Existência e continuidade de atrator global para uma equação de evolução com convolução

Severino Horácio da Silva

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira**

Durante a realização deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

– São Paulo, junho de 2007 –

Existência e continuidade de atrator global para uma equação de evolução com convolução

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida e
defendida por Severino Horácio da Silva
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 15 de junho de 2007.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Antonio Luiz Pereira (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira - EACH-USP
- Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho - ICMC-USP
- Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes - UNICAMP
- Prof. Dra. Claudia Buttarello Gentile - UFSCar

À Deus pela luz nos momentos difíceis.
As mulheres da minha vida:
Clotilde (minha mãe)
Luana (minha filha)
Michelli (minha esposa)

Agradecimentos

À Deus, por iluminar a minha inteligência na elaboração deste trabalho.

Ao professor Antônio Luiz Pereira pela orientação, compreensão e paciênia durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores Luiz Augusto, Marcone e Sérgio Oliva pelas surgestões nos seminários de equações de evolução.

À Professora Helena Maria Ávila e ao professor Clodoaldo pela confiaça em mim depositada e o constante apoio no decorrer de todo curso.

Aos professores da UACEN do CFP/UFCG pelo apoio no meu processo de afastamento. Em especial aos professores Carlos Davidson, Luiz Frederico e Tonires Sales.

Aos professores Hildeberto Cabral, Claudio Vidal e Francisco Brito da UFPE e Alain Albouy da Universidade de Paris VII pela confiança que muito contribuiu para meu ingresso no Doutorado.

Aos Professores Peter Bates (Brigham Young University) e Jack Hale (Georgia Institute of Technology) pela ajuda nas leituras dos artigos [4] e [18], respectivamente.

Aos Professores da UAME do CCT/UFCG pela boa base na Graduação. Em especial ao Professor Vandik pela confiança em mim depositada no momento em que mais precisei.

À minha esposa Michelli Karinne por seu amor, compreensão, paciência, estímulo e apoio destinados nos momentos mais difíceis.

À minha família que sempre me incentivou, em especial, à minha mãe Clotilde, às minhas irmãs Maria, Berenice, Severina e Judite e ao meu irmão José Horácio por todo amor e dedicação.

A todos os amigos e colegas do IME-USP, em especial, Jocirei, Éder, Rita, Andréia e Gleiciane, pelas conversas sobre Matemática.

Aos amigos Diana, Gustavo, Patrícia, Raydonal, Tatiane, Alessandro, Gilberto, Regele, Jaqueline, Juvêncio, Artur e Edjane por terem sido uma verdadeira família em São Paulo.

Aos amigos Patrícia e Lindomberg, que apesar da distância, sempre me apoiaram.

A todos os professores e funcionários do IME-USP por suas contribuições à minha formação acadêmica.

Ao CNPq e a UFCG pelo apoio financeiro.

À banca examinadora, pelas críticas e sugestões.

A todos que direta e indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho provamos a existência de atrator global para o fluxo da equação

$$\frac{\partial m(r,t)}{\partial t} = -m(r,t) + g(\beta J * m(r,t) + \beta h), \ h \geq 0, \ \beta > 1,$$

no espaço das funções 2τ -periódicas, para $\tau > 1$. Demonstramos que o fluxo para equação acima é "gradiente"e provamos a continuidade dos atratores com relação ao parâmetro $\lambda = (h, \beta)$.

Abstract

In this work we prove the existence of compact global attractor for the flow of the equation

$$\frac{\partial m(r,t)}{\partial t} = -m(r,t) + g(\beta J * m(r,t) + \beta h), \quad h,\, \beta \geq 0,$$

in the space of 2τ-periodic function, for $\tau > 1$. We show that this flow is gradient and we prove the continuity of the attractors with respect to parameter $\lambda = (h, \beta)$.

Sumário

Introdução 1

1 Preliminares 5

1.1 Conjuntos limites 5

1.2 Atratores e conjuntos absorventes 8

1.3 Sistemas gradientes 11

1.4 Existência de soluções para EDO´s em espaços de Banach 13

2 Propriedades do Ponto Sela para EDO´s em Espaços de Banach 16

2.1 Variedades centro estável e centro instável 16

2.2 Variedades estável e instável 31

2.2.1 Continuidade das variedades instáveis locais 48

3 Existência de Atrator Global 56

3.1 Formulação do problema com condições periódicas de fronteira 57

3.2 Existência de atrator 62

3.3 Um Teorema de comparação 66

3.4 Existência de um funcional de Lyapunov 70

3.5 Caracterização do atrator 76

4 Continuidade dos Atratores 78

4.1 Semicontinuidade superior dos atratores 79

4.2 Continuidade dos equilíbrios 81

4.2.1 Semicontinuidade superior dos equilíbrios 83

4.2.2 Semicontinuidade inferior dos equilíbrios 84

4.3 Existência e continuidade das variedades instáveis locais 92

4.4 Semicontinuidade inferior dos atratores 94

Um Exemplo Importante 99

Apêndice 100

A Convergência das órbitas do conjunto instável (estável) de uma curva de equilíbrios para um único equilíbrio 101

Referências Bibliográficas 103

Lista de Figuras

0.0.1 equilíbrios constantes. 2

4.4.1 densidade de entropia. 100

4.4.2 densidade de energia. 100

Introdução

A teoria geométrica ou qualitativa das equações diferenciais, iniciada por Poincaré e Lyapunov, tem como objetivo descrever a geometria do fluxo. Para isso é importante investigar a existência de soluções especiais (soluções de equilíbrio, soluções periódicas, soluções quase periódicas, etc) ou coleções de soluções (variedades invariantes) e a estabilidade ou instabilidade desses conjuntos.

Nas últimas décadas muitos dos conceitos de sistemas dinâmicos, desenvolvidos para espaços localmente compactos, foram adaptados para sistemas em dimensão infinita no caso de problemas que possuam algum tipo de propriedade dissipativa que permita reduzir a parte essencial do fluxo a um conjunto compacto. Um conceito natural de dissipação (à qual nos referimos como dissipatividade pontual) é assumir que existe um conjunto limitado no qual toda órbita eventualmente entra e permanece. Em alguns casos, é possível mostrar a existência de um conjunto invariante compacto maximal $\mathcal{A}$, denominado atrator global, tal que o conjunto ômega limite $\omega(U)$ de qualquer conjunto limitado U está em $\mathcal{A}$. Veja [16].

Existe uma classe especial de sistemas dinâmicos, chamados sistemas gradientes, para a qual a estrutura do fluxo sobre o atrator pode ser estudada em algum detalhe. Entre as várias propriedades de um sistema gradiente, podemos destacar a não existência de pontos não errantes não triviais.

Consideramos, nesse trabalho, equações diferenciais em dimensão infinita com um termo de evolução não local, a saber,

$$\frac{\partial m(r,t)}{\partial t} = -m(r,t) + g\left(\beta J * m(r,t) + \beta h\right), \tag{1}$$

onde $m(r,t)$ é uma função real sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, h e β são constantes não negativas, $J \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função par não negativa com suporte no intervalo $[-1,1]$ e integral iqual a 1. E $*$ acima denota o produto convolução, isto é:

$$(J * m)(x) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)m(y)dy. \tag{2}$$

Assumimos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é globalmente Lipschitziana, isto é, existe uma constante positiva

k_1 tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq k_1|x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Um equilíbrio de (1) é uma solução de (1) que é constante com relação a t. Daí, se m é uma solução de equilíbrio para (1), então m satisfaz

$$m(r) = g(\beta J * m(r) + \beta h). \tag{3}$$

Um caso particular da equação (1), que já é bem conhecido na literatura, é o da equação

$$\frac{\partial m(r,t)}{\partial t} = -m(r,t) + \tanh(\beta J * m(r,t) + \beta h). \tag{4}$$

A equação (4) é usada no estudo de sistemas de *spin* com dinâmica de Glauber e interação de Kac onde ela surge como limite contínuo de modelos probabilísticos, (veja [2], [8], [22], [23], [24], [25], [26] e [28]); m é interpretada como a densidade de magnetização e β^{-1} como o produto da temperatura absoluta pela constante de Boltzmann.

Se $\beta \leq 1$ a equação (4) tem apenas um equilíbrio, (veja [25] e [28]). Se $\beta > 1$ existe h^*, definido implicitamente pela equação (5) abaixo, tal que, para $0 \leq h < h^*$, a equação (4) tem três equilíbrios constantes, m_β^-, m_β^0, m_β^+, todos soluções da equação

$$m_\beta = \tanh(\beta m_\beta + \beta h), \tag{5}$$

ver Figura 0.0.1.

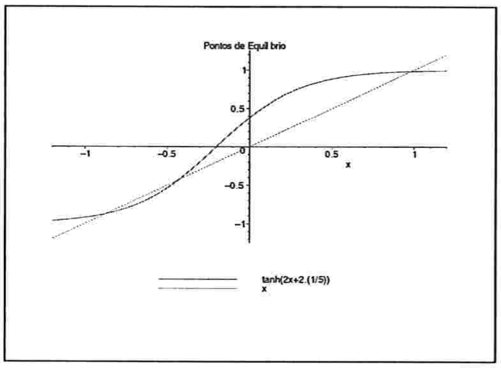

Figura 0.0.1: equilíbrios constantes.

Em [23] mostra-se a existência e unicidade (módulo translação) de ondas viajantes que conectam os equilíbrios constantes m_β^- e m_β^+. Para o caso $h = 0$, mostra-se em [24] e [26] existência e unicidade (módulo translação) de uma solução de equilíbrio para (4), referida na literatura como "*instanton*", que tende assintoticamente a $\pm m_\beta^+$. Em [26] Mostra-se ainda que a família das tranlações de um "*instanton*" tem uma propriedade de atração assintótica.

Em [2] demonstra-se, para o caso de domínios limitados e $h = 0$ na equação (4), existência de um atrator global no espaço $L^2(S^1)$ e a existência de uma solução de equilíbrio no espaço das funções $\frac{2\pi}{n}$-periódicas para cada n menor do que um certo n_0, sendo tal equilíbrio instável.

Em [25] considerando h suficientemente próximo de 1 em (4), mostra-se, usando o método de Newton, que existe uma solução de equilíbrio, referida na literatura como "*bump*" ou "*critical droplet*", que é par, crescente em $(-\infty, 0]$ e tende assintoticamente a m_β^-. Em [28] prova-se a existência de um atrator compacto global em espaços com peso e a existência de um "*critical droplet*" para $0 \leq h < h^*$.

O objetivo do presente trabalho consiste em:

(a) Provar existência de atrator global para o fluxo gerado pela equação (1) em domínios limitados, generalizando assim o Teorema 3.3 de [2] (que considera o caso $g \equiv \tanh$ e $h = 0$);

(b) Mostrar que o fluxo gerado por (1) é gradiente;

(c) Estudar a continuidade do atrator em relação ao parâmetro $\lambda = (h, \beta)$.

Vale salientar que os resultados em (b) e (c) ainda não são conhecidos na literatura mesmo para o caso da equação (4).

Este trabalho está organizada da seguinte maneira: No Capítulo 1, seguindo [10], [16] e [31], apresentamos alguns resultados básicos sobre Sistemas Dinâmicos e Equações Diferenciais Ordinárias em espaços de Banach. No Capítulo 2, além da demonstração de existência de variedades invariantes apresentada em [3], provamos um teorema sobre continuidade das variedades instáveis locais com relação a parâmetro que é essencial na prova da semicontinuidade inferior dos atratores em relação ao parâmetro λ.

No Capítulo 3 provamos a existência de um atrator glogal para o fluxo gerado por (1) e demonstramos que esse fluxo é "gradiente". Na Seção 3.1 formulamos o problema com condições periódicas de fronteira. Na Seção 3.2 estendemos alguns resultados demonstrados em [2], onde a equação (4) é estudada com $h = 0$. Em resumo, mostramos nessa seção a existência de um atrator global para (1) em domínios limitados. Na Seção 3.3 provamos um teorema de comparação que generaliza o Teorema 2.7 de [24]. Na Seção 3.4, exibimos um funcional de Lyapunov e descrevemos algumas de suas propriedades. Além disso, provamos que o fluxo para (1) é"gradiente". Na Seção 3.5 caracterizamos o atrator global em termos do conjunto instável dos equilíbrios.

O Capítulo 4 é dedicado à continuidade da família de atratores $\mathcal{A}_\lambda$ em relação ao parâmetro $\lambda = (h, \beta)$. Na Seção 4.1 provamos a semicontinuidade superior dos atratores com relação ao parâmetro λ, no retângulo $R : 0 \leq h \leq h^*$, $0 \leq \beta \leq \beta^*$, em $\lambda_0 = (h_0, \beta_0)$. As demais seções desse capítulo são dedicadas à prova da semicontinuidade inferior da família de atratores em relação ao parâmetro λ. Para isso demonstramos a continuidade dos equilíbrios e a continuidade das variedades instáveis locais dos equilíbrios em relação a esse parâmetro. Uma dificuldade encontrada foi que, devido a simetria presente no caso do modelo (1), os equilíbrios aparecem em famílias, equanto os casos tratados na literatura referem-se a equilíbrios isolados.

Exibimos a equação (4) como um exemplo importante de aplicação dos resultados obtidos nos Capítulos 3 e 4.

Finalmente, no Apêndice A, enunciamos um teorema, provado em [18], o qual garante que o conjunto ω-limite (α-limite) de qualquer órbita positiva (negativa), limitada e pré-compacta é um só ponto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados gerais sobre Equações Diferenciais Ordinárias e Sistemas Dinâmicos em espaços de Banach, que de alguma forma são usados neste trabalho. Seguimos referências clássicas como [10], [16] e [31].

1.1 Conjuntos limites

Sejam X um espaço métrico completo e $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Uma família de aplicações $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$, é um C^r-semigrupo (ou C^r sistema dinâmico), $r \geq 0$, se:
(i) $S(0) = I$,
(ii) $S(t+s) = S(t)S(s), t \geq 0, s \geq 0$,
(iii) A aplicação

$$t \mapsto S(t)x$$

é contínua para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$ e $S(t)$ é um operador contínuo de X em X com derivada de Fréchet em x até a ordem r.

Para cada $x \in X$, a órbita positiva $\gamma^+(x)$ de x é definida como

$$\gamma^+(x) = \{S(t)x,\ t \geq 0\}.$$

Uma órbita negativa por x é uma função $\phi : (-\infty, 0] \longrightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $s \leq 0$, $S(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $0 \leq t \leq -s$. *Uma órbita completa por* x é uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $s \in \mathbb{R}$, $S(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $t \geq 0$.

Como a imagem de $S(t)$ pode não ser todo X, dizer que existe uma órbita completa ou negativa por x pode impor restrições sobre x. Também, como $S(t)$ não é necessariamente injetor, não é necessário que uma órbita negativa seja única, caso ela exista. Definimos *a* *órbita negativa de* x como a união de todas as órbitas negativas por x, então

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{t \geq 0} H(t,x),$$

onde

$$H(t,x) = \{\ y\ \in X\ :\ \text{existe uma órbita negativa por } x,\ \gamma^-(x), \text{ definida por}$$
$$\phi\ : (-\infty, 0] \longrightarrow X, \text{ com } \phi(0) = x \text{ e } \phi(-t) = y\}.$$

A órbita completa $\gamma(x)$ de x é definida como

$$\gamma(x) = \gamma^-(x) \cup \gamma^+(x).$$

Quando uma órbita negativa (ou completa) por x é definida, algumas vezes escrevemos $S(t)x$ para um elemento sobre a órbita para $t < 0\ (t \in \mathbb{R})$. Para cada subconjunto $B \subset X$, sejam

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x),\ \gamma^-(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x),\ \gamma(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma(x),$$

respectivamente, a órbita positiva, a órbita negativa, a órbita completa de B, se as duas últimas existirem.

Para cada conjunto $B \subset X$, definimos os conjuntos ω-limite, $\omega(B)$, de B e α-limite, $\alpha(B)$, de B como

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B},\quad \alpha(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} H(t,B)},$$

onde $H(t,B) = \bigcup_{x \in B} H(t,x)$. Em particular para um elemento $x_0 \in X$

$$\omega(x_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)x_0},\quad \alpha(x_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} H(t,x_0)}.$$

Observação: *(caracterização dos conjuntos limites)* Não é difícil mostrar que $u \in \omega(B)$ se, e somente se, existe uma seqüência $u_n \in B$ e uma seqüência $t_n \to \infty$ tal que $S(t_n)u_n \to u$, quando $n \to \infty$. Similarmente, $u \in \alpha(B)$ se e somente se existe uma seqüência $v_n \to u$ em X e uma seqüência $t_n \to \infty$, tal que, $u_n = S(t_n)v_n \in B$ para todo n. Ver [31].

Definição 1.1.1 *Um conjunto $A \subset X$ é invariante sob o fluxo $S(t)$ se, para cada $x \in A$, existe uma órbita completa $\gamma(x)$ tal que $\gamma(x) \subset A$.*

Observação: Não é difícil mostrar que um conjunto A é invariante sob o fluxo $S(t)$ se e somente se $S(t)A = A$ para $t \geq 0$. Ver [16].

Quando $S(t)A \subset A$, $t \geq 0$, dizemos que A é positivamente invariante. Quando $S(t)A \supset A$, $t \geq 0$, dizemos que A é negativamente invariante. Uma classe importante de conjuntos invariantes são os α-limites e os ω-limites de órbitas.

Sejam X um espaço métrico e $A, B \subset X$ dois conjuntos não-vazios. Definimos a distância de A até B por

$$dist(A,B) = \sup_{x\in A} dist(x,B) = \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d_X(x,y).$$

Seja A_λ uma família de conjuntos a um parâmetro $\lambda \in \Lambda$. Dizemos que A_λ é **semi-contínua superiormente** em $\lambda_0 \in \Lambda$ se

$$dist(A_\lambda, A_{\lambda_0}) \longrightarrow 0, \ \lambda \to \lambda_0.$$

Analogamente, dizemos que A_λ é **semi-contínua inferiormente** em $\lambda_0 \in \Lambda$ se

$$dist(A_{\lambda_0}, A_\lambda) \longrightarrow 0, \ \lambda \to \lambda_0.$$

Definição 1.1.2 *Um conjunto $B \subset X$ atrai um conjunto $C \subset X$ sob o fluxo $S(t)$ se*

$$dist(S(t)C, B) \to 0, \ t \to \infty,$$

isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que se $t \geq t_0$, então $S(t)C \subset B^\varepsilon$, onde $B^\varepsilon = \{x \in X : d(x,B) < \varepsilon\}$ é a **ε-vizinhança** *de B.*

Definição 1.1.3 *Dizemos que o semigrupo $S(t)$ é assintoticamente liso se, para todo conjunto não vazio $B \subset X$, fechado, limitado e positivamente invariante, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B.*

Para a demonstração do próximo resultado necessitamos da seguinte definição, veja [5].

Definição 1.1.4 *Sejam X um espaço métrico e K um subconjunto de X. Dizemos que K é relativamente compacto em X se o fecho de K, $\overline{K}$, é compacto em X, isto é, toda seqüência em K tem uma subseqüência convergente em $\overline{K}$ na métrica de X.*

Lema 1.1.5 *Sejam X um espaço métrico e $\mathcal{A} \subset X$ um subconjunto não vazio. Suponhamos que o conjunto $\bigcup_{t\geq t_0} S(t)\mathcal{A}$ é relativamente compacto em X, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Então o conjunto $\omega(\mathcal{A})$ é não vazio, compacto e invariante. Similarmente, se os conjuntos $S(t)^{-1}\mathcal{A}$, $t \geq 0$, são não vazios e para algum $t_0 \geq 0$, o conjunto $\bigcup_{t\geq t_0} S(t)^{-1}\mathcal{A}$ é relativamente compacto em X. Então o conjunto $\alpha(\mathcal{A})$ é não vazio, compacto e invariante.*

Demonstração: Como $\mathcal{A}$ é não vazio, os conjuntos $\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{A}$ são não vazios para todo $s \geq 0$. Assim, os conjuntos

$$\overline{\bigcup_{t\geq s\geq t_0} S(t)\mathcal{A}},$$

são compactos não vazios e decrescem quando s cresce. Sendo,

$$\omega(\mathcal{A}) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{A}},$$

o $\omega(\mathcal{A})$ é então um conjunto compacto não vazio.

Se $\psi \in S(t)\omega(\mathcal{A})$, então $\psi = S(t)\varphi$ com $\varphi \in \omega(\mathcal{A})$. Usando as propriedades de semigrupos e as seqüências φ_n, t_n, dadas pela caracterização de $\omega(\mathcal{A})$, obtemos

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t+t_n)\varphi_n \longrightarrow S(t)\varphi = \psi,$$

o que mostra que $\psi \in \omega(\mathcal{A})$. Portanto, $S(t)\omega(\mathcal{A}) \subset \omega(\mathcal{A})$. Reciprocamente, se $\varphi \in \omega(\mathcal{A})$, considerando as seqüências φ_n, t_n dadas pela caracterização de $\omega(\mathcal{A})$, temos que para $t_n \geq t \geq t_0$, a seqüência $S(t_n - t)\varphi_n$ é relativamente compacta em X. Daí, existem uma subseqüência $t_{n_i} \longrightarrow \infty$ e $\psi \in X$ tal que

$$S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \longrightarrow \psi, \ t \longrightarrow \infty.$$

Então segue, da caracterização de $\omega(\mathcal{A})$, que $\psi \in \omega(\mathcal{A})$. Agora, sendo $S(t)$ um semigrupo

$$S(t_{n_i})\varphi_{n_i} = S(t)S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \longrightarrow S(t)\psi.$$

Mas

$$S(t_{n_i})\varphi_{n_i} \longrightarrow \varphi, \ n_i \longrightarrow \infty.$$

Por unicidade do limite $\varphi = S(t)\psi$, então $\varphi \in S(t)\omega(\mathcal{A})$. Portanto $\omega(\mathcal{A}) \subset S(t)\omega(\mathcal{A})$.

Das duas inclusões acima temos $S(t)\omega(\mathcal{A}) = \omega(\mathcal{A})$, completando a primeira parte da demonstração.

A prova para $\alpha(\mathcal{A})$ é análoga. ■

1.2 Atratores e conjuntos absorventes

Neste seção, seguindo [31], provamos o resultado principal deste capítulo, que assegura a existência de um atrator global para um semigrupo $S(t)$ satisfazendo algumas condições.

Definição 1.2.1 *Dizemos que $\mathcal{A} \subset X$ é um atrator global se $\mathcal{A}$ é um conjunto compacto invariante que atrai uniformemente cada conjunto limitado $B \subset X$, isto é, $dist(S(t)B, \mathcal{A}) \to 0$, quando $t \to \infty$, onde $dist(S(t)B, \mathcal{A}) = \sup_{u\in B} dist(S(t)u, \mathcal{A}) = \sup_{u\in B} \inf_{y\in\mathcal{A}} d_X(S(t)u, y)$.*

Observação: É fácil ver que todo atrator global é um conjunto maximal, isto é, todo conjunto compacto e invariante está em $\mathcal{A}$.

Definição 1.2.2 *Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de X e $\mathcal{U}$ um subconjunto aberto contendo $\mathcal{B}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é um conjunto absorvente em $\mathcal{U}$ se a órbita de cada conjunto limitado de $\mathcal{U}$ está contida em $\mathcal{B}$ depois de um certo tempo, ou seja, para todo $B_0 \subset \mathcal{U}$, B_0 limitado, existe $t_1(B_0)$ tal que $S(t)B_0 \subset \mathcal{B}$, para todo $t \geq t_1(B_0)$.*

Também dizemos que o conjunto $\mathcal{B}$, da definição acima, absorve os conjuntos limitados de $\mathcal{U}$. Quando $\mathcal{U}$=X dizemos que $\mathcal{B}$ é um conjunto absorvente em X ou simplesmente um conjunto absorvente.

Observação: A existência do atrator global $\mathcal{A}$ para um semigrupo $S(t)$ implica em existência de um conjunto absorvente. De fato, para $\varepsilon > 0$ seja V^{ε} a ε-vizinhança de $\mathcal{A}$ (isto é a união de bolas abertas de raio ε centradas em $\mathcal{A}$). Então, para cada conjunto limitado B_0, $dist(S(t)B_0, \mathcal{A}) \to 0$, quando $t \to \infty$; logo, para $t \geq t(\varepsilon)$, temos $dist(S(t)B_0, \mathcal{A}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e $S(t)B_0 \subset V^{\varepsilon}$. Isto mostra que V^{ε} é um conjunto absorvente.

A recíproca dessa observação requer algumas propriedades para o semigrupo e será dada no teorema abaixo.

Observação: Se considerarmos um subespaço $W \subset X$ mudando, na definição de conjunto absorvente, os conjuntos abertos e limitados em X pelos abertos e limitados em W obtemos o conceito de conjuntos absorventes em W.

Enunciaremos agora duas condições freqüentemente usadas na prova de existência do atrator global

1) Os operadores $S(t)$ são uniformemente compactos para t suficientemente grande, isto é, para cada conjunto limitado B existe t_0 que pode depender de B tal que

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B \tag{1.2.1}$$

é relativamente compacto em X.

2) O conjunto X é um espaço de Banach, e para cada t, $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ onde o operador $S_1(\cdot)$ é uniformemente compacto para t grande e $S_2(t)$ é uma aplicação contínua de X sobre si próprio satisfazendo o seguinte:

Para cada conjunto limitado $C \subset X$,

$$r_c(t) = \sup_{\varphi \in C} \|S_2(t)\varphi\|_X \to 0, \quad \text{quando} \quad t \to \infty. \tag{1.2.2}$$

Obviamente, se X é um espaço de Banach toda família de operadores satisfazendo (1.2.1) também satisfaz (1.2.2) com $S_2(t) \equiv 0$.

Para provarmos o próximo teorema necessitamos do seguinte lema técnico.

Lema 1.2.3 *Suponha que o semigrupo $S(t)$ satisfaz (1.2.1) ou (1.2.2). Sejam $\mathcal{U}$ um conjunto aberto conexo e convexo e $K \subset \mathcal{U}$ um conjunto compacto invariante que atrai conjuntos compactos. Então K é conexo.*

Demonstração: (Veja [31], p. 26). ■

Teorema 1.2.4 *Sejam X um espaço métrico e $S(t)$ um semigrupo sobre X. Suponha que $S(t)$ satisfaz (1.2.1) ou (1.2.2). Suponha também que existam um conjunto aberto $\mathcal{U}$ e um subconjunto limitado $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{B}$ é absorvente em $\mathcal{U}$. Então o conjunto $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ é o atrator limitado maximal em $\mathcal{U}$. Além disso, se X é um espaço de Banach e $\mathcal{U}$ é conexo e convexo, então $\mathcal{A}$ é também conexo.*

Demonstração: Primeiro provaremos o Teorema no caso simples onde assumimos (1.2.1).

Como o conjunto $\bigcup_{t\geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ é relativamente compacto segue, do Lema 1.1.5, que o $\omega(\mathcal{B})$ é um conjunto não vazio compacto e invariante. Mostraremos agora que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ é um atrator em $\mathcal{U}$, ou seja, atrai conjuntos limitados de $\mathcal{U}$.

Argumentando por contradição, suponhamos que para algum conjunto limitado $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{U}$, $\text{dist}(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A})$ não tende para 0 quando $t \longrightarrow \infty$. Então existe $\delta > 0$ e uma seqüência $t_n \longrightarrow \infty$ tal que

$$\text{dist}(S(t_n)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \geq \delta > 0, \quad \forall\, n.$$

Para cada n existe $b_n \in \mathcal{B}_0$ satisfazendo

$$\text{dist}(S(t_n)b_n, \mathcal{A}) \geq \frac{\delta}{2} > 0. \tag{1.2.3}$$

Como $\mathcal{B}$ é absorvente, $S(t_n)\mathcal{B}_0$, e portanto $S(t_n)b_n$, pertencem a $\mathcal{B}$ para n suficientemente grande (isto é, tal que $t_n \geq t_1(\mathcal{B}_0)$). A seqüência $S(t_n)b_n$ é relativamente compacta e possui pelo menos um ponto limite β.

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i} - t_1)S(t_1)b_{n_i}.$$

Como $S(t_1)b_n \in \mathcal{B}$, β pertence a $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ e isto contradiz (1.2.2).

O atrator $\mathcal{A}$ é claramente maximal pois, se $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$ for um outro atrator limitado, então $\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}$ pois $\mathcal{A}' = S(t)\mathcal{A}'$ que está contido em $\mathcal{B}$ para t suficientemente grande (já que todo atrator é invariante e $\mathcal{B}$ é absorvente), conseqüentemente, $\omega(\mathcal{A}') = \mathcal{A}' \subset \omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. Portanto $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

Finalmente, a conexidade de $\mathcal{A}$ segue do Lema 1.2.3 acima, e o teorema está provado neste caso.

Provaremos, agora, o teorema sob a hipótese (1.2.1).

O Lema 1.1.5 mostra que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ é não vazio compacto e invariante.

O fato que $\mathcal{A}$ atrai conjuntos limitados é provado por contradição como no primeiro caso: a diferença surge apenas quando provamos que $S(t_n)b_n$ é relativamente compacto; pois não temos a validade de (1.2.1). Para contornar isto, observamos que $S_1(t_n)b_n$ é relativamente compacto. Assim, se (φ_n) é limitada e $t_n \to \infty$, então $S_2(t_n)b_n \to 0$ e $S_1(t_n)b_n$ é convergente se e somente se $S(t_n)b_n$ convergir (e nesse caso os limites são iguais) o que implica que $S(t_n)b_n$ é relativamente compacto.

A maximalidade é provada da mesma forma que no primeiro caso. ■

Comentário: Quando o conjunto aberto $\mathcal{U}$ é todo espaço X o Teorema acima assegura a existência de um atrator global em X ou simplesmente um atrator global.

1.3 Sistemas gradientes

Nesta seção, consideramos uma classe especial de sistemas, chamados sistemas gradientes, para os quais a estrutura do fluxo sobre o atrator global pode ser descrita em algum detalhe. Veja [16].

Seja $S(t)$, $t \geq 0$ um C^r-semigrupo sobre um espaço métrico completo X e seja E o conjunto dos pontos de equilíbrios de $S(t)$; isto é $x \in E$ se e somente se $S(t)x = x$ para $t \geq 0$. Lembramos que x é um ponto de equilíbrio hiperbólico se o espectro $\sigma(DS(t)(x))$ não intercepta o círculo unitário com centro na origem em $\mathbb{C}$, onde para cada $t \geq 0$, $DS(t)x$ indica a derivada de Fréchet de $S(t)$ em x.

Se $x \in E$, o **conjunto instável** de x é

$$W^u(x) = \{y \in X \, : \, S(-t)y \,\text{é definido para}\, t \geq 0 \,\text{e}\, S(-t)y \to x, \, t \to \infty\}.$$

Se x é hiperbólico, existe uma vizinhança V de x tal que

$$W^u_{loc}(x) = \{y \in W^u(x) \, : \, S(-t)y \in V, \, t \geq 0\},$$

é uma subvariedade de X. Analogamente, o **conjunto estável** de x é

$$W^s(x) = \{y \in X \, : \, S(t)y \to x, \, t \to \infty\}.$$

Se x é hiperbólico, existe uma vizinhança $\widetilde{V}$ de x tal que

$$W^s_{loc}(x) = \{y \in W^s(x) \, : \, S(t)y \in \widetilde{V}, \, t \geq 0\},$$

é uma subvariedade de X. Se $S(t)$ é injetor e $DS(t)(y)$, $t \geq 0$, $y \in X$, é um isomorfismo, então $W^u(x)$ é uma subvariedade mergulhada de X. Além disso, $W^u_{loc}(x) = W^u(x) \cap V$, (veja [6]) e [16].

Definição 1.3.1 *Seja $S(t)$ um C^r-semigrupo sobre X, $t \geq 0$, $r \geq 1$. Um funcional de Lyapunov para $S(t)$ é uma função contínua $F : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*
(1) F é limitado inferiormente;
(2) $F(x) \to \infty$, quando $|x| \to \infty$;
(3) $F(S(t)x)$ é decrescente em t para cada $x \in X$;
(4) Se x é tal que $S(t)x$ é definido para $t \in \mathbb{R}$ e $F(S(t)x) = F(x)$ para $t \in \mathbb{R}$, então x é um equilíbrio.

Definição 1.3.2 *Dizemos que um C^r-semigrupo $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$, $r \geq 1$ é gradiente se:*
(i) Cada órbita positiva limitada é pré-compacta;
(ii) Existe um funcional de Lyapunov $F : X \to \mathbb{R}$ para $S(t)$.

Lema 1.3.3 *Se $S(t)$ é um semigrupo gradiente, então $\omega(x) \subset E$ para cada $x \in X$. Além disso, se $S(t)$ é injetor e $\gamma^-(x)$ é uma órbita pré-compacta por x, então $\alpha(x) \subset E$.*

Demonstração: Como a órbita positiva $\gamma^+(x)$ é pré-compacta, o conjunto $\{F(S(t)x),\, t \geq 0\}$ é limitado inferiormente. Então, pela condição (3), $F(S(t)x) \to c$, quando $t \to \infty$, onde c é uma constante. Sendo $\gamma^+(x)$ pré-compacta, $\omega(x)$ é compacto e invariante. O fato de que F é contínuo implica $F(S(t)y) = c$ para $t \in \mathbb{R}$ e todo $y \in \omega(x)$. A condição (4) implica $y \in E$.

Agora, suponha que $\gamma^-(x)$ é uma órbita pré-compacta e $x \notin E$. Então $\alpha(x)$ é compacto. Se $y \in \alpha(x)$, existe uma seqüência $t_n \to -\infty$, quando $n \to \infty$ tal que $S(t_n)x \to y$, quando $n \to \infty$. Escolha t_n tal que $t_{n-1} - t_n \geq 1$, para todo n. Assim, para cada $t \in (0,1)$, a condição (3) implica

$$F(S(t_{n-1})x) \leq F(S(t_n + t)x) \leq F(S(t_n)x)$$

para todo n, e então $F(S(t_n + t)x) \to F(y)$, quando $n \to \infty$. Como $F(S(t_n + t)x)$ também converge para $F(S(t)y)$, quando $n \to \infty$, segue que $F(S(t)y) = F(y)$ para todo $t \in (0,1)$ e, portanto $F(S(t)y) = F(y)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$. A condição (4) implica então que y é um ponto de equilíbrio. ∎

1.4 Existência de soluções para EDO´s em espaços de Banach

Nesta seção, seguindo [10], consideramos em um espaço de Banach X equações diferenciais não lineares da forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.4.4}$$

onde $f(t, x)$ é uma dada função com valores em X de uma variável real t e uma variável $x \in X$.

A questão da existência de soluções dessa equação está bem estudada na literatura, (veja [1], [9], [10] e [12]). Daremos apenas um resultado simples, que generaliza o clássico Teorema de Picard, (veja [30]).

Teorema 1.4.1 *(Existência Local) Suponha que existe uma vizinhança de um ponto (t_0, x_0) na qual a função $f(t, x)$ é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz uniforme em t, isto é,*

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1))\| \leq M\|x_2 - x_1\|, \tag{1.4.5}$$

para alguma constante positiva finita M. Então existe uma vizinhança de t_0 na qual a equação (1.4.4) tem uma única solução $x = \phi(t)$ satisfazendo a condição inicial

$$\phi(t_0) = x_0. \tag{1.4.6}$$

Demonstração: A prova é baseada no Princípio da Contração. Das hipóteses segue que existem constantes positivas ε, η e M_1 tais que, quando $|t - t_0| \leq \varepsilon$ e $\|x - x_0\| \leq \eta$, a função $f(t, x)$ satisfaz

$$\|f(t, x)\| \leq M_1 < \infty. \tag{1.4.7}$$

Sejam $\delta = \min\left(\varepsilon, \frac{\eta}{M_1}\right)$ e $C_\delta(X)$ o espaço de Banach das funções contínuas $x(t)$ que estão definidas para $|t - t_0| \leq \delta$, assumindo seus valores em X, munido da seguinte norma

$$|||x||| = \sup_{|t-t_0|\leq\delta} \|x(t)\|.$$

Seja

$$B[x_0, \eta] = \{x \in C_\delta \ : \ |||x - x_0||| \leq \eta\}.$$

A condição de limitação (1.4.7) implica que o operador

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

aplica $B[x_0, \eta]$ em si própria, já que para $x(t) \in B[x_0, \eta]$,

$$\|(Tx)(t) - x_0\| \leq \delta M_1 \leq \eta.$$

Além disso, quando x_1, $x_2 \in B[x_0, \eta]$, da condição de Lipschitz (1.4.5), segue a estimativa

$$\begin{aligned} \|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\| ds \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} \|x_2(s) - x_1(s)\| ds \\ &\leq M(t - t_0)|||x_2 - x_1|||. \end{aligned}$$

Repetindo o argumento, obtemos

$$\begin{aligned} \|(T^2x_2)(t) - (T^2x_1)(t)\| &\leq M^2|||x_2 - x_1||| \int_{t_0}^{t} (t - t_0) ds \\ &\leq \frac{[M(t - t_0)]^2}{2!} |||x_2 - x_1|||, \end{aligned}$$

e, por recorrência

$$\|(T^nx_2)(t) - (T^nx_1)(t)\| \leq \frac{[M(t - t_0)]^n}{n!} |||x_2 - x_1|||.$$

Então

$$\|(T^nx_2)(t) - (T^nx_1)(t)\| \leq \frac{[M\delta]^n}{n!} |||x_2 - x_1|||. \tag{1.4.8}$$

Portanto o operador T^n é uma contração em $B[x_0, \eta]$ para n suficientemente grande. Daí, pelo Princípio da Contração, existe uma única solução $x(t) \in B[x_0, \eta]$ da equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds, \tag{1.4.9}$$

que é equivalente ao problema de Cauchy (1.4.4), (1.4.6) para $x(t) \in B[x_0, \eta]$. ∎

Observação: O Teorema 1.4.1 assegura a existência de solução apenas em uma vizinhança do ponto t_0. Mas, tendo construído uma solução no intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, podemos tentar estendê-la. É obvio que seremos capazes de continuar tal procedimento indefinidamente se, por exemplo, as condições (1.4.5) e (1.4.7) são satisfeitas para todo $x \in X$ com as mesmas contantes M e M_1. Em particular, se as condições (1.4.5) e (1.4.7) são satisfeitas para todo $t \in [\alpha, \infty)$, $\|x - x_0\| \leq \eta$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e a solução da equação (1.4.4) é conhecida e está em alguma bola $\|x(t) - x_0\| \leq \eta_0 < \eta$, ela pode ser estendida indefinidamente quando $t \longrightarrow \infty$.

Se impusermos exigências de caráter global sobre $f(t, x)$, podemos obter existência global das soluções sem hipótese prévia sobre seu comportamento.

Teorema 1.4.2 *(Existência Global) Suponha que existe um domínio* $[a,b] \times X$ *sobre o qual a função* $f(t,x)$ *é contínua em* t *e satisfaz a condição de Lipschitz (1.4.5). Então para cada* $(t_0, x_0) \in [a,b] \times X$ *o problema de Cauchy (1.4.4), (1.4.6) tem uma única solução* $x = \phi(t)$ *definida sobre* $[a,b]$.

Demonstração: A prova é análoga ao Teorema 1.4.1. É suficiente notar que:

(a) as hipóteses do teorema implicam a limitação de $f(t,x)$ sobre $[a,b] \times K$, onde K é um subconjunto compacto arbitrário de X;

(b) o papel de $B[x_0, \eta]$ é exercido pelo espaço $C(X)$ das funções contínuas $x(t)$ que estão definidas sobre $[a,b]$, assumindo valores em X e tem a norma

$$|||x||| = \sup_{t \in [a,b]} \|x(t)\| < \infty.$$

Observação: Note que, se a equação (1.4.4) é autônoma, isto é, f não depende explicitamente de t, então f é contínua em t para $t \in \mathbb{R}$ e portanto, os Teoremas 1.4.1 e 1.4.2 se aplicam. Em particular se f é globalmente Lipschitz temos que a solução do problema de Cauchy (1.4.4), (1.4.6) existe para todo $t \in \mathbb{R}$, (veja [1]).

Capítulo 2

Propriedades do Ponto Sela para EDO´s em Espaços de Banach

Neste capítulo, além da demonstração de existência de variedades invariantes apresentada em [3], provamos um teorema de continuidade das variedades instáveis locais com relação a um parâmetro.

2.1 Variedades centro estável e centro instável

Nesta seção, seguindo [3], mostraremos a existência de variedades centro estável e centro instável para a EDO (2.1.1) abaixo.

Seja $A_{n\times n}$ uma $n \times n$ matriz e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua com $f(0) = 0$. Um propósito da análise de ponto sela de sistemas autônomos clássicos é comparar, em uma vizinhança de $\varphi = 0$, as propriedades da EDO não linear

$$\dot{\varphi} = A\varphi + f(\varphi) \tag{2.1.1}$$

com a equação linear

$$\dot{\varphi} = A\varphi. \tag{2.1.2}$$

Aqui estendemos essa análise para certas EDO´s em espaços de Banach, nas quais o operador linear A pode ser não limitado.

Sejam X um espaço de Banach com norma $|\cdot|$ e $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C^0-semigrupo de operadores lineares sobre X.

Definição 2.1.1 *Se $T(t)$ é um C^0-semigrupo sobre X, seu gerador infinitesimal é a aplicação $A : D(A) \subset X \to X$ definida por*

$$A\varphi = \lim_{t\to 0_+} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t},$$

o domínio $D(A)$ consiste de todos os $\varphi \in X$ para os quais esse limite existe (como um limite na topologia da norma de X). Nesse caso, dizemos também que $T(t)$ é gerado por A.

Teorema 2.1.2 *(Hille e Phillips) Seja $T(t)$ um C^0-semigrupo sobre X. Então $T(t)$ possui um gerador infinitesimal, A, densamente definido em X.*

Demonstração: (Veja [13] ou [21]).

Teorema 2.1.3 *Seja $T(t)$ um C^0-semigrupo sobre X. Então*
(i) existem constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tal que

$$|T(t)\varphi| \leq Me^{\mu t}|\varphi|, \ \forall \ \varphi \in X, \ t \geq 0; \tag{2.1.3}$$

(ii) a aplicação $t \mapsto \|T(t)\|$ é semi-contínua inferiormente, logo mensurável;
(iii) se A é o gerador infinitesimal de $T(t)$, então A é densamente definido e fechado. Para $\varphi \in D(A)$, $t \mapsto T(t)\varphi$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi = AT(t)\varphi = T(t)A\varphi, \ t \geq 0.$$

Demonstração: (Veja [20], p. 6).

Seja η uma função contínua não decrescente a valores reais sobre $[0, \infty)$ com $\eta(0) = 0$. Seja $f : X \to X$ uma função contínua (não linear) tal que
(i) $f(0) = 0$;
(ii) $|f(\varphi) - f(\psi)| \leq \eta(r)|\varphi - \psi|$, $|\varphi|, |\psi| < r$.
Observação: No que segue, suporemos a equação (2.1.1) sobre X, com A um operador linear (não necessariamente limitado) e f satisfazendo (i) e (ii) acima. Suporemos também que $T(t)$ é o semigrupo gerado por A.

Assumiremos as seguintes hipóteses:
(1) (BU) Para cada $t \geq 0$, $T(t)$ é injetivo;
(2) X admite uma decomposição tal que:
(2a) $X = \pi_- X \oplus \pi_0 X \oplus \pi_+ X$, onde π_-, π_0, π_+ são projeções lineares contínuas sobre X.

A condição (2a) implica

$$\pi_-\pi_0 = \pi_0\pi_- = \pi_-\pi_+ = \pi_+\pi_- = \pi_+\pi_0 = \pi_0\pi_+ = 0,$$

e

$$\pi_-\pi_- = \pi_-, \ \pi_0\pi_0 = \pi_0, \ \pi_+\pi_+ = \pi_+, \ \pi_- + \pi_0 + \pi_+ = I.$$

Se $\varphi \in X$ escrevemos $\varphi_- = \pi_-\varphi$, $\varphi_0 = \pi_0\varphi$, $\varphi_+ = \pi_+\varphi$.

Usaremos, em todo este capítulo, a norma equivalente $\|\cdot\|$ sobre X, onde para toda $\varphi \in X$

$$\|\varphi\| = |\varphi_-| + |\varphi_0| + |\varphi_+|.$$

(2b) Para cada $t \geq 0$, $T(t)$ comuta com as projeções π_-, π_0, π_+ de forma que cada subespaço π_-X, π_0X, π_+X é positivamente invariante por $T(t)$. Além disso, $T(t)$ pode ser estendido a um grupo de operadores lineares contínuos sobre $\pi_0X \oplus \pi_+X$;

(2c) Existem constantes

$$a_-,\ a_0,\ a_+,\ \min\{a_-, a_+\} > a_0 \geq 0 \text{ e } K \geq 1,$$

tal que

$$\|T(t)\varphi_-\| \leq Ke^{-a_-t}\|\varphi_-\|,\ \forall\, \varphi \in X,\ t \geq 0;$$

$$\|T(t)\varphi_0\| \leq Ke^{a_0|t|}\|\varphi_0\|,\ \forall\, \varphi \in X,\ t \in \mathbb{R}; \tag{2.1.4}$$

$$\|T(t)\varphi_+\| \leq Ke^{a_+t}\|\varphi_+\|,\ \forall\, \varphi \in X,\ t \leq 0.$$

Sem perda de generalidade vamos assumir $a_0 > 0$.

Quando o operador A é limitado temos $T(t) = e^{At}$, (veja [20]). E para (2.1.2), $X = \mathbb{R}^n$, $T(t) = e^{At}$ e os subespaços $\pi_-\mathbb{R}^n$, $\pi_0\mathbb{R}^n$, $\pi_+\mathbb{R}^n$ correspondem, respectivamente, aos auto-espaços generalizados de A associados aos autovalores com parte real negativa, parte real nula e parte real positiva.

Observação: Quando $\pi_0 \equiv 0$ temos uma dicotomia exponencial para $T(t)$, (veja [10], [16] e [19]).

Em virtude do Teorema 2.1.3, a equação (2.1.1) gera um fluxo em X dado por

$$w(t) = T(t)w(0) + \int_0^t T(t-s)f(w(s))ds. \tag{2.1.5}$$

A integral em (2.1.5) é a integral de Bochner (que é uma extensão natural da integral de Lebesgue em um espaço de Banach de dimensão infinita, veja [1]).

Uma solução contínua, $w(t)$, de (2.1.5) é chamada uma "solução mild" de (2.1.1). Quando a solução, $w(t)$, de (2.1.5) é continuamente diferenciável ela é uma solução clássica de (2.1.1). Consideraremos apenas soluções contínuas de (2.1.5) para $t \geq 0$. Para resultados sobre regularidade de "soluções mild", (veja [27], Capítulo 6).

Lema 2.1.4 *Seja $\tau > 0$ e $w : [0,\tau] \to X$ uma solução contínua de (2.1.5). Então*

$$y(t) = w(t+\tau),\ \forall\, t \in [-\tau, 0] \tag{2.1.6}$$

satisfaz

$$T(-t)y(t) = y(0) + \int_0^t T(-s)f(y(s))ds, \ \forall\, t \in [-\tau, 0]. \tag{2.1.7}$$

Reciprocamente, se (BU) vale e y satisfaz (2.1.7), então w satisfaz (2.1.5) em $[0,\tau]$.

Demonstração: Suponha que w satisfaz (2.1.5) e seja y dada por (2.1.6). Então, se $t \in [-\tau, 0]$, segue que

$$\begin{aligned} T(-t)y(t) &= T(-t)w(t+\tau) \\ &= T(-t)\left[T(t+\tau)w(0) + \int_0^{t+\tau} T(t+\tau-s)f(w(s))ds\right] \\ &= T(\tau)w(0) + \int_0^{t+\tau} T(\tau-s)f(w(s))ds. \end{aligned}$$

Mas, de (2.1.5) temos

$$T(\tau)w(0) = w(\tau) - \int_0^\tau T(\tau-s)f(w(s))ds,$$

então

$$\begin{aligned} T(-t)y(t) &= w(\tau) - \int_0^\tau T(\tau-s)f(w(s))ds + \int_0^{t+\tau} T(\tau-s)f(w(s))ds \\ &= y(0) + \int_\tau^{t+\tau} T(\tau-s)f(w(s))ds. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $r = s - \tau$, resulta

$$\begin{aligned} T(-t)y(t) &= y(0) + \int_0^t T(-r)f(w(r+\tau))dr \\ &= y(0) + \int_0^t T(-r)f(y(r))dr, \end{aligned}$$

ou seja, y satisfaz (2.1.7). Reciprocamente, suponha que y satisfaz (2.1.7). Então

$$y(0) = T(-t)y(t) - \int_0^t T(-s)f(y(s))ds, \ t \in [-\tau, 0],$$

com $t = -\tau$, segue que

$$y(0) = T(\tau)y(-\tau) - \int_0^{-\tau} T(-s)f(y(s))ds,$$

sendo $y(0) = w(\tau)$ e $y(-\tau) = w(0)$, resulta

$$w(\tau) = T(\tau)w(0) - \int_0^{-\tau} T(-s)f(w(s+\tau))ds. \tag{2.1.8}$$

Por outro lado, de (2.1.7), temos

$$T(-t)w(t+\tau) = w(\tau) + \int_0^t T(-s)f(w(s+\tau))ds,$$

fazendo $-t = \tau - \theta$, obtemos

$$T(\tau-\theta)w(\theta) = w(\tau) + \int_0^{\theta-\tau} T(-s)f(w(s+\tau))ds,$$

então, usando (2.1.8), resulta

$$\begin{aligned} T(\tau-\theta)w(\theta) &= T(\tau)w(0) - \int_0^{-\tau} T(-s)f(w(s+\tau))ds + \int_0^{\theta-\tau} T(-s)f(w(s+\tau))ds \\ &= T(\tau)w(0) - \int_{\theta-\tau}^{-\tau} T(-s)f(w(s+\tau))ds, \end{aligned}$$

equivalentemente

$$T(\tau-\theta)\left[w(\theta) - T(\theta)w(0) + \int_{\theta-\tau}^{-\tau} T(\theta-\tau-s)f(w(s+\tau))ds\right] = 0,$$

fazendo a mudança de variável $r = s + \tau$, temos

$$T(\tau-\theta)\left[w(\theta) - T(\theta)w(0) - \int_0^{\theta} T(\theta-r)f(w(r))dr\right] = 0.$$

Então, pela hipótese (BU), segue que

$$w(\theta) - T(\theta)w(0) - \int_0^{\theta} T(\theta-r)f(w(r))dr = 0.$$

Portanto w satisfaz (2.1.5). ∎

Definição 2.1.5 *Uma solução de (2.1.5) no intervalo* $[-\tau, 0]$, $\tau > 0$ *é uma função* $y : [-\tau, 0] \to X$ *dada por (2.1.6), onde* w *é uma solução de (2.1.5) em* $[0, \tau]$.

Definimos, para $\lambda > 0$

$$f_\lambda(\varphi) = \begin{cases} f(\varphi), & se\ \|\varphi\| \le \lambda, \\ f\left(\frac{\lambda\varphi}{\|\varphi\|}\right), & se\ \|\varphi\| > \lambda. \end{cases} \tag{2.1.9}$$

As propriedades de f e η garantem a existência de uma função contínua não decrescente $\nu(\lambda)$, $\lambda \ge 0$, $\nu(0) = 0$ tal que, para toda φ, $\psi \in X$

$$\begin{aligned} \|f_\lambda(\varphi)\| &\le \nu(\lambda)\lambda, \\ \|f_\lambda(\varphi) - f_\lambda(\psi)\| &\le \nu(\lambda)\|\varphi - \psi\|. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Com a finalidade de estudar (2.1.5) localmente, consideraremos a equação

$$w(t) = T(t)w(0) + \int_0^t T(t-s)f_\lambda(w(s))ds. \tag{2.1.11}$$

Lema 2.1.6 *Seja* $\varphi \in X$*. Existe* $\lambda > 0$ *tal que a equação (2.1.11) possui uma única solução contínua,* $w(t)$*, definida para* $t \geq 0$*, com* $w(0) = \varphi$*.*

Demonstração: Seja $T > 0$. Definimos o conjunto

$$G = \{g : [0,T] \to X \text{ contínuas com } g(0) = \varphi\}.$$

Para $\delta > 0$, definimos a norma

$$\|g\|_\delta = \sup_{t \in [0,T]} e^{-\delta t} \|g(t)\| < \infty.$$

É fácil verificar que G é um espaço métrico completo com a norma $\|\cdot\|_\delta$.

Definimos o operador P sobre G por

$$(Pg)(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s) f_\lambda(g(s))ds, \; t \in [0,T]. \tag{2.1.12}$$

Fazendo uma mudança de variável adequada temos

$$\int_0^t T(t-s) f_\lambda(g(s))ds = \int_0^t T(s) f_\lambda(g(t-s))ds. \tag{2.1.13}$$

Usando (2.1.3), (2.1.10) e (2.1.13) é fácil mostrar que $P : G \to G$. Além disso, usando (2.1.3) e (2.1.10), para $g_1, g_2 \in G$ e $t \in [0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|(Pg_1)(t) - (Pg_2)(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)[f_\lambda(g_1(s)) - f_\lambda(g_2(s))]\| ds \\
&\leq \int_0^t M e^{\mu(t-s)} \|f_\lambda(g_1(s)) - f_\lambda(g_2(s))\| ds \\
&\leq \int_0^t M e^{\mu(t-s)} \nu(\lambda) \|g_1(s) - g_2(s)\| ds \\
&\leq \int_0^t M\nu(\lambda) e^{\mu(t-s)} e^{\delta s} e^{-\delta s} \|g_1(s) - g_2(s)\| ds \\
&\leq \int_0^t M\nu(\lambda) e^{\mu(t-s)} e^{\delta s} \|g_1 - g_2\|_\delta ds.
\end{aligned}$$

Logo

$$e^{-\delta t} \|(Pg_1)(t) - (Pg_2)(t)\| \leq \|g_1 - g_2\|_\delta M\nu(\lambda) \int_0^T e^{(\mu-\delta)(t-s)} ds. \tag{2.1.14}$$

Portanto, se $\delta > \mu$ e λ é tal que

$$M\nu(\lambda) \int_0^T e^{(\mu-\delta)(t-s)} ds < 1,$$

o operador P é uma contração, então possui um único ponto fixo w. ∎

Definição 2.1.7 *Um subconjunto $K \subset X$ é localmente positivamente invariante sob o fluxo (2.1.5) se, para cada $\varphi \in K$, existe $\varepsilon > 0$ tal que*

(i) *a solução $w(t)$ de (2.1.5), com $w(0) = \varphi$, existe para $t > 0$ suficientemente pequeno;*

(ii) *se para $\tau > 0$, $w(t)$ existe e pertence a bola $B(\varphi, \varepsilon)$ para todo $t \in [0, \tau]$ então $w(t) \in K$, para todo $t \in [0, \tau]$.*

Analogamente, define-se conjunto localmente negativamente invariante mudando $>$ por $<$ em (i) e (ii).

Definição 2.1.8 *Suponha que um espaço de Banach Y é decomposto como $Y = \pi_1 Y \oplus \pi_2 Y$ para π_1 e π_2 projeções lineares contínuas. Então, um subconjunto $S \subset Y$ contendo y_0 é tangente a $\pi_2 Y$ em y_0 se*

$$\frac{\|\pi_1(y - y_0)\|}{\|\pi_2(y - y_0)\|} \to 0, \text{ quando } y \to y_0 \text{ em } S.$$

No que segue, denotaremos por $B(0, \delta)$, $B_{(\pi_- \oplus \pi_0)}(0, \delta)$, $B_{(\pi_0 \oplus \pi_+)}(0, \delta)$, a bola de raio delta e centro na origem de X, $\pi_- X \oplus \pi_0 X$, $\pi_0 X \oplus \pi_+ X$, respectivamente.

Teorema 2.1.9 *Existem $\delta > 0$ e conjuntos*

$$W^{*s} = \{\varphi \in X \ : \ \|\varphi_- + \varphi_0\| < \delta, \ \varphi_+ = p^*(\varphi_- + \varphi_0)\},$$

$$W^{*u} = \{\varphi \in X \ : \ \|\varphi_0 + \varphi_+\| < \delta, \ \varphi_- = q^*(\varphi_0 + \varphi_+)\},$$

os quais são chamados **variedade centro estável** *e* **variedade centro instável** *de (2.1.1), respectivamente, onde p^* e q^* são funções Lipschtzianas definidas sobre $B_{(\pi_- \oplus \pi_0)}(0, \delta) \subset \pi_- X \oplus \pi_0 X$, $B_{(\pi_0 \oplus \pi_+)}(0, \delta) \subset \pi_0 X \oplus \pi_+ X$, respectivamente; tais que o conjunto W^{*s} é localmente positivamente invariante sob o fluxo (2.1.5), enquanto se (BU) vale W^{*u} é localmente negativamente invariante. Toda solução de (2.1.5) que existe e permanece na bola $B(0, \delta)$ para $t \geq 0$ está em W^{*s} e toda solução de (2.1.5) que existe e permanece na bola $B(0, \delta)$ para $t \leq 0$ está em W^{*u}. Além disso, o espaço tangente a W^{*s} em zero é $\pi_- X \oplus \pi_0 X$ e o espaço tangente a W^{*u} em zero é $\pi_0 X \oplus \pi_+ X$.*

Demonstração: Mostraremos que para λ suficientemente pequeno, de modo que

$$\max \left\{ \frac{2K^2 \nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)}, \frac{2(K\nu(\lambda))^2}{a_0(a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda))} + \frac{K\nu(\lambda)}{a_+} \right\} < 1,$$

a variedade centro estável para (2.1.11) existe e, é definida por p_λ^*, que mostraremos ser a única solução, para $t \geq 0$, do sistema

$$w_-(t) = T(t)\varphi_- + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-(s) + w_0(s) + p_\lambda^*(w_-(s) + w_0(s)))ds,$$

$$w_0(t) = T(t)\varphi_0 + \int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(w_-(s) + w_0(s) + p_\lambda^*(w_-(s) + w_0(s)))ds, \qquad (2.1.15)$$

$$p_\lambda^*(\varphi_- + \varphi_0) = \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda(w_-(s) + w_0(s) + p_\lambda^*(w_-(s) + w_0(s)))ds.$$

Em (2.1.15) $w_-(\cdot)$ e $w_0(\cdot)$ são únicos. Algumas vezes explicitamos a dependência, de $w_-(t)$ e $w_0(t)$, em relação à φ_-, φ_+, escrevendo

$$w_-(\varphi_- + \varphi_0, t), \quad w_0(\varphi_- + \varphi_0, t).$$

Defina

$$\begin{aligned}\Xi = \{\chi : \pi_- X \oplus \pi_0 X \longrightarrow \pi_+ X \ : \ &\|\chi(\varphi_- + \varphi_0) - \chi(\psi_- + \psi_0)\| \leq \|\varphi_- + \varphi_0 - \psi_- - \psi_0\|,\\ &\text{para cada } \varphi,\ \psi \in X, \text{ com } \chi(0) = 0,\ \|\chi\| \equiv \sup_{\varphi \in X} \|\chi(\varphi_- + \varphi_0)\| < \infty\}.\end{aligned}$$

Não é difícil verificar que Ξ é um espaço métrico completo com a métrica

$$d(\chi_1, \chi_2) = \|\chi_1 - \chi_2\|.$$

Para $\chi \in \Xi$ considere o sistema

$$\begin{aligned} w_-^\chi(t) &= T(t)\varphi_- + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)))ds,\\ w_0^\chi(t) &= T(t)\varphi_0 + \int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-(s) + w_0(s)))ds. \end{aligned} \qquad (2.1.16)$$

Usando o metódo do Lema 2.1.6 é possível mostrar que dados φ_-, φ_0, existe $\lambda > 0$ tal que, (2.1.16) tem uma única solução contínua $w_-^\chi(t) = w_-^\chi(\varphi_- + \varphi_0, t)$, $w_0^\chi(t) = w_0^\chi(\varphi_- + \varphi_0, t)$ para $t \geq 0$.

Seja $\widetilde{\varphi}_- + \widetilde{\varphi}_0 \in \pi_- X \oplus \pi_0 X$. Para $t \geq 0$ definimos

$$\theta(t) = \|w_-^\chi(\varphi_- + \varphi_0, t) + w_0^\chi(\varphi_- + \varphi_0, t) - w_-^\chi(\widetilde{\varphi}_- + \widetilde{\varphi}_0, t) - w_0^\chi(\widetilde{\varphi}_- + \widetilde{\varphi}_0, t)\|,$$

denotando $\widetilde{w}_-^\chi(t) = \widetilde{w}_-^\chi(\widetilde{\varphi}_- + \widetilde{\varphi}_0)$, temos

$$\begin{aligned} \theta(t) \ \leq\ & \|T(t)(\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-)\| + \|T(t)(\varphi_0 - \widetilde{\varphi}_0)\| + \\ +\ & \int_0^t \Bigg\| T(t-s)\pi_- \Bigg\{ f_\lambda \Big[w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) \Big] \\ -\ & f_\lambda \Big[\widetilde{w}_-^\chi(s) + \widetilde{w}_0^\chi(s) + \chi(\widetilde{w}_-^\chi(s) + \widetilde{w}_0^\chi(s)) \Big] \Bigg\} \Bigg\| ds \\ +\ & \int_0^t \Bigg\| T(t-s)\pi_0 \Bigg\{ f_\lambda \Big[w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) \Big] \\ -\ & f_\lambda \Big[\widetilde{w}_-^\chi(s) + \widetilde{w}_0^\chi(s) + \chi(\widetilde{w}_-^\chi(s) + \widetilde{w}_0^\chi(s)) \Big] \Bigg\} \Bigg\| ds. \end{aligned}$$

Usando (2.1.4), (2.1.10) e o fato que χ é uma contração, obtemos

$$\begin{aligned}\theta(t) &\leq Ke^{-a_-t}\|\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-\| + Ke^{a_0t}\|\varphi_0 - \widetilde{\varphi}_0\| \\ &+ \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\theta(s)ds + \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}\theta(s)ds,\end{aligned}$$

sendo, $e^{-a_-t} < e^{-a_0t} < e^{a_0t}$, já que $a_0 < a_-$, temos

$$\theta(t) \leq K\bigg[\|\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-\| + \|\varphi_0 - \widetilde{\varphi}_0\|\bigg]e^{a_0t} + \int_0^t 4K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}\theta(s)ds,$$

então

$$e^{-a_0t}\theta(t) \leq K[\|\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-\| + \|\varphi_0 - \widetilde{\varphi}_0\|] + \int_0^t 4K\nu(\lambda)e^{-a_0s}\theta(s)ds.$$

Do Lema de Gronwall resulta,

$$\theta(t) \leq K\|\varphi_- + \varphi_0 - \widetilde{\varphi}_- - \widetilde{\varphi}_0\|e^{[a_0+4k\nu(\lambda)]t}, \ t \geq 0. \tag{2.1.17}$$

Sejam $\chi, \psi \in \Xi$ e, para $t \geq 0$ e $\varphi_- + \varphi_0$ fixado, considere

$$\theta_1(t) = \|w_-^\chi(t) + w_0^\chi(t) - w_-^\psi(t) - w_0^\psi(t)\|.$$

Então de (2.1.16), usando que $e^{-a_-t} \leq e^{a_0t}$ para todo $t \geq 0$, resulta

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &\leq \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}\Big[\theta_1(s) + \|\chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) - \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s))\|\Big]ds \\ &\leq \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}\Big[\theta_1(s) + \|\chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) - \chi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s))\| + \|\chi - \psi\|\Big]ds \\ &\leq \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}[2\theta_1(s) + \|\chi - \psi\|]ds.\end{aligned}$$

Portanto

$$e^{-a_0t}\theta_1(t) \leq \frac{2K\nu(\lambda)}{a_0}\|\chi - \psi\| + \int_0^t 4K\nu(\lambda)e^{-a_0s}\theta_1(s)ds.$$

Do Lema de Gronwall,

$$\theta_1(t) \leq \frac{2K\nu(\lambda)}{a_0}\|\chi - \psi\|e^{[a_0+4K\nu(\lambda)]t}, \ t \geq 0. \tag{2.1.18}$$

Agora defina a tranformação Q sobre Ξ por

$$(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0) = \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda\left[w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s))\right]ds, \tag{2.1.19}$$

onde w_-^χ, w_0^χ é a solução de (2.1.16). Usando (2.1.4) e (2.1.10) em (2.1.19), segue que $\|Q\chi\| < \infty$. Além disso, usando (2.1.17), obtemos

$$\|(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0) - (Q\chi)(\widetilde{\varphi}_- + \widetilde{\varphi}_0)\| \leq 2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_- + \varphi_0 - \widetilde{\varphi}_- - \widetilde{\varphi}_0\| \int_0^\infty e^{(a_0-a_++4K\nu(\lambda))t}dt.$$

Então

$$\|(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0) - (Q\chi)(\widetilde{\varphi}_- + \widetilde{\varphi}_0)\| \leq \frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)}\|\varphi_- + \varphi_0 - \widetilde{\varphi}_- - \widetilde{\varphi}_0\|. \quad (2.1.20)$$

Sendo $a_0 < a_+$, escolhendo λ pequeno tal que

$$\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} < 1,$$

segue que $Q : \Xi \to \Xi$. Além disso, se $\chi,\ \psi\ \in \Xi$,

$$\begin{aligned}
\|(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0) - (Q\psi)(\varphi_- + \varphi_0)\| \ &\leq\ \int_0^\infty \|T(-s)\pi_+\{f_\lambda[w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) \\
&+\ \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s))] \\
&-\ f_\lambda[w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s) + \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s))]\}\|ds.
\end{aligned}$$

De (2.1.4), segue que

$$\begin{aligned}
\|(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0) - (Q\psi)(\varphi_- + \varphi_0)\| \ &\leq\ \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}\left[\left\|w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) - w_-^\psi(s) - w_0^\psi(s)\right\|\right. \\
&+\ \left.\left\|\chi\Big(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)\Big) - \psi\Big(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s)\Big)\right\|\right]ds \\
&\leq\ \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}[\theta_1(s) + \|\chi - \psi\|]ds.
\end{aligned}$$

Usando (2.1.18) obtemos

$$\begin{aligned}
\|(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0) - (Q\psi)(\varphi_- + \varphi_0)\| \ &\leq\ \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}\left[\frac{2K\nu(\lambda)}{a_0}\|\chi - \psi\|e^{(a_0 + 4K\nu(\lambda))s}\right. \\
&+\ \left.\|\chi - \psi\|\right]ds \\
&=\ 2\frac{(K\nu(\lambda))^2}{a_0}\|\chi - \psi\|\int_0^\infty e^{-[a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)]s}ds \\
&+\ K\nu(\lambda)\|\chi - \psi\|\int_0^\infty e^{-a_+ s}ds \\
&=\ \frac{2(K\nu(\lambda))^2}{a_0[a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)]}\|\chi - \psi\| + \frac{K\nu(\lambda)}{a_+}\|\chi - \psi\| \\
&=\ \left[\frac{2(K\nu(\lambda))^2}{a_0(a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda))} + \frac{K\nu(\lambda)}{a_+}\right]\|\chi - \psi\|.
\end{aligned}$$

Portanto, se λ é pequeno de modo que $\left[\frac{2(K\nu(\lambda))^2}{a_0(a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda))} + \frac{K\nu(\lambda)}{a_+}\right] < 1$, segue que $Q : \Xi \to \Xi$ é uma contração e assim Q possui um único ponto fixo $p_\lambda^* \in \Xi$, o qual satisfaz (2.1.15).

Seja $\delta = \lambda$. Considere o conjunto

$$W^{*s} = \{\varphi \in X \;:\; \|\varphi_- + \varphi_0\| < \delta,\; \varphi_+ = p_\lambda^*(\varphi_- + \varphi_0)\}.$$

Mostraremos que W^{*s} satisfaz as condições do teorema. De fato, começamos observando que

$$w_-(t) + w_0(t) + p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t))$$

define uma solução de (2.1.11). Para tal propósito, seja $w_-(\varphi_- + \varphi_0, t)$, $w_0(\varphi_- + \varphi_0, t)$ a única solução de (2.1.16). Sendo $w_-(\varphi_- + \varphi_0, t) \in \pi_- X$, $w_0(\varphi_- + \varphi_0, t) \in \pi_0 X$, faz sentido calcularmos

$$p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t)) = p_\lambda^*(w_-(\varphi_- + \varphi_0, t) + w_0(\varphi_- + \varphi_0, t)).$$

Agora, escrevendo $\psi_-(t) = w_-(\varphi_- + \varphi_0, t)$ e $\psi_0(t) = w_0(\varphi_- + \varphi_0, t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t)) &= \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda[w_-(\psi_-(t) + \psi_0(t), s) + w_0(\psi_-(t) + \psi_0(t), s) \\
&+ p_\lambda^*(w_-(\psi_-(t) + \psi_0(t), s) + w_0(\psi_-(t) + \psi_0(t), s))]ds \\
&= \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda[w_-(\varphi_- + \varphi_0, s + t) + w_0(\varphi_- + \varphi_0, s + t) \\
&+ p_\lambda^*(w_-(\varphi_- + \varphi_0, s + t) + w_0(\varphi_- + \varphi_0, s + t))]ds \\
&= \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda[w_-(s + t) + w_0(s + t) + p_\lambda^*(w_-(s + t) + w_0(s + t))]ds.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = s + t$ resulta

$$\begin{aligned}
p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t)) &= \int_\infty^t T(t - u)\pi_+ f_\lambda[w_-(u) + w_0(u) + p_\lambda^*(w_-(u) + w_0(u))]du \\
&= \int_\infty^0 T(t - u)\pi_+ f_\lambda[w_-(u) + w_0(u) + p_\lambda^*(w_-(u) + w_0(u))]du \\
&+ \int_0^t T(t - u)\pi_+ f_\lambda[w_-(u) + w_0(u) + p_\lambda^*(w_-(u) + w_0(u))]du.
\end{aligned}$$

Daí, somando os termos

$$w_-(t),\; w_0(t) \text{ e } p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t)),$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
w_-(t) + w_0(t) + p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t)) &= T(t)\varphi_- + T(t)\varphi_0 \\
+ \int_\infty^0 T(t-u)\pi_+ f_\lambda[w_-(u) + w_0(u) + p_\lambda^*(w_-(u) + w_0(u))]du \\
+ \int_0^t T(t-u) f_\lambda[w_-(u) + w_0(u) + p_\lambda^*(w_-(u) + w_0(u))]du \\
= T(t)w_-(0) + T(t)w_0(0) + T(t)\int_\infty^0 T(-u)\pi_+ f_\lambda[w_-(u) + w_0(u) \\
+p_\lambda^*(w_-(u) + w_0(u))]du \\
+ \int_0^t T(t-u) f_\lambda[w_-(u) + w_0(u) + p_\lambda^*(w_-(u) + w_0(u))]du \\
= T(t)w_-(0) + T(t)w_0(0) + T(t)p_\lambda^*(\varphi_- + \varphi_0) \\
+ \int_0^t T(t-u) f_\lambda[w_-(u) + w_0(u) + p_\lambda^*(w_-(u) + w_0(u))]du \\
= T(t)[w_-(0) + w_0(0) + p_\lambda^*(w_-(0) + w_0(0))] \\
+ \int_0^t T(t-u) f_\lambda[w_-(u) + w_0(u) + p_\lambda^*(w_-(u) + w_0(u))]du.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$w_-(t) + w_0(t) + p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t))$$

satisfaz (2.1.11). Além disso, $p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t))$ é limitado. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t))\| &\leq \int_0^\infty \|T(-s)\pi_+ f_\lambda[w_-(s+t) + w_0(s+t) \\
&+ p_\lambda^*(w_-(s+t) + w_0(s+t))]\|ds \\
&\leq \int_0^\infty K e^{-a_+ s}\lambda\nu(\lambda)ds \\
&= K\lambda\nu(\lambda)\int_0^\infty e^{-a_+ s}ds \\
&= \frac{K\lambda\nu(\lambda)}{a_+} < \infty.
\end{aligned}
$$

Agora, necessitamos do seguinte lema:

Lema 2.1.10 *Sejam x, y duas soluções de (2.1.11) que existem para todo $t \geq 0$ e são tais que*

$$x_-(0) + x_0(0) = y_-(0) + y_0(0). \tag{2.1.21}$$

Então, para λ suficientemente pequeno, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|x_+(0) - y_+(0)\| \leq K e^{-\alpha t}\|x_+(t) - y_+(t)\|, \ \forall t \geq 0. \tag{2.1.22}$$

Em particular, se uma solução $w(t)$ de (2.1.11) existe para $t \geq 0$ e $\|w_+(t)\|$ é limitada, então

$$w_+(0) = p_\lambda^*(w_-(0) + w_0(0)).$$

Demonstração: A última afirmação do lema segue de (2.1.22) pois, sendo $\|w(t)\|$ limitada,

$$\|w_+(0) - p_\lambda^*(w_-(0) + w_0(0))\| \leq Ke^{-\alpha t}\|w_+(t) - p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t))\| \to 0, \ t \to \infty. \quad (2.1.23)$$

Para provar (2.1.22) note que, para $t \geq 0$, x satisfaz
(2.1.23i) $x_-(t) = T(t)x_-(0) + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(x_-(s) + x_0(s) + x_+(s))ds$,
(2.1.23ii) $x_0(t) = T(t)x_0(0) + \int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(x_-(s) + x_0(s) + x_+(s))ds$,
(2.1.23iii) $T(-t)x_+(t) = x_+(0) + \int_0^t T(-s)\pi_+ f_\lambda(x_-(s) + x_0(s) + x_+(s))ds$,
e expressões similares são válidas para a função y.

Sejam

$$h(t) = \|x_-(t) - y_-(t)\| + \|x_0(t) - y_0(t)\|, \ g(t) = \|x_+(t) - y_+(t)\|.$$

De (2.1.23i) e (2.1.23ii) e seus correspondentes para y obtemos

$$h(t) \leq 2K\nu(\lambda)\int_0^t e^{a_0(t-s)}[h(s) + g(s)]ds, \ t \geq 0. \quad (2.1.24)$$

De (2.1.24) e do Lema de Gronwall segue a estimativa

$$h(t) \leq 2K\nu(\lambda)\int_0^t e^{(2K\nu(\lambda)+a_0)t}e^{-a_0 s}g(s)ds, \ t \geq 0. \quad (2.1.25)$$

Mas, de (2.1.23.iii) e sua correspondente para y temos

$$\begin{aligned} g(0) &\leq Ke^{-a_+ t}\|x_+(t) - y_+(t)\| \\ &+ \int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}[\|y_-(s) - x_-(s)\| + \|y_0(s) - x_0(s)\| + \|y_+(s) - x_+(s)\|]ds. \end{aligned}$$

Então obtemos

$$g(0) \leq Ke^{-a_+ t}g(t) + K\nu(\lambda)\int_0^t e^{-a_+ s}[h(s) + g(s)]ds.$$

Agora, sejam $k = K\nu(\lambda)$ e $k' = \frac{2k^2}{a_+ - a_0 - 2k}$. Então

$$g(0) \leq Ke^{-a_+ t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+ s}[h(s) + g(s)]ds, \ t \geq 0. \quad (2.1.26)$$

Mas, usando (2.1.25), temos

$$\begin{aligned}
k\int_0^t e^{-a_+s}h(s)ds &\leq k\int_0^t e^{-a_+s}\left[2k\int_0^s e^{(2k+a_0)s}e^{-a_0\tau}g(\tau)d\tau\right]ds \\
&= 2k^2\int_0^t\left[\int_0^s e^{-a_+s}e^{a_0(s-\tau)}e^{2ks}g(\tau)d\tau\right]ds \\
&= 2k^2\int_0^t\int_\tau^t e^{a_0s}e^{2ks}e^{-a_+s}dse^{-a_0\tau}g(\tau)d\tau \\
&= 2k^2\int_0^t\left[\frac{e^{(a_0+2k-a_+)s}}{a_0+2k-a_+}\bigg|_\tau^t e^{-a_0\tau}g(\tau)\right]d\tau \\
&= \frac{2k^2}{a_0+2k-a_+}\int_0^t\left[e^{(a_0+2k-a_+)t}-e^{(a_0+2k-a_+)\tau}\right]e^{-a_0\tau}g(\tau)d\tau \\
&= \frac{2k^2}{a_+-a_0-2k}\int_0^t\left[e^{(a_0+2k-a_+)\tau}-e^{(a_0+2k-a_+)t}\right]e^{-a_0\tau}g(\tau)d\tau \\
&\leq \frac{2k^2}{a_+-a_0-2k}\int_0^t e^{(a_0+2k-a_+)\tau}e^{-a_0\tau}g(\tau)d\tau \\
&= k'\int_0^t e^{(2k-a_+)\tau}g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Então, substituindo a desigualdade acima em (2.1.26), obtemos

$$\begin{aligned}
g(0) &\leq Ke^{-a_+t}g(t)+k'\int_0^t e^{(2k-a_+)s}g(s)ds+k\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds \\
&\leq Ke^{-a_+t}e^{2kt}g(t)+k'\int_0^t e^{(2k-a_+)s}g(s)ds+k\int_0^t e^{-a_+s}e^{2ks}g(s)ds.
\end{aligned}$$

Portanto

$$g(0)\leq Ke^{(2k-a_+)t}g(t)+(k+k')\int_0^t e^{(2k-a_+)s}g(s)ds,\ t\geq 0. \tag{2.1.27}$$

Fazendo $\psi(s)=g(t-s)$, $0\leq s\leq t$, de (2.1.27), resulta

$$\psi(t)\leq Ke^{(2k-a_+)t}\psi(0)+(k+k')\int_0^t e^{(2k-a_+)s}g(s)ds,\ t\geq 0,$$

ou equivalentemente

$$e^{-(2k-a_+)t}\psi(t)\leq K\psi(0)+(k+k')\int_0^t e^{(2k-a_+)(s-t)}g(s)ds,\ t\geq 0.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $u=t-s$ na integral acima, obtemos

$$\begin{aligned}
e^{-(2k-a_+)t}\psi(t) &\leq K\psi(0)+(k+k')\int_0^t e^{-(2k-a_+)u}g(t-u)du \\
&= K\psi(0)+(k+k')\int_0^t e^{-(2k-a_+)u}\psi(u)du,\ t\geq 0.
\end{aligned}$$

Do Lema de Gronwall segue que

$$\psi(t) \leq K\psi(0)e^{-(a_+-3k-k')t}, \tag{2.1.28}$$

ou equivalentemente

$$g(0) \leq Kg(t)e^{-(a_+-3k-k')t},\ t \geq 0,$$

ou seja

$$\|x_+(0) - y_+(0)\| \leq K\|x_+(t) - y_+(t)\|e^{-(a_+-3k-k')t},\ t \geq 0.$$

Escolhendo $\lambda > 0$ tal que $3k + k' = \left(3K\nu(\lambda) + \frac{6K^2\nu(\lambda)^2}{(a_+-a_0-2K\nu(\lambda))^2}\right) < a_+$, segue que a expressão acima resulta em (2.1.22), concluindo a demonstração do lema. ∎

Mostraremos agora que W^{*s} é localmente positivamente invariante. Então, para $\varphi \in W^{*s}$, seja $w(\varphi, t)$ a solução de (2.1.5), com $w(0) = \varphi$, que existe e permanece na bola $B(0, \delta)$, para $t \geq 0$. Mostraremos que $w(\varphi, t) \in W^{*s}$. Para isso, começamos observando que as soluções de (2.1.5) na bola de raio δ coincidem com as soluções de (2.1.11). Além disso, como vimos acima

$$w_-(t) + w_0(t) + p^*_\lambda(w_-(t) + w_0(t))$$

define uma solução de (2.1.11), com $w_-(0)+w_0(0)+p^*_\lambda(w_-(0)+w_0(0)) = \varphi_-+\varphi_0+p^*_\lambda(\varphi_-+\varphi_0)$. Já que $w_-(0) + w_0(0) = \varphi_- + \varphi_0$ e $p^*_\lambda(w_-(t) + w_0(t))$ é limitada, pelo Lema 2.1.10, segue que

$$\varphi_+ = p^*_\lambda(w_-(0) + w_0(0)) = p^*_\lambda(\varphi_- + \varphi_0).$$

Então, por unicidade de soluções, temos

$$w(\varphi, t) \equiv w_-(t) + w_0(t) + p^*_\lambda(w_-(t) + w_0(t)),$$

logo $w_+(\varphi, t) = p^*_\lambda(w_-(t) + w_0(t))$. Portanto $w(\varphi, t) \in W^{*s}$.

A tangência de W^{*s} em $\pi_-X \oplus \pi_0X$ no zero é conseqüência de (2.1.20) com $\widetilde{\varphi}_- + \widetilde{\varphi}_0 \equiv 0$ já que, $\widetilde{\varphi}_- + \widetilde{\varphi}_0 \equiv 0$ implica $(Q\chi)(\widetilde{\varphi}_- + \widetilde{\varphi}_0) \equiv 0$ e daí, (2.1.20) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\|(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0)\|}{\|\varphi_- + \varphi_0\|} &\leq 2K^2\nu(\lambda)\int_0^\infty e^{(a_0-a_++4K\nu(\lambda))t}dt \\ &= \frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)}. \end{aligned}$$

Quando $\|\varphi_- + \varphi_0\| \to 0$, em (2.1.9), podemos escolher o parâmetro de truncamento $\lambda \to 0$ e ainda teremos (2.1.10) válida com $\varphi_- + \varphi_0$, $\psi_- + \psi_0$ no lugar de φ, ψ. Então $\nu(\lambda) \to 0$, quando $\|\varphi_- + \varphi_0\| \to 0$. Portanto $\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+-a_0-4K\nu(\lambda)} \to 0$, quando $\|\varphi_- + \varphi_0\| \to 0$. Assim provamos a primeira parte do teorema. Similarmente podemos construir W^{*u} por meio de q^*_λ, a única solução do sistema

$$
\begin{aligned}
q_\lambda^*(\varphi_0+\varphi_+) &= \textstyle\int_{-\infty}^{0} T(-s)\pi_- f_\lambda(q_\lambda^*(w_0(s)+w_+(s))+w_0(s)+w_+(s))ds,\\
w_0(t) &= T(t)\varphi_0 + \textstyle\int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(q_\lambda^*(w_0(s)+w_+(s))+w_0(s)+w_+(s))ds,\\
w_+(t) &= T(t)\varphi_+ + \textstyle\int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(q_\lambda^*(w_0(s)+w_+(s))+w_0(s)+w_+(s))ds,
\end{aligned}
\tag{2.1.29}
$$

para $t \le 0$. Seja

$$y(t) = q_\lambda^*(w_0(t)+w_+(t)) + w_0(t) + w_+(t).$$

Então

$$T(-t)y(t) = y(0) + \int_0^t T(-s)f_\lambda(y(s))ds,\ t \le 0. \tag{2.1.30}$$

De (2.1.30) e do Lema 2.1.4 segue que W^{*u} é localmente negativamente invariante quando a hipótese (BU) vale. As outras afirmações sobre W^{*u} são provadas de modo similar ao que foi feito para W^{*s}. ∎

2.2 Variedades estável e instável

Teorema 2.2.1 *Sob as hipóteses e notações da seção anterior, seja $\eta > 0$ tal que $\min(a_-, a_+) > \eta$. Então existem uma constante $\delta > 0$ e os conjuntos*

$$S = \left\{\varphi \in B(0,\delta)\ :\ \|\varphi_-\| < \frac{\delta}{2K},\ \varphi_0 + \varphi_+ = p(\varphi_-)\right\},$$

$$U = \left\{\varphi \in B(0,\delta)\ :\ \|\varphi_+\| < \frac{\delta}{2K},\ \varphi_- + \varphi_0 = q(\varphi_+)\right\},$$

chamados **variedade estável** *e* **variedade instável** *de (2.1.1), respectivamente, onde p e q são funções lipschitzianas definidas para $\|\varphi_-\| < \frac{\delta}{2K}$, $\|\varphi_+\| < \frac{\delta}{2K}$, respectivamente. Se $\varphi \in S$ então, para $t \ge 0$, existe uma única solução $w(t)$ de (2.1.5) com $w(0) = \varphi$ e*

$$\|w(t)\| \le 2Ke^{-(a_- - \eta)t}\|w_-(0)\|,\ t \ge 0. \tag{2.2.31}$$

Se a hipótese (BU) vale e $\varphi \in U$ então uma solução $w(t)$ de (2.1.5) com $w(0) = \varphi$ existe para $t \le 0$ e

$$\|w(t)\| \le 2Ke^{(a_+ - \eta)t}\|w_+(0)\|,\ t \le 0. \tag{2.2.32}$$

Além disso, o espaço tangente a S em zero é $\pi_- X$ e o espaço tangente a U em zero é $\pi_+ X$. S é positivamente invariante sob o fluxo (2.1.5) e se (BU) vale U é negativamente invariante.

Demonstração: (**Existência da variedade estável local** de (2.1.1)). No que segue assumimos $\lambda > 0$, tal que

$$\frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 4K\nu(\lambda)} < 1.$$

Resolveremos para p_λ o sistema

$$\begin{aligned} w_-(t) &= T(t)\varphi_- + \textstyle\int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-(s) + p_\lambda(w_-(s)))ds, \; t \geq 0; \\ p_\lambda(\varphi_-) &= \textstyle\int_\infty^0 T(-s)(\pi_0 + \pi_+) f_\lambda(w_-(s) + p_\lambda(w_-(s)))ds. \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Seja

$$G = \{h : \pi_- X \to \pi_0 X \oplus \pi_+ X, \; \|h(\varphi_-) - h(\psi_-)\| \leq \|\varphi_- - \psi_-\|, \, \forall \varphi, \, \psi \in X, \; h(0) = 0\}.$$

É fácil verificar que G é um espaço métrico completo com métrica

$$\bar{\rho}(h_1, h_2) = \sup_{\varphi \in X, \, \varphi_- \neq 0} \frac{\|h_1(\varphi_-) - h_2(\varphi_-)\|}{\|\varphi_-\|}.$$

Para $h \in G$, existe um único $w_-^h(\varphi_-, t)$ satisfazendo

$$w_-^h(t) = T(t)\varphi_- + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-^h(s) + h(w_-^h(s)))ds, \; t \geq 0. \tag{2.2.34}$$

De fato, sejam $T > 0$ e $M = \{g : [0, T] \to X \text{ contínuas}, \, g(0) = \varphi_-, \, \|g\|_\delta < \infty\}$, onde $\|g\|_\delta = \sup_{t \in [0,T]} e^{-\delta t}\|g(t)\|$. Definimos o operador P sobre M por

$$(Pg)(t) = T(t)\varphi_- + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(g(s) + h(g(s)))ds, \; t \in [0, T],$$

é fácil verificar que $P : M \to M$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|(Pg_1)(t) - (Pg_2)(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\pi_-\{f_\lambda(g_1(s) + h(g_1(s))) - f_\lambda(g_2(s) + h(g_2(s)))\}\|ds \\ &\leq \int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\|g_1(s) + h(g_1(s)) - g_2(s) - h(g_2(s))\|ds \\ &\leq \int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}[\|g_1(s) - g_2(s)\| + \|h(g_1(s)) - h(g_2(s))\|]ds \\ &\leq \int_0^T 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\|g_1(s) - g_2(s)\|ds \\ &= \int_0^T 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}e^{\delta s}e^{-\delta s}\|g_1(s) - g_2(s)\|ds. \end{aligned}$$

Daí

$$e^{-\delta t}\|(Pg_1)(t)-(Pg_2)(t)\| \leq \int_0^T 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}e^{\delta(s-t)}\|g_1-g_2\|_\delta ds.$$

Logo

$$\begin{aligned}\|Pg_1-Pg_2\|_\delta &\leq \left(\int_0^T 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}e^{\delta(s-t)}ds\right)\|g_1-g_2\|_\delta\\ &\leq \left(\int_0^T 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}ds\right)\|g_1-g_2\|_\delta.\end{aligned}$$

Escolhendo λ tal que

$$2K\nu(\lambda)\int_0^T e^{-a_-(t-s)}ds<1,$$

segue que P é uma contração e assim possui um único ponto fixo. Esse ponto fixo satisfaz (2.2.34).

Além disso, temos as estimativas:

$$\|w_-^h(\varphi_-,t)-w_-^h(\widetilde{\varphi}_-,t)\| \leq K\|\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-\|e^{-(a_- -2K\nu(\lambda))t},\ t\geq 0. \tag{2.2.35}$$

$$\|w_-^{h_1}(\varphi_-,t)-w_-^{h_2}(\varphi_-,t)\| \leq \frac{K}{2}\|\varphi_-\|\bar{\rho}(h_1,h_2)e^{-(a_- -4K\nu(\lambda))t}\ t\geq 0. \tag{2.2.36}$$

De fato, para verificar (2.2.35), seja $\theta_2(t)=\|w_-^h(\varphi_-,t)-w_-^h(\widetilde{\varphi}_-,t)\|$. Então

$$\begin{aligned}\theta_2(t) &\leq \|T(t)[\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-]\| +\\ &+ \int_0^t \left\|T(t-s)\pi_-\left\{f_\lambda(w_-^h(\varphi_-,s)+h(w_-^h(\varphi_-,s))) - f_\lambda(w_-^h(\widetilde{\varphi}_-,s)+h(w_-^h(\widetilde{\varphi}_-,s)))\right\}\right\|ds\\ &\leq Ke^{-a_-t}\|\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-\| + \int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\left\|w_-^h(\varphi_-,s)-w_-^h(\widetilde{\varphi}_-,s)\right\|ds +\\ &+ \int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\left\|h(w_-^h(\varphi_-,s))-h(w_-^h(\widetilde{\varphi}_-,s))\right\|ds\\ &\leq Ke^{-a_-t}\|\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-\| + \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\left\|w_-^h(\varphi_-,s)-w_-^h(\widetilde{\varphi}_-,s)\right\|ds.\end{aligned}$$

Então

$$e^{a_-t}\theta_2(t)\leq K\|\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-\| + \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{a_-s}\theta_2(s)ds.$$

Do Lema de Gronwall segue que

$$e^{a_-t}\theta_2(t)\leq K\|\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-\|e^{2K\nu(\lambda)t},$$

e daí

$$\theta_2(t)\leq K\|\varphi_- - \widetilde{\varphi}_-\|e^{-(a_- -2K\nu(\lambda))t},$$

que é (2.2.35). Para verificar (2.2.36), seja $\theta_3(t) = \|w_-^{h_1}(\varphi_-, t) - w_-^{h_2}(\varphi_-, t)\|$. Então

$$\begin{aligned}
\theta_3(t) &\leq \int_0^t \Big\| T(t-s)\pi_- \Big\{ f_\lambda(w_-^{h_1}(\varphi_-, s) + h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-, s))) \\
&- f_\lambda(w_-^{h_2}(\varphi_-, s) + h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-, s)))\Big\}\Big\| ds \\
&\leq \int_0^t K\nu(\lambda) e^{-a_-(t-s)} \Big\{ \Big\| w_-^{h_1}(\varphi_-, s) - w_-^{h_2}(\varphi_-, s) \Big\| \\
&+ \Big\| h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-, s)) - h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-, s)) \Big\| \Big\} ds \\
&= \int_0^t K\nu(\lambda) e^{-a_-(t-s)} \Big\{ \theta_3(s) + \Big\| h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-, s)) - h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-, s)) \Big\| \Big\} ds,
\end{aligned}$$

subtraindo e somando o termo $h_1(w_-^{h_2}(\varphi_-, s))$ na norma acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\theta_3(t) &\leq \int_0^t 2K\nu(\lambda) e^{-a_-(t-s)} \theta_3(s) ds + \int_0^t K\nu(\lambda) e^{-a_-(t-s)} \|h_1(w_-^{h_2}(\varphi_-, s)) - h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-, s))\| ds \\
&\leq \int_0^t 2K\nu(\lambda) e^{-a_-(t-s)} \theta_3(s) ds + \int_0^t K\nu(\lambda) \bar{\rho}(h_1, h_2) e^{-a_-(t-s)} \|w_-^{h_2}(\varphi_-, s)\| ds.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\|w_-^{h_2}(\varphi_-, t)\| &\leq \|T(t)\varphi_-\| + \int_0^t \|T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-^{h_2}(\varphi_-, s) + h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-, s)))\| ds \\
&\leq Ke^{-a_- t}\|\varphi_-\| + \int_0^t K\nu(\lambda) e^{-a_-(t-s)} \|w_-^{h_2}(\varphi_-, s) + h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-, s))\| ds \\
&\leq Ke^{-a_- t}\|\varphi_-\| + \int_0^t 2K\nu(\lambda) e^{-a_-(t-s)} \|w_-^{h_2}(\varphi_-, s)\| ds,
\end{aligned}$$

então

$$e^{a_- t}\|w_-^{h_2}(\varphi_-, t)\| \leq K\|\varphi_-\| + \int_0^t 2K\nu(\lambda) e^{a_- s} \|w_-^{h_2}(\varphi_-, s)\| ds.$$

Do Lema de Gronwall, segue que

$$\|w_-^{h_2}(\varphi_-, t)\| \leq K\|\varphi_-\| e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}.$$

Assim,

$$\theta_3(t) \leq \int_0^t 2K\nu(\lambda) e^{-a_-(t-s)} \theta_3(s) ds + \int_0^t K^2\nu(\lambda) \bar{\rho}(h_1, h_2) \|\varphi_-\| e^{-a_- t} e^{2K\nu(\lambda)s} ds,$$

sendo

$$\begin{aligned}
\int_0^t K^2\nu(\lambda) \bar{\rho}(h_1, h_2) \|\varphi_-\| e^{-a_- t} e^{2K\nu(\lambda)s} ds &= \frac{K}{2} \|\varphi_-\| \bar{\rho}(h_1, h_2) \Big[e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t} - e^{-a_- t} \Big] \\
&\leq \frac{K}{2} \|\varphi_-\| \bar{\rho}(h_1, h_2) e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t},
\end{aligned}$$

obtemos

$$e^{a_-t}\theta_3(t) \leq \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{a_-s}\theta_3(s)ds + \frac{K}{2}\|\varphi_-\|\bar{\rho}(h_1,h_2)e^{2K\nu(\lambda)t}.$$

Do Lema de Gronwall Geral (veja [15]), resulta

$$e^{a_-t}\theta_3(t) \leq e^{2K\nu(\lambda)t}\frac{K}{2}\|\varphi_-\|\bar{\rho}(h_1,h_2)e^{2K\nu(\lambda)t},$$

então

$$\theta_3(t) \leq \frac{K}{2}\|\varphi_-\|\bar{\rho}(h_1,h_2)e^{-(a_- - 4K\nu(\lambda))t},$$

que é a expressão (2.2.36).

Definimos, agora, a transformação Q sobre G por

$$(Qh)(\varphi_-) = \int_\infty^0 T(-s)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda\Big(w_-^h(\varphi_-,s) + h\Big(w_-^h(\varphi_-,s)\Big)\Big)ds.$$

Não é difícil verificar que

$$\|(Qh)(\varphi_-) - (Qh)(\psi_-)\| \leq 4K\nu(\lambda)\int_0^\infty e^{a_0s}\|w_-^h(\varphi_-,s) - w_-^h(\psi_-,s)\|ds.$$

Usando (2.2.35) obtemos

$$\begin{aligned}
\|(Qh)(\varphi_-) - (Qh)(\psi_-)\| &\leq 4K^2\nu(\lambda)\|\varphi_- - \psi_-\|\int_0^\infty e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda) - a_0)s}ds \\
&= \frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\|\varphi_- - \psi_-\|.
\end{aligned}$$

Escolhendo λ tal que

$$\frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 2K\nu(\lambda)} < 1,$$

segue que $Q : G \to G$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(Qh_1)(\varphi_-) - (Qh_2)(\varphi_-)\| &\leq \int_0^\infty \Big\|T(-s)\pi_0\Big\{f_\lambda\Big(w_-^{h_1}(\varphi_-,s) + h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-,s))\Big) \\
&- f_\lambda\Big(w_-^{h_2}(\varphi_-,s) + h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-,s))\Big)\Big\}\Big\|ds \\
&+ \int_0^\infty \Big\|T(-s)\pi_+\Big\{f_\lambda\Big(w_-^{h_1}(\varphi_-,s) + h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-,s))\Big) \\
&- f_\lambda\Big(w_-^{h_2}(\varphi_-,s) + h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-,s))\Big)\Big\}\Big\|ds \\
&\leq \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{a_0s}\Big[\Big\|w_-^{h_1}(\varphi_-,s) - w_-^{h_2}(\varphi_-,s)\Big\| \\
&+ \Big\|h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-,s)) - h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-,s))\Big\|\Big]ds \\
&+ \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\Big[\Big\|w_-^{h_1}(\varphi_-,s) - w_-^{h_2}(\varphi_-,s)\Big\| \\
&+ \Big\|h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-,s)) - h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-,s))\Big\|\Big]ds.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades $\|h_1(\varphi_-) - h_1(\psi_-)\| \leq \|\varphi_- - \psi_-\|$, $e^{-a_+s} \leq e^{a_0 s}$ e (2.2.36), obtemos

$$\begin{aligned}
\|(Qh_1)(\varphi_-) - (Qh_2)(\varphi_-)\| &\leq 4K\nu(\lambda)\frac{K}{2}\|\varphi_-\|\bar{\rho}(h_1,h_2)\int_0^\infty e^{-(a_- - 4K\nu(\lambda) - a_0)s}ds \\
&= \frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 4K\nu(\lambda)}\|\varphi_-\|\bar{\rho}(h_1,h_2),
\end{aligned}$$

logo

$$\bar{\rho}(Qh_1, Qh_2) \leq \frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 4K\nu(\lambda)}\bar{\rho}(h_1,h_2).$$

Se λ é tal que

$$\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 4K\nu(\lambda)} < 1,$$

segue que Q é uma contração e possui um único ponto fixo p_λ. Esse único ponto fixo satisfaz (2.2.33).

Seja $\delta = \lambda$. Considere

$$S = \left\{\varphi \in X \ : \ \|\varphi_-\| < \frac{\delta}{2K},\ \varphi_0 + \varphi_+ = p_\lambda(\varphi_-)\right\}.$$

Mostraremos que S satisfaz as condições do teorema. De fato, para $\varphi \in S$

$$\|\varphi\| = \|\varphi_-\| + \|p_\lambda(\varphi_-)\| < \frac{\delta}{2K} + \|p_\lambda(\varphi_-)\|.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\|p_\lambda(\varphi_-)\| &= \|(Qp_\lambda)(\varphi_-)\| \\
&\leq \int_0^\infty \|T(-s)(\pi_0 + \pi_+)f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, s) + p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, s)))\|ds \\
&\leq \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{a_0 s}\|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, s) + p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, s))\|ds \\
&+ \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}\|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, s) + p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, s))\|ds \\
&\leq \int_0^\infty 4K\nu(\lambda)e^{a_0 s}\|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, s)\|ds,
\end{aligned}$$

como na verificação de (2.2.36), temos

$$\|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, s)\| \leq K\|\varphi_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))s}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|p_\lambda(\varphi_-)\| &\leq \int_0^\infty 4K^2\nu(\lambda)\|\varphi_-\|e^{-(a_- - a_0 - 2K\nu(\lambda))s}ds \\
&= \frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\|\varphi_-\|.
\end{aligned}$$

Assim, se λ é tal que

$$\frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 2K\nu(\lambda)} < 1,$$

temos $\|p_\lambda(\varphi_-)\| < \frac{\delta}{2K}$, então $\|\varphi\| < \frac{\delta}{K} \leq \delta$, pois $K \geq 1$. Logo $\varphi \in B(0,\delta)$.

O conjunto S é positivamente invariante. De fato, dada $\varphi \in S$, considere $w(\varphi,t)$ a solução de (2.1.11), para $t \geq 0$, que vale φ quando $t = 0$. Mostraremos que $w(\varphi,t) \in S$. Para isso, começamos observando que

$$w(t) = w_-(t) + p_\lambda(w_-(t)),$$

onde p_λ é o único ponto fixo de Q, define uma solução de (2.1.11). Com efeito,

$$\begin{aligned}
p_\lambda(w_-(t)) &= \int_\infty^0 T(-s)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda(w_-(t+s)+p_\lambda(w_-(t+s)))ds \\
&= \int_\infty^t T(t-u)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda(w_-(u)+p_\lambda(w_-(u)))du \\
&= \int_\infty^0 T(t-u)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda(w_-(u)+p_\lambda(w_-(u)))du \\
&+ \int_0^t T(t-u)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda(w_-(u)+p_\lambda(w_-(u)))du.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_\infty^0 T(t-u)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda(w_-(u)+p_\lambda(w_-(u)))du &= T(t)\int_\infty^0 T(-u)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda(w_-(u) \\
&+ p_\lambda(w_-(u)))du \\
&= T(t)p_\lambda(\varphi_-) \\
&= T(t)p_\lambda(w_-(0)).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
w_-(t)+p_\lambda(w_-(t)) &= T(t)[w_-(0)+p_\lambda(w_-(0))] \\
&+ \int_0^t T(t-u)(\pi_- + \pi_0+\pi_+)f_\lambda(w_-(u)+p_\lambda(w_-(u)))du \\
&= T(t)[w_-(0)+p_\lambda(w_-(0))] + \int_0^t T(t-u)f_\lambda(w_-(u)+p_\lambda(w_-(u)))du,
\end{aligned}$$

ou seja, $w_-(t)+p_\lambda(w_-(t))$ satisfaz (2.1.11). Além disso,

$$w_-(0)+p_\lambda(w_-(0)) = \varphi_- + p_\lambda(\varphi_-).$$

Sendo $\varphi \in S$, temos

$$p_\lambda(\varphi_-) = \varphi_0 + \varphi_+.$$

Logo

$$w_-(0) + p_\lambda(w_-(0)) = \varphi.$$

Portanto, por unicidade de solução, segue que

$$w(\varphi, t) = w_-(t) + p_\lambda(w_-(t)),$$

então

$$p_\lambda(w_-(t)) = w_0(t) + w_+(t).$$

Portanto $w(\varphi, t) = (w_-(t) + p_\lambda(w_-(t))) \in S$. A prova de (2.2.31) segue de (2.2.35), com $\widetilde{\varphi} \equiv 0$. De fato, sendo

$$\|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t)\| \leq K\|\varphi_-\|e^{(a_- - 2K\nu(\lambda))t},$$

temos

$$\begin{aligned}
\|p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t))\| &= \int_0^\infty \|T(-s)(\pi_0 + \pi_+)f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t+s) + p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t+s)))\|ds \\
&\leq \int_0^\infty 4K\nu(\lambda)e^{a_0 s}\|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t+s)\|ds \\
&\leq \int_0^\infty 4K\nu(\lambda)e^{a_0 s}K\|\varphi_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))(t+s)}ds \\
&= K\|\varphi_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}\int_0^\infty 4K\nu(\lambda)e^{-(a_- - a_0 - 2K\nu(\lambda))s}ds \\
&= K\|\varphi_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}\left(\frac{4K\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right),
\end{aligned}$$

desde que $\frac{4K\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 2K\nu(\lambda)} \leq 1$, resulta

$$\|p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t))\| \leq K\|\varphi_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|w(\varphi, t)\| &= \|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t) + p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t))\| \\
&\leq 2K\|\varphi_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}
\end{aligned}$$

que é (2.2.31) com $\eta = 2K\nu(\lambda)$.

Para provarmos a tangência de S, em $\pi_- X$ no zero, observamos que

$$\frac{\|p_\lambda(\varphi_-)\|}{\|\varphi_-\|} \leq \frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_- - a_0 - 2K\nu(\lambda)}.$$

Agora, quando $\|\varphi_-\| \to 0$, podemos escolher, em (2.1.9), o parâmetro de truncamento, λ, se aproximando de zero, e teremos ainda (2.1.10) válida com φ_-, ψ_- no lugar de φ, ψ. Portanto

$\nu(\lambda) \to 0$, quando $\|\varphi_-\| \to 0$. Conseqüentemente $\frac{\|p_\lambda(\varphi_-)\|}{\|\varphi_-\|} \to 0$, quando $\|\varphi_-\| \to 0$. Isso completa a primeira parte da prova.

(Existência da variedade instável local de (2.1.1)). Vamos supor $\lambda > 0$, tal que

$$\max\left\{\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)} + \frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)}, \frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right\} < 1.$$

Resolveremos para q_λ o sistema

$$\begin{aligned} q_\lambda(\varphi_+) &= \textstyle\int_{-\infty}^0 T(-s)(\pi_- + \pi_0)f_\lambda(w_+(s) + q_\lambda(w_+(s)))ds, \\ w_+(t) &= T(t)\varphi_+ + \textstyle\int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_+(s) + q_\lambda(w_+(s)))ds,\ t \leq 0. \end{aligned} \tag{2.2.37}$$

Definimos o conjunto

$$H = \{h : \pi_+X \to \pi_-X \oplus \pi_0 X,\ \|h(\varphi_+) - h(\psi_+)\| \leq \|\varphi_+ - \psi_+\|,\ \forall \varphi,\, \psi \in X,\ h(0) = 0\}.$$

É fácil mostrar que H é um espaço métrico completo com métrica

$$\rho(h_1, h_2) = \sup_{\varphi \in X, \varphi_+ \neq 0} \frac{\|h_1(\varphi_+) - h_2(\varphi_+)\|}{\|\varphi_+\|}.$$

Para $h \in H$, existe um único $w_+^h(\varphi_+, t)$ satisfazendo

$$w_+^h(t) = T(t)\varphi_+ + \int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_+^h(s) + h(w_+^h(s)))ds,\ t \leq 0. \tag{2.2.38}$$

De fato, para $T < 0$, seja

$$\widetilde{M} = \{g : [T, 0] \to X \text{ contínuas},\ g(0) = \varphi_+,\ \|g\|_\delta = \sup_{t \in [T,0]} e^{-\delta t}\|g(t)\| < \infty\}.$$

Definimos o operador $\widetilde{P}$ sobre $\widetilde{M}$ por

$$(\widetilde{P}g)(t) = T(t)\varphi_+ + \int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(g(s) + h(g(s)))ds.$$

Como na primeira parte da prova é possível mostrar que $\widetilde{P} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|(\widetilde{P}g_1)(t) - (\widetilde{P}g_2)(t)\| &\leq \int_t^0 \|T(t-s)\pi_+\{f_\lambda(g_1(s) + h(g_1(s))) - f_\lambda(g_2(s) + h(g_2(s)))\}\|ds \\ &\leq \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\|g_1(s) + h(g_1(s)) - g_2(s) - h(g_2(s))\|ds \\ &\leq \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}[\|g_1(s) - g_2(s)\| + \|h(g_1(s)) - h(g_2(s))\|]ds \\ &\leq \int_T^0 2K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\|g_1(s) - g_2(s)\|ds. \end{aligned}$$

Procedendo como no caso anterior, obtemos

$$\|\widetilde{P}g_1 - \widetilde{P}g_2\|_\delta \le \left(2K\nu(\lambda)\int_T^0 e^{(a_+-\delta)(t-s)}ds\right)\|g_1 - g_2\|_\delta.$$

Se $\delta > a_+$ e λ é tal que

$$2K\nu(\lambda)\int_T^0 e^{(a_+-\delta)(t-s)}ds < 1,$$

segue que $\widetilde{P}$ é uma contração e assim possui um único ponto fixo. Esse ponto fixo satisfaz (2.2.38).

Além disso, temos as estimativas:

$$\|w_+^h(\varphi_+,t) - w_+^h(\widetilde{\varphi}_+,t)\| \le K\|\varphi_+ - \widetilde{\varphi}_+\|e^{(a_+-2K\nu(\lambda))t}, \ t \le 0, \tag{2.2.39}$$

e

$$\|w_+^{h_1}(\varphi_+,t) - w_+^{h_2}(\varphi_+,t)\| \le \frac{K\|\varphi_+\|\rho(h_1,h_2)}{2}e^{(a_+-4K\nu(\lambda))t}, \ t \le 0. \tag{2.2.40}$$

Para verificar (2.2.39), seja

$$\alpha(t) = \|w_+^h(\varphi_+,t) - w_+^h(\widetilde{\varphi}_+,t)\|, \ t \le 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &\le \|T(t)[\varphi_+ - \widetilde{\varphi}_+]\| + \\
&+ \int_t^0 \left\|T(t-s)\pi_+\left\{f_\lambda(w_+^h(\varphi_+,s) + h(w_+^h(\varphi_+,s))) - f_\lambda(w_+^h(\widetilde{\varphi}_+,s) + h(w_+^h(\widetilde{\varphi}_+,s)))\right\}\right\|ds \\
&\le Ke^{a_+t}\|\varphi_+ - \widetilde{\varphi}_+\| + \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\left\|w_+^h(\varphi_+,s) - w_+^h(\widetilde{\varphi}_+,s)\right\|ds \\
&+ \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\left\|h(w_+^h(\varphi_+,s)) - h(w_+^h(\widetilde{\varphi}_+,s))\right\|ds \\
&\le Ke^{a_+t}\|\varphi_+ - \widetilde{\varphi}_+\| + \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\left\|w_+^h(\varphi_+,s) - w_+^h(\widetilde{\varphi}_+,s)\right\|ds,
\end{aligned}$$

daí

$$e^{-a_+t}\alpha(t) \le K\|\varphi_+ - \widetilde{\varphi}_+\| + \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\alpha(s)ds.$$

Do Lema de Gronwall (adaptado para $t \le 0$), segue que

$$e^{-a_+t}\alpha(t) \le K\|\varphi_+ - \widetilde{\varphi}_+\|e^{-2K\nu(\lambda)t},$$

assim

$$\alpha(t) \le K\|\varphi_+ - \widetilde{\varphi}_+\|e^{(a_+-2K\nu(\lambda))t},$$

que é (2.2.39). Para verificar a expressão (2.2.40), seja

$$\beta(t) = \|w_+^{h_1}(\varphi_+, t) - w_+^{h_2}(\varphi_+, t)\|, \ t \leq 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
\beta(t) &\leq \int_t^0 \|T(t-s)\pi_+\Big\{ f_\lambda\Big(w_+^{h_1}(\varphi_+, s) + h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+, s))\Big) \\
&- f_\lambda\Big(w_+^{h_2}(\varphi_+, s) + h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\Big)\Big\}\| ds \\
&\leq \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\Big\{ \|w_+^{h_1}(\varphi_+, s) - w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\| \\
&+ \|h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+, s)) - h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\|\Big\} ds \\
&\leq \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\Big[\beta(s) + \|h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+, s)) - h_1(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\| \\
&+ \|h_1(w_+^{h_2}(\varphi_+, s)) - h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\|\Big] ds \\
&\leq \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\left[2\beta(s) + \|w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\|\frac{\|h_1(w_+^{h_2}(\varphi_+, s)) - h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\|}{\|w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\|}\right] ds \\
&\leq \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\beta(s)ds + \int_t^0 K\nu(\lambda)\rho(h_1, h_2)\|w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\|e^{a_+(t-s)}ds.
\end{aligned}$$

Mas, de (2.2.38),

$$\begin{aligned}
\|w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\| &\leq \|T(t)\varphi_+\| + \int_t^0 \Big\|T(t-s)\pi_+ f_\lambda\Big(w_+^{h_2}(\varphi_+, s) + h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\Big)\Big\| ds \\
&\leq Ke^{a_+t}\|\varphi_+\| + \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\|w_+^{h_2}(\varphi_+, s) + h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\| ds \\
&\leq Ke^{a_+t}\|\varphi_+\| + \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\|w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\| ds,
\end{aligned}$$

então

$$e^{-a_+t}\|w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\| \leq K\|\varphi_+\| + \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\|w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\| ds.$$

Do Lema de Gronwall, adaptado para $t \leq 0$, obtemos

$$e^{-a_+t}\|w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\| \leq K\|\varphi_+\|e^{-2K\nu(\lambda)t},$$

assim

$$\|w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\| \leq K\|\varphi_+\|e^{(a_+ - 2K\nu(\lambda))t}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\beta(t) &\leq \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\beta(s)ds + \int_t^0 K\nu(\lambda)\rho(h_1, h_2)K\|\varphi_+\|e^{(a_+ - 2K\nu(\lambda))s}e^{a_+(t-s)}ds \\
&= \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\beta(s)ds + K^2\nu(\lambda)\rho(h_1, h_2)\|\varphi_+\| \int_t^0 e^{a_+t}e^{-2K\nu(\lambda)s}ds,
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}\int_t^0 e^{a_+t}e^{-2K\nu(\lambda)s}ds &= e^{a_+t}\left[\frac{e^{-2K\nu(\lambda)t}}{2K\nu(\lambda)} - \frac{1}{2K\nu(\lambda)}\right]\\ &\leq \frac{e^{(a_+-2K\nu(\lambda))t}}{2K\nu(\lambda)}.\end{aligned}$$

Daí

$$\beta(t) \leq \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\beta(s)ds + \frac{K\rho(h_1,h_2)}{2}\|\varphi_+\|e^{(a_+-2K\nu(\lambda))t},$$

então

$$e^{-a_+t}\beta(t) \leq \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\beta(s)ds + \frac{K\rho(h_1,h_2)}{2}\|\varphi_+\|e^{-2K\nu(\lambda)t}.$$

Usando uma adaptação do Lema de Gronwall Geral, para $t \leq 0$, obtemos

$$e^{-a_+t}\beta(t) \leq \frac{K\rho(h_1,h_2)}{2}\|\varphi_+\|e^{-4K\nu(\lambda)t}.$$

Portanto

$$\beta(t) \leq \frac{K\rho(h_1,h_2)}{2}\|\varphi_+\|e^{(a_+-4K\nu(\lambda))t},$$

que é a expressão (2.2.40).

Definimos a transformação $\widetilde{Q}$ sobre H por

$$(\widetilde{Q}h)(\varphi_+) = \int_{-\infty}^0 T(-s)(\pi_- + \pi_0)f_\lambda\Big(w_+^h(\varphi_+,s) + h\Big(w_+^h(\varphi_+,s)\Big)\Big)ds.$$

Note que

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{Q}h)(\varphi_+) - (\widetilde{Q}h)(\psi_+)\| &\leq \int_{-\infty}^0 K\nu(\lambda)e^{a_-s}\Big\|w_+^h(\varphi_+,s) + h(w_+^h(\varphi_+,s))\\ &- w_+^h(\psi_+,s) - h(w_+^h(\psi_+,s))\Big\|ds\\ &+ \int_{-\infty}^0 K\nu(\lambda)e^{-a_0s}\Big\|w_+^h(\varphi_+,s) + h(w_+^h(\varphi_+,s))\\ &- w_+^h(\psi_+,s) - h(w_+^h(\psi_+,s))\Big\|ds\\ &\leq \int_{-\infty}^0 2K\nu(\lambda)e^{a_-s}\Big\|w_+^h(\varphi_+,s) - w_+^h(\psi_+,s)\Big\|ds\\ &+ \int_{-\infty}^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_0s}\Big\|w_+^h(\varphi_+,s) - w_+^h(\psi_+,s)\Big\|ds,\end{aligned}$$

sendo $a_-s < a_0s < -a_0s$, para $s < 0$, segue que

$$\|(\widetilde{Q}h)(\varphi_+) - (\widetilde{Q}h)(\psi_+)\| \leq \int_{-\infty}^0 4K\nu(\lambda)e^{-a_0s}\Big\|w_+^h(\varphi_+,s) - w_+^h(\psi_+,s)\Big\|ds.$$

Usando (2.2.39) obtemos

$$
\begin{aligned}
\|(\widetilde{Q}h)(\varphi_+) - (\widetilde{Q}h)(\psi_+)\| &\leq 4K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+ - \psi_+\| \int_{-\infty}^{0} e^{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))s} ds \\
&= \frac{4K^2\nu(\lambda)}{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))}\|\varphi_+ - \psi_+\|.
\end{aligned}
$$

Escolhendo λ tal que

$$
\frac{4K^2\nu(\lambda)}{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))} < 1,
$$

segue que $\widetilde{Q} : H \to H$. Além disso, $\widetilde{Q}$ é uma contração sobre H. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|(\widetilde{Q}h_1)(\varphi_+) - (\widetilde{Q}h_2)(\varphi_+)\| &\leq \int_{-\infty}^{0} \Big\| T(-s)\pi_- \Big\{ f_\lambda\Big(w_+^{h_1}(\varphi_+, s) + h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+, s))\Big) \\
&- f_\lambda\Big(w_+^{h_2}(\varphi_+, s) + h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\Big)\Big\}\Big\| ds \\
&+ \int_{-\infty}^{0} \Big\| T(-s)\pi_0 \Big\{ f_\lambda\Big(w_+^{h_1}(\varphi_+, s) + h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+, s))\Big) \\
&- f_\lambda\Big(w_+^{h_2}(\varphi_+, s) + h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\Big)\Big\}\Big\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} K\nu(\lambda) e^{a_- s} \Big[\Big\| w_+^{h_1}(\varphi_+, s) - w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\Big\| \\
&+ \Big\| h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+, s)) - h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\Big\|\Big] ds \\
&+ \int_{-\infty}^{0} K\nu(\lambda) e^{-a_0 s} \Big[\Big\| w_+^{h_1}(\varphi_+, s) - w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\Big\| \\
&+ \Big\| h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+, s)) - h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\Big\|\Big] ds.
\end{aligned}
$$

sendo $a_- s < a_0 s < -a_0 s$, para $s < 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|(\widetilde{Q}h_1)(\varphi_+) - (\widetilde{Q}h_2)(\varphi_+)\| &\leq \int_{-\infty}^{0} 2K\nu(\lambda) e^{-a_0 s} \Big[\Big\| w_+^{h_1}(\varphi_+, s) - w_+^{h_2}(\varphi_+, s)\Big\| \\
&+ \Big\| h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+, s)) - h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+, s))\Big\|\Big] ds.
\end{aligned}
$$

Somando e subtraindo o termo $h_1(w_+^{h_2}(\varphi_+,s))$, temos

$$\begin{aligned}
\|(\widetilde{Q}h_1)(\varphi_+)-(\widetilde{Q}h_2)(\varphi_+)\| &\leq \int_{-\infty}^{0} 2K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\Big[\Big\|w_+^{h_1}(\varphi_+,s)-w_+^{h_2}(\varphi_+,s)\Big\| \\
&+ \Big\|h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+,s))-h_1(w_+^{h_2}(\varphi_+,s))\Big\| \\
&+ \Big\|h_1(w_+^{h_2}(\varphi_+,s))-h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+,s))\Big\|\Big]ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\Big\|w_+^{h_1}(\varphi_+,s)-w_+^{h_2}(\varphi_+,s)\Big\| \\
&+ \int_{-\infty}^{0} 2K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\Big\|h_1(w_+^{h_2}(\varphi_+,s))-h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+,s))\Big\|ds.
\end{aligned}$$

Agora, lembrando que

$$\|w_+^{h_2}(\varphi_+,s)\| \leq K\|\varphi_+\|e^{(a_+-2K\nu(\lambda))s},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\Big\|h_1(w_+^{h_2}(\varphi_+,s))-h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+,s))\Big\| &= \|w_+^{h_2}(\varphi_+,s)\|\frac{\|h_1(w_+^{h_1}(\varphi_+,s))-h_2(w_+^{h_2}(\varphi_+,s))\|}{\|w_+^{h_2}(\varphi_+,s)\|} \\
&\leq \rho(h_1,h_2)\|w_+^{h_2}(\varphi_+,s)\| \\
&\leq \rho(h_1,h_2)K\|\varphi_+\|e^{(a_+-2K\nu(\lambda))s}.
\end{aligned}$$

Então, usando (2.2.40) e a estimativa acima, resulta

$$\begin{aligned}
\|(\widetilde{Q}h_1)(\varphi_+)-(\widetilde{Q}h_2)(\varphi_+)\| &\leq \int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\frac{K\rho(h_1,h_2)}{2}\|\varphi_+\|e^{(a_+-4K\nu(\lambda))s}ds \\
&+ \int_{-\infty}^{0} 2K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\rho(h_1,h_2)K\|\varphi_+\|e^{(a_+-2K\nu(\lambda))s}ds \\
&= \left(2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|\int_{-\infty}^{0} e^{(a_+-a_0-4K\nu(\lambda))s}ds\right)\rho(h_1,h_2) \\
&+ \left(2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|\int_{-\infty}^{0} e^{(a_+-a_0-2K\nu(\lambda))s}ds\right)\rho(h_1,h_2) \\
&= \left(\frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|}{a_+-a_0-4K\nu(\lambda)}+\frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|}{a_+-a_0-2K\nu(\lambda)}\right)\rho(h_1,h_2).
\end{aligned}$$

Assim, escolhendo λ tal que

$$\left(\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+-a_0-4K\nu(\lambda)}+\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+-a_0-2K\nu(\lambda)}\right)<1,$$

segue que $\widetilde{Q}$ é uma contração e possui um único ponto fixo q_λ. Esse único ponto fixo satisfaz (2.2.37).

Seja $\delta = \lambda$. Considere

$$U = \left\{ \varphi \in X \ : \ \|\varphi_+\| < \frac{\delta}{2K}, \ \varphi_- + \varphi_0 = q_\lambda(\varphi_+) \right\}.$$

Mostraremos que U satisfaz as condições do teorema. De fato, para $\varphi \in U$,

$$\|\varphi\| = \|\varphi_+\| + \|p_\lambda(\varphi_+)\| < \frac{\delta}{2K} + \|q_\lambda(\varphi_+)\|.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda(\varphi_+)\| &\leq \int_{-\infty}^{0} \left\| T(-s)(\pi_- + \pi_0) f_\lambda\Big(w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, s) + q_\lambda\Big(w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, s)\Big)\Big)\right\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} K\nu(\lambda) e^{a_- s} \left\| w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, s) + q_\lambda\Big(w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, s)\Big)\right\| ds \\
&+ \int_{-\infty}^{0} K\nu(\lambda) e^{-a_0 s} \left\| w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, s) + q_\lambda\Big(w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, s)\Big)\right\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} 2K\nu(\lambda) e^{-a_0 s} \left\| w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, s) + q_\lambda\Big(w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, s)\Big)\right\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda) e^{-a_0 s} \left\| w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, s)\right\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda) e^{-a_0 s} K \|\varphi_+\| e^{(a_+ - 2K\nu(\lambda))s} ds \\
&= \|\varphi_+\| 4K^2 \nu(\lambda) \int_{-\infty}^{0} e^{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))s} ds \\
&= \|\varphi_+\| \frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Escolhendo λ tal que $\frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)} < 1$, temos $\|q_\lambda(\varphi_+)\| < \frac{\delta}{2K}$. Logo $\|\varphi\| < \frac{\delta}{K} \leq \delta$, já que $K \geq 1$. Portanto $\varphi \in B(0, \delta)$.

O conjunto U é negativamente invariante. Com efeito, dada $\varphi \in U$, considere $w(\varphi, t)$ a solução de (2.1.11), para $t \leq 0$, que vale φ quando $t = 0$. Mostraremos que $w(\varphi, t) \in U$. Para isso, começamos observando que

$$w_+(\varphi_+, t) + q_\lambda(w_+(\varphi_+, t)),$$

onde q_λ é o único ponto fixo de $\widetilde{Q}$, define uma solução de (2.1.11). De fato,

$$\begin{aligned}
q_\lambda(w_+(\varphi_+,t)) &= \int_{-\infty}^{0} T(-s)(\pi_- + \pi_0)f_\lambda(w_+(\varphi_+,t+s) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,t+s)))ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} T(t-u)(\pi_- + \pi_0)f_\lambda(w_+(\varphi_+,u) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,u)))du \\
&= \int_{-\infty}^{0} T(t-u)(\pi_- + \pi_0)f_\lambda(w_+(\varphi_+,u) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,u)))du \\
&+ \int_{0}^{t} T(t-u)(\pi_- + \pi_0)f_\lambda(w_+(\varphi_+,u) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,u)))du.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_{-\infty}^{0} T(t-u)(\pi_- + \pi_0)f_\lambda(w_+(\varphi_+,u) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,u)))du \\
&= T(t)\int_{-\infty}^{0} T(-u)(\pi_- + \pi_0)f_\lambda[w_+(\varphi_+,u) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,u))]du \\
&= T(t)q_\lambda(\varphi_+) \\
&= T(t)q_\lambda(w_+(\varphi_+,0)).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
w_+(\varphi_+,t) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,t)) &= T(t)[w_+(\varphi_+,0) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,0))] \\
&+ \int_{0}^{t} T(t-u)f_\lambda(w_+(\varphi_+,u) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,u)))du,
\end{aligned}$$

ou seja, $w_+(\varphi_+,t) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,t))$ satisfaz (2.1.11). Além disso,

$$w_+(\varphi_+,0) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,0)) = \varphi_+ + q_\lambda(\varphi_+).$$

Sendo $\varphi \in U$, temos

$$q_\lambda(\varphi_+) = \varphi_- + \varphi_0.$$

Logo

$$w_+(\varphi_+,0) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,0)) = \varphi.$$

Portanto, por unicidade de soluções, segue que

$$w(\varphi,t) = w_+(\varphi_+,t) + q_\lambda(w_+(\varphi_+,t)).$$

Assim, $w(\varphi,t) \in U$.

A prova de (2.2.32) segue de (2.2.39) com $\widetilde{\varphi} \equiv 0$. De fato, sendo

$$\|w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, t)\| \leq K\|\varphi_+\|e^{(a_+ - 2K\nu(\lambda))t},$$

temos

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda(w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, t))\| &\leq \int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\|w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, t+s))\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}K\|\varphi_+\|e^{(a_+ - 2K\nu(\lambda)(t+s))}ds \\
&= \left(\int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda)e^{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))s}ds\right)K\|\varphi_+\|e^{(a_+ - 2K\nu(\lambda))t} \\
&= \frac{4K\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}K\|\varphi_+\|e^{(a_+ - 2K\nu(\lambda))t}.
\end{aligned}$$

Se λ é tal que $\frac{4K\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)} \leq 1$, obtemos

$$\|q_\lambda(w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, t))\| \leq K\|\varphi_+\|e^{(a_+ - 2K\nu(\lambda))t}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|w(\varphi, t)\| &= \|w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, t)) + q_\lambda(w_+^{q_\lambda}(\varphi_+, t))\| \\
&\leq 2K\|\varphi_+\|e^{(a_+ - 2K\nu(\lambda))t}
\end{aligned}$$

que é (2.2.32) com $\eta = 2K\nu(\lambda)$.

Para provarmos a tangência de U, em $\pi_+ X$ no zero, observamos que

$$\frac{\|q_\lambda(\varphi_+)\|}{\|\varphi_+\|} \leq \frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}.$$

Agora, quando $\|\varphi_+\| \longrightarrow 0$, podemos considerar, em (2.1.9), o parâmetro de truncamento, $\lambda \longrightarrow 0$, e teremos ainda (2.1.10) válida com φ_+, ψ_+ no lugar de φ, ψ. Portanto $\nu(\lambda) \longrightarrow 0$, quando $\|\varphi_+\| \longrightarrow 0$. Conseqüentemente $\frac{\|q_\lambda(\varphi_+)\|}{\|\varphi_+\|} \longrightarrow 0$, quando $\|\varphi_+\| \longrightarrow 0$. Isso completa a prova. ■

Corolário 2.2.2 *Sob as hipóteses e notações do Teorema 2.2.1, seja* $\eta > 0$ *tal que* $\min(a_-, a_+) > \eta$ *e* $\bar{\varphi} \neq 0$ *um equilíbrio de (2.1.1). Então existe* $\delta > 0$, *tal que as variedades estável e instável de* $\bar{\varphi}$ *existem e são dadas por*

$$S(\bar{\varphi}) = \{\bar{\varphi} + \varphi \in B(\bar{\varphi}, \delta) \ : \ \varphi \in S\}$$

$$U(\bar{\varphi}) = \{\bar{\varphi} + \varphi \in B(\bar{\varphi}, \delta) \ : \ \varphi \in U\}.$$

Se $\varphi \in S(\bar{\varphi})$ então, para $t \geq 0$, existe uma única solução $w(t)$ de (2.1.5) com $w(0) = \varphi$ e

$$\|w(t) - \bar{\varphi}\| \leq 2Ke^{-(a_- - \eta)t}\|w_-(0) - \bar{\varphi}\|, \ t \geq 0.$$

Se a hipótese (BU) vale e $\varphi \in U(\bar{\varphi})$ então uma solução $w(t)$ de (2.1.5) com $w(0) = \varphi$ existe para $t \leq 0$ e

$$\|w(t) - \bar{\varphi}\| \leq 2Ke^{(a_+ - \eta)t}\|w_+(0) - \bar{\varphi}\|, \ t \leq 0.$$

Além disso, o espaço tangente a $S(\bar{\varphi})$ em $\bar{\varphi}$ é $\pi_- X$ e o espaço tangente a U em $\bar{\varphi}$ é $\pi_+ X$. $S(\bar{\varphi})$ é positivamente invariante sob o fluxo (2.1.5) e se (BU) vale $U(\bar{\varphi})$ é negativamente invariante.

Demonstração: Basta notar que a translação

$$\varphi \mapsto \varphi - \bar{\varphi}$$

leva o equilíbrio $\bar{\varphi}$ na origem, então o resultado segue diretamente do Teorema 2.2.1. ∎

2.2.1 Continuidade das variedades instáveis locais

Nesta subseção, provamos um teorema de continuidade das variedades instáveis locais de (2.1.1) em relação a um parâmetro, desde que o semigrupo $T(t)$, gerado por A, não dependa desse parâmetro.

Teorema 2.2.3 *(Continuidade das variedades instáveis locais de (2.1.1)). Além das hipóteses do Teorema 2.2.1, suponhamos que a função f_λ depende de mais um parâmetro $\varepsilon \in \Omega$, onde Ω é um aberto de algum espaço de Banach e $f_\lambda = f_\lambda^\varepsilon$ satisfaz as estimativas*

$$\|f_\lambda^\varepsilon(u) - f_\lambda^{\varepsilon_0}(u)\| \leq C_1(\varepsilon)\|u\|, \ C_1(\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to \varepsilon_0, \tag{2.2.41}$$

$$\|f_\lambda^\varepsilon(u) - f_\lambda^\varepsilon(v)\| \leq \nu(\lambda)\|u - v\|, \ \textit{para cada } \varepsilon \in \Omega, \tag{2.2.42}$$

onde $\nu(\cdot)$ é uma função contínua não decrescente com $\nu(0) = 0$. Então a variedade instável U^ε, de (2.1.1) dada no Teorema 2.2.1, é contínua com relação a ε em $\varepsilon_0 \in \Omega$.

Demonstração: Vimos que U^ε é um gráfico de uma função Lipschitziana, $q_\lambda = q_\lambda^\varepsilon$, com constante Lpschitz menor ou igual a 1, onde $(q_\lambda, w_+^{q_\lambda})$ é a única solução do sistema

$$\begin{aligned} q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+) &= \int_{-\infty}^0 T(-s)(\pi_- + \pi_0) f_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon)))ds, \\ w_+(t,\varepsilon) &= T(t)\varphi_+ + \int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon)))ds, \ t \leq 0. \end{aligned} \tag{2.2.43}$$

Além disso, de (2.2.42) e (2.2.43), segue que

$$
\begin{aligned}
\|w_+(t,\varepsilon)\| &\leq Ke^{a_+t}\|\varphi_+\| + \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\|w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))\|ds \\
&\leq Ke^{a_+t}\|\varphi_+\| + \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{a_+(t-s)}\|w_+(s,\varepsilon)\|ds.
\end{aligned}
$$

Daí

$$e^{-a_+t}\|w_+(t,\varepsilon)\| \leq K\|\varphi_+\| + \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\|w_+(s,\varepsilon)\|ds.$$

Usando o Lema de Gronwall, adaptado para $t \leq 0$, segue que

$$e^{-a_+t}\|w_+(t,\varepsilon)\| \leq K\|\varphi_+\|e^{-2K\nu(\lambda)t},$$

e, daí

$$\|w_+(t,\varepsilon)\| \leq K\|\varphi_+\|e^{(a_+-2K\nu(\lambda))t},\ t \leq 0. \tag{2.2.44}$$

Usaremos a métrica ρ definida por

$$\rho(h_1,h_2) = \sup_{\varphi\in X,\varphi_+\neq 0} \frac{\|h_1(\varphi_+) - h_2(\varphi_+)\|}{\|\varphi_+\|}.$$

Seja $\theta(t) = \|w_+(t,\varepsilon) - w_+(t,\varepsilon_0)\|$, $t \leq 0$. Então

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &\leq \int_t^0 \|T(t-s)\pi_+\{f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))] - f_\lambda^{\varepsilon_0}[w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\}\|ds \\
&\leq \int_t^0 Ke^{(t-s)a_+}\|f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))] - f_\lambda^{\varepsilon_0}[w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\|ds.
\end{aligned}
$$

Somando e subtraindo o termo $f^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]$, na norma acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &\leq \int_t^0 Ke^{(t-s)a_+}\|f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))] - f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\|ds \\
&+ \int_t^0 Ke^{(t-s)a_+}\|f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))] - f_\lambda^{\varepsilon_0}[w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\|ds.
\end{aligned}
$$

De (2.2.41) e (2.2.42) segue que

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &\leq \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{(t-s)a_+}\Big[\|w_+(s,\varepsilon) - w_+(s,\varepsilon_0)\| + \|q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon)) - q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\Big]ds \\
&+ \int_t^0 Ke^{(t-s)a_+}C_1(\varepsilon)\|w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|ds \\
&= \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{(t-s)a_+}\Big[\theta(s) + \|q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon)) - q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\Big]ds \\
&+ \int_t^0 Ke^{(t-s)a_+}C_1(\varepsilon)\|w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|ds.
\end{aligned}
$$

Usando que $q_\lambda^{\varepsilon_0}$ é uma função lipschitziana com constante de Lipschitz ≤ 1 e $q_\lambda^{\varepsilon_0}(0)=0$, resulta

$$\begin{aligned}
\theta(t) &\leq \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{(t-s)a_+}\Big[\theta(s)+\|q_\lambda^{\varepsilon}(w_+(s,\varepsilon))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\Big]ds\\
&+ \int_t^0 2Ke^{(t-s)a_+}C_1(\varepsilon)\|w_+(s,\varepsilon_0)\|ds.
\end{aligned}$$

Agora, usando que q_λ^{ε} é lipschitziana com constante de Lipschitz ≤ 1, temos

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda^{\varepsilon}(w_+(s,\varepsilon))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\| &\leq \|q_\lambda^{\varepsilon}(w_+(s,\varepsilon))-q_\lambda^{\varepsilon}(w_+(s,\varepsilon_0))\|+\|q_\lambda^{\varepsilon}(w_+(s,\varepsilon_0))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\\
&\leq \|w_+(s,\varepsilon)-w_+(s,\varepsilon_0)\|+\|q_\lambda^{\varepsilon}(w_+(s,\varepsilon_0))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\\
&= \theta(s)+\|q_\lambda^{\varepsilon}(w_+(s,\varepsilon_0))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\\
&= \theta(s)+\|w_+(s,\varepsilon_0)\|\frac{\|q_\lambda^{\varepsilon}(w_+(s,\varepsilon_0))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|}{\|w_+(s,\varepsilon_0)\|}\\
&\leq \theta(s)+\|w_+(s,\varepsilon_0)\|\rho\left(q_\lambda^{\varepsilon},q_\lambda^{\varepsilon_0}\right).
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\theta(t) &\leq \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{(t-s)a_+}[\theta(s)+\theta(s)+\|w_+(s,\varepsilon_0)\|\rho\left(q_\lambda^{\varepsilon},q_\lambda^{\varepsilon_0}\right)]ds\\
&+ \int_t^0 2KC_1(\varepsilon)e^{(t-s)a_+}\|w_+(s,\varepsilon_0)\|ds\\
&= \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{(t-s)a_+}\theta(s)ds\\
&+ \int_t^0 K\nu(\lambda)e^{(t-s)a_+}\|w_+(s,\varepsilon_0)\|\rho\left(q_\lambda^{\varepsilon},q_\lambda^{\varepsilon_0}\right)ds\\
&+ \int_t^0 2KC_1(\varepsilon)e^{(t-s)a_+}\|w_+(s,\varepsilon_0)\|ds.
\end{aligned}$$

Usando (2.2.44), obtemos

$$\begin{aligned}
\theta(t) &\leq \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{(t-s)a_+}\theta(s)ds+\int_t^0 K\nu(\lambda)e^{(t-s)a_+}\rho(q_\lambda^{\varepsilon},q_\lambda^{\varepsilon_0})K\|\varphi_+\|e^{(a_+-2K\nu(\lambda))s}ds\\
&+ \int_t^0 2KC_1(\varepsilon)e^{(t-s)a_+}K\|\varphi_+\|e^{(a_+-2K\nu(\lambda))s}ds\\
&= \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{(t-s)a_+}\theta(s)ds+K^2\|\varphi_+\|\nu(\lambda)\rho(q_\lambda^{\varepsilon},q_\lambda^{\varepsilon_0})e^{a_+t}\int_t^0 e^{-2K\nu(\lambda)s}ds\\
&+ 2K^2\|\varphi_+\|C_1(\varepsilon)e^{a_+t}\int_t^0 e^{-2K\nu(\lambda)s}ds.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
e^{-a_+t}\theta(t) &\leq \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\theta(s)ds+K^2\|\varphi_+\|\nu(\lambda)\rho(q_\lambda^{\varepsilon},q_\lambda^{\varepsilon_0})\int_t^0 e^{-2K\nu(\lambda)s}ds\\
&+ 2K^2\|\varphi_+\|C_1(\varepsilon)\int_t^0 e^{-2K\nu(\lambda)s}ds.
\end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}
\int_t^0 e^{-2K\nu(\lambda)s}ds &= -\frac{1}{2K\nu(\lambda)}[1-e^{-2K\nu(\lambda)t}] \\
&= \frac{1}{2K\nu(\lambda)}[e^{-2K\nu(\lambda)t}-1] \\
&\le \frac{e^{-2K\nu(\lambda)t}}{2K\nu(\lambda)},
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
e^{-a_+t}\theta(t) &\le \int_t^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\theta(s)ds + \frac{K\|\varphi_+\|\nu(\lambda)}{2\nu(\lambda)}\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0})e^{-2K\nu(\lambda)t} \\
&+ \frac{K\|\varphi_+\|}{\nu(\lambda)}C_1(\varepsilon)e^{-2K\nu(\lambda)t}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema de Gronwall Geral, adaptado para $t \le 0$, segue que

$$e^{-a_+t}\theta(t) \le e^{-2K\nu(\lambda)t}\left[\frac{K\|\varphi_+\|}{2}\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0})e^{-2K\nu(\lambda)t} + \frac{K\|\varphi_+\|C_1(\varepsilon)}{\nu(\lambda)}e^{-2K\nu(\lambda)t}\right].$$

Logo

$$\theta(t) \le \frac{K\|\varphi_+\|}{2}\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0})e^{(a_+-4K\nu(\lambda))t} + \frac{K\|\varphi_+\|C_1(\varepsilon)}{\nu(\lambda)}e^{(a_+-4K\nu(\lambda))t}. \tag{2.2.45}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+) - q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| &\le \int_{-\infty}^0 \|T(-s)\pi_-[f_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))) \\
&- f_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0)))]\|ds \\
&+ \int_{-\infty}^0 \|T(-s)\pi_0[f_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))) \\
&- f_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0)))]\|ds \\
&\le \int_{-\infty}^0 Ke^{a_-s}\|f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))] \\
&- f_\lambda^{\varepsilon_0}[w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\|ds \\
&+ \int_{-\infty}^0 Ke^{-a_0s}\|f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))] \\
&- f_\lambda^{\varepsilon_0}[w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\|ds.
\end{aligned}$$

Sendo $a_-s \le -a_0s$, quando $s < 0$, resulta

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+) - q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| &\le \int_{-\infty}^0 2Ke^{-a_0s}\|f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon) + q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))] \\
&- f_\lambda^{\varepsilon_0}[w_+(s,\varepsilon_0) + q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\|ds.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon_0)+q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]$ na integral acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+)-q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| \ &\leq \ \int_{-\infty}^0 2Ke^{-a_0 s}\|f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon)+q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))]\\
&- \ f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon_0)+q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\|ds\\
&+ \ \int_{-\infty}^0 2Ke^{-a_0 s}\|f_\lambda^\varepsilon[w_+(s,\varepsilon_0)+q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\\
&- \ f_\lambda^{\varepsilon_0}[w_+(s,\varepsilon_0)+q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))]\|ds.
\end{aligned}$$

Usando (2.2.41) e (2.2.42), segue que

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+)-q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| \ &\leq \ \int_{-\infty}^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\Big\{\|w_+(s,\varepsilon)-w_+(s,\varepsilon_0)\|\\
&+ \ \|q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\Big\}ds\\
&+ \ \int_{-\infty}^0 2Ke^{-a_0 s}C_1(\varepsilon)\|w_+(s,\varepsilon_0)+q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|ds\\
&= \ \int_{-\infty}^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\Big\{\theta(s)+\|q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\Big\}ds\\
&+ \ \int_{-\infty}^0 2Ke^{-a_0 s}C_1(\varepsilon)\|w_+(s,\varepsilon_0)+q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|ds.
\end{aligned}$$

Já que $q_\lambda^{\varepsilon_0}$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz menor ou igual a 1 e $q_\lambda^{\varepsilon_0}(0)=0$, resulta

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+)-q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| \ &\leq \ \int_{-\infty}^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\Big\{\theta(s)+\|q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\Big\}ds\\
&+ \ \int_{-\infty}^0 4Ke^{-a_0 s}C_1(\varepsilon)\|w_+(s,\varepsilon_0)\|ds.
\end{aligned}$$

Usando mais uma vez que

$$\|q_\lambda^\varepsilon(w_+(s,\varepsilon))-q_\lambda^{\varepsilon_0}(w_+(s,\varepsilon_0))\|\leq\theta(s)+\|w_+(s,\varepsilon_0)\|\rho(q_\lambda^\varepsilon,q_\lambda^{\varepsilon_0}),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+)-q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| \ &\leq \ \int_{-\infty}^0 2K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\Big[2\theta(s)+\|w_+(s,\varepsilon_0)\|\rho(q_\lambda^\varepsilon,q_\lambda^{\varepsilon_0})\Big]ds\\
&+ \ \int_{-\infty}^0 4KC_1(\varepsilon)e^{-a_0 s}\|w_+(s,\varepsilon_0)\|ds.
\end{aligned}$$

Agora, usando (2.2.44), segue que

$$\begin{aligned}\|q^{\varepsilon}_{\lambda}(\varphi_+) - q^{\varepsilon_0}_{\lambda}(\varphi_+)\| &\leq \int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\theta(s)ds \\ &+ \int_{-\infty}^{0} 2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|\rho(q^{\varepsilon}_{\lambda}, q^{\varepsilon_0}_{\lambda})e^{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))s}ds \\ &+ \int_{-\infty}^{0} 4K^2\|\varphi_+\|C_1(\varepsilon)e^{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))s}ds.\end{aligned}$$

Assim,

$$\|q^{\varepsilon}_{\lambda}(\varphi_+) - q^{\varepsilon_0}_{\lambda}(\varphi_+)\| \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\theta(s)ds,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} 2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|\rho(q^{\varepsilon}_{\lambda}, q^{\varepsilon_0}_{\lambda})e^{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))s}ds$$

e

$$I_3 = \int_{-\infty}^{0} 4K^2\|\varphi_+\|C_1(\varepsilon)e^{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))s}ds.$$

Mas, usando a estimativa obtida para $\theta(t)$ em (2.2.45), obtemos

$$\begin{aligned}I_1 &\leq \int_{-\infty}^{0} 4K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\left[\frac{K}{2}\|\varphi_+\|\rho(q^{\varepsilon}_{\lambda}, q^{\varepsilon_0}_{\lambda})e^{(a_+ - 4K\nu(\lambda))s} + \frac{K\|\varphi_+\|}{\nu(\lambda)}C_1(\varepsilon)e^{(a_+ - 4K\nu(\lambda))s}\right]ds \\ &= \int_{-\infty}^{0} 2K^2\|\varphi_+\|\nu(\lambda)\rho(q^{\varepsilon}_{\lambda}, q^{\varepsilon_0}_{\lambda})e^{(a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda))s}ds \\ &+ \int_{-\infty}^{0} 4K^2\|\varphi_+\|C_1(\varepsilon)e^{(a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda))s}ds \\ &= \frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)}\rho(q^{\varepsilon}_{\lambda}, q^{\varepsilon_0}_{\lambda}) + \frac{4K^2\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)}C_1(\varepsilon).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{-\infty}^{0} 2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|\rho(q^{\varepsilon}_{\lambda}, q^{\varepsilon_0}_{\lambda})e^{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))s}ds \\ &= \frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\rho(q^{\varepsilon}_{\lambda}, q^{\varepsilon_0}_{\lambda})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_{-\infty}^{0} 4K^2\|\varphi_+\|C_1(\varepsilon)e^{(a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda))s}ds \\ &= \frac{4K^2\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}C_1(\varepsilon).\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+) - q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| &\leq \frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)}\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) + \frac{4K^2\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)}C_1(\varepsilon) \\
&+ \frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) + \frac{4K^2\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}C_1(\varepsilon) \\
&= \left[\frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right]\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) \\
&+ \left[\frac{4K^2\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{4K^2\|\varphi_+\|}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right]C_1(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+) - q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\|}{\|\varphi_+\|} &\leq \left[\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right]\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) \\
&+ \left[\frac{4K^2}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{4K^2}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right]C_1(\varepsilon),
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi\in X,\, \varphi_+\neq 0}\frac{\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+) - q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\|}{\|\varphi_+\|} &\leq \left[\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right]\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) \\
&+ \left[\frac{4K^2}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{4K^2}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right]C_1(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) &\leq \left[\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right]\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) \\
&+ \left[\frac{4K^2}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{4K^2}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right]C_1(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Escolhendo λ, suficientemente pequeno, de modo que

$$\left[\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right] < \frac{1}{2}$$

e chamando

$$C_2(\varepsilon) = \left[\frac{4K^2}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)} + \frac{4K^2}{a_+ - a_0 - 2K\nu(\lambda)}\right]C_1(\varepsilon),$$

obtemos

$$\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) < \frac{1}{2}\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) + C_2(\varepsilon),$$

então

$$\frac{1}{2}\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) < C_2(\varepsilon).$$

Portanto

$$\rho(q_\lambda^\varepsilon, q_\lambda^{\varepsilon_0}) < 2C_2(\varepsilon),$$

com $C_2(\varepsilon) \to 0$, quando $\varepsilon \to \varepsilon_0$, o que conclui a demonstração do teorema. ■

Corolário 2.2.4 *Sob as condições do Teorema 2.2.3, para cada equilíbrio da perturbação de (2.1.1), $\bar{\varphi}_\varepsilon$, existe a variedade instável local $U^\varepsilon(\bar{\varphi}_\varepsilon)$. Além disso, se a translação*

$$\varphi \mapsto \varphi - \bar{\varphi}_\varepsilon$$

é contínua em ε_0, então $U^\varepsilon(\bar{\varphi}_\varepsilon)$ é contínua em ε_0.

Demonstração: A existência dos conjuntos $U^\varepsilon(\bar{\varphi}_\varepsilon)$ é garantida pelo Corolário 2.2.2, onde

$$\begin{aligned} U^\varepsilon(\bar{\varphi}_\varepsilon) &= \{\bar{\varphi}_\varepsilon + \varphi \ : \ \varphi \in U^\varepsilon(0)\} \\ &= \{\bar{\varphi}_\varepsilon + \varphi_+ + q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+)\}. \end{aligned}$$

Seja $\psi_\varepsilon = \bar{\varphi}_\varepsilon + \varphi$, com $\varphi \in U^\varepsilon(0)$. Então

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon_0}\| &= \|\bar{\varphi}_\varepsilon + (\varphi_+ + q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+)) - \bar{\varphi}_{\varepsilon_0} - (\varphi_+ + q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+))\| \\ &= \|\bar{\varphi}_\varepsilon + q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+) - \bar{\varphi}_{\varepsilon_0} - q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| \\ &\leq \|\bar{\varphi}_\varepsilon - \bar{\varphi}_{\varepsilon_0}\| + \|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+) - q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| \longrightarrow 0, \ \varepsilon \longrightarrow \varepsilon_0, \end{aligned}$$

desde que $\|\bar{\varphi}_\varepsilon - \bar{\varphi}_{\varepsilon_0}\| \longrightarrow 0$, $\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_0$ pois, do Teorema 2.2.3, temos $\|q_\lambda^\varepsilon(\varphi_+) - q_\lambda^{\varepsilon_0}(\varphi_+)\| \longrightarrow 0$, $\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_0$. ∎

Capítulo 3

Existência de Atrator Global

Considere a equação de evolução não local

$$\frac{\partial m(x,t)}{\partial t} = -m(x,t) + g\left(\beta J * m(x,t) + \beta h\right), \tag{3.0.1}$$

onde $m(x,t)$ é uma função real sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, h e β são constante não negativas, $J \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função não negativa, par, com suporte no intervalo $[-1,1]$ e integral igual a 1 e $*$ acima denota o produto convolução, ou seja,

$$(J * m)(x) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)m(y)dy. \tag{3.0.2}$$

Vamos reunir aqui as condições sobre g que serão usadas como hipóteses em nossos resultados à medida que forem necessárias:

(H1) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é globalmente Lipschitziana, isto é, existe uma constante positiva k_1 tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq k_1|x-y|, \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Em particular, existem constantes não negativas k_2 e k_3 tais que

$$|g(x)| \leq k_2|x| + k_3, \; \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.0.3}$$

(H2) A função g é de classe C^1 e g' é localmente Lipschitziana.

(H3) Existem constantes não negativas k_4 e k_5, tais que

$$|g'(x)| \leq k_4|x| + k_5, \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R};$$

(H4) A função g tem derivada positiva. Em particular g é crescente;

(H5) Existe $a > 0$ tal que $|g(x)| < a$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, quando $a < \infty$, temos um caso particular de (3.0.3) com $k_2 = 0$ e $k_3 = a$;

(H6) A função g^{-1} é contínua em $(-a, a)$ e a função

$$f(m) = -\frac{1}{2}m^2 - hm - \beta^{-1}i(m), \ \ m \in [-a, a],$$

onde i é definida por

$$i(m) = -\int_0^m g^{-1}(s)ds, \ \ m \in [-a, a],$$

tem um mínimo global $\overline{m}$ em $(-a, a)$.

3.1 Formulação do problema com condições periódicas de fronteira

O problema de Cauchy para (3.0.1) no espaço das funções contínuas limitadas, $C_b(\mathbb{R})$, com a norma do supremo está bem posto, pois o lado direito de (3.0.1) define uma função uniformemente Lipschitziana neste espaço, (veja [1], [5] e [10]).

Vamos considerar aqui a equação (3.0.1) restrita ao subespaço $\mathbb{P}_{2\tau}$ das funções periódicas com um dado período 2τ, $\tau > 1$. Veremos abaixo que isso conduzirá naturalmente à consideração do fluxo em $L^2(S^1)$, onde S^1 denota a esfera unitária em $\mathbb{C}$ com centro na origem.

Usando a fórmula de variação das constantes, temos o fluxo para (3.0.1) dado por

$$m(x,t) = e^{-t}m(x,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}g(\beta(J * m(x,s) + h))ds,$$

onde $m(x, 0) = m(x)$ é a condição inicial prefixada.

Observação: O espaço $\mathbb{P}_{2\tau}$ é invariante pelo fluxo de (3.0.1).

De fato, seja $m(x,t)$ a solução de (3.0.1) com condição inicial $m(x,0) \in \mathbb{P}_{2\tau}$. Defina a função $n(x,t) = m(x + 2\tau, t)$. Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial m(x+2\tau,t)}{\partial t} = -m(x+2\tau,t) + g[\beta(J*m)(x+2\tau,t) + \beta h] \\ &= -n(x,t) + g[\beta(J*n)(x,t) + \beta h].\end{aligned}$$

Logo $n(x,t)$ é também solução de (3.0.1). Além disso,

$$n(x,0) = m(x+2\tau,0) = m(x,0).$$

Então $n(x,t)$ e $m(x,t)$ são duas soluções de (3.0.1) com mesma condição inicial. Logo por unicidade $n(x,t) = m(x,t)$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Agora, se $\tau > 1$ é um número positivo dado, definimos J^τ como a extensão 2τ -periódica da restrição de J ao intervalo $[-\tau, \tau]$.

O seguinte lema foi provado em [2] e repetimos a prova aqui para fixar as idéias.

Lema 3.1.1 *Se $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$, então*

$$(J * u)(x) = \int_{-\tau}^{\tau} J^{\tau}(x-y)u(y)dy.$$

Demonstração: Se $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$, então

$$\begin{aligned}
(J * u)(x) &= \int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y)dy \\
&= \int_{x-\tau}^{x+\tau} J(x-y)u(y)dy \\
&= \int_{x-\tau}^{x+\tau} J^{\tau}(x-y)u(y)dy \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} J^{\tau}(x-y)u(y)dy.
\end{aligned}$$

■

Em virtude do Lema 3.1.1 o problema (3.0.1) restrito à $\mathbb{P}_{2\tau}$, com $\tau > 1$, pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial m(x,t)}{\partial t} = -m(x,t) + g\left(\beta \int_{-\tau}^{\tau} J^{\tau}(x-y)m(y,t)dy + \beta h\right).$$

Defina $\varphi: \mathbb{R} \to S^1$ por

$$\varphi(x) = e^{i\frac{\pi}{\tau}x},$$

claramente $\varphi(x + 2\tau) = \varphi(x)$ e $\varphi([-\tau, \tau]) = S^1$. Agora, para $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$, defina $v : S^1 \to \mathbb{R}$ por

$$v(\varphi(x)) = u(x).$$

Escrevendo $\widetilde{J}(\varphi(x)) = J^{\tau}(x)$, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.2 *A função $u(x,t)$ é uma solução 2τ- periódica de (3.0.1) se e somente se $v(w,t) = u(\varphi^{-1}(w),t)$ é uma solução de*

$$\frac{\partial m(w,t)}{\partial t} = -m(w,t) + g\left(\beta \widetilde{J} * m(w,t) + \beta h\right), \tag{3.1.4}$$

onde, agora, $*$ denota a convolução em S^1, que é dada por

$$(\widetilde{J} * m)(w) = \int_{S^1} \widetilde{J}(w \cdot z^{-1})m(z)dz$$

e $dz = \frac{\tau}{\pi}d\theta$, onde $d\theta$ indica integração em relação ao comprimento de arco.

Demonstração: Notemos inicialmente que se $\varphi(x) = w$, então

$$(\widetilde{J} * v)(w) = (J * u)(x) = (J * u)(\varphi^{-1}(w)).$$

De fato,

$$(\widetilde{J} * v)(w) = \int_{S^1} \widetilde{J}(w \cdot z^{-1})v(z)dz = \int_{\varphi([-\tau,\tau])} \widetilde{J}(w \cdot z^{-1})v(z)dz,$$

com $z = \varphi(y)$ e $dz = \frac{\tau}{\pi}d\theta$, onde $d\theta$ indica que a integração é dada pelo comprimento de arco. Então

$$dz = \frac{\tau}{\pi}\left|\varphi'(y)\right|dy = \frac{\tau}{\pi}\left|i\frac{\pi}{\tau}e^{i\frac{\pi}{\tau}y}\right|dy = \frac{\tau}{\pi}\frac{\pi}{\tau}dy = dy.$$

Assim, usando o Teorema de Mudança de Variável e o Lema 3.1.1, temos

$$\begin{aligned}
(\widetilde{J} * v)(w) &= \int_{\varphi([-\tau,\tau])} \widetilde{J}(w \cdot z^{-1})v(z)dz \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} \widetilde{J}\left[e^{i\frac{\pi}{\tau}x} \cdot e^{-i\frac{\pi}{\tau}y}\right] v\left(e^{i\frac{\pi}{\tau}y}\right) dy \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} \widetilde{J}\left[e^{i\frac{\pi}{\tau}(x-y)}\right] v\left(e^{i\frac{\pi}{\tau}y}\right) dy \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} \widetilde{J}(\varphi(x-y))v(\varphi(y))dy \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} J^{\tau}(x-y)u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y)dy \\
&= (J * u)(x).
\end{aligned}$$

Seja $u = u(x,t)$ uma solução 2τ-periódica de (3.0.1). Considere $v(w,t) = u(\varphi^{-1}(w),t)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(w,t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(\varphi^{-1}(w),t)}{\partial t} \\
&= -u(\varphi^{-1}(w),t) + g\left(\beta(J * u)(\varphi^{-1}(w),t) + \beta h\right) \\
&= -v(w,t) + g\left(\beta(J * u)(x,t) + \beta h\right) \\
&= -v(w,t) + g\left(\beta(\widetilde{J} * v)(w,t) + \beta h\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $v(w,t)$ satisfaz (3.1.4). Analogamente, mostra-se que, se $v(w,t)$ é solução de (3.1.4) então $u(\varphi^{-1}(w),t)$ satisfaz (3.0.1). ∎

Comentário: De agora em diante, para facilitar a notação, usaremos simplesmente J para representar $\widetilde{J}$.

Proposição 3.1.3 *Sob a hipótese (H1), a função*

$$F(m) = -m + g(\beta J * m + \beta h)$$

é globalmente Lipschitziana em $L^2(S^1)$.

Demonstração: Usando a desigualdade triangular e a hipótese (H1), obtemos

$$\begin{aligned}
\|F(m) - F(u)\|_{L^2} &= \|-(m-u) + g(\beta J * m + \beta h) - g(\beta J * u + \beta h)\|_{L^2} \\
&\leq \|m-u\|_{L^2} + k_1 \|\beta(J * m) - \beta(J * u)\|_{L^2} \\
&= \|m-u\|_{L^2} + k_1 \beta \|J * (m-u)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Young, (veja [14]), obtemos

$$\begin{aligned}
\|J * (m-u)\|_{L^2} &\leq \|J\|_{L^1} \|m-u\|_{L^2} \\
&= \|m-u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\|F(m) - F(u)\|_{L^2} \leq (1 + k_1\beta)\, \|m-u\|_{L^2},$$

onde k_1 é a constante de Lipschitz de g dada na hipótese (H1). ■

Observação: Segue da proposição acima que o problema de Cauchy para (3.1.4) está bem posto, com uma única solução global, em $L^2(S^1)$, (veja [1], [5] e [10]).

Visando demonstrar a diferenciabilidade da função F acima, enunciaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.4 *Sejam X e Y espaços lineares normados e $F : X \to Y$. Suponha que o operador de Gâteaux $DF : X \to \mathcal{L}(X, Y)$ é contínuo em $x \in X$. Então existe a derivada de Fréchet F' e ela é contínua em x.*

Demonstração: (Veja [29]).

Observação: Para $u \in L^2(S^1)$, vale a desigualdade

$$|(J * u)(w)| \leq \sqrt{2\tau} \|J\|_\infty \|u\|_{L^2}. \tag{3.1.5}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|(J * u)(w)| &\leq \int_{S^1} |J(wz^{-1})||u(z)|dz \\
&\leq \int_{S^1} \|J\|_\infty |u(z)|dz.
\end{aligned}$$

Então a estimativa desejada segue da desigualdade de Hölder, (veja [5]).

Proposição 3.1.5 *Sob as hipótese (H1) e (H2), a função*

$$F(m) = -m + g(\beta J * m + \beta h)$$

é diferenciável segundo Fréchet em $L^2(S^1)$, com derivada dada por

$$F'(u)v = -v + g'(\beta J * u + \beta h)\beta(J * v).$$

Demonstração: Usando a hipótese (H1), por um cálculo simples, temos que a derivada de Gâteaux de F é dada por

$$DF(u)v = -v + g'(\beta J * u + \beta h)\beta(J * v).$$

Agora, note que para cada $u \in L^2(S^1)$, devido a linearidade da convolução, $DF(u)$ é um operador linear. Além disso

$$\|DF(u)v\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2} + \|g'(\beta J * u + \beta h)\beta(J * v)\|_{L^2}.$$

Mas, de (3.1.5), temos

$$|\beta(J * v)(w)| \leq \sqrt{2\tau}\beta\|J\|_\infty\|v\|_{L^2}, \ \forall w \in S^1$$

e, de (H2)

$$\int_{S^1} |g'(\beta(J * u)(w) + \beta h)|^2 dw = M < \infty.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|g'(\beta J * u + \beta h)\beta(J * v)\|_{L^2}^2 &= \int_{S^1} |g'(\beta(J * u)(w) + \beta h)|^2 \beta^2 |(J * v)(w)|^2 dw \\
&\leq \int_{S^1} |g'(\beta(J * u)(w) + \beta h)|^2 \beta^2 2\tau \|J\|_\infty^2 \|v\|_{L^2}^2 dw \\
&= \beta^2 2\tau \|J\|_\infty^2 \|v\|_{L^2}^2 \int_{S^1} |g'(\beta(J * u)(w) + \beta h)|^2 dw \\
&= M\beta^2 2\tau \|J\|_\infty^2 \|v\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Daí

$$\|g'(\beta J * u + \beta h)\beta(J * v)\|_{L^2} \leq \sqrt{M}\beta\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|v\|_{L^2}.$$

Portanto

$$\|DF(u)v\|_{L^2} \leq (1 + \sqrt{M 2\tau}\beta\|J\|_\infty)\|v\|_{L^2}.$$

Além disso, DF é um operador contínuo. Com efeito,

$$\|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_{L^2} = \|[g'(\beta J * u_1 + \beta h) - g'(\beta J * u_2 + \beta h)]\beta(J * v)\|_{L^2}.$$

Fixe $u_1 \in L^2(S^1)$, fazendo $u_2 \to u_1$ em $L^2(S^1)$ segue, de (3.1.5), que $(\beta J * u_2 + \beta h)$ está em uma bola de $L^\infty(S^1)$ centrada em $(\beta J * u_1 + \beta h)$. Daí, usando a hipótese (H2), existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|g'(\beta J * u_1 + \beta h)(w) - g'(\beta J * u_2 + \beta h)(w)| \leq L\beta|J * (u_1 - u_2)(w)|.$$

Então, usando esta última desigualdade e mais uma vez (3.1.5), obtemos

$$\begin{aligned}\|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_{L^2} &= \Big(\int_{S^1} |g'(\beta J * u_1 + \beta h)(w) \\ &- g'(\beta J * u_2 + \beta h)(w)|^2\beta^2|(J * v)(w)|^2 dw\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\int_{S^1} L^2\beta^2|J * (u_1 - u_2)(w)|^2\beta^2|(J * v)(w)|^2 dw\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq L\beta^2 2\tau\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty^2\|u_1 - u_2\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Portanto, da Proposição 3.1.4, segue que F é diferenciável segundo Fréchet com derivada contínua em cada $u \in L^2(S^1)$. ∎

Comentário: Já que o lado direito de (3.1.4) é uma função de classe C^1 em $L^2(S^1)$, segue que o fluxo de (3.1.4), o qual denotaremos por $T(t)$, é de classe C^1 com relação a condição inicial neste espaço, (veja [19]).

3.2 Existência de atrator

Nesta seção, mostramos a existência de um atrator global para o fluxo $T(t)$, determinado por (3.1.4), em $L^2(S^1)$.

Lema 3.2.1 *Suponha que (H1) vale. Então, se $k_2\beta < 1$, a bola de centro na origem e raio $\frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\beta h + k_3)}{1 - k_2\beta}$ é um conjunto absorvente para o fluxo $T(t)$.*

Demonstração: Se $u(w,t)$ é uma solução de (3.1.4) com condição inicial $u(w,0)$ temos, pela fórmula de variação das constantes

$$u(w,t) = e^{-t}u(w,0) + \int_0^t e^{s-t}g(\beta(J * u)(w,s) + \beta h)ds,$$

então

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1}|u(w,t)|^2dw = -2\int_{S^1}u^2(w,t)dw + 2\int_{S^1}u(w,t)g(\beta J * u(w,t) + \beta h)dw.$$

Mas, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{S^1}u(w,t)g(\beta J * u(w,t) + \beta h)dw \leq \|u(\cdot,t)\|_{L^2}\left(\int_{S^1}(g(\beta J * u(w,t) + \beta h))^2dw\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando (3.0.3) no lado direito da desigualdade acima, obtemos

$$\int_{S^1}u(w,t)g(\beta(J*u)(w,t)+\beta h)dw \leq \|u(\cdot,t)\|_{L^2}\left[k_2\beta\left(\int_{S^1}(J*u)^2dw\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{S^1}(k_2\beta h + k_3)^2dw\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

então, da desigualdade de Young, resulta

$$\begin{aligned}\int_{S^1}u(w,t)g(\beta J * u + \beta h)dw &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^2}\left[k_2\beta\|J\|_{L^1}\|u(\cdot,t)\|_{L^2} + \sqrt{2\tau}(k_2\beta h + k_3)\right]\\ &= \|u(\cdot,t)\|_{L^2}\left[k_2\beta\|u(\cdot,t)\|_{L^2} + \sqrt{2\tau}(k_2\beta h + k_3)\right].\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &\leq -2\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + 2k_2\beta\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + 2\sqrt{2\tau}(k_2\beta h + k_3)\|u(\cdot,t)\|_{L^2}\\ &= 2\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2\left[-1 + k_2\beta + \frac{\sqrt{2\tau}\,(k_2\beta h + k_3)}{\|u(\cdot,t)\|_{L^2}}\right].\end{aligned}$$

Como $k_2\beta < 1$, considere $\varepsilon = 1 - k_2\beta$. Então, enquanto $\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \geq \frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\beta h + k_3)}{\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &\leq 2\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2\left(-\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &= -\varepsilon\|u(\cdot,t)\|^2.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^2} &\leq e^{-\varepsilon t}\|u(\cdot,0)\|_{L^2}\\ &= e^{-(1-k_2\beta)t}\|u(\cdot,0)\|_{L^2},\end{aligned}$$

assim, concluimos o resultado. ∎

O próximo resultado generaliza o Teorema 3.3 de [2].

Teorema 3.2.2 *Suponha que valem (H1), (H3) e $k_2\beta < 1$. Então existe um atrator global $\mathcal{A}$ para o fluxo $T(t)$, gerado por (3.1.4), em $L^2(S^1)$ que está contido na bola de raio $\frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\beta h + k_3)}{1 - k_2\beta}$.*

Demonstração: Se $u(w,t)$ é uma solução de (3.1.4), temos, pela fórmula de variação das constantes

$$u(w,t) = e^{-t}u(w,0) + \int_0^t e^{s-t} g(\beta(J * u(w,s) + h))ds, \tag{3.2.6}$$

escrevendo

$$T_1(t)u(w) = e^{-t}u(w,0)$$

e

$$T_2(t)u(w) = \int_0^t e^{s-t} g(\beta(J * u(w,s) + h))ds$$

e supondo $u(\cdot,0) \in C$, onde C é um conjunto limitado contido em $L^2(S^1)$, digamos uma bola de raio R, segue que

$$\|T_1(t)u\|_{L^2} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \longrightarrow \infty, \quad \text{uniformemente em } u.$$

Usando (3.2.6), obtemos $\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq K$, para $t \geq 0$, onde $K = \max\left\{R, \frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\beta h + k_3)}{1-k_2\beta}\right\}$. Para $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_2(t)u(w)}{\partial w} &= \int_0^t e^{s-t} \frac{\partial}{\partial w} g(\beta(J * u(w,s) + h))ds \\
&= \beta \int_0^t e^{s-t} g'(\beta(J * u(w,s) + h))(J' * u)(w,s)ds.
\end{aligned}$$

Então

$$\left|\frac{\partial T_2(t)u(w)}{\partial w}\right| \leq \beta \int_0^t e^{s-t} |g'(\beta J * u(w,s) + \beta h)||(J' * u)(w,s)|ds.$$

Mas, usando (H3) e a estimativa (3.1.5) obtemos

$$\begin{aligned}
|g'(\beta J * u(w,s) + \beta h)||(J' * u)(w,s)| &\leq [k_4|\beta J * u(w,s) + \beta h| + k_5]|J' * u(w,s)| \\
&\leq [k_4|\beta J * u(w,s)| + k_4\beta h + k_5]|J' * u(w,s)| \\
&\leq \Big[k_4\beta\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty \|u(\cdot,s)\|_{L^2} \\
&+ k_4\beta h + k_5\Big]\sqrt{2\tau}\|J'\|_\infty \|u(\cdot,s)\|_{L^2} \\
&\leq k_4\beta 2\tau\|J\|_\infty\|J'\|_\infty K^2 + (k_4\beta h + k_5)\sqrt{2\tau}\|J'\|_\infty K.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial T_2(t)u(w)}{\partial w}\right| &\leq \beta \int_0^t e^{s-t}\left[k_4\beta 2\tau\|J\|_\infty\|J'\|_\infty K^2 + (k_4\beta h + k_5)\sqrt{2\tau}\|J'\|_\infty K\right] ds \\
&= \left[k_4\beta^2 2\tau\|J\|_\infty\|J'\|_\infty K^2 + (k_4\beta^2 h + k_5\beta)\sqrt{2\tau}\|J'\|_\infty K\right] \int_0^t e^{s-t}ds \\
&\leq \left[k_4\beta^2 2\tau\|J\|_\infty\|J'\|_\infty K^2 + (k_4\beta^2 h + k_5\beta)\sqrt{2\tau}\|J'\|_\infty K\right].
\end{aligned}$$

Assim, para $t > 0$ e qualquer $u \in C$ o valor de $\|\frac{\partial T_2(t)u}{\partial w}\|_{L^2}$ é limitado por uma constante (que não depende de t nem de u). Daí, para todo $u \in C$, temos que $T_2(t)u$ está em uma bola de $W^{1,2}$. Logo, pelo Teorema de Imersão de Sobolev, segue que

$$\bigcup_{t\geq 0} T_2(t)C$$

é relativamente compacto, pois

$$W^{1,2}(S^1) \hookrightarrow L^2(S^1).$$

Portanto, o resultado segue do Teorema 1.2.4, sendo o atrator $\mathcal{A}$ o conjunto ω-limite da bola de centro na origem de $L^2(S^1)$ e raio $\frac{2\sqrt{2\pi}(k_2\beta h+k_3)}{1-k_2\beta}$. ■

Uma conseqüência direta do Teorema 3.2.2 é o seguinte resultado:

Corolário 3.2.3 *O fluxo, $T(t)$, determinado por (3.1.4) é assintoticamente liso.*

Demonstração: O resultado segue da existência do atrator $\mathcal{A}$. De fato, seja B um conjunto limitado, fechado e positivamente invariante, então $B \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ pois do contrário $dist(B, \mathcal{A}) > 0$, já que B é fechado e $\mathcal{A}$ é compacto. Mas sendo B limitado e positivamente invariante isso não ocorre pois $\mathcal{A}$ atrai B. Já que $\mathcal{A} \cap B$ é um fechado contido em compacto, segue que ele é compacto.

Além disso, se C é um conjunto limitado, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)(C \cap B) \subset (\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon$, para todo $t \geq t_0$, onde $(\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon$ é a ε-vizinhança de $\mathcal{A} \cap B$.

Com efeito, sendo $\mathcal{A}$ um atrator, para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe $t_0 \geq 0$ tal que, para todo $t \geq t_0$, $T(t)C \subset \mathcal{A}^{\varepsilon_1}$, então $T(t)(C \cap B) \subset \mathcal{A}^{\varepsilon_1} \cap B$. Portanto, é suficiente provar que $(\mathcal{A}^{\varepsilon_1} \cap B) \subset (\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon$ para algum ε_1 conveniente.

Como $\big(\mathcal{A} \backslash (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}}\big)$ é compacto e $(\mathcal{A} \backslash (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}}) \cap B = \emptyset$, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$dist\left(\left(\mathcal{A} \backslash (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right), B\right) > \varepsilon_2.$$

Assim, para cada $\varepsilon > 0$, escolha $\varepsilon_1 = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon_2\}$. Então, escrevendo

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A} \backslash (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}}) \cup (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\varepsilon_1} \cap B &= \left[(\mathcal{A} \backslash (\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}})^{\varepsilon_1} \cap B\right] \cup \left[((\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}})^{\varepsilon_1} \cap B\right] \\ &= \left[((\mathcal{A} \cap B)^{\frac{\varepsilon}{2}})^{\varepsilon_1} \cap B\right] \\ &\subset (\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon \cap B \\ &\subset (\mathcal{A} \cap B)^\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto quando $C = B$, temos que $A \cap B$ atrai B. ■

3.3 Um Teorema de comparação

Nesta seção, provamos um resultado que generaliza o Teorema 2.7 de [24], usado para comparar soluções de (3.1.4). Na nossa prova, consideramos funções de $L^\infty(S^1)$ e a função g satisfazendo apenas as hipóteses (H1) e (H4), enquanto que em [24], considerando funções em $C_b(\mathbb{R})$, a prova é para $g \equiv \tanh$ e $h = 0$.

Definição 3.3.1 *Uma função $v(w,t)$ é uma subsolução do problema de Cauchy para (3.1.4) com condição inicial $u(\cdot, 0)$ se $v(w,0) \leq u(w,0)$ para quase todo $w \in S^1$, v é continuamente diferenciável com relação a t e satisfaz*

$$\frac{\partial v(w,t)}{\partial t} \leq -v(w,t) + g(\beta(J * v(w,t) + h)), \tag{3.3.7}$$

quase sempre.

Analogamente, define-se supersolução, exigindo as mesmas condições de regularidade, $v(w,0) \geq u(w,0)$ para quase todo $w \in S^1$ e a desigualdade oposta em (3.3.7).

Teorema 3.3.2 *(Teorema da Comparação) Assuma as hipóteses (H1) e (H4). Seja $v(w,t)$, $[V(w,t)]$ uma subsolução [supersolução] do problema de Cauchy de (3.1.4) com condição inicial $u(\cdot,0)$, então*

$$v(w,t) \leq u(w,t) \leq V(w,t),$$

quase sempre.

Demonstração: Dado $T > 0$, seja

$$L^\infty(S^1 \times [0,T]) = \{f : S^1 \times [0,T] \to \mathbb{R}, \text{ mensuráveis e essencialmente limitadas}\}.$$

É bem conhecido, veja [5], que $L^\infty(S^1 \times [0,T])$ é um espaço de Banach com norma

$$\|f\|_\infty = \inf\{C : |f(w,t)| \leq C, q.s. \text{ em } S^1 \times [0,T]\}$$

e

$$|f(w,t)| \leq \|f\|_\infty, \; q.s. \text{ em } S^1 \times [0,T],$$

onde $q.s.$ indica "quase sempre".

Defina o operador G sobre $L^\infty(S^1 \times [0,T])$ por

$$G(f)(w,t) = e^{-t} f(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)} g(\beta(J * f(w,s) + h))ds,$$

assim, temos:

(i) $(G(f))(w,0) = f(w,0)$;

(ii) de (H4) segue que G é monótono, isto é, para quaisquer $f_1, f_2 \in L^\infty(S^1 \times [0,T])$ com $f_1 \geq f_2$ implica $G(f_1) \geq G(f_2)$ ($q.s.$ em $S^1 \times [0,T]$).

De (3.0.3), segue que

$$\begin{aligned}
|G(f)(w,t)| &\leq e^{-t}|f(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|g(\beta(J*f)(w,s)+\beta h)|ds \\
&\leq e^{-t}|f(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}[k_2|\beta(J*f)(w,s)+\beta h| + k_3]ds \\
&\leq e^{-t}|f(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}k_2\beta|(J*f)(w,s)|ds + \int_0^t e^{-(t-s)}(k_2\beta h + k_3)ds.
\end{aligned}$$

Usando a estimativa $|(J*f)(w,s)| \leq \|f\|_\infty$ quase sempre em $S^1 \times [0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|G(f)\|_\infty &\leq e^{-t}\|f\|_\infty + k_2\beta\|f\|_\infty \int_0^t e^{-(t-s)}ds + (k_2\beta h + k_3)\int_0^t e^{-(t-s)}ds \\
&\leq \|f\|_\infty + k_2\beta\|f\|_\infty + k_2\beta h + k_3.
\end{aligned}$$

Portanto $G : L^\infty(S^1 \times [0,T]) \to L^\infty(S^1 \times [0,T])$.

Além disso, para $k_1\beta T < 1$, G é uma contração sobre cada subconjunto de $L^\infty(S^1 \times [0,T])$ constituído de funções que têm o mesmo valor em $t = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
|G(f_1)(w,t) - G(f_2)(w,t)| &= \left|\int_0^t e^{-(t-s)}[g(\beta(J*f_1)(w,s)+\beta h) - g(\beta(J*f_2)(w,s)+\beta h)]ds\right| \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)}k_1\beta|(J*f_1)(w,s) - (J*f_2)(w,s)|ds \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)}k_1\beta(|J|*|f_1-f_2|(w,s))ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)}k_1\beta(J*|f_1-f_2|(w,s))ds.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
|G(f_1)(w,t) - G(f_2)(w,t)| &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}k_1\beta J * \|f_1 - f_2\|_\infty ds \\
&= k_1\beta T\|f_1 - f_2\|_\infty \int_0^t e^{-(t-s)}ds \\
&\leq k_1\beta T\|f_1 - f_2\|_\infty,
\end{aligned}$$

quase sempre em $S^1 \times [0,T]$. Logo $\|G(f_1) - G(f_2)\|_\infty \leq k_1\beta T\|f_1 - f_2\|_\infty$. Portanto, se $k_1\beta T < 1$, G é uma contração. Daí, se $u(w,t)$ é uma solução de (3.1.4) com dado inicial $u^0 = u(w,0)$, temos

$$u = \lim_{n\longrightarrow\infty} G^n(u^0)$$

sobre $L^\infty(S^1 \times [0,T])$. O mesmo vale para uma solução $\widetilde{u}$ com dado inicial $\widetilde{u}^0 = \widetilde{u}(w,0)$. Se $\widetilde{u}^0 \leq u^0$, $q.s.$, pela monotonicidade de G, segue

$$G^n(\widetilde{u}^0) \leq G^n(u^0),\ q.s.$$

Agora, se v é uma subsolução de (3.1.4) temos

$$\frac{d}{dt}v(w,t) + v(w,t) \leq g(\beta(J * v(w,t) + h)),\ q.s.,$$

multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por e^t, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^t v(w,t)\right) \leq e^t g(\beta(J * v(w,t) + h)),\ q.s.,$$

integrando de 0 até t, resulta

$$v(w,t) \leq e^{-t}v(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)} g(\beta(J * v(w,s) + h))ds$$

quase sempre. Portanto, $v(w,t) \leq G(v)(w,t)$, $q.s.$, e sendo G monótono segue que $v(w,t) \leq G^n(v)(w,t)$ quase sempre. Daí $v(w,t) \leq z(w,t)$, $q.s.$, onde

$$z = \lim_{n \longrightarrow \infty} G^{n+1}(v).$$

Agora, pela continuidade de G

$$G(z) = G\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} G^n(v)\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} G^{n+1}(v) = z.$$

Então z é um ponto fixo para G. Logo z é solução de (3.1.4) sobre $S^1 \times [0,T]$ com condição inicial $z(\cdot,0) = v(\cdot,0)$. Assim, se $z(\cdot,0) \leq u(\cdot,0)$, $q.s.$, obtemos

$$v \leq z \leq u,\ q.s. \text{ em } S^1 \times [0,T],$$

onde u é a solução de (3.1.4) com condição inicial $u(\cdot,0)$.

Aplicando o mesmo argumento para uma supersolução $V(w,t)$ teremos

$$u \leq \widetilde{z} \leq V,\ q.s. \text{ em } S^1 \times [0,T].$$

Assim, provamos que

$$v(w,t) \leq u(w,t) \leq V(w,t)$$

quase sempre em $S^1 \times [0,T]$.

Pelo mesmo argumento estendemos o resultado para o intervalo $[T,2T]$ pois as estimativas não dependem da condição inicial. Por iteração conclui-se a prova do teorema. ■

Observação: Se adicionarmos a hipótese (H5), com $a < \infty$, o Teorema de Comparação vale na bola $\mathbb{M} = \{L^\infty(S^1 \times [0,T]), \|\cdot\|_\infty \leq a\}$.

De fato, é suficiente provar que $G|_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$. Mas, de (H4) segue que

$$|(G|_{\mathbb{M}} f)(w,t)| \leq e^{-t}|f(w,0)| + a\int_0^t e^{-(t-s)}ds.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|(G|_{\mathbb{M}} f)\|_\infty &\leq e^{-t}\|f\|_\infty + a\int_0^t e^{-(t-s)}ds \\
&\leq ae^{-t} + a\int_0^t e^{-(t-s)}ds \\
&= a.
\end{aligned}$$

Portanto, $G|_{\mathbb{M}}(f) \in \mathbb{M}$, para toda $f \in \mathbb{M}$.

Teorema 3.3.3 *Suponha as hipóteses (H1) e (H5) com $a < \infty$. Então o atrator $\mathcal{A}$ está na bola $\|\cdot\|_\infty \leq a$ em $L^\infty(S^1)$.*

Demonstração: Como observamos no início desse capítulo, a hipótese (H5) é um caso particular de (3.0.3) com $k_2 = 0$ e $k_3 = a$. Nesse caso, o atrator dado no Teorema 3.2.2 está contido na bola $B[0, 2a\sqrt{2\tau}]$ de $L^2(S^1)$.

Seja $u(w,t)$ uma solução de (3.1.4) em $\mathcal{A}$. Então pela fórmula de variação das constantes

$$u(w,t) = e^{-(t-t_0)}u(w,t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)}g(\beta(J*u)(w,s) + \beta h)ds.$$

Sendo $\|u\|_{L^2} \leq 2a\sqrt{2\tau}$ para toda $u \in \mathcal{A}$, fazendo $t_0 \to -\infty$, obtemos

$$u(w,t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)}g(\beta(J*u)(w,s) + \beta h)ds, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde a igualdade acima é no sentido de $L^2(S^1)$. Assim, usando mais uma vez (H5), obtemos

$$\begin{aligned}
|u(w,t)| &\leq \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)}|g(\beta(J*u)(w,s) + \beta h)|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^t ae^{-(t-s)}ds \\
&\leq a.
\end{aligned}$$

Portanto $\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq a$. ■

3.4 Existência de um funcional de Lyapunov

Nesta seção, mostramos um dos resultados mais importantes deste capítulo. Exibimos um funcional de Lyapunov contínuo para o fluxo de (3.1.4) em $\{L^2(S^1), \|\cdot\|_\infty \leq a < \infty\}$, concluindo que o mesmo é gradiente. Em particular, o fluxo $T(t)$, gerado por (3.1.4), não possui pontos recorrentes não triviais.

Note que, assumindo a hipótese (H5), o conjunto $\{L^\infty(S^1), \|\cdot\|_\infty \leq a\}$ é invariante sob $T(t)$. Com efeito, se $a = \infty$, não há nada à provar. Do contrário, seja

$$u(w,t) = e^{-t}u(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}g(\beta J * u(w,s) + \beta h)ds$$

a solução de (3.1.4) com condição inicial $u(w,0) \in \{L^2(S^1), \|\cdot\|_\infty \leq a\}$. Então

$$\begin{aligned} |u(w,t)| &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|g(\beta J * u(w,s) + \beta h)|ds \\ &\leq e^{-t}|u(w,0)| + a\int_0^t e^{-(t-s)}ds. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_\infty &\leq e^{-t}\|u(\cdot,0)\|_\infty + a\int_0^t e^{-(t-s)}ds \\ &\leq e^{-t}a + a\int_0^t e^{-(t-s)}ds \\ &= a. \end{aligned}$$

Considere o funcional $\mathbb{F}$: $\{L^2(S^1), \|u\|_\infty \leq a\} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathbb{F}(u) = \int_{S^1}[f(u(w)) - f(\overline{m})]dw + \frac{1}{4}\int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})[u(w) - u(z)]^2 dwdz, \qquad (3.4.8)$$

onde f é definida na hipótese (H6).

Note que o funcional dado em (3.4.8) está bem definido em todo espaço $\{L^2(S^1), \ \|u\|_\infty \leq a < \infty\}$. Isso não ocorre com o funcional semelhante

$$\widetilde{\mathbb{F}}(u) = \int_{\mathbb{R}}[f(u(w)) - f(m_\beta^+)]dw + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} J(w-z)[u(w) - u(z)]^2 dwdz$$

considerado em [23], [24] e [28] com $g \equiv \tanh$.

Comentário: Em [24], no caso não limitado, com $g \equiv \tanh$ e $h = 0$, estudando um funcional semelhante ao dado por (3.4.8), mostra-se apenas semicontinuidade inferior na topologia fraca do L^2_{loc}. O mesmo acontece em [28], para o caso não limitado e $h > 0$. Mostraremos a seguir um resultado mais preciso no nosso caso.

Teorema 3.4.1 *Suponha a hipótese (H6) com $a < \infty$. Então o funcional dado em (3.4.8) é contínuo na topologia de $L^2(S^1)$.*

Demonstração: Note que, sendo $|u(w)| \leq a$, *q.s.*, existe uma constante positiva K tal que

$$|f(u(w)) - f(\overline{m})| \leq |f(u(w))| + |f(\overline{m})| \leq K, \text{ para quase todo } w \in S^1.$$

Seja u_n uma seqüência convergindo para u na norma de $L^2(S^1)$, então

$$\int_{S^1} |u_n(w) - u(w)|^2 dw \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Então, conforme Teorema IV.9 de [5], existe uma subseqüência u_{n_k}, tal que, $u_{n_k}(w) \longrightarrow u(w)$ *q.s.* em S^1. De (H6) segue que f é contínua, então $f(u_{n_k}(w)) \longrightarrow f(u(w))$. Assim,

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} [f(u_{n_k}(w)) - f(\overline{m})] = [f(u(w)) - f(\overline{m})], \ q.s.$$

e

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} [u_{n_k}(w) - u_{n_k}(z)]^2 = [u(w) - u(z)]^2, \ q.s.$$

Agora, inicialmente escrevemos

$$\mathbb{F}(u) = \mathbb{F}_1(u) + \mathbb{F}_2(u),$$

onde

$$\mathbb{F}_1 = \int_{S^1} [f(u(w)) - f(\overline{m})] dw$$

e

$$\mathbb{F}_2(u) = \frac{1}{4} \int_{S^1} \int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})[u(w) - u(z)]^2 dw dz.$$

Sendo

$$|f(u_{n_k}(w)) - f(\overline{m})| \leq K,$$

e toda função constante está em $L^1(S^1)$, estamos em condições de aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para o funcional $\mathbb{F}_1(u)$, ou seja

$$\begin{aligned}
\lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{S^1} [f(u_{n_k}(w)) - f(\overline{m})] dw &= \int_{S^1} \lim_{k \longrightarrow \infty} [f(u_{n_k}(w)) - f(\overline{m})] dw \\
&= \int_{S^1} [f(u(w)) - f(\overline{m})] dw.
\end{aligned}$$

Assim

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \mathbb{F}_1(u_{n_k}) = \mathbb{F}_1(u).$$

Analogamente, sendo

$$\left|[u_{n_k}(w) - u_{n_k}(z)]^2\right| \leq 2a \in L^1(S^1),$$

temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{k\longrightarrow\infty} \mathbb{F}_2(u_{n_k}) &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})[u_{n_k}(w) - u_{n_k}(z)]^2 dwdz \\ &= \int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})[u(w) - u(z)]^2 dwdz,\end{aligned}$$

assim

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \mathbb{F}_2(u_{n_k}) = \mathbb{F}_2(u).$$

Portanto

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \mathbb{F}(u_{n_k}) = \mathbb{F}(u).$$

Agora, suponha que $\mathbb{F}(u_n)$ não converge para $\mathbb{F}(u)$, então existe uma subseqüência (u_{n_r}) de (u_n) tal que

$$|\mathbb{F}(u_{n_r}) - \mathbb{F}(u)| \geq \varepsilon_0, \tag{3.4.9}$$

para algum $\varepsilon_0 > 0$. Sendo (u_{n_r}) subseqüência de (u_n) resulta que $u_{n_r} \longrightarrow u$. Então pela primeira parte da prova segue que existe $(u_{n_{r_j}})$ subseqüência de (u_{n_r}) e $j_0 > 0$ tal que

$$|\mathbb{F}(u_{n_{r_j}}) - \mathbb{F}(u)| < \varepsilon, \tag{3.4.10}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e todo $j \geq j_0$. De (3.4.9) e (3.4.10) temos uma contradição.

Portanto, $\mathbb{F}(u_n) \rightarrow \mathbb{F}(u)$ sempre que $u_n \rightarrow u$ em $L^2(S^1)$ e assim, concluimos o resultado.

■

Teorema 3.4.2 *Suponha as hipóteses (H1), (H4) e (H5), (H6) com $a < \infty$. Seja $u(\cdot,t)$ uma solução de (3.1.4) com $u(\cdot,t) \leq a$. Então $\mathbb{F}(u(\cdot,t))$ é diferenciável com relação a t para $t > 0$ e*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{F}(u(\cdot,t)) = -I(u(\cdot,t)) \leq 0,$$

onde para cada $u \in L^2(S^1)$ com $\|u\|_\infty \leq a$,

$$I(u(\cdot)) = \int_{S^1} [(J*u)(w) + h - \beta^{-1}g^{-1}(u(w))][g(\beta(J*u)(w) + \beta h) - u(w)]dw.$$

Além disso, o integrando em $I(u(\cdot,t))$ é uma função não negativa e u é um ponto crítico de $\mathbb{F}$ se e somente se u é uma solução de equilíbrio de (3.1.4).

Demonstração: De (H1) e (H5), temos que $\mathbb{F}(u(\cdot,s))$ está bem definido para todo $t \geq 0$. Suponha inicialmente, que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|u(\cdot,s)\|_\infty \leq a - \varepsilon$ para $s \in \Delta$, onde Δ é um pequeno intervalo fechado contendo t. Para $s \in \Delta$ escrevemos

$$\mathbb{F}(u(\cdot,s)) = \int_{S^1} \phi(w,s)dw \text{ e } I(u(\cdot,s)) = \int_{S^1} \iota(w,s)dw.$$

Sendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial s}(w,s) &= [-u(w,s) - h + \beta^{-1}g^{-1}(u(w,s))][-u(w,s) + g(\beta(J*u)(w,s) + \beta h)] \\
&+ \frac{1}{2}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})[u(w,s) - u(z,s)]\left[\frac{\partial u(w,s)}{\partial s} - \frac{\partial u(z,s)}{\partial s}\right] dz,
\end{aligned}$$

temos $\frac{\partial \phi(w,s)}{\partial s}$ quase sempre contínua e limitada em w, para $s \in \Delta$, ou seja,

$$\sup_{s\in\Delta}\left\|\frac{\partial \phi(\cdot,s)}{\partial s}\right\|_1 < \infty.$$

Então podemos, no cálculo de $\frac{d}{ds}\mathbb{F}(u(\cdot,s))$, derivar sob o sinal de integração. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathbb{F}(u(\cdot,s)) &= \int_{S^1} [-u(w,s) - h + \beta^{-1}g^{-1}(u(w,s))]\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dw \\
&+ \frac{1}{2}\int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})[u(w,s) - u(z,s)]\left[\frac{\partial u(w,s)}{\partial s} - \frac{\partial u(z,s)}{\partial s}\right] dwdz
\end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned}
\int_{S^1}\int_{S^1} & J(w\cdot z^{-1})[u(w,s) - u(z,s)]\left[\frac{\partial u(w,s)}{\partial s} - \frac{\partial u(z,s)}{\partial s}\right] dwdz = \\
&= \int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})u(w,s)\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dwdz - \int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})u(w,s)\frac{\partial u(z,s)}{\partial s}dwdz \\
&- \int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})u(z,s)\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dwdz + \int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})u(z,s)\frac{\partial u(z,s)}{\partial s}dwdz \\
&= 2\int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})u(w,s)\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dwdz - 2\int_{S^1}\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})u(z,s)\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dwdz.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathbb{F}(u(\cdot,s)) &= \int_{S^1}\left[-u(w,s) - h + \beta^{-1}g^{-1}(u(w,s))\right]\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dw \\
&+ \int_{S^1}\left(\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})dz\right)u(w,s)\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dw \\
&- \int_{S^1}\left(\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})u(z,s)dz\right)\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dw.
\end{aligned}$$

Mas, após alguns cálculos, obtemos

$$\int_{S^1} J(w\cdot z^{-1})dz = 1.$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathbb{F}(u(\cdot,s)) &= \int_{S^1}\Big[-u(w,s)-h+\beta^{-1}g^{-1}(u(w,s))\Big]\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dw \\
&+ \int_{S^1}[u(w)-(J*u)(w)]\frac{\partial u(w,s)}{\partial s}dw \\
&= \int_{S^1}\Big[-(J*u)(w)-h+\beta^{-1}g^{-1}(u(w,s))\Big][-u(w,s)+g(\beta(J*u)(w,s)+\beta h)]dw \\
&= -I(u(\cdot,s)),
\end{aligned}$$

o que prova a primeira parte do teorema para $t\in\Delta$. Usando o Teorema da Comparação provaremos que isso também vale para todo $t>0$. De fato, sabemos que $u(w,0)\le a$, para quase todo $w\in S^1$, se chamarmos de $\lambda(w,t)$ a solução de (3.1.4) que vale a quando $t=0$, temos $\lambda(w,t)=\lambda(t)$ e

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda(t)+g(\beta(\lambda(t)+h)).$$

Assim, lembrando que $|g(x)|<a$, para todo $x\in\mathbb{R}$, temos que $\frac{d\lambda}{dt}(0)<0$. Por continuidade $\frac{d\lambda}{dt}(t)<0$ para todo $t\in[0,\varepsilon]$, para algum $\varepsilon>0$. Então, usando unicidade de solução, temos que $\lambda(t)$ é uma função estritamente decrescente em t. Usando o Teorema da Comparação obtemos

$$u(w,t)\le\lambda(t),$$

para quase todo $(w,t)\in S^1\times\mathbb{R}$. Repetindo o mesmo argumento, partindo da desigualdade $u(w,0)\ge -a$, para quase todo $w\in S^1$, resulta

$$u(w,t)\ge -\lambda(t).$$

Logo

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty\le\lambda(t).$$

Para concluirmos que a expressão de $I(u)$ vale para todo $t>0$, note que dado $t>0$, existe $\widetilde{t}$ com $t>\widetilde{t}$ o que implica (sendo λ decrescente) em $\lambda(t)<\lambda(\widetilde{t})$, então

$$a\ge\lambda(\widetilde{t})>\lambda(t)\ge u(w,t).$$

Logo, sempre vai ocorrer que $\|u(\cdot,t)\|_\infty<a$ uniformemente. Assim, pela hipótese (H6), a função $g^{-1}(u(\cdot,t))$ está definida quase sempre. Consequentemente, a expressão $I(u(\cdot))$ está bem definida.

Agora, note que os fatores

$$[(J * u(w)) + h - \beta^{-1}g^{-1}(u(w))] \text{ e } [g(\beta(J * u(w) + h)) - u(w)]$$

têm sempre o mesmo sinal, afirmação esta que se verifica facilmente, já que, por (H4), g^{-1} e g são crescentes. Então o integrando em $I(u(\cdot))$ é quase sempre não negativo.

Para concluirmos a prova basta mostrar que u é um ponto crítico do funcional $\mathbb{F}$ se e somente se u é uma solução de equilíbrio para (3.1.4). Para isto, seja $u(w)$ um ponto crítico do funcional $\mathbb{F}$, ou seja $I(u(\cdot)) = 0$. Sendo o integrando em $I(u(\cdot))$ uma função quase sempre não negativa, segue que

$$[(J * u(w)) + h - \beta^{-1}g^{-1}(u(w))][g(\beta(J * u(w) + h)) - u(w)] = 0$$

em quase todo ponto de S^1. Mas qualquer um desses fatores se anulando implica em

$$g(\beta(J * u(w) + h)) = u(w).$$

Reciprocamente, se u é uma solução de equilíbrio para (3.1.4) é fácil mostrar que $I(u(\cdot)) = 0$.
■

Corolário 3.4.3 *O fluxo, $T(t)$, determinado por (3.1.4) não possui pontos recorrentes não triviais.*

Demonstração: O resultado segue da existência do funcional $\mathbb{F}$. De fato, suponha que exista um ponto recorrente não trivial, u_0, ou seja, $u_0 \in \omega(u_0)$ e u_0 não é um equilíbrio. Então por um lado, existe uma seqüência (t_n) de números reais positivos, $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} T(t_n)u_0 = u_0.$$

Da continuidade de $\mathbb{F}$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{F}[T(t_n)u_0] = \mathbb{F}(u_0).$$

Por outro lado, como u_0 não é equilíbrio e $\mathbb{F}$ é decrescente ao longo das órbitas temos

$$\mathbb{F}(T(t)u_0) < \mathbb{F}(u_0), \ \ \forall\, t > 0,$$

em particular para $t = 1$, temos

$$\mathbb{F}(T(1)u_0) < \mathbb{F}(u_0).$$

Agora, para cada t_n da seqüência

$$\mathbb{F}(T(t_n + 1)u_0) < \mathbb{F}(T(1)u_0) < \mathbb{F}(u_0).$$

Fazendo n tender ao infinito na última desigualdade acima obtemos

$$\mathbb{F}(u_0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{F}(T(t_n+1)u_0) \leq \mathbb{F}(T(1)u_0) < \mathbb{F}(u_0),$$

o que é uma contradição. Portanto u_0 não pode ser recorrente. ■

Observação: Note que os integrandos, no funcional $\mathbb{F}$ acima, são sempre não negativos, já que J é positiva e $f(u(w)) - f(\overline{m}) \geq 0$, pois $\overline{m}$ é mínimo de f. Assim, $\mathbb{F}$ é limitado inferiormente.

Proposição 3.4.4 *Assuma as hipóteses (H1), (H4) e (H5), (H6) com $a < \infty$. Então o fluxo, $T(t)$, gerado pela equação (3.1.4) em $\{u \in L^2(S^1)\ :\ \|u\|_\infty \leq a\}$ é "gradiente".*

Demonstração: Da existência do atrator global temos pré-compacidade das órbitas. Dos Teoremas 3.4.1 e 3.4.2 e da última observação acima, temos a existência de um "funcional de Lyapunov". ■

3.5 Caracterização do atrator

Nesta seção, mostramos que o atrator satisfaz condições análogas as do Teorema 1.3.8 de [16]. Para isso, necessitamos do seguinte lema:

Lema 3.5.1 *Suponhamos as hipóteses (H1) e (H5), com $a < \infty$. Então o conjunto E dos equilíbrios de $T(t)$ é limitado em $L^2(S^1)$. Em particular $E \subset \mathcal{A}$.*

Demonstração: Seja ϕ um equilíbrio de $T(t)$, então ϕ satisfaz

$$\phi(z) = g(\beta(J * \phi)(z) + \beta h).$$

De (H5), obtemos

$$\|\phi\|_{L^2}^2 = \int_{S^1} |g(\beta(J*\phi)(z) + \beta h)|^2 dz \leq a^2 2\tau$$

então E é limitado. Como $T(t)u = u$, para todo $u \in E$, segue que $E \subset \mathcal{A}$. ■

Teorema 3.5.2 *Suponhamos válidas as mesma hipóteses da Proposição 3.4.4. Então o atrator $\mathcal{A}$, em $L^2(S^1)$, é o conjunto instável dos equilíbrios de $T(t)$, ou seja*

$$\mathcal{A} = W^u(E)$$

onde E é o conjunto dos equilíbrios de $T(t)$.

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{A}$. Suponha $T(-t)u \not\to E$, quando $t \to \infty$, então existe $\varepsilon > 0$ e uma seqüência $t_n \to -\infty$, quando $n \to \infty$ tal que

$$dist(T(t_n)u, E) > \varepsilon. \tag{3.5.11}$$

Pela compacidade de $\mathcal{A}$, existe subseqüência (t_{n_k}) de (t_n) tal que

$$\lim_{k\to\infty} T(t_{n_k})u = e,$$

então $e \in \alpha(u)$. Já que $\gamma^-(u) \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é compacto, segue que $\gamma^-(u)$ é pré-compacta. Logo do Lema 1.3.3 segue que $e \in E$. Isso contradiz (3.5.11). Portanto $u \in W^u(E)$.

Reciprocamente, seja $u \in W^u(E)$, então $T(-t)u$ está definido para todo $t \geq 0$ e $T(-t)u \to E$, quando $t \to \infty$. Assim, para todo $\delta > 0$ existe $\bar{t} = \bar{t}(\delta)$ tal que para todo $t \geq \bar{t}$ implica $dist(T(-t)u, E) < \delta$. Logo para todo $t \geq \bar{t}$ temos

$$T(-t)u \in E^\delta \subset \mathcal{A}^\delta,$$

pois $E \subset \mathcal{A}$, onde E^δ indica a δ-vizinhança de E e $\mathcal{A}^\delta$ indica a δ-vizinhança de $\mathcal{A}$. Como $\delta > 0$ é arbitrário, segue que $T(-t)u \in \mathcal{A}$. Agora,

$$u = T(t-t)u = T(t)T(-t)u \in \mathcal{A},$$

pois $T(-t)u \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é invariante. Isso conclui a demonstração. ■

Capítulo 4

Continuidade dos Atratores

Como o fluxo para (3.1.4) depende das constantes não negativas h e β, naturalmente o atrator para esse fluxo depende do parâmetro $\lambda = (h, \beta) \in \mathbb{R}^2_+$. Denotaremos por $\mathcal{A}_\lambda$, o atrator global cuja existência foi demonstrada no Teorema 3.2.2, para explicitar a dependência do atrator em relação ao parâmetro λ. Neste capítulo estudamos a continuidade dos atratores em relação ao parâmetro λ, no retângulo $R : 0 \leq h \leq h^*$, $0 < \beta \leq \beta^*$, em $\lambda_0 = (h_0, \beta_0)$, onde $h^* < \infty$ e $\beta^* < \frac{1}{k_2}$. Consideraremos a norma da soma em $\mathbb{R}^2_+$ quando se tratar da norma $\|\lambda\|$.

Além das condições (H1)-(H6), do capítulo anterior, vamos precisar das seguintes hipóteses:

(H7) Para cada $\lambda_0 \in R$, o conjunto E dos equilíbrios de $T_{\lambda_0}(t)$ é tal que $E = E_1 \cup E_2$, onde

(a) E_1 é constituido por equilíbrios hiperbólicos;

(b) E_2 é formado por equilíbrios não constantes tais que, para cada $u_0 \in E_2$, zero é autovalor simples do operador $DF(u_0, \lambda_0) : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$, definido por

$$DF(u_0, \lambda_0)v = -v + g'(\beta_0 J * u_0 + \beta_0 h_0)\beta_0(J * v).$$

(H8) A função g é de classe C^2.

Observação: Sejam $u_0 \in E_2$ e $DF(u_0, \lambda_0)$ o operador definido acima. Considere o produto interno

$$(u, v) = \int_{S^1} u(w)v(w)d\nu(w),$$

onde $d\nu(w)$ é a medida

$$d\nu(w) = \frac{dw}{g'(\beta(J * u_0)(w) + \beta h)}$$

que equivalente à medida de Lebesgue. É fácil mostrar que $\mathcal{L}^2(S^1, d\nu(w)) = L^2(S^1, dw)$ e que com este produto inteno o operador $DF(u_0, \lambda_0)$ é auto-adjunto.

Observação: Usando que o operador

$$v \mapsto g'(\beta_0 J * u_0 + \beta_0 h_0)\beta_0(J * v)$$

é compacto sobre $L^2(S^1)$, segue de (H7) e da Observação acima, que existe $\delta > 0$ tal que

$$\sigma(DF(u_0, \lambda_0))\backslash\{0\} \cap (-\delta, \delta) = \emptyset.$$

4.1 Semicontinuidade superior dos atratores

Mostramos, nesta seção, que a família de atratores, $\mathcal{A}_\lambda$, é semi-contínua superiormente em relação ao parâmetro λ, no retângulo $R : 0 \leq h \leq h^*$, $0 < \beta \leq \beta^*$, em λ_0.

Lema 4.1.1 *Suponhamos as hipóteses (H1) e (H3) válidas. Então o fluxo*

$$T_\lambda(t)u = e^{-t}u + \int_0^t e^{-(t-s)} g(\beta J * T_\lambda(s)u + \beta h)ds$$

é contínuo em $\lambda_0 \in R$, uniformemente para u em conjunto limitado e $t \in [0, b]$ com $b < \infty$.

Demonstração: Sejam $\lambda_0 \in R$ fixo e $\varepsilon > 0$ dado. Queremos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$\|T_\lambda(t)u - T_{\lambda_0}(t)u\|_{L^2} < \varepsilon, \text{ sempre que } \|\lambda - \lambda_0\| < \delta,$$

para $t \in [0, b]$ e u em um conjunto limitado C. Mas, de (H1) segue

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(t)u - T_{\lambda_0}(t)u\|_{L^2} &\leq \int_0^t e^{-(t-s)} \|g(\beta J * T_\lambda(s)u + \beta h) - g(\beta_0 J * T_{\lambda_0}(s)u + \beta_0 h_0)\|_{L^2} ds \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)} k_1 [\|\beta J * (T_\lambda(s)u) - \beta_0 J * (T_{\lambda_0}(s)u)\|_{L^2} + \|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2}] ds.
\end{aligned}$$

Subtraindo e somando o termo $\beta_0 J * (T_\lambda(s)u)$, segue a estimativa abaixo

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(t)u - T_{\lambda_0}(t)u\|_{L^2} &\leq \int_0^t e^{-(t-s)} k_1 \{\|\beta J * (T_\lambda(s)u) - \beta_0 J * (T_\lambda(s)u)\|_{L^2} \\
&+ \|\beta_0 J * (T_\lambda(s)u) - \beta_0 J * (T_{\lambda_0}(s)u)\|_{L^2}\} ds \\
&+ \int_0^t e^{-(t-s)} k_1 \|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2} ds.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(t)u - T_{\lambda_0}(t)u\|_{L^2} &\leq \int_0^t e^{-(t-s)} k_1 |\beta - \beta_0| \|J\|_{L^1} \|T_\lambda(s)u\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^t e^{-(t-s)} k_1 \beta_0 \|J\|_{L^1} \|T_\lambda(s)u - T_{\lambda_0}(s)u\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^t e^{-(t-s)} k_1 \|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2} ds.
\end{aligned}$$

Sendo $\|J\|_{L^1} = 1$, temos

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(t)u - T_{\lambda_0}(t)u\|_{L^2} &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}k_1|\beta - \beta_0|\|T_\lambda(s)u\|_{L^2}ds \\ &+ \int_0^t e^{-(t-s)}k_1\beta_0\|T_\lambda(s)u - T_{\lambda_0}(s)u\|_{L^2}ds \\ &+ \int_0^t e^{-(t-s)}k_1\|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2}ds.\end{aligned}$$

Do Teorema 3.2.2, segue que, para todo $\lambda \in R$, $\|T_\lambda(s)u\|_{L^2}$ é limitado por uma constante positiva L que depende apenas de C. Então

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(t)u - T_{\lambda_0}(t)u\|_{L^2} &\leq \{Lk_1|\beta - \beta_0| + k_1\|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2}\} \\ &+ \int_0^t e^{-(t-s)}k_1\beta_0\|T_\lambda(s)u - T_{\lambda_0}(s)u\|_{L^2}ds \\ &= C(\lambda) + \int_0^t k_1\beta_0\|T_\lambda(s)u - T_{\lambda_0}(s)u\|_{L^2}ds,\end{aligned}$$

com $C(\lambda) = \{Lk_1|\beta - \beta_0| + k_1\|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2}\}$, que satisfaz $C(\lambda) \to 0$, quando $\lambda \to \lambda_0$. Logo, do Lema de Gronwall, segue que

$$\|T_\lambda(t)u - T_{\lambda_0}(t)u\|_{L^2} \leq C(\lambda)e^{K_1\beta_0 t},$$

concluindo a demonstração. ∎

Teorema 4.1.2 *Assuma as hipóteses (H1) e (H3). Então a família de atratores $\mathcal{A}_\lambda$ é semi-contínua superiormente em $\lambda_0 \in R$.*

Demonstração: Das hipóteses (H1) e (H3), segue que os atratores $\mathcal{A}_\lambda$, dados no Teorema 3.2.2, estão contidos na bola $B\left(0, \frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\beta h + k_3)}{1-k_2\beta}\right)$ em $L^2(S^1)$, para todo $\lambda \in R$. Então

$$\bigcup_{\lambda \in R} \mathcal{A}_\lambda \subset B\left(0, \frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\beta^* h^* + k_3)}{1 - k_2\beta^*}\right).$$

Sendo $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ atrator global e $B = B\left(0, \frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\beta^* h^* + k_3)}{1-k_2\beta^*}\right)$ um conjunto limitado, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t^* > 0$ tal que $T_{\lambda_0}(t)B \subset \mathcal{A}_{\lambda_0}^{\frac{\varepsilon}{2}}$, para todo $t \geq t^*$, onde $\mathcal{A}_{\lambda_0}^{\frac{\varepsilon}{2}}$ é a $\frac{\varepsilon}{2}$-vizinhança de $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.

Do Lema 4.1.1 temos que $T_\lambda(t)$ é contínuo em λ_0, uniformemente para u em conjunto limitado e t em compacto. Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $u \in B\left(0, \frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\beta^* h^* + k_3)}{1-k_2\beta^*}\right)$

$$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta \Rightarrow \|T_\lambda(t^*)u - T_{\lambda_0}(t^*)u\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mostraremos que se $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ então $\mathcal{A}_\lambda \subset \mathcal{A}_{\lambda_0}^{\varepsilon}$. De fato, se $u \in \mathcal{A}_\lambda$ então, sendo $\mathcal{A}_\lambda$ invariante, $v = T_\lambda(-t^*)u \in \mathcal{A}_\lambda \subset B\left(0, \frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\beta^* h^* + k_3)}{1-k_2\beta^*}\right)$. Assim temos:

$$T_{\lambda_0}(t^*)v \in \mathcal{A}_{\lambda_0}^{\frac{\varepsilon}{2}}, \tag{4.1.1}$$

e

$$\|T_\lambda(t^*)v - T_{\lambda_0}(t^*)v\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1.2}$$

De (4.1.1) e (4.1.2) segue que $T_\lambda(t^*)v \in \mathcal{A}_{\lambda_0}^{\varepsilon}$. Então

$$u = T_\lambda(t^*)T_\lambda(-t^*)u = T_\lambda(t^*)v \in \mathcal{A}_{\lambda_0}^{\varepsilon}.$$

Logo, $\mathcal{A}_\lambda \subset \mathcal{A}_{\lambda_0}^{\varepsilon}$ sempre que $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$, provando a semicontinuidade superior de $\mathcal{A}_\lambda$. ∎

4.2 Continuidade dos equilíbrios

Nesta seção, investigamos a continuidade dos equilíbrios com relação ao parâmetro $\lambda = (h, \beta)$ em $\lambda_0 \in R$. Na prova da semicontinuidade inferior surge uma dificuldade adicional pelo fato dos equilíbrios de (3.1.4) surgirem em famílias.

Uma função u_0 em $L^2(S^1)$ é um equilíbrio de $T_{\lambda_0}(t)$, para algum $\lambda_0 \in R$ fixo, se e somente se u_0 é um zero da função $F(\cdot, \lambda_0) : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$, dada por

$$F(u, \lambda_0) = -u + g(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0).$$

Além disso, se u_0 não é constante, um cálculo simples mostra que zero é autovalor do operador

$$DF(u_0, \lambda_0)v = -v + g'(\beta_0 J * u_0 + \beta_0 h_0)\beta_0(J * v)$$

com autofunção u_0'.

Lema 4.2.1 *Suponha que, para algum $\lambda_0 \in R$, (H1), (H2), (H7) e (H8) valem. Dado $u \in E_2$, defina $\gamma(\alpha; u)$ por*

$$\gamma(\alpha; u)(w) = u(\alpha w), \ \alpha \in S^1.$$

Então $\Gamma = \gamma(S^1; u)$ é uma curva fechada, constituída por equilíbrios de $T_{\lambda_0}(t)$, que é simples, de classe C^2 e isolada no conjunto dos equilíbrios (nenhum ponto de Γ é ponto de acumulação de $E \setminus \Gamma$).

Demonstração: Se $u \in E_2$, então

$$u(w) = g(\beta(J * u)(w) + \beta h), \ \forall \ w \in S^1.$$

Sendo, para cada $\alpha \in S^1$,

$$(J * u)(\alpha w) = (J * \gamma(\alpha; u))(w), \ \forall \ w \in S^1,$$

obtemos

$$\gamma(\alpha; u)(w) = g(\beta(J * \gamma(\alpha; u))(w) + \beta h), \ \forall \ w \in S^1.$$

Então $\gamma(\alpha; u) \in E_2$. Portanto Γ é constituída por equilíbrios. Além disso, Γ é claramente fechada pois $\alpha \in S^1$.

Agora, seja $u_0 \in \Gamma$. Da hipótese (H7) segue que zero é um autovalor simples para o operador $DF(u_0, \lambda_0)$, isto é, existe $v \neq 0$ tal que

$$Ker(DF(u_0, \lambda_0)) = span\{v\}.$$

Seja $Y = \mathcal{R}(DF(u_0, \lambda_0))$ a imagem de $DF(u_0, \lambda_0)$, que é um subespaço de co-dimensão 1, pois $DF(u_0, \lambda_0)$ é uma perturbação da identidade por um operador compacto, logo é Fredholm de índice zero, (veja [5], p. 98). Então, fazendo uma translação da origem para u_0, obtemos a decomposição

$$L^2(S^1) = span\{v\} \oplus Y.$$

Já que u_0 é um equilíbrio, temos que $F(u_0, \lambda_0) = 0$.

Defina $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times Y \to L^2(S^1)$ por

$$\widetilde{F}(t, y) = F(tv + y, \lambda_0).$$

Note que $\widetilde{F}(0, 0) = F(u_0, \lambda_0) = 0$. Das hipóteses (H1) e (H2), segue que $F(\cdot, \lambda_0)$ é diferenciável. Logo $\widetilde{F}(t, \cdot)$ é diferenciável em y.

Agora, usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{F}(t, y) &= DF(tv + y, \lambda_0)\frac{\partial}{\partial y}(y) \\ &= DF(tv + y, \lambda_0)id_Y. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{F}(0, 0) = DF(u_0, \lambda_0)id_Y.$$

Como $DF(u_0, \lambda_0)|_Y$ é injetivo e $Y = \mathcal{R}(DF(u_0, \lambda_0))$, segue que $DF(u_0, \lambda_0)|_Y$ é uma bijeção de Y em Y. Logo, pelo Teorema da Aplicação Aberta, (ver [5], p. 18), $DF(u_0, \lambda_0)|_Y$ é um isomorfismo de Y em Y.

Portanto $\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{F}(0,0) : Y \to Y$ é um isomorfismo de Y em Y. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existem abertos $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}$, $U \subset Y$ com $u_0 \in U$ e $\xi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to U$, com a mesma classe de diferenciabilidade de F, tal que $\widetilde{F}(t,y) = 0$ se e somente se $y = \xi(t)$.

Como $\widetilde{F}(t,y) = 0$ sempre que $tv + y \in \Gamma$, segue que na vizinhança $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times U$, a curva Γ tem como parametrização $\xi(t)$. Em particular, na vizinhança $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times U$, não existem zeros de $\widetilde{F}$ exceto os zeros sobre Γ. Conseqüentemente não existem equilíbrios de $T_{\lambda_0}(t)$ exceto os equilíbrios sobre Γ. Portanto, Γ é isolada.

Usando (H8), procedendo como na Proposição 3.1.5, obtemos que F é de classe C^2. Então a parametrização ξ de Γ, em uma vizinhança de u_0, é de classe C^2. Como u_0 é um equilíbrio arbitrário, então Γ é uma curva de classe C^2.

Finalmente, suponha que Γ não é uma curva simples e seja $u_1 \in \Gamma$ um ponto de auto-interseção. Então existem $\alpha_1, \alpha_2 \in S^1$ tais que

$$u_1 = \gamma(\alpha_1; u_0) \text{ e } u_1 = \gamma(\alpha_2; u_0)$$

e

$$\frac{d}{d\alpha}\gamma(\alpha_1; u_0) \text{ e } \frac{d}{d\alpha}\gamma(\alpha_2; u_0)$$

são autovetores linearmente independentes associados ao zero. Isso contradiz a hipótese (H7).

■

Corolário 4.2.2 *Seja M uma curva conexa fechada de equilíbrios em E_2 e $u_0 \in M$. Então $M = \Gamma$, onde $\Gamma = \gamma(S^1; u_0)$.*

Demonstração: Suponha que $M \not\subset \Gamma$, então existem equilíbrios em $M \setminus \Gamma$ acumulando-se em u_0. Mas, pelo Lema 4.2.1, isso não ocorre. Portanto $M \subseteq \Gamma$. Como Γ é uma curva fechada simples, segue que $M = \Gamma$. ■

4.2.1 Semicontinuidade superior dos equilíbrios

No que segue, denotamos por E_λ (ou E_{λ_0}) o conjunto dos pontos de equilíbrios de $T_\lambda(t)$ (ou $T_{\lambda_0}(t)$).

Lema 4.2.3 (Semicontinuidade superior dos equilíbrios). *Suponhamos as hipóteses (H1) e (H5) válidas. Sejam $\lambda_0 \in R$ fixo e $\varepsilon > 0$ dado. Então, existe $\delta > 0$ tal que $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ implica $E_\lambda \subset E_{\lambda_0}^\varepsilon$, onde $E_{\lambda_0}^\varepsilon$ é a ε-vizinhança de E_{λ_0}.*

Demonstração: Seja λ_0 fixado. De (H1) e (H5) segue que os atratores $\mathcal{A}_\lambda$, dados no Teorema 3.2.2, estão contidos na bola $B[0, 2a\sqrt{2\tau}]$ em $L^2(S^1)$. Além disso, como $E_\lambda \subset \mathcal{A}_\lambda$, temos que E_λ é limitado.

Suponha que existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ existe $\lambda \in R$ tal que $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ e $E_\lambda \not\subset E^\varepsilon_{\lambda_0}$. Então existe seqüência (u_{λ_j}) em E_λ tal que

$$dist(u_{\lambda_j}, E_{\lambda_0}) > \varepsilon, \ \lambda_j \to \lambda_0. \tag{4.2.3}$$

Agora

$$u_{\lambda_j} = g(\beta_j J * u_{\lambda_j} + \beta_j h_j).$$

Já que u_{λ_j} está em um conjunto limitado e $g(\beta_j J * u_{\lambda_j} + \beta_j h_j)$ é um operador compacto, existem uma subseqüência (u_{λ_k}) de (u_{λ_j}) e $u_0 \in B[0, 2a\sqrt{2\tau}]$, tal que $u_{\lambda_k} \to u_0$, quando $k \to \infty$. Da continuidade de g, segue que

$$u_0 = g(\beta_0 J * u_0 + \beta_0 h_0).$$

Portanto $u_0 \in E_{\lambda_0}$. Isso contradiz (4.2.3). ∎

4.2.2 Semicontinuidade inferior dos equilíbrios

A semicontinuidade inferior dos equilíbrios é obtida, em geral, aplicando-se o Teorema da Função Implícita. Isso é possível quando os equilíbrios são todos hiperbólicos. No entanto, em casos de problemas com simetria (como em (3.1.4)) as hipóteses do Teorema da Função Implícita não valem (veja Exemplo 4.2.9 no final desta subseção, onde as curvas de equilíbrios do problema perturbado podem desaparecer). Para superar esta dificuldade, utilizamos agora a definição de hiperbolicidade normal, (ver [4]).

Definição 4.2.4 *Sejam $T(t)$ um semigrupo sobre um espaço de Banach X e $M \subset X$ uma variedade invariante sob $T(t)$. Dizemos que M é normalmente hiperbólica sob $T(t)$ se:*
(i) *Para cada $m \in M$ existe uma decomposição*

$$X = X^c_m \oplus X^u_m \oplus X^s_m$$

de subespaços fechados com X^c_m o espaço tangente a M em m.
(ii) *Para cada $m \in M$, se $m_1 = T(t)(m)$*

$$DT(t)(m)|_{X^\alpha_m} : X^\alpha_m \to X^\alpha_{m_1}, \ \alpha = c, u, s$$

e $DT(t)(m)|_{X^u_m}$ é um isomorfismo de X^u_m sobre $X^u_{m_1}$.

(iii) *Existem $t_0 \geq 0$ e $\mu < 1$ tal que para todo $t \geq t_0$*

$$\mu \inf \left\{ \|DT(t)(m)x^u\| \; : \; x^u \in X_m^u, \; \|x^u\| = 1 \right\} > \max\{1, \|DT(t)(m)|_{X_m^c}\|\}, \tag{4.2.4}$$

$$\mu \min \left\{ 1, \inf\{\|DT(t)(m)x^c\| \; : \; x^c \in X_m^c, \; \|x^c\| = 1\} \right\} > \|DT(t)(m)|_{X_m^s}\|. \tag{4.2.5}$$

A condição (4.2.4) sugere que próximo a $m \in M$, $T(t)$ é expansivo na direção de X_m^u em uma taxa maior que sobre M. Enquanto (4.2.5) sugere que $T(t)$ é contractivo na direção de X_m^s em uma taxa maior que sobre M.

Aplicaremos o seguinte resultado provado em ([4], p. 121-123).

Teorema 4.2.5 (**Hiperbolicidade Normal para Fluxos**) *Suponhamos que $T(t)$ é um C^1-semigrupo sobre um espaço de Banach X e M é uma variedade invariante sob $T(t)$, compacta e conexa, de classe C^2, a qual é normalmente hiperbólica sob $T(t)$, (isto é vale (i), (ii) e existe $0 \leq t_0 < \infty$ tal que (iii) vale para todo $t \geq t_0$). Sejam $\widetilde{T}(t)$ um C^1-semigrupo sobre X e $t_1 > t_0$. Considere $N(\varepsilon)$ a ε-vizinhança de M, dada por,*

$$N(\varepsilon) = \{m + x^u + x^s, \; m \in M, \; x^u \in X_m^u, \; x^s \in X_m^s, \; \|x^u\|, \; \|x^s\| < \varepsilon\}.$$

Suponhamos ainda que existe $\varepsilon^* > 0$ tal que para cada $\varepsilon < \varepsilon^*$, existe $\sigma > 0$ tal que se

$$\sup_{u \in N(\varepsilon)} \left\{ \|\widetilde{T}(t_1)u - T(t_1)u\| + \|D\widetilde{T}(t_1)(u) - DT(t_1)(u)\| \right\} < \sigma$$

e

$$\sup_{u \in N(\varepsilon)} \|\widetilde{T}(t)u - T(t)u\| < \sigma, \textit{para } 0 \leq t \leq t_1.$$

Então existe uma única variedade invariante sob $\widetilde{T}(t)$ em $N(\varepsilon)$, $\widetilde{M}$, que é compacta, conexa e de classe C^1. Além disso, $\widetilde{M}$ é normalmente hiperbólica sob $\widetilde{T}(t)$ e, para cada $t \geq 0$, $\widetilde{T}(t)$ é um C^1-difeomorfismo de $\widetilde{M}$ em $\widetilde{M}$.

Proposição 4.2.6 *Suponhamos as hipóteses (H1), (H2) e (H7) válidas. Então todas as curvas de equilíbrios de $T_\lambda(t)$ são normalmente hiperbólicas sob $T_\lambda(t)$.*

Demonstração: Sejam M uma curva de equilíbrios de $T_\lambda(t)$ e $m \in M$. De (H7) segue que

$$Ker(DF(m, \lambda)) = span\{m'\}.$$

Seja $Y = \mathcal{R}(DF(m, \lambda))$ a imagem de $DF(m, \lambda)$. Sendo $DF(m, \lambda)$ auto-adjunto e Fredholm de índice zero, de (H7), segue que

$$\sigma(DF(m, \lambda)|_Y) = \sigma_u \cup \sigma_s,$$

onde σ_u e σ_s correspondem aos autovalores de $DF(m,\lambda)|_Y$ que são positivos e negativos, respectivamente.

De (H1) e (H2), segue que $T_\lambda(t)$ é um C^1- semigrupo, então podemos considerar a equação linear

$$\dot{v} = (DF(m,\lambda)|_Y)v.$$

Denotando por $DT_\lambda(t)(m)$ a derivada de $T_\lambda(t)$ com relação à condição inicial no ponto m, segue que $DT_\lambda(t)(m) = e^{(DF(m,\lambda))t}$. Em particular $DT_\lambda(t)(m)|_Y \equiv D(T_\lambda(t)|_Y)(m) = e^{(DF(m,\lambda)|_Y)t}$. Então a solução da equação linear acima, com condição inicial $v_0 \in Y$, é dada por $DT_\lambda(t)(m)|_Y v_0$.

Sejam P_u e P_s as projeções espectrais correspondentes a σ_u e σ_s, respectivamente e $X^u_m = P_uY$, $X^s_m = P_sY$ os subespaços invariantes correspondentes as projeções P_u e P_s. Então temos a decomposição $Y = X^u_m \oplus X^s_m$.

Para a afirmação e as estimativas abaixo, (veja [10], p. 73 e 81 ou [20], p. 37).
A solução $DT_\lambda(t)(m)|_Y v$, da equação linear acima, quando $t \to +\infty$, é exponencialmente decrescente se $v \in X^s_m$ e é exponencialmente crescente se $v \in X^u_m$. Além disso,

$$\|DT_\lambda(t)(m)|_Y v\| \leq Ne^{-\nu t}\|v\|, \text{ para } v \in X^s_m \text{ e } t \geq 0, \tag{4.2.6}$$

$$\|DT_\lambda(t)(m)|_Y v\| \leq Ne^{\nu t}\|v\|, \text{ para } v \in X^u_m \text{ e } t \leq 0, \tag{4.2.7}$$

para alguma constante positiva ν e alguma constante $N \geq 1$.

Agora, escrevendo $X^c_m = span\{m'\}$, temos a decomposição

$$L^2(S^1) = X^c_m \oplus X^u_m \oplus X^s_m.$$

Além disso, vimos na demonstração do Lema 4.2.1 que, $DF(m,\lambda)|_Y$ é um isomorfismo de Y em Y. Então $DF(m,\lambda)|_{X^\alpha_m} : X^\alpha_m \to X^\alpha_m$, $\alpha = u, s$, é um isomorfismo. Conseqüentemente o fluxo linear

$$DT_\lambda(t)(m)|_{X^u_m} : X^u_m \to X^u_m$$

é também um isomorfismo.

Finalmente, da afirmação e estimativas (4.2.6) e (4.2.7), obtemos (4.2.4) e (4.2.5) da definição de variedade normalmente hiperbólica. Com efeito, para verificar que a afirmação acima e (4.2.6) implica em (4.2.4) calculamos, por um lado,

$$\begin{aligned}
\|DT_\lambda(t)(m)|_{X^c_m}\| &= \sup_{\|x^c\|_{L^2}=1} \left\{\|e^{DF(m,\lambda)t}x^c\|_{L^2}\right\} \\
&= \sup_{\|x^c\|_{L^2}=1} \left\{x^c + tDF(m,\lambda)x^c + \frac{t^2}{2!}DF(m,\lambda)^2x^c + \cdots\right\} \\
&= \sup_{\|x^c\|_{L^2}=1} \{x^c\},
\end{aligned}$$

pois $x^c \in Ker(DF(m,\lambda))$. Logo $\|DT_\lambda(t)(m)|_{X_m^c}\| = 1$. Portanto, nesse caso, o lado direito de (4.2.4) é sempre igual a 1. Por outro lado,

$$\|DT_\lambda(t)(m)x^u\|_{L^2} = \|e^{(DF(m,\lambda)|_Y)t}x^u\|_{L^2}$$

que é exponencialmente crescente. Então dado $0 < t_1 < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|e^{(DF(m,\lambda)|_Y)t}x^u\|_{L^2} &\geq \|e^{(DF(m,\lambda)|_Y)t_1}x^u\|_{L^2} \\
&> \|e^{(DF(m,\lambda)|_Y)\frac{t_1}{2}}x^u\|_{L^2} \\
&> \|e^{(DF(m,\lambda)|_Y)0}x^u\|_{L^2} \\
&= \|x^u\|_{L^2},
\end{aligned}$$

para todo $t \geq t_1$. Logo a estimativa desejada é imediata. De maneira análoga mostra-se que a afirmação acima e (4.2.7) implica em (4.2.5). ∎

Proposição 4.2.7 *Suponha as hipóteses (H1)-(H3). Seja $DT_\lambda(t)(u)$ o fluxo linear gerado pela equação*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v + g'(\beta J * u + \beta h)\beta(J * v).$$

Então, fixado $\lambda_0 \in R$, temos

$$\|T_\lambda(t)u - T_{\lambda_0}(t)u\|_{L^2(S^1)} + \|DT_\lambda(t)(u) - DT_{\lambda_0}(t)(u)\|_{\mathcal{L}(L^2(S^1),\, L^2(S^1))} \longrightarrow 0,\ \lambda \longrightarrow \lambda_0,$$

para u em conjunto limitado de $L^2(S^1)$ e $t \in [0,b]$, com $b < \infty$.

Demonstração: Quanto a primeira parcela, do Lema 4.1.1 segue que

$$\|T_\lambda(t)u - T_{\lambda_0}(t)u\|_{L^2(S^1)} \longrightarrow 0,\ \lambda \longrightarrow \lambda_0,$$

para u em conjunto limitado e $t \in [0,b]$, com $b < \infty$.

Quanto a segunda parcela, da fórmula de variação das constantes, temos

$$DT_\lambda(t)(u)v = e^{-t}v + \int_0^t e^{-(t-s)}g'(\beta J * u + \beta h)(\beta J * v)ds.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|DT_\lambda(t)(u)v - DT_{\lambda_0}(t)(u)v\|_{L^2} &\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\|[g'(\beta J * u + \beta h)\beta \\
&- g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)\beta_0]J * v\|_{L^2}ds \\
&\leq \int_0^t e^{-(t-s)}\|[g'(\beta J * u + \beta h)\beta \\
&- g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)\beta]J * v\|_{L^2}ds \\
&+ \int_0^t e^{-(t-s)}\|g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)(J * v)(\beta - \beta_0)\|_{L^2}ds.
\end{aligned}$$

Dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ implica que $(\beta J * u + \beta h)$ pertence à bola de centro em $(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)$ e raio η em $L^\infty(S^1)$. De fato, usando (3.1.5), temos

$$\begin{aligned}|\beta_0(J*u)(w) + \beta_0 h_0 - \beta(J*u)(w) - \beta h| &\le |\beta - \beta_0||(J*u)(w)| + |\beta_0 h_0 - \beta h| \\ &\le (\|J\|_\infty \|u\|_{L^2}|\beta - \beta_0| + |\beta_0 h_0 - \beta h|) \to 0, \ \lambda \to \lambda_0.\end{aligned}$$

Assim, por (H2), existe uma constante positiva L, que depende apenas de u, tal que

$$|g'(\beta(J*u)(w) + \beta h) - g'(\beta_0(J*u)(w) + \beta_0 h_0)| \le L(|\beta - \beta_0||(J*u)(w)| + |\beta h - \beta_0 h_0|).$$

Então

$$\begin{aligned}&\| \ [g'(\beta J * u + \beta h)\beta - g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)\beta](J*v)\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{S^1} |g'(\beta(J*u)(w) + \beta h) - g'(\beta_0(J*u)(w) + \beta_0 h_0)|^2 \beta^2 |(J*v)(w)|^2 dw \\ &\le \int_{S^1} L^2(|\beta - \beta_0||(J*u)(w)| + |\beta h - \beta_0 h_0|)^2 \beta^2 |(J*v)(w)|^2 dw.\end{aligned}$$

Usando (3.1.5), obtemos

$$\begin{aligned}\|[g'(\beta J * u + \beta h)\beta - g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)\beta](J*v)\| &\le 2\tau L\Big(\|u\|_{L^2}\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty|\beta - \beta_0| \\ &+ |\beta h - \beta_0 h_0|\Big)\beta\|J\|_\infty\|v\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\sup_{\|v\|_{L^2}=1} &\int_0^t e^{-(t-s)}\|[g'(\beta J * u + \beta h)\beta - g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)\beta](J*v)\|_{L^2} ds \\ &\le \sup_{\|v\|_{L^2}=1}\left\{2\tau L\Big(\|u\|_{L^2}\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty|\beta - \beta_0| + |\beta h - \beta_0 h_0|\Big)\beta\|J\|_\infty\|v\|_{L^2}\int_0^t e^{-(t-s)}ds\right\} \\ &\le \sup_{\|v\|_{L^2}=1}\left\{2\tau L\Big(\|u\|_{L^2}\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty|\beta - \beta_0| + |\beta h - \beta_0 h_0|\Big)\beta\|J\|_\infty\|v\|_{L^2}\right\} \\ &= 2\tau L\Big(\|u\|_{L^2}\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty|\beta - \beta_0| + |\beta h - \beta_0 h_0|\Big)\beta\|J\|_\infty.\end{aligned}$$

Agora,

$$\|g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)(J*v)(\beta - \beta_0)\|_{L^2}^2 = \int_{S^1} |g'(\beta_0(J*u)(w) + \beta_0 h_0)(J*v)(w)(\beta - \beta_0)|^2 dw.$$

Mas, usando (H3) (ver início do Capítulo 3) e (3.1.5), temos

$$|g'(\beta_0(J*u)(w) + \beta_0 h_0)(J*v)(w)| \le \Big(k_4\beta_0\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|u\|_{L^2} + k_4\beta_0 h_0 + k_5\Big)\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|v\|_{L^2}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
&\| \quad g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)(J * v)(\beta - \beta_0)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \quad \int_{S^1} \left(k_4\beta_0\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|u\|_{L^2} + k_4\beta_0 h_0 + k_5 \right)^2 2\tau\|J\|_\infty^2\|v\|_{L^2}^2|\beta - \beta_0|^2 dw.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
&\| \quad g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)(J * v)(\beta - \beta_0)\|_{L^2} \\
&\leq \quad \left(k_4\beta_0\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|u\|_{L^2} + k_4\beta_0 h_0 + k_5 \right) 2\tau\|J\|_\infty\|v\|_{L^2}|\beta - \beta_0|.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\sup_{\|v\|_{L^2}=1} & \int_0^t \quad e^{-(t-s)}\|g'(\beta_0 J * u + \beta_0 h_0)(J * v)(\beta - \beta_0)\|_{L^2} ds \\
&\leq \quad \sup_{\|v\|_{L^2}=1} \left\{ \left(k_4\beta_0\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|u\|_{L^2} + k_4\beta_0 h_0 + k_5 \right) 2\tau\|J\|_\infty\|v\|_{L^2}|\beta - \beta_0| \int_0^t e^{-(t-s)} ds \right\} \\
&\leq \quad \sup_{\|v\|_{L^2}=1} \left\{ \left(k_4\beta_0\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|u\|_{L^2} + k_4\beta_0 h_0 + k_5 \right) 2\tau\|J\|_\infty\|v\|_{L^2}|\beta - \beta_0| \right\} \\
&= \quad \left(k_4\beta_0\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|u\|_{L^2} + k_4\beta_0 h_0 + k_5 \right) 2\tau\|J\|_\infty|\beta - \beta_0|.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\|DT_\lambda(t)(u) - DT_{\lambda_0}(t)(u)\|_{\mathcal{L}(L^2(S^1),\, L^2(S^1))} &= \sup_{\|v\|=1} \|DT_\lambda(t)(u)v - DT_{\lambda_0}(t)(u)v\|_{L^2(S^1)} \\
&\leq 2\tau L\Big(\|u\|_{L^2}\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty|\beta - \beta_0| \\
&+ |\beta h - \beta_0 h_0|\Big)\beta\|J\|_\infty \\
&+ \Big(k_4\beta_0\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty\|u\|_{L^2} \\
&+ k_4\beta_0 h_0 + k_5 \Big) 2\tau\|J\|_\infty|\beta - \beta_0| \\
&= C(\lambda),
\end{aligned}
$$

com $C(\lambda) \to 0$, quando $\lambda \to 0$. Isso completa a demonstração. ∎

Teorema 4.2.8 *Suponhamos as hipóteses (H1)-(H2), (H5)-(H6), com $a < \infty$, e (H7)-(H8) válidas. Então o conjunto E_λ dos equilíbrios de $T_\lambda(t)$ é semi-contínuo inferiormente com relação ao parâmetro λ em λ_0.*

Demonstração: No caso de equilíbrios constantes o resultado segue do Teorema da Função Implícita, pois estes equilíbrios são hiperbólicos e a função

$$F(u,\lambda) = -u + g(\beta u + \beta h)$$

é de classe C^1 em u.

No caso de equilíbrios não constantes, seja M uma curva de equilíbrios de E_{λ_0}. Queremos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de modo que se λ é tal que $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$, então existe $M_\lambda \subset E_\lambda$ tal que $M \subset M_\lambda^\varepsilon$, onde M_λ^ε é a ε-vizinhança de M_λ.

Mas, do Lema 4.2.1 e das Proposições 4.2.6 e 4.2.7, estamos nas hipóteses do Teorema de Hiperbolicidade Normal. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ existe uma única variedade invariante compacta conexa de classe C^1, M_λ, a qual é normalmente hiperbólica sob $T_\lambda(t)$, tal que M_λ está ε-próxima de M.

Já que o fluxo é gradiente e M_λ é compacta e invariante, existe pelo menos um ponto, $m_\lambda \in M_\lambda$, que é equilíbrio de $T_\lambda(t)$. Com efeito, dado $u \in M_\lambda$, pela invariância de M_λ, a seqüência $u_n = T_\lambda(t_n)u \in M_\lambda$, para toda seqüência $t_n \in \mathbb{R}$. Por compacidade, existe subseqüência u_{n_k} que converge para algum $m_\lambda \in M_\lambda$. Então $m_\lambda \in \omega(u)$, e sendo $T_\lambda(t)$ gradiente, do Lema 1.3.3, temos que $m_\lambda \in E_\lambda$.

Como M_λ está ε-próxima de M, existe $m \in M$ tal que

$$\|m - m_\lambda\| < \varepsilon.$$

Seja Γ_λ a curva de equilíbrios dada por $\Gamma_\lambda \equiv \{\gamma(\alpha; m_\lambda),\ \alpha \in S^1\}$ que é uma variedade invariante normalmente hiperbólica sob $T_\lambda(t)$.

Agora, $M \equiv \Gamma_{\lambda_0} \equiv \{\gamma(\alpha; m),\ \alpha \in S^1\}$. Então, para cada $\alpha \in S^1$, temos

$$\begin{aligned}\|\gamma(\alpha; m_\lambda) - \gamma(\alpha; m)\|_{L^2}^2 &= \int_{S^1} |\gamma(\alpha; m_\lambda)(w) - \gamma(\alpha; m)(w)|^2 dw \\ &= \int_{S^1} |m_\lambda(\alpha w) - m(\alpha w)|^2 dw.\end{aligned}$$

Usando que

$$\int_{S^1} m(\alpha w) dw = \int_{S^1} m(z) dz,$$

obtemos

$$\|\gamma(\alpha; m_\lambda) - \gamma(\alpha; m)\|_{L^2}^2 = \|m_\lambda - m\|_{L^2}^2.$$

Então

$$\begin{aligned}\|\gamma(\alpha; m_\lambda) - \gamma(\alpha; m)\|_{L^2} &= \|m_\lambda - m\|_{L^2} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, Γ_λ está ε-próxima de M. Então, por unicidade, $M_\lambda \equiv \Gamma_\lambda$.

Portanto $M \subset M_\lambda^\varepsilon$. ∎

Observação: Quando temos a estimativa

$$k_1\beta\sqrt{2\tau}\|J\|_\infty < 1,$$

a continuidade dos equilíbrios segue diretamente do Teorema de Ponto Fixo com parâmetros, (veja [19], p. 13).

O exemplo abaixo mostra que curvas de equilíbrios de

$$\dot{x} = F(x),$$

geradas pela ação de um grupo, podem desaparecer mesmo quando a simetria é preservada, ou seja, não vale um resultado do tipo Teorema da Função Implícita sem hipóteses adicionais, (veja [11]).

Exemplo 4.2.9 *(Um exemplo com simetria)*

Considere o campo em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Seja

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= \varepsilon x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

uma perturbação do Campo (4.2.8). Note que (4.2.8) tem, além da origem, a curva de equilíbrios dada por

$$x^2 + y^2 = 1$$

que é gerada por rotação a partir de um equilíbrio fixo. Porém, se $\varepsilon \neq 0$, é fácil ver que (4.2.9) não tem equilíbrio não trivial, embora seja equivariante pela ação de S^1.

Uma informação importante para o sistema (4.2.9) é que ele não é gradiente. De fato, usando coordenadas polares

$$x = rcos\theta, \;\; y = r\sin\theta,$$

podemos reescrever (4.2.9) na forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 2r(1-r^2), \\ \dot{\theta} &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Claramente, para cada $\varepsilon \neq 0$, $r(t) = 1$ e $\theta(t) = \varepsilon t$ é uma órbita periódica de (4.2.10) .

4.3 Existência e continuidade das variedades instáveis locais

Voltemos à equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + g(\beta(J * u) + \beta h). \tag{4.3.11}$$

Sejam $\lambda = (h, \beta) \in R : 0 \leq h \leq h^*$, $0 \leq \beta \leq \beta^*$ e $F : L^2(S^1) \times R \to L^2(S^1)$ definida pelo lado direito de (4.3.11), isto é,

$$F(u, \lambda) = -u + g(\beta(J * u) + \beta h).$$

Seja u_λ um equilíbrio de (4.3.11). Se $u = u_\lambda + v$ é solução de (4.3.11) segue, da Proposição 3.1.5, que

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda + v) = -v + g'(\beta(J * u_\lambda) + \beta h)\beta(J * v) + r(u_\lambda, v, \lambda).$$

onde $r(u_\lambda, 0, \lambda) = 0$ e para cada $\lambda_0 \in R$ fixo, chamando de u_{λ_0} o limite de u_λ quando $\lambda \to \lambda_0$,

$$\|r(u_{\lambda_0}, v_1, \lambda_0) - r(u_{\lambda_0}, v_2, \lambda_0)\|_{L^2} \leq \nu_1(\rho)\|v_1 - v_2\|_{L^2}, \tag{4.3.12}$$

para $\|v_1\|_{L^2} \leq \rho$, $\|v_2\|_{L^2} \leq \rho$, onde $\nu_1(\cdot)$ é uma função não decrescente, com $\nu_1(0) = 0$ e $\nu_1(\rho) \to 0$, quando $\rho \to 0$.

Portanto, uma solução de (4.3.11) em uma vizinhança de u_λ é uma função da forma $u_\lambda + v$ com v solução da equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L(\lambda)v + r(u_\lambda, v, \lambda), \tag{4.3.13}$$

onde $L(\lambda)v = -v + g'(\beta(J * u_\lambda) + \beta h)\beta(J * v)$ é a "parte linear" de $F(u_\lambda + v, \lambda)$.

Para λ_0 fixado, temos

$$L(\lambda_0)v = -v + g'(\beta_0(J * u_{\lambda_0}) + \beta_0 h_0)\beta_0(J * v).$$

Note que, usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|L(\lambda)v - L(\lambda_0)v\|_{L^2} &\leq \|[g'(\beta(J * u_\lambda + \beta h)\beta - g'(\beta_0(J * u_{\lambda_0} + \beta_0 h_0)\beta_0](J * v)\|_{L^2} \\
&\leq \|[g'(\beta(J * u_\lambda + \beta h)\beta - g'(\beta_0(J * u_{\lambda_0} + \beta_0 h_0)\beta](J * v)\|_{L^2} \\
&+ \|g'(\beta_0(J * u_{\lambda_0} + \beta_0 h_0)(\beta_0 - \beta)(J * v)\|_{L^2} \\
&\leq \|g'(\beta(J * u_\lambda + \beta h)\beta - g'(\beta_0(J * u_{\lambda_0} + \beta_0 h_0)\beta\|_{L^2}\|(J * v)\|_{L^2} \\
&+ \|g'(\beta_0(J * u_{\lambda_0} + \beta_0 h_0)(\beta_0 - \beta)\|_{L^2}\|(J * v)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

De (H2), existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|L(\lambda)v - L(\lambda_0)v\|_{L^2} &\leq M\|\beta J * u_\lambda + \beta h - \beta_0 J * u_{\lambda_0} - \beta_0 h_0\|_{L^2}\beta\|J * v\|_{L^2} \\
&+ \|g'(\beta_0(J * u_{\lambda_0} + \beta_0 h_0)(\beta_0 - \beta)\|_{L^2}\|(J * v)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

De (H3), existe uma constante $M_1 > 0$ tal que $\|g'(\beta_0(J * u_{\lambda_0} + \beta_0 h_0)\|_{L^2} \leq M_1$. Então usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\|L(\lambda)v - L(\lambda_0)v\|_{L^2} &\leq M[\|J\|_{L^1}\|\beta u_\lambda - \beta_0 u_{\lambda_0}\|_{L^2} + \|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2}]\beta\|J\|_{L^1}\|v\|_{L^2} \\
&+ M_1|\beta - \beta_0|\|J\|_{L^1}\|v\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Sendo $\|J\|_{L^1} = 1$, resulta

$$\begin{aligned}
\|L(\lambda)v - L(\lambda_0)v\|_{L^2} &\leq M[\|\beta u_\lambda - \beta_0 u_{\lambda_0}\|_{L^2} + \|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2}]\beta\|v\|_{L^2} \\
&+ M_1|\beta - \beta_0|\|v\|_{L^2} \\
&= \{M\beta\|\beta u_\lambda - \beta_0 u_{\lambda_0}\|_{L^2} + M\beta\|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2} + M_1|\beta - \beta_0|\}\|v\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Da continuidade dos equilíbrios, fazendo $\lambda \to \lambda_0$, temos

$$\left\{M\beta\|\beta u_\lambda - \beta_0 u_{\lambda_0}\|_{L^2} + M\beta\|\beta h - \beta_0 h_0\|_{L^2} + M_1|\beta - \beta_0|\right\} \to 0.$$

Portanto

$$\|L(\lambda)v - L(\lambda_0)v\|_{L^2} \leq C_1(\lambda)\|v\|_{L^2}, \tag{4.3.14}$$

com $C_1(\lambda) \to 0$, quando $\lambda \to \lambda_0$. Além disso, sendo

$$r(u_\lambda, v, \lambda) = F(u_\lambda + v, \lambda) - F(u_\lambda, \lambda) - \frac{\partial}{\partial u}F(u_\lambda, \lambda)v,$$

temos

$$r(u_\lambda, v, \lambda) = \frac{\partial}{\partial u}F(\overline{v}, \lambda)v - \frac{\partial}{\partial u}F(u_\lambda, \lambda)v,$$

para algum $\overline{v}$ no segmento $\mu(u_\lambda) + (1-\mu)(u_\lambda + v)$, $\mu \in [0,1]$. Em particular

$$r(u_{\lambda_0}, v, \lambda_0) \;=\; \frac{\partial}{\partial u}F(\overline{\overline{v}}, \lambda_0)v - \frac{\partial}{\partial u}F(u_{\lambda_0}, \lambda_0)v,$$

para algum $\overline{\overline{v}}$ no segmento $\mu(u_{\lambda_0}) + (1-\mu)(u_{\lambda_0} + v)$, $\mu \in [0,1]$. Portanto

$$r(u_\lambda, v, \lambda) - r(u_{\lambda_0}, v, \lambda_0) = \left[\frac{\partial}{\partial u}F(\overline{v}, \lambda) - \frac{\partial}{\partial u}F(\overline{\overline{v}}, \lambda_0)\right] v + \left[\frac{\partial}{\partial u}F(u_{\lambda_0}, \lambda_0) - \frac{\partial}{\partial u}F(u_\lambda, \lambda)\right] v.$$

Como $F(\cdot, \lambda)$ é C^1 e $\mu(u_\lambda) + (1-\mu)(u_\lambda + v) \to \mu(u_{\lambda_0}) + (1-\mu)(u_{\lambda_0} + v)$, quando $\lambda \to \lambda_0$, segue que

$$\|r(u_\lambda, v, \lambda) - r(u_{\lambda_0}, v, \lambda_0)\|_{L^2} \leq C_2(\lambda)\|v\|_{L^2} \tag{4.3.15}$$

com $C_2(\lambda) \to 0$, quando $\lambda \to \lambda_0$.

Agora, reescrevendo a equação (4.3.13) na forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L(\lambda_0)v + f(v, \lambda), \tag{4.3.16}$$

onde $f(v,\lambda) = [L(\lambda) - L(\lambda_0)]v + r(u_\lambda, v, \lambda)$ representa a "parte não linear"de (4.3.16), temos que a "parte linear" de (4.3.16) não depende das variações do parâmetro λ.

Usando (4.3.14) e (4.3.15) segue que

$$\|f(v,\lambda) - f(v, \lambda_0)\|_{L^2} \leq C_3(\lambda)\|v\|_{L^2}. \tag{4.3.17}$$

Em vista de (4.3.12) e (4.3.17) segue, dos Teoremas 2.2.1 e 2.2.3, a existência das variedades instáveis locais da origem, $U^\lambda(0)$, para equação (4.3.16) e a continuidade desses conjuntos com relação ao parâmetro λ em λ_0.

Agora, notando que a translação

$$u \mapsto (u - u_\lambda)$$

leva um equilíbrio u_λ de (4.3.11) na origem (que é equilíbrio de (4.3.16)) temos, pelo Corolário 2.2.2, a existência das variedades instáveis locais, dos equilíbrios u_λ, $U^\lambda(u_\lambda)$, para equação (4.3.16). Além disso, sendo a translação acima contínua em relação ao parâmetro lambda, segue do Corolário 2.2.4, a continuidade dos conjuntos $U^\lambda(u_\lambda)$ em relação ao parâmetro λ em λ_0.

4.4 Semicontinuidade inferior dos atratores

Nesta seção, usando a continuidade dos equilíbrios e a continuidade das variedades instáveis locais dos equilíbrios com relação ao parâmetro λ, provamos a semicontinuidade inferior dos atratores com relação a esse parâmetro em $\lambda_0 = (h_0, \beta_0) \in R$.

Lembrando que $E_\lambda \subset \mathcal{A}_\lambda$ e $\mathcal{A}_\lambda$ é compacto, temos o seguinte lema:

Lema 4.4.1 *Assuma as hipóteses (H1), (H2), (H5)-(H6), com $a < \infty$, e (H7). Seja E_λ o conjunto dos equilíbrios de $T_\lambda(t)$. Para $u \in E_\lambda$, seja $W^u_\lambda(u)$ o conjunto instável de u. Então*

$$\mathcal{A}_\lambda = \bigcup_{u \in E_\lambda} W^u_\lambda(u).$$

Demonstração: Do Teorema 3.5.2, temos

$$\mathcal{A}_\lambda = W^u_\lambda(E_\lambda).$$

Existe apenas um número finito, $\{u_1, \cdots u_k\}$, de equilíbrios constantes pois eles são todos hiperbólicos. Para cada equilíbrio não constante $u \in E_\lambda$ temos uma curva de equilíbrios $M_u \subset E_\lambda \subset \mathcal{A}_\lambda$. Do Lema 4.2.1, segue que estas curvas são isoladas. Da compacidade de $\mathcal{A}_\lambda$, existe um número finito de curvas $M_1, \ldots, M_n$. Então

$$\mathcal{A}_\lambda = \left(\bigcup_{j=1}^{k} W^u_\lambda(u_j) \right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} W^u_\lambda(M_i) \right).$$

Do Teorema A.0.5 (Apêndice) segue que

$$W^u_\lambda(M_i) = \bigcup_{v \in M_i} W^u_\lambda(v).$$

Portanto

$$\mathcal{A}_\lambda = \bigcup_{v \in E_\lambda} W^u_\lambda(v).$$

■

Lema 4.4.2 *Suponha as mesmas hipóteses do Lema 4.4.1. Então dado $\varepsilon > 0$, existe um $T > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{A}_{\lambda_0} \backslash E^\varepsilon_{\lambda_0}$*

$$T_{\lambda_0}(-t)u \in E^\varepsilon_{\lambda_0},$$

para algum $t \in [0, T]$, onde $E^\varepsilon_{\lambda_0}$ é a ε-vizinhança de E_{λ_0}. Além disso, quando ε é suficientemente pequeno, para este valor de t

$$T_{\lambda_0}(-t)u \in U^{\lambda_0}(u_0),$$

para algum $u_0 \in E_{\lambda_0}$, onde $U^{\lambda_0}(u_0)$ é a variedade instável local de u_0.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ dado e $u \in \mathcal{A}_{\lambda_0} \backslash E^{\varepsilon}_{\lambda_0}$. Do Lema 4.4.1 segue

$$u \in W^u_{\lambda_0}(\overline{u}) \backslash E^{\varepsilon}_{\lambda_0},$$

para algum $\overline{u} \in E_{\lambda_0}$. Daí existe $t_u = t_u(\varepsilon) < \infty$, tal que

$$T_{\lambda_0}(-t_u)u \in E^{\varepsilon}_{\lambda_0}.$$

Sendo $T_{\lambda_0}(-t_u)$ um operador contínuo, existe $\eta_u > 0$ tal que

$$T_{\lambda_0}(-t_u)B(u, \eta_u) \subset E^{\varepsilon}_{\lambda_0},$$

onde $B(u, \eta_u)$ é a bola de centro em u e raio η_u. Por compacidade, existem $u_1, \cdots, u_n \in \mathcal{A}_{\lambda_0} \backslash E^{\varepsilon}_{\lambda_0}$ tais que

$$\mathcal{A}_{\lambda_0} \backslash E^{\varepsilon}_{\lambda_0} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(u_j, \eta_{u_j}),$$

com $T_{\lambda_0}(-t_{u_j})B(u_j, \eta_{u_j}) \subset E^{\varepsilon}_{\lambda_0}$, para $j = 1, \ldots, n$. Seja $T = \max\{t_{u_1}, \cdots, t_{u_n}\}$, então para $u \in \mathcal{A}_{\lambda_0} \backslash E^{\varepsilon}_{\lambda_0}$ arbitrário

$$T_{\lambda_0}(-t)u \in E^{\varepsilon}_{\lambda_0},$$

para algum $t \in [0, T]$.

Combinando os fatos que $u \in W^u_{\lambda_0}(\overline{u}) \setminus E^{\varepsilon}_{\lambda_0}$ para algum $\overline{u} \in E_{\lambda_0}$ e $T_{\lambda_0}(-t)u \in E^{\varepsilon}_{\lambda_0}$, para concluir que $T_{\lambda_0}(-t)u \in U^{\lambda_0}(\overline{u})$, quando ε é suficientemente pequeno, é suficiente mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $W^u_{\lambda_0}(v) \cap B(v, \delta) \subset U^{\lambda_0}(v)$, para todo $v \in E_{\lambda_0}$. Portanto a conclusão segue diretamente do lema abaixo, com $v = T_{\lambda_0}(-t)u$. ■

Lema 4.4.3 *Nas condições do Lema 4.4.2, existe* $\eta > 0$ *tal que* $W^u_{\lambda_0}(v) \cap B(v, \eta) \subset U^{\lambda_0}(v)$, $\forall$ $v \in E_{\lambda_0}$.

Demonstração: Por mudança de variável, podemos supor que $v = 0$. Então basta mostrar que existe $\eta > 0$ tal que $W^u_{\lambda_0}(0) \cap B(0, \eta) \subset U^{\lambda_0}(0)$. Para isso, sejam $\delta > 0$ e $K > 1$ dados pelo Teorema 2.2.1. Considere $\eta = \delta$ e suponha que $\varphi \in W^u_{\lambda_0}(0) \cap B(0, \eta)$.

Por um lado, como $\varphi \in W^u_{\lambda_0}(0)$, a solução de (4.3.13) que vale φ, quando $t = 0$, $T_{\lambda_0}(t)\varphi$, existe para todo $t \leq 0$ e

$$T_{\lambda_0}(t)\varphi \to 0, \ t \to -\infty.$$

Por outro lado, sendo $\varphi \in B(0, \eta)$, obviamente, com a decomposição do Capítulo 2, temos $\|\varphi_-\| \leq \|\varphi\| < \frac{\delta}{2K}$. Então, pelo Teorema 2.2.1, a equação (4.3.13) tem uma solução, para $t \leq 0$, que está em $U^{\lambda_0}(0)$ e é dada por

$$w_+(\varphi_+, t) + q(w_+(\varphi_+, t)),$$

onde $w_+(\varphi_+, t)$, $q(w_+(\varphi_+, t))$ é única solução de (2.2.37), a qual satisfaz

$$\|w_+(\varphi_+, t) + q(w_+(\varphi_+, t))\| < \delta.$$

Além disso, $w_+(\varphi_+, 0) + q(w_+(\varphi_+, 0)) = \varphi_+ + q(\varphi_+) = \varphi$.

Portanto, por unicidade de solução, segue que

$$T_{\lambda_0}(t)\varphi = w_+(\varphi_+, t) + q(w_+(\varphi_+, t)), \ \forall\, t \leq 0.$$

Então

$$T_{\lambda_0}(t)\varphi \in U^{\lambda_0}(0), \ \forall\, t \leq 0.$$

Em particular, quando $t = 0$, temos $\varphi \in U^{\lambda_0}(0)$. Sendo φ arbitrário, temos

$$W^u_{\lambda_0}(0) \cap B(0, \eta) \subset U^{\lambda_0}(0),$$

concluindo a demonstração. ■

Teorema 4.4.4 *Suponhamos as hipóteses (H1)-(H2), (H5)-(H6), com $a < \infty$, e (H7)-(H8) válidas. Então a família de atratores $\mathcal{A}_\lambda$ é semi-contínua inferiormente com relação ao parâmetro λ em $\lambda_0 \in R$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Do Lema 4.4.2 existe $T > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{A}_{\lambda_0} \backslash E^\varepsilon_{\lambda_0}$, existe $t_u \in [0, T]$ tal que

$$T_{\lambda_0}(-t_u)u \in U^{\lambda_0}(u_0), \tag{4.4.18}$$

para algum $u_0 \in E_{\lambda_0}$. Dado $u \in \mathcal{A}_{\lambda_0} \setminus E^\varepsilon_{\lambda_0}$, seja $\bar{u} = T_{\lambda_0}(-t_u)u$.

Já que $T_{\lambda_0}(t)$ é um operador contínuo, existe $\eta > 0$, escolhido uniformemente para $t \in [0, T]$, tal que

$$\|z - w\|_{L^2} < \eta \Rightarrow \|T_{\lambda_0}(t)z - T_{\lambda_0}(t)w\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.19}$$

Agora, da continuidade das variedades instáveis locais com relação ao parâmetro λ em λ_0, existe $\delta^* > 0$ e um $\bar{\bar{u}}_\lambda \in U^\lambda(u_\lambda)$ tal que $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta^*$ implica

$$\|\bar{\bar{u}}_\lambda - \bar{u}\|_{L^2} < \eta, \tag{4.4.20}$$

onde $U^\lambda(u_\lambda)$ denota a variedade instável local do equilíbrio u_λ de $T_\lambda(t)$. Logo, quando $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta^*$, de (4.4.19) e (4.4.20), temos

$$\|T_{\lambda_0}(t)\bar{\bar{u}}_\lambda - T_{\lambda_0}(t)\bar{u}\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.21}$$

Por outro lado, como $\bar{\bar{u}}_\lambda$ pertence a um conjunto limitado (a saber $B(0, 2a\sqrt{2\tau})$) e $t_u \in [0, T]$, da continuidade do fluxo com relação ao parâmetro λ, existe $\bar{\delta} > 0$ tal que

$$\|\lambda - \lambda_0\|_{L^2} < \bar{\delta} \Rightarrow \|T_\lambda(t_u)\bar{\bar{u}}_\lambda - T_{\lambda_0}(t_u)\bar{\bar{u}}_\lambda\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.22}$$

Seja $\delta = \min\{\bar{\delta}, \delta^*\}$. Então para $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$, temos que (4.4.21) e (4.4.22) valem. Seja $v_\lambda = T_\lambda(t_u)\bar{\bar{u}}_\lambda$. Claramente $T_\lambda(t_u)\bar{\bar{u}}_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$, pois $\bar{\bar{u}}_\lambda \in U^\lambda(u_\lambda) \subset W^u_\lambda(u_\lambda)$. Mostraremos que, para $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$, v_λ satisfaz

$$\|v_\lambda - u\|_{L^2} < \varepsilon.$$

De fato, usando (4.4.21) e (4.4.22), quando $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda - u\|_{L^2} &= \|T_\lambda(t_u)\bar{\bar{u}}_\lambda - T_{\lambda_0}(t_u)\bar{u}\|_{L^2} \\
&\leq \|T_\lambda(t_u)\bar{\bar{u}}_\lambda - T_{\lambda_0}(t_u)\bar{\bar{u}}_\lambda\|_{L^2} + \|T_{\lambda_0}(t_u)\bar{\bar{u}}_\lambda - T_{\lambda_0}(t_u)\bar{u}\|_{L^2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Quando $u \in E^\varepsilon_{\lambda_0} \subset \mathcal{A}_{\lambda_0}$ esta conclusão segue diretamente da continuidade dos equilíbrios. Portanto a semicontinuidade inferior dos atratores é imediata. ■

Um exemplo importante

Consideramos agora o caso particular da equação (3.1.4) em que $g \equiv \tanh$ e $\beta > 1$, então temos a seguinte equação de evolução não local

$$\frac{\partial m(w,t)}{\partial t} = -m(w,t) + \tanh(\beta J * m(w,t) + \beta h), \tag{4.4.23}$$

onde $m(w,t)$ é uma função real sobre $S^1 \times \mathbb{R}_+$, h é uma constante não negativa, β é uma constante real maior que 1, $J \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função não negativa com integral sobre o S^1 igual a 1 e $*$ acima denota o produto convolução em S^1, ou seja,

$$(J * m)(w) = \int_{S^1} J(wz^{-1})m(z)dz. \tag{4.4.24}$$

A equação (4.4.23) é usada no estudo de sistemas de spin com dinâmica de Glauber e interação de Kac onde ela surge como limite contínuo de modelos probalístico, veja [2], [8], [23], [24], [26] e [28]; m é interpretada como a densidade de magnetização e β^{-1} como o produto da temperatura absoluta e a constante de Boltzmann.

Podemos considerar, para este caso, o funcional $\mathbb{F}$: $(L^2(S^1), \|u\|_\infty \leq 1) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathbb{F}(u) = \int_{S^1} [f(u(w)) - f(m_\beta^+)]dw + \frac{1}{4}\int_{S^1}\int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})[u(w) - u(z)]^2 dwdz \tag{4.4.25}$$

onde f é a densidade de energia livre do sistema, veja Figura 4.4.2, dada por

$$f(u) = -\frac{1}{2}u^2 - hu - \beta^{-1}i(u)$$

sendo i a entropia do sistema, veja Figura 4.4.1, dada por

$$i(u) = -\frac{1+u}{2}\ln\left(\frac{1+u}{2}\right) - \frac{1-u}{2}\ln\left(\frac{1-u}{2}\right)$$

com u^2 representando a densidade de energia interna e $-hu$ a densidade de energia do campo externo h e m_β^+ é o mínimo global de f em $[-1,1]$, (veja [25]).

Note que o funcional dado em (4.4.25) está definido em todo espaço de fase. Além disso, m_β^+ é o mínimo global de f em $(-1,1)$, (veja [25]). Daí, os integrandos no funcional (4.4.25)

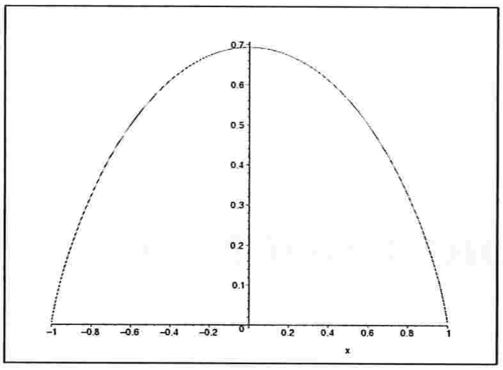

Figura 4.4.1: densidade de entropia.

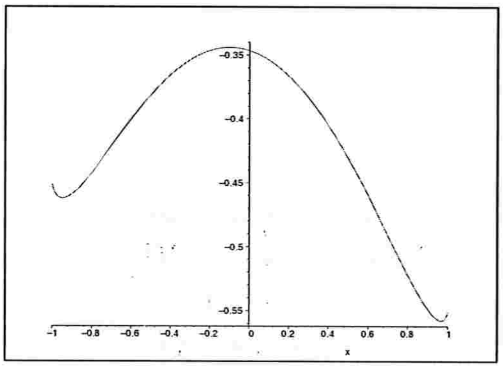

Figura 4.4.2: densidade de energia.

são não negativos, já que J é não negativa e $f(u(w)) - f(m_\beta^+) \geq 0$. Portanto $\mathbb{F}$ é limitado inferiormente.

É fácil mostrar que,

$$\max_{u\in[-1,1]}[i(u)] = \ln(2)$$

e

$$\lim_{u\to\pm 1} i(u) = 0,$$

veja Figura 4.4.1.

Claramente a função tanh satisfaz as hipóteses (H1)-(H6) e (H8). Nesse caso temos $k_1 = k_3 = k_5 = a = 1$ e $k_2 = k_4 = 0$. Portanto temos válidos todos os resultados dos Capítulos 3 e 4, sob estas hipóteses, para a equação (4.4.23). Desde que (H7) também seja satisfeita, temos a semicontinuidade inferior dos atratores para este modelo.

Apêndice A

Convergência das órbitas do conjunto instável (estável) de uma curva de equilíbrios para um único equilíbrio

Considere a equação

$$\dot{x} + Bx = g(x), \tag{A.0.1}$$

onde B é um operador linear contínuo sobre um espaço de Banach X e $g : X \to X$ é uma função de classe C^2. Já que g é diferenciável, podemos escrever (A.0.1) na forma

$$\dot{x} + Ax = f(x), \tag{A.0.2}$$

onde $A = B - g'(x_0)$ e $f(x) = g(x_0) + r(x)$ com r diferenciável e $r(0) = 0$.

Quando x_0 é um equilíbrio de (A.0.2), podemos supor que $x_0 = 0$ e $f(0) = 0$ porque, do contrário, fazendo a mudança de variável

$$x = x_0 + z, \tag{A.0.3}$$

e substituindo (A.0.3) em (A.0.2) resulta

$$\dot{z} + Ax_0 + Az = f(x_0 + z).$$

Mas por (A.0.2) $Ax_0 = f(x_0)$, então

$$\dot{z} + Az = \tilde{f}(z),$$

onde $\tilde{f}(z) = f(x_0 + z) - f(x_0)$ que satisfaz $\tilde{f}(0) = 0$.

No que segue, suporemos que:

(HA) γ é uma curva de classe C^2 constituída por equilíbrios de (A.0.2); o operador A é tal que, o espectro $\sigma(A)$ contém 0 como autovalor simples, enquanto o resto do espectro tem parte real fora de uma vizinhança do zero; a aplicação $f : X \to X$ é não linear de classe C^2 com $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$.

Teorema A.0.5 *Suponha a hipótese (HA) válida. Então existe uma vizinhança U de γ tal que, para qualquer $x_0 \in U$ para o qual a órbita positiva por x_0 é limitada e pré-compacta e o conjunto ω-limite de x_0, $\omega(x_0)$, está contido em γ, existe um único ponto $y(x_0) \in \gamma$ tal que $\omega(x_0) = y(x_0)$. Analogamente, se para qualquer $x_0 \in U$ para o qual a órbita negativa por x_0 é limitada e pré-compacta e o conjunto α-limite de x_0, $\alpha(x_0)$, está contido em γ, existe um único ponto $y(x_0) \in \gamma$ tal que $\alpha(x_0) = y(x_0)$.*

Idéia da demonstração: Daremos uma idéia geométrica da prova do teorema para o caso do α-limite. O caso do ω-limite é tratado de maneira análoga, (veja [17]). Para uma demonstração completa veja [18].

Para qualquer $z \in \gamma$ a hipótese sobre o espectro de A implica que cada variedade central por z é C^1 e de dimensão 1. Além disso, existe uma vizinhança V de z tal que

$$\gamma \cap M_z \cap V = \gamma \cap V,$$

para qualquer variedade central M_z por z, (veja [7]). Portanto γ é localmente um arco C^1.

Escolha a vizinhança U de γ suficientemente pequena para que as variedades estável local $S(z)$ e instável local $U(z)$ existam em U.

Seja $x_0 \in U$ tal que $x(t, x_0)$, $t \leq 0$, é limitada e pré-compacta. Então $\alpha(x_0)$ é não vazio, compacto, conexo e invariante.

Se $\alpha(x_0) \subset \gamma$, defina

$$S_{\alpha(x_0)} = \bigcup_{z \in \alpha(x_0)} S(z), \; U_{\alpha(x_0)} = \bigcup_{z \in \alpha(x_0)} U(z).$$

Não é difícil verificar que $S_{\alpha(x_0)}$ e $U_{\alpha(x_0)}$ são respectivamente a " variedade"estável local e a " variedade"instável local de $\alpha(x_0)$, isto é, qualquer solução que tende para $\alpha(x_0)$ quando $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) deve eventualmente entrar em $S_{\alpha(x_0)}$ ($U_{\alpha(x_0)}$).

Já que a órbita negativa de x_0, $x(t, x_0)$, tende para $\alpha(x_0)$, quando $t \to -\infty$, isso implica que essa órbita intercepta $U(y(x_0))$, para algum $y(x_0) \in \gamma$, em algum instante $t_0 \leq 0$. Sendo $U(y(x_0))$ um conjunto invariante, $x(t, x_0)$ permanece em $U(y(x_0))$ para todo $t \leq t_0$. Portanto $\alpha(x_0) = y(x_0)$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Aragao, G. S.: *Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach.* Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

[2] Barros, S.R.M., Pereira, A.L., Possani, C., Simonis, A.: *Spatial Periodic Equilibria for a Non local Evolution Equation.* Discrete and Continuous Dynamical Systems **9** N. 4, (2003), 937-948.

[3] Ball, J.: *Saddle point analysis for an ordinary differential equation in Banach space and application to buckling of a beam.* Nonlinear Elasticity (R. W. Dickey, ed.) Academic Press, (1973), 937-948.

[4] Bates, P.W., Lu K., Zeng C.: *Existence and Persistence of Invariant Manifolds for Semi-flows in Banach Space.* Memoirs of the American Mathematical Society. Volume 135, N. 645. American Mathematical Society, 1998.

[5] Brezis, H.: *Análisis funcional teoria y aplicaciones.* Alianza, Madrid, 1984.

[6] Bruschi, S.M., Carvalho, A.N., Cholewa, J., Dlotko, T.: *Uniform exponential dichotomy and continuity of attractors for singularly perturbed dampeded wave equation.* Journal of Dynamics and Differential Equation, v. **9** N. 3, (2006), 767-814.

[7] Carr, J.: *Applications of centre Manifold Theory* . Applied Mathematical Sciences. Vol. 35, Springer-Verlag, New York, 1981.

[8] Cassandro, M., Orland, E., Presutti, E.: *Interfaces and typical Gibbs configurations for one-dimensional Kac potentials.* Probb. Theory Related Fields **96**, (1993), 57-96.

[9] Cichon, M.: *On Solutions of Differential Equations in Banach Spaces.* Nonlinear Analysis, **60**, (2005), 651-667.

[10] Daleckii, J.L., Krein, M.G.: *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space.* American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1974.

[11] Dancer, E.N.: *The G-invariant implicit function theorem in infinite dimensions.* Proceedings of the Royal Society of Edimburgh, **92 A**, (1982), 13-30.

[12] Deimling, K.: *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces.* Lecture Notes in Mathematics V. 596, Springer, 1977.

[13] Dunford, N., Schwartz, J.T.: *Linear operators.* Vol. 1, Interscience, New York, 1958.

[14] Folland, G.: *Introduction to partial differential equations.* Pricenton Univ. Press, 1976.

[15] Hale, J.K.: *Ordinary Differential Equations.* Pure and Applied Mathematics, A Series of texts and Monographs. V.XXI. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, 1980.

[16] Hale, J.K.: *Asymptotic Behavior of dissipative Systems.* American Surveys and Monographs, N. 25, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1988.

[17] Hale, J.K., Massatt, P.: *Asymptotic Behavior of gradient-like systems.* Dynamical Systems II (A.R. Bednarek and L. Cesari, eds.), Academic Press, 85-101, 1982.

[18] Hale, J.K., Raugel, G.: *Convergence in gradient-like systems with applications to PDE.* ZAMP, vol. 43, (1992), 63-124.

[19] Henry, D.: *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Lecture Notes in Mathematics N. 840, Springer-Verlag, 1981.

[20] Henry, D.: *Evolution equations in Banach spaces.* Notes in Mathematics - IME, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1981.

[21] Hille, E., Phillips, R.: *Functional analysis and semigroups.* Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. Vol. 31, 1957.

[22] Masi, A., Orland, E., Presutti, E., Triolo, L.: *Glauber evolution with Kac potentials: I. Mesoscopic and macroscopic limits, interface dynamics.* Nonlinearity. **7**, (1994), 633-696.

[23] Masi, E., Gobron, T., Presutti, E.: *Traveling fronts in non local evolution equations.* Arch. Rational Mech. Anal. **132**, (1995), 143-205.

[24] Masi, A., Orland, E., Presutti, E., Triolo, L.: *Uniqueness and global stability of the instanton in non local evolution equations.* Rendiconti di Matematica, Serie VII, **14**, (1994), 693-723.

[25] Masi, E., Oliveri, E., Presutti, E.: *Critical droplet for a non local mean field equation.* MarKov Processes Relat. Fields **6** (2000), 439-471.

[26] Masi, A., Orland, E., Presutti, E., Triolo, L.: *Stability of the interface in a model of phase separation.* Proc. Royal Society of Edinburgh **124A**, (1994), 1013-1022.

[27] Pazy, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences **44**, Springer-Verlag, 1983.

[28] Pereira, A.L.: *Global attractor and nonhomogeneous equilibria for a non local evolution equation in an unbounded domain.* J. Diff. Equations **226** (2006) 352-372.

[29] Rall, L.B.: *Nonlinear Functional Analysis and Applications.* Academic Press, New York-London, 1971.

[30] Sotomayor, J.:*Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[31] Teman, R.: *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer, 1988.