i\sigma b \mathbf{u}^s = O(R^{-2}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

O que mostra o ítem (ii) do lema 2.1.

Além disso, da estimativa

$$[\mathbf{u}^s \times (\hat{x} \times \mathbf{u}^p)] + \mathbf{u}^p(\hat{x} \cdot \mathbf{u}^s) = O(R^{-3}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$$

obtemos que

$$\mathbf{u}^p \cdot \mathbf{u}^s = O(R^{-3}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Análogamente de

$$[\bar{\mathbf{u}}^s \times (\hat{x} \times \mathbf{u}^p)] + \mathbf{u}^p \cdot (\hat{x} \cdot \bar{\mathbf{u}}^s) = O(R^{-3}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty,$$

obtemos

$$\mathbf{u}^p \cdot \bar{\mathbf{u}}^s = O(R^{-3}), \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

O que concluí a prova do lema 2.1. ■

Teorema 5.1

Seja $\mathbf{w} \in [H^2(B(0, R))]^3$ solução do problema

$$\begin{cases} b^2 \Delta \mathbf{w}(x) + (a^2 - b^2) \text{grad}(\text{div} \mathbf{w}(x)) = 0, & x \in B(0, R), \\ \mathbf{w}(x) = 0, & x \in \partial B(0, R). \end{cases} \quad (5.20)$$

Então, $\mathbf{w} = 0$ em $B(0, R)$.

Demonstração:

Seja $\mathbf{w} \in [H^2(B(0, R))]^3$ solução do sistema (5.20). Integração por partes leva a

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 \int_{B(0,R)} a_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{w}) \overline{e_{ij}(\mathbf{w})} dx = 0, \quad (5.21)$$

onde $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ e

$$e_{kl}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right].$$

Por outro lado, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} e_{k,l}(\mathbf{w}) \overline{e_{i,j}(\mathbf{w})} \geq c \sum_{i,k=1}^3 |e_{i,j}(\mathbf{w})|^2. \quad (5.22)$$

Combinando (5.21) com (5.22), obtemos $e_{k,l}(\mathbf{w}) = 0$, para todo $k, l = 1, 2, 3$. Daí:

$$\left[\frac{\partial w_l(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k(x)}{\partial x_l} \right] = 0 \quad x \in B(0, R). \quad (5.23)$$

Agora, da equação (5.23) segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w_j(x)}{\partial x_k} \right) = 0,$$

para todo $i, k, j = 1, 2, 3$. Assim, para $j = 1, 2, 3$ as funções w_j são polinômios de grau ≤ 1 . Logo $\Delta w_j = 0$, em $B(0, R)$ para cada $j = 1, 2, 3$. Agora, o fato $w_j = 0$ em $\partial B(0, R)$ conduz a $w_j = 0$ em $B(0, R)$ para todo $j = 1, 2, 3$. Isto prova o teorema. ■

APÊDICE C

Antes de enunciar os teoremas de S.L Steinberg [54] e B.R. Vainberg [56], lembramos alguns fatos conhecidos :

Sejam E e F espaços de Banach, denotamos por $B(E, F)$ a coleção de todos os operadores lineares e contínuos de E em F . Denotamos $B(E)$ por $B(E, E)$.

Escrevemos :

$$\mathcal{C}_+ = \{\theta \in \mathcal{C} : \text{Im}(\theta) > 0\}.$$

Sejam V um aberto conexo contido em \mathcal{C} e $T(z)$ um operador que atua de V em $B(E)$. Dizemos que $T(z)$ é analítico em V se, para cada $z_0 \in V$, a serie

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n (z - z_0)^n,$$

converge uniformemente numa vizinhança de z_0 , onde $T_n \in B(E)$, para todo n .

Dizemos que $T(z)$ é meromorfo em V se é analítico em V exceto por um número enumerável de pontos. Se z_0 é um desses pontos, então

$$T(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} T_n (z - z_0)^n,$$

onde os operadores $T_n \in B(E)$ e a serie converge uniformemente numa vizinhança de z_0 .

Teorema 5.2 (S.L. Steinberg)

Se o conjunto de operadores $\{T(z)\}_{z \in V}$ é uma familia analitica de operadores compactos, então ou (i) O operador $[I - T(z)]$ nunca pode ser invertido em V , ou (ii) O operador $[I - T(z)]^{-1}$ é meromorfo em V .

Teorema 5.3 (B.R. Vainberg)

Seja $\sigma \in \mathcal{C}_+$. Então, existe um operador $A(\sigma)$ em $B([L_R^2(\mathbb{R}^3)]^3, [H^2(\mathbb{R}^3)]^3)$ tal que para todo $f \in [L_R^2(\mathbb{R}^3)]^3$ temos

$$[\tilde{\Delta} + \sigma^2 I](A(\sigma)f)(x) = f(x), \quad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

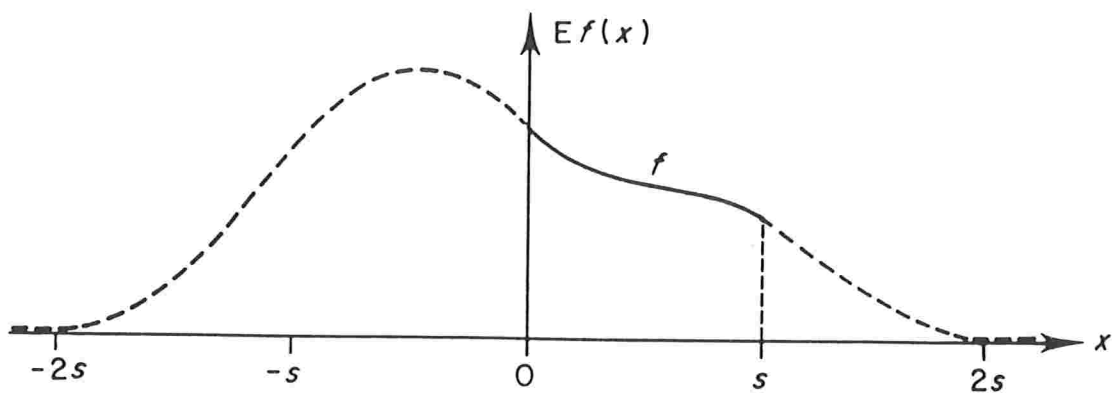
onde

$$\tilde{\Delta} = b^2 \Delta + (a^2 - b^2) \text{grad div.}$$

Teorema 5.4 (Extensão de Calderón)

Para qualquer aberto limitado D_1 do \mathbb{R}^3 com fronteira do tipo Lipschitz e qualquer m inteiro positivo, existe um operador linear e contínuo $E : H^m(D_1) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$f = E f|_{D_1} \quad (f \in H^m(D_1)).$$



Referências Bibliográficas

- [1] W.O. Amrein, J.M. Jauch, K.B. Sinha, Scattering theory in quantum mechanics, W.A. Benjamin, Inc, (1977).
- [2] T.S. Angell, D. Colton, and A. Kirsch, The three dimensional Inverse Scattering problem for acoustic waves, *J. Diff. Eq*, **46**, p.p 46-58 (1982).
- [3] M.A. Astaburruaga and R. Coimbra Charao, C. Fernández and G. Perla Menzala, Scattering Frequencies for a perturbed system of elastic wave equations, *J. Math. Anal Appl*, (to appear)
- [4] J.B Bidnar, R. Redner, E.Robinson and A. Weighn, Eds, *Inverse Scattering Theory and Application*, SIAM, (1983).
- [5] R.Coimbra Charao and G.Perla Menzala, Scattering frequencies and a class of perturbed systems of elastic waves, *Math. Meth. in the Appl. Sci*, **19**, p.p 699-716 (1996).
- [6] D. Colton and P. Hähner, Modified farfield operators in inverse Scattering Theory, *SIAM J. Math. Anal*, **24**, p.p 365-389 (1993).
- [7] D. Colton and R. Kress, Eigenvalues of the farfield operator and inverse scattering theory, *SIAM J. Math. Anal*; **26**, p.p 601-615 (1995).
- [8] D. Colton and R. Kress, *Integral Equations Methods in Scattering Theory*, Krieger, Malabar (1992).
- [9] D. Colton and R. Krees, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York (1992).
- [10] D. Colton and P.Monk, The numerical solution of the tree-dimensional inverse scattering problem for time harmonic acoustic waves, *SIAM J. Sci. Statist. Comput*, **8**, p.p 278-291 (1987).

- [11] D. Colton and P. Monk, On a class of integral equations of the first kind in inverse scattering theory; IMA J. Appl. Math **53**, p.p 847-860 (1993).
- [12] D. Colton and P. Monk, The numerical solution of an inverse scattering problem for acoustic waves; IMA J. Appl. Math. **49**, p.p 163-184 (1992).
- [13] J. Cooper, G. Perla Menzala and W.A. Strauss, On the scattering frequencies of time-dependent potentials, Math. Meth. in the Appl. Sci, **6**, p.p 576-584 (1986).
- [14] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, Schrödinger operators, Springer-Verlag, (1987).
- [15] G. Duvaut and J.L. Lions, Les Inéquations in Mécanique et en Physique, Dunond, (1972).
- [16] C. Gérard, Asymptotique des pôles de la matrice de Scattering pour deux obstacles strictement convexes, Bull. Soc. Math. France, **116**, (1988).
- [17] G. Fichera, Existence theorems in elasticity, Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1973).
- [18] C. Fernández and R. Lavine, Lower Bounds for resonance widths in potential and obstacle scattering, Comm. Math. Phy, **128**, p.p(1990).
- [19] V. Girault and P.A. Raviart, Finite Element Methods for
- [20] D. Gilbert and N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Springer-Verlag, (1977).
- [21] P. Hähner, A uniqueness theorem in inverse scattering of elastic waves, IMA J. of Appl. Math, **51**, p.p 201-215, (1993).
- [22] P. Hähner and G.C Hsiao, Uniqueness theorems in inverse obstacle scattering of elastic waves, Inverse Problem, **9**, p.p 525-534, (1993),
- [23] C. Hazard and M. Lenoir, On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations, SIAM J. Math. Anal, **27**, p.p 1597-1630 (1996).
- [24] M. Ikawa, On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, J. of Math. Kyoto Univ, **23**, p.p (1983).

- [25] M. Ikawa, Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles, Osaka J. Math , **19**, p.p, 459-509 (1982).
- [26] R.J., Iorio. Jr Lectures on Scattering theory, in "Lectures on Quantum Mechanics and Linear Differential Operators". Informes de matemática, IMPA, CNPq, p.p 1-93 (1985).
- [27] H. Iwashita and Y. Shibata, On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems, Glasnik. Math.,**23**, p.p 291-313 (1988).
- [28] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, (1984).
- [29] A. Kirsch and R. Kress, Uniqueness in inverse obstacle scattering, Inverse Problems, **4**, p.p 749-770 (1988).
- [30] A. Kirsch and R. Krees, On an integral equations of the first kind in inverse acoustic scattering In : Inverse Problems (Cannon and Hornung, Eds). ISNM **77**, p.p 93-102 (1986).
- [31] A. Kirch, R. Kress, P. Monk, and A.Zinn, Two methodS for solving the inverse acoustic scattering problem, Inverse Problems, **4**, p.p 749-770 (1988).
- [32] V.D. Kuprazde, et al, Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity, Amsterdam, North-Holand, (1973)
- [33] P.D. Lax, C.S Morawetz and R.S Phillips, Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of star-shaped obstacle, Comm. Pure Appl. Math,**16**, p.p 477-486, (1968)
- [34] P.D Lax and R,S Phillips, Scattering Theory, Academic Press, New York, (1967).
- [35] M. Lenoir, M. Vuillerme-Ledard and C. Hazard, Variational Formulations for the determination of resonant states in scattering problems, SIAM J.Math. Anal, **23**, p.p 579-608, (1992).
- [36] B. Loc, A pole-free strip for potential scattering, J. Diff. Eq,**99**, p.p 112-138, (1992)
- [37] P. Maponi, L. Micici, and F. Zirilli, An inverse problem for the tridimensional vector Helmholtz equation for a perfectly conducting obstacles, Computers Math. Applic. **22**, p.p 137-146, (1991)
- [38] J.T Marti, Introduction to Sobolev Spaces and Finite Element Solution of Elliptic boundary Value Problems, Academic Press, New York, (1986).
- [39] C. Morawetz, On the modes of decay for the wave equation in the exterior of a reflecting body, Proc. Roy. Irish. Acad, **72**, p.p 155-162, (1972)

- [40] C.S. Morawetz, J. Ralston and W.A, Strauss, Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles, *Comm. Pure. Math*, **30**, p.p 447-508, (1977).
- [41] J. Neca, *Les méthodes directes em théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, (1967).
- [42] Y-H. Pao, F. Santosa, W.W. Symes and C. Holland, Eds., *Inverse Problems of acoustic and elastic waves*. SIAM, (1984).
- [43] G. Perla Menzala, On the inverse problem for three-dimensional potential scattering, *J. Diff. Eq.***20**, p.p 233-247, (1976).
- [44] R.S. Phillips, On the exterior problem for the reduced wave equation, In *Partial Differential Equations*, Proc. Sympos. Pure Math. **23**, D. C Spencer, ed., American Mathematical Society, Providence, RI, p.p 153-160,(1973)
- [45] O. Poisson, Calcul des pôles de résonance associés à la diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle en dimension deux., *Cars. Paris*,**315**, série I, p.p 747-752, (1992).
- [46] J. Ralston, Solutions of the wave equation with localized energy, *Comm. Pure Appl, Math*,**22**, p.p 807-823, (1969).
- [47] A.G. Ramm, *Scattering by obstacles*, Riedel, Dordrecht, (1986).
- [48] A.G. Ramm, Recovery of potential from fixed energy scattering data,*Inverse Problems*,**4**, p.p 877-886, (1988).
- [49] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. III, Scattering Theory*, Academic Press, Inc., New York, (1979).
- [50] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV, Analysis of Operators*, Academic Press, New York, (1978).
- [51] A. Sa Barreto and M. Zworski, Existence of resonances in three dimensions, *Comm. Math. Phy*, p.p, **173**, p.p 401-415 (1995).
- [52] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, (1966).
- [53] R.T. Seeley, Integral equations depending analitically on parameter, *Indag. Math*, **24**, p.p 434-442, (1962).

- [54] S.L. Steinberg, Meromorphic families of compact operators, Arch. Ration. Mech. Anal, **31**, p.p 372-379, (1968).
- [55] P. Stefanov, and G. Vodev, Distribution of resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a ball, Ann. Inst. H. Poincaré. Théor. **60**, p.p 303-321, (1994).
- [56] B.R. Vainberg, On analytical properties of the resolvent for a certain class of operator pencils, Math. Sb. (NS), (**77**, p.p 259-295, (1968).
- [57] M. Wei, G. Majda and W.A. Strauss, Numerical computation of the scattering frequencies for acoustic waves equations, J. Comput. Phys. **75**, p.p 345-358, (1988).
- [58] C.H Wilcox, Theory for the d'Alambert equation in exterior Domains, Springer, Berlin, (1975).