

**Dinâmica de Recobrimentos do Círculo
com Pontos de Inflexão**

Márcio Lima do Nascimento

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Sistemas Dinâmicos**
Orientador: **Prof. Dr. Edson Vargas**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da CAPES

Dinâmica de Recobrimentos do Círculo com Pontos de Inflexão

Este exemplar corresponde à redação
final da tese de doutoramento,
devidamente corrigida e defendida
por Márcio Lima do Nascimento
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 17 de abril de 2001.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Edson Vargas (orientador) (IME-USP)
- Prof. Dr. Edson de Faria (IME-USP)
- Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (IM-UFBA)
- Prof. Dr. Júlio César Canille Martins (IM-UENF)
- Prof. Dr. Carlos Teobaldo Gutiérrez Vidalón (ICMC-USP São Carlos)

*Aos meus dois amores
Adriana e Isabelle.*

Resumo

Neste trabalho são estudadas as aplicações do intervalo com um número finito de pontos críticos de inflexão induzidas por recobrimentos do círculo de classe C^2 (eventualmente assumimos que a derivada de Schwarz é negativa) e grau $d \geq 2$. Demonstra-se que para estas aplicações existem limites a priori reais em todos os seus pontos críticos recorrentes e não periódicos. Além disso, para o caso com um único ponto crítico de inflexão, demonstra-se a ergodicidade com respeito a medida de Lebesgue e obtem-se a classificação dos atratores métricos. Prova-se ainda que uma aplicação desta classe induz uma aplicação de Markov se e somente se não existe atrator selvagem. Um exemplo com uma combinatoria específica, a dinâmica de Fibonacci, é apresentado como candidato a exibir atratores selvagens.

Índice

Introdução	1
Principais Resultados	3
1 Ferramentas Básicas	9
1.1 Transformações de Primeiro Retorno	11
2 Limites a priori Reais	16
2.1 Domínios Visitados e Tempos de Saltos	16
2.2 Construção de Limites a priori	18
3 Ergodicidade	22
3.1 Órbitas Negativas de Intervalos Bons	23
3.2 Conjuntos Invariantes e Ergodicidade	26
4 Classificação dos Atratores Métricos	28
4.1 Conjuntos Compactos Invariantes	28
4.2 Classificação dos Atratores Métricos	31

5	Propriedades Markovianas	34
5.1	Critério para a Existência de Propriedades Markovianas	34
5.2	Propriedades Markovianas e Atratores Selvagens	40
6	A Aplicação de Fibonacci	42
6.1	O Itinerário do Ponto Crítico	44
6.2	Limitação das Razões de Escala	48
6.3	Propriedades Markovianas de uma Aplicação de Fibonacci	50
	Referências	54

Lista de Figuras

1	Uma aplicação de grau 4 com 3 pontos críticos	4
6.1	Uma aplicação $f \in \mathfrak{F}_1^2$	43
6.2	Domínios de ϕ_n visitados por $orb^+(c)$	45
6.3	Markov Topológica	52
6.4	Quatro ramos de retorno	53

Introdução

No contexto dos sistemas dinâmicos unidimensionais os sistemas gerados pelas iterações dos polinômios quadráticos $Q_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$, $\lambda \in [2, 4]$ e outros tipos de aplicações unimodais do intervalo $[0, 1]$ têm recebido uma atenção especial. As questões topológicas consideradas inicialmente deram lugar a sofisticadas questões métricas, tanto no espaço de fase como no espaço de parâmetros. Alguns dos pontos culminantes desta teoria foram o desenvolvimento de uma teoria de renormalização (veja [Sul92]), a comprovação de que os polinômios quadráticos Q_λ não possuem atratores selvagens (veja [Lyu94] e [GŚ97]) e que o conjunto dos valores do parâmetro λ tais que Q_λ é hiperbólica é denso em $[2, 4]$ (veja [Lyu94] e [GŚ97]). O estudo da existência de limites a priori reais e do decaimento de geometria foram etapas cruciais para se alcançar todo este desenvolvimento. Mais detalhes e referências sobre este assunto podem ser encontrados em [dMvS93], [GŚ99] e [Lyu00].

Neste trabalho estamos interessados em sistemas dinâmicos gerados pelas aplicações do intervalo que são induzidas por recobrimentos do círculo que possuem vários pontos críticos os quais assumimos que são pontos de inflexão. Os pontos de inflexão são particularmente interessantes uma vez que os mesmos podem provocar certas assimetrias que requerem novas técnicas de abordagem. Provamos a existência de limites a priori reais e exploramos algumas de suas consequências. Descrevemos topologicamente os possíveis atratores métricos e fornecemos uma propriedade que é equivalente a não existência de atratores selvagens. Finalmente analisamos um tipo específico de combinatória, as aplicações de Fibonacci que são

os principais candidatos para exibir atratores selvagens. Mencionamos que devido a falta de simetria e a existência de mais expansividade, aqui esta questão é bem mais difícil do que no caso de aplicações unimodais.

No *Capítulo 1* introduzimos alguns conceitos e ferramentas básicas a serem utilizadas. São estudadas as aplicações de primeiro retorno em geral e algumas de suas propriedades métricas. Os princípios de Koebe e o argumento do menor intervalo são os principais instrumentos utilizados. No *Capítulo 2* demonstra-se a existência de limites a priori reais em pontos recorrentes e não periódicos.

A partir do *Capítulo 3* considera-se o caso de um único ponto de inflexão, para o qual demonstramos a propriedade de ergodicidade, que é uma consequência da existência de limites a priori. No *Capítulo 4* estudamos os conjuntos compactos invariantes, mostrando que (no caso em que eles são minimais) estes tem medida de Lebesgue zero e em seguida obtemos uma classificação dos atratores métricos que estas aplicações podem apresentar. Nos Capítulos 4 e 5 usamos técnicas introduzidas em [BL91] para tratar o caso unimodal.

No *Capítulo 5* veremos que a não existência de atratores selvagens é equivalente ao fato de a aplicação induzir uma aplicação de Markov. Usando este critério podemos provar que no caso em que o conjunto $\omega(c)$ não é minimal não existe atrator selvagem. Neste capítulo usamos técnicas introduzidas em [Mar94] para tratar o caso unimodal. No *Capítulo 6* estudamos uma combinatória específica, a combinatória de Fibonacci, que é a principal candidata para exibir atrator selvagem.

Principais Resultados

Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação induzida por um recobrimento do círculo de classe C^2 e grau $d \geq 2$. Assumimos que f possui um número finito de pontos críticos c_1, \dots, c_b os quais são pontos de inflexão e têm ordem finita, ou seja: para x suficientemente próximo de c_i verifica-se que

$$C^{-1}|x - c_i|^{\beta_i} \leq |f(x) - f(c_i)| \leq C|x - c_i|^{\beta_i},$$

onde $C \geq 1$ e $\beta_i \geq 2$ são constantes que dependem apenas de f . Sem perda de generalidade podemos assumir que os pontos 0 e 1 são pontos fixos topologicamente repulsivos. Denotaremos o conjunto de tais aplicações por \mathfrak{F} as quais possuem gráficos como esboçados na Figura 1.

A *derivada de Schwarz* de uma aplicação $f \in \mathfrak{F}$ de classe C^3 , a qual denotamos por Sf , é definida por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2,$$

para todo ponto x que não seja um ponto crítico. Denotaremos o conjunto das aplicações $f \in \mathfrak{F}$ de classe C^3 tais que $Sf < 0$ por \mathfrak{F}_s .

Fixemos uma aplicação $f \in \mathfrak{F}$. O conceito de atrator (veja [Mil85]) é um dos mais relevantes em dinâmica. Um conjunto compacto e invariante \mathcal{A} é dito um *atrator topológico* se as seguintes propriedades se verificam:

1. A *bacia de atração* de \mathcal{A} definida por $B(\mathcal{A}) := \{x : \omega(x) \subset \mathcal{A}\}$ é um conjunto

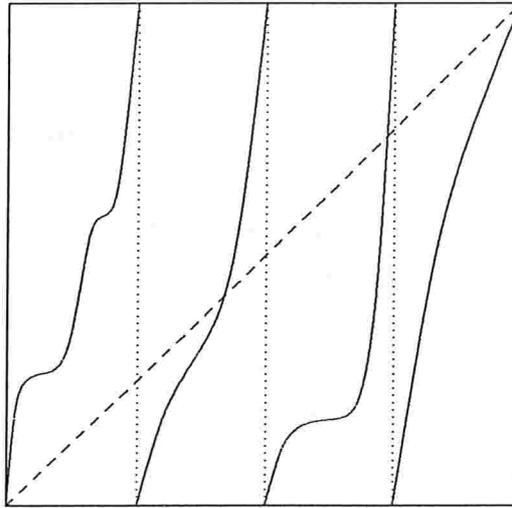


Figura 1: Uma aplicação de grau 4 com 3 pontos críticos

genérico (genérico em algum aberto de $[0, 1]$).

2. Para todo compacto invariante $B \subsetneq \mathcal{A}$ (tem-se que $B(\mathcal{A}) \setminus B(B)$ é genérico (genérico em algum aberto de $[0, 1]$).

Dizemos que \mathcal{A} é um *atrator métrico* se as seguintes propriedades se verificam:

1. A bacia de atração $B(\mathcal{A})$ tem medida de Lebesgue positiva.
2. Para todo compacto invariante $B \subsetneq \mathcal{A}$ tem-se que a medida de Lebesgue de $B(\mathcal{A}) \setminus B(B)$ é positiva.

No caso em que \mathcal{A} é um atrator métrico mas não é um atrator topológico chamamo-lo *atrator selvagem*.

Para classificarmos os atratores topológicos de uma aplicação $f \in \mathfrak{F}$ observamos que a mesma é semi-conjugada à aplicação $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $g(x) = dx \pmod{1}$. Denotando esta semi-conjugação por φ temos que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Se $\varphi^{-1}(x)$ é um único ponto para todo x então φ é uma conjugação. Por outro lado $\varphi^{-1}(x)$ poderia ser um intervalo errante ou uma componente conexa da bacia de atração de um atrator periódico. Sabemos que intervalos errantes não existem (veja [dMvS93]) e que o intervalo $[0, 1]$ é o único atrator topológico de g . Portanto concluímos que

os atratores topológicos de f podem ser pontos periódicos atratores, ou o próprio intervalo $[0, 1]$ caso não existam pontos periódicos atratores.

Lembramos que em [dMvS93] provou-se que os pontos periódicos atratores de f têm período limitado. Resulta então que o número de pontos periódicos atratores não-equivalentes (dois pontos periódicos atratores p e q são ditos equivalentes se $f_{[p,q]}^n$ é um homeomorfismo para todo $n \geq 1$) é finito. No caso em que a derivada de Schwarz de f é negativa resulta que cada órbita periódica atratora atrai pelo menos um ponto crítico e portanto decorre que o número de atratores topológicos de f é limitado pelo seu número de pontos críticos.

Em [Mn85] provou-se que todo conjunto fechado e invariante de medida de Lebesgue positiva contém pontos críticos ou pontos periódicos atratores. Veremos também que um atrator métrico de f que não é uma órbita periódica atratora deve conter pelo menos um ponto crítico. No entanto poderiam existir vários atratores métricos contendo um mesmo ponto crítico. A classificação dos atratores métricos depende de uma análise mais fina a qual se inicia com a existência de *limites a priori reais* que definiremos abaixo.

Definição 0.1. Um intervalo aberto $I \subset [0, 1]$ é dito intervalo bom se a órbita positiva do seu bordo não o intercepta, ou seja, $I \cap (\bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(\partial I)) = \emptyset$.

Uma razão para considerarmos o conceito de intervalo bom é o fato de que o domínio de definição da transformação de primeiro retorno de um tal intervalo é uma união enumerável de intervalos abertos (que chamamos *domínios de retorno*) os quais são aplicados homeomorficamente sobre I . Também verifica-se que dois intervalos da órbita negativa de um intervalo bom são disjuntos ou encaixantes e que tais intervalos são intervalos bons.

Dado um ponto recorrente x escolhemos um intervalo bom $I \ni x$ como por exemplo o próprio domínio do ramo de f que contem x . Em seguida consideramos a transformação de primeiro retorno de I a qual denotamos por ϕ . Sendo x recorrente existe um intervalo $J \ni x$ o qual é uma componente conexa do domínio de ϕ . Definimos então a função \mathcal{N}_x que associa ao intervalo I o intervalo J , abreviadamente $\mathcal{N}_x(I) = J$. Sendo x recorrente podemos iterar \mathcal{N}_x e obter uma sequência infinita de intervalos bons $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ tais que $I_0 = I$ e $I_{n+1} = \mathcal{N}_x(I_n)$. Denotamos por ϕ_n a transformação de primeiro retorno de I_n e desta forma temos que

$\phi_n|_{I_{n+1}} : I_{n+1} \rightarrow I_n$ e $\phi_n|_{I_{n+1}} = f|_{I_{n+1}}^{k_n}$ para algum k_n . Caso x pertença a um intervalo periódico temos que $\bigcap_{i=0}^{\infty} I_i$ pode ser intervalo não-degenerado mas se este não for o caso temos que $\bigcap_{i=0}^{\infty} I_i = \{x\}$. Podemos então afirmar que existem intervalos bons arbitrariamente pequenos em torno de x .

Consideramos a *razão de escala*

$$\mu(I) := \frac{|\mathcal{N}_x(I)|}{|L|},$$

onde L é a menor componente conexa de $I \setminus \mathcal{N}_x(I)$. Quando existem intervalos bons I arbitrariamente pequenos tais que $\mu(I) \leq \alpha$, para algum $\alpha < \infty$ dizemos que existem *limites a priori reais* em x .

A presença de pontos críticos recorrentes e não-periódicos enriquece o sistema dinâmico gerado pelas iterações de uma aplicação f pois neste caso a mesma apresenta comportamentos de muita contração em regiões próximas destes pontos críticos e comportamentos de relativa expansão longe deles. Sendo assim a estrutura das órbitas destes pontos têm grande influência para a determinação de qual destes comportamentos predominam quando o sistema evolui. Como é usual em dinâmica, as transformações de primeiro retorno comportam importantes informações para esta análise. Consideremos uma sequência $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ como acima, associada a um ponto crítico recorrente e não-periódico c . O comportamento assintótico da correspondente sequência de razões de escala $\mu_n := \mu(I_n)$ pode ser determinante para várias propriedades sobre a órbita de c e outras características métrico-geométricas associadas à aplicação f .

Se $\phi_n(c) \in I_{n+1}$ dizemos que ocorre um *retorno central* para n . Uma *cascata de retornos centrais* é uma sequência máxima $n_k, \dots, n_k + l$ tal que ocorrem retornos centrais para todo n com $n_k \leq n \leq n_k + l$. Em cascatas de retornos centrais pode ocorrer que μ_n cresça arbitrariamente. Gostaríamos de provar que se n não corresponde a um retorno central então $\mu_{n+1} \leq \alpha$, para algum $\alpha < \infty$ que depende apenas de f . Inicialmente provamos apenas que existem *limites a priori reais* em todo ponto recorrente e não-periódico.

Teorema 1. *Dada $f \in \mathfrak{F}$ existem limites a priori reais em todos os seus pontos recorrentes e não-periódicos.*

A partir deste teorema podemos iniciar o estudo de alguns aspectos métricos. Consideramos o conjunto $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$ das aplicações induzidas por recobrimentos do

círculo de classe C^2 e grau $d \geq 2$ com um único ponto crítico de inflexão c , de ordem finita. Consideramos também o conjunto das aplicações $f \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_s$ de classe C^3 o qual denotamos por \mathfrak{F}_{1s} .

Definição 0.2. Dizemos que $f \in \mathfrak{F}$ é ergódica com respeito a medida de Lebesgue se dado um conjunto $X \subset [0, 1]$ completamente invariante, ou seja, $f^{-1}(X) = X$, então obrigatoriamente X tem medida de Lebesgue nula ou tem medida de Lebesgue total.

Teorema 2. Seja $f \in \mathfrak{F}_1$ uma aplicação que não possui atrator periódico. Então f é ergódica com respeito à medida de Lebesgue.

O próximo teorema nos garante que se um conjunto invariante por f é pequeno sob o ponto de vista topológico então ele também é pequeno sob o ponto de vista métrico.

Teorema 3. Se Λ é um conjunto invariante minimal para $f \in \mathfrak{F}_1$ então Λ possui medida de Lebesgue nula.

Teorema 4. Se \mathcal{A} é um atrator métrico para $f \in \mathfrak{F}_{1s}$ então vale uma das seguintes propriedades:

1. \mathcal{A} é o intervalo $[0, 1]$.
2. \mathcal{A} é uma órbita periódica atratora.
3. \mathcal{A} é um conjunto de Cantor minimal que contém o ponto crítico.

De acordo com a classificação dos atratores topológicos sabemos que um tal atrator não pode ser um conjunto de Cantor minimal. Sendo assim um atrator métrico como na Parte (3) do Teorema 4 seria um atrator selvagem. A questão sobre a existência ou não de atratores selvagens para aplicações $f \in \mathfrak{F}_1$ é de grande relevância. Observe que pelo Teorema 3, atratores selvagens têm medida de Lebesgue nula.

Definição 0.3. Dizemos que $f \in \mathfrak{F}_1$ induz uma aplicação de Markov se existe um intervalo $I \ni c$ e um conjunto $\mathcal{G} \subset [0, 1]$ de medida de Lebesgue total tal que para todo $x \in \mathcal{G}$ existem intervalos $H_j = H_j(x)$ tais que:

1. $\bigcap_{j=1}^{\infty} H_j = \{x\}$.
2. Existe n_j tal que f^{n_j} aplica o intervalo H_j difeomorficamente sobre o intervalo I .
3. $f_{|H_j}^{n_j}$ tem distorção uniformemente limitada.
4. Os intervalos H_j não contêm pontos do bordo do intervalo I .

No caso em que o conjunto \mathcal{G} na definição acima é apenas denso em $[0, 1]$ e os ramos $f_{|H_j}^{n_j}$ são apenas difeomorfismos com distorção possivelmente não limitada dizemos que f induz uma *aplicação de Markov topológica*.

Teorema 5. *Uma aplicação $f \in \mathfrak{F}_{1s}$ induz uma aplicação de Markov se, e somente se, não possui atrator selvagem.*

O teorema a seguir trata das aplicações $f \in \mathfrak{F}_1$ com uma combinatória específica (que será descrita em detalhes no Capítulo 6), chamadas de *aplicações de Fibonacci*. Para essas aplicações provamos um resultado mais forte do que os limites a priori reais obtidos no caso geral.

Teorema 6. *Se $f \in \mathfrak{F}_1$ é uma aplicação de Fibonacci então a sequência das razões de escala dadas por $\mu_n = |I_n|/|L_n|$ (onde L_n é a menor componente conexa de $I_{n-1} \setminus I_n$) é limitada.*

Ferramentas Básicas

O Lema de Koebe, o qual enunciaremos abaixo, desempenhará um papel fundamental no estudo de certas propriedades métricas de aplicações de primeiro retorno associadas a uma aplicação $f \in \mathfrak{F}$. Além disto exploraremos aspectos combinatórios do sistema dinâmico em questão. Inicialmente introduzimos alguns conceitos preliminares.

Definição 1.1. *Uma sequência $\{U_i\}_{i=0}^s$ de intervalos abertos em $[0, 1]$ é chamada uma cadeia de intervalos (por simplicidade apenas cadeia) se U_i é o intervalo máximo tal que $f(U_i) \subseteq U_{i+1}$, $i = 0, \dots, s-1$. Chamamos U_0 de um pullback de U_s .*

Observamos que para qualquer cadeia $\{U_i\}_{i=0}^s$ o bordo de U_i é aplicado por f no bordo de U_{i+1} e f aplica U_i monotonamente sobre U_{i+1} . A *multiplicidade de interseção* de uma cadeia é o número máximo de intervalos da cadeia que contêm pelo menos um ponto em comum.

Seja $\{U_i\}_{i=0}^s$ uma cadeia cujos intervalos são dois a dois disjuntos e $\{V_i\}_{i=0}^s$ uma cadeia tal que $U_i \subset V_i$. Dizemos que $\{V_i\}_{i=0}^s$ possui a *propriedade da disjunção central* se para todo $0 \leq i < j \leq s$ tal que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ verifica-se que V_i está contido em uma das componentes conexas de $V_j \setminus U_j$.

Definição 1.2. *Sejam U, V intervalos tais que o fecho de U está contido no interior de V . Sejam U^+, U^- as componentes conexas de $V \setminus U$. Então, se $|U^+| \geq \alpha|U|$ e $|U^-| \geq \alpha|U|$, V é dito uma α -vizinhança de U ou simplesmente que U está α -centralizado em V .*

Lema 1.1. *Sejam $\{V_i\}_{i=0}^s$ e $\{U_i\}_{i=0}^s$ cadeias tais que V_s é uma σ -vizinhança de U_s para algum $\sigma > 0$. Se a multiplicidade de interseção de $\{V_i\}_{i=0}^s$ é limitada por k valem as seguintes afirmações:*

1. V_0 é uma α -vizinhança de U_0 , onde $\alpha > 0$ depende somente de σ , k e f .
2. Se V_{i_1}, \dots, V_{i_r} são os intervalos da cadeia $\{V_i\}_{i=0}^s$ que contêm ponto crítico então as aplicações $f^{i_{j+1}-i_j-1}|_{V_{i_{j+1}}} : V_{i_{j+1}} \rightarrow V_{i_{j+1}}$; $j = 1, \dots, r-1$ satisfazem

$$\frac{|Df^{i_{j+1}-i_j-1}(x)|}{|Df^{i_{j+1}-i_j-1}|} \leq K$$

para quaisquer $x, y \in U_{i_{j+1}}$, onde $K < \infty$ depende somente de σ , k e f .

Demonstração:

Veja [dMvS93] ■

Mencionamos que as afirmativas do Lema 1.1 ainda são válidas se substituirmos a hipótese sobre a limitação da multiplicidade de interseção pela hipótese de que f tem derivada de Schwarz negativa ou pela hipótese de que os intervalos da cadeia $\{U_i\}_{i=0}^s$ são dois a dois disjuntos e a cadeia $\{V_i\}_{i=0}^s$ possui a propriedade da disjunção central.

Lema 1.2. *(Princípio da Contração) Para todo $\xi > 0$ existe $\eta > 0$ tal que se U é um intervalo com $|U| \geq \xi$ então $|f^i(U)| \geq \eta$ para todo $i \geq 0$.*

Demonstração:

Veja [dMvS93] ■

Em particular segue do Lema 1.2 que se um intervalo V é tal que $|V| < \eta$ então para todo intervalo \tilde{V} tal que $f^n(\tilde{V}) \subset V$, para algum $n \geq 0$, verifica-se que $|\tilde{V}| < \xi$. Então podemos (e assim faremos) tomar sempre intervalos suficientemente pequenos de modo que cada intervalo da sua órbita negativa contenha no máximo um ponto crítico.

1.1 Transformações de Primeiro Retorno

Dada uma aplicação $f \in \mathfrak{F}$ passaremos a estudar a transformação de primeiro retorno ϕ de um intervalo bom I fixado. Uma componente conexa $J \subset I$ do domínio de ϕ será chamada de *domínio de retorno*.

Lema 1.3. *Sejam I um intervalo bom e J_1, \dots, J_m domínios de retorno a I com tempos de retorno s_1, \dots, s_m respectivamente. Se $\beta > 0$ é a distância de I ao bordo de $[0, 1]$ então existem $\delta = \delta(\beta) > 0$ e um intervalo \mathcal{M} o qual é uma δ -vizinhança de J_r , para algum $1 \leq r \leq m$ e \mathcal{M} não contém intervalos da coleção $\{f^j(J_l)\}$ para $1 \leq j < s_l$ e $1 \leq l \leq m$.*

Demonstração:

Inicialmente definiremos um intervalo M o qual faremos o pullback para definir o intervalo \mathcal{M} . Considere a coleção de intervalos disjuntos definida por $\mathcal{C} := \{f^j(J_l); 1 \leq j \leq s_l \text{ e } 1 \leq l \leq m\}$ e seja $f^i(J_r)$ o menor intervalo desta coleção.

Se $i \leq s_r - 2$ e para algum $k = i, i + 1, i + 2$ o intervalo $f^k(J_r)$ possui intervalos vizinhos à esquerda e à direita pertencentes à coleção \mathcal{C} . Sendo $C := \max\{|Df(x)|; x \in [0, 1]\}$ definimos M como sendo o intervalo que contém $f^i(J_r)$ e cujas componentes conexas L e R de $M \setminus f^i(J_r)$ satisfazem $C^2|L| = C^2|R| = |f^i(J_r)|$.

Suponhamos agora que para $i = s_r, s_r - 1$ pelo menos um dos lados de $f^i(J_r)$ não contém intervalos da coleção acima. Então definimos o intervalo $M \supset f^i(J_r)$ de forma que as componentes conexas de $M \setminus f^i(J_r)$ satisfazem $|L| = |R| = \delta_0$ onde $\delta_0 := \min\{1/C^2, \beta/|I|\}$.

Considere a cadeia $\{M_j\}_{j=0}^i$ tal que $M_i = M$ e $M_j \supset f^j(J_r)$. A aplicação $f_{|M_0}^i : M_0 \rightarrow M$ é monótona e sobrejetora. Então como o intervalo M não contém intervalos da coleção \mathcal{C} além de $f^i(J_r)$ resulta que para cada $0 \leq j \leq i$ o intervalo M_j também não contém intervalos da coleção \mathcal{C} além do próprio $f^j(J_r)$. Isto implica que a multiplicidade de interseção da cadeia $\{M_k\}_{k=0}^i$ é no máximo 3. Pelo Lema 1.1 concluímos que $\mathcal{M} := M_0$ possui a propriedade que queremos. ■

Lema 1.4. *Sejam I um intervalo bom e $J \subset I$ um domínio de retorno a I com tempo de retorno s . Se T é uma δ -vizinhança de J que não contém intervalos da coleção $\{f(J), f^2(J), \dots, f^{s-1}(J)\}$ então I é uma $\delta/2$ -vizinhança de J ou valem as seguintes afirmações:*

1. *Seja $\{T_j\}_{j=0}^s$ a cadeia tal que $T_s = T$ e $T_j \supset f^j(J)$. A multiplicidade de interseção desta cadeia é no máximo 3. Em particular no máximo 3 intervalos desta cadeia podem conter um dado ponto de inflexão.*
2. *Sejam T_{j_1}, \dots, T_{j_k} os intervalos da cadeia acima que contêm pontos de inflexão, $\tilde{T} \subset T$ uma $\delta/2$ -vizinhança de J e $\{\tilde{T}_j\}_{j=0}^s$ a cadeia tal que $\tilde{T}_s = \tilde{T}$ e $\tilde{T}_j \supset f^j(J)$. Então as aplicações $f^{j_{l+1}-j_l-1}|_{\tilde{T}_{j_{l+1}}} : \tilde{T}_{j_{l+1}} \rightarrow \tilde{T}_{j_l}$ para $1 \leq l \leq k$, são difeomorfismos com distorção uniformemente limitada, ou seja,*

$$\frac{|Df^{j_{l+1}-j_l-1}(x)|}{|Df^{j_{l+1}-j_l-1}(y)|} \leq K$$

para quaisquer $x, y \in \tilde{T}_{j_{l+1}}$ e $K < \infty$ dependendo somente de δ e f .

3. *A aplicação $f^s|_{\tilde{T}_0} : \tilde{T}_0 \rightarrow \tilde{T}$ é quase-simétrica, ou seja, dados dois intervalos adjacentes I_1 e I_2 contidos em \tilde{T}_0 e tais que $|I_1| = |I_2|$ verifica-se que*

$$K_1^{-1} \leq \frac{|f^s(I_1)|}{|f^s(I_2)|} \leq K_1$$

onde $K_1 < \infty$ depende somente de δ e f .

4. *Para todo $y \in \tilde{J}$ verifica-se que*

$$|Df^s(y)| \leq B \frac{|f^s(\tilde{J})|}{|\tilde{J}|}$$

para qualquer $\tilde{J} \subset \tilde{T}_0$ e para algum $B < \infty$ que depende apenas de δ e f .

Demonstração:

Para provarmos (1) consideramos a cadeia $\{T_j\}_{j=0}^s$ e suponhamos que a sua multiplicidade de interseção é pelo menos 4. Então existem $0 \leq j_1 < j_2 < s$ tais que

$f^{j_1}(J) \subset T_{j_2}$ ou $f^{j_2}(J) \subset T_{j_1}$. Mas ambas as possibilidades contradizem o fato de que T não contém intervalos da coleção $\{f(J), f^2(J), \dots, f^{s-1}(J)\}$.

O ítem (2) é consequência de (1) e do Lema 1.1. O ítem (3) é consequência de (2) e da hipótese de que os pontos críticos são de ordem finita. Para provarmos o ítem (4) consideramos os intervalos T_{j_1}, \dots, T_{j_k} que contêm pontos de inflexão e todos os inteiros $m_1 < \dots < m_{j_1}$ tais que T_{m_i} contém ponto crítico e

$$\text{dist}(f^{m_{j_1}+1}(\tilde{J}), f(c_l)) \leq |f^{m_i+1}(\tilde{J})|. \quad (1.1)$$

Então, dado $y \in \tilde{J}$ podemos escrever $|Df^s(y)|$ como

$$|Df^{s-m_{j_1}-1}(f^{m_{j_1}+1}(y))| \dots |Df(f^{m_2}(y))| |Df^{m_2-m_1-1}(f^{m_1+1}(y))| |Df(f^{m_1}(y))| |Df^{m_1}(y)|.$$

O ítem (1) conjuntamente com o Lema 1.1 e a hipótese de que os pontos de inflexão são de ordem finita implicam que existe $B < \infty$ tal que

$$|Df^s(y)| \leq B \frac{|f^s(\tilde{J})|}{|f(f^{m_{j_1}}(\tilde{J}))|} \dots |f^{m_2}(y)-c_2|^{\beta_2-1} \frac{|f^{m_2}(\tilde{J})|}{|f(f^{m_1}(\tilde{J}))|} |f^{m_1}(y)-c_1|^{\beta_1-1} \frac{|f^{m_1}(\tilde{J})|}{|\tilde{J}|}.$$

A hipótese de que os pontos de inflexão são de ordem finita e (1.1) implicam que

$$|f^{m_i}(y) - f(c_l)| \leq (2C)^{1/\beta_i} |f^{m_i}(\tilde{J})|$$

e o ítem (4) segue-se. ■

Dado um domínio de retorno $J \subset I$, um intervalo $D \subset J$ é chamado *domínio fundamental* de ϕ se para algum $n \geq 1$ verifica-se que $D, \phi(D), \dots, \phi^{n-1}(D) \subset J$ e $\phi^n(D)$ é uma componente conexa de $I \setminus J$.

Lema 1.5. *Seja $J \subset I$ um domínio de retorno cuja aplicação de primeiro retorno é ϕ . Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que se $D \subset J$ é um domínio fundamental então $|\phi(D)| \geq \epsilon_0 |D|$.*

Demonstração:

Queremos mostrar que $\phi(D)$ é grande comparado com D . Como $D \subset J$ basta considerarmos o caso em que $\phi(D)$ é pequeno comparado com J . Neste caso $\phi(D)$ está centralizado no intervalo \mathcal{M} , obtido pelo Lema 1.3 aplicado a $J \subset I$. Além disso, pelo Lema 1.4, ϕ é quase-simétrica em uma vizinhança de D . Seja $D = [x, y]$ e $\phi(D) = [y, z]$. Pela quase-simetria, um intervalo U com centro em y e de aproximadamente o mesmo tamanho de D é aplicado sobre um intervalo V com centro em z e de tamanho aproximadamente igual a $|\phi(D)|$. Como estamos supondo que $\phi(D)$ é muito menor que D , então V está contido em U . Logo D estaria contido na bacia de atração de uma órbita periódica o que contradiz a presente definição de domínio fundamental. ■

Definição 1.3. *Considere um domínio de retorno $J \subset I$ e E uma componente conexa de $I \setminus J$. Se $|E| < \alpha|J|$ chamamos E de lado α -pequeno de J . Se $|E| \geq \alpha|J|$ chamamos E de lado α -grande de J . Considerando uma componente conexa P de $J - \{p\}$, onde p é o ponto fixo de $\phi|_J$ o qual assumimos ser único. Se $\phi(P)$ intercepta um lado α -pequeno de J , P é chamado de lado interno α -pequeno. Se $\phi(P)$ intercepta um lado α -grande de J , P é chamado de lado interno α -grande.*

Lema 1.6. *Sejam $J \subset I$ um domínio de retorno e $\delta > 0$ a constante dada pelo Lema 1.3. Existe $\epsilon_1 > 0$ tal que se $D \subset J$ é um domínio fundamental contido em um lado interno $\delta/2$ -pequeno, então I é uma ϵ_1 -vizinhança de D .*

Demonstração:

Considere o intervalo \mathcal{M} dado pelo Lema 1.3 associado ao domínio de retorno J , $\tilde{T} \subset \mathcal{M}$ uma $\delta/2$ -vizinhança de J e L, R as componentes conexas de $I \setminus J$. Se ambos os lados L e R são $\delta/2$ -pequenos resulta do Lema 1.4 que $\phi|_J$ tem derivada limitada pois para $y \in J$ temos que $|Df^s(y)| \leq B \frac{|f^s(J)|}{|J|}$. Isto implica que domínios fundamentais vizinhos tem aproximadamente o mesmo comprimento e portanto D está centralizado em I . Se L é $\delta/2$ -pequeno e R é $\delta/2$ -grande temos que $\phi^m(D) = L$ para algum m . Pelo Lema 1.5 temos que $|\phi(D)| \geq \epsilon|D|$ e como R é $\delta/2$ -grande concluímos que D está centralizado em I . ■

Lema 1.7. *Seja $J \subset I$ um domínio de retorno e $\delta > 0$ a constante dada pelo Lema 1.3. Existe $\epsilon_2 > 0$ tal que para $\rho < \min\{1, \delta/2\}$ se:*

1. *Um domínio de retorno $J \subset I$ possui um lado ρ -pequeno H e um lado ρ -grande G .*
2. *I é uma ρ -vizinhança de um intervalo V com $V \subset G$.*

Então para $k \geq 1$, $\phi_{|J}^{-k}(I)$ é uma ϵ_2 -vizinhança de $\phi_{|J}^{-k}(V)$.

Demonstração:

Sejam $J \subset I$ um domínio de retorno e $\rho < \min\{1, \delta/2\}$ como no enunciado do lema. Seja G o lado ρ -grande de J o qual contém V . Consideramos também G' e G'' os domínios fundamentais em J tais que $\phi^2(G'') = \phi(G') = G$. É suficiente provarmos que V está centralizado em $G' \cup G$ ou que $\phi_{|J}^{-1}(V)$ está centralizado em $G'' \cup G'$. De fato, a órbita negativa de $G' \cup G$ até $\phi_{|J}^{-k-1}(G' \cup G)$ tem multiplicidade de interseção no máximo 3 e então o Lema 1.1 garante o que queremos. No caso em que $2|G'| \geq |J|$, como J possui um lado ρ -pequeno, temos que V está centralizado em $G' \cup G$. Se $2|G'| < |J|$ e $\tilde{J} := J \setminus G'$ segue do Lema 1.4 que (escolhemos T como sendo o intervalo \mathcal{M} dado pelo Lema 1.3 aplicado a $J \subset I$) $\phi_{|\tilde{J}}$ tem derivada uniformemente limitada. Portanto quaisquer dois domínios fundamentais vizinhos têm comprimentos comparáveis e resulta que $\phi_{|J}^{-1}(V)$ está centralizado em $G'' \cup G'$ como queremos.

■

Limites a priori Reais

2.1 Domínios Visitados e Tempos de Saltos

O principal objetivo deste capítulo é provar o Teorema 1. Consideremos um intervalo bom I com a sua respectiva transformação de primeiro retorno ϕ . Dado um ponto recorrente $x \in I$ definimos a *sequência de domínios visitados* $\{J_i\}_{i=0}^{\infty}$ e a *sequência de tempos de saltos* $\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$. Para isto escolhemos $k_0 := 0$ e para $i \geq 0$ escolhemos k_i e J_i de modo que

$$\phi^{k_i+j}(x) \in J_i, \quad 0 \leq j < k_{i+1} - k_i$$

e

$$\phi^{k_{i+1}}(x) \notin J_i.$$

Observamos que tanto a sequência de domínios visitados como a sequência de tempos de saltos dependem de x e de I .

Lema 2.1. *Dado um intervalo bom I e um ponto recorrente $x \in I$ consideramos as correspondentes sequências de domínios visitados $\{J_i\}_{i=0}^{\infty}$ e de tempos de saltos $\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$. Então para $\rho > 0$ existe $i_0 \geq 0$ que chamamos de tempo de parada tal que:*

1. Para $0 \leq i < i_0$, J_i possui um lado ρ -pequeno H_i e um lado ρ -grande G_i .
2. Para $0 \leq i < i_0$, $\phi^{k_i}(x), \dots, \phi^{k_{i+1}-1}(x)$ estão em um lado interno ρ -grande.

3. Para $0 \leq i < i_0$; $(J_i, J_{i+1}] \cap (\bigcup_{k=0}^i J_k) = \emptyset$.

4. Verifica-se uma das seguintes propriedades:

- P_1 : ambos os lados de J_{i_0} são lados ρ -grandes.
- P_2 : J_{i_0} possui pelo menos um lado interno ρ -pequeno o qual contém $\phi^{k_{i_0}}(x)$.
- P_3 : $(J_{i_0}, J_{i_0+1}] \cap (\bigcup_{k=0}^{i_0} J_k) \neq \emptyset$.

Observe que J_0, \dots, J_{i_0-1} são dois a dois disjuntos e que a afirmação (2) do Lema 2.1 implica que J_{i+1} está em um lado ρ -grande de J_i , para todo $i < i_0$. Para termos uma visualização mais geométrica da afirmação (3) observamos também que a mesma nos garante que podemos conectar J_i a J_{i+1} (para $i < i_0$) por um semi-círculo contido no semi-plano superior e obter uma sequência de semi-círculos dois a dois disjuntos. Obtemos assim uma estrutura de espiral em direção a um ponto “mais central” do intervalo I .

Demonstração do Lema 2.1: Se P_2 não se verifica então apenas lados internos ρ -grandes são visitados. Se P_3 também não se verifica concluímos que a sequência de domínios visitados possui uma estrutura de espiral em direção a um ponto mais central de I e portanto P_1 se verifica. ■

O lema a seguir nos garante que teremos o controle da multiplicidade de interseção que necessitamos para aplicar o Lema 1.1 e fazer o pullback do espaço de Koebe que obteremos com as propriedades P_1 , P_2 ou P_3 do Lema 2.1.

Lema 2.2. *Sejam $\{J_i\}_{i=0}^{\infty}$ a sequência de domínios visitados e $\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$ a sequência de tempos de saltos associadas a um ponto recorrente $x \in I$. Assumimos que existe $n \geq 2$ tal que $J_i \cap J_n = \emptyset$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$. Então o pull-back de J_n ao longo de $\{x, \dots, \phi^{k_n}(x)\}$ é constituído de intervalos dois a dois disjuntos.*

Demonstração:

Como J_n não é visitado antes do k_n -ésimo iterado o lema segue imediatamente.

■

2.2 Construção de Limites a priori

Fixemos $\rho < \min\{1, \delta/2\}$ e analisaremos todas as possibilidades dadas pelo Lema 2.1. Quando omitirmos a constante γ em expressões como γ -vizinhança, γ -centralizado, lado γ -grande significa que tal constante pode ser escolhida de modo uniforme dependendo apenas de f .

Lema 2.3. *Seja $x \in I$ um ponto recorrente que satisfaz P_1 ou P_2 com $i_0 \geq 1$. Então se $D \subset J_{i_0}$ é o domínio fundamental que contem $\phi^{k_{i_0}}(x)$ temos que $\phi_{|J_{i_0-1}}^{-(k_{i_0}-k_{i_0-1})}(D)$ está centralizado em $\phi_{|J_{i_0-1}}^{-(k_{i_0}-k_{i_0-1})}(I)$.*

Demonstração:

Resulta do Lema 1.6 que I é uma ϵ_1 -vizinhança de D . Como J_{i_0-1} possui um lado ρ -grande o qual contem D o Lema 1.7 implica o que queremos.

■

Lema 2.4. *Seja $x \in I$ um ponto recorrente que satisfaz P_3 . Seja $t < i_0$, é o maior inteiro tal que $J_t \subset (J_{i_0}, J_{i_0+1}]$. Então verificam-se as seguintes propriedades:*

1. *Se $U \subset J_t$ é o pullback de J_{i_0+1} ao longo de $\{\phi^{k_{t+1}-1}(x), \dots, \phi^{k_{i_0+1}}(x)\}$ então U está centralizado em I .*
2. *Mais ainda, $\phi_{|J_t}^{-(k_{t+1}-k_t-1)}(U)$ está centralizado em $\phi_{|J_t}^{-(k_{t+1}-k_t-1)}(I)$.*

Demonstração:

Como $x \in I$ satisfaz P_3 ocorre que

$$(J_i, J_{i+1}] \cap \left(\bigcup_{k=0}^i J_k \right) = \emptyset; \quad i < i_0$$

e que

$$(J_{i_0}, J_{i_0+1}] \cap \left(\bigcup_{k=0}^{i_0} J_k \right) \neq \emptyset.$$

Considere o intervalo $J_t \subset (J_{i_0}, J_{i_0+1}]$. Observe que $H_t \cap H_{i_0} = \emptyset$, $G_t \cap G_{i_0} \neq \emptyset$, $J_{t+1} \subset H_{i_0} \cup J_{i_0}$ e $J_{i_0+1} \subset H_t \cup J_t$. Assumimos sem perda de generalidade que ordenando os intervalos H_t , J_t e J_{i_0} no sentido crescente dos números reais eles aparecem nesta ordem. Então como o lado direito de J_t é ρ -grande e $U \subset J_t$, para provarmos a parte (1) do lema basta provarmos que a componente conexa esquerda de $I \setminus U$ e grande comparada com U . Para isto consideramos o intervalo \mathcal{M} dado pelo Lema 1.3 aplicado aos domínios de retorno J_t e J_{i_0} . Existem dois casos:

Caso 1: \mathcal{M} é uma δ -vizinhança de J_{i_0} . Temos que $J_{t+1} \subset H_{i_0}$ e então J_{t+1} também está centralizado em \mathcal{M} . Pelo fato de que o lado esquerdo de J_{t+1} é ρ -grande, do Lema 1.4 resulta que $\phi_{|J_t}^{-1}(J_{t+1})$ está centralizado em I . Como $U \subset \phi_{|J_t}^{-1}(J_{t+1})$ a parte (1) do lema segue-se. Para provarmos a parte (2) consideramos primeiro o caso em que $|G_t \cap G_{t+1}|$ é comparável a $|I|$. Então $\phi_{|J_t}^{-1}(J_{t+1})$ está centralizado em $G_t \cup \phi_{|J_t}^{-1}(G_t)$ e como o pullback deste último ao longo de $\{\phi^{k_t}(x), \dots, \phi^{k_{t+1}-1}(x)\}$ tem multiplicidade de interseção no máximo 3, o Lema 1.1 implica o que queremos. Por outro lado se $|G_t \cap G_{t+1}|$ é arbitrariamente pequeno em comparação com $|I|$ temos $i_0 = t + 1$ e que $|J_t|$, $|J_{t+1}|$ são ambos comparáveis a $|I|$. Seja $\tilde{\mathcal{M}}$ o intervalo dado pelo Lema 1.3 aplicado a $J_t \subset I$. O intervalo I está centralizado em $\tilde{\mathcal{M}} \cup \mathcal{M}$ o qual não contem intervalos do tipo $f(J_t), \dots, f^{r_t-1}(J_t)$ (onde r_t é o tempo de retorno de J_t). Pelo Lema 1.4 concluímos que a derivada de $\phi_{|J_t}$ é uniformemente limitada e portanto quaisquer dois domínios fundamentais vizinhos têm aproximadamente o mesmo comprimento. Como U está contido em um destes domínios o lema segue-se.

Caso 2: \mathcal{M} é uma δ -vizinhança de J_t . Analogamente ao caso (1) temos que $J_{i_0+1} \subset H_t$ e portanto J_{i_0+1} está centralizado em \mathcal{M} . Pelo mesmo argumento do caso (1) resulta que $\phi_{|J_{i_0}}^{-1}(J_{i_0+1}) \subset J_{i_0}$ está centralizado em I . Então se $k_{i_0} - k_{i_0-1} > 1$ pelo Lema 1.7 temos que $\phi_{|J_{i_0}}^{-(k_{i_0+1}-k_{i_0})}(J_{i_0+1})$ está centralizado em $\phi_{|J_{i_0}}^{-(k_{i_0+1}-k_{i_0}-1)}(I)$. Se $k_{i_0} - k_{i_0-1} = 1$, Lema 1.7 implica que $\phi_{|J_{i_0-1}}^{-(k_{i_0}-k_{i_0-1})}(\phi_{|J_{i_0}}^{-1}(J_{i_0+1}))$ está centralizado em $\phi_{|J_{i_0-1}}^{-(k_{i_0}-k_{i_0-1})}(I)$. Em ambos os casos, pelos Lemas 1.1 e 2.2, obtemos que U está centralizado em J_t e que a parte (2) do lema também se verifica. ■

Lema 2.5. *Se $x \in I$ é um ponto recorrente cujo primeiro tempo de salto $k_1(x) = 1$ (retorno não-central) então existe intervalo bom $N \subset I$ tal que $\mathcal{N}_x(N)$ está*

centralizado em N .

Demonstração:

Sejam $y := \phi(x) \in J_1(x)$ e os seus respectivos domínios de retorno $J_i = J_i(y)$, tempos de saltos $k_i = k_i(y)$ e tempo de parada $i_0 = i_0(y)$. Consideraremos três casos.

Caso 1: y satisfaz P_1 ou P_2 com $i_0 = 0$. Seja $D(y) \subset J_0$ o domínio fundamental que contem y o qual, de acordo com o Lema 1.6, está centralizado em I . Pelo Lema 1.1 temos que $\phi_{|J_0(x)}^{-1}(D(y))$ está centralizado em $J_0(x)$. Como $\mathcal{N}_x(J_0(x)) \subset \phi_{|J_0(x)}^{-1}(D(y))$ basta escolhermos $N = J_0(x)$ e o lema está provado.

Caso 2: y satisfaz P_1 ou P_2 com $i_0 \geq 1$. Sendo $D(x)$ o domínio fundamental que contem x , como $i_0(x) = 0$ temos que $D(x)$ está contido em um lado interno ρ -pequeno de $J_0(x)$. Sendo $i_0 \geq 1$ obtemos que $\phi^j(x) \notin D(x)$, para $1 \leq j < k_{i_0}$. Pelos Lemas 1.6, 1.7 e 2.2 resulta que o pullback \tilde{D} do domínio fundamental $D(\phi^{k_{i_0}}(y))$ ao longo de $\{y, \dots, \phi^{k_{i_0}}(y)\}$ está centralizado em J_0 . Pelo Lema 1.1 resulta que $\phi_{|J_0(x)}^{-1}(\tilde{D})$ está centralizado em $D(x)$. Como $\mathcal{N}_x(D(x)) \subset \phi_{|J_0(x)}^{-1}(\tilde{D})$ escolhemos $N := D(x)$ e obtemos o desejado.

Caso 3: y satisfaz P_3 . Se $t = 0$ temos que $\phi^j(x) \notin J_0(x)$ para $1 \leq j < k_{i_0+1}$. Pelo Lema 2.4 o pullback U de J_{i_0+1} ao longo de $\{y, \dots, \phi^{k_{i_0+1}}(y)\}$ está centralizado em I . Pelo Lema 1.1 temos que $\phi_{|J_0(x)}^{-1}(U)$ está centralizado em $J_0(x)$. Como $\mathcal{N}_x(J_0(x)) \subset \phi_{|J_0(x)}^{-1}(U)$ $N := J_0(x)$ satisfaz o que queremos. Se $t \geq 1$ temos que o domínio fundamental de x denotado por $D(x)$ está contido em um lado interno ρ -pequeno de $J_0(x)$ e portanto, como ocorre P_3 , resulta que $\phi^j(x) \notin D(x)$, para $1 \leq j < k_{i_0+1}$. Novamente o Lema 2.4 implica que o pullback \tilde{U} de J_{i_0+1} ao longo de $\{\phi^{k_t}(y), \dots, \phi^{k_{i_0+1}}(y)\}$ está centralizado em I . Como $t \geq 1$, os Lemas 1.7 e 2.2 implicam que o pullback de V de \tilde{U} ao longo de $\{y, \dots, \phi^{k_t}(y)\}$ está centralizado em J_0 . Pelo Lema 1.1 resulta que $\phi_{|J_0(x)}^{-1}(V)$ está centralizado em $D(x)$ e como $\mathcal{N}_x(D(x)) \subset \phi_{|J_0(x)}^{-1}(V)$ escolhemos $N := D(x)$ e o lema segue-se.

■

Prova do Teorema 1. Dado um ponto recorrente x e um intervalo bom I contendo x provaremos que existe um intervalo bom $W \subset I$ contendo x tal que $\mathcal{N}_x(W)$ está centralizado em W .

Se $k_1 = k_1(x)$ é o primeiro tempo de salto de x definimos $V = \phi_{|J_0(x)}^{-k_1}(I)$. Então o Teorema 1 é uma consequência imediata do Lema 2.5 aplicado ao intervalo V .

■

Ergodicidade

Usualmente estuda-se a ergodicidade de uma aplicação em relação a uma medida invariante. Aqui estaremos interessados na ergodicidade em relação à medida de Lebesgue independentemente desta ser invariante ou não. Esta propriedade acarreta algumas consequências interessantes tais como a unicidade de medidas invariantes absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue (caso estas existam). Neste caso estas medidas são ergódicas e se tornam um importante instrumento para o estudo de propriedades estatísticas da aplicação em questão. A ergodicidade em relação à medida de Lebesgue também implica que no caso em que existam atratores periódicos a união das suas bacias de atração tem medida de Lebesgue total.

Teorema 2. *Seja $f \in \mathfrak{F}_1$ uma aplicação que não possui atrator periódico. Então f é ergódica com respeito à medida de Lebesgue.*

Este teorema é essencialmente uma consequência da existência de limites a priori reais, Teorema 1. A seguir mostraremos algumas propriedades topológicas relacionadas às órbitas negativas de um intervalo bom. Estas propriedades em conjunto com a existência de limites a priori reais além de servir para provar o Teorema 2 também servirão para obtermos um certo controle da distorção dos ramos de uma aplicação de primeiro retorno.

3.1 Órbitas Negativas de Intervalos Bons

Para o que se segue fixamos uma aplicação $f \in \mathfrak{F}_1$.

Lema 3.1. *Sejam V um intervalo bom e $T_1, T_2 \subset [0, 1]$ dois intervalos distintos tais que $f_{|T_i}^{n_i}$ ($i = 1, 2$) são monótonas, $f^{n_i}(T_i) = V$ e $n_1 \leq n_2$. Então se $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ tem-se que $T_2 \subset T_1$ e $n_1 < n_2$.*

Demonstração:

Suponhamos que $\partial T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$. Com isso temos que $\partial V \cap f^{n_1}(T_2) \neq \emptyset$ e $n_1 < n_2$. Isto implica que $V \cap f^{n_2 - n_1}(\partial V) \neq \emptyset$ o que contradiz o fato de V ser um intervalo bom. ■

Para cada intervalo bom V consideramos o conjunto Θ_V dos pontos que visitam V , ou seja,

$$\Theta_V = \{x \in [0, 1] : f^k(x) \in V \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $x \in \Theta_V$ seja $k = k(x, V)$ o menor inteiro positivo para o qual $f^k(x) \in V$. Chamamos k de *tempo de primeira entrada* de x em V . O tempo de primeira entrada é constante sobre cada componente conexa de Θ_V . De fato, seja I o maior intervalo contendo x sobre o qual o tempo de primeira entrada é constante e igual a k . Dado $y \in \partial I$ existe $j \leq k$ tal que $f^j(y) \in \partial V$. Se $j < k$, como V é um intervalo bom resulta que $f^k(y) \notin V$ e portanto $f^k(y) \in \partial V$. Se $j = k$ também temos que $f^k(y) \in \partial V$. Em ambos os casos resulta que I é uma componente conexa de Θ_V como queremos. Observamos também que uma componente conexa I de Θ_V com tempo de primeira entrada k é aplicada por f^k monotonamente sobre V . No caso em que V contém o ponto crítico c e f não possui atratores periódicos resulta do Teorema de Mañé (veja [Mn85]) que Θ_V tem medida de Lebesgue total e o seu complementar denotado por Λ_V é um conjunto compacto e completamente invariante com medida de Lebesgue nula.

Seja $V_n = (c - 1/n, c + 1/n)$ para $n \geq 1$. Então se f não possui atratores periódicos, como acabamos de mencionar, temos que Θ_{V_n} tem medida de Lebesgue

total e portanto o conjunto Σ de todos os pontos cujos ω -limites contêm c é tal que $\Sigma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Theta_{V_n}$ e também tem medida de Lebesgue total.

Lema 3.2. *Seja I uma componente conexa de Θ_V cujo tempo de primeira entrada é k . Então os intervalos $I, f(I), \dots, f^k(I) = V$ são dois a dois disjuntos.*

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que $f^i(I) \cap f^j(I) \neq \emptyset$ para $0 \leq i < j \leq k$. Pelo Lema 3.1 temos que $f^i(I) \subset f^j(I)$. Mas disto resulta que $f^{k-j}(f^i(I)) \subset V$ e portanto $k + i - j < k$, o que é impossível uma vez que o tempo de primeira entrada de I é k .

■

Lema 3.3. *Sejam V um intervalo bom, $U \subset V$ um domínio de retorno e (H_i, I_i) ($i = 1, 2$) pares de intervalos tais que $f^{n_i}(H_i) = V$ e $f^{n_i}(I_i) = U$ para $n_1 \leq n_2$. Se $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ então $n_1 < n_2$ e H_2 está contido em uma das componentes conexas de $H_1 \setminus I_1$ ou em I_1 .*

Demonstração:

Pelo Lema 3.1 já sabemos que $n_1 < n_2$ e que $H_2 \subset H_1$. Suponhamos por absurdo que $H_2 \cap \partial I_1 \neq \emptyset$. Então $\partial U \cap f^{n_1}(H_2) \neq \emptyset$ e portanto $\text{orb}(\partial U) \cap V \subset \partial U$, o que é uma contradição.

■

Lema 3.4. *Sejam V um intervalo bom, $U \subset V$ um domínio de retorno e I uma componente conexa de Θ_U com tempo de primeira entrada k . Então valem as seguintes afirmações:*

1. *Existe um intervalo T que contém I para o qual $f|_T^k$ é monótona e $f^k(T) = V$.*
2. *Se $c \in U$ e V é uma ρ -vizinhança de U então a aplicação $f|_I^k$ é um difeomorfismo de distorção limitada por uma constante que depende apenas de ρ e de f . Além disto T é uma $\tilde{\rho}$ -vizinhança de I .*

Demonstração:

Seja T o maior intervalo contendo I tal que $f^k(T) = V$. Este intervalo T é na verdade o pullback de V ao longo de $I, \dots, f^k(I)$. A monotonicidade de $f^k|_T$ é consequência imediata do fato de que f é uma aplicação induzida por um recobrimento do círculo e portanto os seus ramos são monótonos. Isto prova a primeira parte do lema. Para provarmos a segunda parte lembramos que o Lema 3.2 implica que os intervalos $I, f(I), \dots, f^k(I) = U$ são dois a dois disjuntos. Portanto temos que nenhum dos intervalos $I, f(I), \dots, f^{k-1}(I)$ contém o ponto crítico c . Pelo Lema 3.3 concluímos que o mesmo ocorre para os intervalos $T, f(T), \dots, f^{k-1}(T)$ e então $f|_T^k$ é um difeomorfismo. Denotamos por L_i^\pm as componentes conexas de $f^i(T) \setminus f^i(I)$. Também pelo Lema 3.3 resulta que

$$\sum_{i=0}^{k-1} |L_i^+| |L_i^-| \leq 1.$$

Como observamos antes, nestas condições, as afirmativas do Lema 1.1 ainda são válidas pois o par de cadeias $\{f^i(T)\}_{i=0}^k$ e $\{f^i(I)\}_{i=0}^k$ possuem a propriedade da disjunção central. Isto implica o que queremos. ■

Seja V um intervalo bom tal que $U = \mathcal{N}_c(V)$ está centralizado em V . Se $W \subset U$ é um domínio de retorno a U com tempo de retorno k então $f(W)$ está contido em uma componente conexa I de Θ_U e pelo Lema 3.4 concluímos que o ramo de primeiro retorno $\phi|_W$ pode ser decomposto como uma composição do tipo $L \circ f|_W$ onde L é um difeomorfismo com distorção limitada. Em particular temos o seguinte lema.

Lema 3.5. *Seja V um intervalo bom tal que $U = \mathcal{N}_c(V)$ está centralizado em V e ϕ a aplicação de primeiro retorno de U . Então verificam-se as seguintes propriedades:*

1. *Para todo $W \subset U$, um domínio de retorno a U , verifica-se que $\phi|_W = L \circ f|_W$, onde L é um difeomorfismo de distorção limitada.*
2. *Existe constante $C < \infty$ tal que para todo $x \in \mathcal{N}_c(U)$ verifica-se que*

$$C^{-1}A|x - c|^l \leq |\phi(x) - \phi(c)| \leq CA|x - c|^l,$$

onde l é a ordem do ponto de inflexão c e A é a segunda derivada $\phi''(c)$.

3.2 Conjuntos Invariantes e Ergodicidade

Se $X \subset [0, 1]$ é um conjunto mensurável definimos a *densidade em um intervalo* J por

$$\text{dens}(X, J) = \frac{|X \cap J|}{|J|}.$$

Sabemos que para quase todo (em relação à medida de Lebesgue) $x \in X$, se $J_n \ni x$ é uma sequência de intervalos tais que $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x\}$ então o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X \cap J_n|}{|J_n|}$$

existe e independe da sequência J_n escolhida. Chamamos este limite de *densidade de X em x* e denotamo-lo por $\text{dens}(X, x)$. Se $\text{dens}(X, x) = 1$ então o ponto x é chamado de *ponto de densidade* de X . Sabemos ainda que quase todo ponto (em relação à medida de Lebesgue) de X é um ponto de densidade de X .

Lema 3.6. *Se $f \in \mathfrak{F}_1$ não possui atratores periódicos e $X \subset [0, 1]$ é um conjunto invariante de medida de Lebesgue positiva então $\text{dens}(X, c) = 1$.*

Demonstração:

Pelo Teorema 1 existe uma sequência encaixante de intervalos bons V_n tal que $c \in V_n$, o domínio de retorno a V_n que contém c (o qual denotamos por U_n) está centralizado em V_n e $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{c\}$. Relembramos que Σ denota o conjunto dos pontos y cujo ω -limite contém o ponto crítico c . Então se x é um ponto de densidade de $X \cap \Sigma$ para todo $n \geq 1$ existe o menor inteiro positivo k_n tal que $f^{k_n}(x) \in U_n$. Sejam $I_n \subset T_n$ intervalos que contêm x e tais que f^{k_n} aplica monótona e sobrejetoramente sobre U_n e V_n , respectivamente. Pelo Lema 3.4 sabemos que $f|_{I_n}^{k_n}$ tem distorção limitada por uma constante K independente de n e portanto resulta que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X^c \cap U_n|}{|U_n|} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f^{k_n}(X^c \cap I_n)|}{|f^{k_n}(I_n)|} \\ &\leq K \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X^c \cap I_n|}{|I_n|} = 0. \end{aligned}$$

Para a última igualdade usamos o Lema 1.2 que nos garante que se $|U_n|$ tende a zero quando n tende a infinito então o mesmo ocorre para $|I_n|$. Portanto o lema segue-se. ■

Demonstração do Teorema 2: Suponhamos que f não é ergódica em relação à medida de Lebesgue. Então existem conjuntos X_1 e X_2 completamente invariantes com medida de Lebesgue positiva, tais que $|X_1 \cup X_2| = 1$ e $|X_1 \cap X_2| = 0$. Pelo Lema 3.6 concluímos que $\text{dens}(X_i, c) = 1$ para $i = 1, 2$. Portanto temos que $|X_1 \cap X_2| > 0$ o que é uma contradição com o que já tínhamos. ■

Classificação dos Atratores Métricos

No caso em que $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma aplicação induzida por um recobrimento do círculo de classe C^2 , sem pontos críticos e sem atratores periódicos resulta pelo Teorema de Mañé em [Mn85] que todo conjunto de interior vazio, compacto e invariante tem medida de Lebesgue nula. Neste capítulo examinaremos qual é o efeito da presença de pontos críticos sobre este fato. Além disto descreveremos topologicamente quais são os possíveis atratores métricos para uma aplicação $f \in \mathfrak{F}_{1s}$.

4.1 Conjuntos Compactos Invariantes

Teorema 3. *Se Λ é um conjunto de interior vazio, compacto e invariante por $f \in \mathfrak{F}_1$ então Λ possui medida de Lebesgue nula.*

Como observamos no capítulo anterior o conjunto dos pontos cujo ω -limite contém o ponto crítico, denotado por Σ , tem medida de Lebesgue total.

Lema 4.1. *Se $\omega(c)$ é não minimal então todo conjunto de interior vazio, compacto e invariante X tem medida de Lebesgue nula.*

Demonstração:

Como $\omega(c)$ é não minimal, existe um ponto $x \in \omega(c)$ cuja órbita positiva permanece

sempre fora de um intervalo U contendo c . Afirmamos que existe uma sequência de intervalos I_n encaixantes e convergindo para x . Existem também intervalos $J_n \subset I_n$ com $x \in J_n$ tais que $I_n \setminus J_n$ não contém pontos de X e J_n está centralizado em I_n .

De fato, seja H_n o intervalo máximo contendo x para o qual $f^n|_{H_n}$ é um difeomorfismo. Como $c \notin \omega(x)$ então $|f^n(H_n)| \geq \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Portanto podemos tomar subintervalos $I_n \subset H_n$ tais que $f^{n(i)}(I_{n(i)})$ converge para algum intervalo V para alguma subsequência $n(i)$ e que os pontos do bordo de V não estão contidos em X . Seja U um intervalo fechado contido no interior de V tal que $V \cap X \subset U$ e seja $J_{n(i)} \subset I_{n(i)}$ tal que $f^{n(i)}(J_{n(i)}) = U$. Pelo Lema 3.3 resulta que as cadeias $\{f^k(I_{n(i)})\}_{k=0}^{n(i)}$ e $\{f^k(J_{n(i)})\}_{k=0}^{n(i)}$ tem a propriedade de disjunção central e portanto podemos usar o Lema 1.1. Concluimos então que existe uma constante universal $\delta > 0$ (que depende apenas de U e V) tal que $I_{n(i)}$ é uma δ -vizinhança de $J_{n(i)}$, provando assim a afirmação.

Agora seja $t(n)$ o menor inteiro tal que $f^{t(n)}(f(c)) \in I_n$. Vamos tomar o pullback de I_n pela aplicação $f^{t(n)}$. Existe um intervalo $T_n \ni f(c)$ para o qual $f^{t(n)}|_{T_n}$ é um difeomorfismo e $f^{t(n)}(T_n) = I_n$. Seja R_n o intervalo tal que $f^{t(n)}(R_n) = J_n$. Como antes, pelo Lema 1.1, temos que R_n está centralizado em T_n . Como X é invariante temos que $T_n \cap X \subset R_n$ e por conseguinte $f^{t(n)}(f(c)) \in J_n$. Em particular $f(c) \in R_n$. Como o ponto crítico é de ordem finita então existem intervalos $V_n \supset U_n \ni c$ tais que U_n está centralizado em V_n e $V_n \cap X \subset U_n$. Agora podemos mostrar que X tem medida nula. Lembrando que Σ tem medida total consideramos um ponto $y \in X \cap \Sigma$. Então existe o menor inteiro positivo k tal que $f^k(y) \in V_n$. Pelo Lema 3.2 existe um intervalo $G_n \ni y$ tal que f^k aplica G_n difeomorficamente sobre V_n . Seja $S_n \subset G_n$ o intervalo tal que $f^k(S_n) = U_n$. Novamente pelo Lema 1.1 temos que S_n está centralizado em G_n . Como X é invariante temos que $G_n \cap X \subset S_n$ e $y \in S_n$. Pelo Princípio da Contração, Lema 1.2 temos que $|G_n|$ tende a zero quando n tende a infinito. Portanto y não é ponto de densidade de $X \cap \Sigma$. Como Σ tem medida total quase nenhum ponto de X é ponto de densidade. Logo X tem medida nula.

■

Demonstração do Teorema 3: Se Λ não contém o ponto crítico já sabemos pelo Teorema de Mañé em [Mn85] que Λ tem medida de Lebesgue nula. Basta então analisarmos o caso em que $\Lambda = \omega(c)$.

Suponha que o ponto crítico não é recorrente. Então existe um intervalo bom $V \ni c$ com $\omega(c) \cap V = \emptyset$. Portanto $\omega(c) \subset \Lambda_V$ e já sabemos que $|\Lambda_V| = 0$, logo $|\omega(c)| = 0$. No caso em que $c \in \omega(c)$ e $\omega(c)$ é não minimal, o que queremos segue do Lema 4.1. Vejamos o caso em que $c \in \omega(c)$ e $\omega(c)$ é minimal.

Pelo Teorema 1 existem uma sequência encaixante de intervalos bons V_n tal que $c \in V_n$, o domínio de retorno a V_n que contém c (o qual denotamos por U_n) está centralizado em V_n e $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{c\}$.

Como $\Lambda = \omega(c) \ni c$ é minimal resulta que $\Lambda \subset \Theta_{U_n}$ para todo $n \geq 1$. Como as componentes conexas de Θ_{U_n} são intervalos abertos concluímos que Λ está contido em quantidade finita de componentes conexas de Θ_{U_n} . Assim podemos definir uma cobertura de Λ com intervalos da órbita negativa de U_n da seguinte forma: dado $x \in \Lambda$ seja $k_n = k(x, U_n)$ o menor inteiro tal que $f^{k_n}(x) \in U_n$. Sejam $I_n(x)$, $H_n(x)$ os intervalos tais que $f^{k_n}(I_n(x)) = U_n$ e $f^{k_n}(H_n(x)) = V_n$. A coleção de todas as componentes conexas $I_n(x)$ de Θ_{U_n} forma uma cobertura de Λ por intervalos abertos. Então existe uma subcobertura finita, digamos $\mathcal{C}_n = \{I_n(x_1), \dots, I_n(x_{s_n})\}$. Pelo Lema 3.3 podemos afirmar que para algum $1 \leq j_n \leq s_n$, o intervalo $H_n = H_n(x_{j_n})$ não intercepta $\bigcup_{i \neq j} I_n(x_i)$ e isto implica que $\Lambda \cap (H_n \setminus I_n) = \emptyset$ (por simplicidade denotamos $I_n = I_n(x_{j_n})$). Além disto pelo Lema 3.2 temos que os intervalos $I_n, \dots, f^{k_n}(I_n)$ (por simplicidade denotamos aqui $k_n = k_n(x_{j_n})$) são dois a dois disjuntos. Pelo Lema 3.3 resulta que

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} |L_i^+| |L_i^-| \leq 1,$$

onde L_i^\pm são as componentes conexas de $f^i(H_n) \setminus f^i(I_n)$. Esta propriedade pode substituir no Lema 1.1 a hipótese sobre a limitação da multiplicidade de interseção para concluirmos que I_n está centralizado em H_n .

Seja $t_n \geq 1$ o menor inteiro positivo tal que $f^{t_n}(c) \in I_n$. Tomando o pullback de $I_n \subset H_n$ ao longo de $c, \dots, f^{t_n}(c)$ e repetindo o argumento acima e usando a hipótese de que a ordem do ponto crítico é finita obtemos um par de intervalos

$I'_n \subset H'_n$ tais que $c \in I'_n$, I'_n está centralizado em H'_n , $\bigcap_{n=1}^{\infty} I'_n = \{c\}$ e $\Lambda \cap H'_n \subset I'_n$. Isto implica que a densidade $\text{dens}(\Lambda, c) < 1$ e então, pelo Lema 3.6 resulta que Λ tem medida de Lebesgue nula como queremos. ■

4.2 Classificação dos Atratores Métricos

Teorema 4. *Se \mathcal{A} é um atrator métrico para $f \in \mathfrak{F}_1$ então vale uma das seguintes propriedades:*

1. \mathcal{A} é o intervalo $[0, 1]$.
2. \mathcal{A} é uma órbita periódica atratora.
3. \mathcal{A} é um conjunto de Cantor minimal que contém o ponto crítico.

Demonstração:

Se f possui atrator periódico resulta a união das bacias de atração destes tem medida de Lebesgue total e portanto eles são os atratores métricos. Suponhamos então que f não possui atratores periódicos. Neste caso o atrator topológico de f é o próprio intervalo $[0, 1]$, onde f é topologicamente mixing. Então afirmamos que ocorre uma das seguintes situações:

- i) $\omega(x) = [0, 1]$ para quase todo $x \in [0, 1]$.
- ii) $\omega(x) = \omega(c)$ para quase todo $x \in [0, 1]$.

Nesta primeira situação temos que o atrator métrico coincide com o atrator topológico. Na segunda situação temos o atrator topológico coincide com o atrator métrico se, e somente se, $\omega(c) = [0, 1]$. Então se $\omega(c) \neq [0, 1]$ temos que existe atrator selvagem.

Passamos agora à prova da afirmação. Consideramos uma base enumerável de intervalos abertos J_n de $[0, 1]$, ou seja, uma sequência J_n de intervalos abertos tais que $|J_n|$ tende a zero quando n tende a infinito e $[0, 1] \subset \bigcup_{n \geq N} J_n$ para todo $N \geq 1$. Para cada J_n definimos o seguintes conjunto compacto e invariante:

$$K_n = \{x \in [0, 1] : f^m(x) \notin \bar{J}_n \text{ para todo } m \geq 0\}.$$

Definimos também $K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ e observamos o seu complementar K_∞^c é tal que

$$K_\infty^c = \{x \in [0, 1] : \omega(x) = [0, 1]\}.$$

Os conjuntos K_∞ e K_∞^c são completamente invariantes e pela ergodicidade temos que K_∞ ou K_∞^c tem medida de Lebesgue nula. Se $|K_\infty| = 0$ temos que $\omega(x) = [0, 1]$ para quase todo x em relação à medida de Lebesgue e portanto a primeira situação se verifica.

Assumimos agora que K_∞ tem medida de Lebesgue total. Com isto resulta que $|K_n| > 0$ para algum $n \geq 1$. Consideramos a seguinte afirmação:

Afirmação: Para quase todo (em relação à medida de Lebesgue) $x \in K_n$ verifica-se que $\omega(x) = \omega(c)$ o que corresponde à segunda situação.

Como já observamos antes temos que para quase todo x verifica-se que $\omega(x) \supset \omega(c)$. Vamos provar então que para quase todo $x \in K_n$ verifica-se que $\omega(x) \subset \omega(c)$. Inicialmente consideramos um ponto de densidade de K_n o qual denotamos por y . Suponhamos que $\omega(y)$ não está contido em $\omega(c) \ni c$. Então existe uma sequência $k_i \rightarrow \infty$ e $\delta > 0$ tais que $\text{dist}(f^{k_i}(y), \overline{\text{orb}_+(c)}) \geq \delta$.

Seja H_i o intervalo máximo contendo y tal que $f^{k_i}|_{H_i}$ é um difeomorfismo. Como todos os valores críticos de f^{k_i} estão contidos em $\overline{\text{orb}_+(c)}$ temos que $f^{k_i}(H_i)$ contém uma δ -vizinhança de $f^{k_i}(y)$, ou seja, cada componente conexa de $f^{k_i}(H_i) \setminus \{f^{k_i}(y)\}$ tem comprimento pelo menos igual a δ . Sejam \tilde{H}_i intervalos contendo y tais que $f^{k_i}(\tilde{H}_i)$ contém uma $\delta/2$ -vizinhança de $f^{k_i}(y)$. Como estamos assumindo aqui que a derivada de Schwarz de f é negativa, como K_n é invariante e y é um de seus pontos de densidade segue pelo Lema 1.1 que existe $K < \infty$ tal que vale o seguinte:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|f^{k_i}(\tilde{H}_i) \setminus K_n|}{|f^{k_i}(\tilde{H}_i)|} &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|f^{k_i}(\tilde{H}_i \setminus K_n)|}{|f^{k_i}(\tilde{H}_i)|} \\ &\leq K \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{H}_i \setminus K_n|}{|\tilde{H}_i|} = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Como os intervalos $f^{k_i}(\tilde{H}_i)$ tem comprimento maior ou igual δ , podemos tomar

um intervalo H de comprimento $\delta/2$ tal que $f^{k_i}(\tilde{H}_i) \supset H$ para infinitos valores de i . O Lema 4.1 implica que $|H \setminus K_n| = 0$ e como K_n é um conjunto fechado temos que $H \subset K_n$. Disto resulta que $K_n \supset \bigcup_{m=0}^{\infty} f^m(H) = [0, 1]$, o que não é o caso. Com isto provamos que $\omega(y) \subset \omega(c)$, onde y é um ponto de densidade de K_n . Consequentemente temos que para quase todo ponto de K_∞ (e também de $[0, 1]$) verifica-se que $\omega(x) \subset \omega(c)$ e portanto a afirmação está provada.

Agora relembremos que pelo Lema 4.1, se $\omega(c)$ não é minimal, resulta que a sua medida de Lebesgue é nula. Assim sendo K_∞ tem medida de Lebesgue nula e K_∞^c tem medida de Lebesgue total. O teorema segue-se.

■

Propriedades Markovianas

A questão sobre a existência ou não de atratores selvagens é uma das mais relevantes colocadas ultimamente no contexto de dinâmica unidimensional. O teorema a seguir nos fornece uma propriedade equivalente a não existência de tais atratores.

Teorema 5. *Uma aplicação $f \in \mathfrak{F}_{1,s}$ induz uma aplicação de Markov se, e somente se não possui atrator selvagem.*

5.1 Critério para a Existência de Propriedades Markovianas

Seja $f \in \mathfrak{F}_{1,s}$ uma aplicação que não possui atrator periódico a qual está fixada. Consideramos novamente o conjunto $\Lambda_V = [0, 1] \setminus \Theta_V$, dos pontos que nunca visitam V , onde V é um intervalo bom que contém o ponto crítico c . Vimos que Λ_V tem medida de Lebesgue nula, ou seja, Θ_V tem medida de Lebesgue total.

Lema 5.1. *Se $y \in \Lambda_V$ é tal que $\text{orb}^+(y) \cap \bar{V} = \emptyset$ então Λ_V se acumula em ambos os lados de y .*

Demonstração:

Seja $y \in \Lambda_V$ e suponhamos que y não é acumulado de ambos os lados por Λ_V . Com isto temos que y é um ponto do bordo de uma componente conexa de Θ_V . De acordo com o Lema 3.2, a órbita positiva de y passa pelo bordo de V e isto conclui a prova.

■

Considere um ponto $x \in [0, 1]$, $n \geq 0$, e seja $T_n(x)$ o intervalo máximo que contém x e tal que $f^n|_{T_n(x)}$ é um difeomorfismo (não possui pontos críticos). Sejam ainda $L_n(x)$ e $R_n(x)$ as componentes conexas de $T_n(x) - \{x\}$. Definimos a função $r_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$r_n(x) = \min\{|f^n(L_n(x))|, |f^n(R_n(x))|\}.$$

Definimos também

$$r(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(x).$$

Proposição 5.1. *Se $f \in \mathfrak{F}_{1s}$ é tal que $\omega(c)$ não é um conjunto minimal então existe $\delta > 0$ tal que $r(x) > \delta$ para quase todo (em relação à medida de Lebesgue) $x \in [0, 1]$.*

Para demonstrarmos a proposição acima precisaremos de alguns fatos preliminares.

Lema 5.2. *Se $f \in \mathfrak{F}_{1s}$ é tal que $\omega(c)$ não é um conjunto minimal então existem um intervalo bom $V \ni c$ e uma seqüência de intervalos K_n , $n \geq 1$ tais que:*

1. $\partial K_n \subset \Lambda_V$ e $K_n \cap V = \emptyset$;
2. $K_n \cap \omega(c) \neq \emptyset$;
3. $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{q\}$, onde $q \in \omega(c)$ é tal que $c \notin \omega(q)$.

Demonstração:

Como $\omega(c)$ não é minimal existe um ponto $q \in \omega(c)$ tal que $c \notin \omega(q)$. Em seguida escolhemos um intervalo bom $V \ni c$ tal que $orb(q) \cap \bar{V} = \emptyset$. Então $q \in \Lambda_V$ e pelo Lema 5.1 q é acumulado em ambos os lados por Λ_V . Portanto podemos tomar uma seqüência de intervalos $K_n \ni q$ como o lema afirma.

■

Lema 5.3. *Sejam $f \in \mathfrak{F}_1$ tal que $\omega(c)$ não é um conjunto minimal e V é um intervalo bom tal que $c \in V$ e K_n um dos intervalos dada pelo Lema 5.2. Então existem intervalos dois a dois disjuntos $I_n^i \subset K_n$ e inteiros $t_i(n)$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, tais que:*

1. $f_{I_n^i}^{t_i(n)}$ é um difeomorfismo com distorção limitada de I_n^i sobre V .
2. Se $i < j$ temos que I_n^i está à esquerda de I_n^j e $\lim_{i \rightarrow +\infty} I_n^i = p_n$, $\lim_{i \rightarrow -\infty} I_n^i = q_n$, onde p_n, q_n são tais que $K_n = (p_n, q_n)$.
3. Cada componente conexa de $K_n \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} I_n^i$ adjacente a I_n^j tem tamanho comparável a $|I_n^j|$.

Demonstração:

Sejam p_n, q_n tais que $K_n = (p_n, q_n)$. Seja $t(n)$ o menor inteiro positivo tal que $f^{t(n)}(K_n) \cap V \neq \emptyset$. Este inteiro existe pelo fato de f não possuir órbita periódica atratora e nem intervalo errante. Da minimalidade de $t(n)$ e como p_n e q_n não entram em V resulta que $f^{t(n)}(K_n) \supset V$ e $f_{|K_n}^{t(n)}$ é um difeomorfismo. Portanto existe um intervalo I_n^0 no interior de K_n tal que $f^{t(n)}(I_n^0) = V$. Observamos que $f_{|K_n}^{t(n)}$ é um difeomorfismo com distorção limitada. De fato, seja $M_n \supset K_n$ o maior intervalo tal que $f_{|M_n}^{t(n)}$ é um difeomorfismo. Se M_n^\pm são as componentes conexas de $M_n \setminus K_n$, existem $0 < r^- \leq r^+ < t(n)$ tais que um dos extremos de $f^{r^\pm}(M^\pm)$ é o ponto crítico e o outro extremo é um ponto fora de V . Então segue do Lema 1.2 que $|f^{t(n)}(M^\pm)| \geq \tilde{\theta}$, para alguma constante $\tilde{\theta} > 0$. Como a derivada de Schwarz de f é negativa, resulta pelo Lema 1.1 que $f_{|K_n}^{t(n)}$ é um difeomorfismo com distorção limitada. Se $H_n^{\pm 1}$ são as componentes conexas de $K_n \setminus I_n^0$ temos que $|H_n^{\pm 1}|$ e $|I_n^0|$ são comparáveis.

Seja $t_{\pm 1}(n)$ o menor inteiro tal que $f^{t_{\pm 1}(n)}(H_n^{\pm 1}) \cap V \neq \emptyset$. Pela escolha de $t_{\pm 1}(n)$ temos que $t_{\pm 1}(n) > t(n)$ e $V \cap f^i(H_n^{\pm 1}) = \emptyset$ para $i = 0, 1, \dots, t(n)$. Além disto $f^{t(n)}$ aplica um extremo de $H_n^{\pm 1}$ no bordo de V e o outro extremo está em Λ_V . Como V é um intervalo bom temos que $f^{t_{\pm 1}(n)}(H_n^{\pm 1}) \supset V$. Portanto obtemos dois intervalos $I_n^{\pm 1}$ em lados opostos de I_n^0 tais que $f^{t_{\pm 1}(n)}(I_n^{\pm 1}) = V$. Como antes observamos que $f_{|H_n^{\pm 1}}^{t_{\pm 1}(n)}$ é um difeomorfismo com distorção limitada. Se $H_n^{\pm 2}$ são as componentes conexas de $H_n^{\pm 1} \setminus I_n^{\pm 1}$ temos que $|H_n^{\pm 2}|$ e $|I_n^{\pm 1}|$ são comparáveis.

Continuando este processo obtemos intervalos dois a dois disjuntos $I_n^i \subset K_n$, com $i \in \mathbb{Z}$, que possuem todas as propriedades requeridas. ■

Demonstração da Proposição 5.1: Consideramos as componentes conexas de $K_n \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} I_n^i$ e chamamo-las de *gaps*. Seja $s(n) > 0$ o menor inteiro tal que $f^{s(n)}(c) \in K_n$. Pela minimalidade de $s(n)$ existe um intervalo $\tilde{K}_n \ni f(c)$ tal que $f^{s(n)-1}$ aplica \tilde{K}_n difeomorficamente sobre K_n . Seja \tilde{I}_n^i a pré-imagem de I_n^i por este difeomorfismo.

Podemos afirmar que o tamanho de cada intervalo \tilde{I}_n^i é comparável ao tamanho das componentes conexas de $\tilde{K}_n \setminus \bigcup \tilde{I}_n^i$ vizinhas e vice-versa. De fato, pelos Lemas 1.1 e 5.3, considerando dois intervalos vizinhos obtemos que o pullback do gap entre eles tem tamanho de mesma ordem; analogamente, considerando dois gaps vizinhos obtemos que o pullback de um intervalo I_n^i entre eles tem tamanho de mesma ordem. Observamos que $f^{t_i(n)+s(n)-1}$ aplica \tilde{I}_n^i difeomorficamente sobre V .

Agora seja $\hat{K}_n = f^{-1}(\tilde{K}_n)$ e $\hat{I}_n^i = f^{-1}(\tilde{I}_n^i)$. Como f tem ponto crítico de ordem $l < \infty$, os tamanhos dos intervalos \hat{I}_n^i e das componentes conexas de $\hat{K}_n \setminus (\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \hat{I}_n^i)$ vizinhas são novamente comparáveis. Então se desconsiderarmos o intervalo \hat{I}_n^i que contém o ponto crítico c juntamente com as duas componentes da coleção $\hat{K}_n \setminus (\bigcup_i \hat{I}_n^i)$ vizinhas, temos que cada intervalo \hat{I}_n^i é aplicado por $f^{t_i(n)+s(n)}$ difeomorficamente sobre V e com distorção limitada. Seja A a coleção de todos os intervalos \hat{I}_n^i que não contém o ponto crítico.

Tomemos x tal que $\omega(x) \ni c$ e seja $k(n) > 0$ o menor inteiro tal que $f^{k(n)}(x) \in \hat{K}_n$. Então existe um intervalo $K_n(x) \ni x$ tal que $f^{k(n)}$ aplica $K_n(x)$ difeomorficamente sobre \hat{K}_n . Seja $J_n^i = f^{-k(n)}(\hat{I}_n^i) \cap K_n(x)$ para $\hat{I}_n^i \in A$. Pelo Lema 1.1, os intervalos J_n^i e os seus gaps vizinhos têm tamanhos comparáveis e $f^{t_i(n)+s(n)+k(n)}$ aplica J_n^i com distorção limitada sobre V , para i tal que $\hat{I}_n^i \subset A$.

Dividindo o intervalo J_n^i em três partes iguais, seja C_n^i o intervalo do meio. Como $f^{t_i(n)+s(n)+k(n)}$ aplica J_n^i com distorção limitada sobre V (para $i \in A$) então existe uma constante universal $\delta > 0$ tal que

$$r_{i_i(n)+s(n)+k(n)}(x) \geq \delta \text{ para } x \in C_n^i.$$

Além disto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{|\cup J_n^i|}{|K_n(x)|} \geq \epsilon \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Então se considerarmos o conjunto

$$\Omega = \{y \in [0, 1] : r(y) \geq \delta\}$$

podemos afirmar que a densidade de Ω em x é pelo menos $\epsilon/3$. Como isto é verdade para cada $x \in \Sigma$ (relembramos que Σ é o conjunto dos pontos x tais que $\omega(x) \ni c$ e que a sua medida de Lebesgue é total) então, pela ergodicidade de f , o conjunto

$$\tilde{\Omega} = \Sigma \cap \{y \in [0, 1] : r(y) \geq \delta\}$$

tem medida de Lebesgue total e por mais razão ainda o conjunto Ω tem medida de Lebesgue total. ■

Consideramos os conjuntos

$$\Gamma(\varrho) = \{y \in [0, 1] : r(y) \geq \varrho\}.$$

e

$$\Delta = \{\varrho \geq 0 : |\Gamma(\varrho)| = 1\}.$$

Definimos então $r = \inf\{\varrho : \varrho \in \Delta\}$. Pela Proposição 5.1 resulta que $r > 0$. Observamos que para $n \geq 1$ os conjuntos

$$\Gamma(r - 1/n, r + 1/n) = \{y \in [0, 1] : r - 1/n \leq r(y) \leq r + 1/n\}$$

têm medida de Lebesgue total. Portanto $\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma(r - 1/n, r + 1/n)$ tem medida de Lebesgue total provando que a função $r(x) = r$ para quase todo x . Como veremos a seguir a constante r constitui-se em um importante critério para decidirmos se uma aplicação f induz ou não uma aplicação de Markov.

Proposição 5.2. *Uma aplicação $f \in \mathfrak{F}_1$ induz uma aplicação de Markov se, e somente se $r > 0$.*

Demonstração:

Se f induz uma aplicação de Markov sabemos que para quase todo x existem intervalos $H_j = H_j(x) \ni x$ tais que $\bigcap_{j=1}^{\infty} H_j = \{x\}$ e $f|_{H_j}^{n_j}$ (onde n_j tende a infinito quando j tende a infinito) é um difeomorfismo com distorção limitada sobre um intervalo I o qual contem o ponto crítico. Então dividimos I em três intervalos de igual comprimento e escolhemos J como sendo o intervalo central e definimos $J_j = H_j \cap f^{-n_j}(J)$. Para todo $y \in J_j$ temos que $r_{n_j}(y) \geq |I|/3 > 0$. Como podemos repetir este argumento para x em um conjunto de medida total e tomar j cada vez maior concluímos o afirmado.

Vejamos agora que $r > 0$ implica que f induz uma aplicação de Markov. Definimos o conjunto $\mathcal{G} = \Sigma \cap \Gamma$ o qual tem medida de Lebesgue total. Pelo Teorema 1 existe intervalo bom V tal que $c \in V$, $|V| < r/2$ e $U = \mathcal{N}_c(V)$ está centralizado em V . Consideramos um ponto $x \in \Omega$ e escolhemos n tal que $r_n(x) \geq r/2$. Seja $T_n(x) \ni x$ o maior intervalo para o qual $f|_{T_n(x)}^n$ é um difeomorfismo e consideramos os seguintes casos:

Caso 1: $f^n(x) \in U$.

Neste caso $f^n(T_n(x)) \supset V$ pois $|f^n(T_n(x))| \geq r$. Então se $H_n(x) \subset T_n(x)$ é tal que $f^n(H_n(x)) = U$, pelo Lema 3.4 temos que $f|_{H_n(x)}^n$ tem distorção limitada.

Caso 2: $f^n(x) \notin U$.

Seja $m > n$ o menor inteiro tal que $f^m(x) \in U$ e seja T_{m-n} o maior intervalo que contém $f^n(x)$ para o qual $f|_{T_{m-n}}^{m-n}$ é um difeomorfismo. Temos que $f^{m-n}(T_{m-n}) \supset V$. Considerando as componentes conexas $L_n(x)$ e $R_n(x)$ de $f^n(T_n(x)) \setminus f^n(x)$ como definidas anteriormente temos o seguinte: se $f^n(R_n(x))$ contém uma componente conexa de $T_{m-n} \setminus \{f^n(x)\}$ então pelo fato de $f^{m-n}(T_{m-n})$ conter V temos que $f^m(R_n(x))$ contém um ponto do bordo de V . Se $f^n(R_n(x))$ está contido em uma componente conexa de $T_{m-n} \setminus \{f^n(x)\}$. Com isso temos que $f|_{R_n(x)}^m$ é um difeomorfismo e portanto $R_n(x) = R_m(x)$. Com isto $|f^m(R_m(x))| \geq r/2$. Como $f^m(x) \in U$ e como V é menor que a imagem de $f^m(T_m(x))$ temos que

$f^m(R_m(x))$ contém um ponto do bordo de V . O mesmo ocorre para $L_m(x)$. Logo $f^m(T_m(x)) \supset V$ e obtemos o intervalo $H_n(x)$.

Desta forma obtemos todos os ingredientes que comprovam o que queremos. ■

5.2 Propriedades Markovianas e Atratores Selvagens

Demonstração do Teorema 5: Assumimos que f não possui atrator selvagem e nem atrator periódico. Então $\omega(x) = [0, 1]$ para quase todo $x \in [0, 1]$. Assim sendo o atrator métrico de f é o intervalo $[0, 1]$. Vamos analisar dois casos:

Caso 1: $\omega(c)$ é um conjunto minimal.

Como $\omega(c)$ não é uma órbita periódica temos que $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor o qual não é o atrator métrico de f . Como já observamos $\omega(x) = [0, 1]$ para Lebesgue quase todo x . Portanto para cada $y \in [0, 1] \setminus \omega(c)$ existe uma sequência $k(n) \rightarrow \infty$ com $f^{k(n)}(x) \rightarrow y$. Como todos os valores críticos de $f^{k(n)}$ pertencem a $\omega(c)$ concluímos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(x) > 0$ para quase todo x .

Caso 2: $\omega(c)$ não é um conjunto minimal.

Neste caso, pelas Proposições 5.1 e 5.2, f induz uma aplicação Markov.

Assumimos agora que f induz uma aplicação de Markov. Neste caso existe uma aplicação ψ definida em um conjunto aberto de $[0, 1]$ cuja medida de Lebesgue é total. Em cada componente conexa deste conjunto ψ coincide com um iterado fixo de f o qual é um difeomorfismo com distorção limitada, derivada uniformemente maior do que 1 e cuja imagem é um intervalo J . Assim sendo ψ possui uma medida invariante ergódica e absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

Pelo Teorema 2 resulta que o atrator métrico de f é o intervalo $[0, 1]$. Isto conclui a prova do teorema.

■

A Aplicação de Fibonacci

Seja \mathfrak{F}_1^2 o conjunto das aplicações $f \in \mathfrak{F}$ de grau dois que possuem um único ponto crítico o qual é um ponto de inflexão que denotaremos por c . A Figura 6.1 mostra um esboço do gráfico de uma tal aplicação.

Neste capítulo estudaremos as aplicações $f \in \mathfrak{F}_1^2$ que exibem um tipo combinatorio específico. Seja $\{I_n\}_{i=0}^\infty$ a sequência definida por $I_0 = [0, 1]$ e $I_{n+1} = \mathcal{N}_c(I_n)$. Dizemos que f é uma *aplicação de Fibonacci* se a aplicação de primeiro retorno de I_n denotada por ϕ_n é tal que $\phi_n|_{I_{n+1}} = f|_{I_{n+1}}^{s_{n+1}}$, onde $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ é a sequência dos números de Fibonacci. Relembramos que os números de Fibonacci são definidos tomando $s_0 = s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$, para $n \geq 1$. Quaisquer duas aplicações em \mathfrak{F}_1^2 que não possuam atratores periódicos (como elas também não possuem intervalos errantes) são topologicamente conjugadas. Porém, devido a grande importância do ponto de inflexão estaremos interessados apenas em conjugações topológicas que preservem este tipo de ponto. No que se segue estabeleceremos algumas propriedades das aplicações de Fibonacci.

Lema 6.1. *Sejam $f \in \mathfrak{F}_1^2$ uma aplicação de Fibonacci, a sequência $\{I_n\}_{n=0}^\infty$ definida acima e ϕ_n a aplicação de primeiro retorno de I_n . Então, para $n \geq 1$, verificam-se as seguintes propriedades:*

1. *Além do domínio de retorno $I_{n+1} \subset I_n$ existe domínio de retorno $M_{n+1} \subset I_n$ tal que $\phi_n|_{M_{n+1}} = \phi_{n-1}|_{M_{n+1}}$.*
2. *Os domínios I_n e M_n alternam de lado à medida que n varia e $\phi_{n+1}|_{I_{n+2}} = \phi_{n-1} \circ \phi_n|_{I_{n+2}}$.*

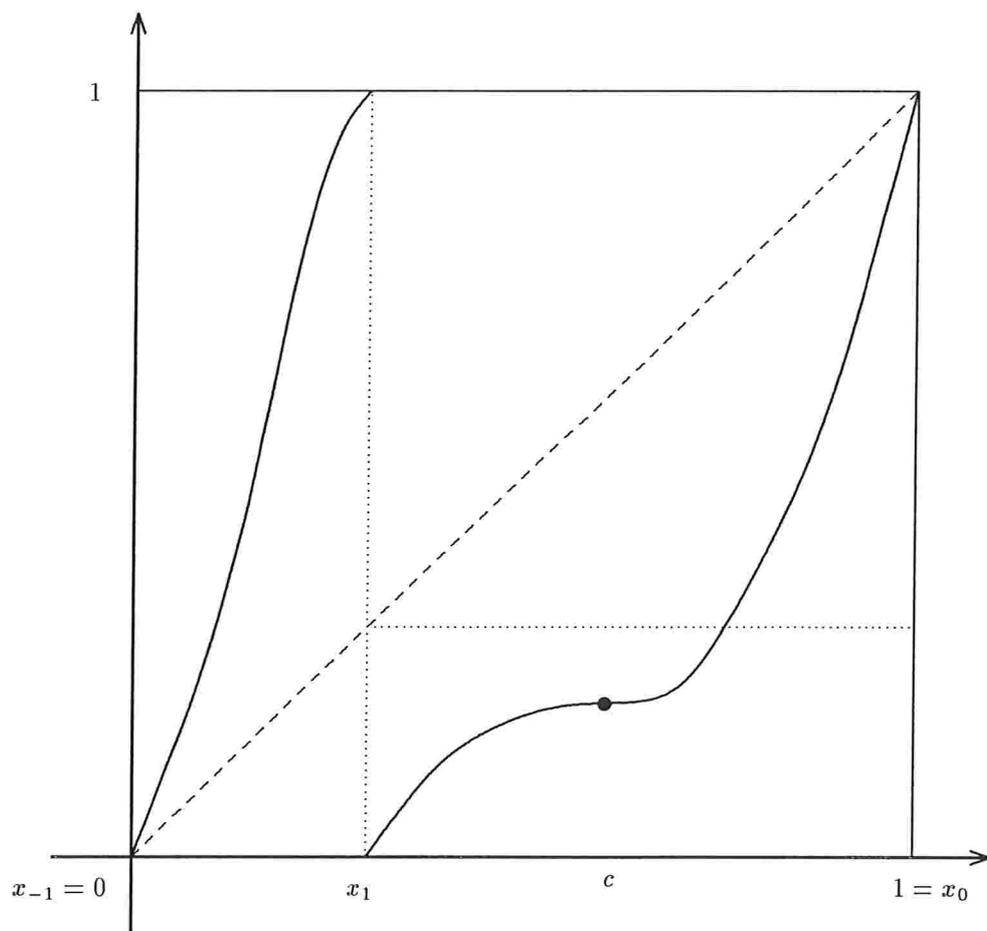


Figura 6.1: Uma aplicação $f \in \tilde{\mathfrak{S}}_1^2$

3. A órbita positiva do ponto de inflexão c denotada por $orb^+(c)$ é tal que $orb^+(c) \subset (\bigcup_{i=0}^{s_n-1} f^i(I_{n+1})) \cup (\bigcup_{j=0}^{s_n-1-1} f^j(M_{n+1}))$.
4. O conjunto $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor minimal.

Demonstração:

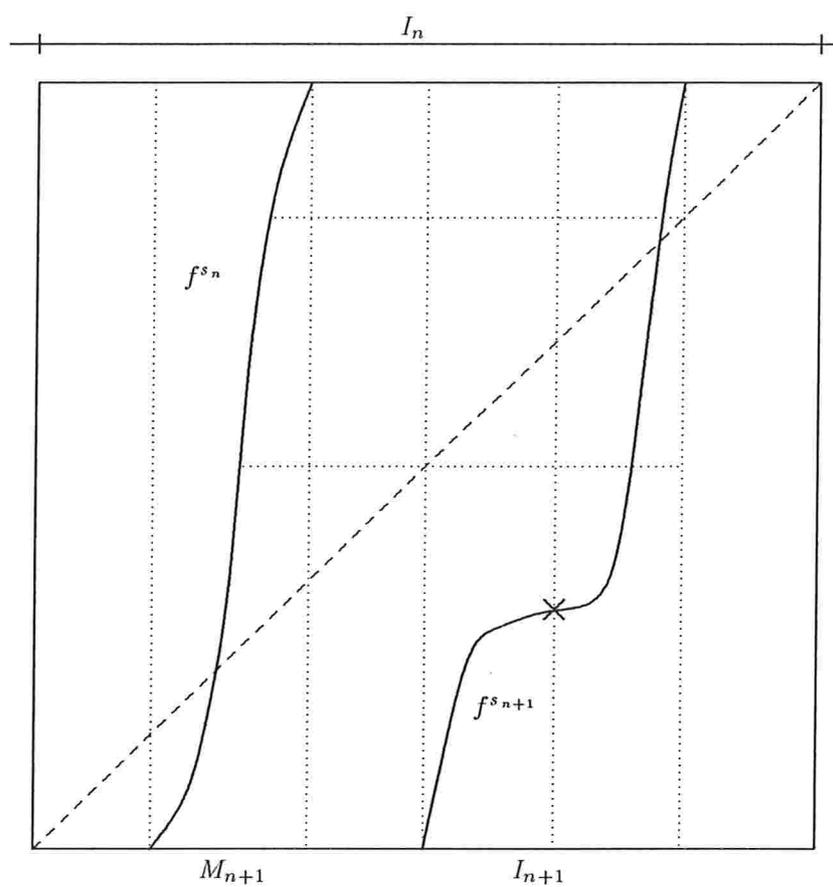
Inicialmente temos $I_0 = [0, 1]$ e existem intervalos $I_1, M_1 \subset I_0$ os quais são os domínios dos ramos de $\phi_0 = f$. Então as propriedades referentes às partes (1) e (2) do lema se verificam trivialmente para $n = 0$. Para $n \geq 0$ temos que ϕ_n é a aplicação de primeiro retorno a I_n e ϕ_n aplica o intervalo $I_{n+1} \subset I_n$ monotonamente sobre I_n . Portanto existe intervalo $M_{n+2} \subset I_{n+1}$ tal que $\phi_n(M_{n+2}) = I_{n+1}$. Disto segue a parte (1) do lema. Veja a Figura 6.2 que mostra f^{s_n} .

Para $n \geq 1$ temos que $I_{n+2} \subset I_{n+1}$ e que $\phi_n(I_{n+2}) \subset \phi_n(I_{n+1}) = I_n$. Como $\phi_n|_{I_{n+1}} = f|_{I_{n+1}}^{s_{n+1}}$, resulta que $I_{n+1} \cap \phi_n(I_{n+2}) = \emptyset$ e que $\phi_n(I_{n+2}) \subset M_{n+1}$. Concluímos que $\phi_{n+1}(I_{n+2}) = \phi_{n-1} \circ \phi_n(I_{n+2}) = I_{n+1}$ e portanto $\phi_{n+1}|_{I_{n+2}} = \phi_{n-1} \circ \phi_n|_{I_{n+2}}$. Isto prova a parte (2) do lema. A parte (3) segue do fato de que I_{n+1} e M_{n+1} são os únicos domínios de retorno a I_n visitados pela órbita positiva de c .

A parte (3) do lema implica que para todo $x \in \omega(c)$ e todo $n \geq 1$, $orb^+(x) \cap I_n \neq \emptyset$. Os intervalos I_n são encaixantes e decrescem a c . Então para cada $x \in \omega(c)$ temos que $\omega(x)$ contém c , logo $\omega(c)$ é um conjunto minimal. Obviamente também é um conjunto de Cantor pois não é uma órbita periódica e f não possui intervalos errantes. Com isto finalizamos a prova do lema. ■

6.1 O Itinerário do Ponto Crítico

Para estudarmos aspectos combinatórios das aplicações de Fibonacci introduzimos alguns conceitos relacionados à bem conhecida teoria de Milnor-Thurston [MT88]. Inicialmente consideramos o conjunto $\Sigma = \{E, D\}^{\mathbb{N}}$ das sequências unilaterais infinitas munido da métrica dada pela distância

Figura 6.2: Domínios de ϕ_n visitados por $orb^+(c)$

$$d(\underline{\theta}, \underline{\gamma}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(\theta_i, \gamma_i)}{2^i},$$

onde $\delta(\theta_i, \gamma_i) = 1$ se $\theta_i \neq \gamma_i$ e $\delta(\theta_i, \gamma_i) = 0$ se $\theta_i = \gamma_i$.

Dada uma aplicação $f \in \mathfrak{F}_1$ suponhamos sem perda de generalidade que M_1 está a esquerda de I_1 . Seja X_f o conjunto de todos os $x \in [0, 1]$ tais que $f^i(x) \notin \{0, 1\}$, para todo $i \geq 0$. Dado $x \in X_f$ definimos o seu *itinerário* $I(f, x) \in \Sigma$ de tal forma que $I_i(f, x) = E$ se $f^i(x) \in M_1$ e $I_i(f, x) = D$ se $f^i(x) \in I_1$. Como é fácil de verificar a aplicação $I(f, \cdot)$ de X_f em Σ é contínua e sobrejetora. Também podemos introduzir em Σ uma ordem lexicográfica \prec do seguinte modo: primeiro dizemos que E é menor do que D e denotamos por $E < D$. Então, dadas $\underline{\theta}, \underline{\gamma} \in \Sigma$ distintas dizemos que $\underline{\theta} \prec \underline{\gamma}$ se $\theta_i < \gamma_i$, onde $i \geq 0$ e menor tal que $\theta_i \neq \gamma_i$. Como f não possui atratores periódicos e nem intervalos errantes resulta que $x < y$ se, e somente se $I(f, x) \prec I(f, y)$.

Como observamos antes, quaisquer duas aplicações em \mathfrak{F}_1 que não possuam atratores periódicos são topologicamente conjugadas. Mas devido a grande importância que a órbita do ponto de inflexão de uma tal aplicação possui vamos estar interessados apenas em conjugações topológicas que preservam estas órbitas. Dadas então $f, g \in \mathfrak{F}_1$ dizemos que f e g são *fortemente conjugadas* se elas são topologicamente conjugadas por uma conjugação que aplica o ponto de inflexão de f no ponto de inflexão de g .

O lema a seguir garante que o itinerário $\mathcal{I}_f = I(f, c)$ do ponto de inflexão c de uma aplicação de Fibonacci está univocamente determinado. Isto nos permitirá concluir que quaisquer duas aplicações de Fibonacci que não possuem atratores periódicos ou intervalos errantes são fortemente conjugadas.

Lema 6.2. *Seja $f \in \mathfrak{F}_1$ uma aplicação de Fibonacci cujo ponto de inflexão é c . Então temos que:*

1. $\mathcal{I}_{s_{n+2}}(c) = \mathcal{I}_{s_{n+1}}(c)\mathcal{I}_{s_n}(c)$, onde para $k \geq 0$, $\mathcal{I}_k(c)$ denota a k -upla $I_0(f, c) \dots I_{k-1}(f, c)$ que corresponde aos k primeiros símbolos de \mathcal{I}_f .
2. Se $f, g \in \mathfrak{F}_1$ são aplicações de Fibonacci que não possuem atratores periódicos então f e g são fortemente conjugadas.

Demonstração:

Inicialmente observamos que $I_{n+1}, M_{n+1} \subset I_n$ são os domínios de retorno a I_n cujas órbitas, pelo Lema 6.1, cobrem a órbita $orb^+(c)$. Também relembramos que estamos assumindo que I_1 está à direita de M_1 e que I_n e M_n alternam de lado quando n varia.

Temos que $c \in I_2$ e analisando a órbita de I_2 concluímos que $\mathcal{I}_2(c) = DE$. Como $f^2(c) \in M_2 \subset I_1$ temos que $\mathcal{I}_1(f^2(c)) = \mathcal{I}_1(c) = D$. Como $\mathcal{I}_3(c) = DED$ resulta que a parte (1) é verdadeira para $n = 1$. Para $n \geq 2$ arbitrário temos que $c \in I_{n+1}$, $f^{s_{n+1}}(c) \in M_{n+1}$ e $M_{n+1} \subset I_n$. Portanto o itinerário de c e de I_{n+1} até o $(s_{n+1} - 1)$ -ésimo iterado são ambos dados por $\mathcal{I}_{s_{n+1}}(c)$. O itinerário de $f^{s_{n+1}}(c)$ e M_{n+1} até o $(s_n - 1)$ -ésimo iterado são ambos dados por $\mathcal{I}_{s_n}(c)$. Assim sendo a parte (1) do lema segue-se.

Para provar a parte (2) relembramos que a aplicação $\mathcal{I}(f, \cdot)$ é um homeomorfismo crescente de $(X_f, <)$ sobre $(\Sigma, <)$. O análogo ocorre para $\mathcal{I}(g, \cdot)$. Então, concluímos que $\varphi = \mathcal{I}^{-1}(g, \cdot) \circ \mathcal{I}(f, \cdot)$ é um homeomorfismo de X_f sobre X_g . É fácil verificar que φ conjuga $f|_{X_f}$ e $g|_{X_g}$. Como X_f e X_g são densos em $[0, 1]$ resulta que φ se estende a um homeomorfismo de $[0, 1]$ que conjuga f e g . Da parte (1) deste lema segue que $\mathcal{I}_f = \mathcal{I}_g$ e portanto φ aplica o ponto de inflexão de f no ponto de inflexão de g como queremos. ■

O Lema 6.2 permite-nos determinar completamente o itinerário \mathcal{I}_f de uma aplicação de Fibonacci f . De fato, temos que $\mathcal{I}_{s_2}(c) = \mathcal{I}_2(c) = DE$ e $\mathcal{I}_{s_1}(c) = \mathcal{I}_1(c) = D$. Portanto $\mathcal{I}_{s_3}(c) = DED$, $\mathcal{I}_{s_4}(c) = DEDDE$, $\mathcal{I}_{s_5}(c) = DEDDEDED$, $\mathcal{I}_{s_6}(c) = DEDDEDEDDEDDE$, etc.

Lema 6.3. *Se f_λ para $\lambda \in [0, 1]$ é uma família contínua de aplicações em \mathfrak{F}_1 tal que $f_\lambda(c_\lambda)$ varia de 0 até 1 então existe $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$ tal que $f_{\tilde{\lambda}}$ é uma aplicação de Fibonacci.*

Demonstração:

Podemos assumir sem perda de generalidade que o domínio de retorno $I_1(\lambda)$ está à direita de $M_1(\lambda)$. Seja $\mathcal{I}_f = (I_0, I_1, I_2, \dots)$ o itinerário de c associado a uma aplicação de Fibonacci f . Dado $\mu \in [0, 1]$ definimos o ponto $x_\lambda \in I_1(\lambda)$ como sendo

o único ponto tal que $I(f_\lambda, x_\lambda) = \mathcal{I}_f = I(f, c)$. Denotamos por $L_e(\lambda)$ e $L_d(\lambda)$ os extremos esquerdo e direito do intervalo I_λ , respectivamente. Das hipóteses do lema segue que x_λ e $L_e(\lambda) < L_d(\lambda)$ variam continuamente com λ . Por outro lado é fácil de verificar que se $f_\lambda(c_\lambda)$ está suficientemente próximo de $L_e(\lambda)$ então $x_\lambda > f_\lambda(c_\lambda)$ e se $f_\lambda(c_\lambda)$ está suficientemente próximo de $L_d(\lambda)$ então $x_\lambda < f_\lambda(c_\lambda)$. Portanto existe $\tilde{\lambda}$ tal que $f_\lambda(c_\lambda) = f_\lambda(x_\lambda)$ e o lema segue-se. ■

6.2 Limitação das Razões de Escala

Para uma aplicação $f \in \mathfrak{F}$ em geral provamos que existem limites a priori reais em pontos recorrentes e não-periódicos. Para uma aplicação de Fibonacci $f \in \mathfrak{F}_1^2$ podemos obter o seguinte teorema.

Teorema 6. *Se $f \in \mathfrak{F}_1^2$ é uma aplicação de Fibonacci então os domínios de retorno I_n e M_n dados pelo Lema 6.1 estão centralizados em I_{n-1} . Em particular as sequências $|I_n|/|L_n|$ (onde L_n é a menor componente conexa de $I_{n-1} \setminus I_n$) é limitada.*

Demonstração:

Consideramos os domínios de retorno $I_n, M_n \subset I_{n-1}$ dados pelo Lema 6.1. Sem perda de generalidade podemos considerar o intervalo I_n à direita de M_n .

Observamos que se I_n está centralizado em I_{n-1} então, resulta pelo Lema 1.1 que ambos os domínios I_{n+1} e M_{n+1} estão centralizados em I_n . Se M_n está centralizado em I_{n-1} então pelo mesmo lema resulta que I_{n+1} está centralizado em I_n e ambos os domínios I_{n+2} e M_{n+2} estão centralizados em I_{n+1} .

Consideramos a constante $\delta > 0$ e a δ -vizinhança \mathcal{M}_n dadas pelo Lema 1.3 aplicado a $I_n, M_n \subset I_{n-1}$. Pelos Lemas 1.1 e 1.4 resulta que se ambos os lados de um domínio de retorno $J_n \subset I_{n-1}$ são $\delta/2$ -pequenos então $\phi_{n-1}|_{J_n}$ tem derivada limitada. Sendo assim concluimos que quaisquer dois domínios fundamentais de $\phi_{n-1}|_{J_n}$ que sejam vizinhos são comensuráveis. Suponhamos então que ambos os lados de $I_n \subset I_{n-1}$ são $\delta/2$ -pequenos e seja $D \subset M_{n+1} \subset I_n$ o domínio fundamental de $\phi_{n-1}|_{I_n}$ que contem $\phi_n(c) = \phi_{n-2} \circ \phi_{n-1}(c)$. Como $\phi_{n-1}(D) \subset I_n$ resulta que D

está centralizado em I_n e portanto segue que $I_{n+2} \subset \phi_{n|I_{n+1}}^{-1}(D)$ está centralizado em I_{n+1} . Suponhamos agora que ambos os lados de $M_n \subset I_{n-1}$ são $\delta/2$ -pequenos e seja $D \subset M_n$ o domínio fundamental de $\phi_{n-2|M_n}$ que contem $\phi_{n-1}(c)$. Temos que D está centralizado em I_{n-1} e portanto segue que $I_{n+1} \subset \phi_{n-1|I_n}^{-1}(D)$ está centralizado em I_n .

Resta então analisarmos os casos tais que ambos os domínios $M_n, I_n \subset I_{n-1}$ possuem um lado $\delta/2$ -pequeno e um lado $\delta/2$ -grande. Observamos que podemos assumir que $\phi_{n-1}(c)$ está no lado $\delta/2$ -grande de M_n . Caso contrário o domínio fundamental $D \subset M_n$ de $\phi_{n-2|M_n}$ que contém $\phi_{n-1}(c)$ estaria centralizado em I_{n-1} e poderíamos repetir o argumento acima. Analogamente podemos assumir que $\phi_{n-2} \circ \phi_{n-1}(c) = \phi_n(c)$ está no lado $\delta/2$ -grande de I_n . Resulta então que M_n está contido no lado $\delta/2$ -grande de I_n e I_n está contido no lado $\delta/2$ -grande de M_n .

Seja \tilde{M} a δ -vizinhança dada pelo Lema 1.3 aplicado a $I_n \subset I_{n-1}$. O intervalo $\mathcal{V} = \tilde{M} \cup I_{n-1}$ é uma $\delta/2$ -vizinhança de I_n que intersepta no máximo 3 dos intervalos $f(I_n), \dots, f^{s_n-1}(I_n)$ e assim sendo podemos aplicar o Lema 1.4 à aplicação ϕ_n e concluir que $I_{n+2} \subset \phi_{n-1|I_{n+1}}^{-1}(\phi_n^{-1|_{M_{n+1}}}(I_{n+1}))$ está centralizado em I_{n+1} .

■

Com intuito de estudar a densidade $\text{dens}(\overline{\text{orb}^+(c)}, c)$ introduzimos as razões $|I_n|/|C_n|$ e $|M_n|/|D_n|$, onde C_n é a menor componente conexa de $I_{n-1} \setminus (I_n \cup M_n)$ adjacente à I_n e D_n é a menor componente conexa de $I_{n-1} \setminus (I_n \cup M_n)$ adjacente à M_n . Dentre outros fatos o teorema a seguir implica que a densidade $\text{dens}(\overline{\text{orb}^+(c)}, c)$ é menor do que 1.

Teorema 7. *As sequências $|I_n|/|C_n|$ e $|M_n|/|D_n|$ associadas a uma aplicação de Fibonacci $f \in \mathfrak{F}_1^2$ são limitadas.*

Demonstração:

Este teorema é uma consequência imediata do Lema 1.1 e do Teorema 6.

■

Corolário 6.1. *1. Existem intervalos Z_n tais que I_n está centralizado em Z_n e $(Z_n \setminus I_n) \cap \overline{\text{orb}^+(c)} = \emptyset$.*

2. Existe $\xi < 1$ tal que $\text{dens}(\overline{\text{orb}^+(c)}, c) \leq \xi$ e portanto a medida de Lebesgue de $\overline{\text{orb}^+(c)}$ é nula.

Lema 6.4. *Sejam $f \in \mathfrak{F}_1^2$ uma aplicação de Fibonacci, a sequência $\{I_n\}_{n=0}^\infty$ definida anteriormente e ϕ_n a aplicação de primeiro retorno de I_n . Então, para $n \geq 1$, verificam-se as seguintes propriedades:*

1. $\phi_n|_{M_{n+1}}$ é um difeomorfismo de distorção limitada, isto é: existe constante $M < \infty$ tal que para todo $x, y \in M_{n+1}$ verifica-se que

$$\frac{\phi_n'(x)}{\phi_n'(y)} \leq M.$$

2. $\phi_n|_{I_{n+1}} = L \circ f|_{I_{n+1}}$, onde L é um difeomorfismo de distorção limitada.
 3. Existe constante $C < \infty$ tal que para todo $x \in I_{n+1}$ verifica-se que

$$C^{-1}A_n|x - c|^l \leq |\phi(x) - \phi(c)| \leq CA_n|x - c|^l,$$

onde l é a ordem do ponto de inflexão c e A_n é a segunda derivada $\phi_n''(c)$.

Demonstração:

Veja o Lema 3.5. ■

6.3 Propriedades Markovianas de uma Aplicação de Fibonacci

Como vimos no Capítulo 5, um instrumento útil para a análise da existência ou não de atratores selvagens são as propriedades Markovianas da aplicação dada. A partir de uma aplicação de Fibonacci podemos construir uma aplicação de Markov topológica.

Consideramos uma aplicação de Fibonacci $f \in \mathfrak{F}_1^2$ que não possui atrator periódico. A aplicação de Markov topológica F que construiremos está relacionada

com as aplicações de primeiro retorno ϕ_n definidas anteriormente. Esperamos que esta aplicação possua propriedades métricas suficientes para se decidir sobre a existência ou não de atratores selvagens. Veja as figuras 6.3 e 6.4 para uma melhor visualização da construção a seguir.

Inicialmente definimos os pontos $x_{-1} = 0$, $x_0 = 1$ e x_1 tal que $M_1 = (x_{-1}, x_1)$ e $I_1 = (x_1, x_0)$. Definimos também F de modo que

$$F|_{(x_{-1}, x_1)} = f|_{(x_{-1}, x_1)}^{s_0}$$

a qual é um difeomorfismo sobre (x_{-1}, x_0) . Observamos que existe um ramo crítico $f|_{(x_1, x_0)}^{s_1}$ o qual é um homeomorfismo sobre (x_{-1}, x_0) e cujo valor crítico $f^{s_1}(c)$ está em (x_{-1}, x_1) .

Existe $x_2 \in (x_1, x_0)$ tal que $f^{s_1}(x_2) = x_1$. Definimos então F de modo que

$$F|_{(x_2, x_0)} = f|_{(x_2, x_0)}^{s_1}$$

a qual é um difeomorfismo sobre (x_1, x_0) . Existe também um ramo crítico $f|_{(x_1, x_2)}^{s_2}$ o qual é um homeomorfismo sobre (x_{-1}, x_0) e cujo valor crítico $f^{s_2}(c)$ está em (x_2, x_0) .

Procedemos por indução. Assumimos que estão definidos os pontos $x_{-1}, x_0, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}$, que $F|_{(x_{2n-3}, x_{2n-1})} = f|_{(x_{2n-3}, x_{2n-1})}^{s_{2n-2}}$ a qual é um difeomorfismo de (x_{2n-3}, x_{2n-1}) sobre (x_{-1}, x_{2n-2}) . Também existe o ramo crítico $f|_{(x_{2n-1}, x_{2n-2})}^{s_{2n-1}}$ o qual é um homeomorfismo sobre (x_{2n-3}, x_0) e cujo valor crítico $f^{s_{2n-1}}(c)$ está em (x_{2n-3}, x_{2n-1}) .

Escolhemos então $x_{2n} \in (x_{2n-1}, x_{2n-2})$ tal que $f^{s_{2n-1}}(x_{2n}) = x_{2n-1}$. Definimos então F de modo que

$$F|_{(x_{2n}, x_{2n-2})} = f|_{(x_{2n}, x_{2n-2})}^{s_{2n-1}}$$

a qual é um difeomorfismo sobre (x_{2n-1}, x_0) . Existe também um ramo crítico $f|_{(x_{2n-1}, x_{2n})}^{s_{2n}}$ o qual é um homeomorfismo sobre (x_{-1}, x_{2n-2}) e cujo valor crítico $f^{s_{2n}}(c)$ está em (x_{2n}, x_{2n-2}) .

Para finalizar a indução escolhemos $x_{2n+1} \in (x_{2n-1}, x_{2n})$ tal que $f^{s_{2n}}(x_{2n+1}) = x_{2n}$. Definimos então F de modo que

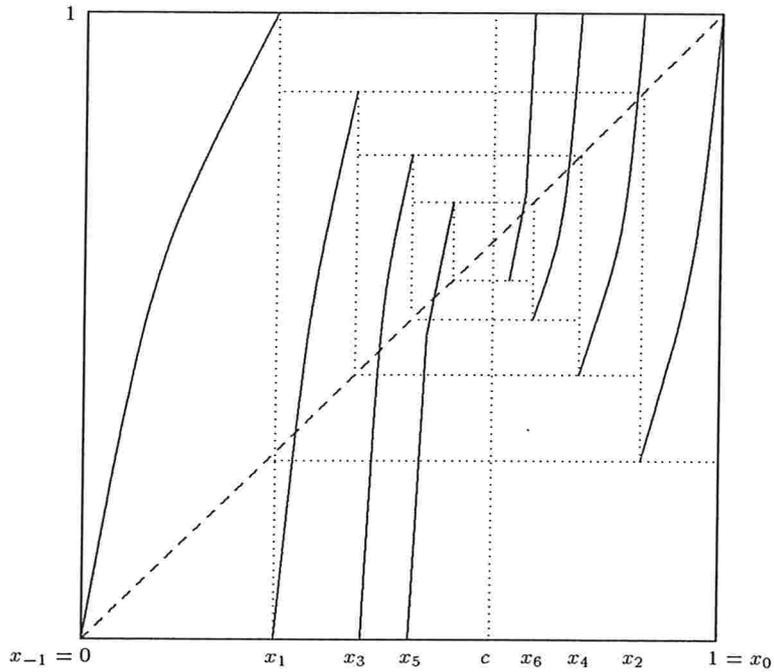


Figura 6.3: Markov Topológica

$$F|_{(x_{2n-1}, x_{2n+1})} = f^{s_{2n}}|_{(x_{2n-1}, x_{2n+1})}$$

a qual é um difeomorfismo sobre (x_{-1}, x_{2n}) . Observamos ainda que existe também um ramo crítico $f^{s_{2n+1}}|_{(x_{2n+1}, x_{2n})}$ o qual é um homeomorfismo sobre (x_0, x_{2n-2}) e cujo valor crítico $f^{s_{2n+1}}(c)$ está em (x_{2n-1}, x_{2n+1}) .

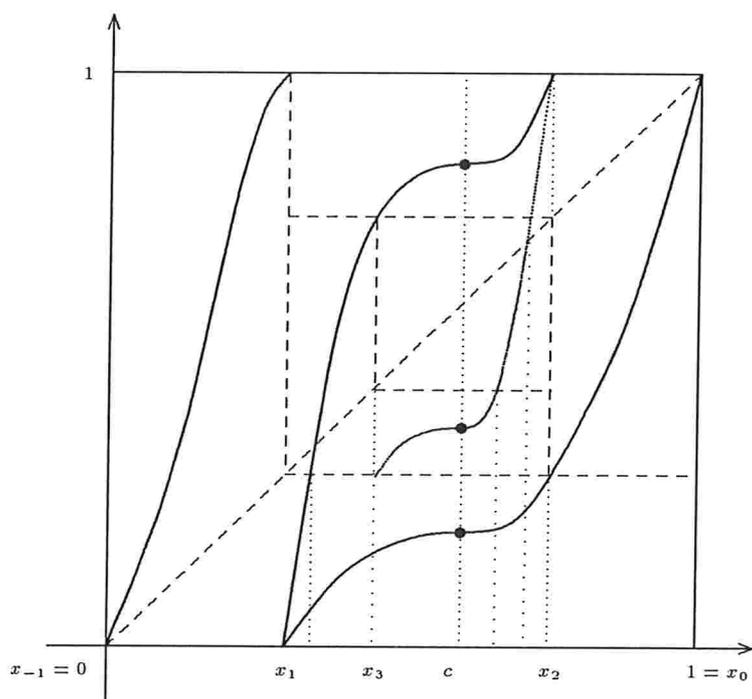


Figura 6.4: Quatro ramos de retorno

Referências Bibliográficas

- [BL91] A. M. Blokh and M. Yu. Lyubich. Measurable dynamics of S -unimodal maps of the interval. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 24(5):545–573, 1991.
- [dMvS93] Welington de Melo and Sebastian van Strien. *One-dimensional dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [GŚ97] Jacek Graczyk and Grzegorz Świątek. Generic hyperbolicity in the logistic family. *Ann. of Math. (2)*, 146(1):1–52, 1997.
- [GŚ99] Jacek Graczyk and Grzegorz Świątek. Smooth unimodal maps in the 1990s. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(2):263–287, 1999.
- [Lyu94] Mikhail Lyubich. Combinatorics, geometry and attractors of quasi-quadratic maps. *Ann. of Math. (2)*, 140(2):347–404, 1994.
- [Lyu00] Mikhail Lyubich. The quadratic family as a qualitatively solvable model of chaos. *Notices Amer. Math. Soc.*, 47(9):1042–1052, 2000.
- [Mar94] Marco Martens. Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 14(2):331–349, 1994.
- [Mil85] John Milnor. On the concept of attractor. *Comm. Math. Phys.*, 99(2):177–195, 1985.
- [Mn85] Ricardo Mañé. Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 100(4):495–524, 1985.

- [MT88] John Milnor and William Thurston. On iterated maps of the interval. In *Dynamical systems (College Park, MD, 1986–87)*, pages 465–563. Springer, Berlin, 1988.
- [Sul92] Dennis Sullivan. Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures. In *American Mathematical Society centennial publications, Vol. II (Providence, RI, 1988)*, pages 417–466. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.