

Resolução do Problema de Kendall na esfera

Luise Marion Frenkel

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia

Durante a elaboração deste trabalho
o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, agosto de 2007

32704

Resolução do problema de Kendall na esfera

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação/tese devidamente corrigida e defendida por Luise Marion Frenkel e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli - IME-USP
- Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino - UNICAMP
- Prof. Dr. Diego Colon - UNESP
- Prof. Dr. Artur Oscar Lopes - UFRGS

Resumo

Mostramos que numa esfera \mathbb{S}^2 em \mathbb{R}^3 são suficientes quatro movimentos para resolver o problema de Kendall. Primeiro discutimos a formulação do problema, de modo que referenciais orientados são levados por movimentos de uma esfera de raio 1 que rola sem escorregar e sem pivotar sobre geodésicas da esfera de raio $R > 1$. O resultado central prova que dois referenciais podem ser levados um para o outro por até 4 rolamentos usando muito da geometria da esfera. Ela nos permite resolver o problema em 4 movimentos para qualquer R . Ainda assim, propomos uma generalização da solução para uma certa classe de variedades. Também incluímos uma discussão sobre uma formulação do problema de Kendall do ponto de vista de um observador na variedade e apresentamos as dificuldades encontradas.

Palavras-chave: rolamentos de superfícies, problema de Kendall, mecânica geométrica.

Abstract

We prove that four movements are enough to solve Kendall's problem on a sphere S^2 imbedded in \mathbb{R}^3 . We discuss first the setting of the problem, so that oriented coordinate systems are taken by movements of a sphere of radius 1, which rolls without slipping and without twisting, over geodesics of the sphere of radius $R > 1$. The main result states that two coordinate systems can be taken one to the other with at most 4 movements for any R by extensive use of the geometry of the sphere. Besides, we propose a generalisation for a certain class of manifolds. We also present a discussion on a formulation of Kendall's problem from the point of view of an observer inside the manifold, pointing out the difficulties which arise there.

Keywords: rolling of surfaces, Kendall's problem, geometrical mechanics.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	3
2.1	Rolar sem escorregar e sem pivotar	3
2.2	Rolamento sobre geodésicas	5
2.3	Rolamento de B	5
2.3.1	Rolamentos de $2n\pi$	6
3	Resolução do problema de Kendall	8
3.1	Caso 1: Referenciais iguais em dois pontos	9
3.1.1	Situação 1: $C_p \cap C_q \neq \emptyset$	12
3.1.2	Situação 2: $C_p \cap C_q = \emptyset$	12
3.2	Caso 2: Correção da discrepância	16
3.3	Generalização	21
3.4	Caso com resolução em 2 movimentos	24
	Conclusão	26
A	Descrição intrínseca	28
A.1	Transporte paralelo	30
A.1.1	Em pontos suficientemente próximos	30
A.1.2	Em pontos distantes	31
A.1.3	O problema dos pontos conjugados	32
A.2	Atlas de $M \times SO(3)$	34
A.3	Rolamento de B	35

A.4 Rolamento de $2n\pi\delta$	37
A.5 O problema de Kendall nessa abordagem	38
A.6 Correção de discrepância	39
A.6.1 Situação em que ν e $\bar{\nu}$ são normais	39
A.6.2 Situação geral	40
A.7 Algumas considerações	41
B Figuras	43
B.1 Obtenção de mesmo referencial	43
B.2 $C_p \cap C_q$ para $1 < R < 2$	44
B.3 $C_p \cap C_q = \emptyset$	44
B.4 Inclinação de $C_{p,1}$	45
B.5 Prolongamento de rolamentos	47
Bibliografia	48

Capítulo 1

Introdução

O problema de Kendall parece um típico desafio instigante a ser proposto para alunos interessados num início de semestre, conclusão de curso, concurso de bolsas ou outra ocasião semelhante. Segundo a introdução de [1], a formulação e resolução do problema de fato remontam a tais ocasiões. Contudo por trás da formulação aparentemente trivial reside um problema que requer diversas ferramentas geométricas, mesmo nos casos mais simples. A relevância do tema é destacada em [2].

O problema de Kendall pode ser formulado em termos gerais do seguinte modo: tendo-se uma superfície, e referências ortonormais (tridimensionais) em dois pontos (não necessariamente distintos) da superfície, pergunta-se como podemos levar um referencial para o outro por meio de uma bolinha que rola sobre a superfície. Exige-se que essa bolinha role sem escorregar e pivotar e quer-se minimizar o número de movimentos necessários. Isto é, como nem sempre é possível resolver o problema em um único rolamento sobre uma curva diferenciável, encontra-se a solução pela “concatenação” de alguns movimentos.

Na literatura, o problema de Kendall foi resolvido no caso do plano, em três movimentos, por Hammersley ([1]). Isso é uma solução ótima, pois para referenciais arbitrários, três movimentos são necessários e suficientes. Neste caso, a dificuldade é descrever geometricamente como levar a esfera de uma posição a outra nesse número de movimentos (há uma descrição geométrica

simples em [3] usando 4 movimentos), mas o problema em si está resolvido.

No caso geral, o melhor resultado disponível é que em superfícies de revolução dadas por uma função analítica o problema tem uma solução finita ([3]). Neste caso, exige-se que o rolamento além de ocorrer sem escorregar e pivotar, também se faça ao longo de geodésicas da superfície, o que implica (ver [3]) que na bolinha estão sendo descritos círculos máximos. Estamos seguros de que não é possível usar, no caso da esfera, o método simples descrito em [3] sem alterações significativas. De fato, mostramos no capítulo 3 que uma concatenação de quatro movimentos ao longo de círculos máximos da superfície esférica é suficiente para resolver o problema de Kendall na esfera. Tal qual feito no caso do plano em [3], conseguimos descrever com precisão as geodésicas e trajetórias envolvidas na solução.

Primeiro delineamos o contexto do problema e estabelecemos alguns resultados preliminares. Então resolvemos o problema de Kendall na esfera e propomos uma generalização para uma certa classe de variedades. No apêndice discutimos o problema de Kendall do ponto de vista de um observador na variedade.

Capítulo 2

Preliminares

Notações

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

M esfera de raio $R > 1$

B bolinha de raio 1

p, q pontos de M

(e_x, e_y, e_z) referencial ortonormal positivo canônico de \mathbb{R}^3

Θ elemento de $SO(3)$

(λ, μ, ν) referenciais ortonormais positivos de \mathbb{R}^3 .

2.1 Rolar sem escorregar e sem pivotar

Supõe-se que um referencial move-se solidariamente a uma esfera B de raio 1, que tem um único ponto comum com a esfera M , ou seja, descreve uma curva de contato. Por clareza, B é chamada geralmente de bolinha.

Como usualmente restringe-se os movimentos aos sem escorregar e sem pivotar (s.e.s.p.) e aqui seguimos a abordagem de Bryant e Hsu ([4]) e [3], p. 23-27, assim descrita.

Sejam F_M e F_B os fibrados dos referenciais ortonormais de M e B respectivamente. O espaço de configurações é representado pelo quociente $E = (F_M \times F_B)/SO(2)$, que é uma variedade de dimensão 5 pois a ação à

direita

$$\begin{aligned}\phi : SO(2) \times (F_M \times F_B) &\rightarrow (F_M \times F_B) \\ \phi(g, (\bar{p}_1, \bar{p}_2)) &\mapsto (\bar{p}_1 g, \bar{p}_2 g)\end{aligned}$$

é própria, já que $SO(2)$ é compacto, e é livre, já que para todo $x \in (F_M \times F_B)$

$$g \in SO(2) \mapsto \phi(g, x) \in (F_M \times F_B)$$

é injetora.

Note que cada fibra de F_M, F_B é identificável com $SO(2)$, logo, que F_M e F_B são fibrados principais do grupo estrutural $SO(2)$.

Para $\bar{p}_M \in F_M, \bar{p}_B \in F_B$, sejam p_M, p_B as suas respectivas projeções em M . Se

$$i : T_{p_M} M \mapsto T_{p_B} B$$

é uma isometria orientada, então um elemento de E pode ser visto como (p_M, p_B, i) . Então, rolar sem escorregar é representado por uma condição sobre a isometria das primeiras derivadas das curvas em cada variedade, isto é, para curvas

$$\xi : [t_1, t_2] \rightarrow E, \quad \xi_M : [t_1, t_2] \rightarrow M, \quad \xi_B : [t_1, t_2] \rightarrow B$$

tais que $\xi(t) = (\xi_M(t), \xi_B(t), i(t))$, tem-se que

$$i(t)(\dot{\xi}_M(t)) = \dot{\xi}_B(t), \quad \forall t_1 \leq t \leq t_2$$

A ausência de pivotamento é representada pela isometria entre campos paralelos de referenciais ortonormais, isto é, se ao longo de uma curva ξ_M em M , os campos de referenciais ortonormais $e_M, f_M : [t_1, t_2] \rightarrow TM$ são paralelos, então não há pivotamento se $e_B, f_B : [t_1, t_2] \rightarrow TB$ dados por $e_B(t) = i(t)(e_M(t)), f_B(t) = i(t)(f_M(t))$ são paralelos ao longo de ξ_B .

2.2 Rolamento sobre geodésicas

Restringiremos o problema e sua solução ao rolamento sobre geodésicas na esfera M exclusivamente, ou seja sobre círculos máximos. Consideramos que B rola do lado externo de M . Por conseguinte

$$\forall p_1, p_2 \in M, \exists \gamma(t) \text{ geodésica, } \exists t_1, t_2 : \gamma(t_1) = p_1, \gamma(t_2) = p_2,$$

ou seja, quaisquer dois pontos são interligáveis por geodésicas. Na verdade, em toda superfície compacta essa afirmação é garantida pelo teorema de Hopf-Rinow ([6]).

Tanto na bolinha B como na esfera M consideramos as rotações sobre círculos máximos sem restringi-las a 2π , respectivamente, $2\pi R$. Logo, a partir de qualquer ponto $p \in M$ é possível rolar quanto se quiser em qualquer direção, dando um número arbitrário de voltas sobre círculos máximos.

Estamos restringindo a bolinha B a apenas rolar por geodésicas. Como o rolamento é s.e.s.p., a trajetória que o ponto de contato de B e M descreve em B é também uma geodésica (Harle, *apud* [3], p. 19, onde o resultado é provado para superfícies orientadas, mergulhadas em \mathbb{R}^3 , ou seja, também a esfera) e, como B também é uma esfera, isto novamente são círculos máximos.

Ademais, sem risco de ambigüidade, ao falarmos de distância entre dois pontos de M sempre a entendemos como distância geodésica na esfera M .

2.3 Rolamento de B

Aqui propomos uma observação que é uma ferramenta muito útil para visualizar o que ocorre com o referencial quando rola solidariamente à esfera. É fruto do enfoque que está detalhado no Apêndice A, mas requer aqui apenas a introdução de alguma notação.

É quase um resultado intuitivo, que possibilita uma fácil orientação nos exemplos que serão propostos. Infelizmente, como é mostrado no Apêndice A, não conseguimos resolver o problema desse modo. Tem-se que o transporte paralelo ao longo da geodésica pela qual a bolinha rola empata com o

configuração do referencial da bolinha a cada $2n\pi$.

2.3.1 Rolamentos de $2n\pi$

Apenas nesta seção considere a seguinte notação. Sejam p_1, p_2 pontos em M . Seja N o vetor normal à esfera M , sendo N_1, N_2 a normal no pontos p_1 e p_2 respectivamente. Como o raio de B é 1, o comprimento de seus círculos máximos é 2π . Considere as geodésicas em M , isto é, os círculos máximos de M . Pode-se analisar o transporte paralelo ao longo delas ([5], [6], [7]), especialmente das componentes dos vetores dos referenciais que estão no plano tangente a M . Por outro lado, as componentes normais podem ser comparadas à normal a M em cada ponto.

Fato 1 *Quando B rola sem escorregar e sem pivotar (s.e.s.p.) sobre uma geodésica de comprimento $2n\pi$, o referencial solidário a B chega no ponto final de modo que seja igual ao transporte paralelo do inicial.*

Demonstração: Basta considerar o caso $n = 1$ e $\nu_1 = N_1$. Logo $\lambda_1, \mu_1 \subset T_{p_1}M$.

Como rola s.e.s.p. 2π , em p_2 tem-se $\bar{\nu}_1 = N_2$, onde $\bar{\nu}_1$ é o resultado do rolamento do referencial em solidariedade a B . Seja ϕ o ângulo entre λ_1 e $T_{p_1}\gamma$. Como rola sem escorregar e sem pivotar, o ângulo de $\bar{\lambda}_1$ e $T_{p_1}\gamma$ também é ϕ . Ou seja $\bar{\lambda}_1$ coincide com λ_1 , o transportado paralelo de λ_1 para p_2 pela geodésica γ .

QED

Outra observação necessária é que a cada 2π o referencial obtido por transporte paralelo ao longo da geodésica γ se iguala/sobrepõe ao referencial obtido por rolar s.e.s.p. ao longo da mesma geodésica. Contudo, salvo a cada 2π , o referencial solidário à bolinha B , que rola s.e.s.p., não coincide com o referencial obtido por transporte paralelo ao longo de γ àquela distância. De fato, isso depende das voltas completas dadas por B . Ademais, a configuração do referencial na bolinha, durante todo o movimento, não é em geral igual aos referencial que o problema de Kendall associa aos pontos de M . Também

cabe dizer que esse Fato 1 independe da natureza dos pontos envolvidos, isto é, se são ou não conjugados.

Pode-se concatenar movimentos de $2n\pi$ em direções diferentes, contudo esse procedimento, tal qual o transporte paralelo, não é comutativo e não equivale ao transporte paralelo direto entre os pontos inicial e final. De fato, como fica claro na demonstração do Fato 1, um rolamento de $2n\pi$ resulta num referencial igual, mas apenas em relação àquela geodésica pela qual é rolado e transportado. Ou seja, esse referencial “incorpora” a direção da geodésica, sinalizado pela coincidência a cada $2n\pi$ com o transporte paralelo ao longo daquela geodésica. Pela falta de transitividade dessa operação, rolamentos de $2n\pi$ não podem ser concatenados para levar referenciais iguais de um ponto a outro na esfera (mais detalhes no Apêndice A).

Capítulo 3

Resolução do problema de Kendall na esfera

Nossa solução para estabelecer quantos movimentos são necessários para levar o referencial de p até o referencial de q é bastante semelhante à de [3]. Como já mencionamos anteriormente, durante o rolamento apenas nos importa o que ocorre em B . Isto é, uma vez que especificamos a direção da geodésica pela qual B deve rolar s.e.s.p., apenas observamos o referencial rolando *junto* com a bolinha.

Como no caso do plano, analisamos dois casos particulares, sendo que o segundo nos fornecerá os elementos do método/procedimento:

1. mesmo referencial em dois pontos diferentes: basta concatenar trajetórias (arcos de geodésicas) em cujas extremidades o referencial é o mesmo. Esse caso é resolvido em 2 ou 3 movimentos.
2. corrigir a discrepância entre dois referenciais, localizados em pontos iguais ou distintos. Não se pode proceder de modo análogo ao plano, quando obtinha-se em algum ponto um certo referencial, partindo de uma situação inicial dada. Não bastam dois movimentos convenientes, ainda que também na esfera apenas influam a direção em que rola e o comprimento do rolamento. Precisamos de 4 movimentos, mas isso, na realidade, já é a resolução do problema de Kendall na esfera.

3.1 Caso 1: Referenciais iguais em dois pontos diferentes $p, q \in M$

Observação: $p, q \in M$ podem ser conjugados

Teorema 1 *Seja (p, Θ) tal que $p \in M, \Theta = (\lambda, \mu, \nu)$. Seja q um ponto tal que o ângulo interno entre p e q é $\frac{2\pi}{R+1}$, isto é, o comprimento do arco de círculo máximo que une p e q é $\frac{2\pi}{R+1}R$. Por rolamento s.e.s.p. a partir de p obtém-se em q o mesmo referencial Θ .*

Demonstração: Sem perda de generalidade, basta analisar o seguinte caso particular:

Sejam p o pólo norte e C o círculo máximo no qual a bolinha rolará, tais que o referencial em p tem uma componente normal ao plano definido pelo círculo máximo (vide figura na página 43). Por conseguinte, as outras duas componentes estão contidas nesse plano. É evidente, em vista do rolar s.e.s.p., que ao longo de todo movimento aquela componente continua perpendicular ao plano definido por C e as outras duas continuam contidas nesse plano.

Como o raio da esfera é maior que o da bolinha, é evidente que esta realiza, ao longo de uma volta por C mais do que uma rotação completa, por conseguinte, segue do Fato 1 que existe ao menos um ponto q no qual o referencial solidário ao rolamento da bolinha é igual (quando comparado ao referencial padrão do \mathbb{R}^3) ao de p .

Basta descrever a posição do ponto q mais próximo de p (próximo pelo comprimento de arco orientado em C), o que requer apenas um pouco de geometria. Para simplificar, suponhamos que o referencial em p é tal que uma das componentes contidas no plano definido por C coincide com a normal à esfera, logo, em relação ao \mathbb{R}^3 , coincide com o eixo e_z .

Por semelhança de triângulos, o ângulo entre a normal à esfera M e o eixo e_z é igual tanto em M como em B . Por outro lado, se após um rolamento de comprimento l o ângulo interno em M é α , sabemos que $l = \alpha R$. Por conseguinte, o referencial que rola solidariamente à bolinha M retorna à

posição inicial quando $\alpha + \alpha R = 2\pi$. Por conseguinte (vide p. 43):

$$\phi = \frac{2\pi}{R+1}$$

QED

De fato, com estas fórmulas é fácil ver quantos são, num círculo máximo, os pontos em que o referencial é igual ao do ponto analisado, assim, por exemplo, para $R > 3/2$ há ao menos dois pontos. Note-se que é importante levar em conta a direção (e.g. horário ou anti-horário) do arco orientado no qual a bolinha rola em C . Isto é, a posição do referencial após o rolamento da bolinha B até um certo ponto na esfera M depende, se queremos obter o referencial igual, do comprimento do rolamento e, por conseguinte, em geral apenas um dos arcos tem o comprimento apropriado. Esse detalhe apenas é irrelevante se R for um número ímpar maior que 3.

Lembremos que se γ é um arco de geodésica em M de comprimento l (que pode ser maior que $2\pi R$) que une dois pontos p, q de M , então $\phi_{p,q} = \frac{l}{R}$ é o ângulo central descrito por γ . Nesse caso, falaremos também que $\phi_{p,q}$ é o ângulo entre os pontos p e q , onde $\phi_{p,q}$ pode ser maior que 2π .

Com o seguinte resultado óbvio:

Lema 2 *Toda curva de pontos equidistantes de um ponto p de M é um paralelo em relação a p ou um ponto (o próprio p ou o ponto antípoda).*

temos que

Corolário 3 *Considerando o ponto de saída um pólo, as curvas nas quais o referencial é igual são paralelos.*

Demonstração: Usando a notação da demonstração do Teorema 1 e não fazendo ressalvas para ângulos maiores que 2π é evidente que aquela demonstração estabelece uma função linear para os pontos em que o referencial é igual ao ponto de saída, e temos que $\frac{4n\pi^2}{\alpha+2\pi} = n\frac{2\pi}{R+1}R$

QED

É consequência imediata deste corolário que:

Corolário 4 *O rolamento s.e.s.p. a partir de $(p, (\lambda, \mu, \nu))$ ao longo de uma geodésica γ tal que o comprimento do arco de círculo máximo percorrido é $n \frac{2\pi}{R+1} R$ não altera o referencial, isto é, na posição final temos $(q, (\lambda, \mu, \nu))$.*

Será bastante útil considerar o que ocorre quando B rola s.e.s.p. sobre um arco de círculo máximo de comprimento $\frac{\pi}{R+1} R$:

Corolário 5 *Seja $(p, (\lambda, \mu, \nu))$, ν normal à esfera em p , então o rolamento s.e.s.p. de B a partir de p ao longo de uma geodésica γ tal que o comprimento do arco de círculo máximo percorrido é $\frac{\pi}{R+1} R + n \frac{2\pi}{R+1} R$ deixa B numa posição final (q, Θ_q) , onde $\Theta_q = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, -\nu)$.*

Demonstração: Análoga à do Teorema 1.

QED

Pelas observações anteriores, segue que para resolver o “caso 1” precisamos concatenar trajetos ao longo de geodésicas tais que o referencial solidário à bolinha B é igual nas extremidades desses trajetos. Considere Φ_p o conjunto das geodésicas que passam por p . Na esfera sabemos que há geodésicas saindo de p em todas as direções (isto é, em $T_p M$, privilegiando a geodésica que une p e q , há geodésicas γ cujo $\dot{\gamma}$ são vetores em todas as direções (ângulos)).

Seja $l(\gamma)$ o comprimento de uma geodésica ou arco de geodésica γ . Seja $d_\gamma(x, p) = l(\gamma_{x,p})$ para cada $\gamma_{x,p}$, arco de geodésica que começa em x e acaba em p .

Considere

$$C_{p,1} = \left\{ x \in M : \phi_{x,p} = \frac{2\pi}{R+1} \right\} = \left\{ x \in M : d_\gamma(x, p) = \frac{2\pi}{R+1} R \right\} \quad (3.1)$$

É imediato pelo Lema 2 que $C_{p,1}$ é um paralelo em relação a p . Seja, para $n \in \mathbb{N}^*$

$$C_{p,n} = \left\{ x \in M : d_\gamma(x, p) = n \frac{2\pi}{R+1} R, \forall \gamma_{x,p} \right\} \quad (3.2)$$

isto é, se $x \in C_{p,n}$ então existe γ tal que o comprimento de γ que une x e p é igual a $n\frac{2\pi}{R+1}R$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$, mas não se exige que γ seja o menor arco de círculo máximo unindo x e p .

$C_{p,n} \forall n \in \mathbb{N}^*$ é ou um paralelo ou um único ponto (p ou o ponto oposto a p), pelo Corolário 3. As duas situações, bem como quando $C_{p,n} \cap C_{p,m} \neq \emptyset$, algum $n, m \in \mathbb{N}^*$ não causam problemas.

Seja

$$C_p = \{C_{p,n} : n \in \mathbb{N}^*\} \quad (3.3)$$

3.1.1 Situação 1: $C_p \cap C_q \neq \emptyset$

$C_p \cap C_q \neq \emptyset \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\{x \in M : d_\gamma(p, x) = n\frac{2\pi}{R+1}R\} \cap \{x \in M : d_\gamma(q, x) = m\frac{2\pi}{R+1}R\} \neq \emptyset \quad (3.4)$$

Basta tomarmos y nessa intersecção e estamos prontos em dois movimentos, em vista do Teorema 1.

3.1.2 Situação 2: $C_p \cap C_q = \emptyset$

Exemplo: Apesar dessa situação ser típica de pontos conjugados, ela não ocorre apenas nestes casos, conforme se vê no exemplo a seguir. Considere M a esfera de raio R . Se $R = 2m$, para algum $m \in \mathbb{N}$, considere

1. p, q pólos ou
2. fixando p no pólo norte, considere q bastante próximo do pólo sul.

Em 1. é imediato, pelo Corolário 5, que B saindo de p sempre chegará a q (e vice-versa) com o referencial espelhado em relação ao referencial padrão do \mathbb{R}^3 . Basta pensar, levando em conta o Fato 1, que um vetor do referencial é normal, e então notar que em ambas as posições ele é normal à esfera.

Em vista da relação entre os raios da bolinha B e de M , o que ocorre é que C_p e C_q são uma coleção finita de paralelas. Portanto

$$\nexists n, m : C_{p,n} \cap C_{q,m} \neq \emptyset \quad (3.5)$$

Em 2., C_q , por continuidade, são circunferências pouco deslocadas das paralelas e como na situação 1. tinha-se que C_p, C_q são uma coleção finita de paralelos, então agora C_q , para q situado próximo ao pólo sul, não intercepta C_p . Veja o exemplo B.3, página 44.

A utilidade deste exemplo é mostrar que $C_p \cap C_q = \emptyset$ não se restringe a p, q pontos conjugados. A ausência de intersecção é consequência da geometria da variedade, vide os apêndices.

Lembrando que a esfera M é uma variedade completa, seja x um ponto de $C_{p,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tal que x está suficientemente perto de q . Então, se

$$C_x := \{y \in M : \phi_{y,x} = \nu \frac{2\pi}{R+1}, \nu \in \mathbb{N}\} \quad (3.6)$$

temos $C_x \cap C_q \neq \emptyset$ pelo seguinte lema:

Lema 6 *Para p, q suficientemente próximos, $C_p \cap C_q \neq \emptyset$. De fato, se p, q distam menos de $\frac{2\pi}{R+1}R$ por um arco de geodésica, então $C_p \cap C_q \neq \emptyset$.*

Demonstração: Note que, para p, q arbitrariamente próximos, essas curvas são distorções contínuas uma da outra que interceptam-se em ao menos dois pontos.

Na verdade, para $R > 2$ veja que, por continuidade, $C_{p,1} \cap C_{q,1} \neq \emptyset$ para pontos tais que $\phi_{p,q} < \frac{2\pi}{R+1}$. De fato, temos, de modo análogo ao que ocorre no plano, como que uma “lente” formada por $C_{p,1}, C_{q,1}$ ao redor do ponto médio do arco de geodésica que une os pontos. Para $1 < R < 2$, o mesmo argumento aplica-se a $C_{p,2}$ e $C_{q,1}$, conforme pode ser deduzido da demonstração do Corolário 8 e como ilustrado pela figura B.2, p. 44.

QED

Recorrendo ao exemplo B.3, nota-se que essa estimativa é ótima.

Como $C_x \cap C_p \neq \emptyset$, basta escolher $y \in C_x \cap C_q$ de modo que vai-se em três movimentos em cujas extremidades o referencial na bolinha é sempre igual: percorre-se a geodésica γ_1 de p a x , γ_2 de x a y , γ_3 de y a q , tal que γ_i são, nesses trajetos, arcos de círculos máximos de ângulos respectivos de $n_i \frac{2\pi}{R+1}$,

$n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$.

Observação: A idéia geométrica desta segunda possibilidade é que os pontos da(s) geodésica(s) que une(m) p e q que estão mais no “meio” do caminho são bons candidatos a x , pois os seus C_x são (tendem a ser) perpendiculares a C_p , C_q . Ou seja, x apenas precisa estar suficientemente distante de p .

Isto vale literalmente no caso de M ser a esfera, com p , q pólos (ou próximos a pólos, ou muito próximos entre si). Seus C_p , C_q são coleções de paralelos (resp. quase paralelos). Mas para x perto do equador, C_x são quase meridianos. Note que para p , q próximos a situação é análoga, pois equivale à de (quase) pólos considerando os arcos maiores das geodésicas que os unem.

Com isso demonstramos o

Teorema 7 *Resolve-se o “caso 1” (referenciais iguais) em 2 ou 3 movimentos.*

Resumindo a discussão anterior, vejamos alguns resultados relacionados à resolução em 2 movimentos. Chamemos de calota de raio β ao redor de um ponto q , onde β é um ângulo em $(0, \pi]$ ao conjunto de pontos tais que a distância (geodésica) mínima entre eles e q é menor que βR .

Corolário 8 *$\phi/2$ é o raio da calota V_p ao redor do ponto oposto a p , tal que se $x \in M \setminus V_p$, então bastam dois movimentos para unir x e p .*

Observação: A calota V_p é menor do que um hemisfério, ou seja, se p é o pólo norte, V_p está contido estritamente no hemisfério sul.

Para demonstrar o Corolário 8, consideremos o seguinte:

Lema 9 *O “caso 1” resolve-se em dois movimentos exceto eventualmente, conforme a proporção dos raios, para pontos p, q tais que q está muito próximo do ponto - pólo - oposto a p , onde muito próximo é definido pelo aberto de pontos que distam menos de $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{R+1}$ do pólo oposto, isto é, $d_\gamma < \frac{\phi}{2}R$, onde γ é o arco de círculo máximo mais breve unindo um ponto ao pólo oposto.*

Demonstração do Lema: É trivial que essa calota está no interior da superfície delimitada por $C_{p,1}$. Na realidade, como C_q são paralelos, que distam

no máximo ϕR entre si (os paralelos consecutivos $C_{p,n}$ e $C_{p,n+1}$ distam ϕR), os pontos que distam ao menos $\frac{\phi}{2}R$ de p têm conjuntos $C_{\bar{p}}$ suficientemente inclinados para que interceptem C_q . Basta considerar o elemento de C_q mais próximo do pólo oposto, mas que não seja um ponto. É um paralelo que dista no máximo ϕR do pólo. Para \bar{p} a $\frac{\phi}{2}R$ do pólo oposto, seu $C_{\bar{p},1}$ intercepta o elemento de C_q em consideração. Vide figura na página 45.

QED

Demonstração do Corolário 8: Na esfera, segue disto que os pontos para os quais $C_p \cap C_q = \emptyset$, se q é o pólo sul, são pontos numa calota ao redor do pólo norte. Qualquer movimento que leve para \bar{p} fora dessa calota, permite que $C_{\bar{p}} \cap C_q \neq \emptyset$.

Ou seja, os pontos para os quais $C_p \cap C_q = \emptyset$ estão na calota delimitada pelo paralelo que dista $\frac{\phi}{2}R = \frac{\pi}{R+1}R$ do pólo. Por conseguinte, para qualquer um desses pontos, um movimento de comprimento ϕR em qualquer direção leva-o para um ponto fora da calota problemática.

De fato, seja $-p$ o ponto oposto a p . C_p , C_{-p} são uma coleção de circunferências paralelas que distam no máximo ϕ entre si. Pontos q próximos de $-p$ tem coleções de circunferências C_q que podem ser consideradas como distorções contínuas de C_{-p} , isto é, o ângulo é constante e varia proporcionalmente. Se C_p e C_{-p} distavam ϕ , é imediato que para q a pelo menos $\frac{\phi}{2}$ de $-p$, $C_p \cap C_q \neq \emptyset$. Essa era a pior situação.

QED

O seguinte resultado especifica como sair da calota mesmo quando os rolamentos estão restritos a uma geodésica e a direção está especificada (vide B.5, p. 47):

Corolário 10 *Sejam $p, q \in M$, e γ um círculo máximo passando por q . Então existe $x \in \gamma$ tal que $d_\gamma = n\phi R = n\frac{2\pi}{R+1}R$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $x \in M \setminus V_p$, ou seja, pode-se levar um referencial igual de p para x em 2 movimentos.*

Analogamente mostra-se que existe tal $x \in \gamma$ no hemisfério que contém p .

3.2 Caso 2: Correção da discrepância

Em [3], “discrepância de pivotamento” é assim definida:

“Se $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é um referencial positivo ortonormal, com \vec{k} ortogonal ao plano de rolamento, e, se $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ é também ortonormal positivo, o ângulo ϕ_0 de \vec{i} para \vec{I} chama-se *discrepância de pivotamento* entre as orientações definidas pelos dois referenciais”. (p. 89)

Naquele contexto, em que B rola sobre o plano, isso se justifica porque é possível corrigir essa discrepância em 2 movimentos de maneira bastante engenhosa e geométrica. O caso em que ν não é ortogonal ao plano (isto é, $\nu \neq e_z$), naturalmente era ali resolvido por um acréscimo num rolamento, que fixava uma direção de movimento (ver [3], p. 92).

Entretanto, no caso da esfera, como a seguir discutiremos, em geral não é possível resolver analogamente em 2 movimentos a correção da discrepância. Como mostrado no Apêndice A, apesar de que o comportamento do referencial solidário à bolinha B depende apenas da direção e comprimento do rolamento, infelizmente não podemos realizar esse passo de modo análogo ao plano ([3]). Ademais, requer mais cuidado ao definir discrepância, já que o plano definido por (e_x, e_y) só é tangente a M em dois pontos. Em contrapartida, encontramos uma maneira de resolver o caso geral na esfera em 4 movimentos, de uma maneira aparentemente mais uniforme do que a vista para o plano em [3].

Assim, nós generalizamos o conceito de discrepância para englobar o referencial tridimensionalmente, e sempre especificamos quais elementos dos dois referenciais em questão são comparados para determinar o ângulo entre eles. Acreditamos que mesmo assim a nomenclatura não será ambígua.

Seja $\Theta_p = (\lambda, \mu, \nu)$ o referencial num ponto p , e $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ o referencial num ponto q . Podemos sempre supor ν igual a e_z , para simplificar o problema. De fato, identificada uma rotação $\rho \in SO(3)$, que aplicada ao referencial de p o deixa ortogonal positivo, com $\nu' = e_z$, basta aplicar ρ ao referencial de p

também e resolver este problema. É imediato, como o referencial é solidário à bolinha B , que os movimentos encontrados nesse caso resolvem também o problema original. Portanto, suponhamos ν ortogonal positivo. E, sem perda de generalidade suponhamos que o referencial Θ_p é o referencial ortonormal padrão, isto é, (e_x, e_y, e_z) .

Quando nenhum dos vetores do referencial coincide com e_z , vamos supor que sabemos com precisão qual é o “terceiro” vetor do referencial $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$, isto é, qual é o vetor que queremos que em p seja ortogonal positivo (isto é, igual a $\nu = e_z$).

Cabe aqui uma breve digressão sobre a identificação dos vetores dos referenciais. Desde o início estamos supondo que o problema de Kendall é dado por uma associação de um referencial a cada ponto de M . Isto significa que em cada ponto há um referencial que pode ser comparado a (e_x, e_y, e_z) por rotação e pivotamento. Durante a resolução nos referimos a eles como ternas ordenadas acopladas aos pontos de M , ou seja, identificamos cada um dos vetores. Contudo, é evidente que nisso evitamos que houvesse situações insolúveis como, por exemplo, um referencial $(e_x, -e_y, e_z)$ (pois é uma terna negativamente ordenada), inalcançáveis por rolamentos s.e.s.p. Ademais, note-se que esse referencial identificado como $(e_x, e_z, -e_y)$ não apresentaria problemas. Ou seja, para a resolução do problema de Kendall há duas abordagens: supõe-se que o problema já nos oferece os referenciais identificados, ou identifica-se os referenciais de modo coerente. Essa segunda possibilidade significa que alguns referenciais poderiam ser descritos de mais de um modo, mas supomos que quando são discutidos dois estados (p, Θ_p) e (q, Θ_q) , já não há problemas ou dificuldades relacionados a isso. É claro que enquanto se discute uma situação que envolve dois referenciais iguais, não há dificuldades, uma vez que basta identificar os vetores de modo igual em ambos os casos. Mesmo assim, é válido colocar em relevo a questão de como saber qual é o “terceiro vetor” do referencial.

É evidente que quando $\bar{\nu} \neq \pm e_z$ há apenas uma direção (e dois sentidos) na qual o referencial pode rolar para que ν fique ortogonal, a saber, a direção dada pela perpendicular à bissetriz de $\bar{\nu}$ e e_z , que são l.i.. Ademais, o rolamento nessa direção alcança uma posição em que ν ficou ortogonal em menos

de $\frac{\pi}{R+1}$. Contudo, não nos interessa realizar esse movimento em separado, para a seguir usar a resolução do caso em que $\bar{\nu} = e_z$, se podemos evitá-lo. De fato, esse detalhe não afeta a resolução proposta, contudo é um aspecto que requer alguma atenção.

O resultado central desse capítulo é:

Teorema 11 *São suficientes quatro movimentos de rolar s.e.s.p. para levar $(p, (\lambda, \mu, \nu))$ para $(q, (\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}))$.*

Para demonstrá-lo, usaremos o seguinte:

Lema 12 *Sejam (λ, μ, ν) e $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ dois referenciais tais que $\nu = e_z$, o ângulo entre ν e $\bar{\nu}$ é ϕ , $0 < \phi < \pi/2$ e tal que o referencial (λ, μ, ν) está no pólo norte de M .*

Se a bolinha B rola s.e.s.p por $\frac{\pi}{R+1}$ a partir do pólo norte ao longo do meridiano determinado pela perpendicular à bissetriz de ϕ , então o referencial obtido no ponto final desse movimento é $(\bar{\lambda}, -\bar{\mu}, -\nu)$.

Demonstração:

É evidente pelo Corolário 5 que no ponto final do rolamento, o referencial está numa posição $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, -\nu)$, pois seu comprimento é $\frac{\pi}{R+1}$. Portanto, basta provar que $\hat{\lambda} = \bar{\lambda}$ pois, então, já que o movimento preserva orientação, $\hat{\mu} = \bar{\mu}$. Seja $\lambda(t), \mu(t), \nu(t), 0 \leq t \leq T$, movimento dos vetores de um referencial, onde T é o instante final do movimento. Como o movimento deixa a bissetriz entre λ e $\bar{\lambda}$ invariante, o movimento $\lambda(t), 0 \leq t \leq T$, descreve um semi-círculo em torno dessa bissetriz invariante, logo $\lambda(T) = \bar{\lambda}$.

QED

Demonstração do teorema 11:

Sem perda de generalidade, suponha que p é o pólo norte, e que (λ, μ, ν) é igual a (e_x, e_y, e_z) .

1. Escolha uma direção conveniente para levar a bolinha B da configuração $(q, (\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}))$ para a configuração $(\tilde{q}, (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, -\nu))$, onde o terceiro elemento do referencial foi colocado na posição vertical negativa. Essa direção

é dada pela perpendicular à bissetriz entre $\bar{\nu}$ e $-e_z$ (que deixa essa bissetriz invariante).

2. Pelo Lema 12, é possível obter em um movimento, por rolamento s.e.s.p. ao longo de um meridiano, o referencial $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, -\nu)$ num ponto \tilde{p} saindo de $(p, (\lambda, \mu, \nu))$.

Assim, tem-se $(\tilde{p}, (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, -\nu))$ e $(\tilde{q}, (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, -\nu))$. Se $\tilde{p} = \tilde{q}$, a discrepância foi corrigida em dois movimentos. Nos demais casos, tem-se o mesmo referencial em dois pontos da esfera M . Sabemos, pelo teorema 1, que para levar um referencial de um ponto para outro ponto, podem ser necessários três movimentos. Como mostrado no seguinte lema, no contexto desse teorema, sempre é possível obter os referenciais iguais em dois pontos para os quais dois movimentos são suficientes. Assim, está demonstrado o teorema.

QED

Lema 13 *No contexto do Teorema 11, os referenciais iguais podem ser obtidos em pontos para os quais são suficientes 2 movimentos para levar a bolinha de um a outro.*

Demonstração: Pelo Lema 9, sabemos que se um ponto está fora da calota de ângulo $\frac{\pi}{R+1}$ ao redor do ponto oposto ao outro, então 2 movimentos são suficientes. Também sabemos pelo Corolário 4 que qualquer rolamento, se prolongado por $n\frac{2\pi}{R+1}$, $n \in \mathbb{N}$, chega a um estado em que seu referencial permanece inalterado. Ademais, todos os rolamentos ocorrem em círculos máximos, pois são s.e.s.p.

Assim, é imediato que mantendo fixo um dos dois movimentos enumerados na demonstração do teorema, e prolongando o outro suficientemente, obtém-se pelo Corolário 10 pontos \tilde{p}, \tilde{q} suficientemente próximos tais que 2 movimentos são suficientes.

QED

Por clareza, podemos reenunciar o Teorema 11 assim:

Teorema 14 *Para resolver o problema de Kendall na esfera são suficientes quatro movimentos.*

Em qualquer um dos casos acima esboçados, é imediato perceber que, quando se rola sobre uma certa geodésica (isto é, escolheu-se a direção), é irrelevante se esse movimento procede por uma distância d ou é acrescido de qualquer rotação que não altera o referencial, isto é, $d + n\phi R$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Desse modo pode-se prolongar um dos movimentos da “correção de discrepância” para resolver um dos movimentos do caso 1, chegando perto do ponto alvo e economizando assim um movimento.

Corrigindo a discrepância por dois movimentos de comprimento $\leq \pi$, não se afasta mais de 2π do pólo. Os dois movimentos de correção de discrepância levam a bolinha B para pontos nos quais ainda podem ser necessários três movimentos para ligá-los sem alterar os referenciais (Caso 1). Basta aproximá-los suficientemente para, pelo Lema 6, resolver em dois movimentos.

Portanto, como precisamos 2 movimentos para corrigir discrepância, é necessário evitar que usemos mais de 2 movimentos para levar o mesmo referencial de um ponto ao outro. Acima, discutimos que para isso podemos prolongar algum dos movimentos da correção da discrepância, ou a partir do ponto inicial, ou do ponto final. Precisamos nos preocupar com os pares de pontos quase antípodos. Contudo a calota de pontos distantes no máximo π de um ponto tem para os círculos máximos que a cruzam, no máximo comprimento 2π . Logo, prolongando em 2π sai-se dessa calota.

Podemos precisar de 3 movimentos para levar o mesmo referencial de um ponto a outro se essa for a situação inicial - isto é, não precisamos corrigir a discrepância - mas isso não é problema.

Observação: Como vimos no Teorema 7, quando temos referenciais iguais em dois pontos de M , são suficientes 3 movimentos.

Observação: Comparando-se à resolução do problema de Kendall no plano ([3]), merece ser destacado o seguinte caso particular. A concatenação de rolamentos (de comprimento $(2n+1)\pi$) feita no plano não é geralmente viável na esfera pois após rolar $(2n+1)\pi$, o referencial, rolando junto com a bolinha, não está em relação ao \mathbb{R}^3 com o terceiro vetor invertido. Por outro lado, após rolar $\frac{\pi}{R+1}$, quando o referencial na bolinha B está na posição adequada, o ponto de contato de B com M é tal que quando se emenda outro rolamento,

o referencial começa a girar sobre um eixo dado pela direção do rolamento que impede a correção da discrepância. Por isso, na esfera, é necessário realizar os dois movimentos de correção da discrepância em separado, um no ponto de saída p , outro no ponto de chegada q . As duas abordagens entram em acordo quando o raio de M , R é um número natural ímpar > 3 . Então a bolinha B rola, supondo sem perda de generalidade que se parte do pólo (norte) até o equador:

1. $\frac{R}{4}$ voltas inteiras, e chega com o referencial preservando a normal (pelo Fato 1), se R é múltiplo de 4
2. Caso contrário, rola $\frac{R}{4}$ voltas inteiras mais meia volta, e preserva o referencial.

Emendando-se um rolamento ao longo do equador, pode-se corrigir em ambos casos qualquer discrepância envolvendo os vetores do plano tangente à esfera. Particularmente, segue disto que nesta situação (referente ao raio R) bastam três movimentos para obter no pólo (norte) qualquer referencial Θ , partindo de uma situação inicial dada.

3.3 Generalização

Seja M uma variedade riemanniana suave onde localmente quaisquer dois pontos podem ser ligados por geodésicas planas. Seja δ o raio da bolinha B tal que δ é pequeno suficiente para que bolinha B dê voltas suficientes a partir de p na vizinhança de p em que os pontos podem ser ligados a p por geodésicas planas para que o referencial retorne ao estado inicial. Se M não é compacta, exigimos que essas vizinhanças tenham um tamanho mínimo. Procedendo como acima, os lemas, teoremas e corolários podem ser demonstrados de modo análogo, com algum cuidado.

A hipótese sobre geodésicas serem planas localmente implica que o referencial, visto de \mathbb{R}^3 depende apenas da direção e comprimento do rolamento. Contudo, a distância a ser percorrida para que o referencial retorne a seu estado inicial ou alcance uma certa posição depende da variedade. Isto é,

não podemos mais usar a constante $\phi R = \frac{2\pi}{R+1}R$. De fato, notemos que na demonstração do Teorema 1, a regra de três considerava que quando a bolinha tivesse rolado 2π , isto é, dado uma volta completa, o referencial já teria passado por uma posição idêntica à de saída, o que não ocorre se o trajeto do rolamento tiver curvatura negativa. De fato, no interior da esfera, a constante é $\frac{2\pi}{1-R}R$. Numa variedade em geral, descreveremos a situação com uma função de primeiro retorno $\Pi_p : T_p M \rightarrow M$ definida por $\dot{\gamma}(0) \mapsto \gamma(t_p)$, onde $t_p \in (0, \infty)$. Isto é, para cada geodésica $\gamma(t)$ que passa por p em $t = 0$, seja t_p o tempo para o qual, em $\gamma(t_p)$, levando em conta o raio de B , o referencial, ao rolar s.e.s.p. solidariamente à bolinha, retorna à situação em p . Com isso, Π_p associa um ponto de M a cada direção de geodésica que passa por p .

Em vista das hipóteses sobre M e δ , a imagem de Π_p está na vizinhança em que as geodésicas passando por p são planas. Ademais, a imagem de Π_p é uma curva fechada contínua. Abusando da notação, podemos falar de $\Pi_p(q)$, onde $q \in M$ é um ponto na vizinhança de geodésicas planas. Se p e q estão numa vizinhança normal, uma única geodésica os une. Para todos os pontos \tilde{q} nessa geodésica $\Pi_p(\tilde{q})$ é constante.

Seja $L_p := \{\Pi_p(\dot{\gamma}) : \gamma \text{ passa por } p\}$. Na resolução do problema de Kendall L_p substitui $C_{p,1}$. Então, podemos enunciar o seguinte:

Lema 15 *Para $p, q \in M$ suficientemente próximos, $L_p \cap L_q \neq \emptyset$*

Uma vez que Π_p está bem definida, é imediato que todas as outras situações do referencial podem ser obtidas antes do primeiro retorno. Logo, para p, q suficientemente próximos com referenciais Θ_p, Θ_q , tem-se que os dois rolamentos que os levam para um mesmo referencial terminam em pontos \tilde{p}, \tilde{q} que ainda estão suficientemente próximos para que $L_{\tilde{p}} \cap L_{\tilde{q}} \neq \emptyset$, ou seja, bastam 2 movimentos para levar esses referenciais iguais de um a outro.

Exemplo

A hipótese sobre geodésicas planas é necessária para que valha o Teorema 1. De fato, como estamos analisando os referenciais em relação ao \mathbb{R}^3 , conforme

a evolução do vetor normal à superfície em comparação ao \mathbb{R}^3 ao longo de uma geodésica, é possível, em vista do Fato 1 que o referencial nunca retorne a uma certa posição de saída.

Considere M tal qual uma montanha em meio a uma planície infinita. Mais especificamente, considere um parabolóide M_1 que seccionamos horizontalmente a uma altura h da extremidade do parabolóide. Deixando um certo intervalo ϵ , pode-se construir com a secção do parabolóide M_1 e um plano horizontal que fica a $h + \epsilon$ uma variedade C^∞ cujas geodésicas são iguais às do parabolóide na secção de M_1 e ao longo da faixa de transição fundem-se suavemente às geodésicas do plano, isto é, às retas. Em vista da geometria do parabolóide, sabemos que as geodésicas são curvas cuja altura em relação à extremidade não é constante. É fácil visualizar pontos próximos à transição para os quais a bolinha ao rolar em direção ao plano começa a inclinar o referencial (podemos supor que tenha um vetor normal a M_1) e quando passa para o plano, o referencial está numa posição (por exemplo, com aquele vetor antes normal ao parabolóide agora normal ao plano, ou seja vertical) da qual, com o prosseguimento do rolamento de B , nunca retornará à posição inicial.

Note-se que, nesse exemplo, o problema de Kendall pode ser ainda resolvido ou pelo método esboçado nesse capítulo ou pelo dado em [3]. De fato, dados dois pontos quaisquer basta, quando necessário, levar, por rolamento, os referenciais até o plano e ali resolver o problema, usando para isso os referenciais tais quais estão na bolinha. Uma vez que o rolamento alcançou o plano, pode-se prolongá-lo o suficiente para que o método escolhido não inclua movimentos sobre o parabolóide. Particularmente, sabemos que o método exposto nessa seção não requer movimentos longos.

Desse modo, vemos que o problema de Kendall pode ser resolvido em 6 movimentos numa variedade em que existe um ponto p_0 e uma vizinhança $\mathcal{V}_{p_0} \in M$ dele tal que quaisquer pontos $p, q \in \mathcal{V}_{p_0}$ são ligados por uma geodésica plana.

Por fim, cabe ressaltar que uma superfície M , mergulhada em \mathbb{R}^3 , na qual, em cada ponto, as geodésicas em qualquer direção são curvas planas, é um plano ou uma esfera.

3.4 Caso com resolução em 2 movimentos

Apresentamos um grupo de exemplos do problema de Kendall para o qual mostramos uma resolução geométrica em dois movimentos. Essa situação é relevante porque, no plano, o método geométrico desenvolvido em [3] necessitava de 4 movimentos. A economia de movimentos em relação ao caso análogo no plano deve-se à existência de pontos conjudos na esfera. Seja M a esfera de raio $R = 2n, n \in \mathbb{N}$. Por clareza, vamos supor que $n = 1$, como no exemplo B.3 (p. 44).

Suponhamos que em um ponto temos dois referenciais $\Theta = (\lambda, \mu, \nu)$ e $\tilde{\Theta} = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ tais que em ambos o terceiro vetor é igual. Vamos mostrar que esse problema pode ser resolvido em dois movimentos. Sejam p_i e $\gamma_{i,j}, i, j = 1, 2$ os pontos e arcos de círculo máximo envolvidos.

Sem perda de generalidade, podemos supor que p_1 é o pólo norte e que $\nu, \tilde{\nu} = e_z$, ou seja, que são normais à esfera e assim os outros dois vetores estão no plano tangente a M_{p_1} . Logo, a discrepância entre os referenciais Θ e $\tilde{\Theta}$ é um ângulo no plano tangente. Ademais, note que como os raios de M e B são, respectivamente, 2 e 1, quando a bolinha rola s.e.s.p. a partir do pólo norte ao longo de um círculo máximo de M até o pólo sul, ela leva $\Theta = (\lambda, \mu, e_z)$ num referencial $(\lambda', \mu', -e_z)$, pelo Fato 1, pois o comprimento de um semi-círculo máximo é 2π , e $-e_z$ é a normal à esfera no pólo sul.

Lema 16 *Seja p_2 o pólo sul e $\tilde{\Theta} = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, -e_z)$. Então existe $\gamma_{1,2}$ unindo (p_1, Θ) a $(p_2, \tilde{\Theta})$ tal que se B rola s.e.s.p. ao longo de $\gamma_{1,2}$, leva o referencial Θ em $\tilde{\Theta}$.*

Demonstração: Seja $\Theta_1 = (\tilde{\lambda}, -\tilde{\mu}, e_z)$, referencial ortonormal positivo, e considere a bissetriz ℓ do ângulo α entre λ e $-\tilde{\lambda}$. Seja u um vetor unitário perpendicular a ℓ e escolha $\gamma_{1,2}$ cujo vetor tangente em p_1 é u . Lembre-se que como p_1 e p_2 são conjugados, para toda direção (isto é, para todo vetor unitário tangente) há uma geodésica unindo-os.

Então, note que quando B rola s.e.s.p. ao longo de $\gamma_{1,2}$ começando com o referencial solidário $\Theta = (\lambda, \mu, e_z)$, o vetor λ desse referencial move-se num cone de diretriz ℓ e geratriz λ . Esse cone intercepta o plano $z = 0$ nos lados do ângulo α , ou seja nas semi-retas $t\lambda$ e $t\tilde{\lambda}$, $t \geq 0$.

Além disso, como o comprimento de $\gamma_{1,2}$ é 2π , e (pelo Teorema 1) a cada arco de comprimento $\frac{2\pi}{3}$ o vetor λ do referencial solidário vai de um lado a outro de α , tem-se que o referencial Θ chega pelo rolamento de B em p_2 como $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, -e_z)$.

QED

Corolário 17 *Sejam $\Theta = (\lambda, \mu, \nu)$, $\tilde{\Theta} = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \nu)$ tais que ν é normal a M em p_1 . São suficientes dois movimentos para levar (p_1, Θ) em $(p_1, \tilde{\Theta})$.*

Demonstração: Usando a notação desta seção, seja p_2 o pólo sul e considere qualquer γ que une p_1 a p_2 . Seja Θ_γ o referencial obtido em p_2 pelo rolamento de $\tilde{\Theta}$ ao longo de γ . Observe que esse rolamento é invertível, isto é, Θ_γ é levado pelo percurso contrário ao longo de γ em $\tilde{\Theta}$.

Pelo Lema 16, existe $\gamma_{1,2}$ que leva (p_1, Θ) em (p_2, Θ_γ) , logo basta sair de p_1 com o referencial Θ , percorrer $\gamma_{1,2}$ para chegar a p_2 com o referencial Θ_γ e retornar a p_1 por γ percorrido de p_1 para p_2 .

QED

No plano não é possível corrigir discrepância em 2 movimentos e esse caso mostra que, às vezes, os pontos conjugados de M podem ser úteis.

Conclusão

Assim, resolvemos o problema de Kendall na esfera \mathbb{S}^2 , mostrando que 4 movimentos são suficientes em quaisquer casos. Como há exemplos em que 3 movimentos são necessários (e.g. referenciais iguais em pontos opostos, com raios arbitrários), o número mínimo para resolver o problema de Kendall na esfera é 3 ou 4. Isto é, dadas duas esferas, basta considerar a de maior raio como M , a outra como B , e aplicar a elas a mesma resolução aqui desenvolvida. Entretanto, o único caso deveras insolúvel pelo algoritmo aqui apresentado, é o de raios iguais entre B e M . De fato, note que, então, para todo ponto p , C_p é formado apenas pelo próprio ponto e seu antípoda.

A resolução é análoga quando a bolinha B rola por dentro, isto é, no interior da esfera M . Pode-se tanto considerar M de raio $R > 1$ e bolinha de raio 1 como M de raio 1 e B de raio $\delta < 1$. Então, no Teorema 1, tem-se que trabalhar com as distâncias $\frac{2\pi}{1-R}R$ ou $\frac{2\pi}{1-\delta}\delta$, respectivamente, e no Corolário 5 com $\frac{\pi}{1-R}R$ ou $\frac{\pi}{1-\delta}\delta$, respectivamente. Contudo, é importante ressaltar que para $R < 2$, resp. $\delta > 1/2$, a resolução requer que B dê diversas voltas para o referencial encontrar a posição desejada. Essas questões refletem o que também foi discutido na generalização do problema para variedades com geodésicas planas.

Dependeu-se do \mathbb{R}^3 , pois é necessário fixar a posição e orientação da esfera no espaço, de modo que a partir de então os pontos não são “equivalentes entre si” do ponto de vista de um observador na esfera M . Tem pouca relevância se o referencial é ou não normal, o que dificulta a concatenação de movimentos. Também teve grande importância a geometria da esfera, especialmente as propriedades de suas geodésicas. Graças a isso pôde-se resolver o problema em apenas 4 movimentos, já que, sem adequação, o

método proposto requer cinco movimentos. Note-se que esse procedimento também resolve o problema de Kendall no plano.

Pode-se argumentar que a formulação não é muito intuitiva, já que rolamentos de $2n\pi$, que a primeira vista não alteram o referencial em relação a um observador na esfera, não preservam o referencial quando comparado às coordenadas de \mathbb{R}^3 . Contudo, como discutimos no Apêndice A que segue, há dificuldades em colocar e resolver o problema desse ponto de vista.

Também vimos que a resolução é válida em variedades nas quais para quaisquer dois pontos há geodésicas planas ligando-os.

Na literatura ([2], [3]), enfatiza-se a relação do problema de Kendall com teoria de controle. Também nossa resolução tem interesse prático nesse sentido, pois a partir de um estado inicial queremos alcançar um certo estado. A resolução proposta explicita um algoritmo para alcançar um certo referencial, numa certa posição, pois apesar da construção delineada na demonstração do Teorema 11 partir dos pontos inicial e final, ela também especifica como realizar os quatro movimentos concatenados, já que todos os rolamentos são invertíveis.

Apêndice A

Descrição intrínseca dos referenciais na variedade

Aqui nós apresentamos uma outra abordagem quanto aos referenciais, não mais vistos em comparação ao \mathbb{R}^3 . Infelizmente, em vista da natureza do transporte paralelo, não conseguimos, desse modo, resolver o problema de levar, em 2 movimentos um referencial igual de um ponto para outro. Depois de apresentar este enfoque ao problema e discutir como reflete as características da variedade, provamos suas limitações. Não há porque nos restringirmos à esfera, e trabalhamos com uma variedade M conexa, suave, riemanniana, sem bordo, orientável e de dimensão 2. Exigimos que o fecho de M seja sem bordo. Não é necessário que M esteja mergulhada em \mathbb{R}^3 , mas que M esteja mergulhada em P , uma variedade riemanniana, orientável, de dimensão 3, pois precisamos de N , vetor normal. Quaisquer dois pontos são interligáveis por uma geodésica. Lembramos que, se M é compacta, isso é garantido pelo teorema de Hopf-Rinow. Ademais, trabalhamos com uma bolinha B de raio δ , que rola sem escorregar e sem pivotar (s.e.s.p.). Em M , tem-se num ponto p um referencial (λ, μ, ν) e quer-se obter em algum ponto q um certo referencial $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$, movendo-se a bolinha o menor número de vezes.

Por algum tempo, pensamos que a resolução do problema de Kendall seria assim mais natural, contudo, não conseguimos contornar problemas associados ao transporte paralelo. Contudo, essa abordagem nos forneceu,

como já visto, algumas ferramentas importantes para a resolução do problema de Kendall na esfera.

A motivação para essa abordagem em parte veio de certos trabalhos em que a resolução do problema de Kendall mais parece uma busca de meios de obter elementos de $SO(3)$ sobre a variedade. Buscamos dar maior ênfase na comparação dos referenciais, lembrando que o problema de Kendall refere-se a uma variedade a cujos pontos estão associados referenciais ortonormais. Assim, quisemos comparar os referenciais do ponto de vista da própria variedade. De fato, não nos parece natural descrevê-los em relação ao \mathbb{R}^3 , pois perde-se informações relacionadas, por exemplo, à simetria da variedade. Na nossa opinião, não deveria ser relevante qual a orientação de uma esfera no \mathbb{R}^3 . Assim, por exemplo, os referenciais (i, j, k) e $(i, j, -k)$ (dados por comparação a um referencial padrão (i, j, k) situado em algum ponto de \mathbb{R}^3), se colocados no pólo norte e num ponto do equador da esfera M , que se localiza no meridiano apontado por j , são, na realidade, iguais, ao menos para um observador na esfera. Analogamente constrói-se o exemplo nas circunferências mínima ou máxima do toro. Entretanto, nessas duas situações, colocando (i, j, k) nos dois pontos em questão, não é o mesmo referencial se visto por um observador vivendo na variedade.

Nós, por outro lado, enfatizamos a seguinte formulação do problema de Kendall:

“Sejam $p_1, p_2 \in M$ distintos ou não. Determinar como se leva o referencial de p_1 para o referencial de p_2 , e estimar o número máximo de movimentos suficientes.”

ou seja, interpretamos o problema de Kendall como tendo cada ponto $p \in M$ um referencial ortonormal de dimensão 3 associado a p .

Tentamos resolver usando transporte paralelo ao longo da(s) geodésica(s) que unem os pontos e empregando o fibrado normal. Isso é mais geométrico e contorna certos problemas relacionados a pontos conjugados. Ademais, permite a correção da discrepância de modo muito semelhante ao plano, como em [3]. Mostraremos, contudo, porque essa abordagem por enquanto não é ideal para contruir um método de resolução do problema de Kendall.

A.1 Comparação de referenciais por transporte paralelo

Interpretaremos o problema de Kendall como tendo em cada ponto $p \in M$ um referencial ortonormal de dimensão 3 associado a p . Para quantificá-lo, não basta considerar os referenciais como elementos de $SO(3)$ ou compará-los a um referencial ortonormal base, pois de ambos modos perde-se o contexto da variedade em que o referencial mora. Por isso, usaremos o vetor/fibrado normal à superfície para uma primeira descrição intrínseca que não precisa ainda do atlas de $M \times SO(3)$. Infelizmente não conseguimos propor uma descrição verdadeiramente intrínseca que apenas usasse fibrados tangentes, cotangentes, entre outros. Com o fibrado normal, e o fibrado tangente ao longo da geodésica que os une, pode-se comparar os referenciais intrinsecamente para pontos suficientemente próximos. Avaliaremos as projeções, isto é, as componentes no plano tangente a $p \in M$ e na normal a M em p , do referencial associado a p em relação a essas geodésicas. O transporte paralelo ([5], [6], [7]) está perfeitamente bem definido do ponto de vista da variedade para os vetores no plano tangente, e, levando em conta a normal e a geodésica, pode-se “projetar” e “desprojetar” qualquer referencial em diferentes pontos unidos pela geodésica. De fato, basta considerar ângulos entre as projeções do referencial no plano tangente e a tangente à geodésica (que também está no plano tangente a M em p), como discutido a seguir:

A.1.1 Em pontos suficientemente próximos

Sejam p_1, p_2 pontos que estão numa vizinhança normal ([5], p. 33), tal que p_2 está na vizinhança exponencial de p_1 e vice-versa, ou seja, a menos de reparametrização linear há uma única geodésica unindo quaisquer dois pontos nessa vizinhança. Consideraremos que as geodésicas estão parametrizadas por comprimento de arco. Assim, por exemplo, na esfera, essa vizinhança precisa estar contida estritamente numa semiesfera.

Em p_1 tem-se a normal unitária $N_1 \perp M_{p_1}$ e $T_1 = T_{p_1} M$; seja v_1 tangente à geodésica γ que une p_1 a p_2 . Logo $v_1 \subset T_1$. Com N_1 e v_1 constrói-se

um referencial ortonormal positivo (v_1, w_1, N_1) . Seja $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ o referencial solidário a p_1 . Comparam-se esses dois referenciais e estabelece-se a projeção λ'_1 e μ'_1 de λ_1, μ_1 na direção N_1 , que moram no T_1 , bem como o ângulo tridimensional $\hat{\nu}_1$ entre ν_1 em N_1 .

Pela geodésica γ vai-se de p_1 a p_2 , levando λ'_1 e μ'_1 por transporte paralelo, ressaltando que como exigimos que quaisquer dois pontos sejam ligados por uma geodésica, não precisamos nos preocupar com o transporte paralelo ao longo de concatenações de geodésicas.

Em p_2 constrói-se analogamente (v_2, w_2, N_2) , isto é, com v_2 tangente a γ e atentando para que a normal unitária N_2 seja compatível à de p_1 (algo possível, já que M é orientável). Vamos considerar (v_2, w_2, N_2) “igual” a (v_1, w_1, N_1) , pois coincide com ele transportado paralelamente. Ou seja, (v_1, w_1, N_1) e (v_2, w_2, N_2) equivalem aos referenciais padrões dados pelos atlas de $SO(3)$ como discutidos em A.2, tal que estamos supondo sem perda de generalidade que os dois pontos estão em uma única carta do atlas. Tendo-se os vetores transportados paralelamente de λ'_1 e μ'_1 , e lembrando-se do ângulo $\hat{\nu}$ (tridimensional) entre ν_1 e N_1 , reconstrói-se em p_2 o referencial próprio de p_1 . Com este referencial $(\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1, \bar{\nu}_1)$ estabelece-se a discrepância do referencial $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ próprio do ponto p_2 . Note-se que:

Observação: No caso particular em que $\nu_1 = \pm N_1, \nu_2 = \pm N_2$ não se precisa de projeções. Basta comparar o transportado de λ_1 ou μ_1 com λ_2 e μ_2 .

A.1.2 Em pontos distantes

Além das dificuldades técnicas para empregar os elementos do método descrito acima, há dificuldades concretas para pontos conjugados, como veremos a seguir. Por isso, ainda resta discutir a comparação de referenciais em p_1, p_2 que não estão numa vizinhança normal.

É evidente que ao longo de qualquer geodésica que une esses pontos pode-se transportar os referenciais. Como discutido em 2.3.1 (para $\delta = 1$) e em A.4, rolamentos de $2n\pi\delta$ não alteram o referencial. Então, com os Fatos 1, 2 e 3 podemos comparar os referenciais de quaisquer $p_1, p_2 \in M$:

Privilegie a geodésica γ de comprimento mínimo que une p_1 e p_2 , ou escolha

uma delas no caso de não ser única. Suponha que p_2 esteja numa vizinhança onde se pode descrever quantitativamente os referenciais, isto é, está-se numa carta do atlas que descreve $M \times SO(3)$. Leve o referencial de p_1 até a vizinhança normal de p_2 sem pontos conjugados, rolando-o pela bolinha ao longo desta geodésica γ , por um comprimento de $2n\pi\delta$, algum $n \in \mathbb{N}$, chegando num ponto p_3 . Não fixaremos n , dentre os que satisfazem essa condição. Pelo Fato 1, podemos afirmar que obtemos em p_3 , na vizinhança normal de p_2 , um referencial “igual” ao de p_1 . Então podemos comparar p_3 e p_2 ao longo da própria γ , como descrito em A.1.1. Contudo, dependemos, a partir deste momento da geodésica γ que privilegiamos, e de fato, precisamos usar exclusivamente γ para ir de p_1 à vizinhança normal de p_2 .

A.1.3 O problema dos pontos conjugados

Este modo de comparar os referenciais de p_1 e p_2 e determinar sua discrepância depende da geodésica que une p_1 a p_2 . Contudo não exigimos que houvesse uma única geodésica unindo $\forall p_1, p_2 \in M$. Lembre que sempre trabalhamos com uma geodésica de comprimento mínimo.

O problema fica claro no caso da esfera, onde, para cada ponto, há apenas um único ponto conjugado, a saber, o ponto diametralmente oposto. Se p_1 e p_2 não são opostos entre si, é claro que existem apenas dois arcos de círculo máximo que os unem, que são os arcos maior e menor do círculo máximo que os une. É fácil ver que, neste caso, é irrelevante por qual geodésica leva-se o referencial por transporte paralelo para fazer a comparação dos referenciais.

Contudo, se p_1 e p_2 são pólos (ou quaisquer pontos diametralmente opostos) todos os meridianos os unem. Então, por cada meridiano obtém-se por transporte paralelo nesse ponto um referencial base diferente dos demais, e rolando também se obtém sempre algo diferente. Isso fica particularmente claro se consideramos que a esfera M tem raio múltiplo de 2δ , onde δ é o raio de B . Ao menos, no caso da esfera, como os ângulos formados entre quaisquer duas geodésicas unindo pontos opostos são iguais junto aos dois, a discrepância entre o referencial de p_1 e o referencial de p_2 será igual por qualquer caminho.

Mas se numa variedade estes ângulos forem diferentes, influenciarão no transporte paralelo e as discrepâncias serão diferentes. Não podemos supor que estas geodésicas tenham comprimentos diferentes. Por isso tivemos que estabelecer precisamente como comparar os referenciais em pontos suficientemente próximos e agora detalharemos a situação dos que não estão suficientemente próximos.

Vamos exigir que haja uma distância mínima entre pontos conjugados $\epsilon > 0$. Se M não tem pontos conjugados; ou estes estão muito afastados, pode-se supor no que se segue $\epsilon = 1$ ou qualquer outro valor. Na realidade, se não há pontos conjugados, como no plano, não é necessário trabalhar com ϵ . Isto é imediato para variedades compactas e é uma hipótese que impomos a variedades de fecho não compacto. Trivialmente esta condição é satisfeita pelas superfícies de revolução, incluindo o parabolóide e o toro. É em função deste ϵ que delimitaremos o raio δ da bolinha B , para sobretudo poder garantir a correção de discrepância.

Para evitar esse absurdo aparente, mas matematicamente correto, sempre evitaremos situações que poderiam envolver dois pontos conjugados definindo mais tarde a vizinhança W_p de p onde não há pontos conjugados entre si para trabalharmos dentro dela. Pois como vimos, em pontos conjugados não conseguimos definir corretamente o atlas de $SO(3)$, e na prática, as diversas geodésicas que usamos para chegar e sair desses pontos acabam distorcendo os referenciais.

Na realidade, pontos conjugados são um grande empecilho para definir e comparar os referenciais. Eles introduzem singularidades na aplicação com a qual se gostaria de definir univocamente os referenciais padrões em cada ponto da variedade, isto é, o atlas de $SO(3)$.

Por isso, lembrando que rolamento de $2n\pi\delta$ conserva o que pode ser averigüado por transporte paralelo, aproximam-se dois pontos para uma vizinhança onde há uma carta única e conveniente e onde os referenciais podem ser quantificados comparando-os com as cartas de $SO(3)$.

A.2 Atlas de $M \times SO(3)$

Um espaço de fase usual para o problema é $M \times SO(3)$ com a estrutura padrão de variedade produto. Ao se fazer isso, simultaneamente se está dando a estrutura que descreve os movimentos dos referenciais quando rolam solidariamente a B .

De fato, em [3] essa descrição é feita por meio dos ângulos de Euler, de modo que na realidade se descreve o que ocorre com as rotações, que podem muito bem ser vistas como as da bolinha sobre toda a geodésica. Naquele trabalho, essa descrição é não só válida, como também providencial para a resolução do problema mas não é útil para descrever os referenciais do ponto de vista de um observador *em* M especificamente. Já em [1] a descrição e resolução são feitas por meio de quatérnios.

Contudo essas descrições são “externas” a M , isto é, levam à abordagem do Capítulo 3. Para tentar descrever o problema de Kendall usando referenciais em M é preciso evitar que $SO(3)$ seja algo indiferente e distinto de M , sem nenhum significado geométrico associado à variedade. Queremos evitar o problema de Kendall formulado apenas como obtenção de um elemento de $SO(3)$ num ponto da variedade. Então é necessário descrever o $SO(3)$ de cada ponto p de modo que seja natural ter um dos vetores do referencial padrão normal à variedade M , ou seja, igual ao vetor unitário na direção normal ao plano tangente a M em p . Mas há uma aparente liberdade de definir-se as duas outras direções, que moram no $T_p M$. Em vista disso, partindo de um ponto privilegiado no qual se coloca um elemento conveniente de $SO(3)$, é necessário levá-lo aos demais pontos da variedade. Usaremos transporte paralelo ao longo de geodésicas para estabelecer o referencial padrão de cada ponto da variedade. Convém destacar que, quando M é o plano, o enfoque visto em [1] e [3] coincide com o pretendido aqui.

Precisamos descrever $M \times SO(3)$ por um atlas conveniente de cartas (Φ, Ψ) , Φ carta de M , Ψ carta de $SO(3)$. Privilegie um ponto da variedade e descreva o referencial padrão aí por um elemento de $SO(3)$. Sejam p_i pontos e W_{p_i} vizinhanças desses pontos tais que no fecho delas não há pares de pontos conjugados entre si. Note que no caso da esfera uma tal vizinhança tem

de ser estritamente menor do que uma semiesfera. Coloque um referencial padrão em cada um desses pontos p_i , ou seja um elemento de $SO(3)$, tal que um dos elemento empate com o vetor normal, logo os outros dois moram no TM .

Por transporte paralelo ao longo de geodésicas, leve o referencial padrão de p_i para todos os pontos da vizinhança correspondente. Isto é, transporte paralelamente os vetores que estão em TM - logo eles continuam ortonormais entre si - e gere o terceiro elemento por produto vetorial. É trivial que esse terceiro elemento é o vetor unitário normal ao espaço tangente no ponto. Assim, em cada carta, todo ponto tem apenas um referencial associado, que em relação ao dos pontos vizinhos varia diferencialmente, pois foi obtido ao longo das geodésicas.

Pode-se mostrar que o atlas assim obtido é coerente. Em W_p não há pontos conjugados entre si. Logo os abertos que são cobertos por mais de uma carta têm pontos que não têm problemas com os referenciais, isto é, quanto a cada carta há um único referencial em cada ponto, que é descrito convenientemente. Logo uma única aplicação descreve qual a diferença entre os referenciais.

Para facilitar a quantificação da comparação de referenciais em pontos distantes, pode-se supor que os p_i não são conjugados entre si, e seus referenciais são obtidos por transporte paralelo do referencial privilegiado no ponto arbitrário - mas não conjugado a eles.

A.3 Rolamento de B

Consideremos para tanto novamente a bolinha. Vamos supor $\delta < \epsilon/8\pi$ (onde ϵ é a menor distância entre pontos conjugados). Logo, o comprimento de toda geodésica que une dois pontos conjugados é maior que ϵ , e assim, entre pontos conjugados, a bolinha tem de rolar pelo menos quatro voltas completas ($2\pi\delta < \epsilon/4$). Ademais tomemos δ suficientemente pequeno para que todo arco de geodésica possa ser prolongado para um de comprimento de pelo menos $3\pi\delta$ em qualquer direção; exijamos que o fecho de M seja sem bordo. Logo a bolinha B pode a partir de cada $p \in M$ rolar $3\pi\delta$ sobre geodésicas

que saem em todas as direções.

Usa-se canonicamente os ângulos de Euler (vide [3] p. 52-55, [7] p. 148) para descrever os referenciais em cada p_i . Usaremos então em A.6 estas fórmulas para descrever o rolamento de B sobre as geodésicas, uma vez que para um observador em M o que ocorre com o referencial que gira solidário a B depende apenas da direção e do comprimento do rolamento.

Pelo atlas de $M \times SO(3)$ estabelecido, temos os e_x, e_y, e_z para cada ponto e com os ângulos de Euler descrevemos o rolamento dos referenciais a partir daí. Como mostraremos em A.4, partindo de um ponto, a cada $2\pi\delta$ (quando o ponto de contato da bolinha volta a ser o mesmo), para um observador em M o referencial que rola s.e.s.p. solidário a B volta a empatar com aquele obtido por transporte paralelo.

Observe-se que o que ocorre com os referenciais na bolinha nada tem a ver com os referenciais solidários a M . Isto é, se $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ é o referencial de p_2 não há necessariamente qualquer relação entre o referencial que rola (por uma γ) solidário a B , $(\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1, \bar{\nu}_1)$ e $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, nem entre o referencial obtido por transporte paralelo ao longo de γ , $(\lambda'_1, \mu'_1, \nu'_1)$ e $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

Uma vez que o rolamento só depende do ângulo e da distância, partindo de um referencial $\Theta_0 \in SO(3)$, rolando na direção $a \in [0, 2\pi) = \mathbb{S}^1$ por um comprimento $r = l\delta$, obtém-se no ponto final do rolamento um referencial dado por:

$$\Theta_1 = R_3(-a)R_2(l)R_3(a)\Theta_0 = R_3(-a)R_2(r/\delta)R_3(a)\Theta_0, \quad (\text{A.1})$$

onde, com $b, c \in [0, 2\pi)$,

$$R_3(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_1(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

descrevem

$$\Theta = R_3(c)R_1(b)R_3(a),$$

logo, usa-se na equação A.1

$$R_2(l) = \begin{pmatrix} \cos l & 0 & \sin l \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin l & 0 & \cos l \end{pmatrix}$$

Como $R_3(a)$ descreve a rotação, isto é, o que ocorre com o referencial na bolinha B (de modo, que, se a bolinha não rolasse adequadamente, isso representaria um pivotamento), e $R_2(r/\delta)$ descreve a nova posição da bolinha, dando seu novo ponto de contato com a variedade M , na realidade é o segmento $R_2(r/\delta)R_3(a)\Theta_0$ que descreve o referencial no ponto final. Contudo, para quantificá-lo, é necessário o $R_3(-a)$ que, por assim dizer, compara ao mesmo referencial padrão do ponto de saída, mas agora localizado no ponto final. É desse modo que os ângulos de Euler levam em consideração a necessidade de transportar o referencial padrão de modo solidário à geodésica pela qual é feita o rolamento.

Em variedades em geral, resta definir o que é o ângulo a . Por hipótese, o fecho de M é sem bordo, logo para todo $p \in M$ há geodésicas saindo em todas as direções, isto é, em T_pM há geodésicas em cada ângulo $\alpha \in [0, 2\pi]$, e este ângulo identifica univocamente uma única geodésica. Para um ponto inicial p_1 precisamos privilegiar arbitrariamente uma direção, tendo a liberdade de escolher a direção em que sai a geodésica que une-o a um certo p_2 de interesse. Para todos pontos subseqüentes, contanto que não tenham mais de uma geodésica unindo-os ao anterior, privilegia-se a direção em que sai a geodésica que o une ao ponto anterior.

A.4 Rolamento de $2n\pi\delta$

Como já discutido em 2.3, temos os seguintes resultados cuja importância é muito maior nesta abordagem:

Fato 2 De A.1 é imediato que todo rolamento de $2n\pi\delta$ não altera o referen-

cial, pois " $R_2(2n\pi\delta)$ " é a *Id.*, logo

$$\Theta_1 = R_3(-\phi)R_3(\phi)\Theta_0 = \Theta_0$$

De modo análogo ao Fato 1, p. 6, demonstra-se:

Fato 3 *Quando B rola sem escorregar e sem pivotar (s.e.s.p.) sobre uma geodésica de comprimento $2n\pi\delta$, o referencial solidário a B chega no ponto final de modo que seja igual ao no ponto inicial, isto é, o transporte paralelo da projeção do referencial inicial recorreído coincide com o final.*

A.5 O problema de Kendall nessa abordagem

Como visto no Capítulo 3, e na literatura ([1], [3]), a idéia para a resolução da situação em que o mesmo referencial se encontra em dois pontos distintos é concatenar dois movimentos que não alteram o referencial. Contudo, transporte paralelo por arcos de geodésica não é uma operação transitiva, como visto no caso particular de raios adequados, exposto a seguir:

Numa esfera de raio 4δ , considere dois pontos. Oriente a esfera de modo que o círculo máximo que une esses pontos seja o equador. Considere o triângulo esférico formado pelo pólo (norte) e esses dois pontos no equador. É trivial que esse triângulo é isósceles e tem lados de comprimento $2\pi\delta$, logo, ao longo dos arcos que unem cada ponto ao pólo norte, estabelece-se que os referenciais são "iguais" nas extremidades. Suponha que nos dois pontos tem-se o mesmo referencial, isto é, o transporte paralelo ao longo do equador (que é o arco que os une) leva um para o outro. Sem perda de generalidade, pode-se supor que é o referencial padrão da carta de $SO(3)$ que inclui os dois pontos. Pode-se inclusive considerar o caso em que esses pontos distam $2\pi\delta$. Entretanto, é trivial que os transportados paralelamente ao longo dos arcos (que são quartos de círculos) não são iguais no pólo norte. Para ver isso, suponha que nos pontos do equador um dos vetores do referencial aponta para o pólo norte, ou seja, na direção da geodésica que une o ponto ao pólo norte. Logo, o transportado apontará, no pólo norte, na direção do prolongamento do arco que une o ponto ao pólo, ou seja, ao ponto oposto ao ponto de

saída. Isso vale para os dois pontos, logo, no pólo norte, o transportado por um dos arcos apontará para uma direção, o outro para outra. Ou seja, concatenação de transporte paralelo não permite preservar referenciais “iguais” em M qualquer.

Ao menos, em qualquer variedade M satisfazendo as hipótese, se, porventura, p_1, p_2 forem distantes por $2n\pi\delta$ por alguma γ , leva-se o referencial de p_1 ao de p_2 e compara-se no próprio ponto. Se empatarem, é imediato pelos Fatos 2 e 3 que, em um movimento, leva-se $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ para $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$. Neste caso, tem-se $(\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1, \bar{\nu}_1) = (\lambda'_1, \mu'_1, \nu'_1) = (\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

A.6 Correção de discrepância

Se conseguíssemos contornar o problema de levar referenciais iguais (do ponto de vista da variedade), ao menos teríamos, com essa postura em relação aos referenciais, a possibilidade de proceder como no plano (vide [3]) para corrigir a discrepância entre dois referenciais. De fato, o modo de resolver a correção da discrepância que usamos no caso da esfera é o segundo momento em que percebemos quão arbitrário e extrínseco ao problema é considerar os referenciais no \mathbb{R}^3 , uma vez que é necessário considerar dados externos à variedade, não apenas a direção e duração do rolamento.

Como usual na literatura, analisa-se primeiro a situação particular em que a discrepância é apenas dos vetores do referencial ortonormal que moram no plano tangente à variedade. A seguir, usa-se essa passagem para corrigir discrepâncias arbitrárias. Proceda-se como no plano, pois a resolução não depende da variedade M , apenas da direção e comprimento do rolamento s.e.s.p., cuja ocorrência é garantida pelas hipóteses. Consideremos dois referenciais $\Theta_0 = (\lambda, \mu, \nu)$ e $\Theta_2 = (\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$.

A.6.1 Situação em que ν e $\bar{\nu}$ são normais

Sejam ν e $\bar{\nu}$ normais, isto é, ortogonais ao plano tangente, logo θ é uma discrepância apenas no plano tangente.

Escolhendo uma direção, rola-se B por uma geodésica γ_1 que aponta nessa

direção por $\pi\delta$, de modo que chega-se num ponto $x \in M$ com (λ', μ', ν') , onde ν' é ortogonal negativo. Em x escolha a geodésica γ_2 cuja tangente $\dot{\gamma}_2$ faz com γ_1 um ângulo de $\theta/2$. Deste modo chega-se a $q \in M$ com $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \nu) = (\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$, como no plano ([3]). Isto é, o observador em q vê um referencial com ν normal, e vetores no plano tangente que fazem um ângulo ψ com o referencial de p . Entretanto, este ângulo não ocorre com o referencial de p transportado ao longo da geodésica que une p e q , mas com o transportado ao longo dos arcos de geodésica que unem p a x e x a q .

Como γ_1 é qualquer geodésica que passa por p , é imediato, como no plano ([3]), que o conjunto de pontos q atingíveis por esses dois movimentos formam uma curva fechada. Contudo, no caso geral, não é possível descrever com precisão essa curva, que no plano era uma circunferência e na esfera é um paralelo. Ademais, prolongando estes movimentos por $2n\pi\delta$ não se altera o referencial, mas não é mais possível garantir que os pontos atingidos formam uma curva fechada. De fato, tínhamos exigido que para todo $p \in M$ a bolinha pudesse rolar $\pi\delta$ em qualquer direção. Contudo não se pode exigir que os movimentos prolongados (isto é, de comprimento $(d+2n\pi\delta)$) cheguem direto a qualquer direção.

Ainda assim, como o ponto alvo q é livre, o problema de controle resolve-se em 2 movimentos.

A.6.2 Situação geral

Seja $\bar{\nu}$ não ortogonal positivo ao espaço tangente à variedade. Sem perda de generalidade, podemos considerar ν ortogonal positivo.

Antes de discutir a correção de uma discrepância arbitrária, é útil considerar o caso em que $\bar{\nu}$ é o oposto do vetor normal à variedade M . Neste caso, basta um movimento de comprimento $\pi\delta$ ou $(2n+1)\pi\delta$ para levar Θ_2 para Θ_0 em algum $p_0 \in W_{p_2}$.

Resta portanto considerar a correção de uma discrepância qualquer. Basta especificar o movimento que permite a partir de um $\Theta \in SO(3)$, sem qualquer componente normal ou oposta à normal do plano tangente, chegar a um referencial com $\nu = -k, k$ normal à variedade e então usar o caso

anterior.

Sabemos que é necessário cuidado com pontos conjugados. Isto é, é necessário corrigir a discrepância em W_p ou W_q para evitar geodésicas que conjugam pontos em M . De fato, W_p é a vizinhança de p de raio $\epsilon/2$, tal que todos $x, y \in W_p$ não são conjugados pois $d(x, y) < \epsilon$. Por isso exigíamos uma distância mínima entre pontos conjugados, $\epsilon > 0$, uma hipótese necessária em variedades de fecho não compacto. A concatenação de quaisquer dois rolamentos s.e.s.p. de comprimento $\pi\delta$ não sai de W_p . De fato, se o referencial fosse obtido num ponto q conjugado a p e se em M as geodésicas que unem p e q alterarem referenciais, poderia não se obter $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ em q . Por isso é necessário trabalhar numa vizinhança que não contenha pontos conjugados entre si. Se p, q não estão numa vizinhança normal, tínhamos um primeiro movimento de comprimento $2n\pi\delta$ para aproximar o referencial de p ao de q por uma certa geodésica γ .

A.7 Algumas considerações

No problema de Kendall consideram-se referenciais solidários a cada ponto $p \in M$. Por uma geodésica γ de comprimento mínimo que una dois pontos, p_1 e p_2 , comparam-se os referenciais solidários a p_1 e p_2 intrinsecamente e pelo atlas de $M \times SO(3)$. O problema de Kendall consiste em levar o referencial de p_1 para o de p_2 por meio de rolamentos s.e.s.p. ao longo de geodésicas da bolinha B . Por isso, a partir daqui apenas falaremos dos referenciais solidários a M e de rolamentos de B , lembrando-se da γ privilegiada, quando necessário.

Ou seja, uma vez analisada a questão de como estabelecer a relação entre os referenciais, parece que estamos próximos da situação do problema de Kendall como já vista e solucionada no plano. Não basta levar em consideração a variedade e os problemas decorrentes da existência de pontos conjugados.

Lembramos que considera-se que M e B são tais que não há qualquer obstáculo para a bolinha rolar s.e.s.p. sobre qualquer ponto. De fato, a bolinha B é apenas vista como suporte do referencial e as restrições de rolar

s.e.s.p. refletem-se na “direção constante” e no comprimento do trajeto. Assim, não é necessário preocupar-se, como o faz [1], com a curvatura da variedade M , sobre a qual ocorre o rolamento, exceder ou não a curvatura do corpo B que rola (sempre consideramos B como uma pequena esfera). Isto é, a bolinha como objeto material que precisa caber/passar por estreitamentos é totalmente dispensável. Basta supor sua existência como suporte artificial do referencial. Deste modo não precisamos nos preocupar com hipóteses - difíceis de serem feitas - sobre M para que B não “encalhe”.

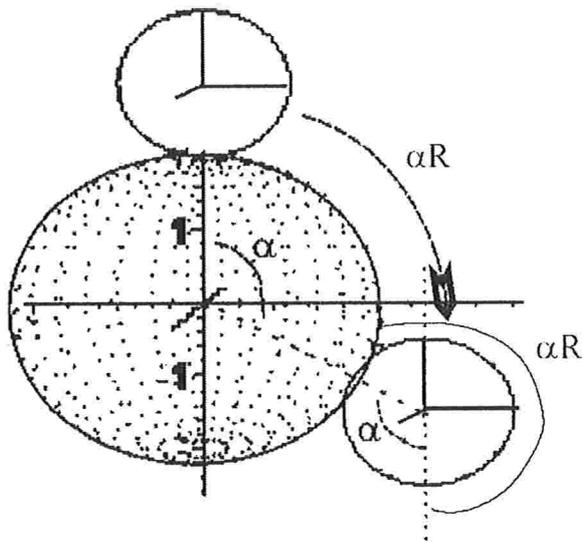
Essa abordagem, apesar das dificuldades que dela decorrem, ao menos pôde ser esboçada, até este ponto, para uma classe bastante ampla de variedades. Nela mantém-se a importância dos rolamentos de comprimento $2n\pi\delta$ da bolinha B . Nos pareceu útil apresentá-la já que usa ferramentas aparentemente naturais e é uma descrição bastante intrínseca do problema de Kendall. Contudo, ainda que os referenciais seja aqui ditos “iguais” a partir de um observador em M , não encontramos um método para levá-los pelo rolamento de B . Ao menos, consegue-se enfatizar que o estado do referencial que rola solidário a B não se relaciona com o referencial solidário a M .

Apêndice B

Figuras

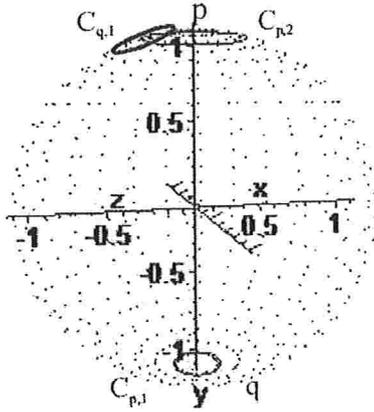
B.1 Obtenção de mesmo referencial

Para o Teorema 1, página 9, observe na seguinte figura a posição do referencial em B ao final de uma volta completa (ou seja, percorreu 2π), saindo do pólo norte.



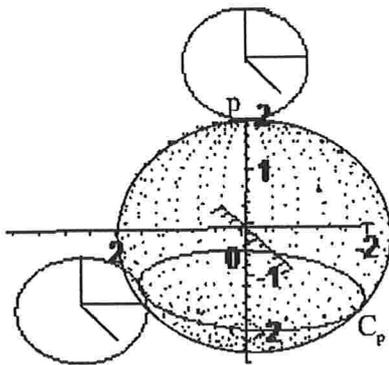
B.2 $C_p \cap C_q$ para $1 < R < 2$

Observe-se que $C_{p,1} \cap C_{q,1} = \emptyset$, mas $C_{p,2} \cap C_{q,1} \neq \emptyset$.

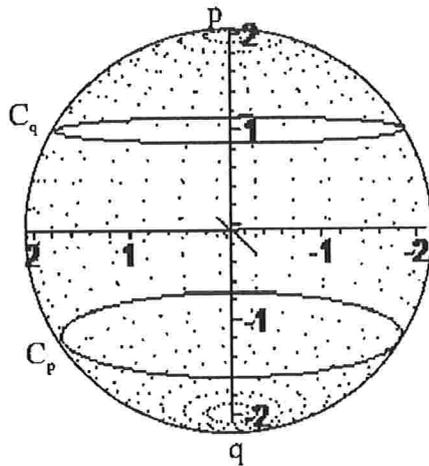


B.3 $C_p \cap C_q = \emptyset$

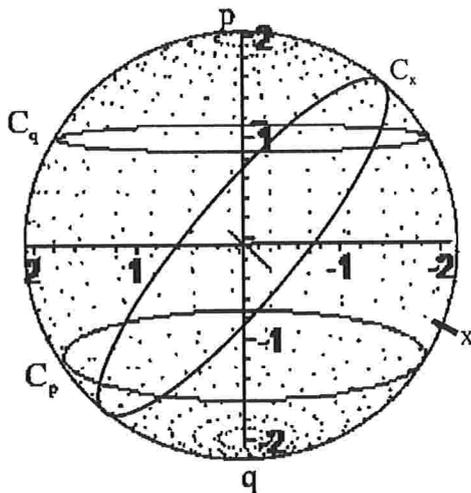
Considere M a esfera de raio $R = 2$, p, q pólos opostos, respectivamente, norte e sul. Logo $\phi = 2\pi/3$. É imediato que $C_{p,1} = C_{p,2}$, sendo o paralelo 30 sul, e que $C_{p,3} = p$. Logo C_p é formado por p e pelo paralelo 30 sul. Analogamente, C_q é formado apenas por q e pelo paralelo 30 norte. Logo é imediato que $C_p \cap C_q = \emptyset$ para todos p, q próximos. Assim, tem-se C_p ilustrado na seguinte figura, onde também são mostrados dois estados da bolinha de modo que o referencial é igual em ambas posições, quando comparado no \mathbb{R}^3 :



E representando C_p e C_q tem-se:

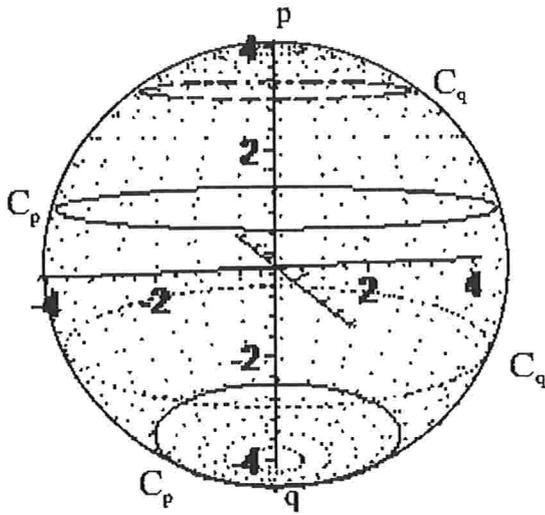


Mas também é fácil ver que para pontos x fora da calota de raio (comprimento do arco de círculo) $\phi/2 = \pi/3$ ao redor do pólo sul, $C_p \cap C_x \neq \emptyset, C_x \cap C_q \neq \emptyset$. Na figura seguinte estão assinalados os quatro pontos de intersecção de C_x com os outros dois conjuntos:

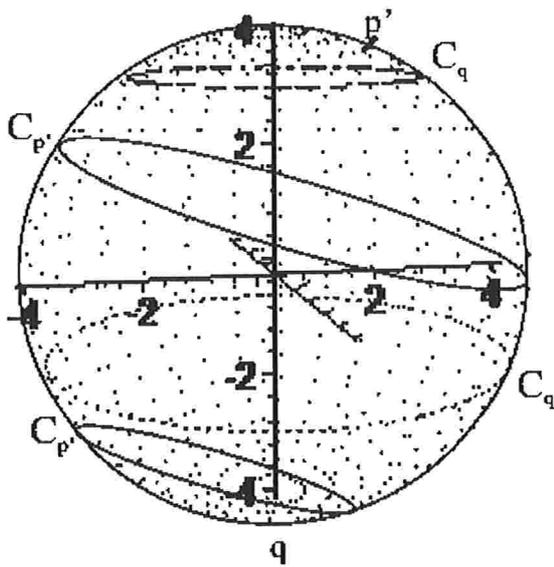


B.4 Inclinação de $C_{p,1}$

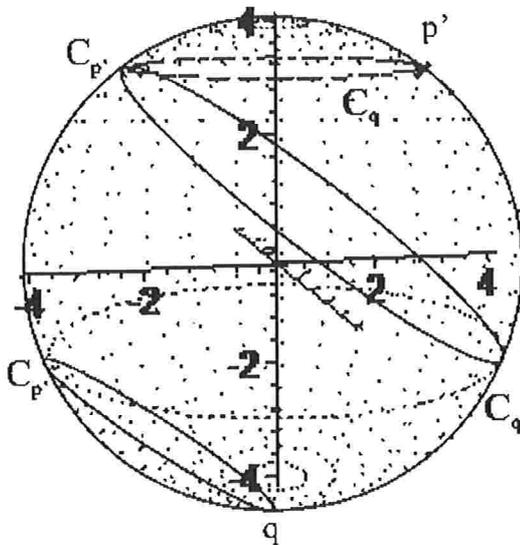
Considere $R = 4$, p, q pólos norte e sul, respectivamente. Observe que C_p e C_q distam $\pi/5$:



Mantendo q fixo, note que, para p' na calota ao redor do pólo norte, $C_{p'} \cap C_q = \emptyset$:

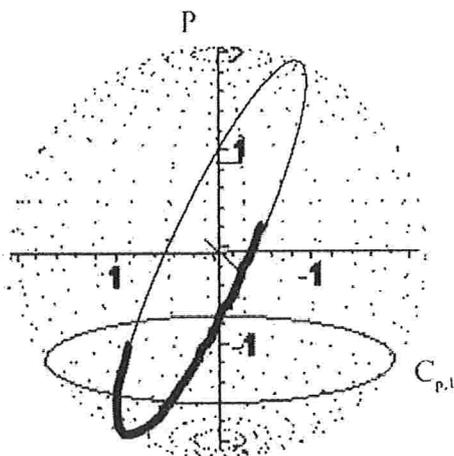


Note que o bordo da calota coincide com $C_{q,2+5n} = C_{q,3+5n}, n \in \mathbb{N}$. Para um ponto p' no bordo da calota, $C_{p'} \cap C_q \neq \emptyset$ e, comparando-se com as duas figuras anteriores, conclui-se, por continuidade, que a estimativa é ótima:



B.5 Prolongamento de rolamentos

Estando fixadas a geodésica sobre a qual B deve rolar s.e.s.p. e a direção deste rolamento, pode-se prolongar o rolamento de modo a sair de uma calota V_p , caso necessário:



Referências Bibliográficas

- [1] J. M. Hammersley, *Oxford commemoration ball*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **79**, CUP, Cambridge - New York, p. 112-142, 1983.
- [2] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **52**, CUP, Cambridge, 1997.
- [3] L. M. O. Biscolla, *Controlabilidade do rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução*, Ph.D., IME, USP, São Paulo, Brasil, 2005.
- [4] R. L. Bryant e L. Hsu, *Rigidity of integral curves of rank 2 distributions*, *Inventiones Mathematicae* **114**, 1993.
- [5] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Graduate Studies in Mathematics **34**, AMS, Providence, 2001.
- [6] R. Abraham e J. E. Marsden, *Foundations of mechanics*, 2. ed., Perseus Books, Cambridge, MA, US, 1978.
- [7] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2. ed., Springer Verlag, New York, US, 1989.