Alguns Aspectos de Controle Através da Geometria Diferencial e da Álgebra Diferencial

Carlos Juiti Watanabe

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de concentração: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli
Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva

– São Paulo, Fevereiro de 2004 –

Alguns aspectos de controle através da geometria diferencial e da álgebra diferencial

Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado devidademente
defendida e corrigida por
Carlos Juiti Watanabe
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, fevereiro de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva (Co-orientador) - POLI-USP
- Prof. Dr. Eduardo Nascimento Marcos - IME-USP
- Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Carlos Corrêa Filho - Faculdades SENAC
- Prof. Dr. Antonio Martins Neto - INPE.

Este trabalho recebeu apoio financeiro parcial da CAPES

Resumo

Os objetivos desse trabalho são mostrar a equivalência entre as definições de sistemas relativamente *flat* geométrica e algébrica, mostrar que em sistemas implícitos, quando considerados como *diffieties*, certas condições de regularidade de campos induzem condições suficientes para que a variedade obtida pelas restrições seja uma variedade imersa, dar uma definição de índice diferencial que generaliza a noção de índice diferencial clássico e além disso, mostrar que sob certas condições existem sistemas explícitos cujas soluções se aproximam das soluções de um sistema implícito.

Abstract

The aim of this work is to show that the algebraic definition of relative flatness is equivalent to geometric one, to show that when implicit systems are considered like diffieties, some regularity conditions of fields induce sufficent conditions to conclude that the restricted manifold obtained by restrictions is a immersed manifold, to rise a new differential index which generalizes the classical differential index notion, furthermore, to show that under certain conditions, there exists explicit systems whose solutions become close to the solutions of a implicit system.

Agradecimentos

Agradeço a todos que me incentivaram a fazer esse texto, em particular a D. Knuth, L. Lamport, R. Stallman, aos professores Pedro Aladar Tonelli, Paulo Sérgio Pereira da Silva pela orientação. Aos professores Angelo Barone-Netto, Manuel Valentim de Pera Garcia e Sônia Regina Garcia pelo apoio, aos meus paise todos os que não estão citados e que sabem que foram importantes na elaboração do trabalho.

Conteúdo

Introdução 9

Parte 1. Álgebra diferencial e sistemas de equações diferenciais 14

Introdução à teoria algébrica 15

Capítulo 1. Álgebra diferencial em teoria de controle 16
1. Sistemas de controle 17
2. Representação de estados e entrada 17
3. *Flatness* 18
4. *Flatness* relativo 18

Parte 2. Geometria diferencial e sistemas de equações diferenciais 20

Introdução à teoria geométrica 21
5. Geometria diferencial de dimensão infinita e sistemas de equações diferenciais 22
6. Representação de estados e entrada 24

Capítulo 2. Algoritmo da extensão dinâmica 30
1. Solubilidade 33
2. Representação canônica de estados de sistemas implícitos 36

Capítulo 3. Índice diferencial 37
1. Uma nova definição para o índice diferencial 37
2. Comparação entre o índice clássico e a nova definição 39

Capítulo 4. Soluções convergentes para a solução de um sistema implícito 42
1. Coordenadas especiais 42
2. Sistemas aproximativos 43

Capítulo 5. Conclusões 53

Apêndice A. Ideais diferenciais primos 54
1. Definições e notações gerais 54
2. Ranking 55
3. Conjuntos auto-reduzidos 55
4. O algoritmo de redução 56

Apêndice B. Álgebra diferencial 61
1. Derivações 61

2. Anéis diferenciais 63
3. Ideais radicais 65
4. Álgebras de Ritt 66
5. Teorema de Krull 66
6. Extensões de ideais primos 67
7. Um lema no anel de polinômios 68
8. Isomorfismos admissíveis 69

Apêndice C. Demonstração do lema 4 72

Referências 76

$\mathbf{N}$ representará o conjunto dos números naturais;
$\mathbf{Z}$ representará o conjunto dos números inteiros;
$\mathbf{Q}$ representará o conjunto dos números racionais;
$\mathbf{R}$ representará o conjunto dos números reais;
$\mathbf{R}^{n\times m}$ representará o conjunto das matrizes de n linhas e m colunas com entradas reais;
(z_1, z_2) representará $(z_1^T, z_2^T)^T$;
x representará $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, um vetor de funções ou uma coleção de funções;
$\{dx\}$ representará o conjunto $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$
Se $L \subset M$ onde M é um espaço métrico com distância $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ e $\mu \in M$, então $\mathrm{dist}(\mu, L) = \inf_{a\in L} \mathrm{dist}(\mu, a)$

Introdução

Nesta introdução faremos uma exposição sucinta das principais idéias existentes no restante do texto e de nossa pretensão a contribuições para o conhecimento científico.

É comum encontrarmos equações diferenciais provenientes da modelagem de processos químicos, problemas físicos, problemas de engenharia ou problemas puramente matemáticos. Essas equações podem ser transformadas em sistemas de equações diferenciais, que podem fazer parte de uma classe particular conhecida como sistemas de controle. São conhecidos por esse nome porque eles têm certos graus de liberdade que servem para modificar o comportamento de suas soluções, em geral, esses graus de liberdade são chamados de entradas e são denotadas por u, v, etc. As entradas formam um conjunto de variáveis maximalmente independentes e fisicamente essas variáveis podem assumir quaisquer valores.

Quando se fala em um sistema de controle existe um menor conjunto de variáveis que, juntamente com a entrada u e o tempo t, é capaz de descrever todo o sistema. Esse conjunto é conhecido como conjunto das variáveis de estado. Em geral, são essas variáveis de estado que encontramos quando integramos um sistema de controle. As equações que as variáveis de estado devem satisfazer, em geral, podem ser colocadas sob a forma

$$\dot{x} = f(x, u).$$

Para os sistemas de controle existem várias classificações tais como sistemas controláveis, observáveis, sistemas em malha aberta, sistemas em malha fechada que são conhecidas e estudadas pela literatura clássica [**Isi89, Oga97**].

Apesar de toda essa classificação, ainda existem outras, menos conhecidas, como os sistemas chamados *flat*, além disso, *flatness* é uma generalização de controlabilidade.

Sistemas *flat* são sistemas interessantes por serem sistemas fáceis de controlar e além disso, esses sistemas têm a propriedade de existir uma entrada $u(t)$ que provoca qualquer trajetória do sistema e também, na maioria das vezes, é possível encontrar facilmente a entrada $u(t)$ a partir da saída *flat*.

Um sistema será chamado *flat*, se o sistema possuir uma representação de estado (x, u) particular: $x = \varnothing$ e $u = y$, onde y é um conjunto de saídas. Assim como em [**FLMR95a**], se existirem funções $y(t)$ tais que $x(t) = x(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t))$, essas funções são chamadas saídas *flat*.[1]

Como conseqüências temos:

- Todas as soluções do sistema são parametrizadas por t, $y(t)$ e suas derivadas, além disso, não é necessário integrar uma equação diferencial.

[1]Como inicialmente o conjunto y é um conjunto de saídas, aqui se manteve o nome saída *flat*, apesar de y se tornar uma entrada.

- Dada a saída *flat* $y(t)$ existe uma entrada

$$u(t) = u(t, y(t), \ldots, y^{(k)}(t))$$

que, quando aplicada no sistema, produz a trajetória $x(t)$ desejada (princípio da entrada calculada).
- O sistema é linearizável por realimentação dinâmica (veja [**FLMR95a**]).

Diremos que um sistema S é relativamente *flat* em relação a S_1 se S for decomposto por dois subsistemas S_1 e S_2 no qual S_1 é *flat*.

Para estudar o problema de *flatness* ou *flatness* relativo, que é descobrir quando um sistema é *flat* ou relativamente *flat*, existem duas abordagens completamente distintas, a abordagem algébrica e a abordagem geométrica. Além disso, sistemas relativamente *flat* estão intimamente ligados com *flatness* de sistemas implícitos, como pode ser visto em [**PdSCF01**].

Na abordagem algébrica, um sistema de controle é uma extensão de corpos diferenciais finitamente gerada E/F. Neste caso, a variável tempo cuja derivada é unitária, pode ser adjuntada ao corpo de base F.

Além disso, as entradas nos sistemas devem ser diferencialmente algebricamente livres, ou seja, não pode haver dependência entre nenhuma entrada e suas derivadas. Dessa forma, podemos interpretar a entrada como uma base de transcendência diferencial de E/F. Denotaremos o corpo diferencial gerado por u por $F\langle u\rangle$.

O estado de um sistema de controle relativo a uma entrada u é uma base de transcendência algébrica de $E/F\langle u\rangle$. Isso é exemplificado no sistema de controle com coeficientes reais:

EXEMPLO 1. Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais: $\begin{cases} \dot{x} &= u_1 \\ \dot{u}_1 &= u_2 \end{cases}$

Nesse exemplo, podemos considerar u_1 como uma entrada e assim, como u_2 é a derivada de u_1, temos que a base de transcendência diferencial de $\mathbf{R}\langle x\rangle/\mathbf{R}$ é apenas u_1. Dessa forma, dada a entrada u_1, nossa variável de estado é apenas x, pois nenhuma combinação linear das potências de x pode gerar u_1.

Porém, podemos considerar u_2 como uma entrada, ou seja, como uma base de transcendência diferencial entre $\mathbf{R}\langle x\rangle/\mathbf{R}$ e neste caso u_1, que não depende de u_2 e de nenhuma de suas derivadas pois, afinal, u_1 é a integral de u_2, não faz parte da base de transcendência diferencial, mas claramente faz parte de uma base de transcendência algébrica de $\mathbf{R}\langle x\rangle/\mathbf{R}$, pois x e u_1 não estão algebricamente relacionadas.

Assim, fica claro que, em um sistema de equações diferenciais, para definir o que é um estado, devemos fixar uma entrada do sistema de controle.

Além disso, sistemas provenientes de modelagem de problemas físicos podem não ter uma única entrada, ou seja, elas podem ser escolhidas.[2]

As saídas serão quaisquer variáveis, ou melhor, elementos do corpo E.

Um subsistema é uma parte do sistema S/K que funciona como um sistema por si só. Assim podemos interpretar a decomposição de um sistema em subsistemas. Um sistema

[2]Um exemplo de que isso ocorre é o transformador que pode ter como entradas tensões de 110 V ou 220 V e caso a entrada seja 110 V o transformador tem saída de 220 V e caso a entrada seja de 220 V a saída é de 110 V.

S/K será decomposto pelos subsistemas S_1 e S_2 se $S = K(S_1, S_2)$. A interpretação algébrica de sistema é ser uma extensão de corpos diferenciais S/K.

Um sistema S/K é chamado sistema relativamente *flat* se existir uma extensão algébrica D/S tal que D contenha um conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tal que $D/K\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ seja algébrico.

Em geometria, as interpretações do significado de sistema de controle, de entrada, representação de estados e saídas são as seguintes:

Um sistema de controle é uma variedade de dimensão infinita (enumerável) munida com a topologia de Fréchet e com um campo chamado campo de Cartan. Essa variedade com essa topologia e esse campo é conhecida como *diffiety*.

A topologia de Fréchet é a topologia menos fina que torna as projeções da variedade em $\mathbf{R}^n$ funções contínuas e abertas.

O campo de Cartan é um campo vetorial que é obtido através do sistema de equações diferenciais, em geral representaremos o campo de Cartan por $\frac{d}{dt}$.

Uma entrada relativa a um sistema (nesse caso, um *diffiety*), juntamente com o estado é um sistema de coordenadas local

$$(t, x, u, \frac{d}{dt}u, \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}u), \ldots)$$

da variedade S.

A forma com que poderemos distinguir as variáveis de estado das entradas é através do campo de Cartan.

De forma bem grosseira, podemos dizer que as entradas devem seguir a seguinte equação: $\frac{d}{dt}u^{(k)} = u^{(k+1)}$, para todo $k \in \mathbf{N}$, onde $\frac{d}{dt}$ é o campo de Cartan e $\frac{d}{dt}u(t) = u^{(1)}(t)$, $\frac{d}{dt}u^{(1)}(t) = u^{(2)}(t)$, ..., e as representações de estados são as variáveis não temporais que restam quando se retira todas as variáveis de entrada.

O próximo exemplo pode mostrar melhor o motivo dessa definição:

EXEMPLO 2. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x(t), u(t)) \\ \dot{u}(t) & = & u^{(1)}(t), \\ \dot{u}^{(1)}(t) & = & u^{(2)}(t), \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Assim, a variedade que devemos considerar é $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, um sistema de coordenadas local pode ser $(t, x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots)$. O campo de Cartan será dado por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + f(x(t), u(t))\frac{\partial}{\partial x} + u^{(1)}\frac{\partial}{\partial u} + u^{(2)}\frac{\partial}{\partial u^{(1)}} + \cdots .$$

Observe que $\frac{d}{dt}u = u^{(1)}$ e que $\frac{d}{dt}u^{(k)} = u^{(k+1)}$ para todo $k \in \mathbf{N}$.

Desse modo podemos considerar u como entrada, ou também podemos considerar qualquer derivada de u como entrada[3], como já foi considerado na parte algébrica.

[3]Entenda-se qualquer derivada de u como $\frac{d^n}{dt^n}u$.

Observe também que obter uma solução do sistema acima, é obter uma solução para o sistema $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ onde x e u são vetores e f é uma função vetorial.

As saídas de um sistema de controle, quando considerado como *diffiety*, são funções definidas no *diffiety*.

Assim, como pode ser visto em **[CF02]** ou em **[PdSCF01]**, dados um sistema S e dois subsistemas (S_1, π_1) e (S_2, π_2) diremos que S será decomposto por S_1 e S_2 se em torno de algum ponto $\xi \in S$ existirem coordenadas locais (t, x_1) para S_1, (t, x_2) para S_2 e (t, x_1, x_2)[4] para S tais que $\pi_i(t, x_1, x_2) = (t, x_i)$ para $i = 1, 2$. Um sistema será chamado relativamente *flat* em relação a S_1 se existir um sistema *flat* S_2 tal que S é localmente decomposto por S_1 e S_2.

Assim, na primeira parte do trabalho, mostramos que as definições algébrica e geométrica de sistemas relativamente *flat* são equivalentes.

Na segunda parte do trabalho, estudamos sistemas implícitos. Um sistema é dito implícito se não estiver na forma de estado, ou seja, se as variáveis de estado não estiverem explicitadas.

EXEMPLO 3. Esse exemplo mostra um sistema que não está na forma de estado, mas as variáveis de estado podem ser facilmente explicitadas. $\begin{cases} 0 & = & \dot{x}_1 - u_1 \\ u_1^2 & = & 0 \end{cases}$

Observe que neste caso podemos explicitar facilmente as variáveis de estado e colocar na seguinte forma: $\begin{cases} \dot{x}_1 & = & u_1 \\ u_1^2 & = & 0 \end{cases}$

Como $u_1^2 = 0$ temos que $u_1 = 0$ e resolvemos facilmente esse sistema obtendo como estado uma constante.

EXEMPLO 4. Esse exemplo mostra um sistema que não está na forma de estado e além disso, as variáveis de estado não são facilmente explicitadas. $\begin{cases} \dot{x}\, e^{\dot{x}} & = & u_1 \\ u_1 - 1 & = & 0 \end{cases}$

Aqui a variável $\dot{x}$ não pode ser explicitada facilmente, o modo canônico de fazermos isso, é utilizar do teorema das funções implícitas, porém em sua aplicação, podemos ter alguns cálculos não efetivos.

Assim, observamos que um sistema implícito pode não ter solução única; além disso, explicitar uma solução ou até colocá-la na forma de estado pode ser difícil ou mesmo impossível, no sentido de não ser efetivo.

Estudando sistemas implícitos, foi possível melhorar um resultado de **[PdSCF01]** sobre variedades imersas. Demos uma condição sobre regularidade de certos campos definidos no *diffiety* (sistema implícito) que implicam as condições suficientes para concluir que a variedade gerada pelas restrições do sistema implícito é uma variedade imersa.

Uma medida da dificuldade de integração ou de tornar o sistema explícito é o índice diferencial, que chamaremos de índice diferencial clássico. O índice diferencial clássico, em geral, não pode ser aplicado aos sistemas implícitos pois em sua maioria são indeterminados ou subdeterminados.[5]

---

[4]Identificamos x_i com $x_i \circ \pi_i$.

[5]Isso significa que as soluções, ou não são únicas, ou dependem de alguns parâmetros (os controles).

Assim, através do algoritmo da extensão dinâmica daremos uma nova definição de índice diferencial que pode ser utilizado em sistemas implícitos (*diffieties*) e mostraremos que se um sistema implícito é completamente determinado, então as duas definições são equivalentes.

Além disso tudo, para um sistema implícito dado, mostraremos que é possível construir um sistema explícito cujas soluções convergem para as soluções do sistema implícito (solubilidade de sistemas implícitos). A principal idéia de solubilidade é mostrar que, sob certas condições, as trajetórias de um sistema implícito podem ser bem aproximadas por trajetórias de sistemas explícitos, no sentido que o erro cometido ao utilizar uma trajetória do sistema explícito em relação à trajetória do sistema implícito pode ser majorado.

Assim, nossos objetivos são:

(1) Mostrar que as definições algébrica e geométrica de sistemas relativamente *flat* são equivalentes;
(2) Melhorar um resultado sobre sistemas implícitos e variedades imersas, apresentado em [**PdSCF01**];
(3) Dar uma nova definição de índice diferencial, mostrando que essa nova definição estende a noção de índice diferencial clássico;
(4) Mostrar que as soluções dos sistemas implícitos podem ser aproximadas por soluções de sistemas explícitos.

O texto está dividido em duas partes, a primeira, cujo teor é essencialmente algébrico, faz a equivalência entre as definições algébrica e geométrica de sistemas relativamente *flat*. Caso o leitor sinta necessidade de se familiarizar mais com a linguagem ou queira ter um suporte maior sobre a álgebra diferencial, ele pode consultar os apêndices A e B. No apêndice A mostramos que ideais gerados por relações polinomiais que são obtidas através de sistemas de controle, a partir de sua forma estado, são ideais primos. E no apêndice B, fazemos uma pequena exposição sobre extensões de corpos diferenciais.

Uma segunda parte cujo teor é geométrico, tem quatro capítulos, uma introdução sobre a linguagem utilizada em teoria de controle e as definições utilizadas na geometria diferencial de dimensão infinita.

O primeiro capítulo dessa parte (capítulo 2) trata do assunto de solubilidade, na qual é apresentada uma melhora do resultado sobre variedades imersas feito em [**PdSCF01**].

O segundo capítulo (capítulo 3) trata da nova definição de índice diferencial. Fazemos uma pequena discussão sobre índice diferencial e sugerimos uma nova definição que para sistemas implícitos determinados coincide com a noção de índice dada, por exemplo, por Campbel [**Cam82**].

O terceiro capítulo (capítulo 4) trata de sistemas aproximativos; ou seja, dado um sistema implícito, construímos sistemas explícitos cujas soluções se aproximam de um sistema implícito.

O quarto capítulo (capítulo 5) traz algumas conclusões sobre as contribuições e eventuais problemas que podem ser pesquisados futuramente.

Parte 1

Álgebra diferencial e sistemas de equações diferenciais

Introdução à teoria algébrica

Apresentaremos aqui, uma breve recordação das principais definições utilizadas na teoria de corpos. Um corpo é uma tripla ordenada $(K, +, \cdot)$ na qual $+$ e $\cdot$ são operações que tornam $(K, +)$ um grupo abeliano e $(K - \{0\}, \cdot)$ também um grupo abeliano. Além disso há a relação entre essas duas operações dada por $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, conhecida como operação distributiva.

Um corpo $(K, +, \cdot)$ será chamado corpo diferencial se existir uma operação $'$ definida em K tal que $\begin{cases} (a+b)' = a' + b' \\ (a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'. \end{cases}$

Dado um corpo K, chamamos uma extensão de K qualquer corpo E tal que $K \subset E$. Neste caso, E será chamado extensão de K e K será chamado corpo de base. A notação utilizada para dizer que E é uma extensão de K é E/K.

Uma extensão E/K é considerada algébrica, se dado qualquer $\alpha \in E$, existe um polinômio $0 \neq p \in K[X]$ tal que $p(\alpha) = 0$, onde X é uma variável.

Uma extensão E/K é considerada transcendente, se existir pelo menos um $\alpha \in E$, tal que o único polinômio em $K[X]$ tal que $p(\alpha) = 0$ é o polinômio nulo.

Um conjunto $Y \subset E$ onde E é uma extensão de K é dito algebricamente livre sobre K se o único polinômio $p \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $p(Y) = 0$ é o polinômio nulo.

Uma base de transcendência algébrica B de uma extensão E/K é um conjunto maximal de elementos de E que tem a propriedade de ser algebricamente livre sobre K.

Um anel comutativo com unidade é uma tripla ordenada $(A, +, \cdot)$, onde A é um conjunto de elementos, $+$ é uma operação que torna $(A, +)$ um grupo abeliano e $(A - \{0\}, \cdot)$ é um semigrupo abeliano (em geral os elementos não têm inversos multiplicativos).

Um ideal $I \subset A$ onde A é um anel, é um conjunto de elementos de A que satisfazem duas propriedades: $\begin{cases} a \in I, b \in I \Longrightarrow a + b \in I; \\ a \in A \text{ e } b \in I \Longrightarrow a \cdot b \in I. \end{cases}$

Lembramos que $K[X_1, \ldots, X_n]$ é um anel, isto é, existem duas operações $+$ e $\cdot$ tais que $(K[X_1, \ldots, X_n], +)$ é um grupo abeliano e $(K[X_1, \ldots, X_n] - \{0\}, \cdot)$ é um semigrupo abeliano

Observamos que várias das definições aqui apresentadas são válidas, acrescentando a operação de diferenciação ao corpo. [6]

[6] Para maiores detalhes, veja o apêndice B.

CAPÍTULO 1

Álgebra diferencial em teoria de controle

Nesse capítulo apresentaremos como as estruturas de álgebra diferencial se relacionam com os conceitos de teoria de controle, como sistema, saída, entrada, subsistemas, sistemas *flat* e *flatness* relativo.

Será dada uma equivalência de *flatness* relativo e disjunção de subsistemas.

DEFINIÇÃO 1. Um anel diferencial $(k, +, \cdot)$ que tem estrutura de corpo será chamado de corpo diferencial.

Um corpo E/k é uma extensão diferencial se $E \supset k$ e as derivações em E são derivações em k. Seja E uma extensão diferencial de k e $X \subset E$ um subconjunto qualquer, denotaremos $k\{X\}$ o anel diferencial gerado por X e suas derivadas e $k\langle X\rangle$ o corpo de frações diferencial gerado por k, X e as derivadas de X **[Kap78]**.

Se X, U e Y são conjuntos de variáveis diferenciais livres e $J \subset k\{X, U, Y\}$ é um ideal primo, podemos denotar o corpo de frações do quociente do anel $k\{X, U, Y\}$ por J $F := Q(k\{X, U, Y\}/J)$. Esta é uma extensão de k.

Além disso, F é extensão diferencial de k que contém as raízes dos polinômios diferenciais contidos em J, em particular, dos geradores de J. Dessa forma, podemos fazer aplicações da teoria algébrica diferencial para estudar sistemas de equações diferenciais.

Em teoria de controle, a equação de estados é, normalmente, da forma

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x, u) & i = 1, \ldots, n \\ y_j = \phi_j(x, u) & j = 1, \ldots, r \end{cases}. \tag{1}$$

Para ilustrar como a álgebra diferencial pode nos auxiliar no estudo de alguns desses sistemas, vamos considerar o conjunto R de relações polinomiais

$$\begin{cases} \dot{X}_i - f_i(X, U) & i = 1, \ldots, n \\ Y_j - \phi_j(X, U) & j = 1, \ldots, r \end{cases}$$

que gera um ideal primo[1] e faremos a construção citada anteriormente. Em outras palavras, se $I = \{R\}$ (ideal radical minimal que contém R) então $K = k\{X, U, Y\}/I$ é um corpo.

Assim estudaremos algumas estruturas num anel/corpo que contém as raízes do sistema (1).

A aplicação que estudaremos será um estudo de equações da forma $\dot{x} = P(x, u)$, onde P é uma relação polinomial entre x, u e, eventualmente, as derivadas de u. Essas equações serão chamadas equações de estado.

[1] A demonstração desse fato foge um pouco ao escopo desta parte, assim, isso será feito no apêndice A.

1. Sistemas de controle

DEFINIÇÃO 2 (Extensão finitamente gerada). Diremos que uma extensão diferencial E/k é *finitamente gerada* se existir uma família finita $F \subset E$ tal que $E = k\langle F\rangle$.

DEFINIÇÃO 3 (Sistema de controle). Um *sistema de controle* é uma extensão diferencial, com a derivação $'$ definida em k, E/k finitamente gerada.

Por simplicidade, diremos apenas sistema ao nos referirmos a sistema de controle.

DEFINIÇÃO 4. Dizemos que um subconjunto Y de uma extensão E de k é algebricamente livre ou independente sobre k, se não existir um polinômio algébrico p não nulo com coeficientes em k, tal que $p(Y) = 0$.

DEFINIÇÃO 5. Um conjunto X é algebricamente independente sobre um corpo k se qualquer subconjunto $F \subset X$, F finito, tiver a seguinte propriedade:

Para todo $n \in \mathbf{N}$, $p \in k[x_1, \ldots, x_n]$ e $p(F) = 0$ implica $p \equiv 0$

2. Representação de estados e entrada

DEFINIÇÃO 6. Uma *base de transcendência diferencial* X de E sobre F é o maior conjunto de elementos de E que é diferencialmente algébricamente livre sobre $F[X]$.

DEFINIÇÃO 7 (Entrada). Uma *Entrada* (u) de um sistema é uma base de transcendência diferencial de E/k.

DEFINIÇÃO 8. Uma *base de transcendência algébrica* B de um conjunto E sobre F é o menor conjunto de E que é algebricamente livre ou algebricamente independente sobre $F[B]$.

DEFINIÇÃO 9 (Estado). Um *estado x relativo a uma entrada* (u) é uma base de transcendência algébrica de $E/k\langle u\rangle$.

EXEMPLO 5. Considere o sistema: $\dot{x} = x + u$ então uma entrada possível entrada é u e o estado correspondente a essa entrada é x.

Quando não houver perigo de ambigüidade, diremos apenas estado ao invés de estado relativa a uma entrada.

Seja E/k um sistema de controle; então dado qualquer elemento $a \in E$, a obedece a uma relação polinomial da seguinte forma:

$$p_a(a, x, u, \ldots, u^{(\alpha)}) = 0.$$

Se $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ então cada um dos elementos x_i de x obedece alguma relação polinomial da forma

$$p_i(\dot{x}_i, x, u, \ldots, u^{(\alpha_i)}) = 0.$$

Essas equações são chamadas equações de estado.

TEOREMA 1. *Se E/k é um sistema de controle e k tem característica zero então a dimensão do estado é finita, isto é, o número de elementos da base de transcendência algébrica é finito para qualquer entrada (u).*

DEMONSTRAÇÃO. v. [Sei52]. □

3. *Flatness*

DEFINIÇÃO 10. Um sistema E/k é chamado de sistema *flat* se existir uma família $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ contida em uma extensão *algébrica* D/E tal que y é uma base de transcendência diferencial de D/k e $D/k\langle y\rangle$ é *algébrico.*

Observe que um sistema *flat* é um sistema no qual não aparecem as variáveis de estado. Isto é, quando temos a saída *flat*, podemos escrever cada um dos elementos do estado, como uma função analítica das entradas e das saídas *flat*, ou seja, de alguns elementos que são diferencialmente algebricamente livres e das saídas *flat.* Assim, as variáveis essenciais que descrevem o sistema são as entradas e saídas *flat.*

DEFINIÇÃO 11 (Subsistema). Dado um sistema E/k, um *subsistema* de E/k é uma extensão S, de k que está contida em E e tal que S/k seja um sistema.

4. *Flatness* relativo

A seguir daremos uma série de definições que podem ser encontradas em **[FLMR95a]** que generalizam o exemplo 5.

DEFINIÇÃO 12 (*Flatness relativo*). Dado um subsistema S/k do sistema E/k, dizemos que E é *relativamente flat* com relação a S se E/S for *flat.*

DEFINIÇÃO 13 (Extensões algebricamente disjuntas). Dizemos que dois subsistemas E_1/k e E_2/k de um sistema E/k são *algebricamente disjuntos ou independentes* se para $L_1 \subset E_1$ e $L_2 \subset E_2$ algebricamente livres sobre k, então

(1) $L_1 \cap L_2 = \varnothing$;
(2) $L_1 \cup L_2$ é algebricamente livre sobre k.

DEFINIÇÃO 14 (Decomposição). Dizemos que E/k é *decomposto* pelos subsistemas E_1 e E_2 se os sistemas são algebricamente independentes sobre k e E é algébrico sobre $k\langle E_1, E_2\rangle$.

DEFINIÇÃO 15 (Saída). Uma *saída* de um sistema E/k é qualquer conjunto de elementos de E.

DEFINIÇÃO 16 (Saída flat). Uma saída y ($y \subset E$) de um sistema E/k é chamada *saída flat* se y for uma base de transcendência diferencial de alguma extensão algébrica D/E.

LEMA 1. *Sejam E/k uma extensão diferencial de corpos e M, N duas partes de E. São equivalentes:*

(1) *$M \cup N$ é algebricamente livre sobre k e $M \cap N = \varnothing$;*
(2) *M é algebricamente livre sobre k e N é algebricamente livre sobre $k(M)$;*
(3) *N é algebricamente livre sobre k e M é algebricamente livre sobre $k(N)$.*

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente demonstrar a equivalência de 1 e 2.

(1. $\Longrightarrow$ 2.): M é uma parte própria de $M \cup N$ (que é algebricamente livre sobre k). Se N não fosse algebricamente livre sobre $k(M)$, existiria um polinômio diferencial p não nulo, com coeficientes em $k(M)$ tal que $p(y) = 0$ para $y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset N$. Tirando o m.m.c. dos denominadores dos coeficientes de p, obtemos um polinômio diferencial não nulo $q(x, y)$

com coeficientes em k em que $x = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset M$, $y \subset N$. Portanto M e N não seriam algebricamente livres.

(2. $\Longrightarrow$ 1.): Temos claramente que $N \cap k(M) = \varnothing$ e portanto $N \cap M = \varnothing$. Resta mostrar que quaisquer subconjuntos finitos $y \subset N$ e $x \subset M$ que são algebricamente livres sobre k, tem sua união algebricamente livre. Supondo, por absurdo, que $M \cup N$ não seja um conjunto diferencialmente algebricamente livre, então existiriam $x = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset M$ e $y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset N$ e um polinômio diferencial $P \not\equiv 0$, em $k\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ tal que $P(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$. Seja $g(y_1, \ldots, y_n) := p(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ um polinômio diferencial em $k(M)\{y\}$ e a relação $p(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$ se escreve $g(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Como N é algebricamente livre sobre $k(M)$, os coeficientes de $g(y_1, \ldots, y_n)$ são nulos. Mas os coeficientes de g são da forma $q(x_1, \ldots, x_m)$, ou seja, são polinômios diferenciais em $k(M)$, o que mostra que M não seria algebricamente livre sobre k.

□

TEOREMA 2. *Sejam E/k um sistema e L/k um subsistema de E/k. Então são equivalentes:*

(1) *O sistema E/k é relativamente* flat *com respeito ao subsistema L/k;*
(2) *Existe uma extensão algébrica D de E e um subsistema* flat *F/k de D/k tal que D se decompõe em relação a F e a L.*

DEMONSTRAÇÃO. (1. $\Longrightarrow$ 2.) Se E/L é *flat*, tomamos uma saída *flat* $y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ em uma extensão algébrica D de E. Fazemos $F = k\langle y \rangle$.

Como y é uma saída *flat* de uma extensão algébrica D de E com corpo de base L, então y é uma base de transcendência diferencial de D sobre L, ou seja, $y \cap L = \varnothing$.

Então L/k e F/k são independentes sobre k e D é algébrico sobre $k(F, L) = L(F)$. Para mostrar que y é algebricamente livre sobre k, suponhamos que exista um polinômio diferencial p tal que $p(y) = 0$, p com coeficientes em k. Como $k \subset L$, então p é um polinômio com coeficientes em L, como $p(y) = 0$, e y é uma base de transcendência diferencial de E/L, temos que $p \equiv 0$.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Seja y uma base de transcendência diferencial de E/k onde E é uma extensão algébrica finita de F. Podemos supor que D contém E, pois caso contrário, fazemos a extensão $D(E)$ que continua sendo uma extensão algébrica finita sobre E. Como D se decompõe em relação aos sistemas F e L, isto é, D é algébrico sobre $k\langle F, L \rangle = L\langle F \rangle$. Dessa forma, precisamos mostrar que y é uma base de transcendência diferencial de D/L e que D é algébrico sobre $L\langle y \rangle$. Como D é algébrico sobre $L\langle F \rangle = k\langle F, L \rangle = L\langle y \rangle$, temos que D é algébrico sobre $L\langle F \rangle = L\langle y \rangle$. Pelo lema anterior, temos que y é uma base de transcendência diferencial de D/L. □

Este teorema mostra que a definição de sistemas relativamente *flat* a um subsistema, apresentado na teoria algébrica, é equivalente à decomposição do sistema em dois subsistemas, sendo que um desses subsistemas é *flat*. Ou seja, o teorema mostra que a definição algébrica é equivalente à definição geométrica de sistemas relativamente *flat*.

Parte 2

Geometria diferencial e sistemas de equações diferenciais

Introdução à teoria geométrica

Lembrando o que foi apresentado na introdução geral do texto temos:

Um sistema de controle é uma variedade de dimensão infinita (enumerável) munida com a topologia de Fréchet e com um campo chamado campo de Cartan. Essa variedade, com essa topologia e esse campo é conhecido como *diffiety*.

A topologia de Fréchet é a topologia menos fina que torna as projeções da variedade em $\mathbf{R}^n$ funções contínuas e abertas.

O campo de Cartan é um campo vetorial que é obtido através do sistema de equações diferenciais; em geral representaremos o campo de Cartan por $\frac{d}{dt}$.

Uma entrada relativa a um sistema (nesse caso, um *diffiety*), juntamente com o estado é um sistema de coordenadas local

$$(t, x, u, \frac{d}{dt}u, \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}u), \ldots)$$

da variedade S.

A forma com que poderemos distinguir as variáveis de estado das variáveis entradas é através do campo de Cartan.

De forma bem grosseira, podemos dizer que as entradas devem seguir a seguinte equação: $\frac{d}{dt}u^{(k)} = u^{(k+1)}$, para todo $k \in \mathbf{N}$, onde $\frac{d}{dt}$ é o campo de Cartan e $\frac{d}{dt}u(t) = u^{(1)}(t)$, $\frac{d}{dt}u^{(1)}(t) = u^{(2)}(t)$, ..., e as representações de estados são as variáveis não temporais que restam quando se retiram todas as variáveis de entrada.

Assim, a variedade que devemos considerar é $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, um sistema de coordenadas local pode ser $(t, x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots)$. O campo de Cartan será dado, nessas coordenadas, por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + f(x(t), u(t))\frac{\partial}{\partial x} + u^{(1)}\frac{\partial}{\partial u} + u^{(2)}\frac{\partial}{\partial u^{(1)}} + \cdots .$$

Observe que $\frac{d}{dt}u = u^{(1)}$ e que $\frac{d}{dt}u^{(k)} = u^{(k+1)}$ para todo $k \in \mathbf{N}$.

Desse modo podemos considerar u como entrada, ou também podemos considerar qualquer derivada de u como entrada[2], que foi o mesmo ocorrido na parte algébrica.

Observe também que obter uma solução do sistema acima, é obter uma solução para o sistema $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ onde x e u são vetores e f é uma função vetorial.

As saídas de um sistema de controle, quando considerados como *diffieties*, são funções definidas no *diffiety*.

---

[2]Entenda-se qualquer derivada de u como $\frac{d^n}{dt^n}u$ para algum n natural.

Dados um sistema S e dois subsistemas (S_1, π_1) e (S_2, π_2) diremos que S será decomposto por S_1 e S_2 se em torno de algum ponto $\xi \in S$ existirem coordenadas locais (t, x_1) para S_1, (t, x_2) para S_2 e (t, x_1, x_2)[3] para S tais que $\pi_i(t, x_1, x_2) = (t, x_i)$ para $i = 1, 2$. Um sistema será chamado relativamente *flat* em relação a S_1 se existir um sistema *flat* S_2 tal que S é localmente decomposto por S_1 e S_2.

Na primeira parte do trabalho, mostramos que as definições algébricas e geométricas de sistemas relativamente *flat* são equivalentes.

Na segunda parte do trabalho, estudamos sistemas implícitos. Um sistema é dito implícito se não estiver na forma de estado, ou seja, se as variáveis de estado não estiverem explicitadas. Quando trabalhamos com sistemas implícitos em $\mathbf{R}^n$, podemos utilizar o teorema das funções implícitas para explicitar $\dot{x}$, porém em *diffieties*, que são os sistemas implícitos, tal teorema não é válido.

5. Geometria diferencial de dimensão infinita e sistemas de equações diferenciais

Primeiramente definiremos o espaço em que trabalharemos. As definições podem ser utilizadas para espaços de dimensão finita (exceto em menção ao contrário).

DEFINIÇÃO 17 ($\mathbf{R}^A$). Seja A um conjunto enumerável. Denotamos por $\mathbf{R}^A$ o conjunto das funções de A sobre $\mathbf{R}$.

Note que essa definição pode ser utilizada também para definir $\mathbf{R}^n$. Pode-se ainda definir as funções coordenadas $x_i : \mathbf{R}^A \longrightarrow \mathbf{R}$ como $x_i(\xi) = \xi(i)$, $i \in A$, que eventualmente será denotado por ξ_i.

Será usada a palavra enumerável para indicar conjuntos com a mesma cardinalidade de $\mathbf{N}$.

Este conjunto pode ser dotado naturalmente com a topologia de Fréchet (isto é, uma topologia de limite inverso). Uma base para essa topologia é da forma

$$B_{F,\{\epsilon_i | i \in F\}} = \{\xi \in \mathbf{R}^A \text{ tal que } |x_i(\xi) - \delta_i| < \epsilon_i,\ i \in F\},$$

onde F é um subconjunto finito de A, $\delta_i \in \mathbf{R}$ e ϵ_i é um número real positivo para $i \in F$. Isso significa que qualquer vizinhança aberta de um ponto $\xi \in \mathbf{R}^A$, tem apenas uma quantidade finita de coordenadas que são limitadas.

A próxima definição mostra o que é uma função diferenciável em $\mathbf{R}^A$. Observe que as aplicações que serão consideradas são aplicações de $\mathbf{R}^n$ sobre $\mathbf{R}^n$.

Observe também que em cada ponto $\xi \in \mathbf{R}^A$ existe uma vizinhança V_ξ em que as funções são contínuas e/ou diferenciáveis pois dependem apenas de um número finito de variáveis.

DEFINIÇÃO 18 (Diferenciabilidade em $\mathbf{R}^A$). Seja $f : \mathbf{R}^A \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função, f é chamada função *contínua (diferenciável)* se em torno de todo ponto $\xi \in \mathbf{R}^A$ existir uma vizinhança V de ξ tal que $f = g(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_n})$ em V, onde $g : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ é uma função contínua (diferenciável), $\{i_1, \ldots, i_n\}$ é um subconjunto de A, isto é, para uma função ser contínua (diferenciável) a função precisa depender de um número finito de variáveis.

[3]Identificamos x_i com $x_i \circ \pi_i$.

Através dessa noção de diferenciabilidade, pode-se construir facilmente noções de campos vetoriais e formas diferenciais em $\mathbf{R}^A$ e aplicações diferenciais de $\mathbf{R}^A$ sobre $\mathbf{R}^B$, como pode ser visto em [**CF02**].

Observe que, por exemplo, a função $f : \mathbf{R}^A \longrightarrow R$ dado por $f(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = x_1 + x_3$ é diferenciável em $\mathbf{R}^A$.

DEFINIÇÃO 19. Seja A um conjunto enumerável. Uma $\mathbf{R}^A$-variedade é variedade sobre $\mathbf{R}$ formada por funções deriváveis de $\mathbf{R}^A$ sobre $\mathbf{R}$.

Dada uma $\mathbf{R}^A$-variedade $\mathcal{P}$, denotaremos $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{P})$ o conjunto de todas as funções deriváveis de $\mathcal{P}$ sobre $\mathbf{R}$.

DEFINIÇÃO 20 (Diffieties). Um *diffiety* M é uma $\mathbf{R}^A$-variedade munida de uma distribuição involutiva Δ de dimensão r chamada *distribuição de Cartan.*

Um *diffiety* M com $r = 1$ será chamado de *diffiety* ordinário. Neste caso a notação para a distribuição de Cartan do *diffiety* M será ∂_M.

DEFINIÇÃO 21 (Campos de Cartan). Uma secção de uma distribuição de Cartan em um *diffiety* é chamado um *campo de Cartan.*

Quando não houver problema de ambigüidade, chamaremos um *diffiety* ordinário apenas de *diffiety.* Além disso, usaremos apenas a notação $\dfrac{d}{dt}$ para o campo de Cartan do *diffiety* ordinário.

Reforçamos aqui que, localmente, isto é, numa vizinhança V de $\xi \in M$, as funções diferenciáveis dependem apenas de um número finito de variáveis, portanto todas as definições da geometria diferencial de dimensão finita são válidas localmente. Como foi feito por Corrêa Filho em [**CF02**], podemos enunciar a próxima definição.

DEFINIÇÃO 22. Sejam $\mathcal{Q}$ uma $\mathbf{R}^A$-variedade e $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ uma função suave de $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{Q}$, onde $\mathcal{P}$ é uma $\mathbf{R}^B$-variedade, denotaremos a função tangente por $\varphi_* : T_P\mathcal{P} \longrightarrow T_{\varphi(P)}\mathcal{Q}$ e a cotangente representaremos por $\varphi^* : T^*_{\varphi(p)}\mathcal{Q} \longrightarrow T^*_p\mathcal{P}$, onde $T_P\mathcal{P}$ é o espaço tangente à $\mathcal{P}$ em p, $T_{\varphi(p)}\mathcal{Q}$ é o espaço tangente a $\mathcal{Q}$ em $\varphi(p)$, $T^*_p\mathcal{P}$ é o espaço cotangente de $\mathcal{P}$ em p e $T^*_{\varphi(p)}\mathcal{Q}$ é o espaço cotangente a $\mathcal{Q}$ em $\varphi(p)$.

DEFINIÇÃO 23. Dada uma função $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ entre $\mathbf{R}^A$-variedades, φ é chamada uma *imersão* se para todo ponto $\xi \in \mathcal{P}$ e $\varphi(\xi) \in \mathcal{Q}$ existirem cartas locais de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ tais que, nessas coordenadas $\varphi(x) = (x, 0)$. A aplicação φ é chamada uma *submersão* se ao redor de todo ponto $\xi \in \mathcal{P}$ e $\varphi(\xi) \in \mathcal{Q}$ existirem cartas locais de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ tais que nessas coordenadas $\varphi(x, y) = x$.

DEFINIÇÃO 24 (Aplicação de Lie-Bäcklund). Sejam M e N dois *diffieties* munidos de campos de Cartan ∂_M e ∂_N respectivamente. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ entre *diffieties* é chamado de *Lie-Bäcklund* se f for uma aplicação suave que é compatível com os campos de Cartan, isto é, $f_*\partial_M = \partial_N \circ f$.

DEFINIÇÃO 25 (Isomorfismo (imersão, mergulho) de Lie-Bäcklund). Um isomorfismo (imersão, mergulho) entre *variedades de dimensão infinita* é uma aplicação de Lie-Bäcklund que é um isomorfismo (imersão, mergulho).

Dado um objeto diferenciável φ (entenda-se ou função diferenciável ou campo ou forma), então $\dot{\varphi}$ significará a ação do campo de Cartan em φ, que também será denotada por $L_{\frac{d}{dt}}\varphi$ e $L^n_{\frac{d}{dt}}\varphi = \varphi^{(n)}$, $n \in \mathbf{N}$.

DEFINIÇÃO 26 (Sistema em *diffieties*). Um *sistema* é uma tripla $(S, \mathbf{R}, \tau)$, onde S é um *diffiety* munido com campo de cartan ∂_S e $\tau : S \longrightarrow \mathbf{R}$ é uma submersão de Lie-Bäcklund e $\dfrac{d}{dt}(\tau) = 1$.

A função coordenada t de $\mathbf{R}$ representa o *tempo*, que é escolhido de forma única para todos os sistemas.

DEFINIÇÃO 27. Uma aplicação de Lie-Bäcklund entre sistemas de $(S, \mathbf{R}, \tau)$ sobre o sistema $(S', \mathbf{R}, \tau')$ é uma aplicação $\varphi : S \longrightarrow S'$, que preserva o tempo, isto é, $\tau = \tau' \circ \varphi$.

Quando não houver perigo de ambigüidade, o sistema $(S, \mathbf{R}, \tau)$ será denotado simplesmente por S.

6. Representação de estados e entrada

DEFINIÇÃO 28 (Representação de estados e entrada). Uma *representação de estados local de um sistema* $(S, \mathbf{R}, \tau)$ é um sistema de coordenadas local, $\psi = \{t, x, U\}$, onde $x = \{x_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}$, $U = \{u_j^{(k)} | j \in \{1, \ldots, n\}, k \in \mathbf{N}\}$ onde $\tau \circ \psi^{-1}(t, x, U) = t$. O conjunto de funções $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é chamado *estado* e $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é chamado *entrada*.

Nesse sistema de coordenadas o campo de Cartan é localmente escrito como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k \in \mathbf{N} \\ j \in \{1, \ldots, m\}}} u_j^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(k)}}. \tag{2}$$

Uma representação de estados de um sistema S é completamente determinado pela escolha de estado x e entrada da u e será denotado por (x, u).

DEFINIÇÃO 29 (Saída). Uma *saída* y de um sistema S é um conjunto de funções definidas em S.

6.1. Sistema associado a equações diferenciais. Nesta subseção veremos como as definições anteriores podem ser úteis para o estudo de equações diferenciais.

Suponha que um sistema de controle é dado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x}_i = f_i(t, x, u, \ldots, u^{(\alpha_i)}), & i \in \{1, \ldots, n\} \\ y_j = h_j(x, u, \ldots, u^{(\beta_j)}), & j \in \{1, \ldots, p\} \end{cases} \tag{3}$$

Pode-se sempre associar a essas equações um *diffiety* S de coordenadas globais $\psi = \{t, x, u\}$ e o campo de Cartan (2); observamos que y_j são funções de x e u.

6.2. Realimentação endógena. Nesta subseção daremos uma noção simplificada de realimentação endógena, baseada em mudanças de coordenadas. Esta definição é conveniente para nossos propósitos, mas não é abrangente o suficiente para estudar equivalência de sistemas por realimentações (veja **[FLMR99]** para ter uma noção de realimentação endógena que é uma relação de equivalência entre sistemas).

DEFINIÇÃO 30 (Realimentação endógena). Sejam $(t, x, u) = (t, x, u_j^{(k)} : j \leq m, k \in \mathbf{N})$ e $(t, z, v) = (t, z, v_i^{(l)} : i \leq m, l \in \mathbf{N})$ duas representações de estado locais de um sistema S definidas em torno de um ponto $\xi \in S$. Uma *realimentação endógena de estado* (local) é a mudança de coordenadas definida da seguinte forma:

$$(t, x, u_j^{(k)} : j \leq m, k \in \mathbf{N}) \longmapsto (t, z, v_i^{(l)} : i \leq m, l \in \mathbf{N}).$$

DEFINIÇÃO 31 (Realimentação estática). Sejam (t, x, u) e (t, z, v) duas representações de estado locais de um sistema S em torno de um ponto $\xi \in S$, como definido anteriormente. Diremos que (t, x, u) e (t, z, v) são relacionados por uma *realimentação endógena estática* (ou simplesmente uma *realimentação estática*) se, para todo ponto ζ em uma vizinhança de ξ, tivermos: $\begin{cases} span\{dt, dz\}|_\zeta = span\{dt, dx\}|_\zeta \\ span\{dt, dz, dv\}|_\zeta = span\{dt, dx, du\}|_\zeta \end{cases}$.

PROPOSIÇÃO 1. **[CF02]** *Dadas duas representações de estados (t, x, u) e (t, z, v). Se tivermos* $\mathrm{span}\{dt, dx\} = \mathrm{span}\{dt, dz\}$, $\mathrm{span}\{dt, dx, du\} = \mathrm{span}\{dt, dz, dv\}$. *Então existem realimentações de estado estáticas que relacionam esses sistemas de coordenadas.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $span\{dt, dx\} = span\{dt, dz\}$ então (t, x) e (t, z) tem mesma dimensão e existe um difeomorfismo $(t, x) \xmapsto{\varphi} (t, z)$. O mesmo ocorre com (t, x, u) e (t, z, v). □

EXEMPLO 6. A extensão de estados dada por integradores é outro exemplo particular de realimentação endógena. Por exemplo, colocando integradores em série com as primeiras k entradas da representação de estados (x, u), teremos o estado $z = (x, u_1, \ldots, u_k)$ e a entrada $v = (\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_k, u_{k+1}, \ldots, u_m)$. Observe que as funções coordenadas neste caso são as mesmas, mas elas foram juntadas de formas diferentes, dando origem a (x, u) e (z, v) que estão relacionados por uma realimentação endógena. Este procedimento é chamado *extensão dinâmica* do estado.

6.3. Sistemas regulares implícitos. Seja Γ um sistema implícito da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \tag{4a}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) = 0 \tag{4b}$$

onde $x(t) \in \mathbf{R}^n$ é o pseudo-estado do sistema[4], $u(t) \in \mathbf{R}^m$ é a pseudo-entrada[5], e $y_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, r$ são as restrições.

[4]Aqui entenda-se pseudo-estado do sistema como um conjunto de variáveis que formalmente é o estado, mas futuramente poderá ser apenas uma parte do conjunto de variáveis que serão considerados estados, por isso foi colocado que x é o pseudo-estado do sistema.

[5]Aqui também u não necessariamente será a entrada depois de realizarmos todos os cálculos, por isso, denominamos de pseudo-entrada do sistema. Note que u não é uma entrada diferencialmente independente de Γ, pois as restrições $y \equiv 0$ induzem relações diferenciais nas componentes de u. Pelas mesmas razões, x não é um estado de Γ.

Pode-se associar a esse sistema implícito Γ, o sistema *explícito* S dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) && \text{(5a)} \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) && \text{(5b)} \end{aligned}$$

Considere o sistema S associado às equações (5) com campo de Cartan

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k \in \mathbf{N} \\ j \in \{1,\ldots,m\}}} u_j^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(k)}}$$

e saída y. Então $y^{(k)}$ denota a função $\frac{d^k}{dt^k} y$ definida em S, que pode depender de $x, u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots$.

Na seqüência consideraremos as seguintes codistribuições definidas em S:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{-1} &= span\{dt, dx\}, & \mathcal{Y}_k &= span\{dt, dx, dy, \ldots, dy^{(k)}\} && \text{(6a)} \\ Y_{-1} &= span\{dt\}, & Y_k &= span\{dt, dy, \ldots, dy^{(k)}\} && \text{(6b)} \\ \mathbb{Y}_{-1} &= \{0\}, & \mathbb{Y}_k &= span\{dy, \ldots, dy^{(k)}\} && \text{(6c)} \end{aligned}$$

Em [**PdSCF01**], mostrou-se que, dentro de certas condições de regularidade, se pode identificar (de forma canônica) o sistema implícito Γ definido por (4) com o subconjunto de S definido por

$$\Gamma = \{\xi \in S | y^{(k)} = 0, \forall k \in \mathbf{N}\}. \tag{7}$$

DEFINIÇÃO 32. Seja $U \subset S$ um conjunto aberto e denso de pontos regulares de todas as codistribuições $\mathcal{Y}_k$, Y_k, $\mathbb{Y}_k$, $k = 0, \ldots, n = \dim x$. O sistema implícito Γ dado por (4) é dito ser *regular* se $\emptyset \neq \Gamma \subset U$ e existir uma seqüência de inteiros fixos $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, tais que $\sigma_k = \dim \mathcal{Y}_k(\xi) - \dim \mathcal{Y}_{k-1}(\xi)$ para todo $\xi \in \Gamma$. Neste caso a seqüência $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ é chamada *estrutura no infinito do sistema implícito* (4).[6]

A classe de sistemas implícitos não lineares (4) não é particular como nos parece num primeiro momento. De fato, pode-se mostrar que equações diferenciais não lineares algébricas (DAEs) podem ser sempre convertidas para um sistema da forma (4). Para isso considere as seguintes equações diferenciais:

$$\varphi_i(w_1, \ldots, w_1^{(\alpha_{1i})}, \ldots, w_r, \ldots, w_s^{(\alpha_{si})}) = 0, \quad i \in \{1, \ldots, r\}. \tag{8}$$

Seja $\beta_j = \max\{\alpha_{ji}, i \in \{1, \ldots, r\}\}, j \in \{1, \ldots, s\}$. Considere o sistema S com estado $x = (w_1, \ldots, w_1^{(\beta_1 - 1)}, \ldots, w_s, \ldots, w_s^{(\beta_s - 1)})$, entrada $u = (u_1, \ldots, u_s)$, onde $u_j = w_j^{(\beta_j)}$, e saída

[6]Essa seqüência é de fato a estrutura algébrica no infinito do sistema explícito S definido por (5) [**DBGM89**, **DPdS98a**].

y definida pelas equações[7]

$$(9)\qquad \begin{cases} \dot{w}_j^{(0)} &= w_j^{(1)} \\ & \vdots \qquad\qquad j \in \{1,\dots,s\} \\ \dot{w}_j^{(\beta_j-1)} &= u_j \end{cases}$$
$$y_i = \varphi_i(w_1,\dots,w_1^{(\alpha_{1i})},\dots,w_s,\dots,w_s^{(\alpha_{si})}), i \in \{1,\dots,r\}.$$

É claro que o sistema (8) é representado pelo sistema (9) com as restrições $y_i = 0$, que está na forma (4a-4b). Assim, todos os resultados desenvolvidos aqui podem ser aplicados aos conjuntos de DAEs de ordem arbitrária. A partir dos resultados aqui apresentados ficará claro que o estado (local) do sistema implícito pode ser sempre escolhido como um subconjunto de $x = (w_1,\dots,w_1^{(\beta_1-1)},\dots,w_s,\dots,w_s^{(\beta_s-1)})$ e a entrada $\widehat{u}$ pode ser sempre um subconjunto de u.

Por exemplo, considere um DAE na forma descriptora:

$$E(z)\dot{z} = A(z) + B(z)u$$

e note que ela pode ser transformada em um sistema implícito

$$\begin{cases} \dot{z} = \mu + 0v \\ y = E(z)\mu - A(z) - B(z)v = 0 \end{cases}.$$

A equação anterior está na forma (4a-4b), onde $x = z$ e $u = (v,\mu)$. Note que y é afim em u.

6.4. Sistemas afins e coordenadas ilimitadas. Vamos definir agora, uma noção de coordenadas *ilimitadas* em $\mathbf{R}^A$-variedades e alguns resultados correlatos. Para isso lembramos que uma base de abertos da topologia de $\mathbf{R}^A$ é gerado por abertos da forma $B_{F,\{\epsilon_i|i\in F\}} = \{\xi \in \mathbf{R}^A \text{ tal que } |x_i(\xi) - \delta_i| < \epsilon_i\}$ onde F é um conjunto finito contido em A.

DEFINIÇÃO 33 (coordenadas ilimitadas). Seja $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^A \times \mathbf{R}^B$, onde $\varphi = (X,Y)$ é uma carta local de uma variedade S definida em um aberto $U \subset S$ onde $X : U \longrightarrow \mathbf{R}^A$ e $Y : U \longrightarrow \mathbf{R}^B$ são funções diferenciáveis (lisas). Tais coordenadas Y são chamadas *coordenadas ilimitadas* se $V := \varphi(U) = W \times \mathbf{R}^B$, onde W é um aberto de $\mathbf{R}^A$.

DEFINIÇÃO 34 (aplicação ilimitada). Seja $\psi : H \longrightarrow H_1$ um difeomorfismo entre abertos H e H_1 de $\mathbf{R}^A \times \mathbf{R}^B$, tal que $(X,Y) \longmapsto (X_1,Y_1)$. A aplicação ψ é chamada *ilimitada* em Y_1 se a imagem de ψ é da forma $V \times \mathbf{R}^B$ com V um conjunto aberto de $\mathbf{R}^A$.

Lembramos que uma representação de estado (x,u) é uma carta local especial para um sistema S. Dado um sistema explícito

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t),u(t)) \end{aligned}$$

[7]Note que y_i ($i \in \{1,\dots,r\}$) pode depender de alguns u_j, ($j \in \{1,\dots,s\}$).

pode-se construir um sistema S com coordenadas globais $\{t, x, U\}$, onde $U = (u^{(k)} : k \in \mathbf{N})$ e um campo de Cartan

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k \in \mathbf{N} \\ j \in \{1,\ldots,m\}}} u_j^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(k)}}.$$

LEMA 2. *Seja S um sistema, no qual (x, u) é uma representação de estados clássica e o conjunto $\{t, x, u^{(0)}, \ldots, u^{(k)}, W\}$ é uma carta local com coordenadas ilimitadas*

$$\{u^{(0)}, \ldots, u^{(k)}, W\}$$

e seja (x, v) uma realimentação de estados estática localmente regular e afim definida por $u = \alpha(x) + \beta(x)v$. Então:

I. *$\{t, x, v^{(0)}, \ldots, v^{(k)}, W\}$ é uma carta local cujo conjunto de coordenadas ilimitadas é $\{v^{(0)}, \ldots, v^{(k)}, W\}$ e de modo que*

$$\operatorname{span}\{dt, dx, du^{(0)}, \ldots, du^{(k)}\} = \operatorname{span}\{dt, dx, dv^{(0)}, \ldots, dv^{(k)}\}.$$

II. *Se v puder ser escrito como $v = (\overline{v}, \widehat{v})$, $\zeta = (x, \overline{v})$ e $\mu = (\overline{v}^{(1)}, \widehat{v})$, então*

$$\{t, \zeta, \mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(k-1)}, \widehat{v}^{(k)}, W\}$$

é uma carta local com coordenadas ilimitadas $\{\mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(k-1)}, \widehat{v}^{(k)}, W\}$ e tal que

$$\operatorname{span}\{dt, d\zeta, d\mu^{(0)}, \ldots, d\mu^{(k-1)}, d\widehat{v}^{(k)}\} =$$

$$\operatorname{span}\{dt, dx, du^{(0)}, \ldots, du^{(k-1)}, du^{(k)}\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. I. De fato, como β é localmente regular, existe $\beta^{-1}(x)$ em alguma vizinhança V de um ponto ξ. Assim, v pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} v &= -\beta^{-1}(x)\alpha(x) + \beta^{-1}(x)u \\ \dot{v} &= \varphi_1(x, u) + \beta^{-1}\dot{u} \\ &\vdots \\ v^{(k)} &= \varphi_k(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(k-1)}) + \beta^{-1}u^{(k)} \end{aligned} \tag{10}$$

para todo $k \in \mathbf{N}$, pois

$$\begin{aligned} v^{(k+1)} &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}(x, u, \ldots, u^{(k-1)}) \cdot \dot{x} + \\ &+ \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u^{(i)}}(x, u, \ldots, u^{(k-1)}) \cdot u^{(i+1)}}_{\text{independe de } u^{(k+1)}} + \\ &+ \frac{\partial \beta^{-1}(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \cdot u^{(k)} + \beta^{-1}(x) \cdot u^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Logo

$$span\{dt, dx, du, \ldots, du^{(k)}\} = span\{dt, dx, dv, \ldots, dv^{(k)}\}.$$

Assim, pelas relações (10) temos um difeomorfismo local

$$(t, x, U) \overset{\psi_A}{\longmapsto} (t, x, V)$$

onde $U = \{u^{(k)} : k \in A\}$ e $V = \{v^{(k)} : k \in A\}$ com $A = \mathbf{N}$ ou $A = \{1, \ldots, k\}$.

Claramente, neste difeomorfismo, V é um sistema de coordenadas ilimitadas e sua inversa U, também. Se A for $\{1, \ldots, k\}$, a aplicação

$$(t, x, U, W) \longmapsto (\psi_A(t, x, U), W)$$

é um difeomorfismo local com sistema de coordenadas ilimitadas em (V, W).

II. Para mostrar a segunda parte, basta notar que

$$\{t, \zeta, \mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(k-1)}, \widehat{v}^{(k)}, W\} =$$

$$= \{t, (x, \overline{v}^{(0)}), (\overline{v}^{(1)}, \widehat{v}^{(0)}), \ldots, (\overline{v}^{(k)}, \widehat{v}^{(k-1)}), \widehat{v}^{(k)}, W\}$$

□

LEMA 3. *Se (Z_1, W) é uma carta local com coordenadas ilimitadas W e Z_2 é tal que $card(Z_1) = card(Z_2) < \infty$ e $\mathrm{span}\{dZ_1\} = \mathrm{span}\{dZ_2\}$, então (Z_2, W) é uma carta coordenada local com coordenadas ilimitadas W.*

DEMONSTRAÇÃO. Como Z_1 é um conjunto finito de coordenadas, podemos utilizar o teorema da função inversa e obter $Z_1 \overset{\theta}{\longmapsto} Z_2$ é um difeomorfismo local definido em um aberto $V \subset \mathbf{R}^A$ com imagem $U \subset \mathbf{R}^A$. Portanto $(Z_1, W) \longmapsto (Z_2(Z_1), W)$ também é um difeomorfismo local definido em algum aberto $V \times \mathbf{R}^B \subset \mathbf{R}^A \times \mathbf{R}^B$ com imagem $U \times \mathbf{R}^B$. Logo (Z_2, W) é uma carta local com coordenadas ilimitadas W. □

CAPÍTULO 2

Algoritmo da extensão dinâmica

O algoritmo da extensão dinâmica é um algoritmo conhecido na teoria de controle não linear e é essencialmente uma ferramenta para cálculo de inversas à direita e posto de saídas.[1]

Esse algoritmo está fortemente relacionado ao problema de desacoplamento de entrada e saída [**DM87, NR88**], desacoplamento de distúrbios [**PdS96, DPdS98b**] e linearização de entrada e saída [**DPdS98b, PdSD01**]. O algoritmo da extensão dinâmica para um sistema explícito (5) tem uma interpretação intrínseca [**DBGM89**]. Esta interpretação foi considerada para o estudo de realimentações quase-estáticas na teoria de controle não linear [**DPdS98a**].

Veremos que o algoritmo da extensão dinâmica é uma seqüência de aplicações de realimentações regulares quase-estáticas e extensões do estado adicionando integradores. Veremos também que o algoritmo da extensão dinâmica pode ser utilizado para a escolha de uma nova representação de estados local de S. Enunciaremos uma versão modificada do algoritmo da extensão dinâmica que será útil aos nossos propósitos. Antes precisaremos de duas definições.

DEFINIÇÃO 35. Diremos que uma representação local de estados (x, u) de um sistema S é *clássica*, se $\dot{x}$ não depender das derivadas de u, isto é, $\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial u_i^{(k)}} = 0$, $\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ e $\forall k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

DEFINIÇÃO 36. Diremos que uma saída y de um sistema S é *clássica* com relação à (x, u) se y não depender das derivadas de u quando escrito no sistema de coordenadas induzido pela representação de estado (x, u).

Descrição do algoritmo da extensão dinâmica:

Seja S o sistema explícito

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

com campo de Cartan

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k \in \mathbf{N} \\ j \in \{1, \ldots, m\}}} u_j^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(k)}}.$$

Seja (x, u) uma representação de estados clássica e y uma saída clássica.

[1] Veja [**Fli89**] para o conceito de posto e inversas e [**DBGM89**] para a interpretação do algoritmo da extensão dinâmica.

Se denotarmos $x_{-1} = x$, $u_{-1} = u$, $f_{-1}(t,x) = f(t,x)$, $g_{-1}(t,x) = g(t,x)$, podemos escrever as equações de estado do sistema explícito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{-1} &= f_{-1}(t,x_{-1}) + g_{-1}(t,x_{-1})u_{-1} \\ y^{(0)} = y &= a_0(t,x_{-1}) + b_0(t,x_{-1})u_{-1} \end{aligned}$$

Executamos o passo k do algoritmo $k \in \{0,1,\ldots\}$ da seguinte forma:

Passo k: No passo $k-1$, temos as equações de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k-1} &= f_{k-1}(t,x_{k-1}) + g_{k-1}(t,x_{k-1})u_{k-1} \\ y^{(k)} &= a_k(t,x_{k-1}) + b_k(t,x_{k-1})u_{k-1} \end{aligned}$$

onde $x_{k-1} = (x, \overline{v}_0, \ldots, \overline{v}_{k-1})$. Suponha que $(\overline{t}, \overline{x}_{k-1})$ seja um ponto regular da matriz $b_k(t,x_{k-1})$ e seja σ_k o posto de b_k ao redor de $(\overline{t}, \overline{x}_{k-1})$. Então, a menos de uma reordenação das saídas, existe uma partição de $y^{(k)}$ da forma $y^{(k)} = (\overline{y}_k^{(k)}, \widehat{y}_k^{(k)})$ tal que $\dim \overline{y}_k^{(k)} = \sigma_k$ e podemos definir como pode ser visto em [**DBGM89**] ou em [**CF02**], localmente, uma realimentação regular estática:

$$u_{k-1} = \alpha_k(t,x_{k-1}) + \beta_k(t,x_{k-1})v_k$$

onde $v_k = (\overline{v}_k, \widehat{v}_k)$ é tal que

$$\begin{aligned} \overline{y}_k^{(k)} &= \overline{v}_k \\ \widehat{y}_k^{(k)} &= \widehat{y}_k(t,x_{k-1},\overline{v}_k) \end{aligned}$$

adicionamos a extensão dinâmica:

$$\begin{aligned} \overline{u}_k &= \dot{\overline{v}}_k \\ \widehat{u}_k &= \widehat{v}_k \end{aligned}$$

e definimos $u_k = (\overline{u}_k, \widehat{u}_k)$. Isso define um novo conjunto de equações de estado:

$$\dot{x}_k = f_k(t,x_k) + g_k(t,x_k)u_k$$

onde $x_k = (x_{k-1}, \overline{y}_k^{(k)})$ e $u_k = (\overline{y}_k^{(k+1)}, \widehat{u}_k)$. Por construção temos que $y^{(k)} = y^{(k)}(t,x_k)$. Portanto podemos calcular:

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \frac{\partial y^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x_k}(f_k + g_k u_k) \\ &= a_{k+1}(t,x_k) + b_{k+1}(t,x_k)u_k \end{aligned}$$

O próximo lema resume as principais propriedades geométricas do algoritmo da extensão dinâmica para sistemas não lineares invariantes no tempo. Este lema é uma versão geométrica dos resultados que aparecem em [**DBGM89, Mar92, DPdS98a, PdSCF01**] e também melhora alguns resultados obtidos em [**PdS00**]. Afirmamos que a lista de inteiros $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$, onde $n = \dim x$, é a *estrutura algébrica no infinito* ([**DBGM89**]) e o inteiro $\rho = \sigma_n$ é chamado *posto saída* em ξ. Afirmamos que, exceto a afirmação 9, este resultado é válido para sistemas não afins. Neste caso os passos (S1) e (S2) da versão geométrica do

algoritmo da extensão dinâmica (vide apêndice C) podem ser olhados como uma descrição do algoritmo da extensão dinâmica e os cálculos podem depender do teorema da função implícita [**LF87**].

LEMA 4. *Seja S o sistema explícito* (5) *com campo de Cartan*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k\in\mathbf{N} \\ j\in\{1,\dots,m\}}} u_j^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(k)}},$$

representação clássica de estados (x,u) e saída clássica y.

Seja V_k o conjunto aberto e denso de pontos regulares das codistribuições definidas como

$$\mathcal{Y}_{-1} = \operatorname{span}\{dt, dx\},\ \mathcal{Y}_k = \operatorname{span}\{dt, dx, dy, \dots, dy^{(k)}\},$$
$$Y_{-1} = \operatorname{span}\{dt\},\ Y_k = \operatorname{span}\{dt, dy, \dots, dy^{(k)}\} \text{ para } k \in \{0,\dots,n\}.$$

No k-ésimo passo do algoritmo da extensão dinâmica pode-se construir uma nova representação de estados (x_k, u_k) do sistema S com estado $x_k = (x, \overline{y}_0^{(0)}, \dots, \overline{y}_0^{(k)})$, entrada $u_k = (\overline{y}_k^{(k+1)}, \widehat{u}_k)$ e saída $y^{(k+1)} = h_k(t, x_k, u_k)$ definido em um aberto U_k de $\xi \in V_k$, tal que

(1) $\operatorname{span}\{dt, dx_k\} = \operatorname{span}\{dt, dx, dy, \dots, dy^{(k)}\} = \mathcal{Y}_k$;
(2) $\operatorname{span}\{dt, dx_k, du_k\} = \operatorname{span}\{dt, dx, dy, \dots, dy^{(k+1)}, du\} = \mathcal{Y}_k + \operatorname{span}\{du\}$;
(3) *Sempre é possível escolher $\overline{y}_{k+1}^{(k+1)}$ de forma que $\overline{y}_k^{(k+1)} \subset \overline{y}_{k+1}^{(k+1)}$*
(4) *Sempre é possível escolher $\widehat{u}_{k+1} \subset \widehat{u}_k$;*
(5) *Seja $\xi \in V_n$. Seja S_k a maior vizinhança aberta de ξ tal que a dimensão de $\mathcal{Y}_j$ e Y_j sejam constantes para $j \in \{0,\dots,k\}$ em S_k. A seqüência $\sigma_k = \dim(\mathcal{Y}_k|_\xi) - \dim(\mathcal{Y}_{k-1}|_\xi)$ é não decrescente e a seqüência $\rho_k = \dim(Y_k|_\xi) - \dim(Y_k|_\xi)$ é não crescente e ambas as seqüências convergem para o mesmo inteiro ρ, chamado* posto de saída em ξ, *para algum $k^* \le n = \dim x$.*
(6) *$S_k = S_{k^*}$ para algum $k \ge k^*$.*
(7) *$Y_k \cap \operatorname{span}\{dx\}|_\nu = Y_{k^*-1} \cap \operatorname{span}\{dx\}|_\nu$ para todo $\nu \in S_{k^*}$ e $k \ge k^*$.*
(8) *Para $k \ge k^*$, pode-se escolher $\overline{y}_k = \overline{y}_{k^*}$ em U_{k^*}. Além disso, $Y_{k+1} = Y_k + \operatorname{span}\{\overline{y}_k^{(k+1)}\}$ para $k \ge k^*$.*
(9) *Se o sistema é afim, isto é, se o sistema é da forma*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

então a representação de estados (x_k, u_k) obtido no passo k induz uma carta local $\left\{t, x_k, (u_k^{(j)} : j \in \mathbf{N})\right\}$ de S que é ilimitado em $W = \left\{u_k^{(j)} : j \in \mathbf{N}\right\}$.

A demonstração pode ser encontrada em [**PdS00**] (com exceção da afirmação (9)) ou em [**CF02**], no qual podem ser encontradas com todas as demonstrações dos resultados ou ainda no apêndice A.

Note que $\dim \mathcal{Y}_k = 1 + \dim x_k + \sum_{i=0}^{k} \sigma_i$, $\dim \overline{y}_k = \sigma_k$, $\dim u_k = m$ e $\dim \widehat{u}_k = m - \sigma_k$ onde $n = \dim x$ e $m = \dim u$.

1. Solubilidade

Agora estudaremos a solubilidade e as representações de estado de DAEs regulares. Melhoramos alguns dos resultados de [**PdSCF01**] e introduzimos a notação de representação de estados canônica. A hipótese (2) da proposição 2 é difícil de ser verificada e a hipótese de regularidade do subsistema Γ implica a hipótese (2). Assim nesta seção, teremos o seguinte

TEOREMA 3. *Seja S um sistema associado ao sistema explícito* (5) *(i. e., um diffiety com campo de Cartan* (2)*) no sentido de* [**FLMR99**]. *Seja $U \subset S$ um conjunto aberto e denso de pontos regulares de todas as codistribuições $\mathcal{Y}_k$, Y_k, $\mathbb{Y}_k$, $k = 0, \ldots, n$. Se o sistema implícito $\Gamma = \{\xi \in S | y^{(k)}(\xi) = 0, k \in \mathbf{N}\}$ dado por* (4) *é* regular *e todo $\xi \in \Gamma$ seja um ponto regular das codistribuições $\mathcal{Y}_k$ e Y_k, $k \in \{0, \ldots, n\}$, além disso, se Γ é não vazio, então o subconjunto $\Gamma \subset S$ tem uma estrutura de subvariedade canônica em S tal que a inclusão é uma imersão de Lie-Bäcklund. Além disso, Γ admite uma representação local de estados em torno de qualquer ponto $\xi \in \Gamma$.*

1.1. Sistemas Implícitos e subvariedades imersas. No artigo [**PdSCF01**] um DAE regular definido por (4) pode ser considerado como um sistema imerso em um sistema explícito S definido por (5).

PROPOSIÇÃO 2. [**PdSCF01**] *Seja S um sistema associado ao sistema explícito* (5) *no sentido de* [**FLMR99**], *(i. e., um diffiety com campo de Cartan* (2)*). Seja Γ o subconjunto de S definido por $\Gamma = \{\xi \in S | y^{(k)}(\xi) = 0, k \in \mathbf{N}\}$. Suponha que:*

A1. *Γ é não vazio e todo $\xi \in \Gamma$ seja um ponto regular das codistribuições $\mathcal{Y}_k$ e Y_k, $k \in \{0, \ldots, n\}$.*

A2. *Para todo $\xi \in \Gamma$ e toda vizinhança aberta $U \subset S$ de ξ, exista algum $\varepsilon > 0$ tal que $\tau(\Gamma \cap U)$ contenha o intervalo aberto $(\tau(\xi) - \varepsilon, \tau(\xi) + \varepsilon)$ (Observe que τ é a função tempo).*

Então o subconjunto $\Gamma \subset S$ tem uma estrutura de subvariedade canônica em S tal que a inclusão é uma imersão de Lie-Bäcklund. Além disso, Γ admite uma representação local de estados em torno de qualquer ponto $\xi \in \Gamma$.

Antes de demonstrar a proposição anterior, precisaremos de mais alguns resultados, como os dois próximos lemas:

LEMA 5. *Seja o sistema explícito* (5). *Seja $n = card(x)$. Sejam $U \subset W$ o conjunto de pontos regulares das codistribuições $\mathcal{Y}_k$ e Y_k, $k \in \{k = 0, 1, \ldots, n\}$, definidas em S e seja $\xi \in U$. Seja k^* o menor valor de k tal que ρ_k e σ_k coincidem. Sejam z_a, v_a, z_b, v_b conjuntos de funções tais que $\{dt, dz_a\}$, $\{dt, dz_a, dv_a\}$, $\{dt, dz_a, dz_b\}$ e $\{dt, dz_a, dz_b, dv_a, dv_b\}$ são respectivamente bases locais de Y_{k^*-1}, Y_{k^*}, $\mathcal{Y}_{k^*-1}$ e $\mathcal{Y}_{k^*} + \mathrm{span}\{du\}$ ao redor de ξ. Então existe um aberto V_ξ de ξ tal que $(z, v) = ((z_a, z_b), (v_a, v_b))$ é uma representação local de estados clássica do sistema S que é definida em V_ξ e é tal que as equações de estados locais têm a forma:*

$$\dot{z}_a = f_a(t, z_a, v_a) \tag{13}$$

$$\dot{z}_b = f_b(t, z_a, z_b, v_a, v_b) \tag{14}$$

e $\mathrm{span}\{dt, dz_a, (dv_a^{(k)} : k \in \mathbf{N})\} = \mathrm{span}\{dt, dy^{(k)} : k \in \mathbf{N}\}$.

LEMA 6. *Sob as mesmas hipóteses do lema anterior, sejam* $\mathcal{Z} = \{z_a, (v_a^{(k)} : k \in \mathbf{N})\}$ *e* $\mathcal{Y} = \left\{y_j^{(k)} : j \in \{1, \ldots, p\}, k \in \mathbf{N}\right\}$. *Então podemos escolher* $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$. *Além disso, a representação de estados* (z, v) *induz uma carta local* $\{t, z, (v^{(k)} : k \in \mathbf{N})\}$ *que é um sistema de coordenadas ilimitadas em* $\{v^{(k)} : k \in \mathbf{N}\}$.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 5. A idéia da prova desse lema é executar o algoritmo da extensão dinâmica para o sistema explícito S dado pelas equações (5) com saída y. As condições da definição de sistema regular garantem - de acordo com o lema 4 - que o algoritmo da extensão dinâmica pode ser executado sem qualquer singularidade local.

No passo $k^* - 1$ desse algoritmo, calculamos uma nova representação de estados $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$ onde $\widetilde{x} = (x, \overline{y}_1^{(1)}, \ldots, \overline{y}_{k^*}^{(k^*-1)})$ e $\widetilde{u} = (\omega, \mu)$, onde $\omega = \overline{y}_{k^*-1}^{(k^*)}$ e $\mu = \widehat{u}_{k^*-1}$. Note que as novas equações de estado são afins, isto é, eles são da forma

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{f}(t, \widetilde{x}) + \overline{g}(t, \widetilde{x})\omega + \widehat{g}(t, \widetilde{x})\mu \tag{15}$$

Pelas partes 1 e 2 do lema 4 temos que

$$span\{dt, d\widetilde{x}\} = span\{dt, dx, dy, \ldots, dy^{(k^*-1)}\}$$

e

$$span\{dt, d\widetilde{x}, d\widetilde{u}\} = \mathcal{Y}_{k^*}.$$

Note que, por construção, temos que $span\{dt, d\widetilde{x}\} = span\{dt, dz\}$ e $span\{dt, d\widetilde{x}, d\widetilde{u}\} = span\{dt, dz, dv\}$, que define uma relação de realimentação local de estados estática entre a representação de estados $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$ e (z, v).[2] □

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 6. Todas essas propriedades são facilmente obtidas das afirmações 5, 6 e 9 do lema 4 e do lema 3. □

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 2. A idéia[3] da prova da proposição 2 é aplicar o lema 5 e mostrar que (z_b, v_b) é uma representação local de estados de Γ e nas coordenadas $\{t, z_a, V_a\}$ para Γ e $\{t, z_a, z_b, V_a, V_b\}$ para S, a imersão ι é dada por

$$\iota(t, z_b, V_b) = (t, 0, z_b, 0, V_b).$$

Além disso, a representação de estados (z_b, v_b) induz equações de estados de Γ dada por

$$\dot{z}_b = f_b(t, 0, z_b, 0, v_b) \tag{16}$$

onde f_b são dadas pelas equações 14. Note que no lema 5 o estado de Γ pode ser escolhido como um subconjunto conveniente de x e a entrada v_b pode ser escolhida como um subconjunto conveniente de u.

Em outras palavras, v_b é uma parte diferencialmente independente de u e as restrições $y \equiv 0$ induzem relações diferenciais que ligam as outras componentes de u. Isso explica porquê chamamos x de "pseudo-estado" e u de "pseudo-entrada" de Γ. □

Agora mostraremos que o fato de Γ ser um sistema implícito regular implicam (A1) e (A2) da proposição 2.

---

[2]Veja a definição de realimentação local de estados estática: (definição 31).

[3]Um detalhe importante que deve ser observado no esqueleto dessa prova é a construção de um atlas suave de Γ.

LEMA 7. *Seja S um sistema explícito*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

tal que o sistema implícito

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) = 0 \end{aligned}$$

correspondente seja regular. Seja $n = card(x)$. Então as seguintes afirmações são válidas:

(i) *Sejam*

$$\mathbb{Y}_k = \text{span}\{dy, \ldots, dy^{(k)}\}$$

e

$$Y_k = \text{span}\{dt, dy, \ldots, dy^{(k)}\}.$$

Então $\text{span}\{dt\} \cap \mathbb{Y}_k|_\xi = \{0\}$ *em uma vizinhança aberta de todo ponto $\xi \in \Gamma$, para $k \in \mathbf{N}$.*

(ii) *Considere a representação de estados* (13-14) *do lema 5. Então*

$$\text{span}\{dz_a, (dv_a^{(k)} : k \in \mathbf{N})\} = \text{span}\{dy^{(k)} : k \in \mathbf{N}\}$$

em torno de $\xi \in \Gamma$.

(iii) *As condições de regularidade do sistema* Γ[4] *implicam* (A1) *e* (A2) *da proposição* 2.

DEMONSTRAÇÃO. Mostraremos primeiramente que

$$span\{dt\} \cap \mathbb{Y}_k|_\xi = \{0\}$$

para todo ponto de Γ. De fato, se $\xi \in \Gamma$ e $\eta = \sum_{i,j} \alpha_{ij} dy_j^{(i)}|_\xi = \beta dt|_\xi$ então $\left\langle \eta; \frac{d}{dt} \right\rangle = \sum_{i,j} \left\langle \alpha_{ij} dy_j^{(i)}|_\xi; \frac{d}{dt} \right\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \left\langle dy_j^{(i)}|_\xi; \frac{d}{dt} \right\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} y_j^{(i+1)} = \beta = 0.$

Como

$$\dim Y_k|_\xi = \dim(span\{dt\}|_\xi) + \dim(\mathbb{Y}_k|_\xi) - \dim(span\{dt\}|_\xi \cap \mathbb{Y}_k|_\xi)$$

a não singularidade de $span\{dt\}$, de Y_k e de $\mathbb{Y}_k$ implica que $span\{dt\} \cap \mathbb{Y}_k$ é não singular em torno de $\xi \in \Gamma$ e portanto temos (i).

Para mostrar (ii), seja $\eta \in \mathbb{Y}_k$. Como $span\{dt, dz_a, (dv_a^{(k)} : k \in \mathbf{N})\} = span\{dt, dy^{(k)} : k \in \mathbf{N}\}$, segue que $\eta = \beta dt + \sum_i \gamma_i dz_{a_i} + \sum_{i,j} \delta_{ij} dv_{a_j}^{(i)}$. Pelo lema 5 temos que $\mathcal{Z} = \{z_a, (v_a^{(k)} : k \in \mathbf{N})\} \subset \mathcal{Y} = \{y^{(k)} : k \in \mathbf{N}\}$. De (i), segue que $\beta = 0$ e portanto temos (ii).

Agora, como $\left\{t, z_a, z_b, (v_a^{(k)}, v_b^{(k)} : k \in \mathbf{N})\right\}$ é um sistema de coordenadas local, por (ii) segue-se que nessas coordenadas $y^{(k)}$ não depende de t, mas somente das coordenadas

$$\left\{z_a, (v_a^{(k)} : k \in \mathbf{N})\right\}.$$

[4]Veja a definição de sistema implícito regular da definição 32.

Em particular, se $(\bar{t}, \bar{z}_a, \bar{z}_b, \overline{V}_a, \overline{V}_b) \in \Gamma$, então $(\bar{t} + \epsilon, \bar{z}_a, \bar{z}_b, \overline{V}_a, \overline{V}_b) \in \Gamma$ para todo $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, mostrando que (A1) e (A2) são implicadas pelas condições de regularidade da definição 32. □

2. Representação canônica de estados de sistemas implícitos

As seguintes proposições caracterizam a representação de estados de sistemas implícitos que tem um significado canônico.[5]

PROPOSIÇÃO 3. *Seja k^* o inteiro tal que $\sigma_k = \rho_k$ para todo $k \geq k^*$, como no lema 4. Considere agora, o sistema explícito S definido pelas equações* (5) *e sejam $\{\widehat{x}\}$ e $\{\widehat{u}\}$ conjuntos de funções definidas em S tais que (localmente), as projeções canônicas de $\{d\widehat{x}\}$ em $\mathcal{Y}_{k^*}/Y_{k^*}$ e as projeções canônicas de $\{d\widehat{u}\}$ em $(\mathcal{Y}_{k^*} + \mathrm{span}\{du\})/\mathcal{Y}_{k^*}$ sejam bases. Então $(\widehat{x}, \widehat{u})$ é uma representação local de estados do sistema implícito* (4).

DEMONSTRAÇÃO. Do lema 4 afirmação (7) é fácil mostrar que

$$\dim \mathcal{Y}_{k^*}/Y_{k^*} = \dim \mathcal{Y}_{k^*-1}/Y_{k^*-1}.$$

Disso segue facilmente que a construção da representação de estados (z_b, v_b) de Γ dada pela equação (16) (ver lema 5) é equivalente ao afirmado nessa proposição com $z_b = \widehat{x}$ e $v_b = \widehat{u}$. □

DEFINIÇÃO 37. Quando temos uma representação local de estados que satisfazem as condições da proposição 3 é chamada *representação de estados canônica.*

Note que a representação de estados (16), obtida por uma escolha de representação de estados é clássica, isto é, a derivada de um estado é uma função do estado e da entrada. Em particular essa representação de estados não tem uma resposta impulsiva, que pode aparecer com outras escolhas de representações de estado.

[5]Ou seja, quando $\{d\widehat{x}\}$, que é uma base de $\mathcal{Y}_{k^*}$, é projetada em $\mathcal{Y}_{k^*}/Y_{k^*}$, obtemos uma base de $\mathcal{Y}_{k^*}/Y_{k^*}$.

CAPÍTULO 3

Índice diferencial

O índice de EDAs (Equações Diferenciais Algébricas ou DAEs – *differential algebraic equations*) foi estudado em [**CG95, LV98**] entre outros. Neste trabalho consideramos o índice diferencial.[1] Em [**FLMR95b**] foi dada uma definição geométrica de índice de EDAs. Foi mostrado que esta definição é compatível com outras definições dadas anteriormente, como em [**FLR93**] para sistemas lineares, pois a definição de índice aplicada ao sistema linearizado coincide com a definição não linear.

Neste capítulo daremos uma nova definição geométrica de *índice diferencial de equações diferenciais algébricas* que tem a forma

$$\begin{aligned} x(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) = 0. \end{aligned}$$

Esta definição geométrica será comparada com a noção clássica de índice e mostraremos que esta é independente da representação canônica de estados escolhida. Em particular, o índice de um sistema não depende da entrada canônica escolhida dentre as componentes da pseudo-entrada u. Afirmamos ainda que nossa definição é compatível com EDAs subdeterminadas[2], para as quais a definição usual de índice não é compatível. Nossas condições de regularidade da definição 32 asseguram que o índice é um invariante do sistema.

1. Uma nova definição para o índice diferencial

DEFINIÇÃO 38. Considere Γ o sistema implícito regular dado pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) = 0 \end{aligned}$$

e seja $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ a estrutura algébrica no infinito desse sistema. Seja k^* o menor inteiro tal que $\sigma_{k^*} = \max\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$. O inteiro k^* é chamado *índice diferencial* do sistema implícito regular Γ.

O próximo resultado mostra que o índice é a menor ordem de derivação das restrições y de modo que $\dot{x}$ pode ser calculado como uma função de um estado canônico e de uma entrada canônica.

[1] O índice diferencial pode diferir do índice de perturbação ou de outras noções de índices, como foi mostrado em [**CG95**].

[2] Em geral, os sistemas de controle são sistemas subdeterminados, isto é, existem mais variáveis que equações.

PROPOSIÇÃO 4. *Suponha que* $(\widehat{x}, \widehat{u})$ *é uma representação canônica de estados de um sistema regular implícito. Suponha que o sistema explícito* S *definido por*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) = 0 \end{aligned}$$

seja bem-formada[3]*, isto é,*

$$\operatorname{span}\{dt, dx, d\dot{x}\} = \operatorname{span}\{dt, dx, du\}.$$

Então o índice k^* *é o menor inteiro* k^* *tal que* $\dot{x}$ *pode ser calculado como função de* $\{t, \widehat{x}, \widehat{u}, y, \ldots, y^{(k^*)}\}$. *Em outras palavras, as seguintes condições valem para o sistema explícito* S *definido por*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) = 0 \end{aligned}$$

para $k \geq k^*$*:*

$$\operatorname{span}\{d\dot{x}\} \subset \operatorname{span}\{dt, d\widehat{x}, d\widehat{u}, dy, \ldots, dy^{(k)}\} \subset \mathcal{Y}_k + \operatorname{span}\{d\widehat{u}\} \tag{22}$$

mas o mesmo não ocorre para $k < k^*$.

DEMONSTRAÇÃO. Por construção, temos que:

$$span\{dt, dx, du\} \subset span\{dt, d\widehat{x}, d\widehat{u}, dy, \ldots, dy^{(k^*)}\} \tag{23}$$

Como S é clássico, segue que (22) é satisfeito. Agora suponha que (22) valha para algum $k \leq k^*$. Pelo lema 4, afirmação (2) é fácil ver que $\dim \widehat{u}$ é dada por $m - \sigma_{k^*}$ e que[4]

$$\dim(\mathcal{Y}_k \oplus span\{d\widehat{u}\}) = (1 + n + \sigma_0 + \cdots + \sigma_k) + (m - \sigma_{k^*}). \tag{24}$$

De (22) vemos que

$$span\{dt, dx, du\} = span\{dt, dx, d\dot{x}\} \subset Y_k \oplus span\{d\widehat{u}\}.$$

Em particular, segue que

$$\mathcal{Y}_k \oplus span\{d\widehat{u}\} = \mathcal{Y}_k + span\{du\} \tag{25}$$

Pelo lema 4, partes (1) e (2) temos $\mathcal{Y}_k + span\{du\} = span\{dx_{k-1}, du_{k-1}\}$. Portanto,

$$\dim(\mathcal{Y}_k + span\{du\}) = 1 + n + \sigma_0 + \cdots + \sigma_{k-1} + m. \tag{26}$$

Segue de (24), (25) e (26) que $\sigma_k = \sigma_{k^*}$ e assim $k = k^*$. □

Os seguintes pontos devem ser observados:

- Podemos reformular uma nova versão da proposição 4 substituindo (22) pela condição

$$span\{d\dot{x}\} \subset span\{dt, dx, d\widehat{u}, dy, \ldots, dy^{(k)}\} = \mathcal{Y}_k + span\{d\widehat{u}\}. \tag{27}$$

  Nesta versão, o índice k^* é o menor inteiro k tal que a última equação vale.[5]

[3]Isto é equivalente a dizer que $g(t, x)$ do sistema (5) tem posto coluna máximo [**Rud95**].

[4]Note que a soma direta da equação (24) é conseqüência do fato que as projeções canônicas de $\{d\widehat{u}\}$ formam uma base de $(\mathcal{Y}_{k^*} + span\{du\})/\mathcal{Y}_{k^*}$.

[5]A prova desse fato é análoga e é deixada ao leitor.

- Quando as equações de estado de um sistema explícito, como (5), não são bem-formadas, pode-se substituir a condição (22) por

$$span\{dx, du\} \subset span\{dt, d\widehat{x}, d\widehat{u}, dy, \ldots, dy^{(k)}\}$$

- Pode-se mostrar que a definição (38) é influenciada por um distúrbio $w(t) \in \mathbf{R}^r$ de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t) \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t)) = w(t) \end{aligned} \tag{28}$$

2. Comparação entre o índice clássico e a nova definição

Quando $\sigma_{k^*} = m$, então o sistema regular implícito é completamente determinado, isto é, não existe entrada ($\widehat{u} = \varnothing$). Neste caso, de (27) vemos que o índice k^* é o menor inteiro k tal que

$$span\{d\dot{x}\} \subset span\{dt, dx, dy, \ldots, dy^{(k)}\},$$

que é essencialmente a definição usual de índice diferencial.

Para fazermos a comparação entre os índices, lembremos, primeiramente, a definição de índice diferencial encontrada em **[CG95, BCP96, AP98]**.

Dada uma equação diferencial algébrica (solúvel):

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$$

onde $x \in \mathbf{R}^n$, derivando a equação k vezes obtemos o seguinte vetor:

$$\begin{bmatrix} F(t, x, \dot{x}) \\ F_t + F_x(t, x, \dot{x})\dot{x} + F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\ddot{x} \\ \cdots \\ \dfrac{d^k}{dt^k} F(t, x, \dot{x}) \end{bmatrix} = F_k(t, x, \dot{x}, w) = 0 \tag{29}$$

onde $w = (x^{(2)}, \ldots, x^{(k+1)})$. Grosseiramente falando, o índice diferencial ν_d de uma equação diferencial algébrica é o menor inteiro k tal que $\dot{x}$ é unicamente determinado por (t, x) e as equações (29).

É claro que esta definição não é abrangente quando a equação diferencial algébrica representa um sistema indeterminado porque neste caso $\dot{x}$ dependerá também das entradas de controle $\widehat{u}(\cdot)$, isto é, nunca será determinado por (t, x) e (29). Neste caso, devemos escolher uma função entrada $\widehat{u}(\cdot)$ de forma que a equação diferencial algébrica se torne completamente determinada.

Suponhamos que seja este o caso, isto é, consideremos o sistema completamente determinado:

$$\dot{x} = u \tag{30a}$$

$$y = F(t, x, u) = 0 \tag{30b}$$

que está na forma implícita (4). Supondo que essa EDA seja regular, conforme a definição 32 e que a EDA seja completamente determinada, isto é, $\sigma_{k^*} = m = \dim(u)$, então podemos aplicar a nossa definição de índice, obtendo a definição clássica de índice.[6]

[6] De fato (2) é equivalente a dizer que $\dot{x}$ pode ser determinado por (t, x), (30b) e suas derivadas.

Mostraremos agora que este modo de definir o índice aumenta de um o índice diretamente obtido pela nossa definição [CG95]. Para ver isso, tomemos, por exemplo, as equações dadas por:

$$\begin{aligned}
&(31a) & \dot{x}_1 &= x_3 \\
&(31b) & \dot{x}_2 &= x_4 \\
&(31c) & \dot{x}_3 &= -x_1\lambda \\
&(31d) & \dot{x}_4 &= x_2\lambda - g \\
&(31e) & y &= x_1^2 + x_2^2 - L^2 = 0
\end{aligned}$$

onde L e g são números reais positivos. Este sistema está, claramente, na forma (4) com $u = \lambda$.

Calculando o índice diferencial clássico, obtemos $\nu_d = 3$, quando consideramos $\lambda = x_5$. Entretanto, calculando o índice diferencial, de acordo com nossa definição, obtemos $k^* = 2$. Pois

$$\begin{aligned}
y &= x_1^2 + x_2^2 - L & Y_0 &= span\{dt, dx_1, dx_2\} \\
y' &= 2x_1x_3 + 2x_2x_4 & Y_1 &= span\{dt, dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\} \\
y'' &= 2x_3^2 + 2x_1^2u + 2x_4^2 + 2x_2^2u - 2x_2g & Y_2 &= span\{dt, dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, u\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_0 &= \{dt, dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\} \\
\mathcal{Y}_1 &= \mathcal{Y}_0 \\
\mathcal{Y}_2 &= Y_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A explicação dessa diferença é a seguinte:

> Para integrar esse sistema é necessário determinar λ e $\dot{x}$ mas não é necessário conhecer $\dot{\lambda}$.

Assim, para recuperar nossa definição de índice a partir da definição usual, podemos re-escrever a definição clássica da seguinte maneira:

> Dada uma equação diferencial algébrica (solúvel) não linear completamente determinada:
>
> $$F(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda) = 0$$
>
> onde F depende de $\dot{x}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então o índice é o menor inteiro k tal que se pode calcular $\dot{x}$ como função de (t, x) da equação diferencial algébrica e de suas derivadas até ordem k.

Em outras palavras devemos distinguir as variáveis diferenciais x das variáveis algébricas λ. Note também que, para o sistema (31), podemos calcular λ como uma função de x e $\ddot{y}$.

Portanto o sistema pode ser integrado com o conhecimento da derivada segunda das restrições. Logo, parece-nos que a real dificuldade que surge para a integração das equações diferenciais (30) corresponde ao índice 2 e não ao índice 3. Notemos que, aplicando a definição de índice para um sistema de controle explícito, da mesma maneira que temos feito

para recuperar a definição de índice, obtemos $\nu_d = 1$. Entretanto, nossa definição nos dá $k^* = 0$.

Podemos mostrar que a definição 38 é equivalente a uma definição de [**FLMR95b**]. Em particular, suponha que o sistema implícito regular (4) é alterado por um distúrbio $\omega(t) \in \mathbf{R}^r$ de acordo com as seguintes equações:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t) \tag{32a}$$

$$y(t) = h(t, x(t), u(t)) = \omega(t) \tag{32b}$$

Então o índice k^* é a maior ordem da derivada em relação ao tempo de $\omega(t)$ que influencia a resposta do sistema (32).

CAPÍTULO 4

Soluções convergentes para a solução de um sistema implícito

Nesta parte mostraremos que, dado um sistema implícito, pode-se construir um sistema explícito tal que algumas componentes das soluções do sistema explícito convergem para a soluções do sistema implícito.

Para isto, pode-se calcular simbolicamente as derivadas das restrições até ordem k^*, onde k^* é o índice diferencial de acordo com a definição do capítulo anterior. Primeiramente estudaremos esta questão apenas localmente. Depois disso, discutiremos como estabelecer uma versão global deste resultado.

1. Coordenadas especiais

Nesta seção estabelecemos a existência de coordenadas especiais do sistema S que são instrumentos para estabelecer os resultados principais.

PROPOSIÇÃO 5. *Seja S um sistema com representação de estados globais* (5). *Seja $\xi \in S$ um ponto regular de $\mathcal{Y}_k$ e Y_k, para $k \in \{0, \ldots, n\}$ definida por* (6a-6b). *Considere a notação do lema 4 e seja $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ a estrutura algébrica no infinito do sistema e seja dx_k uma base local de $\mathcal{Y}_k$ em torno de ξ construída pelo k-ésimo passo do algoritmo da extensão dinâmica. Seja k^* o índice de convergência da estrutura no infinito. Escolha uma família de subconjuntos da entrada $u \supset \widehat{u}_0 \supset \cdots \supset \widehat{u}_{k^*}$ com $card(\widehat{u}_k) = m - \sigma_k$ e de modo que $(dt, dx_k, d\widehat{u}_k)$ é uma base local de $\mathcal{Y}_k + \operatorname{span}\{du\}$ em torno de ξ. Então as funções*

$$\left\{t, x_{k^*}, \widehat{u}_{k^*}^{(0)}, \ldots, \widehat{u}_0^{(k^*)}, Z\right\} \tag{33}$$

onde $Z = \left\{u^{(k^*+k+1)} : k \in \mathbf{N}\right\}$, formam um sistema de coordenadas local em torno de ξ que é ilimitado em $W = (\widehat{u}_{k^*}^{(0)}, \ldots, \widehat{u}_0^{(k^*)}, Z)$ e tal que $\left\{t, x_{k^*}, \widehat{u}_{k^*}^{(0)}, \ldots, \widehat{u}_0^{(k^*)}\right\}$ seja uma base de $\operatorname{span}\{dt, du, \ldots, du^{(k^*)}\}$. Em particular, se $\{d\widehat{y}\}$ é uma base local de Y_{k^*} e $(\widehat{x}, \widehat{u})$ são definidas como na proposição 3, então

$$\left\{t, \widehat{x}, \overline{y}, \widehat{u}, \widehat{u}_{k^*-1}^{(1)}, \ldots, \widehat{u}_0^{(k^*)}, Z\right\} \tag{34}$$

também é um sistema de coordenadas local. Além disso esse sistema de coordenadas é ilimitado em $W = \left\{\widehat{u}, \widehat{u}_{k^*-1}^{(1)}, \ldots, \widehat{u}_0^{(k^*)}, Z\right\}$ e $\left\{dt, d\widehat{y}, d\widehat{u}, d\widehat{u}_{k^*-1}^{(1)}, \ldots, d\widehat{u}_0^{(k^*)}\right\}$ é uma base de $\operatorname{span}\{dt, du, \ldots, du^{(k^*)}\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente notemos que pelas partes (1) e (2) do lema 4 (veja também (S1) e (S2) no apêndice C), é fácil ver que a escolha de $\widehat{u}_k$ descrito acima é uma possível escolha de tais subconjuntos das entradas no algoritmo da extensão dinâmica. Assim, denotamos por (x_k, u_k) a representação de estados obtida no passo k do

algoritmo da extensão dinâmica. A prova segue por indução. No passo 0 do AED, escrevemos um sistema global de coordenadas induzido pela representação de estados (x, u) como $\{t, x, u, \ldots, u^{(k^*)}, Z_0\}$, com $Z_0 = \{u^{(k^*+k+1)} : k \in \mathbf{N}\}$. Pelo lema 2 e da descrição do AED segue que $\left\{t, x_0, u_0, \ldots, u_0^{k^*-1}, \widehat{u}_0^{(k^*)}, Z_0\right\}$ é um sistema local de coordenadas que é ilimitado em $Z_1 = (\widehat{u}_0^{(k^*)}, Z_0)$.

Continuando dessa forma, no passo k do AED, construímos uma carta local

$$\left\{t, x_k, u_k, \ldots, u_k^{(k^*-k-1)}, \widehat{u}_k^{(k^*-k)}, Z_k\right\},$$

onde $Z_k = \left\{\widehat{u}_{k-1}^{(k^*-k+1)}, \ldots, \widehat{u}_0^{(k^*)}, Z_0\right\}$, que é ilimitado em $\left\{\widehat{u}_k^{(k^*-k)}, Z_k\right\}$. Note que, em cada passo, a parte (2) do lema 2 mostra que

$$\left\{dt, dx_k, du_k, \ldots, du_k^{(k^*-k-1)}, d\widehat{u}_k^{(k^*-k)}, d\widehat{u}_{k-1}^{(k^*-k+1)}, \ldots, d\widehat{u}_0^{(k^*)}\right\}$$

é uma base de $span\{dt, dx, du, \ldots, du^{(k^*)}\}$. Assim a primeira parte do resultado é facilmente provada por indução. O fato de (34) ser uma carta local com as propriedades desejadas é uma conseqüência do lema 3. □

2. Sistemas aproximativos

Para simplificar, consideraremos as seguintes hipóteses para o sistema explícito (5) associado ao sistema implícito (4):

(1) O conjunto $L = \{dt, dy^{(0)}, \ldots, dy^{(k^*)}\}$ é independente para todo $\xi \in S$.

(2) Existe uma escolha fixa de funções de (34) de forma que

$$\left\{dt, d\widehat{x}, d\widehat{y}, d\widehat{u}, d\widehat{u}_{k^*-1}^{(1)}, \ldots, d\widehat{u}_0^{(k^*)}\right\}$$

é globalmente uma base do $span\{dt, dx, du, \ldots, du^{(k^*)}\}$.

(3) A entrada do sistema implícito é $\widehat{u} = \widehat{u}_{k^*}^{(0)}$.

Veremos que a condição (1) assegurará a convergência global de nosso principal resultado. Se o conjunto L é dependente para alguns pontos fora de Γ então nosso resultado valerá somente localmente.

A condição (2) garantirá que não é necessário procurar funções diferentes das (34) durante o processo de integração[1].

A condição (3) implica que a entrada do sistema implícito é uma entrada canônica. Em particular, o comportamento do sistema não é impulsivo.

Construiremos agora, o sistema $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = \overline{\tau}(t, x(t), \nu(t), \widehat{u}(t), \widehat{u}^{(1)}(t))$.

Seja $M = \mathbf{R} \times \mathcal{X} \times (\mathbf{R}^m)^{k^*+1}$ com coordenadas globais $(t, x, u^{(0)}, \ldots, u^{(k^*)})$, onde $x \in \mathbf{R}^n$ e $u^{(k)} \in \mathbf{R}^m$, $k = 0, \ldots, k^*$. Considere a partição[2] $u^{(0)} = (\overline{u}, \widehat{u})$ onde $\dim(\overline{u}) = \sigma_{k^*}$ e $\dim \widehat{u} = m - \sigma_{k^*}$. Seja $N = \mathbf{R} \times \mathcal{X} \times \mathbf{R}^{\sigma_{k^*}} \times (\mathbf{R}^m)^{k^*}$, com coordendas globais $(t, x, \overline{u}, u^{(1)}, \ldots, u^{(k^*)}) =$

[1]Quando essa hipótese não valer, pode-se escolher estas funções ponto a ponto para melhorar o condicionamento da matriz T das diferenciais $dt, d\widehat{x}, d\widehat{y}, d\widehat{v}, d\widehat{u}$, como nas equações (36).

[2]Com possível reordenação das componentes de $u^{(0)}$.

(t, x, ν) onde $\nu = (\overline{u}, u^{(1)}, \ldots, u^{(k^*)})$. Note que, após uma reordenação, as coordenadas de M são $(t, x, \nu, \widehat{u})$.

Seja S o sistema (no sentido de [**FLMR99**], isto é, S é um *diffiety*), com coordenadas globais $\{t, x, (u^{(k)} : k \in \mathbf{N})\}$ definida pelo sistema explícito (5). Seja $\dfrac{d}{dt}$ o campo de Cartan associado a S (dado por (2)). Como anteriormente, seja $y = a(t, x) + b(t, x)u^{(0)}$ a saída de S e denotemos por $y^{(0)} := y$ e $y^{(k)} = L_{\frac{d}{dt}} y^{(k-1)}$.

Seja $\pi_M : S \longrightarrow M$ a projeção canônica. Como abuso de notação, consideraremos que $\{y^{(0)}, \ldots, y^{(k^*)}\}$ são funções definidas em M. Seja $\xi \in S$ e $\pi_M(\xi) = \mu = (t, x, \nu, \widehat{u})$. Com o mesmo abuso de notação, consideraremos que

$$\mathbb{B} = \{dt, d\widehat{x}, d\widehat{y}, d\widehat{u}, d\nu\} = \left\{dt, d\widehat{x}, dy^{(0)}, \ldots, dy^{(k^*)}, d\widehat{u}, d\widehat{u}^{(1)}_{k^*-1}, \ldots, d\widehat{u}^{(k^*)}_0\right\}$$

é uma base local de $T^*_\nu M$ induzida pela proposição (5). Definimos $\tau_{\widehat{x}} = \dfrac{d}{dt}\widehat{x} = \widehat{f}(x) + \widehat{g}(x)u$ e seja $\widehat{y} = (y^{(0)}, \ldots, y^{(k^*)})$ e $\widehat{v} = (\widehat{u}^{(1)}_{k^*-1}, \ldots, \widehat{u}^{(k^*)}_0)$. Notemos que, a menos de uma reordenação de coordenadas, temos $M \simeq N \times \widehat{U}$ onde $\widehat{U} = \mathbf{R}^{m-\sigma_{k^*}}$. Assim, seja $\tau : M \times \widehat{U} \longrightarrow TM$ o campo definido por:

$$dt(\tau) = \tau_t = 1 \tag{35a}$$

$$d\widehat{x}(\tau) = \tau_{\widehat{x}} = \widehat{f}(x) + \widehat{g}(x)u \tag{35b}$$

$$d\widehat{y}(\tau) = \tau_{\widehat{y}} = -\gamma\widehat{y} \tag{35c}$$

$$d\widehat{v}(\tau) = \tau_{\widehat{v}} = -\beta\widehat{v} \tag{35d}$$

$$d\widehat{u}(\tau) = \tau_{\widehat{u}} = \widehat{u}^{(1)} \tag{35e}$$

Apenas para facilitar a leitura, faremos um sumário das notações desta seção na seguinte tabela:

TABELA 1. Tabela de notações desta seção.

Coordenadas	Notação	Significado
$u^{(0)} = u$	$(\overline{u}, \widehat{u})$	$\widehat{u}$ é a entrada do DAE
$(\overline{u}, u^{(1)}, \ldots, u^{(k^*)})$	ν	Derivadas de u, separado de $\widehat{u}$
(t, x, ν)	ζ	Estado de $\overline{\tau}$ (coordenadas canônicas de N)
$(t, x, \nu, \widehat{u})$	$(\zeta, \widehat{u})$	Coordenadas canônicas de M
$(\widehat{u}^{(1)}_{k^*-1}, \ldots, \widehat{u}^{(k^*)}_0)$	$\widehat{v}$	Parte do sistema de coordenadas da hipótese (2)
$(y^{(0)}, \ldots, y^{(k^*)})$	$\widehat{y}$	Derivadas das saídas
$(t, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{v}, \widehat{u})$		Novas coordenadas para M (veja a hipótese (2))

Seja T a matriz formada pelas diferenciais $dt, d\widehat{x}, d\widehat{y}, d\widehat{v}, d\widehat{u}$ quando escrita nas coordenadas $\{t, x, u^{(0)}, \ldots, u^{(k^*)}\}$ como vetores coluna. Seja

$$T = \begin{pmatrix} dt \\ d\widehat{x} \\ d\widehat{y} \\ d\widehat{v} \\ d\widehat{u} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

As equações (35a-35e) são equivalentes a[3]

$$T\tau = \begin{pmatrix} \tau_t \\ \tau_{\widehat{x}} \\ \tau_{\widehat{y}} \\ \tau_{\widehat{v}} \\ \tau_{\widehat{u}} \end{pmatrix} = \widehat{\tau}. \tag{37}$$

Seja $\Pi : M \longrightarrow N$ a projeção canônica. Note que, nas coordenadas $(t, x, \nu, \widehat{u})$ para M e (t, x, ν) para N, $\Pi(t, x, \nu, \widehat{u}) = (t, x, \nu)$. Seja $\overline{\tau} : M \times \widehat{U} \longrightarrow TN$ o campo parametrizado definido por:

$$\overline{\tau} = \Pi_* \tau \tag{38}$$

A equação (38) significa que o campo parametrizado $\overline{\tau}$ nas coordenadas (t, x, ν) é obtido do campo τ escrito nas coordenadas $(t, x, \nu, \widehat{u})$ através da eliminição de seus componentes nas direções $\dfrac{\partial}{\partial \widehat{u}}$. Desde que $\overline{\tau}$ é parametrizada por $\widehat{u}, \widehat{u}^{(0)}$, então $\overline{\tau}$ define um sistema de controle (não clássico) com estado (x, ν) e entrada $\widehat{u}$.

A parte (ii) do próximo teorema (que é conseqüência da parte (i)) significa que toda solução do sistema implícito

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) = 0 \end{aligned}$$

corresponde a uma solução de

$$\dot{\zeta}(t) = \overline{\tau}(\zeta(t), \widehat{u}(t), \widehat{u}^{(1)}(t)) \tag{40a}$$

$$\zeta(t_0) = \zeta_0 \tag{40b}$$

com condições iniciais em uma variedade invariante Υ de $\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = \overline{\tau}(\zeta(t), \widehat{u}(t), \widehat{u}^{(1)}(t)) \\ \zeta(t_0) = \zeta_0 \end{cases}$.
Além disso, as partes (iii) e (iv) mostram que toda solução de (40) converge para Υ e toda solução de (40) que está perto de Υ está perto da solução do sistema implícito.

TEOREMA 4. *Suponha que as condições* (1), (2) *e* (3) *estejam satisfeitas. Chamemos um ponto* $(t, x, \nu, \widehat{u}) \in M = N \times \widehat{U}$ *de* $(\zeta, \widehat{u})$ *onde* $\zeta = (t, x, \nu)$. *Seja* π_x *a projeção canônica*

[3]Do ponto de vista numérico, é melhor resolver a equação linear $T\tau = \widehat{\tau}$ do que calcular $\tau = T^{-1}\widehat{\tau}$. Do mesmo modo, quando integramos numericamente a equação explícita, não há necessidade de incluir a equação $\dot{t} = 1$.

$\pi_x : N \longrightarrow \mathcal{X}$ definido por $\pi_x(\zeta) = x$ e $\pi_u : M \longrightarrow \mathbf{R}^m$ definida por $\pi_u(\zeta, \widehat{u}) = u^{(0)}$. Escolha uma entrada lisa $\widehat{u} : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbf{R}^{m-\sigma_{k^*}}$. Considere o sistema de controle definido em N com entrada $\widehat{u}(t) \in \widehat{U}$ dada por: $\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = \overline{\tau}(\zeta(t), \widehat{u}(t), \widehat{u}^{(1)}(t)) \\ \zeta(t_0) = \zeta_0 \end{cases}$ onde $\overline{\tau}$ é definido por (37)-(38). Considere $y^{(k)} = \dfrac{d^k}{dt^k}(y)$, $k = 0, \ldots, k^*$ como uma função definida em M e seja $\widehat{y} = (y^{(0)}, \ldots, y^{(k^*)})$. Defina o conjunto $\Upsilon = \{(\zeta, \widehat{u}) \in M | \widehat{y}(\zeta, \widehat{u}) = 0\}$. Então, as seguintes propriedades valem:

i. *Se $(\zeta, \widehat{u}) = (t, x, \nu, \widehat{u}) \in \Upsilon$, então*

$$\dot{x}_i = \langle dx_i, \tau \rangle |_{(\zeta, \widehat{u})} = \frac{d}{dt}(x_i)|_{(\zeta, \widehat{u})} = f_i(x, u^{(0)})|_{(\zeta, \widehat{u})}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ii. *Escolha uma entrada $\widehat{u}(\cdot)$ e seja $\zeta(t)$ uma solução de (40) com $(\zeta(t_0), \widehat{u}(t_0)) \in \Upsilon$. Então $x(t) = \pi_x(\zeta(t))$ é uma solução de (4) com entrada $u(t) = \pi_u(\zeta(t), \widehat{u}(t))$. Reciprocamente, se $x(t)$ é uma solução lisa de (4), então $x(t)$ é igual a $\pi_x(\zeta(t))$ para alguma solução de (40) com $(\zeta(t_0), \widehat{u}(t_0)) \in \Upsilon$ e $\widehat{v}(\zeta(t), \widehat{u}(t)) \equiv 0$.*

iii. *Seja $\zeta(t)$ uma solução de (40) com $\zeta(t_0)$ e entrada $\widehat{u}(t)$. Suponha que $\zeta(t)$ esteja bem definida para $t \in [t_0, t_1]$, então $\|\widehat{y}(t)\| \leq e^{-\gamma t}\|\widehat{y}(t_0\|$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.*

iv. *Seja $L \subset M$ um conjunto compacto. Seja $L_1 = \{\mu \in M | dist(\mu, L) < \varepsilon_1\}$ para algum $\varepsilon_1 > 0$. Suponha que exista $\alpha > 0$ tal que, se $\|\widehat{u}(t)\| \leq \alpha$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, então toda solução $\zeta(t)$ de (40) com condição inicial $(\zeta(t_0), \widehat{u}(t_0)) \in L_1$, é tal que $(\zeta(t), \widehat{u}(t))$ está bem definida e fica contida em um conjunto compacto $R \subset M$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.*

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\zeta(t), t \in I = [t_0, t_f]$ é uma solução das equações (40) com condição inicial em L, e $\|\widehat{y}(\zeta(t_0), \widehat{u}(t_0))\| < \varepsilon$, então existem $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ e uma solução $x(t)$ do sistema implícito (4) tal que $\|\pi_x(\zeta(t)) - x(t)\| \leq \kappa_1 \|\widehat{y}(t_0)\| e^{\kappa_2(t-t_0)}$ para todo $t \in I$.

DEMONSTRAÇÃO. **(i)** Seja $\pi_M : S \longrightarrow M$ a projeção canônica. Seja $\xi \in S$ e φ uma função no conjunto

$$\Psi = \{\Psi_1, \ldots, \Psi_\gamma\} = \left\{t, \widehat{x}, y^{(0)}, \ldots, y^{(k^*-1)}\right\}.$$

Nesta parte da demonstração distinguiremos a função x_i definida em S da função $\widetilde{x}_i$ definida em M tal que $x_i = \widetilde{x}_i \circ \pi_M$. Assim, podemos escrever $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi_M$, etc. A notação fica clara a partir do contexto.

Como $\{d\Psi\}$ é uma base de $\mathcal{Y}_{k^*-1}$, pela parte (7) do lema 4 temos que $d\widetilde{x} \in span\{d\widetilde{\Psi}\}$. Em particular devemos ter $d\widetilde{x}_i = \sum_{j=1}^{\gamma} \alpha_{ij} d\widetilde{\Psi}_j$. Note agora que

$$
\begin{aligned}
(41a) \qquad f_i(t,x,u) &= \langle dx_i, \frac{d}{dt}\rangle = \langle d(\widetilde{x}_i \circ \pi_M), \frac{d}{dt}\rangle \\
&= \langle \pi_M^* d\widetilde{x}_i, \frac{d}{dt}\rangle = \langle d\widetilde{x}_i, (\pi_M)_* \frac{d}{dt}\rangle \\
(41b) \qquad &= \langle \sum_{j=1}^{\gamma} \alpha_{ij} d\widetilde{\Psi}_j, (\pi_M)_* \frac{d}{dt}\rangle = \sum_{j=1}^{\gamma} \alpha_{ij} \langle d\widetilde{\Psi}_j, (\pi_M)_* \frac{d}{dt}\rangle.
\end{aligned}
$$

É fácil mostrar que, para todo $(\zeta, \widehat{u}) \in \Upsilon$, todo ξ tal que $(\zeta, \widehat{u}) = \pi_M(\xi)$ e toda função $\widetilde{\Psi}_j \in \widetilde{\Psi}$, para $j = 1, \ldots, \gamma$ temos:[4]

$$
(42) \qquad \langle d\widetilde{\Psi}_j, \tau\rangle|_{(\zeta,\widehat{u})} = \langle d\widetilde{\Psi}_j, (\pi_M)_* \frac{d}{dt}|_{\xi}\rangle = \langle d\Psi_j, \frac{d}{dt}\rangle|_{\xi}.
$$

De (41a), (41b) e (42) temos que:

$$
\begin{aligned}
f_i(t, \pi_x(\zeta), \pi_u(\zeta, \widehat{u})) &= \sum_{j=1}^{\gamma} \alpha_{ij} \langle d\widetilde{\Psi}_j, (\pi_M)_* \frac{d}{dt}(\xi)\rangle_{(\zeta,\widehat{u})} \\
&= \sum_{j=1}^{\gamma} \alpha_{ij} \langle d\widetilde{\Psi}_j, \tau\rangle|_{(\zeta,\widehat{u})} = \sum_{j=1}^{\gamma} \langle \alpha_{ij} d\widetilde{\Psi}_j, \tau\rangle|_{(\zeta,\widehat{u})} \\
&= \langle d\widetilde{x}_i, \tau\rangle_{(\zeta,\widehat{u})}
\end{aligned}
$$

para todo $(\zeta, \widehat{u}) \in \Upsilon$, mostrando (4).

(ii) Construa o sistema a partir de M com entrada $\widehat{u}^{(1)}$ e estado $\mu = (\zeta, \widehat{u})$ dado por

$$
(43) \qquad \dot{\mu} = \tau(\mu, \widehat{u}^{(1)})
$$

É claro que a equação (43) forma uma prolongação por integradores do sistema de equações (40). Além disso,

$$
\begin{pmatrix} \overline{\tau}(\zeta, \widehat{u}, \widehat{u}^{(1)}) \\ \widehat{u}^{(1)} \end{pmatrix} = \tau(\zeta, \widehat{u}, \widehat{u}^{(1)}).
$$

De (35c) é claro que Υ é um conjunto invariante para o sistema (43). Em particular, por (4) temos que $dx(\tau) = \dot{x} = f(x,u)$ em $\mu \in \Upsilon$ e assim temos a primeira parte de (4).

Agora, seja $x(t)$ uma solução de (4). Pela proposição 2, existe uma solução $\xi_1(t)$ de S com $y(t) \equiv 0$ e $x(t) = \xi_{1_x}(t)$, $u(t) = \xi_{1_u}(t)$ que satisfazem a equação diferencial $\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t)$. Temos que $\dot{\widehat{x}} = \tau_{\widehat{x}} = \widehat{f} + \widehat{g}u$ e assim $\widehat{x}(t)$ satisfaz (35b).

Note também que a proposição 5 assegura que a carta local

$$
\left\{t, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v}, (u^{k^*+k+1} : k \in \mathbf{N})\right\},
$$

[4]Isso é conseqüência de (35b)-(35c)-(35d) e o fato que $0 = \langle dy^{(j)}, \tau\rangle|_{(\zeta,\widehat{u})}$, $j = 0, \ldots, k^*$, para todo $(\zeta, \widehat{u}) \in \Upsilon$.

onde $\widehat{v} = (\widehat{u}_1^{(k^*-1)}, \ldots, \widehat{u}_{k^*}^{(0)})$, é ilimitada em $Z = \{\widehat{v}, (u^{(k^*+k+1)} : k \in \mathbf{N})\}$.

Como $y(\xi_1(t)) \equiv 0$, nessas coordenadas, temos que $\xi_1(t) = (t, \widehat{x}(t), 0, \widehat{u}(t), Z(t))$. Como esta carta local é ilimitada em $Z(t)$, podemos definir $\xi_2(t) = (t, \widehat{x}(t), 0, \widehat{u}(t), 0)$ simplesmente tomando $Z(t) \equiv 0$. Por construção, $span\{dt, dx, du\} \subset span\{d\widehat{x}, d\widehat{y}, d\widehat{u}\}$. Assim, fica claro que $\xi_{1_x}(t) = \xi_{2_x}(t)$ e $\xi_{1_u}(t) = \xi_{2_u}(t)$.

Agora observando $\mu_2(t) = (t, x(t), \nu(t), \widehat{u}(t)) = (\zeta_2(t), \widehat{u}(t)) = \pi_M(\xi_2(t))$, fica fácil verificar que $\mu_2(t)$ é uma solução de $\dot{\mu} = \tau(\mu, \widehat{u}^{(1)})$ (pois as condições (35) valem para $\mu_2(t)$). Portanto $\zeta_2(t)$ é uma solução de (40) com condição inicial $\zeta_0 = \zeta_2(t_0)$ e entrada $\widehat{u}(t)$. Como $Z(\xi_2(t)) \equiv 0$, temos que $\widehat{v}(\mu_2(t)) \equiv 0$.

(iii) Segue de (35c).

(iv) Sabemos que toda função suave é globalmente lipchitziana em um compacto R. Portanto, existe algum $k_1 > 0$ tal que $\|\tau(\zeta_1, \widehat{u}_1) - \tau(\zeta_2, \widehat{u}_2)\| \leq k_1 \|(\zeta_1, \widehat{u}_1) - (\zeta_2, \widehat{u}_2)\|$. Tomando $\widehat{u} = \widehat{u}_1 = \widehat{u}_2$, segue que $\|\tau(\zeta_1, \widehat{u}) - \tau(\zeta_2, \widehat{u})\| \leq k_1 \|\zeta_1 - \zeta_2\|$ para todo $(\zeta_1, \widehat{u}), (\zeta_2, \widehat{u}) \in R$.

Como duas soluções $\zeta_1(t)$ e $\zeta_2(t)$ de (40) com entrada limitada $\widehat{u}(\cdot)$ e com condições iniciais respectivamente $(\zeta_1(t_0), \widehat{u}(t_0))$, $(\zeta_2(t_0), \widehat{u}(t_0))$, ambos em L_1 estão bem definidas em $[t_0, t_1]$ e são tais que $(\zeta_1(t), \widehat{u}(t)) \in R$ e $(\zeta_2(t), \widehat{u}(t)) \in R$ para $t \in [t_0, t_1]$, das mesmas idéias da prova do resultado clássico de dependência contínua das soluções de equações diferenciais contínuas lipchitzianas,[5] temos:

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\| \leq K_1 e^{K_2(t-t_0)} \|\zeta_1(t_0) - \zeta_2(t_0)\|, \; t \in [t_0, t_1] \tag{44}$$

para certos números reais positivos K_1 e K_2.

Agora, em torno de todo ponto $\mu \in L$, podemos construir abertos V_μ, U_μ e cartas locais $\varphi_\mu : U_\mu \longrightarrow V_\mu$ de M tais que $(t, x, \nu, \widehat{u}) \longmapsto (t, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{v}, \widehat{u})$. Esta construção pode ser feita de modo que V_μ seja um aberto retangular que contenha $\varphi_\mu(\mu)$ e o fecho de U_μ seja compacto.

Como Υ é fechado, para todo ponto $\mu \notin \Upsilon$ podemos escolher V_μ e U_μ de modo que $\overline{U}_\mu \cap \Upsilon = \varnothing$, onde $\overline{U}_\mu$ denota o fecho de U_μ. Neste caso denotamos $\widehat{Y}_\mu = \min_{a \in \overline{U}_\mu} \|\widehat{y}(a)\|$. Note que $\widehat{Y}_\mu = 0$, quando $\mu \in \Upsilon$ e $\widehat{Y}_\mu > 0$, quando $\mu \notin \Upsilon$.

Além disso, para todo par $\mu_i \in U_\mu$, $i = 1, 2$ a desigualdade do valor médio aplicada à φ_μ^{-1} nos dá:

$$\begin{aligned} \|\mu_1 - \mu_2\| &\leq K_\mu(\|t(\mu_1) - t(\mu_2)\| + \|\widehat{x}(\mu_1) - \widehat{x}(\mu_2)\| + \\ +\|\widehat{y}(\mu_1) - \widehat{y}(\mu_2)\| &+ \|\widehat{v}(\mu_1) - \widehat{v}(\mu_2)\| + \|\widehat{u}(\mu_1) - \widehat{u}(\mu_2)\|) \end{aligned} \tag{45}$$

Note agora que a família $\mathcal{C} = \{U_\mu : \mu \in L\}$ é uma cobertura de abertos do conjunto compacto L. Assim podemos tomar uma subcobertura finita $\{U_{\mu_i} : i \in \Lambda\}$ e seja $K = \max_{i \in \Lambda} K_{\mu_i}$, onde K_{μ_i} é definida em (44). Note que esta classe é dividida em duas subclasses $\mathcal{C}_1 = \{U_\mu : \mu \in \Lambda, U_\mu \cap \Upsilon = \varnothing\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{U_\mu : \mu \in \Lambda, \; U_\mu \cap \Upsilon \neq \varnothing\}$. Seja $\widehat{Y} = \min\{\widehat{Y}_\mu : \mu \in L \text{ e } U_\mu \in \mathcal{C}_1\}$. Por construção, se tomarmos $\varepsilon_2 = \widehat{Y}$, então

$$a \in L \text{ e } \|\widehat{y}(a)\| \leq \varepsilon_2 \text{ implica que } a \text{ está em algum } U_\mu \in \mathcal{C}_2. \tag{46}$$

[5]Que é uma conseqüência do lema de Bellman-Gronwall.

Se $U_\mu \in \mathcal{C}_2$ podemos definir $\pi_\mu : U_\mu \longrightarrow \Upsilon$ definido por $\pi_\mu(t, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{v}, \widehat{u}) \longrightarrow (t, \widehat{x}, 0, \widehat{v}, \widehat{u})$ (definida nas coordenadas locais φ_μ). Por (45) temos que:

$$\|a - \pi_\mu(a)\| \leq K\|\widehat{y}(a)\|, \; a \in U_\mu, \; U_\mu \in \mathcal{C}_2. \tag{47}$$

Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_1/K\}$. Então para todo $a \in L$, com $\|\widehat{y}(a)\| < \varepsilon$, podemos tomar a solução com condição inicial $\mu_0 = (\zeta(t_0), \widehat{u}(t_0)) = \pi_\mu(a)$, com entrada $\widehat{u}(\cdot)$.

Como $\mu_0 \in \Upsilon$, da parte (4) temos que $\pi_x(\zeta(t))$ é uma solução de (4). Da desigualdade (47) é claro que $\pi_\mu(a) \in L_1$. De (46), (47) e (44), temos o resultado. □

EXEMPLO 7. Ilustraremos nossos principais resultados com um exemplo acadêmico. Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{t} &= 1 \\ \dot{x}_1 &= 10x_3 + x_3u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= u_2 \\ y_1 &= x_1 + ae^{x_1} - 2 - 2a + x_2 - b\cos(t) = 0 \\ y_2 &= x_2 + b\cos(t) = 0. \end{cases}$$

As diferenciais simbólicas dessas saídas foram calculadas através do pacote simbólico do Matlab® (Maple®). O posto numérico da dimensão de $\mathcal{Y}_k$ é o posto numérico da matriz

$$J_k = \frac{\partial(x, y, \dot{y}, \ldots, y^{(k)})}{\partial(x, u, \ldots, u^{(k)})}.$$

Para estimar o posto genérico de J_k, seus postos foram calculados para valores aleatórios de $x, u, \ldots, u^{(k)}$, gerando $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, o que indica que se o sistema é regular, o índice é $k^* = 2$ (durante a integração numérica de (40) pode-se testar pontualmente essa condição numérica da matriz T e calcular numericamente o posto de J_k para testar se nossas hipóteses de regularidade não falharam).

Pelo mesmo método, pode-se verificar que o posto de $D_{k^*} = \dfrac{\partial(y, \dot{y}, \ldots, y^{(k)})}{\partial(x, u, \ldots, u^{(k^*)})}$ para valores aleatórios de $(x, u, \ldots, u^{(k)})$ é igual a $2 \times (k^* + 1) = 6$, o que mostra que as saídas são genericamente diferenciavelmente independentes. Neste caso o sistema implícito está completamente determinado. Pode-se mostrar que y é genericamente uma saída *flat* para S, que pode ser verificado mostrando que o posto de D_{k^*} é o mesmo de J_{k^*}.

Então é claro que $\widehat{x} = \varnothing$. Testando outros pontos aleatórios, de forma numérica, e suas combinações, escolhemos $\widehat{v} = u_2^{(1)}$. Desse modo, o sistema de coordenadas (34) para esse sistema é $\{t, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{v}, \widehat{u}\}$ com $\widehat{x} = \widehat{u} = \varnothing$, $\widehat{y} = (y, \dot{y}, \ddot{y})$, $\widehat{v} = \dot{u}_2$.

É importante notar que, neste exemplo, $y^{(k^*)}$ não depende de $u^{(k^*)}$. Portanto é fácil ver que se pode eliminar (como feito no exemplo), o conjunto $u^{(k^*)}$ das coordenadas de M, reduzindo a dimensão do espaço de estados do sistema (40).

O cálculo simbólico no Matlab/Maple gera:

```
T = [ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; b*sin(t), 1+a*exp(x1), 1, 0, 0, 0, 0, 0; -b*sin(t), 0,
1, 0, 0, 0, 0, 0; b*cos(t), a*exp(x1)*(10*x3+x3*u1), 0, (1+a*exp(x1))*(10+u1),
(1+a*exp(x1))*x3+1, 0, 0, 0; -b*cos(t), 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0;  -b*sin(t),
a*exp(x1)*(10*x3+x3*u1)^2+a*exp(x1)*(10+u1)*u2+a*exp(x1)*x3*u1p, 0,
2*a*exp(x1)*(10*x3+x3*u1)*(10+u1)+(1+a*exp(x1))*u1p,
```

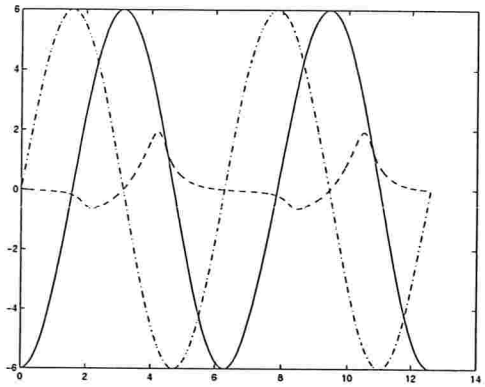

FIGURA 1. Curvas de $\pi_x(\zeta)(t)$ versus tempo. A curva $x_1(t)$ está com contorno contínuo, $x_2(t)$ está tracejado e $x_3(t)$ tracejado-pontilhado.

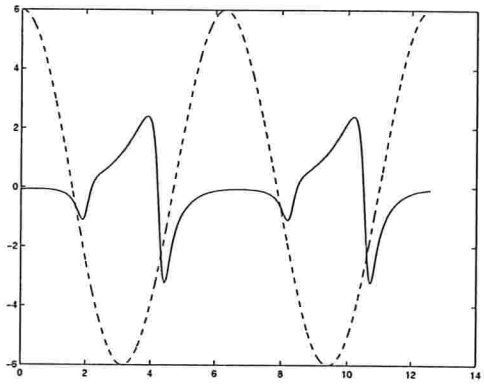

FIGURA 2. Curvas de $\pi_u(\zeta)(t)$ versus tempo. A curva $u_1(t)$ está com contorno contínuo, $u_2(t)$ está tracejado.

```
2*a*exp(x1)*(10*x3+x3*u1)*x3+(1+a*exp(x1))*u2, (1+a*exp(x1))*(10+u1),
(1+a*exp(x1))*x3+1, 0;  b*sin(t), 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0;  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1];
```

onde `[t,x1,x2,x3,u1,u2,u1p,u2p]` $= [t, x_1, x_2, x_3 u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2]$. A solução do sistema (40) com condições iniciais em Υ gera os resultados[6] das figuras 1 e 2. A figura 3 mostra que a distância de $(\zeta(t), \widehat{u}(t))$ a Υ não cresce em função do tempo.

Para verificar erros numéricos na derivada de $x(t)$ de nosso método, calculamos a função vetorial $e(t) = \langle dx, \tau(\zeta(t))\rangle - f(\pi_x(\zeta(t))) - g(\pi_x(\zeta(t))\pi_u(\zeta(t)))$. O resultado ideal deveria ser zero, mas a figura (4) mostra pequenos erros numéricos.

Outro teste executado, foi a aplicação da entrada $\pi_u(\zeta(t))$ da figura (2) no sistema explícito (5) com as mesmas condições iniciais compatíveis $\pi_x(\zeta(t_0))$. O resultado ideal de $y(t)$ obtido deste modo deveria ser zero, mas novamente, pequenos erros numéricos foram detectados, como indica a figura (5) devido aos erros causados pelo nosso método e erros de integração numérica usados para este teste.

[6]As simulações foram feitas utilizando o Matlab/Simulink®.

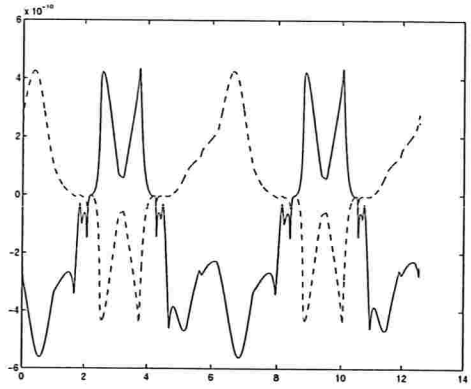

FIGURA 3. Curvas de $y(\pi_x(\zeta))(t)$ versus tempo. A curva $y_1(t)$ está com contorno contínuo, $y_2(t)$ está tracejado.

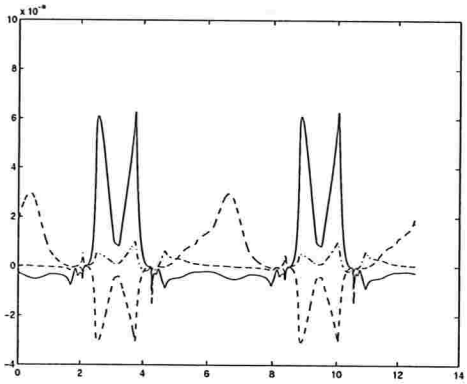

FIGURA 4. Erro $e(t)$ na derivada de $\pi_x(\zeta(t))$. A curva $e_1(t)$ está representada com traço contínuo, $e_2(t)$ está tracejado e $e_3(t)$ está pontilhado-tracejado.

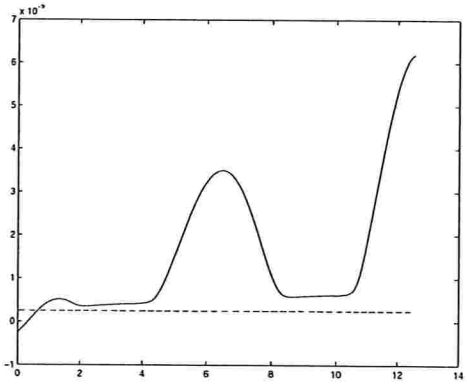

FIGURA 5. Curvas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ com $\pi_u(\zeta(t))$ como a entrada do sistema explícito (5). A curva y_1 está representada com linha contínua, y_2 está tracejada.

Note que todas as soluções de (40) convergirão para Υ e portanto um conjunto de condições iniciais compatíveis pode ser encontrado simplesmente integrando o sistema explícito (40). Temos suposto $\alpha = 6$, $b = 0,2$, $\gamma = \beta = 8-$ e condições iniciais (no formato long do Matlab):

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= [t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2](0) \\ &= [0 \;\; 2.595584190645906\text{e+}000 \;\; -5.999999999754128\text{e+}000 \\ &\quad 4.546949839215331\text{e-}012 \;\; 4.207790366139719\text{e-}012 \\ &\quad -8.330778672817486\text{e-}002 \;\; 5.999999999754128\text{e+}000 \;\; 0]\end{aligned}$$

O índice diferencial clássico deste sistema é $\nu_d = 3$ ($k^* = 1$). Incluindo as derivadas de ordem 1 das restrições no conjunto de restrições, pode-se reduzir o índice desse sistema para $\nu_d = 2$ ($k^* = 1$) usando as técnicas de [**BCP96, AP98**]. Entretanto, as derivadas segundas das restrições no conjunto de restrições dependem das derivadas de variáveis algébricas u_1 e u_2. Portanto para reduzir o índice um pouco mais, deve-se utilizar transformações simbólicas.

Este exemplo tem a propriedade que o sistema explícito obtido adicionando um integrador na primeira entrada é desacoplável por uma realimentação de estados estática.

Entretanto, para exemplos mais complexos a redução simbólica de índices por qualquer meio pode ser um trabalho árduo, como as técnicas do teorema 4 deveriam ser aplicadas.

CAPÍTULO 5

Conclusões

Sobre a primeira parte, concluímos que para os sistemas que têm a propriedade de serem relativamente *flat* podem ser estudados tanto algebricamente quanto geometricamente, que as interpretações são equivalentes.

Sobre a segunda parte, concluímos que as hipóteses de regularidade sobre campos podem fornecer informações importantes sobre o comportamento de uma subvariedade, concluímos que a nova noção de índice diferencial pode ser utilizada para sistemas implícitos e que as soluções de certos sistemas implícitos podem ser aproximadas por soluções de sistemas explícitos.

Assim, observando os métodos empregados para conseguirmos encontrar as soluções aproximativas, percebemos que novas pesquisas combinando algoritmos simbólicos e numéricos podem ser úteis para melhorar a integração numérica de equações diferenciais algébricas de índices elevados [**CM98, SK01**].

O segundo método é baseado nas propriedades geométricas de equações diferenciais algébricas e parece ser melhor para integração numérica de equações diferenciais algébricas de índice elevados. Este segundo método é baseado em cálculo de derivadas simbólicas das restrições e resolve numericamente (pontualmente) uma equação linear $T\tau = \widehat{\tau}$ (veja a equação (37)).

Ainda restam alguns problemas em aberto que podem ser pesquisados:

- Não se sabe ainda se todo subsistema de um sistema *flat* é *flat*.
- Os métodos utilizados aqui constituem um misto entre métodos algébricos e numéricos, porém pode-se tentar enfraquecer mais as hipóteses (2-3) do teorema 4. Por exemplo, pode-se tentar escolher funções pontualmente utilizando métodos numéricos, objeto não estudado neste trabalho.

APÊNDICE A

Ideais diferenciais primos

Neste apêndice, mostraremos que o ideal diferencial gerado pelas relações

$$\begin{cases} \dot{X}_i - f_i(X,U) & i = 1,\ldots,n \\ Y_j - \varphi_j(X,U) & j = 1,\ldots,r \end{cases}$$

é primo no anel diferencial $k\{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_r,U_1,\ldots,U_s\}$. Um resultado mais geral é obtido por Diop em [**Dio92**].

1. Definições e notações gerais

Denotaremos por R um anel diferencial genérico comutativo com unidade e p um elemento de $R\{y_1,\ldots,y_n\}\setminus R$. Seja Δ um conjunto comutativo de derivações e Θ representa o monóide, com $1 = Id$, gerado por Δ.

A **classe** de p é o maior r tal que y_r realmente aparece em p. Denotar-lo-emos por $cl(p)$.

A **ordem** de p em relação a y_r é o maior j tal que $y_r^{(j)}$ realmente aparece em p. Denotar-lo-emos por $o_r(p)$. Se $r = cl(p)$ então denotaremos $o_r(p)$ simplesmente por $o(p)$.

O **grau** de um polinômio p em relação à variável $y_r^{(j)}$ é o maior expoente de $y_r^{(j)}$ que realmente aparece em p. Denotar-lo-emos por $d_{r,j}(p)$. Se $r = cl(p)$ e $j = o(p)$ então denotaremos $d_{r,j}(p)$ simplesmente por $d(p)$.

O **líder** de p é $u_p \doteq y_r^{(j)}$, onde $r = cl(p)$ e $j = o(p)$.

O **inicial**, I_p, de p é o coeficiente da maior potência de u_p.

O **separante**, S_p, é o polinômio diferencial $\dfrac{\partial p}{\partial u_p}$.

EXEMPLO 8. Considere em $\mathbf{R}\{x,y\}$ (identificamos $x_1 := x$ e $x_2 := y$), com a derivação $'$, os seguintes polinômios $p(x,y) = x^{(3)^2} + 5y^{(2)}x^3 - 7x^9y^7x^{(2)}y^{(3)^2}$ e $q(x,y) = y^{(7)^3}y^2xx^{(3)} - 3y^{(2)}x^{(3)}x$. Então temos:

	p	q
classe	2	2
ordem	3	7
líder	$y^{(3)}$	$y^{(7)}$
inicial	$-7x^9y^7x^{(2)}$	$y^2xx^{(3)}$
separante	$-14x^9y^7x^{(2)}y^{(3)}$	$3y^{(7)^2}y^2xx^{(3)}$

2. Ranking

Kolchin [**Kol73**] define *rank* (rk) no anel diferencial $R\{y_1, \ldots, y_n\}$ como uma ordem em $R\{y_1, \ldots, y_n\}$, que deve satisfazer as duas seguintes condições para todo $u, v \in R\{y_1, \ldots, y_n\}$, e $\theta \in \Theta$,

(1) $\mathrm{rk}(u) \leq \mathrm{rk}(\theta u)$;
(2) $\mathrm{rk}(u) \leq \mathrm{rk}(v) \Longrightarrow \mathrm{rk}(\theta u) \leq \mathrm{rk}(\theta v)$.

Nós estamos interessados em estudar sistemas de equações diferenciais com apenas uma derivação, a saber $' := \dfrac{d}{dt}$. Dessa forma, um possível *rank* definido em $R\{y_1, \ldots, y_n\}$ com apenas uma derivação, é a aplicação $R\{y_1, \ldots, y_n\} \setminus R \longrightarrow \mathbf{N}^3$ definida da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} R\{y_1, \ldots, y_n\} \setminus R & \longrightarrow & \mathbf{N}^3 \\ p & \longmapsto & (cl(p),\, o(p),\, d(p)) \end{array}$$

Observe que se invertermos as posições da classe com a ordem, na terna ordenada, obtemos outro *rank* possível. Também podemos fazer uma mesclagem, em que as derivadas das variáveis y_i tenham *rank* menor que o *rank* de y_j para $i < j$.

Assim, como não existe unicidade do *rank* e a partir deste ponto, neste texto, quando se falar em *rank* , será o $p \longmapsto (cl(p), o(p), d(p))$ exceto menção em contrário.

3. Conjuntos auto-reduzidos

Consideremos dois polinômios p e F do conjunto $R\{y_1, \ldots, y_\mu\} \setminus R$. Se F é livre de toda derivada própria de u_p, então F é dito **parcialmente reduzido** em relação a p. Se F é parcialmente reduzido em relação a p e $\deg_{u_p} F < \deg_{u_p} p$, então F é dito **reduzido** em relação a p.

Dizemos que um polinômio F é **(parcialmente) reduzido** em relação a um conjunto $A \subset R\{y_1, \ldots, y_\mu\} \setminus R$ se F for **(parcialmente) reduzido** em relação aos elementos de A.

Dizemos que um conjunto $A \subset R\{y_1, \ldots, y_\mu\} \setminus R$ é **auto-reduzido** se cada elemento A_i de A é reduzido em relação ao conjunto $A \setminus \{A_i\}$.

OBSERVAÇÃO 1. Em um conjunto auto-reduzido A o líder de um polinômio não pode ser líder de outro polinômio de A.

EXEMPLO 9. Considere em $\mathbf{R}\{X_1, \ldots, X_n\}$, com a derivada $'$, um conjunto de polinômios diferenciais $\{P_i : i = 1, \ldots, n\}$, nos quais $X_j^{(r)}$ não aparece em P_i para $i \neq j$ qualquer que seja $r \in \mathbf{N}$. Então o conjunto $\{P_i : i = 1, \ldots, n\}$ é auto-reduzido.

Dado um ranking para polinômios em $R\{y_1, \ldots, y_r\}$, definimos o **rank de um conjunto auto-reduzido de n polinômios** que, por abuso de linguagem denotaremos por rk, como a $3n$-upla formada pelas concatenações dos *rank*s dos polinômios quando colocados em ordem crescente.

Podemos colocar a seguinte ordem para comparar os *rank*s de dois conjuntos auto-reduzidos:

- Ordenamos A e B através de seus *rank*'s lexicograficamente até $\min\{\#A, \#B\}$ e caso $\mathrm{rk}(A_i) = \mathrm{rk}(B_i)$ para todo $1 \leq i \leq \min\{\#A, \#B\}$, o conjunto que tiver maior cardinalidade tem *rank* menor;

- Caso $\mathrm{rk}(A_i) = \mathrm{rk}(B_i)$ para todo $1 \leq i \leq \#A = \#B$, então A e B são ditos de mesmo *rank*.

EXEMPLO 10. Consideremos em $\mathbf{R}\{x_1, x_2\}$ a derivada $'$ e os polinômios $P = x_1^{(3)}$, $Q = x_1^{(2)}(x_2')^3$. Então $\{P, Q\}$ forma um conjunto auto-reduzido. P é um polinômio cujo líder é $x_1^{(3)}$, cujo inicial é 1 e cujo separante é 1; Q é um polinômio cujo líder é x_2', cujo inicial é $x_1^{(2)}$ e cujo separante de Q é $3(x_1^{(2)})^2$. O *rank* de $\{P, Q\}$ é $(\underbrace{1,3,1}_{\textit{rank} \text{ de } P}, \underbrace{2,1,3}_{\textit{rank} \text{ de } Q})$.

Um conjunto A de um ideal diferencial $\mathfrak{a}$ é chamado de conjunto **característico** se for um elemento minimal de

$$\{X | X \subset A, X \text{ é auto-reduzido e } I_Y,\ S_Y \notin \mathfrak{a} \text{ para todo } Y \subset X\}.$$

4. O algoritmo de redução

4.1. Divisão euclidiana. A divisão euclidiana que introduziremos aqui é uma generalização da divisão euclidiana de polinômios, pois pode ser usada em anéis sem inverso multiplicativo. Como resultado dessa divisão, obtemos um polinômio $R^{\#}$ e um inteiro σ tais que $I_Q^{\sigma} P_0 \equiv R^{\#} \pmod{Q}$. Sejam P_0 e Q polinômios em $R[Y]$, com $Q \not\equiv 0$.

entrada: P_0 **e** Q
saída: $R^{\#}$ **e** σ
  $i := 0$
  $\sigma_0 := 0$
  enquanto $(P_0 \neq 0)$ **e** $(\deg_Y P_0 \geq \deg_Y Q)$ **faça**
    $d_i := \deg_Y P_i - \deg_Y Q$
    $P_{i+1} := I_Q P_i - I_{P_i} Y^{d_i} Q$
    $\sigma_{i+1} := \sigma_i + 1$
    $i := i + 1$
  fim de laço
  $R^{\#} := P_i$
  $\sigma := \sigma_i$

OBSERVAÇÃO 2. Observemos que, em cada passo do laço, P_{i+1} tem grau menor que o grau de P_i em Y. Notemos também, que esse processo deve parar, pois a seqüência (d_i) é estritamente decrescente, o que mostra que se P_i nunca for o polinômio nulo, o processo termina; além disso, o natural σ, obtido no término do processo, é o menor valor que podemos colocar como expoente de I_Q para que $I_Q^{\sigma} P \equiv R^{\#} \pmod{(Q)}$.

4.2. Redução parcial. Seja P um polinômio diferencial e $A \subset R\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Queremos encontrar um polinômio $R^{\dagger}$ e um número inteiro σ tais que $R^{\dagger}$ seja parcialmente reduzido em relação a A e $R^{\dagger} \equiv S_A P \bmod [A]$.

entrada: P_0, A
saída: $R^{\dagger}$ **e** σ
  $i := 0$
  $\sigma_0 := 0$
  se em P_i só há variáveis que não estão no conjunto

$\{Y_j | j$ é a classe de $A_i\}$ **então vá para** *fim:*
enquanto $\mathrm{rk}(P_i) >= \min\{\mathrm{rk}(A_i) | A_i \in A\}$ **faça**
$v := \max_{1 \leq j \leq n} \{j$ t.q. P_i não é reduzido em relação a $A_j\}$
$\theta A_v :=$ a derivada de A_v tal que θA_v tem menor *rank* possível e o líder de θA_v aparece em P_i
$P_{i+1} :=$ resto da divisão euclidiana de P_i por θA_v
$\tau :=$ inteiro obtido na divisão euclidiana de P_i por A_i
$\sigma_{i+1} := \sigma_i + \tau$
$i := i + 1$
fim de laço
fim: $R^\dagger := P_i$
$\sigma := \sigma_i$

OBSERVAÇÃO 3. Em cada passo, fazemos a multiplicação de P_i por um separante de um A_j e com isso não introduzimos termos que tenham *rank* maior que o *rank* de $\theta_j u_{A_j}$ e, portanto, a seqüência dos índices j na qual P_i é reduzido em relação a A_j é estritamente decrescente. Ao final, obtemos um polinômio $P^\dagger$ tal que $P^\dagger$ é livre de toda derivada própria de elementos de A, isto é, $P^\dagger$ é parcialmente reduzido em relação a A.

4.3. Redução. Seja P um polinômio diferencial que é parcialmente reduzido em relação a $A \subset R\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Queremos encontrar um polinômio R^* e um número inteiro σ tais que R^* seja reduzido em relação a A e $S_A^\sigma P \equiv R^* \bmod [A]$.

LEMA 8. *Sejam P_0 um polinômio diferencial nas variáveis diferenciais $Y_1, \ldots, Y_n$ e suas derivadas com coeficientes em R e A um conjunto contido em $R\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Então P é reduzido em relação a A se e somente se fixado um* ranking *para as variáveis $Y_1, \ldots, Y_n$:*

(1) $\mathrm{rk}(P) < \min\{\mathrm{rk}(A_i) | A_i \in A\}$ *ou;*
(2) *se em P não aparecer $cl(A_i)$ para todo $A_i \in A$.*

DEMONSTRAÇÃO. ($\Longrightarrow$) Se P for parcialmente reduzido em relação a A então temos que ou $\mathrm{rk}(P) < \min\{\mathrm{rk}(A_i) | A_i \in A\}$, ou P só tem variáveis que não pertencem ao conjunto

$$\{Y_j | j \text{ é a classe de } A_i \text{ para } A_i \in A\}.$$

($\Longleftarrow$) Se P for tal que $\mathrm{rk}(P) < \min\{\mathrm{rk}(A_i) | A_i \in A\}$ então P é reduzido em relação a A. Se P for tal que em P só aparecem variáveis que não pertencem ao conjunto

$$\{Y_j | j \text{ é a classe de } A_i \text{ para } A_i \in A\},$$

então P é reduzido parcialmente em relação a A. □

entrada: P_0 e A
saída: R^* e σ
$i := 0$
enquanto P_i não for reduzido em relação a A **faça**
$j := \max\{A_k | P_i$ não é reduzido em relação a $A_k\}$
$i := i + 1$
$P_i :=$ resto da divisão euclidiana de P_{i-1} por A_j

quando escritos em termos de u_{A_j}
$\tau :=$ inteiro obtido na divisão euclidiana de P_{i-1} por A_j
$\sigma_i := \sigma_{i-1} + \tau$
fim de laço
$R^* := P$
$\sigma := \sigma_i$

OBSERVAÇÃO 4. Esse processo termina, pois $j_1 > j_2 > \cdots$, isto é, a seqüência (j_i) é estritamente decrescente, como de fato $j_i > j_{i+1}$, pois a multiplicação de P_{i-1} por I_{j_i} tem *rank* menor que o *rank* de u_{A_i}. Além disso, $P_i := I_{j_i}P_{i-1} - A_iQ_i$ tem *rank* menor ou igual a de P_{i-1} e P_i é reduzido em relação a $A_i, A_{i+1}, \ldots$.

Fixemos um *rank* em $k\{y_1, \ldots, y_\mu\}$. Então temos o seguinte

LEMA 9 (Ritt). *Seja A um conjunto auto-reduzido de $\varnothing \neq \Sigma \subset k\{y_1, \ldots, y_\mu\}$. Então são equivalentes:*

a. *A é um conjunto característico de Σ;*
b. *todo polinômio, em Σ, reduzido em relação a A é nulo.*

DEMONSTRAÇÃO. (b. $\Rightarrow$ a.) Suponhamos que A não seja um conjunto característico de Σ, então existe um conjunto B tal que B é um conjunto característico de Σ e portanto $\mathrm{rk}(B) < \mathrm{rk}(A)$. Isto significa que B tem mais elementos que A e $\mathrm{rk}(A_i) = \mathrm{rk}(B_i)$ para $1 \leq i \leq \#A$ ou que existe um j tal que $\mathrm{rk}(B_j) < \mathrm{rk}(A_j)$ para algum $1 \leq j \leq \min\{\#A, \#B\}$. Se acontecer: B tem mais elementos que A e $\mathrm{rk}(A_i) = \mathrm{rk}(B_i)$ para todo $1 \leq i \leq \#A$ então $B_{\#A+1}$ é reduzido em relação a A. Se acontecer: $\mathrm{rk}(B_i) < \mathrm{rk}(A_i)$ para algum $1 \leq i \leq \min\{\#A, \#B\}$, então existe algum $1 \leq i \leq \min\{\#A, \#B\}$ tal que B_i é reduzido em relação a A.

(a. $\Rightarrow$ b.) Suponhamos que A seja um conjunto característico e que Σ contenha um polinômio não nulo F que seja reduzido em relação a A. Se a classe de F for maior que a de $A_{\#A}$, conseguimos um conjunto auto-reduzido de *rank* menor que o de A, fazendo $A \cup \{F\}$; caso contrário, se o elemento de A que não é excedido por F é A_j, então o conjunto $\{A_1, \ldots, A_{j-1}, F\}$ tem *rank* menor que A. □

Um conjunto auto-reduzido $\mathcal{A}$ é dito **coerente** se dados $a, a' \in \mathcal{A}$ e se u_a e $u_{a'}$ (os líderes de a e a') com uma menor derivada comum $v = \theta_a u_a = \theta_{a'} u_{a'}$, então $S_{a'}\theta_a a - S_a\theta_{a'}a' \in (\mathcal{A}_v) : H_{\mathcal{A}}^\infty$, onde $\mathcal{A}_v$ é o conjunto dos polinômios diferenciais θb em que $\theta \in \Theta$, $b \in \mathcal{A}$ e $\mathrm{rk}(\theta u_b) < \mathrm{rk}(v)$. Denotaremos por (A) o ideal algébrico gerado por A, $[A]$ o ideal diferencial gerado por A. Se $\Sigma \subset R\{y_1, \ldots, y_n\}$ e $\alpha \in R\{y_1, \ldots, y_n\}$, então $\Sigma : \alpha^n$ denota o conjunto $\{x \in R\{y_1, \ldots, y_n\} | \alpha^n x \in \Sigma$ para algum $n \in \mathbf{N}\}$ e $\Sigma : \alpha^\infty$ denota o conjunto $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \Sigma : \alpha^n$. Observemos que se Σ for um ideal, $\Sigma : \alpha^\infty$ também será um ideal.

Em **[Kol73]**, Kolchin demonstra o seguinte resultado válido para anéis com várias derivações.

LEMA 10. **[Kol73]** *Sejam R um anel diferencial e A um subconjunto de*

$$R\{y_1, \ldots, y_\mu\}$$

auto-reduzido, coerente. Então todo polinômio em $[A] : H_A^\infty$ *reduzido em relação a* A *está em* $(A) : H_A^\infty$.

Em anéis diferenciais com apenas uma derivação, todo conjunto auto-reduzido é coerente. Assim, podemos tirar como corolário deste lema, o seguinte resultado:

COROLÁRIO 1. *Sejam* R *um anel diferencial,* $R\{y_1, \ldots, y_\mu\}$ *o anel diferencial adjuntando as variáveis diferenciais* $\{y_1, \ldots, y_\mu\}$ *com a derivação* $'$ *e* $A \subset R\{y_1, \ldots, y_\mu\}$ *um conjunto auto-reduzido. Então todo polinômio em* $[A] : H_A^\infty$ *reduzido em relação a* A *está em* $(A) : H_A^\infty$.

Como o corolário exige que o anel diferencial tenha apenas uma derivação – a demonstração a partir do lema (10) é imediata, porém por exigir mais sobre o anel diferencial, tal demonstração pode ser simplificada ao ponto que o mesmo argumento que será usado para demonstrar o lema (11) pode ser aplicado.

OBSERVAÇÃO 5. Se A é um conjunto auto-reduzido, então I_A e S_A são reduzidos em relação a A.

DEFINIÇÃO 39. Um conjunto auto-reduzido é dito **ortonômico** se seus elementos tem grau 1 em seus líderes.

OBSERVAÇÃO 6. Se A é um conjunto auto-reduzido ortonômico, então o separante de $A_i \in A$ e o inicial de $A_i \in A$ coincidem.

LEMA 11. **[Dio92]** *Se* A *é um conjunto auto-reduzido, coerente e ortonômico contido em* $k\{Y_1, \ldots, Y_\mu\}$ *então*

a. *se* $P \in [A] : I_A^\infty$ *e* P *é reduzido em relação a* A *então* $P = 0$.
b. $[A] : I_A^\infty$ *é primo com conjunto característico* A.

DEMONSTRAÇÃO. a. Sejam $A_1, \cdots, A_m$ com $\mathrm{rk}(A_1) < \mathrm{rk}(A_2) < \cdots < \mathrm{rk}(A_m)$ os elementos de A. Suponhamos que exista $0 \neq P \in [A] : I_A^\infty$ que seja reduzido em relação a A. Pelo corolário 1, $P \in (A) : I_A^\infty$ então podemos escrever:

$$I_A^n P = \sum_{i=1}^{t} P_i A_i + P_0, \tag{48}$$

para algum $n \in \mathbf{N}$ e $P_0 = 0$. Como $P \neq 0$, então existe pelo menos um $P_i \neq 0$. Suponhamos, por absurdo, que s seja o menor valor que t pode assumir em (48) tal que, para algum $n \in \mathbf{N}$, P_0 seja livre de u_s. Escrevendo $P_i = P_i^0 + u_s Q_i$ para $1 \leq i \leq s$, onde Q_i é polinômio, $A_s = I_s u_s + R_s$, R_s livre de u_s, temos:

$$I_A^n P = (P_s^0 I_s + \sum_{i=1}^{s} Q_i A_i) u_s + \underbrace{\left(P_0 + P_s^0 R_s + \sum_{i=1}^{s-1} P_i^0 A_i\right)}_{\text{livre de } u_s}$$

Impondo que o polinômio que multiplica u_s seja 0, pois $I_A^n P$ é livre de u_s, temos: $I_A^n P = P_0 + P_s^0 R_s + \sum_{i=1}^{s-1} P_i^0 A_i$.

Não sabemos, a priori, se $P_0 + P_s^0 R_s$ é ou não livre de u_{s-1}. Porém, podemos, eventualmente, aumentar o valor de n para que possamos fazer a divisão de $P_0 + P_s^0 R_s$ por A_{s-1} e dessa maneira, observando que na divisão, não introduzimos elementos maiores que u_{s-1}, então podemos re-escrever $I_A^n P$ como $\widetilde{P}_0 + \sum_{i=1}^{s-1} \widetilde{P}_i A_i$ com $\widetilde{P}_0$ livre de u_{s-1}, o que contraria a minimalidade de s.

b. Pelo lema 9, temos que A é um conjunto característico de $[A] : I_A^\infty$. Sejam P^* e Q^* os reduzidos de P e Q respectivamente com relação a A. Então, do fato de A ser auto-reduzido e ortonômico temos que todo polinômio reduzido em relação a A é livre de qualquer líder dos elementos de A. Assim, o produto de reduzidos é reduzido e pela parte a. do lema, $P^*Q^* = 0$. Logo, lembrando que I_A e $S_A(= I_A)$ não estão em $[A] : I_A^\infty$ pois A é um conjunto característico, temos que P ou Q está em $[A] : I_A^\infty$, o que prova que $[A] : I_A^\infty$ é primo. □

4.4. Aplicação. Agora trabalharemos com o ideal diferencial gerado pelas relações polinomiais

$$\begin{cases} \dot{X}_i - f_i(X,U) & i = 1,...,n \\ Y_j - \phi_j(X,U) & j = 1,...,j \end{cases}$$

no anel diferencial

$$\mathbf{R}\{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_j,U_1,\ldots,U_s\}.$$

Mostraremos que esse ideal diferencial é primo.

Definamos o seguinte *rank* para as variáveis diferenciais

$$\begin{gathered} \mathrm{rk}(X_1) < \mathrm{rk}(X_2) < \cdots < \mathrm{rk}(X_n) < \\ \mathrm{rk}(Y_1) < \cdots < \mathrm{rk}(Y_r) < \\ \mathrm{rk}(U_1) < \cdots < \mathrm{rk}(U_s) < \\ \mathrm{rk}(U_1') < \cdots < \mathrm{rk}(U_s') < \\ \mathrm{rk}(U_1'') < \cdots < \mathrm{rk}(U_s'') < \\ \text{todas as derivadas de elementos de } U < \\ \mathrm{rk}(X_1') < \mathrm{rk}(X_2') < \cdots \mathrm{rk}(X_n') < \\ \mathrm{rk}(Y_1') < \cdots < \mathrm{rk}(Y_r') < \cdots . \end{gathered}$$

Assim, $\{\dot{X}_i - f_i(X,U), Y_j - \phi_j(X,U) : i = 1,...,n \text{ e } j = 1,...,r\}$ é auto-reduzido. Como só temos uma derivação a ser considerada (a saber $\frac{d}{dt}$), claramente esse conjunto é coerente e ortonômico. Logo o ideal diferencial

$$\begin{aligned} &[\dot{X}_i - f_i(X,U), Y_j - \phi_j(X,U) : i = 1,...,n \text{ e } j = 1,...,m] : 1^\infty = \\ &= [\dot{X}_i - f_i(X,U), Y_j - \phi_j(X,U) : i = 1,...,n \text{ e } j = 1,...,m] \end{aligned}$$

é um ideal primo.

APÊNDICE B

Álgebra diferencial

1. Derivações

DEFINIÇÃO 40. Uma derivação em um anel A é uma aplicação aditiva $a \longmapsto a'$ de A em A que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(a+b)' = a' + b' \text{ e } (a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'.$$

Denotaremos por $a^{(0)} := a, a^{(1)} := a', a^{(2)} := a'', \ldots, a^{(n)}, \ldots, a^{(n)}$, suas derivadas. Por indução é possível mostrar a regra de Leibniz. De fato:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{(n-i)} b^{(i)}\right)' = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[a^{(n-i+1)} b^{(i)} + a^{(n-i)} b^{(i+1)}\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{(n-i+1)} b^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{(n-i)} b^{(i+1)} =$$

$$= a^{(n+1)} b^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{(n-i+1)} b^{(i)} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{(n-i)} b^{(i+1)} + a^{(0)} b^{(n+1)} =$$

$$= a^{(n+1)} b^{(0)} + a^{(0)} b^{(n+1)} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \left[\binom{n}{i+1} a^{(n-i)} b^{(i+1)} + \binom{n}{i} a^{(n-i)} b^{(i+1)}\right] =$$

$$= a^{(n+1)} b^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i+1} a^{(n+1-(i+1))} b^{(i+1)} + a^{(0)} b^{(n+1)} =$$

$$= a^{(n+1)} b^{(0)} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n+1}{i} a^{(n+1-i)} b^{(i)} + a^{(0)} b^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{(n+1-i)} b^{(i)}.$$

TEOREMA 5. *O operador derivação $'$ em um domínio integral I tem uma única extensão em seu corpo de frações.*

DEMONSTRAÇÃO. A construção do corpo de frações $\mathcal{Q}(I)$ através de um domínio de integridade I é feita através do produto cartesiano $I \times I$ com a relação de equivalência $(a,b)R(c,d) \iff a \cdot d = b \cdot c$. Com essa construção, identificamos $(a,1)$ com a para todo $a \in I$ e se $a,b,c,d \in I$, $b,d \neq 0$, induzimos a soma como $(a,b)+(c,d) = (a \cdot d + c \cdot b, b \cdot d)$ e o produto $(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

Lembremos que em um domínio de integridade existe o elemento neutro da adição 0 e o elemento neutro da multiplicação 1. Desse modo,

$$0 = 0 + 0 \Longrightarrow 0' = 0' + 0' \Longrightarrow 0' = 0$$
$$1 = 1 \cdot 1 \Longrightarrow 1' = 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1' \Longrightarrow 1' = 0.$$

Sabemos que $(a,a)R(1,1)$, para todo $a \neq 0$. Assim, para $a \neq 0$ temos $(a,a) = (a,1) \cdot (1,a)$, logo $(a,a)' = [(a,1) \cdot (1,a)]' = [(a,1)' \cdot (1,a) + (a,1) \cdot (1,a)'] = (1,1)' = (0,1)$ pois $1' = 0$. Portanto

$$(a,1) \cdot (1,a)' = (-a',a) \Longrightarrow (1,a)' = (1,a) \cdot (-a',a) = (-a',a^2).$$

Para saber como a derivação deve agir sobre (a,b), temos $(a,b) = (a,1) \cdot (1,b)$ e portanto

$$\begin{aligned}(a,b)' &= [(a,1) \cdot (1,b)]' = (a',1) \cdot (1,b) + (a,1) \cdot (1,b)' = \\ &= (a',b) + (a,1) \cdot (-b',b^2) = (a' \cdot b, b^2) + (-a \cdot b', b^2) = \\ &= (a' \cdot b - a \cdot b', b^2)\end{aligned}$$

pois se a e b são elementos não nulos do domínio de integridade, então se (c,d) é equivalente a (a,b), isto é, $a \cdot d = b \cdot c$ temos:

$$\begin{aligned}(c,d)' &:= (d \cdot c' - c \cdot d', d^2) = (a^2 \cdot d \cdot c' - a^2 \cdot c \cdot d', a^2 \cdot d^2) = \\ &= (a \cdot b \cdot c \cdot c' - a^2 \cdot c \cdot d', a^2 \cdot d^2) = (a \cdot b \cdot c \cdot c' - a^2 \cdot c \cdot d', b^2 \cdot c^2) = \\ &= (a \cdot b \cdot c' - a^2 \cdot d', b^2 \cdot c).\end{aligned}$$

Como $(a \cdot d)' = a' \cdot d + a \cdot d'$ temos

$$\begin{aligned}(c,d)' &= (a \cdot b \cdot c' - a^2 \cdot d', b^2 \cdot c) = \\ &= (a \cdot b \cdot c' - a \cdot (a \cdot d'), b^2 \cdot c) = \\ &= (a \cdot b \cdot c' - a \cdot ((a \cdot d)' - a' \cdot d), b^2 \cdot c) = \\ &= (a \cdot b \cdot c' - a \cdot (b \cdot c)' + a \cdot d \cdot a', b^2 \cdot c) = \\ &= (a \cdot b \cdot c' - (a \cdot b' \cdot c + a \cdot b \cdot c') + b \cdot c \cdot a', b^2 \cdot c) = \\ &= (-a \cdot c \cdot b' + b \cdot c \cdot a', b^2 \cdot c) = (a' \cdot b - a \cdot b', b^2) = (a,b)'.\end{aligned}$$

Denotaremos (a,b) por $\dfrac{a}{b}$. A unicidade é clara, desde que definamos

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2},$$

pois qualquer derivação age dessa forma no corpo de frações.

Para verificar a aditividade da derivação proposta, colocamos $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ no mesmo denominador $b \cdot d$ e então usamos a linearidade em a da definição de $\left(\dfrac{a}{b}\right)'$. A prova da regra do

produto:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)' = \left(\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\right)' = \frac{(a\cdot c)'\cdot(b\cdot d)-(a\cdot c)\cdot(b\cdot d)'}{(b\cdot d)^2} =$$

$$\frac{a'\cdot c\cdot b\cdot d + a\cdot c'\cdot b\cdot d - (a\cdot c\cdot b'\cdot d + a\cdot c\cdot b\cdot d')}{(b\cdot d)^2} =$$

$$\frac{a'\cdot b\cdot c\cdot d - a\cdot b'\cdot c\cdot d + a\cdot b\cdot c'\cdot d - a\cdot b\cdot c\cdot d'}{b^2\cdot d^2} =$$

$$\frac{a'\cdot b - a\cdot b'}{b^2}\cdot\frac{c\cdot d}{d^2} + \frac{a\cdot b}{b^2}\cdot\frac{c'\cdot d - c\cdot d'}{d^2} = \left(\frac{a}{b}\right)'\cdot\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)'.$$

□

2. Anéis diferenciais

DEFINIÇÃO 41. Um *anel diferencial* é um anel comutativo com unidade e com uma operação de derivação.

EXEMPLO 11. Um anel comutativo com unidade pode ser considerado um anel diferencial colocando o operador trivial como derivação (a derivação que leva todos os elementos no elemento nulo). Deste modo, podemos dizer que a teoria algébrica de anéis pode ser considerada um caso especial da teoria de anéis diferenciais.

No anel de inteiros do corpo dos números racionais só admite uma derivação possível, a derivação trivial, pois: $0' = 0$ e $1' = 0$. Logo temos que se $a \in \mathbf{N}$, então $a = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{a \text{ vezes}}$, logo $a' = 0$. Assim, do fato de $(a+b)' = a' + b'$, temos que se $b = -a$, temos $[a + (-a)]' = 0' = 0 \Longrightarrow a' + (-a)' = 0 \Longrightarrow (-a)' = -(a') \Longrightarrow (-a)' = 0$ para todo $a \in \mathbf{N}$. Então $\forall z \in \mathbf{Z} \Longrightarrow z' = 0$ e da construção de $\mathbf{Q} = \{(a,b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}/R$ onde R é a relação de equivalência: $(a,b)R(c,d)$ se $a\times d = b\times c$. Assim se $(a,b)'$ for definido como $(a'\times b - b'\times a, b^2)$ temos que $(a,b)' = (0\times b - 0\times a, b^2) = (0, b^2) = (0,1)$, o qual identificamos com 0.

EXEMPLO 12. O anel de todas as funções diferenciáveis de classe $C^\infty(\mathbf{R})$ com a derivação usual.

EXEMPLO 13. O anel das funções inteiras (funções analíticas definidas em todo o plano complexo), com a derivação usual. Observe que, como no exemplo anterior, não há divisores de zero, e portanto existe um corpo de frações (o corpo das funções meromorfas). Mais geralmente, podemos pegar funções analíticas em um domínio do plano complexo.

EXEMPLO 14. Seja A um anel diferencial. Usamos a notação $A[x]$ para o anel de todos os polinômios com coeficientes em A em uma variável (algébrica). Se A é um corpo, $A(x)$ denota o corpo das funções racionais em x. A derivação em A pode ser estendida a uma derivação em $A[x]$ definindo, arbitrariamente x' e $(x^n)' = nx^{n-1}x'$, e estendendo por linearidade. Podemos fazer a mesma construção para $A(x)$ (veja o teorema 5).

EXEMPLO 15. Novamente seja A um anel diferencial. Agora, formamos o anel $A[x]$ ($x = (x_0, x_1, \ldots)$) dos polinômios em um número infinito de variáveis (ordinárias). Então fica determinada uma única derivação em $A[x]$ se definirmos a derivada de x_i como x_{i+1}.

Mudando a notação, temos $x_0 = x$, $x_n = x^{(n)}$. Chamaremos esse procedimento de *adjunção de uma variável diferencial* e usaremos a notação $A\{x\}$ para o anel resultante. Os elementos de $A\{x\}$ são chamados *polinômios diferenciais* em x (são polinômios ordinários em x e suas derivadas).

Suponha que A é um corpo diferencial, então $A\{x\}$ é um domínio diferencial de integridade e sua derivação se estende unicamente a seu corpo de frações (teorema 5). Escrevemos $A\langle x\rangle$ para este corpo de frações; seus elementos são *funções racionais diferenciais* de x (quocientes de polinômios diferenciais).

As notações $\{\}$ e $\langle\rangle$ também serão usadas quando os elementos adjuntados não são variáveis diferenciais, mas preferivelmente elementos de um anel ou corpo diferencial maior.

Em qualquer anel diferencial A os elementos com derivada 0 formam um subanel C chamado anel de *constantes*. Se A é um corpo, C também será um corpo. Note que C contém o subanel gerado pela unidade de A.

Seja I um ideal em um anel diferencial A. Dizemos que I é um *ideal diferencial* se $a \in I$ implicar $a' \in I$, ou de forma mais breve, $I' \subset I$. No anel A/I, introduzimos uma estrutura diferencial definindo a derivada da classe lateral $a + I$ como $a' + I$; esta é independente da escolha de representante da classe lateral e realmente define uma derivação em A/I (v. o teorema 6).

Sejam A e B anéis diferenciais. Um *homomorfismo diferencial* de A para B é um homomorfismo (algébrico) que comuta com a derivada. Se I é um ideal diferencial em A, o homomorfismo natural de A para A/I é um homomorfismo diferencial. Os termos *isomorfismo diferencial* e *automorfismo diferencial* são respectivamente isomorfismos que comutam com a derivada e automorfismos que comutam com a derivada.

TEOREMA 6. *Seja I o kernel de um homomorfismo diferencial definido num anel diferencial A. Então I é um ideal diferencial em A e A/I é isomorfo à imagem do homomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja φ um homomorfismo diferencial de A em algum anel diferencial B e seja I o kernel de φ. Para mostrar que I é um ideal diferencial, basta mostrar que $I' \subset I$. Se $a \in A$ é tal que $\varphi(a) = 0$, então $\varphi(a') = \varphi(a)' = 0' = 0$, logo $a' \in I$. O homomorfismo $\pi : A \longrightarrow A/I$ é um homomorfismo diferencial, pois definindo a aplicação $D : A \longrightarrow A$, $D(a) = a'$; $D_\pi : A/I \longrightarrow A/I$ pela regra $D_\pi(a + I) = a' + I$, temos $D_\pi \circ \pi = \pi \circ D$, pois

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\pi"] & A \arrow[d, "\pi"] \\ A/I \arrow[r, "D_\pi"] & A/I \end{tikzcd}$$

comuta por construção. Assim, se tomarmos $b \in Im(\varphi)$, temos que existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) = b$ e $\forall x \in I$, $\varphi(a + x) = b$, logo existe um homomorfismo bem definido $\widetilde{\varphi}$ de A/I sobre $Im(\varphi)$, dado por $\widetilde{\varphi}(a + I) = \varphi(a)$. Mostremos que $\widetilde{\varphi}$ é injetor (claramente é sobrejetor). Temos $\widetilde{\varphi}(b) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{b}) \iff \widetilde{\varphi}(b - \widetilde{b}) = 0 \iff b - \widetilde{b} \in I$. Mostremos também que $\widetilde{\varphi}$ é diferencial. Se $a + I \in A/I$, então $\widetilde{\varphi}(a' + I) = \varphi(a') = \varphi(a)' = (\widetilde{\varphi}(a + I))'$. $\square$

3. Ideais radicais

DEFINIÇÃO 42. Como na teoria de anéis, chamamos um ideal I de *ideal radical* se $a^n \in I$ implicar que $a \in I$.

LEMA 12. *Se ab pertence ao ideal diferencial radical I, então $ab' \in I$ e $a'b \in I$.*

DEMONSTRAÇÃO. $ab \in I \Longrightarrow a'b + ab' \in I$. Multiplicando por $a'b$, temos $(a'b)^2 + a'bab' \in I \Longrightarrow (a'b)^2 \in I$; como I é um ideal radical, temos $a'b \in I$. O outro termo: $(ab' + a'b)ab' \in I \Longrightarrow (ab')^2 + a'bab' \in I \Longrightarrow (ab')^2 \in I \Longrightarrow ab' \in I$. □

LEMA 13. *Seja I um ideal diferencial radical em um anel diferencial A e seja S um subanel de A. Definimos T como o conjunto de todos os x que pertencem a A que satisfazem $xS \subset I$. Então T é um ideal diferencial radical em A.*

DEMONSTRAÇÃO. Do fato de T ser um ideal e de $a, b \in T$, temos $aS \in I$ e $bS \in I$. Assim, $(a+b)S \in I$, pois $(a+b)S \subset aS + bS \subset I$, ou seja, $a + b \in T$. Se $a \in A$, então para qualquer $b \in T$, temos $bS \in I \Longrightarrow abS \in aI \subset I$. Logo $ab \in T$, isto é, $aT \subset T$.

T é ideal diferencial: $b \in T \Longrightarrow bs \in I, \quad \forall s \in S$. Como I é ideal diferencial radical, pelo lema 12, $b's \in I, \quad \forall s \in S$, logo, $b' \in T$.

T é ideal diferencial radical: $b^n \in T \iff b^n S \in I$. Como S é um subanel, temos que $b^n s^n \in I, \quad \forall s \in S$. Usando que I é um ideal diferencial radical, temos que $bs \in I, \quad \forall s \in S$. Logo $b \in T$. □

Em qualquer anel comutativo a intersecção de qualquer coleção de ideais radicais é um ideal radical $x^n \in \cap I_j \iff x^n \in I_j, \quad \forall j$, mas I_j é radical para todo j, logo $x \in I_j, \quad \forall j$ e $a \in \cap I_j \iff a \in I_j, \quad \forall j$, mas I_j é ideal diferencial para todo j o que implica $a' \in I_j, \quad \forall j$. Em um anel diferencial a intersecção de qualquer conjunto de ideais diferenciais é um ideal diferencial e portanto a intersecção de qualquer conjunto de ideais diferenciais radicais é um ideal diferencial radical. Portanto, para qualquer conjunto S em um anel diferencial existe um único ideal diferencial radical minimal contendo S; que denotaremos por $\{S\}$. (Esta notação é para ser cuidadosamente distinguida do uso de chaves para adjunções de variáveis diferenciais em anéis diferenciais.)

LEMA 14. *Seja a qualquer elemento e S qualquer subconjunto de um anel diferencial. Então $a\{S\} \subset \{aS\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo lema anterior, o conjunto dos x tais que $ax \in \{aS\}$ é um ideal diferencial radical e contém S, portanto contém $\{S\}$. Logo $a\{S\} \subset \{aS\}$. □

LEMA 15. *Sejam S e T quaisquer subconjuntos de um anel diferencial. Então*

$$\{S\}\{T\} \subset \{ST\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo lema anterior o conjunto dos x tais que $x\{T\} \subset \{ST\}$ contém S e é um ideal diferencial radical pelo lema 13, então contém $\{S\}$. □

DEFINIÇÃO 43. O radical de um ideal é definido como o conjunto de todos os elementos com alguma potência no ideal.

O radical de um ideal é um ideal radical. Para a teoria de anéis diferenciais precisamos complementar esta definição com o resultado que o radical de um ideal diferencial é um ideal diferencial. Mas isto não é verdade sem outras hipóteses, como veremos no exemplo 16.

EXEMPLO 16. Sobre o corpo $\mathbf{Z}_2$ (corpo de característica 2), seja A uma álgebra de dimensão 2 com bases 1 e x, onde $x^2 = 0$ e 1 é a unidade. Se definirmos $1' = 0$ e $x' = 1$, temos uma derivação em A, pois qualquer elemento de A é um polinômio em x com coeficientes em $\mathbf{Z}_2$, da forma $a + bx$, pois $x^2 = 0$. O radical do ideal nulo, $R(0)$, é gerado por x e não é um ideal diferencial, pois $1 \notin R(0)$.

O próximo exemplo mostra que nem todo ideal radical é um ideal primo, mas é fácil mostrar por indução que todo ideal primo é radical.

EXEMPLO 17. Seja $\mathbf{Z}$ o anel dos inteiros e definamos a derivação $'$ dada por $1' = 0$. Se observarmos o ideal $6\mathbf{Z}$, teremos que $6\mathbf{Z}$ é um ideal radical e que $6\mathbf{Z}$ não é um ideal primo porque $3 \cdot 2 \in 6\mathbf{Z}$ mas $3 \notin 6\mathbf{Z}$ e $2 \notin 6\mathbf{Z}$.

4. Álgebras de Ritt

DEFINIÇÃO 44. Uma *álgebra de Ritt* é um anel diferencial contendo o corpo dos números racionais (que é necessariamente um subcorpo do anel de constantes). Uma álgebra de Ritt é uma álgebra de fato sobre os números racionais, e geralmente de dimensão infinita.

LEMA 16. *Seja I um ideal diferencial em uma álgebra de Ritt e seja a um elemento com $a^n \in I$. Então $(a')^{2n-1} \in I$.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos $(a^n)' = na^{n-1}a' \in I$. Como I admite multiplicação por $1/n \in \mathbf{Q}$, $a^{n-1}a' \in I$. O caso $k = 1$ da afirmação $a^{n-k}(a')^{2k-1} \in I$ está feito. Diferenciando, temos:

$$(n-k)a^{n-k-1}(a')^{2k-1} + (2k-1)a^{n-k}(a')^{2k-2}a'' \in I.$$

Após multiplicar por a', vemos que o segundo termo pertence a I. Podemos cancelar o fator $(n-k)$ no primeiro termo e teremos

$$a^{n-k-1}(a')^{2k-1} \in I,$$

que é o caso $k+1$ da afirmação feita acima (portanto está provada por indução). Finalmente podemos repetir esse processo até $k = n$, quando $(a')^{2n-1} \in I$. □

LEMA 17. *Em uma álgebra de Ritt, o radical de um ideal diferencial é um ideal diferencial.*

DEMONSTRAÇÃO. Conseqüência imediata do lema anterior. □

5. Teorema de Krull

É um teorema clássico da teoria de anéis comutativos que afirma que qualquer ideal radical é a intersecção de ideais primos.

É um fato que a palavra diferencial possa ser inserida tanto na hipótese quanto na conclusão deste teorema. A técnica da demonstração reside no seguinte lema:

LEMA 18. *Seja T um subconjunto de um anel diferencial A, fechado pela multiplicação. Seja Q o ideal diferencial radical maximal com respeito à exclusão de T, isto é, Q é o maior ideal diferencial radical tal que $Q \cap T = \varnothing$. Então Q é primo.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $a \cdot b$ pertence a Q, com $a \notin Q$ e $b \notin Q$, então $\{a, Q\}$ e $\{b, Q\}$ são ideais diferenciais radicais estritamente maiores que Q. Portanto $\{a, Q\}$ e $\{b, Q\}$ contém elementos de T, digamos t_1 e t_2. Assim, pelo lema 15, $t_1 t_2 \in \{a, Q\}\{b, Q\} \subset Q$ e $t_1 t_2 \in T$ portanto temos uma contradição. □

TEOREMA 7. *Seja I um ideal diferencial radical em um anel diferencial A. Então I é a intersecção de ideais diferenciais primos.*

DEMONSTRAÇÃO. Dado um elemento $x \notin I$, temos que produzir um ideal diferencial primo que contenha I e não contenha x. Seja T o conjunto de todas as potências de x; pelo lema de Zorn aplicado a

$$S = \{\text{ideais diferenciais radicais que contém } I \\ \text{e que não contém nenhum elemento de } T\}$$

com a seguinte ordem parcial: $a \leq b \iff a \subset b$; toda a cadeia ascendente de S tem um majorante, isto é, $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset \bigcup_{i \in N^*} I_i$.[1]

Assim, existe $Q \in S$ que é maximal com respeito à exclusão de T. Aplicando o lema anterior,[2] temos que Q é primo. □

6. Extensões de ideais primos

Agora vamos contemplar a seguinte situação: A é um anel diferencial contido em B (que inclui a hipótese de que eles têm o mesmo elemento unidade). P é um ideal diferencial primo em A (portanto, radical) I é um ideal diferencial radical em B que contrai em P (isto é, $P = I \cap A$). Temos duas questões:

(1) I pode ser estendido a um ideal diferencial primo que também contrai em P?
(2) I é, de fato, a intersecção de ideais diferenciais primos que contraem em P?

A resposta à primeira questão é uma afirmativa incondicional, como mostra o

TEOREMA 8. *Seja B um anel diferencial com um subanel diferencial A. Seja I um ideal diferencial radical em B tal que $P(:= I \cap A)$ é um ideal diferencial primo em A. Então I está contido em um ideal diferencial primo em B que também contrai em P.*

DEMONSTRAÇÃO. Tomamos T o complementar de P em relação a A e para aplicarmos o lema 18 e obter um ideal diferencial primo Q, precisamos verificar que T é fechado pela multiplicação: $a, b \in T \Longrightarrow a \notin P$ e $b \notin P$, portanto $ab \notin P$, pois se, por absurdo, $ab \in P$ com $a \notin P$ e $b \notin P$, então do fato de P ser primo, $a \in P$ ou $b \in P$, contrariando a hipótese. □

[1] Observe que $\bigcup_{i \in N^*} I_i$ é um ideal e pertence a S.

[2] Observe que T é fechado em relação à multiplicação.

Para responder à segunda questão, afirmativamente precisamos de uma hipótese adicional: $ab \in I, a \in A, b \in B$ implica $a \in I$ ou $b \in I$. Esta hipótese não pode ser descartada, uma vez que todo ideal I, satisfazendo a tese do teorema, tem esta propriedade.

TEOREMA 9. *Seja B um anel diferencial com um subanel diferencial A. Seja I um ideal diferencial radical em B tal que $ab \in I$, $a \in A, b \in B$ implica $a \in I$ ou $b \in I$ (note que $P := I \cap A$ é um ideal diferencial primo em A). Então I pode ser expresso como intersecção de ideais diferenciais primos em B que também se contraem em P.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in B \setminus I$. Devemos construir um ideal diferencial primo que contém I, que contrai em P e que não contenha x. Seja $T \subset B$ o conjunto de todos os elementos da forma ax^n, $a \in A$ e $a \notin P$. Então T é multiplicativamente fechado, pois P é primo em A, e segue, de nossas hipóteses que $I \cap T = \varnothing$. O lema 18 nos fornece um ideal diferencial primo Q que contém I e $I \cap T = \varnothing$. Observemos que $x \notin Q$, pois $x \in T$. Finalmente para ver que $Q \cap A = P$, seja $0 \neq a \in Q \cap A$. Então $ax \in Q$, o que é uma contradição, pois $ax \in T$ e $Q \cap T = \varnothing$, a menos que $a \in P$. □

7. Um lema no anel de polinômios

Nesta seção, por conveniência, separamos um lema elementar não diferencial.

LEMA 19. *Sejam K e L corpos com $K \subset L$, B o anel obtido fazendo a adjunção de um conjunto (provavelmente infinito) de variáveis a L; A o anel obtido fazendo a adjunção destas mesmas variáveis a K, P um ideal em A, J um ideal em B gerado por P, I o radical de J. Então:*

(a) *Se P é radical então $I \cap A = P$;*
(b) *Se P é um ideal primo tal que $ab \in I$, com $a \in A$ e $b \in B$ então ou $a \in P$ ou $b \in I$;*
(c) *Suponha que a característica de K seja 0 e que $P \neq A$ (P não precisa ser um ideal radical). Sejam y uma das variáveis e s um elemento que está em L mas não em K. Então $y - s$ não está em I.*

DEMONSTRAÇÃO. Olhemos L momentaneamente apenas como um K-espaço vetorial e escolhamos uma base vetorial u_α, α percorrendo algum conjunto de índices. Escolhemos u_1 e u_2 dois elementos da base (embora não existam indícios que o conjunto de índices seja contável muito menos que seja bem ordenado). Podemos tomar, em particular, $u_1 = 1$. Todo elemento de B tem uma única expressão $\sum a_\alpha u_\alpha$, onde a_α está em A e tal elemento está em A somente no caso de todos os a_α serem nulos exceto, eventualmente, a_1. Agora J evidentemente consiste exatamente de todos os elementos $\sum p_\alpha u_\alpha$, $p_\alpha \in P$. Segue que $J \cap A = P$.

(a) Suponhamos que P seja um ideal radical e que $b \in I \cap A$. Então para algum n, b^n pertence a $J \cap A = P$. Como P é um ideal radical, $b \in P$. Portanto $I \cap A = P$.
(b) Suponhamos, agora, que P é um ideal primo e que $ab \in I$, $a \in A$, $b \in B$. Então $a^n b^n \in J$. Digamos que $b^n = \sum a_\alpha u_\alpha$. Encontramos $\sum (a^n a_\alpha) u_\alpha \in J$, portanto cada $a^n a_\alpha \in P$. Se $a \in P$ ou se para todo $a_\alpha \in P$, temos $b^n \in J, b \in I$.

(c) Suponhamos que $y - s$ pertença a I e cheguemos a uma contradição. Alguma potência $(y-s)^m \in J$. Seja I_0 o conjunto de todos os polinômios em y (coeficientes em L) que estão em J. I_0 é um ideal principal cujo gerador divide $(y-s)^m$. Este gerador não pode ser constante (isto é, um elemento não nulo de L) mas então J deveria ser todo B e $P = J \cap A$ deveria ser todo A, contrariando nossa hipótese. Então o gerador é da forma $(y-s)^r$ com $r \geq 1$. Agora tomando $u_1 = 1$ e $u_2 = s$ (da base vetorial), $(y-s)^r$ é expresso como combinação linear dos u_α, cada coeficiente separadamente deve estar em P e portanto em J. Em particular, isto é verdade para o coeficiente de u_1, um polinômio começando com y^r e então não tendo termos em y^{r-1}. Este polinômio deve coincidir com

$$(y-s)^r = y^r - rsy^{r-1} + \cdots .$$

Como a característica é nula, isto é impossível.

□

À parte (c) pode ser adicionada a afirmação que (no caso de característica 0) J é um ideal radical se P o for.

8. Isomorfismos admissíveis

DEFINIÇÃO 45. Um isomorfismo entre dois corpos K e L é chamado de *isomorfismo admissível* se existir um corpo M contendo ambos K e L.

Os isomorfismos admissíveis desempenharão papel de substitutos temporários dos automorfismos; ou seja, em um certo contexto, deveremos ser capazes de provar que isomorfismos admissíveis são automorfismos. A teoria de Galois clássica pode ser desenvolvida desta maneira: se N é uma extensão separável finita de K, então N é normal sobre K se e somente se todo isomorfismo admissível de N, que fixa K é um automorfismo. No tratamento moderno da teoria de Galois, os isomorfismos admissíveis não são mencionados; mas eles parecem ser indispensáveis para a teoria de Galois diferencial.

Nós provaremos agora, dois teoremas básicos notando a extensão e existência de isomorfismos admissíveis.

TEOREMA 10. *Sejam M um corpo diferencial de característica 0, K e L subcorpos diferenciais e seja S um isomorfismo diferencial de K sobre L. Então S pode ser estendido a um isomorfismo diferencial admissível definido em M.*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
M \arrow[rr, "\tilde{S}"'] \arrow[dr, dash] & & M' \\
K \arrow[rr, "S"'] & & L
\end{tikzcd}$$

DEMONSTRAÇÃO. Ordenando parcialmente os corpos via inclusão, pelo princípio da indução transfinita, reduzimos o problema ao seguinte:

dado um elemento u em M mas não em K, procuramos definir uma extensão do isomorfismo S a u, a imagem de u, ficando em alguma extensão de M.

Seja $K\{u\}$ o domínio integral gerado pela adjunção de u a K e seja $K\{y\}$ o domínio integral gerado pela adjunção de uma variável diferencial y a K. Seja P_1 o kernel do homomorfismo diferencial definido em $K\{y\}$ sobre $K\{u\}$ definido da seguinte forma: fixa os elementos de K e leva y em u.

- Certamente P_1 é um ideal, pois o homomorfismo é um homomorfismo de anéis;
- P_1 é um ideal primo pois $a \in P_1$ se $ab \in P_1$, então o homomorfismo $y \longrightarrow u$ leva ab em 0, porém, como $K\{u\}$ é um domínio, o produto das imagens do homomorfismo, aplicado em a e em b é levado em 0. Logo alguma das imagens deve ser 0, isto é, P_1 contém a ou b;
- P_1 é um ideal diferencial, pois o homomorfismo $y \longrightarrow u$ é um homomorfismo diferencial, isto é, se $a \longrightarrow 0$, então $a' \longrightarrow 0' = 0$, (o gerador de P_1 é o substituto natural para o polinômio irredutível de u que seria usado, sob o ponto de vista da teoria clássica de corpos).

Transferimos o ideal P_1 a um ideal P em $L\{y\}$ via o homomorfismo S.[3] Seja J o ideal em $M\{y\}$ gerado por P. Como M consiste de todas as somas finitas $\sum p_i m_i$ com p_i em P e $m_i \in M\{y\}$ é claro que J é um ideal diferencial. Seja I o radical de J. Como a característica de M é nula, pelo lema 17, I é um ideal diferencial (radical) em $M\{y\}$. Pela parte (a) do lema 19, $I \cap L\{y\} = P$ (Os K e L do lema 19 são substituídos por L e M. Note que do ponto de vista algébrico $M\{y\}$ é obtido fazendo a adjunção de um número contável de variáveis a M). Pelo teorema 8, I pode ser aumentado a um ideal primo Q em $M\{y\}$ satisfazendo $Q \cap L\{y\} = P$.

Escrevamos v a imagem de y sob o homomorfismo natural de $M\{y\}$ sobre $M\{y\}/Q$. Definimos um homomorfismo de $K\{y\}$ sobre $L\{v\}$ em dois passos: $K\{y\}$ para $L\{y\}$ via S, e então de $L\{y\}$ para $L\{v\}$ levando y em v.

O kernel da segunda aplicação é $Q \cap L\{y\} = P$. Portanto o kernel do produto das aplicações é P_1. Assim, conseguimos um isomorfismo diferencial entre dois domínios integrais $K\{u\}$ e $L\{v\}$, estendendo S. Pelo teorema 5, o isomorfismo se estende unicamente a um isomorfismo diferencial entre os corpos de frações. Isto conclui a prova do teorema 10. □

TEOREMA 11. *Seja K um corpo diferencial de característica 0. Seja s um elemento em um corpo diferencial maior L, $s \notin K$. Então existe um isomorfismo diferencial admissível em L que realmente move s e é a identidade em K.*

DEMONSTRAÇÃO. O procedimento fundamental é o mesmo usado na prova do teorema 10. Para uma variável diferencial y, chamamos de P o kernel do homomorfismo de $K\{y\}$ em $K\{s\}$. Claro que $P \neq K\{y\}$ para $s \neq 0$. Seja J o ideal em $L\{y\}$ gerado por P, onde $L = K\langle s\rangle$. Seja I o radical de J. Então I é um ideal radical em $L\{y\}$ que contrai, em $K\{y\}$, em P. Suponha que I tenha expandido para um ideal diferencial primo Q em $L\{y\}$ que também contraia em P, em $K\{y\}$. Seja t a imagem de y sob o homomorfismo de $L\{y\}$ sobre $L\{y\}/Q$. Então podemos construir um isomorfismo diferencial admissível de $K\langle s\rangle$ em $K\langle t\rangle$, que leva s em t. Observe que $t = s$ somente se $y - s \in Q$.

[3]Levando os coeficientes através de S e fixando y e suas derivadas.

Agora a parte (b) do lema 18 nos conta que a hipótese do teorema 9 é satisfeita (com $K\{y\}$ e $L\{y\}$ desempenhando os papéis de A e B respectivamente). Conseqüentemente a intersecção dos Q's como acima é I. Se sempre encontrarmos $y - s \in Q$, seguiria que $y - s \in K$ mas isto contradiz a parte (c) do lema 19.

Temos, portanto, construído um isomorfismo diferencial de $K\langle s\rangle$ em $L\langle t\rangle$ que move s. Pelo teorema 10 podemos estender a um isomorfismo diferencial admissível definido em todo L. $\square$

APÊNDICE C

Demonstração do lema 4

PROVA DO LEMA 4. Seja $(x_{-1}, u_{-1}) = (x, u)$ a representação de estados original do sistema S com saída $y^{(0)}$ definido pelo sistema explícito (5).

No passo $k-1$ desse algoritmo ($k \in \{0, 1, \ldots\}$) pode-se construir uma representação local de estados clássica (x_{k-1}, u_{k-1}) com saída $y^{(k)}$ definida numa vizinhança aberta U_{k-1} de $\xi \in S$.

Suponha que $span\{dt, dx_{k-1}, dy^{(k)}\}$ não é singular em torno de ξ.

Note que podemos dar a seguinte descrição geométrica do algoritmo de extensão dinâmica:

S1. Escolha $\overline{y}_k$ (possivelmente dentre as componentes de y), de forma a completar $\{dx_{k-1}\}$ a uma base $\left\{dt, dx_{k-1}, d\overline{y}_k^{(k)}\right\}$ para $span\{dt, dx_{k-1}, dy^{(k)}\}$.

Escolhe-se $\widehat{u}_k$ (possivelmente dentre as componentes de u_{k-1}) completando-a uma base $\left\{dt, dx_{k-1}, d\overline{y}_k^{(k)}, d\widehat{u}_k\right\}$ do espaço $span\{dt, dx_{k-1}, du_{k-1}\}$.

De acordo com o que foi feito no exemplo 6, isto define uma realimentação local de estados.

Por construção, esta realimentação local de estados tem as propriedades

$$\begin{aligned} \overline{y}_k^{(k)} &= \overline{v}_k \\ \widehat{y}_k^{(k)} &= \widehat{y}_k(t, x_{k-1}, \overline{v}_k) \end{aligned}$$

S2. Defina $x_k = (x_{k-1}, \overline{y}_k^{(k)})$ e $u_k = (\dot{\overline{y}}_k^{(k)}, \widehat{u}_k)$. Essa é uma extensão de estado dinâmica.

Note que (S1) e (S2) produzem uma nova representação local de estados (x_k, u_k) do sistema S definido em uma vizinhança aberta $U_k \subset U_{k-1}$ de ξ.

Note também que os passos (S1) e (S2) descrevem o procedimento do algoritmo da extensão dinâmica que pode ser executado, pelo menos teoricamente, para sistemas não afins (neste caso os cálculos podem não ser efetivos, pois é necessário aplicar o teorema da função inversa para calcular a realimentação $u_{k-1} = \gamma(x_{k-1}, v_k)$ em cada passo do algoritmo.

Uma descrição do algoritmo da extensão dinâmica para sistemas não afins pode ser encontrada em [**LF87**].)

(1, 2): Mostraremos primeiramente que a representação de estados (x_k, u_k) é clássica, isto é, $span\{d\dot{x}_k\} \subset span\{dt, dx_k, du_k\}$. Esta propriedade vale para (x, u) $(k = -1)$.

Por indução supomos que a propriedade valha para (x_k, u_k). Então por (S1) e (S2) temos que

$$\begin{aligned} span\{d\dot{x}_{k+1}\} &\subset \\ \subset span\{dt, dx_k, d\dot{x}_k, d\overline{y}_k^{(k)}, d\dot{\overline{y}}_k^{(k)}\} &\subset \\ \subset span\{dt, dx_{k+1}, du_{k+1}\}. \end{aligned}$$

No passo $k = 0$, escolhemos uma partição $y^{(0)} = (\overline{y}_0^{(0)}, \widehat{y}_0^{(0)})$ e construímos $\widehat{u}_0$ satisfazendo (S1) para $k = 0$.

Então $d\widehat{y}_0^{(0)} \in span\{dt, dx, d\overline{y}_0^{(0)}\}$, logo

$$\begin{aligned} d\dot{\widehat{y}}_0^{(0)} &\in span\{dt, dx, d\dot{x}, d\overline{y}_0^{(0)}, d\dot{\overline{y}}_0^{(0)}\} \\ &\subset span\{dt, dx, du, d\overline{y}_0^{(0)}, d\dot{\overline{y}}_0^{(0)}\}. \end{aligned}$$

Assim, $d\dot{y} \in span\{dt, dx_0, du_0\}$. Então é fácil ver que 1 e 2 são satisfeitos para $k = 0$. Agora supomos que no passo $k - 1$ temos uma representação local de estados (x_{k-1}, u_{k-1}) satisfazendo 1 e 2.

Escolha uma partição $y^{(k)} = (\overline{y}_k^{(k)}, \widehat{y}_k^{(k)})$ de forma que (S1) seja satisfeita e construímos $\widehat{u}_k$ satisfazendo (S2).

Por 1 para $k - 1$ e (S1) segue que

$$span\{dt, dx_k\} = span\{dt, dx, dy, \ldots, dy^{(k)}\}.$$

Por construção, notemos que

$$\begin{aligned} d\widehat{y}_k^{(k+1)} &\in span\{dt, dx_{k-1}, d\dot{x}_{k-1}, d\overline{y}_k^{(k)}, d\dot{\overline{y}}_k^{(k)}\} \subset \\ &\subset span\{dt, dx_{k-1}, du_{k-1}, d\overline{y}_k^{(k)}, d\dot{\overline{y}}_k^{(k)}\}. \end{aligned}$$

Por (S1) segue que $dy^{(k+1)} \in span\{dt, dx_k, du_k\}$.

Podemos mostrar que se 2 vale para $k - 1$, então

$$span\{dt, dx_k, du_k\} = span\{dt, dx, dy, \ldots, dy^{(k+1)}, du\},$$

completando a indução.

De fato,

$$span\{dt, dx_k, du_k\} = span\{dt, dx_{k-1}, d\overline{y}_k^{(k)}, d\widehat{u}_k\} + span\{d\dot{\overline{y}}_k^{(0)}\}.$$

Por (S1) e pela hipótese de indução, segue que

$$span\{dt, dx_k, du_k\} = span\{dt, dx, du, dy, \ldots, dy^{(k)}\} + span\{d\dot{\overline{y}}_k^{(k)}\}$$

Desde que $dy^{(k+1)} \in span\{dt, dx_k, du_k\}$, então 2 vale para k. Isto mostra 1 e 2.

(3, 5, 6, 7): Mostraremos primeiramente que

$$\dim Y_k(\nu) - \dim Y_{k-1}(\nu) \geq \dim Y_{k+1}(\nu) - \dim Y_k(\nu) \forall \nu \in S_k. \tag{49}$$

Para isto, note que se as 1-formas $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\} \subset Y_k$ são linearmente dependentes módulo Y_{k-1}, isto é, se

$$\alpha_0 dt + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \eta_i + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{ij} dy_i^{(j)} = 0$$

então, derivando em relação ao tempo[1] temos:

$$\dot{\alpha}_0 dt + \sum_{i=1}^{s} (\dot{\alpha}_i \eta_i + \alpha_i \dot{\eta}_i) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k-1} (\dot{\beta}_{ij} dy_i^{(j)} + \beta_{ij} dy_i^{(j+1)}) = 0,$$

em outras palavras $\dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_s$ são linearmente dependentes $\mod Y_{k+1}$.

Seja $\xi \in S_k$. Da não singularidade de $\mathcal{Y}_j$, Y_j, $j = 0, \ldots, k$ em S_k, se $\dim Y_k - \dim Y_{k-1} = \ell$ em $\xi \in S_k$, então podemos escolhoer uma partição $y = (\overline{y}^T, \widehat{y}^T)$ tal que $\overline{y}$ tem ℓ componentes e temos, localmente, $Y_k = span\{d\overline{y}^{(k)}\} + Y_{k-1}$.

Seja $\widehat{y}_j$ qualquer componente de $\widehat{y}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, p - l\}$. Por construção temos que $\left\{d\widehat{y}_j^{(k)}, d\overline{y}^{(k)}\right\}$ é linearmente dependente $\mod Y_{k-1}$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, p - rl\}$.

Do que foi dito acima segue que o conjunto $\left\{d\widehat{y}_j^{(k+1)}, d\overline{y}^{(k+1)}\right\}$ é localmente dependente $\mod Y_k$ para todo $j \in \{1, \ldots, p - r\}$, mostrando (49). Em particular a seqüência ρ_k é não crescente.

Mostraremos agora que

$$\dim \mathcal{Y}_k(\nu) - \dim \mathcal{Y}_{k-1}(\nu) \leq \dim \mathcal{Y}_{k+1}(\nu) - \dim \mathcal{Y}_k(\nu), \quad \forall \nu \in S_k \tag{50}$$

Suponha que (x_k, u_k) é uma representação de estados construída em uma vizinhança U_k de um ponto $\xi \in S_k$ e que satisfaçam (S1), (S2), 1 e 2. Como $d\dot{\overline{y}}_k^{(k)} \subset u_k$, segue que as componentes de $d\dot{\overline{y}}_k^{(k)}$ são independentes $\mod \mathcal{Y}_k$ pois eles também são componentes da entrada u_k e além disso, $span\{dt, dx_k\} = \mathcal{Y}_k$. Logo $\overline{y}_{k+1}^{(k+1)}$ pode ser escolhido de forma a satisfazer 3, o que mostra (50). Em particular, $\sigma_{k+1} \geq \sigma_k$.

Para mostrar a convergência da seqüência ρ_k e σ_k para algum $k^* \leq n$, supomos que $\nu \in S_k$. Denotemos $span\{dx\}$ por X, então $\mathcal{Y}_k = X + Y_k$ e portanto

$$\dim \mathcal{Y}_k(\nu) = \dim X(\nu) + \dim Y_k(\nu) - \dim(X(\nu) \cap Y_k(\nu)).$$

Denotemos, para $k \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} s_k(\nu) &= \dim \mathcal{Y}_k(\nu) - \dim \mathcal{Y}_{k-1}(\nu) \\ p_k(\nu) &= \dim Y_k(\nu) - \dim Y_k(\nu) \end{aligned}$$

Note que $\rho_k = p_k(\nu)$ e $\sigma_k = s_k(\nu)$ são constantes para todo $\nu \in S_k$. Também temos:

$$s_k(\nu) = p_k(\nu) - \dim(Y_k(\nu) \cap X(\nu)) + \dim(Y_{k-1}(\nu) \cap X(\nu)). \tag{51}$$

Mostraremos agora que

PROPOSIÇÃO 6. *Se existir k^* e algum $\nu \in S_{k^*}$ tal que $s_{k^*}(\nu) = p_{k^*}(\nu) = \rho$, então $s_{k^*+1}(\xi) = p_{k^*+1}(\xi) = \rho$ para todo $\xi \in S_{k^*}$.*

[1] Isto é, tomando-se a derivada de Lie $L_{\frac{d}{dt}}(.)$.

Notemos que, da proposição 6, uma indução simples mostra que $s_k(\xi) = p_k(\xi) = \rho$ para todo $k \geq k^*$ e $\xi \in S_{k^*}$. Além disso, essa última afirmação implica que $S_k = S_{k^*}$ para $k \geq k^*$.

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar a proposição 6, suponhamos que para algum $\nu \in S_{k^*}$,

$$p_{k^*}(\nu) = s_{k^*}(\nu) = \rho.$$

De (51), segue que

$$-\dim(Y_{k^*}(\nu) \cap X(\nu)) + \dim(Y_{k^*-1}(\nu) \cap X(\nu)) = 0.$$

Como as dimensões de $Y_{k^*} \cap X$ e de $Y_{k^*-1} \cap X$ são constantes em S_{k^*}, segue que, para todo $\xi \in S_{k^*}$, temos:

$$p_{k^*}(\xi) = s_{k^*}(\xi) = \rho \tag{52}$$

e

$$-\dim(Y_{k^*}(\xi) \cap X(\xi)) + \dim(Y_{k^*-1}(\xi) \cap X(\xi)) = 0.$$

Note que de (51) temos

$$s_{k^*+1}(\xi) - p_{k^*+1}(\xi) = -\dim(Y_{k^*+1}(\xi) \cap X(\xi)) + \dim(Y_{k^*}(\xi) \cap X(\xi)) \tag{53}$$

para todo $\xi \in S_{k^*}$. Por (49), (50) e (52), segue que:

$$s_{k^*+1}(\xi) - p_{k^*+1}(\xi) \geq 0.$$

Como $-\dim(Y_{k^*+1}(\xi) \cap X(\xi)) + \dim(Y_{k^*}(\xi) \cap X(\xi)) \leq 0$, a única possibilidade é ter ambos os lados de (53) iguais a zero para todo $\xi \in S_{k^*}$.

Usando (49) e (50) novamente, temos a proposição 6. □

Note que uma simples indução mostra que a proposição 6 implica a 7.

Para completar as provas de 5, 6 e 7 é suficiente mostrar a existência de k^* tal que a proposição 6 valha. Para isso, note que $\dim(Y_k(\nu) \cap X(\nu))$ é não decrescente para $k = 0, \ldots, n$ e é menor ou igual a $n = \dim(X)$.

Em particular, existe algum $k^* \leq n$ tal que $\dim(Y_{k^*}(\nu) \cap X(\nu)) = \dim(Y_{k^*-1}(\nu) \cap X(\nu))$.

(4): É conseqüência de 1, 2 e do modo como $\widehat{u}_k$ é escolhido em (S1).

(8): A primeira parte de 8 segue diretamente da afirmação 3, do fato que $\mathrm{card}(\overline{y}_k) = \sigma_k$ e de 5. A segunda parte de 8 segue facilmente da igualdade de $\mathrm{card}(\overline{y}_k) = \sigma_k$, do fato que as componentes de $d\overline{y}_k^{(k+1)}$ são independentes mod Y_k e do fato de que $\sigma_k = \rho_k = \rho$ para $k \geq k^*$.

(9): Conseqüência do lema 2. □

Referências

[AP98] U. M. Ascher and L. R. Petzold, *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1998.

[BCP96] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold, *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996, Revised and corrected reprint of the 1989 original.

[Cam82] L. S. Campbell, *Singular systems of differential equations*, Pitman, London, 1982.

[CF02] C. Corrêa Filho, *Aspectos geométricos de sistemas de controle implícitos*, Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002, Em preparação.

[CG95] S. L. Campbell and C. W. Gear, *The index of general nonlinear DAEs*, Numer. Math. **72** (1995), no. 2, 173–196.

[CM98] S. L. Campbell and W. Marszalek, *Mixed symbolic-numerical computations with general DAEs. II. An applications case study*, Numer. Algorithms **19** (1998), no. 1-4, 85–94.

[DBGM89] M. D. Di Benedetto, J. W. Grizzle, and C. H. Moog, *Rank invariants of nonlinear systems*, SIAM J. Control Optim. **27** (1989), 658–672.

[Dio92] S. Diop, *Differential–algebraic decision methods and some applications to system theory*, Theoretical Computer Science **98** (1992), 137–161.

[DM87] J. Descusse and C. H. Moog, *Dynamic decoupling for right-invertible nonlinear systems*, Systems Control Lett. **8** (1987), 345–349.

[DPdS98a] E. Delaleau and P. S. Pereira da Silva, *Filtrations in feedback synthesis: Part I — systems and feedbacks*, Forum Math. **10** (1998), no. 2, 147–174.

[DPdS98b] ———, *Filtrations in feedback synthesis: Part II — input-output and disturbance decoupling*, Forum Math. **10** (1998), 259–276.

[Fli89] M. Fliess, *Automatique et corps différentiels*, Forum Math. **1** (1989), 227–238.

[FLMR95a] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon, *Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples*, Internat. J. Control **61** (1995), 1327–1361.

[FLMR95b] ———, *Index and decomposition of nonlinear implicit differential equations*, IFAC Conf. System Structure and Control, 1995.

[FLMR99] ———, *A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems*, IEEE Trans. Automat. Control **44** (1999), no. 5, 922–937.

[FLR93] M. Fliess, J. Lévine, and P. Rouchon, *Index of an implicit time-varying linear differential equation: a noncommutative linear algebraic approach*, Linear Algebra Appl. **186** (1993), 59–71.

[Isi89] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 2nd ed., Springer–Verlag, 1989.

[Kap78] I. Kaplanski, *Introduction to differential algebra*, Herman, 1978.

[Kol73] E. R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, 1973.

[LF87] C.-W. Li and Y.-K. Feng, *Functional reproductibility of general multivariable analytic non-linear systems*, Internat. J. Control **45** (1987), 255–268.

[LV98] G. Le Vey, *Some remarks on solvability and various indices for implicit differential equations*, Numer. Algorithms **19** (1998), no. 1-4, 127–145. MR **2000b**:34003

[Mar92] P. Martin, *Contribuition a l'étude des systémes différentiellement plats*, Ph.D. thesis, École des Mines, Paris, 1992.

[NR88] H. Nijmeijer and W. Respondek, *Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems*, IEEE Trans. Automat. Control **33** (1988), 1065–1070.

[Oga97] K. Ogata, *Modern control engineering*, Prentice-Hall, 1997.

[PdS96] P. S. Pereira da Silva, *On the nonlinear dynamic disturbance decoupling problem*, J. Math. Systems Estim. Control **6** (1996), 1–26.

[PdS00] ———, *Some geometric properties of the dynamic extension algorithm*, Tech. Report EPUSP–BT/PTC/0008, Universidade de São Paulo, 2000, see www.lac.usp.br/~paulo/.

[PdSCF01] P. S. Pereira da Silva and C. Corrêa Filho, *Relative flatness and flatness of implicit systems*, SIAM J. Contr. Optimiz. **39** (2001), 1929–1951.

[PdSD01] P. S. Pereira da Silva and E. Delaleau, *Algebraic necessary and sufficient conditions of input-output linearization*, Forum Math. **13** (2001), no. 3, 335–357.

[Rud95] J. Rudolph, *Well-formed dynamics under quasi-static state feedback*, Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions (Warsaw) (B. Jackubczyk, W. Respondek, and T. Rzezuchowski, eds.), Banach Center Publications, 1995, pp. 349–360.

[Sei52] A. Seidenberg, *Some basic theorem in differential algebra (characteristic p, arbitrary)*, Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952), 174–190.

[SK01] K. Schlacher and A. Kugi, *Control of nonlinear descriptor systems, a computer algebra based approach*, Nonlinear control in the year 2000, Vol. 2 (Paris), Springer, London, 2001, pp. 379–395. MR 1 806 187