

Estabilidade do Equilíbrio Relativo

no Problema de $2N$ Vórtices

Tatiane Martins Pereira Doy

Dissertação apresentada ao

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

para a obtenção do grau de mestre em Matemática Aplicada

Área de concentração:

Orientador: Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro da CAPES

São Paulo, outubro de 2004.

Este exemplar corresponde à redação final da
dissertação devidamente corrigida e defendida por
Tatiane Martins Pereira Doy e aprovada pela
Comissão Julgadora.

São Paulo, 14 de outubro de 2004.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Sônia Regina Leite Garcia (Presidente)	IME-USP
Prof. Dra. Helena Maria Ávila de Castro	IME-USP
Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral	DMAT-UFPE

Aos meus pais, ao meu esposo, ao meu bebê, e a minha irmã.

Resumo

Este trabalho é uma apresentação dos resultados do artigo **Stability of Relative Equilibria in the Problem of $N+1$ Vortices** dos autores **H.E. Cabral and D.S. Schmidt** [1] que estudaram a estabilidade espectral e estabilidade segundo Liapunov de uma configuração poligonal regular de N vórtices com um vórtice central, no plano.

Estudaremos também a configuração de $2N$ vórtices, na qual N vórtices estão nos vértices de um polígono regular de N lados circunscrito por uma circunferência de raio 1, e os outros N vórtices nos vértices de um polígono regular de N lados circunscrito por uma circunferência de raio $\epsilon > 0$, sendo ambas as circunferências concêntricas, e de forma que um polígono seja uma imagem homotética do outro seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{N}$. Para alguns valores de N , estudaremos a estabilidade espectral e a estabilidade de Liapunov.

Abstract

This work presents the results of the article **Stability of Relative Equilibria in the Problem of $N+1$ Vortices** of the authors **H.E. Cabral and D.S. Schmidt** [1]. They studied the spectral stability and Liapunov stability of a regular polygon configuration of N vortices with a central vortex, in the plan. We will also study the configuration of $2N$ vortices, in the which N vortices are in the vertices of a regular polygon of N sides circumscribed for a circumference of ray 1, and the other N vortices in the vertices of a regular polygon of N sides circumscribed for a circumference of ray $\epsilon > 0$, being both concentrical circumferences, and form a polygon, wich is a homotetic image of the next one, considering a rotation of $\frac{\pi}{N}$. For some values of N , we will study the spectral stability and the Liapunov stability of this configuration.

CONTENTS

Chapter I. Introduction. 1

Chapter II. The History of the Study of the Mind. 15

Chapter III. The Study of the Mind in the Middle Ages. 35

Chapter IV. The Study of the Mind in the Renaissance. 55

Chapter V. The Study of the Mind in the Eighteenth Century. 75

Chapter VI. The Study of the Mind in the Nineteenth Century. 95

Chapter VII. The Study of the Mind in the Twentieth Century. 115

Chapter VIII. The Study of the Mind in the Twenty-First Century. 135

Continued

CONTENTS

Chapter IX. The Study of the Mind in the Twenty-Second Century. 155

Chapter X. The Study of the Mind in the Twenty-Third Century. 175

Chapter XI. The Study of the Mind in the Twenty-Fourth Century. 195

Chapter XII. The Study of the Mind in the Twenty-Fifth Century. 215

Chapter XIII. The Study of the Mind in the Twenty-Sixth Century. 235

Chapter XIV. The Study of the Mind in the Twenty-Seventh Century. 255

Chapter XV. The Study of the Mind in the Twenty-Eighth Century. 275

Chapter XVI. The Study of the Mind in the Twenty-Ninth Century. 295

Chapter XVII. The Study of the Mind in the Thirtieth Century. 315

Agradecimentos

A DEUS, por dirigir meus passos.

Ao meu querido esposo Fábio Eiki Doy por ter paciência enquanto eu estava ausente com os afazeres do lar, pelas palavras de incentivo nas horas de angustia, pelo carinho e amor sem medidas e ao meu filho Vitor Doy pelas horas que não pudemos estar juntos.

Aos meus pais, pelo incentivo, pela dedicação em me auxiliar, pelos esforços.

À Profa. Sônia Regina Leite Garcia, pela paciência diante minhas dificuldades, pelas palavras de incentivo e cobrança.

Ao Prof. Manuel Valentim de Pera Garcia por ser meu orientador.

À minha irmã Tânia, embora distante sempre acreditou que meus esforços teriam recompensa.

A todos os meus colegas do IME-USP que de alguma forma contribuíram com este sonho, aos meus amigos, em especial a amiga Paola Gaviria que sempre teve um ombro amigo nas minhas horas difíceis.

Aos meus amigos do grupo Arte e Louvor e da sala 04 Jovens, em especial a Mary Figueiredo, pelo carinho e pelas orações.

À minha amiga Patricia Vieira de Oliveira, por estar sempre disposta a me ouvir.

Aos Professores, Plínio Amarante Quirino Simões, Antônio Luiz Pereira, Luiz Augusto Fernandes de Oliveira, Angelo Barone Netto, pelo apoio.

x

À banca examinadora

À minha sogra Maria Isabel Paraiso por se preocupar comigo como se eu fosse sua filha.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para obtenção deste título.

Tatiane Martins Pereira Doy

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Básicos	5
1.1 Estabilidade Segundo Liapunov	5
1.1.1 Estabilidade de Sistemas Hamiltonianos	7
1.2 Problema de Kirchhoff	8
2 Estabilidade do Equilíbrio Relativo no Problema de N Vórtices	13
2.1 Introdução	13
2.2 Estabilidade Espectral	16
2.3 Estabilidade para um Anel de Vórtices	22
2.3.1 Expansão da Função Hamiltoniana U_1	23
2.3.2 Estabilidade Espectral para um Anel de Vórtices	28
2.4 Estabilidade de um Anel com um Vórtice Central	32
2.4.1 Expansão da Função Hamiltoniana U_2	33
2.4.2 Estabilidade Espectral de um Anel com um Vórtice Central	34

2.4.3	Estabilidade segundo Liapunov para um Anel com um Vórtice Central	38
3	Estabilidade do Equilíbrio Relativo no Problema de $2N$ Vórtices	45
3.1	Duplo Anel de Vórtices	45
3.2	Equilíbrio do Duplo Anel de Vórtices	47
3.3	Estabilidade para o Duplo Anel de Vórtices	51
3.3.1	Expansão da Função Hamiltoniana U	51
3.3.2	Equacionamento da Estabilidade Espectral para o Duplo Anel de Vórtices	61
3.3.3	Estabilidade Espectral para o Duplo Anel de Vórtices quando $N = 2$	68
3.3.4	Estabilidade Espectral para o Duplo Anel de Vórtices quando $N = 4$	74
3.3.5	Estabilidade segundo Liapunov para o Duplo Anel de Vórtices quando $N = 2$	83
4	Conclusão	87
A		89
B	Figuras das Posições de Equilíbrio para o Problema dos Vórtices	107

Introdução

Este trabalho foi desenvolvido a partir do artigo **Stability of Relative Equilibria in the Problem of $N+1$ Vortices** dos autores **H.E. Cabral and D.S. Schmidt** [1] que estudaram a estabilidade de uma configuração poligonal regular de N vórtices com um vórtice central, no plano.

O problema tratado em [1] é o de estudar para quais valores da intensidade do vórtice central a configuração é localmente estável segundo Liapunov e, além disso, mostrar que, exceto por simetria rotacional, o heptágono é estável segundo Liapunov.

O problema dos vórtices em um fluido ideal foi discutido por **J.J. Thomson** [12] em seu ensaio a respeito do trabalho de **Adams Prize** de **1882**. J.J. Thomson colocou N vórtices de igual intensidade nos vértices de um polígono regular. Trabalhando com um sistema de coordenadas em rotação uniforme, ele concluiu que a configuração poderia ser estável para $N \leq 6$, mas era instável para $N \geq 8$.

Adaptando os métodos desenvolvidos para o estudo da estabilidade do problema de N corpos de mecânica celeste, os autores obtêm diretamente os resultados para configuração poligonal de N vórtices de igual intensidade. Adaptam também os métodos para a configuração poligonal de N vórtices de igual intensidade com um vórtice central de intensidade diferente.

De fato, mostram mais, isto é, mostram que para o valor da intensidade do vórtice num certo intervalo, a configuração de $N+1$ vórtices não é apenas espectralmente estável, mas é também estável segundo Liapunov.

Pelo fato do problema de $N+1$ vórtices ter $(N+1)$ graus de liberdade ao invés dos $2(N+1)$ do problema de $N+1$ corpos celestes, e da configuração poligonal ter várias

simetrias, os cálculos tornam-se mais simples para o problema dos vórtices que para o problema de $N + 1$ corpos celestes, conforme salientam os autores em [1].

Utilizando funções analíticas encontram a expansão da série de Taylor do potencial logarítmico do problema dos vórtices de uma maneira mais fácil que a do potencial Newtoniano.

Em nosso trabalho, apresentaremos no capítulo 1 alguns conceitos e teoremas básicos que serão utilizados nos capítulos seguintes. Na seção 1.1 falaremos sobre estabilidade segundo Liapunov. Na seção 1.2 apresentaremos o problema de Kirchhoff.

No capítulo 2 apresentaremos os principais resultados do artigo [1], procurando incluir detalhes e demonstrações de forma a tornar a leitura mais simples do que usualmente ocorre num paper.

Na seção 2.1 serão apresentadas as equações do movimento para $N + 1$ vórtices, a identidade que uma solução de equilíbrio deve satisfazer e, por fim, será deduzida a fórmula da velocidade angular de uma solução de equilíbrio.

Na seção 2.2 serão deduzidas as condições para estabilidade espectral do equilíbrio relativo e será apresentado o problema de um anel de vórtices e de um anel de vórtices com um vórtice central. Mostraremos que a configuração estudada é uma solução de equilíbrio.

Na seção 2.3 será feita a expansão da função Hamiltoniana do problema para a obtenção de sua matriz Hessiana e será discutida a estabilidade espectral para o anel de N vórtices.

Na seção 2.4 será estudada a estabilidade espectral em função do valor da intensidade do vórtice central e, em seguida, será analisada a estabilidade de Liapunov para esses valores da intensidade.

Apresentaremos no capítulo 3 nossa principal contribuição: o estudo da estabilidade do equilíbrio no problema de $2N$ vórtices dispostos em dois anéis de N vórtices cada.

Na seção 3.1 faremos uma descrição mais detalhada deste problema.

Na seção 3.2 mostraremos que a configuração dos $2N$ vórtices proposta é uma solução de equilíbrio, apresentaremos a função Hamiltoniana e a velocidade angular nessa configuração.

Na seção 3.3 equacionaremos a estabilidade espectral dessa configuração especial seguindo os passos apresentados na seção 2.3.2 e faremos um estudo mais detalhado de estabilidade espectral para os casos $N = 2$ e $N = 4$. Além disso, faremos o estudo da estabilidade segundo Liapunov para o caso $N = 2$.

Para facilitar a leitura e compreensão de alguns cálculos e demonstrações, colocamos no apêndice A alguns resultados utilizados e no apêndice B, as figuras que representam as posições de equilíbrio para os problemas de N vórtices, $N + 1$ vórtices e $2N$ vórtices.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Vamos apresentar neste capítulo alguns conceitos básicos envolvendo estabilidade.

Apresentaremos, sem demonstração, alguns teoremas sobre estabilidade segundo Liapunov. Como referência para este assunto citamos [11].

Apresentaremos o problema de Kirchhoff que trata de um sistema de equações diferenciais representando o movimento de N vórtices no plano.

Estes conceitos serão úteis para a apresentação dos capítulos seguintes.

1.1 Estabilidade Segundo Liapunov

Iniciamos apresentando a definição de ponto de equilíbrio de uma equação diferencial.

Definição 1.1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} . Um ponto x_0 é chamado ponto de equilíbrio da equação $\dot{x} = f(x)$ se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida por $\varphi(t) = x_0, t \in \mathbb{R}$, é solução dessa equação.*

Observação 1.1.2 x_0 é ponto de equilíbrio se, e só se, $f(x_0) = 0$.

Definição 1.1.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} . Um ponto de equilíbrio x_0 da equação $\dot{x} = f(x)$ diz-se estável segundo Liapunov se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\epsilon)$) tal que $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ e para todo $\tilde{x} \in B_\delta(x_0)$ a solução ψ do problema*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \tilde{x},$$

fica definida em $[0, \infty[$ e $\psi(t) \in B_\epsilon(x_0)$, $\forall t \geq 0$.

Caso contrário, o ponto de equilíbrio é dito instável segundo Liapunov.

Definição 1.1.4 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} .*

Um ponto de equilíbrio $x_0 \in \Omega$ da equação $\dot{x} = f(x)$ é dito atrator, se existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\tilde{x} \in B_\epsilon(x_0)$ a solução φ de

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \tilde{x},$$

fica definida em $[0, +\infty[$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0.$$

Definição 1.1.5 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} .*

Um ponto de equilíbrio $x_0 \in \Omega$ da equação $\dot{x} = f(x)$ é dito assintoticamente estável segundo Liapunov se ele for estável e atrator.

Os métodos mais frequentemente usados no estudo de estabilidade de pontos de equilíbrio são os de linearização da equação diferencial e os que usam funções auxiliares. Os Teoremas 1.1.6 e 1.1.7 são fundamentais quando utilizamos o método de linearização. Quanto ao emprego de funções auxiliares, podemos dizer o mesmo do Teorema 1.1.10.

Teorema 1.1.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} . Se $x_0 \in \Omega$ é um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$ e todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real estritamente negativa, então x_0 é assintoticamente estável segundo Liapunov.*

Teorema 1.1.7 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} . Se x_0 é um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$ e $Df(x_0)$ possui um autovalor com parte real estritamente positiva, então x_0 é instável segundo Liapunov.*

Observação 1.1.8 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} , e seja $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma solução de $\dot{x} = f(x)$ então $\frac{d}{dt}(V \circ \varphi)(t) = DV(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = DV(\varphi(t))f(\varphi(t))$. Isto motiva a definição de $\dot{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por $\dot{V}(x) = DV(x)f(x)$.

Definição 1.1.9 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} . Seja x_0 um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$. Uma função de Liapunov para x_0 é uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida em um aberto $U \subset \Omega$ tal que $x_0 \in U$, diferenciável, satisfazendo as seguintes condições:

1. x_0 é ponto de mínimo estrito de V , isto é,

$$V(x_0) < V(x), \forall x \in U, x \neq x_0.$$

2. $\dot{V}(x) = DV(x)f(x) \leq 0, \forall x \in U$.

Uma função de Liapunov V diz-se estrita quando

3. $\dot{V} < 0$ em $U - \{x_0\}$.

Teorema 1.1.10 (Liapunov) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} . Seja x_0 um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$. Se existe uma função de Liapunov para x_0 , então x_0 é estável segundo Liapunov. Se essa função for estrita, então x_0 é assintoticamente estável segundo Liapunov.

1.1.1 Estabilidade de Sistemas Hamiltonianos

Agora vamos apresentar o teorema de estabilidade para sistemas de nosso interesse, sistemas Hamiltonianos. Como referência citamos [9].

Definição 1.1.11 Um sistema Hamiltoniano é um sistema de $2N$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(t, q, p), \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(t, q, p), \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $H = H(t, q, p)$, chamada função Hamiltoniana, é uma função real de classe C^2 definida para $(t, q, p) \in \Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é aberto. Os vetores $q = (q_1, \dots, q_N)$ e $p = (p_1, \dots, p_N)$ são chamados de vetor posição e vetor momento, respectivamente.

Definição 1.1.12 Chamamos de sistema Hamiltoniano autônomo ao sistema cuja função Hamiltoniana H é independente de t . Nesse caso, olhamos $H = H(q, p)$ definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Definição 1.1.13 Considere um sistema Hamiltoniano autônomo. Um ponto crítico de H é um ponto cujo gradiente de H é nulo.

Observação 1.1.14 Um ponto crítico de H é um ponto de equilíbrio do sistema Hamiltoniano correspondente.

Teorema 1.1.15 Consideremos um sistema Hamiltoniano autônomo

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p), \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p). \end{cases}$$

Então $\dot{H} = 0$, e se (q_0, p_0) é um ponto de mínimo estrito de H , então (q_0, p_0) é um ponto de equilíbrio estável segundo Liapunov para o sistema Hamiltoniano considerado.

1.2 Problema de Kirchhoff

O problema de Kirchhoff consiste de um sistema de equações diferenciais descrevendo o movimento de N vórtices movendo-se no plano. Seja $\eta_j = (x_j, y_j)$ o vetor posição do j -ésimo vórtice cuja intensidade é $\kappa_j \neq 0$ para $j = 0, \dots, N-1$. Então Kirchhoff (1897) descreveu as equações do movimento para esses N vórtices como

$$\kappa_j \dot{\eta}_j = J \frac{\partial U(\eta)}{\partial \eta_j}, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (1.2)$$

com

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e função Hamiltoniana

$$U(\eta) = - \sum_{0 \leq i < j \leq N-1} \kappa_i \bar{\kappa}_j \log \|\eta_i - \eta_j\|. \quad (1.3)$$

Podemos escrever o sistema (1.2) na forma

$$\begin{cases} \kappa_j \dot{x}_j = \frac{\partial U}{\partial y_j}(\eta), \\ \kappa_j \dot{y}_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}(\eta). \end{cases} \quad (1.4)$$

O sistema (1.4) não é um sistema Hamiltoniano, mas introduzindo novas variáveis

$$\begin{cases} q_j = \sqrt{|\kappa_j|} x_j, \\ p_j = \sqrt{|\kappa_j|} \operatorname{sgn}(\kappa_j) y_j, \end{cases} \implies \begin{cases} x_j = \frac{q_j}{\sqrt{|\kappa_j|}}, \\ y_j = \frac{p_j}{\sqrt{|\kappa_j|}} \operatorname{sgn}(\kappa_j), \end{cases} \quad (1.5)$$

podemos transformá-lo em um sistema Hamiltoniano.

De fato, usando (1.5) obtemos a função Hamiltoniana

$$H(q, p) = U(x(q, p), y(q, p)). \quad (1.6)$$

Calculando as derivadas parciais de primeira ordem de H e substituindo em (1.4) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_j} &= \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_j} + \frac{\partial U}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial p_j} = \frac{\partial U}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial p_j} \\ &= \kappa_j \dot{x}_j \frac{\partial y_j}{\partial p_j} \\ &= \kappa_j \left(\frac{\dot{q}_j}{\sqrt{|\kappa_j|}} \right) \left(\frac{\operatorname{sgn}(\kappa_j)}{\sqrt{|\kappa_j|}} \right) = \dot{q}_j, \\ \frac{\partial H}{\partial q_j} &= \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_j} \\ &= -\kappa_j \dot{y}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_j} \\ &= -\kappa_j \left(\frac{\dot{p}_j \operatorname{sgn}(\kappa_j)}{\sqrt{|\kappa_j|}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{|\kappa_j|}} \right) = -\dot{p}_j. \end{aligned}$$

Logo obtemos o sistema Hamiltoniano autônomo em \mathbb{R}^{2N}

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p), \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p). \end{cases} \quad (1.7)$$

Com isso podemos trabalhar com o sistema (1.4) usando as correspondentes propriedades de um sistema Hamiltoniano.

Note que o sistema (1.4) pode ser reescrito na forma

$$M\dot{\eta} = \mathbf{J}\nabla U(\eta)$$

onde $\eta = (x_0, \dots, x_{N-1}, y_0, \dots, y_{N-1})$, \mathbf{J} e M são as seguintes matrizes $2N \times 2N$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad M = \begin{pmatrix} \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \kappa_{N-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \kappa_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \kappa_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

com $\kappa_j \neq 0$, $j = 0, \dots, N-1$.

Observação 1.2.1 A função U é chamada função hamiltoniana para o sistema

$$M\dot{\eta} = \mathbf{J}\nabla U(\eta).$$

Proposição 1.2.2 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ aberto e $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Considere o sistema $M\dot{\eta} = \mathbf{J}\nabla U(\eta)$, onde \mathbf{J} e M são dadas em (1.8).

Então a derivada \dot{U} de U ao longo das trajetórias desse sistema é nula.

Demonstração.

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{N-1}}, \frac{\partial U}{\partial y_0}, \dots, \frac{\partial U}{\partial y_{N-1}} \right)$$

$$M^{-1}\mathbf{J}\nabla U = \left(\frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial U}{\partial y_0}, \dots, \frac{1}{\kappa_{N-1}} \frac{\partial U}{\partial y_{N-1}}, -\frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial U}{\partial x_0}, \dots, -\frac{1}{\kappa_{N-1}} \frac{\partial U}{\partial x_{N-1}} \right)$$

Logo

$$\dot{U} = DUM^{-1}\mathbf{J}\nabla U = \langle M^{-1}\mathbf{J}\nabla U | \nabla U \rangle = 0.$$

■

Proposição 1.2.3 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ aberto. Consideremos um sistema $M\dot{\eta} = \mathbf{J}\nabla U(\eta)$ com U independente de t , de classe C^2 e M dada por (1.8). Se $\tilde{\eta}$ é um ponto de mínimo local estrito de $U(\eta)$, então $\tilde{\eta}$ é um ponto de equilíbrio estável segundo Liapunov para o sistema considerado.

Demonstração. Seja $V(\eta)$ a função auxiliar definida por

$$V(\eta) = U(\eta).$$

Como $\tilde{\eta}$ é ponto de mínimo estrito de U , então $\tilde{\eta}$ é ponto de mínimo local estrito de V .

Pela Proposição 1.2.2, $\dot{U} = 0$, logo $\dot{V} = \dot{U} = 0$.

Assim, V é função de Liapunov para esse sistema, e pelo Teorema 1.1.10 temos então que $\tilde{\eta}$ é estável segundo Liapunov.



Trabalharemos no capítulo 2 e capítulo 3 com sistemas do tipo (1.4).

Capítulo 2

Estabilidade do Equilíbrio Relativo no Problema de N Vórtices

2.1 Introdução

Vamos, neste capítulo, apresentar o conteúdo do artigo **Stability of Relative Equilibria in the Problem of $N+1$ Vortices** dos autores **H.E. Cabral and D.S. Schmidt** [1], que nos motivou a escrever o capítulo seguinte. Acrescentaremos nesta apresentação alguns detalhes que auxiliam a compreensão dos resultados ou que serão úteis no capítulo seguinte.

O objetivo em [1] é investigar a estabilidade de uma configuração poligonal regular de N vórtices com um vórtice central e mostrar que a configuração é estável segundo Liapunov quando o valor da intensidade do vórtice central está num certo intervalo aberto. Além disso, mostrar que, exceto por simetria rotacional, o heptágono é localmente Liapunov estável.

Sejam $N + 1$ vórtices alocados em $q_j = (x_j, y_j)$ com intensidade κ_j para $j = 0, \dots, N$ (figura B.1). Pela seção 1.2, as equações do movimento para estes vórtices no contexto da

mecânica Hamiltoniana são:

$$\begin{cases} \kappa_j \dot{x}_j = \frac{\partial U}{\partial y_j}(q), \\ \kappa_j \dot{y}_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}(q), \end{cases}$$

com a função Hamiltoniana

$$U(q) = - \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j \log((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

onde $q = (x_0, \dots, x_N, y_0, \dots, y_N)$.

A função potencial da mecânica celeste, para o problema de N corpos, tem uma forma similar, portanto U é chamada função potencial logarítmica.

Com a matriz das intensidades

$$M = \begin{pmatrix} \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \kappa_{N-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \kappa_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_N \end{pmatrix},$$

e a matriz simplética

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix},$$

o sistema acima pode ser escrito na forma vetorial

$$M\dot{q} = \mathbf{J}\nabla U. \quad (2.2)$$

Um equilíbrio relativo é uma configuração dos vórtices que torna-se estacionária em um sistema de coordenadas em rotação uniforme. Seja Q a mudança de coordenadas

$$q = e^{\nu \mathbf{J}t} Q,$$

que representa um sistema de coordenadas em que cada $Q_j = (\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ gira uniformemente, ao redor da origem, no plano (x_j, y_j) com velocidade angular ν .

Observação 2.1.1 *Sejam $Q = (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_N, \hat{y}_0, \dots, \hat{y}_N)$, $Q_j = (\hat{x}_j, \hat{y}_j)$, e $q = e^{\nu J t} Q = (x_0, \dots, x_N, y_0, \dots, y_N)$, $q_j = e^{\nu J t} Q_j = (x_j, y_j)$.*

Como $\|Q_i - Q_j\| = \|q_i - q_j\|$, para $i, j = 0, \dots, N$, segue que $U(q) = U(Q)$.

Assim, a equação do movimento na nova coordenada Q é

$$M\dot{Q} = \mathbf{J}(-\nu M Q + \nabla U(Q)). \quad (2.3)$$

Para deixar a notação menos carregada usa-se $(x_0, \dots, x_N, y_0, \dots, y_N)$ como coordenadas do ponto Q .

Pela Observação 1.1.2, um ponto $\tilde{Q} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_N, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_N)$ é um equilíbrio de (2.3) (e, portanto um movimento estacionário de (2.2)) se e só se satisfaz

$$0 = -\nu M \tilde{Q} + \nabla U(\tilde{Q}) \quad (2.4)$$

para algum valor de ν .

Nesse caso, pode-se encontrar o valor de ν através do produto escalar da equação acima com \tilde{Q} , obtendo então:

$$\nu = \frac{\tilde{Q}^T \nabla U(\tilde{Q})}{\tilde{Q}^T M \tilde{Q}}. \quad (2.5)$$

Para simplificar o numerador de ν pode-se calcular $U(\lambda Q)$ com $\lambda > 0$ e obter

$$U(\lambda Q) = -\log \lambda \sum \kappa_i \kappa_j + U(Q).$$

A seguir derivando-se com respeito a λ e pondo $\lambda = 1$, tem-se

$$Q^T \nabla U(Q) = - \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j.$$

No problema de mecânica celeste para $N + 1$ corpos, o denominador de (2.5) está relacionado com o momento de inércia. Usando a mesma notação pode-se escrever

$$I(\tilde{Q}) = \frac{1}{2} \tilde{Q}^T M \tilde{Q} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \kappa_j (\tilde{x}_j^2 + \tilde{y}_j^2).$$

A velocidade angular para o sistema de coordenadas torna-se então:

$$\nu = \frac{-\sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j}{2I(\tilde{Q})}. \quad (2.6)$$

Na próxima seção daremos a condição para estabilidade espectral de um equilíbrio relativo e apresentaremos os problemas de um anel de vórtices e o de um anel de vórtices com um vórtice central.

2.2 Estabilidade Espectral

Para determinar a estabilidade de Liapunov de um equilíbrio relativo \tilde{Q} de (2.3) olha-se para soluções que começam próximas do equilíbrio e analisa-se o que ocorre com estas soluções. Pode-se representar essas soluções por $Q = \tilde{Q} + Z$.

Substituindo no sistema (2.3) tem-se

$$M\dot{Z} = \mathbf{J}\nabla V(Z), \quad (2.7)$$

onde

$$V(Z) = -\frac{\nu}{2}(\tilde{Q} + Z)^T M(\tilde{Q} + Z) + U(\tilde{Q} + Z), \quad (2.8)$$

e o problema passa a ser estudar as soluções de (2.7) que começam perto de $\tilde{Z} = 0$.

Já que \tilde{Q} é um ponto de equilíbrio de (2.3), $\nabla V(0) = -\nu M\tilde{Q} + \nabla U(\tilde{Q}) = 0$. Como $D^2V(0) = -\nu M + D^2U(\tilde{Q})$, então a forma linearizada de (2.7) fica

$$M\dot{Z} = \mathbf{J}(-\nu M + D^2U(\tilde{Q}))Z. \quad (2.9)$$

Existem soluções não triviais da forma $Z = e^{\lambda t}\zeta$ se e só se a matriz

$$(M^{-1}\mathbf{J}(-\nu M + D^2U(\tilde{Q})) - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{J}(\lambda\mathbf{J} - \nu\mathbf{I} + M^{-1}D^2U(\tilde{Q})) \quad (2.10)$$

é singular, isto é, se e só se $|\lambda\mathbf{J} - \nu\mathbf{I} + M^{-1}D^2U(\tilde{Q})| = 0$.

Definição 2.2.1 Um ponto de equilíbrio \tilde{Q} de (2.3) é espectralmente estável se todas as raízes de

$$|\lambda \mathbf{J} - \nu \mathbf{I} + M^{-1} D^2 U(\tilde{Q})| = 0 \quad (2.11)$$

são puramente imaginárias, isto é, $\lambda = bi$, com $b \in \mathbb{R}$.

Note que \tilde{Q} ser espectralmente estável é condição necessária para ser estável segundo Liapunov, pois o sistema Hamiltoniano (2.9) é reversível, isto é, se $(x(t), y(t)) = (\varphi(t), \psi(t))$ é uma solução de (2.9) que tende à origem quando $t \rightarrow \infty$, então $(x(t), y(t)) = (\varphi(-t), \psi(-t))$ é uma solução que tende à origem quando $t \rightarrow -\infty$. A existência de uma solução que tende à origem quando $t \rightarrow -\infty$ implica em instabilidade segundo Liapunov para o sistema linearizado (2.9) e para o sistema não linearizado (2.7).

O problema a ser considerado é estudar a estabilidade espectral do equilíbrio correspondente a um anel de N vórtices idênticos posicionados nos vértices de um polígono regular de N lados, com um vórtice adicional na origem.

Não há perda de generalidade em supor que o anel é o anel unitário.

Sejam $w^j = e^{\frac{2\pi i}{N}j}$ a j -ésima raiz N -ésima da unidade e κ_0 a intensidade do j -ésimo vórtice, para $j = 0, \dots, N-1$. A intensidade do vórtice na origem será denotada por κ_N .

Considere a configuração

$$\tilde{Q} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_N, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_N) \quad (2.12)$$

definida por

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} \operatorname{Re}(\omega^j), & \text{para } j=0, \dots, N-1, \\ 0, & \text{para } j=N, \end{cases}$$

e

$$\tilde{y}_j = \begin{cases} \operatorname{Im}(\omega^j), & \text{para } j=0, \dots, N-1, \\ 0, & \text{para } j=N. \end{cases}$$

Usando a identificação canônica entre \mathbb{R}^2 e \mathcal{C} pode-se escrever $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) = \omega^j$, $j = 0, \dots, N-1$, e $(0, 0) = 0$.

A função potencial logarítmica (2.1) pode ser reescrita nas coordenadas Q , como

$$U = \kappa_0^2 U_1 + \kappa_0 \kappa_N U_2, \quad (2.13)$$

onde as funções U_1 e U_2 são dadas por

$$U_1 = - \sum_{0 \leq i < j < N} \log \|Q_i - Q_j\| = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \log \|Q_i - Q_{i+j}\|, \quad (2.14)$$

com o índice $(i+j)$ tomado $\text{mod } N$, e

$$U_2 = - \sum_{j=0}^{N-1} \log \|Q_j - Q_N\|, \quad (2.15)$$

onde $Q_j = (x_j, y_j)$, $j = 0, \dots, N-1$.

A matriz M é de ordem $(2N+2) \times (2N+2)$ e tem a forma

$$M = \begin{pmatrix} \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \kappa_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \kappa_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_N \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Para \tilde{Q} ser um ponto de equilíbrio de (2.3) é necessário que

$$\nu = -\frac{(N-1)}{2} \kappa_0 - \kappa_N. \quad (2.17)$$

A próxima proposição garante que \tilde{Q} é de fato um ponto de equilíbrio de (2.3).

Lema 2.2.2 *Sejam \tilde{Q} definida em (2.12) e U definida por (2.14) e (2.15).*

Então

$$\nabla U(\tilde{Q}) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_0}(\tilde{Q}), \dots, \frac{\partial U}{\partial x_N}(\tilde{Q}), \frac{\partial U}{\partial y_0}(\tilde{Q}), \dots, \frac{\partial U}{\partial y_N}(\tilde{Q}) \right)$$

onde

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} -\text{Re}(\omega^i) \left(\frac{(N-1)}{2} \kappa_0^2 + \kappa_0 \kappa_N \right), & i = 0, \dots, N-1, \\ 0, & i = N, \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} -\operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{(N-1)}{2} \kappa_0^2 + \kappa_0 \kappa_N \right), & i = 0, \dots, N-1, \\ 0, & i = N. \end{cases}$$

Demonstração. Lembremos que $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) = \omega^j$ onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

Para $i = 0, \dots, N-1$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) &= -\kappa_0 \kappa_N \frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_N)}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_N\|^2} - \kappa_0^2 \sum_{\substack{0 \leq l < N \\ l \neq i}} \frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_l)}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_l\|^2} \\ &= -\kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re} \left(\frac{\omega^i}{|\omega^i|^2} \right) - \kappa_0^2 \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{0 \leq l < N \\ l \neq i}} \frac{\omega^i - \omega^l}{|\omega^i - \omega^l|^2} \right) \\ &= -\kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re}(\omega^i) - \kappa_0^2 \operatorname{Re} \left(\omega^i \sum_{\substack{0 \leq l < N \\ l \neq i}} \frac{1 - \omega^{l-i}}{|1 - \omega^{l-i}|^2} \right) \\ &= -\kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re}(\omega^i) - \kappa_0^2 \operatorname{Re} \left(\omega^i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) &= -\kappa_0 \kappa_N \frac{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_N)}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_N\|^2} - \kappa_0^2 \sum_{\substack{0 \leq l < N \\ l \neq i}} \frac{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_l)}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_l\|^2} \\ &= -\kappa_0 \kappa_N \operatorname{Im} \left(\frac{\omega^i}{|\omega^i|^2} \right) - \kappa_0^2 \operatorname{Im} \left(\sum_{\substack{0 \leq l < N \\ l \neq i}} \frac{\omega^i - \omega^l}{|\omega^i - \omega^l|^2} \right) \\ &= -\kappa_0 \kappa_N \operatorname{Im}(\omega^i) - \kappa_0^2 \operatorname{Im} \left(\omega^i \sum_{\substack{0 \leq l < N \\ l \neq i}} \frac{1 - \omega^{l-i}}{|1 - \omega^{l-i}|^2} \right) \\ &= -\kappa_0 \kappa_N \operatorname{Im}(\omega^i) - \kappa_0^2 \operatorname{Im} \left(\omega^i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2} \right). \end{aligned}$$

Pela Proposição A.0.7

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2} = \left(\frac{N-1}{2} \right).$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) &= -\kappa_0\kappa_N \operatorname{Re}(\omega^i) - \kappa_0^2 \operatorname{Re}\left(\omega^i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2}\right) \\ &= -\kappa_0\kappa_N \operatorname{Re}(\omega^i) - \kappa_0^2 \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2}\right) \\ &= -\operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{(N-1)}{2}\kappa_0^2 + \kappa_0\kappa_N\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) &= -\kappa_0\kappa_N \operatorname{Im}(\omega^i) - \kappa_0^2 \operatorname{Im}\left(\omega^i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2}\right) \\ &= -\kappa_0\kappa_N \operatorname{Im}(\omega^i) - \kappa_0^2 \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2}\right) \\ &= -\operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{(N-1)}{2}\kappa_0^2 + \kappa_0\kappa_N\right).\end{aligned}$$

Para $i = N$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_N}(\tilde{Q}) &= -\kappa_0\kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_N - \tilde{x}_j)}{\|\tilde{Q}_N - \tilde{Q}_j\|^2} \\ &= -\kappa_0\kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(0 - \tilde{x}_j)}{\|0 - \tilde{Q}_j\|^2} \\ &= \kappa_0\kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{x}_j}{\|\tilde{Q}_j\|^2} \\ &= \kappa_0\kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{x}_j \\ &= \kappa_0\kappa_N \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega^j\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y_N}(\tilde{Q}) &= -\kappa_0\kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{y}_N - \tilde{y}_j)}{\|\tilde{Q}_N - \tilde{Q}_j\|^2} \\ &= -\kappa_0\kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(0 - \tilde{y}_j)}{\|0 - \tilde{Q}_j\|^2} \\ &= \kappa_0\kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{y}_j}{\|\tilde{Q}_j\|^2} \\ &= \kappa_0\kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{y}_j \\ &= \kappa_0\kappa_N \operatorname{Im}\left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega^j\right).\end{aligned}$$

Pela Proposição A.0.5

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^j = 0.$$

Logo

$$\frac{\partial U}{\partial x_N}(\tilde{Q}) = \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega^j \right) = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_N}(\tilde{Q}) = \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega^j \right) = 0.$$

■

Proposição 2.2.3 *Seja*

$$U = \kappa_0^2 U_1 + \kappa_0 \kappa_N U_2,$$

com U_1 e U_2 dadas por (2.14) e (2.15), e sejam M e ν dadas por (2.16) e (2.17), respectivamente.

Então \tilde{Q} definido em (2.12) é um ponto de equilíbrio de (2.3).

Demonstração. Pelo Lema 2.2.2,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} -\operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{(N-1)}{2} \kappa_0^2 + \kappa_N \kappa_0 \right), & \text{para } i = 0, \dots, N-1, \\ 0, & \text{para } i = N, \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} -\operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{(N-1)}{2} \kappa_0^2 + \kappa_0 \kappa_N \right), & \text{para } i = 0, \dots, N-1, \\ 0, & \text{para } i = N, \end{cases}$$

Substituindo os valores acima na equação $-\nu M \tilde{Q} + \nabla U(\tilde{Q}) = 0$ verificamos que \tilde{Q} definido em (2.12) é ponto de equilíbrio do sistema (2.3).

■

Note que a estabilidade espectral de \tilde{Q} quando as vorticidades são $\kappa_j = \kappa_0 \neq 0$, $j = 0, \dots, N-1$, e κ_N para o vórtice central é equivalente à estabilidade espectral de \tilde{Q} quando as vorticidades são $\bar{\kappa}_j = \bar{\kappa}_0 = 1$, $j = 0, \dots, N-1$, e $\bar{\kappa}_N = \frac{\kappa_N}{\kappa_0}$ para o vórtice central.

O mesmo ocorre com relação à estabilidade segundo Liapunov.

Assim, pode-se, sem perda de generalidade, considerar $\kappa_j = \kappa_0 = 1$, $j = 0, \dots, N-1$, e deixar apenas $\kappa_N = \kappa$ como parâmetro.

A função potencial a ser considerada fica, portanto,

$$U = U_1 + \kappa U_2 \quad (2.18)$$

e a velocidade angular fica

$$\nu = -\frac{N-1}{2} - \kappa. \quad (2.19)$$

2.3 Estabilidade para um Anel de Vórtices

Em primeiro lugar será considerado o caso de um anel de N vórtices, sem o vórtice central. Os N vórtices estão nos vértices de um polígono regular de N lados inscrito na circunferência de raio 1 (figura B.2). Como não está presente o vórtice central pode-se ignorar as coordenadas correspondentes a \tilde{Q}_N no ponto de equilíbrio e considerar o problema em \mathbb{R}^{2N} . Pode-se também considerar $\kappa = 0$ e trabalhar apenas com a função Hamiltoniana U_1 .

Para facilitar a notação, será usada uma transformação que deixa $D^2U_1(\tilde{Q})$ numa forma normal. Em notação complexa, a transformação é $Z = \mathbf{W}z$, ou

$$Q = \tilde{Q} + \mathbf{W}z, \quad (2.20)$$

com

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

A matriz \mathbf{W} é unitária, portanto define uma transformação simplética em \mathbb{R}^{2N} ; logo $\mathbf{W}^T \mathbf{J} \mathbf{W} = \mathbf{J}$.

Usando a transformação $Z = \mathbf{W}z$ na equação diferencial (2.8) e o fato de que esse problema em \mathbb{R}^{2N} , M é a matriz identidade, tem-se

$$\mathbf{W}\dot{z} = \mathbf{J}(-\nu\mathbf{I} + D^2U_1(\tilde{Q}))\mathbf{W}z,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \overline{\mathbf{W}}^T \mathbf{J}(-\nu\mathbf{I} + D^2U_1(\tilde{Q}))\mathbf{W}z \\ &= (-\nu\overline{\mathbf{W}}^T \mathbf{J} \mathbf{W} + \overline{\mathbf{W}}^T \mathbf{J} D^2U_1(\tilde{Q})\mathbf{W})z \\ &= (-\nu\mathbf{J} + \overline{\mathbf{W}}^T \mathbf{J} D^2U_1(\tilde{Q})\mathbf{W})z \\ &= (-\nu\mathbf{J} + \overline{\mathbf{W}}^T (\mathbf{W} \mathbf{J} \overline{\mathbf{W}}^T) D^2U_1(\tilde{Q})\mathbf{W})z \\ &= (-\nu\mathbf{J} + \mathbf{J} \overline{\mathbf{W}}^T D^2U_1(\tilde{Q})\mathbf{W})z. \end{aligned}$$

Logo a equação diferencial (2.8) torna-se

$$\dot{z} = (-\nu\mathbf{J} + \mathbf{J} \overline{\mathbf{W}}^T D^2U_1(\tilde{Q})\mathbf{W})z, \quad (2.22)$$

Na próxima subseção será feita a expansão da função Hamiltoniana U_1 e em seguida retomaremos a análise da estabilidade espectral para o problema do anel com N vórtices.

Observação 2.3.1 Note que $\overline{\mathbf{W}}^T D^2U_1(\tilde{Q})\mathbf{W} = D^2\tilde{U}_1(0)$ onde $\tilde{U}_1(z) = U_1(\tilde{Q} + \mathbf{W}z)$.

2.3.1 Expansão da Função Hamiltoniana U_1

O único trabalho que se tem para analisar a estabilidade da equação (2.22) é o cálculo da Hessiana da função U_1 . Efetua-se isto calculando as derivadas parciais de $U_1(\tilde{Q} + \mathbf{W}z)$ em $z = 0$. Para simplificar este trabalho utiliza-se notação complexa tanto quanto possível. Além disso, utiliza-se as funções auxiliares $f(z) = \log \phi(z)$ de uma variável complexa $z = x + iy$ e $g(x, y) = \log |\phi|$.

As derivadas parciais da função $g(x, y) = \log |\phi|$ podem ser obtidas da parte real da derivada com respeito a z da função analítica $f(z)$ já que

$$\log \phi = \log |\phi| + i \arg \phi. \quad (2.23)$$

Considerando $z_j = x_j + iy_j$ para $j = 0, 1, \dots, N-1$ e usando a transformação (2.20) tem-se:

$$Q_j = \omega^j + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{jk} z_k,$$

e assim pode-se escrever

$$\begin{aligned} Q_i - Q_{i+j} &= \omega^i - \omega^{i+j} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^{ik} - \omega^{(i+j)k}) z_k \\ &= \omega^i \left(d_j + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} d_{jk} \omega^{i(k-1)} z_k \right), \end{aligned}$$

onde

$$d_j = 1 - \omega^j.$$

Já que $\|Q_i - Q_{i+j}\| = \left\| \left(d_j + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} d_{jk} \omega^{i(k-1)} z_k \right) \right\|$, para ϕ em (2.23) usa-se

$$\phi(z) = (Q_i - Q_{i+j}) \omega^{-i} = d_j + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} d_{jk} \omega^{i(k-1)} z_k.$$

Então

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_k}(z) = \frac{d_{jk}}{\sqrt{N}} \omega^{i(k-1)}. \quad (2.24)$$

Calculando as derivadas parciais de $f = \log \phi$ encontra-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_r}(z) &= \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z_r}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_r \partial z_s}(z) &= \frac{-1}{\phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial z_r} \frac{\partial \phi}{\partial z_s}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial z_r \partial z_s \partial z_t}(z) &= \frac{2}{\phi^3} \frac{\partial \phi}{\partial z_r} \frac{\partial \phi}{\partial z_s} \frac{\partial \phi}{\partial z_t}, \end{aligned}$$

e assim por diante.

Em $z = 0$ tem-se $\phi(0) = d_j$ e as derivadas parciais ficam

$$\frac{\partial f}{\partial z_r}(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{i(r-1)} \frac{d_{jr}}{d_j},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_r \partial z_s}(0) = \frac{-1}{N} \omega^{i(r+s-2)} \frac{d_{jr} d_{js}}{d_j^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z_r \partial z_s \partial z_t}(0) = \frac{2}{N\sqrt{N}} \omega^{i(r+s+t-3)} \frac{d_{jr} d_{js} d_{jt}}{d_j^3},$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z_r \partial z_s \partial z_t \partial z_u}(0) = \frac{-6}{N^2} \omega^{i(r+s+t+u-4)} \frac{d_{jr} d_{js} d_{jt} d_{ju}}{d_j^4},$$

e assim por diante.

Obtem-se, por exemplo, a derivada parcial de segunda ordem de $g = \log |\phi|$ com respeito a x_r e x_s

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_r \partial x_s}(0, 0) = \frac{-1}{N} \operatorname{Re} \left(\omega^{i(r+s-2)} \frac{d_{jr} d_{js}}{d_j^2} \right).$$

Similarmente, encontra-se

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_r \partial x_s}(0, 0) = \frac{1}{N} \operatorname{Im} \left(\omega^{i(r+s-2)} \frac{d_{jr} d_{js}}{d_j^2} \right)$$

e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_r \partial y_s}(0, 0) = -\frac{\partial^2 g}{\partial x_r \partial x_s}(0, 0).$$

De ω^j ser a j -ésima raiz N -ésima da unidade e da Proposição A.0.5

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{j(r+s-2)} = \begin{cases} N, & \text{se } r+s = 2 \pmod{N}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

portanto

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x_r \partial x_s}(0, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{d_{jr} d_{js}}{d_j^2} \right), & \text{se } r+s = 2 \pmod{N}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{d_{jr} d_{js}}{d_j^2} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{jr})(1 - \omega^{js})}{(1 - \omega^j)^2}, \quad (2.25)$$

portanto, esta soma é zero se $r = 0$ ou se $s = 0$, enquanto nos outros casos é igual a

$$\sum_{j=1}^{N-1} (1 + \omega^j + \dots + \omega^{j(r-1)})(1 + \omega^j + \dots + \omega^{j(s-1)}). \quad (2.26)$$

Usando a Proposição A.0.5 tem-se

$$\sum_{j=1}^{N-1} \omega^{jm} = \begin{cases} N - 1, & \text{se } m = 0 \pmod{N}, \\ -1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotando por $k(r, s)$ o número de pares (ρ, σ) tal que $\rho + \sigma = 0 \pmod{N}$, com $0 \leq \rho < r$ e $0 \leq \sigma < s$, vê-se que a soma (2.26) é igual a

$$k(r, s)(N - 1) - (rs - k(r, s)) = Nk(r, s) - rs.$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(Nk(r, s) - rs), & \text{para } r + s = 2 \pmod{N}, \quad rs \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Deve-se agora calcular o valor de $k(r, s)$. A derivada segunda de U_1 com respeito a x_r e x_s é não nula apenas para os valores de r e s satisfazendo $r + s = 2 \pmod{N}$ e $rs \neq 0$, portanto calcula-se $k(r, s)$ apenas para esses valores de r e s .

Sabe-se que

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq r \leq N - 1 \\ 0 \leq s \leq N - 1 \end{array} \right\} \implies 0 \leq r + s \leq 2N - 2. \quad (2.27)$$

Devido a $r + s = 2 \pmod{N}$, usando (2.27) tem-se que existem apenas dois casos a serem considerados. O primeiro caso é $r = s = 1$ e o outro caso é $r + s = N + 2$, com $rs \neq 0$.

No caso $r = s = 1$ tem-se $k(1, 1) = 1$.

No caso $r + s = N + 2$ tem-se $k(r, s) = 2$, pois

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \rho < r \\ 0 \leq \sigma < s \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho + \sigma \leq r + s - 2 = N \\ \rho + \sigma = 0 \Rightarrow \rho = \sigma = 0, \\ \rho + \sigma = N \Rightarrow \rho = r - 1 \text{ e } \sigma = s - 1. \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial x_1^2}(0) = -\frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial y_1^2}(0) = \frac{N-1}{2}, \quad (2.28)$$

e, para $r + s = 2 + N$, $rs \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s}(0) = -\frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial y_r \partial y_s}(0) = \frac{2N - rs}{2}, \quad (2.29)$$

enquanto as derivadas parciais de segunda ordem de $\tilde{U}_1(z)$ em $z = 0$ são nulas nos outros casos.

Usando a função auxiliar $f(z) = \log \phi(z)$ pode-se encontrar as derivadas parciais de ordem superior para $\tilde{U}_1(z)$ em $z = 0$. Calculando as derivadas parciais de terceira ordem obtém-se a expressão:

$$\frac{\partial^3 \tilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t}(0) = \frac{-1}{\sqrt{N}} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{d_{jr} d_{js} d_{jt}}{d_j^3} \right),$$

e esta derivada é nula se $r + s + t \not\equiv 3 \pmod{N}$ ou se $rst = 0$. Similarmente, encontra-se

$$\frac{\partial^3 \tilde{U}_1}{\partial y_r \partial y_s \partial x_t}(0) = -\frac{\partial^3 \tilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t}(0),$$

enquanto as derivadas de terceira ordem envolvendo um ou três y 's são nulas.

Denotando por $k(r, s, t)$ o número de triplas (ρ, σ, τ) tal que $(\rho + \sigma + \tau) \equiv 0 \pmod{N}$, com $0 \leq \rho < r$, $0 \leq \sigma < s$ e $0 \leq \tau < t$, encontra-se

$$\frac{\partial^3 \tilde{U}_1}{\partial y_r \partial y_s \partial x_t}(0) = -\frac{1}{\sqrt{N}} (Nk(r, s, t) - rst).$$

Encontra-se, de forma similar, a expressão para as derivadas parciais de quarta ordem de \tilde{U}_1 em $z = 0$,

$$\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t \partial x_u}(0) = \frac{3}{N} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{d_{jr} d_{js} d_{jt} d_{ju}}{d_j^4} \right)$$

se $r + s + t + u = 4 \pmod{N}$, e

$$\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t \partial x_u}(0) = \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s \partial y_t \partial y_u}(0) = \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial y_r \partial y_s \partial y_t \partial y_u}(0) = \frac{3}{N} (Nk(r, s, t, u) - rstu)$$

se $r + s + t + u = 4 \pmod{N}$, $rstu \neq 0$. As derivadas restantes de ordem quatro são todas nulas.

Agora podemos retomar o estudo da estabilidade espectral para um anel de vórtices.

2.3.2 Estabilidade Espectral para um Anel de Vórtices

Olhando para as equações (2.28) e (2.29), e lembrando que r e s devem satisfazer $r + s = 2 \pmod{N}$ com $rs \neq 0$, pode-se representar as derivadas de segunda ordem de $\tilde{U}_1(0)$ por

$$c_r = -\frac{1}{2}(r-2)(N-r) \quad (2.30)$$

para $r = 1, 2, \dots, N-1$.

Por simetria, tem-se

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial x_s \partial x_r}(0),$$

logo $c_r = c_s$ com $r = s = 1$ ou $s = N + 2 - r$, $r = 3, \dots, N-1$.

Com isso, pode-se escrever

$$\mathbf{H} = \operatorname{Hess}(U_1(\tilde{Q})) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & -\mathbf{C} \end{pmatrix}$$

onde a matriz \mathbf{C} é dada por uma das duas formas:

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_r \partial x_s}(\tilde{Q}) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_\gamma & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se N é par, e neste caso $\gamma = \frac{N}{2} + 1$,

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_r \partial x_s}(\tilde{Q}) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_\gamma & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_\gamma & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

se N é ímpar, e neste caso $\gamma = \frac{N+1}{2}$.

Na Tabela (2.1) estão os valores de c_r de 3 a 12 vórtices. Apenas metade dos valores estão listados devido a simetria em c_r .

N	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
3	1.0	0.0					
4	1.5	0.0	-0.5				
5	2.0	0.0	-1.0				
6	2.5	0.0	-1.5	-2,0			
7	3.0	0.0	-2.0	-3,0			
8	3.5	0.0	-2.5	-4,0	-4,5		
9	4.0	0.0	-3.0	-5,0	-6,0		
10	4.5	0.0	-3,5	-6,0	-7,5	-8,0	
11	5.0	0.0	-4,0	-7,0	-9,0	-10,0	
12	5.5	0.0	-4,5	-8,0	-10,5	-12,0	-12,5

Tabela 2.1: Valores de c_r dados por (2.26) para N vórtices

A matriz (2.10) tem bloco da forma:

$$\begin{pmatrix} -\nu\mathbf{I} + \mathbf{C} & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & -\nu\mathbf{I} - \mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Devido a natureza de \mathbf{C} , o determinante de (2.31) pode ser decomposto em produto de subdeterminantes de matrizes de 2×2 e 4×4 como segue

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices 0 e N de (2.31):

$$\begin{vmatrix} -\nu & \lambda \\ -\lambda & -\nu \end{vmatrix} = \lambda^2 + \nu^2 = 0. \quad (2.32)$$

Isto gera as soluções triviais: $\lambda = \pm i\nu$.

Para as linhas e as colunas de índices 2 e $N+2$ de (2.31) obtém-se a mesma submatriz acima.

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices 1 e $N + 1$ de (2.31):

$$\begin{vmatrix} -\nu + c_1 & \lambda \\ -\lambda & -\nu - c_1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \nu^2 - c_1^2 = \lambda^2 = 0. \quad (2.33)$$

Este par de raízes nulas está relacionado ao fato de que o equilíbrio relativo são soluções circulares no sistema de coordenadas inercial e que todas soluções circulares são isoladas.

Para cada $r > 2$ temos um subdeterminante correspondente, esses subdeterminantes são os que geram as soluções não triviais.

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices r , $N - r + 2$, $N + r$ e $2N - r + 2$, para $r = 3, \dots, \gamma = \frac{N+1}{2}$ da matriz (2.31), se N é ímpar, e para $r = 3, \dots, \gamma - 1 = \frac{N}{2}$ da matriz (2.31), se N é par:

$$\begin{vmatrix} -\nu & c_r & \lambda & 0 \\ c_r & -\nu & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\nu & -c_r \\ 0 & -\lambda & -c_r & -\nu \end{vmatrix} = (\lambda^2 + \nu^2 - c_r^2)^2 = 0 \quad (2.34)$$

tem raízes duplas $\lambda = \pm\sqrt{c_r^2 - \nu^2}$.

Finalmente quando N é par, o subdeterminante seguinte deve ser considerado:

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices $\gamma = \frac{N}{2} + 1$ e $\gamma + N = \frac{3N}{2} + 1$ da matriz (2.31), se N é par:

$$\begin{vmatrix} -\nu + c_r & \lambda \\ -\lambda & -\nu - c_r \end{vmatrix} = \lambda^2 + \nu^2 - c_r^2 = 0 \quad (2.35)$$

que gera as raízes $\lambda = \pm\sqrt{c_r^2 - \nu^2}$.

Como se quer analisar a estabilidade espectral para o anel de vórtices, então pela Definição 2.2.1, precisa-se verificar se as raízes do polinômio (2.11) são puramente imaginárias. Para isso precisa-se analisar apenas se $\lambda = \pm\sqrt{c_r^2 - \nu^2}$ é puramente imaginária.

Já que

$$\nu = -\frac{N-1}{2} = -c_1$$

e

$$c_r = -\frac{1}{2}(r-2)(N-r)$$

pode-se escrever

$$c_r^2 - \nu^2 = c_r^2 - c_1^2 = \frac{\{(r-2)(N-r) + (N-1)\}\{(r-2)(N-r) - (N-1)\}}{4}. \quad (2.36)$$

Olhando-se os valores que c_r pode assumir na Tabela (2.1), pode-se construir a tabela abaixo, que leva em consideração o número de raízes com a parte real negativa, o número de raízes com a parte real positiva, o número de raízes nulas e por fim o número de raízes puramente imaginárias não nulas do polinômio (2.11).

N	Negativo	Positivo	Nula	Imaginário
3	0	0	2	4
4	0	0	2	6
5	0	0	2	8
6	0	0	2	10
7	0	0	6	8
≥ 8	$N-5$	$N-5$	2	8

Tabela 2.2: Número de raízes com a parte real negativa, número de raízes com a parte real positiva, número de raízes nulas e o número de raízes puramente imaginárias não nulas do polinômio (2.11)

Olhando a Tabela (2.2) observamos que para $N \geq 8$ o polinômio (2.11) apresenta raízes com a parte real diferente de zero e para $N \leq 7$ todas as raízes têm parte real nula, logo pela Definição 2.2.1 concluímos que no problema do anel com N vórtices para o caso $N \leq 7$, temos estabilidade espectral, enquanto que no caso $N \geq 8$ o problema não é espectralmente estável.

2.4 Estabilidade de um Anel com um Vórtice Central

Repetindo o raciocínio da seção 2.3.2, vamos ver o que ocorre, quanto à estabilidade espectral, quando se insere um vórtice no centro do anel, ou seja, quando se considera a intensidade do vórtice central $\kappa \neq 0$ (figura B.4).

Quando se inclui um vórtice central, tem-se que usar a função:

$$U = U_1 + \kappa U_2 \quad (2.37)$$

e trabalhar em \mathbb{R}^{2N+2} .

Pode-se usar os resultados anteriores, mas tem-se que acrescentar as contribuições da função potencial U_2 .

Na próxima subseção será feita a expansão da função Hamiltoniana U_2 e em seguida retoma-se a análise da estabilidade espectral e estabilidade segundo Liapunov para o problema do anel com o vórtice central.

2.4.1 Expansão da Função Hamiltoniana U_2

Como primeiro passo determina-se, para $0 \leq j \leq N-1$, o valor das derivadas parciais de $f = \log \phi$ em $z = 0$, onde

$$\phi(z) = (Q_j - Q_N)\omega^{-j} = 1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{j(k-1)} z_k - \omega^{-j} z_N.$$

Considerando a coordenada $Q_N = z_N$, as derivadas de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial z_r}(0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{j(r-1)}, & \text{para } 0 \leq r \leq N-1, \\ -\omega^{-j}, & \text{para } r = N, \end{cases}$$

e de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_r \partial z_s}(0) = \begin{cases} -\frac{1}{N}\omega^{j(r+s-2)}, & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1, \\ \frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{j(r-2)}, & \text{para } 0 \leq r \leq N-1, s = N, \\ -\omega^{-2j}, & \text{para } r = s = N. \end{cases}$$

Sabe-se que $U_2(Q) = -\sum_{j=0}^{N-1} \log \|Q_j - Q_N\|$, logo

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \begin{cases} 1, & \text{para } r + s = 2 \pmod{N}, \\ -\sqrt{N}, & \text{para } r = 2 \text{ e } s = N, \text{ ou } r = N \text{ e } s = 2, \\ 0, & \text{para os outros casos.} \end{cases}$$

Vamos retomar o estudo da estabilidade para o anel com um vórtice central.

2.4.2 Estabilidade Espectral de um Anel com um Vórtice Central

A matriz (2.10) tem novamente a forma dada em (2.31), lembrando-se que agora a matriz identidade \mathbf{I} é $(N+1) \times (N+1)$, a velocidade angular é dada por $\nu = -c_1 - \kappa$ e a matriz das intensidades, M , não é mais a matriz identidade. Assim

$$M^{-1} \text{Hess}(\tilde{U}(0)) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & -\mathbf{C} \end{pmatrix}$$

onde a matriz

$$C = M_1^{-1} \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s}(0) + \kappa \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial x_r \partial x_s}(0) \right),$$

com

$$M_1 = \begin{bmatrix} \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \kappa_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \kappa_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \kappa \end{bmatrix},$$

é dada por uma das duas formas

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \kappa & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_3 + \kappa & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_\gamma + \kappa & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se N é par, e neste caso $\gamma = \frac{N}{2} + 1$,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \kappa & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_3 + \kappa & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_\gamma + \kappa & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_\gamma + \kappa & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se N é ímpar, e neste caso $\gamma = \frac{N+1}{2}$.

Ainda pode-se decompor o determinante de (2.31) em produtos dos subdeterminantes abaixo:

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices $0, 2, N, N + 1, N + 3$ e $2N + 1$ de (2.31)

$$\begin{vmatrix} -\nu & \kappa & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \kappa & -\nu & -\kappa\sqrt{N} & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{N} & -\nu & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & -\nu & -\kappa & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -\kappa & -\nu & k\sqrt{N} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & \sqrt{N} & -\nu \end{vmatrix} = 0. \quad (2.38)$$

Pode-se representar o determinante (2.38) por

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{AB} + \lambda^2\mathbf{I}| = 0. \quad (2.39)$$

Para o determinante (2.39) encontra-se

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \nu^2 - \kappa^2 & 0 & \kappa^2\sqrt{N} \\ 0 & \lambda^2 + \nu^2 - \kappa^2 - \kappa N & 0 \\ \kappa\sqrt{N} & 0 & \lambda^2 + \nu^2 - \kappa N \end{vmatrix} = (\lambda^2 + \nu^2)(\lambda^2 + \nu^2 - \kappa^2 - \kappa N)^2 = 0.$$

O primeiro fator gera as soluções triviais $\lambda = \pm i\nu$ e o segundo fator, as raízes,

$$\lambda = \pm\sqrt{\kappa - (N - 1)^2/4}. \quad (2.40)$$

Portanto, para λ ser puramente imaginário em (2.40), é necessário e suficiente que

$$\kappa < \left(\frac{N - 1}{2}\right)^2. \quad (2.41)$$

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices 1 e $N + 2$ de (2.31)

$$\begin{vmatrix} -2\nu & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0.$$

Para cada índice r com $r > 2$ tem-se um subdeterminante associado a esse r .

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices $r, N-r+2, N+r+1$ e $2N-r+3$ de (2.31), para $r = 3, \dots, \gamma = \frac{N+1}{2}$ se N é ímpar, e para $r = 3, \dots, \gamma-1 = \frac{N}{2}$ se N é par,

$$\begin{vmatrix} c_1 + \kappa & c_r + \kappa & \lambda & 0 \\ c_r + \kappa & c_1 + \kappa & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & c_1 + \kappa & -c_r - \kappa \\ 0 & -\lambda & -c_r - \kappa & c_1 + \kappa \end{vmatrix}. \quad (2.42)$$

Para calcular o determinante acima utiliza-se uma transformação simplética adicional, a rotação descrita abaixo:

$$\begin{pmatrix} x_r \\ x_s \end{pmatrix} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ x_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_r \\ y_s \end{pmatrix} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_r \\ y_s \end{pmatrix}.$$

Após a transformação acima, pode-se reescrever a matriz (2.42) obtendo

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_r & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & c_1 + c_r + 2\kappa & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & c_1 + c_r + 2\kappa & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & c_1 - c_r \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Calculando o determinante da matriz (2.43), obtem-se as raízes duplas

$$\lambda = \pm \sqrt{(c_r - c_1)(2\kappa + c_r + c_1)}. \quad (2.44)$$

Portanto λ é puramente imaginário em (2.44) se e só se

$$\kappa > -\frac{(c_r + c_1)}{2}. \quad (2.45)$$

Finalmente, quando N é par deve-se considerar o subdeterminante abaixo:

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices $\gamma = \frac{N}{2} + 1$ e $\gamma = \frac{3N}{2} + 1$ de (2.31), se N é par:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_r + 2\kappa & \lambda \\ -\lambda & c_1 - c_r \end{vmatrix} = (c_1 + c_r + 2\kappa)(c_1 - c_r) + \lambda^2 = 0,$$

para o determinante acima obtém-se os mesmos valores de λ que em (2.44), exceto que eles agora são simples.

A mudança da estabilidade ocorre para os valores de κ dados em (2.41) e (2.45). Esses valores de κ não dependem apenas de r , mas também de N . Com N fixado, denotando-se os valores de κ abaixo:

$$\kappa(r, N) = \begin{cases} -\frac{c_r + c_1}{2}, & \text{para } 2 < r \leq [(N+2)/2], \\ \left(\frac{N-1}{2}\right)^2, & \text{para } r = 2, \end{cases} \quad (2.46)$$

e colocando esses valores de κ em ordem crescente obtém-se

$$-0.5 = \kappa(3, N) < \kappa(4, N) < \dots < \kappa\left(\left[\frac{N+2}{2}\right], N\right) < \kappa(2, N) = \frac{(N-1)^2}{4}. \quad (2.47)$$

Fixado N , para ter estabilidade espectral é necessário que todas as raízes λ de (2.31), sejam puramente imaginárias. Logo, observando a sequência dos valores de κ em (2.47) conclui-se que para a configuração de $N+1$ vórtices, a estabilidade espectral ocorre apenas para os valores da intensidade do vórtice central no intervalo

$$\kappa\left(\left[\frac{N+2}{2}\right], N\right) < \kappa < \kappa(2, N). \quad (2.48)$$

Na próxima subseção estudaremos a estabilidade segundo Liapunov para o problema de $N+1$ vórtices.

2.4.3 Estabilidade segundo Liapunov para um Anel com um Vórtice Central

Vamos estudar estabilidade segundo Liapunov apenas para os valores de κ satisfazendo (2.48), pois para os valores de κ onde não temos estabilidade espectral também não temos estabilidade segundo Liapunov.

Definição 2.4.1 (*Critério de Sylvester*) *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matriz $n \times n$ real simétrica.

$$A \text{ é definida positiva} \Leftrightarrow a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Teorema 2.4.2 *O equilíbrio \tilde{Q} dado por (2.12) no problema de $N + 1$ vórtices com o vórtice central de intensidade κ é estável segundo Liapunov se:*

$$\begin{cases} \kappa([\frac{N+2}{2}], N) < \kappa < \kappa(2, N), & \text{para } N > 6, \\ 0 < \kappa < \kappa(2, N) & \text{para } 2 \leq N \leq 6. \end{cases} \quad (2.49)$$

ou seja, se

$$\begin{cases} 0 < (N^2 - 8N + 8)/16 < \kappa < (N - 1)^2/4, & \text{para } N \text{ par com } N > 6, \\ 0 < (N^2 - 8N + 7)/16 < \kappa < (N - 1)^2/4, & \text{para } N \text{ ímpar com } N > 6, \\ \kappa([\frac{N+2}{2}], N) < 0 < \kappa < (N - 1)^2/4, & \text{para } 2 \leq N \leq 6. \end{cases}$$

Demonstração. Vamos mostrar que para os valores de κ pertencentes ao intervalo (2.49), a parte quadrática da função Hamiltoniana (2.1) é definida positiva e serve como função de Liapunov para o sistema em questão.

Seja

$$M\dot{q} = \mathbf{J}\nabla U(q)$$

o sistema que representa o movimento dos vórtices. Após algumas transformações, obtem-se o sistema

$$M\dot{Z} = \mathbf{J}\nabla V(Z)$$

onde

$$V(Z) = -\frac{\nu}{2}(\tilde{Q} + Z)^T M(\tilde{Q} + Z) + U(\tilde{Q} + Z).$$

Aplicando a transformação simplética $Z = \mathbf{W}z$ na equação diferencial acima obtém-se o sistema

$$M\dot{z} = (-\nu\mathbf{J} + \mathbf{J}\overline{\mathbf{W}}^T D^2U_1(\tilde{Q})\mathbf{W})z.$$

Finalmente aplicando a transformação

$$\begin{pmatrix} x_r \\ x_s \end{pmatrix} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ x_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_r \\ y_s \end{pmatrix} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_r \\ y_s \end{pmatrix}.$$

obtem-se o sistema abaixo

$$M\dot{z} = \mathbf{J}\nabla H(z)$$

com $z \in \mathbb{R}^{2(N+1)}$, que representa o movimento próximo ao equilíbrio $\tilde{z} = 0$.

Pela Definição 1.1.9, para a função Hamiltoniana $H(z)$ ser função de Liapunov, deve satisfazer as seguintes condições:

1. $\tilde{z} = 0$ é ponto de mínimo local estrito de $H(z)$,
2. $\dot{H} \leq 0$.

Pela Proposição 1.2.2 a segunda condição é satisfeita. Resta mostrar que z_0 é ponto de mínimo local estrito de H .

Para mostrar que \tilde{z} é ponto de mínimo local estrito é suficiente mostrar que a parte quadrática de H , em \tilde{z} , é definida positiva.

Seja

$$H_2(z) = \frac{1}{2} (x^t \mathbf{A}x + y^t \mathbf{B}y),$$

a parte quadrática da função Hamiltoniana $H(z)$ em \tilde{z} .

O problema agora é analisar se as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são definidas positivas.

Reescrevendo a parte quadrática da função H obtemos

$$\begin{aligned}
H_2(z) = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_0 & x_2 & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 + \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & c_1 + \kappa & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & -\kappa\sqrt{N} & (c_1 + \kappa)\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix} + (c_1 + \kappa)x_1^2 \\
& + \frac{c_1 + c_3 + 2\kappa}{2}x_3^2 + \frac{c_1 + c_4 + 2\kappa}{2}x_4^2 + \dots + \frac{c_1 - c_4}{2}x_{N-2}^2 + \frac{c_1 - c_3}{2}x_{N-1}^2 \\
& + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_0 & y_2 & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 + \kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & c_1 + \kappa & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & \kappa\sqrt{N} & (c_1 + \kappa)\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_2 \\ y_N \end{bmatrix} \\
& + \frac{c_1 - c_3}{2}y_3^2 + \frac{c_1 - c_4}{2}y_4^2 + \dots + \frac{c_1 + c_4 + 2\kappa}{2}y_{N-2}^2 + \frac{c_1 + c_3 + 2\kappa}{2}y_{N-1}^2
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que para κ pertencendo ao intervalo (2.49), todos os coeficientes dos monômios quadráticos que não envolvem $x_0, x_2, x_N, y_0, y_2, y_N$ são positivos.

Coefficiente do x_1^2

Com κ pertencendo ao intervalo (2.49) temos

$$c_1 + \kappa > c_1 = \frac{N-1}{2} > 0. \quad (2.50)$$

Coefficientes do x_r^2 , com $2 < r \leq [\frac{N+2}{2}]$ e y_r^2 , com $[\frac{N+2}{2}] \leq r < N$

$$\frac{c_1 + c_r + 2\kappa}{2} = \frac{c_1 + c_r}{2} + \kappa > \frac{c_1 + c_r}{2} - \frac{c_1 + c_r}{2} = 0. \quad (2.51)$$

Coefficientes do x_r^2 , com $[\frac{N+2}{2}] < r < N$ e y_r^2 , com $2 < r < [\frac{N+2}{2}]$

$$\frac{c_1 - c_r}{2} = \frac{N-1}{4} - \left(-\frac{(N-r)(r-2)}{4} \right) = \frac{N-1}{4} + \left(\frac{(N-r)(r-2)}{4} \right) > 0. \quad (2.52)$$

Resta mostrar que as matrizes

$$A_3 = \begin{pmatrix} c_1 + \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & c_1 + \kappa & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & -\kappa\sqrt{N} & (c_1 + \kappa)\kappa \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} c_1 + \kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & c_1 + \kappa & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & \kappa\sqrt{N} & (c_1 + \kappa)\kappa \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

são definidas positivas.

Vamos aplicar o critério de Sylvester para mostrar que (2.53) e (2.54) são definidas positivas.

Sejam

$$A_1 = B_1 = (c_1 + \kappa),$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_1 + \kappa & \kappa \\ \kappa & c_1 + \kappa \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} c_1 + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & c_1 + \kappa \end{pmatrix}.$$

Por (2.50),

$$\det(A_1) = \det(B_1) = c_1 + \kappa > 0.$$

Calculando os determinantes $\det(A_2)$ e $\det(B_2)$ obtemos

$$\begin{aligned} \det(A_2) = \det(B_2) &= (c_1 + \kappa)^2 - \kappa^2 \\ &= c_1^2 + 2c_1\kappa > c_1^2 + 2c_1 = \\ &= \frac{(N-1)^2}{4} + (N-1) > 0. \end{aligned}$$

Calculando os determinantes para as matrizes A_3 e B_3 e usando (2.49) e (2.50) temos

$$\begin{aligned} \det(A_3) = \det(B_3) &= (c_1 + \kappa)^3\kappa - (c_1 + \kappa)\kappa^2N - (c_1 + \kappa)\kappa^3 \\ &= (c_1 + \kappa)\kappa((c_1 + \kappa)^2 - \kappa N - \kappa^2) \\ &= (c_1 + \kappa)\kappa(c_1^2 + 2c_1\kappa - \kappa N) = \\ &= (c_1 + \kappa)\kappa(c_1^2 + \kappa(2c_1 - N)) = \\ &= (c_1 + \kappa)\kappa(c_1^2 - \kappa) > (c_1 + \kappa)\kappa\left(\frac{(N-1)^2}{4} - \frac{(N-1)^2}{4}\right) = 0. \end{aligned}$$

Já que as matrizes (2.53) e (2.54) são definidas positivas, e conseqüentemente a função $H(z)$ serve como função de Liapunov para o equilíbrio $\tilde{z} = 0$ de $M\dot{z} = \mathbf{J}\nabla H(z)$, e pela Proposição 1.2.3, temos estabilidade segundo Liapunov para o equilíbrio estudado.



Capítulo 3

Estabilidade do Equilíbrio Relativo no Problema de $2N$ Vórtices

Este capítulo contém nossa principal contribuição, o estudo de outros equilíbrios estacionários no problema dos vórtices.

Estudaremos o movimento de $2N$ vórtices no plano, metade deles de intensidade κ_0 e a outra metade de intensidade κ_1 . Vamos repetir os estudos feitos no Capítulo 2 quanto estabilidade espectral, agora para a configuração especial em que os vórtices são dispostos em dois anéis concêntricos.

3.1 Duplo Anel de Vórtices

Consideraremos aqui a configuração especial em que N vórtices de intensidade κ_0 estão nos vértices de um polígono regular de N lados circunscrito por uma circunferência de raio 1, e outros N vórtices de intensidade κ_1 estão nos vértices de outro polígono regular de N lados circunscrito por uma circunferência de raio $\epsilon > 0$, sendo ambas as circunferências concêntricas, e de forma que um polígono seja uma imagem homotética do outro seguida

de uma rotação de $\frac{\pi}{N}$. Chamaremos esta configuração de duplo anel de vórtices.

Estamos interessados em descobrir para quais valores de $\epsilon > 0$ essa configuração especial torna-se ponto de equilíbrio num referencial em rotação uniforme, e em alguns exemplos, estudar a estabilidade espectral desses movimentos estacionários.

Usaremos $Q_0 = (x_0, y_0), \dots, Q_{2N-1} = (x_{2N-1}, y_{2N-1})$ para indicar as posições dos $2N$ vórtices num sistema de coordenadas em rotação com velocidade angular ν , e suporemos que o vórtice Q_j tem intensidade κ_0 ou κ_1 , conforme j seja par ou ímpar respectivamente.

A função potencial do sistema fica:

$$U = \kappa_0^2 U_1 + \kappa_1^2 U_2 + \kappa_0 \kappa_1 U_3, \quad (3.1)$$

onde

$$U_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \log \|Q_{2i} - Q_{2(i+j)}\|, \quad (3.2)$$

$$U_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \log \|Q_{2i+1} - Q_{2(i+j)+1}\|, \quad (3.3)$$

$$U_3 = -\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \log \|Q_{2i} - Q_{2(i+j)+1}\|, \quad (3.4)$$

com os índices $2i, 2(i+j), 2i+1, 2(i+j)+1$ tomados $\text{mod } 2N$.

Como no Capítulo 2, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\kappa_0 = 1$ e $\kappa_1 = \kappa$, com $\kappa \neq 0$, pois $\kappa = 0$ recai no problema dos N vórtices.

A função potencial torna-se então

$$U = U_1 + \kappa^2 U_2 + \kappa U_3, \quad (3.5)$$

e a matriz $2N \times 2N$ das intensidades, M , é dada por:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix},$$

onde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

A equação que descreve o movimento dos $2N$ vórtices na coordenada Q , como foi visto em (2.3), é

$$M\dot{Q} = \mathbf{J}(-\nu MQ + \nabla U(Q)). \quad (3.7)$$

3.2 Equilíbrio do Duplo Anel de Vórtices

Queremos mostrar que a configuração $\tilde{Q} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{2N-1}, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{2N-1})$ definida abaixo é um ponto de equilíbrio para o sistema (3.7) para convenientes valores das intensidades.

Sejam $\omega^j = e^{\frac{2\pi i}{2N}j}$ a j -ésima raiz $2N$ -ésima da unidade, $\epsilon > 0$ e

$$\kappa_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ é par,} \\ \kappa, & \text{se } j \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Tomemos a configuração especial $\tilde{Q}_j = (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ definida por

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} \operatorname{Re}(\omega^j), & \text{se } j \text{ é par,} \\ \epsilon \operatorname{Re}(\omega^j), & \text{se } j \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.9)$$

e

$$\tilde{y}_j = \begin{cases} \operatorname{Im}(\omega^j), & \text{para } j \text{ par,} \\ \epsilon \operatorname{Im}(\omega^j), & \text{para } j \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Usando a identificação canônica entre \mathcal{C} e \mathbb{R}^2 podemos escrever

$$\tilde{Q}_j = \begin{cases} \omega^j, & \text{se } j \text{ é par,} \\ \epsilon\omega^j, & \text{se } j \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (3.11)$$

Pela Observação 1.1.2, para que o ponto $\tilde{Q} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{2N-1}, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{2N-1})$ seja um equilíbrio de (3.7) (o que corresponde a um equilíbrio relativo do sistema original quando analisado no referencial em rotação, com velocidade angular ν) é necessário e suficiente que

$$-\nu M\tilde{Q} + \nabla U(\tilde{Q}) = 0.$$

Sabemos que uma condição necessária para que isso ocorra, no caso em que $\tilde{Q}^t M\tilde{Q} \neq 0$, é que

$$\nu = \frac{\tilde{Q}^t \nabla U(\tilde{Q})}{\tilde{Q}^t M\tilde{Q}}. \quad (3.12)$$

Simplificando a expressão de ν como em (2.6) temos

$$\nu = \frac{-\sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j}{2I(\tilde{Q})}. \quad (3.13)$$

Observação 3.2.1 *Em tudo que segue neste capítulo, consideraremos $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$, $\epsilon > 0$, \tilde{Q} dada em (3.11), U dada em (3.5) e M dada em (3.6).*

Proposição 3.2.2 *Nas condições anteriores, suponha que $\kappa \neq -\frac{1}{2}$. Se \tilde{Q} é um equilíbrio no referencial em rotação com velocidade angular ν , então*

$$\nu = -\frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)}. \quad (3.14)$$

Demonstração. O momento de inércia

$$I(\tilde{Q}) = \frac{1}{2} \tilde{Q}^T M \tilde{Q} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2N-1} \kappa_j (\tilde{x}_j^2 + \tilde{y}_j^2),$$

para a configuração definida em (3.11) resulta

$$I(\tilde{Q}) = \frac{N(1 + \kappa\epsilon^2)}{2} \neq 0.$$

Por outro lado, com κ_j dado por (3.8) temos pela Proposição A.0.18

$$\sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j = \frac{N}{2} (\kappa^2 (N-1) + (N-1) + 2\kappa N).$$

Logo substituindo na expressão de ν dada em (3.13) temos

$$\nu = -\frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)}.$$

■

Lema 3.2.3 *Nas condições da Observação 3.2.1, seja ν dada em (3.14), com $0 \neq \kappa \neq -\frac{1}{\epsilon^2}$. Então \tilde{Q} é ponto de equilíbrio do sistema (3.7) se e só se*

$$\begin{cases} \frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)} - \frac{N-1}{2} - \frac{\kappa N}{1 + \epsilon^N} = 0, & (I) \\ -\frac{\kappa(N-1)}{2\epsilon} - \frac{\epsilon(N-1)N}{1 + \epsilon^N} + \frac{\epsilon(N-1)}{2} + \frac{\kappa\epsilon N}{1 + \epsilon^N} = 0. & (IV) \end{cases} \quad (3.15)$$

Demonstração. Usando $\nabla U(\tilde{Q})$ dado pela Proposição A.0.17, podemos escrever

\tilde{Q} é ponto de equilíbrio de (3.7) se e só se

$$-\nu M\tilde{Q} + \nabla U(\tilde{Q}) = 0$$

se e só se

$$\begin{cases} -\nu \tilde{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = \frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)} \operatorname{Re}(\omega^i) - \operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N-1}{2} - \kappa \operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N}{1 + \epsilon^N} \\ = \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)} - \frac{N-1}{2} - \kappa \frac{N}{1 + \epsilon^N} \right) = 0, \\ -\nu \tilde{y}_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) = \frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)} \operatorname{Im}(\omega^i) - \operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N-1}{2} - \kappa \operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N}{1 + \epsilon^N} \\ = \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)} - \frac{N-1}{2} - \kappa \frac{N}{1 + \epsilon^N} \right) = 0, \end{cases}$$

se i é par, e $0 \leq i \leq 2N-1$,

$$\begin{cases} -\nu \kappa \tilde{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = \frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)} \kappa \epsilon \operatorname{Re}(\omega^i) - \kappa^2 \operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N-1}{2\epsilon} - \kappa \operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N\epsilon(N-1)}{1 + \epsilon^N} \\ = \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)} \kappa \epsilon - \kappa^2 \frac{N-1}{2\epsilon} - \kappa \frac{N\epsilon(N-1)}{1 + \epsilon^N} \right) = 0, \\ -\nu \kappa \tilde{y}_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) = \frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)} \kappa \epsilon \operatorname{Im}(\omega^i) - \kappa^2 \operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N-1}{2\epsilon} - \kappa \operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N\epsilon(N-1)}{1 + \epsilon^N} \\ = \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{2N\kappa + (N-1) + \kappa^2(N-1)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)} \kappa \epsilon - \kappa^2 \frac{N-1}{2\epsilon} - \kappa \frac{N\epsilon(N-1)}{1 + \epsilon^N} \right) = 0, \end{cases}$$

se i é ímpar, e $0 \leq i \leq 2N - 1$,

se e só se

$$\begin{cases} \frac{2N\kappa+(N-1)+\kappa^2(N-1)}{2(1+\epsilon^2\kappa)} - \frac{N-1}{2} - \frac{\kappa N}{1+\epsilon^N} = 0, & (I) \\ \frac{2N\kappa+(N-1)+\kappa^2(N-1)}{2(1+\epsilon^2\kappa)}\kappa\epsilon - \kappa^2\frac{N-1}{2\epsilon} - \kappa\frac{N\epsilon^{(N-1)}}{1+\epsilon^N} = 0. & (II) \end{cases}$$

Subtraindo-se da equação (II) a equação (I) multiplicada por $\kappa\epsilon$ obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} \frac{2N\kappa+(N-1)+\kappa^2(N-1)}{2(1+\epsilon^2\kappa)} - \frac{N-1}{2} - \frac{\kappa N}{1+\epsilon^N} = 0, & (I) \\ -\frac{\kappa^2(N-1)}{2\epsilon} - \frac{\kappa\epsilon^{(N-1)}N}{1+\epsilon^N} + \frac{\kappa\epsilon(N-1)}{2} + \frac{\kappa^2\epsilon N}{1+\epsilon^N} = 0. & (III) \end{cases}$$

Como $\kappa \neq 0$, podemos por em evidência κ em (III) e obter o sistema equivalente

$$\begin{cases} \frac{2N\kappa+(N-1)+\kappa^2(N-1)}{2(1+\epsilon^2\kappa)} - \frac{N-1}{2} - \frac{\kappa N}{1+\epsilon^N} = 0, & (I) \\ -\frac{\kappa(N-1)}{2\epsilon} - \frac{\epsilon^{(N-1)}N}{1+\epsilon^N} + \frac{\epsilon(N-1)}{2} + \frac{\kappa\epsilon N}{1+\epsilon^N} = 0. & (IV) \end{cases}$$

■

Proposição 3.2.4 *Nas condições da Observação 3.2.1, com $0 \neq \kappa \neq -\frac{1}{\epsilon^2}$, seja ν dado por (3.14).*

Então \tilde{Q} é ponto de equilíbrio de (3.7) se e só se

$$(N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^2 \neq 0$$

e

$$\kappa = \frac{\epsilon^2(-2N\epsilon^{(N-2)} + (N-1)(1+\epsilon^N))}{(N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^2}, \quad (3.16)$$

ou então

$$(N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^2 = 0$$

e

$$-2N\epsilon^{(N-2)} + (N-1)(1+\epsilon^N) = 0.$$

O segundo caso ocorre se e só se

$$N = 4 \quad e \quad \epsilon = \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}},$$

e nesse caso κ é arbitrário, $0 \neq \kappa \neq -\frac{1}{\epsilon^2}$.

Demonstração. Pelo Lema 3.2.3, \tilde{Q} é ponto de equilíbrio de (3.7) se e só se

$$\begin{cases} \frac{2N\kappa+(N-1)+\kappa^2(N-1)}{2(1+\epsilon^2\kappa)} - \frac{N-1}{2} - \frac{\kappa N}{1+\epsilon^N} = 0, & (I) \\ -\frac{\kappa(N-1)}{2\epsilon} - \frac{\epsilon^{(N-1)}N}{1+\epsilon^N} + \frac{\epsilon(N-1)}{2} + \frac{\kappa\epsilon N}{1+\epsilon^N} = 0. & (IV) \end{cases}$$

Nas hipóteses, tanto (I) quanto (IV) são equivalentes a

$$\kappa((N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^2) + \epsilon^2((N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^{(N-2)}) = 0.$$

No caso em que $(N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^2 \neq 0$ segue que

$$(I) \text{ e } (IV) \Leftrightarrow \kappa = \frac{\epsilon^2((N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^{(N-2)})}{(N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^2}.$$

No caso em que $(N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^2 = 0$ segue que

$$(I) \text{ e } (IV) \Leftrightarrow \begin{cases} (N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^2 = 0, \\ (N-1)(1+\epsilon^N) - 2N\epsilon^{(N-2)} = 0, \\ \kappa \text{ arbitrário.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = 4, \\ \epsilon = \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}}, \\ \kappa \text{ arbitrário.} \end{cases}$$

■

3.3 Estabilidade para o Duplo Anel de Vórtices

Antes de estudarmos a estabilidade espectral para o problema do duplo anel de vórtices, faremos a expansão da função Hamiltoniana U definida em (3.5).

3.3.1 Expansão da Função Hamiltoniana U .

Para calcular a matriz Hessiana de U vamos usar a mesma idéia da seção 2.3.1.

Usaremos a transformação (2.16), $Q = \tilde{Q} + \mathbf{W}z$, lembrando-se que agora estamos trabalhando com $2N$ vórtices, e desta forma a matriz \mathbf{W} , da transformação, torna-se

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{(2N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{(2N-1)} & \dots & \omega^{(2N-1)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Vamos utilizar, como no capítulo anterior, para auxiliar o cálculo das derivadas de U , a função auxiliar $f(z) = \log \phi(z)$ para convenientes funções analíticas ϕ , e obter as derivadas da função $g(x, y) = \log |\phi|$ a partir da parte real da derivada, com respeito a z da função analítica $f(z)$.

Usando a transformação (3.17) temos, para $j = 0, 1, \dots, 2N - 1$,

$$Q_j = \tilde{Q}_j + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{jk} z_k = \begin{cases} \omega^j + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{jk} z_k, & \text{se } j \text{ é par,} \\ \epsilon \omega^j + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{jk} z_k, & \text{se } j \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Da seção 3.1 temos que $U = U_1 + \kappa^2 U_2 + \kappa U_3$, logo para calcular as derivadas parciais de U vamos calcular as derivadas parciais de U_1 , U_2 e U_3 separadamente.

Derivadas parciais de U_1

A função U_1 é dada por:

$$U_1(Q) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \log \|Q_{2i} - Q_{2(i+j)}\|.$$

Para facilitar as contas, vamos calcular as derivadas de $\tilde{U}_1(z) = U_1(\tilde{Q} + Wz)$ em $z = 0$.

Por (3.18) temos

$$\begin{aligned}
Q_{2i} - Q_{2(i+j)} &= \omega^{2i} + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2ik} z_k - \omega^{2(i+j)} - \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2(i+j)k} z_k \\
&= (\omega^{2i} - \omega^{2(i+j)}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} (\omega^{2ik} - \omega^{2(i+j)k}) z_k \\
&= \omega^{2i} \left((1 - \omega^{2j}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2i(k-1)} (1 - \omega^{2jk}) z_k \right).
\end{aligned}$$

Já que

$$\|Q_{2i} - Q_{2(i+j)}\| = \left\| (1 - \omega^{2j}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2i(k-1)} (1 - \omega^{2jk}) z_k \right\|,$$

usaremos,

$$\begin{aligned}
\phi_{ij}(z) &= \left((1 - \omega^{2j}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2i(k-1)} (1 - \omega^{2jk}) z_k \right), \\
f_{ij}(z) &= \log \phi_{ij}(z),
\end{aligned}$$

e

$$g_{ij}(x, y) = \log |\phi_{ij}(z)| = \operatorname{Re}(f_{ij}(z)).$$

$$\text{Assim, } \widetilde{U}_1(z) = U_1(\widetilde{Q} + Wz) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \log |\phi_{ij}| \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s} \right) (0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial y_r \partial x_s}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial x_s} \right) (0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial y_r \partial y_s}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial y_s} \right) (0, 0).$$

Então

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial z_k} = \frac{(1 - \omega^{2jk})}{\sqrt{2N}} \omega^{2i(k-1)}. \quad (3.19)$$

Para $z = 0$ temos $\phi_{ij}(0) = (1 - \omega^{2j})$ e a derivada parcial de segunda ordem de f_{ij} é desta forma

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_r \partial z_s}(0) = \frac{-1}{2N} \omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2}. \quad (3.20)$$

Substituindo o valor encontrado em (3.20) nas derivadas parciais de g_{ij} , obtemos

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}(0, 0) = \frac{-1}{2N} \operatorname{Re} \left(\omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial x_s}(0, 0) = \frac{1}{2N} \operatorname{Im} \left(\omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right), \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial y_s}(0, 0) = \frac{1}{2N} \operatorname{Re} \left(\omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right). \quad (3.23)$$

Pela Proposição A.0.5

$$\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{2i(r+s-2)} = \begin{cases} N, & \text{para } (r+s) = 2 \pmod{N}, \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s}(0) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}(0, 0) \\ &= \frac{1}{4N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right) \\ &= \frac{1}{4N} \operatorname{Re} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right) \\ &= \frac{1}{4N} \operatorname{Re} \left(\left(\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{2i(r+s-2)} \right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \begin{cases} \frac{1}{4N} \operatorname{Re} \left(N \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right) = \\ \quad = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right) & \text{para } (r+s) = 2 \pmod{N}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora usando a Proposição A.0.13 temos que,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } r=0 \text{ ou } s=0, \\ Nk(r, s) - rs, & \text{nos outros casos,} \end{cases}$$

com

$$k(r, s) = \# \left\{ (\rho, \sigma) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leq \rho < r, 0 \leq \sigma < s, \rho + \sigma = 0 \pmod{N} \right\} \quad (3.24)$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \begin{cases} \frac{1}{4} (Nk(r, s) - rs), & \text{para } (r + s) = 2 \pmod{N} \text{ e } rs \neq 0, \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial y_r \partial y_s}(0) = \begin{cases} -\frac{1}{4} (Nk(r, s) - rs), & \text{para } (r + s) = 2 \pmod{N} \text{ e } rs \neq 0, \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial y_r \partial x_s}(0) = 0 \quad \forall r, s.$$

Derivadas Parciais de U_2

A função U_2 é dada por:

$$U_2(Q) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \log \|Q_{2i+1} - Q_{2(i+j)+1}\|.$$

Por (3.18) temos

$$\begin{aligned} Q_{2i+1} - Q_{2(i+j)+1} &= \epsilon \omega^{2i+1} + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{(2i+1)k} z_k - \epsilon \omega^{2(i+j)+1} - \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{(2(i+j)+1)k} z_k \\ &= \epsilon \omega^{2i+1} (1 - \omega^{2j}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{(2i+1)k} (1 - \omega^{2jk}) z_k \\ &= \omega^{2i+1} \left(\epsilon (1 - \omega^{2j}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{(2i+1)(k-1)} (1 - \omega^{2jk}) z_k \right). \end{aligned}$$

Temos que

$$\|Q_{2i+1} - Q_{2(i+j)+1}\| = \left\| \epsilon(1 - \omega^{2j}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{(2i+1)(k-1)}(1 - \omega^{2jk})z_k \right\|,$$

logo utilizaremos

$$\phi_{ij} = \left(\epsilon(1 - \omega^{2j}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{(2i+1)(k-1)}(1 - \omega^{2jk})z_k \right),$$

$$f_{ij}(z) = \log \phi_{ij}(z),$$

e

$$g_{ij}(x, y) = \log |\phi_{ij}(z)| = \operatorname{Re}(f_{ij}(z)).$$

$$\text{Assim, } \widetilde{U}_2(z) = U_2(\widetilde{Q} + Wz) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \log |\phi_{ij}| \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_2}{\partial x_r \partial x_s}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s} \right) (0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_2}{\partial y_r \partial x_s}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial x_s} \right) (0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_2}{\partial y_r \partial y_s}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial y_s} \right) (0, 0).$$

Então

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial z_k} = \frac{\omega^{(2i+1)(k-1)}(1 - \omega^{2jk})}{\sqrt{2N}}. \quad (3.25)$$

Para $z = 0$ temos $\phi_{ij}(0) = \epsilon(1 - \omega^{2j})$ e a derivada parcial de segunda ordem, em relação a z , de f_{ij} é desta forma

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_r \partial z_s}(0) = \frac{-1}{2N\epsilon^2} \omega^{(2i+1)(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2}.$$

As derivadas parciais de segunda ordem de $g_{ij} = \log |\phi_{ij}|$ são dadas por

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}(0, 0) = \frac{-1}{2N\epsilon^2} \operatorname{Re} \left(\omega^{(2i+1)(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial x_s}(0,0) = \frac{1}{2N\epsilon^2} \operatorname{Im} \left(\omega^{(2i+1)(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial y_s}(0,0) = -\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}(0,0).$$

Pela Proposição A.0.14,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{(2i+1)(r+s-2)} = \begin{cases} N\omega^{(r+s-2)}, & \text{para } (r+s) = 2 \pmod{N}, \\ 0, & \text{outro caso,} \end{cases}$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widetilde{U}_2}{\partial x_r \partial x_s}(0) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}(0,0) \\ &= \frac{1}{4N\epsilon^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\omega^{(2i+1)(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right) \\ &= \frac{1}{4N\epsilon^2} \operatorname{Re} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \omega^{(2i+1)(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right) \\ &= \frac{1}{4N\epsilon^2} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{N-1} N\omega^{(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\epsilon^2} \operatorname{Re} \left(\omega^{(r+s-2)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} \right) \end{aligned}$$

para $(r+s) = 2 \pmod{N}$,

e $\frac{\partial^2 \widetilde{U}_2}{\partial x_r \partial x_s}(0) = 0$ para $(r+s) \neq 2 \pmod{N}$.

Usando a Proposição A.0.13, temos

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_2}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \begin{cases} \frac{1}{4\epsilon^2} \operatorname{Re} (\omega^{(r+s-2)}) (Nk(r,s) - rs), & \text{para } (r+s) = 2 \pmod{N}, rs \neq 0, \\ 0, & \text{nos outros casos,} \end{cases}$$

e analogamente,

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_2}{\partial y_r \partial y_s}(0) = \begin{cases} -\frac{1}{4\epsilon^2} \operatorname{Re} (\omega^{(r+s-2)}) (Nk(r,s) - rs), & \text{para } (r+s) = 2 \pmod{N}, rs \neq 0, \\ 0, & \text{nos outros casos,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_2}{\partial y_r \partial x_s}(0) = 0, \quad \forall r, s,$$

onde $k(r,s)$ é dado por (3.24).

Derivadas Parciais de U_3

A função U_3 é dada por:

$$U_3(Q) = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \log \|Q_{2i} - Q_{2(i+j)+1}\|.$$

Usando (3.16), podemos escrever

$$\begin{aligned} Q_{2i} - Q_{2(i+j)+1} &= \omega^{2i} + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2ik} z_k - \epsilon \omega^{2(i+j)+1} - \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{(2(i+j)+1)k} z_k \\ &= \omega^{2i} (1 - \epsilon \omega^{2j+1}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2ik} (1 - \omega^{(2j+1)k}) z_k \\ &= \omega^{2i} \left((1 - \epsilon \omega^{2j+1}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2i(k-1)} (1 - \omega^{(2j+1)k}) z_k \right). \end{aligned}$$

Como

$$\|Q_{2i} - Q_{2(i+j)+1}\| = \left\| (1 - \epsilon \omega^{2j+1}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2i(k-1)} (1 - \omega^{(2j+1)k}) z_k \right\|,$$

usaremos

$$\phi_{ij} = \left((1 - \epsilon \omega^{2j+1}) + \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2i(k-1)} (1 - \omega^{(2j+1)k}) z_k \right),$$

$$f_{ij}(z) = \log \phi_{ij}(z),$$

e

$$g_{ij}(x, y) = \log |\phi_{ij}(z)| = \operatorname{Re}(f_{ij}(z)).$$

$$\text{Assim, } \widetilde{U}_3(z) = U_3(\widetilde{Q} + Wz) = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \log |\phi_{ij}| \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_3}{\partial x_r \partial x_s}(0) = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s} \right) (0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_3}{\partial y_r \partial x_s}(0) = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial x_s} \right) (0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_3}{\partial y_r \partial y_s}(0) = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial y_s} \right) (0, 0).$$

Então

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial z_k} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \omega^{2i(k-1)} (1 - \omega^{(2j+1)k}). \quad (3.26)$$

Para $z = 0$ temos $\phi_{ij}(0) = (1 - \epsilon \omega^{2j+1})$ e a derivada parcial de segunda ordem de f_{ij} é desta forma

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_r \partial z_s}(0) = \frac{-1}{2N} \omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2}.$$

Obtemos as derivadas parciais de segunda ordem de $g_{ij} = \log |\phi_{ij}|$

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}(0, 0) = \frac{-1}{2N} \operatorname{Re} \left(\omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial x_s}(0, 0) = \frac{1}{2N} \operatorname{Im} \left(\omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_r \partial y_s}(0, 0) = - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}(0, 0).$$

Pela Proposição A.0.5,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{2i(r+s-2)} = \begin{cases} N, & \text{se } r + s = 2 \pmod{N}, \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widetilde{U}_3}{\partial x_r \partial x_s}(0) &= - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}(0, 0) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right) \\ &= \frac{1}{2N} \operatorname{Re} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\omega^{2i(r+s-2)} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right) \\ &= \frac{1}{2N} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{N-1} N \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right), \text{ para } (r + s) = 2 \pmod{N}, \end{aligned}$$

e $\frac{\partial^2 \widetilde{U}_3}{\partial x_r \partial x_s}(0) = 0$ para $(r+s) \neq 2 \pmod{N}$.

Agora usando a Proposição A.0.15 temos

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right) = 0,$$

portanto

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_3}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right) & \text{para } (r+s) = 2 \pmod{N} \text{ e } rs \neq 0, \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_3}{\partial y_r \partial y_s}(0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right) & \text{para } (r+s) = 2 \pmod{N} \text{ e } rs \neq 0, \\ 0, & \text{nos outros casos,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}_3}{\partial y_r \partial x_s}(0) = 0, \quad \forall r, s.$$

A partir das derivadas parciais de \widetilde{U}_1 , \widetilde{U}_2 e \widetilde{U}_3 descritas acima temos que as derivadas parciais de segunda ordem de \widetilde{U} são:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \begin{cases} \frac{(Nk(r,s) - rs)}{4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \operatorname{Re}(\omega^{(r+s-2)}) \right) + \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right), & \text{se } (r+s) = 2 \pmod{N} \text{ e } rs \neq 0. \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial y_r \partial y_s}(0) = \begin{cases} -\frac{(Nk(r,s) - rs)}{4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \operatorname{Re}(\omega^{(r+s-2)}) \right) - \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right), & \text{se } (r+s) = 2 \pmod{N} \text{ e } rs \neq 0. \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y_r \partial x_s}(0) = 0, \quad \forall r, s.$$

onde $k(r, s)$ é dado por (3.24).

Agora podemos retomar o estudo da estabilidade espectral para o problema do duplo anel de vórtices.

3.3.2 Equacionamento da Estabilidade Espectral para o Duplo Anel de Vórtices

Representando as derivadas parciais de segunda ordem da função Hamiltoniana U obtidas na seção 3.3.1 por

$$c_{(r,s)} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x_r \partial x_s}(0)$$

e lembrando que

$$c_{(r,s)} = c_{(s,r)},$$

podemos escrever

$$\mathbf{H} = Hess(\tilde{U}(0)) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & -\mathbf{C} \end{pmatrix}$$

com $\mathbf{C} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x_r \partial x_s}(0) \right)$.

Como na seção 2.3.2, vamos estudar as raízes λ da equação

$$|\lambda \mathbf{J} - \nu \mathbf{I} + M^{-1} D^2 U(\tilde{Q})| = 0.$$

Para facilitar a compreensão do que segue, incluímos abaixo as matrizes $C = C_N$ para alguns valores de N , destacando a posição dos zeros nessa matriz esparsa.

- $N = 2$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{(1,1)} & 0 & c_{(1,3)} \\ 0 & 0 & c_{(2,2)} & 0 \\ 0 & c_{(1,3)} & 0 & c_{(3,3)} \end{pmatrix}.$$

- $N = 3$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{(1,1)} & 0 & 0 & c_{(1,4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{(2,3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{(2,3)} & 0 & 0 & c_{(3,5)} \\ 0 & c_{(1,4)} & 0 & 0 & c_{(4,4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{(3,5)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $N = 4$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{(1,1)} & 0 & 0 & 0 & c_{(1,5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(2,4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{(3,3)} & 0 & 0 & 0 & c_{(3,7)} \\ 0 & 0 & c_{(2,4)} & 0 & 0 & 0 & c_{(4,6)} & 0 \\ 0 & c_{(1,5)} & 0 & 0 & 0 & c_{(5,5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(4,6)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{(3,7)} & 0 & 0 & 0 & c_{(7,7)} \end{pmatrix}.$$

- $N = 5$

$$C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{(1,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(1,6)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(2,5)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(3,4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(3,9)} \\ 0 & 0 & 0 & c_{(3,4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(4,8)} & 0 \\ 0 & 0 & c_{(2,5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(5,7)} & 0 & 0 \\ 0 & c_{(1,6)} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(6,6)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(5,7)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(4,8)} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(8,9)} \\ 0 & 0 & 0 & c_{(3,9)} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(8,9)} & 0 \end{pmatrix}.$$

- $N \geq 5$

$$C_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $c = c_{(i,j)}$ na posição (i,j) .

No caso do duplo anel de vórtices, a matriz correspondente a (2.10) é da forma

$$\begin{pmatrix} -\nu\mathbf{I} + \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{C} & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & -\nu\mathbf{I} - \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

onde M_1 é dada por (3.6).

O determinante da matriz (3.28) pode ser decomposto em produto de subdeterminantes de matrizes de 2×2 , 4×4 , 6×6 e 8×8 como segue:

Para melhor analisarmos esses subdeterminantes, vamos dividir em dois casos:

N par

Submatriz usando a linha e a coluna de índice 0 de C em (3.28):

$$\begin{vmatrix} -\nu & \lambda \\ -\lambda & -\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices 1 e $N + 1$ de C em (3.28):

$$\begin{vmatrix} -\nu + \frac{c_{(1,1)}}{\kappa} & \frac{c_{(1,N+1)}}{\kappa} & \lambda & 0 \\ \frac{c_{(N+1,1)}}{\kappa} & -\nu + \frac{c_{(N+1,N+1)}}{\kappa} & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\nu - \frac{c_{(1,1)}}{\kappa} & -\frac{c_{(1,N+1)}}{\kappa} \\ 0 & -\lambda & -\frac{c_{(N+1,1)}}{\kappa} & -\nu - \frac{c_{(N+1,N+1)}}{\kappa} \end{vmatrix} = 0.$$

Se $N = 2$ temos que considerar a submatriz abaixo:

Submatriz usando a linha e a coluna de índice 2 de C em (3.28), se $N = 2$:

$$\begin{vmatrix} -\nu + c_{(2,2)} & \lambda \\ -\lambda & -\nu - c_{(2,2)} \end{vmatrix} = 0.$$

Se $N > 2$ então temos a submatriz abaixo:

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices $\gamma = (\frac{N}{2} + 1)$ e $\gamma + N$ de C em (3.28), se $\frac{N}{2}$ é par:

$$\begin{vmatrix} -\nu + \frac{c(\gamma,\gamma)}{\kappa} & \frac{c(\gamma,\gamma+N)}{\kappa} & \lambda & 0 \\ \frac{c(\gamma+N,\gamma)}{\kappa} & -\nu + \frac{c(\gamma+N,\gamma+N)}{\kappa} & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\nu - \frac{c(\gamma,\gamma)}{\kappa} & -\frac{c(\gamma,\gamma+N)}{\kappa} \\ 0 & -\lambda & -\frac{c(\gamma+N,\gamma)}{\kappa} & -\nu - \frac{c(\gamma+N,\gamma+N)}{\kappa} \end{vmatrix} = 0$$

ou

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices $\gamma = (\frac{N}{2} + 1)$ e $\gamma + N$ de C em (3.28), se $\frac{N}{2}$ é ímpar:

$$\begin{vmatrix} -\nu + c(\gamma,\gamma) & c(\gamma,\gamma+N) & \lambda & 0 \\ c(\gamma+N,\gamma) & -\nu + c(\gamma+N,\gamma+N) & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\nu - c(\gamma,\gamma) & c(\gamma,\gamma+N) \\ 0 & -\lambda & -c(\gamma+N,\gamma) & -\nu - c(\gamma+N,\gamma+N) \end{vmatrix} = 0.$$

Se $N = 4$ então ainda temos que considerar a submatriz abaixo:

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices 2, 4 e 6 de C em (3.28), se $N = 4$:

$$\begin{vmatrix} -\nu & c(2,4) & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ c(2,4) & -\nu & c(4,6) & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & c(4,6) & -\nu & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & -\nu & -c(2,4) & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -c(2,4) & -\nu & -c(4,6) \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & -c(4,6) & -\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Quando $N > 4$, temos que considerar as submatrizes abaixo:

Para cada r_1 satisfazendo $3 \leq r_1 < \frac{N}{2} + 1$ temos uma submatriz correspondente. Essa submatriz é formada usando as linhas e colunas de índices $r_1, r_1 + N, r_2 = N + 2 - r_1$ e $r_2 + N$. Temos também que levar em conta a paridade de r_1 .

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices $r_1, r_1 + N, r_2 = N + 2 - r_1$ e $r_2 + N$ de C em (3.28), se $3 \leq r_1 < \frac{N}{2} + 1$, e r_1 é par:

$$\begin{vmatrix} -\nu & c(r_1, r_2) & 0 & c(r_1, r_2 + N) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ c(r_2, r_1) & -\nu & c(r_2, r_1 + N) & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & c(r_1 + N, r_2) & -\nu & c(r_1 + N, r_2 + N) & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ c(r_2 + N, r_1) & 0 & c(r_2 + N, r_1 + N) & -\nu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & -\nu & -c(r_1, r_2) & 0 & -c(r_1, r_2 + N) \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -c(r_2, r_1) & -\nu & -c(r_2, r_1 + N) & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & -c(r_1 + N, r_2) & -\nu & -c(r_1 + N, r_2 + N) \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -c(r_2 + N, r_1) & 0 & -c(r_2 + N, r_1 + N) & -\nu \end{vmatrix} = 0,$$

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices $r_1, r_1 + N, r_2 = N + 2 - r_1$ e $r_2 + N$ de C em (3.28), se $3 \leq r_1 < \frac{N}{2} + 1$, e r_1 é ímpar:

$$\begin{vmatrix} -\nu & \frac{c(r_1, r_2)}{\kappa} & 0 & \frac{c(r_1, r_2 + N)}{\kappa} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c(r_2, r_1)}{\kappa} & -\nu & \frac{c(r_2, r_1 + N)}{\kappa} & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(r_1 + N, r_2)}{\kappa} & -\nu & \frac{c(r_1 + N, r_2 + N)}{\kappa} & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \frac{c(r_2 + N, r_1)}{\kappa} & 0 & \frac{c(r_2 + N, r_1 + N)}{\kappa} & -\nu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & -\nu & -\frac{c(r_1, r_2)}{\kappa} & 0 & -\frac{c(r_1, r_2 + N)}{\kappa} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\frac{c(r_2, r_1)}{\kappa} & -\nu & -\frac{c(r_2, r_1 + N)}{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\frac{c(r_1 + N, r_2)}{\kappa} & -\nu & -\frac{c(r_1 + N, r_2 + N)}{\kappa} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -\frac{c(r_2 + N, r_1)}{\kappa} & 0 & -\frac{c(r_2 + N, r_1 + N)}{\kappa} & -\nu \end{vmatrix} = 0.$$

N ímpar

Submatriz usando a linha e a coluna de índice 0 de C em (3.28):

$$\begin{vmatrix} -\nu & \lambda \\ -\lambda & -\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices 1 e $N + 1$ de C em (3.28):

$$\begin{vmatrix} -\nu + \frac{c(1,1)}{\kappa} & \frac{c(1, N+1)}{\kappa} & \lambda & 0 \\ c(N+1, 1) & -\nu + c(N+1, N+1) & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\nu - \frac{c(1,1)}{\kappa} & -\frac{c(1, N+1)}{\kappa} \\ 0 & -\lambda & -c(N+1, 1) & -\nu - c(N+1, N+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Quando $N = 3$ temos que considerar a submatriz abaixo:

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices 2, 3 e 5 de C em (3.28), se $N = 3$:

$$\begin{vmatrix} -\nu & c(2,3) & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \frac{c(2,3)}{\kappa} & -\nu & \frac{c(3,5)}{\kappa} & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \frac{c(3,5)}{\kappa} & -\nu & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & -\nu & -c(2,3) & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -\frac{c(2,3)}{\kappa} & -\nu & -\frac{c(3,5)}{\kappa} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & -\frac{c(3,5)}{\kappa} & -\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Quando $N > 3$ temos que considerar as submatrizes abaixo:

Para cada r_1 satisfazendo $3 \leq r_1 \leq \frac{N+1}{2}$ temos um subdeterminante correspondente. Esse subdeterminante é formado usando as linhas e colunas de índices r_1 , $r_1 + N$, $r_2 = N + 2 - r_1$ e $r_2 + N$. Como no caso par, temos também que levar em conta a paridade de r_1 .

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices r_1 , $r_1 + N$, $r_2 = N + 2 - r_1$ e $r_2 + N$ de C em (3.28), se $3 \leq r_1 \leq \frac{N+1}{2}$, e r_1 é par:

$$\begin{vmatrix} -\nu & c(r_1, r_2) & 0 & c(r_1, r_2 + N) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c(r_2, r_1)}{\kappa} & -\nu & \frac{c(r_2, r_1 + N)}{\kappa} & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(r_1 + N, r_2)}{\kappa} & -\nu & \frac{c(r_1 + N, r_2 + N)}{\kappa} & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ c(r_2 + N, r_1) & 0 & c(r_2 + N, r_1 + N) & -\nu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & -\nu & -c(r_1, r_2) & 0 & -c(r_1, r_2 + N) \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\frac{c(r_2, r_1)}{\kappa} & -\nu & -\frac{c(r_2, r_1 + N)}{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\frac{c(r_1 + N, r_2)}{\kappa} & -\nu & -\frac{c(r_1 + N, r_2 + N)}{\kappa} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -c(r_2 + N, r_1) & 0 & -c(r_2 + N, r_1 + N) & -\nu \end{vmatrix} = 0,$$

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices r_1 , $r_1 + N$, $r_2 = N + 2 - r_1$ e $r_2 + N$ de C em (3.28), se $3 \leq r_1 \leq \frac{N+1}{2}$, e r_1 é ímpar:

$$\begin{vmatrix} -\nu & \frac{c(r_1, r_2)}{\kappa} & 0 & \frac{c(r_1, r_2 + N)}{\kappa} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ c(r_2, r_1) & -\nu & c(r_2, r_1 + N) & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(r_1 + N, r_2)}{\kappa} & -\nu & \frac{c(r_1 + N, r_2 + N)}{\kappa} & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \frac{c(r_2 + N, r_1)}{\kappa} & 0 & \frac{c(r_2 + N, r_1 + N)}{\kappa} & -\nu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & -\nu & -\frac{c(r_1, r_2)}{\kappa} & 0 & -\frac{c(r_1, r_2 + N)}{\kappa} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -c(r_2, r_1) & -\nu & -c(r_2, r_1 + N) & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & -c(r_1 + N, r_2) & -\nu & -c(r_1 + N, r_2 + N) \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -\frac{c(r_2 + N, r_1)}{\kappa} & 0 & -\frac{c(r_2 + N, r_1 + N)}{\kappa} & -\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Como queremos analisar a estabilidade espectral para o problema do duplo anel de vórtices, então pela Definição 2.2.1, precisamos decidir se todas as raízes λ dos subdeterminantes acima são puramente imaginárias.

Devido às contas para o caso geral serem muito extensas, vamos analisar apenas as raízes λ nos casos $N = 2$, por ser um valor mais baixo de N , e assim facilitar as contas, e $N = 4$, devido ao seu caráter especial segundo a Proposição 3.2.4.

3.3.3 Estabilidade Espectral para o Duplo Anel de Vórtices quando

$$N = 2$$

Para o caso $N = 2$ temos:

$$\nu = -\frac{(4\kappa + 1 + \kappa^2)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)}. \quad (3.29)$$

Nesse caso, pela Proposição 3.2.4, temos que \tilde{Q} é ponto de equilíbrio de (3.7), se e só se

$$\epsilon \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e

$$\kappa = \frac{\epsilon^2(-3 + \epsilon^2)}{(-3\epsilon^2 + 1)}. \quad (3.30)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

A matriz Hessiana da função Hamiltoniana U é dada por

$$Hess(\tilde{U}(0)) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & -\mathbf{C} \end{pmatrix}$$

onde

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x_r \partial x_s} (0) \right).$$

Usando os cálculos obtidos na seção 3.3.1 para $N = 2$ temos

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \begin{cases} \frac{(2k(r,s)-rs)}{4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \operatorname{Re}(\omega^{(r+s-2)})\right) + \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^1 \left(\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right), & \text{para } r + s = 0 \pmod{2}, rs \neq 0, \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Calculando

$$k(r, s) = \# \left\{ (\rho, \sigma) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leq \rho < r, 0 \leq \sigma < s, \rho + \sigma = 0 \pmod{2} \right\},$$

apenas para os valores que nos interessam, ou seja, quando $(r + s) = 0 \pmod{2}$ e $rs \neq 0$, temos:

$$k(1, 1) = 1,$$

$$k(2, 2) = 2,$$

$$k(3, 3) = 5,$$

$$k(1, 3) = k(3, 1) = 2.$$

Calculando apenas os valores de $c_{(r,s)} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x_r \partial x_s}(0)$, não nulos, temos

$$c_{(1,1)} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2}\right) + \frac{4\kappa\epsilon}{(1 + \epsilon^2)^2}, \quad (3.33)$$

$$c_{(1,3)} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\kappa^2}{\epsilon^2}\right) + \frac{2\kappa(1 - \epsilon^2)}{(1 + \epsilon^2)^2}, \quad (3.34)$$

$$c_{(2,2)} = \frac{4\kappa(1 - \epsilon^2)}{(1 + \epsilon^2)^2}, \quad (3.35)$$

$$c_{(3,3)} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2}\right) - \frac{4\kappa\epsilon}{(1 + \epsilon^2)^2}. \quad (3.36)$$

e

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{(1,1)} & 0 & c_{(1,3)} \\ 0 & 0 & c_{(2,2)} & 0 \\ 0 & c_{(1,3)} & 0 & c_{(3,3)} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Substituindo na matriz

$$\begin{pmatrix} -\nu\mathbf{I} + \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{C} & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & -\nu\mathbf{I} - \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix},$$

ν , M_1 e \mathbf{C} obtidos acima, temos a matriz

$$\begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu + \frac{c_{(1,1)}}{\kappa} & 0 & \frac{c_{(1,3)}}{\kappa} & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu + c_{(2,2)} & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \frac{c_{(1,3)}}{\kappa} & 0 & -\nu + \frac{c_{(3,3)}}{\kappa} & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & -\nu - \frac{c_{(1,1)}}{\kappa} & 0 & -\frac{c_{(1,3)}}{\kappa} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & -\nu - c_{(2,2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & -\frac{c_{(1,3)}}{\kappa} & 0 & -\nu - \frac{c_{(3,3)}}{\kappa} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Precisamos agora calcular o determinante de (3.38) e verificar para que valores de $\epsilon > 0$ as raízes λ desse determinante são puramente imaginárias. Podemos decompor o determinante de (3.38) em produto de subdeterminantes de matrizes de 2×2 e 4×4 , os subdeterminantes abaixo:

Submatriz usando a linha e a coluna de índice 0 de C em (3.38):

$$\begin{vmatrix} -\nu & \lambda \\ -\lambda & -\nu \end{vmatrix} = \lambda^2 + \nu^2 = 0.$$

Essa equação tem as soluções $\lambda = \pm i\nu$.

Submatriz usando a linha e a coluna de índice 2 de C em (3.38):

$$\begin{vmatrix} -\nu + c_{(2,2)} & \lambda \\ -\lambda & -\nu - c_{(2,2)} \end{vmatrix} = \nu^2 - c_{(2,2)}^2 + \lambda^2 = 0.$$

Essa equação tem as soluções

$$\lambda = \pm \sqrt{c_{(2,2)}^2 - \nu^2}. \quad (3.39)$$

Portanto λ é puramente imaginária em (3.39) se e só se

$$c_{(2,2)}^2 - \nu^2 \leq 0. \quad (3.40)$$

Substituindo os valores de ν e $c_{(2,2)}$ dados em (3.29) e (3.35) respectivamente, temos

$$c_{(2,2)}^2 - \nu^2 = \frac{1}{4} \frac{(3\epsilon^4 - 14\epsilon^2 - 1)(-7\epsilon^6 + 19\epsilon^4 - 37\epsilon^2 + 1)}{(-3\epsilon^2 + 1)(1 + \epsilon^2)^4}.$$

Vamos chamar

$$h(\epsilon) = \frac{1}{4} \frac{(3\epsilon^4 - 14\epsilon^2 - 1)(-7\epsilon^6 + 19\epsilon^4 - 37\epsilon^2 + 1)}{(-3\epsilon^2 + 1)(1 + \epsilon^2)^4}. \quad (3.41)$$

Precisamos estudar o sinal da função h para $\epsilon \in J_1 =]0, \frac{\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty[$.

Nesse conjunto, $h(\epsilon) = 0$ se e só se

$$\epsilon = \epsilon_1 = \frac{\sqrt{21}}{21} \frac{\sqrt{(1828 + 84\sqrt{633})^{\frac{1}{3}} \left(-2(1828 + 84\sqrt{633})^{\frac{2}{3}} + 208 + 19(1828 + 84\sqrt{633})^{\frac{1}{3}} \right)}}{(1828 + 84\sqrt{633})^{\frac{1}{3}}},$$

ou

$$\epsilon = \epsilon_2 = \frac{1}{3} \sqrt{21 + 6\sqrt{13}}.$$

após algumas minorações e majorações é possível concluir que

$$\frac{1}{10} < \epsilon_1 < \frac{1}{2}$$

e

$$2 < \epsilon_2 < 3.$$

Vamos estudar o sinal da função $h(\epsilon)$, para isso, escolhemos um ponto em cada subintervalo abaixo e calculamos a função $h(\epsilon)$ nesse ponto, obtendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \frac{1}{10} \in]0, \epsilon_1[, \Rightarrow h(\epsilon) < 0, \\ \epsilon = \frac{1}{2} \in]\epsilon_1, \frac{\sqrt{3}}{3}[, \Rightarrow h(\epsilon) > 0, \\ \epsilon = 1 \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, \epsilon_2[, \Rightarrow h(\epsilon) < 0, \\ \epsilon = 3 \in]\epsilon_2, \infty[, \Rightarrow h(\epsilon) > 0. \end{array} \right.$$

Logo a inequação (3.40) é satisfeita para $\epsilon \in J_1$ se e só se ϵ pertence a um dos subintervalos

$$0 < \epsilon \leq \epsilon_1, \quad (3.42)$$

e

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \epsilon \leq \epsilon_2. \quad (3.43)$$

Submatriz usando as linhas e as colunas de índices 1 e 3 de C em (3.38)

$$\begin{vmatrix} -\nu + \frac{c_{(1,1)}}{\kappa} & \frac{c_{(1,3)}}{\kappa} & \lambda & 0 \\ \frac{c_{(1,3)}}{\kappa} & -\nu + \frac{c_{(3,3)}}{\kappa} & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\nu - \frac{c_{(1,1)}}{\kappa} & -\frac{c_{(1,3)}}{\kappa} \\ 0 & -\lambda & -\frac{c_{(1,3)}}{\kappa} & -\nu - \frac{c_{(3,3)}}{\kappa} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.44)$$

A equação anterior tem as raízes

$$\lambda = \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{a(\epsilon) + 2\sqrt{b(\epsilon)}} \quad (3.45)$$

e

$$\lambda = \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{a(\epsilon) - 2\sqrt{b(\epsilon)}} \quad (3.46)$$

onde

$$a(\epsilon) = 2c_{(3,3)}^2 - 4\nu^2\kappa^2 + 2c_{(1,1)}^2 + 4c_{(1,3)}^2, \quad (3.47)$$

$$b(\epsilon) = c_{(3,3)}^4 - 2c_{(1,1)}^2c_{(3,3)}^2 + 4c_{(3,3)}^2c_{(1,3)}^2 + c_{(1,1)}^4 + 4c_{(1,1)}^2c_{(1,3)}^2 + 8c_{(1,1)}c_{(3,3)}c_{(1,3)}^2, \quad (3.48)$$

com $c_{(1,1)}$, $c_{(1,3)}$ e $c_{(3,3)}$ dados em (3.33), (3.34) e (3.36) respectivamente.

Assim, λ é puramente imaginária em (3.45) e (3.46) se e só se

$$a(\epsilon) \leq 0, \quad (3.49)$$

$$b(\epsilon) \geq 0, \quad (3.50)$$

$$c(\epsilon) = (a^2 - 4b)(\epsilon) \geq 0. \quad (3.51)$$

Utilizando o Maple para análise do sinal do primeiro membro da inequação dada em (3.49) no intervalo definido em (3.42) obtivemos

$$a(\epsilon) > 0, \quad \text{se } 0 < \epsilon \leq \epsilon_1.$$

Assim, para decidir para que valores de $\epsilon \in J_1$ as raízes dos subdeterminantes são todas puramente imaginárias basta analisar o sinal do primeiro membro das inequações dadas em (3.49), (3.50) e (3.51) apenas no intervalo $\frac{\sqrt{3}}{3} < \epsilon \leq \epsilon_2$ definido em (3.43).

Vamos estudar o sinal da função $c(\epsilon)$ nesse intervalo. Nesse intervalo a função $c(\epsilon)$ se anula se e só se

$$\epsilon = 1 \text{ ou } \epsilon = \sqrt{3}. \quad (3.52)$$

e

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{3}{5} \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[, & \Rightarrow c(\epsilon) > 0, \\ \epsilon = \frac{3}{2} \in]1, \sqrt{3}[, & \Rightarrow c(\epsilon) < 0, \\ \epsilon = 2 \in]\sqrt{3}, \epsilon_2[, & \Rightarrow c(\epsilon) < 0, \end{cases}$$

Logo a inequação (3.51) é satisfeita com $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, \epsilon_2]$ se e só se ϵ pertence ao subintervalo

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \epsilon \leq 1. \quad (3.53)$$

Resta analisar as soluções das inequações (3.49) e (3.50) no intervalo (3.53).

Utilizando novamente o Maple, analisamos o sinal do primeiro membro das inequações dadas em (3.49) e (3.50) no intervalo (3.53) e obtivemos

$$\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1] \Rightarrow \begin{cases} a(\epsilon) < 0, \\ b(\epsilon) > 0. \end{cases}$$

Resumindo, mostramos que

$$\epsilon \in J_1 =]0, \epsilon_1] \cup]\epsilon_1, \frac{\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1] \cup]1, \epsilon_2] \cup]\epsilon_2, \infty[, \quad (3.54)$$

satisfaz simultaneamente as quatro inequações abaixo:

$$\begin{cases} h(\epsilon) \leq 0, & (I) \\ a(\epsilon) \leq 0, & (II) \\ b(\epsilon) \geq 0, & (III) \\ c(\epsilon) \geq 0. & (IV) \end{cases}$$

se e só se

Pela Proposição 3.2.4, temos que \tilde{Q} é ponto de equilíbrio de (3.7), se e só se

$$\epsilon \neq \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}} \quad e \quad \kappa = \epsilon^2 \quad (3.58)$$

ou

$$\begin{aligned} \epsilon = \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}} \quad e \quad \kappa \text{ é arbitário,} \\ \kappa \neq 0 \quad e \quad \kappa \neq -\frac{1}{\epsilon^2} = -\frac{3}{4 \pm \sqrt{7}}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

A matriz Hessiana da função Hamiltoniana U é dada por

$$Hess(\tilde{U}(0)) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & -\mathbf{C} \end{pmatrix}$$

onde

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x_r \partial x_s}(0) \right).$$

Usando os cálculos obtidos na seção 3.3.1 para $N = 4$ temos

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x_r \partial x_s}(0) = \begin{cases} \frac{(4k(r,s) - rs)}{4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \operatorname{Re}(\omega^{(r+s-2)}) \right) + \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^3 \left(\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon \omega^{(2j+1)})^2} \right), & \text{para } r + s = 2 \pmod{4}, rs \neq 0, \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases} \quad (3.60)$$

Calculando

$$k(r, s) = \# \left\{ (\rho, \sigma) \in \mathbb{N}^2 / \quad 0 \leq \rho < r, \quad 0 \leq \sigma < s, \quad \rho + \sigma = 0 \pmod{4} \right\},$$

apenas para os valores que nos interessam, ou seja, quando $(r + s) = 2 \pmod{4}$ e $rs \neq 0$,

temos:

$$\begin{aligned}
k(1, 1) &= 1, \\
k(3, 3) &= 2, \\
k(5, 5) &= 7, \\
k(7, 7) &= 12, \\
k(1, 5) &= k(5, 1) = 2, \\
k(2, 4) &= k(4, 2) = 2, \\
k(3, 7) &= k(7, 3) = 5, \\
k(4, 6) &= k(6, 4) = 6.
\end{aligned}$$

Calculando apenas os valores de $c_{(r,s)} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x_r \partial x_s}(0)$, não nulos, temos

$$c_{(1,1)} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \right) + \frac{2\kappa(1 - 3\epsilon^2 - 3\epsilon^4 + 8\epsilon^3 + \epsilon^6)}{(1 + \epsilon^4)^2}, \quad (3.61)$$

$$c_{(1,5)} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \right) - \frac{2\kappa(-1 - 3\epsilon^2 + 3\epsilon^4 + \epsilon^6)}{(1 + \epsilon^4)^2}, \quad (3.62)$$

$$c_{(2,4)} = -\frac{4\kappa(-1 - 3\epsilon^2 + 3\epsilon^4 + \epsilon^6)}{(1 + \epsilon^4)^2}, \quad (3.63)$$

$$c_{(3,3)} = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \right) - \frac{2\kappa(-1 + 4\epsilon^5 - 4\epsilon - 3\epsilon^2 + 3\epsilon^4 + \epsilon^6)}{(1 + \epsilon^4)^2}, \quad (3.64)$$

$$c_{(3,7)} = \frac{1}{4} \left(-1 - \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \right) + \frac{2\kappa(1 - 3\epsilon^2 - 3\epsilon^4 + \epsilon^6)}{(1 + \epsilon^4)^2}, \quad (3.65)$$

$$c_{(4,6)} = \frac{4\kappa(1 - 3\epsilon^2 - 3\epsilon^4 + \epsilon^6)}{(1 + \epsilon^4)^2}, \quad (3.66)$$

$$c_{(5,5)} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \right) + \frac{2\kappa(1 - 3\epsilon^2 - 3\epsilon^4 - 8\epsilon^3 + \epsilon^6)}{(1 + \epsilon^4)^2}, \quad (3.67)$$

$$c_{(7,7)} = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \right) - \frac{2\kappa(-1 - 4\epsilon^5 + 4\epsilon - 3\epsilon^2 + 3\epsilon^4 + \epsilon^6)}{(1 + \epsilon^4)^2}. \quad (3.68)$$

e

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}(0)}{\partial x_r \partial x_s} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{(1,1)} & 0 & 0 & 0 & c_{(1,5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(2,4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{(3,3)} & 0 & 0 & 0 & c_{(3,7)} \\ 0 & 0 & c_{(2,4)} & 0 & 0 & 0 & c_{(4,6)} & 0 \\ 0 & c_{(1,5)} & 0 & 0 & 0 & c_{(5,5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{(4,6)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{(3,7)} & 0 & 0 & 0 & c_{(7,7)} \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Substituindo na matriz

$$\begin{pmatrix} -\nu \mathbf{I} + \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C} & \lambda \mathbf{I} \\ -\lambda \mathbf{I} & -\nu \mathbf{I} - \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

ν , M_1 e \mathbf{C} obtidos, vamos calcular o seu determinante e verificar se as raízes λ desse determinante são puramente imaginárias.

Podemos decompor o determinante de (3.70) em produto de subdeterminantes de matrizes de 2×2 , 4×4 e 6×6 , os subdeterminantes abaixo:

Submatriz de (3.70) usando a linha e a coluna de índice 0 de C:

$$\begin{vmatrix} -\nu & \lambda \\ -\lambda & -\nu \end{vmatrix} = \lambda^2 + \nu^2 = 0.$$

Essa equação tem as soluções $\lambda = \pm i\nu$.

Submatriz de (3.70) usando as linhas e as colunas de índices 2, 4 e 6 de C:

$$\begin{vmatrix} -\nu & c_{(2,4)} & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ c_{(2,4)} & -\nu & c_{(4,6)} & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & c_{(4,6)} & -\nu & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & -\nu & -c_{(2,4)} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -c_{(2,4)} & -\nu & -c_{(4,6)} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & -c_{(4,6)} & -\nu \end{vmatrix} = 0$$

$$= (\lambda^2 + \nu^2) (\lambda^2 - (-\nu^2 + c_{(2,4)}^2 + c_{(4,6)}^2))^2 = 0.$$

Essa equação tem as soluções $\lambda = \pm i\nu$ e as raízes duplas

$$\lambda = \pm \sqrt{-\nu^2 + c_{(2,4)}^2 + c_{(4,6)}^2}. \quad (3.71)$$

Portanto λ é puramente imaginária em (3.71) se e só se

$$-\nu^2 + c_{(2,4)}^2 + c_{(4,6)}^2 \leq 0. \quad (3.72)$$

Submatriz de (3.70) usando as linhas e as colunas de índices 1 e 5 de C :

$$\begin{vmatrix} -\nu + \frac{c_{(1,1)}}{\kappa} & \frac{c_{(1,5)}}{\kappa} & \lambda & 0 \\ \frac{c_{(1,5)}}{\kappa} & -\nu + \frac{c_{(5,5)}}{\kappa} & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\nu - \frac{c_{(1,1)}}{\kappa} & -\frac{c_{(1,5)}}{\kappa} \\ 0 & -\lambda & -\frac{c_{(1,5)}}{\kappa} & -\nu - \frac{c_{(5,5)}}{\kappa} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.73)$$

A equação (3.73) tem as soluções

$$\lambda = \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\alpha(\kappa, \epsilon) + 2\sqrt{\beta(\kappa, \epsilon)}} \quad (3.74)$$

e

$$\lambda = \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\alpha(\kappa, \epsilon) - 2\sqrt{\beta(\kappa, \epsilon)}}, \quad (3.75)$$

onde

$$\alpha(\kappa, \epsilon) = 2c_{(5,5)}^2 - 4\nu^2\kappa^2 + 2c_{(1,1)}^2 + 4c_{(1,5)}^2, \quad (3.76)$$

$$\beta(\kappa, \epsilon) = c_{(5,5)}^4 - 2c_{(1,1)}^2c_{(5,5)}^2 + 4c_{(5,5)}^2c_{(1,5)}^2 + c_{(1,1)}^4 + 4c_{(1,1)}^2c_{(1,5)}^2 + 8c_{(1,1)}c_{(5,5)}c_{(1,5)}^2, \quad (3.77)$$

com $c_{(1,1)}$, $c_{(1,5)}$ e $c_{(5,5)}$ dados em (3.61), (3.62) e (3.67), respectivamente .

Assim, λ é puramente imaginária em (3.74) e (3.75) se e só se

$$\alpha(\kappa, \epsilon) + 2\sqrt{\beta(\kappa, \epsilon)} \in \mathbb{R}^-, \quad (3.78)$$

ou seja, se e só se

$$\begin{cases} \alpha(\kappa, \epsilon) \leq 0, & (I) \\ \beta(\kappa, \epsilon) \geq 0, & (II) \\ (\alpha^2 - 4\beta)(\kappa, \epsilon) \geq 0. & (III) \end{cases}$$

Submatriz de (3.70) usando as linhas e as colunas de índices 3 e 7 de C :

$$\begin{vmatrix} -\nu + \frac{c_{(3,3)}}{\kappa} & \frac{c_{(3,7)}}{\kappa} & \lambda & 0 \\ \frac{c_{(3,7)}}{\kappa} & -\nu + \frac{c_{(7,7)}}{\kappa} & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\nu - \frac{c_{(3,3)}}{\kappa} & -\frac{c_{(3,7)}}{\kappa} \\ 0 & -\lambda & -\frac{c_{(3,7)}}{\kappa} & -\nu - \frac{c_{(7,7)}}{\kappa} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.79)$$

A equação (3.79) tem as soluções

$$\lambda = \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\gamma(\kappa, \epsilon) + 2\sqrt{\delta(\kappa, \epsilon)}} \quad (3.80)$$

e

$$\lambda = \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\gamma(\kappa, \epsilon) - 2\sqrt{\delta(\kappa, \epsilon)}}, \quad (3.81)$$

onde

$$\gamma(\kappa, \epsilon) = 2c_{(7,7)}^2 - 4\nu^2\kappa^2 + 2c_{(3,3)}^2 + 4c_{(3,7)}^2, \quad (3.82)$$

$$\delta(\kappa, \epsilon) = c_{(7,7)}^4 - 2c_{(3,3)}^2c_{(7,7)}^2 + 4c_{(7,7)}^2c_{(3,7)}^2 + c_{(3,3)}^4 + 4c_{(3,3)}^2c_{(3,7)}^2 + 8c_{(3,3)}c_{(7,7)}c_{(3,7)}^2, \quad (3.83)$$

com $c_{(3,3)}$, $c_{(3,7)}$ e $c_{(7,7)}$ dados em (3.64), (3.65) e (3.68), respectivamente.

Assim, λ é puramente imaginária em (3.81) e (3.82) se e só se

$$\gamma(\kappa, \epsilon) + 2\sqrt{\delta(\kappa, \epsilon)} \in \mathbb{R}^- \quad (3.84)$$

ou seja, se e só se

$$\begin{cases} \gamma(\kappa, \epsilon) \leq 0, & (IV) \\ \delta(\kappa, \epsilon) \geq 0, & (V) \\ (\gamma^2 - 4\delta)(\kappa, \epsilon) \geq 0. & (VI) \end{cases}$$

Vamos estudar o sinal do primeiro membro da expressão (3.72), e estudar sob que condições valem (3.78) e (3.84).

Estudaremos detalhadamente o caso em que $\epsilon \neq \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}}$ e $\kappa = \epsilon^2$, e o caso em que $\epsilon = \epsilon_1 = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}}$ e $\kappa \in \mathbb{R} - \{0, -\frac{1}{\epsilon^2}\} = \mathbb{R} - \{0, -\frac{3}{4 - \sqrt{7}}\}$. O caso em que $\epsilon = \epsilon_2 = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{7}}{3}}$ e $\kappa \in \mathbb{R} - \{0, -\frac{3}{4 + \sqrt{7}}\}$ recai no anterior por mudança na escala. (Note que $\epsilon_1\epsilon_2 = 1$).

- 1^o caso: $\epsilon \neq \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}}$ e $\kappa = \epsilon^2$

Vamos analisar o sinal do primeiro membro da inequação (3.72)

Vamos chamar

$$h_1(\epsilon) = -\nu^2 + c_{(2,4)}^2 + c_{(4,6)}^2 = \frac{(119\epsilon^8 - 48\epsilon^6 + 46\epsilon^4 - 48\epsilon^2 - 9)}{4(1 + \epsilon^4)^2}. \quad (3.85)$$

Precisamos estudar o sinal da função h_1 para

$$\epsilon \in J_1 = \left] 0, \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}} \left[\cup \left] \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{4 + \sqrt{7}}{3}} \left[\cup \left] \sqrt{\frac{4 + \sqrt{7}}{3}}, \infty \left[.$$

Nesse conjunto, $h_1(\epsilon)$ possui uma única raiz $\tilde{\epsilon}$, com $\sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}} < \frac{4}{5} < \tilde{\epsilon} < \frac{9}{10} < \sqrt{\frac{4 + \sqrt{7}}{3}}$.

Vamos estudar o sinal da função $h_1(\epsilon)$, para isso escolhemos um ponto em cada subintervalo abaixo e calculando a função $h_1(\epsilon)$ nesse ponto, obtendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \frac{1}{2} \in \left] 0, \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}} \left[\Rightarrow h_1(\epsilon) < 0, \\ \epsilon = \frac{4}{5} \in \left] \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}}, \tilde{\epsilon} \left[\Rightarrow h_1(\epsilon) < 0, \\ \epsilon = 1 \in \left] \tilde{\epsilon}, \sqrt{\frac{4 + \sqrt{7}}{3}} \left[\Rightarrow h_1(\epsilon) > 0. \\ \epsilon = 2 \in \left] \sqrt{\frac{4 + \sqrt{7}}{3}}, \infty \left[\Rightarrow h_1(\epsilon) > 0. \end{array} \right.$$

Logo a inequação (3.72) é satisfeita para $\epsilon \in J_1$ se e só se

$$\epsilon \in J_2 = \left] 0, \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}} \left[\cup \left] \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}}, \tilde{\epsilon} \left[. \quad (3.86)$$

Agora vamos analisar se $\alpha(\epsilon) + 2\sqrt{\beta(\epsilon)} \in \mathbb{R}^-$ para

$$\epsilon \in \tilde{J}_2 = \left] 0, \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}} \left[\cup \left] \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{3}}, \frac{9}{10} \left[\supset J_2. \quad (3.87)$$

Utilizamos o Maple para fazer análise do sinal do primeiro membro da inequação (3.78)(I) no conjunto \tilde{J}_2 .

Nesse caso, a função $\alpha(\epsilon) = \alpha(\kappa, \epsilon)$ não se anula nesse conjunto e

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{1}{2} \in \left] 0, \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{3}} \right[& \Rightarrow \alpha(\epsilon) > 0, \\ \epsilon = \frac{4}{5} \in \left] \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{3}}, \frac{9}{10} \right[& \Rightarrow \alpha(\epsilon) > 0. \end{cases}$$

Logo a inequação $\alpha(\epsilon) \leq 0$ não é satisfeita para nenhum $\epsilon \in \tilde{J}_2$.

Portanto (3.78) não é satisfeita para nenhum $\epsilon \in J_2$ e pela Definição 2.2.1 não temos estabilidade espectral.

- 2^o caso: $\epsilon = \epsilon_1 = \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{3}}$ e $\kappa \in \mathbb{R} - \{0, -\frac{3}{4-\sqrt{7}}\}$

Vamos analisar primeiramente o sinal do primeiro membro da inequação (3.71) nesse caso.

Substituindo $\epsilon = \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{3}}$ em ν , $c_{(2,4)}$ e $c_{(4,6)}$ temos

$$\begin{aligned} h_1(\kappa) &= -\nu^2 + c_{(2,4)}^2 + c_{(4,6)}^2 = \\ &= \frac{9((36-9\sqrt{7})\kappa + (184-82\sqrt{7})\kappa^2 + (-192+48\sqrt{7})\kappa^3 + (-332+119\sqrt{7})\kappa^4)}{4(-4+\sqrt{7})(-3+(-4+\sqrt{7})\kappa)}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Para κ nesse conjunto a função $h_1(\kappa)$ se anula se e só se

$$\kappa = \kappa_1 = \frac{36 + 3\sqrt{7} + 22\sqrt{14} - 10\sqrt{2}}{137}$$

ou

$$\kappa = \kappa_2 = \frac{36 + 3\sqrt{7} - 22\sqrt{14} + 10\sqrt{2}}{137}.$$

Temos $-\frac{3}{4-\sqrt{7}} < \kappa_2 < -\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{2} < \kappa_1 < 1$, e

$$\begin{cases} \kappa = -3 \in \left] -\infty, -\frac{3}{4-\sqrt{7}} \right[& \Rightarrow h_1(\kappa) > 0, \\ \kappa = -1 \in \left] -\frac{3}{4-\sqrt{7}}, \kappa_2 \right[& \Rightarrow h_1(\kappa) > 0, \\ \kappa = -\frac{1}{10} \in \left] \kappa_2, 0 \right[& \Rightarrow h_1(\kappa) < 0, \\ \kappa = \frac{1}{2} \in \left] 0, \kappa_1 \right[& \Rightarrow h_1(\kappa) < 0, \\ \kappa = 1 \in \left] \kappa_1, \infty \right[& \Rightarrow h_1(\kappa) > 0. \end{cases}$$

Logo a inequação (3.72) é satisfeita com

$$\kappa \in J_1 = \left] -\infty, -\frac{3}{4-\sqrt{7}} \right[\cup \left] -\frac{3}{4-\sqrt{7}}, \kappa_2 \right[\cup \left] \kappa_2, 0 \right[\cup \left] 0, \kappa_1 \right[\cup \left] \kappa_1, \infty \right[$$

se e só se κ pertence a um dos subintervalos

$$\kappa_2 \leq \kappa < 0 \quad (3.89)$$

ou

$$0 < \kappa \leq \kappa_1 \quad (3.90)$$

Agora vamos analisar (3.78). Utilizamos o Maple para fazer a análise do sinal do primeiro membro da inequação (3.78)(I) no conjunto $J_2 = [\kappa_2, 0[\cup]0, \kappa_1]$.

Nesse caso, a função $\gamma(\kappa) = \gamma(\kappa, \epsilon)$ não se anula nesse conjunto, e

$$\begin{cases} \kappa = -\frac{1}{10} \in]\kappa_2, 0[& \Rightarrow \gamma(\kappa) > 0, \\ \kappa = \frac{1}{2} \in]0, \kappa_1[& \Rightarrow \gamma(\kappa) > 0. \end{cases}$$

Logo a inequação $\gamma(\kappa) \leq 0$ não é satisfeita para nenhum $\kappa \in J_2$.

Portanto (3.78) não é satisfeita para nenhum $\kappa \in J_2$ e pela Definição 2.2.1 não temos estabilidade espectral.

Terminamos de demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.3.2 *Sejam $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$, $\epsilon > 0$, \tilde{Q} dada em (3.11), U dada em (3.5), com $N = 4$ e sejam M dada em (3.57) e ν dado em (3.56), com*

$$\epsilon \neq \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}} \quad \text{e} \quad \kappa = \epsilon^2,$$

ou

$$\epsilon = \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}} \quad \text{e} \quad \kappa \text{ arbitário, com } 0 \neq \kappa \neq -\frac{3}{4 \pm \sqrt{7}}.$$

O ponto de equilíbrio \tilde{Q} não é espectralmente estável para o duplo anel de vórtices com $N = 4$.

3.3.5 Estabilidade segundo Liapunov para o Duplo Anel de Vórtices quando $N = 2$

Vamos estudar a estabilidade segundo Liapunov apenas para os valores de ϵ satisfazendo $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1]$, pois para os valores de ϵ em que não temos estabilidade espectral também não temos estabilidade segundo Liapunov.

Observação 3.3.3 Não trataremos o caso $\epsilon = 1$, pois este recai no problema do Capítulo 2.

Teorema 3.3.4 O equilíbrio \tilde{Q} dado por (3.11) no problema do duplo anel de vórtices para $N = 2$ e intensidade $\kappa = \frac{\epsilon^2(-3+\epsilon^2)}{(-3\epsilon^2+1)}$ é estável segundo Liapunov se:

$$\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[. \quad (3.91)$$

Demonstração. Vamos mostrar que para os valores de ϵ pertencentes ao intervalo (3.90), a parte quadrática da função Hamiltoniana (3.5) é definida positiva e portanto essa função Hamiltoniana serve como função de Liapunov para o sistema em questão.

Seja

$$M\dot{q} = \mathbf{J}\nabla U(q)$$

o sistema que representa o movimento dos vórtices. Após algumas transformações, obtem-se o sistema

$$M\dot{Z} = \mathbf{J}\nabla V(Z)$$

onde

$$V(Z) = -\frac{\nu}{2}(\tilde{Q} + Z)^T M(\tilde{Q} + Z) + U(\tilde{Q} + Z).$$

Pela Definição 1.1.9, para a função Hamiltoniana $V(Z)$ ser função de Liapunov, deve satisfazer as seguintes condições:

1. $\tilde{Z} = 0$ é ponto de mínimo local estrito de $V(Z)$,
2. $\dot{V} \leq 0$.

Pela Proposição 1.2.2 a segunda condição é satisfeita. Resta mostrar que \tilde{Z} é ponto de mínimo local estrito de V .

Para mostrar que \tilde{Z} é ponto de mínimo local estrito de V podemos usar a transformação $Z = Wz$ e mostrar que $\tilde{z} = 0$ é ponto de mínimo local estrito de \tilde{V} definida por

$$\tilde{V}(z) = V(Wz).$$

Para mostrar que $\tilde{z} = 0$ é ponto de mínimo local estrito de \tilde{V} é suficiente mostrar que a parte quadrática $\tilde{V}_2(z)$ de \tilde{V} em $\tilde{z} = 0$, é definida positiva.

Temos $D^2\tilde{V}(0) = -\nu M + D^2\tilde{U}(0)$, onde $\tilde{U}(z) = U(Q + Wz)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2(z) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_0 & x_2 & x_1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu + c_{(2,2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\kappa + c_{(1,1)} & c_{(1,3)} \\ 0 & 0 & c_{(1,3)} & -\nu\kappa + c_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_0 & y_2 & y_1 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu - c_{(2,2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\kappa - c_{(1,1)} & -c_{(1,3)} \\ 0 & 0 & -c_{(1,3)} & -\nu\kappa - c_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\nu}{2}x_0^2 - \frac{-\nu + c_{(2,2)}}{2}x_2^2 - \frac{\nu}{2}y_0^2 - \frac{-\nu - c_{(2,2)}}{2}y_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\nu\kappa + c_{(1,1)} & c_{(1,3)} \\ c_{(1,3)} & -\nu\kappa + c_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_1 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\nu\kappa - c_{(1,1)} & -c_{(1,3)} \\ -c_{(1,3)} & -\nu\kappa - c_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que para ϵ pertencendo ao intervalo (3.90),

$$A_1 = B_1 = -\nu > 0, \quad A_2 = -\nu + c_{(2,2)} > 0, \quad B_2 = -\nu - c_{(2,2)} > 0 \quad (3.92)$$

e as matrizes

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\nu\kappa + c_{(1,1)} & c_{(1,3)} \\ c_{(1,3)} & -\nu\kappa + c_{(3,3)} \end{pmatrix}, \quad (3.93)$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -\nu\kappa - c_{(1,1)} & -c_{(1,3)} \\ -c_{(1,3)} & -\nu\kappa - c_{(3,3)} \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

são definidas positivas.

Por (3.31),

$$\nu = -\frac{(4\kappa + 1 + \kappa^2)}{2(1 + \epsilon^2\kappa)}.$$

Logo

$$A_1 = B_1 = -\nu = -\frac{1}{2} \frac{(\epsilon^4 - 14\epsilon^2 + 1)}{(1 + \epsilon^2)(3\epsilon^2 - 1)}. \quad (3.95)$$

Seja ϵ pertencente ao intervalo (3.90). Nesse intervalo A_1 não se anula e

$$\epsilon = \frac{7}{10} \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[\Rightarrow A_1 = B_1 > 0.$$

Logo para $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[$,

$$A_1 = B_1 > 0. \quad (3.96)$$

Por (3.35) temos

$$A_2 = (-\nu + c_{(2,2)}) = \frac{7\epsilon^6 - 19\epsilon^4 + 37\epsilon^2 - 1}{2(3\epsilon^2 - 1)(1 + \epsilon^2)^2}, \quad (3.97)$$

$$B_2 = (-\nu - c_{(2,2)}) = -\frac{3\epsilon^4 - 14\epsilon^2 - 1}{2(1 + \epsilon^2)^2}. \quad (3.98)$$

Para $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[$ as funções A_2 e B_2 não se anulam e

$$\epsilon = \frac{7}{10} \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[\Rightarrow A_2 > 0, \quad B_2 > 0,$$

Logo para $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[$,

$$A_2 > 0, \quad B_2 > 0. \quad (3.99)$$

Por (3.33),(3.34) e (3.36) temos

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= (-\nu + c_{(1,1)})(-\nu + c_{(3,3)}) - c_{(1,3)}^2 = \\ &= \frac{\epsilon^2(\epsilon^{14} - 13\epsilon^{12} - 31\epsilon^{10} + 291\epsilon^8 - 613\epsilon^6 + 929\epsilon^4 - 189\epsilon^2 + 9)}{2(3\epsilon^2 - 1)^4(1 + \epsilon^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \det(B_3) &= (-\nu - c_{(1,1)})(-\nu - c_{(3,3)}) - c_{(1,3)}^2 = \\ &= -2 \frac{\epsilon^8 - 18\epsilon^6 + 60\epsilon^4 - 46\epsilon^2 + 3}{(3\epsilon^2 - 1)^3(1 + \epsilon^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Para $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[$ as funções $\det(A_3)$ e $\det(B_3)$ não se anulam e

$$\epsilon = \frac{7}{10} \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[\Rightarrow \begin{cases} \det(A_3) > 0, \\ \det(B_3) > 0. \end{cases}$$

Logo, $\det(A_3) > 0$ e $\det(B_3) > 0$ se $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[$.

Além disso, chamando

$$A_3^1 = -\nu + c_{(1,1)}, \quad A_3^2 = A_3, \quad B_3^1 = -\nu - c_{(1,1)}, \quad B_3^2 = B_3,$$

segue do critério de Sylvester que se $A_3^1 > 0$ e $B_3^1 > 0$ para $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[$, então A_3 e B_3 são definidas positivas.

Novamente usando o Maple para analisar as funções A_3^1 e B_3^1 temos que elas não se anulam para $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[$ e

$$\epsilon = \frac{7}{10} \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[\Rightarrow \begin{cases} A_3^1 > 0, \\ B_3^1 > 0. \end{cases}$$

Logo para $\epsilon \in]\frac{\sqrt{3}}{3}, 1[$ temos que as matrizes A_3 e B_3 são definidas positivas.

De (3.96) e (3.99) e do fato de A_3 e B_3 serem definidas positivas segue que $\tilde{V}_2(z)$ é definida positiva e a função $\tilde{V}(z)$ serve como função de Liapunov para o equilíbrio $\tilde{z} = 0$ de $M\dot{z} = \mathbf{J}\nabla\tilde{V}(z)$. Pela Proposição 1.2.3, temos estabilidade segundo Liapunov para o equilíbrio estudado.

■

Capítulo 4

Conclusão

Apresentamos nesse trabalho o estudo da estabilidade do equilíbrio relativo nos problemas do anel de N vórtices, do anel de N vórtices com um vórtice central e do duplo anel ($2N$ vórtices).

Usando a mesma técnica apresentada em [1], no capítulo 3 mostramos que o equilíbrio relativo no problema do duplo anel de vórtices para $N = 2$ é espectralmente estável e é também estável segundo Liapunov quando o valor κ da intensidade pertence a um certo intervalo.

Mostramos também que para $N = 4$ não temos estabilidade espectral.

O duplo anel de vórtices com $N = 3$ pode ser tratado com a mesma técnica, e possivelmente também o caso em que $N = 5$. Para fazer estudo análogo para valores mais altos de N , acreditamos ser necessário simplificar algumas fórmulas, como (3.27), por exemplo.

Além do problema de generalização do estudo do duplo anel de vórtices para valores arbitrários de N , outras questões são naturalmente frutos deste estudo, como por exemplo, a relação entre o caso limite do duplo anel de vórtices quando o anel menor tende a um ponto e o problema do anel de vórtices com um vórtice central.

Outros problemas que surgem naturalmente são o estudo do duplo anel de vórtices com

um vórtice central suplementar, e o estudo de outras soluções estacionárias do problema de vórtices pontuais no plano.

Apêndice A

Proposição A.0.5 Considere $L \in \mathbb{N}^*$ e $P_L(\lambda) = \lambda^L - 1$, cujas raízes são $\omega^0 = 1, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{L-1}$ onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{L}}$. Então

$$1. \sum_{j=0}^{L-1} \omega^j = 0,$$

$$2. \sum_{j=1}^{L-1} \omega^j = -1,$$

$$3. \sum_{j=0}^{L-1} \omega^{nj} = L \text{ se } n \in \mathbb{N}, n = 0 \pmod{L},$$

$$4. \sum_{j=0}^{L-1} \omega^{nj} = 0 \text{ se } n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \pmod{L},$$

$$5. \sum_{j=0}^{L-1} \omega^{(n-2)j} = 0 \text{ se } n \in \mathbb{N}, n \neq 2 \pmod{L},$$

$$6. \sum_{j=0}^{L-1} \omega^{(n-2)j} = L \text{ se } n \in \mathbb{N}, n = 2 \pmod{L},$$

$$7. \sum_{j=1}^{L-1} \omega^{nj} = -1 \text{ se } n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \pmod{L},$$

$$8. \sum_{j=1}^{L-1} \omega^{nj} = L - 1 \text{ se } n \in \mathbb{N}, n = 0 \pmod{L}.$$

Demonstração.

$$P_L(\lambda) = \sum_{j=0}^L a_j \lambda^j$$

onde $a_L = 1$, $a_j = 0$, $j = 1, \dots, L - 1$, e $a_0 = -1$.

$$1. \sum_{j=0}^{L-1} \omega^j = -a_{L-1} = 0$$

2. Decorre imediatamente de 1.

3. Decorre do fato de $\omega^n = 1$ quando $n = 0 \pmod{L}$.

4. Decorre de 1, observando que se $n \neq 0 \pmod{L}$ então ω^n é uma das raízes L -ésimas da unidade e mais, $\omega^n \in \{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{L-1}\}$.

Assim, o subgrupo gerado por ω^n tem k elementos, ($k =$ ordem de ω^n), $km = L$, $\{1, \omega^n, \omega^{2n}, \dots, \omega^{(k-1)n}\}$ são as raízes k -ésimas da unidade, e devido a 1,

$$\sum_{j=0}^{L-1} \omega^{nj} = m \sum_{j=0}^{k-1} \omega^{nj} = 0.$$

5. Segue de 3.

6. Segue de 4.

7. Segue de 3.

8. Segue de 4.

■

Proposição A.0.6 *Se $\kappa_j = \kappa_0$, $j = 0, 2, \dots, N - 1$, então a velocidade de rotação para a configuração \tilde{Q} definida em (2.12) é*

$$\nu = -\frac{(N-1)\kappa_0}{2} - \kappa_N.$$

Demonstração.

Sabemos por (2.6) que

$$\nu = \frac{-\sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j}{2I(\tilde{Q})}, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$I(\tilde{Q}) = \frac{1}{2} \tilde{Q}^t M \tilde{Q} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \kappa_j (\tilde{x}_j^2 + \tilde{y}_j^2) = \frac{N\kappa_0}{2}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j &= \kappa_0 \kappa_1 + \kappa_0 \kappa_2 + \cdots + \kappa_0 \kappa_N \\ &\quad + \kappa_1 \kappa_2 + \cdots + \kappa_1 \kappa_N \\ &\quad + \cdots + \kappa_{N-1} \kappa_N \\ &= \frac{\kappa_0^2 (N-1)N}{2} + \kappa_0 \kappa_N N. \end{aligned}$$

Logo, substituindo em (A.1) temos

$$\nu = -\frac{(N-1)\kappa_0}{2} - \kappa_N.$$

■

Proposição A.0.7 *Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$. Então*

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2} = \left(\frac{N-1}{2} \right).$$

Demonstração.

Para calcular $\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2}$ vamos dividir em dois casos:

- *N* par

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2} &= \frac{1 - \omega^{\frac{N}{2}}}{|1 - \omega^{\frac{N}{2}}|^2} + \sum_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2} + \frac{1 - \omega^{(N-j)}}{|1 - \omega^{(N-j)}|^2} \right) \\
&= \frac{1 - \omega^{\frac{N}{2}}}{|1 - \omega^{\frac{N}{2}}|^2} + \sum_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} \frac{(1 - \omega^j) + \overline{(1 - \omega^j)}}{|1 - \omega^j|^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))}{|1 - \omega^j|^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))}{(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))^2 + (\operatorname{Im}(\omega^j))^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))}{1 - 2\operatorname{Re}(\omega^j) + (\operatorname{Re}(\omega^j))^2 + (\operatorname{Im}(\omega^j))^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{N-2}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))}{(2 - 2\operatorname{Re}(\omega^j))} = \frac{N-1}{2}.
\end{aligned}$$

- *N* ímpar

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2} &= \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2} + \frac{1 - \omega^{(N-j)}}{|1 - \omega^{(N-j)}|^2} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))}{|1 - \omega^j|^2} \\
&= \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))}{(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))^2 + (\operatorname{Im}(\omega^j))^2} \\
&= \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))}{1 - 2\operatorname{Re}(\omega^j) + (\operatorname{Re}(\omega^j))^2 + (\operatorname{Im}(\omega^j))^2} \\
&= \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))}{2(1 - \operatorname{Re}(\omega^j))} = \frac{N-1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^j}{|1 - \omega^j|^2} = \frac{N-1}{2}.$$

■

Proposição A.0.8 Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$. Então

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^{(2j)}}{|1 - \omega^{(2j)}|^2} = \frac{N-1}{2}.$$

Demonstração. Como $\omega^2 = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, o resultado segue da Proposição A.0.7. ■

Proposição A.0.9 Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$ e $\alpha = \epsilon$ ou $\alpha = \frac{1}{\epsilon}$, $\epsilon > 0$.

Então

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \alpha\omega^{(2j+1)}}{|1 - \alpha\omega^{(2j+1)}|^2} = \frac{N}{1 + \alpha^N} = \begin{cases} \frac{N}{1 + \epsilon^N}, & \text{se } \alpha = \epsilon, \\ \frac{N\epsilon^N}{1 + \epsilon^N}, & \text{se } \alpha = \frac{1}{\epsilon}. \end{cases}$$

Demonstração. Antes de calcular $\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \alpha\omega^{(2j+1)}}{|1 - \alpha\omega^{(2j+1)}|^2}$ vamos verificar algumas identidades.

O polinômio $P(z) = z^N + \alpha^N$ tem como raízes $\alpha\omega^{2j+1}$, $j = 0, \dots, N-1$, portanto

$$z^N + \alpha^N = (z - \alpha\omega)(z - \alpha\omega^3) \dots (z - \alpha\omega^{(2N-3)})(z - \alpha\omega^{(2N-1)}) = \prod_{j=0}^{N-1} (z - \alpha\omega^{2j+1}).$$

Podemos notar também que

$$\begin{aligned} Nz^{N-1} = P'(z) &= (z - \alpha\omega^3) \dots (z - \alpha\omega^{(2N-3)})(z - \alpha\omega^{(2N-1)}) + \dots + (z - \alpha\omega)(z - \alpha\omega^3) \dots (z - \alpha\omega^{(2N-3)}) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} (z - \alpha\omega^{2j+1}). \end{aligned}$$

Calculando $P(z)$ e $P'(z)$ em $z = 1$ obtemos :

$$1 + \alpha^N = P(1) = (1 - \alpha\omega)(1 - \alpha\omega^3) \dots (1 - \alpha\omega^{(2N-3)})(1 - \alpha\omega^{(2N-1)})$$

$$N = P'(1) = (1 - \alpha\omega^3) \dots (1 - \alpha\omega^{(2N-3)})(1 - \alpha\omega^{(2N-1)}) + \dots + (1 - \alpha\omega)(1 - \alpha\omega^3) \dots (1 - \alpha\omega^{(2N-3)})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \alpha\omega^{(2j+1)}}{|1 - \alpha\omega^{(2j+1)}|^2} &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \alpha\omega^{(2j+1)}}{(1 - \alpha\omega^{(2j+1)})(1 - \overline{\alpha\omega^{(2j+1)}})} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{(1 - \alpha\omega^{(2j+1)})} \\
&= \text{conj} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{(1 - \alpha\omega^{(2j+1)})} \right) \\
&= \text{conj} \left(\frac{\sum_{l=0}^{N-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} (1 - \alpha\omega^{2j+1})}{\prod_{j=0}^{N-1} (1 - \alpha\omega^{2j+1})} \right) \\
&= \text{conj} \left(\frac{P'(1)}{P(1)} \right) \\
&= \frac{N}{1 + \alpha^N},
\end{aligned}$$

onde $\text{conj}\Gamma$ indica o conjugado de Γ .

Agora substituindo $\alpha = \epsilon$ ou $\alpha = \frac{1}{\epsilon}$ temos:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \alpha\omega^{(2j+1)}}{|1 - \alpha\omega^{(2j+1)}|^2} = \begin{cases} \frac{N}{1 + \epsilon^N}, & \text{se } \alpha = \epsilon, \\ \frac{N\epsilon^N}{1 + \epsilon^N}, & \text{se } \alpha = \frac{1}{\epsilon}. \end{cases}$$

■

Proposição A.0.10 *Seja $\widetilde{Q}_j = (\widetilde{x}_j, \widetilde{y}_j)$ definido em (3.11).*

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\widetilde{x}_i - \widetilde{x}_{(i+2j)}}{\|\widetilde{Q}_i - \widetilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} &= \begin{cases} \text{Re}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2} \right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \text{Re}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2\epsilon} \right), & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases} \\
\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\widetilde{y}_i - \widetilde{y}_{(i+2j)}}{\|\widetilde{Q}_i - \widetilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} &= \begin{cases} \text{Im}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2} \right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \text{Im}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2\epsilon} \right), & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Demonstração. Lembrando que $(\widetilde{x}_j, \widetilde{y}_j) = \omega^j$ onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$.

Usando a Proposição A.0.8 temos:

• i par

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\omega^i - \omega^{(i+2j)}}{|\omega^i - \omega^{(i+2j)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\omega^i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^{(2j)}}{|1 - \omega^{(2j)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} &= \operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\omega^i - \omega^{(i+2j)}}{|\omega^i - \omega^{(i+2j)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\omega^i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^{(2j)}}{|1 - \omega^{(2j)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2} \right). \end{aligned}$$

• i ímpar

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\epsilon \omega^i - \epsilon \omega^{(i+2j)}}{|\epsilon \omega^i - \epsilon \omega^{(i+2j)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\omega^i}{\epsilon} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^{(2j)}}{|1 - \omega^{(2j)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2\epsilon} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} &= \operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\epsilon \omega^i - \epsilon \omega^{(i+2j)}}{|\epsilon \omega^i - \epsilon \omega^{(i+2j)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{\omega^i}{\epsilon} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \omega^{(2j)}}{|1 - \omega^{(2j)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2\epsilon} \right). \end{aligned}$$

■

Proposição A.0.11 *Seja $\tilde{Q}_j = (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ definido em (3.11).*

Então

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j+1)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2} = \begin{cases} \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{N}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{N\epsilon^{N-1}}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j+1)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2} = \begin{cases} \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{N}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{N\epsilon^{N-1}}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Lembrando que $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) = \omega^j$ onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$. Usando a Proposição A.0.9 temos:

- i par

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j+1)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\omega^i - \epsilon\omega^{(i+2j+1)}}{|\omega^i - \epsilon\omega^{(i+2j+1)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\omega^i \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \epsilon\omega^{(2j+1)}}{|1 - \epsilon\omega^{(2j+1)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{N}{1+\epsilon^N} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j+1)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2} &= \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\omega^i - \epsilon\omega^{(i+2j+1)}}{|\omega^i - \epsilon\omega^{(i+2j+1)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\omega^i \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \epsilon\omega^{(2j+1)}}{|1 - \epsilon\omega^{(2j+1)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{N}{1+\epsilon^N} \right). \end{aligned}$$

- i ímpar

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j+1)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\epsilon\omega^i - \omega^{(i+2j+1)}}{|\epsilon\omega^i - \omega^{(i+2j+1)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\omega^i}{\epsilon} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \frac{\omega^{(2j+1)}}{\epsilon}}{|1 - \frac{\omega^{(2j+1)}}{\epsilon}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{N\epsilon^{N-1}}{1+\epsilon^N} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j+1)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2} &= \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\epsilon\omega^i - \omega^{(i+2j+1)}}{|\epsilon\omega^i - \omega^{(i+2j+1)}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{\omega^i}{\epsilon} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \frac{\omega^{(2j+1)}}{\epsilon}}{|1 - \frac{\omega^{(2j+1)}}{\epsilon}|^2} \right) \\ &= \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{N\epsilon^{N-1}}{1+\epsilon^N} \right) \end{aligned}$$

■

Proposição A.0.12 Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$, e sejam $r, s \in \mathbb{N}$.

Então

$$\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{2i(r+s-2)} = \begin{cases} N, & \text{se } r+s=2 \pmod{N}, \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Demonstração. Basta observar que $\omega^2 = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ e usar a Proposição A.0.5. ■

Proposição A.0.13 Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$, e sejam $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $r+s=2 \pmod{N}$.

Então

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } rs=0, \\ Nk(r,s) - rs, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde

$$k(r,s) = \# \left\{ (\rho, \sigma) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leq \rho < r, 0 \leq \sigma < s, \rho + \sigma = 0 \pmod{N} \right\}$$

Demonstração.

Se $r=0$ ou $s=0$ segue imediato que

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} = 0.$$

Se $rs \neq 0$ então

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{2jr})(1 - \omega^{2js})}{(1 - \omega^{2j})^2} = \sum_{j=1}^{N-1} (1 + (\omega^2)^j + \dots + (\omega^2)^{j(r-1)})(1 + (\omega^2)^j + \dots + (\omega^2)^{j(s-1)}).$$

Observando que $\omega^2 = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ e usando a Proposição A.0.5 tem-se

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\omega^2)^{jm} = \begin{cases} N-1, & \text{se } m=0 \pmod{N}, \\ -1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} (1 + (\omega^2)^j + \dots + (\omega^2)^{j(r-1)})(1 + (\omega^2)^j + \dots + (\omega^2)^{j(s-1)}) &= k(r,s)(N-1) - (rs - k(r,s)) \\ &= Nk(r,s) - rs. \end{aligned}$$

■

Proposição A.0.14 Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$, e sejam $r, s \in N$.

Então

$$\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{(2i+1)(r+s-2)} = \begin{cases} \omega^{(r+s-2)N}, & \text{se } r+s \equiv 2 \pmod{N}, \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Demonstração. Basta observar que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{(2i+1)(r+s-2)} = \omega^{(r+s-2)} \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{2i(r+s-2)},$$

e usar a Proposição A.0.12.

■

Proposição A.0.15 Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2N}}$, e sejam $r, s \in N$. Então

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right) = 0.$$

Demonstração. Para calcular $\left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right)$ vamos dividir em dois casos:

- N par

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} + \frac{(1 - \omega^{(2N-2j-1)r})(1 - \omega^{(2N-2j-1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2N-2j-1)})^2} \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} + \frac{\overline{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s}) + \overline{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} 2\operatorname{Re} \left[\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right] \\
&= 2 \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \operatorname{Re} \left[\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right].
\end{aligned}$$

• N ímpar

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} = \\
&= \frac{(1 - (-1)^r)(1 - (-1)^s)}{(1 + \epsilon)^2} + \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \left[\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} + \frac{\overline{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right] \\
&= \frac{(1 - (-1)^r)(1 - (-1)^s)}{(1 + \epsilon)^2} + \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}-1} 2\operatorname{Re} \left[\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right] \\
&= \frac{(1 - (-1)^r)(1 - (-1)^s)}{(1 + \epsilon)^2} + 2 \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \operatorname{Re} \left[\frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right].
\end{aligned}$$

Portanto para qualquer N ,

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(1 - \omega^{(2j+1)r})(1 - \omega^{(2j+1)s})}{(1 - \epsilon\omega^{(2j+1)})^2} \right) = 0.$$

■

Proposição A.0.16 *Sejam $Q = (x_0, \dots, x_{2N-1}, y_0, \dots, y_{2N-1}) \in \mathbb{R}^{2(2N)}$ e U definido em (3.5).*

As componentes de $\nabla U(Q) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{(2N-1)}}, \frac{\partial U}{\partial y_0}, \dots, \frac{\partial U}{\partial y_{(2N-1)}} \right)$ são dadas por

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(Q) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_i - x_{(i+2j)})}{\|Q_i - Q_{(i+2j)}\|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_i - x_{(i+2j+1)})}{\|Q_i - Q_{(i+2j+1)}\|^2}, & \text{se } i \text{ é par,} \\ -\kappa^2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_i - x_{(i+2j)})}{\|Q_i - Q_{(i+2j)}\|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_i - x_{(i+2j+1)})}{\|Q_i - Q_{(i+2j+1)}\|^2}, & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i}(Q) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j)})}{\|Q_i - Q_{(i+2j)}\|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j+1)})}{\|Q_i - Q_{(i+2j+1)}\|^2}, & \text{se } i \text{ é par,} \\ -\kappa^2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j)})}{\|Q_i - Q_{(i+2j)}\|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j+1)})}{\|Q_i - Q_{(i+2j+1)}\|^2}, & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $(i+2j)$ e $(i+2j+1)$ são tomados mod $(2N)$.

Demonstração. Sabemos que $U = U_1 + \kappa^2 U_2 + \kappa U_3$, logo

$$\nabla U(Q) = \nabla(U_1 + \kappa^2 U_2 + \kappa U_3)(Q) = \nabla U_1(Q) + \kappa^2 \nabla U_2(Q) + \kappa \nabla U_3(Q).$$

Vamos calcular os gradientes de U_1 , U_2 e U_3 separadamente.

A função U_1 é dada por

$$U_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \log \|Q_{2i} - Q_{2(i+j)}\|,$$

onde os índices $(l+2j)$, $(l-2j)$, $(l+2j+1)$ e $(l-2j-1)$ são tomados mod $(2N)$.

Se l é ímpar,

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_l} = \frac{\partial U_1}{\partial y_l} = 0,$$

e se l é par,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x_l}(Q) &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|} \frac{2(x_l - x_{(l+2j)})}{2\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|} \frac{2(x_{(l-2j)} - x_l)}{2\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|^2} (-1) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_{(l-2j)} - x_l)}{\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|^2} (-1) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) \\ &= - \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial y_l}(Q) &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|} \frac{2(y_l - y_{(l+2j)})}{2\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|} 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|} \frac{2(y_{(l-2j)} - y_l)}{2\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|} (-1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_{(l-2j)} - y_l)}{\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|^2} (-1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) \\
&= - \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right).
\end{aligned}$$

A função U_2 é dada por

$$U_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \log \|Q_{2i+1} - Q_{2(i+j)+1}\|,$$

onde os índices $(l+2j)$, $(l-2j)$, $(l+2j+1)$ e $(l-2j-1)$ são tomados mod $(2N)$.

Se l é par,

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_l} = \frac{\partial U_1}{\partial y_l} = 0,$$

e se l é ímpar,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_2}{\partial x_l}(Q) &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|} \frac{2(x_l - x_{(l+2j)})}{2\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|} 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|} \frac{2(x_{(l-2j)} - x_l)}{2\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|} (-1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_{(l-2j)} - x_l)}{\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|^2} (-1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) \\
&= - \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_2}{\partial y_l}(Q) &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|} \frac{2(y_l - y_{(l+2j)})}{2\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|} 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|} \frac{2(y_{(l-2j)} - y_l)}{2\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|} (-1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_{(l-2j)} - y_l)}{\|Q_{(l-2j)} - Q_l\|^2} (-1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right) \\
&= - \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j)})}{\|Q_l - Q_{(l+2j)}\|^2} \right).
\end{aligned}$$

A função U_3 é dada por

$$U_3 = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \log \|Q_{2i} - Q_{2(i+j)+1}\|,$$

onde os índices $(l+2j)$, $(l-2j)$, $(l+2j+1)$ e $(l-2j-1)$ são tomados mod $(2N)$.

Se l é par,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_3}{\partial x_l}(Q) &= - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{|Q_l - Q_{(l+2j+1)}|} \frac{2(x_l - x_{(l+2j+1)})}{2|Q_l - Q_{(l+2j+1)}|} 1 \right) \\
&= - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j+1)})}{|Q_l - Q_{(l+2j+1)}|^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_3}{\partial y_l}(Q) &= - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{|Q_l - Q_{(l+2j+1)}|} \frac{2(y_l - y_{(l+2j+1)})}{2|Q_l - Q_{(l+2j+1)}|} 1 \right) \\
&= - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j+1)})}{|Q_l - Q_{(l+2j+1)}|^2} \right),
\end{aligned}$$

e se l é ímpar,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_3}{\partial x_l}(Q) &= - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{|Q_{(l-2j-1)} - Q_l|} \frac{2(x_{(l-2j-1)} - x_l)}{2|Q_{(l-2j-1)} - Q_l|} (-1) \right) \\
&= - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_l - x_{(l+2j+1)})}{|Q_l - Q_{(l+2j+1)}|^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_3}{\partial x_l}(Q) &= - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{|Q_{(l-2j-1)} - Q_l|} \frac{2(y_{(l-2j-1)} - y_l)}{2|Q_{(l-2j-1)} - Q_l|} (-1) \right) \\ &= - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_l - y_{(l+2j+1)})}{|Q_l - Q_{(l+2j+1)}|^2} \right).\end{aligned}$$

Portanto as componentes de $\nabla U(Q)$ são dadas por

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(Q) = \begin{cases} - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_i - x_{(i+2j)})}{|Q_i - Q_{(i+2j)}|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_i - x_{(i+2j+1)})}{|Q_i - Q_{(i+2j+1)}|^2}, & \text{se } i \text{ é par,} \\ -\kappa^2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_i - x_{i+2j})}{|Q_i - Q_{i+2j}|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_i - x_{i+2j+1})}{|Q_i - Q_{i+2j+1}|^2}, & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i}(Q) = \begin{cases} - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j)})}{|Q_i - Q_{(i+2j)}|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j+1)})}{|Q_i - Q_{(i+2j+1)}|^2}, & \text{se } i \text{ é par,} \\ -\kappa^2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j)})}{|Q_i - Q_{(i+2j)}|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j+1)})}{|Q_i - Q_{(i+2j+1)}|^2}, & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $(i + 2j)$ e $(i + 2j + 1)$ são tomados mod $(2N)$.

■

Proposição A.0.17 *Seja \tilde{Q} definida em (3.8). As componentes de $\nabla U(\tilde{Q})$ são:*

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} \operatorname{Re}(\omega^i) \left(-\frac{N-1}{2} - \frac{\kappa N}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \operatorname{Re}(\omega^i) \left(-\frac{\kappa^2(N-1)}{2\epsilon} - \frac{\kappa N \epsilon^{(N-1)}}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} \operatorname{Im}(\omega^i) \left(-\frac{N-1}{2} - \frac{\kappa N}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \operatorname{Im}(\omega^i) \left(-\frac{\kappa^2(N-1)}{2\epsilon} - \frac{\kappa N \epsilon^{(N-1)}}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

Demonstração.

Pela Proposição A.0.16

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(Q) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_i - x_{(i+2j)})}{|Q_i - Q_{(i+2j)}|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_i - x_{(i+2j+1)})}{|Q_i - Q_{(i+2j+1)}|^2}, & \text{se } i \text{ é par,} \\ -\kappa^2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(x_i - x_{i+2j})}{|Q_i - Q_{i+2j}|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_i - x_{i+2j+1})}{|Q_i - Q_{i+2j+1}|^2}, & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i}(Q) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j)})}{|Q_i - Q_{(i+2j)}|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j+1)})}{|Q_i - Q_{(i+2j+1)}|^2}, & \text{se } i \text{ é par,} \\ -\kappa^2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j)})}{|Q_i - Q_{(i+2j)}|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_i - y_{(i+2j+1)})}{|Q_i - Q_{(i+2j+1)}|^2}, & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $(i+2j)$ e $(i+2j+1)$ são tomados $\text{mod } (2N)$.

Sejam \tilde{x}_j e \tilde{y}_j definidos em (3.9) e (3.10), respectivamente. Vamos calcular as derivadas parciais de primeira ordem de U em \tilde{Q} definida em (3.8). Para isso vamos dividir em dois casos

i par

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) &= -\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j)})}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j+1)})}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) &= -\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j)})}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j+1)})}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2}. \end{aligned}$$

i ímpar

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) &= -\kappa^2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j)})}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j+1)})}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) &= -\kappa^2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j)})}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j+1)})}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2}. \end{aligned}$$

Pelas Proposições A.0.10 e A.0.11 temos

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} = \begin{cases} \text{Re}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2}\right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \text{Re}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2\epsilon}\right), & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j)}\|^2} = \begin{cases} \text{Im}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2}\right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \text{Im}(\omega^i) \left(\frac{N-1}{2\epsilon}\right), & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{(i+2j+1)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2} = \begin{cases} \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{N}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \operatorname{Re}(\omega^i) \left(\frac{N\epsilon^{N-1}}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{(i+2j+1)}}{\|\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{(i+2j+1)}\|^2} = \begin{cases} \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{N}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é par,} \\ \operatorname{Im}(\omega^i) \left(\frac{N\epsilon^{N-1}}{1+\epsilon^N} \right), & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Então, se i é par,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) &= -\operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N-1}{2} - \kappa \operatorname{Re} \left(\omega^i \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \epsilon \omega^{(2j+1)}}{|1 - \epsilon \omega^{(2j+1)}|^2} \right) \\ &= -\operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N-1}{2} - \kappa \operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N}{1+\epsilon^N} \\ &= \operatorname{Re}(\omega^i) \left(-\frac{N-1}{2} - \frac{\kappa N}{1+\epsilon^N} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) &= -\operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N-1}{2} - \kappa \operatorname{Im} \left(\omega^i \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \epsilon \omega^{(2j+1)}}{|1 - \epsilon \omega^{(2j+1)}|^2} \right) \\ &= -\operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N-1}{2} - \kappa \operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N}{1+\epsilon^N} \\ &= \operatorname{Im}(\omega^i) \left(-\frac{N-1}{2} - \frac{\kappa N}{1+\epsilon^N} \right), \end{aligned}$$

se i é ímpar,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) &= -\kappa^2 \operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N-1}{2\epsilon} - \kappa \operatorname{Re} \left(\frac{\omega^i}{\epsilon} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \frac{\omega^{(2j+1)}}{\epsilon}}{|1 - \frac{\omega^{(2j+1)}}{\epsilon}|^2} \right) \\ &= -\kappa^2 \operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N-1}{2\epsilon} - \kappa \operatorname{Re}(\omega^i) \frac{N\epsilon^{(N-1)}}{1+\epsilon^N} \\ &= \operatorname{Re}(\omega^i) \left(-\frac{\kappa^2(N-1)}{2\epsilon} - \frac{\kappa N\epsilon^{(N-1)}}{1+\epsilon^N} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) &= -\kappa^2 \operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N-1}{2\epsilon} - \kappa \operatorname{Im} \left(\frac{\omega^i}{\epsilon} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \frac{\omega^{(2j+1)}}{\epsilon}}{|1 - \frac{\omega^{(2j+1)}}{\epsilon}|^2} \right) \\ &= -\kappa^2 \operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N-1}{2\epsilon} - \kappa \operatorname{Im}(\omega^i) \frac{N\epsilon^{(N-1)}}{1+\epsilon^N} \\ &= \operatorname{Im}(\omega^i) \left(-\frac{\kappa^2(N-1)}{2\epsilon} - \frac{\kappa N\epsilon^{(N-1)}}{1+\epsilon^N} \right). \end{aligned}$$

■

Proposição A.0.18 Se $\kappa_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ é par,} \\ \kappa, & \text{se } j \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad j = 0, \dots, 2N - 1$, então

$$\sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j = \frac{N}{2}(\kappa^2(N-1) + (N-1) + 2\kappa N).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j &= \kappa_0 \kappa_1 + \kappa_0 \kappa_2 + \kappa_0 \kappa_3 + \dots + \kappa_0 \kappa_{(2N-2)} + \kappa_0 \kappa_{(2N-1)} \\ &\quad + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_3 + \dots + \kappa_1 \kappa_{(2N-2)} + \kappa_1 \kappa_{(2N-1)} \\ &\quad + \dots + \kappa_{(2N-3)} \kappa_{(2N-2)} + \kappa_{(2N-3)} \kappa_{(2N-1)} \\ &\quad + \dots + \kappa_{(2N-2)} \kappa_{(2N-1)} \\ &= \kappa + 1 + \kappa + \dots + 1 + \kappa \\ &\quad + \kappa + \kappa^2 + \dots + \kappa + \kappa^2 \\ &\quad + \dots + \kappa + \kappa^2 \\ &\quad + \dots + \kappa. \end{aligned}$$

Reescrevendo a somatória acima temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j &= \left[\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=2i+1}^{2N-1} 1 \kappa_j \right] + \left[\sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=2i+2}^{2N-1} \kappa \kappa_j \right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{N-i} \kappa_j + \sum_{j=1}^{N-i-1} 1 \right) \right] + \left[\sum_{i=0}^{N-2} \left(\sum_{j=1}^{N-i-1} \kappa + \sum_{j=1}^{N-i-1} \kappa^2 \right) \right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^{N-1} ((N-i)\kappa + (N-i-1)1) \right] + \left[\sum_{i=0}^{N-2} ((N-i-1)\kappa + (N-i-1)\kappa^2) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} (N-i)\kappa + \sum_{i=0}^{N-1} (N-i-1) + \sum_{i=0}^{N-2} (N-i-1)\kappa + \sum_{i=0}^{N-2} (N-i-1)\kappa^2 \\ &= \frac{\kappa N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} + \frac{\kappa N(N-1)}{2} + \frac{\kappa^2 N(N-1)}{2} \\ &= \frac{2N^2\kappa}{2} + \frac{N(N-1)}{2} + \frac{\kappa^2 N(N-1)}{2} \\ &= \frac{N}{2}(\kappa^2(N-1) + (N-1) + 2\kappa N). \end{aligned}$$

■

Apêndice B

Figuras das Posições de Equilíbrio para o Problema dos Vórtices

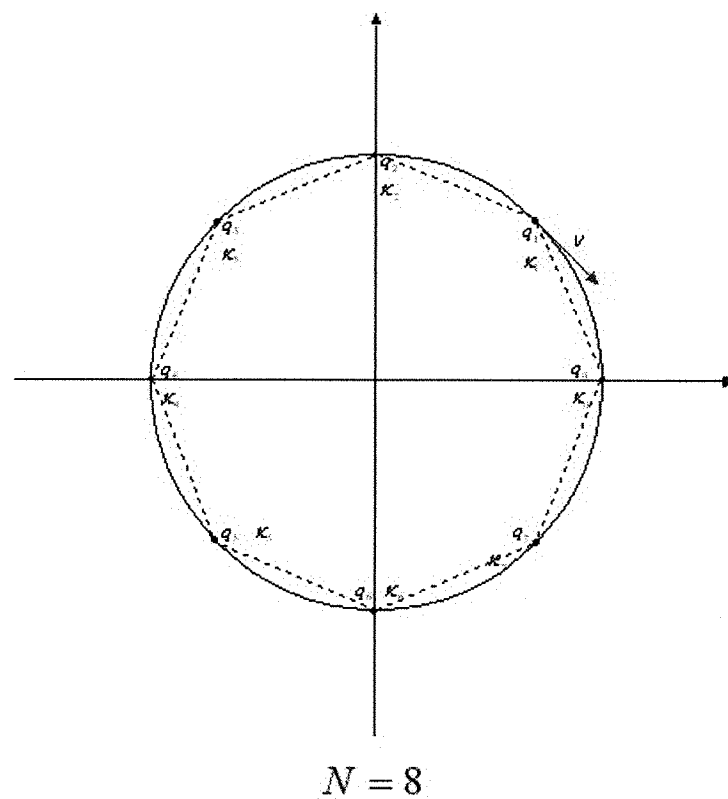
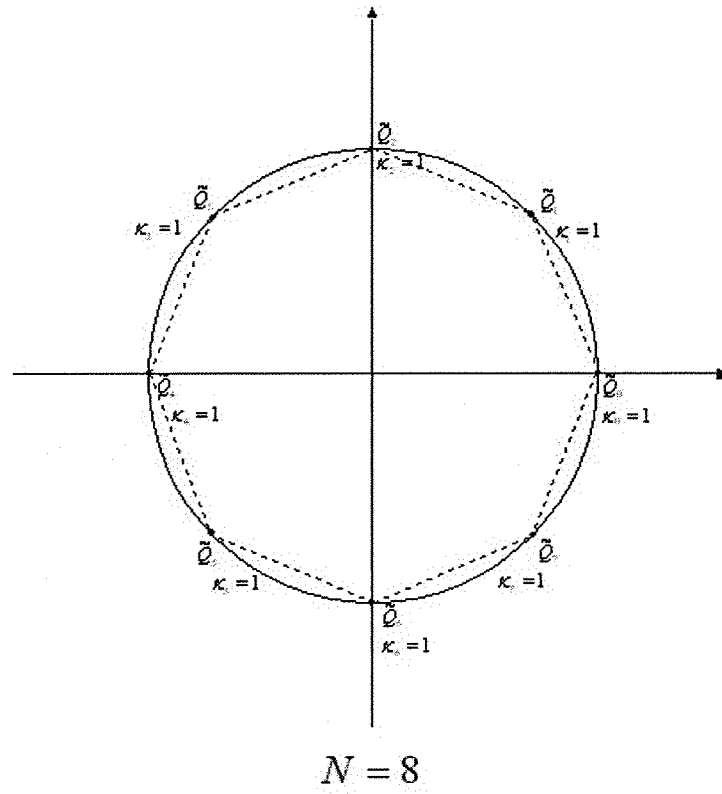


Figura B.1: Anel de Vórtices para $N = 8$ no sistema de coordenadas q

Figura B.2: Anel de Vórtices para $N=8$ no sistema de coordenadas Q

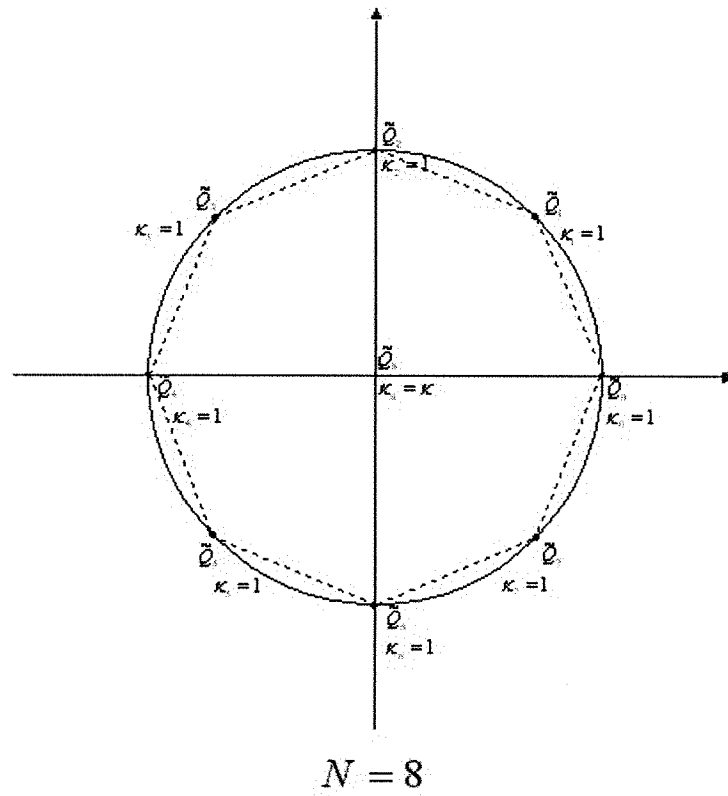


Figura B.3: Posição do equilíbrio no anel de vórtices com o vórtice central para $N = 8$ no sistema de coordenadas Q

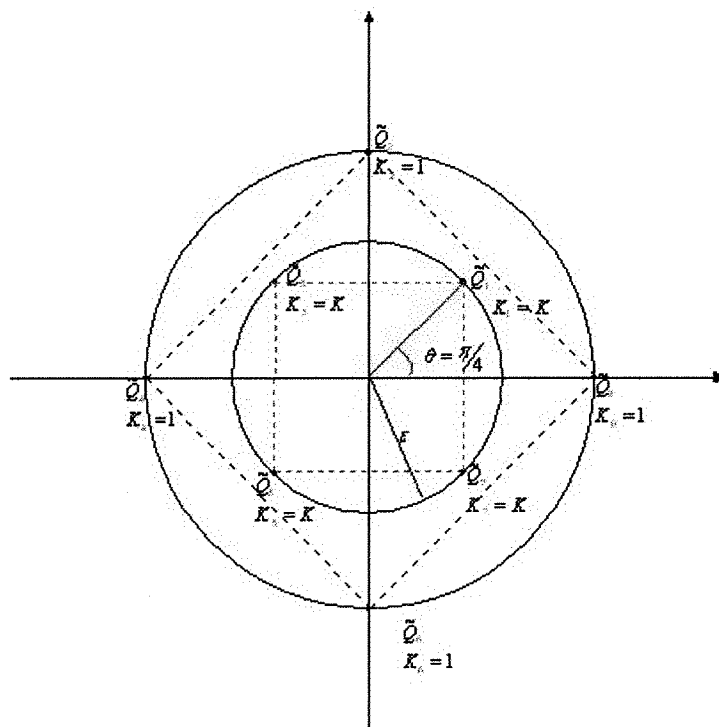


Figura B.4: Posição do equilíbrio no duplo anel de vórtices para $N = 4$ no sistema de coordenadas Q

Referências Bibliográficas

- [1] Hildeberto E. Cabral and Dieter S. Schmidt. *Stability of relative equilibria in the problem of $N+1$ vortices*. SIAM J. Math. Anal., 31(2):231-250, 1999.
- [2] Hildeberto E. Cabral and Kenneth R. Meyer. *Stability of equilibria and fixed points of conservative systems*. Nonliarity, 12:1351-1362, 1999.
- [3] L. G. Khazin. *Regular polygons of point vortices and resonance instability of steady states*. Sov. Phys. Dokl. 21(10):567-569, 1976.
- [4] Gordon J. Mertz. *Stability of body-centered polygonal configurations of ideal vortices*. Phys. Fluids, 21(7)1092-1095, 1978.
- [5] Kenneth R. Meyer and Dieter S. Schmidt. *Bifurcations of relative equilibria in the N -body and Kirchhoff problems*. SIAM J. Math. Anal., 19(6):1295-1313, 1988.
- [6] Kenneth R. Meyer and Dieter S. Schmidt. *Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 8:215-225, 1988.
- [7] Julian I. Palmore. *Measure of degenerate relative equilibria I*. Annals of Math., 104:421-429, 1976.
- [8] Julian I. Palmore. *Relative equilibria of vortices in two dimensions*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 79:716-718, 1982.
- [9] Ivan de Queiros Barros e Manuel Valentim Pera Garcia. *Mecânica Analítica Clássica*. Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1995.
- [10] Waldyr Muniz Oliva. *Integrability problems in Hamiltonian Systems*. Relatório Técnico IME-USP 9102, São Paulo, 1991.

- [11] Jorge M. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [12] J. J. Thomson. *A treatise on the motion of vortex rings: an essay to wich the Adams Prize was adjusted in 1882*. University of Cambridge, Macmillan, London, 1883.