

Aplicações de Lorenz  
dissipativas do intervalo

Márcio Ricardo Alves Gouveia

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Colli

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, abril de 2008

## Aplicações de Lorenz dissipativas do intervalo

Este exemplar corresponde à redação  
final da tese devidamente corrigida  
e defendida por Márcio Ricardo Alves Gouveia  
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Eduardo Colli (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Edson de faria - IME-USP.
- Prof. Dr. Daniel Smania Brandão - ICMC-USP.
- Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita - UNESP.
- Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro - UFBA.

## Agradecimentos

Ao término deste trabalho, gostaria de manifestar meus sinceros agradecimentos:

À minha mãe pelo incentivo e apoio que me passou durante esta jornada.

Ao Prof. Dr. Eduardo Colli, pela valiosa orientação e pela paciência por todas as vezes que precisei esclarecer algumas dúvidas.

Aos professores do IME. Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP - S. J. do Rio Preto, pela formação e estímulo que me passaram durante a graduação.

Aos meus amigos professores de trabalho da UFMS, câmpus de Paranaíba, Denise Stefanoni Combinato, Fabiana dos Santos Pereira, Marcelo Dalla Vecchia, Marco Aurélio Batista de Souza e Silvia Regina Vieira da Silva pelo companheirismo em todos os momentos, e que juntos formamos a “turma do bem”. Em especial à professora Silvia Regina Vieira da Silva pela colaboração e sugestões durante vários momentos de estresse com relação ao curso de matemática e assuntos relacionados. Não poderia deixar de agradecer minhas amigas e futuras psicólogas Katiuska e Rosimeire que também me auxiliaram em situações adversas.

A meus companheiros de grupo PET. Em especial Claudio Gomes Pessoa e Clayton Eduardo Lente da Silva com os quais convivi alguns anos em São Paulo. E também a meus principais amigos da turma de graduação Andréia Cristina Ribeiro, Homero Ghioti da Silva e Tatiana Bertoldi.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

A Deus por tudo.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Ao matemático e meteorologista Edward Norton Lorenz (considerado “o criador da teoria do caos”):

\*23 de maio de 1917 ... +16 de abril de 2008 (*in memoria*).

Dedico este trabalho  
à minha mãe Julia.



## Resumo

Neste trabalho estudamos algumas aplicações de Lorenz dissipativas do intervalo, que são aplicações do intervalo possuindo um ponto de descontinuidade e derivada positiva e menor do que um em todo ponto do seu domínio. Interessados na dinâmica dessas aplicações estudamos órbitas periódicas, renormalizações e o conjunto minimal invariante quando não há órbita periódica. Em um conjunto específico dessas aplicações provamos a existência de uma laminação correspondente às aplicações infinitamente renormalizáveis, assim como a regularidade das folhas dessa laminação, no caso analítico. Conseguimos também estudar a regularidade das conjugações e das aplicações de holonomia da laminação.

**Palavras-chave:** Aplicação de Lorenz, fluxo de Cherry, renormalização, laminação, holonomia, órbita periódica atratora, dinâmica do intervalo.



# Abstract

In this work we studied some dissipative Lorenz interval maps, which are interval maps with a discontinuity point and derivative positive and smaller than one in every point of its domain. Since we are interested in the dynamics of these maps we studied periodic orbits, renormalizations and the minimal invariant set when there is no periodic orbit. In a specific set of those maps we proved the existence of a lamination of the infinitely renormalizable maps, as well as the regularity of its leaves in the analytic case. We also studied the regularity of the conjugacies and of the holonomy map of the lamination.

**Keywords:** Lorenz map, Cherry flow, renormalization, holonomy, attracting periodic orbit, interval dynamics.



# Sumário

Lista de Figuras	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Dinâmica e Renormalização</b>	<b>13</b>
2.1 Preliminares . . . . .	13
2.2 Órbitas laterais e órbita do gap principal . . . . .	16
2.3 Um pouco de dinâmica: órbitas periódicas e a definição de $\sigma(f)$ e $\kappa(f)$ . . . . .	19
2.4 Aplicações de Retorno . . . . .	22
2.5 Renormalização . . . . .	30
2.6 Dicotomia: periódico ou infinitamente renormalizável . . . . .	43
<b>3 Estimativas métricas e conseqüências</b>	<b>49</b>
3.1 Tamanho dos intervalos de retorno e o conjunto minimal . . . . .	49
3.2 Dimensão de Hausdorff Zero . . . . .	52
3.3 Mais estimativas de tamanhos de intervalo . . . . .	54
3.4 Distorção Limitada . . . . .	58
<b>4 Regularidade de conjugações</b>	<b>61</b>
4.1 Conjugação topológica . . . . .	61

4.1.1	Conjugação Hölder . . . . .	63
4.2	Conjugação não mais que Hölder . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Famílias a um parâmetro</b>	<b>75</b>
5.1	Derivada no parâmetro . . . . .	75
5.2	Descrição do espaço de parâmetros: domínios de renormalização . . . . .	76
5.3	Dentro de um intervalo de parâmetros renormalizáveis . . . . .	78
5.3.1	Persistência de um par $f$ -interno . . . . .	78
5.3.2	Dependência do gap central sobre o parâmetro . . . . .	80
5.3.3	Estrutura interna de um intervalo de parâmetros renormalizáveis . . . . .	83
5.3.4	Estimativas de tamanho para os intervalos de parâmetros . . . . .	84
5.4	Dinâmica Simbólica do operador de renormalização . . . . .	88
5.5	Dimensão de Hausdorff Zero em Fibras Verticais . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Laminação e Holonomia</b>	<b>95</b>
6.1	Laminação . . . . .	95
6.2	Holonomias . . . . .	98
6.2.1	Hölder continuidade das holonomias . . . . .	98
6.2.2	Não mais que Hölder continuidade das holonomias . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Analiticidade de lâminas</b>	<b>103</b>
7.1	Resultados de Análise Complexa . . . . .	103
7.2	A escolha certa . . . . .	110
7.3	Notação das composições . . . . .	112
7.4	Analiticidade numa família a 3 parâmetros com ramos afins . . . . .	113
7.5	Analiticidade da laminação num espaço de funções analíticas . . . . .	117

*SUMÁRIO*

ix

7.5.1 Espaço e topologia . . . . . 117

7.5.2 Roteiro da prova do Teorema 7.5.2 . . . . . 119

7.5.3 Primeiro passo: vizinhanças e constantes . . . . . 120

7.5.4 Lâminas bem definidas numa vizinhança apropriada . . . . . 122

7.5.5 Convergência uniforme das lâminas . . . . . 126

**Referências Bibliográficas**

**129**





## Lista de Figuras

1.1	Autovalores do campo $X_0$ .	2
1.2	Aplicação $\bar{F}$ .	3
1.3	Imagens da aplicação $F_0$ .	5
1.4	Fluxo de Cherry.	6
1.5	Aplicação de retorno induzida pelo fluxo da Figura 1.4	7
1.6	Fluxo de Cherry	7
1.7	Aplicação de retorno induzida pelo Fluxo de Cherry da Figura 1.6	8
2.1	Uma função típica do espaço $\mathcal{D}$ .	16
2.2	Existência do inteiro $k = k(f)$ .	20
2.3	Possível situação se $t < l$ .	24
2.4	Possível situação: $0_{r+l}^+ < 0_r^+$ .	25
2.5	Gráfico da Aplicação $R$ .	27
2.6	Gráfico da Aplicação $R$ no caso $0_r^+ = 0$	27
2.7	Gráfico da Aplicação $R$ no caso $0_l^- = 0$	28
2.8	Possibilidades da intersecção (Lema 2.4.6).	30
2.9	Possibilidade de intersecção.	32
2.10	Aplicação não renormalizável (caso $b = \frac{1}{2}$ ) (Lema 2.5.2).	33

2.11	Aplicação renormalizável no caso $b < \frac{1}{2}$ .	35
2.12	Iterados do gap $G_i$ por $R_i$ .	43
3.1	Aplicação de retorno $R_i$ .	55
3.2	Aplicação de retorno $R_i$ .	57
4.1	Esquema para visualizar as estimativas de distorção.	66
4.2	Esquema para visualizar as estimativas de distorção.	67
4.3	Estrutura no intervalo $I_t$ para a aplicação $t_f = t$ .	69
5.1	Estrutura no parâmetro $b$ .	79
5.2	Intervalo de parâmetros $T_{r,l}$ .	80
5.3	Intervalo de parâmetros $T_{r,l}$ e as funções $0_r^+$ e $0_l^-$ .	81
5.4	Intervalo de parâmetros $B_{k,(r,l)}^+$ .	87
5.5	Intervalo de parâmetros $B_{k,(r,l)}^-$ .	92
5.6	Estrutura geral.	93
7.1	Ilustração do Lema 7.1.1.	104
7.2	Região $\mathcal{A}_\nu$ .	106
7.3	Intersecção dos intervalos $T_{k_0 \dots k_N}^{\sigma_0 \dots \sigma_N}$ 's.	112
7.4	Ilustração das vizinhanças complexas $V_L$ e $V_R$ .	121
7.5	Ilustração da função complexa $b \mapsto \Lambda_{-,l_n}(f_L, f_R, b)$ .	125

## Capítulo 1

### Introdução

Neste trabalho estudaremos aplicações  $f$  definidas em  $[-1, 1] \setminus \{0\}$  e dadas por

$$f(x) = \begin{cases} b + f_L(x), & x \in [-1, 0) \\ b - 1 + f_R(x), & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $b \in (0, 1)$ ,  $f_L$  e  $f_R$  são diferenciáveis e se estendem continuamente de tal forma que  $f_L(0) = 0 = f_R(0)$ , e existe um número real  $\nu \in (0, 1)$  satisfazendo

$$0 < f'_L(x) \leq \nu < 1, \forall x \in [-1, 0), \quad 0 < f'_R(x) \leq \nu < 1, \forall x \in (0, 1].$$

Esse tipo de aplicação aparece quando se estuda uma certa classe de campos de vetores em  $\mathbb{R}^3$  ou também no estudo dos chamados Fluxos de Cherry, que são os fluxos de um tipo de campos de vetores no toro. Vejamos com mais detalhes como elas surgem nesses dois contextos que acabamos de citar.

Motivado por uma equação diferencial no  $\mathbb{R}^3$ , algebricamente muito simples, proposta por Lorenz [Lor63] como uma aproximação em dimensão finita da equação de evolução de dinâmica atmosférica, Guckenheimer [MM76] formulou um modelo geométrico simulando o comportamento observado por Lorenz [Lor63]. Para tanto Guckenheimer produziu um campo de vetores  $X_0$  de classe  $C^\infty$  no  $\mathbb{R}^3$  tendo um atrator  $C^1$  persistente contendo uma singularidade com os auto-valores satisfazendo  $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_1$  e  $\lambda_1 + \lambda_3 > 0$ . Esse atrator ficou conhecido como atrator de Lorenz geométrico e continuou sendo estudado por Guckenheimer e Williams [GW79], além de outros como [ABS77]. Há também estudos de atratores de Lorenz no caso em que a variedade expansora tem dimensão

arbitrária [BPV00]. Para um tratamento do ponto de vista das equações diferenciais e da geometria do atrator de Lorenz veja [Spa82]. Aqui consideraremos um campo de vetores parecido com o estudado por Guckenheimer, mas com os auto-valores da singularidade satisfazendo  $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_1$  e  $\lambda_1 + \lambda_3 < 0$ .

Vamos à construção desse campo de vetores. Seja  $X_0$  um campo de vetores  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3$  com uma singularidade na origem, cujos autovalores satisfazem  $-\lambda_2 > -\lambda_3 \geq \lambda_1 > 0$ , e cujos autovetores são supostos terem as direções dos eixos coordenados. Assumiremos também que  $X_0$  é linear em uma vizinhança da origem que contenha o cubo  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |x|, |y|, |z| \leq 1\}$  e que ambas as trajetórias da variedade instável da singularidade intersectam o topo do cubo, que denotaremos por  $Q$ , como na Figura 1.1.

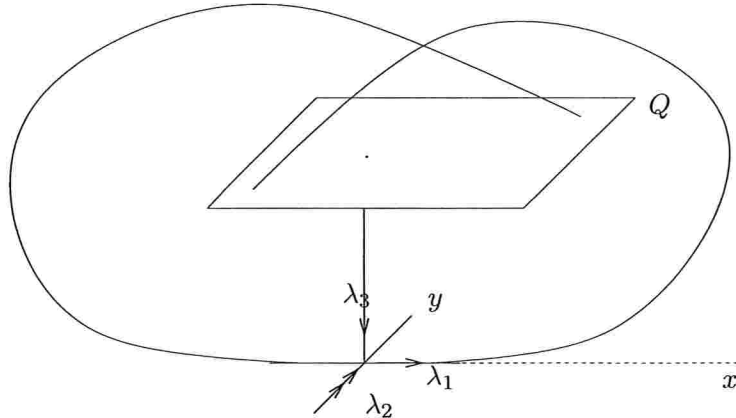


Figura 1.1: Autovalores do campo  $X_0$ .

Uma variedade estável local da singularidade intersecta  $Q$  em  $\{x = 0\}$ , e assim podemos considerar a aplicação de primeiro retorno  $F_0$  definida em  $Q^* = Q \setminus \{x = 0\}$ .

Por um cálculo simples usando a forma do fluxo de  $X_0$  na vizinhança linearizada, é fácil ver que a aplicação  $\bar{F}_+$ , que leva  $Q^+ = Q^* \cap \{x > 0\}$  em  $\{x = 1\}$  é dada por

$$\bar{F}_+(x, y, 1) = (1, yx^r, x^s),$$

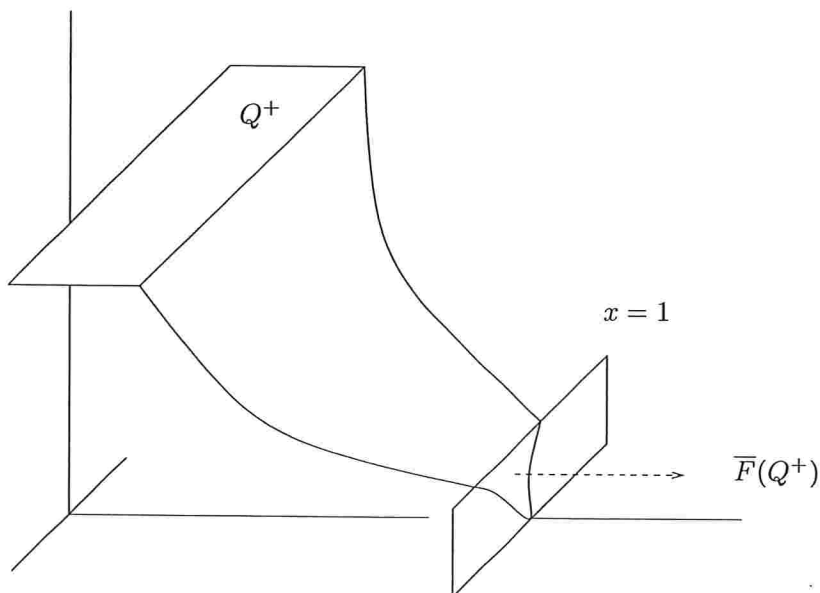


Figura 1.2: Aplicação  $\bar{F}$ .

e a aplicação  $\bar{F}_-$ , de  $Q^- = Q^* \cap \{x < 0\}$  em  $\{x = -1\}$ , é dada por

$$\bar{F}_-(x, y, 1) = (-1, y(-x)^r, (-x)^s),$$

onde

$$s = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \quad \text{e} \quad r = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

(veja Figura 1.2). Para obter  $F_0$ , as aplicações  $\bar{F}_+$  e  $\bar{F}_-$  devem ser compostas com difeomorfismos que levam retas  $z = \text{constante}$  de  $\{x = 1\}$  em retas  $x = \text{constante}$  em  $Q$ , e retas  $z = \text{constante}$  de  $\{x = -1\}$  em retas  $x = \text{constante}$  em  $Q$ . Além disso assumiremos que o fluxo de  $X_0$  é tal que as retas com a direção do eixo  $0Y$  (da variedade estável forte da singularidade) formam uma folheação invariante por  $X_0$ . Em particular, isto implica que em  $Q$  a aplicação  $F_0$  tem uma folheação invariante. Mais precisamente, para obtermos

$$F_0 : Q^+ \rightarrow Q$$

a compomos com o um difeomorfismo  $H_+ : \{x = 1\} \rightarrow Q$  da forma  $H_+(1, y, z) = (b - 1 +$

$f_+(z), g_+(y, z), 1)$  e assim

$$F_0(x, y, 1) = H_+ \circ \bar{F}_+(x, y, 1) = (b - 1 + f_+(x^s), g_+(yx^r, x^s), 1)$$

onde  $f_+$  e  $g_+$  satisfazem  $0 < f'_+(z) \leq \frac{1}{s}$  e  $|\frac{\partial g_+}{\partial y}| < 1$ . Como as retas  $x = \text{constante}$  são invariantes por  $F_0$ , a dinâmica que interessa é a da aplicação  $F_L(x) := b - 1 + f_+(x^s)$ . Observe que  $0 < F'_L(x) < 1$ . Dessa maneira um esboço da imagem de  $Q^*$  por  $F_0$  pode ser vista na Figura 1.3.

Com raciocínio anaálogo a aplicação

$$F_0 : Q^- \rightarrow Q$$

é composta com um difeomorfismo  $H_- : \{x = -1\} \rightarrow Q$  da forma  $H_-(-1, y, z) = (b + f_-(z), g_-(y, z), 1)$ , onde  $0 > f'_-(z) > -\frac{1}{s}$  e  $|\frac{\partial g_-}{\partial y}| < 1$ . Assim

$$F_0(x, y, 1) = H_- \circ \bar{F}_-(x, y, 1) = (b + f_-((-x)^s), g_-(y(-x)^r, (-x)^s), 1).$$

E pelo mesmo motivo estaremos interessados na dinâmica da aplicação  $F_R(x) := b + f_-((-x)^s)$ , que também satisfaz  $0 < F'_R(x) < 1$ . Para mais detalhes veja [Rov93], [GH90].

Esse tipo de aplicação continua sendo muito estudado devido a sua riqueza de propriedades dinâmicas. Por exemplo, em [Mdm01] foi mostrado que algumas famílias parametrizadas de fluxos de Lorenz são topologicamente universais no sentido que, dado qualquer fluxo de Lorenz geométrico, sua dinâmica é essencialmente a mesma que a dinâmica de algum elemento da família. Para sermos mais precisos, foi mostrado em [Mdm01] que: “*Uma família de Lorenz monótona é uma família completa.*” Portanto, essas famílias desempenham, dentro do contexto dos fluxos de Lorenz, o mesmo papel que a família quadrática dentro do contexto das aplicações unimodais do intervalo.

Vejam agora o segundo contexto. Considere um fluxo de classe  $C^\infty$  no 2-toro,  $T^2$ . Trabalharemos com seu recobrimento universal  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ , de maneira que o campo de vetores  $X$  satisfaz  $X(x+n, y+m) = X(x, y)$ , para todos os  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Além disso o campo de vetores satisfaz o seguinte:

- (A)  $X$  tem duas singularidades, uma sela hiperbólica  $S$  e um poço hiperbólico  $P$ .
- (B)  $X$  é transverso ao círculo  $\Sigma = \{(x, y) | x = 0\}$ .
- (C) Existem  $a, b \in \Sigma$  tais que se  $y \in (a, b)$  a órbita positiva de  $X$  passando por  $y$  vai diretamente

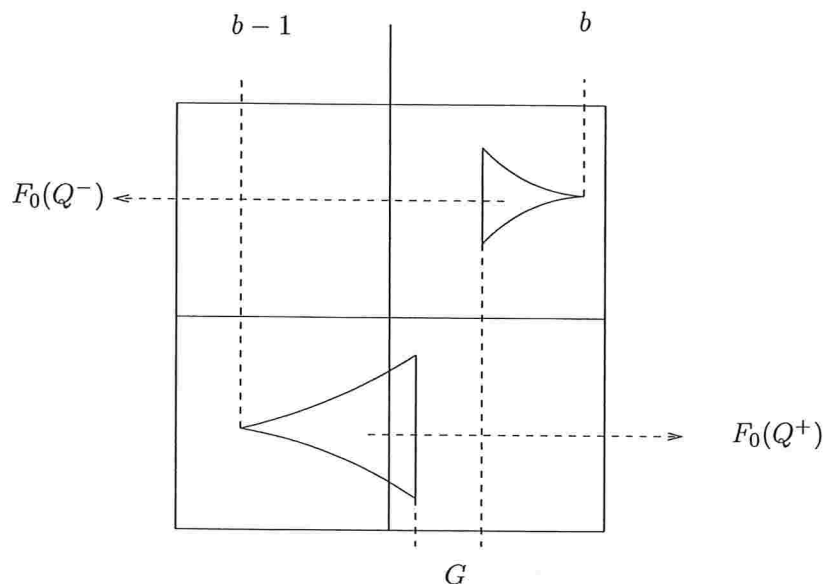


Figura 1.3: Imagens da aplicação  $F_0$ .

para o poço  $P$  sem intersectar  $\Sigma$  novamente, mas para  $y \notin [a, b]$  a aplicação de Poincaré  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  está definida e é expansora. Além disso,  $f'(y) \rightarrow \infty$  se  $y \rightarrow a^-$  ou  $y \rightarrow b^+$  (veja Figura 1.4).

A aplicação de Poincaré pode ser estendida a todo  $\Sigma$  tomando ela constante sobre  $[a, b]$ , e assim temos uma aplicação contínua do círculo  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . Pela condição (C),  $f'(y) \geq \lambda > 1$  para todo  $x \notin [a, b]$  (veja Figura 1.5).

Como  $f$  é monótona e de grau um ela tem um número de rotação (veja [PdM82]). Denote por  $\mathcal{X}^\infty(T^2)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  sobre o 2-toro com a topologia  $C^\infty$ , e por  $\mathcal{N}$  a vizinhança em  $\mathcal{X}^\infty(T^2)$  de todos os campos de vetores que satisfazem (A), (B) e (C). Com isso define-se um *campo de Cherry* como um campo de vetores em  $\mathcal{N}$  cuja aplicação de Poincaré tem número de rotação irracional. Se um campo de vetores  $X$  no 2-toro tiver duas singularidades (uma sela hiperbólica e uma fonte hiperbólica) como na Figura 1.6 então, se os autovalores satisfazem  $-\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ , obtemos a aplicação de Poincaré induzida por seu fluxo como na Figura 1.7. Para um melhor estudo sobre os fluxos de Cherry veja [MvSdMM90], [PdM82] e [ABZ96]. Ainda sobre fluxos

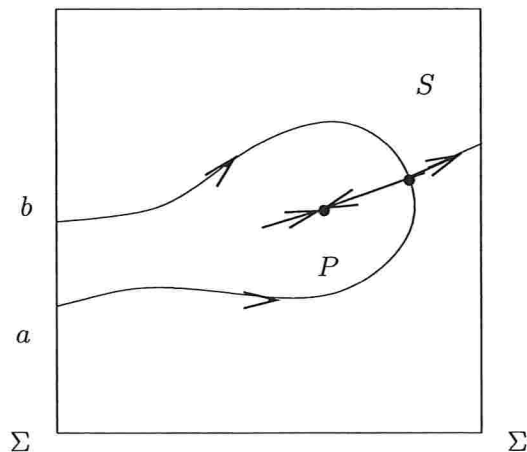


Figura 1.4: Fluxo de Cherry.

de Cherry no toro podemos citar outros trabalhos como: [AZM96] que classifica as transformações de Cherry no círculo e os fluxos de Cherry no toro; [Ara90] e [Ara86] que estudam algumas estruturas topológicas de fluxos de Cherry no toro. Além desses trabalhos também podemos citar [AMZ94] e [AZM94] que generaliza o conceito de fluxos de Cherry sobre o toro para fluxos de Cherry e foliações de Cherry sobre a esfera de dimensão 2. Há também um trabalho, [Gut83], que estuda um pouco de suavidade dos fluxos de Cherry em variedade de dimensão 2.

Chamaremos de  $\mathcal{D}$  a família de funções definidas como em (1.1). Aqui apenas estudaremos as propriedades que essa família  $\mathcal{D}$  apresenta (algumas vezes com hipóteses mais restritivas) mas com o objetivo de, em um trabalho futuro, aplicá-las em algum contexto como foi feito nos dois exemplos que acabamos de citar. Inicialmente precisaremos de alguns conceitos e resultados preliminares para desenvolvermos o estudo das propriedades dessa família.

Toda aplicação  $f \in \mathcal{D}$  possui um intervalo  $G$  com a propriedade de que  $f(x) \notin G$ , para todo  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Por esse motivo esse intervalo  $G$  é chamado de *gap principal* da aplicação  $f$  e essas aplicações também são chamadas de *gap maps*. Uma propriedade fundamental de  $G$  é que todos os seus iterados são dois a dois disjuntos. Como uma aplicação dessas gap maps veja [Gle95]. Um fenômeno estudado nesse tipo de aplicação (e que não existe em aplicações unimodais de classe  $C^2$ ) é a existência de intervalo errante, ou seja, um intervalo  $W$  onde todos os seus iterados são disjuntos aos pares e, além disso, ele não é atraído por nenhuma órbita periódica. No caso em que as aplicações



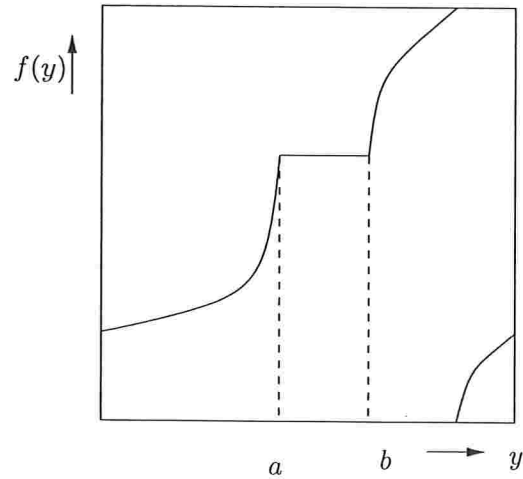


Figura 1.5: Aplicação de retorno induzida pelo fluxo da Figura 1.4

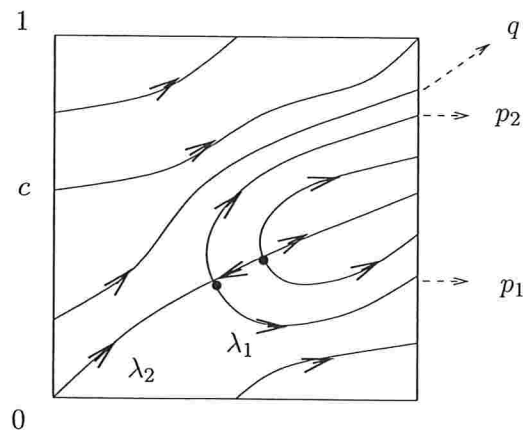


Figura 1.6: Fluxo de Cherry

de Lorenz  $f \in \mathcal{D}$  não possuem criticalidade (isto é,  $\log f'$  é Lipschitz em  $[b-1, b] \setminus \{0\}$ ) foi mostrado em [BM91] que se  $f$  possui intervalo errante então  $f$  é infinitamente renormalizável. A implicação contrária, ou seja, se  $f$  é infinitamente renormalizável então possui intervalo errante é mais simples e também a mostramos aqui mesmo no caso em que  $f$  possui criticalidade. Mas há uma conjectura citada em [SP99] dizendo que essa equivalência acontece para as aplicações de Lorenz  $f \in \mathcal{D}$  com

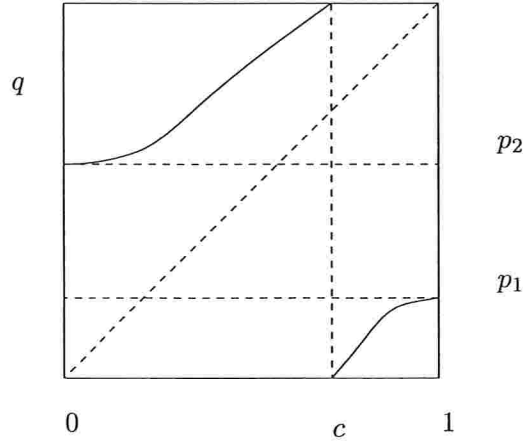


Figura 1.7: Aplicação de retorno induzida pelo Fluxo de Cherry da Figura 1.6

criticalidade.

Um conceito que está presente em todo este trabalho é o de *renormalização*, que significa o seguinte: dada uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$ , diremos que ela é renormalizável se existir um intervalo  $I = [c, d]$ , com  $b - 1 < c < 0 < d < b$ , tal que a aplicação de primeiro retorno de  $f$  a  $I$  é uma aplicação de Lorenz dissipativa, se reescalona. Em caso afirmativo, tomamos  $[c, d]$  maximal com essa propriedade e definimos a renormalização de  $f$  como sendo a aplicação de primeiro retorno a  $[c, d]$  estendida e normalizada para  $[-1, 1] \setminus \{0\}$ . E agora podemos questionar se a renormalização de  $f$  é renormalizável ou não. Se for, diremos que a aplicação  $f$  é pelo menos 2 vezes renormalizável e a segunda renormalização de  $f$  é a renormalização da primeira renormalização de  $f$ . Dessa maneira definimos, indutivamente, o conceito de uma aplicação  $f$  ser  $N$  vezes renormalizável, onde  $0 \leq N \leq \infty$ .

Esse conceito produz a seguinte dicotomia: uma aplicação  $f$  ou é  $N$  vezes renormalizável mas não é  $N + 1$  vezes renormalizável, com  $0 \leq N < \infty$ , e nesse caso ela possui uma única órbita periódica atratora (Proposição 2.6.4), ou  $f$  é infinitamente renormalizável, e nesse caso  $f$  não possui órbita periódica atratora (Proposição 2.6.5). Há uma dicotomia muito importante e bem conhecida em paralelo a essa dentro do mundo das aplicações unimodais, ou seja, foi realizado um estudo mais detalhado da família quadrática real  $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_c(x) = x^2 + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ , e que a reconheceu como um modelo representativo de dinâmica caótica. Essa família quadrática apresenta uma dicotomia

básica, que pode ser vista como uma descrição qualitativa completa de sua dinâmica, ou seja: “para quase todo  $c \in [-2, \frac{1}{4}]$ , a aplicação quadrática  $f_c(x) = x^2 + c$  é ou regular (isto é,  $f_c$  possui um ciclo atrator  $\{f^k(\alpha_c)\}_{k=0}^{p-1}$ ) ou estocástica (isto é,  $f_c$  tem uma medida  $\mu$  invariante absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue). ” O estudo dessa dicotomia assim como outras propriedades da família quadrática se concentraram nos últimos quinze anos do século vinte. Um bom material para o entendimento dessa dicotomia na família quadrática encontra-se em [Lyu00] e em suas referências.

As aplicações infinitamente renormalizáveis apresentam outras propriedades interessantes. Provaremos (ver Corolário 3.1.3), por exemplo, que

“Se  $f$  é infinitamente renormalizável então todo ponto  $x$  pertencente ao conjunto

$$K_\infty = \left[ \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(G) \right]^c = [-1, 1] \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(G)$$

e que não pertence à pré-órbita de 0 tem órbita densa em  $K_\infty$ .”

Esse resultado nos diz que o conjunto  $K_\infty$  está muito próximo de ser um conjunto minimal, como na teoria clássica (já que não podemos falar da invariância de  $K_\infty$ , pois  $0 \in K_\infty$ ). Ainda sobre o conjunto  $K_\infty$  também provamos (ver Lema 3.2.1) que “Se  $f$  é infinitamente renormalizável então  $K_\infty$  tem dimensão de Hausdorff zero e, em particular, medida de Lebesgue zero.”

Também temos uma relação entre aplicações infinitamente renormalizáveis, ou seja, (ver Proposição 4.1.1) “Se duas aplicações,  $f$  e  $g \in \mathcal{D}$ , são infinitamente renormalizáveis e possuem a mesma combinatória, então elas são topologicamente conjugadas.” Na verdade provamos que entre duas aplicações infinitamente renormalizáveis, com a mesma combinatória e com as hipóteses adicionais de que elas possuem derivadas afastadas do 0 e são de classe  $C^{1+\epsilon}$ , existe uma conjugação Hölder (ver Proposição 4.1.2). Mas isto é o máximo que se pode conseguir em geral (ver Lema 4.2.1).

Olhando para  $f \in \mathcal{D}$  como uma aplicação não injetiva do círculo, pode-se definir um número de rotação e mostrar que seu número de rotação é irracional se, e somente se, ela é infinitamente renormalizável. Além disso essa correspondência é biunívoca. Não demonstramos essa Proposição aqui mas esse resultado pode ser encontrado em [dMvS93] e [PdM82]. A teoria combinatória dos números de rotação é facilmente adaptável da teoria de difeomorfismos do círculo.

Todos esses resultados são válidos para cada aplicação  $f \in \mathcal{D}$  fixada. Mas se agora fixarmos os ramos  $f_L$  e  $f_R$  e variarmos o parâmetro  $b$  dentro do intervalo  $(0, 1)$  obtemos uma família natural de

aplicações  $\{f_b\}_{b \in (0,1)}$ , onde para cada  $b \in (0,1)$  a aplicação  $f_b$  pertence à família  $\mathcal{D}$  e é dada como em (1.1). Ao fazermos isso obtemos, sobre a fibra  $\{(f_L, f_R)\} \times (0,1)$ , duas seqüências de intervalos disjuntos,  $(T_k^-)_{k \geq 0}$  que se acumula sobre o 0, e  $(T_k^+)_{k \geq 0}$  que se acumula sobre o 1. O sinal  $-$  significa que o gap principal das aplicações  $f_b$ , com  $b \in T_k^-$ , está à esquerda da origem, e o inteiro  $k$  representa o primeiro iterado em que o gap passa para a direita da origem. Analogamente, o sinal  $+$  significa que o gap principal das aplicações  $f_b$ , com  $b \in T_k^+$ , está à direita da origem, e o inteiro  $k$  representa o primeiro instante em que o gap passa para a esquerda da origem. Além disso, se  $b$  pertence a algum desses intervalos,  $T_k^-$  ou  $T_k^+$ , então a aplicação  $f_b$  correspondente é pelo menos uma vez renormalizável, motivo pelo qual esses intervalos serão chamados de intervalos de nível 1. Já as funções  $f_b$ , cujo parâmetro  $b$  não pertence a nenhum desses intervalos, não são renormalizáveis e apresentam órbita periódica atratora que atrai todas as órbitas exceto a pré-órbita finita do zero (veja Figura 5.1). Em cada um desses intervalos existe uma estrutura semelhante a essa, ou seja, cada intervalo  $T_k^-$  ou  $T_k^+$  possui subintervalos onde os parâmetros a eles pertencentes correspondem a funções que são pelo menos duas vezes renormalizáveis, e assim por diante. Mais precisamente, sobre uma fibra  $(f_L, f_R) \times (0,1)$  temos os intervalos de nível 1,  $T_{k_0}^{\sigma_0}$ , onde  $\sigma_0 = \pm$ ; dentro de  $T_{k_0}^{\sigma_0}$  temos os intervalos de nível 2,  $T_{k_0 k_1}^{\sigma_0 \sigma_1}$  e assim por diante, de maneira que obtemos uma seqüência de intervalos encaixados  $(T_{k_0 k_1 \dots k_N}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_N})_{N \geq 0}$  tal que se  $b \in T_{k_0 k_1 \dots k_N}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_N}$  então  $f_b$  é pelo menos  $N+1$  vezes renormalizável e  $b \in T_{k_0 k_1 \dots k_i}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_i}$ , para todo  $0 \leq i \leq N$ , onde  $T_{k_0 k_1 \dots k_{i+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{i+1}} \subset T_{k_0 k_1 \dots k_i}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_i}$ , para todo  $0 \leq i \leq N-1$ , e o tamanho dos intervalos  $T_{k_0 k_1 \dots k_N}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_N}$  decrescem superexponencialmente à medida que  $N$  cresce (ver 3.1.2). Assim se  $f_b \in \mathcal{D}$  é infinitamente renormalizável então

$$\{b\} = \bigcap_{N=0}^{\infty} T_{k_0 k_1 \dots k_N}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_N}$$

e associamos a essa aplicação  $f_b$  a combinatória

$$\Gamma = \{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), \dots, (\sigma_N, k_N), \dots\}$$

(e a cada combinatória  $\Gamma$  um número de rotação). Uma vez que compreendemos esse tipo de combinatória é imediato provar (ver Seção 5.5) que sobre cada fibra vertical  $\{(f_L, f_R)\} \times (0,1)$  o conjunto

$$K = \{f_b \in \mathcal{D}; f_b \text{ é infinitamente renormalizável}\} \cap \{(f_L, f_R)\} \times (0,1)$$

tem dimensão de Hausdorff zero (esse resultado também foi provado em [Boy85]). Além disso os parâmetros infinitamente renormalizáveis constituem uma laminação de  $\mathcal{D}$ , onde cada folha é o gráfico de alguma função contínua  $L = L_\Gamma$  de  $(f_L, f_R)$ , ou seja, provamos (ver Lema 6.1.2) que “*O conjunto  $D_\infty = \{f_b \in \mathcal{D}; f_b \text{ é infinitamente renormalizável} \}$  forma uma laminação  $C^0$  dentro de  $\mathcal{D}$ , com a topologia dada pela norma:  $\|f\|_{\mathcal{D}} = \|f_L\|_{C^0} + \|f_R\|_{C^0} + |b|$ , onde  $f = (f_L, f_R, b) \in \mathcal{D}$ .*” (em [Boy85] foi provado a existência dessa laminação e que ela é de classe  $C^1$  quando nos restringimos ao subconjunto das aplicações  $C^1$  de  $\mathcal{D}$ , na norma  $C^1$ .)

Tendo essa laminação podemos tomar dois pares  $(f_L, f_R)$ ,  $(g_L, g_R)$  e considerar as seções verticais  $\Sigma_f = \{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$  e  $\Sigma_g = \{(g_L, g_R)\} \times (0, 1)$ , definindo a aplicação de *holonomia* entre  $\Sigma_f \cap \mathcal{D}_\infty$  e  $\Sigma_g \cap \mathcal{D}_\infty$  como sendo a função que leva  $b_f$  em  $b_g$  com a seguinte regra: considere a combinatória  $\Gamma$  tal que  $b_f = L_\Gamma(f_L, f_R)$  e seja  $b_g$  o único ponto de intersecção entre  $\Sigma_g$  e o gráfico de  $L_\Gamma$ . Conseguimos provar uma certa regularidade para essa aplicação de holonomia, ou seja, provamos (ver Lema 6.2.1) que a holonomia é Hölder contínua, desde que as aplicações  $f_L, f_R, g_L$  e  $g_R$  possuam derivadas afastadas da origem e sejam  $C^{1+\epsilon}$ . Podemos até ter a holonomia Lipschitz mas nesse caso sua inversa não será nem  $\alpha$ -Hölder contínua, para todo  $\alpha$  próximo de 1 (veja Subseção 6.2.2).

Para finalizar, passamos a trabalhar com uma família  $\mathcal{F}$  de funções  $(f_L, f_R, b) \in \mathcal{D}$  tais que

$$f_L(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_L} x^i, \quad \forall x \in (-1, 0), \quad \text{com } (a_{i,f_L})_{i \geq 1} \in l_1$$

$$f_R(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_R} x^i, \quad \forall x \in (0, 1), \quad \text{com } (a_{i,f_R})_{i \geq 1} \in l_1.$$

Observe que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$  e assim todos os resultados já provados para  $\mathcal{D}$  valem para essa família  $\mathcal{F}$ . Mas além de todos esses resultados provamos (ver Teorema 7.5.2) para essa família  $\mathcal{F}$  que “*O conjunto dos parâmetros infinitamente renormalizáveis  $(f_L, f_R, b) \in \mathcal{F}$  constitui uma laminação de  $\mathcal{F}$ , onde cada folha é o gráfico de alguma função analítica de  $(f_L, f_R)$ .*” Algumas das idéias usadas na demonstração desse resultado foram inspiradas por outras apresentadas em [Lan82].

Um caso particular do argumento se aplica à família a três parâmetros de aplicações  $\{f_{\alpha,\beta,b}\}_{\alpha,\beta,b}$ , com  $(\alpha, \beta, b) \in (0, 1)^3$ , onde cada aplicação  $f_{\alpha,\beta,b}$  está definida no intervalo  $[b-1, b]$  e é dada por

$$f_{\alpha,\beta,b}(x) = \begin{cases} b + \alpha x, & x < 0 \\ b - 1 + \beta x, & x > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Neste caso as lâminas são funções analíticas  $b(\alpha, \beta)$  de  $(0, 1) \times (0, 1)$  em  $(0, 1)$ . Um estudo mais detalhado dessa família foi feito em [AC06].

## Capítulo 2

# Dinâmica e renormalização de transformações de Lorenz dissipativas

### 2.1 Preliminares

Nosso objetivo é estudar o comportamento dinâmico de funções a valores reais definidas em  $\mathbb{R}$  com um único ponto de descontinuidade (do tipo salto) e com a condição mínima de que os dois ramos da função (um à esquerda e outro à direita do ponto de descontinuidade) sejam diferenciáveis, pelo menos, e que a derivada de cada ramo seja positiva e menor que 1 em todo ponto.

Seja  $f$  uma tal função. A menos de uma translação, vamos assumir que o ponto de descontinuidade seja a origem, que o limite lateral a sua esquerda seja positivo e que o limite lateral a sua direita seja negativo, e assim definimos

$$b \equiv \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad a \equiv \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

onde  $a < 0 < b$ .

Não falaremos nada sobre o valor de  $f$  no ponto de descontinuidade, de modo que se  $f^n(x) = 0$  para algum  $n \geq 0$  então  $f^{n+1}(x)$  permanece indefinido. Fica implícito que quando falarmos de  $f^n(x)$  assumiremos que esteja bem definido. No entanto nos importaremos com as órbitas laterais do zero, ou seja, a órbita de  $0^+$  e a órbita de  $0^-$ , como veremos mais adiante.

A condição de que a derivada seja positiva e menor do que 1 ( $0 < f' < 1$ ) garante a invariância do intervalo  $[a, b]$ .

Seria então natural nos restringirmos a esse intervalo invariante, mas temos que enfrentar dois problemas: o intervalo depende da função  $f$ , de modo que fica difícil estabelecer uma métrica no espaço de funções. E comportamentos semelhantes podem aparecer em diferentes escalas, podendo assim o intervalo  $[a, b]$  ser de qualquer tamanho, e isso também pode causar problemas na escolha da métrica.

Pode parecer que reescalonar  $[a, b]$  a  $[0, 1]$  por uma mudança afim de coordenadas resolveria os dois problemas ao mesmo tempo, mas o ponto de descontinuidade dependeria da função e uma métrica natural não poderia ser estabelecida nesse caso se quiséssemos comparar derivadas (como o faremos mais adiante). Sendo assim para contornar esse problema fazemos o seguinte. Primeiro, por uma mudança de coordenadas linear impomos que a distância entre os limites laterais seja igual a um ( $b - a = 1$ , ou seja,  $a = b - 1$ ). Isso resolve o problema de escala. Nesse caso observamos que o intervalo  $[-1, 1]$  também é invariante, e assim podemos adotá-lo como o domínio fixo para todas as funções e trabalhar no espaço das funções  $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow [-1, 1]$  diferenciáveis (pelo menos) com derivada positiva e menor do que um em todo ponto e tais que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b - 1,$$

com  $b \in (0, 1)$ .

Mas como uma função desse espaço possui dois ramos (um à esquerda e outro à direita de 0) vamos olhar para ela usando três coordenadas. Primeiro definimos

$$\mathcal{D}_L := \{f_L : [-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}; f_L(0^-) = 0, f_L \text{ diferenciável}, \exists \nu \in (0, 1) \text{ t.q. } 0 < f'_L(x) \leq \nu, \forall x \in [-1, 0)\}$$

onde  $f_L(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_L(x)$ , e

$$\mathcal{D}_R := \{f_R : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f_R(0^+) = 0, f_R \text{ diferenciável}, \exists \nu \in (0, 1) \text{ t.q. } 0 < f'_R(x) \leq \nu, \forall x \in (0, 1]\},$$

onde  $f_R(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_R(x)$ .

Observe que as funções pertencentes aos conjuntos  $\mathcal{D}_L$  e  $\mathcal{D}_R$  se estendem continuamente mas não necessariamente diferenciavelmente em 0.

A partir desses dois conjuntos definimos aquele no qual iremos trabalhar, isto é:



$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R \times (0, 1),$$

onde um elemento de  $\mathcal{D}$  é uma tripla  $(f_L, f_R, b)$  que, por abuso de notação, chamaremos de função e a designaremos simplesmente por  $f$ . Assim diremos que  $f := (f_L, f_R, b)$  é uma função definida em  $[-1, 1] \setminus \{0\}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} F_L(x) = f_L(x) + b & \text{se } x \in [-1, 0) \\ F_R(x) = f_R(x) + b - 1 & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases}$$

onde  $f_L \in \mathcal{D}_L$ ,  $f_R \in \mathcal{D}_R$ ,  $b \in (0, 1)$ , e as funções  $F_L$  e  $F_R$  se estendem continuamente a  $[-1, 0]$  e  $[0, 1]$ , respectivamente.

Note que se  $f \in \mathcal{D}$  então  $f|_{[b-1, b]}$  é injetiva. Uma função típica de  $\mathcal{D}$  pode ser vista na Figura 2.1.

Por conveniência que veremos mais tarde vamos denotar por  $\hat{\mathcal{F}}_1$  o conjunto

$$\hat{\mathcal{D}} := \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R \times [0, 1].$$

Para finalizar esta Seção temos

**Proposição 2.1.1** *Seja  $k \geq 1$ . Se  $I$  é um intervalo tal que  $f^k|_I$  é contínua (i.e.  $0 \notin f^i(I)$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, k-1$ ) então  $f^k|_I$  se estende a uma contração em  $\bar{I}$ , mesmo que  $(f^k)'$  não esteja definida em  $\bar{I}$ .*

*Prova.*

A função  $f^k|_I$  se estende continuamente a  $\bar{I}$  pois é uma função monótona e limitada. Para mostrarmos que  $f^k$  é uma contração em  $\bar{I}$  tomemos  $x, y \in \bar{I}$ , com  $x < y$ . O Teorema do Valor Médio nos fornece um ponto  $c \in (x, y) \subset I$  tal que

$$\frac{f^k(x) - f^k(y)}{x - y} = (f^k)'(c).$$

Mas como  $(f^k)'(c) \leq \nu$ , o resultado segue.

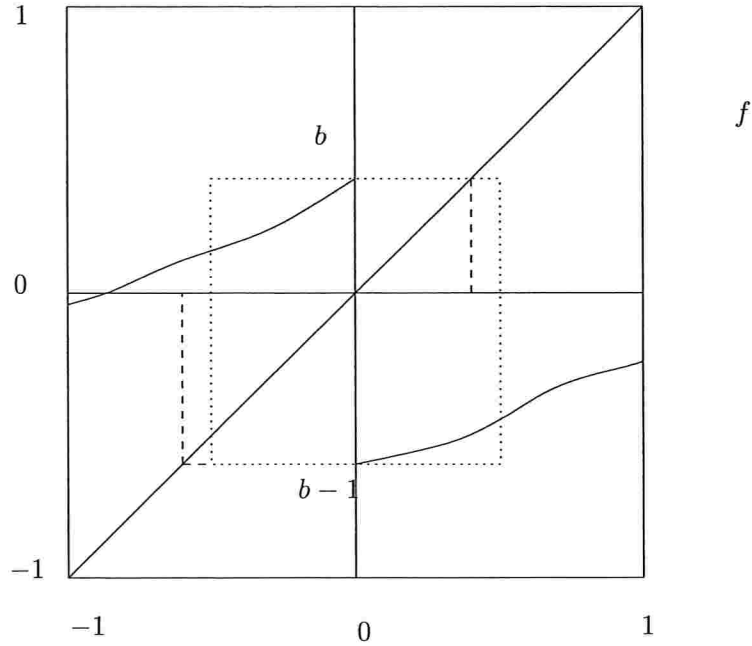


Figura 2.1: Uma função típica do espaço  $\mathcal{D}$ .

■

## 2.2 Órbitas laterais e órbita do gap principal

Uma vez que nosso interesse é a dinâmica de funções  $f \in \mathcal{D}$  precisaremos relembrar alguns conceitos e estabelecer outros. Observe que o fato de uma função  $f \in \mathcal{D}$  possuir derivada positiva e menor do que 1 ( $0 < f'(x) < 1$ ) implica que  $f(x) \in [b-1, b]$  qualquer que seja  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Como  $f \in \mathcal{D}$  deixa invariante o intervalo  $[b-1, b]$  vamos trabalhar com a função  $f$  restrita a  $[b-1, b]$ .

Como 0 é o ponto de descontinuidade (de certo modo problemático mas importante) precisamos definir as suas órbitas laterais  $\{0_n^-\}_{n \geq 1}$  e  $\{0_n^+\}_{n \geq 1}$ , onde

$$0_n^+ = f^{n-1}(b-1), \quad \forall n \geq 1$$

$$0_n^- = f^{n-1}(b), \quad \forall n \geq 1.$$

E assim as órbitas laterais do zero são

$$\text{orb}^+ = \{0_1^+, 0_2^+, \dots, 0_n^+, \dots\},$$

que chamaremos de *órbita futura* de  $0^+$ , e

$$\text{orb}^- = \{0_1^-, 0_2^-, \dots, 0_n^-, \dots\},$$

que chamaremos de *órbita futura* de  $0^-$ . A primeira propriedade importante que essas órbitas possuem é a disjunção entre elas que formalizamos e provamos nos dois seguintes lemas.

**Lema 2.2.1** *Seja  $f \in \mathcal{D}$ . Então*

$$0_i^- \neq 0_j^+$$

*quaisquer que sejam os inteiros positivos  $i$  e  $j$ .*

*Prova.* Sem perda de generalidade suponhamos  $i \leq j$ . E, por absurdo, vamos supor que  $0_i^- = 0_j^+$ . Pela injetividade da função  $f$  temos

$$\begin{aligned} 0_{i-1}^- &= 0_{j-1}^+ \\ &\vdots \\ 0_1^- &= 0_{j-i+1}^+ \end{aligned}$$

e da última igualdade acima obtemos

$$b = 0_1^- = 0_{j-i+1}^+ = f^{j-i}(0_1^+) = f^{j-i}(b-1). \quad (2.1)$$

Assim, se  $j - i = 0$  temos de (2.1) que  $b - 1 = b$ , o qual é um absurdo. E se  $j - i > 0$  a equação

(2.1) geraria uma pré-imagem para  $b$  que não existe. Portanto, em qualquer caso temos um absurdo, o que assegura a veracidade do lema. ■

Já o próximo lema nos diz que as órbitas futuras de  $0^+$  e de  $0^-$  não podem ser pré-periódicas.

**Lema 2.2.2** *Se  $f \in \mathcal{D}$  então*

$$0_i^+ \neq 0_j^+ \quad e \quad 0_t^- \neq 0_s^-$$

para todo  $i \neq j$  e todo  $t \neq s$ .

*Prova.* Provaremos apenas que  $0_i^+ \neq 0_j^+$ , para todo  $i \neq j$ , pois a demonstração de  $0_t^- \neq 0_s^-$ , para todo  $t \neq s$ , é análoga.

Sem perda de generalidade vamos supor que  $i < j$  e, por absurdo, vamos supor que  $0_i^+ = 0_j^+$ . Como  $0_i^+ = 0_j^+ = f(0_{j-1}^+)$  temos que

$$f(\{0_1^+, 0_2^+, \dots, 0_{j-1}^+\}) = \{0_2^+, 0_3^+, \dots, 0_{j-1}^+\}.$$

E uma vez que  $0_1^+$  não possui pré-imagem vemos que o número de elementos do conjunto  $\{0_1^+, 0_2^+, \dots, 0_{j-1}^+\}$  é exatamente 1 a mais que o número de elementos do conjunto  $\{0_2^+, 0_3^+, \dots, 0_{j-1}^+\}$ , contradizendo a injetividade da aplicação  $f$ , e concluindo assim o resultado. ■

Além dessas propriedades e definições vemos que  $G = (0_2^-, 0_2^+)$  é um intervalo com a propriedade de que  $f(x) \notin G$  para todo  $x \in [b-1, b] \setminus \{0\}$ . Ele será chamado de *gap principal*, e definiremos seu  $t$ -ésimo iterado por  $f$  da seguinte maneira

$$f^t(G) := \{f^t(x); x \in G \text{ e } f^t(x) \text{ está definido}\}.$$

Como  $f$  é estritamente monótona temos que  $f^t(G)$  é um conjunto aberto.

Como consequência imediata dessas definições temos

**Lema 2.2.3** *Seja  $f \in \mathcal{D}$  e suponha que  $0_{t+2}^-$  esteja definido, com  $t \geq 1$ . Então existe intervalo aberto  $I$  adjacente a  $0_{t+2}^-$  tal que  $I \subset f^t(G)$ .*

*Prova.* Uma vez que  $0_{t+2}^-$  está definido existe uma vizinhança  $V$  de  $0_2^-$  tal que  $0 \notin f^i(V)$ , para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, t-1$ , e  $f^t|_V$  é um difeo. Assim, basta tomarmos  $I = f^t(V \cap G)$ , que o resultado segue. ■

### 2.3. UM POUCO DE DINÂMICA: ÓRBITAS PERIÓDICAS E A DEFINIÇÃO DE $\sigma(F)$ E $K(F)$ 19

Um outro resultado que envolve o gap  $G$  é o que garante a disjunção de seus iterados futuros, ou seja

**Lema 2.2.4** *Se  $f \in \mathcal{D}$ , então a órbita positiva de seu gap principal  $G$  é disjunta aos pares, ou seja,  $f^n(G) \cap f^m(G) = \emptyset$  para quaisquer inteiros  $n, m \geq 0$  com  $n \neq m$ .*

*Prova.*

Para justificarmos isso suponhamos, por absurdo, que exista  $y \in f^n(G) \cap f^m(G)$  e, sem perda de generalidade, vamos assumir  $n > m$ . Assim temos que  $y = f^n(x_1) = f^m(x_2)$ , com  $x_1, x_2 \in G$ . Mas  $x_2 = f^{-m}(y) = f^{-m}(f^n(x_1)) = f^{n-m}(x_1) \in G$  o que é uma contradição pois sabemos que  $G$  possui a propriedade de que para todo  $x \in [b-1, b]$  vale que  $f(x) \notin G$ . ■

Além disso observamos que no caso particular em que  $b = \frac{1}{2}$  temos que  $0 \in G$ .

### 2.3 Um pouco de dinâmica: órbitas periódicas e a definição de $\sigma(f)$ e $k(f)$

Vamos assumir sem perda de generalidade que  $b < \frac{1}{2}$  pois o argumento que faremos a partir de agora se aplicará para o caso em que  $b > \frac{1}{2}$ , por simetria.

No caso em que  $f \in \hat{\mathcal{D}}$  não possui zero em  $[b-1, 0)$  temos duas possibilidades: (i)  $b = 0$ , onde  $f^i(x) \rightarrow 0^-$  para todo  $x$ , ou (ii)  $b > 0$  mas  $f(x) > 0$  para todo  $x \in [b-1, 0)$ . No último caso, usando o fato de que  $0 < f' < 1$ , vemos que  $f(x) \in (b-1, 0)$  para todo  $x \in (0, b]$  e  $f(x) \in (0, b)$  para todo  $x \in [b-1, 0)$ . Isso implica que  $f^2((0, b])$  está contido em  $(0, b]$  e de acordo com o Corolário 2.1.1 sabemos que  $f^2$  se estende a uma contração em  $[0, b]$ . Logo  $f^2|_{[0, b]}$  tem um (único) ponto fixo, e a aplicação original  $f$  tem uma (única) órbita periódica atratora de período dois, que atrai todas as órbitas.

Quando  $z = b-1 = 0_1^+$  é zero de  $f$  então a aplicação  $f^2|_{(0, b]}$  também se estende a uma contração em  $[0, b]$  onde  $0$  é um ponto fixo de  $f^2$  que atrai todas as órbitas. Para a aplicação original  $f$  as órbitas se aproximam do par de pontos  $\{0_1^+, 0\}$ . Observe que tanto  $0_1^+$  quanto  $0$  são aproximados apenas pelo lado direito. E nunca estaremos livres desse tipo de comportamento, mesmo para outras potências de  $f$  e em outros intervalos, como veremos abaixo. Do ponto de vista da dinâmica, esta situação pode ser vista como periódica hiperbólica, mesmo que essa órbita periódica atratora não seja verdadeira, motivo pelo qual a chamaremos de uma *órbita periódica atratora virtual*.

Se  $f$  tem um zero  $z \in (b-1, 0)$  então  $[z, 0)$  é um domínio fundamental para  $f$  restrita ao lado negativo, e assim temos que  $0 \leq f(x) < b$  para todo  $x \in [z, 0)$ , e para todo  $x \in [b-1, 0)$  existe  $i = i(x) \geq 0$  tal que  $f^i(x) \in [z, 0)$ . Na verdade,  $[0, b)$  também é um domínio fundamental pois  $[0, b) = f([z, 0))$ .

Além disso  $0_2^+ < 0$  e  $[0_1^+, 0_2^+)$  é outro domínio fundamental. Como  $f$  é monótona a ordem  $0_1^+ < 0_2^- < 0_2^+$  é respeitada enquanto os iterados do gap  $G = (0_2^-, 0_2^+)$  não passam pela origem, isto é,

$$0_{n+2}^- < 0_{n+2}^+$$

para todo  $n \geq 0$  tal que  $0_{i+2}^+ < 0, \forall 0 \leq i \leq n-1$ .

A fim de encontrarmos órbitas periódicas atratoras consideremos  $k$  como sendo o primeiro inteiro positivo tal que

$$(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-) \cap (0, b) \neq \emptyset,$$

lembrando que  $(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-)$  é um iterado de  $(0_1^+, 0_2^-)$ . Veja Figura 2.2.

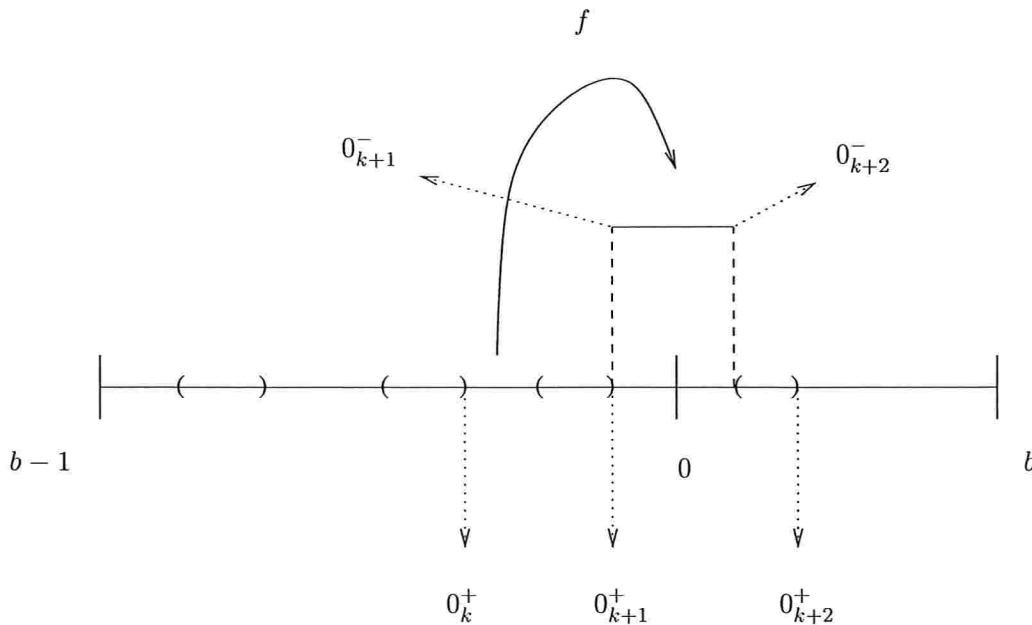


Figura 2.2: Existência do inteiro  $k = k(f)$ .

### 2.3. UM POUCO DE DINÂMICA: ÓRBITAS PERIÓDICAS E A DEFINIÇÃO DE $\sigma(F)$ E $K(F)$ 21

Como cada iterado de  $(0_1^+, 0_2^-)$  está contido em algum domínio fundamental, e  $[0, b)$  é também um domínio fundamental então existem duas possibilidades: ou

$$(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-) \subset (0, b) \quad (2.2)$$

ou

$$0 \in (0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-) \quad (2.3)$$

No primeiro caso temos que  $f^{k+1}|_{(0,b)}$  se estende a uma contração em  $[0, b]$  (pelo Corolário 2.1.1) e assim  $f^{k+1}$  possui um único ponto fixo, e concluímos facilmente que  $f$  possui uma única órbita periódica atratora (verdadeira ou virtual) de período  $k + 1$ , atraindo todas as órbitas exceto a pré-órbita de 0. Mas para sermos mais precisos, existem essencialmente dois subcasos aqui. Se  $[0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-]$  está contido em  $(0, b)$  então existe uma órbita periódica atratora verdadeira. Neste caso,  $0 \in (0_{k+1}^-, 0_{k+1}^+) = f^{k-1}(G)$  implicando na finitude da pré-órbita de 0, pois não existem pré-imagens de pontos de  $G$ .

A outra possibilidade é que 0 ou  $b$  esteja no fecho de  $(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-)$ . Se 0 está no fecho de  $(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-)$ , o conjunto de pontos  $\{0_1^+, 0_2^+, \dots, 0_k^+, 0\}$  é uma órbita atratora virtual. Já quando  $b$  está no fecho de  $(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-)$ , o conjunto  $\{0_1^-, 0_2^-, \dots, 0_k^-, 0\}$  é uma órbita atratora virtual. E mais uma vez a pré-órbita do 0 é finita, pois nem  $0_1^-$  nem  $0_1^+$  tem pré-imagem definida.

Toda essa discussão pode ser resumida e enunciada no seguinte lema

**Lema 2.3.1** *Seja  $b < \frac{1}{2}$  e seja  $k$  o primeiro inteiro positivo tal que*

$$(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-) \cap (0, b) \neq \emptyset.$$

*Se  $(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-) \subset (0, b)$  então  $f$  tem órbita atratora de período  $k + 1$  que será*

(i) *verdadeira se  $0 \in (0_{k+1}^-, 0_{k+1}^+)$*

*ou*

(ii) *virtual se  $0 \in \{0_{k+1}^-, 0_{k+1}^+\}$*

*Em ambos os casos essa órbita atrai todas as órbitas, exceto a pré-órbita do zero, que é finita.*

Como percebemos o inteiro positivo  $k$  é de grande importância, como veremos também mais adiante. Sendo assim vamos colocá-lo em destaque na seguinte definição.

**Definição 2.3.1** *Sejam  $f \in \mathcal{D}$  e  $k = k(f)$  o primeiro inteiro positivo tal que*

$$(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-) \cap (0, b) \neq \emptyset \quad \text{se } b \leq \frac{1}{2}$$

e

$$(0_{k+2}^+, 0_{k+1}^-) \cap (b-1, 0) \neq \emptyset \quad \text{se } b > \frac{1}{2}.$$

Por razões que veremos mais a frente vamos definir também

**Definição 2.3.2** *Seja  $f \in \mathcal{D}$ . Definimos o sinal de  $f$ ,  $\sigma = \sigma(f)$  por*

$$\sigma = \sigma(f) = - \quad \text{se } b \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\sigma = \sigma(f) = + \quad \text{se } b > \frac{1}{2}.$$

Assim, o sinal de  $f$  é o sinal do ponto médio do intervalo  $[b-1, b]$ , ou seja,  $\sigma(f) = -$  se, e somente se,  $\frac{2b-1}{2} \leq 0$ , ou  $\sigma(f) = +$  se, e somente se,  $\frac{2b-1}{2} > 0$ .

Observamos que se  $G \subset (b-1, 0)$  então  $\sigma = -$  e se  $G \subset (0, b)$  então  $\sigma = +$ . Além disso se o gap  $G$  está à esquerda de 0 então  $b < \frac{1}{2}$  e se ele está à direita de 0 então  $b > \frac{1}{2}$ . E por conta disso estaremos trabalhando com  $b \neq \frac{1}{2}$ .

O segundo caso, quando  $0 \in (0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-)$ , será estudado na próxima seção. Isto também permitirá estudar órbitas periódicas de forma mais completa, na Seção 2.6.

## 2.4 Aplicações de Retorno

Um conceito bem conhecido e muito importante mas que pode variar de acordo com a necessidade específica é o de renormalização. Veremos entre outras coisas que a órbita positiva do gap  $G$  está fortemente ligada ao fato da aplicação ser ou não renormalizável.



**Definição 2.4.1** Dada uma função  $f \in \mathcal{D}$  e um par de inteiros não negativos  $r, l$  diremos que  $(r, l)$  é  $f$ -interno se as condições

$$(i) \quad 0_r^+ < 0 < 0_l^-$$

$$(ii) \quad [0_r^+, 0_l^-] \cap \{0_1^+, 0_2^+, \dots, 0_{r-1}^+, 0_1^-, 0_2^-, \dots, 0_{l-1}^-\} = \emptyset$$

são satisfeitas.

Em seguida definimos o conjunto

$$\mathcal{I}_f = \{(r, l) \in \mathbb{N}^2; (r, l) \text{ é } f\text{-interno}\}. \quad (2.4)$$

Observe que independentemente da aplicação  $f \in \mathcal{D}$  o conjunto  $\mathcal{I}_f$  é sempre não vazio pois o par  $(1, 1)$  pertence a  $\mathcal{I}_f$ , para toda  $f \in \mathcal{D}$ .

A fim de investigarmos a aplicação de primeiro retorno de  $f$  ao intervalo  $[0_r^+, 0_l^-]$  vejamos separadamente (pois a função não é contínua na origem) quando ocorre o primeiro retorno de cada um dos intervalos  $[0_r^+, 0)$  e  $(0, 0_l^-]$ .

**Lema 2.4.1** Sejam  $f \in \mathcal{D}$  e  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$ . Para todo  $t = 1, 2, \dots, l - 1$  temos que

$$f^t(0_r^+, 0) \cap [0_r^+, 0_l^-] = \emptyset. \quad (2.5)$$

Além disso,  $0_{r+t}^+$  está definido e  $0_{r+t}^+ \in (0_r^+, 0_l^-)$ .

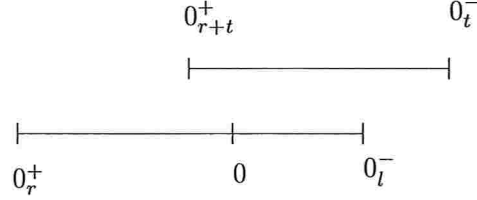
*Prova.*

Suponhamos por absurdo que exista  $1 \leq t < l$  tal que  $\{f^t(0_r^+, 0) = (0_{r+t}^+, 0_t^-)\} \cap [0_r^+, 0_l^-] \neq \emptyset$ , e tomemos o primeiro  $t$  satisfazendo esta condição. Pela definição de  $(r, l)$  ser  $f$ -interno devemos ter  $0_t^- \notin [0_r^+, 0_l^-]$ , ou seja, devemos ter a situação

$$0_r^+ < 0_t^- < 0_l^- \quad (\text{Veja Figura 2.3.})$$

Como  $t$  é o primeiro inteiro positivo satisfazendo (2.5) temos que a aplicação

$$f^t : (0_r^+, 0) \rightarrow (0_{r+t}^+, 0_t^-)$$

Figura 2.3: Possível situação se  $t < l$ .

é um difeomorfismo. Assim, fazendo o pull-back  $t$ -vezes do intervalo  $(0_{r+t}^+, 0_t^-)$  obtemos o ponto  $0_{l-t}^- \in (0_r^+, 0^-)$ , o que contradiz o fato de  $(r, l)$  ser  $f$ -interno. Isso prova a primeira parte do lema.

Para provarmos que  $0_{r+l}^+$  está definido e pertence ao intervalo  $(0_r^+, 0_l^-)$  observemos que como  $0 \notin \overline{f^i(0_r^+, 0)}$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, l-1$  (esse fato decorre da primeira parte já provada acima), e  $0_r^+ < 0$  então  $0_{r+l}^+ = f^l(0_r^+)$  está definido. Como

$$f^t : (0_r^+, 0) \rightarrow (0_{r+t}^+, 0_t^-)$$

é um difeomorfismo monótono se  $0_{r+l}^+ \notin (0_r^+, 0_l^-)$  teríamos

(a)  $0_{r+l}^+ = 0_r^+$

ou

(b)  $0_{r+l}^+ < 0_r^+$

O item (a) não ocorre devido à injetividade da aplicação  $f$  (ver Lema 2.2.2).

Analisemos o item (b). Se  $r > l$  teremos  $0_{r-l}^+ \in (0_r^+, 0)$  o que contradiz o fato de  $(r, l)$  ser  $f$ -interno (veja Figura 2.4). Se  $r \leq l$  teríamos a existência de pré-imagem de  $0_1^+ = b-1$  fazendo o pull-back  $r$  vezes do intervalo  $(0_{r+l}^+, 0_l^-)$ , o que é um absurdo. Assim também não ocorre o item (b) garantindo que  $0_{r+l}^+ \in (0_r^+, 0_l^-)$ . ■

Vale também um resultado análogo para o intervalo  $(0, 0_l^-)$  e seus iterados  $(0_t^+, 0_{l+t}^-)$ , cuja demonstração é semelhante à do Lema 2.4.1.

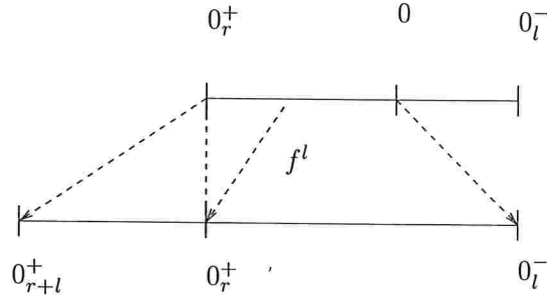


Figura 2.4: Possível situação:  $0_{r+l}^+ < 0_r^+$ .

**Lema 2.4.2** *Sejam  $f \in \mathcal{D}$  e  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$ . Para todo  $t = 1, 2, \dots, r-1$  temos que*

$$f^t(0, 0_l^-) \cap [0_r^+, 0_l^-] = \emptyset.$$

Além disso,  $0_{r+l}^-$  está definido e  $0_{r+l}^- \in (0_r^+, 0_l^-)$ .

Já o próximo resultado nos diz que o gap principal  $G$  não intersecta o intervalo  $[0_r^+, 0_l^-]$  até o iterado  $r+l-3$ .

**Lema 2.4.3** *Se  $f \in \mathcal{D}$  e  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  então os iterados do gap  $G = (0_2^-, 0_2^+)$  até a ordem  $r+l-3$  não intersectam o intervalo  $[0_r^+, 0_l^-]$ , isto é*

$$(0_t^-, 0_t^+) \cap (0_r^+, 0_l^-) = \emptyset$$

para todo  $2 \leq t \leq r+l-1$ .

*Prova.*

Suponhamos, por absurdo, que não valha o Lema e consideremos o primeiro  $2 \leq t \leq r+l-1$  tal que

$$(0_t^-, 0_t^+) \cap (0_r^+, 0_l^-) \neq \emptyset.$$

Do fato de  $(r, l)$  ser  $f$ -interno e dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 temos que  $0_t^-, 0_t^+ \notin (0_r^+, 0_l^-)$ , para todo  $1 \leq t \leq r+l-1$ . Também  $0_t^-$  e  $0_t^+$  não podem coincidir com  $0_r^+$  ou  $0_l^-$ , pelos Lemas 2.2.1 e 2.2.2. Então a intersecção acima só seria possível se

$$[0_r^+, 0_l^-] \subset (0_t^-, 0_t^+).$$

Mas se isso ocorresse teríamos a intersecção de iterados distintos do gap, o que não ocorre devido aos Lemas 2.2.3 e 2.2.4. ■

Como consequência desses resultados temos o seguinte

**Corolário 2.4.4** *Se  $f \in \mathcal{D}$  e  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  então a primeira vez que o ponto  $0_r^+$  (respectivamente  $0_l^-$ ) retorna ao intervalo  $[0_r^+, 0_l^-]$  é exatamente no seu  $l$ -ésimo iterado por  $f$  (respectivamente  $r$ -ésimo iterado por  $f$ ), isto é,  $0_{r+l}^+$  (respectivamente  $0_{r+l}^-$ ). Além disso  $(0_r^+, 0_l^-) = f^r(0, 0_l^-] \cup (0_{r+l}^-, 0_{r+l}^+) \cup f^l(0_r^+, 0)$ .*

Com todos esses resultados em mão é natural definirmos a aplicação de primeiro retorno de  $f$  ao intervalo  $[0_r^+, 0_l^-]$  como segue.

**Definição 2.4.2** *Se  $(r, l)$  é  $f$ -interno então a aplicação de primeiro retorno de  $f$  a  $[0_r^+, 0_l^-]$  é dada por*

$$R(x) = \begin{cases} f^l(x) & \text{se } x \in [0_r^+, 0) \\ f^r(x) & \text{se } x \in (0, 0_l^-] \end{cases}.$$

E assim  $R$  tem o aspecto mostrado na Figura 2.5, onde  $R$  possui  $(0_{r+l}^-, 0_{r+l}^+)$  como seu *gap principal*, ou seja,  $(0_{r+l}^-, 0_{r+l}^+)$  tem a propriedade de que  $R(x) \notin (0_{r+l}^-, 0_{r+l}^+)$  para todo  $x \in [0_r^+, 0_l^-] \setminus \{0\}$ .

**Observação 2.4.5** *Vale destacar aqui que se acontecer um dos casos extremos em que  $0_r^+ = 0$  ou  $0_l^- = 0$  teremos que a aplicação de retorno ao intervalo  $[0_r^+, 0_l^-]$  terá apenas um ramo e terá o 0 como ponto fixo, ou seja*

$$R(x) = f^r(x)$$

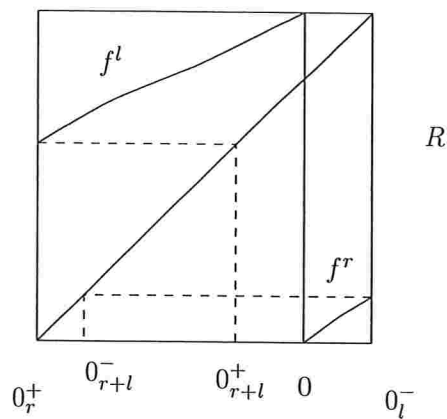


Figura 2.5: Gráfico da Aplicação  $R$ .

se  $0_r^+ = 0$ , e nesse caso seu gap será o intervalo  $G = (f^r(0_l^-, 0_l^-))$  (veja Figura 2.6).

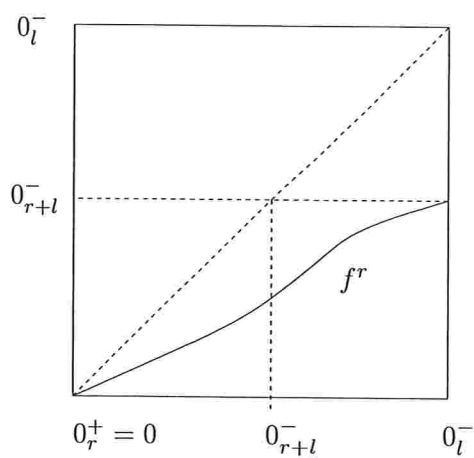


Figura 2.6: Gráfico da Aplicação  $R$  no caso  $0_r^+ = 0$ .

ou

$$R(x) = f^l(x)$$

se  $0_l^- = 0$ , e nesse caso seu gap será o intervalo  $G = (0_r^+, f^l(0_r^+))$  (veja Figura 2.7).

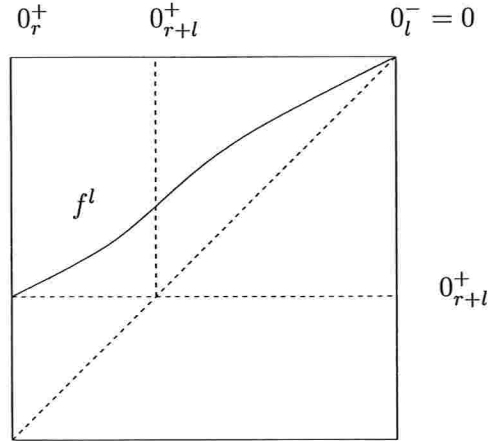


Figura 2.7: Gráfico da Aplicação  $R$  no caso  $0_l^- = 0$ .

Vamos encerrar esta Seção com um resultado que estabelece uma relação entre a órbita dos intervalos  $(0_r^+, 0)$ ,  $(0, 0_l^-)$  e a órbita do gap  $G = (0_2^-, 0_2^+)$  no caso em que  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$ : “se  $f \in \mathcal{D}$  e  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  então os fechos das imagens por  $f$  de  $(0_r^+, 0)$  (até o iterado  $l - 1$ ) e de  $(0, 0_l^-)$  (até o iterado  $r - 1$ ) são as componentes conexas do complementar do pedaço da órbita do gap  $G$  (até o iterado  $r + l - 3$ ) que ficam fora do intervalo  $[0_r^+, 0_l^-]$ ”. Antes de formalizarmos esse resultado definamos o conjunto

$$K_{r,l} := [\cup_{t=2}^{r+l-1} (0_t^-, 0_t^+)]^c \quad (2.6)$$

onde  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  e o complementar é tomado dentro do intervalo  $[-1, 1]$ . Logo temos

**Lema 2.4.6** *Seja  $f \in \mathcal{D}$ . Se  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  então  $K_{r,l}$  tem  $r + l - 1$  componentes as quais são*

- (a)  $[0_r^+, 0_l^-]$
- (a)  $\overline{f^j((0_r^+, 0^-))}$ ,  $j = 1, \dots, l - 1$
- (b)  $\overline{f^t((0^+, 0_l^-))}$ ,  $t = 1, \dots, r - 1$

*Prova.*

Como a órbita do gap  $G = (0_2^-, 0_2^+)$  é disjunta aos pares (ver Lema 2.2.4) e como  $0_i^- \neq 0_j^+$ ,  $\forall i, j$ , e  $0_i^- \neq 0_j^-$ ,  $0_i^+ \neq 0_j^+$ ,  $\forall i \neq j$  (ver Lema 2.2.1 e Lema 2.2.2) temos que as componentes de  $K_{r,l}$

não são degeneradas. Assim vemos que  $K_{r,l}$  possui exatamente  $r + l - 1$  componentes. Também já sabemos pelo Lema 2.4.2 que  $f^t(0, 0_l^-) \subset ([0_r^+, 0_l^-])^c$ , para todo  $1 \leq t \leq r - 1$ , e pelo Lema 2.4.1 que  $f^j(0_r^+, 0) \subset ([0_r^+, 0_l^-])^c$ , para todo  $1 \leq j \leq l - 1$ .

Mostremos agora que os iterados  $f^j(0_r^+, 0)$ , para todo  $1 \leq j \leq l - 1$ , e  $f^t(0, 0_l^-)$ , para todo  $1 \leq t \leq r - 1$ , não intersectam os gaps  $(0_s^-, 0_s^+)$ , para todo  $2 \leq s \leq r + l - 1$ . Mas vamos mostrar apenas que

$$(0_t^+, 0_{t+l}^-) \cap (0_s^-, 0_s^+) = \emptyset \quad (2.7)$$

para todo  $2 \leq s \leq r + l - 1$  e para todo  $1 \leq t \leq r - 1$ , pois o outro caso é análogo. Para que a intersecção (2.7) fosse não vazia deveríamos ter uma das seguintes situações apresentadas na Figura 2.8. Mas nenhuma delas pode ocorrer pois senão teríamos intersecção entre iterados distintos do gap e isso já sabemos não ser possível via Lema 2.2.3 e Lema 2.2.4. Assim, a única situação em que a intersecção (2.7) poderia ser não vazia e que nos resta analisar é

$$(0_s^-, 0_s^+) \subset (0_t^+, 0_{t+l}^-).$$

A igualdade  $(0_s^-, 0_s^+) = (0_t^+, 0_{t+l}^-)$  não ocorre devido ao Lema 2.2.1. Vejamos então a situação

$$0_t^+ < 0_s^- < 0_s^+ < 0_{t+l}^-$$

Se  $s > t$  fazemos o pull-back  $t$  vezes e obtemos

$$0 < 0_{s-t}^- < 0_{s-t}^+ < 0_l^-$$

o que não ocorre pois sabemos do Corolário 2.4.4 que o gap só retorna ao intervalo  $(0_r^+, 0_l^-)$  no iterado  $r + l$ . Se  $s = t$  temos  $0_s^+ < 0_s^-$  o que é impossível. Agora, se  $s < t$  fazemos o pull-back  $s - 1$  vezes e obtemos

$$0_{t-s+1}^+ < 0_1^- < 0_1^+ < 0_{t-s+1+l}^-$$

o que também não ocorre pois para todo  $f \in \mathcal{D}$  vale que  $0_1^+ < 0_1^-$ .

De maneira análoga mostra-se que

$$(0_{t+l}^+, 0_t^-) \cap (0_s^-, 0_s^+) = \emptyset \quad (2.8)$$

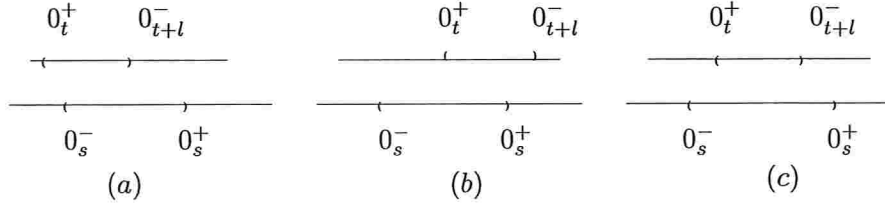


Figura 2.8: Possibilidades da intersecção (Lema 2.4.6).

para todo  $2 \leq s \leq r + l - 1$  e para todo  $1 \leq t \leq l - 1$ .

Assim, de (2.7) e de (2.8) concluímos que os iterados  $f^t(0, 0_l^-) = (0_t^+, 0_{t+l}^-)$ , para  $1 \leq t \leq r - 1$ , e  $f^t(0_r^+, 0) = (0_{r+t}^+, 0_t^-)$ , para  $1 \leq t \leq l - 1$ , estão todos contidos dentro das componentes conexas de  $K_{r,l}$  e seus bordos coincidem com os bordos de  $K_{r,l}$ . E como o número de componentes conexas de  $K_{r,l}$  é  $r + l - 1$  que é igual ao número de gaps  $(0_s^-, 0_s^+)$ , para  $2 \leq s \leq r + l - 1$ , somando-se uma unidade correspondente ao intervalo  $[0_r^+, 0_l^-]$ , concluímos o resultado. ■

Temos assim, como conseqüência imediata desse resultado o

**Corolário 2.4.7** *Seja  $f \in \mathcal{D}$ . Se  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  então para cada  $x \in [b - 1, b] \setminus \{0\}$  existe um inteiro  $i = i(x) \geq 0$  tal que  $f^i(x) \in [0_r^+, 0_l^-]$ .*

## 2.5 Renormalização

Vejamos agora que o conjunto  $\mathcal{I}_f$  de pares de inteiros admite uma ordem.

**Lema 2.5.1** *Se  $f \in \mathcal{D}$  e  $(r, l), (r', l') \in \mathcal{I}_f$  então*

$$(l' - l) \cdot (r' - r) \geq 0.$$

*Prova.*

Para isso basta mostrarmos que se  $r' > r$  então  $l' \geq l$  (e analogamente que  $l' > l$  implica  $r' \geq r$ ). Se tivéssemos  $r' > r$  e  $l' < l$  então

$$0_r^+ < 0_{r'}^+ < 0 < 0_l^- < 0_{l'}^-,$$



pela definição de que os pares são  $f$ -internos. Como os iterados do gap principal são disjuntos aos pares (Lema 2.2.4) também conseguimos

$$0 < 0_l^- < 0_l^+ < 0_{l'}^- \quad (2.9)$$

e

$$0_r^+ < 0_{r'}^- < 0_{r'}^+ < 0. \quad (2.10)$$

A definição de  $(r', l')$  ser  $f$ -interno e (2.9) implicam  $l > r'$  e da definição de  $(r, l)$  ser  $f$ -interno e de (2.10) também temos  $r' > l$ , gerando um absurdo e garantindo que  $l' \geq l$ . ■

Esse lema nos permite definir uma relação de ordem no conjunto  $\mathcal{I}_f$ .

**Definição 2.5.1** *Dados dois pares  $(r, l), (r', l') \in \mathcal{I}_f$  diremos que  $(r, l)$  é menor do que  $(r', l')$  e denotaremos por*

$$(r, l) < (r', l')$$

*se  $r < r'$  ou  $l < l'$ . E diremos que  $(r, l)$  é propriamente menor do que  $(r', l')$  e denotaremos por*

$$(r, l) \ll (r', l')$$

*se  $r < r'$  e  $l < l'$ .*

O primeiro resultado decorrente dessa ordem é o que segue e que a relaciona com o inteiro  $k$  da Definição 2.3.1.

**Lema 2.5.2** *Sejam  $f \in \mathcal{D}$  e  $k = k(f)$  (ver Definição 2.3.1). Se  $(0_{k+1}^-, 0_{k+1}^+)$  e  $(0_{k+2}^-, 0_{k+2}^+)$  estão em lados opostos de 0, isto é, se ocorre a situação (2.3) descrita no final da Seção 2.3, então existe  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  com  $(1, 1) \ll (r, l)$ :  $(r, l) = (k+1, k+2)$  se  $b < \frac{1}{2}$  e  $(r, l) = (k+2, k+1)$  se  $b > \frac{1}{2}$ . Reciprocamente, se  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  é propriamente maior do que  $(1, 1)$  e minimal com esta condição, então ou  $(r, l) = (k+1, k+2)$ , se  $b < \frac{1}{2}$ , ou  $(r, l) = (k+2, k+1)$ , se  $b > \frac{1}{2}$ .*

*Prova.*

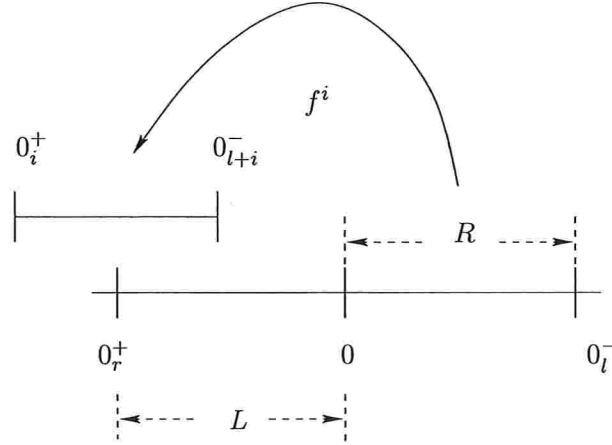


Figura 2.9: Possibilidade de intersecção.

Antes de iniciarmos a demonstração vamos observar que se  $b = \frac{1}{2}$  então decorre de  $0 < f' < 1$  que  $0_2^- < 0 < 0_2^+$  e quaisquer que sejam  $r > 2$  ou  $l > 2$  teremos  $0_2^+, 0_2^- \in (0_r^+, 0_l^-)$ . Isto impede que exista par  $f$ -interno  $(r, l) \neq (1, 1)$ .

Para um melhor entendimento desse fato veja Figura 2.10.

Feitas essas ponderações, para mostrarmos a primeira parte do Lema basta tomarmos  $r = k + 1$  e  $l = k + 2$  no caso  $b < \frac{1}{2}$  ou  $r = k + 2$  e  $l = k + 1$  no caso  $b > \frac{1}{2}$ , ressaltando que  $k = k(f)$  é o inteiro dado pela Definição 2.3.1, e verificar facilmente que  $(r, l)$  é  $f$ -interno.

Para a segunda parte do Lema faremos apenas o caso em que  $b < \frac{1}{2}$  pois para o caso  $b > \frac{1}{2}$  o argumento é análogo, via simetria. Sendo  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  e minimal com a condição de que  $(1, 1) \ll (r, l)$  afirmamos que

**Afirmção 1:**  $(0_i^-, 0_i^+) \subset (b - 1, 0)$ , para todo  $2 \leq i \leq r$ .

Para demonstrarmos esta afirmção observemos que o Lema 2.4.3 garante que

$$(0_i^-, 0_i^+) \cap (0_r^+, 0_l^-) = \emptyset$$

para todo  $i = 2, 3, \dots, r$  (mesmo que  $l \geq 1$ ). Assim, se não vale a **Afirmção 1** então existe  $i \in \{2, 3, \dots, r - 1, r\}$  tal que

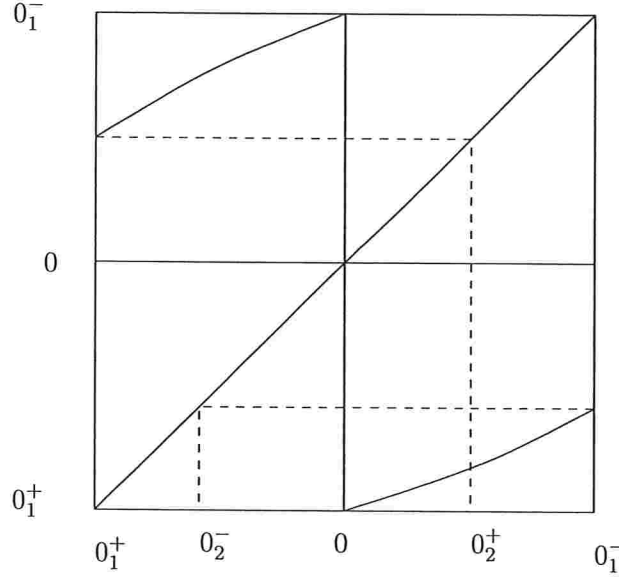


Figura 2.10: Aplicação não renormalizável (caso  $b = \frac{1}{2}$ ) (Lema 2.5.2).

$$(0_i^-, 0_i^+) \subset (0_l^-, 0_l^-) \tag{2.11}$$

e tomemos o primeiro  $i \in \{2, 3, \dots, r - 1\}$  satisfazendo (2.11). Uma vez que  $0_2^- < 0$  não precisamos estudar o caso  $i = 2$ , logo  $i \geq 3$ . Nessas condições mostraremos que o par  $(i - 1, i)$  é  $f$ -interno, o que será uma contradição com a minimalidade do par  $(r, l)$ , pois como  $i \geq 3$  e  $i - 1 < r$  teríamos da relação de ordem que

$$(1, 1) \ll (i - 1, i) < (r, l).$$

De fato: sabemos que  $0_j^+ \in (b - 1, 0)$ , para todo  $1 \leq j \leq i - 1$ , uma vez que  $i$  é o primeiro inteiro satisfazendo (2.11). Como  $f(x) > x, \forall x \in (b - 1, 0)$ , temos que

$$0_1^+ < 0_2^+ < \dots < 0_{i-2}^+ < 0_{i-1}^+$$

e assim  $0_j^+ \notin (0_{i-1}^+, 0_i^-), \forall 1 \leq j \leq i - 2$ . Além disso  $0_1^- \notin (0_{i-1}^+, 0_i^-)$  e como  $0_j^- < 0_j^+, \forall 2 \leq j \leq i - 1$  também temos que

$$0_j^- \notin (0_{i-1}^+, 0_i^-), \forall 1 \leq j \leq i - 1$$

ou seja, o par  $(i-1, i)$  é  $f$ -interno. Portanto a **Afirmção 1** é verdadeira.

Como  $0_l^+ > 0$  e  $l > 1$ , da **Afirmção 1** segue que

$$l \geq r + 1. \quad (2.12)$$

Por outro lado, como  $f(x) > x$ ,  $\forall x \in [b-1, 0)$ , temos que

$$0_{r+1}^- = f(0_r^-) > 0_r^-.$$

O Lema 2.2.4 impede que ocorra  $0_{r+1}^- \in (0_r^-, 0_r^+)$ . A igualdade  $0_{r+1}^- = 0_r^+$  é impossibilitada pelo Lema 2.2.1. Já a situação  $0_{r+1}^- \in (0_r^+, 0_l^-)$  também não pode ocorrer devido a (2.12) e ao Lema 2.4.3. Com isso obtemos

$$0_{r+1}^- \geq 0_l^-.$$

Assim, sendo  $r$  o primeiro inteiro positivo tal que  $0 \in (0_r^+, 0_{r+1}^-)$  temos que  $r = k + 1$  (pela Definição 2.3.1), com  $k \geq 1$  pois  $r \geq 2$ .

Se tivéssemos  $0_{r+1}^- > 0_l^-$  obteríamos como conseqüência de (2.12) que  $l > r + 1$ . Mas neste caso teríamos que  $(r, r + 1)$  seria  $f$ -interno, pois

$$0_i^+ \notin [0_r^+, 0_{r+1}^-], \quad \forall 1 \leq i \leq r - 1$$

e, como  $0_i^- < 0_i^+$  para todo  $2 \leq i \leq r$ , seguiria também que

$$0_i^- \notin [0_r^+, 0_{r+1}^-], \quad \forall 1 \leq i \leq r.$$

Mas como  $(1, 1) \ll (r, r + 1) < (r, l)$  obteríamos uma contradição com a minimalidade do par  $(r, l)$ . Conseqüentemente, devemos ter

$$0_{r+1}^- = 0_l^-.$$

Portanto  $l = r + 1 = k + 2$  e o resultado fica demonstrado. ■

**Definição 2.5.2** *Se  $f \in \mathcal{D}$  seja  $(r(f), l(f))$  o par  $f$ -interno propriamente maior do que  $(1, 1)$  e minimal com essas condições, se existir.*

Agora vejamos por que faz sentido falar em renormalização para  $f \in \mathcal{D}$  tal que  $(r(f), l(f))$  existe.

Se conseguirmos estender a aplicação de retorno  $R$  do intervalo  $[0_{r(f)}^+, 0_{l(f)}^-]$  a um intervalo do tipo  $[-c, c]$ , com  $c = |(0_{r(f)}^+, 0_{l(f)}^-)|$ , conseguiremos estender a função

$$x \mapsto \frac{1}{c}R(cx)$$

ao intervalo  $[-1, 1]$ . Portanto essa nova função pertencerá a  $\mathcal{D}$  e poderemos chamá-la de *renormalização* de  $f$ .

O próximo Lema garante essa extensão, usando a hipótese de dissipatividade de  $f$ .

**Lema 2.5.3** *Seja  $f \in \mathcal{D}$  e considere  $R$  sua aplicação de primeiro retorno ao intervalo  $[0_{r(f)}^+, 0_{l(f)}^-]$ . Então  $f^{l(f)}$  se estende à esquerda de  $0_{r(f)}^+$  e  $f^{r(f)}$  se estende à direita de  $0_{l(f)}^-$ . Além disso os domínios das extensões são intervalos de tamanhos maiores do que  $|(0_{r(f)}^+, 0_{l(f)}^-)|$ .*

*Prova.* Olhemos a Figura 2.11 para um melhor entendimento da demonstração desse resultado. Faremos a demonstração para o caso em que  $b < \frac{1}{2}$  e o caso em que  $b > \frac{1}{2}$  seguirá por analogia. Sendo assim o intervalo  $[0_{r(f)}^+, 0_{l(f)}^-]$  é precisamente  $[0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-]$ , onde  $k = k(f) \geq 1$ , pelo Lema 2.5.2.

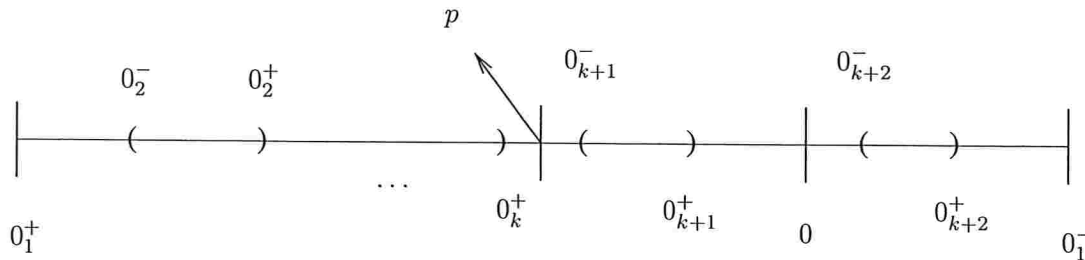


Figura 2.11: Aplicação renormalizável no caso  $b < \frac{1}{2}$ .

Inicialmente observemos que existe um ponto  $p \in (0_k^+, 0_{k+1}^-)$  tal que  $f(p) = 0$ . Sabemos que  $f|_{(0_{k+1}^+, 0)}$  se estende para  $f|_{[-1, 0]}$  e que  $f^2|_{(0_{k+1}^+, 0)}$  se estende para  $f^2|_{(p, 0)}$ . E uma vez que o primeiro iterado de  $(p, 0)$  é o intervalo  $(0, b)$  e os iterados de  $(0, b)$  estão contidos no domínio de  $f$  podemos estender  $f^{l(f)}$  à esquerda de  $0_{k+1}^+$  até esse ponto  $p$ . Já a função  $f^{r(f)}$  pode ser estendida à direita de  $0_{k+2}^-$  até o ponto  $0_1^-$ . Com isso, para concluirmos o resultado, basta-nos mostrar que

$$(i) |(p, 0_{k+1}^+)| > |(0, 0_{k+2}^-)|$$

$$(ii) |(0_{k+2}^-, 0_1^-)| > |(0_{k+1}^+, 0)|$$

Para o item (i) observe que

$$|(p, 0_{k+1}^+)| > |(p, 0_{k+1}^-)|.$$

Como  $f(p, 0_{k+1}^-) = (0, 0_{k+2}^-)$  segue que

$$|(p, 0_{k+1}^-)| > |(0, 0_{k+2}^-)|$$

pois  $0 < f' < 1$ . Já para o item (ii) temos

$$(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-) = f^{k+1}(0, 0_1^-),$$

logo

$$|(0_{k+1}^+, 0_{k+2}^-)| < |(0, 0_1^-)|,$$

implicando em

$$|(0_{k+2}^-, 0_1^-)| > |(0_{k+1}^+, 0)|.$$

■

Com esse resultado em mãos podemos reescalonar  $R$ , por uma mudança afim de coordenadas, a uma função  $\hat{R}$  definida em um intervalo do tipo  $[\hat{b} - 1, \hat{b}]$ , com  $\hat{b} \in (0, 1)$ , descontínua na origem, com extensão bem definida até os pontos de fronteira  $-1$  e  $1$ , e assim chamamos a extensão de  $\hat{R}$  ao intervalo  $[-1, 1]$  de renormalização de  $f$ . Portanto existe uma aplicação bem definida no subconjunto das funções renormalizáveis de  $\mathcal{D}$  que associa a cada função uma outra função que também pertence a  $\mathcal{D}$  mas que pode ser ou não renormalizável. Em suma obtemos um operador  $\mathcal{R}$  chamado *Operador de Renormalização* da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathcal{D}_R &\rightarrow \mathcal{D} \\ f &\mapsto \mathcal{R}f \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde  $\mathcal{D}_R := \{f \in \mathcal{D}; f \text{ é renormalizável}\}$  é o subconjunto de  $\mathcal{D}$  formado pelas funções renormalizáveis e  $\mathcal{R}f$  é a renormalização de  $f$ .

Assim é natural definirmos

**Definição 2.5.3** Dada uma função  $f \in \mathcal{D}$  diremos que  $f$  é renormalizável se existir  $(r, l) \in \mathcal{I}_f$  tal que

$$(1, 1) \ll (r, l).$$

E a renormalização de  $f$  é a aplicação de primeiro retorno de  $f$ ,  $R: (0_{r(f)}^+, 0_{l(f)}^-) \setminus \{0\} \rightarrow (0_{r(f)}^+, 0_{l(f)}^-)$ , estendida e normalizada para  $[-1, 1] \setminus \{0\}$ .

**Observação 2.5.4** Decorre do Lema 2.5.2 que no caso de uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$  ser renormalizável valem as seguintes relações

$$(0_1^+, 0_1^-) = \begin{cases} [\cup_{i=0}^k f^i(G)] \cup [\cup_{i=1}^k \overline{f^i((0, 0_1^-))}] \cup (0_{k+2}^+, 0_1^-] & \text{se } b < \frac{1}{2} \\ [\cup_{i=0}^k f^i(G)] \cup [\cup_{i=1}^k \overline{f^i((0_1^+, 0))}] \cup [0_1^+, 0_{k+2}^-] & \text{se } b > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.14)$$

e

$$(0_r^+, 0_l^-) = \begin{cases} f^r(0, 0_1^-) & \text{se } b < \frac{1}{2} \\ f^l(0_1^+, 0) & \text{se } b > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.15)$$

onde  $(r, l) = (r(f), l(f))$ .

Uma pergunta natural é: o que significa uma função  $f$  ser pelo menos duas vezes renormalizável? Como é de se esperar, basta que a primeira renormalização de  $f$ , ou seja, a aplicação  $\mathcal{R}f$ , seja pelo menos uma vez renormalizável. Para formalizar essa questão temos a seguinte definição.

**Definição 2.5.4** Seja  $f \in \mathcal{D}$ . Dizemos que  $f$  é:

- (i)  $N$  vezes renormalizável ( $N \geq 1$ ) se  $\mathcal{R}f$  é  $(N - 1)$  vezes renormalizável, por indução (onde  $N - 1 = 0$  significa e lê-se não renormalizável);
- (ii) infinitamente renormalizável se  $f$  é  $N$  vezes renormalizável, para todo  $N \geq 1$ ;
- (iii) exatamente  $N$  vezes renormalizável se  $f$  é  $N$  vezes renormalizável e  $\mathcal{R}^N f$  não é renormalizável.

Tomemos agora uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$  e suponhamos que  $f$  seja exatamente  $N$  vezes renormalizável ( $N$  pode ser  $\infty$ ). Então a  $f$  está associada a seqüência de símbolos  $(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), \dots, (\sigma_N, k_N)$  (onde  $(\sigma_N, k_N)$  não produz renormalização), no caso em que  $N < \infty$ , ou a seqüência infinita  $\Gamma = \{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), \dots, (\sigma_N, k_N), \dots\}$ , no caso em que  $N = \infty$ , onde  $\sigma_i = \pm$  e  $k_i \geq 1, \forall i \geq 0$ , tal que para todo  $0 \leq i \leq N - 1$

$$\sigma_i = - \Leftrightarrow r(\mathcal{R}^i f) = k_i + 1, \quad l(\mathcal{R}^i f) = k_i + 2$$

$$\sigma_i = + \Leftrightarrow r(\mathcal{R}^i f) = k_i + 2, \quad l(\mathcal{R}^i f) = k_i + 1.$$

Além disso, definimos  $(r_0, l_0) = (1, 1)$ ,  $(r_1, l_1) = (r(f), l(f))$  e, indutivamente,

$$\begin{cases} l_{i+1} = r_i + (k_i + 1)l_i \\ r_{i+1} = r_i + k_i l_i \end{cases} \quad \text{se } \sigma_i = - \quad (2.16)$$

e

$$\begin{cases} l_{i+1} = k_i r_i + l_i \\ r_{i+1} = (k_i + 1)r_i + l_i \end{cases} \quad \text{se } \sigma_i = + \quad (2.17)$$

para todo  $0 \leq i \leq N - 1$ . Vale observar que o sinal “+” de  $\sigma_i$  é usado para indicar que o gap  $G_i := (0_{r_i+l_i}^+, 0_{r_i+l_i}^-)$  está à direita da origem e “-” para indicar que ele está à esquerda da origem. Tendo os pares de inteiros positivos  $(r_i, l_i)$  definidos como acima podemos definir também para cada  $0 \leq i \leq N - 1$

$$\begin{aligned} R_i : [0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-] \setminus \{0\} &\rightarrow [0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-] \\ x &\mapsto R_i(x) = \begin{cases} f^{l_i}(x) & \text{se } x \in [0_{r_i}^+, 0) \\ f^{r_i}(x) & \text{se } x \in (0, 0_{l_i}^-] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} c_i &= |0_{r_i}^+| + |0_{l_i}^-| \\ b_i &= \frac{0_{l_i}^-}{c_i}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Veremos a seguir que os pares  $(r_i, l_i)$  são  $f$ -internos o que nos garantirá que a aplicação  $R_i$  definida em (2.18) é a aplicação de primeiro retorno de  $f$  ao intervalo  $[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]$ . Além disso veremos que a



$i$ -ésima renormalização de  $f$ , a função  $\mathcal{R}^i f$ , é dada pela extensão de

$$\begin{aligned} [b_i - 1, b_i] \setminus \{0\} &\rightarrow [b_i - 1, b_i] \\ x &\mapsto \frac{1}{c_i} R_i(c_i x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

a  $[-1, 1] \setminus \{0\}$ . Chamaremos de

$$\begin{aligned} h_i &: [-1, 1] \rightarrow [-c_i, c_i] \\ x &\mapsto h_i(x) = c_i x \end{aligned} \quad (2.21)$$

a conjugação entre  $\mathcal{R}^i f$  e a extensão de  $R_i$ . Para justificarmos que  $(r_i, l_i)$  são internos e a expressão (2.20) vamos definir os seguintes objetos: se  $f \in \mathcal{D}$  e  $(r, l) = (r(f), l(f)) \in \mathcal{I}_f$  definimos

$$(1) \quad c(f) = c_f := |0_r^+| + |0_l^-|$$

$$(2) \quad b(f) = b_f := \frac{0_l^-}{c_f}$$

(3)

$$\begin{aligned} R_f &: [0_r^+, 0_l^-] \setminus \{0\} \rightarrow [0_r^+, 0_l^-] \\ x &\mapsto R_f(x) = \begin{cases} f^l(x) & \text{se } x \in [0_r^+, 0) \\ f^r(x) & \text{se } x \in (0, 0_l^-] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

como sendo a aplicação de primeiro retorno de  $f$  ao intervalo  $[0_r^+, 0_l^-]$  e

(4)

$$\begin{aligned} h_f &: [-1, 1] \rightarrow [-c_f, c_f] \\ x &\mapsto h_f(x) = c_f x \end{aligned} \quad (2.23)$$

como sendo a conjugação entre a renormalização  $\mathcal{R}f$  de  $f$  e a extensão de sua aplicação de primeiro retorno  $R_f$ .

**Afirmações:** Para todo  $i \geq 0$

(a)  $(r_i, l_i)$  são  $f$ -internos

(b)  $\mathcal{R}^i f$  é a extensão (bem definida) de  $x \mapsto \frac{1}{c_i} R_i(c_i x)$  a  $[-1, 1] \setminus \{0\}$

$i = 0$  : (a) se verifica pois  $r_0 = l_0 = 1$  e (b) também pois  $R_0 = f|_{[b-1, b]}$ ,  $c_0 = 1$  e  $\mathcal{R}^0 f = f$

$i = 1$  : (a) se verifica pois  $(r_1, l_1) = (r(f), l(f))$  são  $f$ -internos uma vez que  $f$  é renormalizável; (b) também se verifica pois  $\mathcal{R}f$  é a extensão de  $\frac{1}{c_f}R(c_f x)$  e  $c_f = c_1$  (Lema 2.5.3 e definições)

Indução: Suponhamos que as afirmações (a) e (b) valem para  $i$  e vamos mostrar que valem para  $i + 1$ .

Pela definição da combinatória,  $\mathcal{R}^i f$  é renormalizável, com  $\sigma_i = \sigma(\mathcal{R}^i f)$ ,  $k_i = k(\mathcal{R}^i f)$  e intervalo invariante  $[b_i - 1, b_i]$ . Isto garante que, se  $\sigma_i = -$  (resp. se  $\sigma_i = +$ ) o par  $(r(\mathcal{R}^i f), l(\mathcal{R}^i f)) = (k_i + 1, k_i + 2)$  (resp.  $(r(\mathcal{R}^i f), l(\mathcal{R}^i f)) = (k_i + 2, k_i + 1)$ ) é  $\mathcal{R}^i f$ -interno (Lema 2.5.2). Sem perda de generalidade vamos assumir  $\sigma_i = -$ . Em particular

$$(\mathcal{R}^i f)^{k_i}(b_i - 1) < 0 < (\mathcal{R}^i f)^{k_i+1}(b_i) \quad (2.24)$$

e

$$(\mathcal{R}^i f)^t(b_i) \notin [(\mathcal{R}^i f)^{k_i}(b_i - 1), (\mathcal{R}^i f)^{k_i+1}(b_i)], \quad \forall t = 0, 1, \dots, k_i \quad (2.25)$$

$$(\mathcal{R}^i f)^t(b_i - 1) \notin [(\mathcal{R}^i f)^{k_i}(b_i - 1), (\mathcal{R}^i f)^{k_i+1}(b_i)], \quad \forall t = 0, 1, \dots, k_i - 1 \quad (2.26)$$

As desigualdades (2.24), (2.25) e (2.26) podem ser reformuladas a partir da hipótese indutiva de que  $\mathcal{R}^i f(x) = \frac{1}{c_i}R_i(c_i x)$ . Em primeiro lugar, temos

$$(\mathcal{R}^i f)^{k_i+1}(b_i) = \frac{1}{c_i}R_i^{k_i+1}(c_i b_i) = \frac{1}{c_i}R_i^{k_i+1}(0_{l_i}^-).$$

Como os  $k_i + 1$  iterados de  $b_i$  sob  $\mathcal{R}^i f$  são feitos um à direita e os outros  $k_i$  à esquerda (ainda na hipótese  $\sigma_i = -$ ), então

$$R_i^{k_i+1}(0_{l_i}^-) = f^{k_i l_i}(f^{r_i}(0_{l_i}^-)) = 0_{r_i+(k_i+1)l_i}^- = 0_{l_{i+1}}^-.$$

Analogamente,

$$(\mathcal{R}^i f)^{k_i}(b_i - 1) = \frac{1}{c_i}R_i^{k_i}(c_i(b_i - 1)) = \frac{1}{c_i}R_i^{k_i}(0_{r_i}^+) = \frac{1}{c_i}f^{k_i l_i}(0_{r_i}^+) = \frac{1}{c_i}0_{r_{i+1}}^+.$$

Logo (2.24) implica

$$0_{r_{i+1}}^+ < 0 < 0_{l_{i+1}}^-.$$

Esse é o primeiro passo para mostrar que  $(r_{i+1}, l_{i+1})$  é  $f$ -interno. Falta mostrar que

$$\begin{aligned} \{0_1^+, 0_2^+, \dots, 0_{r_{i+1}-1}^+\} \cap [0_{r_{i+1}}^+, 0_{l_{i+1}}^-] &= \emptyset \\ \{0_1^-, 0_2^-, \dots, 0_{l_{i+1}-1}^-\} \cap [0_{r_{i+1}}^+, 0_{l_{i+1}}^-] &= \emptyset \end{aligned}$$

Mas só precisam ser considerados os iterados  $0_{l_i}^-, 0_{r_i+l_i}^- = R_i(0_{l_i}^-)$ ,  $0_{r_i+2l_i}^- = R_i^2(0_{l_i}^-), \dots, 0_{r_i+k_i l_i}^- = R_i^{k_i}(0_{l_i}^-)$  e  $0_{r_i}^+, 0_{r_i+l_i}^+ = R_i(0_{r_i}^+), \dots, 0_{r_i+(k_i-1)l_i}^+ = R_i^{k_i-1}(0_{r_i}^+)$ , pois os restantes estão fora do domínio  $[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]$  de  $R_i$ . Esses, por sua vez, estão fora de  $[0_{r_{i+1}}^+, 0_{l_{i+1}}^-]$  por causa de (2.25) e (2.26) e da conjugação de  $\mathcal{R}^i f$  com a extensão de  $R_i$ , suposta indutivamente.

A função  $\mathcal{R}^{i+1} f$  é definida pelo reescalonamento da função de retorno a  $[0_{r(\mathcal{R}^i f)}^+, 0_{l(\mathcal{R}^i f)}^-]$  sob iterados de  $\mathcal{R}^i f$ , lembrando que  $r(\mathcal{R}^i f) = k_i + 1$ ,  $l(\mathcal{R}^i f) = k_i + 2$ , e que  $0_{r(\mathcal{R}^i f)}^+ = (\mathcal{R}^i f)^{k_i}(b_i - 1)$  e  $0_{l(\mathcal{R}^i f)}^- = (\mathcal{R}^i f)^{k_i+1}(b_i)$ . Além disso, pelo que foi visto acima,  $c_i 0_{r(\mathcal{R}^i f)}^+ = 0_{r_{i+1}}^+$  e  $c_i 0_{l(\mathcal{R}^i f)}^- = 0_{l_{i+1}}^-$ . Somando as duas equações (em módulo) tiramos

$$c_i(|0_{r(\mathcal{R}^i f)}^+| + |0_{l(\mathcal{R}^i f)}^-|) = |0_{r_{i+1}}^+| + |0_{l_{i+1}}^-|,$$

isto é

$$c_i c_{\mathcal{R}^i f} = c_{i+1}.$$

Só resta mostrar que  $\mathcal{R}^{i+1} f|_{[b_i-1, b_i]}$  é conjugada a  $R_{i+1}$  e que a conjugação se estende a  $[-1, 1]$  (sempre subtraindo  $\{0\}$ , bem entendido). Temos pela definição de  $\mathcal{R}^{i+1} f$ ,

$$\mathcal{R}^{i+1} f(x) = \frac{1}{c_{\mathcal{R}^i f}} R_{\mathcal{R}^i f}(c_{\mathcal{R}^i f} x)$$

para todo  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Pela definição em (2.22),

$$R_{\mathcal{R}^i f}(y) = \begin{cases} (\mathcal{R}^i f)^{k_i+2}(y) & \text{se } y \in [0_{r(\mathcal{R}^i f)}^+, 0) \\ (\mathcal{R}^i f)^{k_i+1}(y) & \text{se } y \in (0, 0_{l(\mathcal{R}^i f)}^-] \end{cases}$$

De fato, o ramo esquerdo se estende até  $-c_{\mathcal{R}^i f}$  e o direito até  $c_{\mathcal{R}^i f}$ . Logo, pela conjugação de  $\mathcal{R}^i f$  com a extensão de  $R_i$ ,

$$R_{\mathcal{R}^i f}(y) = \begin{cases} \frac{1}{c_i} R_i^{k_i+2}(c_i y) & \text{se } y \in [0_{r(\mathcal{R}^i f)}^+, 0) \\ \frac{1}{c_i} R_i^{k_i+1}(c_i y) & \text{se } y \in (0, 0_{l(\mathcal{R}^i f)}^-] \end{cases}$$

Também pela conjugação de  $\mathcal{R}^i f$  com a extensão de  $R_i$ , os  $k_i + 2$  iterados de  $R_i$  para  $y < 0$  são um à direita e  $k_i + 1$  à esquerda; e os  $k_i + 1$  iterados de  $R_i$  para  $y > 0$  são um à direita e  $k_i$  à esquerda. Então

$$R_{\mathcal{R}^i f}(y) = \begin{cases} \frac{1}{c_i} f^{r_i+(k_i+1)l_i}(c_i y) & \text{se } y \in [0_{r(\mathcal{R}^i f)}^+, 0) \\ \frac{1}{c_i} f^{r_i+k_i l_i}(c_i y) & \text{se } y \in (0, 0_{l(\mathcal{R}^i f)}^-] \end{cases}$$

isto é,

$$R_{\mathcal{R}^i f}(y) = \frac{1}{c_i} R_{i+1}(c_i y),$$

e a fórmula se estende para  $(-c_{\mathcal{R}^i f}, c_{\mathcal{R}^i f}) \setminus \{0\}$ . Então

$$\mathcal{R}^{i+1} f(x) = \frac{1}{c_{\mathcal{R}^i f}} \frac{1}{c_i} R_{i+1}(c_{\mathcal{R}^i f} c_i x) = \frac{1}{c_{i+1}} R_{i+1}(c_{i+1} x),$$

onde  $x$  pode ser tomado em  $[-1, 1] \setminus \{0\}$ , já que assim  $c_{\mathcal{R}^i f}$  cai em  $[-c_{\mathcal{R}^i f}, c_{\mathcal{R}^i f}]$ , dentro do domínio de  $R_{\mathcal{R}^i f}$ . E fica demonstrada a indução.

Vale ressaltar para uso posterior que no caso de uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$  ser  $N$  vezes renormalizável (com  $0 \leq N \leq \infty$ ) as aplicações de retorno  $R_i$  satisfazem as seguintes relações

$$|(0_{r_{i+1}}^+, 0_{l_{i+1}}^-)| = \begin{cases} |R_i^{k_i+1}((0^+, 0_{l_i}^-))| & \text{se } |(0^+, 0_{l_i}^-)| < |(0_{r_i}^+, 0^-)|, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ \text{ou} \\ |R_i^{k_i+1}((0_{r_i}^+, 0^-))| & \text{se } |(0_{r_i}^+, 0^-)| < |(0^+, 0_{l_i}^-)|, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Essas relações seguem do Lema 2.5.2 aplicado a cada  $R_i$ . Veja Figura 2.12 como ilustração dos iterados da aplicação  $R_i$ .

Um outro fato importante de se observar e que decorre diretamente da definição da aplicação de retorno é que no caso de uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$  ser  $N$  vezes renormalizável (com  $0 \leq N \leq \infty$ ) suas seqüências correspondentes  $(r_i)_{0 \leq i \leq N}$  e  $(l_i)_{0 \leq i \leq N}$  satisfazem as relações

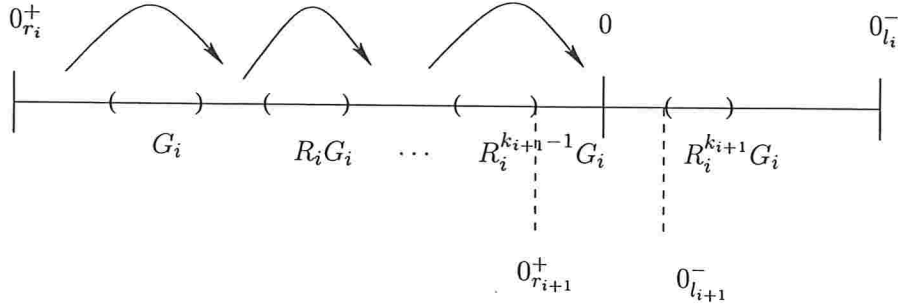


Figura 2.12: Iterados do gap  $G_i$  por  $R_i$ .

$$r_{i+1}, l_{i+1} \geq r_i + l_i \tag{2.28}$$

para todo  $0 \leq i \leq N - 1$ , pelas fórmulas (2.16) e (2.17). E como consequência imediata desse fato temos também o seguinte

**Lema 2.5.5** *Se  $f \in \mathcal{D}$  é  $N$  vezes renormalizável (com  $0 \leq N \leq \infty$ ) então suas seqüências correspondentes satisfazem as seguintes relações*

$$r_i, l_i \geq 2^i$$

para todo  $0 \leq i \leq N$ .

No caso de uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$  ser  $N$  vezes renormalizável diremos que cada  $0 \leq i \leq N$  é a *ordem* ou o *nível* de renormalização.

Uma outra coisa que também se nota é o fato que, para cada  $0 \leq i \leq N - 1$ , os intervalos  $[0^+_{r_i}, 0^-)$  e  $(0^+, 0^-_{l_i}]$  não têm o mesmo tamanho (se  $b_i = \frac{1}{2}$  não seria mais uma vez renormalizável) e assim o gap  $G_i$  está dentro do maior intervalo dentre esses dois últimos intervalos.

## 2.6 Dicotomia: periódico ou infinitamente renormalizável

Vimos na Seção 2.2 o que seria uma órbita periódica virtual naquele caso específico e agora vamos definir de uma maneira mais geral esse conceito.

**Definição 2.6.1** Dada uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$  definimos órbita periódica virtual do ponto

- (a)  $0_1^+$  como sendo o conjunto  $\text{orb}(0_1^+) = \{0_1^+, 0_2^+, \dots, 0_m^+, 0\}$ , se  $f(0_m^+) = 0$  para algum inteiro positivo  $m$ ;
- (b)  $0_1^-$  como sendo o conjunto  $\text{orb}(0_1^-) = \{0_1^-, 0_2^-, \dots, 0_n^-, 0\}$ , se  $f(0_n^-) = 0$  para algum inteiro positivo  $n$ .

E além disso se

- (c) a órbita de todo ponto à direita e numa vizinhança de 0 é atraída pela órbita  $\text{orb}(0_1^+)$  definimos  $\text{orb}(0_1^+)$  como sendo uma órbita periódica atratora virtual;
- (d) a órbita de todo ponto à esquerda e numa vizinhança de 0 é atraída pela órbita  $\text{orb}(0_1^-)$  definimos  $\text{orb}(0_1^-)$  como sendo uma órbita periódica atratora virtual.

Estabelecidos esses conceitos o restante deste Capítulo se resume no seguinte resultado

**Teorema 2.6.1** Se  $f \in \mathcal{D}$  então ou  $f$  possui órbita periódica ou  $f$  é infinitamente renormalizável.

A demonstração desse Teorema encontra-se nas proposições que seguem.

**Proposição 2.6.2** Seja  $f \in \mathcal{D}$ . Então  $f$  é finitamente renormalizável (isto é,  $f$  é  $N$  vezes mas não  $N+1$  vezes renormalizável, para algum  $0 \leq N < \infty$ ) se, e somente se, existe  $n \geq 0$  tal que  $0 \in \overline{f^n(G)}$ .

*Prova.*

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos por absurdo que  $0 \notin \overline{f^n(G)}$  para todo  $n \geq 0$ . Em particular temos que  $0 \notin \overline{R_N^m(G_N)}$  para todo  $m \geq 0$ . Conseqüentemente temos

$$0 \notin \overline{(\mathcal{R}^N f)^m(G)}, \quad \forall m \geq 0 \quad (2.29)$$

Sendo  $(b_{\mathcal{R}^N f} - 1, 0)$  ou  $(0, b_{\mathcal{R}^N f})$  um domínio fundamental para  $\mathcal{R}^N f$  segue de (2.29) que existe um inteiro  $m_0 \geq 0$  tal que  $\overline{(\mathcal{R}^N f)^{m_0-1}(G)}$  e  $\overline{(\mathcal{R}^N f)^{m_0}(G)}$  estão em lados opostos de 0. Daí obtemos que o par  $(m_0 + 1, m_0 + 2)$  (ou  $(m_0 + 2, m_0 + 1)$ ) é  $\mathcal{R}^N f$ -interno garantindo que  $\mathcal{R}^N f$  é renormalizável

o que é uma contradição com a hipótese. Isso conclui a primeira parte do resultado. Vejamos agora a volta.

( $\Leftarrow$ ) Para mostrarmos essa implicação vamos mostrar sua contrapositiva que é equivalente. Sendo assim suponhamos que  $f$  seja infinitamente renormalizável e seja  $(r_i, l_i)_{i \geq 0}$  sua seqüência de pares  $f$ -internos correspondente. Para cada  $i \geq 0$ ,  $G_i = (0_{r_i+l_i}^-, 0_{r_i+l_i}^+)$  não intersecta o intervalo  $[0_{r_{i+1}}^+, 0_{l_{i+1}}^-]$  e é o primeiro iterado de  $G = (0_2^-, 0_2^+)$  a entrar em  $[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]$ . Logo  $(0_t^-, 0_t^+) \cap [0_{r_{i+1}}^+, 0_{l_{i+1}}^-] = \emptyset$ ,  $\forall 2 \leq t \leq r_i + l_i$ . Como isso vale para qualquer  $i$ , e  $r_i + l_i \rightarrow \infty$  quando  $i \rightarrow \infty$ , segue que  $0 \notin \overline{f^n(G)}$ ,  $\forall n \geq 0$ . Portanto, se existe  $n \geq 0$  tal que  $0 \in \overline{f^n(G)}$  então  $f$  é finitamente renormalizável. ■

Dessa proposição obtemos

**Corolário 2.6.3** *Se  $f \in \mathcal{D}$  é infinitamente renormalizável então a pré-órbita do 0 é infinita.*

Assim, no caso em que uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$  é infinitamente renormalizável existe uma seqüência infinita de pares de inteiros  $f$ -internos,  $(r_i, l_i)_{i \geq 0}$ , que nos permite definir o seguinte conjunto singular minimal

$$K_\infty(f) = K_\infty^f := \left[ \bigcup_{i \geq 0} f^i(G) \right]^c = [-1, 1] \setminus \left[ \bigcup_{i \geq 0} f^i(G) \right] \quad (2.30)$$

ou

$$K_\infty(f) = K_\infty^f := \left[ \bigcup_{i \geq 0} (0_{2+i}^-, 0_{2+i}^+) \right]^c = [-1, 1] \setminus \left[ \bigcup_{i \geq 0} (0_{2+i}^-, 0_{2+i}^+) \right] \quad (2.31)$$

o qual também pode ser visto como a seguinte intersecção

$$K_\infty^f = \bigcap_{i \geq 0} K_{r_i, l_i}. \quad (2.32)$$

Veja (2.6). Pode ser provado que esse conjunto singular minimal  $K_\infty(f)$  é um atrator.

**Proposição 2.6.4** *Se  $f \in \mathcal{D}$  é  $N$  vezes mas não  $N + 1$  vezes renormalizável ( $0 \leq N < \infty$ ) então  $f$  possui uma (única) órbita periódica atratora.*

*Prova.*

Como  $\mathcal{R}^N f$  não é renormalizável ela possui uma potência que é uma contração no menor dos intervalos  $(b_{\mathcal{R}^N f} - 1, 0)$ ,  $(0, b_{\mathcal{R}^N f})$ , e que se estende ao intervalo fechado (veja Seção 2.3 e Lema 2.3.1). Isso assegura a existência de uma única órbita periódica atratora (verdadeira ou virtual) para  $\mathcal{R}^N f$ . Mas como  $\mathcal{R}^N f$  é conjugada à aplicação de retorno  $R_N$  ao intervalo  $[0_{r_N}^+, 0_{l_N}^-]$  temos que  $R_N$  possui uma única órbita periódica atratora, digamos  $\mathcal{O}(x_0)$ , para algum  $x_0 \in [0_{r_N}^+, 0_{l_N}^-] \setminus \{0\}$ . E uma vez que os ramos de  $R_N$  são potências de  $f$  concluímos que  $f$  possui órbita periódica atratora.

Para garantirmos a unicidade dessa órbita periódica atratora (para  $f$ ) recorreremos ao Corolário 2.4.7 que garante o seguinte: para todo  $x \in [b - 1, b] \setminus \{0\}$  existe inteiro  $i = i(x) \geq 0$  tal que  $f^i(x) \in [0_{r_N}^+, 0_{l_N}^-]$ . Assim a órbita de todo ponto  $x \in [b - 1, b] \setminus \{0\}$  entra em  $[0_{r_N}^+, 0_{l_N}^-]$  e logo é atraída por  $\mathcal{O}(x_0)$ . Isso conclui o resultado.

Temos também

**Proposição 2.6.5** *Se  $f \in \mathcal{D}$  tem uma órbita periódica atratora então  $f$  não é infinitamente renormalizável.*

*Prova.*

Para a demonstração dessa Proposição faremos uso do Lema 3.1.2 que está demonstrado no próximo Capítulo e, em suma, assegura que

$$|[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]| \rightarrow 0$$

no caso de uma aplicação  $f$  ser infinitamente renormalizável.

Suponha que  $f$  tenha uma órbita atratora verdadeira e seja  $\mathcal{O}(x)$  essa órbita. Se  $f$  é infinitamente renormalizável temos, para todo  $i \geq 0$ , via Corolário 2.4.7, que

$$\mathcal{O}(x) \cap (0_{r_i}^+, 0^-) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \mathcal{O}(x) \cap (0^+, 0_{l_i}^-) \neq \emptyset. \quad (2.33)$$

Assim, se  $f$  fosse infinitamente renormalizável teríamos  $|[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]| \rightarrow 0$ , quando  $i \rightarrow \infty$ , (ver Lema 3.1.2) e como consequência disso a órbita  $\mathcal{O}(x)$  se acumularia no 0. Mas a órbita  $\mathcal{O}(x)$  só se



acumula no 0 de duas maneiras: ou

(1)  $0 \in \mathcal{O}(x)$ , o que não ocorre pois a órbita periódica não é virtual;

ou

(2)  $0 \notin \mathcal{O}(x)$ , o que não ocorre, pois de (2.33) teríamos uma infinidade de pontos pertencendo a  $\mathcal{O}(x)$ .

Assim, no caso de  $f$  possuir uma órbita periódica atratora verdadeira temos que  $f$  não é infinitamente renormalizável.

Se existe uma órbita periódica virtual então sua ciclicidade é interrompida no 0, o único ponto onde  $f$  não é bem definida, e o ponto seguinte deve ser  $0_1^+ = b - 1$  ou  $0_1^- = b$  que são os limites laterais de  $f(x)$  em  $x = 0$ . Mas isto também implica que a pré-órbita de 0 deve ser finita. E uma vez que para aplicações infinitamente renormalizáveis a pré-órbita de 0 é infinita, a Proposição segue. ■

Esta última Proposição mostra que se  $f$  é infinitamente renormalizável então  $G = G_0$  é um *intervalo errante*, pois sua órbita futura é disjunta aos pares e não é atraída por nenhuma órbita periódica.

**Observação:** Com exceção da Proposição 2.6.4 e da Proposição 2.6.5 todos os resultados anteriores continuam sendo válidos se os ramos da função  $f$  forem apenas contínuos e crescentes e satisfizerem a condição

$$f(b) < f(b - 1).$$



## Capítulo 3

### Estimativas métricas e conseqüências

#### 3.1 Tamanho dos intervalos de retorno e o conjunto minimal

**Lema 3.1.1** *Se  $f \in \mathcal{D}$  é  $N$  vezes renormalizável (com  $0 \leq N \leq \infty$ ) então para cada  $0 \leq i \leq N$  temos que*

$$DR_i(x) \leq \nu^{p_i}$$

para todo  $x \in [0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-] \setminus \{0\}$ , onde  $p_i$  é a potência exata de  $f$  que determina  $R_i(x)$ , isto é,  $p_i = r_i$  ou  $p_i = l_i$ . Além disso, se existir  $\rho \in (0, 1)$  tal que  $0 < \rho \leq \inf\{f'(x)\} \leq f'(x) < 1$  também teremos a minoração

$$\rho^{p_i} \leq DR_i(x)$$

onde  $p_i$  e  $x$  são como antes.

*Prova.* Como  $R_i = (f^{l_i}, f^{r_i})$  temos que

$$DR_i(x) = \begin{cases} Df^{l_i}(x) & \text{se } x \in [0_{r_i}^+, 0) \\ Df^{r_i}(x) & \text{se } x \in (0, 0_{l_i}^-] \end{cases} \quad (3.1)$$

Assim concluímos que

$$DR_i(x) \leq \nu^{p_i}$$

onde  $p_i = r_i$  ou  $p_i = l_i$  e se  $0 < \rho \leq \inf\{f'(x)\} \leq f'(x) < 1$  segue claramente que

$$\rho^{p_i} \leq DR_i(x).$$

■

Temos também resultados de caráter métrico como o seguinte.

**Lema 3.1.2** *Se  $f \in \mathcal{D}$  é  $N$  vezes renormalizável ( $0 < N \leq \infty$ ) então as razões dos comprimentos dos intervalos de renormalização diminuem superexponencialmente. Mais precisamente, se  $(r_i)_{0 \leq i \leq N-1}$  e  $(l_i)_{0 \leq i \leq N-1}$  são suas seqüências correspondentes então*

$$\frac{|(0_{r_{i+1}}^+, 0_{l_{i+1}}^-)|}{|(0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-)|} \leq (\nu^{2^i})^{k_{i+1}} \quad (3.2)$$

para todo  $0 < i \leq N - 1$ .

*Prova.*

Para cada  $0 \leq i \leq N - 1$  sabemos que os intervalos  $[0_{r_i}^+, 0^-)$  e  $(0^+, 0_{l_i}^-]$  não têm o mesmo tamanho e que o gap  $G_i$  está dentro do maior intervalo dentre esses dois últimos intervalos. Além disso de (2.27) sabemos que

$$|(0_{r_{i+1}}^+, 0_{l_{i+1}}^-)| = \begin{cases} |R_i^{k_{i+1}}((0, 0_{l_i}^-))| & \text{se } |(0, 0_{l_i}^-)| < |(0_{r_i}^+, 0)| \\ \text{ou} \\ |R_i^{k_{i+1}}((0_{r_i}^+, 0))| & \text{se } |(0_{r_i}^+, 0)| < |(0, 0_{l_i}^-)| \end{cases} \quad (3.3)$$

Como os ramos de cada  $R_i$  são potências de  $f$ , isto é,  $R_i = (f^{l_i}, f^{r_i})$ , e como os inteiros  $r_i$  e  $l_i$  satisfazem a desigualdade

$$r_i, l_i \geq 2^i$$

(Lema 2.5.5) e como  $0 < f' \leq \nu < 1$  obtemos de (3.3)

$$|(0_{r_{i+1}}^+, 0_{l_{i+1}}^-)| \leq (\nu^{2^i})^{k_i+1} |(0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-)|$$

para todo  $0 < i \leq N - 1$ . ■

Esse Lema implica que os intervalos  $[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]$  decrescem a zero superexponencialmente no caso de uma aplicação infinitamente renormalizável.

Vejamos agora a seguinte consequência do Lema 3.1.2 que, de algum modo, diz que o conjunto  $K_\infty$  é minimal, embora a definição clássica de minimalidade não possa ser aplicada para ele, uma vez que  $0 \in K_\infty$ . Por esse motivo o chamamos de singular minimal.

**Corolário 3.1.3** *Seja  $f \in \mathcal{D}$  uma aplicação infinitamente renormalizável e  $\mathcal{O}_-(0)$  a pré-órbita do 0 (que é um conjunto infinito pelo Corolário 2.6.3). Então o conjunto  $K_\infty^f \setminus \mathcal{O}_-(0)$  é invariante, não tem órbita periódica e todo  $x$  a ele pertencente tem órbita densa em  $K_\infty^f$ . Além disso,  $K_\infty^f \setminus \mathcal{O}_-(0) = K_\infty^f$ , e para qualquer conjunto  $K_0 \neq \emptyset$  tal que  $f(K_0) \subset K_0$  e  $K_0 \subset K_\infty^f \setminus \mathcal{O}_-(0)$ , tem-se  $\overline{K_0} = K_\infty^f$ .*

*Prova.*

Mostremos que o conjunto  $K_\infty^f \setminus \mathcal{O}_-(0)$  é  $f$  invariante. Se  $x \in K_\infty^f \setminus \mathcal{O}_-(0)$  então  $x \in K_{r_i, l_i}$ , para todo  $i \geq 0$ , e  $x \notin \mathcal{O}_-(0)$ . Pelo Corolário 2.4.7 temos que  $f(x) \in K_{r_i, l_i}$ , para todo  $i \geq 0$ . E se  $x \notin \mathcal{O}_-(0)$  então  $f(x) \notin \mathcal{O}_-(0)$ . Isso conclui a invariância do conjunto  $K_\infty^f \setminus \mathcal{O}_-(0)$  por  $f$ .

Agora seja  $x \in K_\infty^f \setminus \mathcal{O}_-(0)$ . Vamos mostrar que a órbita de  $x$  é densa em  $K_\infty^f$ . Para isso tomemos um outro ponto  $y \in K_\infty^f$  e um número real  $\epsilon > 0$ . Sabemos que

$$K_\infty^f = \bigcap_{i \geq 0} K_{r_i, l_i}.$$

Pelo Lema 3.1.2 tomemos  $i \geq 0$  tal que

$$|[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]| < \epsilon.$$

De acordo com o Lema 2.4.6 podemos supor que a componente conexa de  $K_{r_i, l_i}$  a qual  $y$  pertence é  $J = \overline{f^j(0, 0_{l_i}^-)}$ . O Corolário 2.4.7 nos assegura que existe  $m \geq 0$  tal que  $f^m(x) \in [0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]$ . E sendo

$R_i = (f^{l_i}, f^{r_i})$  temos que existe  $n \geq 0$  tal que  $f^n(f^m(x)) \in (0, 0_{l_i}^-]$ . Logo obtemos que

$$f^j(f^n(f^m(x))) \in J$$

garantindo assim que a órbita de  $x$  passa por  $J$ , isto é, que sua órbita é densa em  $K_\infty^f$ , pois  $|J| = |f^j(0, 0_{l_i}^-)| < |(0, 0_{l_i}^-)| < \epsilon$ .

O conjunto  $K_\infty^f$  não possui órbita periódica pelo fato anterior: se  $x \in K_\infty^f \setminus \mathcal{O}_-(0)$  então sua órbita densa impede que seja periódica. Se  $x \in \mathcal{O}_-(0)$  só poderíamos ter uma órbita periódica se fosse virtual e  $0_n^+ = 0$  ou  $0_n^- = 0$  para algum  $n$ . Mas isto não ocorre.

Falta mostrar que  $x \in \mathcal{O}_-(0)$  é aproximado por pontos que estão em  $K_\infty^f \setminus \mathcal{O}_-(0)$ . Observe que  $\mathcal{O}_-(0) \subset K_\infty^f$ , pois senão teríamos  $x \in \mathcal{O}_-(0)$  com  $x \in (0_t^-, 0_t^+)$ , para  $t \geq 2$ , logo  $0 = f^n(x) \in (0_{t+n}^-, 0_{t+n}^+)$ , para algum  $n$ , contradizendo a hipótese de ser infinitamente renormalizável. Então, para todo  $i \geq 0$ , ou  $x \in \overline{f^j(0, 0_{l_i}^-)}$  ou  $x \in \overline{f^j(0_{r_i}^+, 0)}$ , isto é,  $x \in [0_j^+, 0_{l_i+j}^-]$  ou  $x \in [0_{r_i+j}^+, 0_j^-]$ , para algum  $j$ . Daí segue que  $x$  é aproximado por pontos das órbitas laterais de 0, e esses pontos não estão em  $\mathcal{O}_-(0)$ . ■

### 3.2 Dimensão de Hausdorff Zero

Nesta seção vamos ver que o conjunto  $K_\infty^f$  tem dimensão de Hausdorff zero. A dimensão de Hausdorff de um conjunto  $K$  é definida da seguinte maneira. Primeiro define-se, para alguma cobertura aberta enumerável  $\mathcal{U}$  de  $K$ , o número

$$H_\rho(\mathcal{U}) = \sum_{U \in \mathcal{U}} |U|^\rho,$$

com  $\rho > 0$ . Em seguida olhamos para a *medida  $\rho$  de Hausdorff* de  $K$  que é dada por

$$m_\rho(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \inf_{\text{diam}(\mathcal{U}) < \epsilon} H_\rho(\mathcal{U}) \right).$$

Pode ser mostrado que existe um número  $HD(K)$ , chamado *dimensão de Hausdorff* de  $K$ , tal que  $\rho < HD(K)$  implica  $m_\rho(K) = \infty$  e  $\rho > HD(K)$  implica  $m_\rho(K) = 0$ .

Se quisermos mostrar que  $K_\infty^f$  tem dimensão de Hausdorff zero devemos mostrar que  $m_\rho(K_\infty^f) = 0$  para todo  $\rho > 0$ . Para isso é suficiente que exista uma seqüência  $\mathcal{U}^{(n)}$  de coberturas abertas enumeráveis de  $K_\infty^f$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_\rho(\mathcal{U}^{(n)}) = 0$$

para cada  $\rho > 0$ . Relembrada esta definição vamos mostrar o seguinte

**Lema 3.2.1** *Se  $f$  é infinitamente renormalizável então  $K_\infty^f$  tem dimensão de Hausdorff zero e em particular medida de Lebesgue zero.*

*Prova.*

Para cada  $i \geq 1$  vamos considerar, inicialmente,  $\mathcal{U}^{(i)}$  como sendo a seguinte coleção de conjuntos

$$\mathcal{U}^{(i)} = \left\{ [0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]; \overline{f^n([0_{r_i}^+, 0])}; \overline{f^m((0, 0_{l_i}^-])}; n = 1, 2, \dots, l_i - 1, m = 1, 2, \dots, r_i - 1 \right\}.$$

Embora esta cobertura não seja aberta, para cada  $\delta > 0$ , pode-se encontrar uma cobertura aberta  $\tilde{\mathcal{U}}$  tal que

$$H_\rho(\tilde{\mathcal{U}}) < H_\rho(\mathcal{U}^{(i)}) + \delta. \quad (3.4)$$

Basta indexar as componentes  $F_k$  que formam  $\mathcal{U}^{(i)}$  pelo índice  $k \geq 1$  e para cada componente tomar o intervalo aberto  $U_k$  que contém  $F_k$  e que satisfaça  $|U_k|^\rho < |F_k|^\rho + \frac{\delta}{2^k}$ . Assim temos

$$\begin{aligned} |H_\rho \mathcal{U}^{(i)}| &= |[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]|^\rho + \sum_{n=1}^{l_i-1} |f^n([0_{r_i}^+, 0^-])|^\rho + \sum_{m=1}^{r_i-1} |f^m((0^+, 0_{l_i}^-])|^\rho \\ &\leq |[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]|^\rho + \sum_{n=1}^{l_i-1} (\nu^\rho)^n |[0_{r_i}^+, 0^-]|^\rho + \sum_{m=1}^{r_i-1} (\nu^\rho)^m |[0^+, 0_{l_i}^-]|^\rho \\ &\leq |[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]|^\rho \left( 1 + \sum_{n=1}^{l_i-1} (\nu^\rho)^n + \sum_{m=1}^{r_i-1} (\nu^\rho)^m \right) \\ &\leq |[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]|^\rho \left( 1 + \frac{2\nu^\rho}{1 - \nu^\rho} \right). \end{aligned}$$

Como  $f$  é infinitamente renormalizável sabemos (pelo Lema 3.1.2) que  $||[0_{r_i}^+, 0_{l_i}^-]|| \rightarrow 0$ , quando  $i \rightarrow \infty$ . Assim, concluímos da desigualdade acima que  $\lim_{i \rightarrow \infty} H_\rho(\mathcal{U}^{(i)}) = 0$ , e de (3.4) o resultado segue. ■

### 3.3 Mais estimativas de tamanhos de intervalo

Nesta Seção faremos algumas estimativas que serão utilizadas nas demonstrações de vários resultados que seguem. Consideremos uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$  infinitamente renormalizável e vamos analisar as propriedades que os intervalos de renormalização apresentam. Sendo  $I_t = (0_{r_t}^+, 0_{l_t}^-)$  o intervalo de renormalização de nível  $t$  sabemos que seu gap é o intervalo  $G_t = (0_{r_t+l_t}^-, 0_{r_t+l_t}^+)$  e além disso vamos denotar por  $J_t$  o menor dos intervalos  $(0_{r_t}^+, 0)$  e  $(0, 0_{l_t}^-)$ . Como vimos no Lema 3.1.1 sabemos que a derivada de cada  $R_t$  é majorada por  $\nu^{p_t}$ , para todo  $t \geq 0$ , onde  $p_t$  é a potência exata de  $f$ , pois os ramos de  $R_t$  são potências de  $f$ , isto é,  $R_t = (f^{l_t}, f^{r_t})$  com  $(r_t, l_t) \in \mathcal{I}_f$ . Essa majoração será muito utilizada e por isso vamos definir as seguintes constantes

$$\gamma_t := \nu^{p_t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.5)$$

de maneira que

$$DR_t \leq \gamma_t < 1, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.6)$$

Para um melhor entendimento das estimativas que faremos agora vejam as Figuras 3.1 e 3.2.

Como  $J_t$  é domínio fundamental de  $R_t$  conseguimos cobrir  $I_t$  com pré-imagens de  $J_t$ , a menos de um pequeno pedaço, que pode ser coberto por  $R_t(J_t)$ . (Ver Figuras 3.1 e 3.2). Daí resultam as desigualdades:

- (i)  $|I_t| \geq |J_t| + |R_t^{-1}J_t| + |R_t^{-2}J_t| + \dots + |R_t^{-k_t}J_t|$
- (ii)  $|I_t| \leq |R_t J_t| + |J_t| + |R_t^{-1}J_t| + |R_t^{-2}J_t| + \dots + |R_t^{-k_t}J_t|$

Colocando  $|R_t^{-k_t}J_t|$  em evidência em (ii) temos

$$|I_t| \leq |J_t| \cdot \frac{|R_t^{-k_t}J_t|}{|J_t|} \cdot \left\{ 1 + \frac{|R_t^{-k_t+1}J_t|}{|R_t^{-k_t}J_t|} + \frac{|R_t^{-k_t+2}J_t|}{|R_t^{-k_t}J_t|} + \dots + \frac{|R_t^{-1}J_t|}{|R_t^{-k_t}J_t|} + \frac{|J_t|}{|R_t^{-k_t}J_t|} + \frac{|R_t J_t|}{|R_t^{-k_t}J_t|} \right\}$$



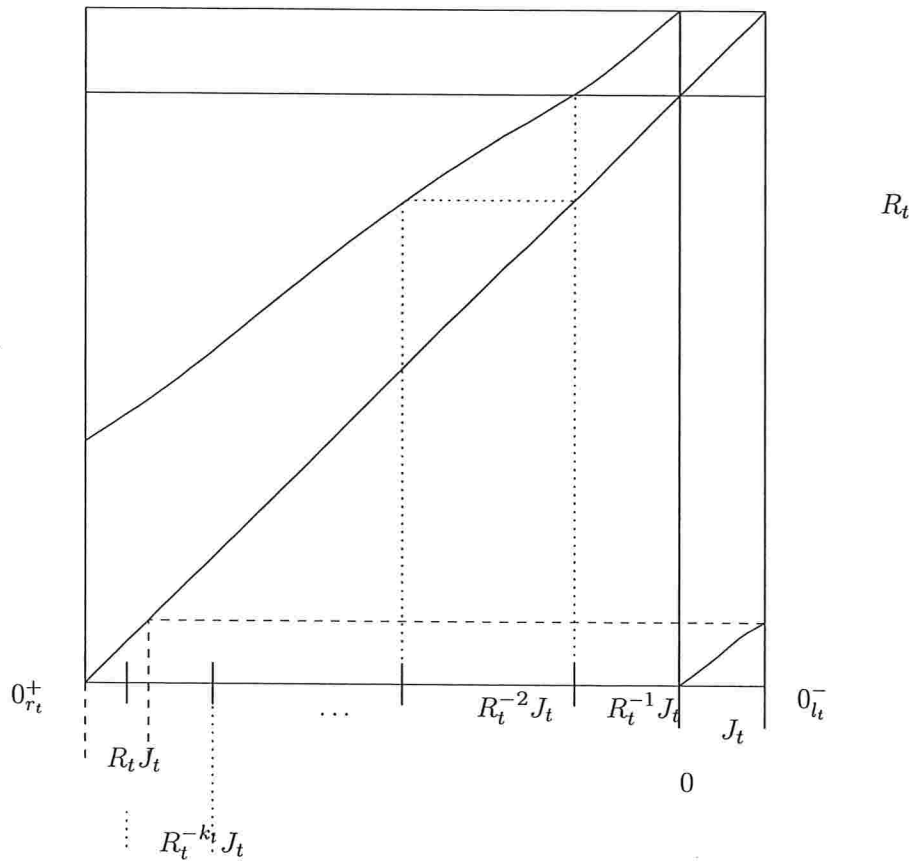


Figura 3.1: Aplicação de retorno  $R_t$ .

Usando o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (3.6) obtemos

$$|J_t| \geq |I_t| \cdot \frac{DR_t^{k_t}(\xi_t)}{\frac{1}{1-\gamma_t}} = |I_t| \cdot DR_t^{k_t}(\xi_t) \cdot (1 - \gamma_t) \quad (3.7)$$

para todo  $t \geq 1$  e para algum  $\xi_t \in R_t^{-k_t}(J_t)$ .

Com raciocínio análogo a partir de (i) obtemos a seguinte majoração para o tamanho do intervalo  $J_t$ :

$$|J_t| \leq |I_t| \cdot DR_t^{k_t}(\xi_t) \quad (3.8)$$

para todo  $t \geq 0$ , e onde  $\xi_t \in R_t^{-k_t}(J_t)$  é o mesmo ponto usado em (3.7).

Juntando as estimativas (3.7) e (3.8) em uma só temos

$$DR_t^{k_t}(\xi_t) \cdot (1 - \gamma_t) \cdot |I_t| \leq |J_t| \leq |I_t| \cdot DR_t^{k_t}(\xi_t), \quad (3.9)$$

para algum  $\xi_t \in R_t^{-k_t}(J_t)$ . Também sabemos que o intervalo de renormalização de nível  $t + 1$  pode ser estimado por

$$|I_{t+1}| = |R_t^{k_t+1}(J_t)| = DR_t^{k_t+1}(\eta_t) \cdot |J_t| \quad (3.10)$$

para algum  $\eta_t \in J_t$ . E junto com a estimativa (3.9) obtemos

$$(1 - \gamma_t) \cdot DR_t^{k_t+1}(\eta_t) \cdot DR_t^{k_t}(\xi_t) \cdot |I_t| \leq |I_{t+1}| \leq DR_t^{k_t+1}(\eta_t) \cdot DR_t^{k_t}(\xi_t) \cdot |I_t| \quad (3.11)$$

Aplicando recursivamente a estimativa (3.9) obtemos

$$\prod_{i=0}^t DR_i^{k_i}(\xi_i) \cdot DR_i^{k_i+1}(\eta_i) \cdot (1 - \gamma_i) \leq |I_{t+1}| \leq \prod_{i=0}^t DR_i^{k_i+1}(\eta_i) \cdot DR_i^{k_i}(\xi_i) \quad (3.12)$$

onde  $\eta_i \in J_i$  e  $\xi_i \in R_i^{-k_i}(J_i)$ , para cada  $0 \leq i \leq t$ . Como  $\gamma_i \in (0, 1)$ , para todo  $i \geq 0$ , e  $\gamma_i \rightarrow 0$  exponencialmente, quando  $i \rightarrow \infty$  temos que existe uma constante positiva  $a$  tal que  $\prod_{i=0}^t (1 - \gamma_i) \geq a$ , e assim podemos escrever a desigualdade (3.12) da seguinte maneira

$$a \cdot \prod_{i=0}^t DR_i^{k_i}(\xi_i) \cdot DR_i^{k_i+1}(\eta_i) \leq |I_{t+1}| \leq \prod_{i=0}^t DR_i^{k_i+1}(\eta_i) \cdot DR_i^{k_i}(\xi_i). \quad (3.13)$$

Por (3.9) obtemos

$$|R_t(J_t)| \leq \gamma_t DR_t^{k_t}(\xi_t) \cdot |I_t|.$$

Além disso, como  $I_t = [0_r^+, 0_l^-]$ , também obtemos

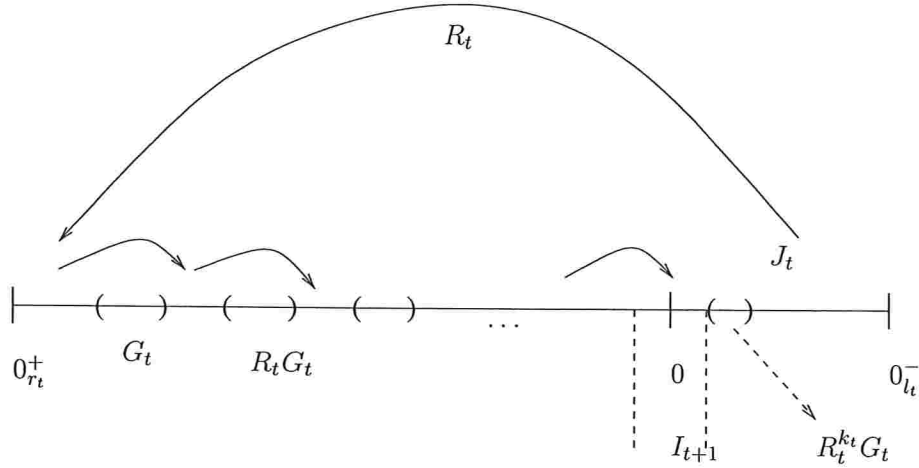


Figura 3.2: Aplicação de retorno  $R_t$ .

$$|I_t| = |G_t| + |R_t([0_{r_t}^+, 0])| + |R_t((0, 0_{l_t}^-])| \leq |G_t| + \gamma_t |0_{r_t}^+| + \gamma_t |0_{l_t}^-| = |G_t| + \gamma_t |I_t|$$

e assim

$$|I_t| \geq |G_t| \geq (1 - \gamma_t) \cdot |I_t|.$$

(Veja Figura 3.2). Mas como  $0 < DR_t \leq \gamma_t \leq \nu < 1$ , para todo  $t \geq 0$ , seguem as estimativas

$$|I_t| \cdot (1 - \nu) \leq |I_t| \cdot (1 - \gamma_t) \leq |G_t| \leq |I_t| \tag{3.14}$$

para todo  $t \geq 1$ , e

$$|R_t(J_t)| \leq \max\left\{\frac{1}{|G_0|}; \frac{\gamma_t}{1 - \gamma_t}\right\} \cdot |G_t| \leq \max\left\{\frac{1}{|G_0|}; \frac{\nu}{1 - \nu}\right\} \cdot |G_t| \tag{3.15}$$

para todo  $t \geq 0$ .

### 3.4 Distorção Limitada

**Definição 3.4.1** Dizemos que uma função  $f : J \rightarrow J$  é de classe  $C^{1+\epsilon}$  se ela é de classe  $C^1$  e sua derivada  $Df$  satisfaz à condição

$$|Df(x) - Df(y)| \leq M|x - y|^\epsilon$$

para alguma constante positiva  $M$  e para quaisquer  $x, y \in J$ .

Para alguns resultados, precisaremos supor duas hipóteses adicionais nas funções  $f \in \mathcal{D}$ : que sejam  $C^{1+\epsilon}$  e que suas derivadas sejam limitadas inferiormente por uma constante.

**Lema 3.4.1** Se  $f \in \mathcal{D}$  é de classe  $C^{1+\epsilon}$  (isto é,  $Df$  é  $\epsilon$ -Hölder com constante  $M$ ) e  $\inf Df = \rho > 0$  então  $f$  tem distorção limitada, ou seja, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\left| \log \frac{Df^m(x)}{Df^m(y)} \right| \leq C,$$

onde  $m \geq 1$  e  $x, y \in [b-1, b] \setminus \{0\}$  são tais que  $0 \notin [f^i(x), f^i(y)]$ , para todo  $0 \leq i \leq m-1$ .

*Prova.*

Como  $Df \geq \rho$  temos  $|\log Df(f^i(x)) - \log Df(f^i(y))| \leq \frac{1}{\rho} |Df(f^i(x)) - Df(f^i(y))|$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, m-1$ . Então, de  $Df$  ser  $C^\epsilon$  com constante  $M$ , segue

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{Df^m(x)}{Df^m(y)} \right| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |\log Df(f^i(x)) - \log Df(f^i(y))| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{M}{\rho} \cdot |f^i(x) - f^i(y)|^\epsilon. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\eta \in (x, y)$  tal que

$$\left| \log \frac{Df^m(x)}{Df^m(y)} \right| \leq \frac{M}{\rho} \sum_{i=0}^{m-1} |Df^i(\eta)|^\epsilon |x - y|^\epsilon.$$

Como  $0 < f' \leq \nu < 1$  obtemos

$$\left| \log \frac{Df^m(x)}{Df^m(y)} \right| \leq \frac{M}{\rho} \cdot |x - y|^\epsilon \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\nu^\epsilon)^i = \frac{M}{\rho} \cdot |x - y|^\epsilon \cdot \frac{1}{1 - \nu^\epsilon} < \infty.$$

Tomando  $C = \frac{M}{\rho(1-\nu^\epsilon)}$  concluimos o resultado. ■

**Observação:** Vale ressaltar aqui que a distorção é tão menor quanto for a distância entre os pontos  $x, y$  onde estamos aplicando  $f^m$ , uma vez que na última desigualdade acima temos o termo  $|x - y|^\epsilon$ .

**Corolário 3.4.2** *Se  $f \in \mathcal{D}$  é  $C^{1+\epsilon}$ ,  $\inf Df > 0$  e é  $N$  vezes renroamlizável então existe uma constante  $L > 0$  tal que*

$$\frac{|R_t^{m+1}(J_t)|}{|R_t^m(G_t)|} \leq L,$$

para todo  $0 \leq m \leq k_t$  e para todo  $t = 0, 1, \dots, N - 1$ .

*Prova.* Usando o Teorema do Valor Médio temos que existem  $z \in R_t(J_t)$  e  $w \in G_t$  tais que

$$\frac{|R_t^{m+1}(J_t)|}{|R_t^m(G_t)|} = \frac{|R_t^m(R_t(J_t))|}{|R_t^m(G_t)|} = \frac{|DR_t^m(z)| \cdot |R_t(J_t)|}{|DR_t^m(w)| \cdot |G_t|}.$$

Como  $R_t = (f^{l_t}, f^{r_t})$  e como  $R_t(J_t)$  e  $G_t$  estão ambos à esquerda ou ambos à direita da origem, pelo Lema 3.4.1, sabemos que o quociente  $\frac{|DR_t^m(z)|}{|DR_t^m(w)|}$  é limitado por uma constante positiva  $C_1$ , para todo

$0 \leq m \leq k_t$ , e pela estimativa (3.15) temos que o quociente  $\frac{|R_t(J_t)|}{|G_t|}$  também é limitado por uma constante positiva  $C_2 = \max\{\frac{1}{|G_0|}; \frac{\nu}{1-\nu}\}$ . Chamando  $L = C_1 \cdot C_2$  o resultado segue. ■

Vale ressaltar que a constante  $L > 0$  do Lema não depende de  $t$ .

## Capítulo 4

# Regularidade de conjugações

### 4.1 Conjugação topológica

A fim de provarmos que duas aplicações são topologicamente conjugadas vamos definir conjugação topológica para as funções de  $\mathcal{D}$ .

**Definição 4.1.1** *Sejam  $f, g \in \mathcal{D}$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo  $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ , tal que  $h(0) = 0$  e  $h \circ f(x) = g \circ h(x)$ , para todo  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Em caso afirmativo a aplicação  $h$  é chamada de conjugação topológica entre  $f$  e  $g$ .*

Após essa definição vamos provar a seguinte propriedade entre aplicações infinitamente renormalizáveis.

**Proposição 4.1.1** *Se  $f, g \in \mathcal{D}$  são infinitamente renormalizáveis e possuem a mesma combinatória, então elas são topologicamente conjugadas.*

*Prova.*

Sejam  $f : [b_f - 1, b_f] \rightarrow [b_f - 1, b_f]$  e  $g : [b_g - 1, b_g] \rightarrow [b_g - 1, b_g]$  duas aplicações infinitamente renormalizáveis pertencentes a  $\mathcal{D}$  possuindo a mesma combinatória, digamos  $\Gamma = \{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), (\sigma_2, k_2), \dots, (\sigma_i, k_i), \dots\}$ . Denote por  $G_f$  o gap de  $f$  e por  $G_g$  o gap de  $g$ . Primeiramente vamos construir uma aplicação  $u$  de  $[b_f - 1, b_f]$  em  $[b_g - 1, b_g]$  que conjugue  $f$  e  $g$ . Para fazermos isso vamos definir inicialmente a aplicação  $u$  de  $G_f$  em  $G_g$

$$\begin{aligned} u : G_f &\rightarrow G_g \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

como sendo uma aplicação afim e em seguida a “espalhamos” pelas órbitas dos gaps  $G_f$  e  $G_g$ , isto é, como  $f$  e  $g$  possuem a mesma combinatória podemos definir  $u$  entre os respectivos iterados dos gaps de  $f$  e  $g$  da seguinte maneira: para cada número natural  $n \geq 1$  defina

$$\begin{aligned} u : f^n(G_f) &\rightarrow g^n(G_g) \\ x &\mapsto u(x) = g^n \circ u \circ f^{-n}(x) \end{aligned}$$

onde  $f^{-n}$  representa a composição de  $n$  vezes a inversa de  $f$ . Lembrando que como  $f$  possui dois ramos, um ramo definido em  $[-1, 0)$  e um ramo definido em  $(0, 1]$ , sua inversa também possui dois ramos, um definido em  $[-1, 0)$  e outro ramo definido em  $(0, 1]$ .

Como a órbita de  $G_f$  é densa em  $[b_f - 1, b_f]$  e a órbita de  $G_g$  é densa em  $[b_g - 1, b_g]$  podemos concluir que  $u$  se estende continuamente a  $[b_f - 1, b_f]$  de maneira que  $u : [b_f - 1, b_f] \rightarrow [b_g - 1, b_g]$  seja um homeomorfismo, ou seja,  $u$  é uma conjugação topológica entre  $f$  e  $g$ . Para estendermos  $u$  ao intervalo  $[-1, 1]$  basta definirmos

$$\begin{aligned} h : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto h(x) = g^{-1} \circ u \circ f(x) \end{aligned}$$

onde  $g^{-1}$  é a inversa de  $g$  correspondente ao ramo de  $g$  em que  $u \circ f(x)$  pertence. Assim  $h$  é uma conjugação topológica entre  $f$  e  $g$ . ■

Observe que nessa demonstração em nenhum momento precisamos pedir que as aplicações em questão,  $f$  e  $g$ , não possuíssem criticalidade de modo que mesmo que elas possuam criticalidade elas constinuem sendo topologicamente conjugadas. Note também que a conjugação está longe de ser única pois  $u$  é arbitrário, mas  $h|_{K_\infty}$  é única, uma vez que existe uma correspondência injetiva entre os pontos de  $K_\infty$  e o espaço da seqüências infinitas formadas pelos símbolos  $\{0, 1\}$ . Essa injetividade encontra-se na próxima Seção.



## 4.1.1 Conjugação Hölder

Nesta seção vamos verificar que duas aplicações ( $f$  e  $g$ ) infinitamente renormalizáveis, possuindo a mesma combinatória e com as hipóteses adicionais de que elas são de classe  $C^{1+\epsilon}$  e que suas derivadas estejam afastadas do 0 ( $\inf Df > 0$  e  $\inf Dg > 0$ ) podem ser mais que topologicamente conjugadas, isto é, o homeomorfismo  $h$  e sua inversa podem ser  $\mu$ -Hölder para alguma constante  $\mu$ , ou seja, vamos mostrar que existem constantes positivas  $\mu$  e  $C$  tais que

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\mu} \leq C. \quad (4.1)$$

Dizer que elas possuem derivadas afastadas do 0 significa que existem  $\rho_f, \rho_g \in (0, 1)$  tais que

$$0 < \rho_f \leq f'(x) \quad (4.2)$$

e

$$0 < \rho_g \leq g'(x). \quad (4.3)$$

Sendo assim, provaremos o seguinte resultado

**Proposição 4.1.2** *Sejam  $f, g \in \mathcal{D}$  aplicações de classe  $C^{1+\epsilon}$ , infinitamente renormalizáveis e possuindo a mesma combinatória. Se elas possuem derivadas afastadas do 0 então elas podem ser conjugadas por um homeomorfismo  $\mu$ -Hölder, para alguma constante  $\mu$ .*

Sabemos da Seção anterior que com essas hipóteses existe uma conjugação topológica  $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  entre  $f$  e  $g$  (construída de modo que  $h|_{G_f}$  seja função afim). Primeiramente vamos supor que já tenhamos provado que existem constantes  $\mu \in (0, 1)$  e  $C > 0$  tais que o homeomorfismo  $h$  restrito a  $K_\infty^f$ , isto é,  $h|_{K_\infty^f} : K_\infty^f \rightarrow K_\infty^g$ , seja  $\mu$ -Hölder com a constante  $C$ . Veremos agora que se já tivermos isso em mãos conseguimos provar que  $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  é  $\mu$ -Hölder no complementar de  $K_\infty^f$ . Podemos, ainda, reduzir a prova apenas para o intervalo  $[b_f - 1, b_f]$  pois a fórmula  $g^{-1} \circ u \circ f$  garantirá a validade para  $[-1, 1]$ , uma vez que a inversa de uma aplicação  $C^{1+\epsilon}$  com derivada afastada da origem é  $C^{1+\epsilon}$ , como estabelece o Lema abaixo

**Lema 4.1.3** *Seja  $f : I \rightarrow J$  é um homeomorfismo de classe  $C^{1+\epsilon}$  tal que  $0 < \rho \leq Df(x) < 1$ , para alguma constante  $\rho \in (0, 1)$ , então a inversa  $f^{-1}$  também é de classe  $C^{1+\epsilon}$ .*

*Prova.*

Sendo  $f$  de classe  $C^{1+\epsilon}$  temos que existe  $M > 0$  tal que

$$|Df(x) - Df(y)| \leq M|x - y|^\epsilon.$$

Além disso  $f^{-1}$  é de classe  $C^1$ . Assim, pelo Teorema da Função Inversa temos

$$\begin{aligned} |Df^{-1}(w) - Df^{-1}(z)| &= \left| \frac{1}{Df(f^{-1}(w))} - \frac{1}{Df(f^{-1}(z))} \right| \\ &= \left| \frac{Df(f^{-1}(z)) - Df(f^{-1}(w))}{Df(f^{-1}(w))Df(f^{-1}(z))} \right| \\ &\leq \frac{M}{\rho^2} |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)| \end{aligned}$$

Mas  $Df^{-1}$  é limitada por  $\rho^{-1}$ . Logo

$$|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)| \leq \rho^{-1}|z - w|$$

e

$$|Df^{-1}(w) - Df^{-1}(z)| \leq \frac{M}{\rho^{2+\epsilon}} |z - w|^\epsilon.$$

■

Agora sejam  $x, y \in [b_f - 1, b_f]$ . Como existem algumas possibilidades para esses pontos  $x$  e  $y$  vamos provar que  $h$  é  $\mu$ -Hölder em cada uma delas separadamente. Assim temos

**Caso (a)** Se  $x, y \in \overline{f^n(G_f)}$ , para algum  $n \geq 0$ .

Sabemos que  $h|_{G_f} : G_f \rightarrow G_g$  é uma aplicação afim e portanto  $\mu$ -Hölder contínua. Mas o fato de  $h|_{G_f}$  ser afim também implica a seguinte relação

$$\frac{|G_g|}{|[h(f^{-n}(x)), h(f^{-n}(y))]|} = \frac{|G_f|}{|[f^{-n}(x), f^{-n}(y)]|}. \quad (4.4)$$

Como  $f$  e  $g$  possuem distorção limitada existem constantes positivas  $C_f$  e  $C_g$  tais que

$$\frac{Df^m(a)}{Df^m(b)} \leq C_f \quad (4.5)$$

para todos os  $m \geq 1$  e  $a, b \in [b_f - 1, b_f]$  tais que  $0 \notin [f^i(a), f^i(b)]$ , com  $0 \leq i \leq m$ ;

$$\frac{Dg^m(a)}{Dg^m(b)} \leq C_g \quad (4.6)$$

para todos os  $m \geq 1$  e  $a, b \in [b_g - 1, b_g]$  tais que  $0 \notin [g^i(a), g^i(b)]$ , com  $0 \leq i \leq m$ ;

Além disso temos que

$$\frac{|f^n(G_f)|}{|x - y|} = \frac{Df^n(a) \cdot |G_f|}{Df^n(b) \cdot |[f^{-n}(x), f^{-n}(y)]|} \quad (4.7)$$

para algum  $a \in G_f$  e algum  $b \in [f^{-n}(x), f^{-n}(y)]$ ; e

$$\frac{|g^n(G_g)|}{|h(x) - h(y)|} = \frac{Dg^n(a) \cdot |G_g|}{Dg^n(b) \cdot |[g^{-n}(h(x)), g^{-n}(h(y))]|} \quad (4.8)$$

para algum  $a \in G_g$  e algum  $b \in [g^{-n}(h(x)), g^{-n}(h(y))]$  (veja Figura 4.1). De (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) obtemos

$$M^{-1} \cdot \frac{|h(x) - h(y)|}{|g^n(G_g)|} \leq \frac{|x - y|}{|f^n(G_f)|} \leq \frac{|x - y|^\mu}{|f^n(G_f)|^\mu}, \quad (4.9)$$

implicando em

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\mu} \leq M \cdot \frac{|g^n(G_g)|}{|f^n(G_f)|^\mu} \leq M \cdot \left(\frac{\nu_g}{\rho_f^\mu}\right)^n \cdot \frac{|G_g|}{|G_f|^\mu}, \quad (4.10)$$

onde  $M = C_f \cdot C_g$  e  $\nu_g \in (0, 1)$  é tal que  $0 < g'(x) \leq \nu_g$ , para todo  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Assim se escolhermos  $\mu \in (0, 1)$  tal que  $\nu_g \leq \rho_f^\mu$  e se chamarmos  $C_1 = M \cdot \frac{|G_g|}{|G_f|^\mu}$  teremos

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\mu} \leq C_1, \quad (4.11)$$

ou seja, temos  $h$  como sendo  $\mu$ -Hölder contínua dentro dos gaps de  $K_\infty^f$ . Observe que essa última estimativa vale apenas para  $n \geq 1$ , mas quando  $n = 0$  já temos de início que  $h|_{G_f}$  é afim e portanto

$\mu$ -Hölder contínua.

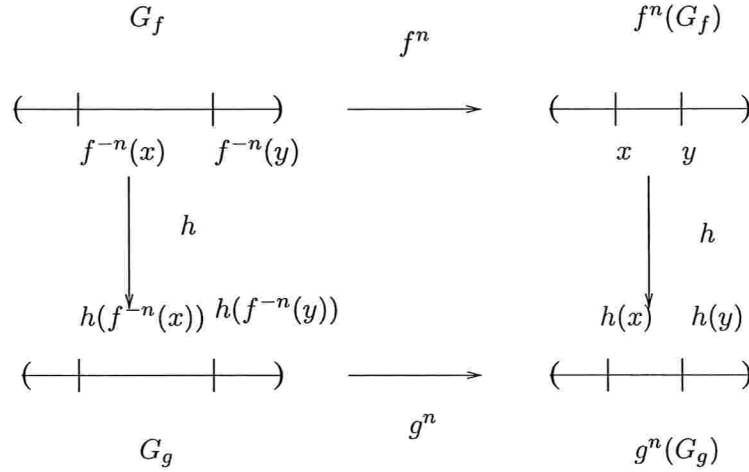


Figura 4.1: Esquema para visualizar as estimativas de distorção.

**Caso (b)** Se  $x \in f^n(G_f)$  e  $y \in f^m(G_f)$ , com  $n \neq m$ .

Seja  $w$  o bordo de  $f^n(G_f)$  mais próximo a  $y$  e seja  $z$  o bordo de  $f^m(G_f)$  mais próximo a  $x$ . Assim  $w$  e  $z$  são pontos pertencentes a  $K_\infty^f$  (veja Figura 4.2). Temos

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\mu} \leq \frac{|h(x) - h(w)|}{|x - w|^\mu} + \frac{|h(w) - h(z)|}{|w - z|^\mu} + \frac{|h(z) - h(y)|}{|z - y|^\mu} \quad (4.12)$$

Para os pares de pontos  $x, w$  e  $z, y$  podemos aplicar o **Caso (a)** e obtermos

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\mu} \leq C_1 + \frac{|h(w) - h(z)|}{|w - z|^\mu} + C_1 \quad (4.13)$$

e como os pontos  $w$  e  $z$  estão em  $K_\infty^f$  também temos, por hipótese, uma limitação para o quociente  $\frac{|h(w) - h(z)|}{|w - z|^\mu}$ , isto é,

$$\frac{|h(w) - h(z)|}{|w - z|^\mu} \leq C,$$

e daí concluímos

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\mu} \leq C_2 = 2C_1 + C.$$

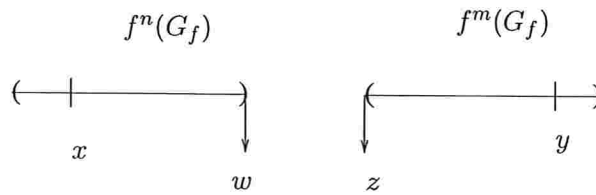


Figura 4.2: Esquema para visualizar as estimativas de distorção.

Existe mais um caso que se reduz a esse, ou seja,

**Caso (b')** Se  $x \in f^n(G_f)$ , para algum  $n \geq 1$ , e  $y \in K_\infty^f$

Nesse caso tomamos  $w$  o bordo de  $f^n(G_f)$  mais próximo a  $y$ , como no **Caso (b)**, e consideramos  $z = y$ . Assim, aplicamos o procedimento do caso anterior que o resultado segue.

Analisados estes casos precisamos mostrar que  $h|_{K_\infty^f}$  é  $\mu$ -Hölder contínua para finalizarmos a demonstração da Proposição 4.1.2.

Com esse objetivo começemos definindo a seguinte função

$$\begin{aligned} t_f : K_\infty^f \times K_\infty^f \setminus \Delta(K_\infty^f \times K_\infty^f) &\rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \\ (x, y) &\mapsto t = t(x, y) \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde  $\Delta(K_\infty^f \times K_\infty^f) = \{(x, y) \in K_\infty^f \times K_\infty^f, x = y\}$  e tal que

- (1) os tempos de primeira entrada em  $I_t$  para todos os pontos do intervalo  $[x, y]$  são iguais a algum  $j \geq 0$  e  $f^j|_{[x, y]}$  é um difeomorfismo;
- (2) existe um iterado  $R_t^m(G_t)$ , com  $m = 0, 1, 2, \dots, k_t$ , tal que  $R_t^m(G_t) \subset (f^j(x), f^j(y))$ .

Vejamos agora que essa função  $t$  se define indutivamente.

**Passo inicial:**  $s = 0$  Temos a seguinte dicotomia:

(i) Existe um iterado  $R_0^m(G_0)$ , com  $0 \leq m \leq k_0$ , tal que  $\overline{R_0^m(G_0)} \subset (x, y)$ ; Nesse caso tomamos  $t = 0$  e  $j = 0$

ou

(ii) Não existe iterado como em (i). Nesse caso existe  $0 \leq n_0 \leq k_0 + 1$  tal que

$$f^{j_0} = R_0^{n_0} : [x, y] \rightarrow I_1$$

é um difeomorfismo sobre a imagem e é a aplicação de primeira entrada de todos os pontos de  $[x, y]$  no intervalo  $I_1$ . De fato: se  $x, y \in I_1$  temos  $n_0 = 0$  e estamos feitos. Mas se  $x, y \notin I_1$  obtemos da negação de (i) e de (2.14) que existe  $0 \leq n_0 \leq k_0 + 1$  tal que  $f^{n_0} : [x, y] \rightarrow I_1$  é um difeo sobre a imagem e assim também é a aplicação de primeira entrada de todos os pontos de  $[x, y]$  em  $I_1$ . Como  $f = R_0$  o resultado segue.

**Hipótese de Indução:**  $s - 1$ , com  $s \geq 1$

Suponhamos que existam inteiros positivos  $n_i$ , com  $0 \leq n_i \leq k_i + 1$ , para todo  $i = 0, 1, \dots, s - 1$ , e tais que

$$f^{j_{s-1}} = R_{t-1}^{n_{s-1}} \circ \dots \circ R_1^{n_1} \circ R_0^{n_0} : [x, y] \rightarrow I_s$$

é um difeo sobre a imagem e é a aplicação de primeira entrada de todos os pontos de  $[x, y]$  no intervalo  $I_s$ .

Então:

(i) Existe um iterado  $R_s^m(G_s)$ , com  $0 \leq m \leq k_s$ , tal que  $R_s^m(G_s) \subset (f^{j_{s-1}}(x), f^{j_{s-1}}(y))$ ; nesse caso tomamos  $t = s$  e  $j = j_{s-1}$

ou

(ii) Não existe iterado como em (i). Nesse caso  $\overline{G_s}$  não está contido em  $(f^{j_{s-1}}(x), f^{j_{s-1}}(y))$ , e pelo Corolário 2.4.4 temos em

$$[x, y] \subset K_{r_s, I_s}. \quad (4.15)$$

Além disso, pelo mesmo argumento utilizado no **Passo inicial** temos que existe inteiro  $0 \leq n_s \leq k_s + 1$  tal que

$$R_s^{n_s} : [f^{j_{s-1}}(x), f^{j_{s-1}}(y)] \rightarrow I_{s+1}$$

é um difeomorfismo sobre a imagem e é a aplicação de primeira entrada de todos os pontos de  $[f^{j_{s-1}}(x), f^{j_{s-1}}(y)]$  no intervalo  $I_{s+1}$ . Como, por hipótese de indução  $f^{j_{s-1}} : [x, y] \rightarrow I_s$  é um difeo sobre a imagem segue que  $f^{j_s} = R_s^{n_s} \circ f^{j_{s-1}} = R_s^{n_s} \circ R_{s-1}^{n_{s-1}} \circ \dots \circ R_1^{n_1} \circ R_0^{n_0} : [x, y] \rightarrow I_{s+1}$  é um difeo sobre a imagem e é a aplicação de primeira entrada de todos os pontos de  $[x, y]$  no intervalo  $I_{s+1}$ .

Esse argumento indutivo garante que a aplicação dada em (4.14) está bem definida e é finita, pois se para todo  $s \geq 0$  não existisse um iterado  $R_s^m(G_s)$ , com  $0 \leq m \leq k_s$ , tal que  $R_s^m(G_s) \subset (f^{j_{s-1}}(x), f^{j_{s-1}}(y))$ , obteríamos de (4.15)

$$[x, y] \subset K_{r_s, l_s}$$

para todo  $s \geq 0$ , acarretando em  $x = y$ , pelo fato de  $|K_\infty^f| = 0$ .

Assim, sejam  $x, y \in K_\infty^f$  com  $x \neq y$ . Pela Definição 4.14 existem  $j \geq 0$  e  $0 \leq m_0 \leq k_t$  tais que  $R_t^{m_0}(G_t) \subset (f^j(x), f^j(y))$  (veja Figura 4.3) e, além disso, sabemos que

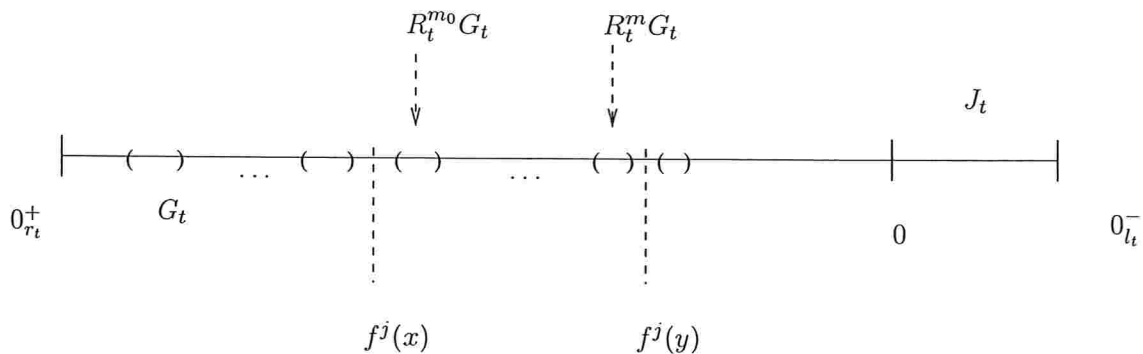


Figura 4.3: Estrutura no intervalo  $I_t$  para a aplicação  $t_f = t$ .

$$f^j = R_{t-1}^{n_{t-1}} \circ \dots \circ R_1^{n_1} \circ R_0^{n_0} : [x, y] \rightarrow I_t \quad (4.16)$$

é um difeomorfismo sobre a imagem e é a aplicação de primeira entrada de todos os pontos de  $[x, y]$  no intervalo  $I_t$ . Iremos usar o fato de que o mesmo ocorre com  $h(x), h(y) \in K_\infty^g$ , com os mesmos  $j, m_0$  e a decomposição análoga de  $g^j$  como (4.16).

A fim de majorarmos o quociente  $\frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|^\mu}$  comecemos aplicando Teorema do Valor Médio juntamente com a definição de  $h$  e a decomposição (4.16) obtendo

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\mu} = \frac{|g^j(h(x)) - g^j(h(y))|}{|Dg^j(\tilde{\theta})|} \cdot \frac{|Df^j(\theta)|^\mu}{|f^j(x) - f^j(y)|^\mu} \quad (4.17)$$

onde  $\theta \in (x, y)$  e  $\tilde{\theta} \in (h(x), h(y))$  são dados pelo Teorema do Valor Médio.

Agora precisamos estimar cada um dos termos que aparecem em (4.17). Aplicando a regra da cadeia na expressão (4.16) temos

$$Df^j(\theta) = \prod_{i=0}^{t-1} DR_i^{n_i}(\theta_i) \quad (4.18)$$

onde  $\theta_i = R_{i-1}^{n_{i-1}}(\theta_{i-1}) \in I_i$ , para cada  $1 \leq i \leq t-1$  e  $\theta_0 = \theta$ . Já a diferença  $|f^j(x) - f^j(y)|$  pode ser estimada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |f^j(x) - f^j(y)| &= |R_t^{-m_0}(f^j(x)) - R_t^{-m_0}(f^j(y))| \cdot |DR_t^{m_0}(a)| \\ &\leq |I_t| \cdot |DR_t^{m_0}(a)|, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde  $a$  é algum ponto entre  $R_t^{-m_0}(f^j(x))$  e  $R_t^{-m_0}(f^j(y))$  dado pelo Teorema do Valor Médio. Por outro lado

$$\begin{aligned} |f^j(x) - f^j(y)| &\geq |R_t^{m_0}(G_t)| = |DR_t^{m_0}(b)| \cdot |G_t| \\ &\geq |I_t| \cdot (1 - \gamma_t) \cdot |DR_t^{m_0}(b)|, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde  $b \in G_t$  é dado pelo Teorema do Valor Médio. Juntando as estimativas (4.19), (4.20) e (3.13) temos



$$\begin{aligned} a \cdot |DR_t^{m_0}(b)| \cdot \prod_{i=0}^{t-1} DR_i^{k_i}(\xi_i) \cdot DR_i^{k_i+1}(\eta_i) &\leq |f^j(x) - f^j(y)| \leq \\ &\leq |DR_t^{m_0}(a)| \cdot \prod_{i=0}^{t-1} DR_i^{k_i}(\xi_i) \cdot DR_i^{k_i+1}(\eta_i), \end{aligned} \quad (4.21)$$

lembrando que  $\xi_i \in R_i^{-k_i}(J_i)$  e  $\eta_i \in J_i$ . Com essas estimativas podemos majorar o quociente  $\frac{|Df^j(\theta)|}{|f^j(x) - f^j(y)|}$ . Mas antes vamos observar o seguinte: para cada  $i \geq 0$  podemos fazer a decomposição

$$DR_i^{k_i+1}(\eta_i) = DR_i^{k_i+i+1-n_i}(\eta_i) \cdot DR_i^{n_i-i}(R_i^{k_i+1-n_i}(\eta_i))$$

de maneira que os pontos  $\theta_i$  (da expressão (4.18)) e  $R_i^{k_i+1-n_i}(\eta_i)$  pertencem à mesma componente conexa de  $I_i \setminus \{G_i \cup R_i(G_i) \cup \dots \cup R_i^{k_i}(G_i)\}$ , exceto possivelmente quando ambos estiverem em  $J_i$  (e isso pode ocorrer quando  $n_i = k_i + 1$ ). Mas em qualquer caso (mesmo quando  $n_i = k_i + 1$ ) os pontos  $\theta_i$  e  $R_i^{k_i+1-n_i}(\eta_i)$  permanecem no mesmo iterado de  $J_i$  por  $R_i$  até entrarem juntos em  $I_{i+1} = R_i^{k_i+1}(J_i)$ . Como  $f$  tem distorção limitada (ver Lema 3.4.1) podemos fazer a seguinte estimativa envolvendo estes pontos:

$$\frac{DR_i^{n_i}(\theta_i)}{DR_i^{n_i}(R_i^{k_i+1-n_i}(\eta_i))} \leq e^{C|J_i|^\epsilon} \quad (4.22)$$

onde  $C = \frac{M}{1-\nu^\epsilon}$ . Assim obtemos a seguinte majoração para o quociente  $\frac{|Df^j(\theta)|}{|f^j(x) - f^j(y)|}$

$$\begin{aligned} \frac{|Df^j(\theta)|}{|f^j(x) - f^j(y)|} &\leq A^{-1} \frac{\prod_{i=0}^{t-1} DR_i^{n_i}(\theta_i)}{DR_t^{m_0}(b) \cdot \prod_{i=0}^{t-1} DR_i^{k_i}(\xi_i) \cdot DR_i^{k_i+1}(\eta_i)} \\ &\leq A^{-1} \frac{\prod_{i=0}^{t-1} e^{C|J_i|^\epsilon}}{DR_t^{m_0}(b) \cdot \prod_{i=0}^{t-1} DR_i^{k_i}(\xi_i) \cdot DR_i^{k_i+1-n_i}(\eta_i)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Observe que temos estimativas semelhantes para  $g$  e como a aplicação  $g$  possui objetos semelhantes aos da  $f$  usaremos as notações dos objetos de  $f$  com um acento “~” para representar os objetos de  $g$ , isto é, denotaremos por  $\tilde{R}_i$  a  $i$ -ésima aplicação de retorno de  $g$ ; por  $\tilde{\gamma}_i$  o majorante de  $D\tilde{R}_i$ ; por  $\tilde{I}_i = (\tilde{0}_{r_i}^+, \tilde{0}_{l_i}^-)$  o  $i$ -ésimo intervalo de retorno de  $g$ , por  $\tilde{G}_i$  seu gap correspondente e por  $\tilde{J}_i$  o menor intervalo entre os intervalos  $(\tilde{0}_{r_i}^+, 0)$  e  $(0, \tilde{0}_{l_i}^-)$ . Assim, substituindo a estimativa (4.23) e a análoga para  $g$  em (4.17) obtemos  $\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\mu}$  menor ou igual a

$$\frac{D\tilde{R}_t^{m_0}(\tilde{a}) \cdot \prod_{i=0}^{t-1} D\tilde{R}_i^{k_i}(\tilde{\xi}_i) \cdot D\tilde{R}_i^{k_i+1-n_i}(\tilde{\eta}_i)}{(DR_t^{m_0}(b) \cdot \prod_{i=0}^{t-1} DR_i^{k_i}(\xi_i) \cdot DR_i^{k_i+1-n_i}(\eta_i))^\mu} \cdot \frac{(A^{-1} \prod_{i=0}^{t-1} e^{C|J_i|^\epsilon})^\mu}{\prod_{i=0}^{t-1} e^{\tilde{C}|\tilde{J}_i|^\epsilon}} \quad (4.24)$$

A fração à direita é limitada por uma constante  $\tilde{C} > 0$  (que não depende de  $x$  e  $y$ ), pois  $|J_i|$  vai a zero exponencialmente com  $i$  (3.8) e Lema 3.1.2). Como as combinatórias são iguais, as potências de  $g$  que correspondem a  $\tilde{R}_i^{m_0}(\tilde{a})$ ,  $\tilde{R}_i^{k_i}(\tilde{\xi}_i)$ ,  $\tilde{R}_i^{k_i+1-n_i}(\tilde{\eta}_i)$  são as mesmas de  $f$  que correspondem a  $R_i^{m_0}(a)$ ,  $R_i^{k_i}(\xi_i)$ ,  $R_i^{k_i+1-n_i}(\eta_i)$ . Note que  $k_i + 1 - n_i \geq 0$ , e então são sempre potências não negativas. Se o total de potências é  $p$  então o denominador da fração à esquerda é minorado por  $(\rho_f)^p$ . Já o numerador é majorado por  $(\nu_g)^p$ . Então temos

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\mu} \leq \tilde{C} \cdot \left( \frac{\nu_g}{\rho_f} \right)^p.$$

Observe que as potências dos ramos de  $R_i$  aumentam exponencialmente com  $i$  (Lema 2.5.5), então  $p$  é exponencial em  $t$ . Portanto, tomando  $\mu$  tal que

$$\nu_g < \rho_f^\mu$$

(e isso é sempre possível), a expressão do lado direito é uniformemente limitada, independentemente de  $p$ , de  $x$  e de  $y$ . Isto garante que  $h|_{K_\infty^f}$  é  $\mu$ -Hölder contínua.

Para garantir que  $h^{-1}|_{K_\infty^g}$  também seja  $\mu$ -Hölder contínua basta escolher  $\mu$  tal que

$$\nu_f < \rho_g^\mu.$$

## 4.2 Conjugação não mais que Hölder

Apesar de termos demonstrado na Seção anterior que duas aplicações de  $\mathcal{D}$  de classe  $C^{1+\epsilon}$ , com mesma combinatória e possuindo as derivadas afastadas do 0 serem  $\mu$ -Hölder conjugadas, para alguma constante  $\mu \in (0, 1)$ , veremos agora que não podemos esperar conseguir muito mais do que isso.

**Lema 4.2.1** *Existem aplicações  $f, g \in \mathcal{D}$  de classe  $C^{1+\epsilon}$ , infinitamente renormalizáveis, com mesma combinatória, com derivadas afastadas do 0, e uma constante  $\mu \in (0, 1)$  tais que a conjugação  $h$  entre  $f$  e  $g$  satisfaz: existe seqüência  $((x_t, y_t))_{t \geq 1}$  tal que*

$$\frac{|h(x_t) - h(y_t)|}{|x_t - y_t|^\mu} \rightarrow \infty$$

quando  $t \rightarrow \infty$ .

*Prova.* Considere as seguintes aplicações infinitamente renormalizáveis

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + b & \text{se } x \in [-1, 0) \\ \alpha x + b - 1 & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases} \quad (4.25)$$

e

$$g(x) = \begin{cases} \tilde{\alpha} x + \tilde{b} & \text{se } x \in [-1, 0) \\ \tilde{\alpha} x + \tilde{b} - 1 & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases} \quad (4.26)$$

onde  $\alpha, \tilde{\alpha}, b, \tilde{b} \in (0, 1)$  e  $\tilde{\alpha} \geq \alpha$ , ambas com a mesma combinatória (no próximo Capítulo veremos que, fixada a combinatória  $\Gamma$ , é possível achar  $b = b(\alpha)$  e  $\tilde{b} = \tilde{b}(\tilde{\alpha})$  que façam  $f$  e  $g$  ter essa combinatória). Além disso considere

$$(x_t, y_t) = G_t$$

para todo  $t \geq 1$ . Assim temos que

$$\frac{|h(x_t) - h(y_t)|}{|x_t - y_t|^\mu} = \frac{|\tilde{G}_t|}{|G_t|^\mu} \geq \frac{|\tilde{I}_t| \cdot (1 - \tilde{\alpha})}{|I_t|^\mu}. \quad (4.27)$$

pela inequações 3.14.

Como os ramos das aplicações  $f$  e  $g$  são funções afins e como os ramos das aplicações de retorno de  $f$  e  $g$  são potências das mesmas, isto é,  $R_i = (f^{l_i}, f^{r_i})$  e  $\tilde{R}_i = (g^{l_i}, g^{r_i})$ , segue que as derivadas das aplicações  $R_i$  e  $\tilde{R}_i$  são potências de  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$ , respectivamente. Logo, utilizando a desigualdade (3.13) obtemos de (4.27)

$$\begin{aligned} \frac{|h(x_t) - h(y_t)|}{|x_t - y_t|^\mu} &\geq \tilde{A} \frac{\prod_{i=0}^{t-1} D\tilde{R}_i^{k_i}(\tilde{\xi}_i) \cdot D\tilde{R}_i^{k_i+1}(\tilde{\eta}_i)}{\left(\prod_{i=0}^{t-1} DR_i^{k_i}(\xi_i) \cdot DR_i^{k_i+1}(\eta_i)\right)^\mu} \\ &= \tilde{A} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha^\mu}\right)^{p_t} \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde  $p_t \geq \sum_{i=0}^{t-1} k_i > 0$  é a soma de todas as potências das derivadas das aplicações  $R_i$  do denominador, que é a mesma que a soma das potências das derivadas das aplicações  $\tilde{R}_i$  do numerador. E além disso  $p_t \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Sendo assim, se escolhermos  $\mu \in (0, 1)$  de maneira que  $\alpha^\mu < \tilde{\alpha}$  teremos

$$\frac{|h(x_t) - h(y_t)|}{|x_t - y_t|^\mu} \rightarrow \infty$$

como queríamos. ■

## Capítulo 5

### Famílias a um parâmetro

#### 5.1 Derivada no parâmetro

Até agora trabalhamos com uma função  $f = (f_L, f_R, b) \in \mathcal{D}$  fixada, ou seja, fixamos seus dois ramos,  $f_L$  e  $f_R$ , e o parâmetro  $b \in (0, 1)$ , que determina os limites laterais do ponto de descontinuidade ( $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \in (0, 1)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b - 1$ ). Mas se deixarmos fixos apenas os ramos  $f_L$  e  $f_R$  da função e variarmos o parâmetro  $b$  em  $(0, 1)$  obteremos uma família de funções

$$f_b(x) = \begin{cases} f_L(x) + b & \text{se } x \in [b - 1, 0) \\ f_R(x) + b - 1 & \text{se } x \in (0, b] \end{cases}$$

onde para cada  $b \in (0, 1)$ , a função  $f_b$  acima pertence a  $\mathcal{D}$ .

Como estamos interessados na dinâmica de funções  $f \in \mathcal{D}$  teremos de lidar com suas composições e para isso definimos

$$F^k(b, x) = f_b^k(x) \tag{5.1}$$

para todo  $k \geq 0$ , onde  $F^0(b, x) = x$ . Assim  $F^k(b, x) = F(b, F^{k-1}(b, x))$  e se derivarmos a expressão (5.1) obtemos, por indução,

$$\frac{\partial F^k}{\partial b}(b, x) = \frac{\partial F}{\partial b}(b, F^{k-1}(b, x)) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial F^i}{\partial x}(b, F^{k-i}(b, x)) \cdot \frac{\partial F}{\partial b}(b, F^{k-i-1}(b, x)).$$

Como  $\frac{\partial F}{\partial b}(b, x) = 1$  para todo  $(b, x) \in (0, 1) \times \{(-1, 1) \setminus \{0\}\}$ , uma vez que a variação de  $F$  em  $b$  é nada mais nada menos do que uma translação nessa variável, segue que

$$\frac{\partial F^k}{\partial b}(b, x) = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial F^i}{\partial x}(b, F^{k-i}(b, x)),$$

e como  $\frac{\partial F}{\partial x}(b, x) = f'_b(x)$  para todo  $(b, x) \in (0, 1) \times \{(-1, 1) \setminus \{0\}\}$ , vemos claramente que  $\frac{\partial F^k}{\partial b}(b, x) \geq 1$ , para todo  $k \geq 1$ , garantindo assim em particular que  $0_r^+ = 0_r^+(b) = F^{r-1}(b, b-1)$  e  $0_l^- = 0_l^-(b) = F^{l-1}(b, b)$  são funções crescentes no parâmetro  $b$ . Além disso, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{\partial F^k}{\partial x}(b, x) = \prod_{i=0}^{k-1} f'_b(f_b^i(x)).$$

Uma vez que as aplicações de  $\mathcal{D}$  têm derivadas positivas e menores do que 1 obtemos a seguinte estimativa

$$1 \leq \frac{\partial F^k}{\partial b}(b, x) \leq \frac{1}{1 - \nu}, \quad (5.2)$$

para todo  $k \geq 1$  e para todos  $(b, x) \in (0, 1) \times \{(-1, 1) \setminus \{0\}\}$ .

## 5.2 Descrição do espaço de parâmetros: domínios de renormalização

Veamos o que obtemos ao fixarmos os ramos  $f_L$  e  $f_R$  de uma aplicação  $f \in \mathcal{D}$  e variarmos o parâmetro  $b$  dentro do intervalo  $(0, 1)$ . A idéia é entender o conjunto de parâmetros  $b$  para os quais  $f_b$  é renormalizável. Uma análise mais precisa e mais geral (com qualquer função de retorno) será feita na próxima seção.

Inicialmente se  $b = \frac{1}{2}$  temos que a aplicação  $f_b = f_{\frac{1}{2}}$  não é renormalizável pois o zero pertence ao interior do gap  $G = (0_2^-, 0_2^+)$ . E vemos que nesse caso a aplicação  $f_b^2$  se estende a uma contração no intervalo  $[0, b]$  (ver Corolário 2.1.1) implicando assim na existência de uma órbita periódica atratora de período dois para  $f_b$ . Além disso se  $b = \frac{1}{2}$  temos  $0_2^-(b) < 0$  e podemos iterar o ponto  $0_2^-(b)$  por  $f_b|_{[b-1, 0]}$  mais uma vez, gerando assim o ponto  $0_3^-(b)$  e a seguinte desigualdade

$$0_2^-(b) < 0 < 0_2^+(b) < 0_3^-(b).$$

Sendo  $0_r^+ = 0_r^+(b)$  e  $0_l^- = 0_l^-(b)$  funções contínuas e crescentes no parâmetro  $b$  temos que quando  $b$  decresce  $0_2^+ = 0_2^+(b)$  também decresce, e assim existe um parâmetro  $b_{-,1}^I < \frac{1}{2}$  tal que  $0_2^+(b_{-,1}^I) = 0$ . Nesse momento estamos com a situação  $0_2^+ = 0_2^+(b_{-,1}^I) = 0 < 0_3^-$ . Continuando a decrescer o parâmetro  $b$  temos em seguida

$$0_2^-(b) < 0_2^+(b) < 0 < 0_3^-(b)$$

a qual implica que a aplicação  $f_b$  é renormalizável, com  $k = 1$ ,  $\sigma = -$  e  $(r, l) = (2, 3) \in \mathcal{I}_{f_b}$  (conseqüência do Lema 2.5.2). Observe que nesse momento o gap  $G$  está todo à esquerda do zero, isto é,  $G \subset (b-1, 0)$ , e agora também podemos iterar o ponto  $0_2^+(b)$  por  $f_b|_{(b-1,0)}$  mais uma vez, garantindo assim a existência do ponto  $0_3^+(b)$ . E como a função  $f_b$  é crescente temos que  $0_3^-(b) < 0_3^+(b)$ . Se  $b$  continua decrescendo essa situação termina no parâmetro  $b_{-,1}^E < b_{-,1}^I$  tal que  $0_3^-(b_{-,1}^E) = 0$ , mas agora estamos com  $0_3^- = 0_3^-(b_{-,1}^E) = 0 < 0_3^+$ , e assim por diante. Com esse argumento obtemos para  $b < \frac{1}{2}$  uma coleção de intervalos disjuntos  $T_1^-, T_2^-, \dots$ , acumulando sobre  $b = 0$ , tais que se  $b \in T_k^-$  então

$$0_{k+1}^+(b) < 0 < 0_{k+2}^-(b)$$

e a aplicação correspondente  $f_b$  é renormalizável, com  $(r, l) = (k+1, k+2) \in \mathcal{I}_{f_b}$  (conseqüência do Lema 2.5.2). Só para ressaltar, o sinal negativo “-” em cada  $T_k^-$  significa que o gap principal está à esquerda do zero.

Os pontos de fronteira de  $T_k^-$  são  $b_{-,k}^E$  e  $b_{-,k}^I$ , onde  $I$  significa “interno” ( $b_{-,k}^I$  é o bordo mais próximo de  $b = \frac{1}{2}$ ), e  $E$  significa “externo” ( $b_{-,k}^E$  é o bordo mais afastado de  $b = \frac{1}{2}$ ). O parâmetro  $b_{-,k}^I$  é a solução da equação

$$0_{k+1}^+(b) = 0 \tag{5.3}$$

e  $b_{-,k}^E$  é a solução da equação

$$0_{k+2}^-(b) = 0. \quad (5.4)$$

Por simetria obtemos para  $b > \frac{1}{2}$  uma coleção de intervalos disjuntos  $T_1^+, T_2^+, \dots$  se acumulando sobre  $b = 1$  e onde  $f_b$  é renormalizável, ou seja, se  $b \in T_k^+$  então

$$0_{k+2}^+(b) < 0 < 0_{k+1}^-(b).$$

Aqui o sinal positivo “+” em cada  $T_k^+$  é usado para indicar que o gap  $G$  está à direita do zero ( $G \subset (0, b)$ ) em analogia ao caso  $b < \frac{1}{2}$ .

Analogamente denotamos os pontos de fronteira de  $T_k^+$  por  $b_{+,k}^E$  e  $b_{+,k}^I$ , os quais são dados pelas soluções das equações

$$0_{k+2}^+(b) = 0 \quad (5.5)$$

e

$$0_{k+1}^-(b) = 0 \quad (5.6)$$

respectivamente, onde a letra  $I$  em  $b_{+,k}^I$  também significa “interno” ( $b_{+,k}^I$  é o bordo de  $T_k^+$  mais próximo de  $b = \frac{1}{2}$ ) e  $b_{+,k}^E$  é o outro bordo.

Assim, para cada  $f \in \mathcal{D}$ , obtemos sobre a fibra  $\{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$  uma estrutura como aquela apresentada na Figura 5.1.

### 5.3 Dentro de um intervalo de parâmetros renormalizáveis

#### 5.3.1 Persistência de um par $f$ -interno

Agora vamos ver o que acontece quando temos um parâmetro  $b_0$  para o qual existe um par  $f_{b_0}$ -interno  $(r, l)$ . Ou seja, para  $b_0$  temos

$$(i) \quad 0_r^+ < 0 < 0_l^-$$

$$(ii) \quad [0_r^+, 0_l^-] \cap \{0_1^+, 0_2^+, \dots, 0_{r-1}^+, 0_1^-, 0_2^-, \dots, 0_{l-1}^-\} = \emptyset$$



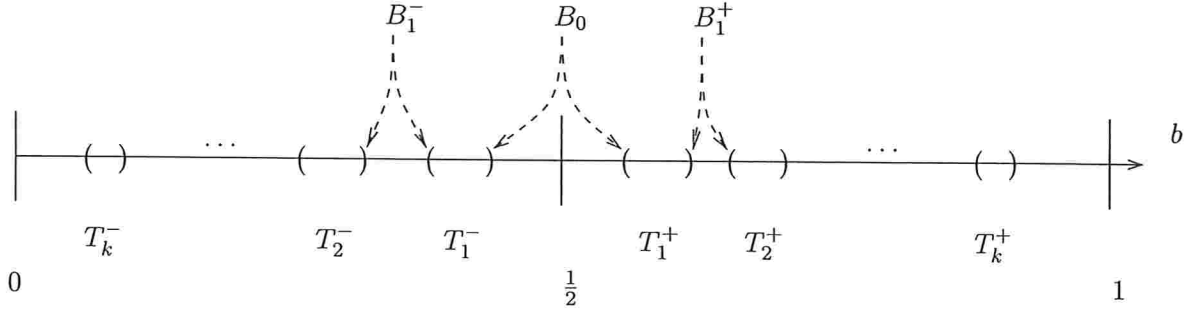


Figura 5.1: Estrutura no parâmetro  $b$ .

Por continuidade de  $F$ , o par  $(r, l)$  é ainda  $f_b$ -interno para todo  $b$  em um subintervalo de  $(0, 1)$  contendo  $b_0$ . Seja  $T_{r,l} = (b_l, b_r) \subset (0, 1)$  o intervalo maximal com essa propriedade. Observe que a condição (ii) acima não pode ser violada devido ao Lema 2.2.1 e ao Lema 2.2.2. Sendo assim os bordos de  $T_{r,l}$  são determinados pelos momentos em que a condição (i) acima é violada, isto é, quando  $0_r^+ = 0$  e  $0_l^- = 0$ . Mas como  $0_r^+ = 0_r^+(b) = f_b^r(0^+) = F^{r-1}(b, b-1)$  e  $0_l^- = 0_l^-(b) = f_b^l(0^-) = F^{l-1}(b, b)$  são funções crescentes no parâmetro  $b$ , pois  $\frac{\partial F^k}{\partial b}(b, x) \geq 1$ , para todo  $k \geq 1$ , segue que o bordo esquerdo de  $T_{r,l}$  corresponde ao parâmetro  $b$  para o qual  $0_l^- = 0$  e o bordo direito de  $T_{r,l}$  ao parâmetro  $b$  para o qual  $0_r^+ = 0$ , isto é,  $b_l$  e  $b_r$  são tais que

$$0_l^-(b_l) = 0 \quad \text{e} \quad 0_r^+(b_r) = 0$$

respectivamente (veja Figura 5.2).

Vejamos agora como estimar o tamanho desse intervalo  $T_{r,l}$ . Podemos estimá-lo a partir de uma das seguintes igualdades

$$\frac{|[0_r^+(b_r), 0_l^-(b_r)]|}{|T_{r,l}|} = \frac{\partial}{\partial b} F^{l-1}(b, b) \tag{5.7}$$

para algum  $b \in T_{r,l}$  dado pelo Teorema do Valor Médio, ou

$$\frac{|[0_r^+(b_l), 0_l^-(b_l)]|}{|T_{r,l}|} = \frac{\partial}{\partial b} F^{r-1}(b, b-1) \tag{5.8}$$

para algum  $b \in T_{r,l}$  dado pelo Teorema do Valor Médio. Da estimativa (5.2) que fizemos acima obtemos de (5.7)

$$(1 - \nu)|[0_r^+(b_r), 0_l^-(b_r)]| \leq |T_{r,l}| \leq |[0_r^+(b_r), 0_l^-(b_r)]| \quad (5.9)$$

e de (5.8)

$$(1 - \nu)|[0_r^+(b_l), 0_l^-(b_l)]| \leq |T_{r,l}| \leq |[0_r^+(b_l), 0_l^-(b_l)]| \quad (5.10)$$

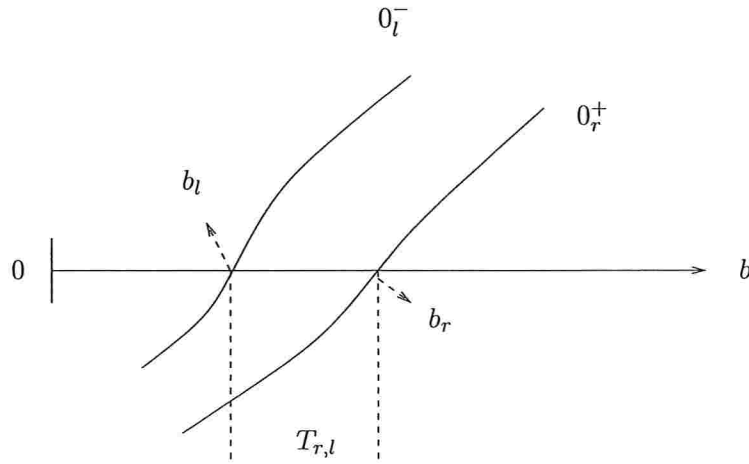


Figura 5.2: Intervalo de parâmetros  $T_{r,l}$ .

### 5.3.2 Dependência do gap central sobre o parâmetro

Consideremos o intervalo  $T_{r,l}$  como na Seção anterior e vejamos como se comporta o gap central de cada aplicação  $f_b$  quando variamos o parâmetro  $b$  em  $T_{r,l}$ . Inicialmente observemos as 3 situações distintas

- (a) se  $b = b_l$  então  $0_r^+(b_l) < 0_l^-(b_l) = 0$ ;
- (b) se  $b \in T_{r,l}$  então  $0_r^+(b) < 0 < 0_l^-(b)$ ;
- (c) se  $b = b_r$  então  $0 = 0_r^+(b_r) < 0_l^-(b_r)$ .

(a), (b) e (c) podem ser vistos na Figura 5.2.

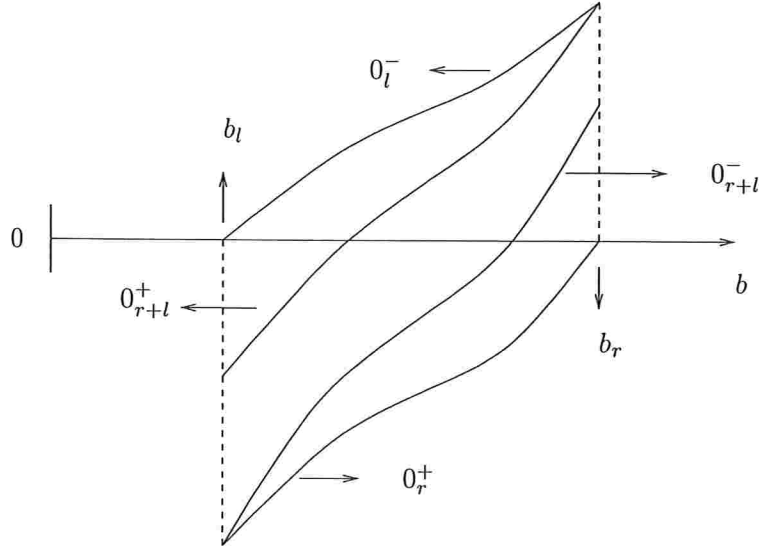


Figura 5.3: Intervalo de parâmetros  $T_{r,l}$  e as funções  $0_r^+$  e  $0_l^-$ .

Na situação (a) temos que a aplicação de retorno ao intervalo  $[0_r^+, 0_l^-] = [0_r^+(b_l), 0]$  é dada por  $R_{b_l}(x) = f^l(x)$  (veja Observação 2.4.5) e assim a imagem de  $[0_r^+, 0_l^-] = [0_r^+(b_l), 0]$  por  $R_{b_l}$  é o intervalo  $[0_{r+l}^+, 0]$  e o gap de  $R_{b_l}$  é o intervalo  $(0_r^+, 0_{r+l}^+)$ . Como a derivada de  $R_{b_l}$  é positiva e menor do que 1 segue que  $0_r^+ < 0_{r+l}^+ < 0$  para  $b = b_l$ .

Na situação (c) temos algo semelhante, ou seja, a aplicação de retorno ao intervalo  $[0_r^+, 0_l^-] = [0, 0_l^-(b_r)]$  é dada por  $R_{b_r}(x) = f^r(x)$  (veja Observação 2.4.5) e assim a imagem de  $[0_r^+, 0_l^-] = [0, 0_l^-(b_r)]$  por  $R_{b_r}$  é o intervalo  $[0, 0_{r+l}^-]$  e o gap de  $R_{b_r}$  é o intervalo  $(0_{r+l}^-, 0_l^-)$ . Novamente, como a derivada de  $R_{b_r}$  é positiva e menor do que 1 segue que  $0 < 0_{r+l}^- < 0_l^-$  para  $b = b_r$ .

Na situação (b) temos que a aplicação de retorno ao intervalo  $[0_r^+(b), 0_l^-(b)]$  é dada por

$$R_b(x) = \begin{cases} f_b^l(x) & \text{se } x \in [0_r^+(b), 0] \\ f_b^r(x) & \text{se } x \in (0, 0_l^-(b)] \end{cases}$$

Assim, a imagem de  $[0_r^+(b), 0_l^-(b)]$  por  $R_b$  é o conjunto  $(0_r^+(b), 0_{r+l}^-(b)] \cup [0_{r+l}^+(b), 0_l^-(b))$ , seu gap é o intervalo  $(0_{r+l}^-(b), 0_{r+l}^+(b))$  e vale a seguinte ordem

$$0_r^+(b) < 0_{r+l}^-(b) < 0_{r+l}^+(b) < 0_l^-(b).$$

Além disso

$$\lim_{b \rightarrow b_l^+} 0_r^+(b) = \lim_{b \rightarrow b_l^+} 0_{r+l}^-(b) \quad (5.11)$$

e

$$\lim_{b \rightarrow b_r^-} 0_l^-(b) = \lim_{b \rightarrow b_r^-} 0_{r+l}^+(b) \quad (5.12)$$

De fato, como  $0_r^+(b) = F^{r-1}(b, b-1)$  e  $0_l^-(b) = F^{l-1}(b, b)$  são funções contínuas e crescentes no parâmetro  $b$ ,  $\lim_{b \rightarrow b_l^+} 0_l^-(b) = \lim_{b \rightarrow b_l^+} F^{l-1}(b, b) = 0$  e  $0_{r+l}^-(b) = F^{r-1}(b, F(b, F^{l-1}(b, b)))$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow b_l^+} 0_{r+l}^-(b) &= \lim_{b \rightarrow b_l^+} F^{r-1}(b, F(b, F^{l-1}(b, b))) \\ &= F^{r-1}(b_l, F(b_l, \lim_{b \rightarrow b_l^+} F^{l-1}(b, b))) \\ &= F^{r-1}(b_l, b_l - 1) = \lim_{b \rightarrow b_l^+} 0_r^+(b) \end{aligned}$$

onde  $F(b_l, \lim_{b \rightarrow b_l^+} F^{l-1}(b, b)) = b_l - 1$  pois quando  $b \rightarrow b_l^+$  temos  $0_l^-(b) \searrow 0$  e assim  $F(b_l, \lim_{b \rightarrow b_l^+} F^{l-1}(b, b)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(b_l, x) = b_l - 1$ . De modo análogo mostra-se (5.12). Portanto a situação (b) permanece por todo o intervalo  $T_{r,l}$  e termina nas extremidades desse intervalo com as situações (a) e (c), configurando assim a Figura 5.3.

Sendo assim ficam bem definidos os parâmetros  $b_{-,1}^I, b_{+,1}^I \in T_{r,l}$  tais que

$$0_{r+l}^+(b_{-,1}^I) = 0 \quad \text{e} \quad 0_{r+l}^-(b_{+,1}^I) = 0.$$

Para os parâmetros no intervalo  $(b_{-,1}^I, b_{+,1}^I)$  temos  $0 \in (0_{r+l}^-, 0_{r+l}^+)$ , de onde resulta em particular que a transformação de retorno tem uma órbita periódica atratora de período 2.

### 5.3.3 Estrutura interna de um intervalo de parâmetros renormalizáveis

O que acabamos de provar na Seção anterior é o passo inicial do argumento indutivo que faremos agora dentro do intervalo  $(b_l, b_{-,1}^I)$ , e que servirá para o intervalo  $(b_{+,1}^I, b_r)$  por analogia. Inicialmente observemos que para  $b = b_l$ , todos os iterados  $0_{r+kl}^-(b_l)$  estão definidos e são negativos.

O objetivo, após a indução, é ter justificado a informação contida nas Figuras 5.4 e 5.5. Sugerimos acompanhar o raciocínio a seguir pela Figura 5.4. Seja  $k \geq 1$  e suponhamos que

- (i) a função  $0_{r+kl}^-(b)$  está definida (pelo menos) para todo  $b$  no intervalo  $[b_l, b_{-,k-1}^E]$ , para um certo  $b_{-,k-1}^E$ , com  $0_{r+kl}^-(b_{-,k-1}^E) = 0$  e  $0_{r+kl}^-(b) < 0$  se  $b \in [b_l, b_{-,k-1}^E)$ .

Mostremos agora, que (i) vale para  $k + 1$ . Como  $0_{r+kl}^-(b) < 0$  se  $b \in [b_l, b_{-,k-1}^E)$ , temos que  $0_{r+(k+1)l}^-$  está definida em  $[b_l, b_{-,k-1}^E]$ , e, em particular,  $0_{r+(k+1)l}^-(b_l) < 0$ . Por outro lado, como para  $b \nearrow b_{-,k-1}^E$  tem-se  $0_{r+kl}^- \nearrow 0$  então  $0_{r+(k+1)l}^- \nearrow 0_l^-$ . Daí segue que existe parâmetro  $b_{-,k}^E \in (b_l, b_{-,k-1}^E)$  para o qual

$$\begin{aligned} 0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k}^E) &= 0 \\ 0_{r+(k+1)l}^-(b) &< 0, \forall b \in [b_l, b_{-,k}^E) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Isso garante a indução. Analogamente, mostra-se que

- (ii) a função  $0_{r+kl}^+(b)$  está definida para todo  $b$  no intervalo  $[b_l, b_{-,k}^I]$ , para um certo  $b_{-,k}^I$ , com  $0_{r+kl}^+(b_{-,k}^I) = 0$  e tal que  $0_{r+kl}^+(b) < 0$  para todo  $b \in [b_l, b_{-,k}^I)$ .

Para que a afirmação (i) faça sentido com  $k = 1$ , denotamos  $b_{-,0}^E = b_{+,1}^I$ . Além disso, como as funções  $0_{r+kl}^-(b)$  e  $0_{r+kl}^+(b)$  são crescentes e  $0_r^+ < 0_{r+l}^- < 0_{r+l}^+ < 0_l^-$  segue que

$$0_{r+kl}^-(b) < 0_{r+kl}^+, \forall b \in [b_l, b_{-,k-1}^I),$$

e conseqüentemente

$$b_{-,k}^E < b_{-,k}^I < b_{-,k-1}^E.$$

Logo, fica justificado as informações contidas nas Figuras 5.4 e 5.5.

Essa indução assegura uma estrutura semelhante à apresentada na Figura 5.1. Em analogia aos intervalos  $T_k^\pm$ , definimos

$$T_{k,(r,l)}^- = (b_{-,k}^E, b_{-,k}^I).$$

e

$$T_{k,(r,l)}^+ = (b_{+,k}^I, b_{+,k}^E).$$

Apesar dos bordos de  $T_{k,(r,l)}^+$  e de  $T_{k,(r,l)}^-$  também dependerem do par  $(r, l)$  não iremos explicitar essa dependência para não deixar a notação mais carregada. Além disso, esses intervalos têm a propriedade de que se  $b \in T_{k,(r,l)}^-$  então

$$0_{r+kl}^+(b) < 0 < 0_{r+(k+1)l}^-(b)$$

de onde segue que o par  $(k+1, k+2)$  é  $g_b$ -interno para  $g_b(x) = \frac{1}{|T_{r,l}|} R_b(|T_{r,l}|x)$ . E se  $b \in T_{k,(r,l)}^+$  então

$$0_{(k+1)r+l}^+(b) < 0 < 0_{kr+l}^-(b)$$

de onde segue que o par  $(k+2, k+1)$  é  $g_b$ -interno para  $g_b(x) = \frac{1}{|T_{r,l}|} R_b(|T_{r,l}|x)$ .

### 5.3.4 Estimativas de tamanho para os intervalos de parâmetros

#### Renormalizáveis

Podemos estimar os intervalos  $T_{k,(r,l)}^-$  e  $T_{k,(r,l)}^+$  da seguinte maneira

$$\frac{|(0_{(k+1)r+l}^+(b_{+,k}^E), 0_{kr+l}^-(b_{+,k}^E))|}{|T_{k,(r,l)}^+|} = \frac{\partial}{\partial b} 0_{kr+l}^-(b) \quad (5.14)$$

onde  $b \in I_{k,(r,l)}^+$  é dado pelo Teorema do Valor Médio,

$$\frac{|(0_{r+kl}^+(b_{-,k}^E), 0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k}^E))|}{|T_{k,(r,l)}^-|} = \frac{\partial}{\partial b} 0_{r+kl}^+(b) \quad (5.15)$$

onde  $b \in I_{k,(r,l)}^-$  é dado pelo Teorema do Valor Médio. De (5.2) obtemos

$$(1 - \nu) \cdot |(0_{(k+1)r+l}^+(b_{+,k}^E), 0_{kr+l}^-(b_{+,k}^E))| \leq |T_{k,(r,l)}^+| \leq |(0_{(k+1)r+l}^+(b_{+,k}^E), 0_{kr+l}^-(b_{+,k}^E))| \quad (5.16)$$

e

$$(1 - \nu) \cdot |(0_{r+kl}^+(b_{-,k}^E), 0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k}^E))| \leq |T_{k,(r,l)}^-| \leq |(0_{r+kl}^+(b_{-,k}^E), 0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k}^E))| \quad (5.17)$$

### Não renormalizáveis

Além dos intervalos  $T_{k,(r,l)}^+$  e  $T_{k,(r,l)}^-$  existem também outros intervalos dentro de  $T_{r,l}$ , isto é, os intervalos  $B_{0,(r,l)} := [b_{-,1}^I, b_{+,1}^I]$ ,  $B_{k,(r,l)}^- := [b_{-,k+1}^I, b_{-,k}^E]$  e  $B_{k,(r,l)}^+ := [b_{+,k}^E, b_{+,k+1}^I]$ . Veja Figura 5.1. Mas o que acontece com os parâmetros  $b$  que pertencem a esses últimos intervalos? Para responder a essa pergunta basta tomarmos um parâmetro  $b$  em cada um deles e observarmos que se

- (a)  $b \in B_{k,(r,l)}^-$  então temos  $0_{r+(k+1)l}^-(b) \leq 0 \leq 0_{r+(k+1)l}^+(b)$ , e assim o par  $(r + (k + 1)l, r + (k + 1)l)$  não é  $f_b$ -interno fazendo com que  $g_b$  não seja renormalizável.
- (b)  $b \in B_{0,(r,l)}$  então temos  $0_{r+l}^-(b) \leq 0 \leq 0_{r+l}^+(b)$ , e assim o par  $(r + l, r + l)$  não é  $f_b$ -interno fazendo com que  $g_b$  não seja renormalizável.
- (c)  $b \in B_{k,(r,l)}^+$  então temos  $0_{(k+1)r+l}^-(b) \leq 0 \leq 0_{(k+1)r+l}^+(b)$  e assim o par  $((k + 1)r + l, (k + 1)r + l)$  não é  $f_b$ -interno fazendo com que  $g_b$  não seja renormalizável.

Assim como fizemos para o intervalo  $T_{r,l}$  também podemos estimar o tamanho desses intervalos  $B_{k,(r,l)}^-$ ,  $B_{k,(r,l)}^+$  e  $B_{0,(r,l)}$ , ou seja

$$\frac{|[0_{r+l}^-(b_{+,1}^I), 0_{r+l}^+(b_{+,1}^I)]|}{|B_0|} = \frac{\partial}{\partial b} 0_{r+l}^+(b) \quad (5.18)$$

onde  $b \in B_0$  é dado pelo Teorema do Valor Médio, ou

$$\frac{|[0_{r+l}^-(b_{-,1}^I), 0_{r+l}^+(b_{-,1}^I)]|}{|B_0|} = \frac{\partial}{\partial b} 0_{r+l}^-(b) \quad (5.19)$$

onde  $b \in B_0$  é dado pelo Teorema do Valor Médio; também

$$\frac{|[0_{(k+1)r+l}^-(b_{+,k}^E), 0_{(k+1)r+l}^+(b_{+,k}^E)]|}{|B_{k,(r,l)}^+|} = \frac{\partial}{\partial b} 0_{(k+1)r+l}^-(b) \quad (5.20)$$

onde  $b \in B_k^+$  é dado pelo Teorema do Valor Médio, ou

$$\frac{|[0_{(k+1)r+l}^-(b_{+,k+1}^I), 0_{(k+1)r+l}^+(b_{+,k+1}^I)]|}{|B_{k,(r,l)}^+|} = \frac{\partial}{\partial b} 0_{(k+1)r+l}^+(b) \quad (5.21)$$

onde  $b \in B_k^+$  é dado pelo Teorema do Valor Médio (veja Figura 5.4).

$$\frac{|[0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k}^E), 0_{r+(k+1)l}^+(b_{-,k}^E)]|}{|B_{k,(r,l)}^-|} = \frac{\partial}{\partial b} 0_{r+(k+1)l}^+(b) \quad (5.22)$$

onde  $b \in B_k^-$  é dado pelo Teorema do Valor Médio, ou

$$\frac{|[0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k+1}^I), 0_{r+(k+1)l}^+(b_{-,k+1}^I)]|}{|B_{k,(r,l)}^-|} = \frac{\partial}{\partial b} 0_{r+(k+1)l}^-(b) \quad (5.23)$$

onde  $b \in B_{k,(r,l)}^-$  é dado pelo Teorema do Valor Médio (veja Figura 5.5).

De (5.2) obtemos

$$(1 - \nu) \cdot |[0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k}^E), 0_{r+(k+1)l}^+(b_{-,k}^E)]| \leq |B_{k,(r,l)}^-| \leq |[0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k}^E), 0_{r+(k+1)l}^+(b_{-,k}^E)]|, \quad (5.24)$$

$$(1 - \nu) \cdot |[0_{(k+1)r+l}^-(b_{+,k}^E), 0_{(k+1)r+l}^+(b_{+,k}^E)]| \leq |B_{k,(r,l)}^+| \leq |[0_{(k+1)r+l}^-(b_{+,k}^E), 0_{(k+1)r+l}^+(b_{+,k}^E)]| \quad (5.25)$$

e

$$(1 - \nu) \cdot |[0_{r+l}^-(b_{+,1}^I), 0_{r+l}^+(b_{+,1}^I)]| \leq |B_0| \leq |[0_{r+l}^-(b_{+,1}^I), 0_{r+l}^+(b_{+,1}^I)]|. \quad (5.26)$$

Do fato de  $0 < f' \leq \nu < 1$  obtemos



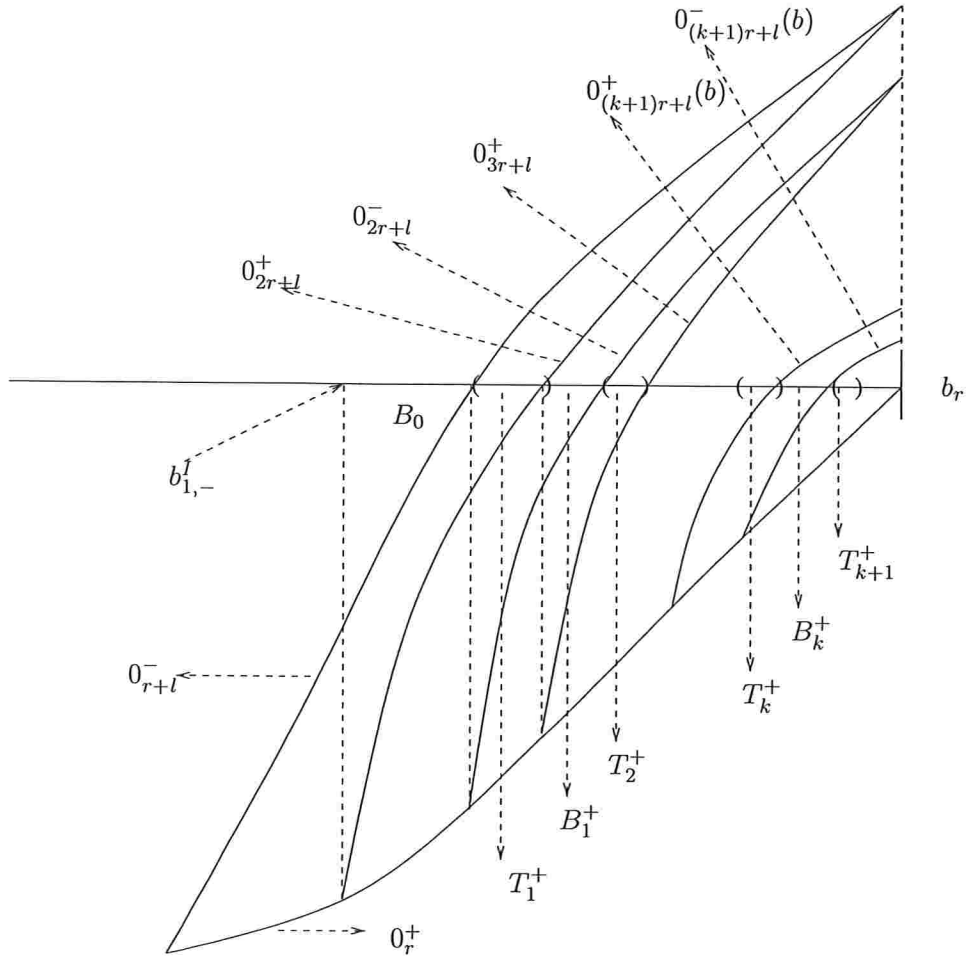


Figura 5.4: Intervalo de parâmetros  $B_{k,(r,l)}^+$ .

$$|B_{k,(r,l)}^-| \leq (\nu)^{r+(k+1)l-2} \cdot |(0_2^-, 0_2^+)| \tag{5.27}$$

e

$$|B_{k,(r,l)}^+| \leq (\nu)^{(k+1)r+l-2} \cdot |(0_2^-, 0_2^+)|. \tag{5.28}$$

Além dessas estimativas podemos aplicar o Corolário 3.4.2 e estimar os quocientes

$$\begin{aligned} \frac{|T_{k,(r,l)}^+|}{|B_{k,(r,l)}^+|} &\leq \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{|(0_{(k+1)r+l}^+(b_{+,k}^E), 0_{kr+l}^-(b_{+,k}^E))|}{|(0_{(k+1)r+l}^-(b_{+,k}^E), 0_{(k+1)r+l}^+(b_{+,k}^E))|} \\ &\leq \frac{L^+}{1-\nu} \end{aligned} \quad (5.29)$$

para alguma constante positiva  $L^+$ , e

$$\begin{aligned} \frac{|T_{k,(r,l)}^-|}{|B_{k,(r,l)}^-|} &\leq \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{|(0_{r+kl}^+(b_{-,k}^E), 0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k}^E))|}{|(0_{r+(k+1)l}^-(b_{-,k}^E), 0_{r+(k+1)l}^+(b_{-,k}^E))|} \\ &\leq \frac{L^-}{1-\nu} \end{aligned} \quad (5.30)$$

para alguma constante positiva  $L^-$ . A partir dessas desigualdades, é fácil ver que

$$|T_{k,(r,l)}^-| \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

e

$$|T_{k,(r,l)}^+| \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Um panorama mais completo dessa estrutura dentro do intervalo  $T_{k,(r,l)}$  pode ser vista na Figura 5.6.

#### 5.4 Dinâmica Simbólica do operador de renormalização

De um modo geral podemos dizer que sobre cada fibra  $\{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$  temos os intervalos correspondendo aos parâmetros  $b$  para os quais  $f_b$  é uma vez renormalizável. Por isso chamaremos esses intervalos de intervalos de nível 1 ou da primeira geração. Dentro de cada intervalo de nível 1 temos uma subcoleção de intervalos correspondendo aos parâmetros  $b$  para os quais  $f_b$  é duas vezes renormalizável e por isso esses subintervalos serão chamados de intervalos de nível 2 ou da segunda geração, e assim por diante.

O que acabamos de apresentar revela a dinâmica simbólica do operador de renormalização e servirá para melhor explicar a estrutura que o conjunto dos parâmetros renormalizáveis apresenta dentro do espaço  $\mathcal{D}$ , a saber. Seja  $(f_L, f_R)$  fixada. Sobre a fibra  $\{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$  temos os intervalos de parâmetros renormalizáveis de nível 1, ou seja, se  $T_{k_0}^{\sigma_0} \subset \{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$  é um desses intervalos, então para todo  $b \in T_{k_0}^{\sigma_0}$

1. o símbolo  $\sigma_0 = \pm$  nos diz de que lado do 0 o gap  $G_0 = (0_2^-, 0_2^+)$  está, isto é,  $\sigma_0 = +$  se  $G_0 \subset (0^+, 0_1^-)$  e  $\sigma_0 = -$  se  $G_0 \subset (0_1^+, 0^-)$

2. o inteiro positivo  $k_0$  nos diz que  $G_0$  e seus  $k_0 - 1$  primeiros iterados por  $R_0 = f_b$  estão do mesmo lado de 0 (à sua direita ou à sua esquerda) e o  $k_0$ -ésimo iterado de  $G_0$  por  $R_0$  troca de lado, isto é,  $R_0^i(G_0) \subset (0_1^+, 0^-)$  para todo  $0 \leq i < k_0$  e  $R_0^{k_0}(G_0) \subset (0^+, 0_1^-)$  ou  $R_0^i(G_0) \subset (0^+, 0_1^-)$  para todo  $0 \leq i < k_0$  e  $R_0^{k_0}(G_0) \subset (0_1^+, 0^-)$ .

Cada intervalo  $T_{k_0}^{\sigma_0}$  corresponde a  $T_{r_1, l_1}$ , onde  $(r_1, l_1)$  é o primeiro par interno propriamente maior do que  $(r_0, l_0) = (1, 1)$ . Pelo que vimos na seção anterior,  $T_{r_1, l_1}$  tem uma estrutura interna onde aparecem os intervalos  $T_{k_1, (r_1, l_1)}^{\pm}$ . Então usaremos a notação  $T_{k_0 k_1}^{\sigma_0 \sigma_1}$ , pois assim fica explicitada a combinatória que o gerou.

Portanto

1. o símbolo  $\sigma_1 = \pm$  representa o lado em que o gap  $G_1 = (0_{r_1+l_1}^-, 0_{r_1+l_1}^+)$  está com relação à origem, isto é,  $\sigma_1 = +$  se  $G_1$  está à direita da origem e  $\sigma_1 = -$  se  $G_1$  está à esquerda da origem.
2. o inteiro positivo  $k_1$  nos diz que  $G_1$  e seus  $k_1 - 1$  primeiros iterados por  $R_1$  estão do mesmo lado de 0 (à sua direita ou à sua esquerda) e o  $k_1$ -ésimo iterado de  $G_1$  por  $R_1$  troca de lado.

E dessa maneira obtemos os intervalos de parâmetros renormalizáveis de todos os níveis. Em suma, se  $b \in T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_{N-1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-1}}$  temos que  $f_b$  é  $N$  vezes renormalizável e  $b \in T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_i}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i}$  para todo  $0 \leq i \leq N - 1$ , onde  $T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_{i-1} k_i}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i-1} \sigma_i} \subset T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_{i-1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i-1}}$  para todo  $0 \leq i \leq N - 1$ .

Aproveitando essa notação, se tomarmos uma aplicação  $f = f_b \in \mathcal{D}$  infinitamente renormalizável com combinatória

$$\Gamma = \{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), (\sigma_2, k_2), \dots, (\sigma_N, k_N), \dots\}.$$

teremos que

$$b \in T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_N}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N}$$

para todo  $N \geq 0$ , e como  $|T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_N}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N}| \rightarrow 0$ , quando  $N \rightarrow \infty$ , temos

$$\{b\} = \bigcap_{N=0}^{\infty} T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_N}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N}.$$

## 5.5 Dimensão de Hausdorff Zero em Fibras Verticais

Na Seção 3.2 definimos a dimensão de Hausdorff de um conjunto  $K$  qualquer. Também vimos que se quisermos mostrar que um conjunto  $K$  tem dimensão de Hausdorff zero devemos mostrar que

$m_\rho(K) = 0$  para todo  $\rho > 0$ , e para isso é suficiente que exista uma seqüência  $\mathcal{U}^{(n)}$  de coberturas abertas enumeráveis de  $K$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_\rho(\mathcal{U}^{(n)}) = 0$$

para cada  $\rho > 0$ .

Sendo assim vamos mostrar que a intersecção do conjunto  $\mathcal{D}_\infty = \{f_b \in \mathcal{D}; f_b \text{ é infinitamente renormalizável}\}$  com cada fibra  $\{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$  tem dimensão de Hausdorff zero. Esse resultado foi mostrado por Colin Boyd em [Boy85]. Mas vamos refazê-lo aqui e para isso seja

$$K = \{f_b \in \mathcal{D}; f_b \text{ é infinitamente renormalizável}\} \cap \{(f_L, f_R)\} \times (0, 1).$$

Como é intuitivo vamos considerar  $\mathcal{U}^{(n)}$  como sendo a coleção dos intervalos de nível  $n$  sobre a fibra  $\{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$ . Claramente temos que  $\mathcal{U}^{(n)}$  cobre  $K$  para todo  $n \geq 0$ . Mas o que nos assegura que  $K$  tem dimensão de Hausdorff zero é o Lema que segue abaixo.

**Lema 5.5.1** *Existe um inteiro positivo  $n_0 = n_0(\nu, \rho)$  tal que  $H_\rho(\mathcal{U}^{(n+1)}) \leq \frac{1}{2}H_\rho(\mathcal{U}^{(n)})$  para todo  $n \geq n_0$ .*

*Prova.* Primeiramente notamos o seguinte

$$\sum_{T' \in \mathcal{U}^{(n+1)}} |T'|^\rho = \sum_{T \in \mathcal{U}^{(n)}} |T|^\rho \sum_{T' \subset T, T' \in \mathcal{U}^{(n+1)}} \left(\frac{|T'|}{|T|}\right)^\rho.$$

Para cada  $i \geq 1$  temos que se  $T = (b_{l,T}, b_{r,T}) \in \mathcal{U}^{(i)}$  então, por (5.10),

$$(1 - \nu)|(0_{r_i}^+(b_{l,T}), 0_{l_i}^-(b_{l,T}))| < |T| < |(0_{r_i}^+(b_{l,T}), 0_{l_i}^-(b_{l,T}))|.$$

Assim se  $T' = (b_{l,T'}, b_{r,T'}) \in \mathcal{U}^{(n+1)}$  e  $T' \subset T$  com  $T \in \mathcal{U}^{(n)}$  obtemos juntamente com o Lema 3.1.2

$$\frac{|T'|}{|T|} < \frac{1}{1 - \nu} \frac{|(0_{r_{n+1}}^+(b_{l,T'}), 0_{l_{n+1}}^-(b_{l,T'}))|}{|(0_{r_n}^+(b_{l,T}), 0_{l_n}^-(b_{l,T}))|} \leq \frac{1}{1 - \nu} (\nu^{2^n})^{k_{n+1}}.$$

Logo

$$\left(\frac{|T'|}{|T|}\right)^\rho \leq \left(\frac{1}{1-\nu}\right)^\rho (\nu^{2^n})^{(k_n+1)\rho},$$

e

$$\sum_{T' \subset T, T' \in \mathcal{U}^{(n+1)}} \left(\frac{|T'|}{|T|}\right)^\rho \leq \sum_{k_n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{1-\nu}\right)^\rho (\nu^{2^n})^{(k_n+1)\rho} \leq 2 \left(\frac{1}{1-\nu}\right)^\rho (\nu^\rho)^{2^n} \frac{1}{1 - (\nu^\rho)^{2^n}}.$$

onde o segundo somatório é tomado sobre todas as possibilidades de  $k_n$ . Como  $(\nu^\rho)^{2^n} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , pois  $\nu \in (0, 1)$ , existe  $n_0 = n_0(\nu, \rho) \geq 1$  tal que

$$2 \left(\frac{1}{1-\nu}\right)^\rho \frac{(\nu^\rho)^{2^n}}{1 - (\nu^\rho)^{2^n}} \leq \frac{1}{2}$$

para todo  $n \geq n_0$ . Portanto se  $n \geq n_0$  obtemos

$$H_\rho(\mathcal{U}^{(n+1)}) \leq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{U}^{(n)}} |T|^\rho = \frac{1}{2} H_\rho(\mathcal{U}^{(n)}),$$

o que conclui o resultado. ■

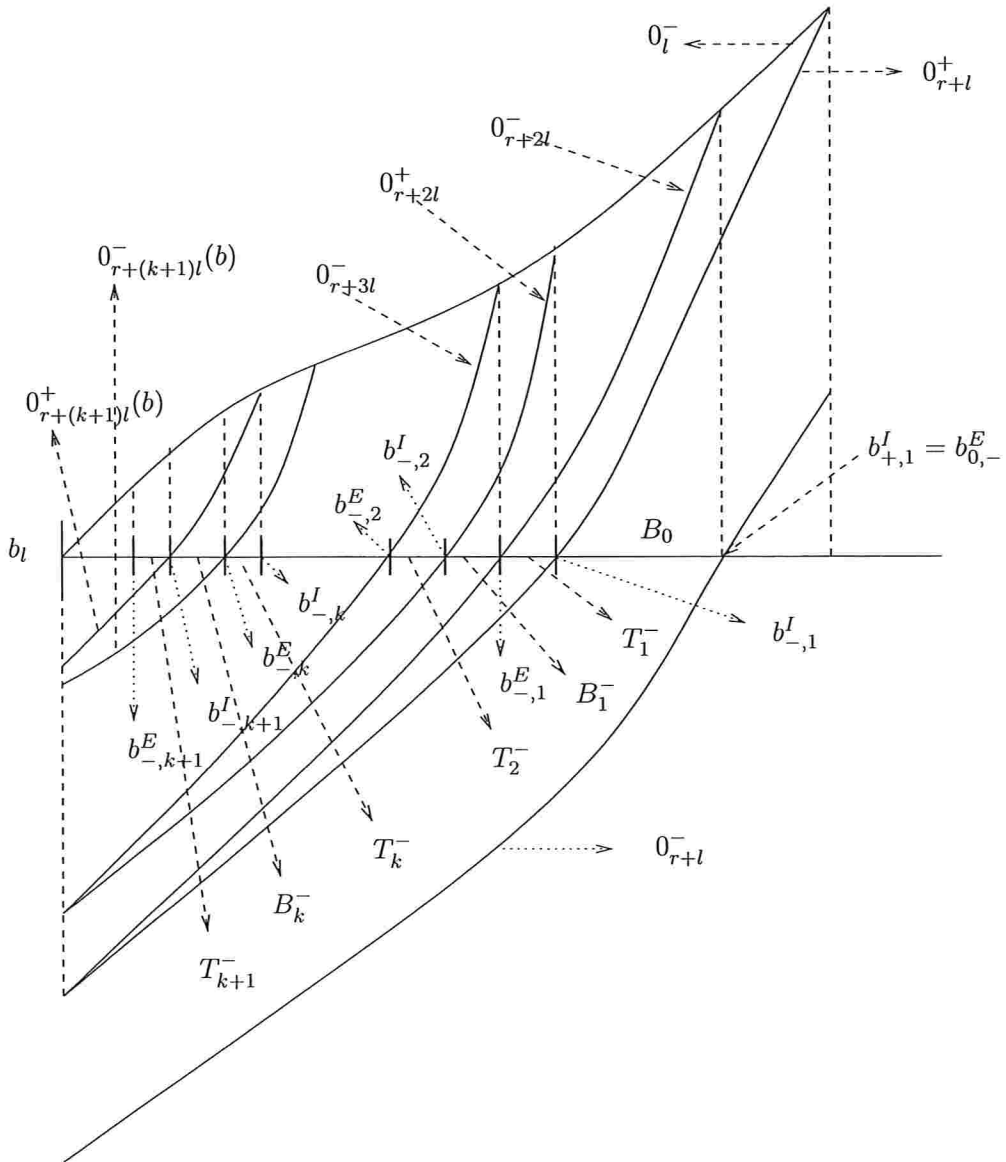


Figura 5.5: Intervalo de parâmetros  $B_{k,(r,l)}^-$ .

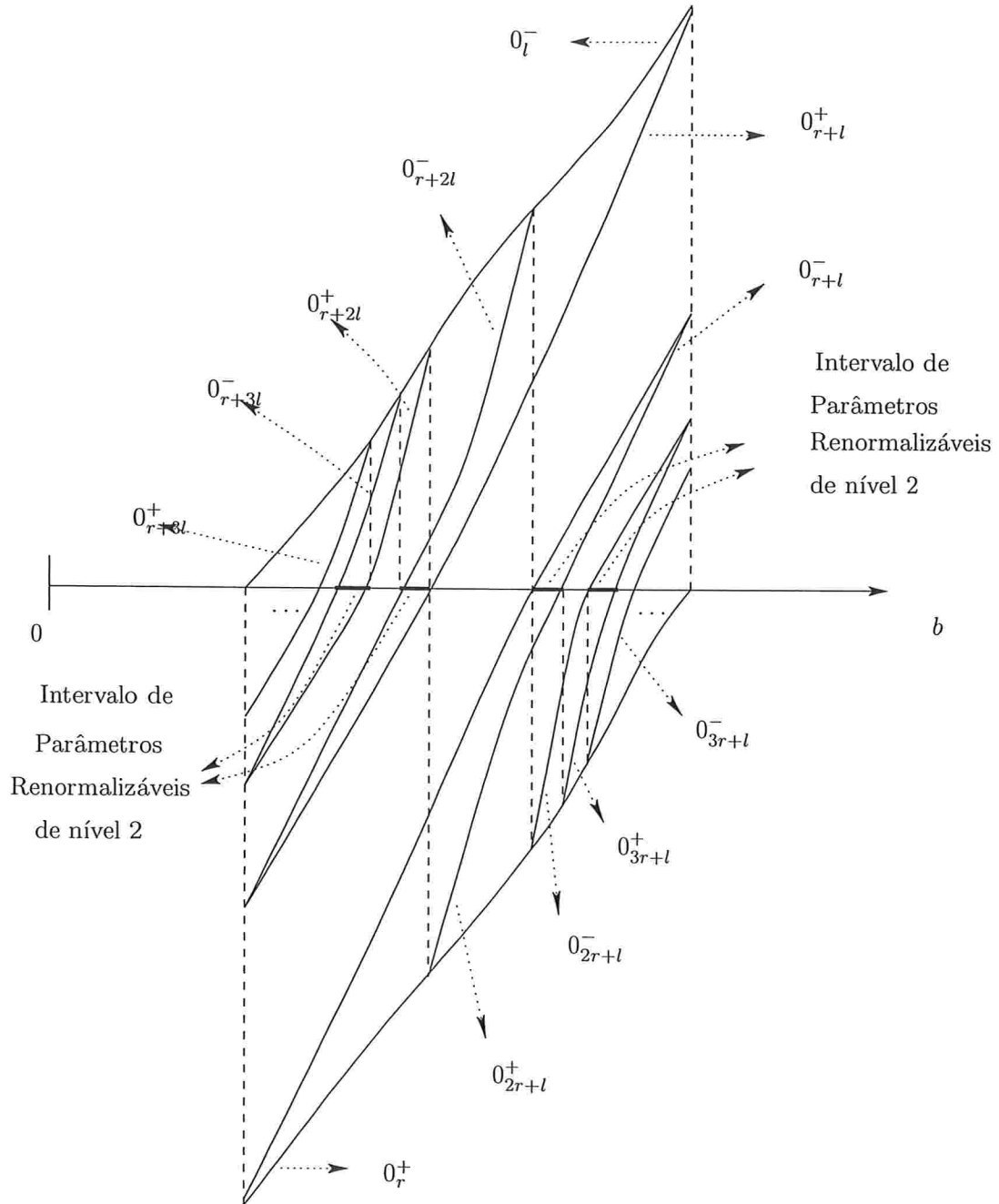


Figura 5.6: Estrutura geral.





## Capítulo 6

# Laminação e Holonomia

### 6.1 Laminação

A laminação que estamos procurando é o conjunto constituído pelos parâmetros infinitamente renormalizáveis. Vamos iniciar essa busca fixando uma combinatória, ou seja, uma seqüência de símbolos

$$\Gamma = \{(\sigma_0, k_0)(\sigma_1, k_1), (\sigma_2, k_2), \dots, (\sigma_m, k_m), \dots\},$$

onde  $\sigma_m = \pm$  e  $k_m \geq 1$ , para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Estamos em busca do conjunto de pontos  $f_b \in \mathcal{D}$  para os quais  $b$  possui a combinatória  $\Gamma$  acima. Seja  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Gamma)$  esse conjunto. Claramente  $\mathcal{L}$  é um gráfico, pois se  $f_b \in \mathcal{D}$  é tal que  $b$  possui a combinatória  $\Gamma$  acima então  $b \in T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}$ , para todo  $m = 0, 1, 2, \dots$ , e além disso sabemos da Seção 5.4 que  $T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_m k_{m+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m \sigma_{m+1}} \subset T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}$ , para todo  $m = 0, 1, 2, \dots$  e

$$|T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m \rightarrow \infty,$$

ou seja,

$$\{b\} = \bigcap_{m=0}^{\infty} T_{k_0 k_1 k_2 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}.$$

Assim  $\mathcal{L}$  é gráfico de alguma função  $L = L_\Gamma : \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R \rightarrow [0, 1]$ . Na verdade temos um pouco mais que isso, ou seja, vamos mostrar que essa função  $L$  é contínua. Considere, inicialmente,  $(f_L, f_R) \in \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R$  fixada, vamos mostrar que se  $(g_L, g_R) \in \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R$  está próxima de  $(f_L, f_R)$  (na topologia  $C^0$ ) então  $b_g = L_\Gamma(g_L, g_R)$  está próximo de  $b_f = L_\Gamma(f_L, f_R)$ . Em símbolos:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que se  $(g_L, g_R) \in \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R$  satisfaz  $\|(f_L, f_R) - (g_L, g_R)\| := \|f_L - g_L\|_{C^0} + \|f_R - g_R\|_{C^0} < \delta$  então

$$|L_\Gamma(f_L, f_R) - L_\Gamma(g_L, g_R)| = |b_f - b_g| < \epsilon.$$

Para provarmos isso precisaremos da continuidade dos bordos dos intervalos de parâmetros renormalizáveis, ou seja, vamos provar que os bordos desses intervalos de parâmetros renormalizáveis são gráficos de funções contínuas. Inicialmente vamos verificar isso apenas para um intervalo  $T_{r,l}$  mencionado acima (e exibido na Figura 5.2) pois o mesmo argumento se estenderá para todos os outros intervalos e subintervalos de parâmetros renormalizáveis. Para essa finalidade, se  $T_{r,l} = (b^E, b^I)$ , os bordos  $b^E$  e  $b^I$  de  $I$  são dados (implicitamente) pelas soluções das equações

$$0_l^- = f_b^{l-1}(b) = 0 \quad \text{e} \quad 0_r^+ = f_b^{r-1}(b-1) = 0$$

respectivamente.

Considere a função

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ f = (f_L, f_R, b) &\mapsto H(f_L, f_R, b) = f_b^{l-1}(b) \end{aligned}$$

que também pode ser vista como  $H(f) = F^{l-1}(b, b)$ .

Sem grandes esforços podemos ver que  $H$  é uma função contínua pois toda função  $f_b \in \mathcal{D}$  (tal que  $f_b^i(b) \neq 0, \forall 0 \leq i < l-1$ ) possui os ramos pelo menos contínuos e composição (finita) de funções contínuas ainda é uma função contínua.

Agora observe que o bordo  $b^E$  pertence à pré-imagem do 0 por  $H$ , ou seja,  $b^E \in H^{-1}(0)$ , uma vez que  $b^E$  é a solução de  $0_l^- = f_b^{l-1}(b) = 0$ . Logo, para obtermos a continuidade dos bordos, precisamos mostrar que  $H^{-1}(0)$  é gráfico de alguma função contínua  $\xi : \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R \rightarrow [0, 1]$ . Para garantirmos que  $H^{-1}(0)$  é gráfico basta ver que como  $\frac{\partial H}{\partial b}(f, b) =$

$\frac{\partial F^l}{\partial b}(b, 0^-) \geq 1$  para qualquer  $b \in [0, 1]$  (por 5.2), e sendo  $H$  contínua temos que  $H$  é crescente na variável  $b$ , implicando assim que para cada  $(f_L, f_R) \in \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R$  existe um único  $b \in [0, 1]$  tal que  $H(f_L, f_R, b) = 0$ . Portanto  $H^{-1}(0)$  é gráfico de alguma função  $\xi : \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R \rightarrow [0, 1]$ . Vejamos que essa função  $\xi$  é de fato contínua. Mas isso é consequência direta do seguinte lema

**Lema 6.1.1** *Sejam  $X$  um espaço métrico,  $K$  um conjunto compacto e seja  $H : X \times K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $H^{-1}(0)$  é gráfico de alguma função  $\xi : X \rightarrow K$  (isto é, se para cada  $x \in X$  existe um único  $y = \xi(x) \in K$  com  $H(x, \xi(x)) = 0$ ) então  $\xi$  é contínua.*

*Prova.* Dado  $x_0 \in X$ , seja  $y_0 \in K$  tal que  $\xi(x_0) = y_0$ . Tomamos uma seqüência  $x_n \in X$ , com  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , e queremos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(x_n) = y_0$ . Como a seqüência  $(\xi(x_n))$  está num compacto basta provar que toda subseqüência  $(\xi(x'_n))$  convergente em  $K$ , tem limite  $y_0$ . Ora, se for  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(x'_n) = y$  devemos ter  $y \in K$  pois  $K$  é fechado. Mas como  $H(x'_n, \xi(x'_n)) = 0$ , para todo  $n \geq 0$ , temos  $H(x_0, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(x'_n, \xi(x'_n)) = 0$ . Pela unicidade de  $y_0$  temos obrigatoriamente  $y = y_0$ , o que conclui a demonstração. ■

Pelo que acabamos de provar, e lembrando que estamos com a combinatória  $\Gamma = \{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), \dots, (\sigma_m, k_m), \dots\}$  fixada, consideremos, para cada  $m \geq 0$ ,

$$\xi_m^{E,I} : \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R \rightarrow [0, 1]$$

a “função bordo” do intervalo  $T_{k_0 k_1 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_m}$ , onde  $I$  indica o bordo de  $T_{k_0 k_1 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_m}$  mais próximo de  $b = \frac{1}{2}$  e  $E$  indica o outro bordo.

Assim vamos representar por  $\tilde{T}_{k_0 k_1 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_m}$  os intervalos de parâmetros renormalizáveis de nível  $m+1$  que pertencem à fibra  $\{(g_L, g_R)\} \times [0, 1]$ . Dado  $\epsilon > 0$  tome  $m \geq 1$  tal que

$$|T_{k_0 k_1 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_m}| < \frac{\epsilon}{10}.$$

Por continuidade das funções  $\xi_m^{E,I}$ , escolha  $\delta > 0$  tal que em  $B_\delta(f_L) \times B_\delta(f_R)$  valha

$$|\tilde{T}_{k_0 k_1 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_m}| < \frac{\epsilon}{5},$$

e

$$|\xi_m^{E,I}(f_L, f_R) - \xi_m^{E,I}(g_L, g_R)| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Com isso temos

$$|b_f - b_g| \leq \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + |T_{k_0 k_1 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_m}| + |J_{k_0 k_1 \dots k_m}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_m}| \leq \frac{6\epsilon}{10} < \epsilon.$$

Portanto  $L = L_\Gamma$  é contínua e estabelecemos o resultado

**Lema 6.1.2** [Boy85] *O conjunto  $\mathcal{D}_\infty = \{f_b \in \mathcal{D}; f_b \text{ é infinitamente renormalizável}\}$  forma uma laminação  $C^0$  dentro de  $\mathcal{D}$ , com a topologia dada pela norma:  $\|f\|_{\mathcal{D}} = \|f_L\|_{C^0} + \|f_R\|_{C^0} + |b|$ , onde  $f = (f_L, f_R, b) \in \mathcal{D}$ .*

Esse resultado também foi provado por Colin Boyd em [Boy85].

## 6.2 Holonomias

Da Seção 6.1 sabemos que o conjunto  $\mathcal{D}_\infty = \{f_b \in \mathcal{D}; f_b \text{ é infinitamente renormalizável}\}$  é formado por uma coleção de gráficos  $\mathcal{L}(\Gamma)$  de funções  $L = L(\Gamma)$  onde cada  $\Gamma$  é uma combinatória que define a seqüência (encaixante) de intervalos de renormalização cuja intersecção é o parâmetro  $b$ . Sejam  $(f_L, f_R), (g_L, g_R) \in \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R$  e considere as seções verticais  $\Sigma_f = \{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$  e  $\Sigma_g = \{(g_L, g_R)\} \times (0, 1)$ . Sabemos que tanto  $\Sigma_f$  quanto  $\Sigma_g$  intersectam cada folha de  $\mathcal{D}_\infty$  em um único ponto, e com isso podemos definir a aplicação *holonomia* entre  $\Sigma_f \cap \mathcal{D}_\infty$  e  $\Sigma_g \cap \mathcal{D}_\infty$  como sendo a função que leva  $b_f$  em  $b_g$  com a seguinte regra: tome a combinatória  $\Gamma$  tal que  $b_f = L_\Gamma(f_L, f_R)$  e seja  $b_g$  o único ponto de intersecção entre  $\Sigma_g$  e o gráfico de  $L_\Gamma$ .

Estamos evitando falar em seções transversais pois não provamos que as funções  $L$  são diferenciáveis.

### 6.2.1 Hölder continuidade das holonomias

Para mostrarmos que a holonomia entre duas aplicações,  $f$  e  $g \in \mathcal{D}$ , infinitamente renormalizáveis e com a mesma combinatória precisaremos das hipóteses adicionais de que as aplicações  $f$  e  $g$  sejam de classe  $C^{1+\epsilon}$  e que suas derivadas estejam afastadas do zero (isto é,  $\inf Df > 0$  e  $\inf Dg > 0$ ). A fim de analisarmos a holonomia entre duas fibras verticais iniciaremos por considerar um

natural  $n \geq 1$  tal que as combinatórias de  $b_f$  e  $\tilde{b}_f$ ,  $\Gamma = \{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), \dots, (\sigma_n, k_n), \dots\}$  e  $\tilde{\Gamma} = \{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{k}_0), (\tilde{\sigma}_1, \tilde{k}_1), \dots, (\tilde{\sigma}_n, \tilde{k}_n), \dots\}$ , respectivamente, coincidem até a posição  $n$ , isto é

$$\sigma_i = \tilde{\sigma}_i \quad \text{e} \quad k_i = \tilde{k}_i$$

para  $0 \leq i \leq n$  e  $(\sigma_{n+1}, k_{n+1}) \neq (\tilde{\sigma}_{n+1}, \tilde{k}_{n+1})$ . De acordo com as Figuras (5.6), (5.4) e (5.5) podemos lembrar que

- $B_0$ : é o gap entre  $T_{k_0 k_1 \dots k_n}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^-}$  e  $T_{k_0 k_1 \dots k_n}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^+}$
- $B_i^+$ : é o gap entre  $T_{k_0 k_1 \dots k_n(i)}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^+}$  e  $T_{k_0 k_1 \dots k_n(i+1)}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^+}$
- $B_i^-$ : é o gap entre  $T_{k_0 k_1 \dots k_n(i)}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^-}$  e  $T_{k_0 k_1 \dots k_n(i+1)}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^-}$

Assim temos as seguintes possibilidades:

- a)  $b_f$  e  $\tilde{b}_f$  estão do mesmo lado com relação a  $B_0$ : ou estão à direita de  $B_0$ , ou seja,  $b_f \in T_{k_0 k_1 \dots k_n k_{n+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^+}$  e  $\tilde{b}_f \in T_{k_0 k_1 \dots k_n k_{n+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^+}$ , ou estão à esquerda de  $B_0$ , ou seja,  $b_f \in T_{k_0 k_1 \dots k_n k_{n+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^-}$  e  $\tilde{b}_f \in T_{k_0 k_1 \dots k_n k_{n+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^-}$ ;
- b)  $b_f$  está à esquerda de  $B_0$  e  $\tilde{b}_f$  está à direita de  $B_0$ , ou seja,  $b_f \in T_{k_0 k_1 \dots k_n k_{n+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^-}$  e  $\tilde{b}_f \in T_{k_0 k_1 \dots k_n k_{n+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n^+}$  (ou vice-versa).

Feitas essas observações o Lema a seguir nos diz que a holonomia entre duas fibras verticais dadas é Hölder contínua, se as funções de base tiverem derivada afastada do zero.

**Lema 6.2.1** *Sejam  $(f_L, f_R)$ ,  $(g_L, g_R) \in \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R$  aplicações de classe  $C^{1+\epsilon}$ , e sejam  $\rho_f, \rho_g \in (0, 1)$  tais que*

$$0 < \rho_f \leq f'_L(x), f'_R(x) < 1.$$

e

$$0 < \rho_g \leq g'_L(x), g'_R(x) < 1.$$

*Existem constantes  $M > 0$  e  $\alpha \in (0, 1)$ , dependendo apenas de  $(f_L, f_R)$  e  $(g_L, g_R)$  satisfazendo: se  $\Gamma$  e  $\tilde{\Gamma}$  são duas combinatórias quaisquer e se  $b_f = L_\Gamma(f_L, f_R)$ ,  $b_g = L_\Gamma(g_L, g_R)$ ,  $\tilde{b}_f = L_{\tilde{\Gamma}}(f_L, f_R)$  e  $\tilde{b}_g = L_{\tilde{\Gamma}}(g_L, g_R)$  então*

$$|b_g - \tilde{b}_g| \leq M|b_f - \tilde{b}_f|^\alpha.$$

*Prova.* Seja  $n \geq 0$  tal que  $\Gamma = \{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), \dots, (\sigma_n, k_n), \dots\}$  e  $\tilde{\Gamma} = \{(\tilde{\sigma}_0, \tilde{k}_0), (\tilde{\sigma}_1, \tilde{k}_1), \dots, (\tilde{\sigma}_n, \tilde{k}_n), \dots\}$  coincidem até a posição  $n$ .

Para provarmos o caso *a*) vamos supor, sem perda de generalidade, que  $b_f$  e  $\tilde{b}_f$  estão à direita de  $B_0$  e que  $k_{n+1} < \tilde{k}_{n+1}$ , ou seja,  $b_f \in T_{k_0 k_1 \dots k_n k_{n+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n +}$  e  $\tilde{b}_f \in T_{k_0 k_1 \dots k_n \tilde{k}_{n+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n +}$ . De (5.29) e de (5.28) obtemos

$$\begin{aligned} |b_f - \tilde{b}_f| &\leq \sum_{i=k_{n+1}}^{\infty} (|T_{k_0 k_1 \dots k_n(i)}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n +}| + |B_i^+|) \\ &\leq \sum_{i=k_{n+1}}^{\infty} \left(1 + \frac{L^+}{1-\nu}\right) (\nu)^{(i+1)r_n + l_n - 2} \cdot |(0_2^-, 0_2^+)| \\ &\leq \left(1 + \frac{L^+}{1-\nu}\right) \cdot |(0_2^-, 0_2^+)| \cdot \frac{(\nu)^{(k_{n+1}+1)r_n + l_n - 2}}{1-\nu}, \end{aligned}$$

e por outro lado, de (5.25) e da hipótese obtemos

$$|b_f - \tilde{b}_f| \geq |B_{k_{n+1}}^+| \geq (1-\nu) \cdot \rho_f^{(k_{n+1}+1)r_n + l_n - 2} \cdot |(0_2^-, 0_2^+)| \quad (6.1)$$

Assim, escolhendo  $\alpha \in (0, 1)$  tal que  $\nu_g \leq \rho_f^\alpha$  teremos

$$\begin{aligned} \frac{|b_g - \tilde{b}_g|}{|b_f - \tilde{b}_f|^\alpha} &\leq \left(\frac{1}{1-\nu}\right)^\alpha \frac{1}{1-\nu_g} \cdot \left(1 + \frac{\tilde{L}^+}{1-\nu_g}\right) \cdot \frac{|(0_2^-, 0_2^+)_g|}{|(0_2^-, 0_2^+)_f|^\alpha} \left(\frac{\nu_g}{\rho_f^\alpha}\right)^{(k_{n+1}+1)r_n + l_n - 2} \\ &\leq \left(\frac{1}{1-\nu}\right)^\alpha \frac{1}{1-\nu_g} \cdot \left(1 + \frac{\tilde{L}^+}{1-\nu_g}\right) \cdot \frac{|(0_2^-, 0_2^+)_g|}{|(0_2^-, 0_2^+)_f|^\alpha} \end{aligned}$$

onde  $(0_2^-, 0_2^+)_f$  e  $(0_2^-, 0_2^+)_g$  são os gaps principais de  $f$  e  $g$  respectivamente, e  $\nu_g \in (0, 1)$  é a majoração da derivada de  $g$ , isto é,  $0 < g' \leq \nu_g < 1$ . Isso conclui o caso *a*).

Passemos agora para a demonstração do caso  $b$ ). Assim, se  $b_f \in T_{k_1 \dots k_n k_{n+1}}^{\sigma_1 \dots \sigma_n^-}$  e  $\tilde{b}_f \in T_{k_1 \dots k_n \tilde{k}_{n+1}}^{\sigma_1 \dots \sigma_n^+}$  temos que  $|b_f - \tilde{b}_f| \leq |T_{k_0 k_1 \dots k_n}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n}|$ . De (5.16), (5.17) podemos majorar a distância entre  $b_f$  e  $\tilde{b}_f$  por

$$|b_f - \tilde{b}_f| \leq (\nu)^{r_n + l_n} = \nu^2 (\nu)^{r_n + l_n - 2}$$

e minorando temos

$$|b_f - \tilde{b}_f| \geq |B_0| \geq (1 - \nu) \cdot \rho_f^{r_n + l_n - 2} \cdot |(0_2^-, 0_2^+)|.$$

Assim, escolhendo  $\alpha \in (0, 1)$  tal que  $\nu_g \leq \rho_f^\alpha$  teremos

$$\begin{aligned} \frac{|b_g - \tilde{b}_g|}{|b_f - \tilde{b}_f|^\alpha} &\leq \frac{\nu_g^2}{(1 - \nu)^\alpha |(0_2^-, 0_2^+)_f|^\alpha} \left( \frac{\nu_g}{\rho_f^\alpha} \right)^{r_n + l_n - 2} \\ &\leq \frac{\nu_g^2}{(1 - \nu)^\alpha |(0_2^-, 0_2^+)_f|^\alpha} \end{aligned}$$

Provando o caso  $b$ ) e concluindo o resultado. ■

### 6.2.2 Não mais que Hölder continuidade das holonomias

Os resultados da Subseção anterior podem ser provados como sendo os melhores possíveis para esta laminação. Provaremos que existem funções  $(f_L, f_R), (g_L, g_R) \in \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R$  de classe  $C^{1+\epsilon}$ , e números reais  $\rho_f, \rho_g \in (0, 1)$  satisfazendo

$$0 < \rho_f \leq f'_L(x), f'_R(x) < 1$$

e

$$0 < \rho_g \leq g'_L(x), g'_R(x) < 1$$

mas a holonomia  $h : \Sigma_f \rightarrow \Sigma_g$  ou sua inversa não é  $\alpha$ -Hölder contínua para alguma constante  $\alpha \in (0, 1)$ . Para isso basta usarmos as desigualdades anteriores no sentido oposto de maneira a obtermos

$$\frac{|b_g - \tilde{b}_g|}{|b_f - \tilde{b}_f|^\alpha} \geq (1 - \nu_g) \cdot \frac{|(0_2^-, 0_2^+)_g|(1 - \nu)^\alpha}{|(0_2^-, 0_2^+)_f|^\alpha} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{L^+}{1-\nu}} \right)^\alpha \left( \frac{\rho_g}{(\nu)^\alpha} \right)^{(k_{n+1}+1)r_n+l_n-2}$$

no caso a) e

$$\frac{|b_g - \tilde{b}_g|}{|b_f - \tilde{b}_f|^\alpha} \geq (1 - \nu_g) \cdot |(0_2^-, 0_2^+)_g| \left( \frac{\rho_g}{(\nu)^\alpha} \right)^{r_n+l_n-2}$$

no caso b).

Assim, se escolhermos funções  $(f_L, f_R), (g_L, g_R) \in \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R$  e constantes  $\rho_f, \rho_g$  como acima e escolhermos  $\alpha \in (0, 1)$  de modo que  $\rho_g > (\nu)^\alpha$  não conseguiremos nenhuma constante  $M > 0$  que majore o quociente  $\frac{|b_g - \tilde{b}_g|}{|b_f - \tilde{b}_f|^\alpha}$  uma vez que  $k_n, r_n, l_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\frac{\rho_g}{(\nu)^\alpha} > 1$ . Observemos o seguinte: colocando as estimativas nos dois sentidos, tanto para  $h$  quanto para sua inversa, temos

$$C^{-1} \left( \frac{\rho_g}{(\nu)^\alpha} \right)^{r_n+l_n-2} \leq \frac{|b_g - \tilde{b}_g|}{|b_f - \tilde{b}_f|^\alpha} \leq C \left( \frac{\nu}{\rho_f^\alpha} \right)^{r_n+l_n-2} \quad (6.2)$$

para  $h$ , e

$$C^{-1} \left( \frac{\rho_f}{(\nu_g)^\alpha} \right)^{r_n+l_n-2} \leq \frac{|b_f - \tilde{b}_f|}{|b_g - \tilde{b}_g|^\alpha} \leq C \left( \frac{\nu}{\rho_g^\alpha} \right)^{r_n+l_n-2} \quad (6.3)$$

para  $h^{-1}$  (no caso b)). Assim, observamos que podemos até ter a holonomia Lipschitz (se  $\nu_g < \rho_f$  em (6.2) por exemplo) mas nesse caso sua inversa não será  $\alpha$ -Hölder contínua para todo  $\alpha$  próximo de 1 (pois para  $\alpha$  próximo de 1 ainda valerá a desigualdade  $(\nu_g)^\alpha < \rho_f$ , fazendo com que o quociente (6.3) seja ilimitado. Vale a mesma observação para a potência  $(k_{n+1} + 1)r_n + l_n - 2$  do caso a).



## Capítulo 7

### Analiticidade de lâminas

Este capítulo será dedicado a provarmos alguns resultados no caso em que as funções  $f \in \mathcal{D}$  possuem seus ramos analíticos.

#### 7.1 Resultados de Análise Complexa

Nesta seção vamos demonstrar alguns resultados de Análise Complexa que precisaremos mais adiante. Para isso vamos definir alguns objetos que utilizaremos. Considere um ângulo  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  e defina o setor

$$S_\theta := \{re^{i\phi} \in \mathbb{C}; -\theta < \phi < \theta\}. \quad (7.1)$$

Observe que se multiplicarmos todos os pontos de  $S_\theta$  por um número complexo de módulo 1, isto é,  $e^{i\theta_0}$  obteremos o conjunto

$$e^{i\theta_0}S_\theta = \{re^{i\phi} \in \mathbb{C}; -\theta + \theta_0 < \phi < \theta + \theta_0\}$$

que nada mais é do que o setor  $S_\theta$  rotacionado pelo ângulo  $\theta_0$ . Denotaremos uma bola de centro  $z$  e raio  $r > 0$  por  $B_r(z)$ , ou seja,

$$B_r(z) = \{w \in \mathbb{C}; |w - z| < r\}.$$

Nosso primeiro resultado envolvendo esses conjuntos é o seguinte

**Lema 7.1.1** *Seja  $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa definida num subconjunto convexo  $U$  de  $\mathbb{C}$ , e suponha que existem  $r_0 > 0$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  e  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  tais que*

$$\Lambda'(b) \in B_{r_0}(0)^c \cap e^{i\theta_0} S_\theta,$$

para todo  $b \in U$ . Então

$$|\Lambda(b) - \Lambda(\tilde{b})| \geq r_0 \cos \theta |b - \tilde{b}|$$

para todos os  $b, \tilde{b} \in U$  e, em particular,  $\Lambda$  é injetiva.

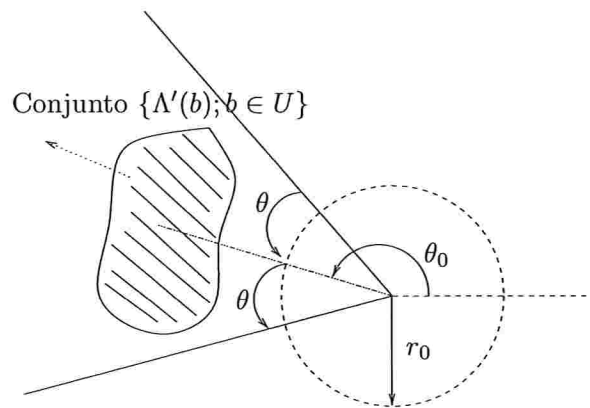


Figura 7.1: Ilustração do Lema 7.1.1.

*Prova.*

Sejam  $b$  e  $\tilde{b}$  dois pontos distintos em  $U$ . Sendo  $U$  convexo temos que o segmento ligando  $b$  a  $\tilde{b}$  está contido inteiramente em  $U$  e parametrizemos este segmento por

$$z(t) = (1-t)b + t\tilde{b}$$

para  $t \in [0, 1]$ . Assim temos que  $z'(t) = \tilde{b} - b$ . Como  $\Lambda'(b) \in e^{i\theta_0} S_\theta \cap B_{r_0}(0)^c$  temos que

$$\Lambda'(z(t)) = e^{i\theta_0} r(t) (\cos \phi(t), \text{sen} \phi(t)) \quad (7.2)$$

com  $r(t) \geq r_0$  e  $\phi(t) \in [-\theta, \theta]$ . Como a imagem do segmento  $z(t)$  por  $\Lambda$  é uma curva podemos estimar

seu comprimento da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\Lambda(\tilde{b}) - \Lambda(b) &= \int_{(1-t)b+i\tilde{b}} \Lambda'(z) dz = (\tilde{b} - b) \int_0^1 \Lambda'(z(t)) dt \\ &= e^{i\theta_0} (\tilde{b} - b) \int_0^1 (r(t) \cos \phi(t), r(t) \operatorname{sen} \phi(t)) dt.\end{aligned}$$

Dessa última igualdade podemos minorar a integral por

$$\begin{aligned}\left| \int_0^1 (r(t) \cos \phi(t), r(t) \operatorname{sen} \phi(t)) dt \right| &= \left| \left( \int_0^1 r(t) \cos \phi(t) dt, \int_0^1 r(t) \operatorname{sen} \phi(t) dt \right) \right| \\ &\geq \left| \int_0^1 r(t) \cos \phi(t) dt \right| \geq r_0 \cos \theta,\end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Um outro resultado que precisaremos é o que segue

**Lema 7.1.2** *Dado um número real  $\nu \in (0, 1)$ , existem uma vizinhança complexa  $\mathcal{A}_\nu$  do segmento  $[0, \nu]$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , e  $0 < r_0 < r_1$  tais que para quaisquer  $m \geq 1$  e  $z_1, z_2, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{A}_\nu$ , tem-se*

$$1 + \sum_{i=1}^{m-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \dots z_i \in S_\theta \cap B_{r_0}(0)^c \cap B_{r_1}(0).$$

*Prova.*

Uma vez que  $\nu \in (0, 1)$ , temos que  $\gamma := \frac{\nu+1}{2} \in (\nu, 1)$  e podemos tomar um número natural  $n_0$  tal que

$$\frac{1}{3n_0} < \gamma \quad \text{e} \quad \frac{\gamma^{n_0+1}}{1-\gamma} < \frac{1}{2}. \quad (7.3)$$

(é claro que se  $\nu \rightarrow 1$  então  $n_0 \rightarrow \infty$ ). Em seguida consideremos a bola de centro na origem e raio  $\frac{1}{3n_0}$ ,  $B = B_{\frac{1}{3n_0}}(0)$ , o setor  $S = S_{\frac{\pi}{3n_0}}$ , e definimos a região  $\mathcal{A}_\nu$  como sendo o conjunto

$$\mathcal{A}_\nu := B \cup (S \cap B_\gamma(0)), \quad (7.4)$$

(veja Figura 7.2).

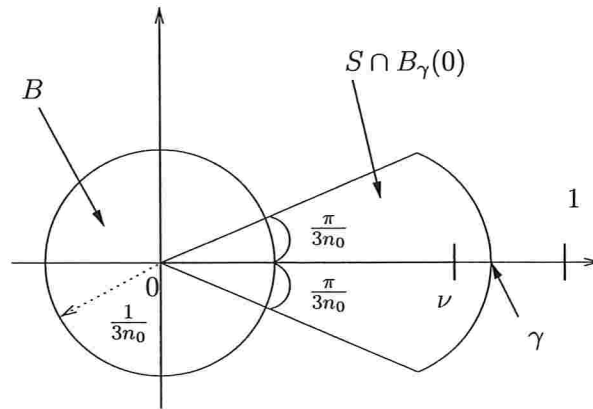


Figura 7.2: Região  $\mathcal{A}_\nu$ .

Vejamos agora que essa região  $\mathcal{A}_\nu$  assim definida satisfaz a conclusão do Lema. Inicialmente definamos o inteiro não negativo  $i_0$  com a seguinte regra

- (a) se  $z_{m-1} \in B$  então  $i_0 = 0$ ;
- (b) se  $z_i \in S \cap B_\gamma(0) \cap B^c$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, m-1$ , então  $i_0 = m-1$ ;
- (c) se não ocorre (a) e nem (b) tomamos  $i_0 \in \{1, 2, \dots, m-2\}$  tal que  $z_{m-i_0}, z_{m-i_0+1}, \dots, z_{m-1} \in S \cap B_\gamma(0) \setminus B$  e  $z_{m-i_0-1} \in B$ .

Feito isso, consideremos  $j_0 = \min\{n_0, i_0\}$  e façamos a seguinte decomposição

$$1 + \sum_{i=1}^{m-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i = 1 + \sum_{i=m-j_0}^{m-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i \\ + \sum_{i=m-n_0}^{m-j_0-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_{m-j_0-1} \cdots z_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-n_0-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i$$

Vamos analisar cada uma das 3 somas que aparecem do lado direito da igualdade acima.

- (1) Na soma  $\sum_{i=m-j_0}^{m-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i$  cada um dos fatores  $z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i$  tem no máximo  $j_0$  termos  $z_i$  e cada um destes termos  $z_i$  pertence a  $S$ . Logo temos que  $0 \leq \operatorname{Re}(z_i)$  e  $|\arg(z_i)| < \frac{\pi}{3n_0}$ , para todo  $i = m - j_0, \dots, m - 1$ . Concluimos que  $|\arg(z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i)| \leq j_0 \frac{\pi}{3n_0} \leq \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ , para todo  $i = m - j_0, \dots, m - 1$ , logo tem parte real maior ou igual a zero. Assim, podemos concluir facilmente que o número complexo  $1 + \sum_{i=m-j_0}^{m-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i$  tem parte real maior ou igual a 1. Observe que se  $j_0 = 0$  (que ocorre somente se  $i_0 = 0$ ) então esta soma não existe;
- (2) Na soma  $\sum_{i=m-n_0}^{m-j_0-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_{m-j_0-1} \cdots z_i$  cada um dos fatores  $z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_{m-j_0-1} \cdots z_i$  possui o termo  $z_{m-j_0-1}$  que pertence a  $B$ . Colocando esse termo em evidência e estimando o módulo desta soma obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=m-n_0}^{m-j_0-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_{m-j_0-1} \cdots z_i \right| \\ & \leq |z_{m-j_0-1}| \cdot \sum_{i=m-n_0}^{m-j_0-1} |z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_{m-j_0} \cdot z_{m-j_0-2} \cdots z_i| \\ & \leq \frac{1}{3n_0} \sum_{i=m-n_0}^{m-j_0-1} |z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_{m-j_0} \cdot z_{m-j_0-2} \cdots z_i| \end{aligned}$$

Como cada fator  $z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_{m-j_0} \cdot z_{m-j_0-2} \cdots z_i$  tem no máximo  $n_0 - j_0$  termos  $z_i$ , e cada  $z_i$  é um número complexo de módulo menor do que 1 concluimos que

$$\left| \sum_{i=m-n_0}^{m-j_0-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_{m-j_0-1} \cdots z_i \right| \leq \frac{1}{3n_0} \cdot n_0 = \frac{1}{3}.$$

Assim, o número complexo  $\sum_{i=m-n_0}^{m-j_0-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_{m-j_0-1} \cdots z_i$  está dentro de uma bola de raio  $\frac{1}{3}$ . Além disso observe que se  $j_0 = n_0$  então esta soma não existe (isso ocorre se  $i_0 > n_0$ );

- (3) Na soma  $\sum_{i=1}^{m-n_0-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i$  cada fator  $z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i$  tem mais do que  $n_0$  termos  $z_i$ . Sendo assim seu módulo pode ser estimado por

$$\left| \sum_{i=1}^{m-n_0-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{m-n_0-1} |z_{m-1} \cdot z_{m-2} \cdots z_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^{n_0+i} = \frac{\gamma^{n_0+1}}{1-\gamma} < \frac{1}{2}.$$

Assim, o número complexo  $\sum_{i=1}^{m-n_0-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \dots z_i$  está dentro de uma bola de raio  $\frac{1}{2}$ .

Portanto, de (1), (2) e (3) concluímos que a soma  $1 + \sum_{i=1}^{m-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \dots z_i$  é um número complexo com parte real maior ou igual a  $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ . Além disso

$$r_0 \equiv \frac{1}{6} \leq |1 + \sum_{i=1}^{m-1} z_{m-1} \cdot z_{m-2} \dots z_i| \leq 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \gamma^i \leq 1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \equiv r_1.$$

E o valor de  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  do enunciado é obtido fazendo

$$S_\theta \supset \overline{\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \geq \frac{1}{6}\}} \cap B_{r_1}(0).$$

■

Para o que segue, sejam  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  espaços de Banach complexos.

**Definição 7.1.1** *Uma aplicação  $P : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é um polinômio homogêneo de grau  $m$  se existir uma aplicação  $m$ -linear  $A : \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{F}$  tal que  $P(x) = Ax^m$ , para todo  $x \in \mathbb{E}$ , onde  $\mathbb{E}^m$  é produto cartesiano de  $m$  cópias de  $\mathbb{E}$  e  $x^m$  denota a  $m$ -upla  $(x, x, \dots, x)$ .*

**Definição 7.1.2** *Uma aplicação  $P : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é dita ser um polinômio de grau no máximo  $m$  se ele pode ser escrito como uma soma*

$$P = P_0 + P_1 + \dots + P_m$$

onde cada  $P_j$  é um polinômio homogêneo de grau  $j$ .

**Definição 7.1.3** *Seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{E}$ . Uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{F}$  é holomorfa se para cada  $a \in U$  existe uma bola  $B_r(a) \subset U$  e uma seqüência de polinômios homogêneos  $P_m$  (onde  $P_m$  tem grau  $m$ ) tais que*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$$

uniformemente para  $x \in B_r(a)$ .

Com essas definições mostra-se, por exemplo, que qualquer polinômio  $P : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é uma aplicação holomorfa (veja exemplo 5.3 de [Muj86]).

**Proposição 7.1.3** [Muj86] *Sejam  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \dots, \mathbb{E}_n, \mathbb{F}$  espaços de Banach e seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \dots \times \mathbb{E}_n$ . Então uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{F}$  é holomorfa se, e somente se,  $f|_{\mathbb{E}_i}$  é holomorfa, para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

**Proposição 7.1.4** [Muj86] *Sejam  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \dots, \mathbb{E}_n, \mathbb{F}$  espaços de Banach e seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{F}$ . Então uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \dots \times \mathbb{E}_n$  é holomorfa se, e somente se, as funções coordenadas  $f_i$  são holomorfas, para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))$ .*

**Teorema 7.1.5** [Muj86] *Sejam  $U \subset \mathbb{E}$  um aberto de  $\mathbb{E}$ , e  $f_n : U \rightarrow \mathbb{F}$  uma seqüência de funções holomorfas. Se  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformemente para uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{F}$ , sobre qualquer compacto  $K \subset U$ , então a função limite  $f$  é holomorfa.*

Para a demonstração desse teorema e teoria relacionada veja [Muj86].

**Lema 7.1.6** *Se  $g_L(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,g_L} z^i$  e  $g_R(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,g_R} z^i$  são funções holomorfas tais que  $(a_{i,g_L})_{i \geq 1}, (a_{i,g_R})_{i \geq 1} \in l_1(\mathbb{C})$ , então as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times B_1(0) & \longrightarrow & l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ (g_L, g_R, b, z) & \xrightarrow{H_1} & (g_L, g_R, b, b) \\ (g_L, g_R, b, z) & \xrightarrow{H_2} & (g_L, g_R, b, b-1) \\ (g_L, g_R, b, z) & \xrightarrow{H_3} & (g_L, g_R, b, b+g_L(z)) \\ (g_L, g_R, b, z) & \xrightarrow{H_4} & (g_L, g_R, b, b-1+g_R(z)) \end{array}$$

são holomorfas.

*Prova.*

De acordo com as Proposições 7.1.3 e 7.1.4 basta provarmos que cada função coordenada de  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , é holomorfa. Como as três primeiras funções coordenadas de  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , são projeções temos claramente que elas são holomorfas. Assim, resta-nos mostrar que a quarta função coordenada é holomorfa. A quarta função coordenada de  $H_1$  e de  $H_2$  também é claramente holomorfa. Assim, vamos apenas mostrar que as funções coordenadas de  $H_3$ ,  $b + g_L(z)$ , e de  $H_4$ ,  $b - 1 + g_R(z)$ , são holomorfas. Para isso basta ver que podemos aproximá-las por polinômios sobre conjuntos compactos,

isto é, sejam  $r_1, r_2, r_3 > 0$ ,  $0 < r_4 < 1$ , e consideremos  $(g_L, g_R, b, z) \in \overline{B_{r_1}(0)} \times \overline{B_{r_2}(0)} \times \overline{B_{r_3}(0)} \times \overline{B_{r_4}(0)}$ . Temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,g_L} z^i - \sum_{i=1}^m a_{i,g_L} z^i \right| &\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_{i,g_L}| \cdot |z|^i \\ &\leq \left( \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_{i,g_L}| \right) \left( \sum_{i=m+1}^{\infty} |z|^i \right) \\ &\leq r_1 \cdot \frac{r_4^{m+1}}{1-r_4} \end{aligned}$$

Como, dado um compacto  $K \subset l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times B_1(0)$ , existem  $r_1, r_2, r_3 > 0$  e  $0 < r_4 < 1$  tais que  $K \subset \overline{B_{r_1}(0)} \times \overline{B_{r_2}(0)} \times \overline{B_{r_3}(0)} \times \overline{B_{r_4}(0)}$ , temos que a quarta função coordenada de  $H_3$  é o limite uniforme de polinômios sobre os compactos de  $l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times B_1(0)$ . Logo, pelo Teorema 7.1.5 concluímos que ela é holomorfa. Analogamente, mostra-se que a quarta função coordenada de  $H_4$  é holomorfa. ■

Como composição de funções holomorfas é uma função holomorfa, obtemos, como consequência desse Lema, que as composições entre as  $H_i$  são funções holomorfas.

**Teorema 7.1.7 (Teorema da Função Implícita em espaços de Banach)** *Sejam  $U$  um subconjunto aberto do espaço de Banach  $E$  e  $V$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ . Seja  $\Lambda : U \times V \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa. Suponha que exista  $(a_0, b_0) \in U \times V$  tal que  $\frac{\partial \Lambda}{\partial b}(a_0, b_0) \neq 0$  e  $\Lambda(a_0, b_0) = 0$ . Então existe uma vizinhança  $U_0$  de  $a_0$  e uma única aplicação holomorfa  $g : U_0 \rightarrow V$  tal que  $\Lambda(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in U_0$ .*

Para a demonstração desse Teorema da Função Implícita ver [Kra82] e [Cha85].

## 7.2 A escolha certa

No Capítulo 6 foi mostrado que o conjunto de parâmetros infinitamente renormalizáveis  $(f_L, f_R, b) \in \mathcal{D}_L \times \mathcal{D}_R \times (0, 1)$  constitui uma laminação  $C^0$  do espaço de parâmetros, onde cada folha é o gráfico de alguma função de  $(f_L, f_R)$ . Já em [AC06], no caso linear, foi mostrado um pouco mais, ou seja, que as folhas da laminação são de classe  $C^\infty$ . Em ambos os casos cada folha  $\mathcal{L}$  dessa laminação foi obtida por aproximação da seguinte maneira. Fixada uma combinatoria  $\Gamma = \{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), \dots, (\sigma_n, k_n), \dots\}$ , temos a folha  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Gamma)$  da laminação associada a  $\Gamma$ , e fixadas  $f_L$  e  $f_R$  vimos que  $\mathcal{L}(\Gamma)$  intersecta



a fibra  $\{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$  em um único ponto  $b^* = b^*(\Gamma)$ , onde esse parâmetro  $b^*$  foi obtido pela intersecção de intervalos encaixados, isto é,

$$\{b^*\} = \{b(\Gamma)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_{k_0 k_1 \dots k_n}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n}.$$

Assim como vimos na Seção 5.3 os extremos dos intervalos  $T_{k_0 k_1 \dots k_{n-1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}}$  são dados pela intersecção da fibra  $\{(f_L, f_R)\} \times (0, 1)$  com as folhas associadas aos parâmetros  $b$  que são soluções de equações do tipo

$$f_b^{r_n-1}(b-1) = 0_{r_n}^+ = 0$$

e

$$f_b^{l_n-1}(b) = 0_{l_n}^- = 0,$$

onde os inteiros  $r_n$  e  $l_n$  são determinados pela seqüência (finita)  $((\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1) \dots (\sigma_{n-1}, k_{n-1}))$ .

Com isso temos que o parâmetro  $b^* = b^*(\Gamma)$  é o limite de uma seqüência  $(b_n^*)_{n \geq 1}$ , onde cada  $b_n^*$  é um dos bordos do intervalo  $T_{n-1} = T_{k_0 k_1 \dots k_{n-1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}}$ , e assim observamos que existem duas possibilidades para cada  $b_n^*$ . Para o que virá adiante, essa dicotomia será eliminada pela combinatória  $\Gamma$ . Mais precisamente, suponhamos, sem perda de generalidade, que a dicotomia dos  $b_n^*$ 's foi eliminada até o índice  $n-1$ . Assim, como procedemos para determinar qual bordo de  $T_{n-1}$  deve ser o  $b_n^*$ ? A resposta é simples mas será melhor compreendida mais adiante quando ficar explícito o uso dessa escolha dos  $b_n^*$ 's. Até aqui sabemos que os bordos de  $T_n$  são as soluções de  $0_{r_n}^+ = 0$  e  $0_{l_n}^- = 0$ . E assim a escolha de  $b_n^*$  segue a seguinte regra:

- (a) se  $\sigma_n = -$  então  $b_n^*$  é a solução de  $0_{l_n}^- = 0$
- (b) se  $\sigma_n = +$  então  $b_n^*$  é a solução de  $0_{r_n}^+ = 0$ ,

(veja Figura 7.3).

Como usaremos muito essa seqüência  $(b_n^*)_{n \geq 1}$  assim determinada, para não precisarmos repetir toda essa escolha dos  $b_n^*$ 's, daremos a ela o nome de *escolha certa*.

Cabe aqui observarmos uma relação importante entre a escolha certa e as seqüências de inteiros

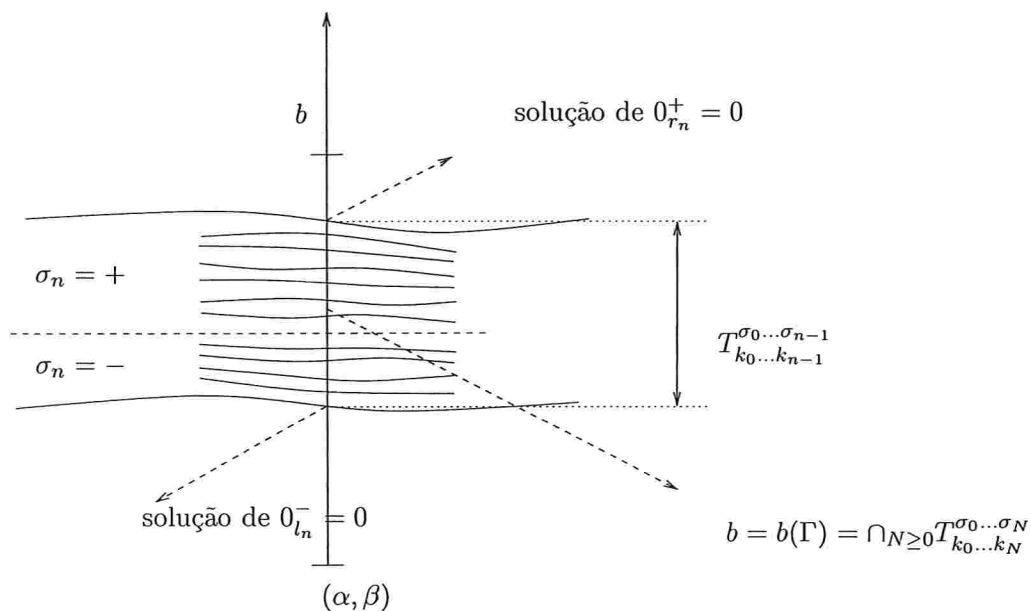


Figura 7.3: Intersecção dos intervalos  $T_{k_0 \dots k_N}^{\sigma_0 \dots \sigma_N}$ 's.

$(r_n)_{n \geq 0}$  e  $(l_n)_{n \geq 0}$ , ou seja, se  $\sigma_n = -$  além de termos  $b_n^*$  como a solução de  $0_{l_n}^- = 0$  vale também que

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + k_n l_n \\ l_{n+1} = r_n + (k_n + 1) l_n \end{cases} \quad (7.5)$$

e se  $\sigma_n = +$ , além de termos  $b_n^*$  como a solução de  $0_{r_n}^+ = 0$  também vale

$$\begin{cases} r_{n+1} = (k_n + 1) r_n + l_n \\ l_{n+1} = k_n r_n + l_n \end{cases} \quad (7.6)$$

### 7.3 Notação das composições

Consideremos uma combinatória

$$\Gamma = \{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), \dots, (\sigma_i, k_i), \dots\}$$

e a aplicação infinitamente renormalizável correspondente  $f$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} b + f_L(x) & = F_L(x) \quad , \quad x \in [b-1, 0) \\ b-1 + f_R(x) & = F_R(x) \quad , \quad x \in (0, b] \end{cases}$$

De acordo com a lei das aplicações de retorno, vemos que cada  $R_i$  é a composição de  $F_L$  com  $F_R$  (ou vice-versa) um certo número de vezes e em uma certa ordem que são determinados pela combinatória  $\Gamma$  e pelo ponto  $x$  onde a aplicação  $R_i$  está sendo aplicada. Com isso a cada trajetória  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^i(x), \dots\}$  associamos uma seqüência  $w = w(x) = \{w_i\}_{i \geq 0}$ , onde para cada  $i \geq 0$  temos que  $w_i = L$  se  $f^i(x) < 0$  ou  $w_i = R$  se  $f^i(x) > 0$ , de maneira que  $f^m$  significará  $m$  composições de  $F_L$  com  $F_R$  na ordem determinada pela combinatória  $\Gamma$  e pela trajetória do ponto  $x$ . Ou seja

$$f^m(x) = [\bigcirc_{i=0}^{m-1} F_{w_i}](x) = F_{w_{m-1}} \circ F_{w_{m-2}} \circ \dots \circ F_{w_1} \circ F_{w_0}(x). \quad (7.7)$$

Nos casos em que  $x$  é um dos limites  $0^-$  ou  $0^+$  então  $w_0 = L$  ou  $w_0 = R$ , respectivamente.

#### 7.4 Analiticidade numa família a 3 parâmetros com ramos afins

Nesta seção vamos mostrar a analiticidade das folhas da laminação dos infinitamente renormalizáveis em uma família a 3 parâmetros. Isto servirá como introdução ao caso mais geral da próxima seção. Seja  $\{f_{\alpha, \beta, b}\}_{\alpha, \beta, b}$  com  $(\alpha, \beta, b) \in (0, 1)^3$  a família de funções do intervalo  $[b-1, b]$  dada por

$$f_{\alpha, \beta, b}(x) = \begin{cases} b + \alpha x & \text{se } x \in [b-1, 0) \\ b-1 + \beta x & \text{se } x \in (0, b] \end{cases} \quad (7.8)$$

Para essa família provaremos o seguinte

**Teorema 7.4.1** *O conjunto dos parâmetros infinitamente renormalizáveis  $(\alpha, \beta, b) \in (0, 1)^3$  é uma laminação onde cada folha é o gráfico de alguma função analítica de  $(\alpha, \beta)$ .*

Inicialmente, fixada uma combinatória  $\Gamma$ , temos a aplicação infinitamente renormalizável  $f$  correspondente dada por

$$f(x) = \begin{cases} b^* + \alpha x & = F_L(x) \quad , \quad x \in [b^*-1, 0) \\ b^*-1 + \beta x & = F_R(x) \quad , \quad x \in (0, b^*] \end{cases}$$

e como vimos anteriormente também temos uma seqüência  $(b_n^*)_{n \geq 1}$ , determinada pela *escolha certa*, convergindo para  $b^* = b^*(\Gamma)$  e, tanto para  $b^* = b^*(\Gamma)$  quanto para cada  $b_n^*$ , temos uma folha correspondente. Mais precisamente, para cada  $n \geq 0$ , seja  $L_n : (0, 1)^2 \rightarrow (0, 1)$  a função cujo gráfico é a folha correspondente a  $b_n^*$ , e seja  $L : (0, 1)^2 \rightarrow (0, 1)$  a função cujo gráfico corresponde a  $b^*$ . Para cada par  $\alpha_{\max}, \beta_{\max} \in (0, 1)$  mostraremos que essas folhas são analíticas na região  $(0, \alpha_{\max}] \times (0, \beta_{\max}]$ . Mas como  $\alpha_{\max} \in (0, 1)$  e  $\beta_{\max} \in (0, 1)$  são arbitrários teremos que as folhas serão analíticas em  $(0, 1)^2$ .

Sendo assim, sejam  $\alpha_{\max}, \beta_{\max} \in (0, 1)$  e  $\nu = \max\{\alpha_{\max}, \beta_{\max}\}$ . Para esse  $\nu$  tome a vizinhança  $\mathcal{A}_\nu$  como definida em (7.4) e vamos estender o domínio dessas funções  $L_n$  e  $L$  para a região complexa  $\mathcal{A}_\nu \times \mathcal{A}_\nu$ . Para isso o primeiro passo é complexificar a função  $f$  acima trocando a variável real  $x$  pela variável complexa  $z$ , isto é, passaremos a trabalhar com a extensão complexa dos ramos de  $f$ :

$$\begin{aligned} b + \alpha z &= F_L(z) \\ b - 1 + \beta z &= F_R(z) \end{aligned}$$

onde  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  e  $z, b \in \mathbb{C}$ . Ao fazermos isso perdemos não só a dinâmica do problema (pois agora não temos mais a invariância de algum conjunto como no caso real em que o intervalo  $[b^* - 1, b^*]$  era invariante) como a própria função de iteração, já que não existe extensão para  $f$  e sim para seus ramos.

Vimos na Subseção 7.3 que a combinatória  $\Gamma$  e o ponto  $x$  determinam a ordem das composições de  $F_L$  com  $F_R$  (ou vice-versa). Então podemos complexificar uma composição fixada tomando  $z$  no lugar de  $x$ . Assim  $f^m(x) = [\bigcirc_{i=0}^{m-1} F_{w_i}](x)$  se complexifica para

$$\begin{aligned} [\bigcirc_{i=0}^{m-1} F_{w_i}](z) &= F_{w_{m-1}} \circ F_{w_{m-2}} \circ \dots \circ F_{w_1} \circ F_{w_0}(z) \\ &= \bigcirc_{i=0}^{m-1} (b + \tau(w_i) + f_{w_i}(z)) \end{aligned}$$

onde  $\tau(L) = 0$ ,  $\tau(R) = -1$ ,  $f_L(z) = \alpha z$  e  $f_R(z) = \beta z$ . Definindo  $\xi_L = \alpha$  e  $\xi_R = \beta$  temos que  $f_{w_i}(z) = \xi_{w_i} z$  e assim a fórmula acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}_{i=0}^{m-1} F_{w_i}](z) &= \mathcal{O}_{i=0}^{m-1}(b + \tau(w_i) + f_{w_i}(z)) \\
&= \mathcal{O}_{i=0}^{m-1}(b + \tau(w_i) + \xi_{w_i} z) \\
&= b + \tau(w_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} \xi_{w_{m-1}} \cdot \xi_{w_{m-2}} \cdots \xi_{w_i} (b + \tau(w_{i-1})) + (\prod_{i=0}^{m-1} \xi_{w_i}) z
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Assim como no caso real, precisamos garantir a existência de solução de equações do tipo

$$[\mathcal{O}_{i=0}^{m-1} F_{w_i}](0) = 0 \tag{7.10}$$

na variável  $b$  para cada par de números complexos  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_\nu$  fixados. As soluções dessas equações serão as extensões das folhas de aproximação  $b_n^*$ . Mais explicitamente, temos

$$b + \tau(w_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} \xi_{w_{m-1}} \cdot \xi_{w_{m-2}} \cdots \xi_{w_i} (b + \tau(w_{i-1})) = 0, \tag{7.11}$$

equação esta que pode ser explicitamente resolvida:

$$b = - \frac{\tau(w_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} \xi_{w_{m-1}} \cdot \xi_{w_{m-2}} \cdots \xi_{w_i} \tau(w_{i-1})}{1 + \sum_{i=1}^{m-1} \xi_{w_{m-1}} \cdot \xi_{w_{m-2}} \cdots \xi_{w_i}}. \tag{7.12}$$

Essa expressão para  $b$  nos mostra que  $b$  é uma função analítica de  $\alpha$  e  $\beta$  desde que a soma  $1 + \sum_{i=1}^{m-1} \xi_{w_{m-1}} \cdot \xi_{w_{m-2}} \cdots \xi_{w_i}$  não se anule para  $\alpha$  e  $\beta$  dentro da região complexa  $\mathcal{A}_\nu$ . Mas isso é exatamente o que assegura o Lema 7.1.2.

Além disso, ainda pelo Lema 7.1.2, que garante uma minoração uniforme para o módulo do denominador, e pelo fato de que o numerador pode ser majorado, em módulo, por  $\frac{1}{1-\gamma}$ , segue que existe uma constante  $C > 0$  tal que  $|b| \leq C$  para qualquer  $b$  que seja solução de uma equação como (7.10).

Assim fica garantido que dentro da região  $\mathcal{A}_\nu \times \mathcal{A}_\nu$  a função  $b$ , solução de (7.10) e explicitada em (7.12), é uma função analítica complexa e limitada. Esse argumento nos assegura que as extensões das folhas correspondentes aos  $b_n^*$ 's são analíticas complexas. Falta então garantirmos que a extensão complexa da folha correspondente ao  $b^* = b^*(\Gamma)$  também é analítica complexa, e para isso bastaria

que essa última fosse o limite uniforme das anteriores. Nesse momento faremos uso do Teorema 7.1.5.

Uma vez que temos, pela *escolha certa*, a seqüência  $(b_n^*)_{n \geq 1}$  convergindo para  $b^* = b^*(\Gamma)$ , olhamos para a seqüência complexa correspondente, ou seja, olhamos para a seqüência  $(b_n)_{n \geq 1}$  que está sobre a fibra  $\{\alpha\} \times \{\beta\} \times \mathbb{C}$  e vamos verificar que essa seqüência é de fato uniformemente Cauchy. Sem perda de generalidade vamos assumir que  $b_n$  é solução de  $f^{l_n}(0^-) = 0$  (ou seja, pela escolha certa estamos imediatamente supondo que  $\sigma_n = -$  e que vale (7.5)). Daí segue que a extensão complexa dessa solução é a solução de  $[\bigcirc_{i=0}^{l_n-1} F_{w_i}](0) = 0$ , onde  $w_0 = L$ ,  $w_1 = R$  e os demais  $w_i$  são determinados pela órbita lateral esquerda até  $l_n - 1$ . Essa equação se escreve explicitamente como

$$b_n + \tau(w_{l_n-1}) + \sum_{i=1}^{l_n-1} \xi_{w_{l_n-1}} \cdot \xi_{w_{l_n-2}} \cdots \xi_{w_i}(b_n + \tau(w_{i-1})) = 0. \quad (7.13)$$

Já  $b_{n+1}$  será a complexificação da solução de  $0_{l_{n+1}}^- = 0$ , isto é,

$$[\bigcirc_{i=0}^{r_n+(k_n+1)l_n-1} F_{\tilde{w}_i}](0) = 0 \quad (7.14)$$

se  $\sigma_{n+2} = -$  (usando 7.5 para  $l_{n+1}$ ), onde os  $\{\tilde{w}_i\}$  são determinados pela órbita lateral esquerda até  $l_{n+1} - 1$ , ou a complexificação da solução de  $0_{r_{n+1}}^+ = 0$ , isto é,

$$[\bigcirc_{i=0}^{r_n+k_n l_n-1} F_{\tilde{w}_i}](0) = 0 \quad (7.15)$$

se  $\sigma_{n+2} = +$  (usando 7.5 para  $r_{n+1}$ ). Agora observamos que  $0_{l_{n+1}}^-$  é  $f^{l_n}(f^{k_n l_n + r_n}(0^-))$ , sendo  $f^{l_n}$  o ramo esquerdo da aplicação de retorno em  $[0_{r_n}^+, 0_{l_n}^-]$ , o mesmo que leva  $0^-$  em  $0_{l_n}^-$ . Portanto podemos reescrever (7.14) como

$$[\bigcirc_{i=0}^{l_n-1} F_{w_i}](z_n(b_{n+1})) = 0, \quad (7.16)$$

onde  $z_n(b)$  é a complexificação de  $f^{k_n l_n + r_n}(0^-)$ . Se  $\sigma_{n+1} = +$  vale a mesma observação, desta vez com  $0_{r_{n+1}}^+$ , onde teremos  $z_n(b)$  a complexificação de  $f^{(k_n-1)l_n + r_n}(0^+)$ .

Então usamos (7.9) em (7.16) e subtraímos de (7.13) para obter

$$(b_n - b_{n+1}) \left( 1 + \sum_{i=1}^{l_n-1} \xi_{w_{l_n-1}} \cdot \xi_{w_{l_n-2}} \cdots \xi_{w_i} \right) = \left( \prod_{i=0}^{l_n-1} \xi_{w_i} \right) z_n(b_{n+1}) = 0$$

Como vimos acima,  $|b_{n+1}|$  é limitado por uma constante  $C$  (independente de  $n$ ) para  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_\nu$ . Usando (7.9), segue que também  $|z_n(b_{n+1})|$  é limitado, independente de  $n$ , por uma constante  $\tilde{C} > 0$ . Portanto

$$|b_n - b_{n+1}| \leq \frac{|\prod_{i=0}^{l_n-1} \xi_{w_i}|}{|1 + \sum_{i=1}^{l_n-1} \xi_{w_{i+1}} \cdots \xi_{w_{l_n-1}}|} \tilde{C}.$$

Então como o denominador é uniformemente afastado de 0, pelo Lema 7.1.2, e o numerador é majorado por  $\tilde{C}\gamma^{l_n}$ , segue que  $|b_n - b_{n+1}|$  converge (super) exponencialmente para zero e que  $b_n$  é uniformemente Cauchy em  $\mathcal{A}_\nu \times \mathcal{A}_\nu$ .

Portanto pelo Teorema 7.1.5 concluímos que a folha limite  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$  (a folha correspondente ao limite  $b$  da seqüência  $(b_n)_{n \geq 0}$ ) é holomorfa. Como essa folha  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$  é a extensão complexa da folha real  $\mathcal{L}(\Gamma)$  segue que  $\mathcal{L}(\Gamma)$  é uma folha analítica real definida no retângulo  $(0, \alpha_{\max}] \times (0, \beta_{\max}]$ . Sendo  $\alpha_{\max}, \beta_{\max} \in (0, 1)$  arbitrários podemos concluir que  $\mathcal{L}(\Gamma)$  é analítica real no retângulo  $(0, 1)^2$ .

## 7.5 Analiticidade da laminação num espaço de funções analíticas

### 7.5.1 Espaço e topologia

Nesta seção vamos provar resultados análogos aos da seção anterior mas em um contexto mais geral. A partir de agora trabalharemos com funções  $(f_L, f_R, b) \in \mathcal{D}$  tais que

$$f_L(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_L} x^i, \quad \forall x \in (-1, 0), \quad \text{com } (a_{i,f_L})_{i \geq 1} \in l_1$$

$$f_R(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_R} x^i, \quad \forall x \in (0, 1), \quad \text{com } (a_{i,f_R})_{i \geq 1} \in l_1.$$

Continuaremos denotando uma aplicação  $f$  desse tipo por  $(F_L, F_R)$ , ou  $(f_L, f_R, b)$  ou simplesmente por  $f_b$  quando conveniente. Além disso vale ressaltar que para o conjunto formado por funções desse tipo também são válidos todos os resultados provados nos Capítulos anteriores, como, por exemplo, a existência de uma laminação formada pelos parâmetros infinitamente renormalizáveis. E como já temos a existência dessa laminação assegurada no Capítulo 6 vamos, aqui nessa seção, provar que essas folhas são, na verdade, analíticas assim como fizemos na seção anterior no caso linear.

Se denotarmos por  $\mathcal{F}$  o conjunto das aplicações descritas acima vemos que  $\mathcal{F}$  pode ser identificado com um subconjunto do espaço de Banach  $l_1 \times l_1 \times \mathbb{R}$ , pois se  $f_L$  e  $f_R$  são como acima então suas séries de potência  $f_L(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_L} x^i$  e  $f_R(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_R} x^i$  possuem a propriedade de que as seqüências  $(a_{i,f_L})_{i \geq 0}$  e  $(a_{i,f_R})_{i \geq 0}$  pertencem ao espaço de Banach  $l_1 := \{(a_i)_{i \geq 0} \subset \mathbb{R}; \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty\}$ . Deste modo temos uma correspondência biunívoca entre os elementos do nosso espaço  $\mathcal{F}$  e elementos de um subconjunto  $\mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \times (0, 1)$  do espaço de Banach  $l_1 \times l_1 \times \mathbb{R}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \iota: \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \times (0, 1) \\ f &\mapsto ((a_{i,f_L})_{i \geq 0}, (a_{i,f_R})_{i \geq 0}, b) \end{aligned}$$

(note que os conjuntos  $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_R \subset l_1$  não são abertos em  $l_1$ ). A identificação faz com que seja natural colocarmos em  $\mathcal{F}$  a seguinte norma: se  $f = (f_L, f_R, b) \in \mathcal{F}$  definimos

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \|f_L\|_{l_1} + \|f_R\|_{l_1} + |b| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,f_L}| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,f_R}| + |b|.$$

Dentro desse espaço  $\mathcal{F}$  as funções possuem a propriedade de que as derivadas de seus ramos variam continuamente na norma  $l_1$ .

**Lema 7.5.1** *Seja  $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$  com  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ . Então dado  $c \in (0, 1)$  e  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| < \delta$  implica  $|g'(x) - f'(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in [-c, c]$ , onde  $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i$ .*

*Prova.*

Temos

$$|f'(x) - g'(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} i |a_i - b_i| \cdot |x|^{i-1} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} i |x|^{i-1} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| \right)$$

Como  $x \in [-c, c]$  vale

$$\sum_{i=1}^{\infty} i |x|^{i-1} \leq \sum_{i=1}^{\infty} i c^{i-1} < \infty.$$



Assim, dado  $c \in (0, 1)$  e  $\epsilon > 0$  tome  $\delta = \frac{\epsilon}{\sum_{i=1}^{\infty} ic^{i-1}}$  que teremos

$$|g'(x) - f'(x)| < \epsilon$$

se  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| < \delta$ . ■

Esse resultado também vale em  $l_1(\mathbb{C})$  com um fechado contido na bola unitária no lugar de  $[-c, c]$ . Além disso usaremos a seguinte definição de função analítica

**Definição 7.5.1** *Uma aplicação  $L : \mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \rightarrow (0, 1)$  é analítica se existem vizinhança  $V$  de  $\mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R$  em  $l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C})$  e uma aplicação  $\hat{L} : V \rightarrow \mathbb{C}$ , holomorfa e tal que  $L = \hat{L}|_{\mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R}$ .*

Estabelecidos esses conceitos e hipóteses utilizaremos o restante deste capítulo para provarmos o seguinte resultado

**Teorema 7.5.2** *O conjunto dos parâmetros infinitamente renormalizáveis  $(f_L, f_R, b) \in \mathcal{F}$  constitui uma laminação de  $\mathcal{F}$ , onde cada folha é o gráfico de alguma função analítica de  $(f_L, f_R)$ .*

### 7.5.2 Roteiro da prova do Teorema 7.5.2

Para provarmos o Teorema 7.5.2 seguiremos os seguintes passos. Para facilitar a notação, identificamos  $\mathcal{F}$  com  $\mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \times (0, 1)$  e tomamos um ponto  $f = (f_L, f_R, b^*) \in \mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \times (0, 1)$  sobre uma lâmina  $\mathcal{L}$  da laminação de parâmetros infinitamente renormalizáveis. Sabemos que essa lâmina  $\mathcal{L}$  é o gráfico de uma aplicação

$$L : \mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \rightarrow (0, 1)$$

e que possui uma combinatória associada, ou seja,

$$\Gamma\{(\sigma_0, k_0), (\sigma_1, k_1), \dots, (\sigma_n, k_n), \dots\},$$

e assim  $L = L_\Gamma$  e  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Gamma)$ . Essa combinatória nos fornece uma seqüência de intervalos encaixados  $T_{k_0 k_1 \dots k_n}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n}$  cuja intersecção é o parâmetro  $b^*$ , isto é

$$\{b^*\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_{k_0 k_1 \dots k_n}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n}$$

onde  $T_{k_0 k_1 \dots k_{n+1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{n+1}} \subset T_{k_0 k_1 \dots k_n}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n}$  para todo  $n \geq 0$ . Além disso a aplicação  $L$  é aproximada por uma seqüência de funções  $L_n : \mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \rightarrow (0, 1)$ , onde, para cada  $n \geq 0$ , a função  $L_n$  é a função correspondente ao  $b_n^*$ , o bordo de  $T_{k_0 k_1 \dots k_{n-1}}^{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}}$ , determinado pela escolha certa. Observemos que até esse momento tudo isso já foi provado anteriormente.

Em seguida tomamos uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $(f_L, f_R)$  em  $l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C})$  e uma bola  $B_\eta(b^*)$  satisfazendo as seguintes condições: existe natural  $n_1$  tal que, para todo  $n \geq n_1$ , a função  $L_n$  se estende de uma vizinhança de  $(f_L, f_R)$  em  $\mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R$  para  $\mathcal{U}$  como uma função holomorfa  $\hat{L}_n$  com imagem em  $B_\eta(b^*)$ . Em seguida provamos que  $(\hat{L}_n)_{n \geq 0}$  é uma seqüência uniformemente Cauchy na topologia  $C^0$  cujo limite é a função  $\hat{L}$  que é a extensão de  $L$ . Neste ponto usamos novamente o Teorema 7.1.5 para garantirmos que  $\hat{L}$  é holomorfa e concluímos assim que  $L$  é analítica real por ser a restrição da função holomorfa  $\hat{L}$ .

### 7.5.3 Primeiro passo: vizinhanças e constantes

Podemos identificar  $\mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \times (0, 1)$  com um subconjunto de  $l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$  através de

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_L} x^i, \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_R} x^i, b \right) \mapsto \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_L} z^i, \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,f_R} z^i, b \right)$$

Então podemos falar, para cada elemento  $(f_L, f_R, b) \in \mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \times (0, 1)$ , de sua vizinhança em  $l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ .

Fixe uma combinatória  $\Gamma$ , tome  $\mathcal{L}(\Gamma) \subset \mathcal{E}_L \times \mathcal{E}_R \times (0, 1)$  (já identificado com um subconjunto de  $l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ ) a lâmina que é o conjunto das aplicações infinitamente renormalizáveis com essa combinatória e seja  $(f_L, f_R, b^*) \in \mathcal{L}(\Gamma)$ .

Por hipótese sobre as funções de  $\mathcal{E}_L$  e  $\mathcal{E}_R$ , existe  $\nu \in (0, 1)$  tal que  $0 < Df_L(z) \leq \nu, \forall z = x + iy$  com  $y = 0$  e  $x \in (-1, 0)$ , e  $0 < Df_R(z) \leq \nu, \forall z = x + iy$  com  $y = 0$  e  $x \in (0, 1)$ .

Sejam  $\mathcal{A}_\nu, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  e  $0 < r_0 < r_1$  dados pelo Lema 7.1.2. Seja também  $\gamma = \sup \{|z|; z \in \mathcal{A}_\nu\} < 1$ . Pelo Lema 7.5.1, podemos garantir que existem  $\rho_1 > 0$  e vizinhanças complexas convexas  $V_L$  de  $[b^* - 1, 0]$  e  $V_R$  de  $[0, b^*]$ , com  $\overline{V_L} \subset B_1(0)$  e  $\overline{V_R} \subset B_1(0)$ , tais que

$$Dg_L(z) \in \mathcal{A}_\nu, \forall z \in V_L, \forall g_L \in B_{\rho_1}(f_L)$$

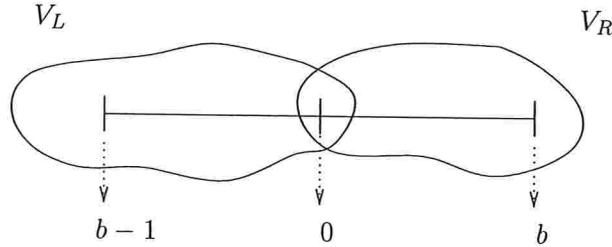


Figura 7.4: Ilustração das vizinhanças complexas  $V_L$  e  $V_R$ .

e

$$Dg_R(z) \in \mathcal{A}_\nu, \forall z \in V_R, \forall g_R \in B_{\rho_1}(f_R).$$

Em seguida, tomemos  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \overline{B_\delta(z)} &\subset V_L, \forall z \in [b^* - 1, 0] \\ \overline{B_\delta(z)} &\subset V_R, \forall z \in [0, b^*] \end{aligned} \tag{7.17}$$

e tomemos  $\eta > 0$  tal que

$$\eta + \frac{\rho_1 + \eta}{1 - \gamma} < \delta. \tag{7.18}$$

Das constantes relacionadas com  $\mathcal{A}_\nu$  e  $\eta$  tiramos ainda a constante

$$d = \frac{\eta}{2} r_0 \cos \theta \tag{7.19}$$

e vamos definir  $\rho \in (0, \rho_1)$  tal que

$$\frac{\rho}{1 - \gamma} < \frac{d}{2}. \tag{7.20}$$

Em particular, a troca de  $\rho_1$  por  $\rho$  não afeta a exigência em  $\eta$ :

$$\eta + \frac{\rho + \eta}{1 - \gamma} < \eta + \frac{\rho_1 + \eta}{1 - \gamma}.$$

Então  $\mathcal{U}$  será  $B_\rho(f_L) \times B_\rho(f_R)$ .

#### 7.5.4 Lâminas bem definidas numa vizinhança apropriada

Precisamos agora garantir que as folhas correspondentes aos  $b_n$ 's, que são extensões das soluções das equações

$$f_b^{l_n}(0^-) = 0 \quad (\text{ou} \quad f_b^{r_n}(0^+) = 0),$$

estão definidas em  $B_\rho(f_L) \times B_\rho(f_R)$ . Com esse objetivo temos que garantir, primeiramente, que para cada aplicação  $g = (g_L, g_R, b) \in B_\rho(f_L) \times B_\rho(f_R) \times \overline{B_\eta(b^*)}$ , as iteradas  $g^{l_n}(0)$  (e  $g^{r_n}(0)$ ) permanecem dentro da região complexa  $V_L \cup V_R$ . Para sermos mais precisos, isto quer dizer que, se  $f_b^{l_n}(0^-) = [\mathcal{O}_{i=0}^{l_n-1} F_{w_i}](0^-)$ , então todos os iterados  $[\mathcal{O}_{i=0}^{m-1} G_{w_i}](0^-)$ , com  $1 \leq m \leq l_n$ , permanecem em  $V_L \cup V_R$  e estão bem definidos, onde  $G_{w_i} = b + \tau(w_i) + g_{w_i}$ . Mais especificamente, para todo  $m = 1, 2, \dots, l_n$ ,  $[\mathcal{O}_{i=0}^{m-1} G_{w_i}](0^-)$  está definido e pertence a  $V_{w_m}$ .

Se  $z, w \in V_L$  então

$$\begin{aligned} |G_L(z) - F_L(w)| &\leq |G_L(z) - G_L(w)| + |G_L(w) - F_L(w)| \\ &\leq \gamma \cdot |z - w| + \|g_L - f_L\|_{l_1(\mathbb{C})} + |b - b^*| \\ &\leq \gamma \cdot |z - w| + \rho + \eta, \end{aligned} \tag{7.21}$$

e, analogamente, se  $z, w \in V_R$  então

$$\begin{aligned} |G_R(z) - F_R(w)| &\leq |G_R(z) - G_R(w)| + |G_R(w) - F_R(w)| \\ &\leq \gamma \cdot |z - w| + \|g_R - f_R\|_{l_1(\mathbb{C})} + |b - b^*| \\ &\leq \gamma \cdot |z - w| + \rho + \eta. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Utilizando essas desigualdades recursivamente obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{O}_{i=0}^{m-1} G_{w_i}(0) - \mathcal{O}_{i=0}^{m-1} F_{w_i}(0)| &\leq \gamma \cdot |\mathcal{O}_{i=0}^{m-2} G_{w_i}(0) - \mathcal{O}_{i=0}^{m-2} F_{w_i}(0)| + \rho + \eta \\ &\leq \gamma^2 \cdot |\mathcal{O}_{i=0}^{m-3} G_{w_i}(0) - \mathcal{O}_{i=0}^{m-3} F_{w_i}(0)| + \gamma(\rho + \eta) + \rho + \eta \\ &\vdots \\ &\leq \gamma^{m-1} \cdot |b - b^*| + (\rho + \eta)(\gamma^{m-2} + \gamma^{m-3} + \dots + \gamma + 1) \\ &\leq \eta + \frac{\rho + \eta}{1 - \gamma} < \delta, \end{aligned} \tag{7.23}$$

por (7.18). Como  $[\bigcirc_{i=0}^{m-1} F_{w_i}](0)$  pertence ao segmento  $[b^* - 1, b^*]$ , para todo  $m \geq 1$ , então  $[\bigcirc_{i=0}^{m-1} G_{w_i}](0) \in V_{w_m}$ , para todo  $m \geq 1$ , por causa da imposição (7.17) sobre a constante  $\delta$ .

Para explicitar as dependências corretas das expressões, introduziremos a seguinte notação:

$$\Lambda_{+,m}(g_L, g_R, b) = [\bigcirc_{i=0}^{m-1} g_{w_i} + b + \tau(w_i^+)](0), \quad (7.24)$$

onde  $\{w_i^+\}$  é determinada pela órbita lateral direita, e analogamente  $\Lambda_{-,m}(g_L, g_R, b)$  e  $\{w_i^-\}$ , onde  $\{w_i^-\}$  é determinada pela órbita lateral esquerda. O que acabamos de mostrar é que  $\Lambda_{+,m}$  e  $\Lambda_{-,m}$  estão bem definidas para todo  $m \geq 1$ , e para  $(g_L, g_R, b) \in B_\rho(f_L) \times B_\rho(f_R) \times \overline{B_\eta(b^*)}$ . Observe que podemos ver  $\Lambda_{\pm,m}$  como a quarta função coordenada da aplicação

$$\begin{aligned} l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times B_1(0) &\longrightarrow l_1(\mathbb{C}) \times l_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times B_1(0) \\ (g_L, g_R, b, z) &\xrightarrow{H} (g_L, g_R, b, \Lambda_m(g_L, g_R, b)) \end{aligned} \quad (7.25)$$

onde  $H$  é a composição das aplicações holomorfas  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  do Lema 7.1.6.

Agora o que queremos mostrar é que para todo  $(g_L, g_R) \in B_\rho(f_L) \times B_\rho(f_R)$  e  $n$  suficientemente grande, existe um único  $b_n = b_n(g_L, g_R)$  que é solução da equação

$$\Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b) = 0 \quad (\text{ou } \Lambda_{+,r_n}(g_L, g_R, b) = 0). \quad (7.26)$$

Sem perda de generalidade vamos supor que  $b_n$  é dado por  $\Lambda_{-,l_n} = 0$ .

Para mostrar a existência e unicidade da solução de (7.26) (para  $n$  grande), investigaremos a injetividade da função  $b \mapsto \Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b)$ , definida em  $\overline{B_\eta(b^*)}$ , e se sua imagem cobre a origem, para quaisquer  $g_L \in B_\rho(f_L)$ ,  $g_R \in B_\rho(f_R)$ .

### Injetividade

Para que a função  $b \mapsto \Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b)$ , definida em  $\overline{B_\eta(b^*)}$ , seja injetiva basta que ela satisfaça as hipóteses do Lema 7.1.1. Da mesma forma como fizemos no começo do Capítulo 5, temos

$$\frac{\partial}{\partial b} \Lambda_{-,m}(g_L, g_R, b) = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^i g'_{w_{m-j}}(\Lambda_{-,m-j}(g_L, g_R, b)).$$

E como  $g'_{w_i}(z) \in \mathcal{A}_\nu$  (pela escolha de  $\rho, V_L, V_R$ ), para todo  $z \in V_{w_i}$ , sabemos do Lema 7.1.2 que os possíveis valores para soma  $1 + \sum_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^i g'_{w_{m-j}}(\Lambda_{-,m-j}(g_L, g_R, b))$  ficam na intersecção do setor  $S_\theta$ , com o complementar de  $B_{r_0}(0)$  e contido na bola  $B_{r_1}(0)$ , onde  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  e  $r_1 > r_0 > 0$ . Além disso

$$\frac{1}{6} \leq \left| \frac{\partial}{\partial b} \Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b) \right| = \left| 1 + \sum_{i=1}^{l_n-1} \prod_{j=1}^i g'_{w_{l_n-j}}(\Lambda_{l_n-j}(g_L, g_R, b)) \right| \leq \frac{1}{1-\gamma}.$$

Isso garante que estamos nas hipóteses do Lema 7.1.1. Observe que para provar a injetividade não foi preciso tomar  $n$  grande.

### Imagem

Sabemos, da escolha certa, que a seqüência real  $(b_n^*)_{n \geq 0}$  converge uniformemente para  $b^*$ . Assim tomemos um inteiro positivo  $n_1$  tal que

$$|b_{n_1}^* - b^*| < \frac{\eta}{2}.$$

Daí temos que se  $n > n_1$  então

$$\text{dist}(b_n^*, \partial B_\eta(b^*)) \geq \frac{\eta}{2}.$$

Supondo ainda que  $b_n^* \in B_\eta(b^*)$  é a solução real de

$$f_b^{l_n}(0^-) = 0,$$

vamos usar o Lema 7.1.1 aplicado à função  $b \mapsto \Lambda_{-,l_n}(f_L, f_R, b)$ . Para todo  $b \in \partial B_\eta(b^*)$ , temos  $|b - b_n^*| \geq \frac{\eta}{2}$ , logo aplicando o Lema 7.1.1 teremos

$$\frac{\text{dist}(\Lambda_{-,l_n}(f_L, f_R, b_n^*), \Lambda_{-,l_n}(f_L, f_R, b))}{|b_n^* - b|} \geq r_0 \cos \theta,$$

logo,

$$\text{dist}(0, \Lambda_{-,l_n}(f_L, f_R, b)) \geq r_0 \frac{\eta}{2} \cos \theta = d > 0, \quad (7.27)$$

(veja Figura 7.5).

Por outro lado, podemos tomar  $b \in \overline{B_\eta(b^*)}$  fixo e, de forma análoga à estimativa (7.23), só que

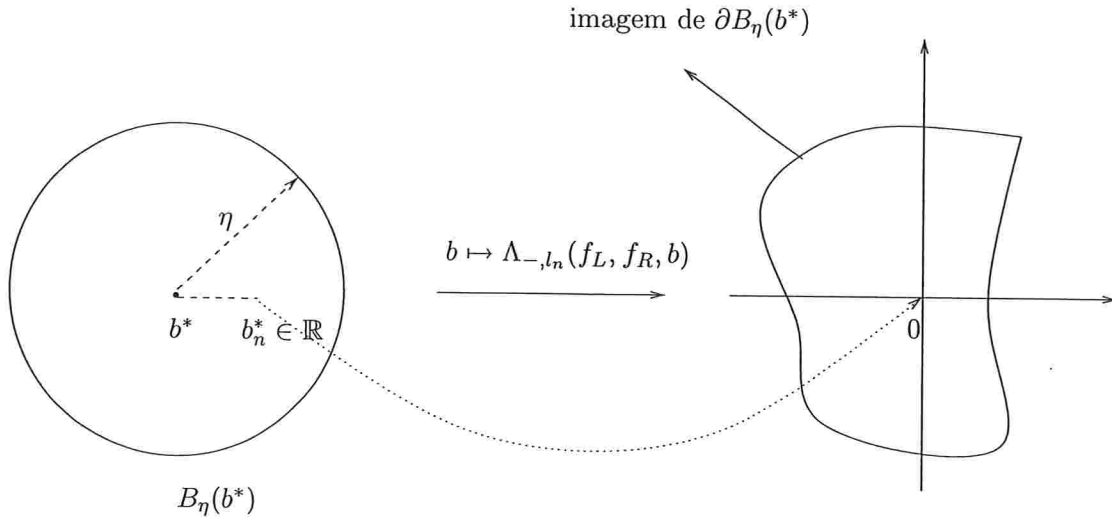


Figura 7.5: Ilustração da função complexa  $b \mapsto \Lambda_{-,l_n}(f_L, f_R, b)$ .

agora com  $\eta = 0$ , obtermos

$$|\Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b) - \Lambda_{-,l_n}(f_L, f_R, b)| \leq \frac{\rho}{1 - \gamma} < \frac{d}{2}, \quad (7.28)$$

para todo  $(g_L, g_R) \in B_\rho(f_L) \times B_\rho(f_R)$ , pela escolha de  $\rho$ .

Com essas considerações a existência de solução de (7.26) seguirá de provarmos que se  $(g_L, g_R) \in B_\rho(f_L) \times B_\rho(f_R)$  então as imagens do bordo  $\partial B_\eta(b^*)$  pelas aplicações

$$\begin{aligned} \overline{B_\eta(b^*)} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ b &\mapsto \Lambda_{l_n}(g_L, g_R, b) \\ b &\mapsto \Lambda_{l_n}(f_L, f_R, b) \end{aligned}$$

são curvas homotópicas. Para isso parametrizamos o bordo  $\partial B_\eta(b^*)$  por

$$c(t) = b^* + \eta e^{2\pi i t}$$

com  $0 \leq t \leq 1$ . Em seguida consideremos as curvas:

$$a(t) = \Lambda_{l_n}(f_L, f_R, c(t))$$

e

$$b(t) = \Lambda_{l_n}(g_L, g_R, c(t)),$$

as quais são as curvas que queremos mostrar serem homotópicas. E para isso basta ver que a aplicação

$$\begin{aligned} H : I \times I &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (s, t) &\mapsto H(s, t) = (1 - s) \cdot a(t) + s \cdot b(t) \end{aligned}$$

é uma homotopia entre elas, onde  $I = [0, 1]$ . Claramente isso é verdade pois como as curvas  $a(t)$  e  $b(t)$  são contínuas segue que a aplicação  $H$  é contínua e satisfaz

- .  $H(0, t) = a(t)$ , para todo  $t \in I$
- .  $H(1, t) = b(t)$ , para todo  $t \in I$
- .  $H(s, 0) = H(s, 1)$ , para todo  $s \in I$ .

Para vermos que  $H$  não passa pela origem basta observarmos que, pelas desigualdades (7.27) e (7.28),

$$|H(s, t)| = |(1 - s)a(t) + sb(t)| = |a(t) + s(b(t) - a(t))| \geq |a(t)| - s|b(t) - a(t)| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0.$$

Daí segue que a imagem de  $B_\eta(b^*)$  pela função injetiva  $b \mapsto \Lambda_{l_n}(g_L, g_R, b)$  cobre o zero. Isto mostra que para todo  $n > n_1$ , existe uma e só uma solução  $b_n$  para  $\Lambda_{l_n}(g_L, g_R, b_n) = 0$ . Pelo Teorema 7.1.7 obtemos que as soluções  $b_n$  são funções holomorfas de  $(g_L, g_R)$ .

### 7.5.5 Convergência uniforme das lâminas

Vamos ver agora que essas folhas complexas, correspondentes aos  $b_n$ 's, são uniformemente Cauchy. Sem perda de generalidade vamos assumir que  $\sigma_n = -$  e  $\sigma_{n+1} = +$  (para  $\sigma_{n+1} = -$  é análogo), de maneira que  $b_n$  e  $b_{n+1}$  serão as soluções das equações

$$\Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b_n) = 0 \tag{7.29}$$



e

$$\Lambda_{+,r_{n+1}}(g_L, g_R, b_{n+1}) = 0 \quad (7.30)$$

respectivamente (veja 7.5). Mas  $\Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b_n) = [\bigcirc_{i=0}^{l_n-1} g_{w_i} + \tau(w_i) + b_n](0)$  e  $\Lambda_{+,r_{n+1}}(g_L, g_R, b_{n+1}) = [\bigcirc_{i=0}^{l_n-1} g_{w_i} + \tau(w_i) + b_{n+1}](z_n(b_{n+1}))$ , onde  $z_n(b) = [\bigcirc_{i=0}^{(k_n-1)l_n+r_n-1} g_{\tilde{w}_i} + \tau(\tilde{w}_i) + b](0)$ , analogamente a (7.14), (7.15) e (7.16). Para estimar a distância entre  $b_n$  e  $b_{n+1}$  primeiro fazemos a diferença entre (7.29) e (7.30)

$$\begin{aligned} 0 &= [\bigcirc_{i=0}^{l_n-1} g_{w_i} + \tau(w_i) + b_n](0) - [\bigcirc_{i=0}^{l_n-1} g_{w_i} + \tau(w_i) + b_{n+1}](z_n(b_{n+1})) \\ &= (b_n - b_{n+1}) \frac{\Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b_n) - \Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b_{n+1})}{b_n - b_{n+1}} \\ &\quad + [\bigcirc_{i=0}^{l_n-1} g_{w_i} + \tau(w_i) + b_{n+1}](0) - [\bigcirc_{i=0}^{l_n-1} g_{w_i} + \tau(w_i) + b_{n+1}](z_n(b_{n+1})) \end{aligned}$$

Aqui estamos supondo  $b_n \neq b_{n+1}$  (se  $b_n = b_{n+1}$  então  $b_n - b_{n+1} = 0$  é melhor do que a estimativa que vamos obter abaixo). O segundo termo da soma, em módulo, é majorado por

$$\gamma^{l_n} |z_n(b_{n+1})| < \gamma^{l_n},$$

pois  $z_n(b_{n+1}) \in V_L \cup V_R \subset B_1(0)$ . Por outro lado, aplicando o Lema 7.1.1 novamente, obtemos

$$\left| \frac{\Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b_n) - \Lambda_{-,l_n}(g_L, g_R, b_{n+1})}{b_n - b_{n+1}} \right| \geq r_0 \cos \theta.$$

Logo

$$|b_n - b_{n+1}| \leq \frac{\gamma^{l_n}}{r_0 \cos \theta}$$

e com isso fica demonstrado que a seqüência  $(b_n)_{n \geq 1}$  é uniformemente Cauchy. Logo, a folha limite dessa seqüência  $(b_n)_{n \geq 0}$  é holomorfa uma vez que ela é o limite uniforme de folhas holomorfas (veja Teorema 7.1.5). Conseqüentemente sua restrição real é analítica. Assim a folha  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ , limite da seqüência  $(b_n)_{n \geq 0}$ , é holomorfa e sua restrição real  $\mathcal{L}(\Gamma)$  é analítica como queríamos.



## Referências Bibliográficas

- [ABS77] V. S. Afraïmovič, V. V. Bykov, and L. P. Sil'nikov. The origin and structure of the Lorenz attractor. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 234(2):336–339, 1977.
- [ABZ96] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, and E. V. Zhuzhoma. *Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces*, volume 153 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Translated from the Russian manuscript by H. H. McFaden.
- [AC06] M. Alves and E. Colli. Renormalization operator for affine dissipative Lorenz maps. *Relatório Técnico - MAP*, 0603, 2006.
- [AMZ94] S. Kh. Aranson, T. V. Medvedev, and E. V. Zhuzhoma. Cherry foliations and Cherry flows on the sphere. *Selecta Math.*, 13(4):283–303, 1994. Selected translations.
- [Ara86] S. Kh. Aranson. The topological structure of Cherry flows on a torus. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 20(1):62–63, 1986.
- [Ara90] S. H. Aranson. The topological structure of quasiminimal sets of Cherry flows on the torus. *Selecta Math. Soviet.*, 9(2):107–116, 1990. Selected translations.
- [AZM94] S. Kh. Aranson, E. V. Zhuzhoma, and T. V. Medvedev. Cherry flows on a two-dimensional sphere. *Uspekhi Mat. Nauk*, 49(5(299)):167–168, 1994.
- [AZM96] S. Kh. Aranson, E. V. Zhuzhoma, and T. V. Medvedev. Classification of Cherry transformations on a circle and of Cherry flows on a torus. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, (4):7–17, 1996.
- [BM91] D. Berry and B. D. Mestel. Wandering intervals for Lorenz maps with bounded nonlinearity. *Bull. London Math. Soc.*, 23(2):183–189, 1991.
- [Boy85] Colin Boyd. On the structure of the family of Cherry fields on the torus. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5(1):27–46, 1985.

- [BPV00] Ch. Bonatti, A. Pumariño, and M. Viana. Lorenz attractors with arbitrary expanding dimension. In *International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999)*, pages 39–44. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.
- [Cha85] Soo Bong Chae. *Holomorphy and calculus in normed spaces*, volume 92 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 1985. With an appendix by Angus E. Taylor.
- [dMvS93] Wellington de Melo and Sebastian van Strien. *One-dimensional dynamics*, volume 25 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [GH90] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1990. Revised and corrected reprint of the 1983 original.
- [Gle95] Paul Glendinning. Bifurcations and rotation numbers for maps of the circle associated with flows on the torus and models of cardiac arrhythmias. *Dynam. Stability Systems*, 10(4):367–386, 1995.
- [Gut83] Carlos Gutiérrez. Smoothability of Cherry flows on two-manifolds. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, volume 1007 of *Lecture Notes in Math.*, pages 308–331. Springer, Berlin, 1983.
- [GW79] John Guckenheimer and R. F. Williams. Structural stability of Lorenz attractors. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):59–72, 1979.
- [Kra82] Steven G. Krantz. *Function theory of several complex variables*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1982. Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication.
- [Lan82] Oscar E. Lanford, III. A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(3):427–434, 1982.
- [Lor63] E. N. Lorenz. Deterministic non-periodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, (20):130–141, 1963.
- [Lyu00] Mikhail Lyubich. The quadratic family as a qualitatively solvable model of chaos. *Notices Amer. Math. Soc.*, 47(9):1042–1052, 2000.
- [MdM01] Marco Martens and Wellington de Melo. Universal models for Lorenz maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(3):833–860, 2001.

- [MM76] J. E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer-Verlag, New York, 1976. With contributions by P. Chernoff, G. Childs, S. Chow, J. R. Dorroh, J. Guckenheimer, L. Howard, N. Kopell, O. Lanford, J. Mallet-Paret, G. Oster, O. Ruiz, S. Schecter, D. Schmidt and S. Smale, Applied Mathematical Sciences, Vol. 19.
- [Muj86] Jorge Mujica. *Complex analysis in Banach spaces*, volume 120 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 107.
- [MvSdMM90] Marco Martens, Sebastian van Strien, Welington de Melo, and Pedro Mendes. On Cherry flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(3):531–554, 1990.
- [PdM82] Jacob Palis, Jr. and Welington de Melo. *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1982. An introduction, Translated from the Portuguese by A. K. Manning.
- [Rov93] Alvaro Rovella. The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 24(2):233–259, 1993.
- [SP99] Matthias St. Pierre. Topological and measurable dynamics of Lorenz maps. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 382:134, 1999.
- [Spa82] Colin Sparrow. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*, volume 41 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1982.