

# Apreçamento de Swaps de Volatilidade

Natalia Susana Sturniolo

Dissertação apresentada  
ao Instituto de Matemática e Estatística  
da Universidade de São Paulo.  
Para obtenção do grau de  
Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Paulo Serpa Schirmer**

*Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro da CAPES*

São Paulo - Julho de 2004

# Apreçamento de Swaps de Volatilidade

Este exemplar corresponde à redação final  
da dissertação de mestrado devidamente  
corrigida e defendida por  
Natalia Susana Sturniolo  
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, agosto de 2004.

Banca examinadora:

- Pedro Paulo Serpa Schirmer - IME - USP.
- Henrique Von Dreifus - IME - USP
- Rogerio Rosenfeld - UNESP

## Resumo

Estudamos o apreçamento livre de arbitragem de instrumentos derivativos com volatilidade estocástica, similar ao modelo de Heath-Jarrow-Morton (HJM) para taxa de juros estocástica. Começando desde um conjunto inicial de preços de índices de opções e sua superfície de volatilidade local associada, Derman e Kani mostraram como construir uma família de processos estocásticos contínuos que definem a evolução livre de arbitragem desta superfície de volatilidade local através do tempo. Também estudamos árvores implícitas estocásticas como implementações discretas de nossa família de modelos em tempo contínuo. Durante cada passo de tempo discreto o índice se movimenta aleatoriamente desde seu vértice inicial para algum vértice no seguinte nível de tempo, enquanto as probabilidades de transição também variam. Começando desde qualquer vértice, os movimentos futuros do índice e as volatilidades locais devem ser restritas tal que as probabilidades de transição de todos os vértices futuros sejam martingais simultaneamente. Isto garante que os preços iniciais das opções permanecem justos. Consideramos o apreçamento de uma classe de derivativos de volatilidade, os swaps de volatilidade. Os swaps de volatilidade são futuros contratos sobre a volatilidade futura realizada do ativo. Os swaps de variância são contratos similares sobre variância, o quadrado da volatilidade futura. Diferente das opções sobre ativos, cuja exposição da volatilidade está contaminada pela dependência do preço do ativo. Estes swaps de volatilidade provêm a exposição pura só da volatilidade. Aqui introduzimos algumas definições e propriedades dos swaps de variância e volatilidade.

## Abstract

We study an arbitrage approach to contingent claims valuation with stochastic volatility, similar to the Heath-Jarrow-Morton (HJM) approach to stochastic interest rate. Starting from an initial set of index options prices and their associated local volatility surface, Derman and Kani showed how to construct a family of continuous time stochastic processes which define the arbitrage-free evolution of this local volatility surface through time. We study too stochastic implied trees as discrete implementations of our family of continuous time models. During each discrete time step the index moves randomly from its initial node to some node at the next time level, while the local transition probabilities between the nodes also vary. Starting from any node, the future movements of the index and the local volatilities must be restricted so that the transition probabilities to all future nodes are simultaneously martingals. This guarantees that initial options prices remain fair. We consider a class of volatility derivative pricing, the volatility swaps. Volatility swaps are forward contract on future realized stock volatility. Variance swaps are similar contracts on variance, the square of future volatility. Both of these instruments provide

an easy way for investors to gain exposure to the future level of volatility. Unlike a stock option, whose volatility exposure is contaminated by its stock-price dependence, these swaps provide pure exposure to volatility alone. Here we introduce some definitions and properties of both variance and volatility swaps.

# Agradecimentos

Aos meus irmãos e meus pais por terem me ajudado e confiado em mim o tempo todo.

Ao Prof. Dr. Pedro Paulo Schirmer pela sua orientação.

Aos meus amigos do IME por todos os momentos compartilhados, em particular a Julieta, Florencia, Cesar e Marcelo pela força e amizade.

# Conteúdo

Introdução	1
1 Superfície de volatilidade	3
1.1 Teoria da volatilidade local	4
1.2 Teoria da volatilidade estocástica	7
2 Teoria de não arbitragem para a volatilidade estocástica	10
2.1 Probabilidades de transição e volatilidades locais	11
2.2 Condições de não arbitragem	13
2.3 Árvores implícitas estocásticas	15
2.4 Cálculo dos parâmetros de drift	16
2.5 Um exemplo numérico	19
3 Apreçamento de contratos de volatilidade a termo: Swaps de volatilidade	37
3.1 Aplicação ao mercado Brasileiro	46
A O Resultado de Breeden-Litzenberger: Probabilidades implícitas	49
B A fórmula de Dupire	51
Bibliografia	54

# Introdução

A teoria de Black-Scholes para o apreamento de opções [BS73] assume que os preços dos ativos subjacentes são estocásticos e com uma dinâmica do tipo log-normal, mas a volatilidade futura, as taxas de juros e os dividendos são determinísticos. A teoria está baseada na exclusão de arbitragem. Neste trabalho vamos estudar modelos com volatilidade estocástica, propostos por Derman e Kani [DK97], similar ao modelo de Heath-Jarrow-Morton [HJM92] para a taxa de juros estocástica. Começamos com uma economia em tempo contínuo com vários fatores. Trabalhamos com volatilidades locais (futuras) no lugar de volatilidades implícitas, impondo uma estrutura estocástica sobre a superfície de volatilidade local.

No modelo de Black-Scholes, o risco é modelado por um parâmetro de volatilidade constante. Muitos autores propuseram que a volatilidade deveria ser modelada por um processo estocástico para obter um modelo mais realista, mas este modelo não pode ser observado diretamente. Na realidade, a volatilidade não pode ser observada.

A volatilidade que corresponde ao mercado atual para os preços de opções no modelo de Black-Scholes é chamada volatilidade implícita. Esta volatilidade depende do preço de exercício e tempo de vencimento, e como função do preço de exercício forma uma curva chamada *smile de volatilidade*. Para estudar esta smile de volatilidade foi proposto estudar modelos que permitam que a volatilidade seja estocástica. Este modelo supõe conhecida uma superfície de volatilidade inicial e sugere um processo estocástico de vários fatores contínuos no tempo para a sua evolução no tempo. Para introduzir uma dinâmica estocástica, permitimos flutuações da superfície de volatilidade local à medida que o tempo e os preços dos ativos variam.

Para garantir que este processo seja consistente com uma economia livre de arbitragem, vamos estudar as condições para evitar estas oportunidades de arbitragem (em qualquer tempo futuro). Estas condições são não lineares e mais complexas que as estudadas por HJM para os modelos de taxa de juros estocástica.

Vamos também introduzir árvores estocásticas em um contexto discreto onde a superfície de volatilidade sofre variações estocásticas. Vamos trabalhar com árvores trinomiais estocásticas [DKC96], onde as posições dos vértices são fixas, mas as probabilidades de transição variam estocasticamente à medida

que o tempo e o índice mudam. Enquanto o tempo passa, o índice se movimenta aleatoriamente de vértice para vértice à medida que as volatilidades locais flutuam estocásticamente através da árvore.

Vamos estudar o apreamento de uma classe particular de derivativos, os chamados swaps de volatilidade. Swaps de volatilidade são os instrumentos mais simples para permitir a negociação de pura volatilidade. A volatilidade de um ativo é a medida mais simples do risco ou incerteza. As opções sobre ativos são impuras, pois a sua exposição depende do preço do ativo e da sua volatilidade. Um swap de volatilidade é um contrato futuro para a negociação de volatilidade pura.



## Capítulo 1

# Superfície de volatilidade

Vamos modelar um ativo com risco cujo valor no tempo  $t$  está dado por  $S_t$ . Sob a medida martingal equivalente, o processo de preços do ativo segue uma dinâmica dada pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t)dZ_t. \quad (1.1)$$

Aqui,  $r$  é a taxa de juros e é assumida constante,  $\sigma(t)$  é a volatilidade instantânea no tempo  $t$  e  $Z_t$  é o movimento Browniano padrão no tempo  $t$ . Podemos ver a volatilidade local  $\sigma_{K,T}(t, S)$  como uma estimativa da volatilidade instantânea no nível de mercado futuro  $K$  e tempo futuro  $T$ . Volatilidades locais correspondentes a diferentes níveis de mercados e tempos futuros, compreendem a *superfície de volatilidade local*. Os negociantes que usam o modelo de Black-Scholes para o hedge, devem mudar continuamente a suposição da volatilidade para ajustar-se aos preços do mercado. Dupire [Dup94] e Derman-Kani [DK94a], pensaram nas volatilidades locais como representando uma média de todas as possíveis volatilidades instantâneas em um mundo com volatilidade estocástica. A volatilidade estocástica é um processo não observável no mercado e está sujeita a uma dinâmica própria, também com parâmetros não observáveis. Uma vez que a real estrutura de volatilidade não é diretamente observável, o mercado acaba por calcular a volatilidade implícita  $\sigma_{BS}(K, T)$  das várias opções de compra e de venda escritas para um determinado ativo, isto é, o valor da volatilidade que produz o preço de mercado da opção. Como o preço da opção depende do preço de exercício  $K$  e do vencimento da opção  $T$ , então, a volatilidade implícita é uma função destas duas variáveis que descrevem uma superfície de volatilidade. Esta superfície é chamada de *superfície de volatilidade implícita*. A volatilidade implícita de um índice é o parâmetro de volatilidade da fórmula de Black-Scholes.

Existe uma única volatilidade implícita associada com específicos preços de exercícios e tempos de

vencimento.

Podemos calcular a volatilidade local  $\sigma_{K,T}(t, S)$  correspondente ao mercado futuro  $K$  e tempo  $T$  em função dos preços de opções  $C_{K,T}(t, S)$  com diferentes preços de exercício  $K$  e dos vencimentos  $T$ , usando a fórmula de Dupire (1994).

**Teorema 1.0.1 (B. Dupire, 1994)** *Se um mercado sobre um ativo base com dinâmica de preços do tipo:*

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t)dZ_t$$

*consegue encontrar preços de equilíbrio para quaisquer opções de compra (ou venda) para todo vencimento  $T$  e todo preço de exercício  $K$ , então existe uma única estrutura de volatilidade local compatível com o conjunto de preços  $\{C_{K,T}\}$  de opções negociadas no mercado. Mais ainda, esta estrutura de volatilidade pode ser calculada explicitamente a partir dos preços de opções segundo a fórmula:*

$$\sigma_{K,T}^2 = 2 \frac{\left\{ \frac{\partial C_{K,T}}{\partial T} + rK \frac{\partial C_{K,T}}{\partial K} \right\}}{K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2}}. \quad (1.2)$$

**Demonstração:** Demonstração no Apêndice B.

Esta equação está avaliada no presente tempo e nível de mercado, isto é,  $\sigma_{K,T} = \sigma_{K,T}(t_0, S_0)$ . Esta fórmula é bastante interessante do ponto de vista teórico, pois praticamente define a volatilidade em termos de um consenso de preços de mercado. Na prática, raramente é utilizada, devido à instabilidade das interpolações numéricas usadas para calcular as derivadas dos preços. Derman-Kani introduziram as árvores de volatilidades, que são nada mais nada menos que o análogo discreto, no mundo real, do resultado de Dupire.

## 1.1 Teoria da volatilidade local

Uma superfície de volatilidade local estática (não aleatória) define uma *teoria efetiva* da volatilidade. Neste contexto, a superfície de volatilidade local é assumida permanecendo invariante à medida que o tempo  $t$  e o preço do índice  $S$  variam:

$$\sigma_{K,T}(t, S) = \sigma_{K,T}.$$

Este procedimento deixa a incerteza do preço do índice como a única fonte de incerteza nesta teoria. A dinâmica resultante só depende do preço do índice e do tempo, e como função destas variáveis é

determinística. A medida que o tempo físico  $t$  passa e o preço do índice  $S_t$  varia, a volatilidade instantânea  $\sigma(t)$  segue ao longo da superfície de volatilidade local, coincidindo com a superfície de volatilidade local no tempo  $t$  e nível  $S_t$

$$\sigma(t) = \sigma_{S_t, t}. \quad (1.3)$$

Isto é consistente com um processo de equilíbrio (efetivo) do preço do índice descrito pela equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_{S_t, t} dZ_t \quad (1.4)$$

onde  $\mu_t$  é o retorno esperado dos índices e  $dZ_t$  é a medida de Wiener no tempo  $t$ . Neste processo a volatilidade instantânea é uma função determinística (conhecida) do tempo  $t$  e do preço do índice  $S_t$ . Os modelos das árvores implícitas são estruturas discretas para a implementação (efetiva) da dinâmica representada pela equação (1.4). A dinâmica dos preços de opções padrões na teoria efetiva é descrita pela equação *regressiva*:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_{K, T}(t, S) + rS \frac{\partial}{\partial S} C_{K, T}(t, S) + \frac{1}{2} \sigma_{S, t}^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} C_{K, T}(t, S) - rC_{K, T}(t, S) = 0. \quad (1.5)$$

Como a única fonte de incerteza sobrando é o preço do índice, as opções padrões são completamente hedgeáveis (usando o preço do índice como hedge). Equações (1.3) e (1.5) mostram então que a dinâmica dos preços de opções nesta teoria é livre de arbitragem. A equação (1.5) é também a dual da equação *progressiva* satisfeita pelos preços das opções padrões:

$$\frac{\partial}{\partial T} C_{K, T}(t, S) + rK \frac{\partial}{\partial K} C_{K, T}(t, S) - \frac{1}{2} \sigma_{K, T}^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} C_{K, T}(t, S) = 0. \quad (1.6)$$

Esta equação é a mesma que a equação (1.2) e é válida pela definição de volatilidade local, sem considerar suposição alguma sobre o comportamento da volatilidade.

O propagador progressivo  $p_{t, S, t', S'}$  descreve a relação entre os preços das opções nos pontos  $(t, S)$  e  $(t', S')$ , com  $t < t'$  para qualquer preço de exercício  $K$  e vencimento  $T$  através da equação:

$$C_{K, T}(t, S) = \int_0^\infty p_{t, S, t', S'} C_{K, T}(t', S') dS'. \quad (1.7)$$

O propagador progressivo em uma teoria da volatilidade efetiva descreve a evolução progressiva do preço da opção no tempo e preço do índice. Podemos definir a função de densidade de probabilidade de

transição progressiva como  $p(t, S, t', S') = e^{-r(t-t')}p_{t,S,t',S'}$ . Ela descreve a probabilidade total de que o preço do índice alcance o nível  $S'$  no tempo  $t'$ , sendo que o preço do índice no tempo  $t$  é igual a  $S$ .

A função de densidade de probabilidade de transição com condições de contorno  $p(t, S, t, S') = \delta(S - S')$ , satisfaz a seguinte equação regressiva

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t, S, t', S') + rS\frac{\partial}{\partial S}p(t, S, t', S') + \frac{1}{2}\sigma_{S,t}^2S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}p(t, S, t', S') = 0 \quad (1.8)$$

e a sua equação dual progressiva

$$\frac{\partial}{\partial t'}p(t, S, t', S') + r\frac{\partial}{\partial S'}(S'p(t, S, t', S')) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S'^2}(\sigma_{S',t'}^2S'^2p(t, S, t', S')) = 0 \quad (1.9)$$

e, para qualquer  $t \leq \bar{t} \leq t'$ , também satisfaz a equação de Chapman-Kolmogorov:

$$p(t, S, t', S') = \int_0^\infty p(t, S, \bar{t}, \bar{S})p(\bar{t}, \bar{S}, t', S') d\bar{S}. \quad (1.10)$$

A probabilidade de transição progressiva relaciona os preços das opções padrões, com preço de exercício  $K$  e vencimento  $T$  fixos, em diferentes tempos e níveis de mercado de acordo com a fórmula:

$$C_{K,T}(t, S) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty p(t, S, t', S')C_{K,T}(t', S') dS'. \quad (1.11)$$

**Teorema 1.1.1 (Breedem-Litzenberger)** *Seja  $C_{K,T}(t, S)$  o valor de uma opção com preço de exercício  $K$  e vencimento  $T$ , com  $T > 0$  fixo, escrita sobre o ativo base com preço futuro  $S_T$ . Seja  $p(t, S, T, K)$  a probabilidade de que no tempo  $T$  o preço de índice seja igual a  $K$  sendo que no tempo  $t$  o preço é igual a  $S$ . Podemos então calcular a medida de probabilidade ao risco dos preços de opções líquidas negociadas pelo mercado; isto é:*

$$p(t, S, T, K) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2}{\partial K^2} C_{K,T}(t, S). \quad (1.12)$$

**Demonstração:** Demonstração no Apêndice A.

Podemos também definir a função de densidade de probabilidade de transição regressiva  $\Phi(K, T, K', T')$ , com condições de contorno  $\Phi(K, T, K', T') = \delta(K - K')$  para todo  $T$ . Ela relaciona os preços de duas opções padrões, com diferentes preços de exercício  $K$  e vencimentos  $T$  no tempo  $t$ ,  $t \leq T' \leq T$  e nível de mercado  $S$  fixos de acordo com a equação:

$$C_{K,T}(t, S) = \int_0^\infty \Phi(K, T, K', T')C_{K',T'}(t, S) dK'. \quad (1.13)$$

Esta probabilidade de transição satisfaz a seguinte equação progressiva

$$\frac{\partial}{\partial T} \Phi(K, T, K', T') + rK \frac{\partial}{\partial K} \Phi(K, T, K', T') + \frac{1}{2} \sigma_{K,T}^2 K^2 \frac{\partial^2}{\partial K^2} \Phi(K, T, K', T') = 0 \quad (1.14)$$

e a sua equação dual regressiva

$$\frac{\partial}{\partial T'} \Phi(K, T, K', T') + r \frac{\partial}{\partial K'} (K' \Phi(K, T, K', T')) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K'^2} (\sigma_{K',T'}^2 K'^2 \Phi(K, T, K', T')) = 0 \quad (1.15)$$

e, para qualquer  $T \leq \bar{T} \leq T'$ , a equação de Chapman-Kolmogorov:

$$\Phi(K, T, K', T') = \int_0^\infty \Phi(K, T, \bar{K}, \bar{T}) \Phi(\bar{K}, \bar{T}, K', T') d\bar{K}. \quad (1.16)$$

Derivando esta equação duas vezes com respeito a  $S$  e fazendo  $T' = t$  obtemos

$$\Phi(K, T, S, t) = \frac{\partial^2}{\partial S^2} C_{K,T}(t, S). \quad (1.17)$$

Podemos usar a equação (1.4), implementando simulações ou usando métodos de árvores implícitas, para apreçamento ou hedge de opções complexas, com o conhecimento de que as opções padrões usadas inicialmente para derivar a superfície de volatilidade local, vão modelar os preços que se ajustam aos valores do mercado. Apesar desta calibragem, se a volatilidade tem um sólido comportamento estocástico, os preços de opções com payoffs dependentes da volatilidade ou das suas trajetórias não serão representadas pelos resultados desta teoria efetiva. O motivo é simplesmente que os resultados na teoria efetiva estão baseados na suposição de que as volatilidades locais são estáticas ou, equivalentemente, que a volatilidade instantânea é uma função do nível de mercado (e tempo). Esta é uma boa suposição em situações onde a volatilidade mostra uma forte correlação com o nível do mercado e, logo, pode ser vista como uma função dela. Por exemplo, isto acontece com as opções curtas. Pelo contrário, no mercado de câmbio ou nas opções longas, a volatilidade é predominantemente estocástica e a teoria efetiva de volatilidades locais estáticas não é válida. Devemos então adotar uma formulação estocástica para a volatilidade onde a superfície de volatilidade tem uma dinâmica própria.

## 1.2 Teoria da volatilidade estocástica

Para permitir uma dinâmica estocástica devemos introduzir uma estrutura estocástica externa na teoria efetiva. Em geral, há poucas restrições na escolha desta estrutura. Uma restrição importante é a ausência de qualquer oportunidade de arbitragem futura na teoria estocástica final. Outra restrição é como o número de fatores estocásticos estão perto do que é empiricamente observado. Vamos considerar

uma estrutura estocástica e discutir as condições que devem ser impostas para garantir a ausência de arbitragem. Para permitir esta estrutura estocástica na superfície de volatilidade local, vamos deixar que a superfície sofra de flutuações estocásticas com diversos fatores estocásticos independentes  $W^0, W^1, \dots, W^n$  baseados na seguinte equação diferencial estocástica:

$$d\sigma_{K,T}^2(t, S_t) = \alpha_{K,T}(t, S_t)dt + \sum_{i=0}^n \theta_{K,T}^i(t, S_t)dW_t^i. \quad (1.18)$$

Onde os  $W^i$ ,  $i = 0, \dots, n$  são movimentos Brownianos independentes e os coeficientes de volatilidade  $\theta_{K,T}^i$  são funções dadas que dependem de tempo  $t$ , preço do índice  $S$  e dos fatores  $W_t^i$  ou das suas histórias passadas. Para facilitar, só escrevemos a dependência do tempo  $t$  e do preço do índice  $S$ . Os parâmetros de drift  $\alpha_{K,T}(t, S)$  têm dependências similares, mas são restritos para satisfazer as condições de não arbitragem. Incluímos  $W^0 = Z$ , a fonte de incerteza do preço do índice, entre os fatores para que as variações estocásticas da superfície de volatilidade local possam depender do nível de mercado predominante. A família de processos da equação (1.18) define uma dinâmica de diversos fatores para a superfície de volatilidade local. Estes processos podem ser integrados, começando desde uma superfície de volatilidade inicial fixa (não aleatoria)  $\sigma_{K,T}(0, S_0)$  no tempo  $t = 0$ , como

$$\sigma_{K,T}^2(t, S_t) = \sigma_{K,T}(0, S_0) + \int_0^t \alpha_{K,T}(u, S_u) du + \sum_{i=0}^n \int_0^t \theta_{K,T}^i(u, S_u) dW_u^i. \quad (1.19)$$

O fator  $\theta_{K,T}^i(t, S_t)$  reflete a sensibilidade das volatilidades locais  $\sigma_{K,T}(t, S_t)$ , através de toda a superfície, por causa do choque introduzido pelo movimento Browniano  $W^i$ . Exceto por condições de mensurabilidade e integrabilidade, a família dos fatores de volatilidade não são restritos. A volatilidade instantânea no tempo  $t$ ,  $\sigma(t)$ , é a volatilidade local instantânea no tempo  $t$  e nível de mercado  $S_t$ , isto é:

$$\sigma(t) = \sigma_{S_t,t}(t, S_t). \quad (1.20)$$

Ela descreve a variação do processo de retornos do preço do índice, dado pela equação diferencial:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(t) dW_t^0 \quad (1.21)$$

ou sua forma integral

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu_u S_u du + \int_0^t \sigma(u) S_u dW_u^0 \quad (1.22)$$

onde  $\mu_t$  é o retorno esperado do índice. Fazendo  $T = t$  e  $K = S_t$  na equação (1.19), encontramos a equação estocástica integral satisfeita pela volatilidade instantânea (ou volatilidade *spot*)

$$\sigma^2(t) = \sigma_{S,t}^2(S_{0,0}) + \int_0^t \alpha_{S,t}(u, S_u) du + \sum_{i=0}^n \int_0^t \theta_{S,t}^i(u, S_u) dW_u^i. \quad (1.23)$$

Os coeficientes drift  $\alpha_{K,T}(t, S)$  devem também satisfazer condições de integrabilidade e mensurabilidade, além disso são restritos ao requerimento de que a teoria estocástica descrita pelas equações (1.21) e (1.23) não permitam oportunidades explícitas de arbitragem neste mercado.

## Capítulo 2

# Teoria de não arbitragem para a volatilidade estocástica

Os preços das opções padrões  $C_{K,T}(t, S)$  são funcionais da volatilidade local no tempo  $t$  e nível de mercado  $S$ . Por isso as variações dinâmicas da superfície de volatilidade local induzem variações dinâmicas nos preços destas opções. Durante um intervalo de tempo  $dt$ , o preço do índice varia e as volatilidades locais também mudam. Podemos pensar nas mudanças das volatilidades locais como compostas de duas componentes. Uma componente previsível, devido aos movimentos do tempo e preços do índice restritos à superfície de volatilidade local estática  $\sigma_{K,T}(t, S)$  no tempo  $t$  e nível  $S$ , e uma componente não previsível (estocástica) devido às flutuações fora desta superfície. Para facilitar, vamos trabalhar com as probabilidades de transição em lugar dos preços de opções, pois é mais simples e equivalente. A probabilidade de transição  $P(t, S, T, K; \sigma)$  descreve a probabilidade total de que o preço do índice alcance o nível  $K$  no tempo  $T$ , sendo que o preço do índice no tempo  $t$  é igual a  $S$ , quando o preço do índice e a volatilidade são estocásticas. Esta probabilidade está relacionada aos preços das opções  $C_{K,T}(t, S)$  através da fórmula:

$$P(t, S, T, K; \sigma) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2}{\partial K^2} C_{K,T}(t, S). \quad (2.1)$$

A evolução dinâmica das probabilidades de transição  $P(t, S, T, K; \sigma)$  baseadas no processo de volatilidade local da equação (1.19) está dada pela equação estocástica:



$$\begin{aligned}
dP(t, S, K, T; \sigma) = & \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} P(t, S, K, T; \sigma) + \mu(t) S \frac{\partial}{\partial S} P(t, S, K, T; \sigma) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \sigma^2(t) S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} P(t, S, K, T; \sigma) \right) dt + \sigma(t) S \frac{\partial}{\partial S} P(t, S, K, T; \sigma) dW^0(t) \right] \\
& + \int_t^T \int_0^\infty \frac{\delta P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K', T'}^2} d\sigma_{K', T'}^2 dK' dT' \\
& + \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^T \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\delta^2 P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K', T'}^2 \delta \sigma_{K'', T''}^2} d\sigma_{K', T'}^2 d\sigma_{K'', T''}^2 dK' dK'' dT' dT''.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Aqui o símbolo  $\frac{\delta}{\delta \sigma_{v,u}^2}$  denota a derivada variacional (ou funcional) com respeito à função  $\sigma^2$  avaliada em  $(v, u)$ <sup>1</sup>. O primeiro termo descreve a dinâmica efetiva das probabilidades de transição  $P(t, S, K, T; \sigma)$  restritas à superfície de volatilidade local fixa  $\sigma_{K,T}(t, S)$ , predominante no tempo  $t$  e nível  $S$ . O colchete, expressa o fato de que neste termo a volatilidade futura é uma função determinística do tempo futuro  $T$  e nível de mercado  $K$ , dada por  $\sigma_{K,T}(t, S)$ , vista como função destas duas variáveis. Os seguintes dois termos descrevem as variações dinâmicas das probabilidades de transição que resultam das flutuações estocásticas da superfície de volatilidade local durante o seguinte instante de tempo  $dt$ .

Não há expressões explícitas descrevendo a relação funcional entre os preços de opções e as volatilidades locais. Por isso não podemos calcular diretamente as derivadas funcionais na equação (2.2). Em lugar disso, podemos olhar as variações das probabilidades de transição progressivas e regressivas com respeito às volatilidades locais.

## 2.1 Probabilidades de transição e volatilidades locais

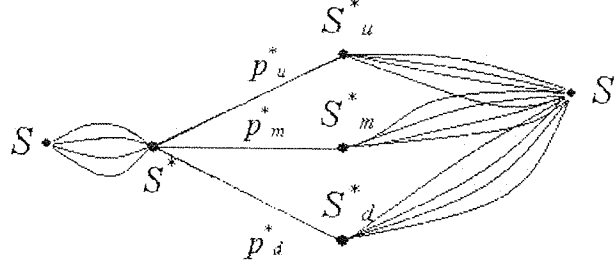
Vamos estudar a relação entre as probabilidades de transição progressivas e regressivas e a volatilidade local em um contexto de tempo discreto. Logo tomaremos o limite fazendo o espaçamento de tempo tender para zero. Consideramos as probabilidades de transição  $p_u^*$ ,  $p_m^*$  e  $p_d^*$ , desde o nível de mercado  $S^*$  no tempo  $t^*$  aos níveis  $S_u^*$ ,  $S_m^*$  e  $S_d^*$  no tempo  $t^* + \Delta t^*$  como na figura 2.1.

Seja  $F^* = S^* e^{r\Delta t^*}$  o preço futuro e  $\sigma^* = \sigma_{S^*, t^*}(t^*, S^*)$  a volatilidade local correspondente ao vértice inicial  $(t^*, S^*)$ . As probabilidades de transição satisfazem:

$$p_u^* + p_m^* + p_d^* = 1 \tag{2.3}$$

$$p_u^* S_u^* + p_m^* S_m^* + p_d^* S_d^* = F^* \tag{2.4}$$

<sup>1</sup>Esta derivada é uma generalização da derivada usual que apresenta-se no cálculo de variações. A variação de um funcional  $F(y(x))$  está dada por:  $\frac{\partial}{\partial \epsilon} F(y(x) + \epsilon \delta y) |_{\epsilon=0}$



$$p_u^* (S_u^* - F^*)^2 + p_m^* (S_m^* - F^*)^2 + p_d^* (S_d^* - F^*)^2 = F^{*2} \sigma^{*2} \Delta t^*. \quad (2.5)$$

Podemos isolar as probabilidades de transição em função da volatilidade local da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p_u^* &= \frac{(F^* - S_m^*)(F^* - S_d^*)}{(S_u^* - S_m^*)(S_u^* - S_d^*)} + \frac{F^{*2}}{(S_u^* - S_m^*)(S_u^* - S_d^*)} \sigma^{*2} \Delta t^* \\ p_d^* &= \frac{(F^* - S_m^*)(F^* - S_u^*)}{(S_m^* - S_d^*)(S_u^* - S_d^*)} + \frac{F^{*2}}{(S_m^* - S_d^*)(S_u^* - S_d^*)} \sigma^{*2} \Delta t^* \\ p_m^* &= 1 - p_u^* - p_d^*. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Seja  $p(t, S, t', S')$  a probabilidade de transição total de chegar a  $S'$  no tempo  $t'$  sendo que no tempo  $t$  o preço do ativo é  $S$  na teoria efetiva. Vamos isolar a volatilidade local  $\sigma_{S^*, t^*}$  correspondente ao preço de mercado  $S^*$  no tempo  $t^*$ , onde  $t \leq t^* \leq t'$ . Usando a equação de Chapman-Kolmogorov podemos escrever:

$$\begin{aligned} p(t, S, t', S') &= p(t, S, t^*, S^*) p_u^* p(t^* + \Delta t^*, S_u^*, t', S') \\ &\quad + p(t, S, t^*, S^*) p_m^* p(t^* + \Delta t^*, S_m^*, t', S') \\ &\quad + p(t, S, t^*, S^*) p_d^* p(t^* + \Delta t^*, S_d^*, t', S'). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tomando derivada variacional com respeito a  $\sigma_{S^*, t^*}^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta p(t, S, t', S')}{\delta \sigma_{S^*, t^*}^2} &= p(t, S, t^*, S^*) \frac{\delta p_u^*}{\delta \sigma_{S^*, t^*}^2} p(t^* + \Delta t^*, S_u^*, t', S') \\ &\quad + p(t, S, t^*, S^*) \frac{\delta p_m^*}{\delta \sigma_{S^*, t^*}^2} p(t^* + \Delta t^*, S_m^*, t', S') \\ &\quad + p(t, S, t^*, S^*) \frac{\delta p_d^*}{\delta \sigma_{S^*, t^*}^2} p(t^* + \Delta t^*, S_d^*, t', S') \end{aligned} \quad (2.8)$$

Das equações (2.6), ignorando os termos  $o(\Delta t^*)$  e aproximando  $S_u^* - S_m^* \approx S_m^* - S_d^* = \Delta S^*$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta p_u^*}{\delta \sigma_{S^*,t^*}^2} &= \frac{F^{*2}}{(S_u^* - S_m^*)(S_u^* - S_d^*)} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{F^*}{\Delta S^*} \right)^2 \\
\frac{\delta p_d^*}{\delta \sigma_{S^*,t^*}^2} &= \frac{F^{*2}}{(S_m^* - S_d^*)(S_u^* - S_d^*)} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{F^*}{\Delta S^*} \right)^2 \\
\frac{\delta p_m^*}{\delta \sigma_{S^*,t^*}^2} &= - \left( \frac{\delta p_u^*}{\delta \sigma_{S^*,t^*}^2} + \frac{\delta p_d^*}{\delta \sigma_{S^*,t^*}^2} \right) \approx - \left( \frac{F^*}{\Delta S^*} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Substituindo estas relações na equação (2.8), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta p(t, S, t', S')}{\delta \sigma_{S^*,t^*}^2} &= \frac{1}{2} p(t, S, t^*, S^*) F^{*2} [p(t^* + \Delta t^*, S^* + \Delta S^*, t', S') \\
&\quad - 2p(t^* + \Delta t^*, S^*, t', S') + p(t^* + \Delta t^*, S^* - \Delta S^*, t', S')] / (\Delta S^*)^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

No limite  $\Delta S^* \rightarrow 0$  obtemos a fórmula desejada:

$$\frac{\delta p(t, S, t', S')}{\delta \sigma_{S^*,t^*}^2} = \frac{1}{2} p(t, S, t^*, S^*) S^{*2} \frac{\partial^2}{\partial S^{*2}} p(t^*, S^*, t', S') \tag{2.11}$$

## 2.2 Condições de não arbitragem

Nesta seção vamos apresentar as condições de não arbitragem para os coeficientes de drift. Lembremos da equação (2.2):

$$\begin{aligned}
dP(t, S, K, T; \sigma) &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} P(t, S, K, T; \sigma) + \mu(t) S \frac{\partial}{\partial S} P(t, S, K, T; \sigma) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sigma^2(t) S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} P(t, S, K, T; \sigma) \right) dt + \sigma(t) S \frac{\partial}{\partial S} P(t, S, K, T; \sigma) dW_t^0 \right] \\
&\quad + \int_t^T \int_0^\infty \frac{\delta P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K',T'}^2} d\sigma_{K',T'}^2 dK' dT' + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^T \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\delta^2 P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K',T'}^2 \delta \sigma_{K'',T''}^2} d\sigma_{K',T'}^2 d\sigma_{K'',T''}^2 dK' dK'' dT' dT''.
\end{aligned}$$

O primeiro termo descreve a variação da probabilidade de transição restrita à teoria efetiva (não aleatória) com respeito à superfície de volatilidade local  $\sigma_{K,T}(t, S)$  predominante no tempo  $t$  e nível de mercado  $S$ . Restrita a esta superfície,  $P(t, S, K, T; \sigma)$  coincide com a propabilidade de transição da teoria efetiva  $p(t, S, K, T)$  e a volatilidade instantânea  $\sigma(t)$  coincide com a volatilidade local  $\sigma_{S,t}(t, S_t)$ . Logo, pela equação (1.8), temos que  $P(t, S, K, T; \sigma)$  satisfaz a seguinte equação regressiva:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t, S, T, K; \sigma) + rS \frac{\partial}{\partial S}P(t, S, T, K; \sigma) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}P(t, S, T, K; \sigma) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t, S, T, K; \sigma) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}P(t, S, T, K; \sigma) = -rS \frac{\partial}{\partial S}P(t, S, T, K; \sigma).$$

Substituindo o primeiro termo desta última equação na equação (2.2), usando a identidade encontrada para  $\frac{\delta P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K', T'}^2}$  e a equação (1.18), obtemos:

$$\begin{aligned} dP(t, S, K, T; \sigma) &= (\mu(t) - r) dt S \frac{\partial}{\partial S}P(t, S, K, T; \sigma) + \sigma(t)S \frac{\partial}{\partial S}P(t, S, K, T; \sigma) dW_t^0 \\ &+ \int_t^T \int_0^\infty \frac{\delta P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K', T'}^2} \left( \alpha_{K, T} dt + \sum_{i=0}^n \theta_{K, T}^i dW_t^i \right) dK' dT' \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^T \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2p(t, S, T', K')} \frac{\delta P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K', T'}^2} p(t, S, T'', K'') K''^2 \times \\ &\frac{\partial}{\partial K''^2} p(T'', K'', T', K') \sum_{i=0}^n \theta_{K', T'}^i \theta_{K'', T''}^i dK' dK'' dT' dT'' dt \end{aligned}$$

agrupando termos obtemos:

$$\begin{aligned} dP(t, S, K, T; \sigma) &= \sigma(t)S \frac{\partial}{\partial S}P(t, S, K, T; \sigma) \left( dW_t^0 + \frac{\mu(t) - r}{\sigma(t)} dt \right) \\ &+ \int_t^T \int_0^\infty \left( \frac{\delta P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K', T'}^2} \sum_{i=0}^n \theta_{K, T}^i dW_t^i \right) dK' dT' \\ &+ \left( \int_t^T \int_0^\infty \frac{\delta P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K', T'}^2} \left[ \alpha_{T', K'} + \sum_{i=0}^n \theta_{K', T'}^i \left\{ \frac{1}{4p(t, S, T', K')} \times \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \int_t^T \int_0^\infty \theta_{K'', T''} p(t, S, T'', K'') K''^2 \frac{\partial^2}{\partial K''^2} p(T'', K'', T', K') dK'' dT'' \right\} \right] dK' dT' \right) dt. \end{aligned}$$

Para a ausência de oportunidades de arbitragem, vamos exigir que os parâmetros de drift satisfaçam a seguinte relação com  $\Pi_t^0 = \left( dW_t^0 + \frac{\mu(t) - r}{\sigma(t)} dt \right)$  e  $\Pi^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  funções arbitrárias:

$$\begin{aligned} \alpha_{K, T}(t, S) &= - \sum_{i=0}^n \theta_{K, T}^i(t, S) \left\{ \frac{1}{4p(t, S, T, K)} \times \right. \\ &\left. \int_t^T \int_0^\infty \theta_{K', T'}^i(t, S) p(t, S, T', K') K'^2 \frac{\partial^2}{\partial K'^2} p(T', K', T, K) dK' dT' - \Pi^i \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Podemos então definir uma nova medida  $\{d\bar{W}^i, i = 0, 1, \dots, n\}$

$$d\bar{W}_t^i = dW_t^i + \Pi_t^i dt \quad i = 1, \dots, n$$

$$d\bar{W}_t^0 = \frac{\mu(t) - r}{\sigma(t)}$$

A medida  $\{d\bar{W}^i, i = 0, 1, \dots, n\}$  é uma medida de probabilidade martingal equivalente. As funções  $\Pi^i$  são os prêmios de risco de mercado associados aos fatores de volatilidade  $W^i, i = 1, \dots, n$ , enquanto  $\frac{\mu(t) - r}{\sigma(t)}$  é o prêmio de risco de mercado associado ao fator de risco do preço do índice,  $W^0$ . Aplicando os argumentos do Harrison-Kreps [HK79], é possível provar que esta nova medida de apreçamento de Arrow-Debreu é única se e só se os preços de risco do mercado  $\Pi^i, i = 0, 1, \dots, n$  são independentes do preço de exercício  $K$  e tempo de vencimento  $T$ . Sob estas condições os mercados são completos e o apreçamento dos instrumentos derivativos segue os métodos do Harrison-Pliska [HP81] e permanecem independentes dos preços de risco do mercado.

Uma vez achados estes coeficientes, a equação (2.2) é da forma:

$$dP(t, S, K, T; \sigma) = \sigma(t)S \frac{\partial}{\partial S} P(t, S, K, T; \sigma) d\bar{W}_t^0 + \sum_{i=0}^n \int_t^T \int_0^\infty \frac{\delta P(t, S, K, T; \sigma)}{\delta \sigma_{K', T'}^2} \theta_{K', T'}^i dK' dT' d\bar{W}_t^i. \quad (2.13)$$

As condições de não arbitragem neste caso são mais complexas que as do modelo de HJM. Por esta complexidade, é mais difícil usar estas condições para a volatilidade estocástica em suas formas contínuas.

Na seguinte seção vamos trabalhar com árvores implícitas estocásticas para descrever, em um contexto de tempo discreto, as variações estocásticas livres de arbitragem da superfície de volatilidade.

## 2.3 Árvores implícitas estocásticas

Enquanto o tempo passa, o preço do índice varia e, simultaneamente, todas as volatilidades locais sobre a superfície de volatilidade sofrem variações estocásticas. No caso das árvores trinomiais implícitas, uma vez que a posição dos vértices é fixada, as probabilidades de transição e portanto as volatilidades locais, podem ser determinadas. As árvores trinomiais implícitas estocásticas são uma extensão das árvores trinomiais implícitas nas quais as probabilidades de transição podem variar estocasticamente, com diversos fatores estocásticos à medida que o tempo passa e o nível do índice muda. O nível do índice pode variar aleatoriamente de vértice para vértice, enquanto as volatilidades locais, e simultaneamente as probabilidades de transição correspondentes aos vértices futuros, todos variam estocasticamente através da árvore.

Começando desde o vértice inicial, os possíveis movimentos da superfície de volatilidade local devem ser restritos para garantir a ausência das oportunidades de arbitragem na teoria discreta representada

pelas árvores implícitas estocásticas. Isto é equivalente a exigir que as probabilidades de transição dos vértices futuros sejam simultaneamente martingais sobre a árvore. Para garantir a ausência de arbitragem  $P(t, S, K, T; \sigma)$  deve ser martingal.

No caso discreto, vamos redefinir as funções de volatilidade e os parâmetros de drift da equação (1.18) como:

$$\begin{aligned}\alpha_{K,T} &\longrightarrow \alpha_{K,T} \sigma_{K,T}^2 \\ \theta_{K,T}^l &\longrightarrow \theta_{K,T}^l \sigma_{K,T}^2 \quad l = 0, \dots, n\end{aligned}$$

e vamos discretizar a seguinte equação diferencial contínua:

$$\frac{d\sigma_{K,T}^2(t, S)}{\sigma_{K,T}^2} = \alpha_{K,T}(t, S)dt + \sum_{l=0}^n \theta_{K,T}^l(t, S)dW_t^l.$$

Seja  $(m, n)$  o par denotando ao vértice futuro  $(t_n, S_m)$  correspondente ao tempo futuro  $t_n$  e nível  $S_m$ . Logo a discretização da equação anterior pode-se escrever como:

$$\Delta\sigma_{m,n}^2(i, j) = \sigma_{m,n}^2(i, j) \left[ \alpha_{m,n}(i, j)\Delta t_i + \sum_{l=0}^n \theta_{m,n}^l(i, j)\Delta W_i^l \right] \quad (2.14)$$

O vetor  $(\Delta W_i^0, \Delta W_i^1, \dots, \Delta W_i^n)$  é aleatório e gerado, no tempo  $i$ , pelo espaço amostral de  $n$  movimentos Brownianos independentes  $W^i$ . Os parâmetros de volatilidade  $\theta_{m,n}^l(i, j)$  são pre-especificados mas os parâmetros de drift  $\alpha_{m,n}(i, j)$  devem ser determinados a partir dos requerimentos de não arbitragem de que as probabilidades totais  $P_{m,n}(i, j)$  (probabilidade de chegar ao vértice futuro  $(n, m)$  desde o vértice inicial (fixo)  $(i, j)$ ) devem ser martingais para todos os vértices futuros  $(n, m)$ .

A simulação destas árvores implícitas estocásticas começam com a construção da árvore trinomial implícita calibrada aos preços de hoje das opções padrões e futuros. A simulação começa no vértice  $(0, 0)$  da árvore. Durante o primeiro passo da simulação são determinados todos os parâmetros de drift  $\alpha_{m,n}(0, 0)$  para todos os vértices futuros  $(n, m)$  a partir da condição de martingal da probabilidade total  $P_{m,n}(0, 0)$ . Na seguinte seção vamos ver como fazer estes cálculos em detalhe.

## 2.4 Cálculo dos parâmetros de drift

Nesta seção vamos ver como calcular os parâmetros de drift a partir das condições de não arbitragem na teoria da volatilidade estocástica. Trabalhamos em um contexto de tempo discreto com árvores trinomiais estocásticas e mostramos como calcular os parâmetros de drift indutivamente para todos os vértices a partir da condição de martingal das probabilidades totais de transição.

Vamos considerar um caso particular com apenas um parâmetro de risco  $\theta$  para a volatilidade, quer dizer, na fórmula (2.14) o  $\theta_0 = 0$  e  $\theta_1 = \theta$ :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma dW^0 \\ \frac{d\sigma_{K,T}^2}{\sigma_{K,T}^2} &= \alpha_{K,T} dt + \theta dW^1\end{aligned}$$

onde  $\sigma(t) = \sigma_{t,S_t}(t, S_t)$ . Começamos no passo  $(i+1)$ -ésimo, no tempo  $t_i$  com nível de mercado  $(i, j)$  da árvore. Queremos calcular os parâmetros de drift livres de arbitragem  $\alpha_{m,n}(i, j)$  para todos os vértices futuros  $(n, m)$  nos tempos futuros  $t_n$  para  $n \geq i$ . Calculamos  $\alpha_{m,n}(i, j)$  iterativamente usando os resultados calculados no passo anterior e a condição de martingal da probabilidade total de transição  $P_{m+2,n+1}(i, j)$  (probabilidade de chegar ao vértice  $(n+1, m+2)$  desde o vértice  $(i, j)$ ).

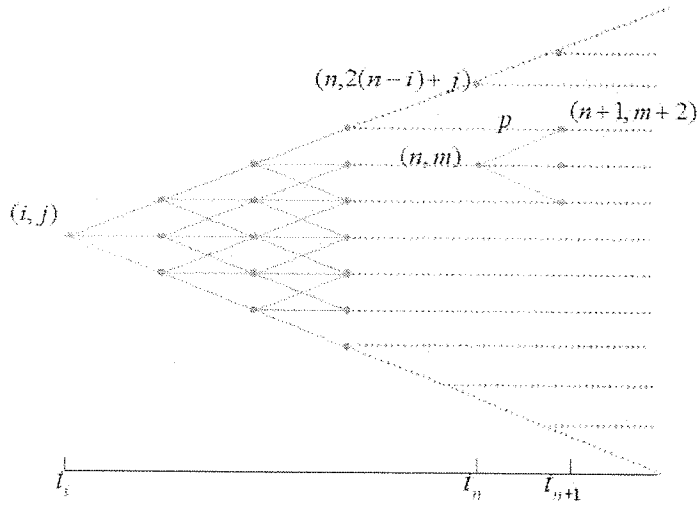


Figura 2.1: Subárvore trinomial no vértice  $(i, j)$

A figura (2.1) mostra uma sub-árvore começando no vértice  $(i, j)$ . Todos os movimentos do índice e das probabilidades locais estarão restringidos aos vértices da árvore. Primeiro calculamos  $\alpha_{j,i}(i, j)$  e continuamos com os tempos seguintes começando desde os vértices acima em cada passo.

Para facilitar as contas, vamos supor que a superfície de volatilidade local, durante o seguinte instante de tempo  $\Delta t$ , só pode subir ou descer com volatilidade constante  $\theta$ , isto é:

$$\sigma_{m,n}^{(u,d)}(i,j) = \sigma_{m,n}(i,j) \exp \left\{ \left( \alpha_{m,n}(i,j) - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \Delta t \pm \theta \sqrt{\Delta t} \right\}. \quad (2.15)$$

Vamos supor que temos calculados os parâmetros de drift para os vértices antes do tempo  $t_n$  e também para aqueles no tempo  $t_n$  que ficam acima do vértice  $(n, m)$ . Vamos então calcular  $\alpha_{m,n}(i, j)$  a partir dos cálculos anteriores e da condição de martingal da probabilidade de transição  $P_{m+2,n+1}(i, j)$  de chegar ao vértice  $(n+1, m+2)$  no seguinte instante de tempo. Podemos decompor a contribuição desta probabilidade em duas componentes

$$P_{m+2,n+1}(i, j) = P_{m,n}(i, j)\mathbf{p} + \Lambda_{m,n}(i, j).$$

Como na figura,  $\mathbf{p}$ , denota a probabilidade de transição de subir em um período de tempo desde o vértice  $(n, m)$  ao  $(n+1, m+2)$ . O primeiro termo descreve a contribuição do vértice  $(n, m)$  à probabilidade de transição total, provenientes de todas as trajetórias que passaram por este vértice antes de chegar ao vértice  $(n+1, m+2)$ . O segundo termo descreve a contribuição de todos os vértices que ficam sob o vértice  $(n, m)$  à probabilidade de transição.

Consideremos agora o seguinte instante de tempo  $\Delta t$  onde todas as volatilidades locais vão-se movimentar simultaneamente para o estado  $\sigma_{m,n}^{(u)}(i, j)$  ou para  $\sigma_{m,n}^{(d)}(i, j)$ . Como as probabilidades de transição são funções das volatilidades locais, então todas as probabilidades também vão-se mover para cima ou para baixo, quer dizer

$$P_{m+2,n+1}^{(u,d)}(i, j) = P_{m,n}^{(u,d)}\mathbf{p}^{(u,d)} + \Lambda_{m,n}^{(u,d)}(i, j)$$

$P_{m,n}^{(u,d)}(i, j)$  e  $\Lambda_{m,n}^{(u,d)}(i, j)$  dependem dos parâmetros de drift e de outras quantidades conhecidas em passos anteriores, mas  $\mathbf{p}^{(u,d)}$  é desconhecida pela dependência dos parâmetros de drift desconhecidos  $\alpha_{m,n}(i, j)$ . A probabilidade de transição  $\mathbf{p}$  em um período depende linearmente da variância local  $\sigma_{m,n}^2(i, j)$ , como já vimos nas equações (2.6), quer dizer:  $\mathbf{p} = A + B\sigma_{m,n}^2(i, j)$ , com coeficientes  $A$  e  $B$  dependendo só da posição dos vértices, que são fixas e conhecidas. Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(u,d)} &= A + B\sigma_{m,n}^{(u,d)2}(i, j) \\ &= A + B\sigma_{m,n}^2(i, j) \exp \left\{ 2 \left( \alpha_{m,n}(i, j) - \frac{1}{2}2\theta^2 \right) \Delta t \pm \theta \sqrt{\Delta t} \right\}. \end{aligned}$$

Usando estas equações, podemos agora determinar os parâmetros de drift  $\alpha_{m,n}(i, j)$ :



$$\begin{aligned}
P_{m+2,n+1}(i, j) &= \frac{1}{2} \left\{ P_{m+2,n+1}^{(u)}(i, j) + P_{m+2,n+1}^{(d)}(i, j) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ P_{m,n}^{(u)}(i, j) \mathbf{P}^{(u)} + P_{m,n}^{(d)}(i, j) \mathbf{P}^{(d)} + \Lambda_{m,n}^{(u)}(i, j) + \Lambda_{m,n}^{(d)}(i, j) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[ P_{m,n}^{(u)}(i, j) + P_{m,n}^{(d)}(i, j) \right] A + \Lambda_{m,n}^{(u)}(i, j) + \Lambda_{m,n}^{(d)}(i, j) \right\} + \\
&\quad \frac{1}{2} B \sigma_{m,n}^2(i, j) e^{-\theta^2 \Delta t} \left[ P_{m,n}^{(u)}(i, j) e^{2\theta \sqrt{\Delta t}} + P_{m,n}^{(d)}(i, j) e^{-2\theta \sqrt{\Delta t}} \right] \exp \{ 2\alpha_{m,n}(i, j) \Delta t \}.
\end{aligned}$$

Logo a fórmula desejada é

$$\begin{aligned}
\alpha_{m,n}(i, j) &= \\
&= \frac{1}{(2\Delta t)} \left\{ \log \left[ \frac{P_{m+2,n+1}(i, j) - \frac{1}{2} \left( \left[ P_{m,n}^{(u)}(i, j) + P_{m,n}^{(d)}(i, j) \right] A + \Lambda_{m,n}^{(u)}(i, j) + \Lambda_{m,n}^{(d)}(i, j) \right)}{\frac{1}{2} B \sigma_{m,n}^2(i, j) e^{-\theta^2 \Delta t} \left[ P_{m,n}^{(u)}(i, j) e^{2\theta \sqrt{\Delta t}} + P_{m,n}^{(d)}(i, j) e^{-2\theta \sqrt{\Delta t}} \right]} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Este resultado pode ser estendido aos casos onde a superfície de volatilidade local pode-se movimentar a qualquer número de estados possíveis durante um período de tempo, tem diversos fatores estocásticos, ou tem fatores de volatilidade que são funções mais complexas do tempo ou nível de mercado.

## 2.5 Um exemplo numérico

Nesta seção vamos considerar um exemplo de 5 períodos com vencimento de um 1 ano com uma volatilidade implícita no dinheiro de 20% e uma smile constante de 0.5% por cada 10 pontos de strike. Começamos com uma opção com preço de exercício de 80 a qualquer tempo de vencimento a volatilidade implícita de 21%. Seja a taxa de juros constante e igual a 10%, dividendos de 5% e a volatilidade (da volatilidade),  $\theta = 30\%$ . Para calcular a árvore de preços, utilizamos a árvore trinomial (do modelo de Cox-Ross-Rubinstein) com volatilidade constante de 20%, que calculamos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_u &= S e^{\sigma \sqrt{2\Delta t}}, & p_u &= \left( \frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma \sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma \sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma \sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2 \\
S_d &= S e^{-\sigma \sqrt{2\Delta t}}, & p_d &= \left( \frac{e^{\sigma \sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma \sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma \sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2 \\
S_m &= S, & p_m &= 1 - p_u - p_d
\end{aligned}$$

## Árvore de preços do ativo S

t=0	t=0.25	t=0.5	t=0.75	t=1
				176.065417
			152.846516	152.846516
		132.689644	132.689644	132.689644
	115.190991	115.190991	115.190991	115.190991
100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	86.812345	86.812345	86.812345	86.812345
		75.363832	75.363832	75.363832
			65.425109	65.425109
				56.797071

Vamos agora calcular a superfície de volatilidade local. Para isto usaremos a construção do Derman-Kani [DKC96] e [DK94a]. Sejam  $C(t_{n+1}, S_{j+1})$  e  $P(t_{n+1}, S_{j+1})$  os preços do mercado hoje para uma opção call e put respectivamente com exercício  $S_{j+1}$  e vencimento  $t_{n+1}$ . Obtemos os valores destas opções interpolando o smile em vários exercícios e tempos correspondentes aos vértices da árvore implícita. Seja  $F_j$  o preço futuro conhecido do smile e,  $p_j$  e  $q_j$  as probabilidades de transição (de subir e descer) desconhecidas de risco neutral desde o vértice  $(n, j)$  ao vértice  $(n+1, j+2)$  e  $(n+1, j)$  respectivamente, podemos calcular estas probabilidades como:

$$p_j = \frac{e^{r\Delta t} C(t_{n+1}, S_{j+1}) - \sum_{k=j+1}^{2n} \lambda_k (F_k - S_{j+1})}{\lambda_j (S_{j+2} - S_{j+1})}.$$

Uma vez obtida a probabilidade  $p_j$ , podemos calcular  $q_j$  segundo a equação:

$$q_j = \frac{F_j - p_j (S_{j+2} - S_{j+1}) - S_{j+1}}{S_j - S_{j+1}}.$$

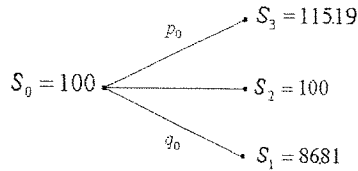
E usamos opções puts  $P(t_{n+1}, S_{j+1})$  para determinar as probabilidades de transição de todos os vértices sob (e incluindo) o vértice do centro  $(n+1, n)$ .

$$q_j = \frac{e^{r\Delta t} P(S_{j+1}, t_{n+1}) - \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k (S_{j+1} - F_k)}{\lambda_j (S_{j+1} - S_j)}.$$

logo calculamos  $p_j$ ,

$$p_j = \frac{F_j - q_j (S_{j+1} - S_j) - S_{j+1}}{S_{j+2} - S_{j+1}}.$$

Para calcular a superfície de volatilidade local usamos a equação (2.5). Em nosso exemplo, temos:



$$\lambda_0 = 1.0$$

$$e^{r\Delta t} = e^{0.1 \times 0.25} = 1.0253$$

$$F_0 = S_0 e^{(r-\delta)\Delta t} = 100 e^{0.05 \times 0.25} = 101.26$$

$$S_1 = 86.81, \quad S_2 = 100, \quad S_3 = 115.19$$

Logo

$$q_0 = \frac{1.0253 \times P(t_1, S_2)}{1.0 \times (100 - 86.81)} = \frac{1.0253 \times 2.874456}{100 - 86.81} = 0.223440$$

$$p_0 = \frac{101.26 + 0.223440 \times (100 - 86.81) - 100}{115.19 - 100} = 0.276970$$

$$1 - q_0 - p_0 = 0.499590$$

A volatilidade local neste vértice é calculada usando a fórmula (2.5):

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{0.223440 \times (101.26 - 86.81)^2 + 0.499590 \times (101.26 - 100)^2 + 0.276970 \times (101.26 - 115.19)^2}{101.26^2 \times 0.25}} = 0.19869$$

Desta forma podemos calcular a superfície de volatilidade local no tempo  $t = 0$

**Superfície de volatilidade inicial ( $t = 0$ )**

$\sigma_{m,n}(0, 0)$

				.....
			0.155	.....
		0.180	0.177	.....
	0.191	0.189	0.188	.....
0.199	0.199	0.197	0.197	.....
	0.218	0.215	0.211	.....
		0.251	0.240	.....
			0.263	.....
				.....

Calculamos as probabilidades de transição a partir da superfície de volatilidade inicial, usando para cada vértice a volatilidade local correspondente.

Probabilidades totais de transição no tempo  $t = 0$

$P_{m,n}(0, 0)$

				0.003124
			0.016886	0.038190
		0.071919	0.115968	0.140698
	0.277613	0.287575	0.273021	0.255430
1.00000	0.497982	0.377221	0.312200	0.270743
	0.224405	0.200750	0.191621	0.177334
		0.062535	0.066575	0.078186
			0.024056	0.026025
				0.010270

O primeiro passo da simulação consiste em determinar os parâmetros de drift  $\alpha_{m,n}(0, 0)$  no tempo  $t = 0$ , a partir da condição de martingal das probabilidades totais  $P_{m,n}(0, 0)$ .

Coefficientes de drift.

$\alpha_{m,n}(0, 0)$

				.....
			-0.379071	.....
		-0.295567	-0.192166	.....
	-0.182694	-0.037505	0.011787	.....
-0.043682	0.1136931	0.075532	0.063564	.....
	-0.238974	-0.060769	-0.047665	.....
		-0.376962	-0.211889	.....
			-0.458831	.....
				.....

Uma vez achados os coeficientes de drift, podemos achar as volatilidades locais  $\sigma_{m,n}^{(u,d)}(0, 0)$  usando a equação (2.15). Todas as volatilidades vão subir ou descer com probabilidade  $1/2$  para  $\sigma_{m,n}^{(u)}(0, 0)$  ou  $\sigma_{m,n}^{(d)}(0, 0)$  e portanto as probabilidades de transição podem também subir ou descer com a mesma probabilidade para  $P_{m,n}^{(u)}(0, 0)$  ou  $P_{m,n}^{(d)}(0, 0)$ .

As seguintes árvores mostram os valores das volatilidades locais para cada vértice da árvore de preços no tempo  $t = 0$  nos casos onde a superfície de volatilidade subiu e desceu. As árvores de volatilidades são trinomiais, pois a árvore de preços é trinomial, mas o comportamento da volatilidade é binomial, a superfície de volatilidade só pode subir ou descer.

$\sigma_{m,n}^{(u)}(0, 0)$

				.....
			0.161969	.....
		0.192061	0.193806	.....
	0.209631	0.215104	0.216619	.....
0.226136	0.236580	0.230635	0.229946	.....
	0.235922	0.243276	0.239533	.....
		0.262424	0.261495	.....
			0.269400	.....
				.....

Figura 2.2:  $\sigma_{m,n}^{(u)}(0, 0) = \sigma_{m,n}(0, 0) \exp \left\{ \left( \alpha_{m,n}(0, 0) - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \Delta t + \theta\sqrt{\Delta t} \right\}$ .

$\sigma_{m,n}^{(d)}(0, 0)$

				.....
			0.119990	.....
		0.142283	0.143575	.....
	0.155299	0.159353	0.160475	.....
0.167525	0.175263	0.170859	0.170348	.....
	0.174775	0.180223	0.177451	.....
		0.194409	0.193721	.....
			0.199576	.....
				.....

Figura 2.3:  $\sigma_{m,n}^{(d)}(0, 0) = \sigma_{m,n}(0, 0) \exp \left\{ \left( \alpha_{m,n}(0, 0) - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \Delta t - \theta\sqrt{\Delta t} \right\}$ .

Como resultado, as probabilidades de transição também vão mudar através da árvore, simultaneamente subindo para  $P_{m,n}^{(u)}(0,0)$  ou descendo para  $P_{m,n}^{(d)}(0,0)$  com probabilidade 1/2.

$P_{m,n}^{(u)}(0,0)$

					0.005443
				0.027470	0.057200
			0.105054	0.146234	0.159737
		0.346207	0.284531	0.247385	0.222149
1.00000	0.350374	0.302291	0.256247	0.225957	
	0.303419	0.206663	0.192932	0.171870	
		0.101460	0.086627	0.098442	
			0.043105	0.039793	
					0.019409

Com os parâmetros de drift calculados, as probabilidades de transição iniciais são precisamente o valor medio dos valores  $P_{m,n}^{(u)}(0,0)$  e  $P_{m,n}^{(d)}(0,0)$ .

$P_{m,n}^{(d)}(0,0)$

					0.000805
				0.006303	0.019180
			0.038784	0.085048	0.121659
		0.209019	0.290619	0.298656	0.288710
1.00000	0.645590	0.452150	0.368154	0.315528	
	0.145391	0.194837	0.190309	0.182797	
		0.023610	0.046523	0.057931	
			0.005006	0.012258	
					0.001131

Para completar o primeiro passo da simulação, fazemos o sorteio de um vetor aleatório  $(\Delta W^0, \Delta W^1)$  para o estado de preços e para volatilidade. Em nosso exemplo, o preço do ativo desceu e a superfície de volatilidade subiu, portanto, no segundo passo da simulação (no tempo  $t_1 = 0.25$ ) temos as seguintes árvores:

$\sigma_{m,n}(1,0)$

				.....
			.....	.....
		.....	.....	.....
	.....	.....	0.216619	.....
.....	.....	0.230635	0.229946	.....
	0.235922	0.243276	0.239533	.....
		0.262424	0.261495	.....
			0.269400	.....
				.....

As árvores calculadas neste passo da simulação vão começar no vértice  $(1,0)$  por o fato de que o preço do ativo desceu para esse estado.

Tomamos a árvore  $\sigma_{m,n}^{(u)}(0,0)$  como superfície de volatilidade neste passo da simulação por a volatilidade ter subido, só que esta árvore também começando no vértice  $(1,0)$

$P_{m,n}(1,0)$

				.....
			.....	.....
		.....	.....	0.026483
	.....	.....	0.102400	0.142058
.....	.....	0.337113	0.275458	0.234149
	1.00000	0.346438	0.294227	0.253268
		0.316449	0.213614	0.186930
			0.114301	0.116538
				0.040573





No tempo  $t_2 = 0.5$ , no terceiro passo da simulação, o preço do ativo ficou no mesmo valor e a superfície de volatilidade desceu:

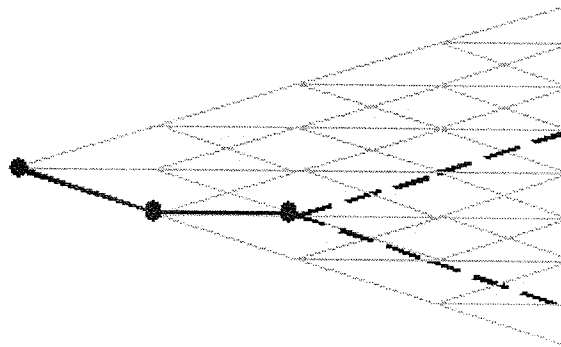


Figura 2.5: Trajetória do preço no segundo passo da simulação

Como o ativo ficou no mesmo valor, as árvores vão começar no vértice  $(2, 2)$ . Calculamos a árvore de probabilidades de transição totais usando a superfície de volatilidade local sorteada.

$\sigma_{m,n}(2, 2)$

				.....
				.....
		.....	.....	.....
	.....	.....	0.194016	.....
.....	.....	0.214406	0.207665	.....
	.....	.....	0.220146	.....
		.....	.....	.....
			.....	.....
				.....







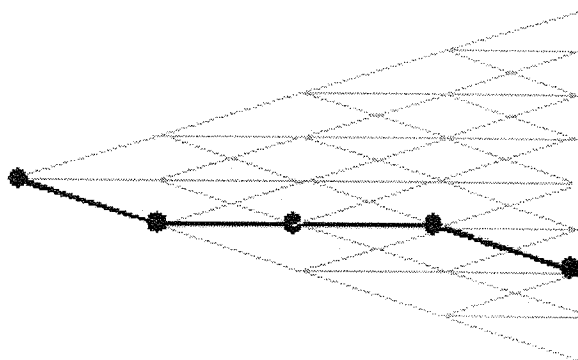


Figura 2.7: Trajetória simulada em nosso exemplo

Neste exemplo escolhimos dois estados possíveis para representar os movimentos estocásticos da superfície de volatilidade local, ela podia subir ou descer durante o passo de tempo  $\Delta t$ . Poderíamos ter escolhido uma representação equivalente do mesmo processo com  $m$  estados para qualquer inteiro  $m > 1$ . Se o modelo é bem comportado, esta representação deveria sempre convergir para o mesmo processo de tempo contínuo quando o  $\Delta t$  tende à zero. É claro que a representação com maior número de estados converge mais rápido que a representação de dois estados escolhida em nosso exemplo. A seguinte tabela mostra o apreamento de opções para 50000 trajetórias simuladas da árvore de 5 períodos do exemplo acima.

Preço de Exercício	Opção	Preços Black-Scholes	Preços Árvore Implícita Standard	Preços Árvore Implícita Estocástica
120	call	3.111150	3.066091	2.941821
110	call	5.746613	5.913889	5.811564
100	call	9.940895	9.825032	9.986548
100	put	5.302991	5.021989	5.356576
90	put	2.232338	2.304479	2.428655
80	put	1.058165	0.720708	0.799379

Nas Simulações das 50000 trajetórias do ativo no exemplo, a figura 2.8 mostra as frequências dos preços quando o  $\theta = 0.3$ .

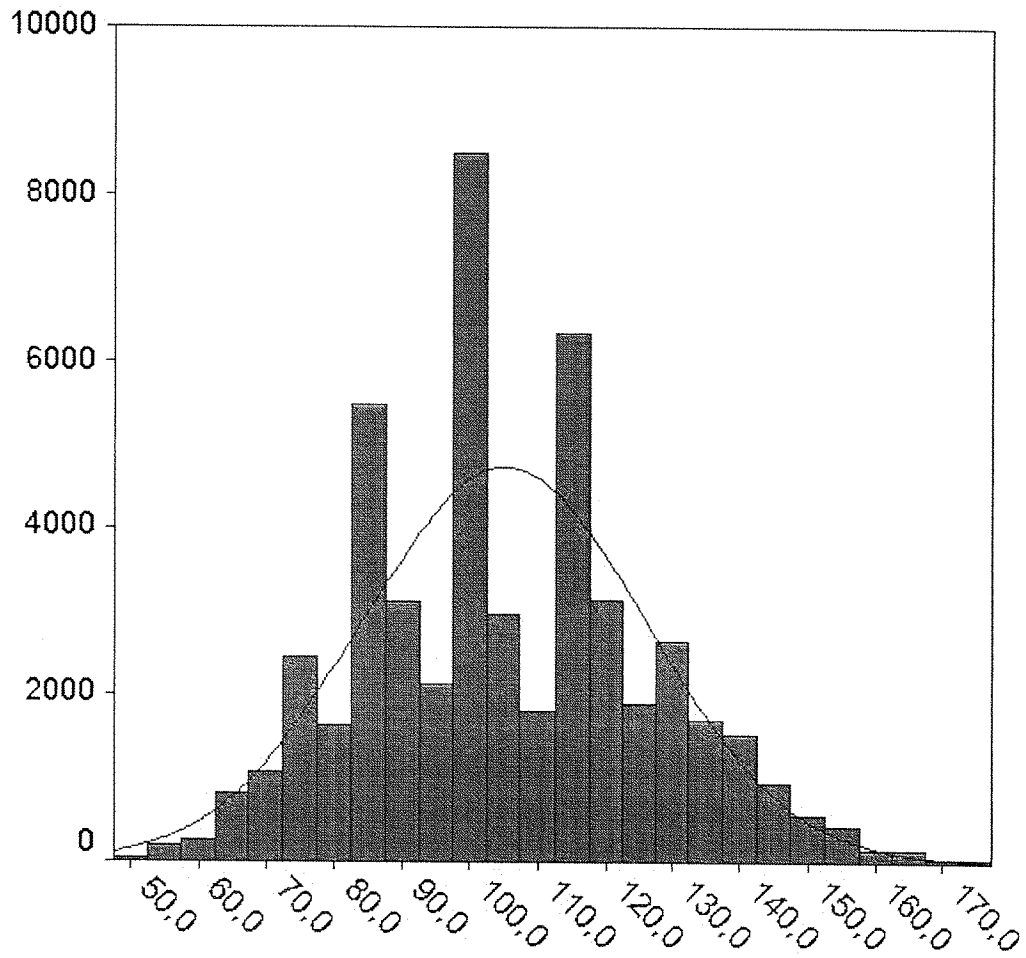


Figura 2.8: Frequências dos preços do ativo para  $\theta = 0.3$

Desvio padrão = 21,03

Média = 105.1

Kurtosis = -0.242

Simetria = 0.263

Máximo = 177.3088

Mínimo = 48.395586

Para os outras figuras também foram feitas 50000 simulações para diferentes valores de  $\theta$  e os mesmos dados do exemplo.

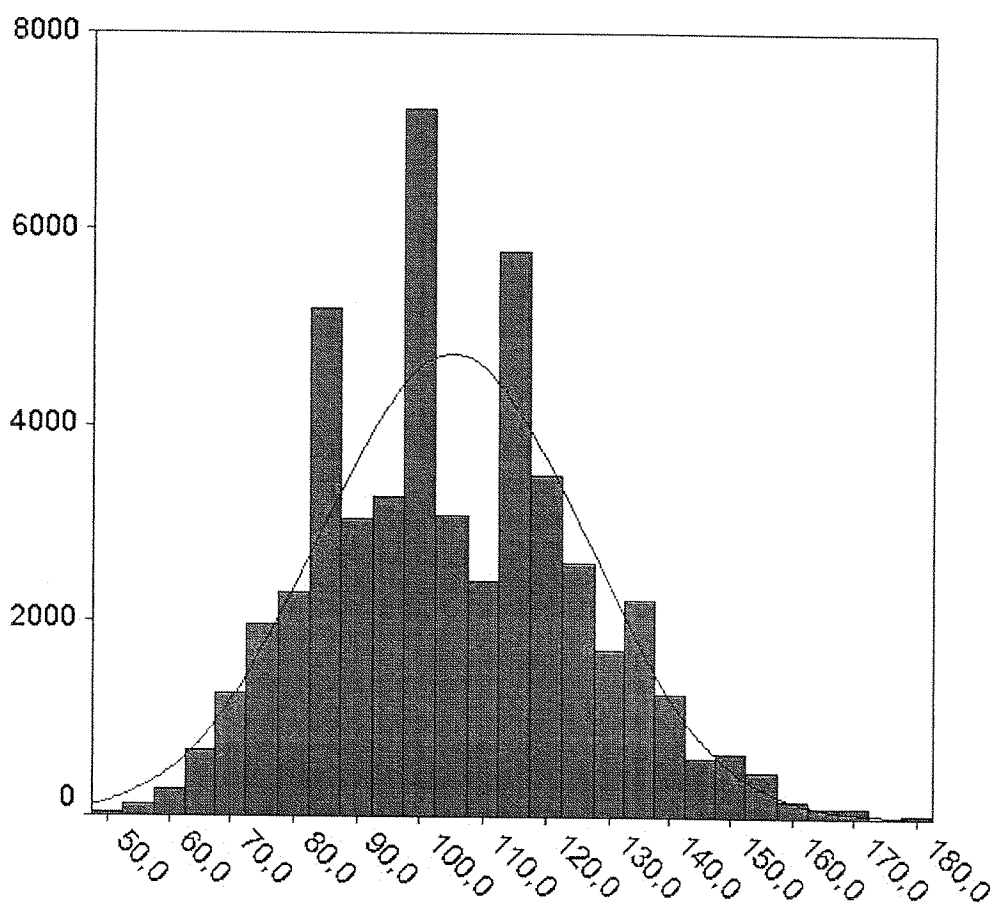


Figura 2.9: Frequências dos preços do ativo para  $\theta = 0.4$

Desvio padrão = 21.03

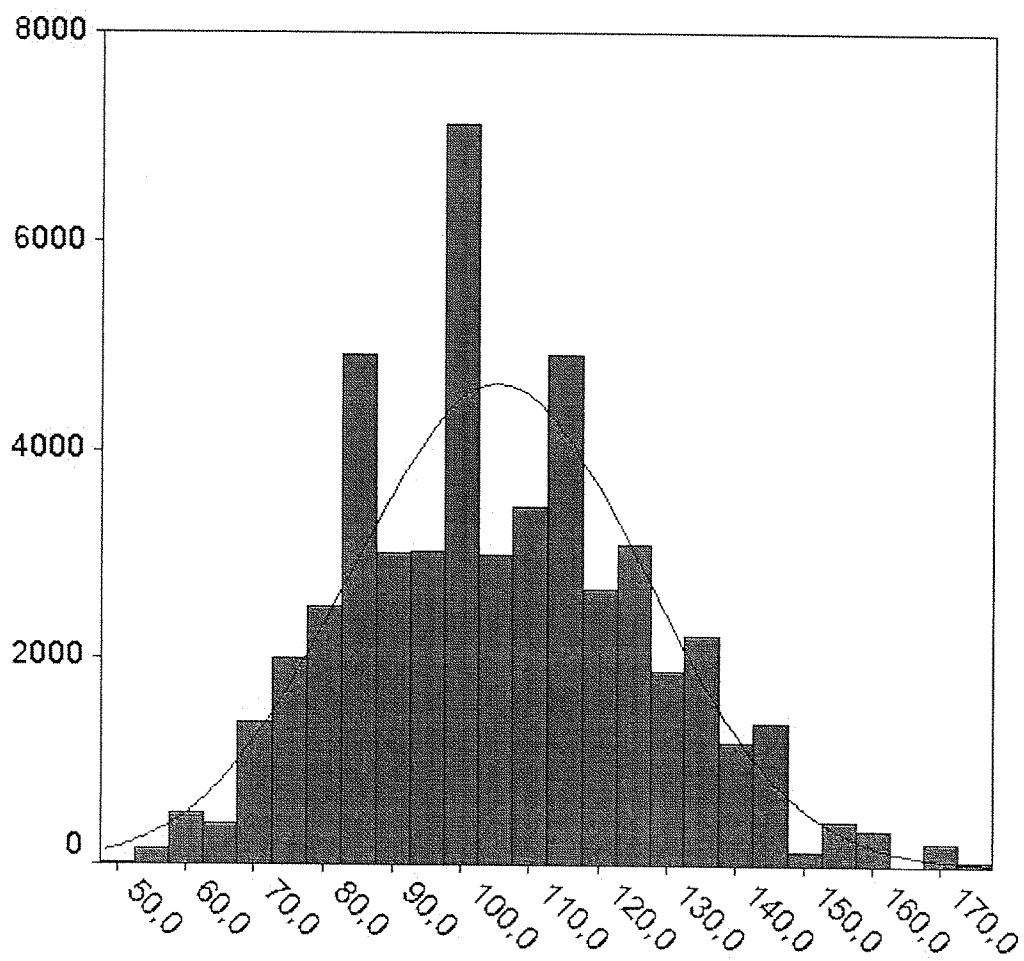
Média = 105.1

Kurtosis = -0.244

Simetria = 0.286

Máximo = 177.7466

Mínimo = 48.627494

Figura 2.10: Frequências dos preços do ativo para  $\theta = 0.5$ 

Desvio padrão = 21.44

Média = 105.2

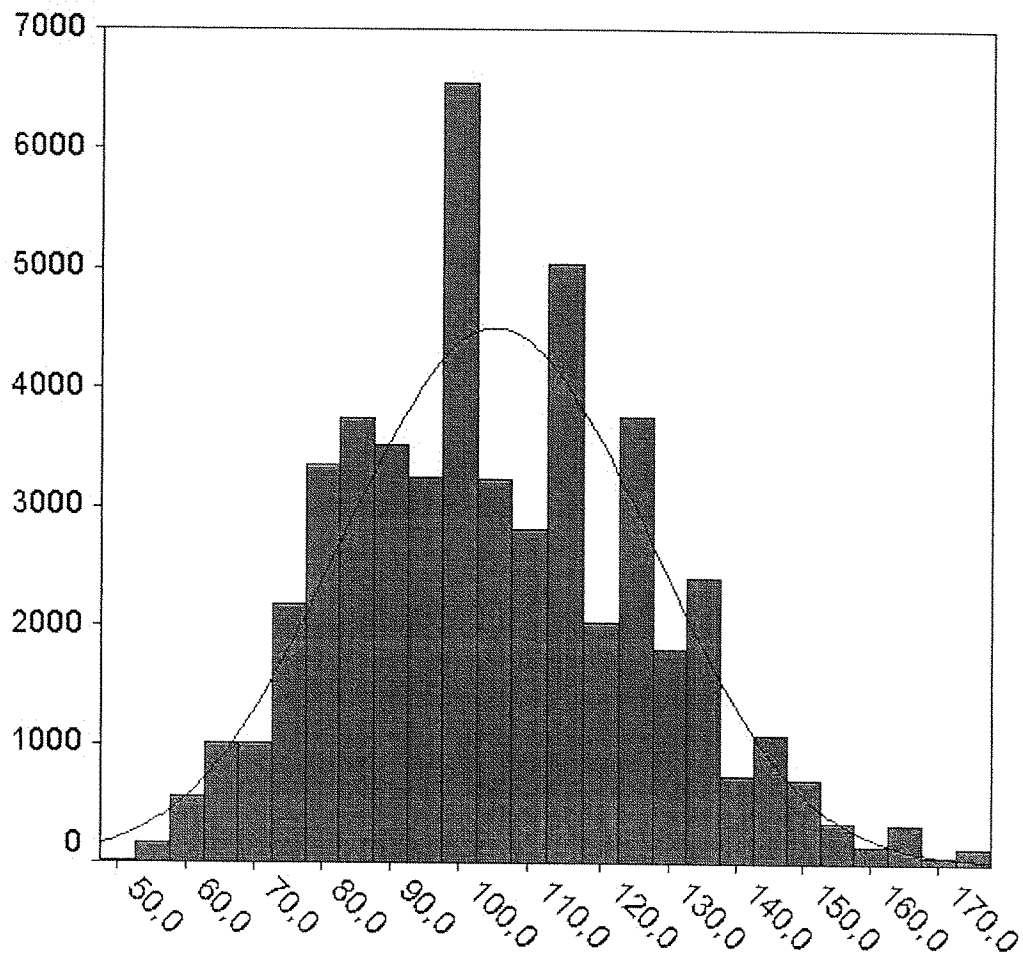
Kurtosis = -0.205

Simetria = 0.291

Máximo = 177.4609

Mínimo = 49.049988



Figura 2.11: Frequências dos preços do ativo para  $\theta = 0.6$ 

Desvio padrão = 22.08

Média = 105.0

Kurtosis = -0.145

Simetria = 0.325

Máximo = 176.8086

Mínimo = 49.530002

### Apreçamento de contratos com payoff baseados em volatilidade realizada.

Vamos considerar um contrato futuro sobre a variância realizada (variância realizada dos retornos dos ativos), com preço de exercício  $K$  e payoff  $(\sigma^2 - K)$  no vencimento do contrato. A seguinte tabela mostra o apreçamento para um contrato de variância com tempo de vencimento 1 ano com preço de exercício  $K = 0$  usando 10 períodos de tempo, 10000 trajetórias simuladas com árvores implícitas estocásticas para diferentes valores de  $\theta$ . Começamos com uma smile de volatilidade inicial flat de 20% para todas as opções Europeias. A taxa de juros e os dividendos foram considerados nulos.

$\theta$	Preço
0%	0.065774
5%	0.065785
10%	0.065593
15%	0.065502
20%	0.065255
25%	0.065265
30%	0.065143
35%	0.065055
40%	0.065328
45%	0.065275

É claro observando a tabela que o preço de um contrato de variância vai independe do parâmetro da volatilidade da volatilidade. Isto poderia ser esperado no caso onde a superfície de volatilidade é estática, mas, de fato isto acontece sob condições gerais, mesmo quando a volatilidade é estocástica.

## Capítulo 3

# Apreçamento de contratos de volatilidade a termo: Swaps de volatilidade

Vamos estudar o apreçamento de uma classe particular de derivativos de volatilidade, os chamados swaps de volatilidade. Este é um instrumento que não depende dos movimentos do ativo  $S$ , mas depende da volatilidade dele. Um swap de volatilidade é um contrato futuro sobre a volatilidade realizada (em base anual) e tem o seguinte payoff:

$$P = (\sigma_R - K_{vol})N$$

onde  $\sigma_R$  é a volatilidade realizada do ativo durante a duração do contrato,  $K_{vol}$  é a volatilidade de exercício e  $N$  é o notional. O comprador do swap recebe no tempo de vencimento a diferença entre a volatilidade realizada e a volatilidade de exercício vezes o notional; que dizer  $N$  dolares por cada ponto que a volatilidade do ativo  $\sigma_R$  excede à volatilidade de exercício  $K_{vol}$ . Um contrato também muito importante é o swap de variância, pois a variância serve para construir outros instrumentos dependentes da volatilidade. Este é um contrato futuro sobre a variância realizada, que é o quadrado da volatilidade. O payoff deste instrumento é:

$$P = (\sigma_R^2 - K_{var})N$$

onde  $\sigma_R^2$  é a variância realizada e  $K_{var}$  é a variância de exercício. A forma de dar preço para um swap, é dando o preço à carteira pela qual é replicado, e o swap que pode ser replicado mais facilmente é o swap de variância.

Se  $n$  denota o número de dias úteis até o vencimento do contrato de variância, estamos interessados em estimar, no momento da emissão do swap, o valor da variância que será realizada nos próximos  $n$  dias úteis, isto é, a expressão:

$$V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right)^2. \quad (3.1)$$

Os valores  $S_i$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ , denotam os valores diários de fechamento de um determinado ativo com risco. O ativo  $S$  é considerado a seguir o processo log-normal:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma(t) dZ_t. \quad (3.2)$$

Se  $K > 0$  é o valor de exercício do contrato no vencimento  $T = n$ , o contrato pagará ao emissor  $(V_n - K)$  vezes o notional. Isto pode ser encontrado com mais detalhe em [DDKZ99].

A definição formal da variância realizada  $V$  é:

$$V_T = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt. \quad (3.3)$$

É conveniente normalizar o payoff considerando o valor notional  $N = 1$ , logo simplesmente temos  $V_T - K$ . O valor do contrato no tempo zero pode ser encontrado de forma a zerar o fluxo financeiro, isto é, escolher o valor de  $K$  descontando o payoff e tomando o valor esperado com respeito à medida de risco neutral:

$$F = E [e^{-rT} (V_T - K)].$$

Então fazendo  $F = 0$ , encontramos que  $K = K_{var}$  de forma que:

$$\begin{aligned} K_{var} &= E[V_T]. \\ &= E \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt \right] \end{aligned}$$

O valor do swap é exatamente o valor esperado da volatilidade realizada. O problema aqui é calcular o valor esperado na equação acima. Para este cálculo seria interessante a utilização de preços do mercado de derivativos.

O valor justo de um swap de variância está baseado em:

- (1) replicar um contrato logarítmico que consiste em opções com um rango de vencimentos contínuos e,
- (2) na teoria clássica de apreçamento de opções, que assume uma evolução contínua para os preços do ativo. Na prática, não todos os strikes estão disponíveis, e a evolução dos preços pode ser descontínua.

Não é possível saber com certeza o valor futuro da volatilidade. Nos modelos de árvores implícitas, como vimos nos capítulos anteriores, a volatilidade local é extraída dos preços de mercado das opções negociadas sobre ativos. Podemos então usar simulações para calcular o valor justo da variância  $K_{var}$  como a média das variâncias calculadas para cada trajetória da simulação. Este procedimento serve para calcular o valor do contrato, mas não dá informação de como replicá-lo.

Em 1990, Neuberger observou que o payoff de uma opção com perfil logarítmico poderia reproduzir a variância realizada. Junto com a observação de Carr-Madan sobre replicação de opções exóticas, isto permitiu a construção de um estimador de volatilidade baseado apenas em volatilidades implícitas.

Usando o lema de Itô para a função  $\log S_t$ , obtemos a seguinte equação:

$$d(\log S_t) = \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dZ_t. \quad (3.4)$$

Combinando as equações (3.2) e (3.4) obtemos

$$\frac{dS_t}{S_t} - d(\log S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 dt \quad (3.5)$$

Com este resultado, podemos substituir o fator  $\sigma^2 dt$  na equação (3.3) com o termo esquerdo da equação (3.5):

$$K_{var} = \frac{2}{T} E \left[ \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \int_0^T d(\log S_t) \right] \Rightarrow K_{var} = \frac{2}{T} E \left[ \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \left( \frac{S_T}{S_0} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Agora precisamos calcular o valor esperado desta equação. Podemos pensar o primeiro termo dentro dos colchetes como o retorno total de uma posição na qual o negociante mantém a carteira de tal forma que está instantaneamente em uma posição longa  $1/S_t$  sobre um ativo que vale 1\$.

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \right] &= E \left[ \int_0^T r dt + \sigma dZ \right] \\ &= E \left[ \int_0^T r dt \right] + E \left[ \int_0^T \sigma dZ \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando o fato que a integral de Itô é um martingal, o segundo termo na equação acima anula-se e o primeiro termo é simplesmente  $rT$ ; finalmente obtemos:

$$E \left[ \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \right] = rT.$$

O segundo termo da equação (3.6) é uma posição estática. Como não há contratos logarítmicos negociáveis para este termo, vamos decompô-lo em varias componentes e logo vamos replicar cada com-

ponente separadamente. A primeira destas componentes (a componente linear) pode-se replicar com um contrato futuro sobre o ativo com vencimento  $T$ , os outros termos de maior ordem, podem-se replicar usando opções padrões com todos os exercícios possíveis e o mesmo vencimento  $T$ .

O negociante aqui vende um contrato com payoff igual ao logaritmo de  $S_T/S_0$  (ou seja o logaritmo do retorno total). Introduzindo um valor intermediário  $S^*$ , podemos escrever o logaritmo do payoff como:

$$\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \log\left(\frac{S_T}{S^*}\right) + \log\left(\frac{S^*}{S_0}\right)$$

O segundo termo é constante, independente do valor final do ativo  $S_T$ , só o primeiro termo tem que ser replicado.

Para calculá-lo vamos usar o resultado matemático sobre replicação estática de opções, devido a Carr e Madan [CM98], usando a seguinte identidade para funções  $f(x)$ :

$$f(S) = f(S^*) + f'(S^*)(S - S^*) + \int_0^{S^*} f''(K)(K - S)^+ dK + \int_{S^*}^{\infty} f''(K)(S - K)^+ dK.$$

A fórmula acima, uma generalização do princípio de paridade put-call, afirma que uma posição exótica com perfil  $f(S)$  pode ser replicada estaticamente, quer dizer, sem necessidade de hedge dinâmico, através de uma posição em numerário, no ativo base e em uma carteira de opções europeias de compra e venda, com quantidades apropriadas  $f''(K)$  de cada opção necessárias para gerar a curvatura do perfil  $f(S)$ . Escolhendo um valor apropriado de  $S^*$  e tomando  $S = S_T$ , podemos agora calcular o valor da opção com payoff logarítmico, usando a função  $f(K) = \log K$ :

$$\begin{aligned} \log S_T &= \log S^* + \frac{1}{S^*}(S_T - S^*) + \int_0^{S^*} \left(-\frac{1}{K^2}\right)(K - S_T)^+ dK \\ &\quad + \int_{S^*}^{\infty} \left(-\frac{1}{K^2}\right)(S_T - K)^+ dK. \end{aligned}$$

Agrupando termos:

$$\begin{aligned} -\log\left(\frac{S_T}{S^*}\right) &= -\frac{S_T - S^*}{S^*} + \int_0^{S^*} \left(\frac{1}{K^2}\right)(K - S_T)^+ dK \\ &\quad + \int_{S^*}^{\infty} \left(\frac{1}{K^2}\right)(S_T - K)^+ dK. \end{aligned} \tag{3.8}$$

aqui  $S^*$  denota um valor intermediário entre o preço a vista e o preço futuro, escolhido através de critérios de liquidez. Ele marca a fronteira virtual entre as opções de compra e de venda. O motivo pelo qual a decomposição é em puts e calls e não só em um deles é que precisamos evitar infinitos, quer dizer se só usamos puts e consideramos a integral desde zero até infinito, teríamos:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{K^2} \max(K - S_T, 0) dK = \int_{S_T}^{\infty} \frac{1}{K^2} (K - S_T) dK$$

e esta integral diverge. Da mesma forma, se só usamos calls, teríamos uma integral divergente. Considerando opções de calls e puts, evitamos a divergência e obtemos uma equação para replicar o contrato.

A equação (3.8) tem significado financeiro: é a decomposição do logaritmo do payoff. Em particular, foi decomposta vendendo um contrato futuro do índice (o primeiro termo do lado direito), comprando puts sobre  $1/K^2$  para todos os exercícios desde 0 até  $S^*$  (a primeira integral), e similarmente comprando calls sobre  $1/K^2$  para todos os exercícios de  $S^*$  até  $\infty$  (a segunda integral), e o termo constante  $\log(\frac{S^*}{S_0})$  (este termo é determinístico, quer dizer que independe de  $S_T$ ). O que realmente replica-se aqui é o log do contrato  $\log \frac{S_T}{S^*}$ . Fazemos isto porque o log do contrato não é um contrato líquido transacionado no mercado. Todos os contratos têm o mesmo vencimento  $T$ . O seguinte passo é encontrar o segundo termo na equação (3.6), tomando valores esperados e usando o fato de que  $E[S_T] = S_0 e^{rT}$ . Assim podemos estimar o valor esperado do payoff logarítmico como segue:

$$\begin{aligned} E\left[-\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] &= \log S_0 - \log S^* - \frac{1}{S^*} (E[S_T] - S^*) \\ &+ \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} E[(K - S_T)^+] dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} E[(S_T - K)^+] dK \\ &= \log S_0 - \log S^* - \frac{1}{S^*} (S_0 e^{rT} - S^*) \\ &+ \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{rT} E[e^{-rT} (K - S_T)^+] dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{rT} E[e^{-rT} (S_T - K)^+] dK \\ &= -\log\left(\frac{S_0}{S^*}\right) - \left(\frac{S_0}{S^*} e^{rT} - 1\right) \\ &+ \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{rT} P(K) dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{rT} C(K) dK \end{aligned}$$

$P(K)$  e  $C(K)$  denotam os preços de venda e compra, respectivamente. Um valor teórico da variância pode agora ser obtida. Neste contexto e com o análise feito anteriormente, o valor justo da variância é:

$$\begin{aligned} K_{var} &= \frac{2}{T} \left[ rT - \left( \frac{S_0}{S^*} e^{rT} - 1 \right) - \log \frac{S^*}{S_0} \right. \\ &+ e^{rT} \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P(K) dK \\ &\left. + e^{rT} \int_{S^*}^{\infty} C(K) dK \right] \end{aligned}$$

Obtivemos uma fórmula teórica para o cálculo do valor justo da variância. Para grandes valores de  $K$  o valor do call é zero, e para  $K \rightarrow \infty$  o valor do put é zero. Pode-se usar isto na prática? Só podemos usar isto como uma estimativa. No mercado não há opções que variam continuamente com  $K$ . Só podemos usar vários exercícios disponíveis no mercado e tentar calcular estas integrais usando técnicas numéricas.

Esta fórmula provê uma relação direta entre os preços do mercado e a estratégia para capturar a volatilidade futura realizada, mesmo quando há um smile de volatilidade implícita, onde a fórmula de Black-Scholes é inválida.

Até agora temos analisado o apreçamento e replicação dos swaps de variância. Mas os negociantes do mercado preferem cotizar níveis de volatilidade mais que de variância e por isso agora consideraremos swaps de volatilidade. Não há uma estratégia simples para replicar um swap de volatilidade, é a sua variância que emerge naturalmente da negociação de opções. A estratégia para replicar um swap de variância não faz suposições sobre o nível futuro da volatilidade, embora assuma que as trajetórias dos preços dos ativos são contínuas (sem saltos). Mudanças na volatilidade, não têm efeitos sobre a estratégia, que ainda assim vai captar a variância total durante a vida do contrato. A replicação de um swap de volatilidade é fundamentalmente diferente; ele é afetado por mudanças na volatilidade e seu valor depende da volatilidade da volatilidade futura realizada. Por ser a volatilidade uma função não linear (a raiz quadrada) da variância é mais difícil, teoricamente e praticamente, de apreçar e de fazer o hedge. Para ilustrar isto, vamos a tomar uma estratégia natural: vamos aproximar o swap de volatilidade com um swap de variância. Seja o swap de volatilidade com payoff  $\sigma_R - K_{vol}$  usamos a aproximação:

$$\sigma_R - K_{vol} \approx \frac{1}{2K_{vol}} (\sigma_R^2 - K_{vol}^2). \quad (3.9)$$

Isto quer dizer que  $1/2K_{vol}$  contrato de variância com exercício  $K_{vol}^2$  pode aproximar um swap de volatilidade com notional \$1/(pt vol), para volatilidades realizadas próximas de  $K_{vol}$ . Com esta escolha, os payoff coincidem em valor e na sensibilidade da volatilidade (a primeira derivada com relação a  $\sigma_R$ ) quando  $\sigma_R = K_{vol}$ . Isto implicaria que também o preço justo da volatilidade futura (o exercício pelo qual o swap de volatilidade tem valor zero) é simplesmente a raiz quadrada de  $K_{var}$ :

$$K_{vol} = \sqrt{K_{var}}. \quad (3.10)$$

Esta estimativa das equações (3.9) e (3.10) não é totalmente correta. Com esta escolha, o payoff do swap de variância é sempre maior que o payoff do swap de volatilidade. Este erro entre os payoffs do swap de variância e de volatilidade na equação (3.9) é de:

$$\frac{1}{2K_{vol}} (\sigma_R - K_{vol})^2$$

Na seguinte figura, comparamos ambos lados da equação (3.9) para  $K_{vol} = 30\%$  para diferentes valores da volatilidade realizadas. Observamos que o swap de volatilidade e a sua aproximação pelo swap de variância diferem só quando a volatilidade realizada se afasta do valor de  $K_{vol}$ .



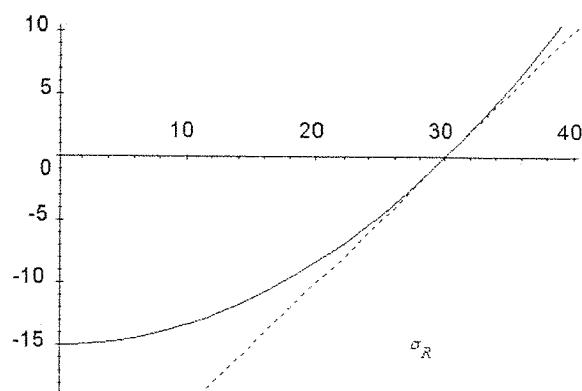


Figura 3.1: Payoff de um swap de volatilidade e um swap de variância como função da volatilidade realizada, para  $K_{vol} = 30\%$

O quadrado da equação (3) é sempre positivo, por isso para esta escolha do valor justo para  $K_{vol}$ , o swap de variância sempre supera o swap de volatilidade. Para evitar esta situação de arbitragem, deveríamos corrigir nossa estimativa para fazer o preço de exercício do contrato de volatilidade, menor que a raiz quadrada do preço justo do swap de variância. Desta forma, a reta na figura 3 vai se mover para a esquerda e não permanecerá sempre embaixo da parábola.

Com as simulações feitas no exemplo do capítulo anterior, calculamos as variâncias e volatilidades realizadas pelas 50000 trajetórias simuladas de árvores implícitas estocásticas, com diferentes parâmetros para a volatilidade da volatilidade:

$\theta$	$K_{var}$	$K_{vol}$	$\sqrt{K_{var}}$
0.0	0.013917	0.111536	0.117970335
0.05	0.013881	0.111431	0.117817656
0.1	0.013902	0.111602	0.117906743
0.15	0.013941	0.111196	0.118072012
0.2	0.013888	0.111377	0.117847359
0.25	0.013933	0.111237	0.118038129
0.3	0.014003	0.111240	0.118334272
0.35	0.014009	0.111408	0.118359621
0.4	0.014240	0.111668	0.119331471
0.45	0.014438	0.111811	0.120158229
0.5	0.014755	0.112630	0.121470161

Este risco na aproximação estática para calcular os swaps de volatilidade, pode-se reduzir com uma negociação dinâmica sobre contratos de variância durante o tempo de vida do swap de volatilidade. A replicação dinâmica de um swap de volatilidade por um swap de variância, vai produzir um payoff

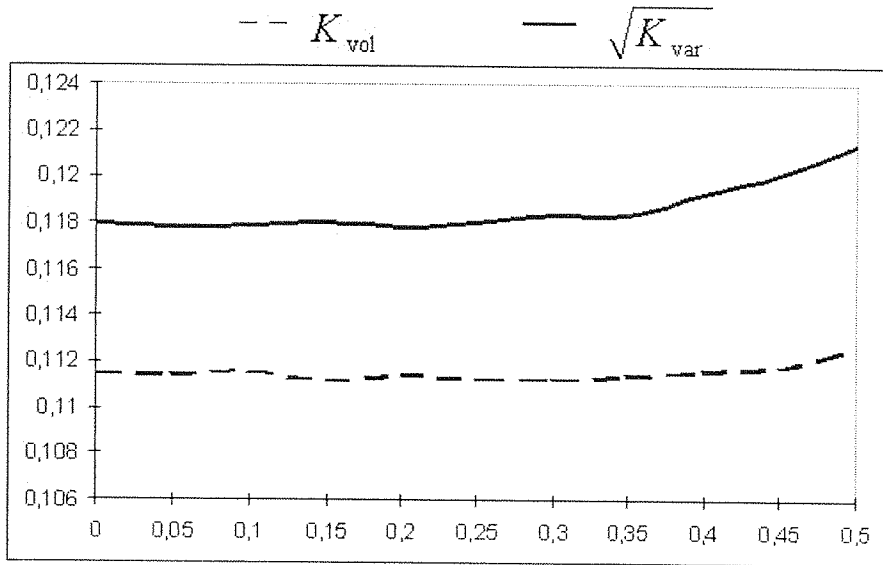


Figura 3.2: O swap de variância sempre supera o swap de volatilidade

para o swap de volatilidade que, em princípio, independe dos movimentos futuros da volatilidade. A replicação dinâmica de um swap de volatilidade requer um modelo para a volatilidade da volatilidade. A implementação prática destas idéias precisam do modelo livre de arbitragem para a evolução estocástica da superfície de volatilidade.

Dada a direção e volatilidade da volatilidade futura, vamos mostrar que é possível escolher um strike e um notional de um contrato de variância para apreçar um contrato de volatilidade, em média, tão próximo como é possível. O tamanho do erro de replicação vai depender da proximidade da volatilidade realizada e seu valor esperado. O instrumento para o hedge é a variância realizada ( $\Sigma_T^2$ ). Queremos aproximar a volatilidade como uma função da variância, para isso escrevemos:

$$\Sigma_T \approx a\Sigma_T^2 + b \quad (3.11)$$

e escolhemos  $a$  e  $b$  para minimizar o seguinte valor esperado:

$$\min E[(\Sigma_T - a\Sigma_T^2 - b)^2] \quad (3.12)$$

Derivando, obtemos o seguinte sistema de equações para os coeficientes  $a$  e  $b$ :

$$\begin{aligned} E[\Sigma_T] &= aE[\Sigma_T^2] + b \\ E[\Sigma_T^3] &= aE[\Sigma_T^4] + bE[\Sigma_T^2] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vamos assumir a distribuição da volatilidade futura como sendo normal com média  $\bar{\Sigma}$  e desvio padrão  $\sigma_\Sigma$

$$\Sigma_T \approx N(\bar{\Sigma}, \sigma_\Sigma).$$

Esta estratégia vai replicar só em média; o erro ajustado esperado na replicação está dado por:

$$\min E[(\Sigma_T - a\Sigma_T^2 - b)^2] = \text{var}(\Sigma_T)[1 - (\text{corr}(\Sigma_T, \Sigma_T^2))^2]$$

Para volatilidades distribuídas normalmente, os coeficientes para o hedge são:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\bar{\Sigma} + \frac{\sigma_\Sigma^2}{\bar{\Sigma}}} \\ b &= \frac{\bar{\Sigma}}{2 + \frac{\sigma_\Sigma^2}{\bar{\Sigma}^2}} \end{aligned}$$

e o erro ajustado esperado é:

$$\min E[(\Sigma_T - a\Sigma_T^2 - b)^2] = \frac{\sigma_\Sigma^2}{1 + \frac{2\bar{\Sigma}^2}{\sigma_\Sigma^2}}$$

### 3.1 Aplicação ao mercado Brasileiro

A taxa de câmbio é um dos principais objetos de estudo da economia internacional, pois suas variações nominais e reais afetam variáveis macroeconômicas e microeconômicas. Na figura 3.3, é apresentada a série de taxa de câmbio correspondente ao período de setembro de 2002 a março de 2003.

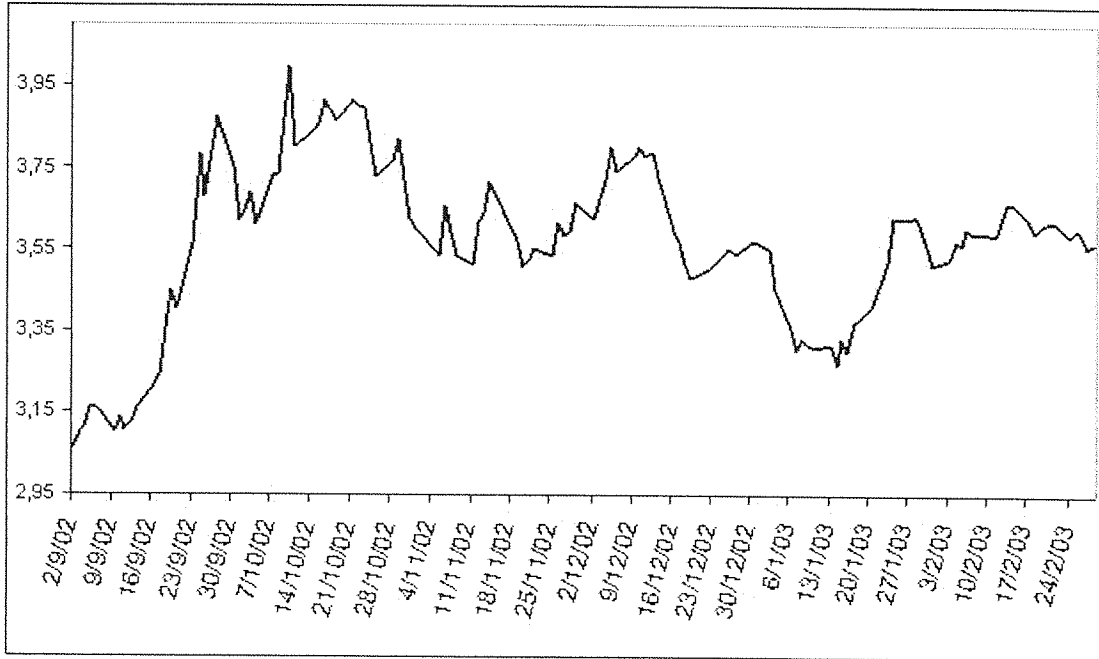


Figura 3.3: Taxa de câmbio em R\$

As incertezas associadas ao processo eleitoral fizeram com que a taxa de câmbio disparasse, com uma desvalorização nominal de 60% entre fevereiro e outubro de 2002. Existem movimentos que indicam um aumento (redução) da variação diária percentual (isto é, da volatilidade) da taxa de câmbio, há também movimentos de inclinação para cima (baixo) da trajetória da taxa de câmbio.

A explicação é essencialmente econômica: diante de uma alta volatilidade cambial, o que reflete incertezas internas e/ou externas, os agentes buscam proteção demandando dólares e, conseqüentemente, pressionam o seu preço para cima.

Como vimos no capítulo anterior, podemos apreçar um contrato de volatilidade aproximando a volatilidade como uma função da variância:

$$\Sigma_T \approx a\Sigma_T^2 + b$$

Em nosso exemplo da taxa de câmbio, temos

$$\bar{\Sigma} = 0.012618755$$

$$\sigma_{\Sigma}^2 = 0.000014$$

Logo os coeficientes para a aproximação são:

$$a = \frac{1}{2\bar{\Sigma} + \frac{\sigma_{\Sigma}^2}{\bar{\Sigma}}} = 37.9835$$

$$b = \frac{\bar{\Sigma}}{2 + \frac{\sigma_{\Sigma}^2}{\bar{\Sigma}^2}} = 0.006048$$

e o erro esperado é:

$$\min E[(\Sigma_T - a\Sigma_T^2 - b)^2] = 0.00000057$$

Na seguinte figura podemos observar que quando a volatilidade realizada é próxima com seu valor esperado, temos uma boa aproximação para a volatilidade como função da variância. Logo podemos replicar estes swaps de volatilidade usando swaps de variância.

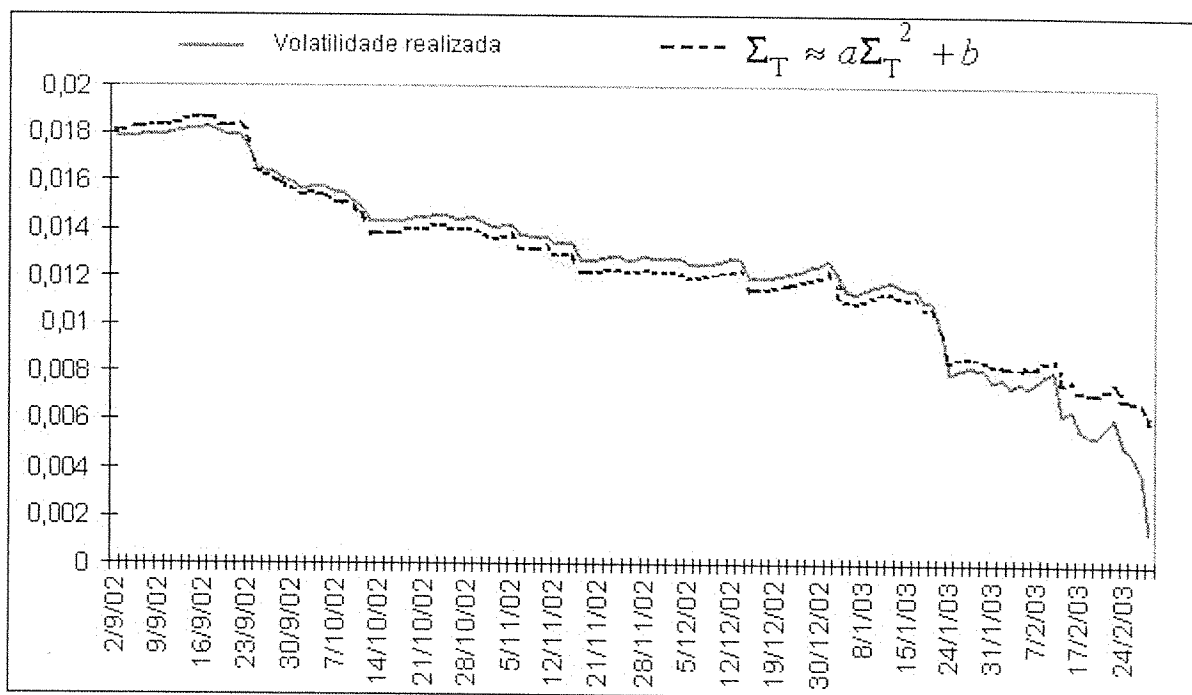


Figura 3.4: Volatilidade realizada e sua aproximação como função da variância para a taxa de câmbio

# Conclusões

Apresentamos neste trabalho o comportamento da superfície de volatilidade local em uma teoria estocástica. Nesta teoria estudamos o apreçamento de instrumentos derivativos livre de arbitragem. No Capítulo 2 mostramos uma medida de apreçamento, a medida de Arrow-Debreu. Com a unicidade desta medida temos que o mercado é completo e livre de arbitragem. No caso discreto vimos a forma que devem satisfazer os coeficientes de drift para a ausência de oportunidades de arbitragem. Aqui estudamos e simulamos as árvores implícitas estocásticas, com estas simulações apreçamos um contrato de variância e observamos que o preço dele independe do parâmetro para a volatilidade da volatilidade. Por último, no Capítulo 3 estudamos o apreçamento dos swaps de volatilidade e amostramos como replicar um swap de volatilidade a partir de um swap de variância.

## Apêndice A

# O Resultado de Breedem-Litzenberger: Probabilidades implícitas

Para provar o resultado de Breedem-Litzenberger, vamos escrever o valor presente de uma opção Europeia (call)  $C_{K,T}(t, S)$  com preço de exercício  $K$  e vencimento  $T$ , com valor final  $C_{K,T}(T, S_T)$  como um valor esperado:

$$C_{K,T}(t, S) = e^{-r(T-t)} E[(S_T - K)^+].$$

Usando a densidade de probabilidade  $p(t, S, T, x)$ , podemos escrever

$$C_{K,T}(t, S) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} (x - K)^+ p(t, S, T, x) dx.$$

Usando o fato que somente os valores  $x > K$  contribuem para a integral acima, podemos derivar o valor da opção em relação à  $K$  e obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{K,T}(t, S)}{\partial K} &= \frac{\partial}{\partial K} \left( e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (x - K) p(t, S, T, x) dx \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial K} (x - K) p(t, S, T, x) dx - (x - K) p(t, S, T, x) \Big|_{x=K} \right) \\ &= -e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} p(t, S, T, x) dx. \end{aligned}$$

Observe que quando  $p > 0$  temos que  $\frac{\partial C}{\partial K} < 0$ , pois relações de não arbitragem impõem que o preço de uma opção de compra seja decrescente com relação ao preço de exercício. Derivando mais uma vez com

relação à  $K$  obtemos:

$$\frac{\partial^2 C_{K,T}(t, S)}{\partial K^2} = -e^{-r(T-t)} p(t, S, T, K).$$

Logo

$$p(t, S, T, K) = e^{(T-t)} \frac{\partial^2 C_{K,T}(t, S)}{\partial K^2}.$$



## Apêndice B

# A fórmula de Dupire

Neste apêndice vamos apresentar o resultado de B. Dupire [Dup94], que relaciona a volatilidade local com os preços do mercado de opções de compra e venda líquidas. Vamos trabalhar em um mercado que negocia opções para qualquer vencimento  $T > 0$  e qualquer exercício  $K$ . Consideramos os retornos do ativo base segundo a equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dZ_t.$$

O resultado de Dupire afirma que existe apenas uma estrutura de volatilidade local compatível com um mercado líquido de opções em todos os vencimentos e exercícios. Esta estrutura pode ser calculada segundo a fórmula:

$$\sigma_{K,T}^2 = 2 \frac{\left\{ \frac{\partial C_{K,T}}{\partial T} + rK \frac{\partial C_{K,T}}{\partial K} \right\}}{K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2}}.$$

O preço de uma opção (call) europeia,  $C_{K,T}(t, S)$ , no tempo  $t$  e nível  $S$ , com preço de exercício  $K$  e tempo de vencimento  $T$ , com valor final  $C_{K,T}(T, S_T) = (S_T - K)^+$ , está dado por:

$$\begin{aligned} C_{K,T}(t, S) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} (x - K)^+ p(t, S, T, x) dx \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (x - K) p(t, S, T, x) dx. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Podemos derivar esta equação com relação a  $T$  e obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{K,T}}{\partial T} &= -re^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x-K)p(t, S, T, x) dx \\ &\quad + e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial T} \left( \int_K^\infty (x-K)p(t, S, T, x) dx \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Logo usando o valor da opção obtemos:

$$\frac{\partial C_{K,T}}{\partial T} = -rC_{K,T} + e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x-K) \frac{\partial}{\partial T} p(t, S, T, x) dx. \quad (\text{B.3})$$

Para calcular esta integral, usamos a equação de Kolmogorov (consultar livro de Oksendal [Oks98]), que afirma que:

$$\frac{\partial}{\partial T} p(t, S, T, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 \sigma_{x,T}^2 p(t, S, T, x)) - \frac{\partial}{\partial x} (rxp(t, S, T, x)).$$

Neste caso, inserindo este valor na equação (B.3), obtemos:

$$\frac{\partial C_{K,T}}{\partial T} = -rC_{K,T} + e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x-K) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 \sigma_{x,T}^2 p(t, S, T, x)) - \frac{\partial}{\partial x} (rxp(t, S, T, x)) \right\} dx. \quad (\text{B.4})$$

Os termos com derivadas parciais dentro da integral, devem ser integrados por partes:

$$\begin{aligned} - \int_K^\infty (x-K) \frac{\partial}{\partial x} (rxp(t, S, T, x)) dx &= \int_K^\infty \frac{\partial}{\partial x} (x-K) rxp(t, S, T, x) dx \\ &\quad - rxp(t, S, T, x)(x-K) \Big|_K^\infty \\ &= r \int_K^\infty xp(t, S, T, x) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Similarmente integramos o outro termo:

$$\begin{aligned} \int_K^\infty (x-K) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 \sigma_{x,T}^2 p(t, S, T, x)) dx &= \\ &\quad - \int_K^\infty \frac{\partial}{\partial x} (x-K) \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \sigma_{x,T}^2 p(t, S, T, x)) dx \\ &\quad + (x-K) \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \sigma_{x,T}^2 p(t, S, T, x)) \Big|_K^\infty \\ &= - \int_K^\infty \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \sigma_{x,T}^2 p(t, S, T, x)) dx \\ &= -x^2 \sigma_{x,T}^2 p(t, S, T, x) \Big|_K^\infty \\ &= K^2 \sigma_{K,T}^2 p(t, S, T, K). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Substituindo pelas equações (B.5) e (B.6) na equação (B.4), obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{K,T}}{\partial T} &= -rC_{K,T} + \frac{1}{2}K^2\sigma_{K,T}^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2} + rC_{K,T} + rK e^{-r(T-t)} \underbrace{\int_0^\infty Kp(t, S, T, x) dx}_{\frac{\partial C_{K,T}}{\partial K}} \\ &= \frac{1}{2}K^2\sigma_{K,T}^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2} + rK \frac{\partial C_{K,T}}{\partial K} \end{aligned}$$

Isolando o termo com a estrutura de volatilidade, obtemos:

$$\sigma_{K,T}^2 = \frac{\frac{\partial C_{K,T}}{\partial T} + rK \frac{\partial C_{K,T}}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2}}$$

# Bibliografía

- [BL78] D. Breeden and R. Litzenberger. The pricing of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, Vol. 51:621–651, 1978.
- [BS73] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81:637–654, 1973.
- [CM98] P. Carr and D. Madan. Towards a theory of volatility trading. In *Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives*, London, 1998. Risk Publications.
- [DDKZ99] K. Demeterfi, E. Derman, M. Kamal, and J. Zou. More than you ever wanted to know about volatility swaps. *Quantitative Strategies Technical Notes*, March 1999.
- [DK94a] E. Derman and I. Kani. Riding on a smile. *RISK* 7, (2):32–39, 1994.
- [DK94b] E. Derman and I. Kani. The volatility smile and its implied trees. *Quantitative Strategies Technical Notes*, January 1994.
- [DK97] E. Derman and I. Kani. Stochastic implied trees: Arbitrage pricing with stochastic term and strike structure of volatility. *Quantitative Strategies Technical Notes*, April 1997.
- [DKC96] E. Derman, I. Kani, and N. Chriss. Implied trinomial trees of the volatility smile. *Quantitative Strategies Technical Notes*, February 1996.
- [DKK96] E. Demrman, I. Kani, and M. Kamal. Trading and hedging local volatility. *Quantitative Strategies Technical Notes*, August 1996.
- [DKK<sup>+</sup>98] E. Derman, M. Kamal, I. Kani, J. McClure, C. Pirasteh, and J. Zou. Investing in volatility. *Special Supplement on the 25th Anniversary of the Publication of the Black-scholes Model*, 1998.
- [DKZ95] E. Derman, I. Kani, and J. Zou. The local volatility surface. *Quantitative Strategies Technical Notes*, December 1995.
- [Dup94] B. Dupire. Pricing with a smile. *RISK* 7, (1):18–20, 1994.

- [HJM92] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, Vol. 60(1):77–105, 1992.
- [HK79] J. M. Harrison and D. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, Vol. 20:381–408, 1979.
- [HP81] J.M. Harrison and S. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuously trading. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 20:215–260, 1981.
- [Neu94] A. Neuberger. The log contract: A new instrument to hedge volatility. *Journal of Portfolio Management*, pages 74–80, 1994.
- [Oks98] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations. An introduction with Applications*. Springer, fifth edition, 1998.