

**Sistemas Mecânicos
e Lagrangeanos
com Vínculos não-Lineares¹**

Gláucio Terra

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientadora: **Profa. Dra. Helena Maria Ávila de Castro**
Co-Orientador: **Prof. Dr. Waldyr Muniz Oliva**

– São Paulo, 23 de janeiro de 2003 –

¹Financiado pela FAPESP (São Paulo, Brasil), processo 98/15988-0.

Sistemas Mecânicos e Lagrangeanos com Vínculos não-Lineares

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Gláucio Terra e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 19 de março de 2003.

COMISSÃO JULGADORA:

- Profa. Dra. Helena Maria Ávila de Castro (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Paolo Piccione - IME-USP
- Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas - ICMC-USP
- Prof. Dr. Francesco Mercuri - UNICAMP
- Prof. Dr. Jair Koiller - LNCC-RJ

À *Luciana*.

Não desças os degraus do sonho para não despertar os monstros. Não subas aos sótãos - onde os deuses, por trás das suas máscaras, ocultam o próprio enigma. Não desças, não subas, fica. O mistério está é na tua vida! É um sonho louco este nosso mundo...

Mário Quintana

Agradecimentos

Gostaria de mencionar os nomes de algumas das pessoas que estiveram ao meu lado nos últimos anos e que são especiais para mim, sem o apoio das quais seria impossível a conclusão deste trabalho.

À *Luciana*, pelo amor e carinho, e porque tristes seriam os caminhos sem a presença distante das estrelas.

A toda a minha família, em especial aos meus pais, *Ilze* e *Gentil*, e à minha irmã, *Andrea*, também pelo amor e carinho, por sua constante e incondicional presença em todos os momentos.

A todos professores com os quais tive o prazer de ter assistido aulas e através delas enriquecer o meu conhecimento em Matemática.

À *FAPESP*, pelo apoio financeiro.

A todos os amigos do Instituto de Matemática e Estatística da USP, por todos estes anos que trilhamos juntos.

A todos os amigos do Instituto Superior Técnico de Lisboa, que tão bem me acolheram nas duas temporadas em que lá estive.

Ao *Marcelo Kobayashi*, pelas ótimas sugestões e tão frutíferas discussões.

À *Helena Castro* e ao *Waldyr Oliva*, pelo convívio, pela excelente orientação, pela paciência e dedicação.

Resumo:

Neste trabalho são estudados sistemas mecânicos e sistemas lagrangeanos vinculados. Um *vínculo* \mathcal{C} na variedade diferenciável M , chamada espaço de configurações, é uma subvariedade mergulhada do espaço de fase das velocidades TM , tal que a restrição da projeção do fibrado tangente $\tau_M : TM \rightarrow M$ a \mathcal{C} seja uma submersão. As trajetórias de tais sistemas são definidas e analisadas através de generalizações das formulações e resultados existentes no caso em que \mathcal{C} é um vínculo linear nas velocidades, i.e., um subfibrado vetorial do fibrado tangente $\tau_M : TM \rightarrow M$. O princípio de d'Alembert e o princípio da ação estacionária de Hamilton (através do qual se define a chamada *mecânica vakonômica*) são generalizados, e são analisadas propriedades dos sistemas dinâmicos obtidos. No caso particular em que a lagrangeana L é a energia cinética induzida pelo tensor métrico da variedade riemanniana (M, g) , obtém-se uma generalização da geometria sub-riemanniana.

Abstract:

The present work concerns the analysis of mechanical and Lagrangian systems with kinematic constraints. A *constraint* \mathcal{C} on a differentiable manifold M , the so called configuration space, is a smooth embedded submanifold of the velocity phase space TM , such that the restriction of the tangent bundle projection $\tau_M : TM \rightarrow M$ to \mathcal{C} is a submersion. The trajectories of such systems are defined and analysed through generalizations of the corresponding formulations and results existent in the linear constraint case, that is, \mathcal{C} is a smooth vector sub-bundle of $\tau_M : TM \rightarrow M$. The d'Alembert principle and Hamilton's principle of stationary action (through which the so called *vakonomic mechanics* is defined) are generalized, and the properties of the dynamical systems thus obtained are analysed. If the Lagrangian L is the kinetic energy induced by the metric tensor of the Riemannian manifold (M, g) , the present formulation on constrained lagrangian systems amounts to a generalization of sub-Riemannian geometry.

Conteúdo

Introdução	3
1 Sistemas Mecânicos e Lagrangeanos não-Vinculados	13
1 Definições e Notações Básicas	13
1.1 A derivada nas fibras e a derivada paralela	18
2 Sistemas mecânicos e sistemas lagrangeanos	25
2.1 Sistemas lagrangeanos	29
2.1.1 Alguns espaços de curvas	29
2.1.2 O princípio de Hamilton da ação estacionária	32
2 A Geometria do Vínculo	41
1 Espaços de curvas compatíveis com \mathcal{C}	50
3 Sistemas Mecânicos Vinculados	55
1 Motivação e definição das trajetórias	55
2 O princípio de Gauss da vinculação mínima e as trajetórias de d'Alembert-Chetaev	58
3 O princípio de Hölder	62
4 Conservação de energia	63
5 O teorema de Liouville para o campo GMA	67
5.1 Demonstração do Teorema de Liouville	77
6 Um critério para hiperbolicidade	85
4 Sistemas Lagrangeanos Vinculados	91
1 Trajetórias normais e abnormais	91
1.1 Equações das trajetórias e o campo de vetores variacional	94
1.2 A estrutura simplética de W	108
1.2.1 Uma observação sobre o espaço de fase das trajetórias normais	110

1.3	A hessiana e os campos de Jacobi	112
1.4	O tensor métrico de Jacobi	121
2	Trajelórias normais \times trajetórias d'Alembertianas	129
	Conclusão	135
	Bibliografia	137
	Índice	143

Introdução

“Sistemas mecânicos” e “sistemas lagrangeanos” designam, neste trabalho, sistemas dinâmicos em variedades diferenciáveis obtidos com base em duas abordagens, ambas inspiradas na Mecânica Clássica: os primeiros, através da “lei de Newton”, e os segundos, através de princípios variacionais. No caso de sistemas não-vinculados, ambas as abordagens são equivalentes. No caso de sistemas com vínculos lineares nas velocidades, elas coincidem se, e somente se, o vínculo for integrável. O caso de sistemas com vínculos não-lineares é o que nos propomos a estudar.

Um *sistema mecânico clássico* ou, abreviadamente, um *sistema mecânico* (vide [19], [1], [5], [39] e [43]), é uma terna (M, K, \mathcal{F}) , onde M é uma variedade diferenciável, $K : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, cuja restrição a cada fibra do fibrado tangente TM é uma forma quadrática positiva definida, e $\mathcal{F} : TM \rightarrow T^*M$ é um morfismo de fibrados diferenciáveis sobre M . Segundo a terminologia usual, M , TM , T^*M , K e \mathcal{F} são denominados, respectivamente, *espaço de configurações*, *espaço de fase das velocidades*, *espaço de fase dos momentos*, *energia cinética* e *campo de forças externo*. Estaremos particularmente interessados nos casos em que o campo de forças externo \mathcal{F} :

- (1) é dado por um potencial, ou seja, existe $V \in \mathfrak{F}(M)$, chamada *energia potencial*, tal que $(\forall v_q \in TM) \mathcal{F}(v_q) = -dV(q) \in T_q^*M$;
- (2) é a força de Lorentz induzida por um campo magnético (vide [66]). Ou seja, existe uma 2-forma fechada $B \in \Omega_2(M)$, chamada *campo magnético*, tal que, definindo-se $\mathcal{Y} : TM \rightarrow T^*M$ por:

$$(\forall q \in M, v_q, w_q \in T_qM) \langle v_q, \mathcal{Y}(w_q) \rangle = B(v_q, w_q)$$

tem-se $\mathcal{F} = \mathcal{Y}$.

A energia cinética K define um tensor métrico g em M (por polarização da forma quadrática K em cada fibra de TM). Uma curva γ em M diz-se um *movimento* ou *trajetória física do sistema mecânico* (M, K, \mathcal{F}) se for solução da *equação de Newton*:

$$\mathcal{F}(\dot{\gamma}) = \mu(\nabla_t \dot{\gamma}) \tag{1}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de (M, g) , $\mu := g^b : TM \rightarrow T^*M$ é a transformação de Legendre induzida pelo tensor métrico, e ∇_t denota a derivada covariante ao longo de γ induzida por ∇ . Denotando-se $g^\sharp := (g^b)^{-1} : T^*M \rightarrow TM$ e $\mathcal{F}^\sharp := g^\sharp \circ \mathcal{F}$ (que também será chamado de *campo de forças*), obtém-se a seguinte forma equivalente da equação (1), que será usada mais frequentemente:

$$\mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}) = \nabla_t \dot{\gamma} \quad (2)$$

Tomando-se levantamentos verticais em ambos os membros desta última equação, obtém-se $\frac{T\dot{\gamma}}{dt} - H_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) = \lambda_{\dot{\gamma}}(\mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}))$, o que mostra que as soluções de (2) são as *curvas integrais de base* (i.e., as projeções em M das suas curvas integrais) do campo de segunda ordem $X_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}(TM)$ definido por, para todo $v_q \in TM$:

$$X_{\mathcal{F}}(v_q) = S(v_q) + \lambda_{v_q}(\mathcal{F}^\sharp(v_q)) \quad (3)$$

onde S é o spray geodésico de (M, g) (i.e., definido pela conexão de Levi-Civita). O campo de vetores $X_{\mathcal{F}}$ é o *campo de Gibbs-Maggi-Appell* (GMA)¹ do sistema mecânico (M, K, \mathcal{F}) .

Quando o campo de forças externo for dado por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, denotaremos o sistema mecânico por (M, K, V) ao invés de $(M, K, -dV \circ \tau_M)$, e o campo GMA por X_V ao invés de $X_{-dV \circ \tau_M}$.

Um *sistema lagrangeano* (vide [19], [1], [5], [39] e [43]), é um par (M, L) , onde M é uma variedade diferenciável e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, denominada *lagrangeana*². A lagrangeana diz-se *clássica* se for da forma $L = K - V \circ \tau_M$, onde $K : TM \rightarrow \mathbb{R}$, chamada *energia cinética*, é uma função diferenciável, cuja restrição a cada fibra do fibrado tangente TM é uma forma quadrática positiva definida, como anteriormente, e $V \in \mathfrak{F}(M)$, chamada *energia potencial*.

As trajetórias de um sistema lagrangeano (M, L) são definidas através do princípio de Hamilton da ação estacionária: uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ diz-se uma *trajetória do sistema lagrangeano* (M, L) se for de classe C^1 e se for um ponto estacionário do *funcional de Lagrange* $\mathcal{L} : \gamma \mapsto \int_a^b L(\dot{\gamma})$ na variedade de Banach $C^1(M, [a, b], p, q) := \{\alpha : [a, b] \rightarrow M \mid \alpha \in C^1, \alpha(a) = p, \alpha(b) = q\}$, onde $p = \gamma(a), q = \gamma(b) \in M$. Ou, equivalentemente, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é trajetória do sistema lagrangeano (M, L) se for solução das equações de Euler-Lagrange clássicas da lagrangeana L , que, localmente,

¹esta nomenclatura foi sugerida por Fusco e Oliva [16] no contexto de sistemas não-holonômicos lineares.

²mais geralmente, poder-se-ia considerar uma função diferenciável $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, chamada *lagrangeana dependente do tempo*, mas neste texto serão consideradas apenas lagrangeanas independentes do tempo.

tomando um sistema de coordenadas (q^1, \dots, q^n) em M^n , se escrevem:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0$$

para $1 \leq k \leq n$. É bem conhecido o fato de que, se L for uma lagrangeana clássica, então as trajetórias do sistema lagrangeano (M, L) coincidem com as trajetórias do sistema mecânico (M, K, V) . Vide mais detalhes no capítulo 1, seção (2.1).

Definiremos, agora, sistemas com vínculos. Um *vínculo* no sistema mecânico (M, K, \mathcal{F}) ou no sistema lagrangeano (M, L) é um subconjunto \mathcal{C} do espaço de fase das velocidades TM , no qual impomos que estejam contidas as possíveis velocidades das trajetórias do sistema. Chamamos $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ e (M, L, \mathcal{C}) , respectivamente, de *sistema mecânico vinculado* e *sistema lagrangeano vinculado*. Dizemos que uma curva γ em M é um *movimento* ou *trajetória compatível com o vínculo*, ou ainda *horizontal ao vínculo*, se o seu vetor tangente em cada ponto do seu domínio pertence a \mathcal{C} .

Precisamos determinar condições para que as trajetórias do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ e as do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) sejam compatíveis com o vínculo \mathcal{C} . Em geral, as trajetórias físicas do sistema mecânico (sem vínculos) (M, K, \mathcal{F}) , ou seja, as soluções da equação (1.10), não são compatíveis com o vínculo \mathcal{C} . Do ponto de vista da Física, isto ocorre porque, em geral, para que as trajetórias sejam compatíveis com o vínculo, o mesmo deve exercer uma “força de reação”. O mesmo vale para as trajetórias do sistema lagrangeano (M, L) ; para obter-se trajetórias compatíveis com o vínculo \mathcal{C} , é necessário generalizar o princípio de Hamilton.

O caso em que \mathcal{C} é um subfibrado vetorial de TM , ou seja, o caso linear, é bem conhecido e possui uma extensa literatura: desde textos clássicos, como [4], [65], [45] e [20] até trabalhos mais recentes e que utilizam a linguagem e técnicas da moderna geometria diferencial, como [24], [16], [25], [63], [35], [8], [49], e [30], entre outros.

No presente texto, pretende-se fazer um estudo de sistemas mecânicos e sistemas lagrangeanos com vínculos não-lineares nas velocidades; ou seja, consideraremos sistemas em que o vínculo \mathcal{C} é um subconjunto do fibrado tangente mais geral do que um subfibrado vetorial.

Historicamente, até onde sabemos, o primeiro exemplo de sistema mecânico com vínculos não-lineares nas velocidades foi proposto por Appell — vide [3]³. Desde então, a teoria de sistemas com vínculos não-lineares nas velocidades tem atraído o interesse de muitos pesquisadores, matemáticos e físicos — vide [61], [62], [60], [26], [27], [28], [6], [64], [40], [12], [36], [37], [38], [7], [13], [23] e referências citadas nestes artigos, entre outros.

³exemplo este que, recentemente, tem sido alvo de algumas críticas — vide [41].

Um exemplo concreto de uma classe de sistemas com vínculos não-lineares bastante estudada é dado pela chamada *dinâmica isocinética*, na qual o vínculo do sistema mecânico é definido pela imposição de que a energia cinética permaneça constante. Este vínculo, proposto pela primeira vez por Hoover [22], tem aplicações em mecânica estatística — vide, por exemplo, [22], [52], [17] e [66]. Outro exemplo recente foi dado por Cushman *et al.* [11], no qual foi estudada uma partícula com *spin*, vista como sendo um corpo rígido ao qual se impõe a condição de ser constante a norma do momento angular. Outros exemplos são dados no capítulo 2, exemplo (2.1), dentre os quais o caso do vínculo afim nas velocidades, um servomecanismo e um exemplo no qual se propõe estudar o movimento de dois pontos no plano com a imposição de que suas velocidades sejam sempre paralelas.

A multiplicidade de formulações e problemas relativos a sistemas com vínculos não-lineares engloba:

- sistemas lagrangeanos vinculados *versus* sistemas hamiltonianos vinculados;
- vínculos dados por subvariedades no fibrado tangente do espaço de configurações M , vínculos dados por subvariedades no fibrado cotangente, vínculos dados por distribuições no fibrado tangente ou no fibrado cotangente;
- sistemas obtidos com base em generalizações do princípio de d'Alembert *versus* sistemas obtidos com base em princípios variacionais;
- sistemas definidos por equações diferenciais implícitas;
- conservação de energia, conservação de volume, simetrias e redução, hiperbolicidade, propriedades minimizantes das trajetórias;
- aplicações à economia (vide [10] e referências lá citadas), teoria do controle ótimo, teoria dos circuitos elétricos, robótica, geometria sub-riemanniana;

apenas para citar alguns dos temas envolvidos.

No entanto, nenhuma das formulações existentes se encontra bem consolidada na literatura e, até os limites do nosso conhecimento, muitas propriedades válidas para sistemas com vínculos lineares ainda não tinham sido estabelecidas no contexto não-linear.

Na formulação apresentada neste texto, considerar-se-á que \mathcal{C} é uma subvariedade diferenciável do fibrado tangente TM , tal que a restrição da projeção $\tau_M : TM \rightarrow M$ a \mathcal{C} seja uma submersão. Tal formulação generaliza aquela de [57] e [58], na qual consideramos o caso particular em que \mathcal{C} é dado pela imagem inversa da seção nula

de um fibrado vetorial S por um morfismo de fibrados diferenciáveis $f : TM \rightarrow S$, “regular” num certo sentido, e a dinâmica do sistema dada por uma lagrangeana clássica $L = K - V \circ \tau_M$.

Como será detalhado no capítulo 2, a hipótese de que $\tau_M|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ seja uma submersão é usada para garantir:

- (a) que, para toda velocidade admissível pelo vínculo $v_q \in \mathcal{C}$, exista um movimento compatível com o vínculo $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ cuja velocidade inicial $\dot{\gamma}(0)$ coincida com v_q ⁴;
- (b) a existência das estruturas de variedade de Banach nos espaços de curvas compatíveis com o vínculo, $H^k(M, \mathcal{C}, [a, b]) = \{\alpha \in H^k(M, [a, b]) \mid \alpha \text{ é compatível com } \mathcal{C}\}$, para $k \geq 2$ e $C^k(M, \mathcal{C}, [a, b]) = \{\alpha \in C^k(M, [a, b]) \mid \alpha \text{ é compatível com } \mathcal{C}\}$, para $k \geq 1$.

As estruturas de variedade de Banach mencionadas em (b) são usadas para se generalizar o princípio de Hamilton da ação estacionária para sistemas lagrangeanos vinculados (M, L, \mathcal{C}) . A condição (a) é necessária para a existência de campos de segunda ordem em \mathcal{C} , no sentido da definição (2.6) — i.e., campos de vetores em \mathcal{C} cujas curvas integrais sejam da forma $\dot{\gamma}$, onde γ é um movimento compatível com o vínculo.

A hipótese de que $\tau_M|_{\mathcal{C}}$ seja uma submersão também foi utilizada em [36] como uma condição de “regularidade” do vínculo. Em [13], esta hipótese é substituída por duas outras condições, uma de “admissibilidade” e outra de “compatibilidade”; em [60], onde o vínculo é dado por uma distribuição no fibrado tangente do espaço de configurações, e em [64], onde o vínculo é dado por uma distribuição no fibrado cotangente⁵, a referida hipótese também é substituída por outros ingredientes, no sentido de garantir a existência de campos de segunda ordem compatíveis com o vínculo.

A organização do trabalho é a seguinte: no capítulo 1, são estudados sistemas mecânicos e lagrangeanos sem vínculos. Tem-se por objetivo principal fixar notação e introduzir algumas definições e técnicas a serem utilizadas nos demais capítulos. As notações e definições introduzidas serão utilizadas de modo a permitir enunciar e

⁴num vínculo “físico”, espera-se que a condição (a) seja satisfeita porque desejamos que as trajetórias do sistema mecânico ou lagrangeano vinculado sejam movimentos compatíveis com \mathcal{C} . Ou seja, se existisse uma velocidade admissível $v_q \in \mathcal{C}$ que não fosse a velocidade inicial de nenhum movimento compatível com \mathcal{C} , diríamos que o vínculo não estaria “bem posto”.

⁵observamos que vínculos dados por subvariedades no fibrado tangente ou no fibrado cotangente podem ser vistos como casos particulares destas formulações, i.e., vínculos dados por distribuições em abertos do fibrado tangente ou cotangente, respectivamente; basta considerar o caso em que as distribuições são integráveis.

demonstrar os resultados de forma “intrínseca”, i.e., livre de coordenadas, como foi feito na quase totalidade do texto. Este capítulo não contém resultados originais; no entanto, parece-nos ser original a técnica de cálculo aqui introduzida, através de “derivadas paralelas” e “derivadas nas fibras”.

No capítulo 2, define-se “vínculo” e são estudadas algumas propriedades geométricas do mesmo. São introduzidas algumas variedades de Banach de curvas compatíveis com o vínculo, as quais serão usadas posteriormente para generalizar o princípio da ação estacionária de Hamilton. Até os limites do nosso conhecimento, as estruturas de variedade de Banach de tais espaços não eram conhecidas.

No capítulo 3, são estudados sistemas mecânicos vinculados. Definimos um *movimento* ou *trajetória física do sistema mecânico vinculado* $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ como sendo uma curva γ em M que seja compatível com o vínculo \mathcal{C} e que satisfaça a *equação de Newton*:

$$\nabla_t \dot{\gamma} = -\text{grad } V \circ \gamma + R(\dot{\gamma}) \quad (4)$$

para algum *campo de reações vinculares admissível* $R : \mathcal{C} \rightarrow TM$ — “admissível” no sentido da definição (3.2) (vide também motivação que a precede)⁶.

As trajetórias de d’Alembert-Chetaev do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ são definidas a partir do campo de reações vinculares admissível $R_{\mathcal{F}}^A$, que é o único campo de reações vinculares que tem a propriedade notável de minimizar a intensidade da reação vincular (no conjunto de todas as reações vinculares admissíveis), ou seja, são definidas a partir do chamado “princípio da vinculação mínima de Gauss”. Tais trajetórias já eram bem conhecidas na literatura, mas a sua caracterização através do princípio da vinculação mínima — teorema (A), parece-nos ser contribuição original. O teorema (B) é uma versão em termos da formulação aqui proposta do bem conhecido “princípio de Hölder” — vide [6], [13], e mostra que, no caso em que o campo de forças externo é dado por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, tal princípio é equivalente ao princípio da vinculação mínima tal como formulado no teorema (A). No caso em que o vínculo é linear, o campo de reações vinculares $R_{\mathcal{F}}^A$ coincide com o campo de reações vinculares que define as trajetórias d’Alembertianas e caracterizado pelo fato de ser ortogonal ao

⁶com respeito a esta definição, uma observação nos parece ser pertinente: mesmo no caso linear, i.e., na situação em que \mathcal{C} é um subfibrado vetorial diferenciável do espaço de fase das velocidades TM , as trajetórias físicas do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ não ficam, em geral, determinadas por uma condição inicial $v_q \in \mathcal{C}$. Isto ocorre porque, em geral, existem muitas escolhas possíveis para o campo de reações vinculares admissível R . Em outras palavras, aquilo que chamamos de “vínculo” deveria ser chamado, mais precisamente, de “vínculo cinemático”. Um “vínculo físico” não fica caracterizado apenas por suas propriedades cinemáticas; também é necessário considerar as suas propriedades dinâmicas (ou seja, propriedades que permitam determinar a “força de reação”). Isto é um fato que muitas vezes tem passado despercebido na literatura (havendo uma certa tendência a polarizar o estudo na dicotomia “mecânica d’Alembertiana” versus “mecânica vakonômica”).

vínculo — vide [30]. É neste sentido que o “princípio da vinculação mínima de Gauss” enunciado no teorema (A) generaliza o “princípio de d’Alembert”, através do qual se definem as trajetórias d’Alembertianas no caso linear.

A seguir, na seção (4), obtivemos condições para que o campo de vetores de segunda ordem que define as trajetórias de d’Alembert-Chetaev, $X_{\mathcal{C}} \in \mathfrak{X}(\mathcal{C})$, no caso em que a força externa \mathcal{F} é dada por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, conserve a energia mecânica $K + V \circ \tau_M$ — vide proposição (3.3) e teorema (C). Na seção (5), também no caso em que a força externa é dada por um potencial, obtivemos uma generalização do teorema de Liouville sobre conservação do volume — vide teorema (D). Como subproduto, obtivemos uma generalização de um resultado de [53], segundo o qual o *lift* canônico das geodésicas de uma variedade riemanniana (M, g) no fibrado tangente TM são geodésicas da conexão de Levi-Civita induzida por um tensor métrico g_{TM} canonicamente definido em TM a partir do tensor métrico g , o chamado *tensor métrico de Sasaki* — vide proposição (3.5). Finalmente, na seção (6), obtivemos uma condição⁷ para que o fluxo do campo GMA do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, assumindo-se \mathcal{C} uma variedade compacta, seja hiperbólico.

No capítulo 4, são estudados sistemas lagrangeanos vinculados. Dado um sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) , as suas trajetórias são definidas através de uma generalização do princípio da ação estacionária de Hamilton. No caso não-vinculado, definimos uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ como sendo uma trajetória do sistema lagrangeano (M, L) se for ponto crítico do funcional de Lagrange \mathcal{L} na variedade de Banach $C^1(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b)) = \{\alpha : [a, b] \rightarrow M \mid \alpha \in C^1, \alpha(a) = \gamma(a), \alpha(b) = \gamma(b)\}$. Se a lagrangeana L for regular, todas as trajetórias são C^∞ , de modo que poderíamos ter tomado, sem perda de generalidade na definição, pontos críticos do funcional de Lagrange nas variedades de Banach $C^k(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, $k \geq 1$, ou $H^k(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, $k \geq 2$, definidas de forma análoga. A idéia para generalizar o princípio de Hamilton para o caso vinculado é tomar pontos críticos do funcional de Lagrange em variedades de Banach de curvas compatíveis com o vínculo. Por exemplo, poderíamos considerar o funcional de Lagrange \mathcal{L} definido no espaço $H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], p, q) = \{\alpha \in H^2(M, [a, b], p, q) \mid \alpha \text{ é compatível com } \mathcal{C}\}$, onde $p, q \in M$. A dificuldade técnica que surge é que nem sempre este espaço é uma subvariedade diferenciável de $H^2(M, [a, b], p, q)$; para contornar este problema, procedemos como na

⁷tal condição foi obtida com base num critério para hiperbolicidade de Wojtkowski [66].

geometria sub-riemanniana⁸, e definimos trajetórias *normais* e *abnormais*⁹ do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) . Dada uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, dizemos que γ é uma trajetória abnormal do sistema lagrangeano vinculado se for ponto crítico da *aplicação ponto final*:

$$\begin{aligned} ev_f : H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a)) &\longrightarrow M \\ \alpha &\longmapsto \alpha(b). \end{aligned}$$

Esta é uma aplicação diferenciável definida na variedade de Banach $H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a)) = \{\alpha \in H^2(M, [a, b], \gamma(a)) \mid \alpha \text{ é compatível com } \mathcal{C}\}$, que é uma subvariedade diferenciável mergulhada em $H^2(M, [a, b], \gamma(a))$. Dizemos que $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a))$ é uma trajetória normal se $d\mathcal{L}(\gamma)$ anular um certo subespaço do espaço tangente a $H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a))$ em γ . Tal subespaço, no caso em que γ for ponto regular da aplicação ponto final¹⁰, coincide com o espaço tangente a $H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ em γ , donde γ é ponto crítico da restrição do funcional de Lagrange \mathcal{L} a $H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$. No caso linear, se a lagrangeana for clássica, esta definição das “trajetórias normais” coincide com a definição das “trajetórias vakonômicas” de [30].

Uma caracterização das trajetórias abnormais e normais do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) é dada, respectivamente, nos teoremas (E) e (F). No caso em que o vínculo assume a forma particular proposta por Kozlov *et al.* [6]¹¹, o teorema (F) mostra que as trajetórias normais do sistema lagrangeano vinculado coincidem com as trajetórias “vakonômicas¹²” definidas pelo referido autor. Kozlov, no entanto, define as trajetórias vakonômicas através de variações compatíveis com o vínculo¹³, no sentido clássico. A mesma observação se aplica à formulação vakonômica de [13]. Neste sentido, a originalidade da nossa formulação não se resume ao fato de tomarmos vínculos mais gerais, mas também à caracterização das trajetórias como pontos críticos do funcional

⁸a geometria sub-riemanniana pode ser vista como um caso particular da presente formulação: dada uma variedade riemanniana (M, g) e um subfibrado vetorial diferenciável $\mathcal{D} \subset TM$, tomamos L como sendo a energia cinética K e $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. No caso em que $L = K$ e \mathcal{C} é um vínculo não-linear, a presente formulação sugere, portanto, uma geometria sub-riemanniana “não-linear”. Além disso, é pertinente observar que esta formulação variacional da mecânica também tem intersecção com a teoria do controle ótimo.

⁹nomenclatura esta, aliás, “importada” da geometria sub-riemanniana.

¹⁰situação na qual podemos garantir que $H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ é uma subvariedade diferenciável mergulhada em $H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a))$, numa vizinhança conveniente de γ .

¹¹a formulação de Kozlov *et al.* é um caso particular daquela que consideramos em [57] e [58], definindo-se o vínculo através de um morfismo de fibrados diferenciáveis $f = (f_1, \dots, f_k) : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$, “regular” no mesmo sentido em que consideramos nos referidos artigos.

¹²“vak” é um acrônimo para “Variational Axiomatic Kind”.

¹³para contornar o problema da possível singularidade da aplicação ponto final e obter a equação (4.6) para as trajetórias, Kozlov relaxa a definição de “variação compatível com o vínculo”, tomando variações com extremos fixos que “satisfazem o vínculo a menos de ordem ϵ ”.

de Lagrange numa variedade de Banach de curvas compatíveis com o vínculo.

A seguir, mostramos nos teoremas (G) e (H) que, se uma certa condição de regularidade da lagrangeana for satisfeita¹⁴, então as trajetórias normais do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) são dadas pelas curvas integrais do campo hamiltoniano X_H , chamado *campo variacional* ou *vakonômico*¹⁵. Conforme será detalhado no seção (1.2.1), o espaço de fase onde este campo está naturalmente definido é o *fibrado misto generalizado* ou *centauro* \mathcal{W} — vide definição (2.2), que é o objeto que generaliza naturalmente o *fibrado misto* $\mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}^0 \rightarrow M$ — vide [63], no qual está definido o fluxo que fornece as trajetórias normais de um sistema lagrangeano vinculado com vínculo linear \mathcal{D} .

Na seção (1.3), computamos a hessiana do funcional de Lagrange \mathcal{L} e os campos de Jacobi do campo de vetores variacional; no teorema (I), mostramos que o núcleo da hessiana do funcional de Lagrange numa trajetória normal regular coincide com o conjunto dos campos de Jacobi ao longo desta trajetória, obtidos por variações com extremos fixos; em particular, tal núcleo tem dimensão finita. Estes resultados apontam para um possível desenvolvimento de uma teoria do índice de Morse para sistemas lagrangeanos com vínculos não lineares, como feito em [18], [46] e [50] no caso linear.

Na seção (1.4), é apresentada, no teorema (J), uma generalização do teorema de Jacobi clássico para sistemas lagrangeanos vinculados (M, L, \mathcal{C}) com lagrangeana clássica $L = K - V \circ \tau_M$, e para sistemas mecânicos vinculados (M, K, V, \mathcal{C}) , no caso em que o vínculo \mathcal{C} é um cone, permitindo reduzir o estudo das trajetórias dos mesmos ao caso “geodésico”, ou seja, ao estudo de trajetórias de sistemas análogos com o potencial V nulo, através da introdução de um tensor métrico conveniente — a chamada *métrica de Jacobi*.

Finalmente, na seção (2), demonstramos no teorema (K) uma condição necessária e suficiente para o campo variacional X_H de um sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) com lagrangeana clássica $L = K - V \circ \tau_M$ satisfazendo a condição (\mathcal{R}) seja relacionado por uma certa projeção ao campo $X_{\mathcal{C}}(R_V)$ do sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) , para algum campo de reações vinculares admissível R_V ¹⁶. Se a referida condição for satisfeita, este campo de reações vinculares deve, necessariamente, ser o campo R_V^A que define as trajetórias de d’Alembert-Chetaev, conforme demonstrado no referido teorema. Como corolário — vide corolário (4.9), demonstramos que, no caso em que

¹⁴vide “condição (\mathcal{R}) ”, página 105.

¹⁵estes resultados generalizam a proposição 13 de [6].

¹⁶ou, em outras palavras, uma condição necessária e suficiente para que as curvas integrais do campo variacional se projetem curvas integrais do campo $X_{\mathcal{C}}(R_V)$, ou seja, para que as trajetórias normais do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) coincidam com as trajetórias físicas do sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) definidas pelo campo de reações vinculares admissível R_V .

$\mathcal{C} = \mathcal{D}$ é um vínculo linear, as curvas integrais do campo variacional X_H se projetam nas curvas integrais do campo $X_{\mathcal{C}}(R_V)$ se, e somente se, R_V for o campo de reações vinculares admissível que define as trajetórias d'Alembertianas e o subfibrado \mathcal{D} for completamente integrável (ou seja, se o vínculo for holônomo), no sentido de Frobenius¹⁷.

¹⁷note que o enunciado do corolário (4.9) é mais geral do que o enunciado correspondente de Kozlov *et al.* [6], que fornece a equivalência, para um vínculo linear: “o vínculo é integrável se, e somente se, as trajetórias vakonômicas e d'Alembertianas coincidem”.

Capítulo 1

Sistemas Mecânicos e Lagrangeanos não-Vinculados

Este é um capítulo introdutório, no qual dois são os objetivos a serem alcançados:

- (a) Fixar a notação a ser utilizada no restante do texto e introduzir a definição de “derivada paralela” de um morfismo de fibrados diferenciáveis entre dois fibrados vetoriais diferenciáveis munidos de conexões.
- (b) Descrever, sucintamente, o que se entende por um “sistema mecânico clássico” e por um “sistema lagrangeano”, bem como as equações que definem os movimentos em tais sistemas, no caso não-vinculado.

As notações e definições introduzidas serão utilizadas de modo a permitir enunciar teoremas e escrever demonstrações de uma forma “intrínseca”, livre de coordenadas. Dentre as vantagens de uma tal abordagem (i.e., sem usar coordenadas), destacam-se: (1) o fato de que todos os objetos já aparecem definidos “globalmente”, de maneira natural; (2) o fato de que, em geral, é mais fácil depreender-se o significado geométrico dos objetos se os mesmos são descritos em termos de expressões livres de coordenadas; (3) a compacidade da notação; (4) a possibilidade de se estender a teoria para sistemas com dimensão infinita.

§1. DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES BÁSICAS

No que segue, M denotará uma variedade diferenciável conexa, de dimensão finita e paracompacta; $g : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$ um tensor métrico riemanniano em M ; TM denota o fibrado tangente de M , T^*M o fibrado cotangente, e $\tau_M : TM \rightarrow M$, $\tau_M^* : T^*M \rightarrow M$ as respectivas projeções. O fibrado trivial sobre M com fibra F é denotado por F_M . Neste texto, “diferenciável” significa C^∞ . O conjunto das funções diferenciáveis em M , campos de vetores diferenciáveis em M e formas diferenciáveis em M são denotados por $\mathfrak{F}(M)$, $\mathfrak{X}(M)$ e $\Omega(M)$, respectivamente. $K = \frac{1}{2}g$ é chamada de *energia cinética*. Dado um fibrado vetorial diferenciável $\pi_E : E \rightarrow M$ denotar-se-á por \mathbb{O}_E a seção nula

de E , ou seja, $\mathbb{O}_E = \{\mathbb{O}_p : p \in M\}$, com \mathbb{O}_p o vetor nulo de $E_p = \pi_E^{-1}[p]$, $p \in M$. O $\mathfrak{F}(M)$ -módulo das seções diferenciáveis de $\pi_E : E \rightarrow M$ é denotado por $\Gamma^\infty(E)$.

A seguir, recordar-se-ão alguns conceitos e fatos relativos à geometria do fibrado tangente $\mathbb{T}E$ de um fibrado vetorial diferenciável E (vide, por exemplo, [32], [2] ou [29]), os quais serão usados subseqüentemente.

Dado um fibrado vetorial diferenciável $\pi_E : E \rightarrow M$, o *levantamento vertical* λ^E é o morfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis (onde π_1 é a projeção no primeiro fator):

$$\begin{array}{ccc} E \oplus_M E & \xrightarrow{\lambda^E} & \mathbb{T}E \\ \pi_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tau_E \\ E & \xrightarrow{\text{id}_E} & E \end{array}$$

tal que, dados $q \in M$, $u, v \in E_q$, $\lambda^E(u, v)$ é a imagem de v pela identificação $E_q \rightarrow \mathbb{T}_u(E_q)$ da fibra E_q de $\pi_E : E \rightarrow M$ sobre q com o seu espaço tangente em u , ou seja:

$$\lambda^E(u, v) = \frac{T}{dt} \Big|_{t=0} (u + tv)$$

A imagem de λ^E é o *subfibrado vertical* $\text{Ver}(E) = \ker \mathbb{T}\pi_E$ do fibrado tangente de E . Como λ^E é um monomorfismo, é um isomorfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis sobre sua imagem; denotar-se-á por $\widetilde{\kappa}_E^V : \text{Ver}(E) \rightarrow E \oplus_M E$ o inverso de $\lambda^E : E \oplus_M E \rightarrow \text{Ver}(E)$, e por $\kappa_E^V : \text{Ver}(E) \rightarrow E$ a composta $\pi_2 \circ \widetilde{\kappa}_E^V$, onde π_2 é a projeção no segundo fator. Além disso, dado $v_q \in E$, define-se a aplicação $\lambda_{v_q}^E := \lambda^E(v_q, \cdot) : E_q \rightarrow \text{Ver}_{v_q}(E)$, chamada de *levantamento vertical em v_q* , onde $\text{Ver}_{v_q}(E)$ é a fibra de $\text{Ver}(E)$ sobre v_q .

Uma conexão em $\pi_E : E \rightarrow M$ é um subfibrado vetorial diferenciável $\text{Hor}(E)$ de $\mathbb{T}E$ satisfazendo as duas seguintes condições:

($\nabla 1$) $\mathbb{T}E = \text{Hor}(E) \oplus_E \text{Ver}(E)$, ou seja, $\text{Hor}(E)$ é um subfibrado *horizontal* de $\mathbb{T}E$;

($\nabla 2$) para todo $s \in \mathbb{R}$ e para todo $v_q \in E$, $\mathbb{T}\mu^s \cdot \text{Hor}_{v_q}(E) = \text{Hor}_{sv_q}(E)$, onde $\text{Hor}_{v_q}(E)$ denota a fibra de $\text{Hor}(E)$ sobre v_q e $\mu^s : E \rightarrow E$ é definida por $v_q \mapsto sv_q$.

Denotar-se-ão por $P_V : \mathbb{T}E \rightarrow \text{Ver}(E)$ e $P_H : \mathbb{T}E \rightarrow \text{Hor}(E)$ as projeções induzidas pela decomposição em soma de Whitney de ($\nabla 1$).

A condição ($\nabla 2$) significa que o subfibrado horizontal $\text{Hor}(E)$ é invariante por $\mathbb{T}\mu^s$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Como o subfibrado vertical $\text{Ver}(E)$ também é invariante por $\mathbb{T}\mu^s$ (pois $\mu^s : E \rightarrow E$ preserva fibras), segue que $\mathbb{T}\mu^s$ comuta com as projeções P_V e P_H .

Como $\text{Ver}(E) = \text{Ker } \mathbb{T}\pi_E$, segue da condição $(\nabla 1)$ que a restrição do epimorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}E & \xrightarrow{\mathbb{T}\pi_E} & \mathbb{T}M \\ \tau_E \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tau_M \\ E & \xrightarrow{\pi_E} & M \end{array}$$

ao subfibrado horizontal $\text{Hor}(E)$ é um epimorfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis sobre $\pi_E : E \rightarrow M$, que restrito às fibras é um isomorfismo linear, ou seja, $\mathbb{T}\pi_E : \text{Hor}_{v_q} \rightarrow \mathbb{T}_q M$ é um isomorfismo linear para todo $v_q \in E$. Dado $v_q \in E$, denotar-se-á por $H_{v_q} : \mathbb{T}_q M \rightarrow \text{Hor}_{v_q}(E)$ a inversa de $\mathbb{T}\pi_E : \text{Hor}_{v_q} \rightarrow \mathbb{T}_q M$, chamada de *levantamento horizontal em v_q* . Dados $q \in M$, $s \in \mathbb{R}$, $v_q \in E_q$ e $z_q \in \mathbb{T}_q M$, temos:

$$\mathbb{T}\mu^s \cdot H_{v_q}(z_q) = H_{sv_q}(z_q)$$

pois, pela propriedade $(\nabla 2)$, $\mathbb{T}\mu^s \cdot H_{v_q}(z_q) \in \text{Hor}_{sv_q}(E)$, e $\mathbb{T}\pi_E \cdot \mathbb{T}\mu^s \cdot H_{v_q}(z_q) = \mathbb{T}\pi_E \cdot H_{v_q}(z_q) = z_q$.

Uma conexão em $\pi_E : E \rightarrow M$ define um epimorfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}E & \xrightarrow{\widetilde{\kappa}_E} & E \oplus_M E \\ \tau_E \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_1 \\ E & \xrightarrow{\text{id}_E} & E \end{array}$$

dado por $\widetilde{\kappa}_E := \widetilde{\kappa}_E^V \circ P_V$. Denotar-se-á por κ_E a composta $\pi_2 \circ \widetilde{\kappa}_E : \mathbb{T}E \rightarrow E$; κ_E denomina-se o *conector* da conexão $\text{Hor}(E)$. Note que a restrição do conector ao subfibrado vertical independe da conexão, pois coincide com o inverso do levantamento vertical. Note também que valem as seguintes fórmulas, dados $v_q \in E$ e $X_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q} E$:

$$\begin{aligned} P_V \cdot X_{v_q} &= \lambda_{v_q}(\kappa_E \cdot X_{v_q}) \\ P_H \cdot X_{v_q} &= H_{v_q}(\mathbb{T}\pi_E \cdot X_{v_q}) \end{aligned}$$

de forma que $X_{v_q} = H_{v_q}(\mathbb{T}\pi_E \cdot X_{v_q}) + \lambda_{v_q}(\kappa_E \cdot X_{v_q})$.

Dado $z_q \in \mathbb{T}M$, a conexão $\text{Hor}(E)$ define uma aplicação:

$$\begin{aligned} \nabla_{z_q}^E : \Gamma^\infty(E) &\longrightarrow E_q \\ X &\longmapsto \kappa_E \cdot \mathbb{T}X \cdot z_q \end{aligned} \tag{1.1}$$

que satisfaz, para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$ e para todo $X \in \Gamma^\infty(E)$:

$$\nabla_{z_q}^E fX = f(q)\nabla_{z_q}^E X + z_q[f]X(q) \quad (1.2)$$

Com efeito, dada $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ curva em M com $\frac{T\gamma}{dt}|_{t=0} = z_q$, temos $\mathbb{T}(fX) \cdot z_q = \frac{T}{dt}|_{t=0} \{f(\gamma(t))X(\gamma(t))\} = \mathbb{T}\mu^{f \circ \gamma(0)} \cdot \mathbb{T}X \cdot z_q + \frac{T}{dt}|_{t=0} \{f(\gamma(t))X(q)\} = \mathbb{T}\mu^{f(q)} \cdot \mathbb{T}X \cdot z_q + \lambda_{f(q)X(q)}(z_q[f]X(q))$. Logo, como $\mathbb{T}\mu^{f(q)}$ comuta com P_V por $(\nabla 2)$, segue $\kappa_E \cdot \mathbb{T}(fX) \cdot z_q = \mu^{f(q)}\nabla_{z_q}^E X + z_q[f]X(q)$, como afirmado.

Dados $q \in M$, $v_q \in E_q$ e $z_q \in \mathbb{T}_q M$, temos $H_{v_q}(z_q) = \mathbb{T}X \cdot z_q$, onde $X \in \Gamma^\infty(E)$ é tal que $X(q) = v_q$ e $\nabla_{z_q}^E X = 0$. Com efeito, $\mathbb{T}X \cdot z_q \in \text{Hor}_{v_q}(E)$ (pois $\kappa_E \cdot \mathbb{T}X \cdot z_q = \nabla_{z_q}^E X = 0$) e $\mathbb{T}\pi_E \cdot \mathbb{T}X \cdot z_q = z_q$.

Através de (1.1), define-se a aplicação:

$$\begin{aligned} \nabla^E : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma^\infty(E) &\longrightarrow \Gamma^\infty(E) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X^E Y \end{aligned} \quad (1.3)$$

por $(\nabla_X^E Y)(q) := \nabla_{X(q)}^E Y \in E_q$, para todo $q \in M$. Então ∇^E é $\mathfrak{F}(M)$ -linear no primeiro fator e uma derivação no segundo (ou seja, satisfaz a propriedade de Leibniz (1.2)).

Reciprocamente, dada $\nabla^E : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E)$ que seja $\mathfrak{F}(M)$ -linear no primeiro fator e uma derivação no segundo, existe uma única conexão $\text{Hor}(E)$ que induz ∇^E ; o levantamento horizontal em $v_q \in E$ é dado por $z_q \in \mathbb{T}_q M \mapsto \mathbb{T}X \cdot z_q \in \mathbb{T}_{v_q} E$, sendo $X \in \Gamma^\infty(E)$ tal que $X(q) = v_q$, $\nabla_{z_q}^E X = 0$, e o subespaço horizontal $\text{Hor}_{v_q}(E)$ é a imagem do levantamento horizontal em v_q . Assim sendo, aplicação ∇^E também é chamada de conexão.

Dada $\gamma : I \rightarrow M$ curva em M , I intervalo em \mathbb{R} , define-se a *derivada covariante* ∇_t^E ao longo de γ , induzida pela conexão, por $\nabla_t^E : X \in \Gamma^\infty(\gamma^*E) \mapsto \kappa_E \cdot \frac{TX}{dt} \in \Gamma^\infty(\gamma^*E)$, onde γ^*E denota o *pull back* do fibrado vetorial E por γ , de modo que $\Gamma^\infty(\gamma^*E)$ é o $\mathfrak{F}(I)$ -módulo das seções de E ao longo de γ .

Dados γ curva em M , $t_0 \in \text{dom } \gamma$ e $v \in E_{\gamma(t_0)}$, existe uma única seção $X \in \Gamma^\infty(\gamma^*E)$ tal que $X(t_0) = v$ e $\nabla_t^E X \equiv 0$; X é chamada de *transporte paralelo* de v ao longo de γ , induzido pela conexão, e usa-se a notação $(\forall t \in \text{dom } \gamma) X(t) = \tau_{t_0, t}^\gamma(v)$. Além disso, dado $t_1 \in \text{dom } \gamma$, a aplicação $\tau_{t_0, t_1}^\gamma : E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}$ definida por $v \mapsto \tau_{t_0, t_1}^\gamma(v)$ é um isomorfismo linear. Usando-se o transporte paralelo, pode-se computar o levantamento horizontal em $v_q \in E$ pela fórmula:

$$(\forall z_q \in \mathbb{T}_q M) H_{v_q}(z_q) = \frac{T}{dt}|_{t=0} \tau_{0, t}^\gamma(v_q)$$

onde $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ curva em M com $\frac{T\gamma}{dt}|_{t=0} = z_q$.

Uma *conexão na variedade diferenciável* M é uma conexão ∇ no fibrado tangente $\tau_M : TM \rightarrow M$. Uma tal conexão define um campo de vetores $S \in \mathfrak{X}(TM)$ por:

$$\begin{aligned} S : TM &\longrightarrow TTM \\ v_q &\longmapsto H_{v_q}(v_q) \end{aligned}$$

Como $(\forall v_q \in TM) T\tau_M \cdot S(v_q) = T\tau_M \cdot H_{v_q}(v_q) = v_q$, S é um campo de segunda ordem. Além disso, $(\forall v_q \in TM, s \in \mathbb{R}) S(sv_q) = H_{sv_q}(sv_q) = sH_{sv_q}(v_q) = sT\mu^s \cdot H_{v_q}(v_q) = sT\mu^s \cdot S(v_q)$, ou seja, S é um *spray* - chamado de *spray geodésico* induzido pela conexão ∇ . As *geodésicas* de (M, ∇) são as *curvas integrais de base* (i.e., as projeções em M das suas curvas integrais) do campo de segunda ordem S , ou seja, são as curvas em γ em M que satisfazem $\nabla_t \frac{T\gamma}{dt} = 0$.

Finalmente, dada $\text{Hor}(E)$ conexão no fibrado vetorial diferenciável $\pi_E : E \rightarrow M$, define-se o *tensor de curvatura* $R^E : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E)$, induzido pela conexão, por:

$$R(X, Y) \cdot Z := \nabla_X^E \nabla_Y^E \xi - \nabla_Y^E \nabla_X^E \xi - \nabla_{[X, Y]}^E \xi$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M), \xi \in \Gamma^\infty(E)$. A conexão diz-se *flat* se o tensor de curvatura R^E se anula identicamente.

Dado $n \in \mathbb{N}$, existe uma conexão naturalmente definida no fibrado trivial \mathbb{R}_M^n : para cada $(q, v) \in \mathbb{R}_M^n = M \times \mathbb{R}^n$, temos um isomorfismo linear canônico $T_{(q, v)} \mathbb{R}_M^n \cong T_q M \oplus \mathbb{R}^n$, sendo que o segundo fator desta soma direta se identifica com o subespaço vertical em (q, v) , e então define-se o subespaço horizontal $\text{Hor}_{(q, v)}(\mathbb{R}_M^n)$ como sendo o primeiro fator desta mesma soma direta. Tal subespaço coincide com o espaço tangente em (q, v) da subvariedade mergulhada $M \times \{v\}$ de \mathbb{R}_M^n ; como $(\forall s \in \mathbb{R}) \mu^s(M \times \{v\}) = M \times \{sv\}$, é claro que a propriedade $(\nabla 2)$ é satisfeita, logo a conexão está bem definida. Além disso, tomando uma base (e_1, \dots, e_n) do \mathbb{R}^n , e seções $E_i \in \Gamma^\infty(\mathbb{R}_M^n)$, $1 \leq i \leq n$, definidas por $(\forall q \in M) E_i(q) := (q, e_i)$, temos $(\forall v_q \in TM) \nabla_{v_q}^{\mathbb{R}_M^n} E_i = \kappa_{\mathbb{R}_M^n} \cdot TE_i \cdot v_q = \pi_2 \cdot (v_q, 0)_{E_i(q)} = \mathbb{O}_q$, o que claramente implica que a conexão é *flat*. Note também que o subfibrado horizontal $\text{Hor}(\mathbb{R}_M^n)$ é completamente integrável, no sentido de Frobenius (a folha integral maximal que passa por (q, v) é a subvariedade $M \times \{v\}$); como será visto mais adiante, isto é uma característica das conexões *flat*.

1.1. A derivada nas fibras e a derivada paralela

Sejam $\pi_E : E \rightarrow M$ e $\pi_F : F \rightarrow N$ fibrados vetoriais diferenciáveis sobre M e N , respectivamente, e seja:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{b} & F \\ \pi_E \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{\tilde{b}} & N \end{array}$$

um morfismo de fibrados diferenciáveis (i.e., preserva fibras e é diferenciável, mas não precisa ser linear nas fibras). Denotar-se-á por $\mathbb{F}b$ a *derivada nas fibras* de b , que é o morfismo de fibrados diferenciáveis definido por:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}b : E &\longrightarrow \mathbb{L}(E, \tilde{b}^*F) \\ v_q &\longmapsto \mathbb{F}b(v_q) \end{aligned}$$

onde \tilde{b}^*F é o *pull back* do fibrado vetorial F por \tilde{b} e, para todo $w_q \in E_q$:

$$\mathbb{F}b(v_q) \cdot w_q := \kappa_F^V \cdot \mathbb{T}b \cdot \lambda_{v_q}(w_q) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} b(v_q + tw_q) \in F_{\tilde{b}(q)}$$

sendo $\frac{d}{dt}$ a derivada da curva $t \mapsto b(v_q + tw_q)$ no espaço euclidiano $F_{\tilde{b}(q)}$.

Além disso, dadas conexões $\text{Hor}(E)$ e $\text{Hor}(F)$ nos fibrados vetoriais $\pi_E : E \rightarrow M$ e $\pi_F : F \rightarrow N$, respectivamente, define-se a derivada paralela de b :

DEFINIÇÃO 1.1. O morfismo de fibrados diferenciáveis $\mathbb{P}b : E \rightarrow \mathbb{L}(\text{TM}, \tilde{b}^*F)$ definido por, para todo $v_q \in E$ e para todo $z_q \in \mathbb{T}_qM$:

$$\mathbb{P}b(v_q) \cdot z_q := \kappa_F \cdot \mathbb{T}b \cdot H_{v_q}(z_q) \in F_{\tilde{b}(q)}$$

chama-se a derivada paralela de b .

A grosso modo, a utilidade de tais derivadas (nas fibras e paralela) consiste em facilitar o cálculo da aplicação tangente de b , permitindo que se calcule a sua aplicação em um dado elemento de $\mathbb{T}E$ em termos das suas componentes vertical e horizontal. Ou seja, dado $X_{v_q} \in \mathbb{T}E$, valem as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\pi_F \cdot \mathbb{T}b \cdot X_{v_q} &= \tilde{\mathbb{T}}b \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot X_{v_q} \\ \kappa_F \cdot \mathbb{T}b \cdot X_{v_q} &= \mathbb{F}b(v_q) \cdot \kappa_E \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}b(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_F \cdot X_{v_q} \end{aligned}$$

de forma que, dada γ curva em M e $X \in \Gamma^\infty(\gamma^*E)$, vale:

$$\nabla_t^F(b \circ X) = \mathbb{F}b(X) \cdot \nabla_t^E X + \mathbb{P}b(X) \cdot \frac{T\gamma}{dt}$$

Note que a conexão ∇^F induz, canonicamente, uma conexão $\nabla^{\tilde{b}^*F}$ no *pull back* \tilde{b}^*F : dados $z_q \in TM$ e $X \in \Gamma^\infty(\tilde{b}^*F)$, define-se:

$$\nabla_{z_q}^{\tilde{b}^*F} X := \kappa_F \cdot TX \cdot z_q \in F_{\tilde{b}(q)}$$

Além disso, sendo $\pi_G : G \rightarrow M$ outro fibrado vetorial diferenciável sobre M , munido de uma conexão ∇^G , pode-se definir, pela regra do produto, uma conexão no fibrado vetorial diferenciável $L(E, G) \rightarrow M$. Ou seja, dados $A \in \Gamma^\infty(L(E, G))$ e $Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_Z^{L(E, G)} A$ é definida por, para todo $X \in \Gamma^\infty(E)$:

$$(\nabla_Z^{L(E, G)} A) \cdot X := \nabla_Z^G \{A(X)\} - A(\nabla_Z^E X) \in \Gamma^\infty(G)$$

Note que $(\nabla_Z^{L(E, G)} A) \cdot X$ definida pela equação acima é $\mathfrak{F}(M)$ -linear em X , de forma que, de fato, $\nabla_Z^{L(E, G)} A \in L(E, G)$.

Assim sendo, existem conexões nos fibrados $L(E, \tilde{b}^*F)$ e $L(TM, \tilde{b}^*F)$, naturalmente induzidas pelas conexões de E , F e pela conexão de Levi-Civita de (M, g) (estamos fixando a conexão de Levi-Civita em M , mas poderíamos fazer o mesmo com qualquer outra conexão em M). Usando tais conexões, podemos tomar a derivada nas fibras e a paralela dos morfismos $\mathbb{F}b : E \rightarrow L(E, \tilde{b}^*F)$ e $\mathbb{P}b : E \rightarrow L(TM, \tilde{b}^*F)$, obtendo os morfismos de fibrados diferenciáveis:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\mathbb{F}b &: E \rightarrow L(E, L(E, \tilde{b}^*F)) \equiv L(E \otimes E, \tilde{b}^*F) \\ \mathbb{P}\mathbb{F}b &: E \rightarrow L(TM, L(E, \tilde{b}^*F)) \equiv L(TM \otimes E, \tilde{b}^*F) \\ \mathbb{F}\mathbb{P}b &: E \rightarrow L(E, L(TM, \tilde{b}^*F)) \equiv L(E \otimes TM, \tilde{b}^*F) \\ \mathbb{P}\mathbb{P}b &: E \rightarrow L(TM, L(TM, \tilde{b}^*F)) \equiv L(TM \otimes TM, \tilde{b}^*F) \end{aligned}$$

A relação destes morfismos entre si e com os tensores de curvatura induzidos pelas conexões é dada pela seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 1.1. *Usando a notação acima, temos:*

(i) *Para todo $q \in M$, $v_q, w_q, z_q \in E_q$:*

$$\mathbb{F}^2 b(v_q) \cdot (w_q, z_q) = \mathbb{F}^2 b(v_q) \cdot (z_q, w_q)$$

(ii) Para todo $q \in M$, $v_q, w_q \in E_q$, $z_q \in T_qM$:

$$\mathbb{F}\mathbb{P}b(v_q) \cdot (w_q, z_q) = \mathbb{P}\mathbb{F}b(v_q) \cdot (z_q, w_q)$$

(iii) Para todo $q \in M$, $v_q \in E_q$, $w_q, z_q \in T_qM$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2b(v_q) \cdot (w_q, z_q) &= \mathbb{P}^2b(v_q) \cdot (z_q, w_q) + \mathbb{F}b(v_q) \cdot R^E(z_q, w_q) \cdot v_q + \\ &+ R^F(\tilde{T}\tilde{b} \cdot w_q, \tilde{T}\tilde{b} \cdot z_q) \cdot b(v_q) \end{aligned}$$

Demonstração. (i) Dados $q \in M$, $v_q, w_q, z_q \in E_q$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^2b(v_q) \cdot (z_q, w_q) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbb{F}b(v_q + tw_q) \cdot z_q) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} b(v_q + tw_q + sz_q) = \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} b(v_q + tw_q + sz_q) = \\ &= \mathbb{F}^2f(v_q) \cdot (w_q, z_q) \end{aligned}$$

(ii) Dados $q \in M$, $v_q, w_q \in E_q$ e $z_q \in T_qM$, sejam $\gamma_{z_q} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\frac{T}{ds} \Big|_{s=0} \gamma_{z_q} = z_q$ e $V : (-\tau, \tau) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow E$ tal que $V(t, \cdot)$ é o transporte paralelo de $(v_q + tw_q)$ ao longo de γ_{z_q} , para cada $t \in (-\tau, \tau)$.

Note que, dados $q \in M$ e uma curva $t \mapsto X(t)$ em E_q , então a derivada $\frac{d}{dt} X$ coincide com a derivada covariante $\nabla_t^E X$, olhando-se X como uma seção de E ao longo da curva constante $t \mapsto q$ em M .

Temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\mathbb{P}b(v_q) \cdot (w_q, z_q) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbb{P}b(v_q + tw_q) \cdot z_q) = \\ &= \nabla_{t|t=0}^F \nabla_{s|s=0}^F b(V(t, s)) = \\ &= \nabla_{s|s=0}^F \nabla_{t|t=0}^F b(V(t, s)) + \underbrace{R^F(0, \tilde{T}\tilde{b} \cdot z_q) \cdot b(v_q)}_{=0} = \\ &= \nabla_{s|s=0}^F \{ \mathbb{F}b(V(0, s)) \cdot \nabla_{t|t=0}^E V(t, s) + \\ &\quad + \mathbb{P}b(V(0, s)) \cdot \underbrace{\frac{T}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_{z_q}(s)}_{=0} \} = \\ &= \mathbb{P}\mathbb{F}b(v_q) \cdot (z_q, w_q) + \mathbb{F}b(v_q) \cdot \underbrace{\nabla_{s|s=0}^E \nabla_{t|t=0}^E V(t, s)}_{=R^E(z_q, 0) \cdot v_q = 0} \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{F}\mathbb{P}b(v_q) \cdot (w_q, z_q) = \mathbb{P}\mathbb{F}b(v_q) \cdot (z_q, w_q)$, como afirmado.

(iii) Dados $q \in M$, $v_q \in E_q$ e $w_q, z_q \in T_qM$, sejam $\gamma_{w_q} : (-\tau, \tau) \rightarrow M$ tal que $\frac{T}{dt}|_{t=0} \gamma_{w_q} = w_q$, $V(t)$ e $Z(t)$ transportes paralelos de v_q e z_q ao longo de γ_{w_q} , respectivamente, $\Gamma : (-\tau, \tau) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\frac{d}{ds}|_{s=0} \Gamma(t, s) = Z(t)$ para cada $t \in (-\tau, \tau)$, e $V : (-\tau, \tau) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow E$ tal que $V(t, \cdot)$ é o transporte paralelo de $V(t)$ ao longo de $\Gamma(t, \cdot)$ para cada $t \in (-\tau, \tau)$. Temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^2b(v_q) \cdot (w_q, z_q) &= \nabla_{t|t=0}^F \{ \mathbb{P}f(V(t)) \cdot Z(t) \} = \\
&= \nabla_{t|t=0}^F \{ \nabla_{s|s=0}^F b(V(t, s)) \} = \\
&= \nabla_{s|s=0}^F \{ \nabla_{t|t=0}^F b(V(t, s)) \} + R^F(\mathbb{T}\tilde{b} \cdot w_q, \mathbb{T}\tilde{b} \cdot z_q) \cdot b(v_q) = \\
&= \nabla_{s|s=0}^F \{ \mathbb{F}b(V(0, s)) \cdot \nabla_{t|t=0}^E V(t, s) + \\
&\quad + \mathbb{P}b(V(0, s)) \cdot \frac{T}{dt}|_{t=0} \Gamma(t, s) \} + R^F(\mathbb{T}\tilde{b} \cdot w_q, \mathbb{T}\tilde{b} \cdot z_q) \cdot b(v_q) = \\
&= \mathbb{F}^2b(v_q) \cdot (0, 0) + \mathbb{P}\mathbb{F}b(v_q) \cdot (z_q, 0) + \mathbb{F}b(v_q) \cdot R^E(z_q, w_q) \cdot v_q + \\
&\quad + \mathbb{P}^2b(v_q) \cdot (z_q, w_q) + \mathbb{P}b(v_q) \cdot \underbrace{\nabla_{s|s=0}^{\mathbb{T}M} \frac{T}{dt}|_{t=0} \Gamma(t, s)}_{= \nabla_{t|t=0}^{\mathbb{T}M} Z=0} + \\
&\quad + R^F(\mathbb{T}\tilde{b} \cdot w_q, \mathbb{T}\tilde{b} \cdot z_q) \cdot b(v_q)
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P}^2b(v_q) \cdot (w_q, z_q) = \mathbb{P}^2b(v_q) \cdot (z_q, w_q) + \mathbb{F}b(v_q) \cdot R^E(z_q, w_q) \cdot v_q + R^F(\mathbb{T}\tilde{b} \cdot w_q, \mathbb{T}\tilde{b} \cdot z_q) \cdot b(v_q)$, como afirmado. \square

Como aplicação desta proposição, dado $\pi_E : E \rightarrow M$ fibrado vetorial diferenciável sobre M , munido de uma conexão $\text{Hor}(E)$, computar-se-á uma fórmula, que será usada posteriormente, para o colchete de Lie de dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(E)$ em termos das suas componentes verticais e horizontais. Para tal, dada $f \in \mathfrak{F}(E)$, considere o morfismo de fibrados diferenciáveis:

$$\begin{aligned}
\tilde{f} : E &\longrightarrow \mathbb{R}_M \\
v_q &\longmapsto (q, f(q))
\end{aligned}$$

e seja $\text{Hor}(\mathbb{R}_M)$ a conexão trivialmente definida em \mathbb{R}_M . Então, dados $v_q \in E$ e $X_{v_q} \in T_{v_q}E$, temos:

$$df(v_q) \cdot X_{v_q} = \kappa_{\mathbb{R}_M} \cdot T_{v_q} \tilde{f} \cdot X_{v_q} = \mathbb{F}\tilde{f}(v_q) \cdot \kappa_E \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}\tilde{f}(v_q) \cdot T\pi_E \cdot X_{v_q}$$

Daqui em diante, será omitido o “ \sim ” da notação, identificando-se tacitamente f com \tilde{f} , e será usada esta fórmula para calcular df .

PROPOSIÇÃO 1.2. Usando a notação acima, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(E)$ e $v_q \in E$, temos:

$$\begin{aligned}\kappa_E \cdot [X, Y](v_q) &= \mathbb{F}(\kappa_E \circ Y)(v_q) \cdot \kappa_E \cdot X(v_q) + \mathbb{P}(\kappa_E \circ Y)(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q) - \\ &\quad - \mathbb{F}(\kappa_E \circ X)(v_q) \cdot \kappa_E \cdot Y(v_q) - \mathbb{P}(\kappa_E \circ X)(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q) + \\ &\quad + \mathbb{R}^E(\mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q), \mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q)) \cdot v_q \\ \mathbb{T}\pi_E \cdot [X, Y](v_q) &= \mathbb{F}(\mathbb{T}\pi_E \circ Y)(v_q) \cdot \kappa_E \cdot X(v_q) + \mathbb{P}(\mathbb{T}\pi_E \circ Y)(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q) - \\ &\quad - \mathbb{F}(\mathbb{T}\pi_E \circ X)(v_q) \cdot \kappa_E \cdot Y(v_q) - \mathbb{P}(\mathbb{T}\pi_E \circ X)(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q)\end{aligned}$$

Demonstração. Com efeito, dados $f \in \mathfrak{F}(M)$, $q \in M$ e $v_q \in E_q$, temos $Y(v_q)[f] = df(v_q) \cdot Y(v_q) = \mathbb{F}f(v_q) \cdot \kappa_E \cdot Y(v_q) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q)$. Logo, para todo $v_q, w_q \in E_q$:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(Y[f])(v_q) \cdot w_q &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \{ \mathbb{F}f(v_q + tw_q) \cdot \kappa_E \circ Y(v_q + tw_q) + \\ &\quad + \mathbb{P}f(v_q + tw_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \circ Y(v_q + tw_q) \} = \\ &= \mathbb{F}^2 f(v_q) \cdot (w_q, \kappa_E \cdot Y(v_q)) + \mathbb{F}f(v_q) \cdot \mathbb{F}(\kappa_E \circ Y)(v_q) \cdot w_q + \\ &\quad + \mathbb{F}\mathbb{P}f(v_q) \cdot (w_q, \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q)) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{F}(\mathbb{T}\pi_E \circ Y)(v_q) \cdot w_q\end{aligned}$$

e, para todo $v_q \in E_q, w_q \in \mathbb{T}_q M$, tomando $\gamma_{w_q} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\frac{T\gamma_{w_q}}{dt} \Big|_{t=0} = w_q$ e V transporte paralelo em E de v_q ao longo de γ_{w_q} :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y[f])(v_q) \cdot w_q &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \{ \mathbb{F}f(V) \cdot \kappa_E \circ Y(V) + \mathbb{P}f(V) \cdot \mathbb{T}\pi_E \circ Y(V) \} = \\ &= \mathbb{P}\mathbb{F}f(v_q) \cdot (w_q, \kappa_E \cdot Y(v_q)) + \mathbb{F}f(v_q) \cdot \mathbb{P}(\kappa_E \circ Y)(v_q) \cdot w_q + \\ &\quad + \mathbb{P}^2 f(v_q) \cdot (w_q, \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q)) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{P}(\mathbb{T}\pi_E \circ Y)(v_q) \cdot w_q\end{aligned}$$

Assim, para todo $v_q \in E$, temos:

$$\begin{aligned}
[X, Y](v_q)[f] &= X(v_q)[Y[f]] - Y(v_q)[X[f]] = \\
&= \mathbb{F}(Y[f])(v_q) \cdot \kappa_E \cdot X(v_q) + \mathbb{P}(Y[f])(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q) - \\
&\quad - \mathbb{F}(X[f])(v_q) \cdot \kappa_E \cdot Y(v_q) - \mathbb{P}(X[f])(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q) = \\
&= \mathbb{F}^2 f(v_q) \cdot (\kappa_E \cdot X(v_q), \kappa_E \cdot Y(v_q)) + \mathbb{F}f(v_q) \cdot \mathbb{F}(\kappa_E \circ Y)(v_q) \cdot \kappa_E \cdot X(v_q) + \\
&\quad + \mathbb{F}\mathbb{P}f(v_q) \cdot (\kappa_E \cdot X(v_q), \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q)) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{F}(\mathbb{T}\pi_E \circ Y)(v_q) \cdot \kappa_E \cdot X(v_q) + \\
&\quad + \mathbb{P}\mathbb{F}f(v_q) \cdot (\mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q), \kappa_E \cdot Y(v_q)) + \mathbb{F}f(v_q) \cdot \mathbb{P}(\kappa_E \circ Y)(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q) + \\
&\quad + \mathbb{P}^2 f(v_q) \cdot (\mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q), \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q)) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{P}(\mathbb{T}\pi_E \circ Y)(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q) - \\
&\quad - \{ \mathbb{F}^2 f(v_q) \cdot (\kappa_E \cdot Y(v_q), \kappa_E \cdot X(v_q)) + \mathbb{F}f(v_q) \cdot \mathbb{F}(\kappa_E \circ X)(v_q) \cdot \kappa_E \cdot Y(v_q) + \\
&\quad + \mathbb{F}\mathbb{P}f(v_q) \cdot (\kappa_E \cdot Y(v_q), \mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q)) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{F}(\mathbb{T}\pi_E \circ X)(v_q) \cdot \kappa_E \cdot Y(v_q) + \\
&\quad + \mathbb{P}\mathbb{F}f(v_q) \cdot (\mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q), \kappa_E \cdot X(v_q)) + \mathbb{F}f(v_q) \cdot \mathbb{P}(\kappa_E \circ X)(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q) + \\
&\quad + \mathbb{P}^2 f(v_q) \cdot (\mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q), \mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q)) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{P}(\mathbb{T}\pi_E \circ X)(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q) \} \\
&\hspace{15em} (1.4)
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$[X, Y](v_q)[f] = \mathbb{F}f(v_q) \cdot \kappa_E \cdot [X, Y](v_q) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_E \cdot [X, Y](v_q) \quad (1.5)$$

Logo, pela proposição (1.1) (levando-se em conta que $\text{Hor}(\mathbb{R}_M)$ é *flat*) e pela arbitrariedade da $f \in \mathfrak{F}(M)$ tomada, a tese segue comparando-se as equações (1.4) e (1.5). \square

Como corolário, reobtem-se o seguinte resultado, bem conhecido:

COROLÁRIO 1.1. *Usando a mesma notação, o subfibrado horizontal $\text{Hor}(E)$ é completamente integrável se, e somente se, a conexão $\text{Hor}(E)$ é flat.*

Demonstração. Com efeito, dados $X, Y \in \Gamma^\infty(E)$, temos $\kappa_E \circ X = \kappa_E \circ Y = 0$; logo, pela proposição (1.2), temos $(\forall v_q \in E) \kappa_E \cdot [X, Y](v_q) = R^E(\mathbb{T}\pi_E \cdot Y(v_q), \mathbb{T}\pi_E \cdot X(v_q)) \cdot v_q$, logo $\kappa_E \circ [X, Y] \equiv 0$ se a conexão for *flat*, donde a involutividade da distribuição $\text{Hor}(E)$. A mesma fórmula mostra que, reciprocamente, se $\text{Hor}(E)$ for involutiva, isto é, se $\kappa_E \circ [X, Y] \equiv 0$ para todo $X, Y \in \Gamma^\infty(E)$, então $R^E \equiv 0$, pela arbitrariedade de $v_q \in E, X, Y \in \Gamma^\infty(E)$ e pelo fato de ser $\mathbb{T}\pi_E|_{\text{Hor}_{v_q}(E)} : \text{Hor}_{v_q}(E) \rightarrow \mathbb{T}_q M$ isomorfismo linear. \square

Também como corolário, obter-se-ão, a seguir, duas fórmulas que serão usadas posteriormente para computar a forma simplética canônica do fibrado cotangente de M ,

ω_0 , e o seu *pull back* pela transformação de Legendre $\omega_{\text{TM}} := (\mathbf{g}^b)^* \omega_0$, onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^b : \text{TM} &\longrightarrow \text{T}^*\text{M} \\ v_q &\longmapsto \langle v_q, \cdot \rangle \end{aligned}$$

Para tal, considere em T^*M a conexão induzida pela conexão de Levi-Civita de (M, \mathbf{g}) . Com respeito a estas conexões, a aplicação tangente da transformação de Legendre:

$$\begin{array}{ccc} \text{TTM} & \xrightarrow{\text{Tg}^b} & \text{TT}^*\text{M} \\ \text{T}_{\text{TM}} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{T}_{\text{T}^*\text{M}} \\ \text{TM} & \xrightarrow{\mathbf{g}^b} & \text{T}^*\text{M} \end{array}$$

é um isomorfismo de fibrados vetoriais que preserva os subfibrados horizontais e verticais, ou seja, $\text{Tg}^b \cdot \text{Hor}(\text{TM}) = \text{Hor}(\text{T}^*\text{M})$ e $\text{Tg}^b \cdot \text{Ver}(\text{TM}) = \text{Ver}(\text{T}^*\text{M})$. Isto implica que \mathbf{g}^b é natural com respeito aos conectores, i.e., $\kappa_{\text{T}^*\text{M}} \circ \text{Tg}^b = \mathbf{g}^b \circ \kappa_{\text{TM}}$. Fixadas estas conexões, pode-se usar o seguinte corolário da proposição (1.2) para calcular as referidas formas simpléticas:

COROLÁRIO 1.2. *Usando a notação acima, temos:*

(i) *Para todo $p_q \in \text{T}^*\text{M}$, $X_{p_q}, Y_{p_q} \in \text{T}_{p_q}(\text{T}^*\text{M})$:*

$$\omega_0(X_{p_q}, Y_{p_q}) = \langle \text{T}_{\text{T}^*\text{M}} \cdot X_{p_q}, \kappa_{\text{T}^*\text{M}} \cdot Y_{p_q} \rangle - \langle \text{T}_{\text{T}^*\text{M}} \cdot Y_{p_q}, \kappa_{\text{T}^*\text{M}} \cdot X_{p_q} \rangle$$

(ii) *Para todo $v_q \in \text{TM}$, $X_{v_q}, Y_{v_q} \in \text{T}_{v_q}(\text{TM})$:*

$$\omega_{\text{TM}}(X_{v_q}, Y_{v_q}) = \langle \text{T}_{\text{TM}} \cdot X_{v_q}, \kappa_{\text{TM}} \cdot Y_{v_q} \rangle - \langle \text{T}_{\text{TM}} \cdot Y_{v_q}, \kappa_{\text{TM}} \cdot X_{v_q} \rangle$$

Demonstração. Será demonstrada apenas a parte (i), pois a parte (ii) decorre imediatamente da fórmula da parte (i) e de: (1) $\omega_{\text{TM}}(X_{v_q}, Y_{v_q}) = (\mathbf{g}^b)^* \omega_0(X_{v_q}, Y_{v_q}) = \omega_0(\text{Tg}^b \cdot X_{v_q}, \text{Tg}^b \cdot Y_{v_q})$, (2) $\kappa_{\text{T}^*\text{M}} \circ \text{Tg}^b = \mathbf{g}^b \circ \kappa_{\text{TM}}$ e $\text{T}_{\text{T}^*\text{M}} \circ \text{Tg}^b = \text{T}_{\text{TM}}$.

Sejam θ_0 a 1-forma canônica do fibrado cotangente de M , e $X, Y \in \mathfrak{X}(\text{T}^*\text{M})$ tais que $X(p_q) = X_{p_q}, Y(p_q) = Y_{p_q}$. Temos:

$$\begin{aligned} \omega_0(X_{p_q}, Y_{p_q}) &= -d\theta_0(X_{p_q}, Y_{p_q}) = \\ &= -X_{p_q}[\langle \theta_0, Y \rangle] + Y_{p_q}[\langle \theta_0, X \rangle] + \langle \theta_0(p_q), [X, Y](p_q) \rangle \end{aligned} \quad (1.6)$$

Para computar $X_{p_q}[\langle \theta_0, Y \rangle]$, note que $(\forall W_{p_q} \in T_{p_q}(T^*M)) \langle \theta_0(p_q), W_{p_q} \rangle = \langle p_q, T\tau_{T^*M} \cdot W_{p_q} \rangle$, donde:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\{\langle \theta_0, Y \rangle\}(p_q) \cdot \kappa_{T^*M} \cdot X_{p_q} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle p_q + t\kappa_{T^*M} \cdot X_{p_q}, T\tau_{T^*M} \cdot Y(p_q + t\kappa_{T^*M} \cdot X_{p_q}) \rangle = \\ &= \langle \kappa_{T^*M} \cdot X_{p_q}, T\tau_{T^*M} \cdot Y_{p_q} \rangle + \langle p_q, \mathbb{F}(T\tau_{T^*M} \circ Y)(p_q) \cdot \kappa_{T^*M} \cdot X_{p_q} \rangle \end{aligned}$$

e, tomando $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\frac{T\gamma}{dt} \Big|_{t=0} = T\tau_{T^*M} \cdot X_{p_q}$ e P transporte paralelo de p_q ao longo de γ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\langle \theta_0, Y \rangle\}(p_q) \cdot T\tau_{T^*M} \cdot X_{p_q} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \theta_0 \circ P(t), Y \circ P(t) \rangle = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle P(t), T\tau_{T^*M} \circ Y \circ P(t) \rangle = \\ &= \langle p_q, \mathbb{P}(T\tau_{T^*M} \circ Y)(p_q) \cdot T\tau_{T^*M} \cdot X_{p_q} \rangle \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} X_{p_q}[\langle \theta_0, Y \rangle] &= \mathbb{F}\{\langle \theta_0, Y \rangle\}(p_q) \cdot \kappa_{T^*M} \cdot X_{p_q} + \mathbb{P}\{\langle \theta_0, Y \rangle\}(p_q) \cdot T\tau_{T^*M} \cdot X_{p_q} = \\ &= \langle \kappa_{T^*M} \cdot X_{p_q}, T\tau_{T^*M} \cdot Y_{p_q} \rangle + \langle p_q, \mathbb{F}(T\tau_{T^*M} \circ Y)(p_q) \cdot \kappa_{T^*M} \cdot X_{p_q} \rangle + \\ &+ \langle p_q, \mathbb{P}(T\tau_{T^*M} \circ Y)(p_q) \cdot T\tau_{T^*M} \cdot X_{p_q} \rangle \end{aligned} \quad (1.7)$$

Por outro lado, segue da proposição (1.2) que:

$$\begin{aligned} \langle \theta_0(p_q), [X, Y](p_q) \rangle &= \langle p_q, \mathbb{F}(T\tau_{T^*M} \circ Y)(p_q) \cdot \kappa_{T^*M} \cdot X_{p_q} + \\ &+ \mathbb{P}(T\tau_{T^*M} \circ Y)(p_q) \cdot T\tau_{T^*M} \cdot X_{p_q} \rangle - \\ &- \langle p_q, \mathbb{F}(T\tau_{T^*M} \circ X)(p_q) \cdot \kappa_{T^*M} \cdot Y_{p_q} + \\ &+ \mathbb{P}(T\tau_{T^*M} \circ X)(p_q) \cdot T\tau_{T^*M} \cdot Y_{p_q} \rangle \end{aligned} \quad (1.8)$$

Substituindo-se as equações (1.7) e (1.8) em (1.6), segue a tese. \square

§2. SISTEMAS MECÂNICOS E SISTEMAS LAGRANGEANOS

Um *sistema mecânico clássico* ou, abreviadamente, um *sistema mecânico* (vide [19], [1], [5], [39] e [43]), é uma terna (M, K, \mathcal{F}) , onde M^n é uma variedade diferenciável (que, neste texto, supor-se-á de dimensão finita n), $K : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, cuja restrição a cada fibra do fibrado tangente TM é uma forma quadrática positiva

definida, e:

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{\mathcal{F}} & T^*M \\
 \tau_M \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_{T^*M} \\
 M & \xrightarrow{id_M} & M
 \end{array}$$

é um morfismo de fibrados diferenciáveis. Segundo a nomenclatura usual, denominam-se:

M : espaço de configurações;

K : energia cinética;

\mathcal{F} : campo de forças (externo);

n : número de graus de liberdade do sistema mecânico;

TM : espaço de fase das velocidades;

T^*M : espaço de fase dos momentos.

A energia cinética K define um tensor métrico g em M (por polarização da forma quadrática K em cada fibra de TM), de forma que (M, g) é uma variedade riemanniana. Denotar-se-á por κ o conector induzido pela conexão de Levi-Civita ∇ de (M, g) . Uma curva γ em M diz-se um *movimento* ou uma *trajetória física do sistema mecânico* (M, K, \mathcal{F}) se for uma solução da *equação de Newton*:

$$\mathcal{F}(\dot{\gamma}) = \mu(\nabla_t \dot{\gamma}) \quad (1.9)$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de (M, g) , $\mu := g^b : TM \rightarrow T^*M$ é a transformação de Legendre induzida pelo tensor métrico, ∇_t denota a derivada covariante ao longo de γ induzida por ∇ , e $\dot{\gamma}$ é uma notação abreviada para $\frac{T\gamma}{dt}$. Denotando-se por $g^\sharp := (g^b)^{-1} : T^*M \rightarrow TM$ e $\mathcal{F}^\sharp := g^\sharp \circ \mathcal{F}$ (que também será chamado de *campo de forças*), obtém-se a seguinte forma equivalente da equação (1.9), que será usada mais freqüentemente:

$$\mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}) = \nabla_t \dot{\gamma} \quad (1.10)$$

Note que, para um *sistema mecânico livre*, i.e., no qual o campo de forças \mathcal{F} é nulo, os movimentos do sistema mecânico coincidem com as geodésicas da variedade riemanniana (M, g) .

Tomando-se levantamentos verticais em ambos os membros desta última equação, obtém-se $\frac{T\dot{\gamma}}{dt} - H_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) = \lambda_{\dot{\gamma}}(\mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}))$, o que mostra que as soluções de (1.10) são as curvas integrais de base do campo de segunda ordem $X_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}(TM)$ definido por, para todo $v_q \in TM$:

$$X_{\mathcal{F}}(v_q) = S(v_q) + \lambda_{v_q}(\mathcal{F}^\sharp(v_q)) \quad (1.11)$$

onde S é o spray geodésico de (M, g) (i.e., definido pela conexão de Levi-Civita).

DEFINIÇÃO 1.2. $X_{\mathcal{F}}$ é o campo de Gibbs-Maggi-Appell (GMA)¹ do sistema mecânico (M, K, \mathcal{F}) .

Neste texto, estaremos particularmente interessados nos casos em que o campo de forças externo:

- (1) é dado por um potencial, ou seja, existe $V \in \mathfrak{F}(M)$, chamada *energia potencial*, tal que $(\forall v_q \in TM) \mathcal{F}(v_q) = -dV(q) \in T_q^*M$;
- (2) é a força de Lorentz induzida por um campo magnético (vide [66]). Ou seja, existe uma 2-forma fechada $\mathbf{B} \in \Omega_2(M)$, chamada *campo magnético*, tal que, definindo-se $\mathcal{Y} : TM \rightarrow T^*M$ por:

$$(\forall q \in M, v_q, w_q \in T_qM) \langle v_q, \mathcal{Y}(w_q) \rangle = \mathbf{B}(v_q, w_q)$$

tem-se $\mathcal{F} = \mathcal{Y}$.

No caso (1), é bem conhecido o fato de que o campo $X_{\mathcal{F}}$ dado por (1.11) é hamiltoniano, com respeito à forma simplética ω_{TM} , sendo a hamiltoniana dada por $H = K + V \circ \tau_M \in \mathfrak{F}(M)$.

Com efeito, dados $v_q \in TM$ e $X_{v_q} \in T_{v_q}(TM)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}H(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle v_q + t\kappa \cdot X_{v_q}, v_q + t\kappa \cdot X_{v_q} \rangle = \\ &= \langle v_q, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle \end{aligned}$$

e, tomando $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\frac{T\gamma}{dt} \Big|_{t=0} = T\tau_M \cdot X_{v_q}$ e \mathcal{V} transporte paralelo de v_q ao longo de γ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}H(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t) \rangle + V(\gamma(t)) \right\} = \\ &= \langle \nabla_{t|t=0} \mathcal{V}, v_q \rangle + dV(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} = \\ &= dV(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} \end{aligned}$$

¹Esta nomenclatura foi sugerida por Fusco e Oliva [16] no contexto de sistemas não-holonômicos lineares.

portanto:

$$\begin{aligned} dH(v_q) \cdot X_{v_q} &= \mathbb{F}H(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}H(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} = \\ &= \langle v_q, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle + dV(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Por outro lado, do corolário (1.2) segue:

$$\begin{aligned} \omega_{TM}(X_{\mathcal{F}}(v_q), X_{v_q}) &= \langle T\tau_M \cdot X_{\mathcal{F}}(v_q), \kappa \cdot X_{v_q} \rangle - \langle T\tau_M \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot X_{\mathcal{F}}(v_q) \rangle = \\ &= \langle v_q, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle - \langle T\tau_M \cdot X_{v_q}, -\text{grad } V(q) \rangle = \\ &= \langle v_q, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle + dV(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} \end{aligned} \quad (1.13)$$

e, comparando-se as equações (1.12) e (1.13), conclui-se que $X_{\mathcal{F}} = \xi_H$, como afirmado.

Notação. Quando o campo de forças externo for dado por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, denotar-se-á o sistema mecânico por (M, K, V) ao invés de $(M, K, -dV \circ \tau_M)$, e o campo GMA por X_V ao invés de $X_{-dV \circ \tau_M}$.

No caso (2), definindo-se $\Omega := \omega_{TM} - \tau_M^* \mathbf{B} \in \Omega_2(M)$, temos $d\Omega = 0$, pois ω_{TM} e \mathbf{B} são fechadas. Além disso, dados $v_q \in TM$ e $X_{v_q}, Y_{v_q} \in T_{v_q}(TM)$, temos:

$$\begin{aligned} \Omega(X_{v_q}, Y_{v_q}) &= \omega_{TM}(X_{v_q}, Y_{v_q}) - \tau_M^* \mathbf{B}(X_{v_q}, Y_{v_q}) \stackrel{\text{corolário (1.2)}}{=} \\ &= \langle T\tau_M \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot Y_{v_q} \rangle - \langle T\tau_M \cdot Y_{v_q}, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle - \mathbf{B}(T\tau_M \cdot X_{v_q}, T\tau_M \cdot Y_{v_q}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

e, usando esta equação e o fato de ser ω_{TM} não-degenerada, conclui-se que Ω é não-degenerada, portanto uma forma simplética em TM .

A seguinte proposição mostra que o campo $X_{\mathcal{H}} \in \mathfrak{X}(TM)$ definido por (1.11) é hamiltoniano com respeito à forma simplética Ω :

PROPOSIÇÃO 1.3. *Usando a notação acima, o campo $X_{\mathcal{H}}$ coincide com o campo hamiltoniano induzido pela energia cinética $K \in \mathfrak{F}(M)$, com respeito à forma simplética Ω , isto é, $X_{\mathcal{H}} = \xi_K$.*

Demonstração. Com efeito, dados $v_q \in TM$ e $X_{v_q} \in T_{v_q}(TM)$, segue de (1.12) com $V = 0$ que:

$$\begin{aligned} dK(v_q) \cdot X_{v_q} &= \mathbb{F}K(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}K(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} = \\ &= \langle v_q, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
\Omega(X_{\mathcal{Y}}(v_q), X_{v_q}) &\stackrel{(1.14)}{=} \langle T\tau_M \cdot X_{\mathcal{Y}}(v_q), \kappa \cdot X_{v_q} \rangle - \langle T\tau_M \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot X_{\mathcal{Y}}(v_q) \rangle - \\
&\quad - \mathbf{B}(T\tau_M \cdot X_{\mathcal{Y}}(v_q), T\tau_M \cdot X_{v_q}) = \\
&= \langle v_q, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle - \langle T\tau_M \cdot X_{v_q}, \mathcal{Y}(v_q) \rangle - \mathbf{B}(v_q, T\tau_M \cdot X_{v_q}) = \\
&= \langle v_q, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle - \mathbf{B}(T\tau_M \cdot X_{v_q}, v_q) - \mathbf{B}(v_q, T\tau_M \cdot X_{v_q}) \stackrel{\mathbf{B} \text{ anti-simétrica}}{=} \\
&= \langle v_q, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Comparando-se as equações (1.15) e (1.16), segue a tese. \square

2.1. Sistemas lagrangeanos

Um *sistema lagrangeano* (vide [19], [1], [5], [39] e [43]), é um par (M, L) , onde M é uma variedade diferenciável e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, denominada *lagrangeana*. Mais geralmente poder-se-ia considerar uma função diferenciável $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, chamada *lagrangeana dependente do tempo*, mas neste texto serão consideradas apenas lagrangeanas independentes do tempo, ou seja, do primeiro tipo. Vide, no entanto, a observação (1.3).

A lagrangeana diz-se *clássica* se for da forma $L = K - V \circ \tau_M$, onde $K : TM \rightarrow \mathbb{R}$, chamada *energia cinética*, é uma função diferenciável, cuja restrição a cada fibra do fibrado tangente TM é uma forma quadrática positiva definida, como anteriormente, e $V \in \mathfrak{F}(M)$, chamada *energia potencial*.

2.1.1. Alguns espaços de curvas

Dados $k \geq 0$ e um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, denotar-se-á por $C^k(M, [a, b])$ o conjunto das curvas $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de classe C^k . Para $k \geq 1$, denotar-se-á por $H^k(M, [a, b])$ o conjunto das curvas $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de classe H^k (uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ diz-se de classe H^k se, tomando-se um mergulho $i : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ dado pelo teorema de Whitney, a composta $i \circ \gamma$ é uma curva de classe H^k em \mathbb{R}^N , ou seja, é absolutamente contínua e sua derivada está no H^{k-1} , sendo $H^0 = L^2$; para $k \geq 1$, esta definição independe do mergulho tomado). Estando o intervalo $[a, b]$ fixado e não havendo risco de confusão, usar-se-ão as notações abreviadas $C^k(M)$ e $H^k(M)$ no lugar de $C^k(M, [a, b])$ e $H^k(M, [a, b])$, respectivamente. Tais conjuntos (para $k \geq 0$ no caso dos espaços C^k , e $k \geq 1$ no caso dos espaços H^k) admitem estruturas de variedades de Banach (i.e., variedades diferenciáveis modeladas em espaços de Banach, vide [32], [33] ou [2], por exemplo) naturalmente definidas — vide [44], [15], [47], [21] ou [14]. Mais precisamente, os espaços H^k , $k \geq 1$, admitem estrutura de variedades de Hilbert (i.e., variedades diferenciáveis modeladas em espaços de Hilbert). Tais estruturas de variedade diferenciável

são tais que, dado um mergulho próprio $i : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ (que existe, pelo teorema de Whitney), então a aplicação $(i \circ) : \gamma \mapsto i \circ \gamma$ é um mergulho de $C^k(M)$ (respectivamente, $H^k(M)$) no espaço de Banach $C^k(\mathbb{R}^N)$ (respectivamente, no espaço de Hilbert $H^k(\mathbb{R}^N)$) e $C^k(M)$ é fechada em $C^k(\mathbb{R}^N)$ (respectivamente, $H^k(M)$ é fechada em $H^k(\mathbb{R}^N)$). Esta propriedade determina as estruturas de variedade diferenciável de $C^k(M)$ e $H^k(M)$ univocamente — são as únicas estruturas de variedade diferenciável em $C^k(M)$ e $H^k(M)$ que as tornam subvariedades mergulhadas de $C^k(\mathbb{R}^N)$ e $H^k(\mathbb{R}^N)$, respectivamente. Em particular, as variedades $C^k(M)$ e $H^k(M)$ são metrízáveis (portanto paracompactas) e separáveis. As inclusões $C^k(M) \rightarrow H^k(M) \rightarrow C^{k-1}(M)$, $k \geq 1$, são diferenciáveis e têm imagens densas. Além disso, dados N variedade diferenciável de dimensão finita e uma aplicação diferenciável $\phi : M \rightarrow N$, a aplicação $(\phi \circ) : \gamma \mapsto \phi \circ \gamma$ é diferenciável de $C^k(M)$ (respectivamente, $H^k(M)$) em $C^k(N)$ (respectivamente, $H^k(N)$). Dada $\gamma \in C^k(M)$ (respectivamente, $\gamma \in H^k(M)$), o espaço tangente em γ é o conjunto das seções de TM ao longo de γ de classe C^k (respectivamente, de classe H^k), ou seja:

$$T_\gamma C^k(M) = C^k(\gamma^* TM) = \{X \in C^k(TM) \mid \tau_M \circ X = \gamma\}$$

e analogamente para $T_\gamma H^k(M)$. Portanto, os fibrados tangentes $\tau_{C^k(M)} : TC^k(M) \rightarrow C^k(M)$ e $\tau_{H^k(M)} : TH^k(M) \rightarrow H^k(M)$ são, respectivamente, $(\tau_M \circ) : C^k(TM) \rightarrow C^k(M)$ e $(\tau_M \circ) : H^k(TM) \rightarrow H^k(M)$.

Mais geralmente, dado $\pi_E : E \rightarrow M$ fibrado vetorial diferenciável sobre M , de dimensão finita, temos fibrados vetoriais diferenciáveis $(\pi_E \circ) : C^k(E) \rightarrow C^k(M)$ sobre $C^k(M)$, para $k \geq 0$, e $(\pi_E \circ) : H^k(E) \rightarrow H^k(M)$ sobre $H^k(M)$, para $k \geq 1$. Estas construções são functoriais, ou seja, dado um morfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & F \\ \pi_E \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & N \end{array}$$

obtêm-se os morfismos de fibrados vetoriais diferenciáveis:

$$\begin{array}{ccc} C^k(E) & \xrightarrow{(\phi \circ)} & C^k(F) \\ (\pi_E \circ) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (\pi_F \circ) \\ C^k(M) & \xrightarrow{(\tilde{\phi} \circ)} & C^k(N) \end{array}$$

para $k \geq 0$ e:

$$\begin{array}{ccc} H^k(E) & \xrightarrow{(\phi \circ)} & H^k(F) \\ (\pi_E \circ) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (\pi_F \circ) \\ H^k(M) & \xrightarrow{(\tilde{\phi} \circ)} & H^k(N) \end{array}$$

para $k \geq 1$.

Dado um tensor métrico g em M , e sendo ∇ a conexão de Levi-Civita de (M, g) , considerar-se-á em $H^k(M)$, $k \geq 1$, o tensor métrico G dado por:

$$G(\eta, \xi) := \sum_{n=0}^{k-1} g(\nabla_t^n \eta(a), \nabla_t^n \xi(a)) + \int_a^b g(\nabla_t^k \eta, \nabla_t^k \xi) dt$$

para toda $\gamma \in H^k(M)$, $\eta, \xi \in T_\gamma H^k(M)$.

Mais geralmente, dados um fibrado vetorial diferenciável riemanniano, de dimensão finita, $\pi_E : (E, g) \rightarrow M$, uma conexão ∇ em E e uma curva $\gamma \in H^k(M)$, considerar-se-á o produto interno no espaço hilbertizável $H^k(\gamma^*E) \equiv H^k(E)_\gamma$ dado pela equação anterior, tornando $(\pi_E \circ) : H^k(E) \rightarrow H^k(M)$ um fibrado riemanniano.

Espaços de curvas com pontos fixos. Na situação descrita acima, considere, a seguir, um conjunto finito $\{t_1, \dots, t_n\} \subset [a, b]$, e seja:

$$\begin{array}{ccc} ev(t_1, \dots, t_n) : C^k(M) & \longrightarrow & M \times \overset{n \text{ fatores}}{\dots} \times M \\ \gamma & \longmapsto & (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)) \end{array}$$

para $k \geq 0$ (o mesmo vale com H^k no lugar de C^k , para $k \geq 1$, *ipsis litteris*).

A aplicação $ev(t_1, \dots, t_n)$ é diferenciável: tomando um mergulho $M \rightarrow \mathbb{R}^N$, dado pelo teorema de Whitney, $ev(t_1, \dots, t_n)$ é linear contínua em $C^k(\mathbb{R}^N)$, portanto sua restrição à subvariedade mergulhada $C^k(M)$ é diferenciável e toma valores na subvariedade mergulhada $M \times \overset{n}{\dots} \times M$ de $\mathbb{R}^N \times \overset{n}{\dots} \times \mathbb{R}^N$. Além disso, a sua aplicação tangente em $\gamma \in C^k(M)$ é dada por:

$$\begin{array}{ccc} T_\gamma ev(t_1, \dots, t_n) : T_\gamma C^k(M) & \longrightarrow & T_{\gamma(t_1)} M \times \dots \times T_{\gamma(t_n)} M \\ X & \longmapsto & (X(t_1), \dots, X(t_n)) \end{array}$$

que é claramente sobrejetiva, e como o seu núcleo tem codimensão finita (portanto admite um complementar fechado em $T_\gamma C^k(M)$), isto mostra que $ev(t_1, \dots, t_n)$ é uma submersão. Ou seja, dado $(q_1, \dots, q_n) \in M \times \overset{n}{\dots} \times M$, a sua imagem inversa $ev(t_1, \dots, t_n)^{-1}$

$[(q_1, \dots, q_n)] = \{\gamma \in C^k(M) \mid \gamma(t_i) = q_i, 1 \leq i \leq n\}$ é uma subvariedade mergulhada fechada e de codimensão finita de $C^k(M)$, cujo espaço tangente em γ é o subespaço $\{X \in T_\gamma C^k(M) \mid X(t_i) = 0, 1 \leq i \leq n\}$.

Estaremos particularmente interessados em dois casos:

- (1) para $n = 1, t_1 = a$, usa-se a notação $ev_i := ev(a)$, chamada *aplicação ponto inicial*, e, dado $q \in M, C^k(M, q) := ev_i^{-1}[q]$.
- (2) para $n = 1, t_1 = b$, usa-se a notação $ev_f := ev(b)$, chamada *aplicação ponto final*. Dados $p, q \in M$ restrição de ev_f a $C^k(M, q)$ também é uma submersão, e a imagem inversa $ev_f|_{C^k(M, q)}^{-1}[p]$ coincide com a subvariedade mergulhada $ev(a, b)^{-1}[(p, q)]$ de $C^k(M)$, que será denotada por $C^k(M, p, q)$.

2.1.2. O princípio de Hamilton da ação estacionária

Uma lagrangeana $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ define funcionais $\mathcal{L} : C^k(M, [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, para $k \geq 1$, e $\mathcal{L} : H^k(M, [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, para $k \geq 2$, dados por:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b L(\dot{\gamma})$$

Se a lagrangeana for clássica, \mathcal{L} também é um funcional bem definido em $H^1(M, [a, b])$. Estes funcionais são chamados de *funcionais de Lagrange*.

PROPOSIÇÃO 1.4. *Os funcionais $\mathcal{L} : C^k(M, [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, para $k \geq 1$, e $\mathcal{L} : H^k(M, [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, para $k \geq 2$ são diferenciáveis. Se a lagrangeana for clássica, $\mathcal{L} : H^1(M, [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ também é diferenciável.*

A demonstração desta proposição é a mesma de [56], com pequenas modificações, e será precedida do seguinte lema:

LEMA 1.1. *Dado $k \geq 1$, seja:*

$$\begin{aligned} \frac{T}{dt} : C^k(M) &\longrightarrow C^{k-1}(TM) \\ \gamma &\longmapsto \frac{T\gamma}{dt} \end{aligned}$$

Então:

- (i) $\frac{T}{dt}$ é diferenciável;
- (ii) Dada ∇ conexão em M , temos, para toda $\gamma \in C^k(M)$:

$$\begin{aligned} T_\gamma\left(\frac{T}{dt}\right) : T_\gamma C^k(M) &\longrightarrow T_\gamma C^{k-1}(TM) \\ X &\longmapsto \lambda_{\dot{\gamma}} \nabla_t X + H_{\dot{\gamma}} X \end{aligned}$$

e o mesmo vale substituindo-se H^k no lugar de C^k , para $k \geq 2$.

Observação 1.1. Para $k = 1$, pode-se considerar $\frac{T}{dt}$ como uma aplicação $H^1(M) \rightarrow H^1L^2(TM)$, onde $H^1L^2(TM) = \{X : [a, b] \rightarrow TM \mid \gamma = \tau_M \circ X \in H^1(M) \text{ e } X \in L^2(\gamma^*TM)\}$. Pode-se mostrar que $H^1L^2(TM)$ admite uma estrutura natural de variedade de Banach, tal que $(\tau_M \circ) : H^1L^2(TM) \rightarrow H^1(M)$ seja um fibrado vetorial diferenciável. Então $\frac{T}{dt} : H^1(M) \rightarrow H^1L^2(TM)$ é uma seção diferenciável deste fibrado vetorial. Vide detalhes em [56].

Demonstração. Será demonstrado apenas o caso C^k , $k \geq 1$, pois a demonstração do caso H^k , $k \geq 2$, é a mesma, *ipsis litteris*.

(i) Com efeito, provemos para $M = \mathbb{R}^n$. Então $TM \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, portanto $C^{k-1}(TM) \equiv C^{k-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \equiv C^{k-1}(\mathbb{R}^n) \times C^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, e:

$$\begin{aligned} \frac{T}{dt} : C^k(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^{k-1}(\mathbb{R}^n) \times C^{k-1}(\mathbb{R}^n) \\ \gamma &\longmapsto (\gamma, \frac{d\gamma}{dt}) \end{aligned}$$

que é linear contínua, portanto diferenciável.

O caso geral se reduz ao caso $M = \mathbb{R}^n$, tomando-se um mergulho $M \rightarrow \mathbb{R}^N$ dado pelo teorema de Whitney: a restrição da aplicação diferenciável $\frac{T}{dt} : C^k(\mathbb{R}^N) \rightarrow C^{k-1}(T\mathbb{R}^N)$ à subvariedade mergulhada $C^k(M)$ de $C^k(\mathbb{R}^N)$ toma valores na subvariedade mergulhada $C^{k-1}(TM)$ de $C^{k-1}(T\mathbb{R}^N)$, portanto $\frac{T}{dt} : C^k(M) \rightarrow C^{k-1}(TM)$ é diferenciável.

(ii) Com efeito, dado $X \in T_\gamma C^k(M)$, seja $s \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \gamma_s \in C^k(M)$ tal que $\frac{T\gamma_s}{ds}|_{s=0} = X$. Temos, para todo $t \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \frac{T}{ds}|_{s=0} \frac{T\gamma_s}{dt} &= \nabla_{s|s=0} \frac{T\gamma_s}{dt} = \\ &= \nabla_t \frac{T\gamma_s}{ds}|_{s=0} = \\ &= \nabla_t X \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} T\tau_M \cdot \frac{T}{ds}|_{s=0} \frac{T\gamma_s}{dt} &= \frac{T}{ds}|_{s=0} \{ \tau_M \circ \frac{T\gamma_s}{dt} \} = \\ &= \frac{T}{ds}|_{s=0} \gamma_s(t) = X(t) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\left(\frac{T}{dt}\right) \cdot X &= \frac{T}{ds}|_{s=0} \frac{T\gamma_s}{dt} = \\ &= \lambda_{\dot{\gamma}(t)}\left(\kappa \cdot \frac{T}{ds}|_{s=0} \frac{T\gamma_s}{dt}\right) + H_{\dot{\gamma}(t)}\left(\mathbb{T}\tau_M \cdot \frac{T}{ds}|_{s=0} \frac{T\gamma_s}{dt}\right) = \\ &= \lambda_{\dot{\gamma}(t)}(\nabla_t X) + H_{\dot{\gamma}(t)}(X(t)) \end{aligned}$$

□

Demonstração da proposição (1.4). (i) Para o caso C^k , $k \geq 1$:

Basta observar que \mathcal{L} pode ser escrito como a seguinte composição de aplicações diferenciáveis:

$$\mathcal{L} = \left(\int_a^b\right) \circ (L \circ) \circ \left(\frac{T}{dt}\right)$$

onde:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{dt}\right) : C^k(M) &\longrightarrow C^{k-1}(TM) \\ \gamma &\longmapsto \frac{T\gamma}{dt} \end{aligned}$$

como no lema (1.1),

$$(L \circ) : C^{k-1}(TM) \longrightarrow C^{k-1}(\mathbb{R})$$

e:

$$\begin{aligned} \int_a^b : C^{k-1}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto \int_a^b \gamma \end{aligned}$$

que é linear contínua (portanto diferenciável).

(ii) Para o caso H^k , $k \geq 2$, a demonstração é a mesma de (i), *ipsis litteris*, substituindo-se H^k no lugar de C^k .

(iii) Para o caso H^1 , se a lagrangeana for clássica, i.e., se for da forma $L = K - V \circ \tau_M$:

Inicialmente, note que, como no caso anterior, $\gamma \in H^1(M) \mapsto \int_a^b V(\gamma) \in \mathbb{R}$ pode ser escrita como uma composição de aplicações diferenciáveis $(\int_a^b) \circ (V \circ)$, onde $(V \circ) : H^1(M) \rightarrow H^1(\mathbb{R})$ e $(\int_a^b) : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Resta mostrar, pois, que $\gamma \in H^1(M) \mapsto \int_a^b K(\dot{\gamma}) \in \mathbb{R}$ é diferenciável. Para tal, seja g o tensor métrico em M induzido pela energia cinética K , e considere um mergulho isométrico $(M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, cuja existência é assegurada pelo teorema de Nash-Moser. Então $\gamma \in H^1(\mathbb{R}^N) \mapsto \frac{1}{2} \int_a^b \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \in \mathbb{R}$ é diferenciável, e a restrição deste funcional à subvariedade mergulhada $H^1(M)$ de $H^1(\mathbb{R}^N)$ coincide com $\gamma \in H^1(M) \mapsto \int_a^b K(\dot{\gamma}) \in \mathbb{R}$, o que conclui a demonstração.

□

As trajetórias de um sistema lagrangeano (M, L) serão definidas, a seguir, através do princípio de Hamilton da ação estacionária:

DEFINIÇÃO 1.3. Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ diz-se uma trajetória do sistema lagrangeano (M, L) se for de classe C^1 e se for um ponto estacionário de \mathcal{L} em $C^1(M, [a, b], p, q)$, onde $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b) \in M$.

DEFINIÇÃO 1.4. A lagrangeana $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se regular se $\mathbb{F}L : TM \rightarrow T^*M$ for um difeomorfismo local.

Observação 1.2. Se L for uma lagrangeana regular, seria equivalente considerar, para $k \geq 2$, C^k ou H^k no lugar de C^1 na definição (1.3), pois neste caso todas as trajetórias são C^∞ . Se a lagrangeana for clássica, seria equivalente, ainda, considerar H^1 no lugar de C^1 .

No caso geral, temos apenas as implicações $(\gamma \in C^k(M, p, q) \text{ e } \gamma \text{ ponto crítico de } L \text{ em } C^k(M, p, q)) \Rightarrow (\gamma \in H^k(M, p, q) \text{ e } \gamma \text{ ponto crítico de } L \text{ em } H^k(M, p, q)) \Rightarrow (\gamma \in C^{k-1}(M, p, q) \text{ e } \gamma \text{ ponto crítico de } L \text{ em } C^{k-1}(M, p, q))$, para $k \geq 2$, que decorrem do fato de as inclusões $C^k(M) \rightarrow H^k(M) \rightarrow C^{k-1}(M)$ serem diferenciáveis e terem imagens densas.

PROPOSIÇÃO 1.5. Seja ∇ uma conexão em M . Dados um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\gamma \in C^1(M, [a, b])$, então γ é trajetória do sistema lagrangeano (M, L) se, e somente se, γ for solução da equação de Euler-Lagrange:

$$\nabla_t(\mathbb{F}L(\dot{\gamma})) - \mathbb{P}L(\dot{\gamma}) = 0 \quad (1.17)$$

Demonstração. Com efeito, dado $X \in T_\gamma C^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$, seja $s \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \gamma_s \in C^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$ tal que $\frac{T\gamma_s}{ds}|_{s=0} = X$. Temos:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}(\gamma) \cdot X &= \frac{d}{ds}|_{s=0} \int_a^b L(\dot{\gamma}_s(t)) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{ds}|_{s=0} L(\dot{\gamma}_s(t)) dt = \\ &= \int_a^b \mathbb{F}L(\dot{\gamma}(t)) \cdot \nabla_t X + \mathbb{P}L(\dot{\gamma}(t)) \cdot X(t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Suponha que $d\mathcal{L}(\gamma) \cdot T_\gamma C^1(M, \gamma(a), \gamma(b)) = \{0\}$. Então a equação acima implica que $t \in [a, b] \mapsto \mathbb{F}L(\dot{\gamma}(t)) \in T^*M$ é de classe C^1 ; para verificar este fato, basta, por exemplo, tomar um referencial paralelo ao longo de γ , e então segue da equação (1.18)

que a derivada fraca (i.e., no sentido de distribuições) de cada componente de $\mathbb{F}\mathbb{L}(\dot{\gamma})$ neste referencial é uma função contínua. Assim, como $J(a) = J(b) = 0$, segue de (1.18) que:

$$0 = d\mathcal{L}(\gamma) \cdot X = \int_a^b \{-\nabla_t(\mathbb{F}\mathbb{L}(\dot{\gamma})) + \mathbb{P}\mathbb{L}(\dot{\gamma}(t))\} \cdot X(t) dt$$

para todo $X \in T_\gamma C^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$, logo γ é solução de (1.17). Reciprocamente, se γ é solução de (1.17), então γ e $\mathbb{F}\mathbb{L}(\dot{\gamma})$ são de classe C^1 , de modo que $d\mathcal{L}(\gamma) \cdot X$ também é dada pela última equação, para todo $X \in T_\gamma C^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$, e portanto se anula. \square

Observação 1.3. (1) *Note que, em geral, se $\gamma \in C^1(M, [a, b])$ for trajetória do sistema lagrangeano (M, L) , então, pela demonstração acima, γ e $\mathbb{F}\mathbb{L}(\dot{\gamma})$ são de classe C^1 , mas não temos como garantir maior regularidade de γ , a menos que a lagrangeana seja regular, como veremos na proposição (1.6).*

(2) *Note que, em particular, as soluções de (1.17) independem da conexão que se tome em M (i.e., se γ for solução de (1.17) usando a derivada paralela induzida por uma dada conexão, o mesmo seria verdadeiro se fosse tomada a derivada paralela induzida por qualquer outra conexão). Com efeito, pela proposição, γ é solução de (1.17) se, e somente se, for ponto crítico de \mathcal{L} em $C^1(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, e isto claramente independe da conexão tomada.*

(3) *A equação (1.17) é uma versão livre de coordenadas das equações de Euler-Lagrange clássicas da lagrangeana L . Ou seja, localmente, tomando um sistema de coordenadas (q^1, \dots, q^n) em M , a equação (1.17) se escreve neste sistema de coordenadas como:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0$$

para $1 \leq k \leq n$.

(4) *No caso de uma lagrangeana dependente do tempo $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, um argumento semelhante ao da demonstração da proposição (1.4) mostra que o funcional:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : C^1(M, [a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto \int_a^b L(\dot{\gamma}(t), t) dt \end{aligned}$$

é diferenciável. Além disso, dados $\gamma \in C^1(M, [a, b])$ e $X \in T_\gamma C^1(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, usando a notação $(\forall v_q \in TM, \forall t \in \mathbb{R}) L_t(v_q) := L(v_q, t)$ e tomando $s \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto$

$\gamma_s \in C^1(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ tal que $\frac{T\gamma_s}{ds}|_{s=0} = X$, temos:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}(\gamma) \cdot X &= \frac{d}{ds}|_{s=0} \int_a^b L(\dot{\gamma}_s(t), t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{ds}|_{s=0} L_t(\dot{\gamma}_s(t)) dt = \\ &= \int_a^b \mathbb{F}L_t(\dot{\gamma}(t)) \cdot \nabla_t X + \mathbb{P}L_t(\dot{\gamma}(t)) \cdot X(t) \stackrel{X(a)=X(b)=0}{=} \\ &= \int_a^b \{-\nabla_t(\mathbb{F}L_t(\dot{\gamma})) + \mathbb{P}L_t(\dot{\gamma}(t))\} \cdot X(t) dt \end{aligned}$$

donde γ é ponto crítico de \mathcal{L} em $C^1(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ se, e somente se, para todo $t \in [a, b]$:

$$\nabla_t(\mathbb{F}L_t(\dot{\gamma})) - \mathbb{P}L_t(\dot{\gamma}(t)) = 0$$

Como consequência imediata da proposição (1.5), $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma trajetória do sistema lagrangeano (M, L) se, e somente se, a restrição de γ a qualquer intervalo fechado contido em $[a, b]$ também o for. Isto motiva a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.5. Dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $\gamma : I \rightarrow M$ diz-se uma trajetória do sistema lagrangeano (M, L) , se o for para qualquer intervalo fechado $[a, b] \subset I$.

Assim, aplicando-se a proposição (1.5), conclui-se que as trajetórias do sistema lagrangeano (M, L) são as soluções $\gamma : I \rightarrow M$ da equação (1.17), com $I \subset \mathbb{R}$ intervalo. Como consequência da próxima proposição, se a lagrangeana for regular, tais trajetórias são as curvas integrais de base de um campo de segunda ordem em TM , que é hamiltoniano com relação à forma simplética $\omega := (\mathbb{F}L)^*\omega_0$, onde ω_0 é a forma simplética canônica do fibrado cotangente T^*M , conforme notação já fixada anteriormente.

PROPOSIÇÃO 1.6. Seja (M, L) um sistema lagrangeano, com L uma lagrangeana regular. Então $\omega := (\mathbb{F}L)^*\omega_0$ é uma forma simplética em TM , e as trajetórias de (M, L) são as curvas integrais de base do campo de segunda ordem hamiltoniano ξ_H induzido pela hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_q &\longmapsto \mathbb{F}L(v_q) \cdot v_q - L(v_q) \end{aligned}$$

A demonstração da proposição será precedida do seguinte lema:

LEMA 1.2. *Sejam $\pi_E : E \rightarrow M$ e $\pi_F : F \rightarrow M$ fibrados vetoriais diferenciáveis sobre M , de dimensão finita, e seja:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{b} & F \\ \pi_E \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M \end{array}$$

um morfismo de fibrados diferenciáveis. Então $b : E \rightarrow F$ é um difeomorfismo local se, e somente se $(\forall v_q \in E) \mathbb{F}b(v_q) : E_q \rightarrow F_q$ for um isomorfismo linear.

Demonstração. Com efeito, dados $v_q \in E$ e $X_{v_q} \in T_{v_q}E$, temos, tomando conexões $\text{Hor}(E)$ e $\text{Hor}(F)$:

$$\begin{aligned} T\pi_F \cdot Tb \cdot X_{v_q} &= T\pi_E \cdot X_{v_q} \\ \kappa_F \cdot Tb \cdot X_{v_q} &= \mathbb{F}b(v_q) \cdot \kappa_E \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}b(v_q) \cdot T\pi_F \cdot X_{v_q} \end{aligned}$$

Portanto, supondo $(\forall v_q \in E) \mathbb{F}b(v_q) : E_q \rightarrow F_q$ isomorfismo linear, conclui-se que $T_{v_q}b \cdot X_{v_q} = 0 \Rightarrow X_{v_q} = 0$, donde $(\forall v_q \in E) T_{v_q}b : T_{v_q}E \rightarrow T_{b(v_q)}F$ é isomorfismo linear e b é um difeomorfismo local pelo teorema da função inversa. A recíproca é óbvia, pois b preserva fibras, logo $(\forall q \in M) b : E_q \rightarrow F_q$ é um difeomorfismo local, o que claramente implica que $(\forall v_q \in E) \mathbb{F}b(v_q) : E_q \rightarrow F_q$ é um isomorfismo linear. \square

Aplicando-se o lema para $\mathbb{F}L : TM \rightarrow T^*M$, conclui-se que L é uma lagrangeana regular se, e somente se, $(\forall v_q \in TM) \mathbb{F}\mathbb{F}L(v_q) : T_qM \rightarrow T_q^*M$ for um isomorfismo linear.

Demonstração da proposição (1.6). Sejam ∇ conexão em M e $\kappa : TTM \rightarrow TM$ o conector induzido por ∇ . Dada $\gamma : I \rightarrow M$ de classe C^1 , se $\mathbb{F}L(\dot{\gamma})$ for de classe C^1 , então $\dot{\gamma}$ também é, pelo fato de ser $\mathbb{F}L$ um difeomorfismo local, e, neste caso: $\nabla_t(\mathbb{F}L(\dot{\gamma})) = \mathbb{F}^2L(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t\dot{\gamma} + \mathbb{P}\mathbb{F}L(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}$. Isto mostra que γ é solução de (1.17) se, e somente se:

$$\mathbb{F}^2L(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t\dot{\gamma} + \mathbb{P}\mathbb{F}L(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma} - \mathbb{P}L(\dot{\gamma}) = 0$$

Usando novamente o fato de que L é regular, pelo lema anterior esta última equação é equivalente a:

$$\nabla_t\dot{\gamma} + \mathbb{F}^2L(\dot{\gamma})^{-1} \cdot \mathbb{P}\mathbb{F}L(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma} - \mathbb{F}^2L(\dot{\gamma})^{-1} \cdot \mathbb{P}L(\dot{\gamma}) = 0$$

e, tomando levantamentos verticais em ambos os membros desta última equação, conclui-se que as soluções de (1.17) são as curvas integrais de base do campo de segunda ordem:

$$\begin{aligned} X_L : TM &\longrightarrow TTM \\ v_q &\longmapsto S(v_q) + \lambda_{v_q}(-\mathbb{F}^2L(v_q)^{-1} \cdot \mathbb{PFL}(v_q) \cdot v_q + \mathbb{F}^2L(v_q)^{-1} \cdot \mathbb{PL}(v_q)) \end{aligned}$$

onde S é o spray geodésico de (M, ∇) .

Resta mostrar que este é o campo hamiltoniano induzido pela hamiltoniana H . Inicialmente, note que $\omega := (\mathbb{FL})^*\omega_0$ de fato é uma forma simplética em TM , pois o *pull back* de uma forma simplética por um difeomorfismo local é uma forma simplética.

Dados $v_q \in TM$ e $X_{v_q} \in T_{v_q}(TM)$, seja $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \gamma(t) \in TM$ tal que $\frac{T\gamma}{dt}|_{t=0} = X_{v_q}$. Temos:

$$\begin{aligned} dH(v_q) \cdot X_{v_q} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{\mathbb{FL}(\gamma(t)) \cdot \gamma(t) - L(\gamma(t))\} = \\ &= \mathbb{F}^2L(v_q) \cdot (\kappa \cdot X_{v_q}, v_q) + \mathbb{PFL}(v_q) \cdot (T\tau_M \cdot X_{v_q}, v_q) + \\ &\quad + \mathbb{FL}(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} - \mathbb{FL}(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} - \mathbb{PL}(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} = \\ &= \mathbb{F}^2L(v_q) \cdot (\kappa \cdot X_{v_q}, v_q) + \mathbb{PFL}(v_q) \cdot (T\tau_M \cdot X_{v_q}, v_q) - \mathbb{PL}(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \omega(X_L(v_q), X_{v_q}) &= \omega_0(T(\mathbb{FL}) \cdot X_L(v_q), T(\mathbb{FL}) \cdot X_{v_q}) \stackrel{\text{corolário (1.2)}}{=} \\ &= \langle T\pi_{T^*M} \cdot T(\mathbb{FL}) \cdot X_L(v_q), \kappa \cdot T(\mathbb{FL}) \cdot X_{v_q} \rangle - \\ &\quad - \langle T\pi_{T^*M} \cdot T(\mathbb{FL}) \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot T(\mathbb{FL}) \cdot X_L(v_q) \rangle = \\ &= \langle v_q, \mathbb{F}^2L(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \mathbb{PFL}(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} \rangle - \\ &\quad - \langle T\tau_M \cdot X_{v_q}, \mathbb{F}^2L(v_q) \cdot \{-\mathbb{F}^2L(v_q)^{-1} \cdot \mathbb{PFL}(v_q) \cdot v_q + \\ &\quad + \mathbb{F}^2L(v_q)^{-1} \cdot \mathbb{PL}(v_q)\} \rangle - \\ &\quad - \langle T\tau_M \cdot X_{v_q}, \mathbb{PFL}(v_q) \cdot v_q \rangle = \\ &= \langle v_q, \mathbb{F}^2L(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \mathbb{PFL}(v_q) \cdot T\tau_M \cdot X_{v_q} \rangle - \\ &\quad - \langle T\tau_M \cdot X_{v_q}, \mathbb{PL}(v_q) \rangle \end{aligned} \quad (1.20)$$

Comparando-se as equações (1.19) e (1.20), segue $X_L = \xi_H$. \square

COROLÁRIO 1.3. *Se L for uma lagrangeana clássica, i.e., se $L = K - V \circ \tau_M$, então as trajetórias do sistema lagrangeano (M, L) coincidem com as trajetórias do sistema mecânico (M, K, V) .*

Demonstração. Com efeito, se $L = K - V \circ \tau_M$, então $\mathbb{F}L$ é a transformação de Legendre $\mu = g^b : TM \rightarrow T^*M$, onde g é o tensor métrico em M induzido pela energia cinética K . A lagrangeana é, pois, regular (mais precisamente, é *hiper-regular*, ou seja, $\mathbb{F}L$ um difeomorfismo). Além disso, $\omega = (\mathbb{F}L)^* \omega_0 = \mu^* \omega_0 = \omega_{TM}$, e:

$$\begin{aligned} (\forall v_q \in TM) H(v_q) &= \mathbb{F}L(v_q) \cdot v_q - L(v_q) = \\ &= \langle v_q, v_q \rangle - \frac{1}{2} \langle v_q, v_q \rangle + V(q) = \\ &= K(v_q) + V(q) \end{aligned}$$

ou seja, $H = K + V \circ \tau_M$, e como já foi mostrado as trajetórias do sistema mecânico (M, K, V) coincidem com as curvas integrais de base do campo de segunda ordem hamiltoniano induzido por esta hamiltoniana, com respeito à forma simplética ω_{TM} . \square

Capítulo 2

A Geometria do Vínculo

Dado um sistema mecânico (M, K, \mathcal{F}) ou um sistema Lagrangeano (M, L) , deseja-se estudar movimentos do sistema mecânico ou do sistema lagrangeano que sejam compatíveis com um dado vínculo, ou seja, nos quais existe uma restrição no conjunto das possíveis velocidades que as trajetórias do sistema podem assumir. Neste capítulo, formalizar-se-á este conceito de “vínculo” e estudar-se-ão exemplos e algumas propriedades geométricas inerentes ao mesmo.

DEFINIÇÃO 2.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Um vínculo em TM é uma subvariedade mergulhada \mathcal{C} do fibrado tangente do espaço de configurações M , à qual a restrição da projeção τ_M do fibrado tangente, doravante denotada por $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$, é uma submersão. Um movimento ou trajetória compatível com \mathcal{C} , ou horizontal a \mathcal{C} , é uma curva absolutamente contínua γ em M tal que $\frac{T\gamma}{dt} \in \mathcal{C}$ quase sempre em $\text{dom } \gamma$.*

Um vínculo num sistema mecânico (M, K, \mathcal{F}) ou num sistema Lagrangeano (M, L) é um vínculo no espaço de fase das velocidades TM de (M, K, \mathcal{F}) ou de (M, L) .

A hipótese de que $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ seja uma submersão é usada para garantir:

- (a) que, para toda velocidade admissível pelo vínculo $v_q \in \mathcal{C}$, exista um movimento compatível com o vínculo $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ cuja velocidade inicial $\dot{\gamma}(0)$ coincida com v_q ;
- (b) a existência das estruturas de variedade de Banach nos espaços de curvas compatíveis com o vínculo, $H^k(M, \mathcal{C}, [a, b]) = \{\alpha \in H^k(M, [a, b]) \mid \alpha \text{ é compatível com } \mathcal{C}\}$, para $k \geq 2$ e $C^k(M, \mathcal{C}, [a, b]) = \{\alpha \in C^k(M, [a, b]) \mid \alpha \text{ é compatível com } \mathcal{C}\}$, para $k \geq 1$.

As estruturas de variedades de Banach mencionadas em (b) serão construídas mais adiante — vide corolário (2.1). Para verificar que a condição (a) é satisfeita, dado $v_q \in \mathcal{C}$, o fato de ser $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ uma submersão implica que existe uma seção local X de $\pi_{\mathcal{C}}$, definida num aberto $\mathcal{U} \subset M$ contendo q e tal que $X(q) = v_q$; uma curva

integral do campo de vetores X com condição inicial q é um movimento compatível com \mathcal{C} e com velocidade inicial v_q .

Seja \mathcal{C} um vínculo. Dado $q \in M$, usar-se-á a notação $\mathcal{C}_q := \pi_{\mathcal{C}}^{-1}[q] \subset T_qM$. Então \mathcal{C}_q é uma subvariedade mergulhada de T_qM , pois é uma subvariedade mergulhada de TM (pois é subvariedade mergulhada de \mathcal{C} , uma vez que $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ é submersão, e \mathcal{C} é subvariedade mergulhada de TM) e está contido na subvariedade mergulhada T_qM de TM .

A seguinte proposição será utilizada na construção de alguns exemplos.

PROPOSIÇÃO 2.1. *Sejam $f : TM \rightarrow S$ um morfismo de fibrados diferenciáveis sobre M e $\mathcal{C} := f^{-1}[\mathcal{O}_S]$. São equivalentes:*

- (i) *f é transversal à seção nula \mathcal{O}_S e $\pi_{\mathcal{C}} := \tau_M|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ é uma submersão (portanto, \mathcal{C} é um vínculo);*
- (ii) *$(\forall v_q \in TM) \mathbb{F}f(v_q) : T_qM \rightarrow S_q$ é sobrejetiva.*

Demonstração. O problema é local, ou seja, as duas condições são equivalentes se, e somente se, o forem para um aberto arbitrário $\mathcal{U} \subset M$. Assim sendo, é suficiente provar a proposição para o caso $TM = M \times \mathbb{R}^n$, $S = M \times \mathbb{R}^s$ e:

$$\begin{aligned} f : M \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow M \times \mathbb{R}^s \\ (p, v) &\longmapsto (p, \tilde{f}(p, v)) \end{aligned}$$

onde $\tilde{f} : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ é uma aplicação diferenciável.

(1) Dado $(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n$ e $(w_1, w_2) \in T_{(x,v)}(M \times \mathbb{R}^n) \cong T_xM \oplus \mathbb{R}^n$, temos:

$$Tf_{(x,v)} \cdot (w_1, w_2) = (w_1, \partial_1 \tilde{f}(x, v) \cdot w_1 + \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2) \in T_{f(x,v)}(M \times \mathbb{R}^s) \quad (2.1)$$

(2) Como $\mathcal{O}_S = M \times \{0\}$, temos $f \pitchfork \mathcal{O}_S$ se, e somente se, para todo $(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f}(x, v) = 0$:

$$Tf_{(x,v)} \cdot T_{(x,v)}(M \times \mathbb{R}^n) + \widehat{T_x M}^{\cong T_{(x,0)}\mathcal{O}_S} = T_{(x,0)}(M \times \mathbb{R}^s) \quad (2.2)$$

Usando (2.1), conclui-se que, dado $(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f}(x, v) = 0$, (2.2) é equivalente à seguinte condição:

$$(\forall (\eta_1, \eta_2) \in T_xM \oplus \mathbb{R}^s, \exists (w_1, w_2) \in T_xM \oplus \mathbb{R}^n, \exists \tilde{w}_1 \in T_xM)$$

$$\eta_1 = w_1 + \tilde{w}_1$$

$$\eta_2 = \partial_1 \tilde{f}(x, v) \cdot w_1 + \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2$$

que, por sua vez, é claramente equivalente à seguinte condição:

$$\begin{aligned} (\forall \eta_2 \in \mathbb{R}^s, \exists (w_1, w_2) \in T_x M \oplus \mathbb{R}^n) \\ \eta_2 = \partial_1 \tilde{f}(x, v) \cdot w_1 + \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

(3) Suponha que $f \pitchfork \mathcal{O}_5$ e $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ é uma submersão.

Dado $(x, v) \in \mathcal{C} \subset M \times \mathbb{R}^n$, queremos mostrar que $\mathbb{F}f(x, v) = \partial_2 \tilde{f}(x, v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ é sobrejetiva.

Com efeito, temos:

$$T_{(x,v)} \mathcal{C} \stackrel{\text{por (2.1)}}{=} \{(w_1, w_2) \in T_x M \oplus \mathbb{R}^n \mid \partial_1 \tilde{f}(x, v) \cdot w_1 + \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2 = \mathbb{O}\}$$

e:

$$\begin{aligned} T\tau(x, v) : T_x M \oplus \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_x M \\ (w_1, w_2) &\longmapsto w_1 \end{aligned}$$

de modo que $T\pi_{\mathcal{C}}(x, v) \cdot T_{(x,v)} \mathcal{C} = T_x M$ se, e somente se, valer a seguinte condição:

$$\begin{aligned} (\forall w_1 \in T_x M, \exists w_2 \in \mathbb{R}^n) \\ \partial_1 \tilde{f}(x, v) \cdot w_1 + \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dado $\eta_2 \in \mathbb{R}^s$, $f \pitchfork \mathcal{O}_5$ e (2.3) implicam que existe $(w_1, w_2) \in T_x M \oplus \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\partial_1 \tilde{f}(x, v) \cdot w_1 + \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2 = \eta_2 \quad (2.5)$$

Mas, por (2.4), existe $\tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\partial_1 \tilde{f}(x, v) \cdot w_1 + \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot \tilde{w}_2 = 0$. Portanto, para $w := w_2 - \tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w &= \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2 - \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot \tilde{w}_2 \\ &= \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2 + \partial_1 \tilde{f}(x, v) \cdot w_1 \\ &\stackrel{\text{por (2.5)}}{=} \eta_2 \end{aligned}$$

logo $\mathbb{F}f(x, v) = \partial_2 \tilde{f}(x, v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ é sobrejetiva, como afirmado.

(4) Reciprocamente, suponha que vale a condição (ii).

Seja $(x, v) \in \mathcal{C}$. Dado $\eta_2 \in \mathbb{R}^s$, tome $w_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{F}f(x, v) \cdot w_2 = \partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2 = \eta_2$. Então a condição (2.3) é satisfeita para $(0, w_2) \in T_x M \oplus \mathbb{R}^n$, e isto mostra que $f \pitchfork \mathcal{O}_5$, pois $(x, v) \in \mathcal{C}$ e $\eta_2 \in \mathbb{R}^s$ foram tomados arbitrariamente.

Por outro lado, a sobrejetividade de $\mathbb{F}f(x, v) = \partial_2 \tilde{f}(x, v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ implica que, dado $w_1 \in T_x M$, existe $w_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\partial_2 \tilde{f}(x, v) \cdot w_2 = -\partial_1 \tilde{f}(x, v) \cdot w_1$. Como $w_1 \in T_x M$ e $(x, v) \in \mathcal{C}$ são arbitrários, isto mostra que a condição (2.4) é satisfeita, logo $\pi_{\mathcal{C}}$ é uma submersão.

□

Exemplo 2.1. (a) A formulação presente engloba o caso dos vínculos lineares nas velocidades: tomamos \mathcal{C} como sendo um subfibrado vetorial diferenciável de TM . Doravante será usada a notação \mathcal{D} no lugar de \mathcal{C} para referir-se a vínculos deste tipo. Note que este exemplo é do tipo tratado na proposição anterior: tomamos um subfibrado vetorial diferenciável \mathcal{D}_0 de TM tal que $TM = \mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}_0$ e a correspondente projeção no segundo fator $f = P_{\mathcal{D}_0} : TM \rightarrow \mathcal{D}_0$.

(b) *O exemplo mais simples de um vínculo que não é linear nas velocidades é o vínculo afim. Neste caso, tomamos \mathcal{C} como sendo um subfibrado afim de TM . Ou seja, dado um par (\mathcal{D}, X_a) , onde \mathcal{D} é um vínculo linear, e $X_a \in \mathfrak{X}(M)$, tomamos um subfibrado vetorial diferenciável \mathcal{D}_0 de TM tal que $TM = \mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}_0$ e a correspondente projeção no segundo fator $P_{\mathcal{D}_0}$, e definimos $f : TM \rightarrow \mathcal{D}_0$ por $f(v_q) = P_{\mathcal{D}_0}(v_q - X_a(q))$, para todo $v_q \in TM$. Então $\mathcal{C} = f^{-1}[\mathcal{O}_{\mathcal{D}_0}]$ é um vínculo do tipo tratado na proposição anterior.*

(c) (CARATHÉODORY). *Seja $M = \mathbb{R}^2$ e denote por $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ as coordenadas cartesianas do ponto $x \in \mathbb{R}^2$ e por $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ o correspondente vetor-velocidade. Definimos o vínculo através de $f : TM \rightarrow \mathbb{R}_M$ dada por*

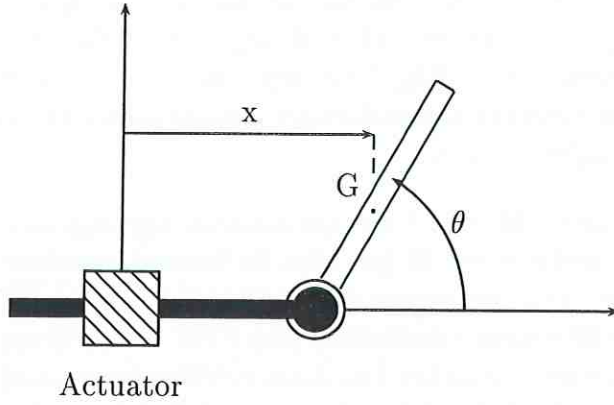
$$f_x(v_1, v_2) = v_2 - \sqrt{1 + v_1^2}$$

Então, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e para todo $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{R}_x^2$, temos:

$$\mathbb{F}f(v_1, v_2) \cdot (w_1, w_2) = w_2 - \frac{v_1 w_1}{\sqrt{1 + v_1^2}}$$

logo $\mathbb{F}f(v_1, v_2) : \mathbb{R}_x^2 \rightarrow \mathbb{R}_x$ é sobrejetiva, portanto $\mathcal{C} = f^{-1}[\mathcal{O}_{\mathbb{R}_M}]$ é um vínculo, pela proposição (2.1). Relacionado a este exemplo, vide também o exemplo (4.1), página 99.

(d) (UM SERVOMECANISMO). *Este exemplo descreve o modelo de um sistema de controle formado por uma barra num plano vertical e por um atuador que comunica um movimento horizontal à extremidade inferior da barra (digamos, para “equilibrar” a barra na posição vertical) - vide [37].*



Podemos $M = \mathbb{R} \times S^1$ e $f : TM \cong \mathbb{R}_M^2 \rightarrow \mathbb{R}_M$ dada por:

$$f(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \dot{x} - h(x, \theta, \dot{\theta})$$

onde $h : \mathbb{R}_M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, chamada lei de controle.

Então, pela proposição (2.1), $\mathcal{C} = f^{-1}[\mathbb{O}_{\mathbb{R}_M}]$ é um vínculo, pois, para todo $(x, \theta) \in M$ e para todo $(\dot{x}_1, \dot{\theta}_1), (\dot{x}_2, \dot{\theta}_2) \in \mathbb{R}_{(x, \theta)}^2$, temos:

$$\mathbb{F}f(\dot{x}_1, \dot{\theta}_1) \cdot (\dot{x}_2, \dot{\theta}_2) = \dot{x}_2 - \mathbb{F}h(\dot{\theta}_1) \cdot \dot{\theta}_2$$

logo $\mathbb{F}f(\dot{x}_1, \dot{\theta}_1) : \mathbb{R}_{(x, \theta)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(x, \theta)}$ é sobrejetiva.

(e) (DINÂMICA ISOCINÉTICA). Seja $e \neq 0$. Definimos $f : TM \rightarrow \mathbb{R}_M$ por:

$$f(v_q) = \langle v_q, v_q \rangle - e^2$$

Então o vínculo $\mathcal{C} = f^{-1}[\mathbb{O}_{\mathbb{R}_M}]$ é um fibrado de esferas. Vide [22], [52], [17] e [66].

(f) Em [7] é descrito um vínculo não-linear, quadrático homogêneo nas velocidades: tomam-se dois pontos no plano que se movem de tal modo que suas velocidades sejam sempre paralelas. Assim, $M = \mathbb{R}^4$ e, denotando por $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ as coordenadas cartesianas dos dois pontos e por $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ o correspondente vetor-velocidade, definimos $f : TM \rightarrow \mathbb{R}_M$ por:

$$f_x(v_1, v_2, v_3, v_4) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} = v_1 v_4 - v_2 v_3$$

Então $\mathcal{C} := f^{-1}[\mathbb{O}_{\mathbb{R}^M}] \setminus \mathbb{O}_{\text{TM}}$ é um vínculo tal que, para todo $q \in M$, \mathcal{C}_q é um cone, ou seja, dado $v_q \in \mathcal{C}_q$, então $(\forall t > 0) tv_q \in \mathcal{C}_q$. Note que é necessário remover a seção nula \mathbb{O}_{TM} de $f^{-1}[\mathbb{O}_{\mathbb{R}^M}]$ (ou seja, impõe-se a condição adicional de que as velocidades dos pontos não podem ser simultaneamente nulas) para que \mathcal{C} seja uma variedade diferenciável.

Dados um sistema mecânico (M, K, \mathcal{F}) ou um sistema lagrangeano (M, L) e um vínculo \mathcal{C} , seja g um tensor métrico em M (no caso do sistema mecânico, ou no caso de a lagrangeana ser clássica, consideraremos o tensor métrico induzido pela energia cinética K). Como $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ é uma submersão, $\mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} : \mathbb{T}\mathcal{C} \rightarrow \text{TM}$ é um epimorfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis; então $\ker \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}}$ é um subfibrado vetorial diferenciável de $\mathbb{T}\mathcal{C}$, que será denotado por $\text{Ver}(\mathcal{C})$. Considere no subfibrado vertical $\text{Ver}(\text{TM})$ o tensor métrico induzido pelo tensor métrico de M através do levantamento vertical, i.e., tal que $(\forall v_q \in \text{TM}) \lambda_{v_q} : \mathbb{T}_q M \rightarrow \text{Ver}_{v_q}(\text{TM})$ seja uma isometria linear. Como $\text{Ver}(\mathcal{C})$ também é um subfibrado vetorial do *pull back* $i_{\mathcal{C}}^* \text{Ver}(\text{TM})$, onde $i_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{TM}$ é a inclusão, podemos considerar o subfibrado vetorial W de $i_{\mathcal{C}}^* \text{Ver}(\text{TM})$ tal que, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $W_{v_q} := \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})_{v_q}^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $\text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$ em $\text{Ver}_{v_q}(\text{TM})$. Assim, temos a seguinte decomposição em soma de Whitney:

$$i_{\mathcal{C}}^* \text{Ver}(\text{TM}) = \text{Ver}(\mathcal{C}) \oplus_{\mathcal{C}} W \quad (2.6)$$

Além disso, também temos a decomposição em soma de Whitney dada pela seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 2.2. *Na situação acima, temos:*

$$i_{\mathcal{C}}^*(\text{TTM}) = \mathbb{T}\mathcal{C} \oplus_{\mathcal{C}} W \quad (2.7)$$

Demonstração. Com efeito, dados $v_q \in \mathcal{C}$ e $X_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q} \mathcal{C} \cap W_{v_q}$, temos $X_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q} \mathcal{C} \cap \text{Ver}_{v_q}(\text{TM}) = \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$ e $X_{v_q} \in W_{v_q} = \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})^{\perp}$, portanto $X_{v_q} = 0$, o que mostra $\mathbb{T}_{v_q} \mathcal{C} \cap W_{v_q} = \{0\}$.

Por outro lado, dados $v_q \in \mathcal{C}$ e $X_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q} \text{TM}$, seja $s : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ seção local de $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ definida num aberto \mathcal{U} de M , com $q \in \mathcal{U}$ e $s(q) = v_q$; a existência de uma tal seção local é assegurada pelo fato de que $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ é uma submersão. Tome $Y_{v_q} := \mathbb{T}s \cdot \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q} \mathcal{C}$. Então $X_{v_q} - Y_{v_q} \in \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$, pois $\mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \mathbb{T}s \cdot \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q} = \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}$, pelo fato de s ser uma seção de $\pi_{\mathcal{C}}$. Escrevendo, por (2.6), $X_{v_q} - Y_{v_q} = Z_{v_q} + Z_{v_q}^{\perp}$, com $Z_{v_q} \in \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$ e $Z_{v_q}^{\perp} \in W_{v_q}$, temos: $Y_{v_q} + Z_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q} \mathcal{C}$, $Z_{v_q}^{\perp} \in W_{v_q}$ e $(Y_{v_q} + Z_{v_q}) + Z_{v_q}^{\perp} = X_{v_q}$. Como $X_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q} \text{TM}$ foi tomado arbitrariamente, isto mostra $\mathbb{T}_{v_q} \text{TM} = \mathbb{T}_{v_q} \mathcal{C} + W_{v_q}$. \square

Denotar-se-ão por $P_{\mathcal{C}}$ e P_W as projeções no primeiro e no segundo fator, respectivamente, induzidas por (2.7). Note que a restrição de $P_{\mathcal{C}}$ ao subfibrado $i_{\mathcal{C}}^* \text{Ver}(\text{TM})$ coincide com a projeção no primeiro fator induzida por (2.6), pois $\text{Ver}(\mathcal{C}) = \text{T}\mathcal{C} \cap i_{\mathcal{C}}^* \text{Ver}(\text{TM})$; assim, $\text{Ver}(\mathcal{C}) = P_{\mathcal{C}}(i_{\mathcal{C}}^* \text{Ver}(\text{TM}))$.

Dado $v_q \in \mathcal{C}$, a decomposição em soma de Whitney (2.7) permite identificar o anulador $(\text{T}_{v_q} \mathcal{C})^0 \subset \text{T}_{v_q}^*(\text{TM})$ com $W_{v_q}^*$, através do isomorfismo $\theta \in W_{v_q}^* \mapsto \theta \circ P_W \in (\text{T}_{v_q} \mathcal{C})^0$. Usaremos a notação $\mathcal{W}_{v_q} := (\text{T}_{v_q} \mathcal{C})^0 \equiv W_{v_q}^*$, e através do tensor métrico em $\text{Ver}(\text{TM})$ também identificaremos \mathcal{W}_{v_q} com W_{v_q} sempre que for conveniente.

Sejam ∇ a conexão de Levi-Civita de (M, g) , e $\text{Hor}(\text{TM})$ o correspondente subfibrado horizontal. Denotar-se-á por $\text{Hor}(\mathcal{C})$ a imagem de $i_{\mathcal{C}}^* \text{Hor}(\text{TM})$ por $P_{\mathcal{C}}$.

DEFINIÇÃO 2.2. *Na situação acima, $\text{Ver}(\mathcal{C})$ é chamado de subfibrado vertical de $\text{T}\mathcal{C}$, e $\text{Hor}(\mathcal{C})$ de subfibrado horizontal de $\text{T}\mathcal{C}$. O subfibrado vetorial $\pi_W : W \rightarrow \mathcal{C}$ de $i_{\mathcal{C}}^*(\text{T}^*\text{TM})$ é chamado de fibrado de projeção¹ associado a \mathcal{C} , e o subfibrado vetorial $\pi_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{C}$ de $i_{\mathcal{C}}^*(\text{T}^*\text{TM})$ é chamado de fibrado misto generalizado ou centauro associado a \mathcal{C} .*

Dado $v_q \in \mathcal{C}$, denota-se por C_{v_q} o subespaço $\kappa \cdot \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$ de $\text{T}_q M$, de modo que $\kappa|_{\text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})} : \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C}) \rightarrow C_{v_q}$ e $\kappa|_{W_{v_q}} : W_{v_q} \rightarrow C_{v_q}^\perp$ são isometrias lineares. O subespaço $C_{v_q} \subset \text{T}_q M$ é chamado de subespaço das velocidades virtuais² em $v_q \in \mathcal{C}$. Denotam-se por \mathcal{P}_{v_q} e $\mathcal{P}_{v_q}^\perp$ as projeções ortogonais $\mathcal{P}_{v_q} : \text{T}_q M \rightarrow C_{v_q}$ e $\mathcal{P}_{v_q}^\perp : \text{T}_q M \rightarrow C_{v_q}^\perp$, respectivamente. Estão bem definidas, pois, aplicações diferenciáveis $\mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow \text{L}(\text{TM}, \text{TM})$ e $\mathcal{P}^\perp : \mathcal{C} \rightarrow \text{L}(\text{TM}, \text{TM})$, dadas por $v_q \mapsto \mathcal{P}_{v_q}$ e $v_q \mapsto \mathcal{P}_{v_q}^\perp$, respectivamente, e para todo $v_q \in \mathcal{C}$ os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ver}_{v_q}(\text{TM}) & \xrightarrow{P_{\mathcal{C}}} & \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C}) \\ \downarrow \kappa & \circlearrowleft & \downarrow \kappa \\ \text{T}_q M & \xrightarrow{\mathcal{P}_{v_q}} & C_{v_q} \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ver}_{v_q}(\text{TM}) & \xrightarrow{P_W} & W_{v_q} \\ \downarrow \kappa & \circlearrowleft & \downarrow \kappa \\ \text{T}_q M & \xrightarrow{\mathcal{P}_{v_q}^\perp} & C_{v_q}^\perp \end{array}$$

¹nomenclatura sugerida na formulação de [36].

²segundo a nomenclatura de [6].

A nomenclatura *fibrado misto generalizado* ou *centauro* adotada para designar o fibrado \mathcal{W} provém do fato de que tal fibrado é o objeto que generaliza naturalmente o *fibrado misto* $\mathcal{D} \oplus_{\mathbb{M}} \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathbb{M}$ — vide [63], no qual está definido o fluxo que fornece as trajetórias normais de um sistema lagrangeano vinculado com vínculo linear \mathcal{D} , conforme será visto no capítulo 4, seção (1.2.1).

PROPOSIÇÃO 2.3. *Vale a seguinte decomposição em soma de Whitney:*

$$\mathbb{T}\mathcal{C} = \text{Ver}(\mathcal{C}) \oplus_{\mathcal{C}} \text{Hor}(\mathcal{C}) \quad (2.8)$$

Além disso, $\text{Ver}(\mathcal{C})$ é completamente integrável (no sentido de Frobenius), e $(\forall v_q \in \mathcal{C}) \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}}|_{\text{Hor}_{v_q}(\mathcal{C})} : \text{Hor}_{v_q}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{T}_q\mathbb{M}$ é um isomorfismo linear.

Demonstração. Com efeito, $P_{\mathcal{C}} : i_{\mathcal{C}}^* \mathbb{T}\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{T}\mathcal{C}$ é um epimorfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis, $i_{\mathcal{C}}^* \mathbb{T}\mathbb{M} = i_{\mathcal{C}}^* \text{Hor}(\mathbb{T}\mathbb{M}) \oplus_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{C}}^* \text{Ver}(\mathbb{T}\mathbb{M})$ e $\ker P_{\mathcal{C}} = W \subset i_{\mathcal{C}}^* \text{Ver}(\mathbb{T}\mathbb{M})$. Portanto, como $P_{\mathcal{C}} \cdot i_{\mathcal{C}}^* \text{Hor}(\mathbb{T}\mathbb{M}) = \text{Hor}(\mathcal{C})$ e $P_{\mathcal{C}} \cdot i_{\mathcal{C}}^* \text{Ver}(\mathbb{T}\mathbb{M}) = \text{Ver}(\mathcal{C})$, segue $\mathbb{T}\mathcal{C} = \text{Ver}(\mathcal{C}) \oplus_{\mathcal{C}} \text{Hor}(\mathcal{C})$, e $P_{\mathcal{C}}|_{i_{\mathcal{C}}^* \text{Hor}(\mathbb{T}\mathbb{M})} : i_{\mathcal{C}}^* \text{Hor}(\mathbb{T}\mathbb{M}) \rightarrow \text{Hor}(\mathcal{C})$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais, o que implica que $(\forall v_q \in \mathcal{C}) \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}}|_{\text{Hor}_{v_q}(\mathcal{C})} : \text{Hor}_{v_q}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{T}_q\mathbb{M}$ é um isomorfismo linear. Além disso, $\text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C}) = \mathbb{T}_{v_q}(\mathcal{C}_q)$, portanto o subfibrado vetorial $\text{Ver}(\mathcal{C})$ é completamente integrável. □

DEFINIÇÃO 2.3. *Usando a mesma notação, denotam-se por $P_H^{\mathcal{C}} : \mathbb{T}\mathcal{C} \rightarrow \text{Hor}(\mathcal{C})$ e $P_V^{\mathcal{C}} : \mathbb{T}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ver}(\mathcal{C})$ as projeções induzidas pela decomposição em soma de Whitney da proposição precedente. Dado $v_q \in \mathcal{C}$, definem-se os levantamentos vertical e horizontal em \mathcal{C} por, respectivamente, $\lambda_{v_q}^{\mathcal{C}} := \lambda_{v_q} \circ \mathcal{D}_{v_q} = P_{\mathcal{C}} \circ \lambda_{v_q} : \mathbb{T}_q\mathbb{M} \rightarrow \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$ e $H_{v_q}^{\mathcal{C}} := (\mathbb{T}\tau_{\mathbb{M}}|_{\text{Hor}_{v_q}(\mathcal{C})})^{-1} = P_{\mathcal{C}} \circ H_{v_q} : \mathbb{T}_q\mathbb{M} \rightarrow \text{Hor}_{v_q}(\mathcal{C})$*

Note que, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $H_{v_q}^{\mathcal{C}} : \mathbb{T}_q\mathbb{M} \rightarrow \text{Hor}_{v_q}(\mathcal{C})$ e $\lambda_{v_q}^{\mathcal{C}}|_{C_{v_q}} : C_{v_q} \rightarrow \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$ são isomorfismos lineares, e, para todo $X_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q}\mathcal{C}$, temos:

$$\begin{aligned} P_H^{\mathcal{C}}(X_{v_q}) &= H_{v_q}^{\mathcal{C}}(\mathbb{T}\tau_{\mathbb{M}} \cdot X_{v_q}) = P_{\mathcal{C}} \cdot H_{v_q}(\mathbb{T}\tau_{\mathbb{M}} \cdot X_{v_q}) \\ P_V^{\mathcal{C}}(X_{v_q}) &= \lambda_{v_q}^{\mathcal{C}}(\kappa \cdot X_{v_q}) = \lambda_{v_q}(\mathcal{D}_{v_q} \cdot \kappa \cdot X_{v_q}) \end{aligned}$$

Observação 2.1. A notação $\text{Hor}(\mathcal{C})$ e $\text{Ver}(\mathcal{C})$ provém do fato de que, no caso de um vínculo linear \mathcal{D} :

- (1) $\text{Ver}(\mathcal{D})$ coincide com o subfibrado vertical do fibrado vetorial $\pi_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{M}$;

- (2) $(\forall v_q \in \mathcal{C}) C_{v_q} = \mathcal{D}_q$, portanto $W_{v_q} = \lambda_{v_q}(\mathcal{D}_q^\perp)$, de modo que $P_{\mathcal{D}} = T\mathcal{P}_{\mathcal{D}} : TTM|_{\mathcal{D}} \rightarrow T\mathcal{D}$, onde $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} : TM \rightarrow \mathcal{D}$ é a projeção ortogonal. Assim, $(\forall v_q \in \mathcal{D}) \text{Hor}_{v_q}(\mathcal{D}) = T\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \cdot \text{Hor}_{v_q}(TM)$ coincide com o subfibrado horizontal em v_q de $\pi_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow M$ induzido pela conexão:

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{D}} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma^\infty(\mathcal{D}) &\longrightarrow \Gamma^\infty(\mathcal{D}) \\ (X, Y) &\longmapsto \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \cdot \nabla_X Y \end{aligned}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de (M, g) .

Para uso posterior, considerar-se-ão generalizações da derivada nas fibras e da derivada paralela — vide seção (1.1) — para aplicações diferenciáveis : $\mathcal{C} \rightarrow E$, onde $\pi_E : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial diferenciável, que preservem fibras.

DEFINIÇÃO 2.4. *Sejam $\pi_E : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial diferenciável, munido de uma conexão $\text{Hor}(E)$, e $f : \mathcal{C} \rightarrow E$ uma aplicação diferenciável tal que, para todo $q \in M$, $f(\mathcal{C}_q) \subset E_q$. Definimos a derivada nas fibras $\mathbb{F}f : \mathcal{C} \rightarrow L(TM, E)$ e a derivada paralela $\mathbb{P}f : \mathcal{C} \rightarrow L(TM, E)$ por, para todo $v_q \in \mathcal{C}$:*

$$\mathbb{F}f(v_q) := \kappa_E \circ T_{v_q} f \circ \lambda_{v_q}^{\mathcal{C}} \in L(T_q M, E_q)$$

e:

$$\mathbb{P}f(v_q) := \kappa_E \circ T_{v_q} f \circ H_{v_q}^{\mathcal{C}} \in L(T_q M, E_q)$$

Portanto, dados $v_q \in \mathcal{C}$ e $X_{v_q} \in T_{v_q} \mathcal{C}$, vale:

$$\kappa_E \cdot T_{v_q} f \cdot X_{v_q} = \mathbb{F}f(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}f(v_q) \cdot T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}$$

e $\mathbb{F}f(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} = \mathbb{F}f(v_q) \cdot \mathcal{P}_{v_q} \cdot \kappa \cdot X_{v_q}$, i.e., $C_{v_q}^\perp \subset \ker \mathbb{F}f(v_q)$.

Note que, pela observação (2.1), quando $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ é um subfibrado vetorial de TM , munido da conexão induzida pela conexão de Levi-Civita de M e da projeção ortogonal $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} : TM \rightarrow \mathcal{D}$, a derivada nas fibras e a derivada paralela de $f : \mathcal{D} \rightarrow E$ definidas na definição (2.4) coincidem com as derivadas definidas na seção (1.1), de modo que as definições e notações são coerentes.

Campos de segunda ordem em \mathcal{C} .

DEFINIÇÃO 2.5. *Na situação acima, o seguinte subconjunto de $T\mathcal{C}$:*

$$\mathfrak{P}(\mathcal{C}) := T\mathcal{C} \cap J^2(M)$$

chama-se prolongamento holonômico de \mathcal{C} (vide [42]), onde:

$$J^2(M) := \{z \in T(TM) \mid \tau_{TM} z = T\tau_M(z)\},$$

é o subfibrado afim de TM dos 2-jatos.

A seguinte proposição mostra que $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ é um subfibrado diferenciável afim de $T\mathcal{C}$.

PROPOSIÇÃO 2.4. Usando a mesma notação, $\tau_{TM}|_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})} : \mathfrak{P}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ é um subfibrado diferenciável afim de $T\mathcal{C}$. Mais precisamente, para cada $v_q \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C})$ é o subespaço afim de $T_{v_q}\mathcal{C}$ dado por:

$$\mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C}) = P_{\mathcal{C}} \cdot S(v_q) + \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$$

onde S o spray geodésico de (M, g) .

Demonstração. Temos $\mathfrak{P}(\mathcal{C}) = T\mathcal{C} \cap J^2(M) = \{X_{v_q} \in T\mathcal{C} \mid T\tau_M \cdot X_{v_q} = v_q\}$. Portanto, dados $v_q \in \mathcal{C}$ e $X_{v_q} \in \mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C})$, temos $T\tau_M \cdot X_{v_q} = v_q = T\tau_M \cdot P_{\mathcal{C}} \cdot S(v_q)$, donde $X_{v_q} - P_{\mathcal{C}} \cdot S(v_q) \in T_{v_q}\mathcal{C} \cap \text{Ver}_{v_q}(TM) = \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$, ou seja, $X_{v_q} \in P_{\mathcal{C}} \cdot S(v_q) + \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$. Por outro lado, dado $X_{v_q} \in P_{\mathcal{C}} \cdot S(v_q) + \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$, temos $X_{v_q} \in T_{v_q}\mathcal{C}$ e $T\tau_M \cdot X_{v_q} = T\tau_M \cdot P_{\mathcal{C}} \cdot S(v_q) = v_q$, donde $X_{v_q} \in \mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C})$. Assim, mostramos $\mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C}) = P_{\mathcal{C}} \cdot S(v_q) + \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$, para todo $v_q \in \mathcal{C}$. □

DEFINIÇÃO 2.6. Diz-se que $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{C})$ é um campo de segunda ordem em \mathcal{C} se for uma seção do prolongamento holonômico de \mathcal{C} , $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$.

Note que, dado um campo de segunda ordem em \mathcal{C} , $X \in \Gamma^\infty(\mathfrak{P}(\mathcal{C}))$, como $(\forall v_q \in \mathcal{C}) T\tau_M \cdot X(v_q) = v_q$ as curvas integrais de X são da forma $\frac{T\gamma}{dt}$, onde γ é uma curva diferenciável em M , compatível com \mathcal{C} .

§1. ESPAÇOS DE CURVAS COMPATÍVEIS COM \mathcal{C}

Para $k \geq 1$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sejam $C^k(M, \mathcal{C}, [a, b]) := \{\gamma \in C^k(M, [a, b]) \mid \gamma \text{ é compatível com } \mathcal{C}\}$, e $H^k(M, \mathcal{C}, [a, b]) := \{\gamma \in H^k(M, [a, b]) \mid \gamma \text{ é compatível com } \mathcal{C}\}$. Como de costume, estando o intervalo fixo e não havendo risco de confusão, omitiremos o $[a, b]$ da notação. Nesta seção será mostrado que os conjuntos $C^k(M, \mathcal{C})$, para $k \geq 1$, e $H^k(M, \mathcal{C})$, para $k \geq 2$, admitem estruturas de variedade de Banach, munidos das quais são subvariedades mergulhadas em $C^k(M)$ e $H^k(M)$, respectivamente. No caso de um vínculo linear $\mathcal{D} \subset TM$, o mesmo vale para $H^1(M, \mathcal{D}) \subset H^1(M)$. Através da aplicação ponto inicial, também será mostrado que, dado $q \in M$, os espaços de curvas compatíveis com \mathcal{C} e com ponto inicial q , $C^k(M, \mathcal{C}, q) := C^k(M, \mathcal{C}) \cap C^k(M, q)$ e $H^k(M, \mathcal{C}, q) := H^k(M, \mathcal{C}) \cap H^k(M, q)$, são subvariedades mergulhadas de $C^k(M, \mathcal{C})$ e $H^k(M, \mathcal{C})$, respectivamente. O mesmo não vale, no entanto, para os espaços de curvas compatíveis com \mathcal{C} e com pontos inicial e final fixos, $C^k(M, \mathcal{C}, p, q) := C^k(M, \mathcal{C}) \cap C^k(M, p, q)$ e $H^k(M, \mathcal{C}, p, q) := H^k(M, \mathcal{C}) \cap H^k(M, p, q)$, dados $p, q \in M$; tais espaços serão vistos com mais detalhes no capítulo 4.

Trataremos apenas o caso dos espaços C^k , $k \geq 1$, pois as mesmas construções e argumentos se aplicam, *ipsis litteris*, no caso dos espaços H^k , $k \geq 2$ (e mesmo $k = 1$ no caso de um vínculo linear), bastando substituir-se C^k por H^k . No caso linear, a estrutura de variedade de Banach dos espaços $C^1(M, \mathcal{D})$ e $H^1(M, \mathcal{D})$ já é bem conhecida (vide, por exemplo, [30], [48], [49]), bem como a dos espaços de curvas compatíveis com \mathcal{D} com ponto inicial fixo $C^1(M, \mathcal{D}, q)$ e $H^1(M, \mathcal{D}, q)$, e também os pontos críticos da aplicação ponto final nestes últimos espaços.

A estrutura de variedade diferenciável em $C^k(M, \mathcal{E})$, $k \geq 1$, é construída a partir da seguinte observação: considerando-se a aplicação diferenciável (vide lema (1.1)):

$$\begin{array}{ccc} \frac{T}{dt} : C^k(M) & \longrightarrow & C^{k-1}(TM) \\ \gamma & \longmapsto & \frac{T\gamma}{dt} \end{array}$$

então $C^k(M, \mathcal{E})$ coincide com a imagem inversa por $\frac{T}{dt}$ da subvariedade mergulhada $C^{k-1}(\mathcal{E})$ de $C^{k-1}(TM)$. Assim sendo, provaremos que $\frac{T}{dt}$ é transversal a esta subvariedade, de modo que $C^k(M, \mathcal{E}) = (\frac{T}{dt})^{-1}[C^{k-1}(\mathcal{E})]$ é uma subvariedade mergulhada de $C^k(M)$, e $T_\gamma C^k(M, \mathcal{E}) = \{T_\gamma(\frac{T}{dt})\}^{-1}[T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{E})]$, para toda $\gamma \in C^k(M, \mathcal{E})$, onde $T(\frac{T}{dt}) : TC^k(M) \rightarrow TC^{k-1}(TM)$ é a aplicação tangente de $\frac{T}{dt}$.

PROPOSIÇÃO 2.5. *Para $k \geq 1$, a aplicação $\frac{T}{dt} : C^k(M) \rightarrow C^{k-1}(TM)$ é transversal à subvariedade mergulhada $C^{k-1}(\mathcal{E})$ de $C^{k-1}(TM)$.*

Demonstração. Fixada $\gamma \in C^k(M)$ tal que $\frac{T\gamma}{dt} \in C^{k-1}(\mathcal{E})$, precisamos verificar as duas condições seguintes:

(\heartsuit 1) $T(\frac{T}{dt}) \cdot T_\gamma C^k(M) + T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{E}) = T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(TM)$;

(\heartsuit 2) o subespaço fechado $\{T_\gamma(\frac{T}{dt})\}^{-1}[T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{E})]$ de $T_\gamma C^k(M)$ admite um complementar fechado.

Note que $\{T_\gamma(\frac{T}{dt})\}^{-1}[T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{E})]$ de fato é um subespaço fechado, pois $T_\gamma(\frac{T}{dt})$ é contínua e $T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{E})$ é fechado em $T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(TM)$. Note também que, no caso H^k , $k \geq 2$, a condição (\heartsuit 2) é redundante, pois $H^k(M)$ é uma variedade de Hilbert (portanto todo subespaço fechado do espaço tangente em γ admite um complementar fechado).

A decomposição em soma de Whitney (2.7) induz uma decomposição em soma de Whitney:

$$C^{k-1}(i_{\mathcal{E}}^*(TTM)) = C^{k-1}(T\mathcal{E}) \underset{C^{k-1}(\mathcal{E})}{\oplus} C^{k-1}(W)$$

sendo as projeções no primeiro e no segundo fator dadas por $(P_{\mathcal{E}o})$ e (P_{Wo}) , respectivamente. Assim, a condição (\heartsuit 1) é equivalente à condição:

$$(\heartsuit 1') \quad (P_W \circ) \cdot T\left(\frac{T}{dt}\right) \cdot T_\gamma C^k(M) = C^{k-1}(W)_{\frac{T\gamma}{dt}}.$$

onde $C^{k-1}(W)_{\frac{T\gamma}{dt}}$ denota a fibra do fibrado vetorial $(\pi_W \circ) : C^{k-1}(W) \rightarrow C^{k-1}(\mathcal{C})$ sobre $\frac{T\gamma}{dt}$. Para verificar $(\heartsuit 1')$, pelo fato de a restrição do conector κ ao subfibrado vertical ser um isomorfismo e pelo lema (1.1), dado $Y \in C^{k-1}(W)_{\frac{T\gamma}{dt}}$, temos que mostrar que existe $X \in T_\gamma C^k(M)$ tal que:

$$\kappa \cdot P_W \cdot \lambda_{\dot{\gamma}}(\nabla_t X) + \kappa \cdot P_W \cdot H_{\dot{\gamma}} X = \kappa \cdot P_W \cdot Y \quad (2.9)$$

Dado $\xi \in C^{k-1}(TM)_\gamma$, considere as equações:

$$\mathcal{P}_{\dot{\gamma}}^\perp \nabla_t X + \kappa \cdot P_W \cdot H_{\dot{\gamma}} X = \mathcal{P}_{\dot{\gamma}}^\perp \cdot \xi \quad (2.10)$$

$$\mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot \nabla_t X = \mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot \xi \quad (2.11)$$

Estas equações são equivalentes a:

$$\nabla_t X + \kappa \cdot P_W \cdot H_{\dot{\gamma}} X = \xi \quad (2.12)$$

Além disso, como $\kappa \cdot P_W \cdot \lambda_{\dot{\gamma}} = \mathcal{P}_{\dot{\gamma}}^\perp$, a equação (2.10) com $\xi = \kappa \cdot P_W \cdot Y \in C^{k-1}(TM)_\gamma$ é equivalente à equação (2.9).

Usando um referencial paralelo em TM ao longo de γ , conclui-se que a equação (2.12) define uma EDO linear em \mathbb{R}^n , com coeficientes de classe C^{k-1} e definidos no intervalo $[a, b]$, para a qual podemos aplicar o teorema de existência e unicidade. Em particular, tomando $\xi = \kappa \cdot P_W \cdot Y$, a condição $(\heartsuit 1')$ é satisfeita.

Por outro lado, seja $F := \{X \in T_\gamma C^k(M) \mid \mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot \nabla_t X = 0 \text{ e } X(a) = 0\}$. Como $t \in [a, b] \mapsto \mathcal{P}_{\dot{\gamma}(t)} \in C^{k-1}(L(TM, TM))_\gamma$ e $X \in T_\gamma C^k(M) \mapsto \nabla_t X = (\kappa \circ) \cdot T_\gamma\left(\frac{T}{dt}\right) \cdot X \in C^{k-1}(TM)_\gamma$ é linear contínua, segue que $X \in T_\gamma C^k(M) \mapsto \mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot \nabla_t X \in C^{k-1}(TM)_\gamma$ é linear contínua, portanto F é um subespaço fechado de $T_\gamma C^k(M)$. Mostremos que F é um complementar de $\{T_\gamma\left(\frac{T}{dt}\right)\}^{-1}[T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{C})]$ em $T_\gamma C^k(M)$; isto concluirá a demonstração, pois estará provada a condição $(\heartsuit 2)$.

Com efeito, dado $X \in F \cap \{T_\gamma\left(\frac{T}{dt}\right)\}^{-1}[T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{C})]$, X é solução de (2.12) com $\xi = 0$ e satisfazendo a condição inicial $X(a) = 0$. Pelo teorema de existência e unicidade, conclui-se que $X = 0$, donde $F \cap \{T_\gamma\left(\frac{T}{dt}\right)\}^{-1}[T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{C})] = \{0\}$.

Além disso, dado $X \in T_\gamma C^k(M)$, tome $\xi_1 := \mathcal{P}_{\dot{\gamma}}^\perp \cdot \nabla_t X + \kappa \cdot P_W \cdot H_{\dot{\gamma}} X \in C^{k-1}(TM)_\gamma$ e $\xi_2 := \mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot \nabla_t X \in C^{k-1}(TM)_\gamma$. Sejam X_1 e X_2 soluções de (2.12) com $\xi = \xi_1$ e $\xi = \xi_2$, respectivamente, e satisfazendo condições iniciais $X_1(a) = 0$ e $X_2(a) = X(a)$, respectivamente. Então $X_1 \in F$, $X_2 \in \{T_\gamma\left(\frac{T}{dt}\right)\}^{-1}[T_{\frac{T\gamma}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{C})]$, e $X_1 + X_2$ é solução de (2.12) com $\xi = \xi_1 + \xi_2$ e $X_1(0) + X_2(0) = X(0)$, ou seja, $X_1 + X_2 = X$, pelo teorema de existência e unicidade. \square

COROLÁRIO 2.1. Usando a mesma notação, $C^k(M, \mathcal{C})$ é subvariedade diferenciável mergulhada em $C^k(M)$, fechada se \mathcal{C} for fechada em TM , e o seu espaço tangente em $\gamma \in C^k(M, \mathcal{C})$ é dado por:

$$T_\gamma C^k(M, \mathcal{C}) = \{X \in T_\gamma C^k(M) \mid \kappa \cdot P_W \cdot \lambda_{\dot{\gamma}} \nabla_t X + \kappa \cdot P_W \cdot H_{\dot{\gamma}} X = 0\} \quad (2.13)$$

Além disso, dado $q \in M$, $C^k(M, \mathcal{C}, q)$ é subvariedade diferenciável mergulhada fechada em $C^k(M, \mathcal{C})$, e o seu espaço tangente em $\gamma \in C^k(M, \mathcal{C}, q)$ é dado por $T_\gamma C^k(M, \mathcal{C}, q) = \{X \in T_\gamma C^k(M, \mathcal{C}) \mid X(a) = 0\}$.

Demonstração. Com efeito, o fato de $C^k(M, \mathcal{C})$ ser subvariedade diferenciável mergulhada em $C^k(M)$ segue imediatamente da proposição precedente e do fato de que $C^k(M, \mathcal{C}) = (\frac{T}{dt})^{-1}[C^{k-1}(\mathcal{C})]$. Dada $\gamma \in C^k(M, \mathcal{C})$, temos $T_\gamma C^k(M, \mathcal{C}) = \{T_\gamma(\frac{T}{dt})\}^{-1}[T_{\frac{T}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{C})] = \{X \in T_\gamma C^k(M) \mid P_W \cdot T(\frac{T}{dt}) \cdot X = 0\}$. Usando a fórmula para $T(\frac{T}{dt})$ dada pelo lema (1.1) e o fato de a restrição do conector ao subfibrado vertical ser um isomorfismo, conclui-se que vale (2.13). Finalmente, como $\frac{T}{dt}$ é contínua e $C^{k-1}(\mathcal{C})$ é fechada em $C^{k-1}(TM)$ se \mathcal{C} for fechada em TM , segue que $C^k(M, \mathcal{C}) = (\frac{T}{dt})^{-1}[C^{k-1}(\mathcal{C})]$ é fechada em $C^k(M)$ se \mathcal{C} for fechada em TM .

Por outro lado, a aplicação tangente da aplicação ponto inicial:

$$\begin{aligned} ev_i : C^k(M, \mathcal{C}) &\longrightarrow M \\ \gamma &\longmapsto \gamma(a) \end{aligned}$$

é dada por $X \in TC^k(M, \mathcal{C}) \mapsto X(a) \in TM$. Então ev_i é uma submersão: dados $q \in M$, $\gamma \in C^k(M, \mathcal{C}, q) = ev_i^{-1}[q]$ e $v_q \in T_q M$, pelo teorema de existência e unicidade, existe X solução de (2.12) com $\xi = 0$ e satisfazendo a condição inicial $X(a) = v_q$, portanto $T(ev_i) \cdot X = v_q$. Isto mostra que $C^k(M, \mathcal{C}, q)$ é subvariedade diferenciável mergulhada fechada em $C^k(M, \mathcal{C})$, e $T_\gamma C^k(M, \mathcal{C}, q) = (T_\gamma ev_i)^{-1}[\mathbb{O}_q] = \{X \in T_\gamma C^k(M, \mathcal{C}) \mid X(a) = 0\}$. \square

Capítulo 3

Sistemas Mecânicos Vinculados

Dados um sistema mecânico (M, K, \mathcal{F}) e um vínculo \mathcal{C} , neste capítulo serão estudadas as *trajetórias físicas* do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$. Tais trajetórias são definidas a partir da lei de Newton e da escolha de um campo de reações vinculares “admissível” (num sentido que será precisado na definição (3.2)). O caso das trajetórias de d’Alembert-Chetaev — definidas pela escolha de um campo de reações vinculares admissível que possui a propriedade notável de minimizar a “intensidade” da reação vincular — será estudado com particular atenção.

§1. MOTIVAÇÃO E DEFINIÇÃO DAS TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO 3.1. *Um sistema mecânico vinculado é uma quádrupla $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, onde (M, K, \mathcal{F}) é um sistema mecânico e \mathcal{C} é um vínculo. Usar-se-á a notação (M, K, V, \mathcal{C}) caso o campo de forças externo seja dado por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$.*

Num sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, para que um dado movimento (i.e., uma curva absolutamente contínua no espaço de configurações) $\gamma : I \rightarrow M$, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, seja compatível com o vínculo e satisfaça a lei de Newton, é necessário que exista um campo de forças “reativo” (“imposto” pelo vínculo de modo que o movimento seja compatível com o mesmo):

$$\begin{aligned} R_\gamma : I &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto R_\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M \end{aligned}$$

tal que para quase todo $t \in I$:

$$\nabla_t \dot{\gamma} = \mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}(t)) + R_\gamma(t) \tag{3.1}$$

onde ∇_t é a derivada covariante induzida pela conexão de Levi-Civita de (M, g) e g é o tensor métrico induzido pela energia cinética K .

Admitamos as hipóteses físicas de que:

- (1) para cada $v_q \in \mathcal{C}$, exista um movimento γ_{v_q} compatível com o vínculo, com $0 \in I$, $\dot{\gamma}_{v_q}(0) = v_q$ e satisfazendo (3.1), e que dois tais movimentos coincidam na intersecção dos seus domínios, ou seja, nos tempos em que ambos estejam definidos, de modo que o movimento fique univocamente determinado pela velocidade inicial;
- (2) $\gamma_{v_q}(t)$ depende continuamente da velocidade inicial v_q .

Então fica bem definido, através de (3.1), um campo de forças reativo contínuo:

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{F}} : \mathcal{C} &\longrightarrow \text{TM} \\ v_q &\longmapsto R_{\gamma_{v_q}}(0) \in T_qM \end{aligned} \quad (3.2)$$

e os movimentos γ_{v_q} compatíveis com o vínculo e satisfazendo (3.1) são soluções de:

$$\nabla_t \dot{\gamma} = \mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}) + R_{\mathcal{F}}(\dot{\gamma}) \quad (3.3)$$

Tomando os levantamentos verticais em $\dot{\gamma}$ de ambos os membros desta equação, fica bem definido um campo de segunda ordem em \mathcal{C} — vide definição (2.6) — $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}}) : \mathcal{C} \rightarrow T\mathcal{C}$, contínuo, para o qual o problema de Cauchy correspondente a uma dada condição inicial $v_q \in \mathcal{C}$ admite solução única, cuja projeção em M é exatamente γ_{v_q} .

Reciprocamente, dado $R_{\mathcal{F}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{TM}$ que preserva fibras tal que (3.3) defina um campo de segunda ordem contínuo $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}}) : \mathcal{C} \rightarrow T\mathcal{C}$ (i.e., tal que exista $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})$ cujas curvas integrais de base sejam dadas por (3.3)) para o qual vale algum teorema de existência e unicidade de suas curvas integrais, então as curvas integrais de base de $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})$ são movimentos compatíveis com o vínculo e satisfazem a lei de Newton (3.3), que ficam univocamente determinados por uma dada velocidade inicial compatível com o vínculo. Isto nos motiva a definir:

DEFINIÇÃO 3.2. *Seja $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ um sistema mecânico vinculado. Dizemos que uma aplicação contínua $R_{\mathcal{F}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{TM}$ é um campo de reações vinculares admissível para o sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ se $(\forall v_q \in \mathcal{C}) R_{\mathcal{F}}(v_q) \in T_qM$ e se existir um campo de segunda ordem em \mathcal{C} (vide definição (2.6)) $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}}) : \mathcal{C} \rightarrow T\mathcal{C}$ para o qual valha algum teorema de existência e unicidade de suas curvas integrais, e tal que suas curvas integrais de base sejam soluções da equação de Newton :*

$$\nabla_t \dot{\gamma} = \mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}) + R_{\mathcal{F}}(\dot{\gamma}) \quad (3.4)$$

Denotamos por \mathfrak{R} o conjunto dos campos de reações vinculares admissíveis para $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

Notação. Quando o campo de forças externo for dado por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, usar-se-á a notação R_V ao invés de $R_{-dV \circ \tau_M}$.

DEFINIÇÃO 3.3. Diz-se que uma curva γ em M é uma trajetória física do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ se existir um campo de reações vinculares admissível $R \in \mathfrak{R}$ tal que γ é curva integral de base do campo de segunda ordem $X_{\mathcal{C}}(R)$.

Observação 3.1. Note que, se $R_{\mathcal{F}}$ for um campo de reações vinculares admissível para $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, então $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})$ fica univocamente determinado por $R_{\mathcal{F}}$. De fato:

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}}) : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{T}\mathcal{C} \\ v_q &\longmapsto X_{\mathcal{F}}(v_q) + \lambda(v_q, R_{\mathcal{F}}(v_q)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $X_{\mathcal{F}} : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}M$ é o campo GMA do sistema mecânico (sem vínculo) (M, K, \mathcal{F}) (vide definição (1.2)).

PROPOSIÇÃO 3.1. Suponha que $R_{\mathcal{F}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}M$ preserva fibras, e seja $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}}) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}M$ definida pela equação (3.5). Então $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})(\mathcal{C}) \subset \mathbb{T}\mathcal{C}$ se, e somente se, para todo $v_q \in \mathcal{C}$:

$$\mathcal{P}_{v_q}^{\perp} \cdot (R_{\mathcal{F}}(v_q)) = -\kappa \cdot P_W \cdot S(v_q) - \mathcal{P}_{v_q}^{\perp} \cdot (\mathcal{F}^{\sharp}(v_q)) \quad (3.6)$$

onde S é o spray geodésico de (M, g) .

Demonstração. Com efeito, dado $v_q \in \mathcal{C}$, $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})(v_q) \in \mathbb{T}_{v_q}\mathcal{C}$ se, e somente se:

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa \cdot P_W \cdot X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})(v_q) = \\ &= \kappa \cdot P_W \cdot \lambda_{v_q}(\mathcal{F}^{\sharp}(v_q) + R_{\mathcal{F}}(v_q)) + \kappa \cdot P_W \cdot H_{v_q}v_q \end{aligned}$$

o que é equivalente à equação (3.6). □

COROLÁRIO 3.1. Os campos de reações vinculares admissíveis de $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ são as aplicações contínuas $R_{\mathcal{F}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}M$ que preservam fibras e que satisfazem a equação (3.6), e tais que vale a propriedade de existência e unicidade para as curvas integrais do campo $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})$.

PROPOSIÇÃO 3.2. Sejam $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ sistema mecânico vinculado e $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ o prolongamento holonômico de \mathcal{C} (vide definição (2.5)). Então, para todo $v_q \in \mathcal{C}$:

$$\mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C}) = \{X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})(v_q) \mid R_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{R}\}$$

onde \mathfrak{R} é o conjunto dos campos de reações vinculares admissíveis de $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ e $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})$ é dado pela equação (3.5).

Demonstração. Dado $v_q \in \mathcal{C}$, a inclusão $\{X_{\mathcal{F}}(R_{\mathcal{F}})(v_q) \mid R_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C})$ é clara, pois $X_{\mathcal{F}}(R_{\mathcal{F}})$ é um campo de segunda ordem em \mathcal{C} , para todo $R_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{R}$. Para verificar a outra inclusão, seja $X_{v_q} \in \mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C})$. Como $\mathfrak{P}(\mathcal{C}) \subset J^2(M)$, existe um campo de segunda ordem $\tilde{X} : TM \rightarrow TTM$ tal que $\tilde{X}(v_q) = X_{v_q}$. Seja $X : \mathcal{C} \rightarrow T\mathcal{C}$ o campo de vetores definido por $X(w_q) = P_{\mathcal{C}} \cdot \tilde{X}(w_q)$, para todo $w_q \in \mathcal{C}$. Como $X(v_q) = P_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q} = X_{v_q}$ (pois $X_{v_q} \in T_{v_q}\mathcal{C}$), a demonstração estará concluída se mostrarmos que existe um campo de reações vinculares admissível $R \in \mathfrak{R}$ tal que $X = X_{\mathcal{F}}(R)$. Com efeito, defina:

$$\begin{aligned} R : \mathcal{C} &\longrightarrow TM \\ w_q &\longmapsto \kappa \cdot X(w_q) - \mathcal{F}^{\sharp}(v_q) \end{aligned}$$

Então, o fato de X ser um campo de segunda ordem em \mathcal{C} implica que $\mathcal{D}_{w_q}^{\perp} \cdot \kappa \cdot X(w_q) + \kappa \cdot P_W \cdot S(v_q) = 0$, para todo $w_q \in \mathcal{C}$, portanto R satisfaz a equação (3.6), donde $R \in \mathfrak{R}$ e $X = X_{\mathcal{F}}(R)$, como afirmado. \square

§2. O PRINCÍPIO DE GAUSS DA VINCULAÇÃO MÍNIMA E AS TRAJETÓRIAS DE D'ALEMBERT-CHETAEV

Se o vínculo for linear, ou seja, se $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ é um subfibrado vetorial diferenciável de TM , então existe (e é único) um campo de reações vinculares admissível $R_{\mathcal{F}}^A : \mathcal{D} \rightarrow TM$ tal que $(\forall v_q \in \mathcal{D}) R_{\mathcal{F}}^A(v_q) \perp \mathcal{D}_q$, ou seja, $(\forall w_q \in \mathcal{D}_q) \langle R_{\mathcal{F}}^A(v_q), w_q \rangle = 0$. Neste caso, as trajetórias definidas por este campo de reações vinculares através de (3.4) são as trajetórias d'Alembertianas de $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ - vide [30], que são, portanto, ortogonais ao campo de reações vinculares (ou seja, em cada instante a velocidade da trajetória é ortogonal à reação, na métrica do espaço tangente sobre a posição correspondente). É claro que, neste caso, o campo de reações vinculares não realiza trabalho; portanto, no caso em que a força externa \mathcal{F} é dada por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$ (i.e., $(\forall v_q \in \mathcal{D}) \mathcal{F}(v_q) = -dV(q)$) a energia mecânica é conservada, ou seja, $K+V \circ \tau_M$ é uma integral primeira do fluxo do campo $X_{\mathcal{D}}(R_{\mathcal{F}}^A)$. As trajetórias assim obtidas, i.e., tomando-se o campo de reações vinculares $R_{\mathcal{F}}^A$, são aquelas que satisfazem o chamado:

Princípio de d'Alembert:

“O campo de reações vinculares é ortogonal ao vínculo.”

Ou seja, as trajetórias d'Alembertianas de $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{D})$ são as soluções da equação de Newton (3.4) quando se toma o campo de reações vinculares ortogonal ao vínculo em cada fibra de TM : define-se $R_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{R}$ por $(\forall v_q \in \mathcal{C}) R_{\mathcal{F}}(v_q) \perp \mathcal{D}_q$; existe e é único um tal campo de reações vinculares admissível.

No caso em que \mathcal{C} não é um subfibrado vetorial de TM , ou seja, no caso não-linear, em geral não existe um campo de reações vinculares admissível satisfazendo a condição acima, i.e., ortogonal ao vínculo em cada fibra de TM . Não faz sentido, portanto, tentar formular o princípio de d'Alembert desta forma para o caso não-linear. Para tentar generalizar esta formulação, temos que encontrar alguma condição a ser satisfeita pelo campo de reações vinculares que implique a condição acima, no caso linear. Para tal, observe que, no caso linear o campo de reações vinculares admissível $R_{\mathcal{F}}$ tem norma mínima em cada $v_q \in \mathcal{D}$. Ou seja, no caso linear, as trajetórias d'Alembertianas são as soluções da lei de Newton (3.4) quando o campo de reações vinculares admissível é escolhido como sendo aquele que tem “intensidade mínima” (dentre todos os outros admissíveis): com efeito, o campo de reações vinculares tem intensidade mínima justamente quando não tiver nenhuma componente tangencial ou “de atrito” (pois a componente “normal” de todos os campos de reações vinculares admissíveis deve ser a mesma, determinada pela condição de compatibilidade das trajetórias com o vínculo, i.e., pela equação (3.6)), ou seja, quando $R_{\mathcal{F}}(v_q)$ for ortogonal a \mathcal{D}_q , para cada $v_q \in \mathcal{D}$. É justamente esta a propriedade que usaremos para definir as trajetórias d'Alembertianas no caso geral, através do:

Princípio de Gauss da Vinculação Mínima:

“O campo de reações vinculares é aquele que tem intensidade mínima.”

Ou seja, podemos escolher um campo de reações vinculares admissível $R_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{R}$ tal que, para cada $v_q \in \mathcal{C}$, a “intensidade” de $R_{\mathcal{F}}$ em v_q é o mínimo das intensidades em v_q de todos os campos de reações vinculares admissíveis. Este é o conteúdo do seguinte teorema:

TEOREMA A (PRINCÍPIO DE GAUSS DA VINCULAÇÃO MÍNIMA). *Existe um único campo de reações vinculares admissível $R_{\mathcal{F}}^A \in \mathfrak{R}$ tal que, para todo $v_q \in \mathcal{C}$:*

$$\|R_{\mathcal{F}}^A(v_q)\| = \min_{R \in \mathfrak{R}} \|R(v_q)\| \quad (3.7)$$

Demonstração. Seja $R_{\mathcal{F}}^A : \mathcal{C} \rightarrow TM$ em \mathfrak{R} o campo de reações vinculares admissível de $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ definido por, para todo $v_q \in \mathcal{C}$:

$$R_{\mathcal{F}}^A(v_q) := -\kappa \cdot P_W(X_{\mathcal{F}}(v_q)) \quad (3.8)$$

onde $X_{\mathcal{F}} : v_q \in TM \mapsto S(v_q) + \lambda_{v_q}(\mathcal{F}^\sharp(v_q)) \in T_{v_q}TM$ é o campo GMA de (M, K, \mathcal{F}) .

Note que $R_{\mathcal{F}}^A$ é diferenciável e $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}}^A) = X_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{C}} - P_W \circ X_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}} \circ X_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{C}}$ é um campo de segunda ordem em \mathcal{C} diferenciável, portanto $R_{\mathcal{F}}^A$ é, de fato, um campo de reações vinculares admissível.

Sejam $R \in \mathfrak{R}$ e $v_q \in \mathcal{C}$. Definamos $w_q := R(v_q) - R_{\mathcal{F}}^A(v_q) \in T_qM$. Então $\lambda_{v_q} w_q \in T_{v_q} \mathcal{C} \cap \text{Ver}_{v_q}(\text{TM}) = \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$, pois é obviamente vertical e $\mathcal{P}_{v_q}^{\perp} \cdot w_q = \mathcal{P}_{v_q}^{\perp} \cdot R(v_q) - \mathcal{P}_{v_q}^{\perp} \cdot R_{\mathcal{F}}^A(v_q) = 0$ pela equação (3.6). Por outro lado, temos $\lambda_{v_q}(R_{\mathcal{F}}^A(v_q)) \in W_{v_q} = \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})^{\perp} \subset \text{Ver}_{v_q}(\text{TM})$, portanto:

$$\langle \lambda_{v_q} w_q, \lambda_{v_q}(R_{\mathcal{F}}^A(v_q)) \rangle = 0$$

donde:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{v_q}(R(v_q)), \lambda_{v_q}(R(v_q)) \rangle &= \langle \lambda_{v_q}(R_{\mathcal{F}}^A(v_q)), \lambda_{v_q}(R_{\mathcal{F}}^A(v_q)) \rangle + \langle \lambda_{v_q} w_q, \lambda_{v_q} w_q \rangle + \\ &\quad + 2 \underbrace{\langle \lambda_{v_q}(R_{\mathcal{F}}^A(v_q)), \lambda_{v_q} w_q \rangle}_{=0} \\ &\geq \langle \lambda_{v_q}(R_{\mathcal{F}}^A(v_q)), \lambda_{v_q}(R_{\mathcal{F}}^A(v_q)) \rangle \end{aligned}$$

e a igualdade vale se, e somente se, $\lambda_{v_q} w_q = 0$, ou, equivalentemente, $w_q = R(v_q) - R_{\mathcal{F}}^A(v_q) = 0$.

Como $\lambda_{v_q} : T_qM \rightarrow \text{Ver}_{v_q}(\text{TM})$ é uma isometria linear, e como $v_q \in \mathcal{C}$ e $R \in \mathfrak{R}$ foram tomados arbitrariamente, isto prova que, para todos os campos de reações vinculares admissíveis $R \in \mathfrak{R}$ e para todo $v_q \in \mathcal{C}$:

$$\|R_{\mathcal{F}}^A(v_q)\| \leq \|R(v_q)\|$$

e que, se $R \in \mathfrak{R}$ satisfaz $(\forall v_q \in \mathcal{C}) \|R_{\mathcal{F}}^A(v_q)\| = \|R(v_q)\|$, então $R = R_{\mathcal{F}}^A$. \square

DEFINIÇÃO 3.4. O campo de segunda ordem em \mathcal{C} induzido pelo campo de reações vinculares $R_{\mathcal{F}}^A$ dado por (3.8), i.e., $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}}^A) = P_{\mathcal{C}} \circ X_{\mathcal{F}}$, é chamado campo de Gibbs-Maggi-Appell (GMA) do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, e doravante será denotado por $X_{\mathcal{C}}^{\mathcal{F}}$ (ou $X_{\mathcal{C}}^V$, caso a força externa seja dada por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$), ou simplesmente $X_{\mathcal{C}}$, sempre que não houver confusão.

Uma curva em γ em M diz-se uma trajetória de d'Alembert-Chetaev do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ se for uma curva integral de base do campo GMA $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}}^A)$. Chamamos de fluxo d'Alembertiano do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ ao fluxo do campo $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}}^A)$.

Note que as trajetórias de d'Alembert-Chetaev de $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ são diferenciáveis, pois $X_{\mathcal{C}}$ é diferenciável.

Exemplo 3.1. No exemplo do servomecanismo (exemplo (2.1)-d), considere:

$$K(\dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (I + ml^2 \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2$$

$$V = mgl \sin \theta$$

onde m é a massa da barra, I é o momento de inércia da barra com relação ao baricentro, l é a distância da articulação da barra com o atuador no eixo Ox eixo ao baricentro da barra e g é a aceleração da gravidade. Para simplificar, consideremos $m = I = l = g = 1$.

Após um cálculo direto, conclui-se que a reação que define as trajetórias de d'Alembert-Chetaev é dada por:

$$R_V^A(\dot{x}, \dot{\theta}) = \left(\frac{\mathbb{F}h(\dot{\theta}) \cos \theta}{(1 + \mathbb{F}h(\dot{\theta})^2)(1 + \cos^2 \theta)} + \frac{\mathbb{P}h(\dot{\theta}) \cdot (\dot{x}, \dot{\theta})}{1 + \mathbb{F}h(\dot{\theta})^2} \right) (\partial_x - \mathbb{F}h(\dot{\theta}) \partial_\theta)$$

Note que esta reação tem um termo ∂_θ .

Por outro lado, se fizermos a hipótese física de que não existe atrito na articulação e que o atuador não introduz torque na mesma, o campo de reações vinculares admissível deve ser dado por:

$$R_V(\dot{x}, \dot{\theta}) = \left(\frac{\mathbb{F}h(\dot{\theta}) \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta} + \mathbb{P}h(\dot{\theta}) \cdot (\dot{x}, \dot{\theta}) \right) \partial_x$$

Este exemplo mostra que, ao modelar-se um vínculo físico, a reação que define as trajetórias de d'Alembert-Chetaev nem sempre é adequada, e a escolha do campo de reações vinculares que define as trajetórias do sistema mecânico vinculado deve ser feita com base numa hipótese física sobre a dinâmica do vínculo físico.

Usando a conexão de Levi-Civita de (M, g) , define-se o *tensor métrico de Sasaki* ou, simplesmente, a *métrica de Sasaki* g_{TM} no fibrado tangente TM (vide [53] e [54]) por, para todo $v_q \in TM$, $X_{v_q}, Y_{v_q} \in T_{v_q} TM$:

$$\langle X_{v_q}, Y_{v_q} \rangle_{g_{TM}} := \langle \kappa \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot Y_{v_q} \rangle_{T_q M} + \langle T\tau_M \cdot X_{v_q}, T\tau_M \cdot Y_{v_q} \rangle_{T_q M}$$

Munindo TM deste tensor métrico, temos $\text{Hor}(TM) = \text{Ver}(TM)^\perp$. Além disso, usamos g_{TM} para definir a função de Gibbs-Appell do sistema mecânico (M, K, \mathcal{F}) :

DEFINIÇÃO 3.5. Dado um sistema mecânico (M, K, \mathcal{F}) , definimos a função de Gibbs-Appell $\mathfrak{G} : TTM \rightarrow \mathbb{R}$ (vide [45] e [34]) por, para todo $X_{v_q} \in TTM$:

$$\mathfrak{G}(X_{v_q}) = \langle \lambda_{v_q}(-\mathcal{F}^\sharp(v_q)) + \frac{1}{2} (X_{v_q} - S(v_q)), X_{v_q} - S(v_q) \rangle_{g_{TM}}$$

onde S é o spray geodésico de (M, g) .

COROLÁRIO 3.2 (GIBBS-APPELL). *O campo GMA $X_{\mathcal{C}}$ é o único campo de segunda ordem em \mathcal{C} que, em cada fibra $\mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C})$ do prolongamento holonômico de \mathcal{C} , $v_q \in \mathcal{C}$, minimiza a função de Gibbs-Appell \mathfrak{G} . Ou seja, dado $v_q \in \mathcal{C}$, tem-se:*

$$\mathfrak{G}(X_{\mathcal{C}}(v_q)) = \min_{X_{v_q} \in \mathfrak{P}_{v_q}(\mathcal{C})} \mathfrak{G}(X_{v_q}).$$

Demonstração. É suficiente observar que:

$$\mathfrak{G}(X_{v_q}) = \frac{1}{2} \|X_{v_q} - X_{\mathcal{F}}(v_q)\|_{\mathfrak{g}_{\text{TM}}}^2 - \frac{1}{2} \|\lambda_{v_q} \mathcal{F}^\sharp(v_q)\|_{\mathfrak{g}_{\text{TM}}}^2$$

onde $X_{\mathcal{F}}$ é o campo GMA de (M, K, \mathcal{F}) , e então aplicar a proposição (3.2) e o teorema (A). \square

§3. O PRINCÍPIO DE HÖLDER

Nesta seção, mostrar-se-á que, quando o campo de forças externo é dado por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, as trajetórias de d'Alembert-Chetaev do sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) satisfazem um princípio variacional, o chamado *princípio de Hölder*, como no caso linear — vide [30]. Este é o conteúdo do seguinte teorema:

TEOREMA B (PRINCÍPIO DE HÖLDER). *Seja γ uma curva em M de classe H^2 , compatível com \mathcal{C} . Então γ é uma trajetória de d'Alembert-Chetaev do sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) se, e somente se, para todo intervalo fechado $[a, b] \subset \text{dom } \gamma$, $d\mathcal{L}(\gamma|_{[a,b]}) \cdot H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b)) = \{0\}$, onde $\mathcal{L} : H^1(M, [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional de Lagrange induzido pela lagrangeana $L = K - V \circ \tau_M$ e:*

$$H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b)) = \{\eta \in T_{\gamma}H^1(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b)) \mid \eta(t) \in C_{\dot{\gamma}(t)} \text{ q.s. em } [a, b]\} \quad (3.9)$$

ou seja, é o subespaço formado pelas variações infinitesimais $\eta \in T_{\gamma}H^1(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ tais que, para todo $t \in [a, b]$, $\eta(t)$ é uma velocidade virtual em $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{C}$.

Demonstração. Pela proposição (1.4), $\mathcal{L} : H^1(M, [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Dados $[a, b] \subset \text{dom } \gamma$ e $\eta \in T_{\gamma|_{[a,b]}}H^1(M, [a, b])$, seja $s \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \gamma_s \in H^1(M, [a, b])$ tal que $\frac{T\gamma_s}{ds}|_{s=0} = \eta$. Então:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}(\gamma|_{[a,b]}) \cdot \eta &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b K(\dot{\gamma}_s) - V(\gamma_s) = \\ &= \int_a^b \langle \nabla_t \eta, \dot{\gamma} \rangle - \langle \text{grad } V(\gamma), \eta \rangle \stackrel{\gamma \in H^2}{=} \\ &= \langle \eta, \dot{\gamma} \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle \nabla_t \dot{\gamma} + \text{grad } V(\gamma), \eta \rangle \end{aligned}$$

Logo, para todo $\eta \in H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$:

$$d\mathcal{L}(\gamma|_{[a,b]}) \cdot \eta = - \int_a^b \langle \nabla_t \dot{\gamma} + \text{grad } V(\gamma), \eta \rangle \quad (3.10)$$

Suponha que γ seja uma trajetória de d'Alembert-Chetaev, i.e., uma curva integral de base do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V = P_{\mathcal{C}} \circ X_V|_{\mathcal{C}}$. Então γ é diferenciável e, para todo $t \in \text{dom } \gamma$, $\nabla_t \dot{\gamma} = \kappa \cdot \frac{T\dot{\gamma}}{dt} = \kappa \cdot X_{\mathcal{C}}^V(\dot{\gamma}) = -\kappa \cdot P_W \cdot S(\dot{\gamma}) - \mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot \text{grad } V(\gamma)$, donde $\mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot (\nabla_t \dot{\gamma} + \text{grad } V(\gamma)) = 0$, portanto $d\mathcal{L}(\gamma|_{[a,b]}) \cdot \eta = 0$ para todo $\eta \in H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$.

Por outro lado, suponha que $d\mathcal{L}(\gamma|_{[a,b]}) \cdot \eta = 0$ para todo $\eta \in H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$. Então segue da equação (3.10) que $\mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot (\nabla_t \dot{\gamma} + \text{grad } V(\gamma)) = 0$ quase sempre em $[a, b]$. Portanto, para quase todo $t \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} \frac{T\dot{\gamma}}{dt} &= S(\dot{\gamma}) + \lambda_{\dot{\gamma}}(\nabla_t \dot{\gamma}) = \\ &= S(\dot{\gamma}) + \lambda_{\dot{\gamma}}(\mathcal{P}_{\dot{\gamma}}^{\perp} \cdot \nabla_t \dot{\gamma}) - \lambda_{\dot{\gamma}}(\mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot \text{grad } V(\gamma)) \stackrel{\frac{T\dot{\gamma}}{dt} \in T\mathcal{C}}{=} \\ &= S(\dot{\gamma}) - P_W \cdot S(\dot{\gamma}) - \lambda_{\dot{\gamma}}(\mathcal{P}_{\dot{\gamma}} \cdot \text{grad } V(\gamma)) = \\ &= P_{\mathcal{C}} \cdot S(\dot{\gamma}) + P_{\mathcal{C}} \lambda_{\dot{\gamma}}(-\text{grad } V(\gamma)) = \\ &= P_{\mathcal{C}} \cdot X_V(\dot{\gamma}) = \\ &= X_{\mathcal{C}}^V(\dot{\gamma}) \end{aligned}$$

logo $\gamma|_{[a,b]}$ é curva integral de base do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V$. Como $[a, b] \subset \text{dom } \gamma$ foi tomado arbitrariamente, segue que γ é curva integral de base do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V$. \square

§4. CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

É bem conhecido o fato de que, num sistema mecânico com vínculo linear no qual o campo de forças externo é dado por um potencial, (M, K, V, \mathcal{D}) , a energia mecânica $E_{\mathcal{C}} := K|_{\mathcal{C}} + V \circ \pi_{\mathcal{C}}$ é uma integral primeira do fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{D}}^V$ — vide [43]. É natural indagar, portanto, sob que condições o mesmo ocorre no caso de um vínculo não-linear \mathcal{C} .

Nesta seção, será mostrado que, fixada uma terna (M, K, \mathcal{C}) , o campo GMA do sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) conserva a energia mecânica para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$ se, e somente se, o *campo de Liouville* $Z \in \mathfrak{X}(TM)$ — i.e., o campo gerado pelo grupo a um parâmetro de difeomorfismos de TM dado por $e^t : v_q \in TM \mapsto e^t v_q \in TM$, $t \in \mathbb{R}$ — é tangente a \mathcal{C} . Em particular, se \mathcal{C} for um cone (isto é, se

$v_q \in \mathcal{C}$ implica $(\forall t > 0) tv_q \in \mathcal{C}$, esta condição é satisfeita — é o caso do exemplo de Benenti, exemplo (2.1)-f.

Como corolário, mostraremos que, fixada (M, K, \mathcal{C}) , com \mathcal{C} fechado em TM — como é o caso de um vínculo dado por um morfismo de fibrados diferenciáveis $f : TM \rightarrow S$, i.e., $\mathcal{C} = f^{-1}[\mathbb{O}_S]$, vide proposição (2.1) — então o campo GMA do sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) conserva a energia mecânica para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$ se, e somente se, $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ é um vínculo linear. Em outras palavras, se considerarmos apenas vínculos fechados em TM , os vínculos lineares são os únicos que conservam energia.

PROPOSIÇÃO 3.3. *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana, $K : TM \rightarrow \mathbb{R}$ a energia cinética induzida por g e \mathcal{C} um vínculo. São equivalentes:*

- (i) *Para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, a energia mecânica $E_{\mathcal{C}} = K|_{\mathcal{C}} + V \circ \pi_{\mathcal{C}}$ é integral primeira do fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V$;*
- (ii) *O campo de Liouville $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é tangente a \mathcal{C} .*

Observamos que a implicação (ii) \Rightarrow (i) já era conhecida em formulações ligeiramente diferentes da nossa — vide [60], [36], [13].

Demonstração. (1) Inicialmente, notemos que a condição (i) é equivalente à condição:

$$(i') \quad (\forall v_q \in \mathcal{C}) v_q \in C_{v_q}.$$

Com efeito, assumamos que vale (i'). Dado $V \in \mathfrak{F}(M)$, seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma trajetória de d'Alembert-Chetaev de (M, K, V, \mathcal{C}) , com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Então, para todo $t \in I$, $\dot{\gamma} \in \mathcal{C}$, portanto $\dot{\gamma} \in C_{\dot{\gamma}}$ por (i'). Além disso, como $\nabla_t \dot{\gamma} + \text{grad } V(\gamma) = \kappa \cdot (X_{\mathcal{C}}^V(\dot{\gamma}) - X_V(\dot{\gamma})) = -\kappa \cdot P_W \cdot X_V(\dot{\gamma}) = R_V^A(\dot{\gamma}) \in C_{\dot{\gamma}}^{\perp}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{K(\dot{\gamma}) + V(\gamma)\} &= \langle \nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle + \langle \text{grad } V(\gamma), \dot{\gamma} \rangle = \\ &= \langle \nabla_t \dot{\gamma} + \text{grad } V(\gamma), \dot{\gamma} \rangle = \\ &= \langle R_V^A(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

portanto $K + V \circ \tau_M$ é constante ao longo de $\dot{\gamma}$; como γ foi tomada arbitrariamente, segue que $K + V \circ \tau_M$ é integral primeira de $X_{\mathcal{C}}^V$, para todo $V \in \mathfrak{F}(M)$, ou seja, vale a condição (i).

Reciprocamente, suponhamos que não vale a condição (i'), ou seja, existe $v_q \in \mathcal{C}$ tal que $v_q \notin C_{v_q}$. Então, pondo $v_q^{\perp} := \mathcal{P}_{v_q}^{\perp} v_q \in C_{v_q}^{\perp}$, temos $v_q^{\perp} \neq 0$. Tome $V \in \mathfrak{F}(M)$ tal que

$\text{grad } V(q) = v_q^\perp + \kappa \cdot P_W \cdot S(v_q)$; então, por (3.8), temos $R_V^A(v_q) = -\kappa \cdot P_W \cdot X_V(v_q) = v_q^\perp$. Portanto, pelo mesmo cálculo de (3.11):

$$X_V^A(v_q)[K + V \circ \tau_M] = \langle R_V^A(v_q), v_q \rangle = \langle v_q^\perp, v_q^\perp \rangle > 0$$

o que mostra que não vale a condição (i).

(2) Sendo $Z \in \mathfrak{X}(TM)$ o campo de Liouville, temos $(\forall v_q \in TM) Z(v_q) = \lambda_{v_q} v_q$. Assim, dado $v_q \in \mathcal{C}$, temos $Z(v_q) \in T_{v_q} \mathcal{C} \Leftrightarrow \lambda_{v_q} v_q \in \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow v_q = \kappa \cdot \lambda_{v_q} v_q \in C_{v_q}$. Como $v_q \in \mathcal{C}$ é arbitrário, segue que Z é tangente a \mathcal{C} se, e somente se, vale a condição (i').

□

Motivados por esta proposição, definimos:

DEFINIÇÃO 3.6. *Um vínculo $\mathcal{C} \subset TM$ diz-se um vínculo que conserva energia se o campo de Liouville Z for tangente a \mathcal{C} .*

Exemplo 3.2. (i) *Vínculos lineares são vínculos que conservam energia.*

(i) *O vínculo dado pelo exemplo (2.1.f) é um vínculo que conserva energia.*

Provaremos a seguir que, nas mesmas hipóteses da proposição precedente, se \mathcal{C} for fechado em TM , então as condições (i) ou (ii) são equivalentes a \mathcal{C} ser um vínculo linear.

LEMA 3.1. *Se \mathcal{C} for um vínculo fechado em TM , e se o campo de Liouville for tangente a \mathcal{C} , então, para todo $q \in M$, \mathcal{C}_q é um subespaço vetorial de T_qM .*

Demonstração. Seja $q \in M$. Temos:

1. \mathcal{C}_q é uma subvariedade mergulhada fechada de T_qM .

Com efeito, já provamos que \mathcal{C}_q é uma subvariedade mergulhada em T_qM . Como $\mathcal{C}_q = \pi_{\mathcal{C}}^{-1}[q]$ é fechada em \mathcal{C} , e \mathcal{C} é fechada em TM , por hipótese, segue que \mathcal{C}_q é fechada em TM , portanto fechada em T_qM .

2. Para cada $v_q \in \mathcal{C}_q$ e para cada $t \geq 0$, temos $tv_q \in \mathcal{C}_q$.

Com efeito, para cada $v_q \in \mathcal{C}_q$, o fato de Z ser tangente a \mathcal{C} implica que existe $\epsilon(v_q) > 0$ tal que $e^t v_q \in \mathcal{C}$ para $t \in (-\epsilon(v_q), \epsilon(v_q))$. Sejam $T_{v_q} := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid e^t v_q \in \mathcal{C}\}$ e $t_{v_q} := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid e^t v_q \in \mathcal{C}\}$. Se $T_{v_q} < +\infty$, o fato de que \mathcal{C} é fechada em TM implica que $e^{T_{v_q}} v_q \in \mathcal{C}$, portanto existiria $t > T_{v_q}$ tal que $e^t v_q \in \mathcal{C}$, o que é uma contradição; assim, $T_{v_q} = +\infty$. Analogamente, $t_{v_q} = -\infty$. Isto mostra que $e^t v_q \in \mathcal{C}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $tv_q \in \mathcal{C}$ para todo $t > 0$. Novamente pelo fato de \mathcal{C} ser fechada em TM , segue $0v_q = 0v_q \in \mathcal{C}$, donde a afirmação.

3. Identificando $T_{\mathbb{O}_q}(\mathcal{C}_q)$ com um subespaço vetorial de T_qM , então $\mathcal{C}_q = T_{\mathbb{O}_q}(\mathcal{C}_q)$, o que concluirá a demonstração.

De fato, seja $w_q \in \mathcal{C}_q$, e definamos:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{C}_q \\ t &\longmapsto tw_q \end{aligned}$$

Então γ está bem definida, pelo item anterior, e é uma curva diferenciável em \mathcal{C}_q (no 0, obviamente, isto significa que γ é diferenciável à direita), pois é diferenciável como uma aplicação a valores em T_qM e \mathcal{C}_q é uma subvariedade mergulhada de T_qM . Portanto:

$$w_q = \frac{T\gamma}{dt} \Big|_{t=0} \in T_{\mathbb{O}_q}(\mathcal{C}_q)$$

Como $w_q \in \mathcal{C}_q$ foi tomado arbitrariamente, isto mostra a inclusão $\mathcal{C}_q \subset T_{\mathbb{O}_q}(\mathcal{C}_q)$. Mas, \mathcal{C}_q e $T_{\mathbb{O}_q}(\mathcal{C}_q)$ são ambas subvariedades mergulhadas de T_qM , de mesma dimensão; logo, se $\mathcal{C}_q \subset T_{\mathbb{O}_q}(\mathcal{C}_q)$, \mathcal{C}_q deve ser uma subvariedade aberta de $T_{\mathbb{O}_q}(\mathcal{C}_q)$. Como \mathcal{C}_q é fechada em T_qM , também é fechada em $T_{\mathbb{O}_q}(\mathcal{C}_q)$, que é conexa, pois é um espaço vetorial. Então $\mathcal{C}_q = T_{\mathbb{O}_q}(\mathcal{C}_q)$, como afirmado.

□

Como corolário da proposição (3.3) e do lema (3.1), obtemos o seguinte teorema:

TEOREMA C. *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana, $K : TM \rightarrow \mathbb{R}$ a energia cinética induzida por g e \mathcal{C} um vínculo fechado em TM . São equivalentes:*

1. *Para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, a energia mecânica $E_{\mathcal{C}} = K|_{\mathcal{C}} + V \circ \pi_{\mathcal{C}}$ é integral primeira do fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V$.*
2. *\mathcal{C} é um subfibrado vetorial diferenciável de TM , ou seja, é um vínculo linear.*

Demonstração. Como (2) \Rightarrow (1) é clara, resta verificar (1) \Rightarrow (2).

Com efeito, se (1) vale, então segue da proposição (3.3) e do lema (3.1) que, para cada $q \in M$, \mathcal{C}_q é um subespaço vetorial de T_qM . Além disso, como $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$ é uma submersão e $\mathcal{C}_q = \pi_{\mathcal{C}}^{-1}[q]$, todos os subespaços \mathcal{C}_q , $q \in M$, têm a mesma dimensão. Mostraremos que $q \mapsto \mathcal{C}_q$ é uma distribuição diferenciável em M (i.e., é localmente gerada por seções diferenciáveis), e isto concluirá a demonstração.

De fato, sejam $q \in M$ e (e_1, \dots, e_k) uma base de \mathcal{C}_q . Como $\pi_{\mathcal{C}}$ é uma submersão, existem seções locais diferenciáveis X_1, \dots, X_k de $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow M$, definidas num aberto $U \subset M$ com $q \in U$, tais que $X_i(q) = e_i$, para $1 \leq i \leq k$. Sendo $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$ linearmente independente, por continuidade existe uma vizinhança aberta $\tilde{U} \subset U$ de q tal que $\{X_1, \dots, X_k\}$ é linearmente independente em \tilde{U} . Logo, $\mathcal{C}|_{\tilde{U}}$ é gerada pelas seções diferenciáveis X_1, \dots, X_k . Finalmente, como $q \in M$ foi tomado arbitrariamente, isto mostra que \mathcal{C} é localmente gerada por seções diferenciáveis, ou seja, \mathcal{C} é uma distribuição diferenciável, como afirmado. \square

O seguinte corolário segue de [9]. Vide também [59]. Um colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ em \mathcal{C} é uma forma \mathbb{R} -bilinear anti-simétrica em $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$, satisfazendo a identidade de Jacobi (tornando $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ uma álgebra de Lie, portanto) e a identidade de Leibniz (i.e., $\{\cdot, \cdot\}$ é uma derivação no segundo fator).

COROLÁRIO 3.3. *As seguintes condições são equivalentes:*

1. $(\mathcal{C}, \{\cdot, \cdot\})$ é uma variedade de Poisson, fechada em TM , e

$$X_{\mathcal{C}} = \xi_{\phi}^{\mathcal{C}}$$

para toda $\phi \in \mathfrak{F}(\mathcal{C})$ da forma $\phi = K|_{\mathcal{C}} + V \circ \pi_{\mathcal{C}}$, $V \in \mathfrak{F}(M)$, onde $\xi_{\phi}^{\mathcal{C}}$ é o campo hamiltoniano induzido pela hamiltoniana ϕ , i.e., $\xi_{\phi}^{\mathcal{C}}[\psi] = \{\psi, \phi\}$, para toda $\psi \in \mathfrak{F}(\mathcal{C})$;

2. \mathcal{C} é um subfibrado vetorial diferenciável de TM , completamente integrável.

Demonstração. (2) \Rightarrow (1) é clara. Suponha, por outro lado, que valha a condição (1). Então:

$$X_{\mathcal{C}}[\phi] = \xi_{\phi}^{\mathcal{C}}[\phi] = 0$$

para toda $\phi \in \mathfrak{F}(\mathcal{C})$ & $\phi = K|_{\mathcal{C}} + V \circ \pi_{\mathcal{C}}$. Portanto, pelo teorema (C) isto é equivalente a \mathcal{C} ser um subfibrado vetorial diferenciável de TM , ou seja, um vínculo linear. Então a tese é consequência do Teorema 1 de [9], segundo o qual, para um *vínculo linear* \mathcal{D} , as condições (1) e (2) são equivalentes. \square

§5. O TEOREMA DE LIOUVILLE PARA O CAMPO GMA

Nesta seção, serão fixados uma variedade riemanniana (M, g) e um vínculo $\mathcal{C} \subset TM$, e denotar-se-á por K a energia cinética induzida pelo tensor métrico g .

O principal objetivo, nesta seção, é generalizar, para sistemas mecânicos vinculados, o teorema de Liouville sobre a conservação do volume: para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$,

o fluxo do campo GMA X_V do sistema mecânico (M, K, V) conserva o volume de Liouville — o volume riemanniano induzido pela métrica de Sasaki g_{TM} em TM , i.e., o tensor métrico de TM tal que, para todo $v_q \in TM$, $\lambda_{v_q} : T_qM \rightarrow \text{Ver}_{v_q}(TM)$ e $H_{v_q} : T_qM \rightarrow \text{Hor}_{v_q}(TM)$ são isometrias lineares e $\text{Ver}_{v_q}(TM) \perp \text{Hor}_{v_q}(TM)$ (vide seção (2)).

Para tal, será construído um tensor métrico $g_{\mathcal{C}}$ em \mathcal{C} que generaliza o tensor métrico de Sasaki g_{TM} (i.e., $g_{\mathcal{C}}$ coincide com g_{TM} quando $\mathcal{C} = TM$), e computar-se-á a conexão de Levi-Civita de $(\mathcal{C}, g_{\mathcal{C}})$ com respeito a um referencial conveniente; como subproduto, é generalizado um resultado de [53].

A aplicação diferenciável dada pela seguinte definição terá um papel importante na generalização do teorema de Liouville:

DEFINIÇÃO 3.7. Denotamos por $A : \mathcal{C} \rightarrow L(TM, TM)$ a aplicação definida por, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $A(v_q) := \kappa \circ P_{\mathcal{C}} \circ H_{v_q} : T_qM \rightarrow T_qM$, onde κ é o conector induzido pela conexão de Levi-Civita de (M, g) .

Note que, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, temos $A(v_q) = -\kappa \circ P_W \circ H_{v_q}$, portanto $\text{Im } A(v_q) \subset C_{v_q}^\perp$. Isto decorre de: (1) $\kappa \circ H_{v_q} = 0$ e (2) $P_{\mathcal{C}} + P_W = \text{id}_{i_{v_q}^*(T_qM)}$. Além disso, dado $X_{v_q} \in T_{v_q}TM$, temos $X_{v_q} \in T_{v_q}\mathcal{C}$ se, e somente se, $\mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} = A(v_q) \cdot T_{\tau_M} \cdot X_{v_q}$. Com efeito, esta última equação é claramente equivalente a $\kappa \cdot P_W \cdot X_{v_q} = 0 \Leftrightarrow P_W \cdot X_{v_q} = 0$.

O seguinte lema relaciona as derivadas nas fibras e as derivadas paralelas de A , \mathcal{P} e \mathcal{P}^\perp :

LEMA 3.2. Para todo $q \in M$, $v_q \in \mathcal{C}_q$, $w_q \in T_qM$, temos:

- (i) $\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) = -\mathbb{F}\mathcal{P}^\perp(v_q)$ e $\mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) = -\mathbb{P}\mathcal{P}^\perp(v_q)$.
- (ii) $\mathcal{P}(v_q) \circ \{\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot w_q\} = \{\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot w_q\} \circ \mathcal{P}^\perp(v_q)$ e $\mathcal{P}(v_q) \circ \{\mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot w_q\} = \{\mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot w_q\} \circ \mathcal{P}^\perp(v_q)$.
- (iii) $\mathcal{P}(v_q) \circ \{\mathbb{F}A(v_q) \cdot w_q\} = -\{\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot w_q\} \circ A_{v_q}$ e $\mathcal{P}(v_q) \circ \{\mathbb{P}A(v_q) \cdot w_q\} = -\{\mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot w_q\} \circ A_{v_q}$.

Demonstração. Com efeito, dado $X_{v_q} \in T_{v_q}\mathcal{C}$, seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\frac{T\gamma}{dt} = X_{v_q}$. Tomando $\nabla_{t|t=0}$ em ambos os membros das igualdades $\mathcal{P}(\gamma) + \mathcal{P}^\perp(\gamma) = \text{id}_{T_{(\tau_M \circ \gamma)}M}$, $\mathcal{P}(\gamma) \circ \mathcal{P}^\perp(\gamma) = 0$ e $\mathcal{P}(\gamma) \circ A(\gamma) = 0$, segue, respectivamente:

$$\kappa \cdot T_{v_q}\mathcal{P} \cdot X_{v_q} + \kappa \cdot T_{v_q}\mathcal{P}^\perp \cdot X_{v_q} = 0 \quad (3.12)$$

$$(\kappa \cdot T_{v_q}\mathcal{P} \cdot X_{v_q}) \circ \mathcal{P}^\perp(v_q) + \mathcal{P}(v_q) \circ (\kappa \cdot T_{v_q}\mathcal{P}^\perp \cdot X_{v_q}) = 0 \quad (3.13)$$

e:

$$(\kappa \cdot T_{v_q} \mathcal{P} \cdot X_{v_q}) \circ A(v_q) + \mathcal{P}(v_q) \circ (\kappa \cdot T_{v_q} A \cdot X_{v_q}) = 0 \quad (3.14)$$

Substituindo-se (3.12) em (3.13), segue:

$$\mathcal{P}(v_q) \circ (\kappa \cdot T_{v_q} \mathcal{P} \cdot X_{v_q}) = (\kappa \cdot T_{v_q} \mathcal{P} \cdot X_{v_q}) \circ \mathcal{P}^\perp(v_q) \quad (3.15)$$

A tese segue das equações (3.12), (3.15) e (3.14), tomando-se restrições aos subfibrados horizontal e vertical de $T\mathcal{C}$. \square

A seguir, definimos o tensor métrico de Sasaki $g_{\mathcal{C}}$ em \mathcal{C} .

DEFINIÇÃO 3.8. *O tensor métrico de Sasaki ou simplesmente a métrica de Sasaki em \mathcal{C} é o único tensor métrico $g_{\mathcal{C}}$ em \mathcal{C} tal que, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $\lambda_{v_q}^{\mathcal{C}}|_{C_{v_q}} : C_{v_q} \rightarrow \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$ e $H_{v_q}^{\mathcal{C}} : T_q M \rightarrow \text{Hor}_{v_q}(\mathcal{C})$ são isometrias lineares.*

Assim, munindo \mathcal{C} do tensor métrico $g_{\mathcal{C}}$, temos $\text{Hor}(\mathcal{C}) = \text{Ver}(\mathcal{C})^\perp$, e, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $X_{v_q}, Y_{v_q} \in T_{v_q} \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{C}}(X_{v_q}, Y_{v_q}) &= \langle P_H \cdot X_{v_q}, P_H \cdot Y_{v_q} \rangle_{\text{Hor}_{v_q}^{\mathcal{C}}} + \langle P_V \cdot X_{v_q}, P_V \cdot Y_{v_q} \rangle_{\text{Ver}_{v_q}^{\mathcal{C}}} = \\ &= \langle T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}, T\pi_{\mathcal{C}} \cdot Y_{v_q} \rangle + \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q}, \mathcal{P}(v_q) \cdot \kappa \cdot Y_{v_q} \rangle \end{aligned}$$

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema, que fornece uma condição necessária e suficiente para que o volume riemanniano induzido pela métrica de Sasaki $g_{\mathcal{C}}$ seja preservado pelo fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V$ do sistema mecânico (M, K, V, \mathcal{C}) , para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$. Usaremos a seguinte notação:

Notação. Dados $q \in M$, $v_q \in \mathcal{C}_q$ e $w_q \in T_q M$, denotamos por $\mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot w_q$ a adjunta da aplicação $\mathbb{F} \mathcal{P}(v_q) \cdot w_q : T_q M \rightarrow T_q M$ com relação ao produto interno induzido pelo tensor métrico em $T_q M$. Isto define $\mathbb{F}^* \mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow L(TM, L(TM, TM)) \equiv L(TM \otimes TM, TM)$.

TEOREMA D. *A medida de Lebesgue em \mathcal{C} induzida pelo tensor métrico $g_{\mathcal{C}}$ é preservada pelo fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V$ do sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) , para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, se, e somente se, as duas condições seguintes forem satisfeitas, para todo $v_q \in \mathcal{C}$:*

(i) $\text{tr } A(v_q) = 0$.

(ii) $\text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q)|_{C_{v_q} \times C_{v_q}} = 0$.

Observação 3.2. Uma condição necessária e suficiente para que a medida de Lebesgue mencionada no enunciado do teorema acima seja preservada pelo fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V$ correspondente a um dado potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$ fixado, é a de ser nulo o divergente do referido campo, dado pela equação (3.22) — vide proposição (3.4).

Exemplo 3.3. As condições (i) e (ii) do teorema acima são satisfeitas pelo vínculo \mathcal{C} do exemplo (2.1.f), de modo que a medida de Lebesgue em \mathcal{C} induzida pela métrica de Sasaki é preservada pelo fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V$, para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$.

Com efeito, no referido exemplo, temos: $M = \mathbb{R}^4$, $(\forall x \in M) \mathcal{C}_x = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}_x^4 \setminus \{\mathbb{O}_x\} \mid \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} = 0\}$. Usaremos a seguinte notação: dado $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$, denotaremos $\vec{v} := (v_4, -v_3, -v_2, v_1)$ e $v' := (-v_2, v_1, -v_4, v_3)$. Para todo $v_x = (x, v) \in \mathcal{C}$, temos $C_{v_x}^\perp = [\vec{v}] \subset T_x M = \mathbb{R}_x^4$, $C_{v_x} = [\vec{v}]^\perp$, $W_{v_x} = \lambda_{v_x} C_{v_x}^\perp = [(0, \vec{v})_{v_x}] \subset T_{v_x} TM = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4)_{v_x}$, $T_{v_x} \mathcal{C} = \{Y_{v_x} = (Y_1, Y_2)_{v_x} \in T_{v_x} TM \mid Y_2 \in C_{v_x} = [\vec{v}_x]^\perp\}$. Assim, para todo $x \in M$, $v_x, w_x \in \mathcal{C}_x$:

$$A(v_x) \cdot w_x = -\kappa \cdot P_W \cdot H_{v_x} w_x = -\kappa \cdot P_W \cdot (w, 0)_{v_x} = 0$$

de modo que $A \equiv 0$, ou seja, a condição (i) é trivialmente satisfeita, e:

$$\mathcal{P}(v_x) \cdot w_x = \left(x, w - \frac{\langle w, \vec{v} \rangle \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \right)$$

portanto, para todo $x \in M$, $v_x \in \mathcal{C}_x$, $w_x, s_x \in C_{v_x}$, $z_x \in T_x M$:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\mathcal{P}(v_x) \cdot (w_x, z_x) &= \left(x, \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[z - \frac{\langle z, \overrightarrow{v+tw} \rangle \overrightarrow{v+tw}}{\|\overrightarrow{v+tw}\|^2} \right] \right) = \\ &= \left(x, -\frac{\langle z, \vec{v} \rangle \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2} - \left[\frac{\langle z, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} - \frac{2\langle v, w \rangle}{\|\vec{v}\|^4} \langle z, \vec{v} \rangle \right] \vec{v} \right) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_x) \cdot (w_x, s_x), z_x \rangle &= \langle s_x, \mathbb{F}\mathcal{P}(v_x) \cdot (w_x, z_x) \rangle \Big|_{\langle s, \vec{v} \rangle = 0} \\ &= \left(x, -\frac{\langle z, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, s \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \right) \end{aligned}$$

logo, pela arbitrariedade de $z_x \in T_x M$:

$$\mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_x) \cdot (w_x, s_x) = -\langle s_x, \vec{w}_x \rangle \frac{\vec{v}_x}{\|\vec{v}_x\|^2}$$

donde, finalmente:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_x) \cdot (w_x, w_x) &= -\langle w_x, \vec{w}_x \rangle \frac{\vec{v}_x}{\|v_x\|^2} = \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \frac{\vec{v}_x}{\|v_x\|^2}\end{aligned}$$

Usando a fórmula acima e a base ortonormal $(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v'}{\|v'\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})$ de $C_{v_x} = [\vec{v}_x]^\perp$ para calcular $\text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_x)|_{C_{v_x} \times C_{v_x}}$, conclui-se que vale a condição (ii), como afirmado.

Para demonstrar o teorema (D), definiremos um referencial móvel conveniente em \mathcal{C} e calcularemos a conexão de Levi-Civita $\nabla^\mathcal{C}$ de $(\mathcal{C}, g_\mathcal{C})$ e o divergente de X_i^V em termos deste referencial. Isto será feito na definição e lemas seguintes.

DEFINIÇÃO 3.9. Dado $v_q \in \mathcal{C}$, seja (X_1, \dots, X_n) um referencial móvel ortonormal de (M, g) definido numa vizinhança aberta U de $q \in M$. Definamos, para $1 \leq i \leq n$ e para todo $w_q \in \mathcal{C}_U := \pi_\mathcal{C}^{-1}[U]$:

$$\begin{aligned}X_i^H(w_q) &:= H_{w_q}^\mathcal{C}(X_i(q)) \\ X_i^V(w_q) &:= \lambda_{w_q}^\mathcal{C}(X_i(q))\end{aligned}$$

Podemos assumir que $(\mathcal{P}(v_q) \cdot X_1(q), \dots, \mathcal{P}(v_q) \cdot X_l(q))$ é uma base de C_{v_q} , onde $l = \text{rk Ver}(\mathcal{C})$. Então, tomando-se levantamentos verticais, conclui-se que $(X_1^V(v_q), \dots, X_l^V(v_q))$ é uma base de $\text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$. Por continuidade, (X_1^V, \dots, X_l^V) forma um referencial móvel do subfibrado vertical $\text{Ver}(\mathcal{C})$ numa vizinhança \mathcal{U} de v_q em \mathcal{C} .

Assim, construímos um referencial móvel $F = (X_1^{H_\mathcal{C}}, \dots, X_n^{H_\mathcal{C}}, X_1^{V_\mathcal{C}}, \dots, X_l^{V_\mathcal{C}})$ de \mathcal{C} numa vizinhança \mathcal{U} de v_q .

Note que este referencial móvel não é, em geral ortonormal, exceto sua parte “horizontal”, ou seja, temos $\langle X_i^H, X_j^H \rangle = \delta_{ij}$, para $1 \leq i, j \leq n$. Note também que, no caso $\mathcal{C} = \text{TM}$, temos $l = n$ e o referencial é ortonormal, e podemos tomar $\mathcal{U} = \tau_M^{-1}[U]$.

Notação. Por motivo de clareza, serão usados índices i, j, k para vetores horizontais e r, s, u para vetores verticais.

LEMA 3.3. Usando a notação da definição (3.9), temos, para $1 \leq i, j, r, s \leq n$:

$$\begin{aligned}
[X_i^H, X_j^H](v_q) &= H_{v_q}^{\mathcal{E}}([X_i, X_j](q)) + \lambda_{v_q}^{\mathcal{E}} \{ \mathcal{P}(v_q) \cdot R(X_j(q), X_i(q)) \cdot v_q + \\
&\quad + \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_j(q), X_i(q)) - \\
&\quad - \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_i(q), X_j(q)) \} \\
[X_r^V, X_s^V](v_q) &= \lambda_{v_q}^{\mathcal{E}} \{ \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (X_r(q), X_s(q)) - \\
&\quad - \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (X_s(q), X_r(q)) \} \\
[X_i^H, X_r^V](v_q) &= \lambda_{v_q}^{\mathcal{E}} \{ \mathcal{P}(v_q) \cdot \nabla_{X_i(q)} X_r + \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot (X_i(q), X_r(q)) - \\
&\quad - \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{F}A(v_q) \cdot (X_r(q), X_i(q)) \}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde R é o tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita de (M, g) .

Demonstração. Será provada apenas a primeira fórmula, pois a técnica usada para calcular as outras duas é a mesma. Note que, como, para $1 \leq i, j \leq n$, X_i^H é $\pi_{\mathcal{E}}$ -relacionado a X_i e X_i^V é $\pi_{\mathcal{E}}$ -relacionado a zero, obtemos imediatamente $\mathbb{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot [X_i^H, X_j^H](v_q) = [X_i, X_j](q)$, $\mathbb{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot [X_i^V, X_j^V](v_q) = 0$ e $\mathbb{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot [X_i^H, X_j^V](v_q) = 0$.

Temos, para $1 \leq i, j, r, s \leq n$ e para toda $f \in \mathfrak{F}(\text{TM})$:

(1)

$$\begin{aligned}
X_i^H[f](v_q) &= \mathbb{F}f(v_q) \cdot \kappa \cdot X_i^H(v_q) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_i^H(v_q) = \\
&= \mathbb{F}f(v_q) \cdot A(v_q) \cdot X_i(q) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot X_i(q)
\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
X_r^V[f](v_q) &= \mathbb{F}f(v_q) \cdot \kappa \cdot X_r^V(v_q) + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_r^V(v_q) = \\
&= \mathbb{F}f(v_q) \cdot \mathcal{P}(v_q) \cdot X_r(q)
\end{aligned}$$

(2) Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{E}$ uma curva em \mathcal{E} tal que $\frac{T\gamma}{dt}|_{t=0} = X_i^H(v_q)$, e seja $q(t) :=$

$\pi_{\mathcal{C}} \circ \gamma(t)$. Temos:

$$\begin{aligned}
X_i^H[X_j^H[f]](v_q) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (X_j^H[f] \circ \gamma) = \\
&= \nabla_{\frac{d}{dt} \Big|_{t=0}}^{\mathbb{R}^M} \{ \mathbb{F}f(\gamma(t)) \cdot A(\gamma(t)) \cdot X_j(q(t)) + \\
&\quad + \mathbb{P}f(\gamma(t)) \cdot X_j(q(t)) \} = \\
&= \mathbb{F}^2 f(v_q) \cdot (\kappa \cdot X_i^H(v_q), \kappa \cdot X_j^H(v_q)) + \\
&\quad + \mathbb{P}\mathbb{F}f(v_q) \cdot (\mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_i^H(v_q), \kappa \cdot X_j^H(v_q)) + \\
&\quad + \mathbb{F}\mathbb{P}f(v_q) \cdot (\kappa \cdot X_i^H(v_q), \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_j^H(v_q)) + \\
&\quad + \mathbb{P}^2 f(v_q) \cdot (\mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_i^H(v_q), \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_j^H(v_q)) + \\
&\quad + \mathbb{F}f(v_q) \cdot \{ \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_i(q), X_j(q)) + A(v_q) \cdot \nabla_{X_i(q)} X_j \} + \\
&\quad + \mathbb{P}f(v_q) \cdot \nabla_{X_i(q)} X_j
\end{aligned}$$

Logo, pela proposição (1.1), segue da última equação que:

$$\begin{aligned}
[X_i^H, X_j^H][f](v_q) &= \mathbb{F}f(v_q) \cdot \{ \mathbb{R}(X_j(q), X_i(q)) \cdot v_q + \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_i(q), X_j(q)) - \\
&\quad - \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_j(q), X_i(q)) + A(v_q) \cdot [X_i, X_j](q) \} + \\
&\quad + \mathbb{P}f(v_q) \cdot [X_i, X_j](q)
\end{aligned}$$

e, como $f \in \mathfrak{F}(\text{TM})$ foi tomada arbitrariamente, concluimos que:

$$\mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot [X_i^H, X_j^H](v_q) = [X_i, X_j](q)$$

e:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(v_q) \cdot \kappa \cdot [X_i^H, X_j^H](v_q) &= \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{R}(X_j(q), X_i(q)) \cdot v_q + \\
&\quad + \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_i(q), X_j(q)) - \\
&\quad - \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_j(q), X_i(q))
\end{aligned}$$

Finalmente, escrevendo $[X_i^H, X_j^H](v_q) = H_{v_q}^{\mathcal{C}} \cdot \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot [X_i^H, X_j^H](v_q) + \lambda_{v_q}^{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{P}(v_q) \cdot \kappa \cdot [X_i^H, X_j^H](v_q)$, segue a fórmula enunciada para $[X_i^H, X_j^H](v_q)$. \square

COROLÁRIO 3.4. *O subfibrado vetorial $\text{Hor}(\mathcal{C})$ de $\mathbb{T}\mathcal{C}$ é involutivo se, e somente se, para todo $q \in M$, $v_q \in \mathcal{C}_q$, $w_q, z_q \in \mathbb{T}_q M$:*

$$\mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{R}(w_q, z_q) \cdot v_q = \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (z_q, w_q) - \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (w_q, z_q) \quad (3.17)$$

Demonstração. Isto segue imediatamente de (3.16) e do fato de que podemos construir um referencial móvel F em uma vizinhança \mathcal{U}_{v_q} de cada $v_q \in \mathcal{C}$, portanto os n primeiros campos de vetores deste referencial móvel (ou seja, a sua parte horizontal) formam uma base de seções locais da restrição de $\text{Hor}^{\mathcal{C}}$ a \mathcal{U}_{v_q} . \square

Observação 3.3. No caso em que $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ é um vínculo linear, temos, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $A(v_q) = B_{\mathcal{D}}(v_q) := B_{\mathcal{D}}(\cdot, v_q) : T_q M \rightarrow \mathcal{D}_q^{\perp}$, onde $B_{\mathcal{D}} : TM \oplus_M \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^{\perp}$ é a segunda forma fundamental total de \mathcal{D} (vide [30]). Calculando-se a derivada paralela $\mathbb{P}A$ e usando a fórmula de Gauss, conclui-se que a equação (3.17) é equivalente a $R^{\mathcal{D}} \equiv 0$, onde $R^{\mathcal{D}}$ é o tensor de curvatura da conexão induzida em \mathcal{D} pela conexão de Levi-Civita de (M, g) e pela projeção ortogonal $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} : TM \rightarrow \mathcal{D}$. Ou seja, reobtivemos o fato já demonstrado de que o subfibrado vetorial $\text{Hor}(\mathcal{D})$ é involutivo se, e somente se, a conexão $\nabla^{\mathcal{D}}$ for flat — vide detalhes em [57]. Vide também a observação (2.1).

LEMA 3.4. Denotando por $\nabla^{\mathcal{C}}$ a conexão de Levi-Civita de $(\mathcal{C}, g_{\mathcal{C}})$, e usando a notação da definição (3.9), temos, para $1 \leq i, j, r, s \leq n$:

$$\begin{aligned} \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_j^H &= H_{v_q}^{\mathcal{C}}(\nabla_{X_i(q)} X_j) + \frac{1}{2} \lambda_{v_q}^{\mathcal{C}} \{ \mathcal{P}(v_q) \cdot R(X_j(q), X_i(q)) \cdot v_q - \\ &\quad - \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_j(q), X_i(q)) + \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_i(q), X_j(q)) \} \\ \nabla_{X_r^V(v_q)}^{\mathcal{C}} X_s^V &= \frac{1}{2} H_{v_q}^{\mathcal{C}} \cdot A^*(v_q) \cdot \{ \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_r(q), X_s(q)) + \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_s(q), X_r(q)) \} + \\ &\quad + \lambda_{v_q}^{\mathcal{C}} \{ \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{F} \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_r(q), X_s(q)) \} \end{aligned} \tag{3.18}$$

e:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_r^V, X_j^H(v_q) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_r(q), -\mathcal{P}(v_q) \cdot R(X_j(q), X_i(q)) \cdot v_q - \\ &\quad - \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_i(q), X_j(q)) + \\ &\quad + \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_j(q), X_i(q)) \rangle \\ \langle \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_r^V, X_s^V(v_q) \rangle &= \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_s(q), \mathbb{F} \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_i(q), X_r(q)) + \nabla_{X_i(q)} X_r \rangle - \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_s(q), \mathbb{F}A(v_q) \cdot (X_r(q), X_i(q)) \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_r(q), \mathbb{F}A(v_q) \cdot (X_s(q), X_i(q)) \rangle \end{aligned} \tag{3.19}$$

Demonstração. Seja $1 \leq i, j, k, r, s, u \leq n$. Usaremos a fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \\ &\quad - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \end{aligned}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de uma variedade riemanniana (M, g) e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

No caso do referencial móvel F da variedade riemanniana $(\mathcal{C}, g_{\mathcal{C}})$, temos $\langle X_i^H, X_j^H \rangle = \delta_{ij}$ e $\langle X_i^H, X_r^V \rangle = 0$, portanto os três primeiros termos na fórmula de Koszul não se anulam apenas no caso em que forem da forma $X_i^H \langle X_r^V, X_s^V \rangle$ ou $X_u^V \langle X_r^V, X_s^V \rangle$.

Seja $v_q \in \mathcal{C}$. Denotando por $\gamma_{X_u^V(v_q)}$ e $\gamma_{X_i^H(v_q)}$ curvas em \mathcal{C} tangentes no zero a $X_u^V(v_q)$ e $X_i^H(v_q)$, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
X_u^V(v_q) \langle X_r^V, X_s^V \rangle &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \mathcal{P}(\gamma_{X_u^V(v_q)}) \cdot X_r(\pi_{\mathcal{C}} \circ \gamma_{X_u^V(v_q)}), \\
&\quad \mathcal{P}(\gamma_{X_u^V(v_q)}) \cdot X_s(\pi_{\mathcal{C}} \circ \gamma_{X_u^V(v_q)}) \rangle = \\
&= \langle (\nabla_{t|t=0} \mathcal{P} \circ \gamma_{X_u^V(v_q)}) \cdot X_r(q) + \\
&\quad + \mathcal{P}(v_q) \cdot \underbrace{\nabla_{\Gamma \pi_{\mathcal{C}}} \cdot X_u^V(v_q)}_{=0} X_r, \mathcal{P}(v_q) \cdot X_s(q) \rangle + \\
&\quad + \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_r(q), (\nabla_{t|t=0} \mathcal{P} \circ \gamma_{X_u^V(v_q)}) \cdot X_s(q) \rangle = \\
&= \langle \mathbb{F} \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_u(q), X_r(q)), \mathcal{P}(v_q) \cdot X_s(q) \rangle + \\
&\quad + \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_r(q), \mathbb{F} \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_u(q), X_s(q)) \rangle
\end{aligned} \tag{3.20}$$

e:

$$\begin{aligned}
X_i^H(v_q) \langle X_r^V, X_s^V \rangle &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \mathcal{P}(\gamma_{X_i^H(v_q)}) \cdot X_r(\pi_{\mathcal{C}} \circ \gamma_{X_i^H(v_q)}), \\
&\quad \mathcal{P}(\gamma_{X_i^H(v_q)}) \cdot X_s(\pi_{\mathcal{C}} \circ \gamma_{X_i^H(v_q)}) \rangle = \\
&= \langle (\nabla_{t|t=0} \mathcal{P} \circ \gamma_{X_i^H(v_q)}) \cdot X_r(q) + \mathcal{P}(v_q) \cdot \nabla_{X_i(q)} X_r, \\
&\quad \mathcal{P}(v_q) \cdot X_s(q) \rangle + \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_r(q), \\
&\quad (\nabla_{t|t=0} \mathcal{P} \circ \gamma_{X_i^H(v_q)}) \cdot X_s(q) + \mathcal{P}(v_q) \cdot \nabla_{X_i(q)} X_s \rangle = \\
&= \langle \mathbb{P} \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_i(q), X_r(q)) + \mathcal{P}(v_q) \cdot \nabla_{X_i(q)} X_r, \mathcal{P}(v_q) \cdot X_s(q) \rangle + \\
&\quad + \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_r(q), \mathbb{P} \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_i(q), X_s(q)) + \mathcal{P}(v_q) \cdot \nabla_{X_i(q)} X_s \rangle
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Substituindo-se as equações (3.16), (3.20) e (3.21) na fórmula de Koszul, obtêm-se as fórmulas enunciadas. Faremos os cálculos apenas para a primeira delas. Para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $1 \leq i, j, k, r \leq n$, temos:

$$2 \langle \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_j^H, X_k^H(v_q) \rangle = 2 \langle \nabla_{X_i(q)} X_j, X_k(q) \rangle$$

e:

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_j^H, X_r^V(v_q) \rangle &= \langle X_r^V(v_q), [X_i^H, X_j^H](v_q) \rangle \stackrel{\text{por (3.16)}}{=} \\
&= \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_r(q), \mathcal{P}(v_q) \cdot R(X_j(q), X_i(q)) \cdot v_q - \\
&\quad - \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_j(q), X_i(q)) + \\
&\quad + \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_i(q), X_j(q)) \rangle
\end{aligned}$$

portanto:

$$\mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_j^H = \nabla_{X_i(q)} X_j$$

e:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(v_q) \cdot \kappa \cdot \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_j^H &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{P}(v_q) \cdot R(X_j(q), X_i(q)) \cdot v_q - \\
&\quad - \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_j(q), X_i(q)) + \\
&\quad + \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}A(v_q) \cdot (X_i(q), X_j(q)) \}
\end{aligned}$$

□

DEFINIÇÃO 3.10. Usando a notação da definição (3.9), seja $(U, (\theta^1, \dots, \theta^n))$ o correferencial dual de $(U, (X_1, \dots, X_n))$. Para $1 \leq i \leq n$, seja $\hat{\theta}^i : \mathbb{T}U \rightarrow \mathbb{R}$ definido por, para todo $w_q \in \mathbb{T}U$:

$$\hat{\theta}^i(w_q) := \theta^i(q) \cdot w_q$$

Sejam $\mathcal{S} := P_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{S}|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}\mathcal{C}$, onde \mathcal{S} é o spray geodésico de (M, g) , e $\mathcal{V} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}\mathcal{C}$ definido por, para todo $v_q \in \mathcal{C}$:

$$\mathcal{V}(v_q) := P_{\mathcal{C}} \cdot \lambda_{v_q}(-\text{grad } V(q)) = \lambda_{v_q}^{\mathcal{C}}(-\text{grad } V(q))$$

Então temos $X_{\mathcal{C}}^V = \mathcal{S} + \mathcal{V}$, e, para todo $v_q \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(v_q) &= P_{\mathcal{C}} H_{v_q}(v_q) = H_{v_q}^{\mathcal{C}}(v_q) = \sum_{j=1}^n \hat{\theta}^j(v_q) X_j^H(v_q) \\
\mathcal{V}(v_q) &= \lambda_{v_q}^{\mathcal{C}}(-\text{grad } V(q)) = - \sum_{i=1}^n \hat{\theta}^i(\text{grad } V(q)) X_i^V(v_q)
\end{aligned}$$

logo $\mathcal{S}|_{\mathcal{U}} = \sum_{j=1}^n \hat{\theta}^j X_j^H$ e $\mathcal{V}|_{\mathcal{U}} = - \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}^i \circ \text{grad } V \circ \pi_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{U}}) X_i^V$.

5.1. Demonstração do Teorema de Liouville

Agora estamos em condições de demonstrar o teorema (D). A demonstração seguirá como corolário da seguinte proposição, que fornece uma expressão para o divergente do campo GMA.

PROPOSIÇÃO 3.4. *Para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $\text{div } X_{\mathcal{C}}^V$ é dado pela seguinte fórmula:*

$$\text{div } X_{\mathcal{C}}^V(v_q) = \text{tr } A(v_q) + \langle \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q)|_{C_{v_q} \times C_{v_q}}, R_V^A(v_q) \rangle \quad (3.22)$$

Demonstração. Para calcular $\text{div } X_{\mathcal{C}}^V(v_q)$ podemos assumir que, no ponto $q \in M$, o referencial móvel ortonormal $(U, (X_1, \dots, X_n))$ é adaptado a C_{v_q} , i.e., que $(X_1(q), \dots, X_l(q))$ é uma base ortonormal de C_{v_q} e $(X_{l+1}(q), \dots, X_n(q))$ é uma base ortonormal de $C_{v_q}^\perp$. Então, temos:

$$\text{div } X_{\mathcal{C}}^V(v_q) = \sum_{i=1}^n \langle X_i^H(v_q), \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}}^V \rangle + \sum_{r=1}^l \langle X_r^V(v_q), \nabla_{X_r^V(v_q)}^{\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}}^V \rangle \quad (3.23)$$

Usando a notação da definição (3.10), temos:

(i) Para $1 \leq i, j \leq n$, denotando por $\gamma_{X_i^H(v_q)}$ uma curva em \mathcal{C} cujo vetor tangente no zero é $X_i^H(v_q)$, temos:

$$\begin{aligned} X_i^H(v_q)[\widehat{\theta}^j] &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \widehat{\theta}^j \circ \gamma_{X_i^H(v_q)}(t) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle X_j \circ \pi_{\mathcal{C}} \circ \gamma_{X_i^H(v_q)}(t), \gamma_{X_i^H(v_q)}(t) \rangle = \\ &= \langle \nabla_{X_i(q)} X_j, v_q \rangle + \langle X_j(q), \kappa \cdot X_i^H(v_q) \rangle = \\ &= \langle \nabla_{X_i(q)} X_j, v_q \rangle + \langle X_j(q), A(v_q) \cdot X_i(q) \rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

(ii) Como vimos na observação que segue a definição (3.10), temos $S|_{\mathcal{U}} = \sum_{j=1}^n \widehat{\theta}^j X_j^H$,

logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle X_i^H(v_q), \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} \mathcal{S} \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle X_i^H(v_q), \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} \left(\sum_{j=1}^n \widehat{\theta}^j X_j^H \right) \rangle \text{ por (3.24),(3.18)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\langle \nabla_{X_i(q)} X_i, v_q \rangle + \langle X_i(q), A(v_q) \cdot X_i(q) \rangle \right) + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \widehat{\theta}^j(v_q) \langle X_i(q), \nabla_{X_i(q)} X_j \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\langle \nabla_{X_i(q)} X_i, v_q \rangle + \langle X_i(q), A(v_q) \cdot X_i(q) \rangle \right) - \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \langle v_q, \nabla_{X_i(q)} X_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^n \langle X_i(q), A(v_q) \cdot X_i(q) \rangle = \\
&= \text{tr } A(v_q)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

e:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^l \langle X_r^V(v_q), \nabla_{X_r^V(v_q)}^{\mathcal{C}} \mathcal{S} \rangle &= \sum_{r=1}^l \langle X_r^V(v_q), \nabla_{X_r^V(v_q)}^{\mathcal{C}} \left(\sum_{j=1}^n \widehat{\theta}^j X_j^H \right) \rangle = \\
&= - \sum_{r=1}^l \sum_{j=1}^n \langle \widehat{\theta}^j(v_q) X_j^H(v_q), \nabla_{X_r^V(v_q)}^{\mathcal{C}} X_r^V \rangle \text{ por (3.18)} \\
&= - \sum_{r=1}^l \sum_{j=1}^n \langle \widehat{\theta}^j(v_q) X_j(q), A^*(v_q) \cdot \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_r(q), X_r(q)) \rangle = \\
&= - \langle A(v_q) \cdot v_q, \sum_{r=1}^l \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_r(q), X_r(q)) \rangle = \\
&= \langle -\kappa \cdot P_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{S}(v_q), \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) |_{C_{v_q} \times C_{v_q}} \rangle
\end{aligned} \tag{3.26}$$

(iii) Analogamente, temos $\mathcal{V}|_u = - \sum_{i=1}^n (\widehat{\theta}^i \circ \text{grad } V \circ \pi_{\mathcal{C}}|_u) X_i^V$, portanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle X_i^H(v_q), \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} \mathcal{V} \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{V}(v_q), \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_i^H \rangle = \\
&= - \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot \kappa \cdot \mathcal{V}(v_q), \\
&\quad \mathcal{P}(v_q) \cdot \kappa \cdot \nabla_{X_i^H(v_q)}^{\mathcal{C}} X_i^H \rangle \stackrel{\text{por (3.18)}}{=} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

e:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^l \langle X_r^V(v_q), \nabla_{X_r^V(v_q)}^{\mathcal{C}} \mathcal{V} \rangle &= - \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^l \widehat{\theta}^i(\text{grad } V(q)) \langle X_r^V(v_q), \nabla_{X_r^V(v_q)}^{\mathcal{C}} X_i^V \rangle \stackrel{\text{por (3.18)}}{=} \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^l \widehat{\theta}^i(\text{grad } V(q)) \langle \mathcal{P}(v_q) \cdot X_r(q), \\
&\quad \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{F} \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_r(q), X_i(q)) \rangle \stackrel{\text{lema (3.2)}}{=} \\
&= - \sum_{i=m+1}^n \sum_{r=1}^l \widehat{\theta}^i(\text{grad } V(q)) \langle \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_r(q), X_r(q)), X_i(q) \rangle = \\
&= - \langle \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q)|_{C_{v_q} \times C_{v_q}}, \mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot \text{grad } V(q) \rangle
\end{aligned} \tag{3.28}$$

(iv) Finalmente, segue das equações (3.25), (3.26), (3.27) e (3.28) que:

$$\begin{aligned}
\text{div } X_{\mathcal{C}}^V(v_q) &= \text{div } \mathcal{S}(v_q) + \text{div } \mathcal{V}(v_q) = \\
&= \text{tr } A(v_q) + \\
&\quad + \langle \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q)|_{C_{v_q} \times C_{v_q}}, -\kappa \cdot P_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{S}(v_q) - \mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot \text{grad } V(q) \rangle = \\
&= \text{tr } A(v_q) + \langle \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q)|_{C_{v_q} \times C_{v_q}}, \kappa \cdot P_W \cdot X_V(v_q) \rangle = \\
&= \text{tr } A(v_q) + \langle \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q)|_{C_{v_q} \times C_{v_q}}, R_V^A(v_q) \rangle
\end{aligned}$$

como afirmado. □

O fluxo do campo $X_{\mathcal{C}}^V$ preserva a medida de Lebesgue em \mathcal{C} induzida pelo tensor métrico $g_{\mathcal{C}}$ se, e somente se, o seu divergente, dado pela equação (3.22), for identicamente nulo em \mathcal{C} . Como corolário, obtemos uma condição necessária e suficiente para

que esta medida seja preservada pelos fluxos de todos os campos de vetores $X_{\mathcal{C}}^V$, com $V \in \mathfrak{F}(M)$:

Demonstração do teorema (D). Pela equação (3.22), é claro que $\text{div } X_{\mathcal{C}}^V$ é identicamente nulo em \mathcal{C} , para todos os potenciais $V \in \mathfrak{F}(M)$, se as condições (i) e (ii) forem satisfeitas. Reciprocamente, suponhamos que $\text{div } X_{\mathcal{C}}^V$ seja identicamente nulo em \mathcal{C} para toda $V \in \mathfrak{F}(M)$. Fixemos $v_q \in \mathcal{C}$. Como $\{\text{grad } V(q) \mid V \in \mathfrak{F}(M)\} = T_q M$, e como $\mathcal{P}^\perp(v_q) : T_q M \rightarrow T_q M$ é sobre $C_{v_q}^\perp$, existe $V \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $\mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot \text{grad } V(q) = \kappa \cdot P_W \cdot S(v_q)$, i.e., tal que $R_V^A(v_q) = 0$. Portanto, para esta V , concluímos, pela equação (3.22), que $\text{div } X_{\mathcal{C}}^V(v_q) = 0$ implica $\text{tr } A(v_q) = 0$. Então segue que:

$$\text{div } X_{\mathcal{C}}^V(v_q) = \langle \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) |_{C_{v_q} \times C_{v_q}}, R_V^A(v_q) \rangle \quad (3.29)$$

e esta expressão deve se anular para toda $V \in \mathfrak{F}(M)$. Novamente pelo fato de que $\{\text{grad } V(q) \mid V \in \mathfrak{F}(M)\} = T_q M$ e que $\mathcal{P}^\perp(v_q) : T_q M \rightarrow T_q M$ é sobre $C_{v_q}^\perp$, concluímos que $\{R_V^A(v_q) \mid V \in \mathfrak{F}(M)\} = C_{v_q}^\perp$. Portanto, de (3.29), segue $\mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) = 0$. Afirimo que $\mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) = \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q)$; como $v_q \in \mathcal{C}$ foi tomado arbitrariamente, isto concluirá a demonstração, uma vez que estarão verificadas as condições (i) e (ii). Com efeito, para todo $q \in M$, $v_q \in \mathcal{C}_q$, $w_q, z_q, s_q \in C_{v_q}$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (w_q, z_q), s_q \rangle &= \langle z_q, \mathbb{F} \mathcal{P}(v_q) \cdot (w_q, s_q) \rangle \stackrel{z_q \in C_{v_q}}{=} \\ &= \langle z_q, \mathcal{P}(v_q) \mathbb{F} \mathcal{P}(v_q) \cdot (w_q, s_q) \rangle \stackrel{\text{lema (3.2)}}{=} \\ &= \langle z_q, \mathbb{F} \mathcal{P}(v_q) \cdot (w_q, \mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot s_q) \rangle \stackrel{s_q \in C_{v_q}^\perp}{=} 0 \end{aligned}$$

o que mostra, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $\mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) |_{C_{v_q} \times C_{v_q}} : C_{v_q} \times C_{v_q} \rightarrow C_{v_q}^\perp$. \square

COROLÁRIO 3.5. *Suponha que a medida de Lebesgue em \mathcal{C} induzida pelo tensor métrico $g_{\mathcal{C}}$ seja preservada pelo fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{C}}^V$ do sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) , para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$. Então, para todo $q \in M$ tal que $\mathcal{C}_q \neq \emptyset$, \mathcal{C}_q é uma superfície mínima de $(\mathcal{C}, g_{\mathcal{C}})$; ou seja, a variedade riemanniana $(\mathcal{C}, g_{\mathcal{C}})$ admite uma folheação regular por superfícies mínimas.*

Demonstração. Com efeito, sejam $q \in M$ tal que $\mathcal{C}_q \neq \emptyset$ e $B_{\mathcal{C}_q}$ a segunda forma fundamental de \mathcal{C}_q . Dados $v_q \in \mathcal{C}_q$ e $X_{v_q}, Y_{v_q} \in T_{v_q} \mathcal{C}_q$, afirimo que:

$$B_{\mathcal{C}_q}(X_{v_q}, Y_{v_q}) = \frac{1}{2} H_{v_q}^{\mathcal{C}} \cdot A^*(v_q) \cdot \{ \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (\kappa \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot Y_{v_q}) + \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (\kappa \cdot Y_{v_q}, \kappa \cdot X_{v_q}) \}$$

De fato, usando a notação da definição (3.9), segue de (3.18) que, para $1 \leq r, s \leq n$:

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{C}_q}(X_r^V(v_q), X_s^V(v_q)) &= P_H \cdot \nabla_{X_r^V(v_q)}^{\mathcal{C}} X_s^V = \\ &= \frac{1}{2} H_{v_q}^{\mathcal{C}} \cdot A^*(v_q) \cdot \{\mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_r(q), X_s(q)) + \\ &\quad + \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q) \cdot (X_s(q), X_r(q))\} \end{aligned}$$

Portanto, para todo $v_q \in \mathcal{C}_q$, $\text{tr } B_{\mathcal{C}_q}(v_q) = H_{v_q}^{\mathcal{C}} \cdot A^*(v_q) \cdot \text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q)|_{C_{v_q} \times C_{v_q}}$, donde $\text{tr } B_{\mathcal{C}_q}(v_q) = 0$ se $\text{tr } \mathbb{F}^* \mathcal{P}(v_q)|_{C_{v_q} \times C_{v_q}} = 0$. \square

Observação 3.4. No caso em que $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ é um vínculo linear, as condições (i) e (ii) do teorema (D) são equivalentes à condição para conservação da forma de volume local definida em [30], i.e, à condição $\text{tr } B_{\mathcal{D}^\perp}(q)|_{\mathcal{D}_q^\perp \times \mathcal{D}_q^\perp} = 0$ para todo $q \in M$. Com efeito, a referida forma de volume coincide com o volume riemanniano induzido por $g_{\mathcal{D}}$ no subfibrado vetorial $\mathcal{D} \subset TM$. Para checar a equivalência entre as condições, note que, no caso linear, $P_{\mathcal{C}} = \mathbb{T} \mathcal{P}_{\mathcal{D}} : i_{\mathcal{D}}^*(TTM) \rightarrow \mathbb{T} \mathcal{D}$, onde $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} : TM \rightarrow \mathcal{D}$ é a projeção ortogonal, e, para todo $v_q \in \mathcal{D}$, $C_{v_q} = \mathcal{D}_q$, portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{D} &\longrightarrow L(TM, TM) \\ v_q &\longmapsto (\mathcal{P}_{\mathcal{D}})_q \end{aligned}$$

é constante nas fibras de $\pi_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow M$, donde $\mathbb{F} \mathcal{P} = 0$ e a condição (ii) do teorema (D) é trivialmente satisfeita.

Além disso, para todo $q \in M$, $v_q \in \mathcal{D}_q$, $w_q \in \mathbb{T}_q M$:

$$\begin{aligned} A(v_q) \cdot w_q &= \kappa \cdot \mathbb{T} \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \cdot H_{v_q} \cdot w_q = \\ &= \kappa \cdot H_{v_q}^{\mathcal{D}} \cdot w_q \end{aligned}$$

onde $\text{Hor}(\mathcal{D})$ é a conexão em \mathcal{D} induzida pela conexão de Levi-Civita de (M, g) e pela projeção ortogonal $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. Tomando $X \in \Gamma^\infty(\mathcal{D})$ tal que $\nabla_{w_q}^{\mathcal{D}} X = 0$ e $X(q) = v_q$, temos:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot H_{v_q}^{\mathcal{D}} \cdot w_q &= \kappa \cdot \mathbb{T} X \cdot w_q = \\ &= \nabla_{w_q} X = \\ &= \underbrace{\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \cdot \nabla_{w_q} X}_{=\nabla_{w_q}^{\mathcal{D}} X=0} + \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^\perp \cdot \nabla_{w_q} X = \\ &= B_{\mathcal{D}}(w_q, v_q) \end{aligned}$$

donde $A(v_q) = B_{\mathcal{D}}(v_q)$, onde $B_{\mathcal{D}} : TM \oplus_M \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^\perp$ é a segunda forma fundamental total de \mathcal{D} — vide [30] — e $B_{\mathcal{D}}(v_q) = B_{\mathcal{D}}(\cdot, v_q) : \mathbb{T}_q M \rightarrow \mathcal{D}_q^\perp$.

Assim, dado um referencial móvel ortonormal (X_1, \dots, X_n) de M numa vizinhança aberta U de q em M , adaptado a \mathcal{D}_q , temos:

$$\begin{aligned} \text{tr } A(v_q) &= \sum_{i=1}^n \langle X_i(q), B_{\mathcal{D}}(X_i(q), v_q) \rangle = \\ &= \sum_{i=l+1}^n \langle X_i(q), B_{\mathcal{D}}(X_i(q), v_q) \rangle = \\ &= - \sum_{i=l+1}^n \langle B_{\mathcal{D}^\perp}(X_i(q), X_i(q)), v_q \rangle = \\ &= - \langle \text{tr } B_{\mathcal{D}^\perp}|_{\mathcal{D}_q^\perp \times \mathcal{D}_q^\perp}, v_q \rangle \end{aligned}$$

o que mostra que a condição (i) do teorema (D) é equivalente a, para todo $q \in M$, $\text{tr } B_{\mathcal{D}^\perp}(q)|_{\mathcal{D}_q^\perp \times \mathcal{D}_q^\perp} = 0$.

Para finalizar este capítulo, apresentamos a seguinte proposição, que generaliza um resultado de [53]:

PROPOSIÇÃO 3.5. *Seja γ uma geodésica de d'Alembert-Chetaev de (M, K, \mathcal{C}) . Então $\dot{\gamma}$ é uma geodésica de $(\mathcal{C}, \mathbf{g}_{\mathcal{C}})$ se, e somente se, γ é uma geodésica de (M, \mathbf{g}) . Portanto, os levantamentos canônicos das geodésicas de d'Alembert-Chetaev de (M, K, \mathcal{C}) são geodésicas de (M, \mathbf{g}) se, e somente se, o spray geodésico de (M, \mathbf{g}) é tangente a \mathcal{C} , i.e., se $P_W \circ S|_{\mathcal{C}} = 0$.*

DEFINIÇÃO 3.11. *Dada uma variedade riemanniana (M, \mathbf{g}) , um vínculo $\mathcal{C} \subset TM$ diz-se totalmente geodésico se o spray geodésico da conexão de Levi-Civita de (M, \mathbf{g}) for tangente a \mathcal{C} .*

Observação 3.5. (a) *No caso linear, temos $\kappa \cdot P_W \cdot S(v_q) = -B_{\mathcal{D}}(v_q, v_q) = 0$ para todo $v_q \in \mathcal{D}$ se, e somente se, $B_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}}^s = 0$, ou seja, se a parte simétrica da restrição de $B_{\mathcal{D}}$ a $\mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}$ é identicamente nula.*

(b) *Pondo $\mathcal{C} = TM$, reobtemos o resultado de [53] que afirma serem os levantamentos canônicos das geodésicas de (M, \mathbf{g}) geodésicas de (TM, \mathbf{g}_{TM}) .*

Demonstração. Seja γ uma geodésica de d'Alembert-Chetaev de (M, K, \mathcal{C}) , i.e., para todo $t \in \text{dom } \gamma$, temos:

$$\ddot{\gamma}(t) = P_{\mathcal{C}} \cdot S(\dot{\gamma}(t)) = \mathcal{S}(\dot{\gamma}(t))$$

logo:

$$\nabla_t^{\mathcal{C}} \ddot{\gamma} = \nabla_t^{\mathcal{C}} (\mathcal{S} \circ \dot{\gamma})$$

Fixemos $t \in \text{dom } \gamma$ e sejam $p := \gamma(t) \in M$, $w_p := \dot{\gamma}(t) \in \mathcal{C}$. Seja $F = (X_1^H, \dots, X_n^H, X_1^V, \dots, X_l^V)$ um referencial móvel de \mathcal{C} numa vizinhança aberta \mathcal{U} de w_p em \mathcal{C} , como na definição (3.9). Como de costume, podemos assumir que, no ponto $p \in M$, $(X_1(p), \dots, X_n(p))$ é um referencial ortonormal adaptado a C_{w_p} , de modo que $(X_1^V(w_p), \dots, X_l^V(w_p))$ é uma base ortonormal de $\text{Ver}_{w_p}^{\mathcal{C}}$. Seja $(U, (\theta^1, \dots, \theta^n))$ o correferencial dual de $(U, (X_1, \dots, X_n))$, como na definição (3.10). Então, temos $\mathcal{S}|_{\mathcal{C}_U} = \sum_{j=1}^n \widehat{\theta}^j X_j^H$, donde:

$$\begin{aligned}
\nabla_t^{\mathcal{C}} \ddot{\gamma} &= \sum_{i=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \nabla_{X_i^H(w_p)}^{\mathcal{C}} \mathcal{S} = \\
&= \sum_{i,j=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \nabla_{X_i^H(w_p)}^{\mathcal{C}} \{ \widehat{\theta}^j X_j^H \} = \\
&= \sum_{i,j=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) X_i^H(w_p) [\widehat{\theta}^j] X_j^H(w_p) + \\
&\quad + \sum_{i,j,k=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \widehat{\theta}^j(w_p) \langle \nabla_{X_i^H(w_p)}^{\mathcal{C}} X_j^H, X_k^H(w_p) \rangle X_k^H(w_p) + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \sum_{r=1}^l \widehat{\theta}^i(w_p) \widehat{\theta}^j(w_p) \langle \nabla_{X_i^H(w_p)}^{\mathcal{C}} X_j^H, X_r^V(w_p) \rangle X_r^V(w_p) = \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) X_i^H(w_p) [\widehat{\theta}^k] \right) + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \widehat{\theta}^j(w_p) \langle \nabla_{X_i^H(w_p)}^{\mathcal{C}} X_j^H, X_k^H(w_p) \rangle X_k^H(w_p) + \\
&\quad + \sum_{r=1}^l \sum_{i,j=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \widehat{\theta}^j(w_p) \langle \nabla_{X_i^H(w_p)}^{\mathcal{C}} X_j^H, X_r^V(w_p) \rangle X_r^V(w_p)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Mas, pela equação (3.18), temos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \widehat{\theta}^j(w_p) \langle \nabla_{X_i^{H_{\mathcal{C}}}} X_j^{H_{\mathcal{C}}}, X_r^{V_{\mathcal{C}}}(w_p) \rangle = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \widehat{\theta}^j(w_p) \langle X_r(p), \mathcal{P}(w_p) \cdot R(X_j(p), X_i(p)) \cdot w_p \rangle - \\
& \quad - \mathcal{P}(w_p) \cdot \mathbb{P}A(w_p) \cdot (X_j(p), X_i(p)) + \mathcal{P}(w_p) \cdot \mathbb{P}A(w_p) \cdot (X_i(p), X_j(p)) = \\
& = \frac{1}{2} \langle X_r(p), \mathcal{P}(w_p) \cdot R(w_p, w_p) \cdot w_p \rangle - \mathcal{P}(w_p) \cdot \mathbb{P}A(w_p) \cdot (w_p, w_p) + \\
& \quad + \mathcal{P}(w_p) \cdot \mathbb{P}A(w_p) \cdot (w_p, w_p) = 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

e, pelas equações (3.18) e (3.24):

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) X_i^{H_{\mathcal{C}}}(w_p) [\widehat{\theta}^k] + \sum_{i,j=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \widehat{\theta}^j(w_p) \langle \nabla_{X_i^{H_{\mathcal{C}}}} X_j^{H_{\mathcal{C}}}, X_k^{H_{\mathcal{C}}}(w_p) \rangle = \\
& = \sum_{i=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) (\langle \nabla_{X_i(p)} X_k, w_p \rangle + \langle X_k(p), A(w_p) \cdot X_i(p) \rangle) + \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \widehat{\theta}^j(w_p) \langle \nabla_{X_i(p)} X_j, X_k(p) \rangle = \\
& = \sum_{i=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) (\langle \nabla_{X_i(p)} X_k, w_p \rangle + \langle X_k(p), A(w_p) \cdot X_i(p) \rangle) - \\
& \quad - \sum_{i=1}^n \widehat{\theta}^i(w_p) \langle \nabla_{X_i(p)} X_k, w_p \rangle = \\
& = \langle A(w_p) \cdot w_p, X_k(p) \rangle = \\
& = \langle -\kappa \cdot P_W \cdot S(w_p), X_k(p) \rangle
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Portanto, segue das equações (3.30), (3.31) e (3.32) que $\nabla_t^{\mathcal{C}} \ddot{\gamma} = 0$ se, e somente se, $\langle \kappa \cdot P_W \cdot S(w_p), X_k(p) \rangle = 0$ para $1 \leq k \leq n$, ou seja, se, e somente se, $\kappa \cdot P_W \cdot S(w_p) = 0$, o que é equivalente a $P_W \cdot S(w_p) = 0$. Como $t \in \text{dom } \gamma$ foi tomado arbitrariamente, isto mostra que $\dot{\gamma}$ é uma geodésica de $(\mathcal{C}, \mathbf{g}_{\mathcal{C}})$ se, e somente se, $P_W \cdot S(\dot{\gamma}(t)) = 0$ para todo $t \in \text{dom } \gamma$. Como γ é uma geodésica de d'Alembert-Chetaev, isto é equivalente a $\ddot{\gamma}(t) = P_{\mathcal{C}} \cdot S(\dot{\gamma}(t)) = S(\dot{\gamma}(t))$ para todo $t \in \text{dom } \gamma$. Assim, $\dot{\gamma}$ é uma geodésica de $(\mathcal{C}, \mathbf{g}_{\mathcal{C}})$ se, e somente se, γ é uma geodésica de (M, \mathbf{g}) , como afirmado. \square

§6. UM CRITÉRIO PARA HIPERBOLICIDADE

Nesta seção, consideraremos um sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, assumindo que \mathcal{C} seja uma variedade compacta e tal que $(\forall q \in M) \mathcal{O}_q \notin \mathcal{C}$, e estabeleceremos uma condição para que o fluxo do campo $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})$, cujas curvas integrais de base são as trajetórias físicas do sistema mecânico vinculado definidas pelo campo de reações vinculares admissível $R_{\mathcal{F}}$, seja hiperbólico. Tal condição será obtida com base num critério de Wojtkowski [66] para hiperbolicidade, que será enunciado abaixo.

DEFINIÇÃO 3.12. *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana compacta e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores em M tal que $X(q) \neq 0$, para todo $q \in M$. Denotemos por $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo de X . O fluxo ϕ^t diz-se hiperbólico ou de Anosov se existirem distribuições em M , $T\phi^t$ -invariantes: $E^0 : q \in M \mapsto E_q^0 \subset T_qM$, $E^+ : q \in M \mapsto E_q^+ \subset T_qM$ e $E^- : q \in M \mapsto E_q^- \subset T_qM$, tais que:*

(i) *para todo $q \in M$, $T_qM = E_q^0 \oplus E_q^+ \oplus E_q^-$;*

(ii) *para todo $q \in M$, $E_q^0 = [X(q)]$;*

(iii) *existem constantes $a, b > 0$ tais que, para todo $q \in M$, para todo $t \geq 0$, temos:*

$$\begin{aligned} \|\mathbb{T}\phi^t \cdot v\| &\leq be^{-ta} \|v\| && \text{se } v \in E_q^-, \\ \|\mathbb{T}\phi^{-t} \cdot v\| &\leq be^{-ta} \|v\| && \text{se } v \in E_q^+. \end{aligned}$$

As distribuições E^0 , E^+ e E^- são chamadas, respectivamente, neutra, instável e estável.

Decorre da definição que as distribuições E^+ e E^- têm posto constante em cada componente conexa de M , e são contínuas, isto é, são localmente geradas por seções contínuas de $\tau_M : TM \rightarrow M$ (ou seja, são subfibrados vetoriais de classe C^0 de $\tau_M : TM \rightarrow M$).

DEFINIÇÃO 3.13. *Usando a notação acima, denotemos por \widehat{TM} o fibrado quociente TM/E^0 , de modo que, para todo $q \in M$, $\widehat{T}_qM = T_qM/[X(q)]$. Seja $\pi : TM \rightarrow \widehat{TM}$ a projeção quociente. Suponha que exista uma forma quadrática contínua $Q : TM \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e., Q é uma função contínua e uma forma quadrática em cada fibra) satisfazendo as seguintes condições:*

(EM1) *Q passa para o quociente, i.e., para todo $q \in M$, $v_q \in T_qM$, $s \in \mathbb{R}$, temos $Q(v_q + sX(q)) = Q(v_q)$, de modo que existe uma forma quadrática contínua $\widehat{Q} : \widehat{TM} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\widehat{Q} \circ \pi = Q$;*

(EM2) a derivada de Lie $\mathfrak{L}_X \mathcal{Q} : \text{TM} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\forall v_q \in \text{TM}) \mathfrak{L}_X \mathcal{Q}(v_q) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{Q}(\text{T}\phi^t \cdot v_q)$, existe e é contínua. Segue de (EM1) que $\mathfrak{L}_X \mathcal{Q}$ também passa para o quociente $\widehat{\text{TM}}$, i.e., existe $\widehat{\mathfrak{L}_X \mathcal{Q}} : \widehat{\text{TM}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\widehat{\mathfrak{L}_X \mathcal{Q}} \circ \pi = \mathfrak{L}_X \mathcal{Q}$;

(EM3) $\widehat{\mathcal{Q}}$ é não-degenerada e $\widehat{\mathfrak{L}_X \mathcal{Q}}$ é definida positiva.

Se uma tal forma quadrática \mathcal{Q} existir, dizemos que o fluxo $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ é estritamente monótono.

Usaremos o seguinte teorema para estabelecer a condição para hiperbolicidade mencionada no início desta seção:

Teorema (Wojtkowski,[66]). Se o fluxo $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ for estritamente monótono, então ele é hiperbólico.

No caso do campo $X_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{X}(\mathcal{E})$, cujas curvas integrais de base são as trajetórias físicas do sistema mecânico vinculado $(M, K, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ definidas pelo campo de reações vinculares admissível $R_{\mathcal{F}}$, podemos identificar, para todo $v_q \in \mathcal{E}$, $\widehat{\text{T}}_{v_q} \mathcal{E} := \text{T}_{v_q} \mathcal{E} / [X_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{F}})(v_q)]$ com o subespaço de $\text{T}_{v_q} \mathcal{E}$ dado por:

$$\{X_{v_q} \in \text{T}_{v_q} \mathcal{E} \mid \langle \text{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q}, v_q \rangle = 0\}.$$

Com efeito, como tal subespaço tem codimensão 1, é suficiente verificar que, para todo $v_q \in \mathcal{E}$, $X_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{F}})(v_q)$ não pertence a ele. Mas, $X_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{F}})(v_q) = S(v_q) + \lambda_{v_q}(\mathcal{F}^{\sharp}(v_q) + R_{\mathcal{F}}(v_q))$, onde S é o spray geodésico da conexão de Levi-Civita de (M, g) , de modo que $\langle \text{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{F}})(v_q), v_q \rangle = \langle v_q, v_q \rangle > 0$, pois, pela hipótese feita sobre \mathcal{E} no início desta seção, $0_q \notin \mathcal{E}$.

A seguinte proposição fornece um critério para que o fluxo $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de $X_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{F}})$, seja hiperbólico:

PROPOSIÇÃO 3.6. Dado $v_q \in \mathcal{E}$, considere as seguintes formas quadráticas, definidas em $\widehat{\text{T}}_{v_q} \mathcal{E}$:

$$Q_1(v_q) : X_{v_q} \mapsto \langle \kappa \cdot X_{v_q}, \text{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q} \rangle$$

$$\begin{aligned} Q_2(v_q) : X_{v_q} \mapsto & \langle \text{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q}, R(v_q, \text{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q}) \cdot v_q + \mathbb{F}\mathcal{F}^{\sharp}(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \\ & + \mathbb{P}\mathcal{F}^{\sharp}(v_q) \cdot \text{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q} + \mathbb{F}R_{\mathcal{F}}(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}R_{\mathcal{F}}(v_q) \cdot \text{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q} \rangle + \\ & + \langle \kappa \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle + \left\{ \frac{2\langle \mathcal{F}^{\sharp}(v_q) + R_{\mathcal{F}}(v_q), v_q \rangle}{\langle v_q, v_q \rangle^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle + \langle \text{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q}, \mathcal{F}^{\sharp}(v_q) + R_{\mathcal{F}}(v_q) \rangle}{\langle v_q, v_q \rangle} \right\} (\langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle + \\ & + \langle \text{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q}, \mathcal{F}^{\sharp}(v_q) + R_{\mathcal{F}}(v_q) \rangle) \end{aligned}$$

onde R é o tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita de (M, g) .

Se, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $Q_1(v_q)$ for não-degenerada, e $Q_2(v_q)$ for definida positiva, então o fluxo $(\phi^t)_t$ de $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})$ é hiperbólico.

Na demonstração, usaremos o seguinte lema, que fornece a equação dos campos de Jacobi do fluxo de $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})$:

LEMA 3.5. Dado $X_{v_q} \in T\mathcal{C}$, temos, para todo $t \in \mathbb{R}$, $T\phi^t \cdot X_{v_q} = H_{\dot{\gamma}(t)}J(t) + \lambda_{\dot{\gamma}(t)}\nabla_t J$, onde $\dot{\gamma}(t) = \phi^t(v_q)$ e $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ é a solução de:

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 J &= R(\dot{\gamma}, J) \cdot \dot{\gamma} + \mathbb{F}\mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t J + \mathbb{P}\mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}) \cdot J + \\ &+ \mathbb{F}R_{\mathcal{F}}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t J + \mathbb{P}R_{\mathcal{F}}(\dot{\gamma}) \cdot J \end{aligned} \quad (3.33)$$

com condição inicial $J(0) = T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}$, $\nabla_{t|t=0} J = \kappa \cdot X_{v_q}$.

Demonstração. Tome $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $c'(0) = X_{v_q}$, e, para todo $t \in \mathbb{R}$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, seja $\gamma(t, s) := \pi_{\mathcal{C}} \circ \phi^t \circ c(s)$. Então, para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\gamma_s := \gamma(\cdot, s)$ é curva integral de base do campo $X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})$, ou seja:

$$\nabla_t \dot{\gamma}_s = \mathcal{F}^\sharp(\dot{\gamma}_s) + R_{\mathcal{F}}(\dot{\gamma}_s)$$

e, aplicando $\nabla_{s|s=0}$ a ambos os membros desta última equação, obtemos a equação (3.33). □

Demonstração da proposição (3.6). Tomamos $H : T\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(X_{v_q}) = \frac{1}{2} \|P_{[v_q]^\perp} \cdot T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}\|^2$, onde $P_{[v_q]^\perp}$ é a projeção ortogonal. Então, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $X_{v_q} \in T_{v_q}\mathcal{C}$, $s \in \mathbb{R}$, temos $H(X_{v_q} + sX_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})(v_q)) = H(X_{v_q})$, de modo que H passa para o quociente $\widehat{T\mathcal{C}}$. Seja $Q := \mathfrak{L}_{X_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{F}})}H$, de forma que Q também passa para o quociente $\widehat{T\mathcal{C}}$. Aplicando o lema (3.5), conclui-se, após um cálculo direto:

$$\begin{aligned} Q(X_{v_q}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(T\phi^t \cdot X_{v_q}) = \\ &= \langle T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle - \frac{\langle T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}, v_q \rangle}{\langle v_q, v_q \rangle} (\langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle + \\ &+ \langle T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}, \mathcal{F}^\sharp(v_q) + R_{\mathcal{F}}(v_q) \rangle) + \frac{\langle T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}, v_q \rangle^2}{\langle v_q, v_q \rangle^2} \langle \mathcal{F}^\sharp(v_q) + R_{\mathcal{F}}(v_q), v_q \rangle \end{aligned}$$

Em $\widehat{T\mathcal{C}}$, pondo $\langle T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}, v_q \rangle = 0$ no segundo membro desta última equação, obtemos $\widehat{Q}(X_{v_q}) = Q_1(v_q)(X_{v_q}) = \langle T\pi_{\mathcal{C}} \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle$.

Calculando a derivada de Lie $\mathfrak{L}_{X_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{F}})}Q$ através do lema (3.5), e novamente fazendo $\langle \mathbb{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q}, v_q \rangle = 0$ para passar ao quociente $\widehat{\mathbb{T}\mathcal{C}}$, obtemos $\mathfrak{L}_{X_{\mathcal{E}}(R_{\mathcal{F}})}Q(X_{v_q}) = Q_2(v_q)(X_{v_q})$. Assim, a hipótese da proposição garante que o fluxo $(\phi^t)_t$ é estritamente monótono, portanto hiperbólico. \square

Exemplo 3.4. Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta, e tomemos em M o vínculo dado pelo exemplo (2.1.e) — “dinâmica isocinética”, ou seja, $\mathcal{C} = \{v_q \in \mathbb{T}M \mid \langle v_q, v_q \rangle = e^2\}$, $e \neq 0$. Consideremos um campo magnético $B \in \Omega_2(M)$, com a correspondente força de Lorentz $\mathcal{Y} : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}M$, como no capítulo 1, e tomemos um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$. Seja $\mathcal{F}^\sharp := \mathcal{Y} - \text{grad } V \circ \tau_M$. Obteremos uma condição para que o fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{E}}$ seja hiperbólico.

Temos $A \equiv 0$ e, dado $v_q \in \mathcal{C}$, temos $C_{v_q} = [v_q]^\perp$, $W_{v_q} = [v_q]$. Portanto, $\mathbb{T}_{v_q}\mathcal{C} = \{X_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q}\mathbb{T}M \mid P_{[v_q]} \cdot \kappa \cdot X_{v_q} = 0 \Leftrightarrow \langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle = 0\}$. Logo, $\widehat{\mathbb{T}_q\mathcal{C}} = \{X_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q}\mathbb{T}M \mid \langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle = \langle \mathbb{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q}, v_q \rangle = 0\}$, e verifica-se por polarização que a forma quadrática $Q_1(v_q) : X_{v_q} \in \widehat{\mathbb{T}_q\mathcal{C}} \mapsto \langle \kappa \cdot X_{v_q}, \mathbb{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q} \rangle$ é não-degenerada. Além disso, dado $X_{v_q} \in \widehat{\mathbb{T}_q\mathcal{C}}$, pondo $\xi_q := \mathbb{T}\pi_{\mathcal{E}} \cdot X_{v_q}$, $\eta_q := \kappa \cdot X_{v_q}$, um cálculo direto mostra que:

$$\begin{aligned} Q_2(v_q)(X_{v_q}) &= \langle R(v_q, \xi_q) \cdot v_q, \xi_q \rangle + \langle -\nabla_{\xi_q} \text{grad } V + \mathcal{Y}(\eta_q) + (\nabla_{\xi_q} \mathcal{Y})(v_q) - \\ &\quad - \frac{1}{e^2} \langle \text{grad } V(q), v_q \rangle \eta_q, \xi_q \rangle + \\ &\quad + \langle \eta_q, \eta_q \rangle - \frac{1}{e^4} \langle \xi_q, -\text{grad } V(q) + \mathcal{Y}(v_q) \rangle^2 = \\ &= \left(\eta_q - \frac{\mathcal{Y}(\xi_q)}{2} - \frac{1}{2e^2} \langle \text{grad } V(q), v_q \rangle \xi_q \right)^2 - \\ &\quad - \frac{\mathcal{Y}(\xi_q)^2}{4} - \frac{1}{4e^4} \langle \text{grad } V(q), v_q \rangle^2 \xi_q^2 + \langle R(v_q, \xi_q) \cdot v_q, \xi_q \rangle - \\ &\quad - \langle \nabla_{\xi_q} \text{grad } V, \xi_q \rangle + \langle (\nabla_{\xi_q} \mathcal{Y})(v_q), \xi_q \rangle - \frac{1}{e^4} \langle \xi_q, -\text{grad } V(q) + \mathcal{Y}(v_q) \rangle^2 \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que, se para todo $v_q \in \mathcal{C}$ a forma quadrática:

$$\begin{aligned} \xi_q \in \mathbb{T}_q M \mapsto & - \frac{\mathcal{Y}(\xi_q)^2}{4} - \frac{1}{4e^4} \langle \text{grad } V(q), v_q \rangle^2 \xi_q^2 + \langle R(v_q, \xi_q) \cdot v_q, \xi_q \rangle - \\ & - \langle \nabla_{\xi_q} \text{grad } V, \xi_q \rangle + \langle (\nabla_{\xi_q} \mathcal{Y})(v_q), \xi_q \rangle - \frac{1}{e^4} \langle \xi_q, -\text{grad } V(q) + \mathcal{Y}(v_q) \rangle^2 \end{aligned}$$

for positiva definida em $[v_q]^\perp \subset \mathbb{T}_q M$, então o fluxo do campo GMA $X_{\mathcal{E}}$ é hiperbólico. Esta forma quadrática concorda com a do teorema (4.1) de [66] (pondo $W = 0$ e

$E = -\text{grad } V$). Por exemplo (vide [66]), se a variedade riemanniana (M, g) tiver curvatura seccional menor que $-k^2 < 0$, e se \mathbf{B} e V forem tais que:

$$\frac{\|\nabla \mathcal{Y}\|}{e} + \frac{\|\nabla(\text{grad } V)\|}{e^2} + \left(\frac{\|\mathcal{Y}\|}{e} + \frac{\|\text{grad } V\|}{e^2} \right)^2 < k^2$$

então o fluxo de $X_{\mathcal{E}}$ é hiperbólico. Note também que, como caso particular, pondo $\mathbf{B} = 0$ e $V = 0$, obtém-se o conhecido resultado de Anosov, segundo o qual o fluxo geodésico no fibrado tangente unitário de uma variedade riemanniana compacta com curvatura seccional negativa é hiperbólico.

Capítulo 4

Sistemas Lagrangeanos Vinculados

Sejam (M, L) um sistema lagrangeano e $\mathcal{C} \subset TM$ um vínculo. Neste capítulo serão estudadas as *trajetórias do sistema lagrangeano vinculado* (M, L, \mathcal{C}) . Tais trajetórias são definidas a partir de uma generalização do princípio de Hamilton da ação estacionária, i.e., são os pontos críticos do funcional de Lagrange numa variedade de Banach de curvas horizontais ao vínculo. No caso particular em que o vínculo é um subfibrado vetorial $\mathcal{D} \subset TM$ e a lagrangeana é clássica, com potencial V nulo, obtemos a geometria sub-riemanniana.

§1. TRAJETÓRIAS NORMAIS E ABNORMAIS

DEFINIÇÃO 4.1. *Um sistema lagrangeano vinculado é uma terna (M, L, \mathcal{C}) , onde (M, L) é um sistema lagrangeano e $\mathcal{C} \subset TM$ é um vínculo.*

Até o final deste capítulo, será fixado um sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) . Como no capítulo 2, também fixaremos um tensor métrico g em M , e se a lagrangeana for clássica, suporemos que g é o tensor métrico induzido pela energia cinética K .

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Como vimos na seção (2.1), para $k \geq 1$, $C^k(M, \mathcal{C}, [a, b])$ é subvariedade diferenciável mergulhada em $C^k(M, [a, b])$, e o seu espaço tangente em $\gamma \in C^k(M, \mathcal{C}, [a, b])$ é dado por:

$$T_\gamma C^k(M, \mathcal{C}, [a, b]) = \{X \in T_\gamma C^k(M, [a, b]) \mid \kappa \cdot P_W \cdot \lambda_{\dot{\gamma}} \nabla_t X + \kappa \cdot P_W \cdot H_{\dot{\gamma}} X = 0\}$$

Além, disso, dado $q \in M$, $C^k(M, \mathcal{C}, [a, b], q)$ é subvariedade diferenciável mergulhada fechada em $C^k(M, \mathcal{C}, [a, b])$, e o seu espaço tangente em $\gamma \in C^k(M, \mathcal{C}, [a, b], q)$ é dado por $T_\gamma C^k(M, \mathcal{C}, [a, b], q) = \{X \in T_\gamma C^k(M, \mathcal{C}, [a, b]) \mid X(a) = 0\}$.

O mesmo vale para H^k no lugar de C^k , se $k \geq 2$. Como anteriormente, omitiremos o $[a, b]$ da notação, estando o intervalo $[a, b]$ fixado e não havendo risco de confusão.

O fibrado vetorial S_γ e as aplicações dados pelas seguintes definições terão um papel importante neste capítulo:

DEFINIÇÃO 4.2. Seja $\gamma \in C^1(M, \mathcal{E})$. Então $t \in [a, b] \mapsto C_{\dot{\gamma}(t)}^\perp \subset T_{\gamma(t)}M$ é uma seção contínua do fibrado de Grassmann dos m -planos de γ^*TM , $Gr_m(\gamma^*TM)$, onde $m = \text{rk } W$. Ou seja, $S_\gamma := \cup_{t \in [a, b]} C_{\dot{\gamma}(t)}^\perp$ e $S_\gamma^\perp := \cup_{t \in [a, b]} C_{\dot{\gamma}(t)}$ são subfibrados vetoriais contínuos do pull back γ^*TM . Se $\gamma \in C^k$, $k \geq 1$, então S_γ e S_γ^\perp são subfibrados de classe C^{k-1} . Analogamente, se $\gamma \in H^k(M, \mathcal{E}) \subset C^{k-1}(M, \mathcal{E})$, $k \geq 2$, S_γ e S_γ^\perp são subfibrados de classe H^{k-1} (i.e., é localmente gerados por seções de classe H^{k-1}) de γ^*TM .

Observação 4.1. Sejam M uma variedade diferenciável (i.e., de classe C^∞), compacta, possivelmente com bordo, e $\pi_\xi : \xi \rightarrow M$ um fibrado vetorial de classe C^k , $k \geq 0$. Então, pela compacidade da base M , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_\xi : \xi \rightarrow M$ é isomorfo a um subfibrado vetorial de classe C^k do fibrado trivial $(C^\infty) \mathbb{R}_M^N$. Assim, pondo $M = [a, b]$, na situação descrita na definição acima, temos:

- (a) para $k \geq 2$, se $\gamma \in H^k(M, \mathcal{E})$, γ^*TM é um fibrado vetorial de classe C^{k-1} sobre $[a, b]$. Tomando $N \in \mathbb{N}$ como acima, para $\xi = \gamma^*TM$, conclui-se que S_γ e S_γ^\perp são subfibrados de classe H^{k-1} do fibrado vetorial diferenciável $\mathbb{R}_{[a, b]}^N$. Podemos aplicar, portanto, a teoria de [44], capítulo 14, para S_γ e S_γ^\perp ; ou seja, podemos aplicar a S_γ e S_γ^\perp os funtores H^s e C^{s-1} , $0 \leq s \leq k-1$.
- (b) analogamente, para $k \geq 1$, se $\gamma \in C^k(M, \mathcal{E})$, então S_γ e S_γ^\perp são subfibrados vetoriais de classe C^{k-1} do fibrado trivial $\mathbb{R}_{[a, b]}^N$, para algum $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de modo que podemos aplicar a S_γ e S_γ^\perp os funtores H^s e C^s , $0 \leq s \leq k-1$.

DEFINIÇÃO 4.3. Sejam $k, s \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $1 \leq s \leq k$, e $\gamma \in H^k(M, \mathcal{E})$. Consideremos as seguintes aplicações lineares contínuas:

$$\begin{aligned} T^s : T_\gamma H^s(M) &\longrightarrow H^{s-1}(S_\gamma) \\ J &\longmapsto \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t J - A(\dot{\gamma}) \cdot J \end{aligned}$$

onde \mathcal{P}^\perp e A são dadas pelas definições (2.2) e (3.7), respectivamente, e:

$$\begin{aligned} T_a^s &: T_\gamma H^s(M, \gamma(a)) \rightarrow H^{s-1}(S_\gamma) \\ T_{a,b}^s &: T_\gamma H^s(M, \gamma(a), \gamma(b)) \rightarrow H^{s-1}(S_\gamma) \end{aligned}$$

definidas pelas restrições de T^s a $T_\gamma H^s(M, \gamma(a))$ e $T_\gamma H^s(M, \gamma(a), \gamma(b))$, respectivamente.

Note que, dados $k \geq 2$, $1 \leq s \leq k$, o mesmo argumento da demonstração da proposição (2.5) implica que T^s e T_a^s são sobrejetivas. Além disso:

$$\begin{aligned} T_\gamma H^k(M, \mathcal{C}) &= \ker T^k \\ T_\gamma H^k(M, \mathcal{C}, \gamma(a)) &= \ker T_a^k \end{aligned}$$

e, para $k \geq 2$, $1 \leq s < k$, temos as seguintes inclusões contínuas:

$$\begin{aligned} \ker T_{a,b}^{s+1} &\subset \ker T_{a,b}^s \\ \ker T_a^{s+1} &\subset \ker T_a^s \\ \ker T^{s+1} &\subset \ker T^s \\ \ker T_{a,b}^s &\subset \ker T_a^s \subset \ker T^s \end{aligned}$$

e o mesmo vale se substituirmos “ker” por “Im”.

Estamos agora em condições de definir as trajetórias do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) :

DEFINIÇÃO 4.4. *Uma curva $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ diz-se regular se for um ponto regular da aplicação ponto final:*

$$\begin{array}{ccc} ev_f : H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a)) & \longrightarrow & M \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(b) \end{array}$$

DEFINIÇÃO 4.5. *Uma curva $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ diz-se uma trajetória abnormal do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) se for um ponto crítico da aplicação ponto final ev_f .*

Diz-se que $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ é uma trajetória normal do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) se $\ker T_{a,b}^2 \subset \ker d\mathcal{L}(\gamma)$.

No caso em que a lagrangeana é dada pela energia cinética K induzida pelo tensor métrico g , chamamos as trajetórias normais/abnormais de geodésicas normais/abnormais de (M, g, \mathcal{C}) .

Observação 4.2. (a) *A nomenclatura normal/abnormal vem da geometria sub-riemanniana: quando $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ é um vínculo linear, ou seja, um subfibrado vetorial diferenciável de TM , as geodésicas normais/abnormais de (M, g, \mathcal{D}) coincidem com as geodésicas normais/abnormais, no sentido da geometria sub-riemanniana, de $(M, \mathcal{D}, g|_{\mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}})$. Note que as trajetórias abnormais de (M, L, \mathcal{C}) independem da lagrangeana L ; poderíamos chamá-las, portanto, de “geodésicas” ou “trajetórias” abnormais de (M, \mathcal{C}) , sem referência à lagrangeana ou ao tensor métrico.*

- (b) Se $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C})$ é uma curva regular, i.e., se for um ponto regular de ev_f , então $H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a), \gamma(b))$ é uma subvariedade diferenciável mergulhada em $H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a))$ numa vizinhança conveniente de γ e seu espaço tangente em γ coincide com $\ker T_{a,b}^2$. Portanto, neste caso, γ é uma trajetória normal se, e somente se, for um ponto estacionário da restrição de $\mathcal{L} : H^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ a $H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a), \gamma(b))$.
- (c) Como na geometria sub-riemanniana, uma curva $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C})$ pode ser simultaneamente uma trajetória normal e abnormal.
- (d) Poderíamos ter usado espaços de curvas C^1 , ao invés de H^2 , para definir as trajetórias do sistema lagrangeano. No caso das trajetórias abnormais, obteríamos um teorema análogo ao teorema (E), mutatis mutandis; com relação às trajetórias normais, vide observação (4.5), página 104.
- (e) As trajetórias normais e abnormais independem do tensor métrico auxiliar g . Com efeito, isto é evidente no caso das trajetórias abnormais, que são os pontos críticos da aplicação ponto final ev_f . No caso das trajetórias normais, basta observar que o subespaço $\ker T_{a,b}^2$ de $T_\gamma H^2(M, \gamma(a), \gamma(b))$ é dado por $\{J \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a)) \mid J(b) = 0\}$, e claramente independe do tensor métrico.

1.1. Equações das trajetórias e o campo de vetores variacional

Nesta subseção serão caracterizadas as trajetórias abnormais (teorema (E)) e normais (teorema (F), teorema (G)) do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) . No caso das trajetórias normais, mostraremos que, se uma certa condição de regularidade sobre a lagrangeana e sobre o vínculo — a condição que chamamos de *condição* (\mathcal{R}) — for satisfeita, elas são as projeções em M das curvas integrais de um campo de vetores diferenciável definido no espaço total W do fibrado vetorial $\pi_W : W \rightarrow \mathcal{C}$; em particular, elas são diferenciáveis.

Os principais resultados serão precedidos por uma série de definições e lemas necessários para demonstrar os teoremas (E) e (F). Em poucas palavras, nestes lemas, dada $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$:

- (i) provamos que $\ker T_{a,b}^2$ é denso em $\ker T_{a,b}^1$ (o que será usado na demonstração do teorema (F));
- (ii) provamos que as aplicações $T_{a,b}^2$ e $T_{a,b}^1$ têm imagem fechada e que, se uma delas for sobrejetiva, a outra também é (o que será usado para caracterizar as trajetórias abnormais, no teorema (F));
- (iii) calculamos a adjunta $(T_{a,b}^1)^*$ (o que também será usado para demonstrar o teorema (F)).

DEFINIÇÃO 4.6. Dada $\gamma \in H^k(M, \mathcal{C})$, $k \geq 2$, consideremos os seguintes subespaços fechados de $T_\gamma H^k(M)$ e $T_\gamma H^k(M, \gamma(a))$:

$$E := \{X \in T_\gamma H^k(M) \mid \nabla_t^2 X = 0\}$$

$$E_a := \{X \in T_\gamma H^k(M, \gamma(a)) \mid \nabla_t^2 X = 0\}$$

e, para $1 \leq s \leq k$, consideremos os seguintes subespaços fechados de $T_\gamma H^s(M)$ e $T_\gamma H^s(M, \gamma(a))$:

$$F^s := \{X \in T_\gamma H^s(M) \mid \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t X = 0 \text{ e } X(a) = 0\}$$

$$F_a^s := \{X \in T_\gamma H^s(M, \gamma(a)) \mid \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t X = 0\}$$

Claramente, temos as seguintes inclusões contínuas, para $s, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $1 \leq s \leq k - 1$:

$$F^{s+1} \subset F^s$$

$$F_a^{s+1} \subset F_a^s$$

$$F^s \subset F_a^s$$

$$E_a \subset E$$

LEMA 4.1. Usando a notação da definição precedente, temos as seguintes decomposições em soma direta, para $1 \leq s \leq k$:

$$T_\gamma H^s(M) = T_\gamma H^s(M, \gamma(a), \gamma(b)) \oplus E$$

$$T_\gamma H^s(M, \gamma(a)) = T_\gamma H^s(M, \gamma(a), \gamma(b)) \oplus E_a$$

Além disso, $T_\gamma H^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$ é ortogonal a E e a E_a .

Demonstração. Com efeito, dado $X \in T_\gamma H^s(M, \gamma(a), \gamma(b)) \cap E$ ou $X \in T_\gamma H^s(M, \gamma(a), \gamma(b)) \cap E_a$, temos $\nabla_t^2 X = 0$, $X(a) = 0$ e $X(b) = 0$, o que implica $X = 0$. Por outro lado, dado $X \in T_\gamma H^s(M)$, seja $V_0 \in T_\gamma H^k(M)$ o transporte paralelo de $X(a)$ ao longo de γ , $V_1 \in T_\gamma H^k(M)$ o transporte paralelo de $X(b) - V_0(b)$ ao longo de γ , e $X_1 \in E$ definido por $(\forall t \in [a, b]) X_1(t) := V_0(t) + \frac{t-a}{b-a} V_1(t)$. Então é claro que $X - X_1 \in T_\gamma H^s(M, \gamma(a), \gamma(b))$, o que prova a primeira decomposição em soma direta; se $X(a) = 0$, então $V_0 = 0$, logo $X_1 \in E_a$ e a segunda decomposição em soma direta também está demonstrada.

Além disso, para $k = 1$, dado $J \in T_\gamma H^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$ e $X \in E$ ou $X \in E_a$, temos:

$$\begin{aligned} \langle J, X \rangle_{H^1} &= \int_a^b \langle \nabla_t J, \nabla_t X \rangle \stackrel{J(a)=J(b)=0}{=} \\ &= \int_a^b \langle J, \nabla_t^2 X \rangle = 0 \end{aligned}$$

mostrando que E é o complemento ortogonal de $T_\gamma H^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$ em $T_\gamma H^1(M)$, e que E_a é o complemento ortogonal de $T_\gamma H^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$ em $T_\gamma H^1(M, \gamma(a))$, como afirmado. \square

COROLÁRIO 4.1. $T_\gamma H^2(M, \gamma(a), \gamma(b))$ é denso em $T_\gamma H^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$ e $\text{Im } T_{a,b}^2$ é densa em $\text{Im } T_{a,b}^1$.

Demonstração. A segunda afirmação decorre da primeira e da continuidade de $T_{a,b}^1$; a primeira, por sua vez, decorre da densidade de $T_\gamma H^2(M)$ em $T_\gamma H^1(M)$ e da primeira decomposição em soma direta do lema (4.1). \square

LEMA 4.2. Usando a mesma notação, $\text{Im } T_{a,b}^s$ é fechado em $H^{s-1}(S_\gamma)$.

Demonstração. Como $T_\gamma H^s(M, \gamma(a), \gamma(b))$ tem codimensão finita em $T_\gamma H^s(M, \gamma(a))$ e $\text{Im } T_a^s = H^{s-1}(S_\gamma)$, segue que $\text{Im } T_{a,b}^s = T_a^s(T_\gamma H^s(M, \gamma(a), \gamma(b)))$ tem codimensão finita em $H^{s-1}(S_\gamma)$. Portanto, a tese segue do seguinte corolário do teorema da aplicação aberta: “se a imagem de uma aplicação linear contínua entre espaços de Banach tem codimensão finita, então ela é fechada” (vide [31]). \square

LEMA 4.3. Seja $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $\gamma \in H^k(M, \gamma(a), \gamma(b))$ e $X, Y \in H^{k-1}(\gamma^*TM)$. Então existem e são únicos $L \in T_\gamma H^k(M)$ e $K \in T_\gamma H^k(M, \gamma(a), \gamma(b))$ tais que:

(i) $\nabla_t L = X$;

(ii) $\nabla_t K = Y + L$.

Demonstração. Tome $L_0 \in T_\gamma H^k(M)$ tal que $\nabla_t L_0 = X \in H^{k-1}(\gamma^*TM)$, e $K_0 \in T_\gamma H^k(M)$ tal que $\nabla_t K_0 = Y + L_0$. Pelo lema (4.1), existem (e são únicos) $K \in T_\gamma H^k(M, \gamma(a), \gamma(b))$ e $V \in E$ tais que $K + V = K_0$. Tome $L := \nabla_t K - Y$. Então temos $L = \nabla_t(K_0 - V) - Y = \nabla_t K_0 - \nabla_t V - Y = L_0 - \nabla_t V \in T_\gamma H^k(M)$, e $\nabla_t L = \nabla_t L_0 = X$.

A unicidade segue do fato de que, se $K' \in T_\gamma H^k(M, \gamma(a), \gamma(b))$ e $L' \in T_\gamma H^k(M)$ também satisfazem (i) e (ii), então $\nabla_t(K - K') = L - L'$ e $\nabla_t(L - L') = 0$, logo $\nabla_t(K - K') \in T_\gamma H^k(M)$ e $\nabla_t^2(K - K') = 0$. Como $(K - K')(a) = 0$, $(K - K')(b) = 0$, isto implica $K - K' = 0$, portanto $L - L' = 0$, o que conclui a demonstração. \square

COROLÁRIO 4.2. Sejam $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\gamma \in H^k(M, \gamma(a), \gamma(b))$ e $P \in H^{k-2}(S_\gamma)$. Então:

(i) existem e são únicos $L_P \in T_\gamma H^{k-1}(M)$ e $K_P \in T_\gamma H^{k-1}(M, \gamma(a), \gamma(b))$ tais que:

(a) $\nabla_t L_P = -A(\dot{\gamma})^* \cdot P$;

(b) $\nabla_t K_P = P - L_P$.

Além disso, $L_P, K_P \in H^k$ se $P \in H^{k-1}$.

(ii) temos $(T_{a,b}^1)^* \cdot P = K_P$, onde K_P como na parte (i).

Demonstração. (i) Segue imediatamente do lema (4.3), pois, para $s \in \{1, 2\}$, $A^*(\dot{\gamma}) \cdot P$ pertence a $H^{k-s}(\gamma^*TM)$ se $P \in H^{k-s}(\gamma^*S)$.

(ii) Temos, para todo $X \in T_\gamma H^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$:

$$\begin{aligned}
\langle X, K_P \rangle_{H^1} &= \int_a^b \langle \nabla_t X, \nabla_t K_P \rangle = \\
&= \int_a^b \langle \nabla_t X, P - L_P \rangle \stackrel{X(a)=X(b)=0}{=} \\
&= \int_a^b \langle \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t X, P \rangle + \int_a^b \langle \nabla_t L_P, X \rangle = \\
&= \int_a^b \langle \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t X, P \rangle + \langle -A(\dot{\gamma})^* \cdot P, X \rangle = \\
&= \int_a^b \langle \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t X - A(\dot{\gamma}) \cdot X, P \rangle = \\
&= \int_a^b \langle T_{a,b}^1 \cdot X, P \rangle = \langle T_{a,b}^1 \cdot X, P \rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

logo $K_P = (T_{a,b}^1)^* \cdot P$, como afirmado. □

LEMA 4.4. Usando a notação da definição (4.6), para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $1 \leq s \leq k$, temos as seguintes decomposições em soma direta:

$$\begin{aligned}
T_\gamma H^s(M) &= \ker T^s \oplus F^s \\
T_\gamma H^s(M) &= \ker T_a^s \oplus F_a^s
\end{aligned}$$

Demonstração. É o mesmo argumento, *mutatis mutandis*, que foi usado para mostrar $F \oplus \{T_\gamma(\frac{T}{dt})\}^{-1}[T_{\frac{T}{dt}} C^{k-1}(\mathcal{C})] = T_\gamma C^k(M)$, na demonstração da proposição (2.5). □

LEMA 4.5. Usando a mesma notação, denote por G o complemento ortogonal de $\ker T_{a,b}^1$ em $\ker T_a^1$, de modo que $\ker T_a^1 = \ker T_{a,b}^1 \oplus G$. Então $G \subset \ker T_a^2$.

Demonstração. (a) Como $\text{Im } T_{a,b}^1$ é fechada, temos $\text{Im } (T_{a,b}^1)^* = (\ker T_{a,b}^1)^\perp$ (i.e., o complemento ortogonal de $\ker T_{a,b}^1$ em $T_\gamma H^1(M, \gamma(a), \gamma(b))$). De fato, o teorema da

aplicação aberta implica que $T_{a,b}^1|_{(\ker T_{a,b}^1)^\perp} : (\ker T_{a,b}^1)^\perp \rightarrow \text{Im } T_{a,b}^1$ é um isomorfismo linear contínuo, donde $(T_{a,b}^1)^*|_{\text{Im } T_{a,b}^1} : \text{Im } T_{a,b}^1 \rightarrow (\ker T_{a,b}^1)^\perp$ também é um isomorfismo linear contínuo, portanto $\text{Im } (T_{a,b}^1)^* = (\ker T_{a,b}^1)^\perp$, como afirmado.

(b) O complemento ortogonal de $\ker T_{a,b}^1$ em $\ker T_a^1$ é a intersecção de $\ker T_a^1$ com o complemento ortogonal de $\ker T_{a,b}^1$ em $\mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^1(\mathbb{M}, \gamma(a))$, o qual, por sua vez, é a soma direta do complemento ortogonal de $\ker T_{a,b}^1$ em $\mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^1(\mathbb{M}, \gamma(a), \gamma(b))$ com o complemento ortogonal deste último espaço em $\mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^1(\mathbb{M}, \gamma(a))$ (o qual coincide com E_a , pelo lema (4.1)). Assim, temos:

$$G = (\text{Im } (T_{a,b}^1)^* \oplus E_a) \cap \ker T_a^1$$

Portanto, dado $X \in G$, X deve ser da forma:

$$X = (T_{a,b}^1)^* P + W$$

onde $P \in L^2(\mathbb{S}_\gamma)$ e $W \in E_a$, ou seja, $(\forall t \in [a, b]) W(t) = tV(t)$ para algum $V \in \mathbb{H}^2(\gamma^* \mathbb{T}\mathbb{M})$ tal que $\nabla_t V = 0$, e devemos ter $T_a^1 \cdot X = 0$.

Sejam $L_P \in \mathbb{H}^1(\gamma^* \mathbb{T}\mathbb{M})$ e $K_P \in \mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^1(\mathbb{M}, \gamma(a), \gamma(b))$ dados pelo corolário (4.2), de forma que $(T_{a,b}^1)^* P = K_P$. Temos:

$$\begin{aligned} \nabla_t X &= \nabla_t K_P + V = \\ &= P - L_P + V \end{aligned}$$

logo $T_a^1 \cdot X = 0$ se, e somente se:

$$P = \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot (L_P - V) + A(\dot{\gamma}) \cdot (K_P + W)$$

e isto mostra que $P \in \mathbb{H}^1(\mathbb{S}_\gamma)$. Portanto, $K_P = (T_{a,b}^1)^* \cdot P \in \mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^2(\mathbb{M}, \gamma(a), \gamma(b))$, logo $X = (T_{a,b}^1)^* \cdot P + W \in \mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^2(\mathbb{M}, \gamma(a))$ e $T_a^1 \cdot X = T_a^2 \cdot X = 0$, i.e., $X \in \ker T_a^2$. Como $X \in G$ foi tomado arbitrariamente, isto mostra $G \subset \ker T_a^2$. \square

COROLÁRIO 4.3. *Usando a mesma notação, $\ker T^2$ é denso em $\ker T^1$, $\ker T_a^2$ é denso em $\ker T_a^1$ e $\ker T_{a,b}^2$ é denso em $\ker T_{a,b}^1$.*

Demonstração. A densidade de $\ker T^2$ e $\ker T_a^2$ em $\ker T^1$ e $\ker T_a^1$, respectivamente, é uma consequência dos seguintes fatos: (1) $\mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^2(\mathbb{M})$ é denso em $\mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^1(\mathbb{M})$; (2) $\mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^s(\mathbb{M}) = \ker T^s \oplus F^s$ e $\mathbb{T}_\gamma \mathbb{H}^s(\mathbb{M}) = \ker T_a^s \oplus F_a^s$, para $s \in \{1, 2\}$, pelo lema (4.4); (3) $\ker T^2 \subset \ker T^1$, $\ker T_a^2 \subset \ker T_a^1$, $F^2 \subset F^1$ e $F_a^2 \subset F_a^1$.

A densidade de $\ker T_{a,b}^2$ em $\ker T_{a,b}^1$ segue do lema (4.5) e da densidade de $\ker T_a^2$ em $\ker T_a^1$. Com efeito, dados $Y \in \ker T_{a,b}^1$, existe uma seqüência $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\ker T_a^2$ tal que $J_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y$ em $\ker T_a^1$. Podemos escrever ($\forall n \in \mathbb{N}$):

$$J_n = J_n^\top + J_n^\perp$$

com $J_n^\top \in \ker T_{a,b}^1$ e $J_n^\perp \in G$, e então segue do lema (4.5) que $J_n^\perp \in \ker T_a^2$, portanto $J_n^\top = J_n - J_n^\perp \in \ker T_a^2 \cap \ker T_{a,b}^1 = \ker T_{a,b}^2$.

Como $J_n^\top \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y^\top = Y$ em $\ker T_a^1$, mostramos que $Y \in \ker T_{a,b}^1$ é o limite em $\ker T_a^1$ de uma seqüência em $\ker T_{a,b}^2$, o que conclui a demonstração. \square

O próximo teorema fornece uma caracterização das trajetórias abnormais do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) . Ou seja, $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a))$ é uma trajetória abnormal se, e somente se, for falsa uma das quatro condições equivalentes enunciadas no teorema.

Notação. Dado $v_q \in \mathcal{C}$, denotaremos por $A^*(v_q)$ a transformação adjunta de $A(v_q) : T_q M \rightarrow T_q M$ com relação ao produto interno induzido pelo tensor métrico g .

TEOREMA E. *Dada $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a))$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $T_{a,b}^1$ é sobrejetiva;
- (ii) $T_{a,b}^2$ é sobrejetiva;
- (iii) γ é ponto regular da aplicação ponto final:

$$\begin{array}{ccc} ev_f : H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a)) & \longrightarrow & M \\ q & \longmapsto & q(b) \end{array}$$

- (iv) Se $P \in H^1(S_\gamma)$ e, para quase todo $t \in [a, b]$:

$$\nabla_t P + A^*(\dot{\gamma}) \cdot P = 0 \tag{4.1}$$

então $P \equiv \mathbb{O}$.

Exemplo 4.1. Trajetórias para as quais $v_1 = cte.$ no exemplo de Carathéodory (exemplo 2.1.c) são exemplos de trajetórias abnormais. Vide detalhes em [6], [58].

Observação 4.3. No caso em que $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ é um vínculo linear, temos, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $C_{v_q}^\perp = \mathcal{D}_q^\perp$ (logo $S_\gamma = \gamma^* \mathcal{D}^\perp$) e $A(v_q) = B_{\mathcal{D}}(v_q) := B_{\mathcal{D}}(\cdot, v_q) : T_q M \rightarrow \mathcal{D}_q^\perp$, onde $B_{\mathcal{D}} : TM \oplus_M \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^\perp$ é a segunda forma fundamental total de \mathcal{D} (vide [30]). Portanto, a equação (4.1) é equivalente a:

$$\nabla_t P + B_{\mathcal{D}}^*(\dot{\gamma}) \cdot P = 0$$

Uma curva $P \in H^1(\gamma^* \mathcal{D}^\perp)$ é solução desta equação se, e somente se, for uma curva característica da restrição da forma simplética ω_{TM} a \mathcal{D}^\perp . Vide, por exemplo, [48].

Demonstração do teorema (E). (iii) \Rightarrow (ii). Seja $\eta \in H^1(S_\gamma)$. Como T_a^2 é sobrejetiva, existe $J_1 \in T_\gamma H^2(M, \gamma(a))$ tal que $T_a^2 \cdot J_1 = \eta$. Tome $J_2 \in \ker T_a^2 = T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a))$ tal que $J_2(b) = J_1(b) \in T_{\gamma(b)} M$, cuja existência é assegurada pela condição (iii), e seja $J := J_1 - J_2$. Então $J \in T_\gamma H^2(M, \gamma(a), \gamma(b))$ e $T_{a,b}^2 \cdot J = \eta$, como afirmado.

(ii) \Rightarrow (i). Com efeito, suponha que $T_{a,b}^2$ é sobrejetiva. Então, como $\text{Im } T_{a,b}^2 = H^1(S_\gamma)$ é densa em $L^2(S_\gamma)$, e como $\text{Im } T_{a,b}^2 \subset \text{Im } T_{a,b}^1$, segue que $\text{Im } T_{a,b}^1$ é densa em $L^2(S_\gamma)$. Mas, pelo lema (4.2), $\text{Im } T_{a,b}^1$ é fechada, portanto $\text{Im } T_{a,b}^1 = L^2(S_\gamma)$.

(i) \Rightarrow (iv) Assuma que existe $P \in H^1(S_\gamma)$, $P \neq \mathbb{O}$, satisfazendo a equação (4.1). Mostraremos que $(T_{a,b}^1)^* \cdot P = 0$, portanto $(T_{a,b}^1)^*$ não é injetiva, logo $\text{Im } T_{a,b}^1$ não pode ser densa em $L^2(S_\gamma)$ (conseqüentemente, $T_{a,b}^1$ não é sobrejetiva).

Com efeito, sejam $L_P \in H^2(\gamma^* TM)$ e $K_P \in T_\gamma H^2(M, \gamma(a), \gamma(b))$ dados pelo corolário (4.2), de modo que $(T_{a,b}^1)^* P = K_P$. Temos:

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 K_P &= \nabla_t(P - L_P) = \\ &= \nabla_t P + A^*(\dot{\gamma}) \cdot P = 0 \end{aligned}$$

e, como $K_P(a) = \mathbb{O}_{\gamma(a)}$, $K_P(b) = \mathbb{O}_{\gamma(b)}$, segue que $(T_{a,b}^1)^* P = K_P = 0$. Portanto, $\ker (T_{a,b}^1)^* \neq \{\mathbb{O}\}$, ou seja, $\text{Im } T_{a,b}^1$ não é densa em $L^2(S_\gamma)$, como afirmado.

(iv) \Rightarrow (iii) Temos:

$$\begin{array}{ccc} T_\gamma ev_f : T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a)) & \longrightarrow & T_{\gamma(b)} M \\ & X & \longmapsto X(b). \end{array}$$

Suponha que γ não seja um ponto regular de ev_f , i.e., $T_\gamma ev_f$ não é sobrejetiva. Então existe $w \in T_{\gamma(b)} M \setminus \{\mathbb{O}\}$ tal que, para todo $X \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a))$:

$$\langle X(b), w \rangle = 0.$$

Seja $v_q := \dot{\gamma}(b) \in \mathcal{C}$. Usaremos as notações abreviadas $w^\top := \mathcal{P}(v_q) \cdot w$ e $w^\perp := \mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot w$, de modo que $w = w^\top + w^\perp$.

Tomemos $P \in H^1(S_\gamma)$ solução de:

$$\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P + \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot A^*(\dot{\gamma}) \cdot P = 0, \quad (4.2)$$

com condição inicial $P(b) = w^\perp$. Note que, tomando um referencial em S_γ de classe H^1 , esta equação se reduz a uma EDO linear em \mathbb{R}^m , $m = \text{rk } W$, com coeficientes em L^2 , para a qual podemos aplicar o teorema de existência e unicidade.

Para todo $X \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a))$, temos:

$$\begin{aligned} \langle X(b)^\perp, w^\perp \rangle &= \int_a^b \frac{d}{dt} \langle X(t), P(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b \langle \nabla_t X, P \rangle + \langle X, \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P \rangle \stackrel{(4.2)}{=} \\ &= \int_a^b \langle \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t X, P \rangle + \langle X, -\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot A^*(\dot{\gamma}) \cdot P + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P \rangle = \\ &= \int_a^b \langle \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t X - A(\dot{\gamma}) \cdot X, P \rangle + \langle X, \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot A^*(\dot{\gamma}) \cdot P + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P \rangle \stackrel{(*)}{=} \\ &= \int_a^b \langle X, \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot A^*(\dot{\gamma}) \cdot P + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P \rangle, \end{aligned}$$

onde, na igualdade (*), usamos o fato de que $\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t X - A(\dot{\gamma}) \cdot X = 0$, pois $X \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a))$.

Então segue, para todo $X \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, \gamma(a))$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X(b), w \rangle = \\ &= \langle X(b)^\perp, w^\perp \rangle + \langle X(b)^\top, w^\top \rangle = \\ &= \langle X(b)^\top, w^\top \rangle + \int_a^b \langle X, \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot A^*(\dot{\gamma}) \cdot P + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Em particular, para todo $X \in \ker T_{a,b}^2$, temos:

$$\int_a^b \langle X, \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot A^*(\dot{\gamma}) \cdot P \rangle = 0. \quad (4.4)$$

Como $\ker T_{a,b}^2$ é denso em $\ker T_{a,b}^1$, pelo corolário (4.3), e como $\ker T_{a,b}^1$ é denso em $\ker T^1$ com a topologia de $L^2(\gamma^* TM)$, por continuidade a equação (4.4) vale para todo $X \in \ker T^1$, ou seja:

$$\langle \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot X, \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot A^*(\dot{\gamma}) \cdot P \rangle_{L^2(S_\gamma^\perp)} = 0, \quad (4.5)$$

para todo $X \in \ker T^1$.

Por outro lado, $\mathcal{P}(\dot{\gamma}) : \ker T^1 \rightarrow H^1(S_\gamma^\perp)$ é sobrejetiva; com efeito, dado $\xi \in H^1(S_\gamma^\perp)$, tome $X^\perp \in H^1(S_\gamma)$ solução do problema de Cauchy $\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t X^\perp - A(\dot{\gamma}) \cdot X^\perp = -\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t \xi + A(\dot{\gamma}) \cdot \xi$, com condição inicial inicial nula. Note que, usando um referencial em S_γ de classe H^1 , esta equação se reduz a uma EDO linear em \mathbb{R}^m , com coeficientes em L^2 . Então $(X^\perp + \xi) \in \ker T^1$, e $\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (X^\perp + \xi) = \xi$, donde a afirmação. Então, como $H^1(S_\gamma^\perp)$ é denso em $L^2(S_\gamma^\perp)$, segue de (4.5) que $\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t P + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot A^*(\dot{\gamma}) \cdot P = 0$. Portanto, de (4.3) conclui-se $w^\top = 0$, e de (4.2) segue que P é solução de (4.1). Como $w = w^\perp \neq 0$, temos $P \neq 0$, e assim chegamos a uma contradição. \square

A próximo teorema fornece uma caracterização das trajetórias normais do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) . Ou seja, $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ é uma trajetória normal se, e somente se, for solução da EDO implícita (4.6), para algum $P \in H^1(S_\gamma)$. Note que, quando $\mathcal{C} = TM$, para todo $v_q \in TM$ temos $C_{v_q}^\perp = \{0_q\}$, portanto a equação (4.6) é equivalente à equação de Euler-Lagrange (1.17). Por este motivo, a equação (4.6) é chamada de *equação de Euler-Lagrange com multiplicador de Lagrange P*.

Notação. Usaremos a notação $\mathbb{F}^\sharp L := g^\sharp \circ FL : TM \rightarrow TM$ e $\mathbb{P}^\sharp L := g^\sharp \circ PL : TM \rightarrow TM$, sendo $\text{Hor}(TM)$ a conexão de Levi-Civita de (M, g) .

TEOREMA F. *Seja $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) γ é uma trajetória normal de (M, L, \mathcal{C}) .
- (ii) Existe $P \in H^1(S_\gamma)$ tal que a seguinte equação é satisfeita:

$$\nabla_t \{\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma})\} - \mathbb{P}^\sharp L(\dot{\gamma}) = -A^*(\dot{\gamma}) \cdot P - \nabla_t P \quad (4.6)$$

Observação 4.4. (a) Note que, se γ for regular, segue do teorema (E) que, se $P \in H^1(S_\gamma)$ satisfazendo a condição (ii) existir, então P é único.

- (b) Numa série de artigos [26], [27] e [28], Kozlov propôs um formalismo variacional para a mecânica, a chamada mecânica vakonômica (“vak” é um acrônimo para Variational Axiomatic Kind), no qual as trajetórias são definidas pela imposição de que o funcional de Lagrange anule o conjunto das variações infinitesimais, no sentido clássico, compatíveis com o vínculo. No referido formalismo, problema da singularidade das trajetórias é contornado através de um relaxamento na definição das variações compatíveis com o vínculo (i.e., são tomadas variações que “satisfazem o vínculo a menos de ordem ϵ ”), e a equação que descreve as trajetórias vakonômicas coincide com a equação (4.6), no caso em que o vínculo \mathcal{C} assume a forma particular proposta por Kozlov.

Demonstração do teorema (F). (i) Suponha que $d\mathcal{L}(\gamma) \cdot \ker T_{a,b}^2 = \{\mathbb{O}\}$. Dado $X \in \ker T_{a,b}^2 \subset T_\gamma H^2(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, temos, pela equação (1.18):

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}(\gamma) \cdot X &= \int_a^b \mathbb{F}L(\dot{\gamma}(t)) \cdot \nabla_t X + \mathbb{P}L(\dot{\gamma}(t)) \cdot X(t) dt = \\ &= \int_a^b \langle \mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}(t)), \nabla_t X \rangle + \langle \mathbb{P}^\sharp L(\dot{\gamma}(t)), X(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como $\ker T_{a,b}^2$ é denso em $\ker T_{a,b}^1$, pelo corolário (4.3), por continuidade segue que a equação acima vale para todo $X \in \ker T_{a,b}^1$. Tome $W \in T_\gamma H^2(M, [a, b])$ e $U \in T_\gamma H^2(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ tais que :

- (a) $\nabla_t W = \mathbb{P}^\sharp L(\dot{\gamma})$;
- (b) $\nabla_t U = -\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) + W$;

O lema (4.3), com $X = \mathbb{P}^\sharp L(\dot{\gamma}(t))$ e $Y = -\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma})$, implica que U, W satisfazendo estas condições existem e são únicos. Então segue de (4.7) que, para todo $X \in \ker T_{a,b}^1$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \langle \mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) - W, \nabla_t X \rangle = \\ &= \int_a^b \langle -\nabla_t U, \nabla_t X \rangle = \\ &= -\langle U, X \rangle_{H^1} \end{aligned}$$

o que é equivalente a $U \in (\ker T_{a,b}^1)^\perp$. Como $T_{a,b}^1$ tem imagem fechada, pelo lema (4.2), segue que $\text{Im} (T_{a,b}^1)^* = (\ker T_{a,b}^1)^\perp$ (mostramos isto na demonstração do lema (4.5)). Então $U \in (\ker T_{a,b}^1)^\perp = \text{Im} (T_{a,b}^1)^*$, portanto existe $P \in L^2(S_\gamma)$ tal que $U = (T_{a,b}^1)^* \cdot P$.

Tome $L_P \in H^1(\gamma^*TM)$ e $K_P \in T_\gamma H^1(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, dados pelo corolário (4.2), de modo que $(T_{a,b}^1)^* \cdot P = K_P = U$. Tomando as derivadas covariantes de ambos os membros desta última equação, obtemos $-\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) + W = P - L_P$, ou, equivalentemente:

$$\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) + P = W + L_P \quad (4.8)$$

o que implica $P = \mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) - W + L_P \in H^1(\gamma^*TM)$. Tomando as derivadas covariantes de ambos os membros desta última equação, obtemos a equação (4.6).

(ii) Reciprocamente, assuma que existe $P \in H^1(S_\gamma)$ tal que a equação (4.6) seja satisfeita. Sejam U e W definidos como na parte (i), e definamos $Z \in H^1(\gamma^*TM)$ por:

$$Z := -\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) + W - P + L_P$$

Então a equação (4.6) implica que $\nabla_t Z = 0$, donde, para todo $X \in \ker T_{a,b}^1$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle \mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}), \nabla_t X \rangle + \langle \mathbb{P}^\sharp L(\dot{\gamma}), X(t) \rangle dt &= \int_a^b \langle \mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) - W, \nabla_t X \rangle = \\ &= \int_a^b \langle \mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) - W + Z, \nabla_t X \rangle = \\ &= \int_a^b \langle -P + L_P, \nabla_t X \rangle = \\ &= \int_a^b \langle -\nabla_t K_P, \nabla_t X \rangle = \\ &= -\underbrace{\langle (T_{a,b}^1)^* \cdot P, X \rangle_{\mathbb{H}^1}}_{\in (\ker T_{a,b}^1)^\perp} = 0 \end{aligned}$$

portanto $d\mathcal{L}(\gamma) \cdot \ker T_{a,b}^2 = \{\mathbb{O}\}$, como afirmado. \square

Observação 4.5. Se tivéssemos definido as trajetórias do sistema lagrangeano usando espaços de curvas C^1 , ao invés de H^2 , poderíamos repetir a demonstração acima até a equação (4.8). Neste ponto, teríamos $W \in C^1$, $L_P \in H^1$, o que nos permitiria concluir $\{\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) + P\} \in H^1$ e P contínua, e, tomando as derivadas covariantes de ambos os membros de (4.8), obteríamos a seguinte equação para as trajetórias normais na formulação C^1 :

$$\nabla_t \{\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) + P\} = \mathbb{P}^\sharp L(\dot{\gamma}) - A^*(\dot{\gamma}) \cdot P \quad (4.9)$$

Esta equação não é equivalente à equação (4.6); ou seja, a princípio, na formulação C^1 , poderiam existir trajetórias normais de classe C^1 que não são H^2 . No entanto, se for satisfeita a condição de regularidade (\mathcal{R}) — vide página 105, o fato de ser F dada por (4.11) um difeomorfismo local nos permitiria concluir que $\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) \in H^1$ e $P \in H^1$ se $\{\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) + P\} \in H^1$, de modo que poderíamos escrever $\nabla_t \{\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma}) + P\} = \nabla_t(\mathbb{F}^\sharp L(\dot{\gamma})) + \nabla_t P$. Neste caso, como na formulação H^2 , concluiríamos que a equação (4.9) definiria um campo de vetores diferenciável no fibrado W , portanto as trajetórias seriam todas C^∞ e as formulações coincidiriam.

Como corolário do teorema precedente, uma curva $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ é uma trajetória normal do sistema lagrangeano vinculado se, e somente se, a restrição de γ a qualquer intervalo fechado contido em $[a, b]$ também o for. Como no caso dos sistemas sem vínculo, isto nos motiva a estender a definição de trajetórias normais para curvas definidas em intervalos quaisquer:

DEFINIÇÃO 4.7. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva em M . Diz-se que γ é uma trajetória normal do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) se, para todo intervalo fechado $[a, b] \subset I$: (i) $\gamma|_{[a,b]} \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ e (ii) $\gamma|_{[a,b]}$ é trajetória normal de $(M, \mathcal{C}, [a, b])$ no sentido da definição (4.5).*

Como no caso dos sistemas sem vínculo, a equação de Euler-Lagrange com multiplicador (4.6) não define, em geral, um campo de vetores. Para que isto ocorra, é necessário impor uma condição de “regularidade” sobre a lagrangeana. Como é natural esperar, uma tal condição deve envolver propriedades geométricas do vínculo.

A fim de encontrar a referida condição de regularidade a ser imposta sobre a lagrangeana para que (4.6) defina um campo de vetores, note que:

- (1) dada $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C})$, a aplicação $P \in H^1(S_\gamma) \mapsto \lambda(\dot{\gamma}, P) \in H^1(W)_{\dot{\gamma}}$ é um isomorfismo linear contínuo, onde $H^1(W)_{\dot{\gamma}}$ denota a fibra do fibrado vetorial $(\pi_W \circ) : H^1(W) \rightarrow H^1(\mathcal{C})$ sobre $\dot{\gamma} \in H^1(\mathcal{C})$; assim, $P \in H^1(S_\gamma)$ se, e somente se, $\lambda(\dot{\gamma}, P) \in H^1(W)_{\dot{\gamma}}$.
- (2) dados $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C})$ e $P \in H^1(S_\gamma)$, seja $X := \lambda(\dot{\gamma}, P) \in H^1(W)_{\dot{\gamma}}$. Então a equação (4.6) é equivalente a:

$$\kappa \cdot \frac{T}{dt} \{ \mathbb{F}^\sharp L(\pi_W \circ X) + \kappa \circ X \} = -A^*(\pi_W \circ X) \cdot \kappa \cdot X + \mathbb{P}^\sharp L(\pi_W \circ X) \quad (4.10)$$

Isto nos motiva a definir:

$$\begin{aligned} F : W &\longrightarrow TM \\ X_{v_q} &\longmapsto \mathbb{F}^\sharp L(v_q) + \kappa \cdot X_{v_q} \end{aligned} \quad (4.11)$$

de modo que a equação (4.10) é equivalente a:

$$\kappa \cdot TF \cdot \frac{TX}{dt} = -A^*(\pi_W \circ X) \cdot \kappa \cdot X + \mathbb{P}^\sharp L(\pi_W \circ X) \quad (4.12)$$

e isto deixa claro qual é a condição de regularidade que precisamos impor:

Condição (\mathcal{R}) : A aplicação F dada por (4.11) é um difeomorfismo local.

Se a condição (\mathcal{R}) for satisfeita, o próximo teorema mostra que γ é uma trajetória normal do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) se, e somente se, γ for diferenciável e $\dot{\gamma}$ for a projeção em \mathcal{C} de uma curva integral de um campo de vetores diferenciável definido em W .

TEOREMA G. Se a condição (R) for satisfeita, existe um único campo de vetores diferenciável $X_H : W \rightarrow TW$ cujas curvas integrais são da forma $t \in (a, b) \subset \mathbb{R} \mapsto (\dot{\gamma}(t), X(t)) \in TW$, onde γ é uma curva em M compatível com \mathcal{C} , e tal que uma curva $(\dot{\gamma}, X)$ em W é uma curva integral de X_H se, e somente se, (γ, P) for solução de (4.6), onde $P := \kappa \circ X$.

DEFINIÇÃO 4.8. O campo de vetores X_H é chamado de campo de vetores variacional ou vakonômico do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) . O fluxo de X_H é chamado de fluxo variacional ou vakonômico de (M, L, \mathcal{C}) .

A notação X_H será justificada na próxima subseção, na qual provaremos que X_H é hamiltoniano com relação a uma certa forma simplética definida em W .

COROLÁRIO 4.4. Se a condição (R) for satisfeita, as trajetórias normais de (M, L, \mathcal{C}) são diferenciáveis (de classe C^∞).

Demonstração do teorema (G). (1) Assuma que X_H existe. Mostraremos que deve ser único. Sejam $X_{v_q} \in W$ e:

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma}, X) : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow W \\ t &\longmapsto (\dot{\gamma}(t), X(t)) \end{aligned}$$

uma curva integral de X_H tal que $(\dot{\gamma}(0), X(0)) = X_{v_q}$. Temos:

$$\begin{aligned} T_{\tau_M} \cdot T_{X_{v_q}} F \cdot X_H(X_{v_q}) &= \frac{T}{dt} \Big|_{t=0} \tau_M \circ F \circ (\dot{\gamma}(t), X(t)) = \\ &= \frac{T}{dt} \Big|_{t=0} \dot{\gamma}(t) = \\ &= v_q \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot T_{X_{v_q}} F \cdot X_H(X_{v_q}) &= \kappa \cdot T_{X_{v_q}} F \cdot (\ddot{\gamma}(0), \dot{X}(0)) \stackrel{\text{por (4.12)}}{=} \\ &= -A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}^\sharp L(v_q) \end{aligned} \quad (4.13)$$

e, como $T_{X_{v_q}} F$ é um isomorfismo linear, e pela arbitrariedade do $X_{v_q} \in W$ tomado, isto mostra que, se X_H existe, deve ser dado por, para todo $X_{v_q} \in W$:

$$X_H(X_{v_q}) = (T_{X_{v_q}} F)^{-1} \cdot \left(H_{F(X_{v_q})}(v_q) + \lambda_{F(X_{v_q})}(-A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}^\sharp L(v_q)) \right) \quad (4.14)$$

e está provada a unicidade.

(2) Seja X_H definido por (4.14). Então é claro que X_H é diferenciável, ou seja, $X_H \in \mathfrak{X}(W)$. Além disso, temos:

(i) Para todo $X_{v_q} \in W$:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \mathbb{T}\pi_W \cdot X_{\mathbb{H}}(X_{v_q}) &= \mathbb{T}(\tau_{\mathbb{M}} \circ F) \cdot X_{\mathbb{H}}(X_{v_q}) = \\ &= \mathbb{T}\tau_{\mathbb{M}} \cdot \mathbb{T}F \cdot X_{\mathbb{H}}(X_{v_q}) = \\ &= v_q = \pi_W(X_{v_q}) \end{aligned}$$

e isto mostra que as curvas integrais de $X_{\mathbb{H}}$ são da forma $(\dot{\gamma}, X)$, onde γ é uma curva em \mathbb{M} compatível com \mathcal{C} .

(ii) Sejam $(\dot{\gamma}, X)$ uma curva em W , com γ curva em \mathbb{M} compatível com \mathcal{C} , e $P := \kappa \circ X$. Então, pela equação (4.13), é claro que $(\dot{\gamma}, X)$ é curva integral de $X_{\mathbb{H}}$ se, e somente se, (γ, P) for solução da equação (4.6), i.e., uma trajetória normal do sistema lagrangeano vinculado. □

Denotemos por \mathcal{K} a restrição a W do conector do $\mathbb{T}\mathbb{M}$, i.e., $\mathcal{K} := \kappa|_W : W \rightarrow \mathbb{T}\mathbb{M}$, e seja $\text{Hor}(W)$ uma conexão no fibrado vetorial $\pi_W : W \rightarrow \mathcal{C}$, e κ_W o conector correspondente. A proposição a seguir fornece uma condição equivalente à condição (\mathcal{R}) :

PROPOSIÇÃO 4.1. *Seja $\mathcal{F} : W \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{T}\mathbb{M}, \mathbb{T}\mathbb{M})$ definida por, para todo $X_{v_q} \in W$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{X_{v_q}} : \mathbb{T}_q\mathbb{M} \cong C_{v_q} \oplus C_{v_q^\perp} &\longrightarrow \mathbb{T}_q\mathbb{M} \\ (w_q, s_q) &\longmapsto s_q + \mathbb{F}\mathbb{F}^\sharp L(v_q) \cdot w_q + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \lambda_{v_q} w_q \end{aligned}$$

Então a condição (\mathcal{R}) é satisfeita se, e somente se, $(\forall X_{v_q} \in W) \mathcal{F}_{X_{v_q}}$ é um isomorfismo linear.

Demonstração. Sejam $X_{v_q} \in W$ e $Z_{X_{v_q}} \in \mathbb{T}_{X_{v_q}}W$. Tome $\xi_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q}\mathcal{C}$ e $Y_{v_q} \in W_{v_q}$ tais que $Z_{X_{v_q}} = H_{X_{v_q}}^W(\xi_{v_q}) + \lambda_{X_{v_q}}^W(Y_{v_q})$. Temos:

$$\mathbb{T}\tau_{\mathbb{M}} \cdot \mathbb{T}F \cdot Z_{X_{v_q}} = \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \mathbb{T}\pi_W \cdot Z_{X_{v_q}} = \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \xi_{v_q} \quad (4.15)$$

e, tomando $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\dot{\gamma}(0) = \xi_{v_q}$ e X transporte ∇^W -paralelo de X_{v_q} ao longo de γ :

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \mathbb{T}F \cdot Z_{X_{v_q}} &= \mathbb{F}\mathbb{F}(X_{v_q}) \cdot Y_{v_q} + \mathbb{P}\mathbb{F}(X_{v_q}) \cdot \xi_{v_q} = \\ &= \mathbb{F}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot Y_{v_q} + \nabla_{t|t=0} \{ \mathbb{F}^\sharp L(\gamma) + \mathcal{K}(X) \} = \\ &= \kappa \cdot Y_{v_q} + \mathbb{F}\mathbb{F}^\sharp L(v_q) \cdot \kappa \cdot \xi_{v_q} + \mathbb{P}\mathbb{F}^\sharp L(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \xi_{v_q} + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \xi_{v_q} = \\ &= \kappa \cdot Y_{v_q} + \mathbb{F}\mathbb{F}^\sharp L(v_q) \cdot \kappa \cdot \xi_{v_q} + \mathbb{P}\mathbb{F}^\sharp L(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \xi_{v_q} + \\ &\quad + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \lambda_{v_q}(\kappa \cdot \xi_{v_q}) + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot H_{v_q}(\mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \xi_{v_q}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Assim, supondo que $\mathcal{F}_{X_{v_q}}$ é isomorfismo linear e $\text{TF} \cdot Z_{X_{v_q}} = 0$, temos $\text{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \xi_{v_q} = 0$ e:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \text{TF} \cdot Z_{X_{v_q}} &= \overbrace{\kappa \cdot Y_{v_q}}^{\in C_{v_q}^\perp} + \mathbb{F}\mathbb{F}^\sharp \text{L}(v_q) \cdot \overbrace{\kappa \cdot \xi_{v_q}}^{\in C_{v_q}} + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \lambda_{v_q}(\kappa \cdot \xi_{v_q}) = \\ &= \mathcal{F}_{X_{v_q}}(\kappa \cdot \xi_{v_q}, \kappa \cdot Y_{v_q}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

portanto $\kappa \cdot \xi_{v_q} = \kappa \cdot Y_{v_q} = 0$, donde $Z_{X_{v_q}} = 0$, o que mostra que $\text{T}_{X_{v_q}}\text{F}$ é isomorfismo linear. Como $X_{v_q} \in W$ foi tomado arbitrariamente, segue do teorema da função inversa que F é um difeomorfismo local, e está verificada a condição (\mathcal{R}) . A recíproca também decorre da equação (4.17). \square

Observação 4.6. (a) No caso em que $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ é um vínculo linear, se a lagrangeana for clássica, i.e., se $\text{L} = \text{K} - \text{V} \circ \tau_{\text{M}}$, temos $(\forall v_q \in \mathcal{D}) \mathbb{F}^\sharp \text{L}(v_q) = v_q$ e $W_{v_q} = \lambda_{v_q}(\mathcal{D}_q^\perp)$, de modo que:

$$\begin{aligned} \text{F} : W &\longrightarrow \text{TM} \equiv \mathcal{D} \oplus_{\text{M}} \mathcal{D}^\perp \\ X_{v_q} &\longmapsto v_q + \kappa \cdot X_{v_q} \end{aligned}$$

é um difeomorfismo (global), cuja inversa é dada por $v_q + s_q \in \mathcal{D}_q \oplus \mathcal{D}_q^\perp \mapsto \lambda_{v_q} s_q$.

Assim, identificando $W \equiv \text{TM}$ através deste difeomorfismo, e substituindo $A(v_q) = B_{\mathcal{D}}(v_q)$ e $\mathbb{F}^\sharp \text{L}(v_q) = -\text{grad V}(q)$ em (4.14), obtemos:

$$\begin{aligned} X_{\text{H}} : \text{TM} \equiv \mathcal{D} \oplus_{\text{M}} \mathcal{D}^\perp &\longrightarrow \text{T}(\text{TM}) \\ (v_q, s_q) &\longmapsto \text{H}_{v_q+s_q}(v_q) + \lambda_{v_q+s_q}(-B_{\mathcal{D}}(v_q))^* \cdot s_q - \text{grad V}(q) \end{aligned}$$

(b) A mesma demonstração da proposição (4.1) mostra que, se \mathcal{F} for um isomorfismo linear na seção nula de $\pi_W : W \rightarrow \mathcal{C}$, i.e., se $\mathcal{F}(\mathbb{O}_{v_q}) : \text{T}_q \text{M} \rightarrow \text{T}_q \text{M}$ for um isomorfismo linear, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, então F é um difeomorfismo local num aberto \mathcal{U} em torno da seção nula de W . O campo de vetores X_{H} fica bem definido, portanto, neste aberto \mathcal{U} , de modo que, se (γ, P) for solução de (4.6) tal que $\lambda(\dot{\gamma}, P) \in \mathcal{U}$, então $\lambda(\dot{\gamma}, P) \in \mathcal{U}$ é curva integral de X_{H} , e reciprocamente. Esta situação sempre ocorre quando a lagrangeana é clássica: com efeito, neste caso, temos $\mathbb{F}^\sharp \text{L} = \text{id}_{\text{TM}}$ e $(\forall v_q \in \mathcal{C}) \mathbb{P}\mathcal{K}(\mathbb{O}_{v_q}) = 0$, portanto $\mathcal{F}(\mathbb{O}_{v_q}) = \text{id}_{\text{T}_q \text{M}}$.

1.2. A estrutura simplética de W

Nesta subseção, assumiremos a validade da condição (\mathcal{R}) . Será mostrado que o campo variacional X_{H} é hamiltoniano, com relação a uma certa forma simplética em W .

DEFINIÇÃO 4.9. Seja $\omega_{\text{TM}} := (\mathfrak{g}^{\flat})^* \omega_0$ a forma simplética do TM, onde ω_0 é a forma simplética canônica do fibrado cotangente.

Definimos $\omega \in \Omega_2(W)$ por:

$$\omega := F^* \omega_{\text{TM}} \quad (4.18)$$

Como $F : W \rightarrow \text{TM}$ é um difeomorfismo local, ω é uma forma simplética em W . Também definimos:

$$\begin{aligned} \text{H} : W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X_{v_q} &\longmapsto \mathbb{F}\text{L}(v_q) \cdot v_q - \text{L}(v_q) + \langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle \end{aligned} \quad (4.19)$$

Observação 4.7. No caso em que a lagrangeana é clássica, temos $(\forall X_{v_q} \in W) \text{H}(X_{v_q}) = \frac{1}{2} \langle v_q, v_q \rangle + V(q) + \langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle$. Em particular, no caso de um vínculo linear $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, temos $(\forall X_{v_q} \in W) \langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle = 0$, portanto H dada por (4.19) coincide com a hamiltoniana que define as trajetórias variacionais normais — vide [30].

Como na subseção anterior, fixaremos uma conexão $\text{Hor}(W)$ no fibrado vetorial $\pi_W : W \rightarrow \mathcal{C}$, com correspondente conector κ_W .

TEOREMA H. Munindo W da forma simplética ω dada pela definição precedente, o campo variacional X_{H} coincide com o campo hamiltoniano induzido pela hamiltoniana H dada por (4.19).

Demonstração. (1) Calculemos $d\text{H}$. Dados $X_{v_q} \in W$ e $Z_{X_{v_q}} \in \mathbb{T}_{X_{v_q}}W$, seja $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \Upsilon(t) \in W$ uma curva diferenciável tal que $\dot{\Upsilon}(0) = Z_{X_{v_q}}$. Sejam ainda $\gamma := \pi_W \circ \Upsilon$, $Y_{v_q} := \kappa_W \cdot Z_{X_{v_q}} \in W_{v_q}$ e $\xi_{v_q} := \mathbb{T}\pi_W \cdot Z_{X_{v_q}} \in \mathbb{T}_{v_q}\mathcal{C}$. Temos:

$$\begin{aligned} d\text{H}(Z_{X_{v_q}}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \{ \mathbb{F}\text{L}(\gamma(t)) \cdot \gamma(t) - \text{L}(\gamma(t)) + \langle \kappa \cdot \Upsilon(t), \gamma(t) \rangle \} = \\ &= \mathbb{F}^2 \text{L}(v_q) \cdot (\kappa \cdot \xi_{v_q}, v_q) + \mathbb{P}\text{F}\text{L}(v_q) \cdot (\mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \xi_{v_q}, v_q) + \mathbb{F}\text{L}(v_q) \cdot \kappa \cdot \xi_{v_q} - \\ &\quad - \mathbb{F}\text{L}(v_q) \cdot \kappa \cdot \xi_{v_q} - \mathbb{P}\text{L}(v_q) \cdot \mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \xi_{v_q} + \\ &\quad + \underbrace{\langle \mathbb{F}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot Y_{v_q} + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \xi_{v_q}, v_q \rangle}_{=\kappa \cdot Y_{v_q}} + \langle \kappa \cdot X_{v_q}, \kappa \cdot \xi_{v_q} \rangle \end{aligned}$$

(2) Usando a expressão para ω_{TM} dada pelo corolário (1.2), temos, dados $X_{v_q} \in W$ e $Z_{X_{v_q}} \in \mathbb{T}_{X_{v_q}}W$, $Y_{v_q} := \kappa_W \cdot Z_{X_{v_q}} \in W_{v_q}$ e $\xi_{v_q} := \mathbb{T}\pi_W \cdot Z_{X_{v_q}} \in \mathbb{T}_{v_q}\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\omega(X_H(X_{v_q}), Z_{X_{v_q}}) &= \omega_{TM}(TF \cdot X_H(X_{v_q}), TF \cdot Z_{X_{v_q}}) = \\
&= \langle T\tau_M \cdot TF \cdot X_H(X_{v_q}), \kappa \cdot TF \cdot Z_{X_{v_q}} \rangle - \\
&\quad - \langle T\tau_M \cdot TF \cdot Z_{X_{v_q}}, \kappa \cdot TF \cdot X_H(X_{v_q}) \rangle \text{ por (4.14), (4.15), (4.16)} \\
&= \langle v_q, \kappa \cdot Y_{v_q} + \mathbb{F}\mathbb{F}^\sharp L(v_q) \cdot \kappa \cdot \xi_{v_q} + \mathbb{P}\mathbb{F}^\sharp L(v_q) \cdot T\pi_{\mathcal{E}} \cdot \xi_{v_q} + \\
&\quad + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \lambda_{v_q}(\kappa \cdot \xi_{v_q}) + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot H_{v_q}(T\pi_{\mathcal{E}} \cdot \xi_{v_q}) \rangle - \\
&\quad - \langle T\pi_{\mathcal{E}} \cdot \xi_{v_q}, -A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + \mathbb{P}^\sharp L(v_q) \rangle
\end{aligned}$$

(3) De (1) e (2) segue:

$$\begin{aligned}
dH(Z_{X_{v_q}}) - \omega(X_H(X_{v_q}), Z_{X_{v_q}}) &= \langle \kappa \cdot \xi_{v_q}, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle - \\
&\quad - \langle A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q}, T\pi_{\mathcal{E}} \cdot \xi_{v_q} \rangle = \\
&= \langle \mathcal{D}^\perp(v_q) \cdot \kappa \cdot \xi_{v_q} - A(v_q) \cdot T\pi_{\mathcal{E}} \cdot \xi_{v_q}, \kappa \cdot X_{v_q} \rangle = \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois $\xi_{v_q} \in T_{v_q}\mathcal{E}$ implica $\mathcal{D}^\perp(v_q) \cdot \kappa \cdot \xi_{v_q} - A(v_q) \cdot T\pi_{\mathcal{E}} \cdot \xi_{v_q} = 0$. Como $Z_{X_{v_q}} \in TW$ foi tomado arbitrariamente, isto conclui a demonstração. \square

1.2.1. Uma observação sobre o espaço de fase das trajetórias normais

O fibrado de projeção W , a hamiltoniana $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ e a estrutura simplética de W dependem do tensor métrico auxiliar g . Mostraremos a seguir que, se tomarmos o fibrado misto generalizado \mathcal{W} — vide definição (2.2) — como espaço de fase das trajetórias normais, ao invés do fibrado de projeção W , todos estes objetos ficam naturalmente definidos de forma independente do tensor métrico auxiliar.

Inicialmente, mostraremos que a condição de regularidade (\mathcal{R}) independe do tensor métrico. Com efeito, seja F^* a aplicação dada por:

$$\begin{aligned}
F^* : \mathcal{W} &\longrightarrow T^*M \\
\theta_{v_q} &\longmapsto \mathbb{F}L(v_q) + \lambda_{v_q}^* \cdot \theta_{v_q} \in T_q^*M
\end{aligned}$$

onde $\lambda_{v_q}^*$ é a transposta do levantamento vertical em v_q , $\lambda_{v_q} : T_qM \rightarrow T_{v_q}TM$.

Sejam $\mu : TM \rightarrow T^*M$ a transformação de Legendre induzida pelo tensor métrico, e $\tilde{\mu} : W \rightarrow \mathcal{W}$ dada por $X_{v_q} \mapsto \langle X_{v_q}, \cdot \rangle_{\text{Ver}_{v_q}(TM)} \circ P_W$. Então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
W & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \mathcal{W} \\
F \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F^* \\
TM & \xrightarrow{\mu} & T^*M
\end{array}$$

Como μ e $\tilde{\mu}$ são difeomorfismos, segue que F é um difeomorfismo local se, e somente se, F^* for um difeomorfismo local; a condição (\mathcal{R}) é, portanto, equivalente a ser F^* um difeomorfismo local, o que claramente independe do tensor métrico auxiliar.

Admitindo a validade da condição (\mathcal{R}) , podemos considerar em \mathcal{W} a forma simplética dada pelo *pull back* da forma simplética canônica do fibrado cotangente ω_0 pelo difeomorfismo local F^* . Note que esta estrutura simplética independe do tensor métrico auxiliar, i.e., depende apenas da lagrangeana L e do vínculo \mathcal{C} . Além disso, munindo \mathcal{W} desta estrutura simplética, e W da estrutura simplética anteriormente definida, é claro que $\tilde{\mu}$ é um symplectomorfismo. Tomando em \mathcal{W} a hamiltoniana dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta_{v_q} &\longmapsto \text{FL}(v_q) \cdot v_q - L(v_q) + \theta_{v_q} \cdot Z(v_q) \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $Z \in \mathfrak{X}(TM)$ é o campo de Liouville, i.e., dado por $v_q \mapsto \lambda_{v_q} v_q$, então temos $\mathcal{H} \circ \tilde{\mu} = H$, sendo H dada por (4.19). O campo hamiltoniano em \mathcal{W} induzido por \mathcal{H} é, portanto, $\tilde{\mu}$ -relacionado ao campo variacional X_H . Sendo $\tilde{\mu}$ um isomorfismo de fibrados vetoriais sobre $\text{id}_{\mathcal{C}}$, segue que as projeções em \mathcal{C} das curvas integrais do campo hamiltoniano em \mathcal{W} induzido pela hamiltoniana \mathcal{H} são as trajetórias normais do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) . E, como a hamiltoniana \mathcal{H} claramente independe do tensor métrico auxiliar, isto conclui a demonstração da seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 4.2. *Usando a notação acima, temos:*

- (i) *A condição de regularidade (\mathcal{R}) é equivalente a ser F^* um difeomorfismo local, e, portanto, independe do tensor métrico auxiliar g , i.e., depende apenas da lagrangeana L e do vínculo \mathcal{C} ;*
- (ii) *Admitindo (\mathcal{R}) , existem no fibrado misto generalizado \mathcal{W} uma estrutura simplética e uma hamiltoniana \mathcal{H} , que dependem apenas da lagrangeana L e do vínculo \mathcal{C} , e tais que as projeções em \mathcal{C} das curvas integrais do campo hamiltoniano induzido por \mathcal{H} são as trajetórias normais do sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) . Explicitamente, tomamos em \mathcal{W} a forma simplética dada pelo pull back por F^* da forma simplética canônica ω_0 do fibrado cotangente T^*M , e \mathcal{H} dada por (4.20).*

Como última observação, apontamos que, no caso de um vínculo linear $\mathcal{D} \subset TM$, o fibrado misto generalizado $\pi_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{D}$ é naturalmente isomorfo ao fibrado vetorial $\pi_1 : \mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}$, onde π_1 é a projeção no primeiro fator e $\mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}^0$ é o espaço total do fibrado misto $\mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}^0 \rightarrow M$. Com efeito, basta tomar o isomorfismo de fibrados vetoriais:

$$\begin{aligned} : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}^0 \\ \theta_{v_q} &\longmapsto (v_q, \theta_{v_q} \circ \lambda_{v_q}) \end{aligned}$$

Através deste isomorfismo, podemos identificar o fibrado misto $\mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}^0$ com o fibrado misto generalizado \mathcal{W} , e considerar, admitindo a condição de regularidade (\mathcal{R}) , o campo variacional definido no fibrado misto, como em [63]. É neste sentido que o objeto \mathcal{W} generaliza o fibrado misto $\mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}^0$, estando, pois justificada a nomenclatura utilizada.

1.3. A hessiana e os campos de Jacobi

Nesta seção, será estudado apenas o caso geodésico, i.e., será considerado um sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) com $L = K$, a energia cinética induzida pelo tensor métrico g . Será apresentada uma fórmula para a hessiana do funcional de Lagrange \mathcal{L} em curvas horizontais ao vínculo \mathcal{C} , regulares (i.e., pontos regulares da aplicação ponto final) e que sejam geodésicas normais (i.e., pontos críticos de \mathcal{L}). Assumindo-se a validade da condição (\mathcal{R}) , serão calculados os campos de Jacobi definidos pelo *fluxo variacional* (i.e., o fluxo do campo variacional X_H), e no teorema (I) será mostrado que o núcleo da hessiana é o conjunto dos campos de Jacobi obtidos por variações com extremos fixos. Note que, se não for válida a condição (\mathcal{R}) , os mesmos resultados desta seção se aplicam às geodésicas normais que são projeções de curvas integrais do campo variacional X_H definido no aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$, dado pela observação (4.6.b).

PROPOSIÇÃO 4.3 (FÓRMULA DA SEGUNDA VARIAÇÃO). *Seja $\gamma \in H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ uma curva regular e ponto crítico da restrição de \mathcal{L} a $H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$. Então a hessiana de \mathcal{L} em γ é dada por, para todo $J_1, J_2 \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$:*

$$\begin{aligned} \text{Hess } \mathcal{L}(\gamma) \cdot (J_1, J_2) = & \int_a^b \langle -\nabla_t^2 J_1 + R(\dot{\gamma}, J_1) \cdot \{\dot{\gamma} + P\} + \\ & + \nabla_t \{ \mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, P) + \mathbb{P}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, P) \} - \\ & - \mathbb{F}A^*(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, P) - \mathbb{P}A^*(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, P), J_2 \rangle dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde $P \in H^1(\gamma^*S)$ é tal que a equação (4.6) é satisfeita (P é único, pela observação (4.4)), e R é o tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita de (M, g) .

Demonstração. (i) Seja:

$$\begin{aligned} w : \quad (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) & \longrightarrow H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b)) \\ (u, s) & \longmapsto w_{u,s} \end{aligned}$$

diferenciável, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{T}{\partial u} \Big|_{u,s=0} w_{u,s} &= J_1 \\ \frac{T}{\partial s} \Big|_{u,s=0} w_{u,s} &= J_2 \end{aligned}$$

Como $(\forall (u, s) \in (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)) \frac{T}{\partial s} w_{u,s} \in T_{w_{u,s}} H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, temos:

$$\mathcal{P}^\perp(\dot{w}_{u,s}) \cdot \nabla_t \frac{T w_{u,s}}{\partial s} - A(\dot{w}_{u,s}) \frac{T w_{u,s}}{\partial s} = 0$$

e, tomando $\nabla_{u|u=0}$ em ambos os membros desta última equação, segue, em $s = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{u|u=0} \mathcal{P}^\perp(\dot{w}_{u,0})) \cdot \nabla_t J_2 + \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_{u|u=0} \nabla_t \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} - \\ &\quad - (\nabla_{u|u=0} A(\dot{w}_{u,0})) \cdot J_2 - A(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_{u|u=0} \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \\ &= \mathbb{F} \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, \nabla_t J_2) + \mathbb{P} \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, \nabla_t J_2) - \mathbb{F} A(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, J_2) - \\ &\quad - \mathbb{P} A(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, J_2) + \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_{u|u=0} \nabla_t \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} - A(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_{u|u=0} \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (4.22)$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{Hess } \mathcal{L}(\gamma)(J_1, J_2) &= \frac{T^2}{\partial u \partial s} \Big|_{u,s=0} \mathcal{L}(w_{u,s}) = \\ &= \frac{T^2}{\partial u \partial s} \Big|_{u,s=0} \int_a^b K(\dot{w}_{u,s}) dt = \\ &= \frac{T}{\partial u} \Big|_{u=0} \int_a^b \langle \dot{w}_{u,0}, \nabla_{s|s=0}(\dot{w}_{u,s}) \rangle dt = \\ &= \int_a^b \{ \langle \nabla_t J_1, \nabla_t J_2 \rangle + \langle \dot{\gamma}, \nabla_{u|u=0} \nabla_t \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} \rangle \} dt \stackrel{J(a)=J(b)=0}{=} \\ &= \int_a^b \{ -\langle \nabla_t^2 J_1, J_2 \rangle + \langle \dot{\gamma}, \nabla_{u|u=0} \nabla_t \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} \rangle \} dt \end{aligned} \quad (4.23)$$

(iii)

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle \dot{\gamma}, \nabla_{u|u=0} \nabla_t \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} \rangle dt &= \int_a^b \{ \langle \nabla_t \nabla_{u|u=0} \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{\gamma} \rangle + \langle R(J_1, \dot{\gamma}) \cdot J_2, \dot{\gamma} \rangle \} dt = \\ &= \int_a^b \{ -\langle \nabla_{u|u=0} \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0}, \nabla_t \dot{\gamma} \rangle + \langle R(J_1, \dot{\gamma}) J_2, \dot{\gamma} \rangle \} dt + \\ &\quad + \langle \nabla_{u|u=0} \frac{T w_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{\gamma} \rangle \Big|_a^b \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como $w_{u,s}(a) = cte. = \gamma(a)$, temos $\frac{Tw_{u,s}}{\partial s}|_{s=0}(a) \equiv 0$, logo $\nabla_{u|u=0} \frac{Tw_{u,s}}{\partial s}|_{s=0}(a) = 0$. Analogamente, $\nabla_{u|u=0} \frac{Tw_{u,s}}{\partial s}|_{s=0}(b) = 0$, portanto segue das equações (4.24) e (4.6) que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left\langle \dot{\gamma}, \nabla_{u|u=0} \nabla_t \frac{Tw_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} \right\rangle dt &= \int_a^b \left\{ \left\langle \nabla_{u|u=0} \frac{Tw_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0}, A^*(\dot{\gamma}) \cdot P + \nabla_t P \right\rangle + \right. \\
&\quad \left. + \langle R(J_1, \dot{\gamma}) \cdot J_2, \dot{\gamma} \rangle \right\} dt = \\
&= \int_a^b \left\{ \langle R(J_1, \dot{\gamma}) \cdot J_2, \dot{\gamma} \rangle + \left\langle A(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_{u|u=0} \frac{Tw_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t \nabla_{u|u=0} \frac{Tw_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0}, P \right\rangle \right\} dt = \\
&= \int_a^b \left\{ \langle R(J_1, \dot{\gamma}) \cdot J_2, \dot{\gamma} \rangle + \left\langle A(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_{u|u=0} \frac{Tw_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_{u|u=0} \nabla_t \frac{Tw_{u,s}}{\partial s} \Big|_{s=0} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot R(\dot{\gamma}, J_1) \cdot J_2, P \right\rangle \right\} dt \stackrel{\text{por (4.22)}}{=} \\
&= \int_a^b \left\{ \langle R(J_1, \dot{\gamma}) \cdot J_2, \dot{\gamma} \rangle + \langle \mathbb{F}\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, \nabla_t J_2) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{P}\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, \nabla_t J_2) - \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{F}A(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, J_2) - \mathbb{P}A(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, J_2) - \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot R(\dot{\gamma}, J_1) \cdot J_2, P \right\} dt
\end{aligned} \tag{4.25}$$

(iv) Finalmente, das equações (4.23) e (4.25), e do lema (3.2), segue:

$$\begin{aligned}
\text{Hess } \mathcal{L}(\gamma)(J_1, J_2) &= \int_a^b \left\{ -\langle \nabla_t^2 J_1, J_2 \rangle + \right. \\
&\quad - \langle \mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, \nabla_t J_2) + \mathbb{P}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, \nabla_t J_2) + \\
&\quad + \mathbb{F}A(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, J_2) + \mathbb{P}A(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, J_2), P \rangle + \\
&\quad \left. + \langle R(J_1, \dot{\gamma}) \cdot J_2, \dot{\gamma} \rangle - \langle R(\dot{\gamma}, J_1) \cdot J_2, P \rangle \right\} dt
\end{aligned} \tag{4.26}$$

e, usando o fato de que, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $w_q \in T_q M$, $\{\mathbb{F}A(v_q) \cdot w_q\}^* = \mathbb{F}A^*(v_q) \cdot w_q$, $\{\mathbb{P}A(v_q)w_q\}^* = \mathbb{P}A^*(v_q) \cdot w_q$, e que $\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot w_q, \mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot w_q : T_q M \rightarrow T_q M$ são auto-adjuntas, obtém-se a equação (4.21). \square

A seguir, estudar-se-ão os campos de Jacobi associados ao fluxo variacional. Dada uma trajetória $X = \lambda(\dot{\gamma}, P)$ do campo variacional X_H , os campos de Jacobi ao longo de

X são as “variações infinitesimais” $\frac{TX_s}{ds}|_{s=0}$ de X obtidas por curvas integrais X_s de X_H . Ou, equivalentemente, podemos considerar variações infinitesimais $J = \frac{T}{ds}|_{s=0} \{\pi_{\mathcal{C}} \circ \pi_W \circ X_s\}$ de γ e $\xi = \frac{T}{ds}|_{s=0} \{\kappa \circ X_s\}$ de P . Mostraremos na proposição (4.5) que J, ξ são variações infinitesimais obtidas desta forma se, e somente se, satisfizerem a equações (4.27) e (4.28) da seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4.10 (CAMPOS DE JACOBI). *Sejam $X = \lambda(\dot{\gamma}, P) : [a, b] \rightarrow W$ uma curva integral do campo variacional $X_H \in \mathfrak{X}(W)$, e $J \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$. Dizemos que J é um campo de Jacobi com relação a (γ, P) se existir $\xi \in H^1(\gamma^*TM)$ tal que:*

$$0 = \nabla_t^2 J + R(J, \dot{\gamma}) \cdot \{\dot{\gamma} + P\} + \mathbb{F}A^*(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J, P) + \mathbb{P}A^*(\dot{\gamma}) \cdot (J, P) + A^*(\dot{\gamma}) \cdot \xi + \nabla_t \xi \quad (4.27)$$

e:

$$\mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J, P) + \mathbb{P}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (J, P) + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \xi = 0 \quad (4.28)$$

onde R é o tensor de curvatura de conexão de Levi-Civita de (M, g) .

Nestas condições, também se diz que o par (J, ξ) é um campo de Jacobi com relação a (γ, P) , e usar-se-á a seguinte notação:

$$\mathcal{J}_{(\gamma, P)} := \{J \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b]) \mid J \text{ campo de Jacobi com relação a } (\gamma, P)\}$$

Observação 4.8. É claro que $\mathcal{J}_{(\gamma, P)}$ é um subespaço vetorial de $T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$. Além disso, conforme mencionado na observação (4.4), se γ é uma curva regular, segue do teorema (E) que P é univocamente determinado por γ , ou seja, $P \in H^1(S_\gamma)$ é único tal que γ e P satisfazem a equação (4.6). Portanto, se este for o caso, podemos omitir o subscrito “ P ” da notação; além disso, neste caso também consideraremos o subespaço $\mathcal{J}_\gamma^{a,b} := \mathcal{J}_\gamma \cap T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$.

PROPOSIÇÃO 4.4. Usando a notação da definição precedente, sejam $J_0, J'_0, \xi_0 \in T_{\gamma(a)}M$ tais que:

$$\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}(a)) \cdot J'_0 - A(\dot{\gamma}(a)) \cdot J_0 = 0 \quad (4.29)$$

e:

$$\mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}(a)) \cdot (J'_0, P(a)) + \mathbb{P}\mathcal{P}(\dot{\gamma}(a)) \cdot (J_0, P(a)) + \mathcal{P}(\dot{\gamma}(a)) \cdot \xi_0 = 0 \quad (4.30)$$

Então existem e são únicos $J \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ e $\xi \in H^1(\gamma^*TM)$ satisfazendo as equações (4.27) e (4.28), e tais que $J(a) = J_0$, $\nabla_t|_{t=a} J = J'_0$ e $\xi(a) = \xi_0$. Além disso, J e ξ são C^∞ e dependem linearmente das condições iniciais J_0, J'_0 e ξ_0 .

Demonstração. Definamos a aplicação diferenciável $\phi : W \rightarrow L(\text{TM} \oplus_{\text{M}} \text{TM}, \text{TM} \oplus_{\text{M}} \text{TM})$ por, para todo $X_{v_q} \in W$:

$$\begin{aligned} \phi_{X_{v_q}} : \text{T}_q\text{M} \times \text{T}_q\text{M} &\longrightarrow \text{T}_q\text{M} \times \text{T}_q\text{M} \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, \mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot x + \mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (x, \kappa \cdot X_{v_q}) + \mathcal{P}(v_q) \cdot y) \end{aligned}$$

Usaremos o seguinte lema, que será provado subseqüentemente:

LEMA 4.6. *Para todo $X_{v_q} \in W$, $\phi_{X_{v_q}} : \text{T}_q\text{M} \times \text{T}_q\text{M} \rightarrow \text{T}_q\text{M} \times \text{T}_q\text{M}$ é um isomorfismo linear.*

Consideremos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} 0 = & \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t^2 J + \nabla_t \{ \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \} \cdot \nabla_t J - \nabla_t \{ A^*(\dot{\gamma}) \cdot J \} + \\ & + \nabla_t \{ \mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \} \cdot (\nabla_t J, P) + \mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t^2 J, P) + \mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J, \nabla_t P) + \\ & + \nabla_t \{ \mathbb{P}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (J, P) \} + \nabla_t \{ \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \} \cdot \xi + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t \xi \end{aligned} \quad (4.31)$$

Então, aplicando o lema, o fato de $\phi_{\lambda(\dot{\gamma}(t), P(t))}$ ser um isomorfismo linear, para todo $t \in [a, b]$, implica que as equações (4.27) e (4.31) podem ser escritas, usando um referencial paralelo em TM ao longo de γ , como uma EDO linear de primeira ordem, com coeficientes C^∞ , em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, onde $n = \dim M$. Ou seja, dados $J_0, J'_0, \xi_0 \in \text{T}_{\gamma(a)}M$, existem únicas seções C^∞ J, ξ de TM ao longo γ , que satisfazem as equações (4.27) e (4.31), e tais que $J(a) = J_0, \nabla_{t|t=a} J = J'_0$ e $\xi(a) = \xi_0$. Além disso, J e ξ dependem linearmente das condições iniciais, e, se forem verificadas as equações (4.29) e (4.30), então $J \in \text{T}_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ e ξ satisfaz (4.28). Para checar esta última afirmação, definamos:

$$\eta := \mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t J - A(\dot{\gamma}) \cdot J + \mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J, P) + \mathbb{P}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (J, P) + \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \xi \quad (4.32)$$

Então $\eta(a) = 0$ e $\nabla_t \eta = 0$, pela equação (4.31), portanto $\eta \equiv 0$. Aplicando $\mathcal{P}(\dot{\gamma})$ e $\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma})$ a ambos os membros da equação (4.32), e usando o lema (3.2), segue (4.28) e $\mathcal{P}^\perp(\dot{\gamma}) \cdot \nabla_t J - A(\dot{\gamma}) \cdot J = 0$, i.e., $J \in \text{T}_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$, como afirmado. \square

Prova do lema: Sejam $X_{v_q} \in W$, $x, y \in \text{T}_q\text{M}$, e suponhamos que $\phi_{X_{v_q}}(x, y) = 0$. Então $x + y = 0$ e $\mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot x + \mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (x, \kappa \cdot X_{v_q}) + \mathcal{P}(v_q) \cdot y = 0$; aplicando $\mathcal{P}(v_q)$ e $\mathcal{P}^\perp(v_q)$ a ambos os membros desta última equação, e usando o lema (3.2), segue $\mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot x = 0$, donde $x = -y \in C_{v_q}$, e:

$$\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (x, \kappa \cdot X_{v_q}) + \mathcal{P}(v_q) \cdot y = 0 \quad (4.33)$$

Por outro lado, o fato de que $(\forall X_{v_q} \in W) \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathcal{K}(X_{v_q}) = 0$ implica que $\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (x, \kappa \cdot X_{v_q}) = -\mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \lambda_{v_q}x$. Assim, a equação (4.33) é equivalente a:

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \lambda_{v_q}x + \mathcal{P}(v_q) \cdot y = \\ &= y + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \lambda_{v_q}y - \mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \lambda_{v_q}y = \\ &= \mathcal{F}_{X_{v_q}}(y, -\mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \lambda_{v_q}y) \end{aligned}$$

donde, pela proposição (4.1), $y = 0$, portanto $x = 0$. Como $X_{v_q} \in W$ foi tomado arbitrariamente, isto conclui a demonstração. \square

COROLÁRIO 4.5. $\mathcal{J}_{(\gamma, P)}$ é um subespaço vetorial de dimensão menor ou igual a $2n$ de $T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$, onde $n = \dim M$.

Demonstração. Basta notar que $\{(J, \xi) \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b]) \times H^1(\gamma^*TM) \mid (J, \xi) \text{ é campo de Jacobi com relação a } (\gamma, P)\}$ é um subespaço vetorial de dimensão $2n$ de $T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b]) \times H^1(\gamma^*TM)$, isomorfo ao espaço vetorial $\{J_0, J'_0, \xi_0 \in T_{\gamma(a)}M \mid \text{vale (4.29) e (4.30)}\}$, e que $\mathcal{J}_{(\gamma, P)}$ é a imagem deste subespaço pela projeção no primeiro fator $\pi_1 : T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b]) \times H^1(\gamma^*TM) \rightarrow T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$. \square

DEFINIÇÃO 4.11. Uma variação por geodésicas normais de (M, g, \mathcal{C}) é uma aplicação diferenciável $(s, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \mapsto \lambda(\dot{\gamma}_s(t), P_s(t)) \in W$ tal que, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\lambda(\dot{\gamma}_s, P_s)$ é uma curva integral do campo variacional X_H . Também chamamos a projeção em M de uma tal aplicação de variação por geodésicas normais.

PROPOSIÇÃO 4.5. Usando a notação da definição (4.10), dado $J \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$ e $\xi \in H^1(\gamma^*TM)$, então (J, ξ) é um campo de Jacobi com relação a (γ, P) se, e somente se, J e ξ são C^∞ e existe uma variação por geodésicas normais $\lambda(\dot{\gamma}_s, P_s)$ tal que $\dot{\gamma}_0 = \dot{\gamma}$, $P_0 = P$ e, para todo $t \in [a, b]$:

$$\frac{T}{ds} \Big|_{s=0} \gamma_s(t) = J(t)$$

e:

$$\kappa \cdot \frac{T}{ds} \Big|_{s=0} P_s(t) = \xi(t)$$

Demonstração. (1) Suponha que exista uma tal variação por geodésicas normais. Provaremos que (J, ξ) é um campo de Jacobi com respeito a (γ, P) .

Com efeito, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, temos:

$$\nabla_t \dot{\gamma}_s + \nabla_t P_s + A^*(\dot{\gamma}_s) \cdot P_s = 0$$

e:

$$\mathcal{P}(\dot{\gamma}_s) \cdot P_s = 0$$

e, tomando $\nabla_{s|s=0}$ em ambos os membros destas duas equações, obtemos as equações (4.27) e (4.28), respectivamente, logo (J, ξ) é um campo de Jacobi com relação a (γ, P) .

(2) Reciprocamente, suponhamos que (J, ξ) seja um campo de Jacobi com relação a (γ, P) .

Seja $X_{v_q} = \lambda(\dot{\gamma}(0), P(0)) \in W$, e definamos $Z_{X_{v_q}} \in T_{X_{v_q}}W$ por:

$$\begin{aligned} T\pi_{\mathcal{E}} \cdot T\pi_W \cdot Z_{X_{v_q}} &= J(a) \\ \kappa \cdot T\pi_W \cdot Z_{X_{v_q}} &= \nabla_{t|t=a} J \\ \mathbb{F}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \kappa_W \cdot Z_{X_{v_q}} + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot T\pi_W \cdot Z_{X_{v_q}} &= \xi(a) \end{aligned}$$

Denotemos por $(\phi_H^t)_t$ o fluxo do campo X_H , e tome $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow W$ tal que $c'(0) = Z_{X_{v_q}}$. Consideremos a seguinte variação por geodésicas normais: $s \in (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \mapsto \phi_H^t \cdot c(s) = \lambda(\dot{\gamma}_s(t), P_s(t)) \in W$. Seja $(\tilde{J}, \tilde{\xi})$ o campo de Jacobi induzido por esta variação por geodésicas normais. Pela construção, segue que $\tilde{J}(a) = J(a)$, $\nabla_{t|t=a} \tilde{J} = \nabla_{t|t=a} J$ e $\tilde{\xi}(a) = \xi(a)$. Então, pela unicidade estabelecida pela proposição (4.4), segue que $(\tilde{J}, \tilde{\xi}) = (J, \xi)$. □

A seguir, enunciaremos o resultado principal desta seção, segundo o qual o núcleo da hessiana do funcional de Lagrange numa geodésica normal regular coincide com o conjunto dos campos de Jacobi ao longo desta geodésica, gerados por variações com extremos fixos.

TEOREMA I. *Com a mesma notação da definição (4.10), se $\gamma \in H^2(M, \mathcal{E}, [a, b])$ é curva regular e geodésica normal de (M, g, \mathcal{E}) , então $\mathcal{J}_\gamma^{a,b} = \ker \text{Hess } \mathcal{L}(\gamma)$, ou seja, $J \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{E}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ é um campo de Jacobi com relação a (γ, P) se, e somente se, $J \in \ker \text{Hess } \mathcal{L}(\gamma)$.*

Demonstração. Com efeito, pela equação (4.21), temos, para todo $J_1, J_2 \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{E}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, $\text{Hess } (\gamma)(J_1, J_1) = \int_a^b \langle \chi_{J_1}, J_2 \rangle dt$, onde:

$$\begin{aligned} \chi_{J_1} &:= -\nabla_t^2 J_1 + R(\dot{\gamma}, J_1) \cdot \{\dot{\gamma} + P\} + \\ &\quad + \nabla_t \{ \mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, P) + \mathbb{P}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, P) \} - \\ &\quad - \mathbb{F}A^*(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, P) - \mathbb{P}A^*(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, P) \end{aligned}$$

(i) Suponha que $J_1 \in \ker \text{Hess } \mathcal{L}(\gamma)$, i.e., para todo $J_2 \in T_\gamma \text{H}^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b)) = \ker T_{a,b}^2$, tem-se:

$$\text{Hess } \mathcal{L}(\gamma)(J_1, J_2) = \int_a^b \langle \chi_{J_1}, J_2 \rangle dt = 0$$

Como $\ker T_{a,b}^2$ é denso em $\ker T_{a,b}^1$, pelo corolário (4.3), por continuidade esta última equação deve valer para todo $J_2 \in \ker T_{a,b}^1$.

Aplicando-se o lema (4.3), com $X = -\chi_{J_1}$ e $Y = 0$, conclui-se que existe um único $U \in \ker T_{a,b}^2 = T_\gamma \text{H}^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, tal que:

$$\nabla_t^2 U = -\chi_{J_1}$$

Então, para todo $J_2 \in \ker T_{a,b}^1$, tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \langle -\nabla_t^2 U, J_2 \rangle dt = \\ &= \int_a^b \langle \nabla_t U, \nabla_t J_2 \rangle = \\ &= \langle U, J_2 \rangle_{\text{H}^1} \end{aligned}$$

portanto, $U \in (\ker T_{a,b}^1)^\perp = \text{Im } (T_{a,b}^1)^*$, logo existe $\xi \in L^2(S_\gamma)$ tal que:

$$(T_{a,b}^1)^* \cdot \xi = K_\xi = -U$$

onde K_ξ, L_ξ são dados pelo corolário (4.2). Tomando as derivadas covariantes de ambos os membros desta última equação, obtemos $-\nabla_t U = \nabla_t K_\xi = \xi - L_\xi$, donde $\xi \in \text{H}^1(S_\gamma)$, pois $U \in T_\gamma \text{H}^2(M)$. Assim, tomando novamente derivadas covariantes na última equação, obtém-se:

$$\chi_{J_1} = -\nabla_t^2 U = A^*(\dot{\gamma}) \cdot \xi + \nabla_t \xi \quad (4.34)$$

Definindo-se $\xi' := \mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, P) + \mathbb{P}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, P)$, o fato de que $(\forall t \in [a, b]) P(t) \in C_\gamma^\perp$ e o lema (3.2) implicam $\xi' = \mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \xi' \in \text{Im } A(\dot{\gamma})^\perp$, de modo que $A^*(\dot{\gamma}) \cdot \xi' = 0$. Assim, segue da equação (4.34) que:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_t^2 J_1 + \text{R}(J_1, \dot{\gamma}) \cdot \{\dot{\gamma} + P\} + \mathbb{F}A^*(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, P) + \\ &\quad + \mathbb{P}A^*(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, P) + A^*(\dot{\gamma}) \cdot (\xi - \xi') + \nabla_t(\xi - \xi') \end{aligned}$$

o que mostra que a equação (4.27) é satisfeita para J_1 e $(\xi - \xi')$. Como $\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \xi = 0$, temos $\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\xi - \xi') = -\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot \xi' = -\xi' = -\mathbb{F}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\nabla_t J_1, P) - \mathbb{P}\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (J_1, P)$, o

que mostra que a equação (4.28) também é satisfeita para J_1 e $(\xi - \xi')$, portanto J_1 é um campo de Jacobi com respeito a (γ, P) .

(ii) Reciprocamente, suponha que (J_1, ξ) seja um campo de Jacobi com relação a (γ, P) . Então, para todo $J_2 \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, tem-se, pelas equações (4.21) e (4.27):

$$\text{Hess } \mathcal{L}(\gamma)(J_1, J_2) = \int_a^b \langle J_2, A^*(\dot{\gamma}) \cdot \xi + \nabla_t \xi + \nabla_t \xi' \rangle$$

onde ξ' é definido como na parte (i). Como $A^*(\dot{\gamma}) \cdot \xi' = 0$, e como $\mathcal{P}(\dot{\gamma}) \cdot (\xi + \xi') = 0$, pela equação (4.28), segue:

$$\begin{aligned} \text{Hess } \mathcal{L}(\gamma)(J_1, J_2) &= \int_a^b \langle J_2, \underbrace{A^*(\dot{\gamma}) \cdot (\xi + \xi')}_{\in H^1(S_\gamma)} + \nabla_t(\xi + \xi') \rangle \stackrel{\text{corolário (4.2)}}{=} \\ &= \int_a^b \langle J_2, \nabla_t^2 \{(T_{a,b}^1)^* \cdot (\xi + \xi')\} \rangle = \\ &= -\langle J_2, (T_{a,b}^1)^* \cdot (\xi + \xi') \rangle_{H^1} \stackrel{J_2 \in \ker T_{a,b}^2 \subset \ker T_{a,b}^1}{=} \\ &= 0 \end{aligned}$$

portanto, $J_1 \in \ker \text{Hess } \mathcal{L}(\gamma)$. □

COROLÁRIO 4.6. *Com a mesma hipótese, $\dim \ker \text{Hess } \mathcal{L}(\gamma) \leq n$, onde $n = \dim M$.*

Demonstração. Com efeito, basta observar que $\mathcal{J}_\gamma^{a,b} \subset \{J \in \mathcal{J}_\gamma \mid J(0) = 0\}$, $\{(J, \xi) \in T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b]) \times H^1(\gamma^* TM) \mid J(a) = 0 \text{ e } (J, \xi) \text{ é campo de Jacobi com relação a } (\gamma, P)\}$ é um subespaço vetorial de dimensão n de $T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b]) \times H^1(\gamma^* TM)$, isomorfo ao espaço vetorial $\{J_0, J'_0, \xi_0 \in T_{\gamma(a)} M \mid J_0 = 0 \text{ e vale (4.29) e (4.30)}\}$, e $\{J \in \mathcal{J}_\gamma \mid J(0) = 0\}$ é a imagem deste subespaço pela projeção no primeiro fator $\pi_1 : T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b]) \times H^1(\gamma^* TM) \rightarrow T_\gamma H^2(M, \mathcal{C}, [a, b])$. □

Observação 4.9. *No caso linear (exemplo 2.1.a), temos uma estimativa melhor, ou seja, $\dim \ker \text{Hess } \mathcal{L}(\gamma) \leq n - 1$. Com efeito, neste caso pode-se checar por um cálculo direto que $t \in [a, b] \mapsto (t - a)\dot{\gamma}(t)$ é um campo de Jacobi com relação a (γ, P) , que se anula em $t = a$, mas não em $t = b$ (note que, como γ é uma curva regular, não pode ser constante, portanto $\|\dot{\gamma}\| = \text{cte.} \neq 0$, donde $\dot{\gamma}(b) \neq 0$). Assim, a codimensão de $\mathcal{J}_\gamma^{a,b}$ em $\{J \in \mathcal{J}_\gamma \mid J(0) = 0\}$ é no mínimo 1, donde a afirmação.*

1.4. O tensor métrico de Jacobi

Dado um sistema mecânico (sem vínculos), no qual a força externa é dada por um potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$, (M, K, V) , é bem conhecido o “teorema de Jacobi”: dado $e > 0$ tal que $V < e$ em M , tal teorema permite, através da introdução de um tensor métrico conveniente em M (o tensor métrico de Jacobi g_e , vide definição (4.12), abaixo) reduzir o estudo das trajetórias de (M, K, V) com energia $K + V \circ \tau_M = cte. = e$ ao estudo das geodésicas da variedade riemanniana (M, g_e) com energia 1 — vide [1], por exemplo, e também [57] ou [55], onde mostramos uma extensão deste teorema para sistemas mecânicos com vínculos lineares.

DEFINIÇÃO 4.12. *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana, $V \in \mathfrak{F}(M)$ e $e > 0$ tal que, para todo $q \in M$, $V(q) < e$. O tensor métrico em M :*

$$g_e := (e - V)g$$

é chamado de tensor métrico de Jacobi, ou, simplesmente, de métrica de Jacobi.

Nesta seção, será apresentada uma extensão do referido teorema para sistemas lagrangeanos vinculados (M, L, \mathcal{C}) , com lagrangeana clássica $L = K - V \circ \tau_M$, e para sistemas mecânicos vinculados (M, K, V, \mathcal{C}) , no caso em que o vínculo \mathcal{C} é um cone.

Fixaremos, pois, um sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) , e um sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) , tais que:

- (a) a lagrangeana é clássica, dada por $L = K - V \circ \tau_M$;
- (b) o vínculo \mathcal{C} é um cone, isto é, satisfaz a seguinte condição: se $v_q \in \mathcal{C}$, então, para todo $t > 0$, $tv_q \in \mathcal{C}$. Em particular, \mathcal{C} é um vínculo que conserva energia, no sentido da definição (3.6), i.e., o campo de Liouville $Z \in \mathfrak{X}(TM)$ é tangente a \mathcal{C} ;
- (c) vale a condição (\mathcal{R}) , de forma que as trajetórias normais de (M, L, \mathcal{C}) são todas diferenciáveis.

Note que, pela condição (b), para todo $v_q \in \mathcal{C}$, temos $v_q \in C_{v_q}$. Com efeito, dado $v_q \in \mathcal{C}$, temos $Z(v_q) = \lambda_{v_q}(v_q) \in T_{v_q}\mathcal{C} \cap \text{Ver}_{v_q}(TM) = \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C})$, de modo que $v_q = \kappa \cdot Z(v_q) \in \kappa \cdot \text{Ver}_{v_q}(\mathcal{C}) = C_{v_q}$. Portanto, para todo $X_{v_q} \in W$, temos $\langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle = 0$, logo a hamiltoniana (4.19) que define as trajetórias normais de (M, L, \mathcal{C}) é dada por, para todo $X_{v_q} \in W$:

$$\begin{aligned} H(X_{v_q}) &= \mathbb{F}L(v_q) \cdot v_q - L(v_q) + \langle \kappa \cdot X_{v_q}, v_q \rangle = \\ &= K(v_q) + V(q) \end{aligned}$$

Dado $e > 0$, assumiremos $V < e$ em M , e consideraremos o tensor métrico de Jacobi $g_e := (e - V)g$ em M . Se não valer $V < e$ em M , as mesmas conclusões que obteremos nesta seção se aplicam se substituirmos M pela subvariedade aberta $N := V^{-1}(-\infty, e) \subset M$.

Usaremos a seguinte convenção: os objetos com índice “ e ” denotam o objeto correspondente com respeito à métrica de Jacobi. Por exemplo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_e := g_e(\cdot, \cdot)$, e assim por diante.

A seguir, serão apresentados alguns lemas que serão usados na demonstração do principal resultado desta seção, o teorema (J).

LEMA 4.7. *Seja $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ uma função absolutamente contínua não-decrescente, com $f(a) = c$, $f(b) = d$ e $\|f'\|_{L^\infty} < \infty$. Então a aplicação:*

$$(i) \quad \begin{array}{ccc} (\circ f) : & H^1(M, [c, d]) & \longrightarrow H^1(M, [a, b]) \\ & \gamma & \longmapsto \gamma \circ f \end{array}$$

está bem definida e é diferenciável.

(ii) *se f' é absolutamente contínua e $\|f''\|_{L^\infty} < \infty$, então a aplicação:*

$$(\circ f) : H^2(M, [c, d]) \rightarrow H^2(M, [a, b])$$

também está bem definida e é diferenciável.

Demonstração. (i) Primeiramente, provemos para $M = \mathbb{R}^n$.

(a) O fato de que f é absolutamente contínua não-decrescente implica (vide [51]) que, se $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável não-negativa, então $(g \circ f)f'$ é mensurável em $[a, b]$ e:

$$\int_c^d g(y) dy = \int_a^b g(f(x))f'(x) dx \quad (4.35)$$

logo, o mesmo vale para qualquer função integrável $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(b) Seja $\gamma \in H^1(\mathbb{R}^n, [c, d])$ e consideremos em $H^1(\mathbb{R}^n, [c, d])$ a norma $\|\gamma\|_{H^1} := \|\gamma(c)\| + \|\gamma'\|_{L^2}$.

Então segue da parte (a) que $\gamma \circ f$ é absolutamente contínua em $[a, b]$ e que, para todo $s \in [a, b]$:

$$(\gamma \circ f)'(s) = \gamma'(f(s))f'(s)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\gamma \circ f)'(s)^2 ds &= \int_a^b \gamma'(f(s))^2 f'(s)^2 ds \stackrel{f' \geq 0}{\leq} \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty} \int_a^b \gamma'(f(s))^2 f'(s) ds \stackrel{\gamma' \in L^2 \text{ e eq. (4.35)}}{=} \\
&= \|f'\|_{L^\infty} \int_c^d \gamma'(t)^2 dt = \\
&= \|f'\|_{L^\infty} \|\gamma'\|_{L^2}^2 \leq \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty} \|\gamma\|_{H^1}^2
\end{aligned} \tag{4.36}$$

o que mostra que $(\gamma \circ f)' \in L^2(\mathbb{R}^n, [a, b])$, donde $(\gamma \circ f) \in H^1(\mathbb{R}^n, [a, b])$ e $(\circ f)$ está bem definida.

(c) É claro que $(\circ f)$ é linear. Afirmamos que é contínua (portanto diferenciável). Com efeito, segue de (4.36) que, para toda $\gamma \in H^1(\mathbb{R}^n, [c, d])$:

$$\begin{aligned}
\|\gamma \circ f\|_{H^1} &= \|\gamma \circ f(a)\| + \|(\gamma \circ f)'\|_{L^2} \stackrel{\text{por (4.36)}}{\leq} \\
&\leq \|\gamma(c)\| + \sqrt{\|f'\|_{L^\infty}} \|\gamma\|_{H^1} \leq \\
&\leq (1 + \sqrt{\|f'\|_{L^\infty}}) \|\gamma\|_{H^1}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

portanto, $(\circ f)$ é linear contínua.

No caso geral, apliquemos o teorema de Whitney para mergulhar M em algum \mathbb{R}^N , para N suficientemente grande. Então, pela parte (1), a aplicação $(\circ f) : H^1(\mathbb{R}^N, [c, d]) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N, [a, b])$ é linear contínua. Como a imagem da subvariedade mergulhada $H^1(M, [c, d])$ por $(\circ f)$ está contida em $H^1(M, [a, b])$, segue que $(\circ f)|_{H^1(M, [c, d])} : H^1(M, [c, d]) \rightarrow H^1(M, [a, b])$ é diferenciável.

(ii) Como na parte (i), é suficiente provar o caso $M = \mathbb{R}^n$; o argumento usando o mergulho de Whitney também pode ser usado para provar o lema para M arbitrária, pois $H^2(M, [c, d])$ e $H^2(M, [a, b])$ são subvariedades mergulhadas de $H^2(\mathbb{R}^N, [c, d])$ e $H^2(\mathbb{R}^N, [a, b])$, respectivamente, se M é subvariedade mergulhada do \mathbb{R}^N .

Consideremos em $H^2(\mathbb{R}^n, [c, d])$ a norma $\|\gamma\|_{H^2} := \|\gamma(c)\| + \|\gamma'(c)\| + \|\gamma''\|_{L^2}$. Dada $\gamma \in H^2(\mathbb{R}^n, [c, d])$, temos:

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ f)'' &= (\gamma' \circ f \cdot f')' = \\
&= (\gamma' \circ f)' \cdot f' + (\gamma' \circ f) \cdot f''
\end{aligned}$$

quase sempre em $[a, b]$, portanto:

$$\begin{aligned}
\|(\gamma \circ f)''\|_{L^2} &\leq \|(\gamma' \circ f)' \cdot f'\|_{L^2} + \|(\gamma' \circ f) \cdot f''\|_{L^2} \leq \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty} \|(\gamma' \circ f)'\|_{L^2} + \|f''\|_{L^\infty} \|(\gamma' \circ f)\|_{L^2} \stackrel{\gamma' \in H^1 \text{ e (4.36)}}{\leq} \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty} \sqrt{\|f'\|_{L^\infty}} \|\gamma''\|_{L^2} + \|f''\|_{L^\infty} k \|(\gamma' \circ f)\|_{H^1} \stackrel{\gamma' \in H^1 \text{ e (4.37)}}{\leq} \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty}^{3/2} \|\gamma\|_{H^2} + \|f''\|_{L^\infty} k (1 + \sqrt{\|f'\|_{L^\infty}}) \|\gamma'\|_{H^1} \\
&\leq (\|f'\|_{L^\infty}^{3/2} + \tilde{k} \|f''\|_{L^\infty} (1 + \sqrt{\|f'\|_{L^\infty}})) \|\gamma\|_{H^2}
\end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned}
\|(\gamma \circ f)''\|_{H^2} &= \|\gamma \circ f(a)\| + \|\gamma'(f(a))f'(a)\| + \|(\gamma \circ f)''\|_{L^2} \leq \\
&\leq (1 + f'(a) + \|f'\|_{L^\infty}^{3/2} + \tilde{k} \|f''\|_{L^\infty} (1 + \sqrt{\|f'\|_{L^\infty}})) \|\gamma\|_{H^2}
\end{aligned}$$

e, como $\gamma \in H^2(\mathbb{R}^N, [c, d])$ foi tomada arbitrariamente, mostramos que $(\circ f) : H^2(\mathbb{R}^N, [a, b]) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^N, [c, d])$ está bem definida e é linear contínua, logo diferenciável, o que conclui a demonstração. \square

COROLÁRIO 4.7. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva absolutamente contínua, e suponha que existam constantes $\epsilon, M > 0$ tais que $\epsilon \leq \|\dot{\gamma}(t)\| \leq M$ para quase todo $t \in [a, b]$. Seja L o comprimento de γ e:*

$$\begin{aligned}
g_\gamma : [a, b] &\longrightarrow [0, L] \\
t &\longmapsto \int_a^t \|\dot{\gamma}\|
\end{aligned}$$

e seja também $f_\gamma := g_\gamma^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$. Então:

$$\begin{aligned}
(\circ f_\gamma) : H^1(M, [a, b]) &\longrightarrow H^1(M, [0, L]) \\
\zeta &\longmapsto \zeta \circ f_\gamma
\end{aligned}$$

é um difeomorfismo C^∞ , $(\circ f_\gamma)^{-1} = (\circ g_\gamma)$ e, para todo $X \in TH^1(M, [a, b])$:

$$T(\circ f_\gamma) \cdot X = X \circ f_\gamma$$

Demonstração. É claro que f_γ e g_γ são absolutamente contínuas não-decrescentes; além disso, as seguintes equações:

$$\dot{g}_\gamma(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

e:

$$f'_\gamma(s) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(f_\gamma(s))\|}$$

valem quase sempre, de modo que $\|g_\gamma\|_{L^\infty} \leq M$ e $\|f_\gamma\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\epsilon}$. Então segue da parte (i) do lema precedente que $(\circ f_\gamma)$ e $(\circ g_\gamma)$ estão bem definidas e são diferenciáveis, e é claro que $(\circ f_\gamma)^{-1} = (\circ g_\gamma)$.

Além disso, dado $X \in \text{TH}^1(\text{M}, [a, b])$, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \text{H}^1(\text{M}, [a, b])$ tal que:

$$\frac{T}{ds} \Big|_{s=0} \alpha_s = X$$

temos, para todo $t \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} \text{T}(\circ f_\gamma) \cdot X(t) &= \frac{T}{ds} \Big|_{s=0} (\alpha_s \circ f_\gamma)(t) = \\ &= \left(\frac{T}{ds} \Big|_{s=0} \alpha_s \right) (f_\gamma(t)) = \\ &= X \circ f_\gamma(t) \end{aligned}$$

□

COROLÁRIO 4.8. *Com a mesma hipótese e notação do corolário anterior, se $\dot{\gamma}$ é absolutamente contínua e se existe uma constante $K > 0$ tal que $\|\nabla_t \dot{\gamma}\|_{L^\infty} < K$ (onde $\nabla_t \dot{\gamma} = \kappa \cdot \ddot{\gamma}$ está bem definida a menos de um conjunto de medida nula), então $(\circ f_\gamma) : \text{H}^2(\text{M}, [a, b]) \rightarrow \text{H}^2(\text{M}, [0, L])$ é um difeomorfismo C^∞ , $(\circ f_\gamma)^{-1} = (\circ g_\gamma)$ e, para todo $X \in \text{TH}^2(\text{M}, [a, b])$ temos $\text{T}(\circ f_\gamma) \cdot X = X \circ f_\gamma$.*

Demonstração. Temos, para quase todo $t \in [a, b]$:

$$\ddot{g}_\gamma(t) = \frac{\langle \dot{\gamma}(t), \nabla_t \dot{\gamma} \rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

e, para quase todo $s \in [0, L]$:

$$f''_\gamma(s) = -\frac{\langle \dot{\gamma} \circ f_\gamma(s), \nabla_{t=f_\gamma(s)} \dot{\gamma} \rangle}{\|\dot{\gamma} \circ f_\gamma(s)\|^4}$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \|\ddot{g}_\gamma\|_{L^\infty} &= \|\nabla_t \dot{\gamma}\|_{L^\infty} \leq K \\ \|f''_\gamma\|_{L^\infty} &\leq \frac{K}{\epsilon^3} \end{aligned}$$

e concluímos a demonstração com uma aplicação do lema (4.7).(ii). □

LEMA 4.8. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável, tal que $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Então $(\circ f_\gamma) : H^2(M, [a, b]) \rightarrow H^2(M, [0, L])$ é um difeomorfismo C^∞ , $(\circ f_\gamma)^{-1} = (\circ g_\gamma)$ e, para todo $X \in TH^2(M, [a, b])$ temos $T(\circ f_\gamma) \cdot X = X \circ f_\gamma$. Além disso:*

(i) $T_\gamma(\circ f_\gamma)$ leva $\ker T_{a,b}^2$ isomorficamente sobre $\ker T_{0,L}^2$;

(ii) $T_\gamma(\circ f_\gamma)$ leva $H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ isomorficamente sobre $H^1(C_{\tilde{\gamma}'}, [0, L], \gamma(a), \gamma(b))$;

onde $T_{a,b}^2$ é dada pela definição (4.3), $H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ é dado pela equação (3.9), página 62, e $\tilde{\gamma}'$ é uma notação abreviada para $\frac{T\tilde{\gamma}}{ds}$.

Demonstração. Como $\dot{\gamma}$ e $\nabla_t \dot{\gamma}$ são contínuas e $[a, b]$ é compacto, existem constantes $\epsilon, M, K > 0$ tais que $\epsilon \leq \|\dot{\gamma}\|_{L^\infty} \leq M$ e $\|\nabla_t \dot{\gamma}\|_{L^\infty} \leq K$, logo γ satisfaz as hipóteses do corolário precedente.

A afirmação (i) segue do fato de que $\ker T_{a,b}^2$ e $\ker T_{0,L}^2$ são, respectivamente, os núcleos das aplicações tangentes em γ e $\tilde{\gamma}$, das aplicações ponto final:

$$\begin{aligned} ev_f &: H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a)) \rightarrow M \\ \tilde{ev}_f &: H^2(M, \mathcal{C}, [0, L], \gamma(a)) \rightarrow M \end{aligned}$$

definidas por $\zeta \mapsto \zeta(b)$ e $\zeta \mapsto \zeta(L)$, respectivamente.

Como $(\circ f_\gamma)$ leva a subvariedade mergulhada $H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a))$ de $H^2(M, [a, b])$ difeomorficamente sobre a subvariedade $H^2(M, \mathcal{C}, [0, L], \gamma(a))$ de $H^2(M, [0, L])$, e como $\tilde{ev}_1 \circ (\circ f) = ev_1$, concluímos que $T_\gamma(\circ f_\gamma)$ leva $\ker T_{a,b}^2$ isomorficamente sobre $\ker T_{0,L}^2$, como afirmado.

Verifiquemos a afirmação (ii). Dado $\eta \in T_\gamma H^1(M, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$, temos, por definição, $\eta \in H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ se, e somente se, $\eta(t) \in C_{\dot{\gamma}(t)}$ q.s. em $[a, b]$. Portanto, $\eta \in H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ se, e somente se, $\tilde{\eta} := T(\circ f_\gamma) \cdot \eta = \eta \circ f_\gamma$ satisfaz $\tilde{\eta}(s) = \eta \circ f_\gamma(s) \in C_{\dot{\gamma}(f_\gamma(s))}$ q.s. em $[0, L]$. Como, para todo $s \in [0, L]$, $\tilde{\gamma}'(s) = \dot{\gamma}(f_\gamma(s))f'_\gamma(s)$ e $f'_\gamma(s) > 0$, a demonstração estará concluída, pois, se provarmos que, para todo $v_q \in \mathcal{C}$ e para todo $t > 0$, $C_{v_q} = C_{tv_q} \subset T_q M$. Com efeito, dado $t > 0$, a hipótese de ser \mathcal{C} um cone garante que a aplicação:

$$\begin{aligned} \mu^t &: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \\ v_q &\longmapsto tv_q \end{aligned}$$

está bem definida e é um difeomorfismo C^∞ . Além disso, é claro que μ^t preserva fibras, ou seja, para todo $q \in M$, $\mu^t(\mathcal{C}_q) = \mathcal{C}_q$. Logo, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, temos $T\mu^t \cdot T_{v_q}(\mathcal{C}_q) = T_{tv_q}(\mathcal{C}_q)$, e, aplicando-se o conector κ_{TM} a ambos os membros desta última igualdade, conclui-se $C_{v_q} = C_{tv_q}$, como afirmado. \square

TEOREMA J. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável compatível com o vínculo, tal que $K(\dot{\gamma}) + V \circ \gamma = \text{cte.} = e$, e seja $\tilde{\gamma} : [0, L] \rightarrow M$ a reparametrização pelo comprimento de arco γ na métrica de Jacobi \mathbf{g}_e . Denote por K_e a energia cinética associada a \mathbf{g}_e . Então, temos:

- (i) γ é uma trajetória abnormal se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ é uma trajetória abnormal.
- (ii) γ é uma trajetória normal de (M, L, \mathcal{C}) se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica normal de $(M, \mathbf{g}_e, \mathcal{C})$.
- (iii) γ é uma trajetória de d'Alembert-Chetaev de (M, K, V, \mathcal{C}) se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ é uma trajetória de d'Alembert-Chetaev de $(M, K_e, 0, \mathcal{C})$.

Demonstração. (i) Seja:

$$g : [a, b] \longrightarrow [0, L] \\ t \longmapsto \int_a^t \sqrt{\mathbf{g}_e(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$$

Temos $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$, pois $V < e$ em M . Assim, podemos aplicar o lema (4.8) (usando o tensor métrico de Jacobi \mathbf{g}_e no lugar de \mathbf{g}) para concluir que, para $k \in \{1, 2\}$, $(\circ g) : H^k(M, [0, L]) \rightarrow H^k(M, [a, b])$ é um difeomorfismo C^∞ e $(\circ g)^{-1} = (\circ f)$ (onde $f := g^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$).

Consideremos as aplicações ponto final:

$$ev_1 : H^2(M, \mathcal{C}, [a, b], \gamma(a)) \rightarrow M \\ \tilde{ev}_1 : H^2(M, \mathcal{C}, [0, L], \gamma(a)) \rightarrow M$$

definidas por $\zeta \mapsto \zeta(b)$ e $\zeta \mapsto \zeta(L)$, respectivamente. Como $\tilde{ev}_f \circ (\circ f) = ev_f$, e como $(\circ f)$ é um difeomorfismo, concluímos que γ é um ponto crítico de ev_f se, e somente se $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f$ for um ponto crítico de \tilde{ev}_f .

(ii) e (iii) Definamos:

$$L_e : TM \longrightarrow \mathbb{R} \\ v_q \longmapsto \frac{1}{2} \mathbf{g}_e(v_q, v_q) = \frac{1}{2} (e - V(q)) \langle v_q, v_q \rangle$$

e seja $\mathcal{L}_e : H^2(M, [0, L]) \rightarrow \mathbb{R}$ o correspondente funcional de Lagrange.

Temos, para todo $s \in [0, L]$:

$$\begin{aligned} f'(s) &= \frac{1}{g'(f(s))} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}_e(\dot{\gamma}(f(s)), \dot{\gamma}(f(s)))}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{e - V(\gamma \circ f(s)) \|\dot{\gamma}(f(s))\|}} \end{aligned}$$

Como $K \circ \dot{\gamma} + V \circ \gamma = \text{cte.} = e$, segue que $\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{2} \sqrt{e - V \circ \gamma}$. Portanto, conclui-se a partir da última equação que, para todo $s \in [0, L]$:

$$f'(s) \frac{\langle \dot{\gamma}(f(s)), \dot{\gamma}(f(s)) \rangle}{2} = f'(s) (e - V(\gamma \circ f(s))) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.38)$$

Dado $J \in T_\gamma H^2(M, [a, b])$, temos:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}(\gamma) \cdot J &= \int_a^b \{ \langle \nabla_t J, \dot{\gamma}(t) \rangle - \langle \text{grad } V \circ \gamma(t), J(t) \rangle \} dt \stackrel{t=f(s)}{=} \\ &= \int_0^L \{ \langle \nabla_{t=f(s)} J, \dot{\gamma} \circ f(s) \rangle - \langle \text{grad } V \circ \gamma \circ f(s), J \circ f(s) \rangle \} f'(s) ds \stackrel{\text{por (4.38)}}{=} \\ &= \sqrt{2} \int_0^L \{ f'(s) (e - V(\gamma \circ f(s))) \langle \nabla_{t=f(s)} J, \dot{\gamma} \circ f(s) \rangle - \\ &\quad - f'(s) \frac{\langle \dot{\gamma}(f(s)), \dot{\gamma}(f(s)) \rangle}{2} \langle \text{grad } V \circ \gamma \circ f(s), J \circ f(s) \rangle \} f'(s) ds = \\ &= \sqrt{2} \int_0^L \{ (e - V(\gamma \circ f(s))) \langle f'(s) \nabla_{t=f(s)} J, f'(s) \dot{\gamma} \circ f(s) \rangle - \\ &\quad - \frac{\langle f'(s) \dot{\gamma}(f(s)), f'(s) \dot{\gamma}(f(s)) \rangle}{2} \langle \text{grad } V \circ \gamma \circ f(s), J \circ f(s) \rangle \} ds = \\ &= \sqrt{2} \int_0^L \{ (e - V(\tilde{\gamma}(s))) \langle \nabla_s \tilde{J}, \tilde{\gamma}'(s) \rangle - \\ &\quad - \frac{\langle \tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}'(s) \rangle}{2} \langle \text{grad } V \circ \tilde{\gamma}(s), \tilde{J}(s) \rangle \} ds = \\ &= \sqrt{2} d\mathcal{L}_e(\tilde{\gamma}) \cdot \tilde{J} \end{aligned}$$

onde $\tilde{J} = T_\gamma(\circ f) \cdot J \in T_{\tilde{\gamma}} H^2(M, [0, L])$.

Logo, como $T_\gamma(\circ f)$ leva $\ker T_{a,b}^2$ isomorficamente sobre $\ker T_{0,L}^2$, pelo lema (4.8), a última equação mostra que $d\mathcal{L}(\gamma) \cdot \ker T_{a,b}^2 = \{\mathbb{O}\}$ se, e somente se, $d\mathcal{L}_e(\tilde{\gamma}) \cdot \ker T_{0,L}^2 = \{\mathbb{O}\}$, donde γ é uma trajetória normal de (M, L, \mathcal{C}) se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ é uma trajetória normal de (M, L_e, \mathcal{C}) , o que demonstra a parte (ii). Analogamente, também pelo lema (4.8), $T_\gamma(\circ f_\gamma)$ leva $H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b))$ isomorficamente sobre $H^1(C_{\dot{\gamma}'}, [0, L], \gamma(a), \gamma(b))$, de modo que $d\mathcal{L}(\gamma) \cdot H^1(C_{\dot{\gamma}}, [a, b], \gamma(a), \gamma(b)) = \{\mathbb{O}\}$ se, e somente se, $d\mathcal{L}_e(\tilde{\gamma}) \cdot H^1(C_{\dot{\gamma}'}, [0, L], \gamma(a), \gamma(b)) = \{\mathbb{O}\}$, e pelo princípio de Hölder — vide teorema (B), segue que γ é uma trajetória de d'Alembert-Chetaev de (M, K, V, \mathcal{C}) se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ é uma trajetória de d'Alembert-Chetaev de $(M, K_e, 0, \mathcal{C})$, o que prova a parte (iii) e conclui a demonstração do teorema. \square

§2. TRAJETÓRIAS NORMAIS \times TRAJETÓRIAS D'ALEMBERTIANAS

Nesta seção, será fixado um sistema lagrangeano vinculado (M, L, \mathcal{C}) , com lagrangeana clássica $L = K - V \circ \tau_M$, e assumiremos a validade da condição (\mathcal{R}) . Obteremos uma condição necessária e suficiente para que as projeções em \mathcal{C} das curvas integrais do campo $X_H \in \mathfrak{X}(W)$ (i.e., as trajetórias normais de (M, L, \mathcal{C})) coincidam com as curvas integrais do campo GMA $X_\mathcal{C}$ de (M, K, V, \mathcal{C}) (i.e., as trajetórias de d'Alembert-Chetaev do sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C})). Ou, o que é equivalente, obtaremos uma condição necessária e suficiente para que o campo X_H seja π_W -relacionado ao campo $X_\mathcal{C}$. No caso linear, esta condição é equivalente à involutividade da distribuição \mathcal{D} — vide corolário (4.9)¹.

Além disso, também mostraremos que, se existir um campo de reações vinculares admissível $R_V \in \mathfrak{R}$ tal que X_H seja π_W -relacionado ao campo $X_\mathcal{C}(R_V)$, então R_V coincide com a reação R_V^A dada pelo princípio de d'Alembert-Chetaev, ou seja, $X_\mathcal{C}(R_V) = X_\mathcal{C}$.

Estes resultados estão condensados no seguinte teorema:

TEOREMA K. *Sejam (M, L, \mathcal{C}) um sistema lagrangeano vinculado, com lagrangeana clássica $L = K - V \circ \tau_M$, e R_V um campo de reações vinculares admissível para o sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{C}) . Então os campos $X_H \in \mathfrak{X}(W)$ e $X_\mathcal{C}(R_V) \in \mathfrak{X}(\mathcal{C})$ são π_W -relacionados se, e somente se $X_\mathcal{C}(R_V)$ coincidir com o campo GMA $X_\mathcal{C}$ e a seguinte condição for satisfeita:*

(C) *Para todo $X_{v_q} \in W$, temos:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(v_q) \cdot \{ A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} - \mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (-\mathcal{P}(v_q) \cdot \text{grad } V(q) + \\ + A(v_q) \cdot v_q, \kappa \cdot X_{v_q}) - \mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot (v_q, \kappa \cdot X_{v_q}) \} = 0 \end{aligned}$$

¹vide também [59].

Demonstração. (1) $X_H : W \rightarrow TW$ é definido por:

$$X_H(X_{v_q}) = (\mathbb{T}_{X_{v_q}} F)^{-1} \cdot \left(H_{F(X_{v_q})}(v_q) + \lambda_{F(X_{v_q})}(-A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} - \text{grad } V(q)) \right) \quad (4.39)$$

e:

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{C}}(R_V) : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{T}\mathcal{C} \\ v_q &\longmapsto S(v_q) + \lambda_{v_q}(-\text{grad } V(q) + R_V(v_q)) \end{aligned}$$

Note que, por (3.6), devemos ter, para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $\mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot R_V(v_q) = A(v_q) \cdot v_q + \mathcal{P}^\perp(v_q) \cdot \text{grad } V(q)$. Além disso, $X_{\mathcal{C}}(R_V) = X_{\mathcal{C}}$ se, e somente se, $\mathcal{P}(v_q) \cdot R_V(v_q) = 0$, para todo $v_q \in \mathcal{C}$.

(2) Suponhamos que, para todo $X_{v_q} \in W$:

$$\mathbb{T}\pi_W \cdot X_H(X_{v_q}) = X_{\mathcal{C}}(R_V)(v_q)$$

Dado $X_{v_q} \in W$, sejam $\xi_{v_q} \in \mathbb{T}_{v_q}\mathcal{C}$ e $Y_{v_q} \in W_{v_q}$ tais que $X_H(X_{v_q}) = H_{X_{v_q}}^W(\xi_{v_q}) + \lambda_{X_{v_q}}^W(Y_{v_q})$. Temos:

$$\xi_{v_q} = \mathbb{T}\pi_W \cdot X_H(X_{v_q}) = S(v_q) + \lambda_{v_q}(-\text{grad } V(q) + R_V(v_q))$$

e, por (4.16):

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \mathbb{T}F \cdot X_H(X_{v_q}) &= \kappa \cdot Y_{v_q} + \kappa \cdot \xi_{v_q} + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \xi_{v_q} = \\ &= \kappa \cdot Y_{v_q} - \text{grad } V(q) + R_V(v_q) + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \xi_{v_q} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Assim de (4.39) e (4.40), temos:

$$-A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} - \text{grad } V(q) = \kappa \cdot Y_{v_q} - \text{grad } V(q) + R_V(v_q) + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \xi_{v_q} \quad (4.41)$$

o que implica que:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{P}(v_q) \cdot \kappa \cdot Y_{v_q} = \\ &= -\mathcal{P}(v_q) \cdot \{A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + R_V(v_q) + \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \xi_{v_q}\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por outro lado, o fato de $(\forall X_{v_q} \in W) \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathcal{K}(X_{v_q}) = 0$ implica que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot \xi_{v_q} &= -\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (\kappa \cdot \xi_{v_q}, \kappa \cdot X_{v_q}) - \mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot (\mathbb{T}\pi_{\mathcal{C}} \cdot \xi_{v_q}, \kappa \cdot X_{v_q}) = \\ &= -\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (-\text{grad } V(q) + R_V(v_q), \kappa \cdot X_{v_q}) - \\ &\quad - \mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot (v_q, \kappa \cdot X_{v_q}) \end{aligned}$$

donde, por (4.42):

$$0 = -\mathcal{P}(v_q) \cdot \{A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + R_V(v_q) - \mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (-\text{grad } V(q) + R_V(v_q), \kappa \cdot X_{v_q}) - \mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot (v_q, \kappa \cdot X_{v_q})\} \quad (4.43)$$

e, como $X_{v_q} \in W$ foi tomado arbitrariamente, esta equação deve valer para todo $X_{v_q} \in W$. Em particular, deve valer para todo $\mathbb{O}_{v_q} \in W$, o que implica $\mathcal{P}(v_q) \cdot R_V(v_q) = 0$, para todo $v_q \in \mathcal{C}$ (ou seja, $R_V(v_q) = R_V^A(v_q)$ e $X_{\mathcal{C}}(R_V) = X_{\mathcal{C}}$), portanto a última equação é equivalente à condição (C).

(3) Reciprocamente, supondo que vale a condição (C), dado $X_{v_q} \in W$, seja $Z_{X_{v_q}} \in T_{X_{v_q}}W$ definido por:

$$T\pi_W \cdot Z_{X_{v_q}} = X_{\mathcal{C}}(v_q)$$

e:

$$\kappa \cdot \kappa_W \cdot Z_{X_{v_q}} = -\kappa \cdot X_{\mathcal{C}}(v_q) - \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot X_{\mathcal{C}}(v_q) - A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} - \text{grad } V(q)$$

Note que $\mathcal{P}(v_q) \cdot \kappa \cdot \kappa_W \cdot Z_{X_{v_q}} = -\mathcal{P}(v_q) \cdot \mathbb{P}\mathcal{K}(X_{v_q}) \cdot X_{\mathcal{C}}(v_q) - \mathcal{P}(v_q) \cdot A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} = 0$, pela condição (C), portanto $Z_{X_{v_q}}$ está bem definido. Além disso:

$$T\tau_M \cdot TF \cdot X_H(X_{v_q}) = v_q = T\tau_M \cdot TF \cdot Z_{X_{v_q}}$$

e, por (4.16):

$$\kappa \cdot TF \cdot X_H(X_{v_q}) = \kappa \cdot TF \cdot Z_{X_{v_q}}$$

Portanto, como $T_{X_{v_q}}F$ é um isomorfismo linear, as duas últimas equações mostram que:

$$X_H(X_{v_q}) = Z_{X_{v_q}}$$

donde $T\pi_W \cdot X_H(X_{v_q}) = X_{\mathcal{C}}(v_q)$, o que conclui a demonstração, pois $X_{v_q} \in W$ foi tomado arbitrariamente. \square

COROLÁRIO 4.9. *Sejam (M, L, \mathcal{D}) um sistema lagrangeano vinculado, com lagrangeana clássica $L = K - V \circ \tau_M$ e vínculo linear \mathcal{D} , e R_V um campo de reações vinculares admissível para o sistema mecânico vinculado (M, K, V, \mathcal{D}) . Então os campos $X_H \in \mathfrak{X}(W)$ e $X_{\mathcal{C}}(R_V) \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$ são π_W -relacionados se, e somente se $X_{\mathcal{C}}(R_V)$ coincidir com o campo GMA $X_{\mathcal{C}}$ e \mathcal{D} for uma distribuição involutiva.*

Demonstração. Neste caso, temos, para todo $v_q \in \mathcal{D}$, $W_{v_q} = \lambda_{v_q}(\mathcal{D}_q^\perp)$, e, conforme a observação (4.6), a condição (R) é satisfeita. Além disso, sendo $\mathcal{P}_{\mathcal{D}^\perp} : TM \rightarrow TM$ a projeção ortogonal em \mathcal{D}^\perp , temos, para todo $v_q \in \mathcal{D}$, $\mathcal{P}(v_q) = \mathcal{P}_{\mathcal{D}^\perp}|_{T_qM} : T_qM \rightarrow T_qM$,

portanto $\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) = 0$, ($\forall q \in M, v_q \in \mathcal{D}_q, w_q, z_q \in T_qM$) $\mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot (w_q, z_q) = B_{\mathcal{D}}(w_q, \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \cdot z_q) - B_{\mathcal{D}^\perp}(w_q, \mathcal{P}_{\mathcal{D}^\perp} \cdot z_q)$, e ($\forall v_q \in \mathcal{D}$) $A(v_q) = B_{\mathcal{D}}(v_q) : T_qM \rightarrow T_qM$. Assim, a condição (C) é equivalente a:

(C') Para todo $X_{v_q} \in W$:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \cdot \{B_{\mathcal{D}}^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} - B_{\mathcal{D}}(v_q, \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \cdot \kappa \cdot X_{v_q}) + B_{\mathcal{D}^\perp}(v_q, \mathcal{P}_{\mathcal{D}^\perp} \cdot \kappa \cdot X_{v_q})\} = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \cdot B_{\mathcal{D}}^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} + B_{\mathcal{D}^\perp}(v_q, \mathcal{P}_{\mathcal{D}^\perp} \cdot \kappa \cdot X_{v_q}) = 0$$

o que é equivalente a $B_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{D} \oplus_M \mathcal{D}}$ ser simétrica, ou seja, é equivalente à involutividade da distribuição \mathcal{D} . \square

COROLÁRIO 4.10. *Usando a mesma notação, se fixarmos (M, K, \mathcal{C}) , então $X_{\mathcal{C}}$ e X_H são π_W -relacionados para todos os potenciais $V \in \mathfrak{F}(M)$ se, e somente se, forem satisfeitas as duas seguintes condições, para todo $X_{v_q} \in W$:*

(C1) $\mathbb{F}\mathcal{P}(v_q)|_{C_{v_q}} = 0$

(C2) $\mathcal{P}(v_q) \cdot \{A^*(v_q) \cdot \kappa \cdot X_{v_q} - \mathbb{F}\mathcal{P}(v_q) \cdot (A(v_q) \cdot v_q, \kappa \cdot X_{v_q}) - \mathbb{P}\mathcal{P}(v_q) \cdot (v_q, \kappa \cdot X_{v_q})\} = 0$

Observação 4.10. No caso linear e no caso afim (exemplos 2.1.a,b), tem-se $\mathbb{F}\mathcal{P} \equiv 0$, de modo que a condição (C1) é trivialmente satisfeita e a condição (C2) é equivalente à condição (C), ou seja, os campos $X_{\mathcal{C}}$ e X_H são π_W -relacionados um dado potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$ se, e somente se, o forem para todos os potenciais $V \in \mathfrak{F}(M)$.

Exemplo 4.2. No caso afim (exemplo 2.1.b), a condição (C2) é equivalente à seguinte condição:

(C2') para todo $v_q \in \mathcal{C}$, $w_q \in \mathcal{D}_0$, tem-se:

$$-B_{\mathcal{D}_0}(w_q, v_q - X_a(q)) + B_{\mathcal{D}_0}(v_q, w_q) - \mathcal{P}_{\mathcal{D}_0^\perp} \cdot \nabla_{w_q} X_a = 0$$

Em particular, esta condição implica que, para todo $v_q, z_q \in \mathcal{C}$, $w_q \in \mathcal{D}_0$:

$$-B_{\mathcal{D}_0}(w_q, v_q - z_q) + B_{\mathcal{D}_0}(v_q - z_q, w_q) = 0$$

o que é equivalente a $B_{\mathcal{D}_0}|_{\mathcal{D}_0 \oplus_M \mathcal{D}_0}$ ser simétrica, ou seja, \mathcal{D}_0 é uma distribuição involutiva. Então segue de (C2') que, para todo $W \in \Gamma^\infty(\mathcal{D}_0)$, $\mathcal{P}_{\mathcal{D}_0^\perp} \cdot [W, X_a] = 0$, i.e., $[W, X_a] \in \Gamma^\infty(\mathcal{D}_0)$. Reciprocamente, se \mathcal{D}_0 for involutiva, e se, para todo $W \in \Gamma^\infty(\mathcal{D}_0)$, $[W, X_a] \in \Gamma^\infty(\mathcal{D}_0)$, é claro que a condição (C2') é satisfeita.

Assim, conclui-se que, no caso de um vínculo afim $\mathcal{C} = \mathcal{D}_0 + X_a$, os campos $X_{\mathcal{C}}$ e X_H são π_W -relacionados para um (e, portanto, para todos) dado potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$ se, e somente se, \mathcal{D}_0 for involutiva e X_a satisfizer a condição de que, para todo $W \in \Gamma^\infty(\mathcal{D}_0)$, $[W, X_a] \in \Gamma^\infty(\mathcal{D}_0)$.

Por exemplo, tome $M = \mathbb{R}^2$, (e_1, e_2) base canônica do \mathbb{R}^2 , $\mathcal{D}_0 : q \in M \mapsto [e_2] \subset T_q M = \mathbb{R}_q^2$, e $X_a : q \in M \mapsto e_1$. Este exemplo mostra que existem vínculos não-holônomos (i.e., que não são dados por distribuições completamente integráveis), nos quais as trajetórias variacionais e as de d'Alembert-Chetaev coincidem, para todo potencial $V \in \mathfrak{F}(M)$.

Conclusão

Esperamos, com a formulação e resultados expostos, ter feito uma contribuição, ainda que modesta, ao conhecimento que se tem sobre sistemas mecânicos e lagrangeanos vinculados.

Pensamos que seja oportuno concluir o trabalho com o registro de alguns problemas e possíveis desdobramentos sugeridos pela teoria aqui apresentada:

Tratamento de vínculos mais gerais. Não é difícil imaginar exemplos de vínculos fora do escopo do formalismo proposto. Por exemplo, em (2.1.f), modificamos o exemplo original, proposto por Benenti [7], removendo-se a seção nula \mathcal{O}_{TM} de $f^{-1}[\mathbb{R}_M]$, de modo a garantir que o vínculo \mathcal{C} seja uma subvariedade diferenciável do fibrado tangente TM . No exemplo original, i.e., sem remover os vértices dos cones, o vínculo \mathcal{C} é, em cada fibra, uma variedade algébrica. Para tratar vínculos como este é necessário estender o formalismo.

Teoria do controle ótimo. Um vínculo \mathcal{C} pode ser interpretado como um sistema de controle no espaço de configurações M , e o funcional ação \mathcal{L} como a “função custo” a ser minimizada. O estudo das propriedades minimizantes das trajetórias normais e abnormais é, portanto, objeto de interesse da teoria do controle ótimo.

Teoria de Morse. Os resultados da seção (1.3), capítulo 4 sugerem uma extensão da teoria do índice de Morse/Maslov para sistemas lagrangeanos com vínculos não lineares, como feito em [18], [46] e [50] no caso linear.

Geometria sub-riemanniana. A teoria apresentada no capítulo (4) sugere uma “geometria sub-riemanniana não-linear”. A questão que naturalmente se coloca é: no caso em que a lagrangeana é dada pela energia cinética induzida pelo tensor métrico da variedade riemanniana (M, g) , para quais tipos de vínculo e até que ponto poderíamos estender as técnicas e resultados da geometria sub-riemanniana?

Bibliografia

- [1] R. ABRAHAM AND J. E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, second ed., 1978.
- [2] R. ABRAHAM, J. E. MARSDEN, AND T. RATIU, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, no. 75 in Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, second ed., 1988.
- [3] P. APPELL, *Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 32 (1911), pp. 48–50.
- [4] —, *Traité de Mécanique Rationnelle—Tome II, Dynamique des systèmes. - Mécanique analytique*, Gauthier-Villars, Paris, sixth ed., 1941.
- [5] V. I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York, second ed., 1989.
- [6] V. I. ARNOLD, V. V. KOZLOV, AND A. I. NEISHTADT, *Dynamical Systems III*, vol. 3 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1988, ch. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, pp. 1–286.
- [7] S. BENENTI, *Geometrical aspects of the dynamics of non-holonomic systems*, Rendiconti del Seminario Matematico dell' Univivesità e del Politecnico di Torino, 54 (1996), pp. 203–212.
- [8] A. BLOCH, P. KRISHNAPRASAD, J. MARSDEN, AND R. MURRAY, *Nonholonomic mechanical systems and symmetry*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 136 (1996), pp. 21–99.
- [9] H. M. A. CASTRO AND W. M. OLIVA, *Poisson structures on the phase space of mechanical systems with constraint*, Resenhas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 3 (1997), pp. 85–92.

- [10] J. CORTÉS, M. DE LEÓN, D. M. DE DIEGO, AND S. MARTÍNEZ, *Geometric description of vakonomic and nonholonomic dynamics. comparison of solutions.*, preprint, (2001).
- [11] R. CUSHMAN, D. KEMPPAINEN, AND J. ŚNIATYCKI, *A classical particle with spin realized by reduction of a nonlinear nonholonomic constraint*, Reports on Mathematical Physics, 41 (1998), pp. 133–142.
- [12] P. DAZORD, *Mécanique hamiltonienne en présence de contraintes*, Illinois Journal of Mathematics, 38 (1994), pp. 148–175.
- [13] M. DE LEÓN, J. C. MARRERO, AND D. M. DE DIEGO, *Vakonomic mechanics versus non-holonomic mechanics: a unified geometrical approach*, Journal of Geometry and Physics, 35 (2000), pp. 126–144.
- [14] D. G. EBIN AND J. MARSDEN, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. of Math., 92 (1970), pp. 102–163.
- [15] J. EELLS, *A setting for global analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), pp. 751–807.
- [16] G. FUSCO AND W. M. OLIVA, *Dissipative systems with constraints*, Journal of Differential Equations, 63 (1986), pp. 362–388.
- [17] G. GALLAVOTTI AND D. RUELLE, *SRB states and nonequilibrium statistical mechanics close to equilibrium*, Communication in Mathematical Physics, 190 (1997), pp. 279–285.
- [18] R. GIAMBÓ, F. GIANNONI, P. PICCIONE, AND D. TAUSK, *Morse theory for normal geodesics in sub-Riemannian manifolds with codimension one distributions*, to appear in Topological Methods in Nonlinear Analysis, (2000).
- [19] C. GODBILLON, *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1969.
- [20] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Series in Physics, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, second ed., 1980.
- [21] E. HEBEY, *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999.

- [22] W. HOOVER, *Molecular Dynamics*, vol. 258 of Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [23] A. IBORT, M. DE LEÓN, G. MARMO, AND D. M. DE DIEGO, *Non-holonomic constrained systems as implicit differential equations*, preprint, (2001).
- [24] J. KLEIN, *Espaces variationnels et mécanique*, Annales de l'Institut Fourier, 12 (1962), pp. 1–124.
- [25] J. KOILLER, *Reduction of some classical non-holonomic systems with symmetry*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 118 (1992), pp. 113–148.
- [26] V. V. KOZLOV, *Dynamics of systems with non-integrable constraints. I*, Moscow University Mechanics Bulletin, 37 (1982), pp. 27–34.
- [27] —, *Dynamics of systems with non-integrable constraints. II*, Moscow University Mechanics Bulletin, 37 (1982), pp. 74–80.
- [28] —, *Dynamics of systems with non-integrable constraints. III*, Moscow University Mechanics Bulletin, 38 (1983), pp. 40–51.
- [29] I. KUPKA AND W. M. OLIVA, *Dissipative mechanical systems*, Resenhas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1 (1993), pp. 69–115.
- [30] —, *The non-holonomic mechanics*, Journal of Differential Equations, 169 (2001), pp. 169–189.
- [31] S. LANG, *Real and Functional Analysis*, vol. 142 of Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York, third ed., 1993.
- [32] —, *Differential and Riemannian Manifolds*, vol. 160 of Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York, third ed., 1995.
- [33] —, *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer-Verlag, 1999.
- [34] A. D. LEWIS, *The geometry of the Gibbs-Appell equations and Gauss's principle of least constraint*, Reports on Mathematical Physics, 38 (1996), pp. 11–28.
- [35] A. D. LEWIS AND R. M. MURRAY, *Variational principles for constrained systems: Theory and experiment*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 30 (1995), pp. 793–815.

- [36] C.-M. MARLE, *Reduction of constrained mechanical systems and stability of relative equilibria*, Communications in Mathematical Physics, 174 (1995), pp. 295–318.
- [37] —, *Kinematic and geometric constraints, servomechanisms and control of mechanical systems*, Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università e del Politecnico di Torino, 54(4) (1996), pp. 353–364.
- [38] —, *Various approaches to conservative and nonconservative nonholonomic systems*, Reports on Mathematical Physics, 42 (1998), pp. 211–229.
- [39] J. E. MARSDEN, *Lectures on Mechanics*, vol. 174 of London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [40] E. MASSA AND E. PAGANI, *Classical dynamics on non-holonomic systems: a geometric approach*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, physique théorique, 55 (1991), pp. 511–544.
- [41] J. I. NEIMARK AND N. A. FUFÁEV, *Dynamics of Nonholonomic Constraints*, vol. 33 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1972.
- [42] W. M. OLIVA, *Steady motions of lagrangian systems*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, 2 (1971), pp. 37–53.
- [43] —, *Geometric Mechanics*, vol. 1798 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2002.
- [44] R. S. PALAIS, *Foundations of Global Non-linear Analysis*, W. A. Benjamin, Inc., 1968.
- [45] L. A. PARS, *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann Educational Books, London, 1965.
- [46] P. PICCIONE AND D. TAUSK, *Constrained Lagrangians and degenerate Hamiltonians on manifolds: an index theorem*, Proceedings of the Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, IST, Lisbon (Portugal), June 26 to 30, 2000. Fields Institute Communications, 31 (2000), pp. 309–324.
- [47] —, *On the Banach differential structure for sets of maps on non-compact domains*, Journal of Nonlinear Analysis, 46 (2001), pp. 245–265.

- [48] —, *Variational aspects of the sub-Riemannian geodesic problem*, Journal of Geometry and Physics, 39 (2001), pp. 183–206.
- [49] —, *Lagrangian and Hamiltonian formalism for constrained variational problems*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 132A (2002), pp. 1417–1437.
- [50] —, *On the Maslov and the Morse index for constrained variational problems*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 81 (2002), pp. 403–437.
- [51] H. L. ROYDEN, *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York, 3rd ed., 1988.
- [52] D. RUELLE, *Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics*, Journal of Statistical Mechanics, 95 (1999), pp. 393–468.
- [53] S. SASAKI, *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*, The Tôhoku Mathematical Journal. Second Series., 10 (1958), pp. 338–354.
- [54] —, *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II*, The Tôhoku Mathematical Journal. Second Series., 14 (1962), pp. 146–155.
- [55] G. TERRA, *Estruturas de Lie-Poisson e Aplicações em Sistemas Mecânicos Vinculados*, MSc Thesis, Instituto de Matemática e Estatística, U.S.P., São Paulo, Brasil, 1999.
- [56] —, *On the differentiable manifold structure of some spaces of maps and applications to variational mechanics*, Resenhas IME-USP, 5 (2002), pp. 231–259.
- [57] G. TERRA AND M. H. KOBAYASHI, *On classical mechanical systems with non-linear constraints*, To appear, (2002).
- [58] —, *On the variational mechanics with non-linear constraints*, To appear, (2002).
- [59] A. J. VAN DER SCHAFT AND B. M. MASCHKE, *On the hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems*, Rep. Math. Phys., 34 (1994), pp. 225–233.
- [60] A. M. VERSHIK, *Classical and nonclassical dynamics with constraints*, Lect. Notes Math., 1108 (1984), pp. 278–301.
- [61] A. M. VERSHIK AND L. D. FADDEEV, *Differential geometry and lagrangian mechanics with constraints*, Sov. Phys. Dokl., 17 (1972), pp. 34–36.

- [62] ———, *Lagrangian mechanics in invariant form*, Sel. Math. Sov., 1 (1975), pp. 339–350.
- [63] A. M. VERSHIK AND V. Y. GERSHKOVICH, *Dynamical Systems VII*, vol. 16 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1994, ch. Non-Holonomic Dynamical Systems, Geometry of Distributions and Variational Problems, pp. 1–79.
- [64] R. W. WEBER, *Hamiltonian systems with constraints and their meaning in mechanics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 91 (1986), pp. 309–335.
- [65] E. T. WHITTAKER, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, UK, fourth ed., 1947.
- [66] M. P. WOJTKOWSKI, *Magnetic flows and Gaussian thermostats on manifolds of negative curvature*, Fundamenta Mathematicae, 163 (2000), pp. 177–191.

Índice

- aplicação
 - ponto final, 32
 - ponto inicial, 32
- campo
 - de forças externo, 26
 - de Jacobi
 - de X_H , 115
 - de Liouville, 63
 - de reações vinculares admissível, 56
 - de segunda ordem, 17
 - de segunda ordem em \mathcal{C} , 50
 - GMA, 27
 - de um sistema mecânico vinculado, 60
 - magnético, 27
 - vakonômico, 106
 - variacional, 106
- condição (\mathcal{R}), 105
- cone, 121
- cone num espaço vetorial, 46
- conector, 15
- conexão
 - flat, 17
 - num fibrado vetorial, 14
 - numa variedade diferenciável, 17
- curva
 - integral de base, 17
 - regular, 93
- derivada
 - covariante, 16
 - nas fibras, 18
 - em \mathcal{C} , 49
 - paralela, 18
 - em \mathcal{C} , 49
- energia
 - cinética, 13, 26, 29
 - potencial, 27, 29
- equação
 - de Euler-Lagrange, 35
 - com multiplicador, 102
 - de Newton, 26
- espaço
 - de configurações, 26
 - de fase das velocidades, 26
 - de fase dos momentos, 26
- fibrado
 - centauro, 47
 - de projeção, 47
 - misto, 48
 - generalizado, 47
- fluxo
 - d'Alembertiano, 60
 - de Anosov, 85
 - estritamente monótono, 86
 - hiperbólico, 85
 - vakonômico, 106
 - variacional, 106
- força de Lorentz, 27

- função de Gibbs-Appell, 61
- funcional de Lagrange, 32
- geodésica, 17
 - abnormal de (M, g, \mathcal{C}) , 93
 - normal de (M, g, \mathcal{C}) , 93
- graus de liberdade, 26
- lagrangeana, 29
 - dependente do tempo, 29
 - hiper-regular, 40
 - regular, 35
- levantamento
 - horizontal, 15
 - em \mathcal{C} , 48
 - vertical, 14
 - em \mathcal{C} , 48
- métrica
 - de Jacobi, 121
 - de Sasaki, 61
 - em \mathcal{C} , 69
- mecânica
 - vakonômica, 102
- princípio
 - de d'Alembert, 58
 - de Gauss da vinculação mínima, 59
 - de Hölder, 62
- sistema
 - lagrangeano, 29
 - vinculado, 91
- sistema mecânico
 - clássico, 25
 - livre, 26
 - vinculado, 55
- spray, 17
 - geodésico, 17
- subespaço das velocidades virtuais, 47
- subfibrado
 - horizontal, 14
 - de $T\mathcal{C}$, 47
 - vertical, 14
 - de $T\mathcal{C}$, 47
- tensor
 - de curvatura, 17
 - métrico de Jacobi, 121
 - métrico de Sasaki, 61
 - em *vinc*, 69
- trajetória
 - abnormal, 93
 - compatível com um vínculo, 41
 - de d'Alembert-Chetaev, 60
 - de um sistema lagrangeano, 35
 - física, 26
 - de um sistema mecânico vinculado, 57
 - horizontal a um vínculo, 41
 - normal, 105
 - vaKonômica, 102
- transformação
 - de Legendre, 24
- transporte paralelo, 16
- vínculo
 - afim, 44
 - linear, 44
 - que conserva energia, 65
 - totalmente geodésico, 82
- variação
 - por geodésicas normais, 117
- velocidade virtual, 47

