

Bifurcação zip num sistema  
competitivo com difusão

Jocirei Dias Ferreira

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM  
CIÊNCIAS

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira

Co-Orientador: Prof. Dr. Miklós Farkas

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq*

São Paulo, 21 de agosto de 2007

## Bifurcação zip num sistema competitivo com difusão

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Jocirei Dias Ferreira e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 21 de agosto de 2007.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira (Orientador)- MAT-IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Luiz Pereira - MAT-IME-USP
- Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson - ICMC-USP
- Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves - UNICAMP
- Prof. Dr. Doherty Andrade - UEM

Ao Paulo Jocirei e a Gladys,  
pela motivação, paciência e  
alegria que me proporcionaram  
durante a realização deste trabalho.

---

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por tudo o que me concedeu até hoje.

Aos meus orientadores Luiz Augusto F. de Oliveira e Miklós Farkas, pela paciência e sabedoria na orientação do trabalho.

Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística que contribuíram direta ou indiretamente em minha formação, em especial ao Antonio Luiz, Élvia, Elena, Plínio, Sergio Oliva, Clodoaldo, Saulo, Asperti, Stanley, Antônio de Pádua, Daniel.

Aos professores do Dpto de Matemática da UFMT-UNIARAGUAIA, pelo apoio em minha liberação parcial para finalizar meu doutorado, especialmente ao Carlos, Daniel, Adilson, José Pessoa e Márcia.

Ao meu filho Paulo Jocirei e esposa Gladys Elena. Também a nossos bichinhos de estimação, Fred, Rex e Shakira.

Aos meus pais, José Dias e Jacira; aos meus irmão, Jânderson, José Filho e Jaqueline.

A meus familiares, especialmente ao Jonas (Eigue), Firmino (in memorian), Dico, Lourivan, Elias, Irací, Matilde, Magnólia, Jaci, Lourdes, Daniel, Maria de Lourdes, Vicente, Angelina, Buriti, Josias, Alzira, Joaquim (in memorian), Isabel, Maria e Henrique. Também a todos os primos.

Aos meus avós (in memorian), que também me apoiaram nesta caminhada.

Aos familiares colombianos, especialmente a Don Jorge, Adiola (in memorian) e Jaime.

Aos colegas do IME, especialmente ao Severino, Ronaldo, Claus, Gerard, Luz Mery, Djalma, Emivan, Adriana, Márcio, Paulo e David.

Aos colegas da Universidade del Quindío em Colômbia, Dolly, Hernando, Paulo, Dumar e Jaime.

Ao professores do Institute of Mathematics, Budapest University of Technology and Economics, Henry González, Hujter, Tamas, Garay e Sándor que fizeram minha estadia neste país agradável.

Aos professores e funcionários da Escola Estadual de 1º e 2º Graus Governador José Fragelhi de São Felix do Araguaia.

## Resumo

No presente trabalho estudaremos a ocorrência do fenômeno de bifurcação zip e de bifurcação de Andronov-Hopf, num modelo matemático dado por um sistema de equações diferenciais parciais que descreve a dinâmica entre  $n$  predadores competindo por uma presa da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \delta_0 \Delta S + \gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) u_i & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} = \delta_i \Delta u_i + m_i f_i(S) u_i - d_i u_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

com condição de Neumann na fronteira, onde  $f_i(S) = S/(a_i + S)$  e todos os parâmetros são não negativos.

## Abstract

In this work we study the zip and Andronov-Hopf bifurcation phenomena in a model given by a system of partial differential equations describing the dynamics among  $n$  species of predators competing for a single prey of the form

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} &= \delta_0 \Delta S + \gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) u_i \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \delta_i \Delta u_i + m_i f_i(S) u_i - d_i u_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

with Neumann boundary conditions, where  $f_i(S) = S/(a_i + S)$  and all parameters are nonnegative.

---

# Conteúdo

Agradecimentos	iv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Primeiro caso: Bifurcação de Andronov-Hopf . . . . .	2
1.2 Segundo Caso: Bifurcação Zip . . . . .	4
1.3 Resultados principais . . . . .	7
<b>2 Bifurcações de Hopf e Zip em um Sistema de Dimensão <math>n + 1</math></b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Pontos de Equilíbrio . . . . .	10
2.3 Bifurcações de Hopf e Zip . . . . .	13
2.3.1 Bifurcação de Hopf . . . . .	14
2.3.2 Bifurcação Zip . . . . .	23
<b>3 Bifurcação Zip numa Classe ampla de Sistemas Competitivos</b>	<b>29</b>
3.1 Introdução . . . . .	29
3.2 Pontos de Equilíbrio . . . . .	32
3.3 Coexistência e extinção por bifurcação zip . . . . .	34
<b>4 Atrator Global em Sistemas Competitivos</b>	<b>39</b>

---

4.1	Introdução . . . . .	39
4.2	Existência e positividade de soluções . . . . .	40
4.3	O atrator global . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Bifurcação zip em um sistema de reação-difusão</b>	<b>56</b>
5.1	Introdução . . . . .	56
5.2	O problema linearizado . . . . .	58
5.3	O caso $n = 2$ . . . . .	59
<b>A</b>	<b>Bifurcação de Andronov-Hopf</b>	<b>63</b>
A.1	Bifurcação de Hopf no plano . . . . .	63
A.2	Variedades invariantes . . . . .	74
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>75</b>



# Introdução

No presente trabalho estudaremos a ocorrência do fenômeno de **Bifurcação Zip** e também da Bifurcação de **Andronov-Hopf** em um modelo matemático descrito por um sistema de Equações Diferenciais que descreve a dinâmica (ou interação) entre  $n$  espécies de predadores competindo por uma presa.

O fenômeno de Bifurcação Zip foi introduzido por Farkas [8] em 1984 em combinação com um modelo matemático descrevendo a competição de duas espécies de predadores por uma espécie de presa. Tal modelo é representado pelo seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO):

$$\begin{cases} \dot{S} &= \gamma(1 - \frac{S}{K})S - m_1 f_1(S)x_1 - m_2 f_2(S)x_2 \\ \dot{x}_1 &= m_1 f_1(S)x_1 - d_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= m_2 f_2(S)x_2 - d_2 x_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $f_i(S) = \frac{S}{a_i + S}$ ,  $i = 1, 2$ , e todos os parâmetros em (1.1) são não negativos e representam:

- $S$ : quantidade de presa
- $x_i$ : quantidade do predador  $i$
- $\gamma$ : taxa de crescimento intrínseca da presa
- $K$ : capacidade de carga do meio ambiente
- $m_i$ : taxa máxima de natalidade do predador  $i$
- $d_i$ : taxa de mortalidade do predador  $i$

- $a_i$ : constante de semi saturação do predador  $i$ .

O modelo acima originou-se a partir de modelos do tipo chemostat, sendo o chemostat um aparelho de laboratório usado para a produção e estudo de microorganismos. No nosso caso, a presa será um nutriente proporcionado aos dois predadores a uma taxa constante, e tais nutrientes estão se regenerando de acordo a uma equação diferencial logística na ausência da predação.

Sob certas condições, Farkas [8] (ver também [10] ) mostrou que o sistema (1.1) admite Bifurcação de Andronov-Hopf e também o fenômeno chamado de Bifurcação Zip. No que segue, daremos uma breve descrição dos fenômenos que ocorrem no sistema (1.1). Para este propósito, observe que (1.1) admite os seguintes pontos de equilíbrios:

1.  $(S, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$
2.  $(S, x_1, x_2) = (K, 0, 0)$
3. se  $\lambda_1 = \frac{a_1 d_1}{m_1 - d_1} = \lambda_2 = \frac{a_2 d_2}{m_2 - d_2} = \lambda$  temos os pontos do segmento de reta:

$$L = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \ / \ S = \lambda, x_1, x_2 \geq 0, \frac{m_1 x_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 x_2}{a_2 + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) \right\} \quad (1.2)$$

Não é difícil mostrar que  $(S, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$  e  $(S, x_1, x_2) = (K, 0, 0)$  são ambos instáveis. O estudo da estabilidade dos pontos de  $L$  se divide em dois casos que serão descritos a seguir.

## 1.1 Primeiro caso: Bifurcação de Andronov-Hopf

Esse caso ocorre quando  $a_1 = a_2$ , isto é, quando os dois predadores têm a mesma constante de semi-saturação. De acordo com os resultados obtidos por Farkas [8], nesse caso existe uma folheação de  $\mathbb{R}_+^3$  da forma

$$M_c = \{(S, x_1, x_2) : S > 0, x_2 = c x_1^\rho\},$$

onde  $c$  é uma constante abitrária não negativa fixada (Ver Figura (1.1)) e  $\rho = \frac{d_2}{d_1}$ . Cada folha  $M_c$  é invariante por (1.1) e, restrito a essa folha, o sistema fica

$$\begin{cases} \dot{S} &= \gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \frac{(x_1 + \rho c x_1^\rho) m_1 S}{a + S} \\ \dot{x}_1 &= \frac{\beta x_1 (S - \lambda)}{a + S}, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde todos os parâmetros no sistema são positivos e  $a = a_1 = a_2$ . Os equilíbrios de (1.3) são:

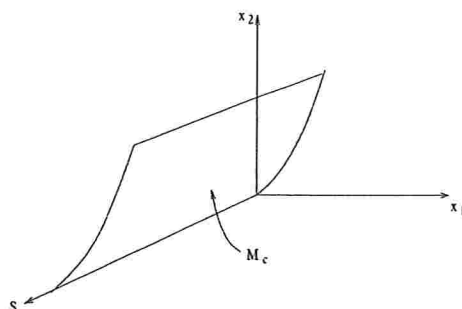


Figura 1.1: Variedade Invariante

1.  $(S, x_1) = (0, 0)$
2.  $(S, x_1) = (K, 0)$
3. O único ponto no qual o segmento de reta  $L$  intercepta o gráfico de  $x_2 = cx_1^\rho$ , onde  $c > 0$  (ver Figura (1.2)). Contudo, agora a equação de  $L$  é (levando em conta que  $a = a_1 = a_2$ ):

$$S = \lambda, \quad x_1 + \rho x_2 = \frac{\gamma(a + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Assim, se o ponto de intersecção é denotado por  $(\lambda, \xi_1, \xi_2)$ , então  $\xi_1$  é a única solução positiva da equação

$$\xi_1 + c\rho\xi_1^\rho = \frac{\gamma(a + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K}, \quad (1.4)$$

e  $\xi_2 = c\xi_1^\rho$ . Um cálculo simples mostra que os pontos  $(S, x_1) = (0, 0)$  e  $(S, x_1) = (K, 0)$  são instáveis.

No estudo da estabilidade do equilíbrio  $(\lambda, \xi_1)$  de (1.3), onde  $\xi_1$  é a única solução positiva de (1.4), a capacidade de carga do meio ambiente  $K$  será tomada como parâmetro de bifurcação. Quando tomamos  $K > \lambda$  a reta  $L$  se move paralelamente cortando a superfície  $x_2 = cx_1^\rho$ , onde  $c > 0$ , em diferentes pontos  $(\xi_1(c, K), \xi_2(c, K))$  (ver Figura 1.2). Consequentemente temos o seguinte teorema.

**Teorema 1.** (Farkas [1984]) *Se  $\lambda < K < a + 2\lambda$ , então o equilíbrio  $(\lambda, \xi_1(c, K))$  do sistema (1.3) é assintoticamente estável com região de atratividade  $\{(S, x_1) : S > 0, x_1 > 0\}$ ; em  $K = a + 2\lambda$  o sistema sofre uma bifurcação de Andronov-Hopf supercrítica.*

Vale observar que o ponto de bifurcação  $K = a + 2\lambda$  é independente de  $c$ , isto é, a bifurcação ocorre no mesmo valor do parâmetro  $K$  em cada superfície da família de variedades invariantes. Assim, temos os seguintes corolários do Teorema 1.

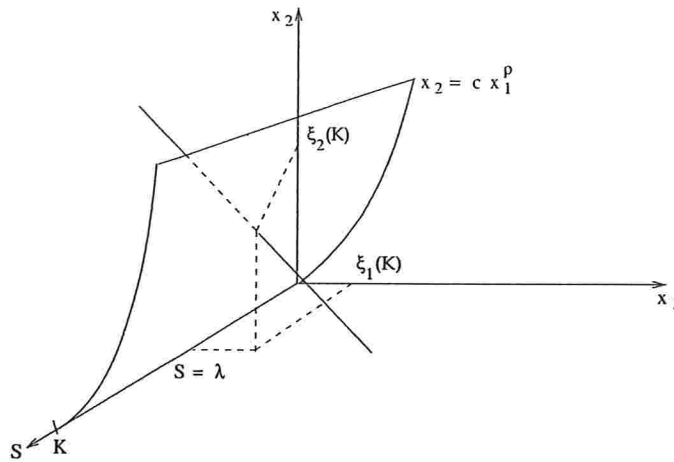


Figura 1.2: Ponto de intersecção

**Corolário 1.** Se  $a = a_1 = a_2$ , então os pontos do segmento  $L$  dado por (1.2) são equilíbrios estáveis no sentido de Liapunov do sistema (1.1) se  $\lambda < K < a + 2\lambda$  e instáveis se  $K > a + 2\lambda$ .

**Corolário 2.** Se  $\lambda < K < a + 2\lambda$ , então o segmento  $L$  dado por (1.2) é um atrator global do sistema (1.1) com relação ao interior do octante positivo; se  $K = a + 2\lambda$  o segmento  $L$  bifurca em um cilindro topológico, i.e., existe  $\delta > 0$  tal que para  $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \delta$ , o sistema (1.1) tem um cilindro topológico invariante  $C$ , o qual é uma reunião de órbitas periódicas, e é um atrator do sistema, i.e., ele tem uma vizinhança tal que todas as trajetórias com condição inicial nesta vizinhança tendem a  $C$  quando  $t \rightarrow \infty$  (ver Figura (1.3))

## 1.2 Segundo Caso: Bifurcação Zip

Esse caso ocorre quando  $a_1 > a_2$ . Sendo  $\beta_i = m_i - d_i$ ,  $i = 1, 2$ , podemos escrever o sistema (1.1) na forma

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma(1 - \frac{S}{K})S - m_1 \frac{S}{a_1 + \lambda} x_1 - m_2 \frac{S}{a_2 + \lambda} x_2 \\ \dot{x}_1 = \beta_1 \frac{S - \lambda}{a_1 + S} x_1 \\ \dot{x}_2 = \beta_2 \frac{S - \lambda}{a_2 + S} x_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

O polinômio característico associado ao sistema linearizado do sistema (1.5) em volta de

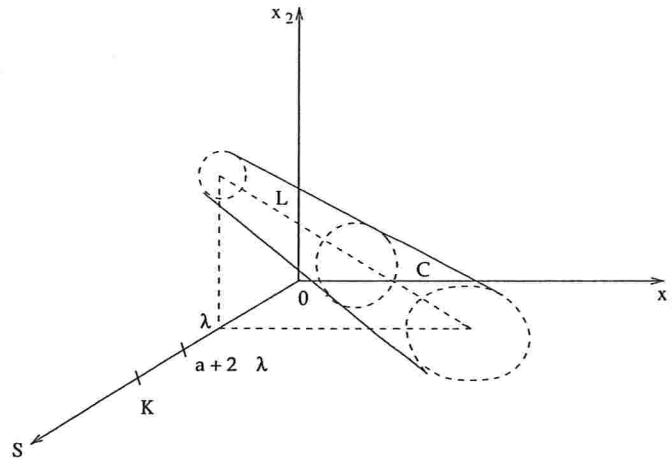


Figura 1.3: Cilindro Topológico

um ponto  $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$  dado por (1.2) é

$$P(\mu) = \mu \left[ \mu^2 + \mu \lambda \left( \frac{\gamma}{K} - \frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) + \lambda \left( \frac{\beta_1 m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{\beta_2 m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) \right]. \quad (1.6)$$

O polinômio entre colchetes será estável, i.e.,

$$\frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} < \frac{\gamma}{K}, \quad (1.7)$$

se  $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$ ; será instável (o que significa inverter a desigualdade em (1.7)) se  $K > a_1 + 2\lambda$ . Consequentemente, cada equilíbrio  $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L$  tem um autovalor nulo e dois autovalores com parte real negativa se  $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$  (resp. positiva se  $K > a_1 + 2\lambda$ ). Isto implica, pelo Teorema da Variedade Invariante (ver [10], Teorema A3.1 e Definição A3.6), que por cada ponto de  $L$  passa uma variedade invariante bidimensional localmente suave, tal que todas as trajetórias nesta superfície tendem a  $(\lambda, \xi_1, \xi_2)$  quando  $t \rightarrow \infty$  e  $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$ ; por outro lado, se  $K > a_1 + 2\lambda$ , então todos os pontos em  $L$  são instáveis. O caso mais interessante ocorre quando  $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$ . Neste caso, fixando  $K$  neste intervalo, existe um ponto  $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K)) \in L$  no qual a desigualdade (1.7) converte-se numa igualdade. Este ponto é determinado resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{m_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} = \frac{\gamma(K - \lambda)}{K} & (L) \\ \frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} = \frac{\gamma}{K} & (L_1) \end{cases} \quad (1.8)$$

ou seja,  $(\lambda, \xi_1, \xi_2)$  é o ponto de intersecção das retas  $L$  e  $L_1$  dadas pelas equações em (1.8). Assim, temos o seguinte teorema devido a Farkas [8].

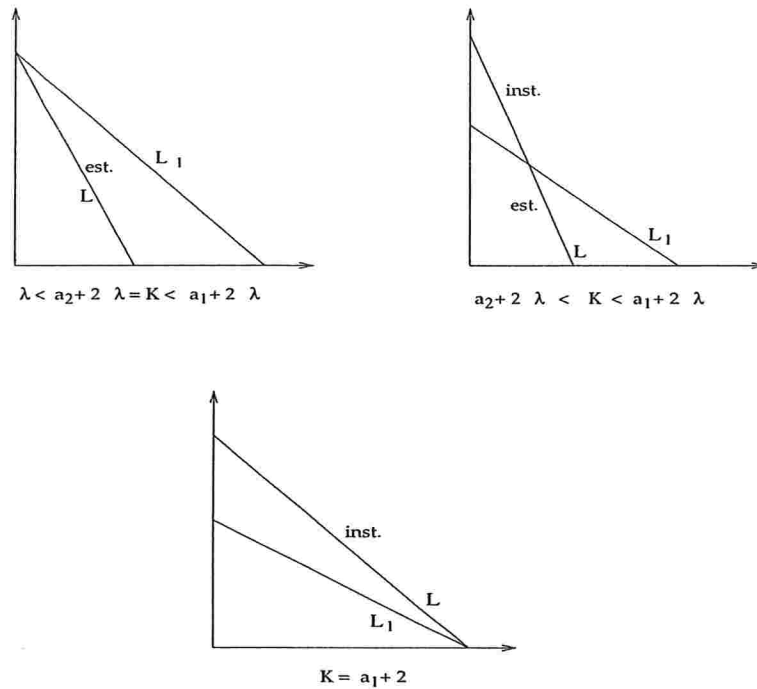


Figura 1.4: Bifurcação Zip

**Teorema 2.** Para qualquer  $K$  satisfazendo  $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$ , o ponto  $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K))$  divide  $L$  em duas partes; os equilíbrios do sistema (1.1) no conjunto

$$L_U = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 < \xi_1(K)\}$$

são instáveis e os equilíbrios no conjunto

$$L_S = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1 > \xi_1(K)\}$$

são estáveis no sentido de Liapunov.

Quando  $K$  varia a partir de  $a_2 + 2\lambda$  até  $a_1 + 2\lambda$ , o ponto  $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K))$  se movimenta continuamente ao longo de  $L$  de um extremo a outro, de tal modo que os pontos que ficam para trás tornam-se instáveis. A este fenômeno Farkas [8] deu o nome de *Bifurcação Zip*. Esboçamos geometricamente o comportamento de  $L$  quando variamos o parâmetro  $K$  na Figura 1.4.

### 1.3 Resultados principais

O propósito principal de nosso trabalho será obter generalizações dos resultados obtidos por Farkas [8], que apresentamos nas duas seções anteriores. No Capítulo 2 estenderemos estes resultados para sistemas de  $n$  predadores competindo por uma presa. Neste caso, a intereção será descrita pelo sistema de EDO em  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{cases} \dot{S} &= \gamma(1 - \frac{S}{K})S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) x_i \\ \dot{x}_i &= (m_i f_i(S) - d_i) x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde  $f_i(S)$ ,  $S$ ,  $x_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  e os parâmetros  $K$ ,  $m_i$ ,  $\gamma$ ,  $d_i$ ,  $a_i$  são como no sistema (1.1).

No Capítulo 3, estenderemos o resultado do fenômeno de *bifurcação zip* obtido para o sistema (1.9), para uma ampla classe de sistemas com  $n$  predadores competindo por uma presa, descrito pelo sistema de EDO em  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{cases} \dot{S} &= \gamma g(S, K) S - \sum_{i=1}^n p(S, a_i) x_i \\ \dot{x}_i &= p(S, a_i) x_i - d_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.10)$$

onde  $S$ ,  $x_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  e os parâmetros  $K$ ,  $\gamma$ ,  $d_i$ ,  $a_i$  são como no sistema (1.1);  $\gamma g(S, K)$  é a taxa de crescimento *per capita* da presa na ausência do predador;  $p(S, a_i)$  é a taxa de natalidade *per capita* do  $n$ -ésimo predador.

No Capítulo 4, introduziremos difusão no sistema (1.9) e mostraremos que o sistema de EDP's admite um atrator global compacto. Tal sistema é representado por

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) &= \delta_0 \Delta S + \gamma(1 - \frac{S}{K})S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) u_i \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) &= \delta_i \Delta u_i + (m_i f_i(S) - d_i) u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (1.11)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 1, 2, 3$ ) é um domínio aberto conexo limitado com fronteira suave  $\partial\Omega$ . Admitiremos ainda que as funções  $S$  e  $u_i$  satisfazem condições de Neumann na fronteira

$$\frac{\partial S}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (1.12)$$

onde  $\nu = \vec{\nu}(x)$  indica a normal unitária exterior em pontos  $x \in \partial\Omega$ .

---

Finalmente, no Capítulo 5, mostraremos que o fenômeno de bifurcação zip é preservado para o sistema (1.11), (1.12), independentemente dos coeficientes de difusão e no caso  $n = 2$ . Por simplicidade, consideraremos o caso  $n = 2$  em (1.11) (1.12).



# Bifurcações de Hopf e Zip em um Sistema de Dimensão $n + 1$

Neste Capítulo, estudaremos a ocorrência da *bifurcação de Andronov-Hopf e também da bifurcação Zip* em um modelo presa-predador concreto de dimensão  $(n + 1)$ , modelando a competição entre  $n$  espécies de predadores por uma espécie de presa. Os resultados obtidos aqui são generalizações dos resultados de Farkas [8].

## 2.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a ocorrência de órbita periódica num sistema de EDO modelando a competição entre  $n$  espécies de predadores por uma espécie de presa. Também estudaremos a ocorrência do fenômeno de bifurcação zip no mesmo sistema. Estas serão generalizações dos resultados obtidos por Farkas [8] para o sistema (1.1). O fenômeno de *bifurcação zip* foi introduzido por Farkas [8] em 1984 para um sistema presa-predador tridimensional. Embora não seja estruturalmente estável, o modelo ilustra o fato intuitivamente claro de que, para pequenos valores da capacidade de carga  $K$ , ambos os predadores podem sobreviver, enquanto que, quando  $K$  assume valores grandes, apenas um deles sobrevive. Recentemente (ver [3], [12]) o fenômeno foi generalizado para um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de dimensão quatro.

Especificamente consideraremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{S} &= \gamma(1 - \frac{S}{K})S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S)x_i \\ \dot{x}_i &= (m_i f_i(S) - d_i)x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $S$  denota a quantidade de presa,  $x_i$  denota a quantidade do predador  $i$  e  $f_i(S) = \frac{S}{a_i + S}$  é a resposta funcional do predador  $i$ . Todos os parâmetros em (2.1) são não negativos e representam

- $\gamma$ : taxa de crescimento intrínseca da presa
- $K$ : capacidade de carga do meio ambiente
- $m_i$ : taxa máxima de natalidade do predador  $i$
- $d_i$ : taxa de mortalidade do predador  $i$
- $a_i$ : constante de semi saturação do predador  $i$ .

Na próxima seção estudaremos os pontos de equilíbrios para este sistema e provaremos sua dissipatividade. Na seção 3 estabeleceremos condições sobre as quais a **bifurcação de Andronov-Hopf** ocorre e finalmente na seção 4 determinaremos condições para a ocorrência da **bifurcação zip** no modelo.

## 2.2 Pontos de Equilíbrio

Primeiramente mostraremos que o sistema (2.1) é dissipativo antes de estudarmos seus pontos de equilíbrio.

**Proposição 1.** *Qualquer solução do sistema (2.1) com condições iniciais  $S^0 > 0$ ,  $x_i^0 > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  é limitada em  $[0, \infty)$ .*

*Demonstração.* Observe primeiramente que qualquer solução de (2.1) cuja condição inicial tem componentes positivas permanece com componentes positivas para  $t$  em seu intervalo maximal de existência. Mostraremos que as soluções existem para todo  $t \geq 0$  e que existe um conjunto limitado  $J$  em  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  que atrai soluções com condições iniciais em  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ . Sejam  $d_0 = \min\{d_1, \dots, d_n\}$

e  $V(S, x_1, \dots, x_n) = S + x_1 + \dots + x_n$ . Se  $z(t) = (S(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$  é uma solução de (2.1), então para  $t$  no intervalo maximal de existência temos

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) = \gamma\left(1 - \frac{S(t)}{K}\right)S(t) - \sum_{i=1}^n d_i x_i(t).$$

Como  $S\left(1 - \frac{S}{K}\right) \leq \frac{K}{4}(1 + d_0)^2 - d_0 S$  para todo  $S \in \mathbb{R}$ , temos

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) \leq -\gamma d_0 S(t) - \sum_{i=1}^n d_i x_i(t) + \frac{K}{4}(1 + d_0)^2.$$

Tomando  $\alpha = \min\{d_0, \gamma d_0\}$ , obtemos

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) \leq -\alpha V(z(t)) + \frac{K}{4}(1 + d_0)^2$$

e portanto

$$V(z(t)) \leq V(z(0))e^{-\alpha t} + \frac{K}{4\alpha}(1 + d_0)^2,$$

para  $t$  pertencente a seu intervalo maximo de existência. Se  $B$  é um conjunto limitado contido em  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ , então existe  $R > 0$  tal que, para  $z(0) \in B$ ,  $V(z(0)) \leq R$ . Seja  $t_0 = \frac{1}{\alpha} \log \frac{4\alpha R}{K(1+d_0)^2}$  e  $z(0) \in B$ . Para  $t \geq t_0$  temos

$$V(z(t)) \leq R \frac{K(1 + d_0)^2}{4\alpha R} + \frac{K}{4\alpha}(1 + d_0)^2 \leq \frac{K(1 + d_0)^2}{2\alpha}.$$

Isto implica que qualquer solução está definida para  $t \geq 0$  e o conjunto compacto

$$J = \left\{ (S, x_1, \dots, x_n) : S \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ e } S + x_1 + \dots + x_n \leq \frac{K(1 + d_0)^2}{2\alpha} \right\}$$

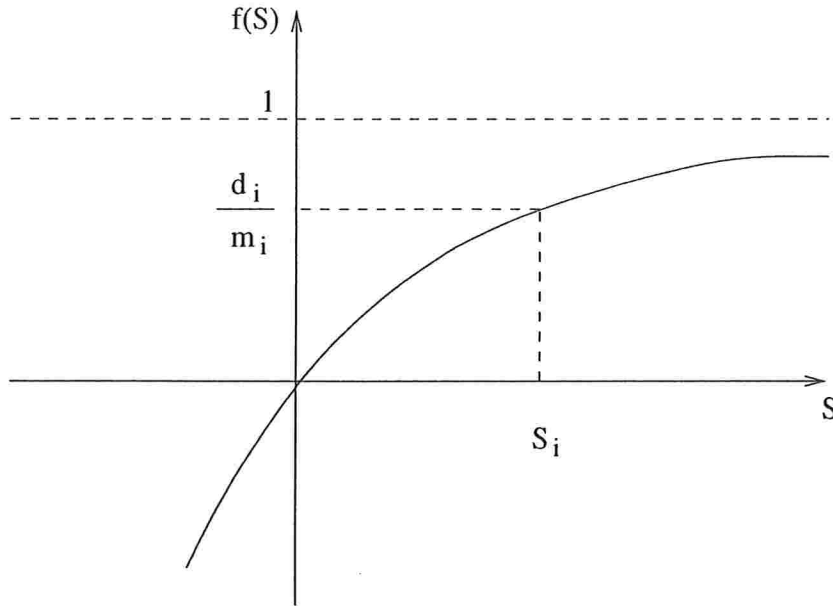
atrai todo conjunto limitado  $B$ . Portanto o sistema é dissipativo e seu atrator global está contido em  $J$ . ■

Agora, discutiremos os pontos de equilíbrio do sistema (2.1), que são as soluções do sistema

$$\begin{aligned} \gamma\left(1 - \frac{S}{K}\right)S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S)x_i &= 0 \\ (m_i f_i(S) - d_i)x_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

As soluções triviais do sistema (2.2) são  $(S, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$  e  $(S, x_1, \dots, x_n) = (K, 0, \dots, 0)$ ; O sistema (2.2) tem soluções não triviais se, e somente se,  $m_i > d_i$  e as soluções  $S$  das equações  $f_i(S) = \frac{d_i}{m_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  coincidem, isto é,

$$\frac{a_1 d_1}{m_1 - d_1} = \frac{a_2 d_2}{m_2 - d_2} = \dots = \frac{a_n d_n}{m_n - d_n}.$$

Figura 2.1: Gráfico de  $f(S)$ 

Indicaremos o valor comum das grandezas  $\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i}$  por  $\lambda$ . De agora em diante, vamos supor  $m_i > d_i$ ; além disso, consideraremos como hipótese essencial para o desenvolvimento do trabalho

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda. \quad (2.3)$$

Com as notações e hipóteses acima, o sistema (2.1) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{S} &= \gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) x_i \\ \dot{x}_i &= \beta_i g_i(S) x_i, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $g_i(S) = \frac{S - \lambda}{a_i + S}$ ,  $\beta_i = m_i - d_i$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Os pontos de equilíbrios do sistema (2.4) são a origem  $(S, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ , o ponto  $(S, x_1, \dots, x_n) = (K, 0, \dots, 0)$  e os pontos do hiperplano de dimensão  $(n - 1)$

$$H = \left\{ (S, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : S = \lambda, \frac{m_1}{a_1 + \lambda} x_1 + \dots + \frac{m_n}{a_n + \lambda} x_n = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) \right\}. \quad (2.5)$$

Para estudar a estabilidade destes pontos de equilíbrio, observe que a matriz Jacobiana  $J(S, x_1, \dots, x_n)$  do sistema (2.4) é

$$\begin{pmatrix} \gamma(1 - \frac{2S}{k}) - \sum_{i=1}^n m_i f'_i(S)x_i & m_1 f_1(S) & m_2 f_2(S) & \dots & m_{n-1} f_{n-1}(S) & m_n f_n(S) \\ g'_1(S)x_1 & g_1(S) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g'_2(S)x_2 & 0 & g_2(S) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g'_{n-1}(S)x_{n-1} & 0 & 0 & \dots & g_{n-1}(S) & 0 \\ g'_n(S)x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & g_n(S) \end{pmatrix}.$$

Assim, é fácil ver que  $(S, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$  é instável, com variedade estável de dimensão  $n$  e instável de dimensão um. Agora,  $(S, x_1, \dots, x_n) = (K, 0, \dots, 0)$  é assintoticamente estável se  $K < \lambda$  e instável se  $K > \lambda$  com variedade estável de dimensão um e variedade instável de dimensão  $n$ . Note que se  $K < \lambda$ , então  $H$  é vazio; se  $K = \lambda$  então  $H = \{0\}$ . É um resultado conhecido (ver [21] e [5]) que

$$K > \lambda \tag{2.6}$$

é uma condição necessária para a sobrevivência de cada predador. Na próxima seção fixaremos nossa atenção no estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrios pertencentes a  $H$ .

## 2.3 Bifurcações de Hopf e Zip

Nesta seção, estudaremos a estabilidade dos pontos em  $H$ . Tal estudo será separado em dois casos; no primeiro deles consideramos  $a = a_1 = a_2 = \dots = a_n$ , isto é, todos os predadores tem a mesma resposta funcional; no segundo caso, consideramos  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , isto é, os predadores tem respostas funcional diferentes.

## 2.3.1 Bifurcação de Hopf

No que segue, consideramos o caso  $a = a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . Assim o sistema (2.4) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{S} &= \gamma(1 - \frac{S}{K})S - \sum_{i=1}^n \frac{m_i S}{a+S} x_i \\ \dot{x}_i &= \beta_i \frac{S-\lambda}{a+S} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.7)$$

Já que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ , temos  $\frac{m_1}{d_1} = \dots = \frac{m_n}{d_n}$ . Introduzindo o parâmetro  $\rho_i = \frac{d_{i+1}}{d_i} = \frac{m_{i+1}}{m_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  obtemos

$$m_{i+1} = m_i \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.8)$$

Também temos  $\rho_i = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}$ . Consequentemente, podemos escrever

$$\begin{cases} \rho_1 &= \frac{\beta_2}{\beta_1} &\Rightarrow \beta_2 = \rho_1 \beta_1 \\ \rho_2 &= \frac{\beta_3}{\beta_2} &\Rightarrow \beta_3 = \rho_2 \beta_2 &\Rightarrow \beta_3 = \rho_1 \rho_2 \beta_1 \\ \vdots & & & \\ \rho_{n-1} &= \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} &\Rightarrow \beta_n = \rho_{n-1} \beta_{n-1} &\Rightarrow \beta_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} \beta_1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Similarmente, obtemos

$$\begin{cases} m_2 = m_1 \rho_1 \\ m_3 = m_2 \rho_2 &\Rightarrow m_3 = \rho_1 \rho_2 m_1 \\ \vdots \\ m_n = m_{n-1} \rho_{n-1} &\Rightarrow m_n = \rho_1 \rho_2 \rho_{n-1} m_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Considerando as expressões em (2.9) e (2.10), o sistema (2.7) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma(1 - \frac{S}{K})S - \frac{m_1 S}{a+S} [x_1 + \sum_{j=1}^n \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{j-1} x_j] \\ \dot{x}_1 = \beta_1 \frac{S-\lambda}{a+S} x_1 \\ \dot{x}_2 = \rho_1 \beta_1 \frac{S-\lambda}{a+S} x_2 \\ \dot{x}_3 = \rho_1 \rho_2 \beta_1 \frac{S-\lambda}{a+S} x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} \beta_1 \frac{S-\lambda}{a+S} x_n \end{cases} \quad (2.11)$$

Dividindo a terceira equação em (2.11) pela segunda, a quarta pela terceira e assim sucessivamente, até dividir a  $n$ -ésima equação pela  $(n-1)$ -ésima, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dx_1} = \rho_1 \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{dx_3}{dx_2} = \rho_2 \frac{x_3}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dx_{n-1}} = \rho_{n-1} \frac{x_n}{x_{n-1}} \end{cases} \quad (2.12)$$

Integrando cada equação em (2.12) obtemos facilmente as seguintes integrais primeiras para o sistema (2.11)

$$V_1(S, x_1, \dots, x_n) = \frac{x_2}{x_1^{\rho_1}}, \quad V_2(S, x_1, \dots, x_n) = \frac{x_3}{x_2^{\rho_2}}, \dots, \quad V_{n-1}(S, x_1, \dots, x_n) = \frac{x_n}{x_{n-1}^{\rho_{n-1}}}.$$

Consequentemente, para cada valor de  $c_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$\frac{x_2}{x_1^{\rho_1}} = c_1, \quad \frac{x_3}{x_2^{\rho_2}} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{x_n}{x_{n-1}^{\rho_{n-1}}} = c_{n-1},$$

são variedades invariantes de dimensão  $(n-1)$  em  $\mathbb{R}_+^n$  com coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Agora, para qualquer  $c = (c_1, \dots, c_{n-1})$  com  $c_i > 0$  para  $i = 1, \dots, n-1$ , a intersecção destas variedades é uma curva  $C$  em  $\mathbb{R}^n$ , a qual é invariante para o sistema (2.11). Um cálculo direto fornece as equações paramétricas de  $C$ , a saber

$$\begin{aligned} x_2 &= c_1 x_1^{\rho_1} \\ x_3 &= c_2 x_2^{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad x_3 = c_2 c_1^{\rho_2} x_1^{\rho_1 \rho_2} \\ x_4 &= c_3 x_3^{\rho_3} \quad \Rightarrow \quad x_4 = c_3 c_2^{\rho_3} c_1^{\rho_2 \rho_3} x_1^{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \\ &\vdots \\ x_n &= c_{n-1} x_{n-1}^{\rho_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad x_n = c_{n-1} c_{n-2}^{\rho_{n-1}} c_{n-3}^{\rho_{n-1} \rho_{n-2}} \dots c_1^{\rho_{n-1} \rho_{n-2} \dots \rho_2 \rho_1} x_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

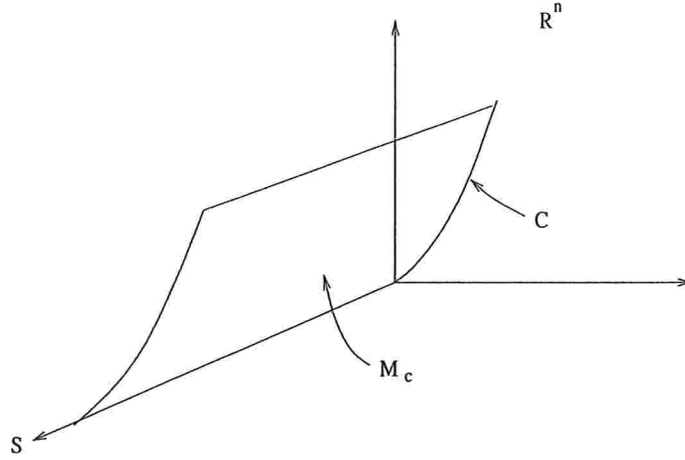
Para qualquer  $c = (c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ , denotemos por  $M_c$  a variedade invariante

$$M_c = \{(S, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : S \geq 0 \text{ e } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ satisfaz (2.13)}\}. \quad (2.14)$$

então, a família  $\{M_c : c \in \mathbb{R}_+^{n-1}\}$  é uma folheação bidimensional do primeiro octante de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e cada folha é a imagem de um mergulho  $h_c : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dado por

$$h_c(S, x_1) = (S, x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1)). \quad (2.15)$$

Para  $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$  fixado, com  $c_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , estudaremos a restrição do sistema (2.11) à variedade  $M_c$ , parametrizada por  $S$  e  $x_1$ . Levando em conta (2.13), esta

Figura 2.2: A Variedade  $M_c$ 

restrição é dada por

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma\left(1 - \frac{S}{K}\right)S - \left(\frac{x_1 + \rho_1 c_1 x_1^{\rho_1} + \rho_1 \rho_2 c_2 c_1^{\rho_2} x_1^{\rho_1 \rho_2} + \dots + \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} c_{n-1} c_{n-2}^{\rho_{n-1}} \dots c_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}} x_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}} m_1 S}{a+S}\right) \\ x_1 = \beta_1 \frac{S-\lambda}{a+S} x_1 \end{cases}$$

A introdução dos novos parâmetros  $\eta_1 = \rho_1$ ;  $\eta_2 = \rho_1 \rho_2$ ;  $\dots$ ;  $\eta_{n-1} = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}$  e  $\alpha_1 = c_1 \rho_1$ ;  $\alpha_2 = c_2 c_1^{\rho_2} \rho_1 \rho_2$ ;  $\alpha_3 = c_3 c_2^{\rho_3} c_1^{\rho_2 \rho_3} \rho_1 \rho_2 \rho_3$ ;  $\dots$ ;  $\alpha_{n-1} = c_{n-1} c_{n-2}^{\rho_{n-1}} \dots c_1^{\rho_2 \rho_3 \dots \rho_{n-1}} \rho_1 \rho_2 \rho_{n-1}$

transforma o sistema anterior no sistema

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma\left(1 - \frac{S}{K}\right)S - \frac{x_1 + \alpha_1 x_1^{\eta_1} + \alpha_2 x_1^{\eta_2} + \dots + \alpha_{n-1} x_1^{\eta_{n-1}}}{a+S} m_1 S \\ x_1 = \beta_1 \frac{S-\lambda}{a+S} x_1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Os pontos de equilíbrio de (2.16) são  $(S, x_1) = (0, 0)$ ,  $(S, x_1) = (K, 0)$  e o ponto  $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$ , onde  $x_1 = \xi_1$  é a única solução positiva da equação

$$\begin{aligned} x_1 + \rho_1 c_1 x_1^{\rho_1} + \rho_1 \rho_2 c_2 c_1^{\rho_2} x_1^{\rho_1 \rho_2} + \dots + \\ \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} c_{n-1} c_{n-2}^{\rho_{n-1}} \dots c_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}} x_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}} = \frac{\gamma(a+\lambda)(K-\lambda)}{m_1 K}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

ou, equivalentemente,



$$x_1 + \alpha_1 x_1^{\eta_1} + \alpha_2 x_1^{\eta_2} + \dots + \alpha_{n-1} x_1^{\eta_{n-1}} = \frac{\gamma(a+\lambda)(K-\lambda)}{m_1 K}. \quad (2.18)$$

Geometricamente, o ponto de equilíbrio não trivial de (2.16) é descrito como segue:  $\xi_1$  é a segunda componente do ponto  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$  obtido como a interseção transversal das variedades  $H$  e  $M_c$ . As outras componentes são dadas por

$$\begin{cases} \xi_2 = c_1 \xi_1^{\rho_1} \\ \xi_3 = c_2 c_1^{\rho_2} \xi_1^{\rho_1 \rho_2} \\ \xi_4 = c_3 c_2^{\rho_3} c_1^{\rho_2 \rho_3} \xi_1^{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \\ \vdots \\ \xi_n = c_{n-1} c_{n-2}^{\rho_{n-1}} c_{n-3}^{\rho_{n-1} \rho_{n-2}} \dots c_1^{\rho_{n-1} \rho_{n-2} \dots \rho_2 \rho_1} \xi_1^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}}. \end{cases} \quad (2.19)$$

A matriz Jacobiana do sistema (2.16) é

$$J_1(S, x_1) = \begin{pmatrix} \gamma \left(1 - \frac{2S}{k}\right) + \frac{x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^{\eta_i}}{(a+S)^2} m_1 a & 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i x_i^{\eta_i - 1} m_1 S \\ \frac{a+\lambda}{(a+S)^2} \beta_1 x_1 & \frac{S-\lambda}{a+S} \beta_1 \end{pmatrix}$$

Já que

$$J_1(0, 0) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1 \lambda}{a} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_1(K, 0) = \begin{pmatrix} -\gamma & -\frac{m_1 K}{a+K} \\ 0 & \frac{(K-\lambda)\beta_1}{a+K} \end{pmatrix},$$

ambos  $(S, x_1) = (0, 0)$  e  $(S, x_1) = (K, 0)$  são pontos de sela se  $K > \lambda$ .

Para estudar a estabilidade do ponto  $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$ , onde  $\xi_1$  é a única solução positiva da equação (2.18), consideraremos  $K$  como um parâmetro de bifurcação. Em seguida, mostraremos que (2.16) admite uma bifurcação de Andronov-Hopf no ponto  $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$ . O seguinte teorema se refere a isto.

**Teorema 2.3.1.** *Se  $\lambda < K < a + 2\lambda$ , então o equilíbrio  $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$  do sistema (2.16) é assintoticamente estável dentro do quadrante positivo. Além disso, para  $\lambda < K < a + 2\lambda$ , (2.16) não tem órbitas fechadas dentro do quadrante positivo. Finalmente, em  $K = a + 2\lambda$ , o sistema admite uma bifurcação de Andronov-Hopf, isto é, existe  $\delta > 0$  tal que para  $K \in (a + 2\lambda, a + 2\lambda + \delta)$ , o sistema (2.16) tem um ciclo limite orbitalmente assintoticamente estável ao redor de  $(\lambda, \xi_1)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, translade  $(\lambda, \xi_1)$  para a origem fazendo a mudança de coordenadas

$$y_1 = S - \lambda \quad y_2 = x_1 - \xi_1, \quad (2.20)$$

onde  $\xi_1$  satisfaz (2.18). Deste modo, o sistema (2.16) se torna

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \gamma(y_1 + \lambda)\left(1 - \frac{y_1 + \lambda}{K}\right) - \\ \quad - \frac{y_2 + \xi_1 + \alpha_1(y_2 + \xi_1)^{\eta_1} + \alpha_2(y_2 + \xi_1)^{\eta_2} + \dots + \alpha_{n-1}(y_2 + \xi_1)^{\eta_{n-1}}}{a + y_1 + \lambda} m_1(y_1 + \lambda) \\ \dot{y}_2 = \beta_1 \frac{y_1}{a + y_1 + \lambda} (y_2 + \xi_1) \end{cases} \quad (2.21)$$

A matriz Jacobiana do sistema anterior é

$$J_2(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{pmatrix},$$

onde,

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= \gamma(y_1 + \lambda)\left(1 - \frac{y_1 + \lambda}{K}\right) + \\ &\quad - \frac{y_2 + \xi_1 + \alpha_1(y_2 + \xi_1)^{\eta_1} + \alpha_2(y_2 + \xi_1)^{\eta_2} + \dots + \alpha_{n-1}(y_2 + \xi_1)^{\eta_{n-1}}}{a + y_1 + \lambda} m_1(y_1 + \lambda) \\ f_2(y_1, y_2) &= \beta_1 \frac{y_1}{a + y_1 + \lambda} (y_2 + \xi_1). \end{aligned}$$

Já que  $\xi_1$  satisfaz (2.18), obtemos

$$J_2(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma\lambda(K - 2\lambda - a)}{K(a + \lambda)} & \frac{(1 + \alpha_1 \eta_1 \xi_1^{\eta_1 - 1} + \dots + \alpha_{n-1} \eta_{n-1} \xi_1^{\eta_{n-1} - 1}) \lambda m_1}{a + \lambda} \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a + \lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente, o polinômio característico associado a  $J_2(0, 0)$  é

$$P(\mu) = \mu^2 + \frac{\gamma\lambda(a + 2\lambda - K)}{K(a + \lambda)} \mu + \frac{\beta_1 \xi_1 (1 + \alpha_1 \eta_1 \xi_1^{\eta_1 - 1} + \dots + \alpha_{n-1} \eta_{n-1} \xi_1^{\eta_{n-1} - 1}) \lambda m_1}{(a + \lambda)^2},$$

donde concluímos que  $(y_1, y_2) = (0, 0)$  é assintoticamente estável se  $\lambda < K < a + 2\lambda$  e instável se  $K > a + 2\lambda$ .

Para mostrarmos que o sistema (2.21), e conseqüentemente o sistema (2.16), não tem órbitas fechadas no quadrante positivo para  $\lambda < K < a + 2\lambda$ , aplicaremos o Critério de Dulac (veja [10]). Considere a função  $h(S, x_1) = \frac{x_1^q (a + S)}{S}$ , onde  $q$  é uma constante a ser escolhida apropriadamente. Um cálculo direto mostra que

$$\left( \frac{\partial f(S, x_1)}{\partial S} + \frac{\partial g(S, x_1)}{\partial x_1} \right) h(S, x_1) = \frac{\gamma K - 2\gamma S - \gamma a + \frac{\beta_1 K(q+1)(S-\lambda)}{S}}{K} x_1^q,$$

onde  $f(S, x_1) = \gamma(1 - \frac{S}{K})S - \frac{x_1 + \alpha_1 x_1^{\eta_1} + \alpha_2 x_1^{\eta_2} + \dots + \alpha_{n-1} x_1^{\eta_{n-1}}}{a+S} m_1 S$  e  $g(y_1, y_2) = \beta_1 \frac{S-\lambda}{a+S} x_1$ .

Tomando  $q$  tal que  $2\gamma\lambda = \beta_1 K(q+1)$  obtemos

$$\left( \frac{\partial f(S, x_1)}{\partial S} + \frac{\partial g(S, x_1)}{\partial x_1} \right) h(S, x_1) = \frac{K - a - 2\lambda - \frac{2(S-\lambda)^2}{S}}{K} \gamma x_1^q.$$

Consequentemente, para  $S > \lambda$  e  $K < a + 2\lambda$ , pelo Critério de Dulac, o sistema (2.21) não admite órbitas periódicas no interior do primeiro quadrante de  $\mathbb{R}^2$ . Assim, se  $K < a + 2\lambda$ , o equilíbrio  $(S, x_1) = (\lambda, \xi_1)$  será globalmente assintoticamente estável para soluções com condições iniciais no interior do quadrante positivo.

Para completar a prova, precisamos verificar as hipóteses do Teorema de Andronov-Hopf para mostrar que em  $K = K_0 = a + 2\lambda$ , o sistema (2.21), e consequentemente o sistema (2.16), admite uma bifurcação de Hopf. Primeiramente observe que em  $K = K_0$ , temos  $\mu_{1,2}(K_0) = \pm i\omega_0$ , onde

$$\omega_0 = \frac{[(\xi_1 + \alpha_1 \eta_1 \xi_1^{\eta_1} + \dots + \alpha_{n-1} \eta_{n-1} \xi_1^{\eta_{n-1}}) \beta_1 \lambda m_1]^{\frac{1}{2}}}{a + \lambda} > 0. \quad (2.22)$$

Portanto, existe  $\delta > 0$  tal que, para  $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \delta$ , os autovalores  $\mu_{1,2}(K)$  são complexos conjugados. Além disso,

$$\frac{d}{dK} \operatorname{Re} \mu(K_0) = \frac{\gamma}{2(a + 2\lambda)(a + \lambda)} > 0. \quad (2.23)$$

A seguir, calcularemos o primeiro coeficiente de Liapunov para determinar a supercriticidade da órbita periódica gerada pela bifurcação de Hopf. Para isto, devemos usar a técnica dada em [28] (ver também [13]), a qual é descrita também no Apêndice A.

Um cálculo simples mostra que, em  $K = K_0$ , os autovetores de  $J_2(0, 0)$  associados a  $\mu_{1,2}(K_0)$  são  $q_{1,2} = (\pm i\Delta, 1)$ , onde  $\Delta = \frac{\omega_0(a+\lambda)}{\beta_1 \xi_1}$ . Os autovetores da matriz transposta  $J_2(0, 0)^T$  associados a  $\mu_1(K_0)$  é  $p_1 = (-\frac{i}{\Delta}, 1)$  e o associado a  $\mu_2(K_0)$  é  $p_2 = (\frac{i}{\Delta}, 1)$ .

Expandindo o lado direito do sistema (2.21) em série de potências ao redor de  $(y_1, y_2) = (0, 0)$  em  $K = K_0$  obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{y}_1 = -\frac{\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1}\right) m_1 \lambda}{a+\lambda} y_2 - \frac{\gamma \lambda}{a+\lambda} y_1^2 - \frac{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1}}{(a+\lambda)^2} y_1 y_2 - \\
\frac{m_1 \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i-1}}{(a+\lambda)^3} y_2^2 - \frac{\gamma a}{K} y_1^3 + \frac{a+(a+\lambda) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1}}{(a+\lambda)^3} y_1^2 y_2 - \\
\frac{a m_1 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i-1}}{2((a+\lambda)^2)} y_1 y_2^2 - \frac{m_1 \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) (\eta_i - 2) \xi_1^{\eta_i-2}}{6(a+\lambda)} y_2^3 + O(|y|^4) \\
\dot{y}_2 = \frac{\beta_1 \xi_1}{a+\lambda} y_1 - \frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^2} y_1^2 + \frac{\beta_1}{a+\lambda} y_1 y_2 + \frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^3} y_1^3 - \frac{\beta_1}{(a+\lambda)^2} y_1^2 y_2 + O(|y|^4)
\end{array} \right. \quad (2.24)$$

Denote os coeficientes do campo vetorial associado a  $\dot{y}_1$  por

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0; & a_1 &= 0; & a_2 &= -\frac{\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1}\right) m_1 \lambda}{a+\lambda}; \\
a_3 &= -\frac{\gamma \lambda}{K(a+\lambda)}; & a_4 &= -\frac{m_1 a \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1}\right)}{(a+\lambda)^2}; \\
a_5 &= -\frac{m_1 \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i-1}}{2(a+\lambda)}; & a_6 &= -\frac{\gamma a}{K(a+\lambda)^2}; \\
a_7 &= \frac{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i-1}}{(a+\lambda)^3}; & a_8 &= -\frac{a m_1 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i-1}}{2(a+\lambda)^2}; \\
a_9 &= -\frac{m_1 \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) (\eta_i - 2) \xi_1^{\eta_i-2}}{6(a+\lambda)}
\end{aligned}$$

e os coeficientes do campo vetorial associados a  $\dot{y}_2$  por

$$b_0 = 0; \quad b_1 = \frac{\beta_1 \xi_1}{a+\lambda}; \quad b_2 = 0;$$

$$b_3 = -\frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^2}; \quad b_4 = \frac{\beta_1}{a+\lambda}; \quad b_5 = 0;$$

$$b_6 = \frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^3}; \quad b_7 = -\frac{\beta_1}{(a+\lambda)^2}; \quad b_8 = 0; \quad b_9 = 0.$$

Fazendo  $Y = (y_1, y_2)$  e  $F(Y, 0) = (F_1(Y, 0), F_2(Y, 0))$ , podemos escrever o sistema (2.24) como  $\dot{Y} = J_3(0, 0)Y + F(Y, 0)$ , onde

$$F_1(Y, 0) = a_3 y_1^2 + a_4 y_1 y_2 + a_5 y_2^2 + a_6 y_1^3 + a_7 y_1^2 y_2 + a_8 y_1 y_2^2 + a_9 y_2^3 + O(|Y|^4),$$

$$F_2(Y, 0) = b_3 y_1^2 + b_4 y_1 y_2 + b_5 y_2^2 + b_6 y_1^3 + b_7 y_1^2 y_2 + b_8 y_1 y_2^2 + b_9 y_2^3 + O(|Y|^4)$$

$$J_3(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou, equivalentemente,  $F(Y, 0) = \frac{1}{2}B(Y, Y) + \frac{1}{6}C(Y, Y, Y) + O(|Y|^4)$ , onde

$$B(Y, Y) = (2a_3 y_1^2 + 2a_4 y_1 y_2 + 2a_5 y_2^2, 2b_3 y_1^2 + 2b_4 y_1 y_2)$$

e

$$C(Y, Y, Y) = (6a_6 y_1^3 + 6a_7 y_1^2 y_2 + 6a_8 y_1 y_2^2 + 6a_9 y_2^3, 6b_1 y_1^3 + 6b_7 y_1^2 y_2).$$

É um resultado bem conhecido (veja Apêndice A) que o *primeiro coeficiente de Liapunov*  $l_1(0)$  de (2.24) é dado por

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}(i g_{20} g_{11} + \omega_0 g_{21}),$$

onde  $g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle$ ,  $g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle$ ,  $g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno em  $\mathbb{C}$ .

Um cálculo simples mostra que

- $B(q, q) = (-2a_3 \Delta^2 + 2i\Delta a_4 + 2a_5, -2\Delta^2 b_3 + 2i\Delta b_4)$
- $B(q, \bar{q}) = (2a_3 \Delta^2 + 2a_5, 2\Delta^2 b_3)$
- $C(q, q, \bar{q}) = (6a_6 i \Delta^3 + 2a_7 \Delta^2 + 2a_8 i \Delta + 6a_9, 6b_1 i \Delta^3 + 2b_7 i \Delta).$

Consequentemente,

- $g_{20}(0) = ia_3 \Delta + a_4 - i \frac{2a_5}{\Delta} - b_3 \Delta^2 + ib_4 \Delta$

- $ig_{20}(0) = -a_3\Delta + ia_4 + \frac{a_5}{\Delta} - ib_3\Delta^2 - b_4\Delta$
- $g_{11}(0) = -ia_3\Delta - \frac{ia_5}{\Delta} + b_3\Delta^2$
- $ig_{20}(0)g_{11}(0) = ia_3^2\Delta^2 + a_3a_4\Delta - ia_3a_5 - a_3b_3\Delta^3 + ia_3b_4\Delta^2 + ia_3a_5 + \frac{a_4a_5}{\Delta} - a_5b_3\Delta - \frac{ia_5^2}{\Delta^2} + ia_5b_4 - a_3b_3\Delta^3 + ia_4b_3\Delta^2 + a_5b_3\Delta - ib_3^2\Delta^3 - b_3b_4\Delta^3$
- $\omega_0g_{21}(0) = 3\omega_0a_6\Delta^2 - i\omega_0a_7\Delta + \omega_0a_8 - 3i\omega_0a_9 + 3i\omega_0b_1\Delta^3 + \omega_0b_7\Delta^2$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
l_1(0) &= \frac{1}{2\omega_0^2} \left( a_3a_4\Delta - a_3b_3\Delta^3 + \frac{a_4a_5}{\Delta} - a_5b_3\Delta - a_3b_3\Delta^3 + a_5b_3\Delta - b_3b_4\Delta^3 \right. \\
&\quad \left. + 3\omega_0a_6\Delta^2 + \omega_0a_8 + \omega_0b_7\Delta^2 \right) \\
&= \frac{1}{2\omega_0^2} \left( a_3a_4\Delta - 2a_3b_3\Delta^3 + \frac{a_4a_5}{\Delta} - b_3b_4\Delta^3 + 3\omega_0a_6\Delta^2 + \omega_0a_8 + \omega_0b_7\Delta^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Levando em conta as expressões para  $a_i$ ,  $b_i$ , e  $\Delta$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ), temos

$$-2\Delta^3 a_3 b_3 = -2 \frac{\omega_0(a+\lambda)^3}{\beta_1^3 \xi_1^3} \frac{\gamma\lambda}{K(a+\lambda)} \frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^2} = -2 \frac{\omega_0^3 \gamma \lambda}{K \beta_1^2 \xi_1^2}$$

e

$$\omega_0 b_7 \Delta^2 - b_3 b_4 \Delta^3 = -\frac{\omega_0^3(a+\lambda)^2}{\beta_1^2 \xi_1^2} \frac{\beta_1}{(a+\lambda)^2} + \frac{\omega_0^3(a+\lambda)^3}{\beta_1^3 \xi_1^3} \frac{\beta_1}{a+\lambda} \frac{\beta_1 \xi_1}{(a+\lambda)^2} = 0.$$

De (2.22), temos

$$\frac{\omega_0^2(a+\lambda)^2}{\beta_1} = m_1 \lambda (\xi_1 + \alpha_1 \eta_1 \xi_1^{\eta_1} + \dots + \alpha_{n-1} \eta_{n-1} \xi_1^{\eta_{n-1}})$$

e isto nos conduz a

$$\frac{a_4 a_5}{\Delta} = \frac{\beta_1}{\omega_0(a+\lambda)} \frac{m_1 a \left( \xi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i} \right)}{(a+\lambda)^2} \frac{m_1 \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i - 1}}{2(a+\lambda)} = \frac{m_1 a \omega_0}{2(a+\lambda)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i (\eta_i - 1) \xi_1^{\eta_i - 1}$$

e portanto,  $\frac{a_4 a_5}{\Delta} + \omega_0 a_8 = 0$ . Além disso,

$$\begin{aligned}
\Delta a_3 a_4 &= \frac{\omega_0 \gamma a}{K \beta_1 \xi_1^2 (a+\lambda)^2} \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i - 1} \right) m_1 \lambda \\
&= \frac{\omega_0 \gamma a}{K \beta_1 \xi_1^2 (a+\lambda)^2} \left( \xi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \eta_i \xi_1^{\eta_i} \right) m_1 \lambda
\end{aligned}$$

$$= \frac{\omega_0 \gamma a}{K \beta_1 \xi_1^2 (a+\lambda)^2} \frac{\omega_0^2 ((a+\lambda)^2)}{K \beta_1} = \frac{\omega_0^3 \gamma a}{K \beta_1^2 \xi_1^2}.$$

Da equação anterior,  $\Delta a_3 a_4 + 3\omega_0 \Delta^2 a_6 = -2 \frac{\omega_0^3 \gamma a}{K \beta_1^2 \xi_1^2}$ . Logo,

$$l_1(0) = -2 \frac{\omega_0 \gamma a}{K \beta_1^2 \xi_1^2} < 0.$$

Portanto, o sistema (2.21), e consequentemente o sistema (2.16), admite uma bifurcação de Hopf supercrítica, a órbita gerada pela bifurcação existe para  $a + 2\lambda < K < a + 2\lambda + \delta$  ( $\delta > 0$ ) e é orbitalmente assintoticamente estável. ■

### 2.3.2 Bifurcação Zip

Nesta seção, consideraremos o caso  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , lembrando que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ . Denote por  $J = J(S, x_1, \dots, x_n)$  a matriz jacobiana do sistema (2.4), isto é,

$$J = \begin{pmatrix} \gamma(1 - \frac{S}{K}) - \frac{\gamma S}{K} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i a_i}{(a_i + S)^2} x_i & -\frac{m_1 S}{a_1 + S} & -\frac{m_2 S}{a_2 + S} & \dots & -\frac{m_{n-1} S}{a_{n-1} + S} & -\frac{m_n S}{a_n + S} \\ \frac{\beta_1 (a_1 + \lambda)}{(a_1 + S)^2} x_1 & \frac{\beta_1 (S - \lambda)}{a_1 + \lambda} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2 (a_2 + \lambda)}{(a_2 + S)^2} x_2 & 0 & \frac{\beta_2 (S - \lambda)}{a_2 + \lambda} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\beta_{n-1} (a_{n-1} + \lambda)}{(a_{n-1} + S)^2} x_{n-1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\beta_{n-1} (S - \lambda)}{a_{n-1} + \lambda} & 0 \\ \frac{\beta_n (a_n + \lambda)}{(a_n + S)^2} x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\beta_n (S - \lambda)}{a_n + \lambda} \end{pmatrix}.$$

Calculando  $J(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$  num ponto  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in H$ , obtemos

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma \lambda}{K} + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i & -\frac{m_1 \lambda}{a_1 + \lambda} & -\frac{m_2 \lambda}{a_2 + \lambda} & \dots & -\frac{m_{n-1} \lambda}{a_{n-1} + \lambda} & -\frac{m_n \lambda}{a_n + \lambda} \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\beta_{n-1} \xi_{n-1}}{a_{n-1} + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_n \xi_n}{a_n + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

já que  $\gamma(1 - \frac{\lambda}{K}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{a_i + \lambda} \xi_i$  em  $H$ .





todas as trajetórias nesta variedade tende a  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$  quando  $t$  tende a infinito. Por outro lado, o polinômio é instável se

$$K > a_n + 2\lambda \text{ pois } \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i > \frac{\gamma}{k}. \quad (2.30)$$

Isto significa que todos os equilíbrios em  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in H$  são instáveis, se  $K > a_n + 2\lambda$ .

Agora estudaremos a situação quando  $a_1 + 2\lambda < K < a_n + 2\lambda$ . Considere o seguinte hiperplano

$$H_1 = \{(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(a_i + \lambda)^2} \xi_i = \frac{\gamma}{k}\} \quad (2.31)$$

Com os comentários anteriores podemos enunciar o seguinte

**Teorema 2.3.2.** *Suponhamos que  $0 < \lambda < K$ ,  $\gamma$ ,  $\beta_i$ ,  $m_i$ ,  $a_i$  são positivos e  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Se variamos  $K$  a partir de um extremo do intervalo  $(a_1 + 2\lambda, a_n + 2\lambda)$  ao outro extremo,  $H_1$  dado por (2.31) intercepta  $H$  e o hiperplano resultante da intersecção entre  $H_1$  e  $H$ , viaja através de  $H$  a partir do vértice no eixo  $x_n$  ao vértice  $x_1$  e os equilíbrios que são deixados para trás perdem sua estabilidade; quando  $a_1 + 2\lambda < K < a_n + 2\lambda$  este hiperplano intersecção divide  $H$  em duas partes, “uma superior” cujos pontos são instáveis e uma “inferior” cujos pontos são estáveis no sentido de Liapunov, i.e., o sistema admite uma bifurcação zip.*

*Demonstração.*

Mostraremos que quando  $K$  é aumentado a partir de  $a_1 + 2\lambda$  até  $a_n + 2\lambda$ , o hiperplano de dimensão  $n - 1$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por (2.31) intercepta  $H$ , e os pontos de equilíbrios em  $H$  perdem sua estabilidade. Denotemos as coordenadas de intersecção de  $H$  com os eixos coordenados por  $(x_H^1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, x_H^2, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, 0, \dots, x_H^n)$  e de  $H_1$  por  $(x_{H_1}^1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, x_{H_1}^2, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, 0, \dots, x_{H_1}^n)$ . Observe que  $x_H^i = \frac{\gamma(a_i + \lambda)(K - \lambda)}{m_i K}$  é uma função crescente de  $K$ ; por outro lado,  $x_{H_1}^i = \frac{\gamma(a_i + \lambda)^2}{m_i K}$  é uma função decrescente de  $K$ ; além disso, como a função  $K(a) = a + 2\lambda$  é crescente em  $a \in [0, a_n + 2\lambda)$  temos  $\lambda < K_1 < K_2 < \dots < K_n$ . Um cálculo simples mostra que se  $\lambda < K < K_i$  então  $x_H^i < x_{H_1}^i$  e  $x_H^i = x_{H_1}^i$  em  $K = K_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Consequentemente, para  $\lambda < K < K_1$  o hiperplano  $H$  está abaixo de  $H_1$  e alcança  $H_1$  em  $K = K_1$ . Neste caso, a desigualdade (2.29) é válida para todos os pontos em  $H$ . Quando aumentamos  $K$  além de  $K_1$ , o hiperplano  $H$  corta  $H_1$  e alcança  $x_H^2 = x_{H_1}^2$  em  $K = K_2$ , alcança  $x_H^3 = x_{H_1}^3$  em  $K = K_3$  e assim sucessivamente até alcançar  $x_H^n = x_{H_1}^n$  em  $K = K_n$ . Para  $K > K_n$ , o hiperplano  $H_1$  corta o hiperplano  $H$  fora do octante positivo, de modo que agora  $H_1$  se encontra abaixo de  $H$  (veja Figura 2.3). Neste processo, para pontos na parte de  $H$  que já se encontra acima do hiperplano  $H_1$  a condição (2.30) vale. Isto significa que os equilíbrios nesta parte do hiperplano

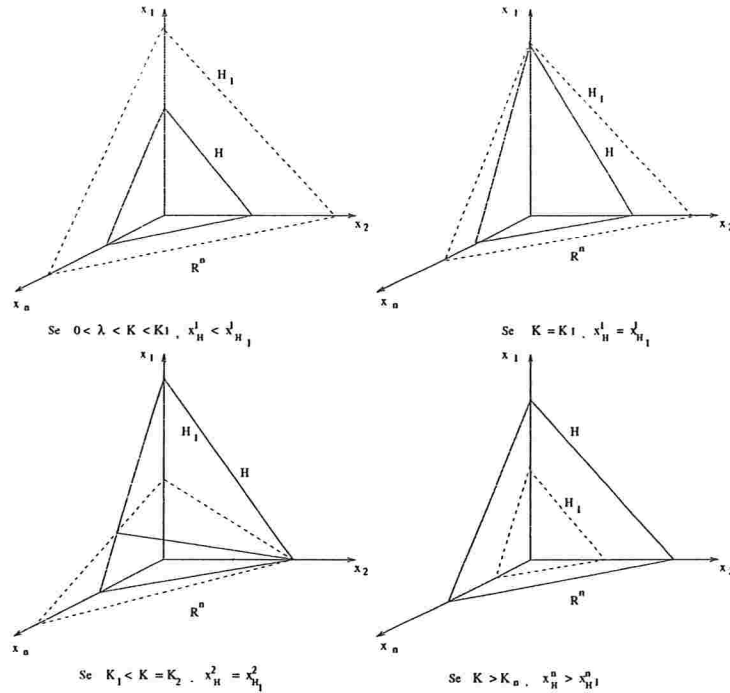


Figura 2.3: Intersecção dos Hiperplanos

têm variedade instável de dimensão  $n - 1$ , implicando que os pontos nesta parte de  $H$  são instáveis.

Provaremos que cada pontos na parte inferior de  $H$  são estáveis no sentido de Liapunov. Para este propósito, utilizaremos alguns resultados do Apêndice A da seção A.2 devidos a Hartman (ver [17]). Sabemos que através de cada ponto na parte inferior de  $H$ , que denotaremos de agora em diante por  $H_s$ , passa uma variedade localmente invariante bidimensional tal que toda trajetória nesta variedade tende a  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$  exponencialmente quando  $t \rightarrow \infty$ . Obviamente,  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$  é assintoticamente estável com respeito à restrição do sistema (2.4) a esta variedade. Vamos provar que para cada  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in H_s$  as variedades que correspondem as esses pontos, preenchem uma vizinhança de  $H_s$ . Isto provará que estes pontos são estáveis no sentido de Liapunov.

Vamos parametrizar  $H_s$  da seguinte maneira: Seja  $X_I = (\lambda, x_I^1, x_I^2, \dots, x_I^n)$  pertencente à

intersecção de  $H$  e  $H_1$ , então

$$\begin{aligned}
 S &= \lambda \\
 x_1 &= \xi_{1s} = x_H^1 + s(x_I^1 - x_H^1) \\
 x_2 &= \xi_{2s} = x_H^2 + s(x_I^2 - x_H^2) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1} &= \xi_{n-1s} = x_H^{n-1} + s(x_I^{n-1} - x_H^{n-1}) \\
 x_n &= \xi_{ns} = sx_I^n, \quad 0 \leq s \leq 1.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Se  $s = 0$ , obtemos as coordenadas de intersecção de  $H$  no espaço  $S, x_1, \dots, x_{n-1}$ ; se  $s = 1$  obtemos o ponto  $X_I = (\lambda, x_I^1, x_I^2, \dots, x_I^n)$ . Suponha que  $\xi_1$  arbitrariamente fixado corresponda ao valor  $0 < s_0 < 1$ , i.e.,

$$\xi_1 = \xi_{1s_0} = x_H^1 + s_0(x_I^1 - x_H^1).$$

Desta forma,  $H_s$  corresponde ao intervalo fechado  $[0, s_0]$ . Para cada  $s \in (0, s_0]$ , o seguinte sistema de coordenadas será introduzido: A origem será em  $(\lambda, \xi_{1s}, \dots, \xi_{ns})$ , dois vetores da base serão fixados no auto-espaço bidimensional correspondendo aos dois autovalores com parte real negativa da linearização do sistema (2.4) em  $(\lambda, \xi_{1s}, \dots, \xi_{ns})$  e  $n - 1$  vetores da base serão fixados em  $H$ , os quais são autovetores correspondendo aos autovalores nulos. Por (2.32),  $\xi_{1s}, \xi_{2s}, \dots, \xi_{ns}$  dependem continuamente de  $s$  e, como consequencia, as raízes do polinômio característico (2.27), também dependem continuamente de  $s$ . Os dois vetores da base no autoespaço bidimensional correspondendo às raízes com parte real negativa podem ser escolhidos como funções contínuas de  $s$  no intervalo  $[0, s_0]$ , já que a direção deste plano varia continuamente. A família a um parâmetro de transformações de coordenadas dependendo de  $s \in [0, s_0]$  descrita acima, pode ser dada na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = R(s) \begin{bmatrix} S - \lambda \\ x_1 - \xi_{1s} \\ x_2 - \xi_{2s} \\ x_3 - \xi_{3s} \\ \vdots \\ x_{n-1} - \xi_{n-1s} \\ x_n - \xi_{ns} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

onde  $y = (y_1, y_2)$  denotam as coordenadas no auto-espaço bidimensional,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$  denotam as coordenadas em  $H$  e  $R(s)$  é matriz  $(n + 1) \times (n + 1)$  inversível,  $R \in C^0[0, s_0]$ . Sob

a transformação de coordenadas (2.33), o sistema (2.4) assume a forma

$$\begin{aligned}\dot{y} &= P(s)y + F(y, z, s) \\ \dot{z} &= G(y, z, s)\end{aligned}\tag{2.34}$$

onde  $P$  é uma matriz estável  $2 \times 2$ ,  $F$  é um vetor bidimensional e  $G$  um vetor de dimensão  $(n - 1)$ ,  $P, F, F'_y, F'_z, G'_y, G'_z \in \mathcal{C}^0$  em uma vizinhança da origem  $(y_1, y_2, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = (0, 0, \dots, 0)$  e para todo  $s \in [0, s_0]$ ,  $F(0, 0, \dots, 0, s) \equiv 0$ ,  $G(0, 0, \dots, 0, s) \equiv 0$ ,  $\partial_{y,z}F(0, 0, \dots, 0, s) \equiv 0$ ,  $\partial_{y,z}G(0, 0, \dots, 0, s) \equiv 0$ . Como podemos apreciar no Apêndice A na seção A.2, o sistema dinâmico gerado por (2.34) é da forma (A.37) com  $Q(s) = 0$ , satisfazendo todas as condições do Lema 10 do apêndice A na seção A.2. Assim, a função  $g : W \times [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  do Lema 9, também dado no Apêndice A na seção A.2, existe onde  $W$  é uma vizinhança de  $(y_1, y_2) = (0, 0)$ ,  $g \in \mathcal{C}^0$  e para cada  $s \in [0, s_0]$  fixado a superfície

$$\{(y_1, y_2, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : g(y_1, y_2, s), (y_1, y_2) \in W\}$$

é uma variedade localmente invariante de (2.34). Realizando a transformação de coordenadas (2.33) e substituindo a função  $g$  por  $z$  obtemos

$$\begin{bmatrix} S \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi_{1s} \\ \xi_{2s} \\ \vdots \\ \xi_{n-1s} \\ \xi_{ns} \end{bmatrix} + R(s)^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ g(y_1, y_2, s) \end{bmatrix}.\tag{2.35}$$

Para  $s \in [0, s_0]$  fixo, (2.35) é a equação paramétrica da variedade invariante estável do sistema (2.4) passando através de cada ponto de equilíbrio  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in H_s$ . A aplicação  $(y_1, y_2, s) \rightarrow (S, x_1, \dots, x_n)$  do cilindro sólido  $W \times [0, s_0]$  sobre o espaço  $S, x_1, \dots, x_n$  definida por (2.35) é contínua e (devido à unicidade de soluções e regularidade da matriz  $R(s)^{-1}$ ) é um a um. Portanto, Por um Teorema de Topologia (ver [20] Teorema 2.103) esta aplicação é um homeomorfismo. ■

# Bifurcação Zip numa Classe ampla de Sistemas Competitivos

Neste capítulo, provaremos a ocorrência de *bifurcação Zip* em uma ampla classe de sistemas presa-predador de dimensão  $(n + 1)$ , modelando a competição entre  $n$  espécies de predadores por uma espécie de presa. Um estudo similar foi realizado por Farkas [9] para um sistema presa-predador tri-dimensional, onde ele analisou a competição entre duas espécies de predadores por uma espécie de presa.

## 3.1 Introdução

No modelo estudado no Capítulo anterior, admitimos que a taxa de crescimento da presa, na ausência de predadores, é dada pela lei logística  $g(S) = \gamma(1 - \frac{S}{K})$  e que a taxa de crescimento do predador  $i$  é da forma  $m_i f_i(S) - d_i$ , onde  $f_i(S) = \frac{S}{a_i + S}$ , para alguma constante  $a_i > 0$ .

No presente capítulo, vamos estudar uma generalização dos resultados obtidos no Capítulo 2 para sistemas de equações diferenciais ordinárias nos quais as taxas de crescimento das espécies envolvidas satisfazem condições analisadas por Buthur [4].

Especificamente, vamos estudar o modelo mais geral descrito pelo sistema

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma g(S, K)S - \sum_{i=1}^n p(S, a_i)x_i \\ \dot{x}_i = p(S, a_i)x_i - d_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\gamma$  e  $d_i$  são constantes positivas e  $g$  e  $p$  são funções diferenciáveis satisfazendo condições especificadas abaixo (denominadas condições de Buther):

- ( $g_1$ )  $g$  é contínua em  $[0, \infty[ \times ]0, \infty[$  e de classe  $C^2$  em  $]0, \infty[ \times ]0, \infty[$ ;
- ( $g_2$ )  $g(0, K) = 1$ , e  $\frac{\partial g}{\partial S}(S, K) < 0 < \frac{\partial^2 g}{\partial S \partial K}(S, K)$ , para todos  $S \geq 0$  e  $K \geq 0$ ;
- ( $g_3$ )  $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial g}{\partial S}(S, K) = 0$  uniformemente para  $S$  em compactos de  $(0, \infty)$ ;
- ( $g_4$ )  $(K - S)g(S, K) > 0$ , para  $S \geq 0$  e  $K > 0$  com  $S \neq K$ .

Com relação ao predador  $i$ , admitimos que a taxa de crescimento desse predador tem a forma  $p(S, a_i)$ , onde  $p$  é uma função que satisfaz

- ( $p_1$ )  $p$  é contínua em  $[0, \infty[ \times ]0, \infty[$  e de classe  $C^2$  em  $]0, \infty[ \times ]0, \infty[$ ;
- ( $p_2$ )  $p(0, a) = 0$ , e  $\frac{\partial p}{\partial S}(S, a) > 0$ , para  $S > 0$  e  $a > 0$ ;
- ( $p_3$ )  $\frac{\partial p}{\partial S}(S, a) < \frac{p(S, a)}{S}$  para  $S > 0$  e  $a > 0$ ;
- ( $p_4$ )  $\frac{\partial p}{\partial a}(S, a) < 0$  para  $S > 0$  e  $a > 0$ .

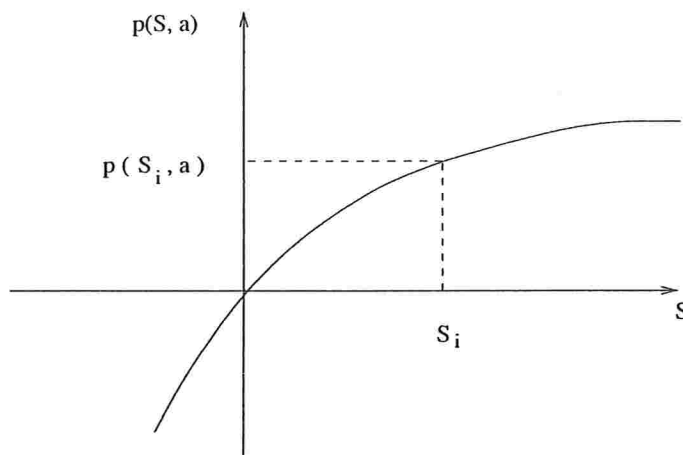
Observemos que o sistema (3.1) admite que a presença de predadores diminui a taxa de crescimento da presa de uma quantidade  $p(S, a_i)$  que é exatamente igual à taxa de natalidade do respectivo predador.

Esse modelo (3.1) foi estudado por Farkas [9] para o caso  $n = 2$ , onde o autor demonstra que o fenômeno de bifurcação zip ocorre em condições gerais de sistemas que satisfazem as condições de Buther [4].

Nessa formulação generalizada, a dependência das funções  $g$  e  $p$  de  $S$  e  $K$  e de  $S$  e  $a$ , respectivamente, levam em conta a dependência da capacidade de carga  $K$  do ambiente e da “constante de semi-saturação”  $a_i$  das taxas de crescimento e de natalidade da presa e do predador, respectivamente.

Antes de prosseguirmos, é relevante fazer algumas observações sobre as condições satisfeitas pelas funções  $g$  e  $p$ . A condição ( $g_2$ ) significa que a maior taxa de crescimento específico da presa é alcançada em  $S = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , e é  $\gamma > 0$ ; a taxa de crescimento diminui se a quantidade de presa aumenta, e a taxa de decréscimo na taxa de crescimento  $g'_S(S, K)$  é negativa e uma função crescente da capacidade de carga  $K$ , i.e, o efeito do crescimento na população de presa diminui com o aumento de  $K$ . A relação ( $g_3$ ) significa que para valores muito alto de  $K$ , mudanças na quantidade de presa tem um efeito negligente na taxa de crescimento. As condições ( $g_2$ ) – ( $g_3$ ) implicam que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} g(S, K) = 1, \quad S \geq 0. \quad (3.2)$$

Figura 3.1: Gráfico de  $p(S, a_i)$ 

A desigualdade  $(g_4)$  significa que (na ausência do predador) a taxa de crescimento da presa é positiva se  $S < K$  e negativa se  $S > K$ . Portanto, pela continuidade da função  $g$  temos  $g(K, K) = 0$ . A condição  $(p_2)$  significa que a taxa de natalidade *per capita*  $p$  dos predadores (também chamada "taxa de predação" ou a "resposta funcional"), é zero na ausência da presa e é uma função crescente da quantidade de presas. A desigualdade  $(p_4)$  mostra a importância do parâmetro  $a$ ; a taxa de natalidade do predador é uma função decrescente como função de  $a$ , i.e., quanto maior o valor do parâmetro  $a$ , mais comida é necessária para manter a mesma taxa de natalidade do predador específico. A condição  $(p_4)$  implica que  $p(S, a)$ ,  $S$  e  $a$  são todos maiores que zero. No caso em que  $p$  é uma função limitada para  $a > 0$  fixado, então  $m_i = \sup_{S > 0} p(S, a_i)$  é a *taxa de natalidade maximal* do  $i$ -ésimo predador. Claramente

$$\lim_{S \rightarrow \infty} p(S, a_i) = m_i \text{ se } p \text{ é limitada}$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} p(S, a_i) = \infty, \text{ se } p \text{ não é limitada}$$

Vamos supor  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ , i.e.,

$$p(S, a_i) < p(S, a_{i+1}) \text{ para todo } S > 0 \quad (3.3)$$

de acordo com a condição  $(p_4)$ . Também suporemos a partir de agora que  $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ . Como consequência, (3.3) não implica que a taxa líquida de crescimento do predador  $i+1$  exceda a do predador  $i$ .

Além dos exemplos considerados no Capítulo 2, outros exemplos de funções  $g$  e  $p$  são as funções

- $g(S, K) = 1 - \left(\frac{S}{K}\right)^\alpha \quad 0 < \alpha \leq 1$
- $p(S, a) = \frac{A}{Ba+C} \frac{S}{a+S}$  Resposta funcional do tipo Holling
- $p(S, a) = \frac{A}{Ba+C} S^q \quad 0 < q < 1$  Resposta funcional do tipo Rosenzweig
- $p(S, a) = \frac{mS}{a+S}$  Resposta funcional do tipo Holling

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes positivas.

Na próxima seção estudaremos os pontos de equilíbrios para o sistema (3.1) e provaremos sua dissipatividade. Na seção 3.3 estabelecemos condições sobre as quais o fenômeno da bifurcação zip ocorre no modelo.

## 3.2 Pontos de Equilíbrio

Antes de estudar seus pontos de equilíbrios, mostraremos que 3.1 é dissipativo.

**Proposição 2.** *Qualquer solução do sistema 3.1 com condições iniciais  $S^0 > 0$ ,  $x_i^0 > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  é limitada em  $[0, \infty[$ .*

*Demonstração.*

É análoga à demonstração da proposição 1 do Capítulo 2, portanto omitiremos. ■

Antes de seguir adiante, é importante observar que para que os predadores sobrevivam, é necessário que  $m_i > d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . O predador  $i$  cresce somente se o lado direito da equação (3.1) <sub>$i$</sub>  é positivo, ou seja, se  $(p(S, a_i) - d_i)x_i > 0$  e isto significa pela condição ( $p_2$ ) que  $S > \lambda$ .

Agora discutiremos os pontos de equilíbrio de (3.1), ou seja as soluções do sistema

$$\gamma g(S, K)S - \sum_{i=1}^n p(S, a_i)x_i = 0 \quad (3.4)$$

$$(p(S, a_i) - d_i)x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

As soluções triviais do sistema (3.4) são  $(S, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$  e  $(S, x_1, \dots, x_n) = (K, 0, \dots, 0)$ ; o sistema (3.4) tem soluções biologicamente interessantes, isto é, soluções não triviais se, e somente se,  $m_i > d_i$  e as soluções  $S_i$  das equações  $p(S, a_i) = d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  coincidem, isto é,  $S_1 = S_2 = \dots = S_n$ . Denotaremos as grandezas  $S_i = \lambda_i$ , logo fazendo  $\lambda = \lambda_i \forall i = 1, 2, \dots, n$ , teremos

$$p(\lambda, a_i) = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$



De agora em diante, vamos supor  $m_i > d_i$  e considerar a hipótese essencial como no Capítulo 1

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n. \quad (3.6)$$

Levando em conta as observações anteriores, os pontos de equilíbrios do sistema (3.1) são a origem  $(S, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ , o ponto  $(S, x_1, \dots, x_n) = (K, 0, \dots, 0)$  e os pontos do hiperplano de dimensão  $(n - 1)$ .

$$H_K = \{(S, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : S = \lambda, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

$$p(\lambda, a_1)x_1 + p(\lambda, a_2)x_2 + \dots + p(\lambda, a_n)x_n = \gamma\lambda g(\lambda, K)\}$$

Para estudar a estabilidade destes pontos de equilíbrios, observe que a matriz Jacobiana  $J(S, x_1, \dots, x_n)$  do sistema (3.1) é

$$\begin{pmatrix} \gamma g(S, K) + \gamma g'_s(S, K)S - \sum_{i=1}^n p'_S(S, a_i)x_i & -p(S, a_1) & -p(S, a_2) & \dots & -p(S, a_n) \\ p'_S(S, a_1)x_1 & p(S, a_1) - d_1 & 0 & \dots & 0 \\ p'_S(S, a_2)x_2 & 0 & p(S, a_2) - d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_S(S, a_n)x_n & 0 & 0 & \dots & p(S, a_n) - d_n \end{pmatrix}$$

Agora

$$J(0, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -d_n \end{pmatrix}$$

assim  $(S, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$  é instável, com uma variedade estável de dimensão  $n$  e uma variedade instável de dimensão 1.

$$J(K, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} \gamma K g'_S(K, K) & p(K, a_1) & -p(K, a_2) & \dots & -p(K, a_n) \\ 0 & p(K, a_1) - d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p(K, a_2) - d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p(K, a_n) - d_n \end{pmatrix}$$

pelas condições  $(p_2)$  e (3.5),  $(S, x_1, \dots, x_n) = (K, 0, \dots, 0)$  é assintoticamente estável se  $K < \lambda$  e instável se  $K > \lambda$  com uma variedade estável de dimensão 1 e uma variedade instável de dimensão  $n$ . É bem conhecido (ver [21] e [5]) que

$$K > \lambda \tag{3.8}$$

é uma condição necessária para a sobrevivência de cada predador. Portanto (3.8) será assumida de agora em diante. Observe que, pela condição (3.2), se  $K < \lambda$  então  $H_K$  é vazio, e se  $K = \lambda$  seu único ponto é a origem. Na próxima seção fixaremos nossa atenção ao estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrios pertencentes a  $H_K$ .

### 3.3 Coexistência e extinção por bifurcação zip

Nesta seção estudaremos a estabilidade do hiperplano  $H_K$ . Os elementos de  $H_K$  serão denotados por  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ , i.e,  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in H_K$ .

Avaliando a matriz Jacobiana de (3.1) em um ponto arbitrário de  $H_K$  obtemos  $J = J(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$  dada por

$$\begin{pmatrix} \gamma g(\lambda, K) + \gamma \lambda g'_S(\lambda, K) - \sum_{i=1}^n p'_S(\lambda, a_i) \xi_i & -p(\lambda, a_1) & -p(\lambda, a_2) & \dots & -p(\lambda, a_n) \\ p'_S(\lambda, a_1) \xi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p'_S(\lambda, a_2) \xi_2 & 0 & 0 \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_S(\lambda, a_n) \xi_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$



Podemos reescrever a desigualdade acima como segue

$$\gamma\lambda g(\lambda, K) + \gamma\lambda^2 g'_S(\lambda, K) < \sum_{i=1}^n [\lambda p'_S(\lambda, a_i) - p(\lambda, a_i)] \xi_i + \sum_{i=1}^n p(\lambda, a_i) \xi_i.$$

Agora  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  satisfaz a equação dada em (3.7), i.e.,  $\sum_{i=1}^n p(\lambda, a_i) \xi_i = \gamma\lambda g(\lambda, K)$ , consequentemente obtemos

$$\sum_{i=1}^n [p(\lambda, a_i) - \lambda p'_S(\lambda, a_i)] \xi_i < -\gamma\lambda^2 g'_S(\lambda, K). \quad (3.10)$$

Pela condição  $(p_3)$  o lado esquerdo de (3.10) é positivo para todo  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in H_K$ . Em vista de  $(g_2)$  e  $(g_3)$  o lado direito é positivo, decresce e tende a zero quando  $K \rightarrow \infty$ . Consideremos o hiperplano  $B_k$  dado por

$$B_K = \{(S, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / S = \lambda, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n [p(\lambda, a_i) - \lambda p'_S(\lambda, a_i)] \xi_i = -\gamma\lambda^2 g'_S(\lambda, K)\}. \quad (3.11)$$

Vamos denotar a  $i$ -ésima coordenada de intersecção de  $H_K$  com o eixo coordenado por  $(0, \dots, 0, x_i^{H_K}, 0, \dots, 0)$  e a de  $B_k$  por  $(0, \dots, 0, x_i^{B_K}, 0, \dots, 0)$ , onde

$$x_i^{H_K} = \frac{\gamma\lambda g(\lambda, K)}{p(\lambda, a_i)} \text{ e } x_i^{B_K} = -\frac{\gamma\lambda^2 g'_S(\lambda, K)}{p(\lambda, a_i) - \lambda p'_S(\lambda, a_i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Observe que pelas condições  $(g_2)$ ,  $(p_2)$  e  $(p_3)$ , para  $K = \lambda$  temos

$$x_i^{H_\lambda} = 0 \text{ e } x_i^{B_\lambda} > 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Por outro lado,  $\lim_{K \rightarrow \infty} g'_S(S, K) = 0$  e  $\lim_{K \rightarrow \infty} g(S, K) = 1$ , assim por continuidade em  $K$  das coordenadas de intersecção existe  $K = K_i(a_i) > \lambda$  tal que

$$x_i^{H_{K_i}} = x_i^{B_{K_i}}, \quad i.e., \quad \frac{\gamma\lambda g(\lambda, K_i)}{p(\lambda, a_i)} = -\frac{\gamma\lambda^2 g'_S(\lambda, K_i)}{p(\lambda, a_i) - \lambda p'_S(\lambda, a_i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Vamos supor que

$$g'_K(S, K) \geq 0, \quad K > \lambda, \quad S > 0 \text{ e } p''_{Sa}(S, a) > 0 \quad S > 0, \quad a > 0. \quad (3.15)$$

Note que da condição (3.14) temos  $\frac{g(\lambda, K_i)}{p(\lambda, a_i)} + \frac{\lambda g'_S(\lambda, K_i)}{p(\lambda, a_i) - \lambda p'_S(\lambda, a_i)} = 0$  logo, defina

$$F(a, K) = \frac{g(\lambda, K)}{p(\lambda, a)} + \frac{\lambda g'_S(\lambda, K)}{p(\lambda, a) - \lambda p'_S(\lambda, a)}$$

e observe que

$$\frac{\partial F}{\partial K}(a, K) = \frac{g'_K(\lambda, K)}{p(\lambda, a)} + \frac{\lambda g''_{SK}(\lambda, K)}{p(\lambda, a) - \lambda p'_S(\lambda, a)} > 0 \quad (3.16)$$

de acordo com as condições  $(p_2)$  e (3.15). Assim, pelo Teorema da Função Implícita podemos escrever

$$K = K(a) \quad e \quad \frac{\partial K}{\partial a} = - \frac{\frac{\partial F(a, K)}{\partial a}}{\frac{\partial F(a, K)}{\partial K}}$$

isto é,

$$\frac{\partial K}{\partial a} = - \frac{g(\lambda, K)p'_a(\lambda, a)}{p(\lambda, a)^2} - \frac{\lambda g'_S(\lambda, K)(p'_a(\lambda, a) - \lambda p''_{Sa}(\lambda, a))}{(p(\lambda, a) - \lambda p'_S(\lambda, a))^2} > 0 \quad (3.17)$$

de acordo com a condição (3.15) e as condições satisfeitas por  $p$  e  $g$ . Consequentemente, pelas propriedades (3.16) e (3.17)  $K$  é uma função crescente de  $a$ . Logo, a função  $K = K(a)$  é crescente no intervalo  $[0, a_1)$  e temos

$$\lambda < K_n < K_{n-1} < \dots < K_1 \quad (3.18)$$

Além disso, de (3.13) e da continuidade em  $K$  de  $x_i^{HK}$  e  $x_i^{BK}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , para  $\lambda < K < K_n$  o hiperplano  $B_K$  está acima de  $H_K$ , e alcança  $H_K$  em  $x_n^{HK} = x_n^{BK}$  quando  $K = K_n$  (se aumentamos  $K$  ambos os hiperplanos  $H_K$  e  $B_K$  são deslocados paralelamente). Se aumentamos  $K$  mais ainda teremos  $x_{n-1}^{HK} = x_{n-1}^{BK}$  em  $K = K_2$  e assim sucessivamente,  $x_1^{HK} = x_1^{BK}$  em  $K = K_1$ . Depois disso,  $B_K$  corta  $H_K$  completamente tal que agora  $H_K$  está acima de  $B_K$  e a condição (3.10) vale com o sinal de desigualdade invertido. Neste processo, para pontos na parte de  $H_K$  a qual já está acima de  $B_K$  a condição (3.10) vale com o sinal de desigualdade invertido. Isto significa que os equilíbrios nesta parte do hiperplano tem uma variedade instável de dimensão dois, assim os pontos deixados atrás da intersecção entre  $H_K$  e  $B_K$  perdem sua estabilidade. Farkas [8] chamou este fenômeno de *bifurcação zip*. Acabamos de mostrar o seguinte teorema

**Teorema 3.** *Suponha que as condições  $(p_1) - (p_4)$ , (3.5) e (3.15) valem e suponha ainda que  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ .*

1) *se  $\lambda < K < K_n$  então cada equilíbrio em  $H_K$  é estável no sentido de Liapunov;*

2) *Se  $K_1 < K < \infty$  então todos os equilíbrios são instáveis;*

3) *Se aumentamos  $K$  de um extremo ao outro do intervalo  $(K_n, K_1)$  então o hiperplano intersecção de  $H_K$  e  $B_K$  viaja sobre  $H_K$  a partir de um vértice  $n$  o eixo  $x_n$  a um vértice no eixo  $x_1$  e os pontos de equilíbrios deixados para trás se desestabilizam; para  $K_n < K < K_1$  o hiperplano intersecção divide  $H_K$  em duas partes, "uma superior" que é repulsora e "uma inferior" que é estável para o sistema, i.e, o sistema (3.1) sofre uma bifurcação zip.*

*Demonstração.* A demonstração segue dos cálculos anteriores e de argumentos análogos aos da demonstração dada no Teorema 2.3.2. ■

# Atrator Global em Sistemas Competitivos

Neste capítulo, vamos estudar uma generalização dos modelos anteriores, modificados de modo a incluir difusão das espécies envolvidas, num ambiente  $\Omega$ . Nosso objetivo é mostrar que o problema assim obtido é bem posto e tem um atrator global compacto. Para esse propósito, vamos utilizar técnicas dadas no trabalho de Alikakos [2] e de Dung e Smith [7].

## 4.1 Introdução

O modelo que consideraremos é descrito pelo sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) = \delta_0 \Delta S + \gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) u_i & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) = \delta_i \Delta u_i + (m_i f_i(S) - d_i) u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 1, 2, 3$ ) é um domínio aberto conexo limitado com fronteira suave  $\partial\Omega$ . Admitiremos ainda que as funções  $S$  e  $u_i$  satisfazem condições de Neumann na fronteira

$$\frac{\partial S}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (4.2)$$

onde  $\nu = \vec{\nu}(x)$  indica a normal unitária exterior em pontos  $x \in \partial\Omega$ .

Como no Capítulo 2,  $S$  indica a densidade de presas e  $u_1, \dots, u_n$  as densidades dos predadores competindo pelas presas. As constantes  $\delta_0, \dots, \delta_n$  são números reais positivos e representam os coeficientes de difusão das espécies na região  $\Omega$ . Por simplicidade, vamos supor que, na ausência de predadores, a presa tem crescimento logístico  $g(S, K) = \gamma(1 - S/K)S$ , onde  $\gamma > 0$  e  $K > 0$

representam a máxima taxa de crescimento da presa e a capacidade de carga do ambiente, respectivamente. Vamos também supor que a taxa de nascimento *per capita*  $p_i$  do  $i$ -ésimo predador (também denominada “taxa de predação” ou ainda “resposta funcional”) tem a forma  $m_i f_i(S) = m_i S / (a_i + S)$ , onde  $m_i$  e  $a_i$  são constantes positivas. Com as devidas modificações, os resultados podem ser generalizados para funções mais gerais  $g(S, K)$  e  $p(S, a)$  como as dos tipos descritos no Capítulo 3.

Na segunda seção deste capítulo provaremos que o octante positivo é positivamente invariante para o problema (4.1), (4.2). Utilizando resultados de Morgan [23], mostraremos também que as soluções existem para todo  $t > 0$ . Finalmente, baseados em Alikakos [2] (e também [7]), na terceira seção mostraremos a existência do atrator global compacto para o sistema (4.1), (4.2).

## 4.2 Existência e positividade de soluções

Como  $S$  e  $u_i$  representam densidades de populações, somente soluções não negativas são de interesse biológico; por isso, vamos primeiro demonstrar existência local e positividade de soluções do sistema (4.1), (4.2). A seguir, usaremos alguns resultados sobre regiões invariantes (cf. Smoller [25] ou [6]) e outras condições dadas em Morgan [23] para mostrar que as soluções são globais e não negativas.

Inicialmente, vamos escrever (4.1), (4.2) como uma equação de evolução num espaço de Banach. Para tanto, indiquemos por  $|v|$  a norma Euclidiana de um vetor  $v = (S, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$|v| = (|S|^2 + \sum_{i=1}^n |u_i|^2)^{1/2}.$$

Sejam  $p > \max\{1, \frac{N}{2}\}$  e  $X = L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$  o espaço de Banach das funções  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tais que  $|v|^p$  é integrável em  $\Omega$  munido da norma  $\|v\|_{L^p} = (\int_{\Omega} |v(x)|^p dx)^{1/p}$ , com as modificações óbvias quando  $p = \infty$ .

Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  o operador linear fechado definido por

$$D(A) = \{v \in W^{2,p}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) : \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad (4.3)$$

e

$$(Av)(x) = -D\Delta v = (-\delta_0 \Delta S(x), -\delta_1 \Delta u_1(x), \dots, -\delta_n \Delta u_n(x)), \quad (4.4)$$

para  $v \in D(A)$  e  $x \in \Omega$ .



É um resultado bem conhecido (ver, por exemplo, Henry [18]) que  $-A$  é o gerador de um semigrupo analítico  $\{e^{-At} : t \geq 0\}$  em  $X$  que satisfaz  $\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ , para todo  $t \geq 0$ . Tomando  $\rho > 0$  de modo que  $\operatorname{Re} \sigma(A + \rho I) > 0$ , podemos definir os espaços de potências fracionárias  $X^\alpha = D((A + \rho I)^\alpha)$  munido da norma do gráfico  $\|v\|_{\alpha, \rho} = \|(A + \rho I)^\alpha v\|_{L^p}$ , para cada  $\alpha \geq 0$ . Como diferentes escolhas de  $\rho$  induzem normas equivalentes em  $X^\alpha$ , vamos daqui para o que segue suprimir a dependência de  $\rho$  (cf. Henry [18], Def. 1.4.7). Vamos a seguir enunciar as principais propriedades dos espaços  $X^\alpha$ ; as demonstrações podem ser encontradas em Henry [18], Teoremas 1.4.8 e 1.6.1.

**Proposição 3.** 1) Para cada  $\alpha \geq 0$ ,  $X^\alpha$  é um espaço de Banach com a norma  $\|v\|_\alpha = \|A^\alpha v\|$ . Mais ainda, como  $A$  tem resolvente compacto, as inclusões  $D(A) \hookrightarrow X^\alpha \hookrightarrow X$  são compactas, para cada  $0 \leq \alpha < 1$ .

2) Se  $2\alpha - \frac{N}{p} > k - \frac{N}{q}$  e  $q \geq p$ , então  $X^\alpha \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$ ;

3) Se  $2\alpha - \frac{N}{p} > \nu \geq 0$ , então  $X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\Omega)$ .

Em vista da Proposição 3, vamos no restante desse trabalho tomar  $p > \max\{1, \frac{N}{2}\}$  e escolher  $\alpha$  no intervalo  $\max\{\frac{1}{2}, \frac{N}{2p}\} < \alpha < 1$ . Dessa forma, o espaço  $X^\alpha$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) \quad X^\alpha \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \quad (4.5)$$

$$(ii) \quad X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\Omega), \quad (4.6)$$

com inclusões compactas, onde  $0 \leq \nu < 2\alpha - \frac{N}{p}$ . Em particular, cada elemento de  $X^\alpha$  é uma função contínua em  $\bar{\Omega}$ . Seguem-se ainda dos resultados de Henry [18], Teorema 1.4.3, que  $e^{-At}(X^\alpha) \subset X^\alpha$ , para todo  $t \geq 0$  e que  $\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X^\alpha)} \leq t^{-\alpha}$ , para  $t > 0$ .

**Lema 1.** Sejam  $\lambda > 0$ ,  $f \in L^p(\Omega)$  e  $u$  a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Se  $f(x) \geq 0$  para  $x \in \Omega$ , então  $u(x) \geq 0$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ .

*Demonstração.* Como  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ , então  $u$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ . Seja  $\bar{x}$  um ponto onde  $u$  atinge seu mínimo,  $u(\bar{x}) = \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$ , e suponhamos que  $u(\bar{x}) < 0$ . Se  $\bar{x} \in \Omega$ , então  $\nabla u(\bar{x}) = 0$  e  $\Delta u(\bar{x}) \geq 0$ , o que implica que  $\lambda u(\bar{x}) = \Delta u(\bar{x}) + f(\bar{x}) \geq 0$ , contradição. Logo,  $\bar{x} \in \partial\Omega$ . Se  $v = -u$ , então  $v$  satisfaz  $\Delta v(x) - \lambda v(x) \geq 0$ , para  $x \in \Omega$  e tem máximo  $v(\bar{x}) > 0$  no ponto  $\bar{x} \in \partial\Omega$ . Pelo Princípio do Máximo (Teorema 8, p. 67, Protter-Weinberger [24]), devemos ter  $\frac{\partial v}{\partial \nu}(\bar{x}) > 0$ , contra a hipótese. Logo,  $u(\bar{x}) \geq 0$  e  $u(x) \geq 0$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ . ■

Decorre do Lema 1 e da forma desacoplada (4.4) do operador  $A$  definido anteriormente que o resolvente  $(\lambda + A)^{-1}$  de  $-A$  é um operador positivo para cada  $\lambda > 0$ . Como (ver Henry [18], p. 23)

$$e^{-At}v = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-n}v$$

para todos  $v \in X$  e  $t \geq 0$ , concluímos que  $e^{-At}$  é um semigrupo de operadores não negativos, isto é, se  $v = (S, u_1, \dots, u_n) \in X$  tem componentes não negativas (e escreveremos  $v \geq 0$ ), então  $e^{-At}v \geq 0$ , para todo  $t \geq 0$ . Deste fato e das propriedades anteriores, concluímos que o cone  $X_+^\alpha$  das funções em  $X^\alpha$  cujas componentes são não negativas é um conjunto fechado e invariante pelo semigrupo  $\{e^{-At} : t \geq 0\}$ .

Como estamos interessados em soluções não negativas de (4.1) e  $f_i$  não está definida para todos os valores de  $S < 0$ , vamos, sem perda de generalidade, redefinir  $f_i$  em todo  $(-\infty, \infty)$  colocando  $f_i(S) = 0$  para  $S \leq -\frac{a_i}{2}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Continuaremos a indicar ainda por  $f_i$  as funções assim redefinidas e podemos supor que são funções de classe  $C^\infty$ . Com essas observações, seja  $F : X^\alpha \rightarrow X$  definida por

$$F(v)(x) = \left(\gamma\left(1 - \frac{S(x)}{K}\right)S(x) - \sum_{j=1}^n m_j f_j(S(x))u_j(x), (m_1 f_1(S(x)) - d_1)u_1(x), \dots, (m_n f_n(S(x)) - d_n)u_n(x)\right), \quad (4.7)$$

para  $x \in \Omega$ . Então vale a seguinte

**Proposição 4.**  *$F$  é Lipschitziana em conjuntos limitados de  $X^\alpha$ . Além disso, para cada conjunto limitado  $B = \{v \in X^\alpha : v \geq 0 \text{ e } \|v\|_\alpha \leq b\}$ , existe um número real positivo  $\beta = \beta(B)$ , tal que  $F(v) + \beta v \geq 0$ , para todo  $v \in B$ .*

*Demonstração.* A primeira afirmação segue imediatamente do fato de que  $X^\alpha \hookrightarrow C^\nu(\Omega)$  e das desigualdades

$$|f_i(S_1) - f_i(S_2)| \leq \frac{1}{a_i}|S_1 - S_2|$$

e

$$|g(S_1) - g(S_2)| \leq \gamma|S_1 - S_2|\left(1 + \frac{1}{K}|S_1 + S_2|\right),$$

para todos  $S_1 \geq 0$ ,  $S_2 \geq 0$ , onde  $g(S) = \gamma\left(1 - \frac{S}{K}\right)S$ . Quanto à segunda afirmação, seja  $B = \{v \in X^\alpha : v \geq 0 \text{ e } \|v\|_\alpha \leq b\}$ . Se  $C$  é a constante de imersão de  $X^\alpha$  em  $C^\nu(\Omega)$ , então

$$0 \leq u_j(x) \leq C\|v\|_\alpha \leq Cb,$$

para todos  $x \in \Omega$ ,  $0 \leq j \leq n$  e  $v \in B$  [tomamos  $u_0 = S$ ].

Escreva  $F = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ . Se  $1 \leq j \leq n$ , para todo  $v = (S, u_1, \dots, u_n) \in B$ , temos

$$F_j(v) + \beta u_j = (m_j f_j(S) - d_j)u_j + \beta u_j \geq (\beta - d_j)u_j \geq 0,$$

se tomarmos  $\beta \geq d_j$ . Se  $j = 0$ , então

$$\begin{aligned} F_0(v) + \beta u_0 &= g(S) + \beta S - \sum_{j=1}^n m_i f_i(S) u_j \\ &\geq g(S) + \beta S - \frac{\max\{m_1, \dots, m_n\}}{\min\{a_1, \dots, a_n\}} S (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \\ &\geq \left[ \gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{\max\{m_1, \dots, m_n\}}{\min\{a_1, \dots, a_n\}} nCb + \beta \right] S \\ &\geq \left[ \gamma \left(1 - \frac{Cb}{K}\right) - \frac{\max\{m_1, \dots, m_n\}}{\min\{a_1, \dots, a_n\}} nCb + \beta \right] S, \end{aligned}$$

pois  $f_i(S) \leq \frac{1}{a_i} S$ , para todos  $S \geq 0$  e  $1 \leq i \leq n$ . Portanto, tomando

$$\beta \geq \max \left\{ d_1, \dots, d_n, -\gamma \left(1 - \frac{Cb}{K}\right) + \frac{\max\{m_1, \dots, m_n\}}{\min\{a_1, \dots, a_n\}} Cnb \right\},$$

obtemos  $F(v) + \beta v \geq 0$ , para todo  $v \in B$  e a proposição está demonstrada.  $\blacksquare$

Com essa notações, o problema (4.1), (4.2) pode ser escrito como uma equação de evolução na forma

$$\begin{cases} \dot{v}(t) + Av(t) = F(v(t)), t > 0 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (4.8)$$

O proximo resultado mostra que o problema (4.1), (4.2) é bem posto em  $X_+^\alpha$ . Primeiro, estudamos soluções fracas de (4.8), isto é, soluções da equação integral correspondente, e depois soluções clássicas. As demonstrações seguem imediatamente dos resultados anteriores e dos Teoremas 3.3.3 e 3.5.2 de Henry [18].

**Teorema 4.** Dado  $v_0 \in X_+^\alpha$ , existe  $t_1 > 0$  e uma única função contínua  $v : [0, t_1) \rightarrow X_+^\alpha$  tal que  $v(0) = v_0$  e

$$v(t) = e^{-At} v_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} F(v(s)) ds,$$

para todo  $0 \leq t < t_1$ . Se  $t_1 < \infty$ , então  $\limsup_{t \rightarrow t_1^-} \|F(v(t))\| = \infty$ . Mais ainda, para cada  $t_2 < t_1$ ,  $v$  é de classe  $C^1$  em  $(0, t_2)$ ,  $v(t) \in X_+^\sigma$ , para todo  $0 < \sigma < \alpha$ , e  $v$  é uma solução clássica de (4.1), (4.2).

*Esboço da Demonstração.* Primeiro, escolhemos  $b > 0$  para que o conjunto  $B = \{v \in X^\alpha : v \geq 0 \text{ e } \|v\|_\alpha \leq b\}$  contenha  $v_0$ . A seguir, escolhemos  $\beta > 0$  para que  $F(w) + \beta w \geq 0$ , para todo

$w \in B$ , conforme a Proposição 4. É claro que se  $v$  é solução de (4.8), então  $w(t) = e^{\beta t}v(t)$  é solução de

$$\begin{cases} \dot{w}(t) + Aw(t) = e^{\beta t}F(e^{-\beta t}w(t)) + \beta w(t) \equiv G(t, w), t > 0 \\ w(0) = v_0, \end{cases}$$

onde  $G$  satisfaz  $G(w) \geq 0$  se  $w \in B$  e  $G$  é Lipschitziana em conjuntos limitados, com constante de Lipschitz  $\text{Lip}(G) = \text{Lip}(F) + |\beta|$ . Portanto,  $w$  é solução de

$$w(t) = e^{-At}v_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}G(s, w(s)) ds.$$

Agora, escolhamos  $\rho > 0$  e  $t_2 > 0$  para que o operador  $T : C([0, t_2], B_\rho) \rightarrow C([0, t_2], B_\rho)$  definido por

$$(Tw)(t) = e^{-At}v_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}G(s, w(s)) ds$$

seja uma contração, onde  $B_\rho = \{v \in X^\alpha : v \geq 0, \|v\|_\alpha \leq b \text{ e } \|v - v_0\| \leq \rho\}$ . Como  $e^{-At} \geq 0$  e  $G(t, w) \geq 0$  para  $t \geq 0$  e  $w \in B_\rho$ , temos  $Tw \geq 0$  e, portanto, o ponto fixo  $w = Tw$  também satisfaz  $w \geq 0$ . O argumento de que  $v$  é solução clássica segue as linhas de Henry [18]; o restante da demonstração é análoga ao caso usual. ■

Pelo Teorema anterior, concluímos que as soluções de (4.1), (4.2) existem num intervalo  $[0, t_1)$ , são não negativas e são soluções clássicas. Dessa forma, as hipóteses preliminares de Smoller [25], p. 199, estão satisfeitas para (4.1), (4.2) e, portanto,  $\Sigma = \mathbb{R}_+^{n+1}$  é um retângulo invariante pelo fluxo de (4.1), (4.2). Para mostrarmos que as soluções são globais, vamos utilizar o seguinte resultado devido a Morgan [23].

**Teorema 5.** *Suponha que  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$  é uma matriz real com elementos  $d_j > 0$ ,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função de classe  $C^1$  e que  $\mathbb{R}_+^m$  é invariante para o sistema*

$$\begin{cases} v_t(x, t) = D\Delta v(x, t) + f(v(x, t)), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

*Suponha que  $v$  é uma solução maximal de (4.9) definida em  $[0, t_1)$  e que existem funções  $H : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  tais que*

- (H1)  $H(z) = \sum_{i=1}^m h_i(z_i)$  para todo  $z \in \mathbb{R}_+^m$ ;
- (H2)  $h_i(z_i) \geq 0$ ,  $h_i''(z_i) \geq 0$  para todos  $z_i \in \mathbb{R}_+$  e  $1 \leq i \leq m$ ;
- (H3)  $H(z) \rightarrow \infty$  se e somente se  $|z| \rightarrow \infty$  em  $\mathbb{R}_+^m$ ;

- (H4) existe uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  satisfazendo  $a_{ij} \geq 0$  e  $a_{ii} > 0$  tal que, para cada  $1 \leq j \leq m$ , existem  $r \geq 0$ ,  $K_1 \geq 0$ ,  $K_2 \geq 0$ , independentes de  $j$ , tais que  $\sum_{i=1}^j a_{ji} h'_i(z_i) f_i(z) \leq K_1(H(z))^r + K_2$  para todo  $z \in \mathbb{R}_+^m$ ;
- (H5) Existem  $q_1 \geq 0$ ,  $K_5 \geq 0$ ,  $K_6 \geq 0$  tais que, para todo  $1 \leq i \leq m$ , tem-se  $h'_i(z_i) f_i(z) \leq K_5(H(z))^{q_1} + K_6$  para todo  $z \in \mathbb{R}_+^m$ ;
- (H6) Existem  $K_7 \geq 0$  e  $K_8 \geq 0$  tais que  $\nabla H(z) \cdot f(z) \leq K_7 H(z) + K_8$  para todo  $z \in \mathbb{R}_+^m$ .

Então,  $t_1 = \infty$ .

**Proposição 5.** As soluções do sistema (4.1), (4.2) estão definidas para todo  $t \geq 0$ .

*Demonstração.* Vamos verificar que as hipóteses do Teorema 5 estão satisfeitas para (4.1), (4.2). Para isso, seja  $v = (S(x, t), u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$  uma solução de (4.1), (4.2). Sejam  $H(S, u_1, \dots, u_n) = S + u_1 + \dots + u_n$ ,  $h_i = u_i$  e  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  satisfazendo  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$  e  $a_{ij} = 1$  para  $i \geq j$ , para  $0 \leq i, j \leq n$ .

Tomando  $r = 1$ ,  $q_1 = 1$ ,  $K_1 = \gamma$ ,  $K_2 = 0$ ,  $K_4 = 0$ ,  $K_5 = \max\{\gamma, m_1, \dots, m_n\}$ ,  $K_6 = 0$ ,  $K_7 = \gamma$ , e  $K_8 = 0$ , então as hipóteses (H1) - (H6) do Teorema 5 estão satisfeitas. De fato, para (H1) - (H3) isso é óbvio. Para  $r = 1$ ,  $K_1 = \gamma$  e  $K_2 = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j a_{ji} h'_i(u_i) f_i(u) &= \gamma u_0 - \frac{\gamma}{K} u_0^2 - d_1 u_1 - \dots - d_n u_n \\ &< \gamma(u_0 + \dots + u_n) = K_1 H(u) + K_2, \end{aligned}$$

logo (H4) é satisfeita. Agora,

$$h'_1 f_1(u) = \gamma u_0 - \frac{\gamma}{K} u_0^2 - \sum_{i=1}^n m_i \frac{u_0 u_i}{a_i + u_0} \leq \gamma H(u)$$

e

$$h'_i f_i(u) = m_i \frac{u_0 u_i}{a_i + u_0} - d_i u_i < m_i u_i < m_i H(u).$$

Portanto, para  $q_1 = 1$ ,  $K_6 = 0$  e  $K_5 = \max\{\gamma, m_1, \dots, m_n\}$ , obtemos a condição (H5). Finalmente,

$$\begin{aligned} \nabla H(u) \cdot f(u) &= \gamma u_0 - \frac{\gamma}{K} u_0^2 - \sum_{i=1}^n m_i \frac{u_0 u_i}{a_i + u_0} + \sum_{i=1}^n m_i \frac{u_0 u_i}{a_i + u_0} - \sum_{i=1}^n d_i u_i \\ &\leq K_7 H(u) + K_8, \end{aligned}$$

para  $K_7 = \gamma$  e  $K_8 = 0$ . Consequentemente, pelo Teorema 5, as soluções do sistema (4.1), (4.2) estão definidas para todo  $t \geq 0$ . ■

**Corolário 3.** O problema (4.1), (4.2) define um semigrupo não linear  $T(t) : X_+^\alpha \rightarrow X_+^\alpha$ .

### 4.3 O atrator global

Nesta seção mostraremos que o sistema (4.1), (4.2) tem um atrator global compacto. Para isso, vamos mostrar inicialmente que as soluções são uniformemente limitadas numa norma mais fina, usando um argumento empregado por N. Alikakos [2] (ver também Henry [18] e H. Smith [7]).

Primeiramente, vamos mostrar que a primeira componente de uma solução de (4.1), (4.2) é uniformemente limitada na norma de  $L^\infty$ .

**Proposição 6.** *Seja  $u = (S, u_1, \dots, u_n)$  uma solução de (4.1), (4.2) com condição inicial  $u(\cdot, 0) \geq 0$ . Então, existe  $0 < d \leq \gamma$  tal que se  $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ , então*

$$0 \leq S(x, t) \leq \frac{2K\gamma}{d} + e^{-dt} \max_{x \in \bar{\Omega}} S_0(x).$$

*Demonstração.* Seja  $d = \min\{\gamma, d_1, \dots, d_n\}$ . Comparando os gráficos da reta  $y = -dS + b$  e da parábola  $y = \gamma(1 - \frac{S}{K})S$ , concluímos que  $\gamma(1 - \frac{S}{K})S \leq -dS + 2K\gamma$ , para todo  $S \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $S$  satisfaz

$$\begin{cases} S_t \leq \delta_0 \Delta S - dS + 2k\gamma, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial S}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ S(x, 0) = S_0(x), & x \in \Omega, \quad S_0(x) \geq 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

e, portanto,  $S(x, t) \leq w(x, t)$ , onde  $w$  é a solução de

$$\begin{cases} w_t = \delta_0 \Delta w - dw + 2k\gamma, & (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ w(x, 0) = S_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.11)$$

Escrevendo  $w(x, t) = z(x, t)e^{-dt} + \frac{2K\gamma}{d}(1 - e^{-dt})$ , então  $z$  satisfaz

$$\begin{cases} z_t = \delta_0 \Delta z & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ z(x, 0) = S_0(x), & x \in \Omega, \quad S_0(x) \geq 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Pelo Princípio do Máximo Forte para equações parabólicas (ver, por exemplo, Protter-Weinberger [24], p. 174), o máximo ou mínimo de  $z(x, t)$  ocorre em  $t = 0$ . Consequentemente,  $0 \leq z(x, t) \leq \max_{x \in \Omega} z(x, 0)$ , para todo  $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$  e, portanto,

$$0 \leq S(x, t) \leq \frac{2K\gamma}{d}(1 - e^{-dt}) + e^{-dt} \max_{x \in \Omega} S_0(x),$$

para  $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ . ■

Para obter limitação das outras componentes da solução na norma  $L^\infty$ , vamos primeiro encontrar uma limitação na norma  $L^1$  e usar um argumento de Alikakos [2].

**Proposição 7.** *Sejam  $d = \min\{\gamma, d_1, \dots, d_n\}$  e  $u(\cdot, t)$  uma solução de (4.1), (4.2). Então*

$$\sum_{i=0}^n \|u_i(\cdot, t)\|_{L^1} \leq e^{-dt} \sum_{i=0}^n \|u_i(\cdot, 0)\|_{L^1} + \frac{|\Omega|K\gamma}{d}(1 - e^{-dt})$$

*Demonstração.* No cálculo a seguir, seja  $S = u_0$ . Somando as equações de (4.1), integrando em  $\Omega$  e usando as Identidades de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n u_i(x, t) dx &= \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \delta_i \Delta u_i + \int_{\Omega} \gamma \left(1 - \frac{u_0}{K}\right) u_0 - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n m_i \frac{u_0 u_i}{a_i + u_i} \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n m_i \frac{u_0 u_i}{a_i + u_i} - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n d_i u_i \\ &= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=0}^n \delta_i \frac{\partial u_i}{\partial \mu} + \int_{\Omega} \gamma \left(1 - \frac{u_0}{K}\right) u_0 - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n d_i u_i \quad (4.13) \\ &\leq \int_{\Omega} \left[ -du_0(x, t) + 2K\gamma - \sum_{i=1}^n du_i(x, t) \right] dx \\ &= -d \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n u_i(x, t) dx + |\Omega|K\gamma. \end{aligned}$$

Agora pela desigualdade de Gronwall temos

$$\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n u_i(x, t) dx \leq e^{-dt} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n u_i(x, 0) dx + \frac{|\Omega|K\gamma}{d}(1 - e^{-dt}), \quad (4.14)$$

isto é,

$$\sum_{i=0}^n \|u_i(\cdot, t)\|_{L^1} \leq e^{-dt} \sum_{i=0}^n \|u_i(\cdot, 0)\|_{L^1} + \frac{|\Omega|K\gamma}{d}(1 - e^{-dt})$$

para todo  $t \geq 0$ . ■

**Observação 1.** *De acordo com a Proposição anterior temos que, se  $\|u(\cdot, 0)\|_{L^1}$  é limitado, então  $\|u(\cdot, t)\|_{L^1}$  é limitado para todo  $t \geq 0$ .*

**Proposição 8.** *Suponha que  $u_i(x, t) \geq 0$ ,  $0 \leq i \leq n$  é uma solução do sistema (4.1), (4.2) e suponha que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} u_i(x, t) dx < C$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Então, existe uma constante  $C^*$ , que depende apenas de  $C$  e de  $\|u_i(\cdot, 0)\|_{L^\infty}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tal que  $\sup_{t \geq 0} \|u_i(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C^*$ .*

*Demonstração.* Para simplificar a notação, escrevamos, para  $1 \leq i \leq n$ , uma das equações do sistema (4.1) como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta \Delta u + F(u)$$

onde  $F(u) = m \frac{u_0}{a+u_0} u - du$ . Desta forma, multiplicando esta última equação por  $u^{2^k-1}$ , integrando em  $\Omega$ , usando as Identidades de Green e a desigualdade  $F(u) \leq mu$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2^k} \int_{\Omega} u^{2^k} dx \right) &= \delta \int_{\Omega} (\Delta u) u^{2^k-1} dx + \int_{\Omega} u^{2^k-1} F(u) dx \\ &\leq -\frac{2^k-1}{2^{2k-2}} \delta \int_{\Omega} |\nabla(u^{2^k-1})|^2 dx + m \int_{\Omega} u^{2^k} dx. \end{aligned} \quad (4.15)$$

De fato,

$$\int_{\Omega} (\Delta u) u^{2^k-1} dx = \int_{\partial\Omega} u^{2^k-1} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla(u^{2^k-1}) dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla(u^{2^k-1}) dx,$$

já que  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ . Como  $\nabla u^{2^k-1} = 2^{k-1} u^{2^k-2} \nabla u$ , temos

$$|\nabla(u^{2^k-1})|^2 = \nabla(u^{2^k-1}) \nabla(u^{2^k-1}) = 2^{2k-2} u^{2^k-2} |\nabla u|^2;$$

por outro lado,  $\nabla u \nabla(u^{2^k-1}) = (2^k - 1) u^{2^k-2} |\nabla u|^2$  e, conseqüentemente,

$$\nabla u \nabla(u^{2^k-1}) = \frac{2^k - 1}{2^{2k-2}} |\nabla(u^{2^k-1})|^2.$$

Equivalentemente, já que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2^k} \int_{\Omega} u^{2^k} dx \right) = \frac{1}{2^{k-1}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^{2^k-1})^2 dx \right),$$

temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^{2^k-1})^2 dx \right) \leq -\frac{2^k-1}{2^{k-1}} \delta \int_{\Omega} |\nabla(u^{2^k-1})|^2 dx + 2^{k-1} m \int_{\Omega} (u^{2^k-1})^2 dx. \quad (4.16)$$

Sejam

$$w = u^{2^k-1}, \quad \delta_k = \delta \frac{2^k-1}{2^{k-1}}, \quad m_k = m 2^{k-1}. \quad (4.17)$$

Então, (4.16) assume a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2 dx \right) \leq -\delta_k \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + m_k \int_{\Omega} w^2 dx. \quad (4.18)$$



Usando a desigualdade de Nirenberg-Gagliardo e em seguida a desigualdade de Young obtemos

$$\int_{\Omega} w^2 dx \leq \epsilon \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + C_{\epsilon} \left( \int_{\Omega} w dx \right)^2, \quad (4.19)$$

onde  $C_{\epsilon} = \epsilon + C\epsilon^{-\frac{N}{2}}$  e  $C$  é uma constante positiva. Para ver isto, observe que pela desigualdade de Nirenberg-Gagliardo, a saber

$$\|w\|_{W^{k,p}} \leq C \|w\|_{W^{m,q}}^{\theta} \|w\|_{L^r}^{(1-\theta)}$$

onde  $p \geq q$ ,  $p \geq r$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  e  $k - \frac{N}{p} \leq \theta(m - \frac{N}{q}) - \frac{N(1-\theta)}{r}$  ou  $\theta \geq \frac{N}{2+N}$ , temos

$$\|w\|_2^2 = \int_{\Omega} w^2 dx = \|w\|_{W^{0,2}}^2 \leq C \|w\|_{W^{1,2}}^{2\theta} \|w\|_{L^1}^{2(1-\theta)}.$$

Agora considere a desigualdade de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} \quad \text{com} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ou equivalentemente trocando  $a$  por  $\epsilon^{\frac{1}{p}}a$  e  $b$  por  $\epsilon^{-\frac{1}{p}}b$  obtemos  $ab \leq \epsilon a^p + \epsilon^{-\frac{q}{p}}b^q$ , onde  $p$  e  $q$  não são necessariamente as mesmas constantes como na desigualdade de Nirenberg-Gagliardo. Pela desigualdade anterior, se trocamos  $\|w\|_{W^{1,2}}^{2\theta}$  por  $(\frac{\epsilon}{c})^{\frac{1}{p}}\|w\|_{W^{1,2}}^{2\theta}$  e  $\|w\|_{L^1}^{2(1-\theta)}$  por  $\frac{\epsilon}{c}^{-\frac{1}{p}}\|w\|_{L^1}^{2(1-\theta)}$ , então

$$\begin{aligned} C \|w\|_{W^{1,2}}^{2\theta} \|w\|_{L^1}^{2(1-\theta)} &\leq C \left[ \left( \left( \frac{\epsilon}{c} \right)^{\frac{1}{p}} \|w\|_{W^{1,2}}^{2\theta} \right)^p + \left( \left( \frac{\epsilon}{c} \right)^{-\frac{1}{p}} \|w\|_{L^1}^{2(1-\theta)} \right)^q \right] \\ &= \epsilon \|w\|_{W^{1,2}}^{\frac{2\theta}{p}} + C^{\frac{q}{p}} \epsilon^{-\frac{q}{p}} \|w\|_{L^1}^{2(1-\theta) \frac{1}{1-\theta}} \\ &= \epsilon \|w\|_{W^{1,2}}^2 + C \epsilon^{-\frac{N}{2}} \|w\|_{L^1}^2 \quad (4.20) \\ &= \epsilon [\|\nabla w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^1}^2] + C \epsilon^{-\frac{N}{2}} \|w\|_{L^1}^2 \\ &= \epsilon \|\nabla w\|_{L^2}^2 + (\epsilon + C \epsilon^{-\frac{N}{2}}) \|w\|_{L^1}^2 \end{aligned}$$

onde  $p = \frac{1}{\theta}$ ,  $q = \frac{1}{1-\theta}$ ,  $C_{\epsilon} = C\epsilon^{-\frac{N}{2}}$ ,  $\theta = \frac{N}{2+N}$  e usamos a seguinte norma equivalente em  $W^{1,2}(\Omega)$ :  $\|w\|_{W^{1,2}(\Omega)} = [\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + (\int_{\Omega} w dx)^2]^{\frac{1}{2}}$ . Consequentemente,

$$\|w\|_2 = \epsilon \|\nabla w\|_{L^2}^2 + C_{\epsilon} \|w\|_{L^1}^2 \quad \text{onde} \quad C_{\epsilon} = \epsilon + C \epsilon^{-\frac{N}{2}}. \quad (4.21)$$

Substituindo  $\epsilon$  por  $\epsilon_k$  em (4.20) obtemos, depois de multiplicar cada lado de (4.19) por  $(m_k + \epsilon_k)$  e rearranjar,

$$-(m_k + \epsilon_k) \epsilon_k \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq -(m_k + \epsilon_k) \int_{\Omega} w^2 dx + (m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} \left( \int_{\Omega} w dx \right)^2. \quad (4.22)$$

Escolhendo  $\epsilon_k$  tal que  $m_k \epsilon_k + \epsilon_k^2 \leq \delta_k$  obtemos a partir de (4.18) via (4.22) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2 dx \right) &\leq -\delta_k \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + m_k \int_{\Omega} w^2 dx \\
&\leq -(m_k + \epsilon_k) \epsilon_k \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + m_k \int_{\Omega} w^2 dx \\
&\leq -(m_k + \epsilon_k) \int_{\Omega} w^2 dx + (m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} \left( \int_{\Omega} w dx \right)^2 \\
&\quad + m_k \int_{\Omega} w^2 dx \\
&< -\epsilon_k \int_{\Omega} w^2 dx + (m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} w dx]^2
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde  $\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} w dx$  é uma constante que domina  $\int_{\Omega} w dx$  para  $t \geq 0$ . Para obter a última desigualdade, usamos a hipótese de indução  $\sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} u(x, t) dx < C$  como segue

- Se  $k = 1$  então  $w = u$  e, portanto, a derivada da norma  $L^2$  de  $u$  satisfaz, por (4.23), a desigualdade

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \right) &\leq -\epsilon_k \int_{\Omega} u^2 dx + (m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} \left[ \int_{\Omega} u dx \right]^2 \\
&< -\epsilon_k \int_{\Omega} u^2 dx + (m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u dx]^2 \\
&= -\epsilon_k \int_{\Omega} u^2 dx + (m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} C^2.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u(x, t)^2 dx &< e^{-2\epsilon_k t} \int_{\Omega} u(x, 0)^2 dx + \frac{(m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} C^2}{\epsilon_k} (1 - e^{-2\epsilon_k t}) \\
&< e^{-2\epsilon_k t} |\Omega| \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty}^2 + \frac{(m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} C^2}{\epsilon_k} (1 - e^{-2\epsilon_k t}) < C_1
\end{aligned}$$

para  $t \geq 0$  ( $|\Omega|$  indica a medida de  $\Omega$ ).

- Se  $k = 2$  então  $w = u^2$  e, portanto, a derivada da norma  $L^4$  de  $u$  satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^4 dx \right) &< -\epsilon_k \int_{\Omega} u^4 dx + (m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^2 dx]^2 \\
&= -\epsilon_k \int_{\Omega} u^4 dx + (m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} C_1
\end{aligned}$$

pela observação anterior. A desigualdade de Gronwall nos fornece para  $t \geq 0$

$$\int_{\Omega} u(x, t)^4 dx < e^{-2\epsilon_k t} |\Omega| \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty}^4 + \frac{(m_k + \epsilon_k) C_{\epsilon_k} C_1^2}{\epsilon_k} (1 - e^{-2\epsilon_k t}) < C_2.$$

Seguindo esta ideia, obtemos o desejado para  $k = 1, 2, \dots$ . Consequentemente, a partir de (4.23)

$$\int_{\Omega} w^2 dx \leq e^{-2\epsilon_k t} |\Omega| \|w(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} w dx]^2 (1 - e^{-2\epsilon_k t})$$

Voltando à notação anterior para  $w$  considerando (4.17) e assumindo por conveniência que  $|\Omega| = 1$  obtemos a partir das observações acima que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{2k} dx &\leq e^{-2\epsilon_k t} \|u^{2k-1}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 (1 - e^{-2\epsilon_k t}) \\ &= e^{-2\epsilon_k t} \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^{2k} + \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 (1 - e^{-2\epsilon_k t}) \\ &\leq \max \left\{ \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2, \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^{2k} \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

De fato,

- Se  $\frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2$  é o máximo, então

$$e^{-2\epsilon_k t} [\|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^{2k} - \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2] \leq 0, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{2k} dx &\leq e^{-2\epsilon_k t} \left[ \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^{2k} - \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 \right] \\ &\quad + \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 \\ &\leq \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 \end{aligned}$$

- Se  $\|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^{2k}$  é o máximo então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{2k} dx &\leq e^{-2\epsilon_k t} \|u^{2k-1}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 (1 - e^{-2\epsilon_k t}) \\ &= e^{-2\epsilon_k t} \left[ \|u^{2k-1}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 - \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 \right] \\ &\quad + \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 \\ &\leq \|u^{2k-1}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 - \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 \\ &\quad + \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} [\text{bound}_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{2k-1} dx]^2 \\ &= \|u^{2k-1}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}^2, \quad \text{já que } e^{-2\epsilon_k t} \leq 1. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade podemos supor também que  $\frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} \geq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$  e que  $C$ , a constante que domina  $\int_{\Omega} u(x, t) dx$  para  $t \geq 0$ , também domina  $\|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Levando em conta todas as observações anteriores obtemos, de (4.24), a desigualdade

$$\int_{\Omega} u^{2k} dx \leq \left( \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} \right)^{2^0} \left( \frac{(m_{k-1} + \epsilon_{k-1})C_{\epsilon_{k-1}}}{\epsilon_{k-1}} \right)^2 \dots \left( \frac{(m_1 + \epsilon_1)C_{\epsilon_1}}{\epsilon_1} \right)^{2^{k-1}} C^{2^k}. \quad (4.25)$$

De fato, note que  $X_0 = \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ ; introduzindo a notação

$$\int_{\Omega} u^{2k} dx = X_k; \quad C_k = \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k},$$

temos

$$X_1 \leq \max\{C_1 X_0^2, C^2\}$$

$$X_2 \leq \max\{C_2 X_1^2, C^{2^2}\} \leq \max\{C_2 \max\{C_1^2 X_0^2, C^{2^2}\}, C^{2^2}\}$$

$$= \max\{\max\{C_2 C_1^2 X_0^2, C_2 C^{2^2}\}, C^{2^2}\} = \max\{C_2 C_1^2 X_0^2, C_2 C^{2^2}\}$$

$$\text{já que } C_k = \frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} \geq 1.$$

$$X_3 \leq \max\{C_3 X_2^2, C^{2^3}\} \leq \max\{\max\{C_3 C_2^2 C_1^2 X_0^2, C_3 C_2^2 C^{2^3}\}, C^{2^3}\} \quad (4.26)$$

$$= \max\{C_3 C_2^2 C_1^2 X_0^2, C_3 C_2^2 C^{2^3}\}$$

⋮  
⋮  
⋮

$$X_k \leq \max\{C_k C_{k-1}^2 C_{k-2}^2 \dots C_1^{2^{k-1}} X_0^{2^k}, C_k C_{k-1}^2 C_{k-2}^2 \dots C_2^{2^{k-1}} C^{2^k}\}.$$

Agora como  $X_0 \leq C$  temos  $X_0^{2^k} \leq C^{2^k}$ , logo  $X_k \leq C_k C_{k-1}^2 C_{k-2}^2 \dots C_1^{2^{k-1}} C^{2^k}$ , como queríamos demonstrar.

A meta final é estimar o lado direito de (4.25) e mostrar que ele se comporta como uma contante da forma  $(\text{const.})^{2^k}$ . Então, tomando a potência  $\frac{1}{2^k}$  de ambos os lados de (4.25), podemos passar o limite e obter a estimativa  $L^\infty$ .

De (4.21),  $C_\epsilon$  se comporta como  $\frac{1}{2^\lambda}$ , onde  $\lambda = \frac{N}{2}$  já que  $C_\epsilon = \epsilon + C\epsilon^{-\frac{N}{2}} = (\epsilon^{\frac{N+2}{2}} + C)\epsilon^{-\frac{N}{2}}$ .

Sem perda de generalidade temos

$$\frac{(m_k + \epsilon_k)C_{\epsilon_k}}{\epsilon_k} \leq 2^{k(\lambda+2)}\bar{m}, \quad \bar{m} \gg m. \quad (4.27)$$

Para ver isto, note que  $\epsilon_k$  foi escolhido anteriormente para satisfazer a desigualdade

$$m_k \epsilon_k + \epsilon_k^2 \leq \delta_k. \quad (4.28)$$

De fato, a desigualdade anterior é equivalente a

$$m2^{k-1}\epsilon_k + \epsilon_k^2 - \delta \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} \leq 0;$$

logo,  $\epsilon_k$  deve pertencer ao intervalo

$$\epsilon_k \in \left( 0, \frac{1}{4}2^k m \left( -1 + \sqrt{\frac{1}{2^k}(2^{3k}m^2 - 32\delta + 32 \cdot 2^k \delta)} \right) \right],$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \epsilon_k &\leq \frac{1}{4}(-2^k m + \sqrt{\frac{1}{2^k}(2^{3k}m^2 - 32\delta + 32 \cdot 2^k \delta)}) \\ &\leq \frac{1}{4}(-2^k m + \sqrt{2^{2k}m^2 + 32\delta}) \\ &= \frac{1}{4}(-2^k m + \sqrt{2^{2k}m^2 + 32\delta}) \frac{2^k m + \sqrt{2^{2k}m^2 + 32\delta}}{2^k m + \sqrt{2^{2k}m^2 + 32\delta}} \\ &\leq \frac{8\delta}{\sqrt{2^{2k}m^2 + 32\delta} + 2^{2k}m} \leq \frac{8\delta}{\sqrt{2^{2k}m^2 + 2^{2k}m}} \\ &= \frac{4\delta}{2^k m} = \frac{\text{const.}}{2^k}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Logo, usando a definição para  $\delta_k$  e  $a_k$  em (4.17), obtemos que  $\epsilon_k$  pode ser escolhido da ordem  $\frac{1}{2^{2k}}$ . Consequentemente, o lado direito de (4.25) torna-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{2^k} dx &\leq (2^{k(\lambda+2)}\bar{m})^{2^0} (2^{(k-1)(\lambda+2)}\bar{m})^{2^1} (2^{(k-2)(\lambda+2)}\bar{m})^{2^2} \dots (2^{(k-(k-1))(\lambda+2)}\bar{m})^{2^{k-1}} \cdot C^{2^k} \\ &= m^{2^{k-1}} \cdot 2^{(\lambda+2)(k+2(k-1)+2^2(k-2)+\dots+2^{k-1}(k-(k-1)))} C^{2^k} \\ &= m^{2^{k-1}} \cdot 2^{(\lambda+2)(-k+2^{k+1}-2)} C^{2^k}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tomando potência  $\frac{1}{2^k}$  de ambos os lados de (4.30) e em seguida o limite quando  $k \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( m^{\frac{2^k-1}{2^k}} \cdot 2^{(\lambda+2)\left(\frac{-k+2^{k+1}-2}{2^k}\right)} \cdot C \right) \\ &= m \cdot 2^{2(\lambda+2)} \cdot C, \end{aligned} \quad (4.31)$$

o termina a demonstração. ■

**Teorema 6.** *Considerando a notações da seção 4.2, suponha que as hipóteses da Proposição 8 valem. Então, existe uma constante positiva  $C$  tal que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u_i(t, \cdot)\|_{X^\alpha} < C$ .*

*Demonstração.*

Representaremos a solução do problema (4.8) por  $U(t) = (u_0(t), u_1(t), \dots, u_n(t))$ . Pela fórmula de variação das constantes

$$U(t) = e^{-At}U(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)}F(U(s))ds \quad (4.32)$$

onde  $A$  e  $F$  são definido na seção 4.2. Aplicando  $A^\alpha$  a ambos os lados de (4.32) temos

$$A^\alpha(U(t)) = A^\alpha e^{-At}U(0) + \int_0^t A^\alpha e^{-A(t-s)}F(U(s))ds.$$

Agora, das estimativas obtidas na Proposição (8) para todo  $p \geq 1$ , existe uma constante  $C$  tal que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|F(U(s))\|_p < C.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X^\alpha} &= \|A^\alpha(U(t))\| \\ &\leq \|A^\alpha e^{-At}U(0)\|_p + \int_0^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\|_X \|F(U(s))\|_p ds \\ &\leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \|U(0)\|_p + \int_0^t C C_\alpha (t-s)^{-\alpha} e^{-\delta(t-s)} ds \\ &\leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \|U(0)\|_p + \int_0^\infty C C_\alpha r^{-\alpha} e^{-\delta r} dr. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Consequentemente, com a estimativa (4.33) obtemos o desejado. ■

**Corolário 4.** *O sistema (4.1), (4.2) define um semigrupo não linear  $T(t) : X_+^\alpha \rightarrow X_+^\alpha$  com as seguintes propriedades:*

- i)  $T(t)$  é compacto para  $t > 0$ ;*
- ii)  $T(t)$  é ponto dissipativo. Isto é, existe um conjunto limitado  $B \subset X_+^\alpha$  tal que, para todo  $v \in X_+^\alpha$ , existe um  $T = T(v) > 0$  tal que  $T(t)v \in B$  para  $t \geq T$ ;*
- iii) Órbitas de conjuntos limitados são limitadas. Isto é,  $\{T(t)C; t \geq 0\}$  é limitado, para qualquer subconjunto limitado  $C \subset X_+^\alpha$ .*

*Demonstração.* Observamos que no mergulho

$$X^\alpha \text{ é mergulhado em } C^\nu(\Omega) \times \dots \times C^\nu(\Omega),$$

a norma uniforme na Proposição 8 pode ser substituída pela norma  $C^\nu$  para algum  $\nu > 0$ . Por outro lado,  $C^\nu$  está compactamente mergulhado em  $C(\bar{\Omega})$ , logo segue a parte (i). Para provar (ii), escolhemos  $B$  como sendo a bola em  $X_+^\alpha$  de raio  $2C$  onde  $C$  é a constante dada no Teorema 6. Finalmente, a parte (iii) segue do Teorema 6. ■

**Corolário 5.** *O sistema (4.1) possui um atrator global compacto.*

*Demonstração.* Segue do Corolário 4 e dos Teoremas dados em J. Hale [26]. ■

# Bifurcação zip em um sistema de reação-difusão

Neste capítulo, analisaremos um sistema de reação-difusão de dimensão  $(n + 1)$ , modelando a competição entre  $n$  espécies de predadores por uma espécie de presa. A taxa de crescimento da presa é uma função da capacidade de carga do meio ambiente. Mostraremos que aumentando a capacidade de carga o modelo exibe uma *bifurcação zip*.

## 5.1 Introdução

Nessa parte final do trabalho, vamos examinar a estabilidade ou instabilidade de equilíbrios constantes do problema (4.1), (4.2) sob as mesmas hipóteses estudadas no Capítulo 2. Especificamente, vamos considerar o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) = \delta_0 \Delta S + \gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \sum_{i=1}^n m_i f_i(S) u_i & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) = \delta_i \Delta u_i + (m_i f_i(S) - d_i) u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (5.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 1, 2, 3$ , é um domínio aberto conexo limitado com fronteira suave  $\partial\Omega$ . Admitiremos ainda que as funções  $S$  e  $u_i$  satisfazem condições de Neumann na fronteira

$$\frac{\partial S}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (5.2)$$

onde  $\nu = \vec{\nu}(x)$  indica a normal unitária exterior em pontos  $x \in \partial\Omega$ .

$S$  indica a densidade de população de uma presa,  $u_i$  indica a densidade de população de um predador  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $K > 0$  é a capacidade de carga do meio ambiente com relação à



presa,  $\gamma > 0$  é a taxa de crescimento intrínseco da presa,  $m_i$  e  $d_i$  são parâmetros não negativos e representam a taxa máxima de natalidade e a taxa de mortalidade, respectivamente, do predador  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$  são os coeficientes de difusão.

Admitiremos que a resposta funcional de cada predador  $i$  é do tipo II de Holling, isto é, ela é dada por uma função  $f_i$  da forma  $f_i(S) = S/(a_i + S)$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são constantes não-negativas que satisfazem

$$0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1. \quad (5.3)$$

Vamos fixar nossa atenção no fenômeno de bifurcação zip. Exceto pelas soluções ‘triviais’  $(S, u_1, \dots, u_n) = (0, 0, \dots, 0)$  e  $(S, u_1, \dots, u_n) = (K, 0, \dots, 0)$ , o sistema (5.1), (5.2) tem soluções espacialmente homogêneas não triviais se e somente se  $m_i > d_i$  e as soluções  $S$  das equações  $f_i(S) = d_i/m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  coincidem, isto é,

$$\frac{a_1 d_1}{m_1 - d_1} = \frac{a_2 d_2}{m_2 - d_2} = \dots = \frac{a_n d_n}{m_n - d_n}. \quad (5.4)$$

Indicaremos o valor comum das grandezas  $\lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i}$  por  $\lambda$ . Daqui em diante, suporemos que  $m_i > d_i$  e  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ . Nessas condições, os equilíbrios espacialmente homogêneos de (5.1), (5.2) são  $(0, 0, \dots, 0)$ ,  $(K, 0, \dots, 0)$  e os pontos da variedade linear  $H_K$  de dimensão  $(n - 1)$  definida por

$$H_K = \left\{ (\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \sum_{i=1}^n \frac{m_i \xi_i}{a_i + \lambda} = \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) \right\}. \quad (5.5)$$

O sistema linearizado num ponto  $(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$  pertencente a  $H_K$  é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \delta_0 \Delta S + \left( -\frac{\gamma \lambda}{K} + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{m_i \xi_i}{(a_i + \lambda)^2} \right) S - \sum_{i=1}^n \frac{m_i \lambda}{a_i + \lambda} u_i & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = \delta_i \Delta u_i + \frac{\beta_i \xi_i}{a_i + \lambda} S, \quad i = 1, 2, \dots, n & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \end{cases} \quad (5.6)$$

com condições de fronteira (5.2), onde  $\beta_i = m_i - d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Na próxima seção fixaremos nossa atenção ao estudo da estabilidade das soluções constantes de (5.1), (5.2) pertencentes a  $H_K$ .

## 5.2 O problema linearizado

Sejam  $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots \rightarrow \infty$  e  $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$  os autovalores e as autofunções do Laplaciano na região  $\Omega$  com condição de Neumann na fronteira:

$$\begin{cases} \Delta \psi_k = \lambda_k \psi_k & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial \Omega. \end{cases} \quad (5.7)$$

Podemos supor que  $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$  constitui uma base ortonormal de  $L^2(\Omega)$ .

Vamos primeiro escrever (5.6), (5.2) na forma vetorial. Sejam  $w = (S, u_1, \dots, u_n)$ ,  $D = \text{diag}(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n)$  e  $J$  a matriz

$$J = \begin{pmatrix} \lambda \sum_{i=1}^n \frac{m_i \xi_i}{(a_i + \lambda)^2} - \frac{\gamma \lambda}{K} & -\frac{m_1 \lambda}{a_1 + \lambda} & -\frac{m_2 \lambda}{a_2 + \lambda} & \dots & -\frac{m_{n-1} \lambda}{a_{n-1} + \lambda} & -\frac{m_n \lambda}{a_n + \lambda} \\ \frac{\beta_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\beta_{n-1} \xi_{n-1}}{a_{n-1} + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_n \xi_n}{a_n + \lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, (5.6), (5.2) pode ser escrito como

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \Delta w + J w.$$

Portanto, a solução de (5.6), (5.2) com condição inicial  $w(\cdot, 0) = w_0$  é dada por

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(J - \mu_k D)t} \langle w_0, \psi_k \rangle \psi_k(x), \quad (5.8)$$

onde  $\langle w_0, \psi_k \rangle = \int_{\Omega} w_0(x) \psi_k(x) dx$ .

A expressão (5.8) mostra que a solução nula de (5.6), (5.2) é assintoticamente estável se e somente se os autovalores de todas as matrizes  $J - \mu_k D$  têm parte real negativa; se existe um  $k \geq 1$  tal que  $J - \mu_k D$  tem um autovalor com parte real positiva, então a solução nula do referido sistema é instável.

Observe que para  $k = 0$  temos  $\mu_0 = 0$  e portanto a matriz  $J$  tem zero como um autovalor de multiplicidade  $(n - 1)$  e os dois autovalores restantes (supostos diferentes de zero) têm parte real positiva (respectivamente, negativa) de acordo com

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i \xi_i}{(a_i + \lambda)^2} > \frac{\gamma}{K} \quad \text{ou} \quad < \frac{\gamma}{K}. \quad (5.9)$$

**Proposição 9.** *Se  $K > a_1 + 2\lambda$ , então todo equilíbrio em  $H_K$  é instável.*

### 5.3 O caso $n = 2$

Com o objetivo de simplificar a exposição, vamos doravante assumir que  $n = 2$  e vamos examinar o efeito da difusão na persistência do fenômeno de bifurcação zip. Vamos examinar dois casos: no primeiro consideraremos coeficientes de difusão iguais e no segundo, distintos.

No primeiro caso, temos  $D = \delta I$  e portanto o polinômio característico  $p_k(\nu)$  de  $J - \mu_k D$  se escreve como

$$p_k(\nu) = \det(J - \mu_k D - \nu I) = \det(J - (\mu_k \delta + \nu)I) = 0.$$

Portanto, os autovalores de  $J - \mu_k D$  são  $\nu_k^j = -\mu_k \delta + z_j$ , onde  $z_1, z_2, z_3$  são as raízes do polinômio (1.6):

$$P(z) = z \left[ z^2 + z\lambda \left( \frac{\gamma}{K} - \frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) + \lambda \left( \frac{\beta_1 m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{\beta_2 m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} \right) \right].$$

**Proposição 10.** *Suponha que  $D = \delta I$ . Se  $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$ , então cada equilíbrio  $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in H_K$  de (5.1), (5.2) é assintoticamente estável. Se  $K > a_1 + 2\lambda$ , então  $(\lambda, \xi_1, \xi_2)$  é instável.*

*Demonstração.* Se  $k \geq 1$ , todos os autovalores de  $J - \mu_k D$  têm parte real negativa. Quando  $k = 0$ , zero é um autovalor simples de  $J$ . Logo, as hipóteses de Henry [18], pag. 108 estão satisfeitas e portanto a família  $H_K$  dos equilíbrios é assintoticamente estável. ■

Vamos agora examinar o caso em que  $D = \delta I$  e  $a_2 + 2\lambda < K < a_1 + 2\lambda$ . Como vimos na Introdução, neste caso, existe um ponto  $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K)) \in H_K$  tal que os equilíbrios no conjunto  $H_U = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in H_K : \xi_1 < \xi_1(K)\}$  são instáveis e os equilíbrios no conjunto  $H_S = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in H_K : \xi_1 > \xi_1(K)\}$  são estáveis no sentido de Liapunov. O ponto  $(\xi_1(K), \xi_2(K))$  é determinado resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{m_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} & = \frac{\gamma(K - \lambda)}{K} \\ \frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} & = \frac{\gamma}{K} \end{cases} \quad (5.10)$$

Como dissemos na Introdução, se  $E$  é um equilíbrio instável com relação fluxo de (1.1), então  $E$  é também instável com relação ao fluxo de (5.1), (5.2), pois o subespaço das funções independentes de  $x$  é invariante pelo fluxo de (5.1), (5.2). Vamos demonstrar a seguir que se  $E$  é estável com relação fluxo de (1.1), então  $E$  é também estável com relação ao fluxo de (5.1), (5.2), *independentemente* da matriz diagonal de difusão  $D = \text{diag}(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ . Isso é um fato surpreendente e mostra, em particular, que o fenômeno de bifurcação zip nesse modelo é preservado pela introdução de difusão no sistema (1.1).

**Teorema 7.** *Suponha que  $E$  seja um equilíbrio espacialmente homogêneo de (5.1), (5.2). Se  $E$  é estável com relação ao fluxo de (1.1), então  $E$  é estável com relação ao fluxo de (5.1), (5.2), independentemente da matriz positiva definida  $D = \text{diag}(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ .*

*Demonstração.* Seja  $E = (\lambda, \xi_1, \xi_2)$  um equilíbrio espacialmente homogêneo do sistema (5.1), (5.2). Então,  $\lambda < K$  e  $(\xi_1, \xi_2)$  satisfaz

$$\frac{m_1 \xi_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 \xi_2}{a_2 + \lambda} = \frac{\gamma(K - \lambda)}{K}.$$

A hipótese de que  $E$  é estável para (1.1) é equivalente a

$$\frac{m_1 \xi_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \xi_2}{(a_2 + \lambda)^2} < \frac{\gamma}{K}. \quad (5.11)$$

Vamos escrever o polinômio característico da matriz  $J - \mu_k D$ , onde  $J$  é a matriz jacobiana do campo de vetores (1.1) calculada em  $E$ . Para efeito de simplicidade dos cálculos introduziremos a notação

$$a = \lambda \sum_{i=1}^2 \frac{m_i \xi_i}{(a_i + \lambda)^2} - \frac{\gamma \lambda}{K}, \quad b = \frac{\beta_1 \xi_1}{a_1 + \lambda}, \quad c = \frac{\beta_2 \xi_2}{a_2 + \lambda}, \quad d = -\frac{m_1 \lambda}{a_1 + \lambda}, \quad e = -\frac{m_2 \lambda}{a_2 + \lambda},$$

de forma a matriz  $J - \mu_k D$  se escreve como

$$J - \mu_k D = \begin{pmatrix} a - \mu_k \delta_0 & d & e \\ b & -\mu_k \delta_1 & 0 \\ c & 0 & -\mu_k \delta_2 \end{pmatrix}.$$

A condição (5.11) significa que  $a < 0$ . Com essas notações, para cada  $k \geq 0$ , os autovalores de  $J - \mu_k D$  são as raízes do polinômio

$$P_k(\nu) = \nu^3 + A_k \nu^2 + B_k \nu + C_k, \quad (5.12)$$

onde

$$\begin{aligned} A_k &= \mu_k(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2) - a, \\ B_k &= \mu_k^2(\delta_0 \delta_1 + \delta_0 \delta_2 + \delta_1 \delta_2) - a \mu_k(\delta_1 + \delta_2) - bd - ec \\ C_k &= \mu_k^3 \delta_0 \delta_1 \delta_2 - \mu_k^2 a \delta_1 \delta_2 - \mu_k(ec \delta_1 + bd \delta_2). \end{aligned}$$

Como  $a < 0$ ,  $bd < 0$  e  $ec < 0$ , temos que  $A_k > 0$ ,  $B_k > 0$  e  $C_k > 0$ , para todo  $k \geq 1$ . Para  $k = 0$ , temos

$$P_0(\nu) = \nu^3 - a\nu^2 - (bd + ec)\nu,$$

que tem zero como autovalor simples e dois complexos conjugados com parte real negativa. Vamos agora mostrar que, se  $k \geq 1$ , então todos os autovalores de  $J - \mu_k D$  têm parte real negativa. Para isso, basta, pelo Critério de Routh-Hurwitz, mostrar que  $A_k B_k > C_k$ . Sejam

$$C = \mu[\delta_0 \delta_1 \delta_2 \mu^2 - a \delta_1 \delta_2 \mu - (ec \delta_1 + bd \delta_2)]$$

e

$$\begin{aligned} AB &= [\mu(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2) - a][\mu^2(\delta_0 \delta_1 + \delta_0 \delta_2 + \delta_1 \delta_2) + \mu(-a \delta_1 - a \delta_2) - bd - ec] \\ &= (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)(\delta_0 \delta_1 + \delta_0 \delta_2 + \delta_1 \delta_2) \mu^3 - a \mu^2[\delta_0 \delta_1 + \delta_0 \delta_2 + \delta_1 \delta_2 \\ &\quad + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2)] + \mu[-(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)(bd + ec) + a^2(\delta_1 + \delta_2)] \\ &\quad + a(bd + ec). \end{aligned}$$

Então,  $AB - C = (AB - C)(\mu)$  é um polinômio em  $\mu$  da forma

$$\begin{aligned} AB - C &= \mu^3[(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)(\delta_0 \delta_1 + \delta_0 \delta_2 + \delta_1 \delta_2) - \delta_0 \delta_1 \delta_2] \\ &\quad - a \mu^2[(\delta_0 \delta_1 + \delta_0 \delta_2 + \delta_1 \delta_2) + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2) - \delta_1 \delta_2] \\ &\quad - \mu[(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)(bd + ec) + a^2(\delta_1 + \delta_2) - (ec \delta_1 + bd \delta_2)] + a(bd + ec) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} AB - C &= \mu^3[2\delta_0 \delta_1 \delta_2 + \delta_0^2(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1^2(\delta_0 + \delta_2) + \delta_2^2(\delta_0 + \delta_1)] \\ &\quad - a \mu^2[\delta_0 \delta_1 + \delta_0 \delta_2 + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2)] \tag{5.13} \\ &\quad - \mu[\delta_0(bd + ec) + \delta_1 bd + \delta_2 ec - a^2(\delta_1 + \delta_2)] + a(bd + ec) \end{aligned}$$

Como  $a < 0$ ,  $ec < 0$  e  $bd < 0$ , os coeficientes do polinômio (5.13) são todos positivos, o que implica que  $AB - C$  é positivo, para qualquer valor não negativo de  $\mu$ . Assim, para qualquer  $k \geq 1$ , temos  $A_k B_k - C_k > 0$  e, portanto, as raízes do polinômio  $P_k(\nu)$  têm parte real negativa.

Por outro lado, tomando  $\nu = \mu_k z$ , as raízes de  $P_k(\nu) = 0$  são as mesmas que da equação

$$z^3 + \frac{A_k}{\mu_k} z^2 + \frac{B_k}{\mu_k^2} z + \frac{C_k}{\mu_k^3} = 0. \tag{5.14}$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ , os coeficientes de (5.14) têm limites e a 'equação limite' é dada por

$$z^3 + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)z^2 + (\delta_0 \delta_1 + \delta_0 \delta_2 + \delta_1 \delta_2)z + \delta_0 \delta_1 \delta_2 = 0. \tag{5.15}$$

Se  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são as raízes de (5.15), então  $\operatorname{Re} z_j < 0, j = 1, 2, 3$ . Segue então do Teorema de Rouché (veja [1]) que existem vizinhanças  $V_1, V_2$  e  $V_3$  de  $z_1, z_2$  e  $z_3$ , respectivamente, mutuamente disjuntas, e  $k_0 \geq 1$  tais que se  $k \geq k_0$ , então (5.14) tem uma raiz  $z_k^{(j)}$  em cada vizinhança  $V_j$ . Portanto, as raízes de (5.12) são  $\nu_{k,j} = \mu_k z_k^{(j)}$ , com  $j = 1, 2, 3$  e  $k \geq 1$ .

Logo, zero é um autovalor simples do operador  $L$  definido pelo problema linear (5.6), (5.2) e existe  $\alpha > 0$  tal que o resto do espectro pertence ao conjunto  $\{\nu : \operatorname{Re} \nu < -\alpha\}$ . Logo, as hipóteses de Henry [18], pag. 108, estão satisfeitas e, portanto,  $E$  é estável. ■

Como consequência do teorema anterior, segue-se que se  $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$ , então o conjunto  $H_K$  dos equilíbrios de (1.1) é assintoticamente estável com relação ao fluxo de (5.1), (5.2). Se  $K > a_1 + 2\lambda$ , então  $H_K$  é instável. Se  $a_2 + 2\lambda < K < a_1 + 2\lambda$ , seja  $(\xi_1(K), \xi_2(K))$  a única solução do sistema (5.10). Então vale o seguinte

**Teorema 8.** *Para qualquer  $K$  satisfazendo  $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$ , o ponto  $(\lambda, \xi_1(K), \xi_2(K))$  divide  $H_K$  em duas partes  $H_K^u$  e  $H_K^s$ ; os equilíbrios do sistema (5.1), (5.2) no conjunto*

$$H_K^u = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in H_K : \xi_1 < \xi_1(K)\}$$

*são instáveis e os equilíbrios no conjunto*

$$H_K^s = \{(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in H_K : \xi_1 > \xi_1(K)\}$$

*são estáveis, independentemente da matriz de difusão  $D = \operatorname{diag}(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ .*

Esse resultado final mostra, portanto, que o fenômeno de bifurcação do tipo zip é preservado mesmo pela introdução de difusão no modelo (1.1). Ele mostra, em particular, que, se for possível a ocorrência de bifurcação do tipo Turing, esta deverá ocorrer em modelos com difusão cruzada, isto é, com matriz  $D$  não diagonalizável. Isso será tema de futuros estudos.

# Bifurcação de Andronov-Hopf

## A.1 Bifurcação de Hopf no plano

O objetivo dessa seção é justificar o surgimento da Bifurcação de Hopf para valores do parâmetro  $a$  em uma vizinhança de 0 e de  $-1$ , e  $\epsilon > 0$ . Pela simetria do problema vamos analisar apenas em uma vizinhança de 0.

Considere um sistema genérico

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \tag{A.1}$$

onde  $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  e  $f \in C^n(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ .

Vamos denotar  $x = (x_1, x_2)^T$  e considerar a família a um parâmetro

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$  é uma singularidade de (A.2).

A matriz quadrada de ordem dois que aparece acima é a matriz jacobiana avaliada na singularidade  $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$ , que possui autovalores  $\lambda_1 = \alpha + i$  e  $\lambda_2 = \alpha - i$ .

Vamos trabalhar no plano complexo, introduzindo assim a variável

$$z = x_1 + ix_2.$$

Desta expressão obtemos

$$\dot{z} = z(\alpha + i) \pm z|z|^2 \tag{A.3}$$

onde  $|z|$  é a norma do número complexo  $z$ .

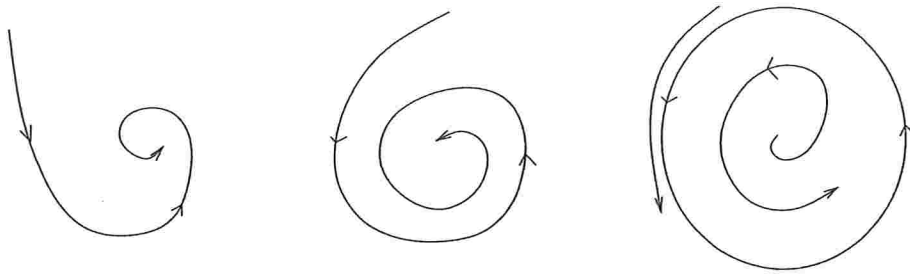


Figura A.1: Retrato de fase

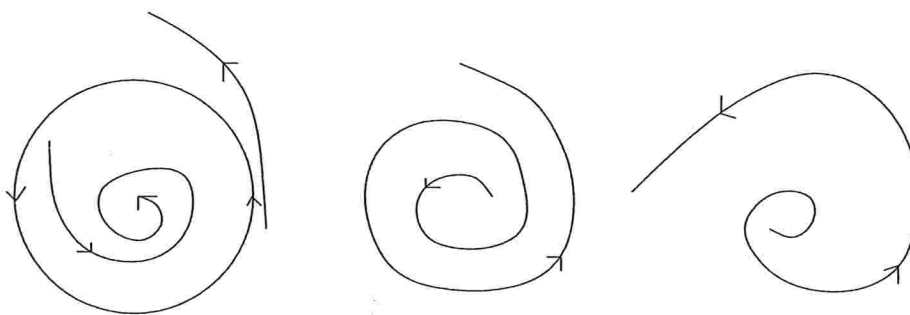


Figura A.2: Retrato de fase

Escrevendo  $z$  em coordenadas polares

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \rho > 0.$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha \pm \rho^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \tag{A.4}$$

Considerando o sistema A.4 com o sinal “-”, vemos que

(1) para  $\alpha < 0$ ,  $\rho$  é decrescente pois  $\dot{\rho} < 0$ ;

(2) para  $\alpha = 0$ ,  $\rho$  também é decrescente pois  $\dot{\rho} < 0$ ;

(3) para  $\alpha > 0$ ,  $\rho$  é decrescente se for maior que  $\sqrt{\alpha}$  e é crescente se for menor que  $\sqrt{\alpha}$ . Não há variação quando  $\rho = \sqrt{\alpha}$  ou  $\rho = 0$ . Na Figura A.1 temos a representação para estes três casos.

Considerando agora o sistema A.4 com o sinal “+”, obtemos os seguintes retratos de fase



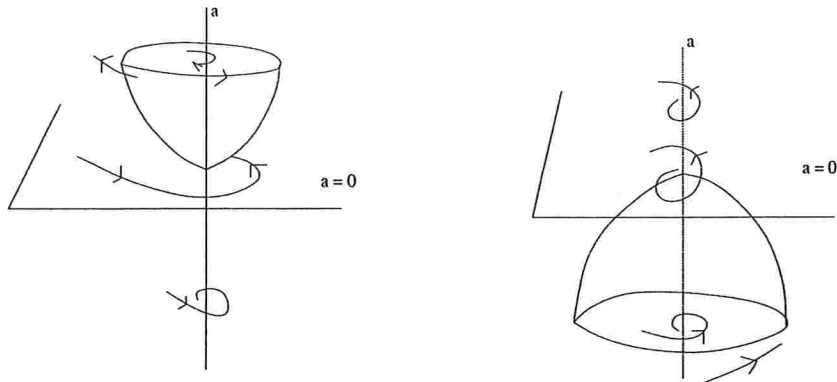


Figura A.3: Retrato de fase

(1) para  $\alpha < 0$ ,  $\rho$  é crescente se for maior que  $\sqrt{-\alpha}$  e é decrescente se for menor que  $\sqrt{-\alpha}$ . Da mesma forma, não há variação quando  $\rho = \sqrt{-\alpha}$  ou  $\rho = 0$ .

(2) para  $\alpha = 0$ ,  $\rho$  crescente pois  $\dot{\rho} > 0$ ;

(3) para  $\alpha > 0$ ,  $\rho$  também é crescente pois  $\dot{\rho} > 0$ .

Na Figura A.2 temos a representação para estes três casos.

Ao fenômeno acima chamamos uma *Bifurcação de Hopf*. Ela pode ser representada no espaço  $(x_1, x_2, \alpha)$ . A família de ciclos-limite forma um parabolóide. Veja Figura A.3.

Na figura à esquerda a bifurcação recebe o nome de *supercrítica* e na figura à direita a bifurcação é chamada *subcrítica*.

**Definição 1.** O sistema (A.2), ou equivalentemente (A.3) e (A.4) serão denominados *Forma Normal da Bifurcação de Hopf*.

Enunciaremos a seguir um lema importante que diz que em torno da singularidade, em nosso caso a origem, o retrato de fase de um sistema com termos de ordem 4 tem o mesmo comportamento se desprezarmos estes termos.

**Lema 2.** O sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4) \quad (A.5)$$

onde  $x = (x_1, x_2)^T$  e  $O(\|x\|^4)$  representa os termos de ordem 4 e dependem suavemente de  $\alpha$ , é localmente topologicamente equivalente em torno da origem ao sistema (A.2).

*Prova.* Ver [28] ■

Considere uma família  $\dot{x} = f(x, \alpha)$  tal que para  $\alpha = 0$ ,  $f(0, 0) = 0$  e a matriz jacobiana  $Jf(0, 0)$  possua autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , com  $\omega_0 > 0$ . Assim, o sistema A.5 pode ser escrito como

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha) \quad (\text{A.6})$$

onde  $A(\alpha) = Jf(0, \alpha)$ ,  $F(x, \alpha) = (F_1(x, \alpha), F_2(x, \alpha))$  é de classe  $C^n$ ,  $F_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $i = 1, 2$ , e  $F$  tem expansão de Taylor iniciando com termos de  $O(\|x\|^2)$ .

A matriz  $A(\alpha)$  tem autovalores  $\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha)$  e  $\lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}$  onde  $\lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$ . Queremos que  $\lambda(0) = \gamma(0) + i\omega(0) = 0 + i\omega_0$ , com  $\omega_0 > 0$ .

Seja  $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  um autovetor complexo de  $A(\alpha)$  associado a  $\lambda(\alpha)$ , isto é,

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha).$$

Seja  $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  tal que

$$A(\alpha)^T p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)} \overline{p(\alpha)}$$

É sempre possível escolher  $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  de tal modo que  $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$  onde o produto interno aqui usado é definido por  $\langle p, q \rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$  com  $p = (p_1, p_2)$  e  $q = (q_1, q_2)$ .

Dado qualquer vetor  $x$  em  $\mathbb{R}^2$  sempre podemos escrever

$$x = zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha)$$

para algum  $z \in \mathbb{C}$ . Assim

$$\begin{aligned} \langle p(\alpha), x \rangle &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha) \rangle \\ &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) \rangle + \langle p(\alpha), \overline{z}q(\alpha) \rangle \\ &= z \langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \overline{z} \langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle \\ &= z + \overline{z} \langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Agora, já que

$$\overline{q(\alpha)} = \frac{1}{\lambda(\alpha)} A(\alpha) \overline{q(\alpha)},$$

pois  $q(\alpha)$  é um autovetor complexo de  $A(\alpha)$  associado a  $\lambda(\alpha)$ , temos

$$\begin{aligned}
 \langle p(\alpha), x \rangle &= z + \bar{z} \langle p(\alpha), \frac{1}{\lambda(\alpha)} A(\alpha) \overline{q(\alpha)} \rangle \\
 &= z + \bar{z} \frac{1}{\lambda(\alpha)} \langle p(\alpha), A(\alpha) \overline{q(\alpha)} \rangle \\
 &= z + \frac{\bar{z}}{\lambda(\alpha)} \langle A(\alpha)^T p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\
 &= z + \frac{\bar{z}}{\lambda(\alpha)} \langle \overline{\lambda(\alpha)} p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\
 &= z + \frac{\bar{z}}{\lambda(\alpha)} \lambda(\alpha) \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Conseqüentemente, de (A.7) e de (A.8), temos

$$\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = \frac{\lambda(\alpha)}{\lambda(\alpha)} \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle .$$

Uma vez que  $\lambda(\alpha) \neq \overline{\lambda(\alpha)}$  temos

$$\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = 0$$

conseqüentemente

$$\langle p(\alpha), x \rangle = z .$$

**Lema 3.** *O sistema*

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha) \tag{A.9}$$

*pode ser escrito, para  $\alpha$  suficientemente pequeno, na forma*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha)$$

onde  $g = O(|z|^2)$  é uma função  $\mathbb{C}^n$  dada por

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z} \overline{q(\alpha)}, \alpha) \rangle$$

*Prova.* De  $z = \langle p(\alpha), x \rangle$  e de (A.9), conclui-se diretamente o resultado. ■

A expansão em Taylor de  $g(z, \bar{z}, \alpha)$  em torno de  $\alpha$  é dada por

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l$$

onde  $g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z} \overline{q(\alpha)}, \alpha) \rangle |_{z=0}$  para  $k+l \geq 2$ ,  $k, l = 0, 1, 2, \dots$

Suponha que para  $\alpha = 0$ ,  $F(x, \alpha)$  seja representada por

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4)$$

onde  $B(x, y)$  e  $C(x, y, u)$  são multilineares simétricas, com  $x, y, u \in \mathbb{R}^2$ . Temos

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \Big|_{\eta=0} x_j x_k, \quad i = 1, 2$$

e

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \Big|_{\eta=0} x_j y_k u_l \quad i = 1, 2$$

Desta maneira observe que

$$\begin{aligned} B(x, x) &= B(zq + \bar{z} \bar{q}, zq + \bar{z} \bar{q}) \\ &= B(zq, zq + \bar{z} \bar{q}) + B(\bar{z} \bar{q}, zq + \bar{z} \bar{q}) \\ &= B(zq, zq) + B(zq, \bar{z} \bar{q}) + B(\bar{z} \bar{q}, zq) + B(\bar{z} \bar{q}, \bar{z} \bar{q}) \\ &= z^2 B(q, q) + z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}z B(\bar{q}, q) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}) \\ &= z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}) \end{aligned} \tag{A.10}$$

uma vez que  $B(q, \bar{q}) = B(\bar{q}, q)$ , já que  $B$  é simétrica. Estamos denotando  $q = q(0)$  e  $p = p(0)$ . Sendo assim, os termos quadráticos em

$$g(z, \bar{z}, 0) = g_{11}(0)z\bar{z} + \frac{1}{2!}[g_{20}(0)z^2 + g_{02}(0)\bar{z}^2] + \frac{1}{2!}[g_{21}(0)z^2\bar{z} + g_{12}(0)z\bar{z}^2] + \dots$$

podem ser expressos por

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle \\ g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle \\ g_{02} &= \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle . \end{aligned}$$

Se fizermos cálculos similares com  $C(x, x, x) = C(zq + \bar{z} \bar{q}, zq + \bar{z} \bar{q}, zq + \bar{z} \bar{q})$  obtemos os coeficientes dos termos de ordem 3 e

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle$$

**Lema 4.** *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

onde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\gamma(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$  e  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ , pode ser transformada, pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \tag{A.11}$$

para  $|\alpha| \ll 1$ , na equação sem termos quadráticos

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3)$$

*Prova.* Consideremos a mudança de coordenadas inversa dada por

$$w = z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

Assim

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20}z\dot{z} - h_{11}(\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) - h_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + O(|z|^3) \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right)z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda}h_{11})z\bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}h_{02}\right)\bar{z}^2 + O(|z|^3) \\ &= \lambda w + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02})\bar{w}^2 + O(|w|^3) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Para eliminarmos os termos de ordem 2 fazemos  $g_{20} - \lambda h_{20} = 0$ ,  $g_{11} - \bar{\lambda}h_{11} = 0$  e  $g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02} = 0$ , que respectivamente nos dá  $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$ ,  $h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}$  e  $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$ . Isto é sempre possível, pois para  $|\alpha| \ll 1$ ,  $\lambda(\alpha) \neq 0$  e  $\lambda(\alpha) \neq \bar{\lambda}(\alpha)$  já que  $\lambda(0) = i\omega_0 \neq 0$ . ■

**Lema 5.** A equação

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4) \quad (\text{A.13})$$

onde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\gamma(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$  e  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ , pode ser transformada pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3$$

para  $|\alpha| \ll 1$ , na equação somente com termos cúbicos

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4)$$

onde  $c_1 = c_1(\alpha)$ .

*Prova.*

Considerando a transformação inversa

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4)$$

procede-se de maneira análoga à demonstração do Lema 4, observando que um candidato para eliminarmos o termo  $w^2\bar{w}$  seria  $h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$ . Veja que isto é possível para  $\alpha \neq 0$ , mas para  $\alpha = 0$ ,  $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$ . Então escolhemos  $h_{21} = 0$  e denota-se  $\frac{g_{21}}{2} = c_1$ . ■

**Definição 2.** O termo  $w^2\bar{w}$  é chamado termo ressonante.

O coeficiente do termo ressonante é igual ao coeficiente do termo cúbico  $z^2\bar{z}$  na equação (A.13).

**Lema 6.** A equação

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4) \quad (\text{A.14})$$

pode ser transformada, pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

para  $|\alpha| \ll 1$ , na equação com apenas um termo cúbico

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4) \quad (\text{A.15})$$

onde  $c_1 = c_1(\alpha)$ .

*Prova.* Aplicamos o Lema 4 para eliminarmos os termos quadráticos. Veja que a transformação alterará os termos cúbicos. Representemos o coeficiente de  $w^2\bar{w}$  por  $\frac{1}{2}g_{21}^*$ . Quando aplicamos o Lema 5 eliminamos os termos de ordem 3, exceto o termo  $\frac{1}{2}g_{21}^*$ , que é o termo ressonante. ■

**Lema 7.** O coeficiente  $c_1(\alpha)$  da equação (A.15), para  $\alpha = 0$ , é dado por

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2} \quad (\text{A.16})$$

*Prova.* Diferenciando  $z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$  obtemos  $\dot{z} = \dot{w} + h_{20} w \dot{w} + h_{11} (w \dot{\bar{w}} + \bar{w} \dot{w}) + h_{02} \bar{w} \dot{\bar{w}}$ . Substituindo  $\dot{w}$  e  $\dot{\bar{w}}$  e levando em conta (A.15), obtemos

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{1}{2} g_{20} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2} g_{02} \bar{z}^2 + \frac{1}{6} g_{30} z^3 + \frac{1}{2} g_{21} z^2 \bar{z} + \frac{1}{2} g_{12} z \bar{z}^2 + \frac{1}{6} g_{03} \bar{z}^3 + O(|z|^4).$$

Substituindo  $z$  e  $\bar{z}$ , dados por (A.11), e escrevendo apenas os termos de interesse obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z} = \lambda z + \frac{1}{2} (\lambda h_{20} + g_{20}) w^2 + (\lambda h_{11} + g_{11}) w \bar{w} + \frac{1}{2} (\lambda h_{02} + g_{02}) \bar{w}^2 + \\ + [g_{20} h_{11} + g_{11} (\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11}) + \frac{g_{02} \bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2}] w^2 \bar{w} + \dots \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes do termo cúbico  $w^2\bar{w}$  nas duas equações obtidas acima, e utilizando  $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$ ,  $h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}$  e  $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$  temos

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= g_{20}h_{11} + g_{11}\left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11}\right) + \frac{g_{02}\bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{g_{20}g_{11}}{\lambda} + g_{11}\left(\frac{g_{20}}{2\lambda} + \frac{\bar{g}_{11}}{\lambda}\right) + \frac{g_{02}\bar{g}_{02}}{2(2\lambda - \lambda)} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{g_{20}g_{11}}{\lambda} + \frac{g_{11}g_{20}}{2\lambda} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \lambda)} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Para  $\alpha = 0$  temos

$$\begin{aligned} c_1(0) &= \frac{g_{20}g_{11}(2i\omega_0 - i\omega_0)}{2\omega_0^2} + \frac{|g_{11}|^2}{i\omega_0} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2i\omega_0 + i\omega_0)} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{i}{2\omega_0}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2} \end{aligned} \tag{A.19}$$

■

**Lema 8.** *Considere a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\gamma(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4) \tag{A.20}$$

onde  $\gamma(0) = 0$  e  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ . Suponha que  $\gamma'(0) \neq 0$  e que  $Rec_1(0) \neq 0$ , onde  $Rec_1(0)$  significa a parte real de  $c_1(0)$ . Então a equação acima pode ser transformada, por mudança de coordenada, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\chi + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4) \tag{A.21}$$

onde  $u$  é a nova coordenada complexa,  $\theta$  e  $\chi$  são os novos tempos e parâmetros, respectivamente, e  $s = sinal[Rec_1(0)] = \pm 1$ .

*Prova.* Introduzindo o novo tempo  $\tau = \omega(\alpha)t$ , que preserva a direção, pois  $\omega(\alpha) > 0$ ,  $\forall |\alpha| \ll 1$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= [(\gamma(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1w^2\bar{w} + O(|w|^4)] \frac{1}{\omega(\alpha)} \\ &= \frac{\gamma(\alpha) + i\omega_\alpha}{\omega_\alpha} w + \frac{c_1(\alpha)}{\omega_\alpha} w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4) \end{aligned} \tag{A.22}$$

onde  $\chi = \chi(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha)}{\omega(\alpha)}$  e  $d_1(\chi) = \frac{c_1(\alpha(\chi))}{\omega(\alpha(\chi))}$ .

Podemos considerar  $\chi$  como nosso parâmetro já que  $\chi(0) = 0$ ,  $\chi'(0) = \frac{\gamma'(0)}{\omega(0)} \neq 0$ , e, portanto, o Teorema da Função Inversa nos garante a existência local e suave de  $\alpha$  como função de  $\chi$ .

Vamos agora, reparametrizar novamente o tempo com a nova mudança  $\theta = \theta(\tau, \chi)$  onde  $d\theta = (1 + e_1(\chi)|w|^2)d\tau$ , com  $e_1(\chi) = \text{Im}d_1(\chi)$ , sendo  $\text{Im}d_1(\chi)$  a parte imaginária de  $d_1(\chi)$ .

Assim obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} \\ &= [(\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4)] \frac{1}{1 + e_1(\chi)|w|^2} \\ &= [(\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4)][1 - e_1(\chi)|w|^2 + e_1^2(\chi)|w|^4 + \dots] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

onde consideramos a expansão de  $\frac{1}{1+e_1(\chi)|w|^2}$  para  $w$  próximo de 0. Logo

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 - (\chi + i)e_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\chi + i)w + \text{Re}d_1(\chi)w|w|^2 + i\text{Im}d_1(\chi)w|w|^2 - \chi e_1(\chi)w|w|^2 \\ &\quad - ie_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\chi + i)w + [\text{Re}d_1(\chi) - \chi e_1(\chi)]w|w|^2 + O(|w|^4) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

pois  $e_1(\chi) = \text{Im}d_1(\chi)$ .

Portanto

$$\frac{dw}{d\theta}(\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

onde

$$l_1(\chi) = \text{Re}d_1(\chi) - \chi e_1(\chi) \quad (\text{A.25})$$

Veja que  $l_1(\chi) \in \mathbb{R}$  com  $l_1(0) = \text{Re}d_1(0)$ , o que nos dá

$$l_1(0) = \text{Re}\left(\frac{c_1(\alpha(0))}{\omega(\alpha(0))}\right) = \frac{\text{Re}c_1(0)}{\omega(0)} \quad (\text{A.26})$$

Finalmente, introduzindo a nova variável complexa  $u$ , dada pela expressão

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}}$$

que é possível, pois  $\text{Re}c_1(0) \neq 0$ , e, portanto,  $l_1(0) \neq 0$ , a equação se escreve como



$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{du} \frac{du}{d\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} \frac{du}{d\theta} \\ &= (\chi + i) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} + l_1(\chi) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} \left| \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} \right|^2 + \text{cdots} \end{aligned} \tag{A.27}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i)u + \frac{l_1(\chi)}{|l_1(\chi)|} u|u|^2 + O(|u|^4) \\ &= (\chi + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4) \end{aligned} \tag{A.28}$$

onde  $s = \text{sinal}[l_1(0)] = \text{sinal}[\text{Rec}_1(0)] = \pm 1$ . ■

**Definição 3.** A função  $l_1(\chi)$  é chamada de primeiro coeficiente de Liapunov.

De (A.26) temos que

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0g_{21}) \tag{A.29}$$

**Observação:** Note que se a equação (A.21), com  $s = -1$ , for escrita na sua forma real, coincidirá com o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - (x^2 + y^2)x + O(\|x\|^4) \\ \dot{y} = x + \alpha y - (x^2 + y^2)y + O(\|x\|^4) \end{cases} \tag{A.30}$$

Reunindo os resultados anteriores, podemos enunciar o

**Teorema 9. [Forma Normal da Bifurcação de Hopf]** Qualquer sistema bidimensional

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \tag{A.31}$$

com  $f \in \mathbb{C}^n(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , tendo a singularidade  $x = 0$ ,  $\forall |\alpha| \ll 1$ , com autovalores  $\lambda_{1,2}(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$ , onde  $\gamma(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , satisfazendo as condições

(1)  $l_1(0) \neq 0$  (não degenerescência);

(2)  $\gamma'(0) \neq 0$  (transversalidade)

é localmente topologicamente equivalente em torno da origem, a uma das seguintes formas normais

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 - y_2 \pm (y_1^2 + y_2^2)y_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 + \alpha y_2 \pm (y_1^2 + y_2^2)y_2 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

## A.2 Variedades invariantes

Nesta seção algumas generalizações de teoremas sobre variedades invariantes dados em Hartman [17] serão apresentados.

**Lema 9.** Para  $s \in [0, s_0]$ ,  $s_0 > 0$  seja  $P(s)$  uma matriz estável  $p \times p$  e  $Q(s)$  uma matriz  $q \times q$  cujos autovalores tem parte real não negativa para todo  $s \in [0, s_0]$ , suponha ainda que  $P, Q \in \mathbb{C}^0[0, s_0]$  e seja a aplicação  $T^1 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  definida por

$$T^1 : y_1 = e^{P(s)}y + Y(y, z, s), \quad z_1 = e^{Q(s)}z + Z(y, z, s) \quad (\text{A.33})$$

para  $(y, z, s) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times [0, s_0]$  onde  $Y, Z, Y'_y, Y'_z, Z'_y, Z'_z \in \mathbb{C}^0$ ,  $Y(0, 0, s) = 0$ ,  $Z(0, 0, s) = 0$  e para as matrizes Jacobianas  $\partial_{(y,z)}Y(0, 0, s) \equiv 0$ ,  $\partial_{(y,z)}Z(0, 0, s) \equiv 0$ ; então existe uma vizinhança  $W_p \subset \mathbb{R}^p$  da origem e uma função  $g : W_p \times [0, s_0] \rightarrow W_q$  ( $W_q$  vizinhança da origem de  $\mathbb{R}^q$ ) tal que  $g, g'_y \in \mathbb{C}^0$ ,  $g(0, s) \equiv 0$ ,  $\partial_y g(0, s) \equiv 0$ , e a mudança de coordenadas

$$u = y, \quad v = z - g(y, s) \quad (\text{A.34})$$

transforma (A.33) na forma

$$u_1 = e^{P(s)}u + U(u, v, s), \quad v_1 = e^{Q(s)}v + V(u, v, s) \quad (\text{A.35})$$

onde

$$U(0, 0, s) \equiv 0, V(0, 0, s) \equiv 0, \partial_{(u,v)}U(0, 0, s) \equiv 0, \partial_{(u,v)}V(0, 0, s) \equiv 0 \quad \text{e} \quad V(u, 0, s) \equiv 0. \quad (\text{A.36})$$

**Observação 2.** Chamamos a atenção para o fato que a última identidade significa que se  $(u, v) = (u, 0)$  então sua imagem pela aplicação (A.35) temos  $(u_1, v_1) = (u_1, 0)$ . Isto significa que se nas coordenadas originais  $z = g(y, s)$ , então por (A.33) vale  $z_1 = g(y_1, s)$ , i.e, o conjunto  $\{(y, z) \in \mathbb{R}^q / z = g(y, s)\}$  é invariante de  $T^1$  para cada  $s$  fixo em  $[0, s_0]$ .

*Prova.* A prova coincide passo a passo com a prova de ([17], Capítulo IX, Lema 5.1) e portanto será omitida. ■

**Lema 10.** Para  $s \in [0, s_0]$ ,  $s_0 > 0$  sejam  $P(s)$  e  $Q(s)$  matrizes como no Lema 9, e considere a família de sistemas dinâmicos  $T : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  dependendo do parâmetro

$s$  definida por

$$\begin{aligned} T : y(t, y_0, z_0, s) &= e^{P(s)t}y_0 + Y(t, y_0, z_0, s) \\ z(t, y_0, z_0, s) &= e^{Q(s)t}z_0 + Z(t, y_0, z_0, s) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

para  $t \in [0, \infty)$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^p$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}^q$ ,  $s \in [0, s_0]$  onde  $Y, Z, Y', Y'_{y_0}, Y'_{z_0}, Z', Z'_{y_0}, Z'_{z_0} \in \mathbb{C}^0$ ,  $Y(t, 0, 0, s) = 0$ ,  $Z(t, 0, 0, s) = 0$ ,  $\partial_{(y_0, z_0)} Y(t, 0, 0, s) \equiv 0$ ,  $\partial_{(y_0, z_0)} Z(t, 0, 0, s) \equiv 0$ , e

$$T^1 : y(1, y_0, z_0, s) = e^{P(s)}y_0 + Y(1, y_0, z_0, s)$$

$$z(1, y_0, z_0, s) = e^{Q(s)}z_0 + Z(1, y_0, z_0, s);$$

se  $g$  é a função fornecida pelo Lema 9 para  $T^1$  então (A.34) transforma (A.37) na forma

$$u(t, u_0, v_0, s) = e^{P(s)t}u_0 + U(t, u_0, v_0, s)$$

$$v(t, u_0, v_0, s) = e^{Q(s)t}v_0 + V(t, u_0, v_0, s)$$

onde  $U(t, 0, 0, s) \equiv 0$ ,  $V(t, 0, 0, s) \equiv 0$ ,  $\partial_{(u_0, v_0)} U(t, 0, 0, s) \equiv 0$ ,  $\partial_{(u_0, v_0)} V(t, 0, 0, s) \equiv 0$  e  $V(t, u_0, 0, s) \equiv 0$ , e se  $y_0 \neq 0$ ,  $|y_0|$  é pequeno o bastante e  $z_0 = g(y_0, s)$  então  $z(t, y_0, z_0, s) = g(y(t, y_0, z_0, s), s)$  para todo  $t \in [0, \infty)$ ,

$$\left| \frac{z(t, y_0, z_0, s)}{y(t, y_0, z_0, s)} \right| \rightarrow 0$$

e

$$\limsup t^{-1} \log |y(t, y_0, z_0, s)| \leq \alpha \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

onde  $\alpha < 0$ .

*Prova.* Este lemma é uma consequência do Lema 9 justamente como em ([17], capítulo IX, corolário 5.2) é uma consequência de ([17], capítulo IX, lema 5.1). ■

---

# Referências Bibliográficas

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Second edition, McGraw-Hill, Inc. 1966.
- [2] N. D. Alikakos, *An Application of the Invariance Principle to Reaction-Diffusion Equations*, Journal of Differential Equations, 33, pp. 201-225, 1979.
- [3] A. Bocsó, M. Farkas, *Political and economic rationality leads to velcro bifurcation*, Applied Mathematics and Computation, 140, pp. 381-389, 2003.
- [4] G. J. Butler, *Competitive predator-prey systems and coexistence*, Population Biology Proceedings, Lecture note in Biomatematics 52, pp. 210-217, Edmonton 1982 (Springer, Berlin).
- [5] G. J. Butler and P. Waltman, *Bifurcation from a limit cycle in a two predator-one prey ecosystem modeled on a chemostat*, Journal Mathematical Biology, 12, pp. 295-310, 1981.
- [6] Chueh, K., C. Conley and J. Smoller *Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations*, Indian University Mathematical Journal, 26 (1977), 373-392.
- [7] L. Dung e H. L. Smith *A Parabolic System Modeling Microbial Competition in an Unmixed Bio-reactor*, Journal of Differential Equations, 130, pp. 59-91, 1996.
- [8] M. Farkas, *Zip Bifurcation in a Competition Model*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 8, No. 11, pp. 1295-1309, 1984.
- [9] M. Farkas, *Competitive Exclusion by Zip Bifurcation*, in Dynamical Systems, IIASA Workshop 1985 Sopron, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 287, Springer, pp. 165-178, 1987.
- [10] M. Farkas, *Periodic Motions*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [11] M. Farkas, *Dynamical Models in Biology*, Academic Press, New York, 2001.

- [12] M. Farkas, E. Sáez, and I. Szántó, *Velcro Bifurcation in Competition Models with Generalized Holling Functional Response*, Miskolc Mathematical Notes, Vol 6, N. 2, pp. 165-178, 2005.
- [13] J.D. Ferreira and E.M. Sallum, *Hopf Bifurcation in Models for Micro and Macroparasitoid Diseases*, Miskolc Mathematical Notes, Vol 3, N. 1, pp. 13-23, 2002.
- [14] J.D. Ferreira and L.A.F. Oliveira, *Hopf and Zip Bifurcation in a Specific  $(n+1)$ -dimensional Competitive System*, to appear.
- [15] J.D. Ferreira, *Zip Bifurcation in an Ample Class of Competitive System*, Miskolc Mathematical Notes - Hungary, to appear.
- [16] J. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Math. Surveys and Monographs, n. 25, AMS, 1980.
- [17] P.H. Hartman: *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York (1964).
- [18] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture notes in Mathematics, vol. 840, Springer-Verlag, 1981.
- [19] D. Henry, *Evolutions Equations in Banach Spaces*, Notas de aulas IME-USP, 1981.
- [20] J. G. Hocking e G. S., *Young Topology*, Addison-Wesley, Reading (1961).
- [21] S. H. Hsu, S. P. Hubbell, P. Waltman: *Competing predators*. SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Appl. Math., 35, 1978 a, pp. 617-625.
- [22] S. H. Hsu, S. P. Hubbell, P. Waltman: *A contribution to the theory of competing predators*. Ecol. Monogr., 48, 1978 b, pp. 337-349.
- [23] J. Morgan *Global Existence for Semilinear Parabolic Systems*, SIAM J. Math. Anal., 20, No 5, pp. 1128-1144, 1989.
- [24] M. H. Protter & H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [25] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, New York, 1983. Journal of Differential Equations 130, 59-91, 1996.
- [26] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

- 
- [27] S. Sternberg: *Local contractions and a theorem of Poincaré*, Am. J. Math. 79, 809-824 (1957).
- [28] Yuri A. Kuznetsov: *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1995.