Apreçamento de ativos e derivativos de renda fixa em economias ambliópicas

Jorge Constantin Kapotas

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Schirmer

São Paulo, maio de 2008

Apreçamento de ativos e derivativos de renda fixa em economias ambliópicas

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Jorge Constantin Kapotas
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Paulo Schirmer (orientador) - IME-USP.
- Profa. Dra. Celma O. Ribeiro - POLI-USP.
- Prof. Dr. Gerson Francisco - IFT-UNESP.
- Prof. Dr. Julio Michael Stern - IME-USP.
- Prof. Dr. Rogério Rosenfeld - IFT-UNESP.

Agradecimentos

Ao meu orientador pela inesgotável paciência e incólume disposição, aos meus familiares, professores e colegas pelo constante estímulo, os meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

Este trabalho objetiva considerar os problemas da formalização teórica dos modelos de apreçamento de ativos e derivativos em economias em desenvolvimento ou emergentes, onde os mercados para os ativos financeiros básicos encontram-se ainda em fase de gestação. Pretende-se construir um arcabouço teórico para o apreçamento de instrumentos financeiros derivativos de renda fixa em economias onde se verificam a inexistência de ativos básicos de renda fixa ou mesmo de sua liquidez. São também desenvolvidos modelos de apreçamento de opções de renda fixa que respeitem as especificidades e idiossincrasias do desenvolvimento histórico destes contratos nestes mercados de origem ambliópica. Finalmente questões relativas à gestão de risco e construção de suas medidas em carteiras que contenham certos tipos de contratos futuros de renda fixa, originados e desenvolvidos nestes mercados, são igualmente analisadas.

Palavras-chave: apreçamento de derivativos de renda fixa, opções de renda fixa, economias ambliópicas, apreçamento por não arbitragem em economias ambliópicas, valor em risco, contratos futuros de DI.

Abstract

The objective of this work is to discuss the theoretical problems in derivatives pricing in developing or emerging economies, whose primitive or basic asset markets are in the process of creation. It is also aimed in this work the construction of a theoretical pricing structure of fixed income assets and derivative financial instruments in economies where the basic fixed income assets do not trade liquidly or even do not exist as a generally priced asset class. Fixed income option pricing models, which take into account the terms and conditions of the historical development of these contracts in these markets of amblyopic origin, are also developed. Finally questions related to risk measurement and management of fixed income portfolios containing certain futures contracts, originated and developed in these markets, are analyzed as well.

Keywords: fixed income derivatives pricing, fixed income options, amblyopic economies, arbitrage pricing in amblyopic economies, value-at-risk, DI future contracts.

Notação Utilizada

$A_{t,T}$	Processo de ajuste financeiro diário do contrato futuro de DI em t com vencimento em T.
$B(t,T)$	Preço de uma obrigação de cupom zero de renda fixa em t com vencimento em T.
$\mathfrak{B}_t$	Numerário em t resultante da acumulação discreta geométrica das taxas diárias de juros de overnight.
$\mathbb{B}_t$	Numerário em t resultante da acumulação contínua das taxas instantâneas de juros.
$\mathcal{C}(T, T+\delta, \bar{y}_k)$	Valor da opção de compra de taxas a termo implícitas nos contratos futuros de DI entre os períodos T e $T+\delta$.
$F(t, T_k, T_l)$	Preço a termo de referência de um contrato fuuro de DI em t para o período entre T_k e T_l.
$F_{ij}(t)$	Taxa de juros a termo de um dia em t para os períodos $[T_i, T_{i+1}]$, implícita nos preços de referência dos contratos futuros de DI.
$G(\theta)$	Processo estocástico de ganho da estratégia de investimento θ.
$L_i(t)$	Taxa de juros a termo de um dia para o período $[T_i, T_{i+1}]$ em t, implícita nos preços de referência dos contratos futuros de DI.
$M(s,T)$	Processo de ajuste de margem instantâneo para um contrato futuro de DI em tempo contínuo.
MtM_t	Valor de referência de mercado em t de uma posição em um contrato futuro de DI.

MtM_t^*	Valor de referência de mercado em t do fator de correção de uma posição em um contrato futuro de DI.
N	Valor nominal ou principal.
O_t	Taxa de overnight de um dia no tempo t.
$\mathcal{P}(T, T+\delta, \bar{y}_k)$	Valor da opção de venda de taxa a termo implícitas nos contratos futuros de DI entre os períodos T e $T+\delta$.
$\mathfrak{s}(t, T)$	Contrato de swap PRE x DI avaliado em t e vencendo em T.
$V(t, T)$	Valor de referência em t do contrato futuro de DI vencendo em T.
$V^*(t, T)$	Valor de referência em t, ajustado pelo fator de correção decorrente do processo de ajuste financeiro diário, de um contrato futuro de DI vencendo em T.
$y(t, T)$	Taxa de retorno em t para um investimento em um título de renda fixa livre de risco, com vencimento em T.
$\sigma_{Black,T,T+\delta}$	Volatilidade implícita do modelo de Black para as opções $C(T, T+\delta, \bar{y}_k)$ e $P(T, T+\delta, \bar{y}_k)$.
Σ	Matriz de covariâncias dos fatores de risco.
Σ^*	Matriz de covariâncias corrigidas dos fatores de risco.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Preliminares

Este trabalho objetiva considerar os problemas da formalização teórica dos modelos de apreçamento de ativos e derivativos em economias em desenvolvimento ou emergentes, onde os mercados para os ativos financeiros básicos de renda fixa não dispõe de títulos ou obrigações a partir das quais se possa construir um perfil de horizontes de investimento completo. Em outras palavras, pretende-se construir um arcabouço teórico para o apreçamento de instrumentos financeiros de renda fixa onde se verifica a inexistência de um perfil temporal de investimentos de curto, médio e longo prazo.

Nas modelagens clássicas da literatura financeira do apreçamento de ativos e derivativos de renda fixa de economias maduras ou desenvolvidas, assume-se a existência consensual de mercados líquidos de ativos básicos de renda fixa, ou seja, de um conjunto de títulos de renda fixa sem risco de crédito, em que cada elemento do conjunto se refere a um vencimento de uma data específica, ou dia, de um intervalo temporal, cuja extensão máxima é definida por uma variável $T^* < +\infty$. A premissa de existência de um mercado líquido e transparente deste conjunto de ativos básicos na modelagem e apreçamento de derivativos de renda fixa, além de natural , justifica-se pelo próprio desenvolvimento histórico dos mercados financeiros das economias maduras onde os ativos básicos são constituídos numa fase anterior, atingindo altos volumes de negociação e liquidez, para a subseqüente constituição de contratos e produtos derivativos. Neste contexto, a existência destes mercados líquidos de ativos básicos de renda fixa com os mais diversos prazos de vencimento, justifica historicamente a utilização desta premissa no processo de teórico de modelagem dos ativos e derivativos de renda fixa.

Por outro lado encontramos economias onde este paradigma de desenvolvimento histórico não se verifica. Nestas, certos contratos ou produtos derivativos podem ser "importados"ou "criados"sem que os respectivos mercados dos ativos básicos tenham sido desenvolvidos ou mesmo constituídos. Nas economias em desenvolvimento, ou que padecem de certos desequilíbrios ou situações que impedem o desenvolvimento pleno dos mercados financeiros, mais especificamente dos mercados líquidos de títulos de renda fixa básicos ou primários, a utilização da premissa de existência de uma mercado organizado e líquido destes títulos para a modelagem teórica de seus derivativos torna-se um argumento circular, irreal, não condizente com a evolução histórica do próprio mercado destes derivativos, cujos preços propõem-se modelar.

Mais especificamente em certas economias encontram-se mercados de contratos derivativos de renda fixa líquidos e bem organizados, em que as cotações, termos e condições destes instrumentos são líquidas, transparentes e inequívocas, em pleno contraste com os seus mercados de títulos básicos ou primários de renda fixa, nestes casos ilíquidos ou mesmo inexistentes. Nas economias em desenvolvimento, ou que sofrem de certos desequilíbrios ou patologias que impedem o desenvolvimento dos seus mercados de títulos de renda fixa básicos ou primários este quadro pode se verificar, impondo desta forma uma análise mais criteriosa, e que respeite a evolução destes mercados, dos mecanismos de apreçamento teórico dos ativos e derivativos de renda fixa destas economias.

Em economias historicamente inflacionárias o desenvolvimento e a organização de mercados líquidos de títulos de renda fixa podem ser fatalmente comprometidos. A existência de um ambiente economico altamente inflacionário, conjugado com longos e substanciais desequilíbrios macroeconômicos e com um ambiente legal e institucional instável potencializa as incertezas, dificultando a tomada das decisões de consumo e investimento dos agentes economicos para horizontes temporais de médio e longo prazo, bem como o desenvolvimento de instrumentos pelos quais tais decisões são viabilizadas e praticadas[1]. Este processo, desta feita, retarda ou inviabiliza o desenvolvi-

[1]Na literatura econômica e conhecido o impacto negativo das altas taxas de inflação para o desenvolvimento de mercados financeiros sólidos e estáveis e para o processo de formação de investimentos e poupança, como em Cagan [1956], Klein [1955], Stapleton e Subrahmayan [1982] entre outros.

mento de um amplo e líquido mercado de títulos de renda fixa como definimos acima.

1.2 Objetivos

Este paradigma em muito se aproxima da realidade histórica dos nossos mercados locais. Os longos períodos inflacionários que assolaram nossa economia por algumas décadas[2] - período no qual nas economias mais desenvolvidas assistimos a um forte movimento de consolidação, expansão, sofisticação e globalização dos mercados de renda fixa[3] - aliados à rupturas institucionais e do "jogo economico", frutos das várias tentativas e dos diversos planos de estabilização economica experimentados durante este período[4] contribuíram em larga medida no estabelecimento e consolidação de uma preferência pelo curtíssimo prazo pelos agentes de mercado ao longo deste período. Esta preferência pelo curtíssimo prazo, por sua vez, inviabilizou a formação de um mercado de negociação líquida de títulos básicos de renda fixa de médio e longo prazo, encurtando desta forma o seu horizonte economico ou a sua capacidade definir taxas marginais de substituição para horizontes mais longos[5], concentrando primariamente a ação dos agentes economicos no curtíssimo prazo.

A prevalência desta característica define economias em que predominam ativos ou instrumentos de renda fixa de um dia apenas, onde a liquidez do investimento é reconstituída diariamente através do mecanismo da aplicação financeira diária ou investimento de "overnight". Estas economias, que agora chamamos de ambliópicas, dado o curtíssimo horizonte de seus mercados de renda fixa, carecem portanto de uma mercado líquido de renda fixa, formado por uma coleção de títulos de renda fixa sem risco de crédito, em que cada elemento da coleção se refere a um vencimento de uma data específica, ou dia, de um longo perfil temporal. Estas economias ou mercados, em conjunto com

[2] Uma descrição interessante deste período pode ser encontrada em Senna [1989].

[3] Os processos de globalização e sofisticação dos mercados financeiros são bem desenvolvidos em Smith e Walters [2003] e Giddy [1994].

[4] Vários foram os planos de estabilização econômica lançados neste período e bem conhecidos são os seus efeitos nefastos nos mercados financeiros, ver Senna [1989].

[5] Para a importância da formação de taxas marginais de substituição para os diversos horizontes temporais ver Hirshleifer [1970].

os seus ativos e instrumentos de renda fixa, serão formal e matematicamente definidas, de forma a permitir a utilização do ferramental teórico financeiro tradicional de apreçamento por não-arbitragem.

Neste contexto algumas questões se impõem. Como certos contratos ou produtos derivativos de renda fixa (ou sintéticos de renda fixa) são teoricamente apreçados, dada a inexistência de mercados líquidos ou organizados dos ativos básicos? Como se aplicam os paradigmas clássicos da Teoria de Apreçamento de ativos nestas condições? Por quais mecanismos as economias ambliópicas equacionam as questões de completamento dos mercados de renda fixa? Estas questões e outras questões serão alvo da análise deste trabalho nos capítulos que serão desenvolvidos a seguir, e que não são usualmente tratadas pela literatura financeira clássica.

1.3 Organização do Trabalho e Principais Resultados

Inicialmente será construída a conceituação e formalização dos ativos ou instrumentos de investimento constituintes de uma economia ampliópica. Esta por sua vez será definida e suas limitações teórico-formais serão verificadas. Ao mesmo tempo mecanismos de apreçamento serão desenvolvidos a partir da conceituação e formalização de certos contratos financeiros ou produtos derivativos adicionais que respeitem a evolução histórica das economias ambliópicas, e que permitirão o desenvolvimento dos elementos teórico formais para a construção dos teoremas fundamentais de apreçamento das economias ambliópicas.

Neste sentido será demonstrada a possibilidade de criação de uma coleção de ativos básicos de renda fixa $\{\Pi_t^T\}$, ou de obrigações de renda fixa, livres de risco de crédito, para um espectro temporal integral, que reflitam as expectativas de acumulação de taxas de juros diários até uma data terminal T. Estes ativos de renda fixa Π_t^T serão rigorosamente construídos através de estratégias de investimento θ_t - envolvendo investimentos no único ativo da economia ambliópica e posições em contratos futuros de DI - cujo processo de ganho G_t replique os de uma obrigação básica de renda fixa.

O resultado principal deste trabalho reside na comprovação da existência nos mercados $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$, completados por contratos futuros de DI, de uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ risco-neutra tal que os preços de referência dos contratos futuros $\varphi_{t,T}$ reflitam as expectativas de acumulação das taxas overnight. O mesmo será desenvolvido para os mercados $\hat{\mathfrak{M}}^{\mathbb{S}}(\mathbb{O})$ completados por contratos de swaps.

Numa segunda parte, modelos de apreçamento de opções de renda fixa sobre estes contratos futuros serão construídos, formalizados e propostos tendo em vista as especificidades e idiossincrasias de sua origem ambliópica. Isto será atingido em paradigmas de modelagem integralmente adaptados à realidade de mercado destes instrumentos e ao formalismo teórico desenvolvido nos capítulos anteriores.

Para tanto as definições e formalizações desenvolvidas nos três primeiros capítulos serão reconstruídas a partir de um paradigma de formalização matemática de tempo contínuo, com o propósito de acomodar o arcabouço teórico de apreçamento de opções de contratos futuros de DI, que será desenvolvido no capítulo quarto deste trabalho. A estratégia de modelagem adotada neste capítulo consiste em modelar as taxas no seu nível mais primitivo de incerteza, ou seja, modelar as taxas a termo diárias, uma vez que o caráter ambliópico das economias, assim definidas, induz a formação de expectativas a partir da acumulação das taxas overnight ambliópicas.

Resulta deste esforço a derivação das condições de não-arbitragem para os parâmetros de viés e volatilidade que modelam o processo difusivo da taxa forward de um dia $L_i(t)$ e que posteriormente alimentam a derivação do processo de preços de referência a termo dos contratos futuros.

Finalmente na terceira e final parte deste trabalho, problemas e questões relacionados com a mensuração e gestão de risco de carteiras de renda fixa que contenham estes contratos futuros, previamente definidos, serão formatados e analisados a partir de uma metodologia clássica de mensuração de risco, levando-se sempre em consideração às condições contratuais específicas destes contratos, de natureza ambliópica, que exigem o desenvolvimento de procedimentos de ajuste metodológico para aplicações das abordagens de mensuração de risco de mercado baseadas no conceito Value-at-Risk (VaR).

Capítulo 2

Economias Ambliópicas, Mercados de Renda Fixa e Completamento por Futuros

2.1 Economias Ambliópicas

No primeiro capítulo acima, foi apresentado de forma heurística e a partir de um contexto histórico-econômico o desenvolvimento das economias aqui chamadas de ambliópicas. As mesmas serão agora definidas nesta seção. Para tanto algumas linhas serão dedicadas à apresentação da convenção de tempo a ser adotada.

Na convenção de tempo que iremos utilizar neste capítulo a variável $t \in \mathbb{R}^+$ representa uma data de avaliação de um instrumento ou seu derivativo no tempo. A escala natural desta econômia é um dia útil de negociação de mercado. Vamos adotar a convenção que os instantes de fechamento dos mercados nestes dias úteis são datas inteiras $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots < T_*$ datas de referência do mercado, sendo que a data mais distante, a data $T^* < +\infty$ é a data de referência mais longa da economia . As datas de observação e avaliação são representadas por $t \in [0, T_*]$.Vamos denotar portanto por $\mathfrak{T} = \{0, T_1, T_2, \cdots, T_*\}$ o conjunto de datas terminais t onde uma avaliação financeira é conduzida. Assim, neste trabalho as expectativas condicionais formadas no tempo t refletem expectativas de fim de dia de negociação. No capítulo quarto, quando serão tratadas as opções de renda fixa, considerar-se-á uma extensão deste conjunto para o tempo contínuo.

Os mercados ambliópicos são definidos como mercados nos quais somente um ativo, ou investimento, de renda fixa livre de risco, com um dia de vencimento é oferecido num dado tempo t, ao final do dia, aos seus agentes econômicos. Estes mercados não possuem outros ativos de renda fixa com vencimentos além do oferecido pelo ativo $\mathbb{O}$, que será chamado de overnight. O ativo $\mathbb{O}$ é o **único** ativo de renda fixa da econômia ambliópica. Tal característica pode ser encontrada nos mercados cuja particular evolução histórica impossibilitou o desenvolvimento de mercados de renda fixa com títulos líquidos de renda fixa livres de risco que formatassem inequivocamente uma estrutura a termo de taxa de juros. Mercados embrionários em fase de gestação de seus instrumentos, de formação e amadurecimentos de seus agentes e da sua organização podem apresentar este viés temporal pelo curtíssimo prazo.

Além disto, nas economias vitimadas por longos períodos inflacionários, nos quais altas e voláteis taxas de inflação agem no sentido de desestabilizar a sua estrutura de preços relativos e dificultar a formação de expectativas de médio e longo prazo por parte dos seus agentes, pode-se localizar o caráter ambiópico de seus mercados de renda fixa. Nestes mercados, predominam ativos de curtíssimo prazo, de alta liquidez, concebidos inicialmente com o propósito de proteger os agentes econômicos dos efeitos corrosivos das altas e incertas taxas de inflação. Em certos casos, podem se desenvolver alguns instrumentos de prazo mais longo, indexados à taxas de inflação, de liquidez restrita e com significativo prêmio de risco e liquidez atrelado. Não faltam exemplos em nossa história econômico-financeira recente que possam servir de ilustração para as condições acima descritas.

Definição 2.1: *Um mercado ambliópico de renda fixa $\mathfrak{M}$ é um mercado diário definido pela existência de um único ativo de renda fixa denominado de Overnight $\mathbb{O} = \{O_i\}_{i=1}^{T^*}$ que representa uma seqüência de investimentos feitos ao fim dos dias $t \in \mathfrak{T} = \{0, T_1, T_2, \cdots, T_*\}$ remunerado a uma taxa de juros geométrica O_t com convenção de contagem de tempo de dias úteis por ano 252, expressa em percentual ao ano, que produzirá um valor de resgate igual a N no próximo período. Isto é, em t o preço do investimento é igual a:*

$$P(t, t+1) = \frac{N}{(1+O_t)^{\frac{1}{252}}} \qquad (1)$$

As variáveis O_i são variáveis aleatórias definidas em um espaço filtrado de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_{t\in\mathfrak{T}}\}, \mathbb{P})$ que modela matematicamente a incerteza na taxa do depósito diário.

Vamos assumir que o processo overnight é limitado, isto é, existe uma constante c_0 tal que $0 \leq O_t(\omega) \leq c_0$. Isto, por sua vez, condiz com a realidade econômica.

O investimento overnight $\mathbb{O}$, cujo preço é denotado por $P(t, t+1)$ é o que na literatura chamamos de uma obrigação em título de renda fixa com vencimento de um dia. O preço $P(t, t+1)$ reflete a incerteza da economia para um horizonte de um dia.

Tradicionalmente, modela-se naturalmente economias de renda fixa que conseguem traduzir a incerteza para períodos arbitrários T de tempo. A importância da existência de mercados financeiros capazes de formar taxas marginais de transformação para horizontes T, para qualquer $T > 1$, dados os conjuntos de oportunidades, ou investimentos, disponíveis nos vários horizontes T não pode ser minimizada. O desenvolvimento e consolidação de mercados com estruturas temporais líquidas, permite que a transferência de fundos entre os tomadores e doadores de recursos financeiros ocorra de forma eficiente para os diversos horizontes T da estrutura temporal de investimentos destas economias[1].

Assume-se tradicionalmente que a economia é formada por um contínuo de investimentos $\mathbb{B} = \{B(\cdot, T)\}_{T>0}$ que permitem a aplicação de recursos por um horizonte $T > 0$ qualquer. Neste caso, investindo-se no tempo $t < T$ um montante igual à $B(t, T)$ resgata-se um valor N no tempo T. Expressando este investimento através de uma taxa composta geométrica com convenção de contagem de tempo de dias úteis por ano, 252, pode-se escrever esta relação como:

$$B(t,T) = \frac{N}{(1 + y(t,T))^{\frac{T-t}{252}}} \qquad (2)$$

A coleção das taxas $\{y(t,T)\}_{t<T}$ é chamada de Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) que é objeto clássico de modelagem matemática-financeira

[1]Este processo encontra-se bem ilustrado em Copeland e Weston [1983].

desde as publicações de Vasicek [1977], Dothan [1978], Cox, Ingersoll e Ross [1985], Ho e Lee [1986], Jamshidian [1989], Black, Derman e Toy [1990], Black e Karasinsky [1991], Hull e White [1990],[1993],[1994a] e [1994b], que modelaram taxas infinitesimais através de dinâmicas difusivas sem restrições e das abordagens mais recentes as quais impoem às dinâmicas difusivas das taxas a termo restrições de não-arbitragem de Heath, Jarrow e Morton [1992], Miltersen, Sandman e Sondermann [1997], Jamshidian [1997] e Brace, Gatarek e Musiela [1997] que modelam as taxas a termo reais de mercado também sob o paradigma de não-arbitragem.

Nas economias ambliópicas não existem, no entanto, preços de mercado $B(t, T)$ de títulos de renda fixa com vencimento para qualquer $T > t + 1$, pois a economia ambliópica esta limitada a um único ativo de renda fixa, $\mathbb{O}$, denominado de overnight, não permitindo que investimentos que embutam expectativas construídas a partir de horizontes de vencimento superiores sejam oferecidos aos agentes econômicos.

Este fato peculiar não é tradicionalmente considerado na literatura de renda fixa e constitui o objeto principal de estudo deste trabalho, tanto nos aspectos financeiros quanto em sua formalização matemática rigorosa.

O prolongamento desta deficiência teria conseqüências nefastas para estas economias, prejudicando o planejamento e o processo de tomada de decisões de produção e investimento dos seus agentes. Nestes casos a separação dos processos de decisão ótima de investimento e produção das decisões de consumo do Teorema de Separação de Fisher não pode ser plenamente aplicado, pois a inexistência de mercados de renda fixa com estruturas temporais definidas impede que os agentes escolham projetos de produção e investimento ótimos para um dado horizonte T, até o ponto em que a taxa marginal de retorno dos projetos iguale a taxa de retorno dada pela estrutura temporal dos mercados de renda fixa[2].

Como vimos acima, condicionantes histórico-econômicos podem prejudicar o desenvolvimento pleno de mercados líquidos de títulos de renda fixa. O mercado brasileiro com seu longo histórico repleto de períodos inflacionários,

[2]Esta questão recebe um tratamento clássico em Hirshleifer [1970] e Copeland e Weston [1983].

pacotes econômicos e monetários, desenvolveu, no entanto, um contrato financeiro - que sem a necessidade de investimento inicial algum e sem, portanto, proporcionar um fluxo de caixa de resgate - simulasse em seu valor de referência o preço de um título básico de renda fixa livre de risco.

Este tipo de contrato é um contrato futuro que reflete expectativas de acumulação de ganhos de overnight para o seu período contratual. Assim, com a introdução de contratos derivativos deste tipo conseguiu-se integrar os efeitos e conseqüências da ambliopia de forma única e original. Matematicamente esta questão não foi tratada na literatura como no caso de Harrison e Pliska [1981], Cochrane [2001], entre outros, pois completamentos por meio de derivativos são usualmente feitos com derivativos que envolvem um custo de entrada ou um fluxo de caixa de resgate, o que não é o caso em questão.

Matematicamente precisamos de um arcabouço teórico que permite o complemento de uma econômia ambliópica $\mathfrak{M}$ por meio de uma coleção $\mathbf{\Phi}$ de contratos futuros, $\varphi \in \mathbf{\Phi}$, que resolva a incerteza para períodos arbitrários de tempo[3].

Definição 2.2: *Em uma economia ambliópica $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{O})$ sobre o espaço $(\Omega, \mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_{t\in\mathfrak{T}}\}, \mathbb{P})$, define-se um contrato futuro $\varphi(t_0, T)$ de taxas de juros celebrado em $t_0 > 0$ com vencimento em $T > t_0$ como sendo um par $\varphi(t_0, T) = (\{V(s,T)\}_{s\in[0,T^*]}, \{A_{s,T}\}_{s\in[0,T^*]})$ composto por:*

(i) *preços de referência $V(s,T)$ formados pelo mercado de forma que o processo $V(\cdot\,, T) : \mathfrak{T} \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ seja $\mathfrak{F}_t$-mensurável. Estes preços embutem expectativas de acúmulo de rendimentos e quantificam investimentos necessários para a obtenção de um valor de resgate N no vencimento do contrato.*

[3]Contratos futuros deste tipo tiveram sua negociação iniciada na segunda metade da década de oitenta pela Bolsa de Mercadorias e Futuros (BMF) em São Paulo e apresentaram uma crescente e significativa aceitação junto às instituições financeiras locais. Tendo evoluído a partir de formatações iniciais, os contratos futuros de depósitos de um dia, ou contratos DI, como são conhecidos no mercado local, são diariamente e liquidamente negociados pelos agentes econômicos na BMF. A cada valor de referência do contrato corresponde uma taxa de juros implícita negociada, sendo que o cálculo do valor de referência correspondente à taxa negociada é feito pela relação fornecida pelo item 4, acima, onde F é usualmente igualado a 100.000,00 unidades da moeda de negociação.

(ii) *Ajustes de margens* $\mathbb{A} = \{A_{s,T}\}_{s \in \mathfrak{T}, s \leq T}$ *dado por:*

$$A_{s,T} = V(s,T) - V(s-1,T)(1+O_{s-1})^{\frac{1}{252}} \qquad (3)$$

que constituem o fluxo de caixa do contrato e que refletem ao fim do dia as flutuações do mercado das taxas de depósito $\mathbb{O}$.

As taxas implícitas contratuais dos preços de referência dos contratos futuros são obtidas pela seguinte relação:

$$V(t,T) = \frac{N}{(1+y(t,T))^{\frac{T-t}{252}}} \qquad (4)$$

Utilizando o conceito de mercados ambliópicos desenvolvido nos itens anteriores e os contratos futuros acima definidos, inicia-se a construção do seu processo de correção.

Definição 2.3: *Seja* $\mathfrak{M}(\mathbb{O})$ *um mercado ambliópico de renda fixa. Uma pré-correção de ambliopia por meio de contratos futuros* $\varphi(t,T)$ *com valor de resgate* N *é um mercado* $\mathfrak{M}^{\Phi}$ *formado pelo investimento overnight* $\mathbb{O}$ *e por uma coleção* $\mathbf{\Phi} = \{\varphi(t,T)\}$ *de contratos futuros* $\varphi(t,T)$ *nos quais as seguintes condições se verificam:*

(i) *Para qualquer* $t > 0$, *existe uma família* $\mathbf{\Phi} = \{\varphi(t,T)\}_{T>t}$ *de contratos futuros* $\varphi(t,T)$ *celebrados em* $t \in \mathfrak{T}$ *e vencendo em* T *para todo* $T < T_*$,

(ii) *O preço de referência* $V(t,T)$ *para o futuro é tal que* $0 < V(t,T) < N$.

A primeira condição garante a existência de vencimentos T, para todos os $t < T < T_*$, em cada data de negociação t, cobrindo o espectro temporal até o tempo terminal T_*, enquanto a segunda condição assegura a existência de taxas implícitas positivas em todos os preços de referência de contratos negociados.

Como verificado anteriormente, para cada contrato $\varphi(t,T)$, existe uma taxa de juros negociada, ou de referência do contrato, $y(t,T)$, implícita no seu valor de referência correspondente ao seu prazo de vencimento. Com a garantia de existência de uma seqüência de vencimentos negociados $\{\varphi(t,T)\}_{T>t}$, dada pela primeira condição acima, podemos obter uma seqüência de taxas de juros implícitas, $\{y(t,T)\}_{T>t}$, para todos os vencimentos T, tal que $t < T < T_*$.

Esta sequência de taxas de juros implícitas, $\{y(t,T)\}_{T>t}$ permite que uma curva de rendimentos sintética (implícita nos preços de referência dos contratos) a termo, ou *forward*, composta por taxas de juros implícitas a termo $\{f(t,T_i,T_j)\}_{T>t,j>i}$. O processo de determinação da taxa a termo, $f(t,T_i,T_j)_{T>t,j>i}$, é apresentado na definição que segue abaixo.

Definição 2.4: *Para uma coleção de futuros* $\{\varphi(t,T)\}_{T>t}$ *define-se as taxas de juros a termo,* $f(t,T_i,T_j)_{T>t,j>i}$, *como :*

$$f(t,T_i,T_j)_{T>t,j>i} = \left[\frac{(1+y_{t,T_j})^{\frac{T_j-t}{252}}}{(1+y_{t,T_i})^{\frac{T_i-t}{252}}} - 1 \right]^{\frac{252}{T_j-T_i}} \qquad (5)$$

Observa-se que para o cálculo das taxas de juro a termo $f(t,T_i,T_j)_{T>t,j>i}$ as mesmas convenções de tipo de taxa, geométrica, e de contagem de dias, úteis, são adotadas.

Com esta definição, decorre que, o preço de referência, $V(t,T)$, pode ser expresso por meio da relação:

$$V_{t,T} = \frac{N}{\prod_{s=t+1}^{T-1} (1+f(t,s))^{\frac{1}{252}}} \qquad (6)$$

2.2 Estratégias de Investimento e Correção de Ambliopia

Com as definições, ora em mãos, dos ativos de overnight $\mathbb{O}$ e dos contratos futuros de DI, $\boldsymbol{\Phi}$, os quais, como mencionado anteriormente, são liquidamente negociados em mercados organizados de bolsa[4], e das hipóteses relativas às condições de pré-correção da Definição 2.3, pode-se agora proceder ao desenvolvimento dos mecanismos de correção ambliópica do mercado $\mathfrak{M}(\mathbb{O})^{\Phi}$.

Serão formalizadas as seguintes definições necessárias para a construção das estratégias de investimento de correção de ambliopia.

Definição 2.6 *Uma estratégia de investimento em uma economia ambliópica $\mathfrak{M}(\mathbb{O})^{\Phi}$ pré-corrigida por futuros é um processo estocástico $\theta \in L^2(\mathfrak{T} \times \Omega, \mathbb{R}^{T_*})$ que:*

$$\theta : \mathfrak{T} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{T_*} \text{ represente:}$$

(i) θ_t^1 *é o dinheiro investido em t no ativo overnight* $\mathbb{O}$

(ii) θ_t^T *é a posição de contratos futuros com vencimento na data* T.

Denotamos o conjunto das estratégias de investimento em $\mathfrak{M}^{\Phi}$ como sendo $\Theta(\mathfrak{M}^{\Phi})$.

Exemplo 2.7

Conta remunerada $\mathfrak{B}$: É uma conta obtida pela re-aplicação do investimento inicial $\theta_t^1 = 1$ de R\$ 1 somente no ativo overnight, isto é: $\theta_t^1 = \theta_{t-1}^1(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}}$. O valor remanescente na data $t > 0$ da conta $\mathfrak{B}$ é denotado por:

[4]Termos e condições contratuais de negociação dos contratos futuros de DI podem ser encontrados no endereço eletrônico: www.bmf.com.br

$$\mathfrak{B}_t = \prod_{i=1}^{t} (i + O_i)^{\frac{1}{252}}$$

Exemplo 2.8

Estratégia de re-investimento com consumo. Neste caso, o dinheiro resgatado é re-aplicado parcialmente. Definimos o processo de ganho de recursos como sendo $G^1(\theta) : [0, T_*] \times \Omega \to \mathbb{R}$ dado por: $G_t^1(\theta) = \theta_{t-1}^1 (1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \theta_t^1$. $G_t^1(\theta)$ representa as sobras de caixa na data $t > 0$ que não são re-investidas para o período seguinte.

Uma estratégia de investimento será considerada como um processo estocástico T_*-dimensional, $\{\theta_t, t \geq 0\}$, cujos componentes $\theta_t^1, \theta_t^2, ..., \theta_t^{T^*}$ são limitados e representam posições de investimento em t nos ativos da economia $\mathfrak{M}^{\Phi}$ composta pelos T_* instrumentos financeiros disponíveis. Esta estratégia de investimento será construída através da utilização de posições tomadas no ativo básico inicial, O_t, e em contratos futuros $\Phi(t, T)$ de $\mathfrak{M}^{\Phi}$ que permitirão a construção sintética, num tempo inicial t, de um instrumento de renda fixa que reproduz os fluxos de caixa de um título de renda fixa livre de risco para qualquer vencimento T, e para todos os $t < T < T_*$. Isto será possível investindo-se uma quantidade inicial de dinheiro em O_t e tomando-se uma posição equivalente comprada em contratos $\Phi(t, T)$. O re-investimento dos ajustes positivos decorrentes da posição nos contratos futuros no ativo overnight e financiamento dos ajustes negativos pelo montante inicialmente investido em O_t, reproduzem, para o tempo de vencimento T, os fluxos de caixa de um título de renda fixa livre de risco, de acordo com a dinâmica de final de dia representada pela Tabela 2.1[5]. Nesta tabela desenvolve-se um exemplo para um período de três dias no qual a estratégia de investimento acima é reproduzida.

[5]Na Tabela 2.1 abaixo $V(t_i, t_j)$ é denotado por V_{t_i,t_j}, sem perda de generalidade.

Tabela 2.1

Fluxo de caixa resultante de investimentos em overnight e posições tomadas em contratos futuros

Posição \ Tempo	t_0	t_1	t_2	$T = t_3$
$O + \Phi$	V_{t_0,t_3}	$V_{t_0,t_3}(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}} + V_{t_1,t_3} - V_{t_0,t_3}(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}}$	$V_{t_1,t_3}(1+O_{t_1})^{\frac{1}{252}} + V_{t_2,t_3} - V_{t_1,t_3}(1+O_{t_1})^{\frac{1}{252}}$	$V_{t_2,t_3}(1+O_{t_2})^{\frac{1}{252}} + V_{t_3,t_3} - V_{t_2,t_3}(1+O_{t_2})^{\frac{1}{252}}$
Investimento/ Reinvestimento	$-V_{t_0,t_3}$	$+V_{t_1,t_3} - V_{t_1,t_3}$	$+V_{t_2,t_3} - V_{t_2,t_3}$	$+V_{t_3,t_3}$
Fluxo de Caixa	$-V_{t_0,t_3}$	0	0	1

Para que essas idéias possam ser rigorosamente formalizadas precisamos de algumas definições matemáticas:

Definição 2.9 *Definimos o processo de ganho de uma estratégia* $\theta \in \Theta(\mathfrak{M}^{\Phi}(\mathbb{O}))$ *como sendo o processo estocástico*

$$G(\theta) : [0, T_*] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

dado por: $G_t(\theta) = G_t^1(\theta) + \sum_{T \in \mathfrak{T}, T>1} G_t^T(\theta)$, *onde* $G_t^T(\theta)$ *denota:*

(i) *Para* $T = 1$ *o ganho no ativo overnight:*

$$G_t^1(\theta) = \theta_{t-1}^1 (1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \theta_t^1 \qquad (7)$$

(ii) *Para* $T > 1$ *o ganho de margem do contrato futuro* Φ_T *com vencimento em* T*:*

$$G_t^T(\theta) = \theta_{t-1}^T[V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}] \qquad (8)$$

Nota-se que $G_t^T(\theta)$ não contém o termo θ_t^T, pois os futuros$\{\Phi_T\}_{T\in\mathfrak{T}}$ exigem um desembolso nulo para entrada.

A resolução total da ambliopia será feita mediante investimentos e posições que envolvam desembolsos iniciais e resgates terminais. Isto requer que matematicamente possamos negociar livremente a carteira $\Pi(\theta)$ baseada em estratégias de investimento $\theta \in \Theta(\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O}))$ cujos ajustes de margem decorrem do próprio overnight conforme visto anteriormente na Tabela 2.1. Define-se assim:

Definição 2.10 *Uma estratégia de investimento $\theta \in \Theta(\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O}))$ é dita auto-financiavel se para qualquer $t \in \mathfrak{T}$:*

$$\theta_t^1 = \theta_0^1 + \sum_{s=0}^{t} G_s(\theta) \qquad (9)$$

Isto significa que os fluxos de caixa gerados pelos ajustes contratuais A_t são financiados ou absorvidos pelos investimentos em overnight $\mathbb{O}$.

A coleção de estratégias auto-financiáveis será denotada por $\Theta^*(\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O}))$. Será considerada como hipótese a existência de um mercado líquido de negociação dos certificados, $\Pi_{t,T}(\theta)$, que fornecem os fluxos de caixa das estratégias de investimento $\theta \in \Theta^*(\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O}))$.

Em outras palavras exige-se que instrumentos líquidos e negociáveis, representados pelos certificados $\Pi(\theta)$ que garantem o repasse incondicional dos fluxos de caixa gerados pelas estratégias auto-financiáveis $\theta \in \Theta^*(\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O}))$, existam para qualquer tempo de avaliação t e horizonte de investimento T, ambos pertencentes ao conjunto de datas $\mathfrak{T}$. Estes instrumentos negociados liquidamente tem seus preços formados pelos agentes da economia $\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O})$, que atuam neste mercado sob os pressupostos usuais de negociação[6].

[6]As premissas usuais de negociação implicam na existência de mercados eficientes, fracionários, sem custos ou impostos, no qual investidores podem comprar e vender ativos livremente, sempre preferindo um nível de riqueza maior a outro menor.

Hipótese 2.11 *Uma correção de ambliopia para uma pré-correção* $\mathfrak{M}^{\Phi}$ *é a existência de um mercado organizado* $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ *caracterizado pela negociação da coleção de dos ativos de renda fixa* $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*(\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi})}$ *resultante das estratégias de investimento em* Θ^*.

Observa-se igualmente que a coleção de ativos de renda fixa $\{\Pi_{t,T}\}_{t,T\in\mathfrak{T},t<T}$, é constituida por certificados $\Pi_{t,T}$ que exigem um desembolso inicial, ou investimento, para o período $[t,T]\in\mathfrak{T}$. Este desembolso inicial representa o custo de entrada ou preço de aquisição, sempre positivos, dos ativos $\Pi_{t,T}$, formados pelo mercado $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ na ausência de arbitragem. Isto implica economicamente na inexistência de uma carteira de arbitragem cujo custo de entrada seja negativo e seu ganho seja sempre positivo [7].

A ausência de oportunidades de arbitragem implicaria ainda na existência de um funcional linear de apreçamento, da sua propriedade martingal e de sua extenção no caso de mercados completos à unicidade da medida martingal de apreçamento [8].

Neste sentido, o processo de preços assim constituido nos permite utilizar o arcabouço teórico de apreçamento por não-arbitragem e os conceitos de conpletude de mercado em termo discreto, formalizados por Harrison e Kreps [1979] e potencialmente por Ross e Dybvig [1987], para o apreçamento dos ativos da economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ [9].

---

[7]Uma oportunidade de arbitragem poderia ser representada por uma estratégia $\zeta_t = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{T_*})$ de investimento no vetor de preços $\mathbf{\Pi}_t$ dos certificados $\Pi_{t,T}(\theta)$, tal que o custo de entrada da estratégia seja negativo e o seu ganho sempre positivo para qualquer tempo de resgate $T > t$, ou seja, $\boldsymbol{\zeta}_t\mathbf{\Pi}_t \leq 0$ e $G_t(\boldsymbol{\zeta}_t) > 0$, dado que os ganhos das estratégias auto-financiadas $G_t^T(\theta)_{\theta\in\Theta^*(\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O}))}$ são positivos

[8]Todos os requisitos formais para a construção rigorosa dos Teoremas Fundamentais das Finanças em tempo discreto fazem parte da literatura clássica consagrada: Harrison e Kreps [1979], Ross e Dybvig [1987], Duffie [2001], Musiela e Rutkowski [2002], Björk [2004] entre outros.

[9]As primeiras contribuições à Teoria de Apreçamento de Ativos utilizando-se dos conceitos relativos a "lei do preço único"e completamento dos mercados remontam aos trabalhos seminais de Debreu [1959], Arrow [1964] e Hirshleifer [1966]. Esta temática foi posteriormente retomada por Ross [1973] através da derivação do operador de apreçamento linear em espaço finito e das contribuições adicionais de Ross [1978] e de Harrison e Kreps [1979] que extendem os teoremas fundamentais de apreçamento à espaços arbitrários e equalizam o apreçamento risco neutro à esperança martingal, seguidas pelas contribuições generalizantes adicionais de Dybvig e Ross [1987].

Tal fato permite que seja provado um resultado central que estabelece o vínculo entre a correção de ambliopia e o conceito de obrigação de renda fixa para horizontes $T > 1$. Será ainda provado que a hipótese de não-arbitragem garante a existência de uma estrutura temporal de taxas de juros formada a partir de ativos de renda fixa com caixa. Chamaremos tais ativos de ativos primitivos de renda fixa.

Teorema 2.12 *Se $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}$ não admite oportunidades de arbitragem, então para qualquer $T \in \mathfrak{T}$, existe um ativo $\Pi_T \in \{\Pi(\theta)\}_{\theta \in \Theta^*(\mathfrak{M}^{\Phi})}$ com as seguintes propriedades:*

(i) *Π_T é um ativo cujo valor de mercado de não-arbitragem, denominado $P(t,T)$, é positivo, $P(t,T) > 0$, e igual ao preço de referência de um contrato futuro vencendo em $T > t$, ou seja, $P(t,T) = V(t,T)$.*

(ii) *O valor em $t = T$ do ativo Π_T é igual a N, onde N é o valor nominal de Φ_T.*

Assim os ativos primitivos $\{\Pi_T\}_{T \in \mathfrak{T}}$ são as obrigações de renda fixa que permitem a aplicação de moeda por uma taxa fixa, implícita no preço de referência do futuro. Tais ativos primitivos $\{\Pi_T\}_{T \in \mathfrak{T}}$, "obrigações sintéticas de renda fixa", são ativos gerados por meio de uma estratégia que reinveste no ativo overnight as sobras (ou déficits) de caixa gerados pelos ajustes dos contratos futuros.

Teorema 2.13 *Sob a hipótese de não-arbitragem para $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$, os ativos primitivos $\{\Pi_T\}_{T \in \mathfrak{T}}$ constituem uma base para $\{\Pi(\theta)\}_{\theta \in \Theta^*}$, isto é, $\Pi(\theta)$ pode ser replicado por uma combinação linear dos ativos primitivos de renda fixa.*

A prova deste resultado será completada adiante por meio de um lema técnico.

Prova do Teorema 2.12

Vamos fixar $T_0 > 1$ e construir um ativo Π_{T_0} que irá requerer um investimento inicial $x = V(t,T)$ no ativo overnight $\mathbb{O}$ e um rebalanceamento η_{t,T_0}, $\eta_{t,T_0} = (\eta_{t,T_0}^T)_{T \in \mathfrak{T}}$ em futuros $\{\varphi_T\}_{T \in \mathfrak{T}}$ e overnight $\mathbb{O}$.

Se $T \neq T_0$, tomamos $\eta^T_{t,T_0} = 0$. Caso $T = T_0$, tomamos $\eta^T_{t,T_0} = N$.

Sem perda de generalidade assumimos que $N = 1$.

Isto significa que a posição Π_{T_0} será gerada pela aplicação em $t = 0$ de x no ativo overnight $\mathbb{O}$ e pela posição comprada em um único contrato futuro vencendo em $T_0 > 1$. Veremos em seguida como escolher η^1_{t,T_0} para $t > 0$ de forma à replicar uma obrigação sintética de renda fixa. para isto, calculamos o processo de ganho $G_t(\eta)$ da estratégia η para todo $t \in \mathfrak{T}$:

$$G_t(\eta) = G^1_t(\eta) + G^{T_0}_t(\eta)$$

Utilizando as relações expressas pelas equações (7) e (8), temos: $G_t(\eta) = \eta^1_{t-1,T_0}(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \eta^1_{t,T_0} + 1(V(t, T_0) - V(t-1, T_0)(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}})$

Observa-se que apenas no caso em que se escolhe $\eta^1_{t,T_0} = V(t, T_0)$ e $\eta^1_{t-1,T_0} = V(t-1, T_0)$ zeram-se os ganhos matemáticos:

$$\begin{aligned} G_t(\eta) = {} & V(t-1, T_0)(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - V(t, T_0) + V(t, T_0) \\ & -V(t-1, T_0)(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} = 0 \end{aligned}$$

para $t \leq T$. Quando $t = T_0$ tem-se que $G_{T_0}(\eta) = 1$ o que prova o teorema.

Observa-se que o custo inicial do investimento é igual à $\eta^1_{0,T_0} = P(0, T_0)$ e o valor $V(0, T_0)$ do ativo Π_{T_0} em $t = 0$ é idêntico à $\eta^1_{0,T_0} = P(0, T_0)$, pois em caso contrário, sendo o mercado formado pela coleção de ativos primitivos $\{\Pi(\theta)\}_{\theta \in \Theta^*}$ não-arbitrável implicaria que $V(0, T_0) - P(0, T_0) \neq 0$ seria um saldo de caixa (em posição comprada ou vendida) que criaria um ganho sem risco.

A prova do Teorema 2.13 decorre da observação que:

Lema 2.14 *O processo de ganho $G_t(\theta)$ é linear para qualquer data de avaliação $t < T$, $T \in \mathfrak{T}$, isto é:*

$$G_t(\alpha\theta + \beta\eta) = \alpha G_t(\theta) + \beta G_t(\eta) \qquad (10)$$

Prova:

A prova é uma simples manipulação algébrica de definição na qual são utilizadas as equações (8) e (9)

$$
\begin{aligned}
G_t(\alpha\theta+\beta\eta) &= G_t^1(\alpha\theta+\beta\eta) + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} G_t^T(\alpha\theta+\beta\eta) \\
&= (\alpha\theta_{t-1}^1 + \beta\eta_{t-1}^1)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - [\alpha\theta_t^1 + \beta\eta_t^1] \\
&\quad + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} (\alpha\theta_{t-1}^T + \beta\eta_{t-1}^T)(V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}})
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo-se a expressão tem-se que:

$$
\begin{aligned}
G_t(\alpha\theta+\beta\eta) &= \alpha\theta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} + \beta\eta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \alpha\theta_t^1 - \beta\eta_t^1 \\
&\quad + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \alpha\theta_{t-1}^T \left[V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right] \\
&\qquad + \beta\eta_{t-1}^T \left[V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right] \\
&= \alpha\theta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \alpha\theta_t^1 + \beta\eta_{t-1}^1(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \beta\eta_t^1 \\
&\quad + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \alpha\theta_{t-1}^T \left[V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right] \\
&\quad + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \beta\eta_{t-1}^T \left[V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right]
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
G_t(\alpha\theta+\beta\eta) &= \alpha\left[\theta^1_{t-1}(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \theta^1_t\right] + \beta\left[\eta^1_{t-1}(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \eta^1_t\right] \\
&+\alpha \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \theta^T_{t-1}\left[V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right] \\
&+\beta \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \eta^T_{t-1}\left[V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right] \\
&= \underbrace{\alpha\left\{\left[\theta^1_{t-1}(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \theta^1_t\right] + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \theta^T_{t-1}\left[V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right]\right\}}_{G_t(\theta)} \\
&+ \underbrace{\beta\left\{\left[\eta^1_{t-1}(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \eta^1_t\right] + \sum_{T\in\mathfrak{T},T>1} \eta^T_{t-1}\left[V(t,T) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\right]\right\}}_{G_t(\eta)} \\
&= \alpha G_t(\theta) + \beta G_t(\eta)
\end{aligned}
$$

Prova-se agora o resultado central do capítulo e de todo o trabalho. Este resultado, a existência de uma medida de Arrow-Debreu, formaliza em termos matemáticos o fato que os agentes de mercado, que negociam os ativos $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*}$, o fazem por meio de preços que refletem o desconto de uma acumulação da taxa de overnight para o período. Mais precisamente prova-se o seguinte teorema:

Teorema 2.15 *Se o mercado de ativos (sintéticos) $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*(\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O}))}$ não admitir oportunidades de arbitragem, então existe uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ equivalente à medida $\mathbb{P}$ no espaço filtrado $(\Omega, \mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_t\}_{t\in\mathfrak{T}}, \mathbb{P})$ de tal forma que os preços de referência $\{V(t,T)\}_{t\leq T}$ dos contratos futuros $\phi_{t,T}\in\Phi$ refletem as expectativas de acumulação das taxas overnight $\{O_i\}_{i=1}^{T_*}$, isto é, para qualquer $t < T < T_*, t\in\mathfrak{T}$ temos:*

$$
V(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_t\left[\prod_{i=t}^{T-1} \frac{1}{(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right] \qquad (\ 11\ )
$$

Para provar o teorema fundamental, precisamos de uma construção geométrica que traduza a hipótese de não arbitragem por meio de funcionais lineares em L^2. É exatamente a representação de Riesz deste funcional que entregará a medida $\mathbb{Q}$ de Arrow-Debreu.

Corolário 2.16 *O conjunto de oportunidades de ganhos terminais, isto é, o espaço:*

$$M_{T_*} = \{G_{T_*}(\theta), \theta \in \Theta^*(\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O}))\} \qquad (12)$$

é um subespaço linear de $L^2(\Omega)$.

O corolário segue diretamente do Lema 2.14.

Definimos o funcional de precificação como sendo o funcional $\Psi : M_{T_*} \to \mathbb{R}$ dado pelo custo de entrada na estratégia $\theta \in \Theta^*$, que gera o ganho, $G(\theta)$, isto é:

$$\Psi(G_{T_*}(\theta)) = \theta_0^1. \qquad (13)$$

Proposição 2.17 *Admitindo que os ativos $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*(\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O}))}$ formam um mercado sem oportunidades de arbitragem, então a relação $G_{T_*}(\theta) \overset{\Psi}{\longmapsto} \theta_0^1$ é unívoca, definindo um funcional linear $\Psi : M_{T_*} \subseteq L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$.*

Prova: A linearidade já foi verificada. Precisamos mostrar que o funcional está bem definido. Suponha que existam θ, $\eta \in \Theta^*$ com $G_{T_*}(\theta) = G_{T_*}(\eta)$. Precisamos mostrar que:

$$\theta_0^1 = \eta_0^1$$

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $\theta_0^1 > \eta_0^1$. O caso contínuo é simétrico. Neste caso, seja $\lambda = \eta - \theta \in \Theta^*$ uma estratégia de investimento.

Temos que:

$$G_{T_*}(\lambda) = G_{T_*}(\eta) - G_{T_*}(\theta) = 0$$

Além disto, o custo inicial $G_0(\lambda)$ é igual à:

$$G_0(\lambda) = G_0^1(\eta) - G_0^1(\theta) = \eta_0^1 - \theta_0^1 < 0$$

Assim, λ é uma arbitragem em $T_* > 0$, o que contradiz o fato que a economia é não-arbitrável [10]. Logo $\theta = \eta$ e o funcional Ψ está bem definido.

Um argumento semelhante permite mostrar que Ψ é monotônico em M_{T_*}.

Prova do Teorema 2.15: (Existência)

Como $M \subseteq L^2$ é fechado[11], o funcional Ψ pode ser estendido à um funcional linear contínuo $\Psi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ que poderá ser representado por meio de um elemento $\pi \in L^2(\Omega)$, isto é,

$$\Psi(x) = \mathbb{E}[\pi x], \text{ para qualquer } x \in L^2(\Omega)$$

Vamos aplicar esta relação à vários elementos $x = G_{T_*}(\theta)$, com $\theta \in L^2$ representando uma série de investimentos em overnight e futuros. Na verdade, vamos mostrar que existe uma medida $\mathbb{Q}$ que transforma os ativos sintéticos Π_T deflacionados pela conta remunerada $\mathfrak{B}_t = \prod_{i=0}^{t-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}$ em $\mathbb{Q}$-Martingais.

De fato, se esta afirmação for comprovada, então segue a relação (11) reapresentada abaixo:

[10] Na verdade, uma condição matematicamente mais forte se faz necessária. Trata-se da não-existência de oportunidade de arbitragens assintóticas, como proposto por Delbaen, F. e Schachermayer, W. [2008].

[11] Isto segue do fato que o processo $\{O_i\}$ é limitado e do fato que o processo G_t é bilinear em θ e $\mathbb{O}$. Este desenvolvimento pode ser verificado em Duffie [2001].

$$V(t,T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{i=t}^{T-1} \frac{1}{(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right]$$

Assim para qualquer $T > t, t \in \mathfrak{T}$, a relação: $\dfrac{V(t,T)}{\mathfrak{B}_t} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\dfrac{V(T,T)}{\mathfrak{B}_T}\right]$, implica que:

$$V(t,T) = \mathfrak{B}_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V(T,T)}{\mathfrak{B}_T}\right]$$

Utilizando o fato que $V(T,T) = 1$, temos que:

$$V(t,T) = \mathfrak{B}_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\mathfrak{B}_T}\right]$$

e ainda que,

$$\mathfrak{B}_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\mathfrak{B}_T}\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathfrak{B}_t}{\mathfrak{B}_T}\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\prod_{i=0}^{t-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}{\prod_{i=0}^{T-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right]$$

$$= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\prod_{i=0}^{t-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}{\prod_{i=0}^{t-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}} \prod_{i=t}^{T-1}(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right]$$

$$= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{i=t}^{T-1} \frac{1}{(1+O_i)^{\frac{1}{252}}}\right] \qquad (14)$$

Para comprovar a propriedade Martingal vamos inicialmente tomar $\theta \in \Theta^*$ com θ_0^1 e investir apenas no ativo overnight com $\theta_t^1 = \theta_{t-1}^1(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}}$ com investimento inicial igual a 1. Neste Caso:

$$\Psi(G_{T_*}(\theta)) = \theta_0^1 = 1 = \mathbb{E}[G_{T_*}(\theta)\pi]$$

$$= \mathbb{E}[\prod_{i=0}^{T_*-1}(1 + O_i)^{\frac{1}{252}}\pi] \qquad (15)$$

Seja $\xi \in L^2(\Omega)$ o elemento $\xi = \pi \prod_{i=0}^{T_*-1}(1 + O_i)^{\frac{1}{252}} = \pi\mathfrak{B}_{T_*}$.

Seja $(\xi_t)_{t\in[0,T_*]}$, o processo de filtração de Doob de ξ, isto é:

$$\xi_t = \mathbb{E}_t[\xi] \qquad (16)$$

Como $1 = \mathbb{E}[\prod_{i=0}^{T_*-1}(1 + O_i)^{\frac{1}{252}}\pi] = \mathbb{E}[\xi]$, então $\xi > 0$ define uma medida $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$ através da derivada

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \xi > 0. \qquad (17)$$

Neste caso, pode-se comprovar que:

$\Psi(G_{T_*}(\theta)) = \theta_0^1 = \mathbb{E}[G_{T_*}(\theta)\pi]$

Utilizando as relações (15) e (16) acima:

$\Psi(G_{T_*}(\theta)) = \mathbb{E}[G_{T_*}\frac{\xi}{\mathfrak{B}_{T_*}}]$

$$= \mathbb{E}[\frac{G_{T_*}(\theta)}{\mathfrak{B}_{T_*}} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]$$

Logo , temos:

$$\Psi(G_{T_*}(\theta)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{G_{T_*}(\theta)}{\mathfrak{B}_{T_*}}] \qquad (18)$$

Vamos fixar $T < T_*$. Seja agora um tempo de parada $\tau \in [0, T_*]$ arbitrário.

Considere uma estratégia $\theta^{(\tau)}$ que investe apenas na obrigação sintética com vencimento em T conforme o seguinte procedimento:

(i) Comprar obrigação sintética Π_T na data $t = 0$.

(ii) Vender $t = \tau$.

(iii) Aplicar os recursos obtidos da venda no overnight até $t = T_*$.

Em outras palavras, se $t \leq \tau$, então:

$$\theta_t^T = 0, \ se \ T' \neq T \ e \ T' > 1$$
$$e \ \theta_0^1 = V(0, T).$$

Se $t = \tau$, vende-se a obrigação, isto é, $\theta_\tau^T = 1$, e reaplicando os proventos de venda de $\Pi_{\tau,t}$ até o fim, temos que para $s \geq \tau$:

$$\theta_s^1 = (1 + O_{s-1})^{\frac{1}{252}} \theta_{s-1}^1$$

Da equação (18) acima, segue que:

$$\theta_0^1 = V(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{V(\tau, T) \prod_{j=\tau}^{T_*-1} (1 + O_j)^{\frac{1}{252}}}{\prod_{j=0}^{T_*-1} (1 + O_j)^{\frac{1}{252}}} \right]$$

Logo,

$$V(0,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V(\tau,T)}{\prod_{j=0}^{\tau-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}\right]$$

Definindo-se um processo estocástico $\{X_s^{(T)}\}_{s\leq T_*}$ em $L^2 \times \mathfrak{T}$ tal que:

$$X_s^{(T)} = \frac{V(s,T)}{\prod_{j=0}^{s-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}, \qquad (19)$$

percebe-se que o mesmo satisfaz a relação $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_\tau^T] = X_0^{(T)}$, para qualquer $\tau \leq T_*$ sendo portanto um $\mathbb{Q}$-Martingal[12]. Como conseqüência, $X_t^{(\tau)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_\tau^{(T)}]$, o que significa que:

$$\frac{V(t,T)}{\prod_{j=0}^{t-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{V(T,T)}{\prod_{j=0}^{T-1}(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{j=0}^{T}\frac{1}{(1+O_j)^{\frac{1}{252}}}\right]$$

Desta relação segue o resultado desejado e completando assim a prova do teorema principal.

[12]Em virtude do Teorema de Amostragem, que pode ser visto em Billingsley [1995], Klebaner [1999], entre outros.

Capítulo 3

Economias Ambliópicas, Mercados de Renda Fixa e Completamento por Swaps

3.1 Correção de Ambliopia por Swaps de Taxas de Juros

No capítulo anterior os mecanismos de correção e mitigação do caráter ambliópico dos mercados de renda fixa através da utilização de determinados contratos futuros, futuros de DI, foram formalmente construidos. Neste capítulo será desenvolvido, de forma análoga, o processo de correção de ambliopia por meio de outros derivativos financeiros, que são os contratos de swaps. Estes contratos determinam os termos e condições específicas para uma troca de rentabilidades acumuladas de taxas, para um período futuro pré-determinado.

Os swaps desenvolvidos localmente são instrumentos financeiros negociados principalmente no mercado interbancário[1] e herdam características e elementos específicos do seu ambiente ambliópico de origem como veremos a seguir.

Os contratos de troca de rentabilidade desenvolvidos no mercado brasileiro

[1]Os mercados de swap são mercados tipicamente balcão ou OTC (Over-The-Counter Markets), cujos instrumentos são internacionamente formatados pela ISDA (International Swaps & Derivatives Association). No Brasil os negócios são feitos também predominantemente no mercado balcão ou interbancário em contratos formatados pela própria indústria através de suas organizações representativas.

tem normalmente uma única data futura específicada para a troca da rentabilidade acumulada entre os tipos de taxas, contratualmente definidos para um certo montante ou valor de referência contratual específicado, sem ajustes intermediários. O contrato de swap relevante para os objetivos deste capítulo será o contrato cujo o fluxo de caixa será determinado pela diferença de rentabilidade resultante entre o processo de capitalização das taxas $\mathbb{O}$ diárias e uma taxa pré-fixada para um montante de referência contratualmente fixado. Isto significa que os agentes econômicos e participantes deste swap, de um lado, devem receber (ou pagar) os juros resultantes de certa taxa fixa, conhecida *a priori*, e de outro pagar (ou receber) os juros resultantes de uma capitalização de taxas $\mathbb{O}$ diárias futuras, que se realizarão durante o período $T - t_0$ de vigência do contrato. Este contrato é comumente chamado de Swap PRE x DI.

Este tipo de contrato é um contrato de troca de rentabilidade contra uma taxa pré-fixada que reflete expectativas de acumulaçãode ganhos do overnight para o seu período contratual. Assim, com a introdução de contratos derivativos deste tipo conseguiu-se mitigar os efeitos e conseqüências da ambliopia de uma outra forma, também, original.

Matematicamente será também preciso, neste caso, de um arcabouço teórico que permita o complemento de uma economia ambliópica $\mathfrak{M}$ por meio de uma coleção $\mathbb{S}$ de contratos de swap, $\mathfrak{s} \in \mathbb{S}$, que resolve a incerteza para períodos arbitrários de tempo.

Definição 3.1 *Um swap $\mathfrak{s}(t_0, T)$ com principal $N > 0$ é um contrato derivativo caracterizado pelas seguintes hipóteses:*

(i) *O investimento inicial é nulo.*

(ii) *É formada uma taxa de troca de rentabilidade $\bar{y}_{t_0,T}$ ao ano.*

(iii) *Em $t = T$ o contrato é liquidado financeiramente pela diferença dos fluxos pré e pós-fixados:*

$$\left[- \prod_{j=t_0}^{T-1} (1 + O_j)^{\frac{1}{252}} + (1 + \bar{y}_{t_0,T})^{\frac{T-t_0}{252}} \right] \times N$$

Vamos adotar doravante $N = 1$ sem perda de generalidade.

As taxas formadas pelo mercado de swaps são taxas pré-fixadas de referência. Esta taxa de swap, $\bar{y}_{t_0,T}$, determinada pelo mercado, remunera o fluxo de caixa referenciado na rentabilidade acumulada das taxas diárias $\mathbb{O}$, ou fluxo de rentabilidade pós-fixado DI.

Semelhantemente ao capítulo anterior, iniciamos a construção teórica do seu processo de correção.

Definição 3.2 *Seja $\mathfrak{M}(\mathbb{O})$ um mercado ambliópico de renda fixa. Uma pré-correção de ambliopia por meio de contratos de swap $\mathfrak{s}(t,T)$ com valor de resgate N é um mercado $\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}$ formado pelo investimento overnight $\mathbb{O}$ e por uma coleção $\mathbb{S} = \{\mathfrak{s}(t,T)\}$ de contratos de swap $\mathfrak{s}(t,T)$ nos quais as seguintes condições se verificam:*

(i) *Para qualquer $t > 0$, existe uma família $\mathbb{S} = \{\mathfrak{s}(t,T)\}_{T>t}$ de contratos de swap $\mathfrak{s}(t,T)$ celebrados em $t \in \mathfrak{T}$ e vencendo em T para todo $T < T_*$,*

(ii) *a taxa de swap $\bar{y}_{t_0,T}$ para o contrato é tal que $\bar{y}_{t,T} > 0$.*

A primeira condição garante a existência de vencimentos T, para todos os $t < T < T_*$, em cada data de negociação t, cobrindo o espectro temporal até o tempo terminal T_*, enquanto a segunda assegura a existência de taxas positivas.

3.2 Estratégias de Investimento e Correção de Ambliopia

Com as definições, ora em mãos, dos ativos de overnight $\mathbb{O}$ e dos contratos de swap, $\mathbb{S}$, os quais, como mencionado anteriormente, são liquidamente negociados em mercados de balcão ou interbancários, e das hipóteses relativas às condições de pré-correção da Definição 3.2, pode-se agora proceder ao desenvolvimento dos mecanismos de correção ambliópica do mercado $\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}(\mathbb{O})$.

Serão formalizadas as seguintes definições necessárias para a construção das estratégias de investimento de correção de ambliopia.

Definição 3.3 *Uma estratégia de investimento em uma economia ambliópica $\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}(\mathbb{O})$ pré-corrigida por swaps é um processo estocástico $\theta \in L^2(\mathfrak{T} \times \Omega, \mathbb{R}^{T_*})$ que:*

$$\theta : \mathfrak{T} \times \Omega \to \mathbb{R}^{T_*} \text{ represente:}$$

(i) θ_t^1 *é o dinheiro investido em t no ativo overnight $\mathbb{O}$.*

(ii) θ_t^T *é a posição de contratos de swap com vencimento na data T.*

Denotamos o conjunto das estratégias de investimento em $\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}$ como sendo $\Theta(\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}(\mathbb{O}))$.

Heuristicamente a estratégia de investimento auto-financiada é uma carteira formada por um investimento no ativo $\mathbb{O}$ e uma posição em um swap de taxa de juros, em que se paga a rentabilidade da acumulação de taxas pós-fixadas O_t e se recebe a rentabilidade de uma taxa pré-fixada $\bar{y}_t$, e que pode ser reproduzida pela tabela abaixo:

Tabela 3.1
Fluxo de caixa resultante de investimentos em overnight e swaps PRE x DI

Posição \ Tempo	t_0	t_1	t_2	$\cdots$	$T = t_n$
$\mathbb{O}$	N	$N(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}}$	$N(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}}(1+O_{t_1})^{\frac{1}{252}}$	$\cdots$	$N\prod_{j=0}^{n-1}(1+O_{t_j})^{\frac{1}{252}}$
$\mathbb{S}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cdots$	$N\prod_{j=0}^{n-1}(1+\bar{y}_{t_j})^{\frac{1}{252}}$ $- N\prod_{j=0}^{n-1}(1+O_{t_j})^{\frac{1}{252}}$
Investimento/ Reinvestimento	$-N$	$+N(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}}$ $-N(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}}$	$+N(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}}(1+O_{t_1})^{\frac{1}{252}}$ $-N(1+O_{t_0})^{\frac{1}{252}}(1+O_{t_1})^{\frac{1}{252}}$	$\cdots$	$N\prod_{j=0}^{n-1}(1+\bar{y}_{t_j})^{\frac{1}{252}}$
Fluxo de Caixa	$-N$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\cdots$	$N\prod_{j=0}^{n-1}(1+\bar{y}_{t_j})^{\frac{1}{252}}$

Analogamente à construção desenvolvida no segundo capítulo deste trabalho, algumas definições matemáticas serão necessárias para que estas estratégias de investimento possam ser rigorosamente formalizadas:

Definição 3.4 *Definimos o processo de ganho de uma estratégia* $\theta \in \Theta(\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}(\mathbb{O}))$ *como sendo o processo estocástico*

$$G(\theta) : [0, T_*] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

dado por: $G_t(\theta) = G_t^1(\theta) + \sum_{T \in \mathfrak{T}, T > 1} G_t^T(\theta)$, *onde* $G_t^T(\theta)$ *denota:*

(i) *Para* $T = 1$ *o ganho no ativo overnight:*

$$G_t^1(\theta) = \theta_{t-1}^1 (1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \theta_t^1$$

(ii) *Para* $T > 1$ *o ganho resultante de posições em contratos de swap com vencimento em* T*:*

$$G_t^T(\theta) = \left[\sum_{s \leq T} \theta_s^T \left(- \prod_{j=s}^{T-1} (1 + O_j)^{\frac{1}{252}} + (1 + \bar{y}_{s,T})^{\frac{T-s}{252}} \right) \right] \mathbb{I}_{\{t=T\}} \quad (20)$$

onde $\mathbb{I}_{\{.\}}$ *representa a função indicadora.*

A resolução total da ambliopia será feita mediante a livre negociação de estratégias de investimento, as quais geram os fluxos de caixa de um título de renda fixa ou obrigações, com vencimentos em T conforme visto na Tabela 3.1. Isto requer que matematicamente se possa negociar livremente carteiras $\Pi(\theta)$ baseadas em estratégias de investimento $\theta \in \Theta(\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}(\mathbb{O}))$ cujos fluxos de caixa lastreiam as carteiras $\Pi(\theta)$. Formalmente, tem-se ainda analogamente:

Definição 3.5 *Uma estratégia de investimento* $\theta \in \Theta(\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}(\mathbb{O}))$ *é dita auto-financiável se para qualquer* $t \in \mathfrak{T}$*:*

$$\theta_t^1 = \theta_0^1 + \sum_{s=0}^{t} G_s(\theta) \qquad (21)$$

Isto significa que os fluxos de caixa gerados pelos ajustes terminais dos contratos de swap são financiados ou absorvidos pelos saldos finais dos investimentos em overnight $\mathbb{O}$.

A coleção de estratégias auto-financiáveis será denotada por $\Theta^*(\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}(\mathbb{O}))$. Será considerada, como observado acima, a existência de um mercado de negociação líquido e não arbitrável para os certificados, $\Pi(\theta)$.

O raciocínio desenvolvido nos parágrafos anteriores pode ser formalizado na seguinte hipótese:

Hipótese 3.6 *Uma correção de ambliopia para uma pré-correção $\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}$ é a existência de um mercado organizado $\hat{\mathfrak{M}}^{\mathbb{S}}$ caracterizado pela negociação dos ativos de renda fixa $\{\Pi(\theta)\}_{\theta \in \Theta^*(\hat{\mathfrak{M}}^{\mathbb{S}})}$ resultante das estratégias de investimento em Θ^*.*

A hipótese acima resulta do desenvolvimento de um mercado de negociação líquido e sem impedimentos da coleção de portfólios $\{\Pi(\theta)\}_{\theta \in \Theta^*(\hat{\mathfrak{M}}^{\mathbb{S}})}$ no qual preços de mercado são formados pelos agentes da economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\mathbb{S}}$.

Estes certificados $\Pi(\theta)$ constítuidos pelas estratégias de investimento $\theta \in \Theta^*(\hat{\mathfrak{M}}^{\mathbb{S}})$ fornecem os mesmos fluxos de caixa de obrigações de renda fixa livres de risco e seus preços de mercado permitem a sua transformação em ativos de Arrow-Debreu no sentido clássico.

Tal premissa condiciona e facilita o uso do mesmo arcabouço teórico-formal de apreçamento por não-arbitragem utilizado no capítulo anterior. Semelhantemente à construção teórica desenvolvida anteriormente tem-se:

Teorema 3.7 *Se $\hat{\mathfrak{M}}^{\mathbb{S}}$ não admite oportunidades de arbitragem, então para qualquer $T \in \mathfrak{T}$, existe um ativo $\Pi_T \in \{\Pi(\theta)\}_{\theta \in \Theta^*(\mathfrak{M}^{\mathbb{S}})}$ com as seguintes propriedades:*

(i) *Π_T é um ativo cujo valor de mercado de não-arbitragem, $P(t,T)$, é positivo, $P(t,T) > 0$, e com valor inicial $P(t_0,T) = N$.*

(ii) *O valor em* $t = T$ *do ativo* Π_T *é igual a* $(1 + \bar{y}_{t,T})^{\frac{T-t}{252}}$ *valor de referência do swap.*

Prova do Teorema 3.7

Vamos fixar $T_0 > 1$ e construir um ativo Π_{T_0} que irá requerer um investimento inicial $x = N$ no ativo overnight $\mathbb{O}$ e um rebalanceamento η_{t,T_0}, $\eta_{t,T_0} = (\eta^T_{t,T_0})_{T\in\mathfrak{T}}$ em posições de swaps $\{\mathfrak{s}_T\}_{T\in\mathfrak{T}}$ e overnight $\mathbb{O}$.

Se $T \neq T_0$, tomamos $\eta^T_{t,T_0} = 0$. Caso $T = T_0$, tomamos $\eta^T_{t,T_0} = N$. Sem perda de generalidade assumimos que $N = 1$.

Isto significa que a posição Π_{T_0} será gerada pela aplicação em $t = 0$ de $x = 1$ no ativo overnight $\mathbb{O}$ e pela posição em um contrato swap de taxa de juros vencendo em $T_0 > 1$. Veremos em seguida como escolher η^1_{t,T_0} para $t > 0$ de forma à replicar uma obrigação sintética de renda fixa. para isto, calculamos o processo de ganho $G_t(\eta)$ da estratégia η para todo $t \in \mathfrak{T}$:

$$\begin{aligned} G_t(\eta) &= G^1_t(\eta) + G^{T_0}_t(\eta) \\ &= \eta^1_{t-1,T_0}(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} - \eta^1_{t,T_0} + \eta^{T_0}_t \left(- \prod_{j=0}^{T-1}(1 + O_j)^{\frac{1}{252}} + (1 + \bar{y}_{0,T})^{\frac{T}{252}} \right) \mathbb{I}_{\{t=T_0\}} \end{aligned}$$

Tomando $\eta^{T_0}_t = 1$, vemos que quando $t = T_0$, tem-se que:

$$\begin{aligned} G_{T_0}(\eta) &= 1 \cdot \prod_{j=0}^{T-1}(1 + O_j)^{\frac{1}{252}} + 1 \cdot \left(- \prod_{j=0}^{T-1}(1 + O_j)^{\frac{1}{252}} + (1 + \bar{y}_{0,T_0})^{\frac{T}{252}} \right) \cdot 1 \\ &= (1 + \bar{y}_{0,T})^{\frac{T}{252}} \end{aligned}$$

O que prova o teorema.

Similarmente ao Teorema 2.15 enunciado no capítulo anterior, o teorema, a seguir, formaliza em termos matemáticos a existência de uma medida de Arrow-Debreu para a esperança de acumulação das taxas pós-fixadas do swap.

Mais precisamente prova-se o seguinte teorema:

Teorema 3.8 *Se o mercado de ativos (sintéticos)* $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*(\mathfrak{M}^{\mathbb{S}}(\mathbb{O}))}$ *não admitir oportunidades de arbitragem, então existe uma medida de probabilidade* $\mathbb{Q}$ *equivalente à medida* $\mathbb{P}$ *no espaço filtrado* $(\Omega, \mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_t\}_{t\in\mathfrak{T}}, \mathbb{P})$ *de tal forma que a acumulação das taxas do swap* $\mathfrak{s} \in \mathbb{S}$ *refletem as expectativas de acumulação das taxas overnight* $\{O_i\}_{i=1}^{T_*}$*, isto é, para qualquer* $t < T < T_*, t \in \mathfrak{T}$ *temos:*

$$(1 + y_{t,T})^{\frac{T-t}{252}} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{i=t}^{T-1}(1 + O_i)^{\frac{1}{252}}\right] \qquad (22)$$

A prova do Teorema 3.8 pode ser feita de forma análoga à prova do Teorema 2.15 desenvolvida no capítulo anterior.

De forma análoga poder-se-ia construir uma economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi,\mathbb{S}}(\mathbb{O})$, composta simultaneamente por contratos futuros e contratos de swaps. Desta forma resultados semelhantes podem ser obtidos com as aplicações das mesmas técnicas[2].

[2] A economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi,\mathbb{S}}(\mathbb{O})$ representaria teoricamente o encaminhamento histórico trilhado pelo mercado de renda fixa brasileiro.

Capítulo 4

Apreçamento de Opções de Renda Fixa

4.1 Economias Ambliópicas em Tempo Contínuo

Nos capítulos anteriores, as questões relativas à natureza, conceitos e completamento dos mercados ambliópicos foram definidas e analizadas. Neste capítulo serão desenvolvidos os paradigmas de apreçamento para as opções de renda fixa criadas para estes mercados, levando-se em consideração as suas especificidades e características particulares de formatação contratual.

Para tanto algumas definições teórico-formais adicionais serão necessárias, as quais auxiliarão o desenvolvimento do arcabouço de apreçamento em tempo contínuo.

Definição 4.1: *Uma economia ambliópica* $\mathfrak{M}(\mathbb{O})$ *em tempo contínuo* $t \in [0, T_*]$ *é uma economia formada por um ativo* $\mathbb{O} = \{O_s\}_{s \in [0,T_*]}$ *que remunera instantaneamente um agente no tempo s por uma taxa composta continuamente* O_s*, onde* $O : [0, T_*] \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ *é um processo estocástico no espaço de probabilidade filtrado* $(\Omega, \mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_t\}, \mathbb{P})$.

A taxa O_s é uma abstração financeira que no limite infinitesimal onde $\Delta s = \frac{1}{252}$ é um dia útil, o fator de remuneração $e^{O_s \Delta s}$ pode ser escrito como:

$$e^{O_s \Delta s} \cong (1 + O_s \Delta s) = (1 + O_s \tfrac{1}{252}) \cong (1 + O_s)^{\frac{1}{252}}$$

Semelhantemente ao caso discutido em tempo discreto, podemos definir um contrato futuro $\varphi_{t,T}$ que ajusta margens de forma contínua conforme seus preços de referência sofram alterações instantâneas de mercado. Este contrato futuro com ajuste instantâneo é definido a seguir:

Definição 4.2: *Em uma economia ambliópica* $\mathfrak{M}(\mathbb{O})$ *define-se um contrato futuro*

$\varphi_{t,T} = (\{V(s,T)\}_{s\leq T}, \{M(s,T)\}_{s\leq T})$ *como sendo um par formado por:*

(i) *Um processo estocástico* $V : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ *que representa seu preço de referência. Assume-se que o processo* V *tem uma dinâmica difusiva da forma:*

$$\frac{dV(t,T)}{V(t,T)} = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dw_t \qquad (23)$$

onde $\mu, \sigma : [0, T_*] \times \Omega \to \mathbb{R}$ são contínuas[1].

(ii) *Um processo estacástico* $M : (0, T_*) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *de ajuste de margem* $\{M(s,T)\}$ *com dinâmica vinculada ao ajuste instantâneo de preços de referência, isto é,* $dM(s,T) = dV(s,T) - O_s V(s,T)ds$.

Semelhantemente ao caso de tempo discreto, pode-se criar portfólios de investimento auto-financiáveis compostos pelo ativo ambliópico $\mathbb{O}$ e pelos futuros $\Phi = \{\varphi_t, T\}$ nos quais o financiamento ou absorção do fluxo de ajuste de margem é feito pelo saldo investido em $\mathbb{O}$, formalmente apresentado abaixo:

Definição 4.3 *Uma estratégia auto-financiável* θ *no ativo ambliópico* $\mathbb{O}$ *e em um futuro* $\varphi_{t,T}$ *é um processo* $\theta \in L^2([0,T_*] \times \Omega, \mathbb{R}^{1+1}), \theta_t = (\theta_t^0, \theta_t^T)$ *satisfazendo para qualquer* $t \leq T$ *a condição:*

$$\theta_t^0 = \theta_0^0 + \int_0^t [\theta_s^0 O_s ds + \theta_s^T dM(s,T)] \qquad (24)$$

[1]Para o modelo difusivo 1-dimensional com incerteza dw_t, assume-se tacitamente que μ e σ definem um mesmo prêmio por exposição à este único fator de risco $\lambda_t = \dfrac{\mu(t,T) - O_t}{\sigma(t,T)}$ independentemente do vencimento $T > 0$.

O conjunto de tais estratégias podem ser denotadas de forma semelhante ao caso discreto por $\Theta^*(M(\mathbb{O}))$. Analogamente ao caso de tempo discreto mostra-se que:

Proposição 4.4: *Em uma economia ambliópica $\mathfrak{M}(\mathbb{O})$ pode-se construir uma família de portfólios $\{\Pi_T\}_{T\in(0,T_*)}$ que replicam uma obrigação de renda fixa com vencimento em T, isto é, exigindo um investimento inicial $V(0,T) < N$ e retornando no resgate em T um valor fixo igual à N.*

Considerar-se-a que $N = 1$ a partir deste ponto.

Prova da Proposição 4.4:

O portfólio Π será construído a partir de uma estratégia $\theta \in \Theta^*$ descrita abaixo:

Considera-se uma posição com investimento inicial no ativo $\mathbb{O}$ igual à $x = \theta_0^0$ e um investimento em apenas um contrato futuro $\varphi_{t,T}$, isto é, com $\theta_s^T = 1$, para qualquer $s \leq T$. Neste caso temos que:

$$\begin{aligned}
\theta_T^0 &= \theta_0^0 + \int_0^T \theta_s^0 O_s ds + \theta_s^T dM(s,T) \\
&= x + \int_0^T \theta_s^0 O_s ds + 1(dV_s - O_s V_s ds) \\
&= x + \int_0^T (\theta_s^0 - V_s) O_s ds + \int_0^T dV_s \\
&= x + \int_0^T (\theta_s^0 - V_s) O_s ds + \underbrace{V(T,T)}_{1} - V(0,T)
\end{aligned}$$

Tomando-se $x = V(0,T)$ e reinvestindo continuamente os fluxos de caixa instantâneos resultantes das estratégias no ativo $\mathbb{O}$ de forma que $\theta_s^0 = V(s,T)$ temos que no tempo T, $\theta_T^0 = 1$, o que prova a proposição acima.

De forma semelhante ao caso em tempo discreto assume-se que as carteiras $\Pi_T(\hat{\mathfrak{M}}^\Phi(\mathbb{O}))$ possam ser negociadas em um mercado sem arbitragem e completem a economia ambliópica de forma que $\hat{\mathfrak{M}}^\Phi(\mathbb{O})$ traduz a incerteza das taxas de juros para qualquer horizonte $T \leq T_*$:

Hipótese 4.5: *Existe um mercado* $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ *para os certificados* $\{\Pi_T\}$ *sem oportunidades de arbitragem.*

A hipótese acima resulta do desenvolvimento de um mercado de negociação líquido e sem impedimentos da coleção de portfólios $\{\Pi(\theta)\}_{\theta\in\Theta^*(\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi})}$ no qual preços de mercado são formados pelos agentes da economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}$.

Tal premissa condiciona e facilita o uso do mesmo arcabouço teórico-formal de apreçamento por não-arbritagem em tempo contínuo desenvolvido por Harrison e Pliska[2] [1981] e [1983]. Semelhantemente à construção teórica desenvolvida anteriormente e com as condições acima, o teorema principal deste capítulo, que segue abaixo, pode ser enunciado:

Teorema 4.6: *Se* $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ *não admite oportunidades de arbitragem, então existe uma medida de probabilidade* $\mathbb{Q}$ *equivalente à* $\mathbb{P}$ *de forma que qualquer* $t \leq T \leq T_*$*:*

$$V(t,T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T O_s ds}] \qquad (25)$$

Prova do Teorema 4.6:

A prova deste teorema é uma aplicação do resultado de Girsanov e segue o mesmo princípio do arcabouço teórico de não-arbitragem de Harrison e Pliska [1981]. Para isto, define-se o processo $\{\mathbb{B}_t\}_{t>0}$ como sendo o resultado da acumulação continua do ativo ambliópico $\mathbb{O}$:

$$\mathbb{B}_t = e^{\int_0^t O_s ds}. \qquad (26)$$

O resultado desejado é equivalente ao fato que o processo $\left\{\dfrac{V(t,T)}{\mathbb{B}_t}\right\}_{t\leq T}$ é um $\mathbb{Q}$-martingal.

[2] A abordagem martingal do apreçamento por não-arbitragem em tempo contínuo foi formalizada por Harrison e Pliska [1981] e [1983] e generalizada por Duffie e Huang [1986], Delbaen [1992], Schachermayer [1994] e Delbaen e Schachermayer [1994]. Uma boa introdução a este tema pode também ser encontrada em Duffie [2002]

Seja o processo normalizado z_t^T definido pela razão:

$$z_t^T = \frac{V(t,T)}{\mathbb{B}_t} \qquad (\ 27\ )$$

O seu diferencial, dz_t^T, pode ser calculado através do lema de Itô . Fazendo-se uso do fato que $d\mathbb{B}_t = O_t\mathbb{B}_t dt$ temos que:

$$dz_t^T = d\left(\frac{V(t,T)}{\mathbb{B}_t}\right) = \frac{dV(t,T)}{\mathbb{B}_t} - \frac{1}{\mathbb{B}_t^2}V(t,T)d\mathbb{B}_t$$

$$dz_t^T = z_t^T\left(\frac{dV(t,T)}{V(t,T)} - \frac{d\mathbb{B}_t}{\mathbb{B}_t}\right)$$

$$dz_t^T = z_t^T\left(\frac{dV(t,T)}{V(t,T)} - O_t dt\right) \qquad (\ 28\ )$$

Como $\frac{dV(t,T)}{V(t,T)} = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dw_t$, definindo-se $\tilde{w}_t = w_t + \lambda_t dt$ com $\lambda_t = \frac{\mu(t,T) - O_t}{\sigma(t,T)}$. Com esta transformação obtem-se que o processo dos retornos de Z_t^T segue:

$$\frac{dz_t^T}{z_t^T} = \sigma(t,T)d\tilde{w}_t, \qquad (\ 29\ )$$

Isto transforma o processo normalizado $V(t,T)$ pelo numerário $\mathbb{B}_t$ em um Martingal sobre a medida $\mathbb{Q}$, o que completa a prova do Teorema 4.6.

O Teorema 4.6 responde teoricamente o quanto os preços de referência dos contratos futuros $\{\phi_{t,T}\}$ traduzem as expectativas de acumulação de ganho em um ambiente de tempo contínuo e ainda com ajustes instantâneos de margem.

4.2 Apreçamento de Opções de Contratos Futuros

Nesta seção serão desenvolvidas as bases para a construção de modelos de apreçamento de opções de renda fixa em economias originalmente ambliópicas.

Como visto no segundo capítulo os ajustes contratuais de margem dos contratos futuros são feitos em datas discretas de final do dia. Além disto as taxas O_t da aplicação de overnight, dos certificados $\Pi(t,T)$, assim como as taxas de negociação dos contratos futuros de DI - a partir das quais os preços de referência e liquidação dos contratos são calculados - são taxas reais para períodos temporais, discretos e definidos.

Sem embargo, a vocação natural do ferramental matemático difusivo em tempo contínuo nas aplicações financeiras, aliada a sua significativa flexibilidade analítica, nos leva, nesta seção, a adotar o arcabouço teórico de cálculo e modelagem em tempo contínuo[3].

Para fins de aplicação ao mercado de derivativos será neste instante adotada a seguinte convenção temporal $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < T_*$ na qual $T_j = \frac{j}{252}$, sendo j o número de dias úteis, com o tempo de avaliação $t \in [0, T_*]$.

Como os instrumentos são usualmente cotados, avaliados e negociados para períodos discretos inteiros será aqui introduzida a função constante por partes, ou "escada", $\beta(t) = T_j$ cuja função consiste em aplicar a seguinte relação para qualquer tempo t:

$$\beta(t) = T_j \text{ se } T_{j-1} < t \leq T_j \qquad (30)$$

[3]Além dos trabalhos mencionados no primeiro parágrafo da página 9 acima, contamos também como paradigma de aplicações em tempo contínuo , os trabalhos especificamente desenvolvidos para a modelagem das opções de IDI da BMF, tais como em Gluckstern [2001] e Almeida [2003].

Neste caso a seguinte definição das taxas a termo $L_i(t)$ será útil:

Definição 4.7 *As taxas a termo, ou forward, de um dia são dadas pela seguinte relação:*

$$(1 + L_i(t))^{\frac{1}{252}} = \frac{V(t, T_i)}{V(t, T_{i+1})} \qquad (\ 31\ )$$

onde $V(t, T)$ são os preços de referência dos contratos futuros ϕ.

Para as taxas a termo, ou forward de um dia $L_i(t)$, definidas acima, será adotada uma particular dinâmica difusiva que segue como hipótese abaixo:

Hipótese 4.8: *Assume-se que a economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ exibe o seguinte modelo difusivo para a dinâmica das taxas de termo diárias $\{L_i(t)\}$, tal que:*

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dw_t^i \qquad (\ 32\ )$$

onde $\mu, \sigma : \mathfrak{T} \times \mathfrak{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são processos contínuos e limitados. Os processos Brownianos w_t^i são correlacionados, apresentando uma matriz de correlação $\rho = (\rho_{ij})$ estática.

Uma vez definida a dinâmica do processo difusivo da seqüência de taxas diárias a termo, a condição de não-arbitragem para o viés da dinâmica pode ser derivada.

Teorema 4.9 *Se a economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ não admite oportunidades de arbitragem, então o modelo difusivo $(\{\mu_i\}, \{\sigma_i\})$ para a coleção de taxas $\{L_i(t)\}_{i \in \mathfrak{T}}$ sob a medida equivalente $\mathbb{Q}$ deve satisfazer a seguinte condição para todo $k \in \mathfrak{T}$:*

$$\mu_k(t) = \sigma_k(t) \sum_{l=\beta(t)}^{k-1} \rho_{kl}\sigma_l(t) \frac{L_l(t)}{1 + L_l(t)} \ + \ \frac{1}{2}\sigma_k^2(t) \frac{L_k(t)}{1 + L_k(t)} \qquad (\ 33\ )$$

A condição (33) acima é usualmente chamada de "condição de não-arbitragem" na medida equivalente $\mathbb{Q}$.

Prova do Teorema 4.9:

Usando a equação (31) da Definição 4.7 das taxas a termo diárias podemos escrever os valores de referência como:

$$V(t,T) = \left(\prod_{l=\beta(t)}^{T-1} \frac{1}{(1+L_l(t))^{\frac{1}{252}}} \right) V(t, T_{\beta(t)}) \qquad (34)$$

Vamos definir também um numerário dado pelo processo $\{B_t\}_{t\in[0,T_*]}$ por:

$$B_t = \left(\prod_{l=0}^{\beta(t)-1} (1+L_l(t))^{\frac{1}{252}} \right) V(t, T_{\beta(t)}) \qquad (35)$$

B_t remunera até o tempo $t > 0$ um investimento inicial de uma unidade monetária em $t = 0$. Conforme visto acima, no Teorema 4.6, na medida $\mathbb{Q}$, o processo $z_t^T = \dfrac{V(t,T)}{B_t}$ é um $\mathbb{Q}$-Martingal. Esta observação permite a determinação da condição necessária entre μ e σ.

Utilizando-se das equações (34) e (35) e substituindo na equação do processo normalizado z_t^T, temos que:

$$z_t^T = \frac{V(t,T)}{B_t} = \frac{\prod_{l=\beta(t)}^{T-1} (1+L_l(t))^{-\frac{1}{252}}}{\prod_{l=0}^{\beta(t)-1} (1+L_l(t))^{\frac{1}{252}}} = \prod_{l=0}^{T-1} (1+L_l(t))^{-\frac{1}{252}}$$

Tomando-se os logaritmos, temos:

$$\ln z_t^T = -\frac{1}{252} \sum_{l=0}^{T-1} \ln(1+L_l(t)) \qquad (36)$$

Aplicando-se o lema de Itô, para o cálculo da dinâmica $\ln z_t^T$ tem-se ainda que:

$$d[\ln z_t^T] = -\frac{1}{252}\sum_{l=0}^{T-1} d\ln(1+L_l(t))$$
$$= -\frac{1}{252}\sum_{l=0}^{T-1}\left\{\frac{dL_l}{1+L_l} - \frac{1}{(1+L_l)^2}\cdot\frac{(dL_l)^2}{2}\right\} \qquad (\ 37\ )$$

Usando a dinâmica das taxas de juros de um dia a termo dada pela equação (32) da Hipótese 4.8 acima, obtem-se:

$$d[\ln z_t^T] = -\frac{1}{252}\sum_{l=0}^{T-1}\left\{\frac{L_l}{1+L_l}(\mu_l dt + \sigma_l(t)dw_t^l) - \frac{1}{2}\left(\frac{L_l}{1+L_l}\right)^2 \sigma_l^2(t)dt\right\}$$

E ainda coletando-se os termos em dt e dw_t^l, tem-se que:

$$d[\ln z_t^T] = \underbrace{\left[-\frac{1}{252}\sum_{l=0}^{T-1}\left\{\mu_l\frac{L_l}{1+L_l} - \frac{1}{2}\left(\frac{L_l}{1+L_l}\right)^2\sigma_l^2\right\}\right]}_{m_{t,T}} dt + \sum_{l=0}^{T-1}\underbrace{\left\{-\frac{1}{252}\frac{L_l}{1+L_l}\sigma_l\right\}}_{s_t(l)} dw_t^l$$

$$d[\ln z_t^T] = m_{t,T}dt + \sum_{l=0}^{T-1} s_t(l)dw_t^l \qquad (\ 38\ )$$

Por outro lado, sabe-se que $d\ln z = \dfrac{dz}{z} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dz}{z}\right)^2$ e para que z_t seja Martingal, impoem-se que $\dfrac{dz}{z} = \sigma dw$. Para que isto se verifique $d\ln z$ deve satisfazer:

$$d\ln z = \sigma_T dw - \frac{1}{2}\sigma_T^2 dt. \qquad (\ 39\ )$$

Logo, o drift $m_{t,T}$ deve satisfazer a relação:

$$m_{t,T} = -\frac{1}{2}\sigma_T^2 \text{ com } \sigma_T^2 dt = (d\ln z)^2 \tag{40}$$

Calculando $(d\ln z)^2$ obtemos:

$$(d\ln z_t^T)^2 = \sum_{k,l=0}^{T-1} s_t(k)s_t(l)\rho_{kl}dt \tag{41}$$

Logo,

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{(252)^2}\sum_{k,l=0}^{T-1} \rho_{kl}\sigma_k(t)\sigma_l(t)\left(\frac{L_k}{1+L_k}\right)\left(\frac{L_l}{1+L_l}\right) \tag{42}$$

Impondo a restrição que $m_{t,T} = -\frac{1}{2}\sigma_T^2(t)$ e substituindo nesta igualdade as expressões de $m_{t,T}$ e σ_T^2 derivadas em (40) e (42), tem-se:

$$-\frac{1}{252}\sum_{l=0}^{T-1}\mu_l\frac{L_l}{1+L_l} - \frac{1}{2}\left(\frac{L_l}{1+L_l}\right)^2\sigma_l^2(t)$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(252)^2}\sum_{k,l=0}^{T-1}\rho_{kl}\sigma_k(t)\sigma_l(t)\left(\frac{L_k}{1+L_k}\right)\left(\frac{L_l}{1+L_l}\right) \tag{43}$$

Reescrevendo esta igualdade, temos que:

$$\sum_{l=0}^{T-1}\left(\mu_l - \frac{1}{2}\frac{L_l}{1+L_l}\sigma_l^2(t)\right)\frac{L_l}{1+L_l} =$$
$$\frac{1}{252}\sum_{l=0}^{T-1}\frac{L_l}{1+L_l}\left(\sum_{k=0}^{T-1}\frac{1}{2}\rho_{kl}\sigma_k(t)\sigma_l(t)\frac{L_k}{1+L_k}\right) \tag{44}$$

Agindo sob indução em $T = T_1, T_2, \ldots, T_*$ obtemos a relação desejada.

Para definirmos os contratos derivativos de compra e venda de taxas de juros precisamos de algumas definições adicionais, a saber:

Definição 4.10 *Seja $\{L_i(t)\}_{t\in[0,T_*],i\in\mathfrak{T}}$ a coleção de taxas a termo diárias em uma econômia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$, que satisfaz as dinâmicas prescritas pela Hipótese 4.8 acima.*

Para $T_i < T_j$, define-se a taxa a termo $F_{ij}(t)$ para o período $[T_i, T_j]$ vista em $t > 0$ como sendo:

$$F_{ij}(t) = \left[\frac{V(t,T_i)}{V(t,T_j)}\right]^{\frac{252}{T_j - T_i}} - 1 \qquad (45)$$

As taxas $\{F_{ij}(t)\}_{i<j}$ expressas em percentual ao ano, em convenção geométrica de 252 dias anuais por dias úteis, representam taxas a termo ou forward para o período $[t_i, T_j]$ vigentes na data de observação $t \in [0, T_*]$.

Observa-se que para quaisquer $T_i < T_j$ vale:

$$(1 + F_{ij}(t))^{T_j - T_i} = \prod_{k=i}^{j}(1 + L_k(t)), \qquad (46)$$

o que resulta diretamente da equação da equação (45) acima.

Os contratos derivativos que serão definidos a seguir terão como objeto subjacente as taxas a termo F_{ij} vigentes na data de exercício da opção. Para isto será crucial a modelagem das volatilidades destas taxas.

No entanto algumas considerações em relação a natureza contratual dos instrumentos financeiros que constituem as opções de compra e venda sobre as taxas a termo serão necessárias.

Os contratos de opções desenvolvidos nos mercados $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ são na realidade opções definidas sobre valores de referência de contratos futuros de DI $\varphi_{T,T+\delta}$ para uma data T futura contratual com um vencimento posterior $T + \delta$.

De forma análoga a relação estabelecida entre preços de referência de contratos futuros $\mathbf{\Phi}$ e as taxas implícitas negociadas neste mercado de opções, negociam-se opções de compra e venda sobre as taxas a termo, ou forward, que prevalecerão entre as datas T e $T + \delta$, mas cujo pay-off contratual é liquidado através de seus valores de referência, ou seja pela diferença entre o preço de referência de exercício e o preço de referência de mercado na data de exercício. Esta particularidade negocial e contratual impõem uma relação inversa entre as posições tomadas em taxa e valores de referência, ou seja, as opções de compra de taxas a termo são tratadas como opções de venda de valores de referência a termo de contratos futuros e opções de venda de taxas a termo são tratadas como opções de compra de valores de referência a termo de contratos futuros[4].

Nota-se que o mercado de opções assim constítuido decorre de uma evolução natural dos mercados de derivativos das economias de origem ambliópica, na qual, como demonstrado no capítulo segundo, os contratos futuros representariam um papel fundamental na resolução da questão ambliópica. São estes instrumentos que concentram liquidez, segurança negocial e principalmente as expectativas temporais em relação às taxas de juros da economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$, sendo portanto objetos e veículos naturais no desenvolvimento dos contratos de opções de renda fixa neste mercado.

Para que sejam definidas as opções de compra e venda, valores de referência $V(t,T)$ dos futuros $\varphi_{t,T} \in \mathbf{\Phi}$ serão expressos sob a forma de taxas pré-fixadas:

$$V(t,T) = \frac{N}{(1 + y_{t,T})^{\frac{T-t}{252}}}$$

Vamos assumir doravante que $N = 1$.

Definição 4.11 *Define-se opções de compra* $\mathcal{C}(T, T+\delta, \overline{y}_k)$ *e venda* $\mathcal{P}(T, T+\delta, \overline{y}_k)$ *com vencimento em* T *e taxa de exercício* $\overline{y}_k$ *com contratos derivativos sobre os futuros* $\phi_{T,T+\delta}$ *e pay-off dado por:*

[4] A utilização dos *caplets* tradicionais implicaria na adoção de uma relação direta nas posições de compra e venda de opções de taxas a termo

(a) *No caso das opções de compra $\mathcal{C}$:*

$$\mathcal{C}(T, T+\delta, \overline{y}_k)(T) = \left[\frac{1}{(1+\overline{y}_k)^{\frac{\delta}{252}}} - \frac{1}{(1+y_{T,T+\delta})^{\frac{\delta}{252}}}\right]^+ \tag{47}$$

(b) *No caso das opções de venda $\mathcal{P}$:*

$$\mathcal{P}(T, T+\delta, \overline{y}_k)(T) = \left[\frac{1}{(1+y_{T,T+\delta})^{\frac{\delta}{252}}} - \frac{1}{(1+\overline{y}_k)^{\frac{\delta}{252}}}\right]^+ \tag{48}$$

Note que o *pay-off* é definido a partir de preços de referência, ou preços de exercício $K = \dfrac{1}{(1+\overline{y}_k)^{\frac{\delta}{252}}}$.

Para que se consiga o apreçamento destas opções serão necessários alguns resultados auxiliares. Como o *pay-off* das opções de futuros $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ dependem dos preços de referência, será preciso modelar estas variáveis a partir das taxas.

Definição 4.12 *Seja $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ uma economia ambliópica corrigidas por futuros. Para qualquer datas $T_k < T_l$ e $t > 0$, define-se o preço a termo $F(t, T_k, T_l)$ como sendo:*

$$F(t, T_k, T_l) = \prod_{i=k}^{l-1} \frac{1}{(1+L_i(t))^{\frac{1}{252}}} \tag{49}$$

Uma vez definidos os preços a termo $F(t, T_k, T_l)$ vigentes em t para o intervalo de tempo $[T_k, T_l]$, será necessária a derivação da volatilidade instantânea $\sigma_{t,T,T+\delta}(t, L)$ do seu processo:

Teorema 4.13 *Para quaisquer $T > 0$, $\delta > 0$, o processo de preços a termo $\{F(t, T, T+\delta)\}_{t \leq T}$ é um processo difusivo com volatilidade instantânea $\sigma_{t,T,T+\delta}(t, L)$ dada pela expressão:*

$$\sigma_{t,T,T+\delta}(t,L) = \frac{1}{252}\sqrt{\sum_{i=T}^{T+\delta-1}\sum_{j=T}^{T+\delta-1}\frac{L_i(t)L_j(t)}{(1+L_i(t))(1+L_j(t))}\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{ij}} \qquad (50)$$

Prova:

Se $F(t,T,T+\delta) = \prod_{i=T}^{T+\delta-1}\frac{1}{(1+L_i(t))^{\frac{1}{252}}}$, então

$\ln F(t,T,T+\delta) = -\frac{1}{252}\sum_{i=T}^{T+\delta-1}\ln(1+L_i(t))$ e portanto

$$d\ln F(t,T,T+\delta) = -\frac{1}{252}\sum_{i=T}^{T+\delta-1} d_t\ln(1+L_i(t)) \qquad (51)$$

Similarmente à derivação da equação (37) tem-se:

$$d\ln F(t,T,T+\delta) = -\frac{1}{252}\sum_{i=T}^{T+\delta-1}\left\{\frac{1}{1+L_i(t)}dL_i(t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+L_i(t))^2}(dL_i(t))^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{252}\sum_{i=T}^{T+\delta-1}\left\{\frac{L_i}{1+L_i}\left(\frac{dL_i}{L_i}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{L_i}{1+L_i}\right)^2\cdot\left(\frac{dL_i}{L_i}\right)^2\right\} \qquad (52)$$

Usando a dinâmica das taxas de juros de um dia a termo dada pela equação (32) da Hipótese 4.8 acima, obtem-se:

$$d\ln F(t,T,T+\delta) = -\frac{1}{252}\sum_{i=T}^{T+\delta-1}\left\{\frac{L_i}{1+L_i}\left[\mu_i dt + \sigma_i(t)dw_t^i\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{L_i}{1+L_i}\right)^2\sigma_i^2(t)dt\right\} \qquad (53)$$

E ainda coletando-se os termos em dt e dw_t^l, tem-se que:

$$d\ln F(t,T,T+\delta) = \left[-\frac{1}{252}\sum_{i=T}^{T+\delta-1}\left\{\frac{\mu_i L_i}{1+L_i} - \frac{1}{2}\left(\frac{L_i}{1+L_i}\right)^2 \sigma_i^2(t)\right\}\right] dt$$

$$+\left[-\frac{1}{252}\sum_{i=T}^{T+\delta-1}\frac{L_i}{1+L_i}\sigma_i(t)dw_t^i\right] \qquad (54)$$

Por outro lado, $d_t \ln F(t,T,T+\delta) = \dfrac{dF}{F} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dF}{F}\right)^2$ e portanto, a volatilidade instantânea de F, denotada por $\sigma_F(t)$, é obtida calculando-se:

$$\sigma_F^2 dt = \left[-\frac{1}{252}\sum_{i=T}^{T+\delta-1}\frac{L_i}{1+L_i}\sigma_i(t)dw_t^i\right]\left[-\frac{1}{252}\sum_{j=T}^{T+\delta-1}\frac{L_j}{1+L_j}\sigma_j(t)dw_t^j\right]$$

$$\sigma_F^2 dt = \frac{1}{(252)^2}\left[\sum_{i=T}^{T+\delta-1}\sum_{j=T}^{T+\delta-1}\frac{L_i(t)L_j(t)}{(1+L_i(t))(1+L_j(t))}\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{ij}\right] dt \qquad (55)$$

de onde se deriva a expressão desejada.

Usualmente os parâmetros de viés e volatilidade de não-arbitragem são derivados para que os mesmos possam alimentar modelos de apreçamento de derivativos, a saber, opções européias de compra e venda de investimentos de renda fixa.

Neste sentido, nota-se a prevalência do modelo de Black[5] enquanto ferramenta de avaliação de derivativos de renda fixa nos mercados internacionais. Tal fato pode ser verificado em Rebonato [2002] e [1998], Hull [2006], Björk [2004], Brigo e Mercurio [2001], entre outros. Nos mercados locais, os contratos de opção européia de compra e venda sobre futuros de DI, descritos acima, utiliza-se também o modelo de Black como instrumento primordial de apreçamento. Com este procedimento segue a premissa assumida implicitamente pelo mercado, de que os valores de referência a termo dos contratos futuros de DI, $\varphi_{t,T,T+\delta}$, são determinados por uma distribuição log-normal.

[5]O modelo originalmente apresentado em Black [1976] para o apreçamento de opções européias de compra e venda de termos, commodities e futuros

Esta suposição é tacitamente aceita pelos participantes que calibram o modelo nos preços de mercado dos contratos negociados de compra e venda, extraindo dos mesmos a volatilidade *spot* implícita, denotada por:

$$\sigma_{Black,T,T+\delta}.$$

A inversão da fórmula de Black para a obtenção das volatilidades implícitas negociadas para os diferentes prazos a termo, dos contratos futuros, permite a construção da estrutura temporal das volatilidades, a termo ou forward cuja análise será desenvolvida na próxima seção.

4.3 Estruturas de Volatilidade Ambliópicas

As volatilidades implícitas nos preços das opções de compra e venda dos contratos futuros de DI permite a construção de uma estrutura de volatilidades das taxas a termo.

Por outro lado o modelo deve ser calibrado a partir das séries de opções de compra e venda existentes e negociadas pelo mercado, consistindo basicamente de três tipos de séries de opções definidas pelo período de vencimento do contrato futuro subjacente, contado a partir da data de vencimento da opção.

Os três tipos de opções negociados são os que se referem respectivamente aos contratos futuros de três, seis e doze meses, contados a partir da data de vencimento da opção[6].

Para a calibração do modelo em tempo contínuo para as taxas overnight $\{O_i\}_i$ serão necessárias algumas hipóteses sobre a estrutura de volatilidade. Vamos considerar o caso mais simples, modelando uma estrutura de volatilidade constante em trimestres de dias úteis.

Definição 4.14 *Seja* $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ *uma economia ambliópica em tempo contínuo cujas taxas overnight tem expectativa* $\{L_i(t)\}_{t\leq T_*}$ *obedecendo a um processo*

[6]As especificações contratuais destas opções encontram-se disponíveis no endereço eletrônico: www.bmf.com.br

difusivo do tipo $\frac{dL_i}{L_i} = \mu_i(t) + \sigma_i(t)dw_t^i$ *com* (μ, σ) *obedecendo à condição de não-arbitragem (50). Dizemos que o modelo difusivo para* $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ *é um modelo de Cabeça de Trimestre quando:*

(i) *O horizonte* T_* *é obtido pela justaposição de trimestres de dias úteis com cabeça* $\{T_i\}$, $T_{i+1} - T_i = d_i$, *número de dias úteis*

(ii) *Em um trimestre qualquer* $[T_i, T_{i+1}]$ *as volatilidades intantâneas das taxas overnight são constantes:*

$$\sigma_j(t) = \bar{\sigma}_i \mathbb{I}_{\{t \leq j\}}, \quad j \in [T_i, T_{i+1}], \quad \bar{\sigma}_i \in \mathbb{R}^+$$

Vamos imaginar que se T é a cabeça de um trimestre qualquer, então $T + d_1, T_1 + d_2, T_2 + d_3$ *e* $T_3 + d_4$ representam as cabeças dos quatro trimestres consecutivos que formam um ano $[T, T + 252]$. Assumindo que a economia $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$ determina preços para as opções $\{\mathcal{C}(T, T + \delta_i)\}_{i=1,2,3,4}$ com $\delta_1 = d_1, \quad \delta_2 = d_1 + d_2, \quad \delta_3 = d_1 + d_2 + d_3 \quad e \quad \delta_4 = \sum_{i=1}^{4} d_i$, então será possível calibrar o modelo de cabeça de trimestre diretamente a partir das volatilidades implícitas no modelo de Black destas opções, que é a convenção usual de mercado. Para este fim, vamos lembrar que relativo à medida onde $F[t, T, T + \delta]$ é log-normal, os preços de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$ serão dados pela fórmula de Black.

Sejam $\{\sigma_{Black,T,T+\delta_i}\}_{i=1,2,3,4}$ as volatilidades de Black implícitas nas opções $\mathcal{C}(T, T + \delta_i)$ e $\mathcal{P}(T, T + \delta_i)$. Neste caso, podemos considerar a seguinte aproximação:

$$\sigma^2_{Black,T,T+\delta} = \frac{1}{(252)^2} \sum_{i,j=T}^{T+\delta-1} \frac{L_i(0)L_j(0)}{(1 + L_i(0))(1 + L_j(t))} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j \rho_{ij} \qquad (56)$$

A aproximação dada pela equação (56) acima permite aproximar as taxas $L_i(t)$ pelas taxas forward observadasem $t = 0$, ou seja, para o seu uso prático na fórmula de Black as taxas forward de 1 dia são congeladas em t=0[7].

[7]Esta aproximação, conhecida por aproximação de Rebonato é proposta inicialmente em Rebonato[1998], e analisada posteriormente em Brigo e Mercurio [2001] e Rebonato [2002]

Assumindo que os choques dos processos $\{L_i\}$ sejam todos independentes entre si a expressão se simplifica para:

Para $1 \leq m \leq 4$:

$$\sigma^2_{Black,T,T+\delta_m} = \frac{1}{(252)^2} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{d_p} \left(\frac{L_{T+d_p+q}(0)}{1 + L_{T+d_p+q}(0)} \right)^2 \bar{\sigma_p}^2 \qquad (57)$$

Logo,

$$\sigma_{Black,T,T+\delta_m} = \frac{1}{252} \sqrt{ \sum_{p=1}^{m} \bar{\sigma_p}^2 \left(\sum_{q=1}^{d_p} \left(\frac{L_{T+d_p+q}(0)}{1 + L_{T+d_p+q}(0)} \right)^2 \right) } \qquad (58)$$

Aproximando as taxas a termo $L_j(0)$ no trimestre por um valor comum, obtemos na fórmula simplificada:

$$\sigma_{Black,T,T+\delta_m} = \frac{1}{252} \sqrt{ \sum_{p=1}^{m} \bar{\sigma_p}^2 dp \left(\frac{L_{T+d_p+q}(0)}{1 + L_{T+d_p+q}(0)} \right)^2 } \qquad (59)$$

Neste caso, podemos calibrar recursivamente o modelo a partir das opções para cada um dos períodos $[T, T + \delta_m]$:

3m: $$\sigma_{Black,T,T+d_1} = \frac{1}{252} \bar{\sigma_1} d_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L_{T+d_1}(0)}{1 + L_{T+d_1}(0)} \right) \qquad (60)$$

6m: $$\sigma_{Black,T,T+d_1+d_2} = \frac{1}{252} \sqrt{ \bar{\sigma_1}^2 d_1 \left(\frac{L_{T+d_1}(0)}{1 + L_{T+d_1}(0)} \right)^2 + \bar{\sigma_2}^2 d_2 \left(\frac{L_{T+d_2}(0)}{1 + L_{T+d_2}(0)} \right)^2 } \qquad (61)$$

9m: $\sigma_{Black,T,T+d_1+d_2+d_3} =$

$$\frac{1}{252} \sqrt{ \bar{\sigma_1}^2 d_1 \left(\frac{L_{T+d_1}(0)}{1 + L_{T+d_1}(0)} \right)^2 + \bar{\sigma_2}^2 d_2 \left(\frac{L_{T+d_2}(0)}{1 + L_{T+d_2}(0)} \right)^2 + \bar{\sigma_3}^2 d_3 \left(\frac{L_{T+d_3}(0)}{1 + L_{T+d_3}(0)} \right)^2 } \qquad (62)$$

12m: $\sigma_{Black,T,T+d_1+d_2+d_3+d_4} =$

$$\frac{1}{252} \sqrt{ \bar{\sigma_1}^2 d_1 \left(\frac{L_{T+d_1}(0)}{1 + L_{T+d_1}(0)} \right)^2 + \bar{\sigma_2}^2 d_2 \left(\frac{L_{T+d_2}(0)}{1 + L_{T+d_2}(0)} \right)^2 + \bar{\sigma_3}^2 d_3 \left(\frac{L_{T+d_3}(0)}{1 + L_{T+d_3}(0)} \right)^2 + \bar{\sigma_4}^2 d_4 \left(\frac{L_{T+d_4}(0)}{1 + L_{T+d_4}(0)} \right)^2 }$$

$$(63)$$

O esquema de calibração recursiva da equação (59) através de um conjunto de opções sobre contratos futuros de DI com vencimentos trimestrais até o período máximo de um ano, permite a extração das volatilidades forward das taxas para os diferentes períodos trimestrais.

Não obstante, o paradigma de modelagem adotado modela as taxas no seu nível mais básico, ou seja, as taxas overnight forward, permitindo portanto o apreçamento dos mais variados derivativos de taxa de juros dos mercados de origem ambliópica $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$, principalmente os derivativos sobre ativos sujeitos a indexação diária por meio de um percentual de taxa de overnight.

Capítulo 5

Metodologias para Cálculo de VaR Delta Normal de Carteiras com Contratos DI e Títulos de Renda Fixa

Os mecanismos de correção dos efeitos ambliópicos apresentados pelos mercados - cujo desenvolvimento histórico foi descrito no primeiro capítulo deste trabalho - foram caracterizados, definidos e formalizados nos capítulos subseqüentes.

A natureza específica destes instrumentos derivativos, totalmente vinculados à sua realidade regional e às práticas locais de ordem contratual e operacional, podem criar ajustes e riscos adicionais, quando abordagens e metodologias consagradas internacionalmente são diretamente aplicadas.

Tal situação se verifica quando leva-se em consideração as especificidades contratuais que regem o mecanismo de juste dos contratos futuro de DI, tendo em vista os preços de referência e de ajuste destes derivativos de renda fixa.

Nos parágrafos que seguem serão analisados os efeitos e conseqüências trazidos por estes contratos - que tiveram a sua origem e desenvolvimento em mercados ambliópicos $\mathfrak{M}$ e transitaram para os mercados corrigidos $\mathfrak{M}^{\Phi}$- para as metodologias e abordagens de mensuração de risco de mercado paramétricas globalmente adotadas, mais especificamente, a abordagem de avaliação de risco Value-at-Risk(Valor em Risco), Delta-Normal.

5.1 Paradigmas de Cálculo & Algoritmos

Nesta seção será apresentado um refinamento de cálculo do Valor em Risco (VaR) Delta-Normal, adotando-se como referencial a metodologia de cálculo desenvolvida pela RiskMetrics™[1], para que os efeitos dos ajustes diários contratuais dos contratos futuros de DI negociados na BM&F, cuja formalização teórica foi desenvolvida nos capítulos anteriores, sejam levados em consideração.

A metodologia proposta constitui uma extenção da metodologia padrão VaR Delta-Normal, na qual se captura na medida de VaR calculada para carteiras de instrumentos de renda fixa e contratos futuros de DI, os efeitos gerados pelos ajustes diários destes contratos.

Uma conseqüência natural da metodologia proposta é de corrigir distorções provocadas nas medidas de VaR de carteiras e fundos de renda fixa que contenham posições significativas de contratos futuros DI, em função dos seus ajustes diários, contemplados na metodologia aqui desenvolvida.

5.2 Cálculo de VaR com Ajustes de Contrato de DI

A metodologia de cálculo de medidas de VaR, ora proposta, pressupõe o cálculo dos log-retornos dos preços ou valores dos fatores de risco, e as hipóteses estatísticas da modelagam são as hipóteses usuais da abordagem RiskMetrics™

(i) Os log-retornos diários são estatisticamente independentes e distribuídos de acordo com uma distribuição gaussiana ou normal.

(ii) As volatilidades são constantes.

[1] A metodologia de cálculo de VaR desenvolvida pela RiskMetrics™é integralmente apresentada pelo RiskMetrics™-Technical Document de 1996. O trabalho posterior de Mina e Xiao [2001] traz alguns aperfeiçoamentos à metodologia. Uma boa extensão e generalização acadêmica da metodologia, pode ser encontrada em Duffie e Pan [1997].

Neste capítulo, vamos adaptar as definições do capítulo segundo relativas às convenções de contagem de dias dos contratos e investimentos financeiros conforme a metodologia RiskMetrics, de forma que os ajustes feitos neste capítulo reflitam uma mudança dos fatores de risco RiskMetrics para um vértice temporal ou período T fixo.

Os ajustes contratuais de uma posição de contratos de futuros de DI em aberto, feitos em t e que em $t-1$ teria T dias para o vencimento é igual a:

$$A_{t,T} = V(t, T-1) - V(t-1, T)(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}} \qquad (64)$$

Por outro lado verificamos que o ajuste, da forma contratualmente definida, não incorpora a exata variação de preço que o preço de referência do contrato $\varphi(t-1, T)$ teria dada uma nova taxa implícita de negociação do contrato em t. O ajuste da forma em que o mesmo se realiza incorpora apenas um dia de taxa de curtíssimo prazo, de um dia, O_{t-1} ao valor de referência do contrato $\varphi(t-1, T)$, na forma $V(t-1, T)(1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}}$

Para que a variação exata do valor de referência da posição em aberto fosse integralmente incorporada, um ajuste feito através da utilização da nova taxa implícita para o período $T-1$, extraída de $V(t, T-1)$, deveria ser praticado. De fato, se o mercado não se alterasse, isto é, se não existisse risco de mercado de taxa de juros, teriamos que o preço de referência do contrato futuro seria expresso pela taxa forward, contendo um dia a menos para o vencimento. Isto quer dizer que o preço vigente em $t-1$ seria igual a:

$$V(t-1, T) = \frac{1}{(1 + y_{t-1,T})^{\frac{T-t-1}{252}}}$$

$$V(t-1, T) = \frac{1}{(1 + y_{t-1,T})^{\frac{1}{252}}} \cdot \frac{1}{(1 + y_{t-1,T})^{\frac{T-t-1-1}{252}}} \qquad (65)$$

Desta forma podemos definir a seguir um novo ajuste teórico, de curva de contratos que por sua vez traria para a posição em aberto de contratos futuros de DI, a incorporação exata dos efeitos da variação da taxa de negociação dos contratos negociados, definido como sendo:

$$A^C_{t,T} = V(t, T-1) - V(t-1, T-1) \qquad (66)$$

As distorções causadas nas medidas de VaR Delta-Normal, que mensuram o risco de mercado, são explicadas pela discrepância entre os ajustes operacionais contratualmente definidos e o ajuste teórico de curva proposto.

A discrepância entre os processos de ajuste gera uma anomalia de preços que alimenta o modelo de VaR paramétrico RiskMetrics^{TM}. É exatamente o valor desta anomalia, um diferencial de preços derivado de um diferencial de taxas, que é a correção a ser incorporada aos preços de marcação. Vamos denotar por δ_t esta anomalia e redefinir os preços de marcação de forma a incorporar a anomalia. São estes valores de referência corrigidos, denotados V^* que serão a base do re-cálculo do VaR RiskMetrics^{TM}Delta-Normal.

Definição 5.1: *Para* $\varphi(t_0, T) = (\{V(s,T)\}_{s\in[0,T^*]}, \{A_{s,T}\}_{s\in[0,T^*]}) \in \mathbf{\Phi}$ *um contrato futuro de uma economia ambliópica* $\mathfrak{M}^\Phi(\mathbb{O})$ *define-se a anomalia dos valores de ajuste como sendo o processo* $\delta_{\cdot,T} : [0, T_*] \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ *definido como a diferença:*

$$\delta_{t,T} = A(t,T) - A^C(t,T) \qquad (67)$$

Prova-se a seguinte proposição:

Proposição 5.2 Se $\varphi(t_0, T) = (\{V(s,T)\}_{s\in[0,T^*]}, \{A_{s,T}\}_{s\in[0,T^*]}) \in \mathbf{\Phi}$ é um contrato futuro em uma economia ambliópica $\hat{\mathfrak{M}}^\Phi(\mathbb{O})$, então o processo de anomalia $\delta_{\cdot,T}$ pode ser re-escrito como:

$$\delta_{t,T} = V_{t-1,T}[(1 + y_{t-1,T})^{\frac{1}{252}} - (1 + O_{t-1})^{\frac{1}{252}}] \qquad (68)$$

onde $y_{t,T}$ é a taxa pré-fixada implícita no valor de referência $V(t,T)$ do contrato $\varphi \in \mathbf{\Phi}$.

Prova da Proposição 5.2:

Com a definição acima e calculando a anomalia produzida em t em termos das taxas de mercado, temos que:

$$\begin{aligned}\delta_t &= A(t,T) - A^C(t,T)\\ &= [V(t,T-1) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}] - [V(t,T-1) - V(t-1,T-1)]\\ &= V(t-1,T-1) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\end{aligned}$$

Escrevendo na expressão acima dos valores de referência, PUs, em termos de taxas implícitas, temos que:

$$\begin{aligned}\delta_t &= V(t-1,T-1) - V(t-1,T)(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}} \qquad (68)\\ &= \frac{1}{(1+y_{t-1,T})^{\frac{T-t-1-1}{252}}} - \frac{1}{(1+y_{t-1,T})^{\frac{T-t-1}{252}}}(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\\ &= \frac{(1+y_{t-1,T})^{\frac{1}{252}}}{(1+y_{t-1,T})^{\frac{T-t-1}{252}}} - \frac{1}{(1+y_{t-1,T})^{\frac{T-t-1}{252}}}(1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}\\ &= \frac{1}{(1+y_{t-1,T})^{\frac{T-t-1}{252}}}[(1+y_{t-1,T})^{\frac{1}{252}} - (1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}]\\ &= V_{t-1,T}[(1+y_{t-1,T})^{\frac{1}{252}} - (1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}]\end{aligned}$$

Utilizando-se a derivação algébrica acima de δ_t, pode-se notar que o valor da anomalia dos preços de ajuste deriva de uma diferença entre a taxa de rendimento implícita no valor da negociação do contrato para o período (taxa de curva) de um dia e a taxa de juros de curtíssimo prazo ou overnight, o que segue formalizado pela definição abaixo:

Definição 5.3: *Para $\varphi(t_0,T) = (\{V(s,T)\}_{s\in[0,T^*]}, \{A_{s,T}\}_{s\in[0,T^*]}) \in \mathbf{\Phi}$ um contrato futuro , define-se $\Delta y_{t-1,T}$ como sendo o valor representado pela diferença das taxas de um dia para o período T e a taxa de um dia do ativo overnight:*

$$\Delta y_{t-1,T} = [(1+y_{t-1,T})^{\frac{1}{252}} - (1+O_{t-1})^{\frac{1}{252}}] \qquad (70)$$

A diferença das taxas de rendimento de um dia definida acima, que constitui a anomalia de ajuste, pode ser igualada a:

$$\delta_{t,T} = V(t-1,T)\Delta y_{t-1,T} \qquad (71)$$

Observa-se que a correção de preços de referência feita em t depende apenas das taxas vigentes no fechamento da data $t-1$. Para o cálculo das medidas de VaR em t deve-se também considerar a incerteza da anomalia dos ajustes produzidas em $t+1$.

Assim o valor de referência V^* para uso na gestão de risco deverá ser modificado da segunite forma:

Definição 5.4 *Seja* $\varphi(t_0, T) = (\{V(s,T)\}_{s\in[0,T^*]}, \{A_{s,T}\}_{s\in[0,T^*]}) \in \mathbf{\Phi}$ *um contrato futuro em uma economia ambliópica* $\hat{\mathfrak{M}}^{\Phi}(\mathbb{O})$. *Defini-se um processo de preços de referência ajustado ao risco como sendo o processo estocástico* $V^* : [0, T_*] \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ *definido por:*

$$\begin{aligned} V^*(t, T-1) &= V(t, T-1) + \delta_{t,T} \\ &= V(t,T-1) + V(t-1,T)\Delta y_{t-1,T} \qquad (72) \end{aligned}$$

Para o cálculo das medidas de VaR RiskMetrics^{TM}, o novo preço de referência corrigido, $V^*(t, T-1)$, será derivado sob a forma multiplicativa de um preço de marcação de curva por um preço de correção ou preço de anomalia, $V^a_{(t,T)}$:

$$\begin{aligned} V^*(t, T-1) &= V(t, T-1) + \delta_{t,T} \\ &= V(t, T-1) \cdot V^a(t, T-1) \qquad (73) \end{aligned}$$

Assim criando vértices adicionais de risco correspondentes aos valores de referência de anomalia $V^a(\,\cdot\,, T)$, consegue-se escrever um VaR RiskMetrics^{TM}que consistirá de uma matriz de covariância dos retornos dos preços de marcação e de anomalia.

Para o cálculo do VaR em t, isto é, para se medir o risco que a carteira incorre da data t para a data $t+1$, deve-se calcular um quantil estatístico do preço em $t+1$: $V^*(t+1, T) = V(t+1, T) + \delta_{t+1,T}$.

Neste caso, na data t, o fator $\delta_{t+1,T} = V(t,T)\Delta y_{t,T}$ depende do preço em t, conhecido, e de um fator diferencial de taxas de juros que ainda não é conhecido. Assim, para o cálculo das medidas de VaR, deve-se, para cada vértice de renda fixa, considerar um fator de risco de curva, já contemplado na metodologia tradicional e um fator de risco de anomalia. Assim, segundo a metodologia de cálculo VaR Delta-Normal o seguinte diferencial foi desenvolvido[2]:

$$
\begin{aligned}
dV^*_{t,T-1} &= d(V_{t,T-1} \times V^a_{t,T-1}) \\
&= dV_{t,T-1} \times V^a_{t,T-1} + V_{t,T-1} \times dV^a_{t,T-1} \\
&= dV_{t,T-1} \times \frac{V_{t,T-1}}{V_{t,T-1}} \times V^a_{t,T-1} + V_{t,T-1} \times \frac{V^a_{t,T-1}}{V^a_{t,T-1}} \times dV^a_{t,T-1} \\
&= V_{t,T-1} \times V^a_{t,T-1} \times [\frac{dV_{t,T-1}}{V_{t,T-1}} + \frac{dV^a_{t,T-1}}{V^a_{t,T-1}}] \\
&= V^*_{t,T-1} \times [\frac{dV_{t,T-1}}{V_{t,T-1}} + \frac{dV^a_{t,T-1}}{V^a_{t,T-1}}]
\end{aligned}
$$

Logo, a variação infinitesimal do preço de referência corrigido é dada pelo diferencial acima.

Definição 5.5: *A variação infinitesimal do preço de referência futuro DI, $\Phi(t, T-1)$ que leva em consideração os efeitos de ajuste é representado por:*

$$\frac{dV^*_{t,T-1}}{V^*_{t,T-1}} = \frac{dV_{t,T-1}}{V_{t,T-1}} + \frac{dV^a_{t,T-1}}{V^a_{t,T-1}} \qquad (74)$$

Considere-se agora uma carteira que contenha unicamente n_1 contratos futuros de DI com vencimento em T_1, n_2 contratos futuros de DI com vencimento em T_2, ...,n_i contratos futuros com vencimento em T_i,... e n_k contratos futuros de DI com vencimento em T_k. Para o cálculo do VaR RiskMetrics^{TM}Delta-Normal da maneira padrão, os contratos futuros de DI são tratados como obrigações de renda fixa e calcula-se a volatilidade da variação de preços (MtM) da carteira:

[2]A notação do valor de referência dos contratos futuros foi simplificada, denotando-se $V(t, T-1)$ por $V_{t,T-1}$ sem perda de generalidade

$$MtM_t = \sum_{i=1}^{k} n_i V(t, T_i) \qquad (75)$$

O VaR RiskMetrics^{TM}representa um número de desvios-padrões da variação de 1 dia, isto é, da volatilidade gerada pelas volatilidades dos vértices dos contratos e suas correlações.

Calculando o retorno infinitesimal da carteira, temos que:

$$\frac{dMtM_t}{MtM_t} = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{dV(t, T_i)}{V(t, T_i)} \qquad (76)$$

Utilizando-se o vetor $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^k$,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} MtM_1 \\ MtM_2 \\ \vdots \\ MtM_k \end{bmatrix},$$

de preços de referência dos contratos e da matriz de covariâncias do retorno $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})$, calculando a volatilidade da mudança dos vértices $T_i, i = 1, 2, ..., k$,temos a seguinte expressão para o VaR:

$$VaR_\alpha = f_\alpha \sqrt{\mathbf{M}^T \times \mathbf{\Sigma} \times \mathbf{M}} \qquad (77)$$

Onde f_ς denota o fator de confiança associado ao nível de confiança ς, quer dizer, o fator $f_\varsigma = N^{-1}(\varsigma)$, o ς-quantil de uma distribuição normal.

σ_{ij} denota a covariância entre os log-retornos dos preços de referência V associados aos vértices T_i e T_j.

Para calcular-se um VaR ajustado que reflita os ajustes dos contratos de DI, vamos definir o valor da carteira que contempla os ajustes dos contratos futuros de DI:

$$MtM_t^* = \Pi_t = \sum_{i=1}^{k} n_i V^*(t, T_i) \qquad (78)$$

Calculando a volatilidade de forma semelhante ao VaR RiskMetrics sem ajuste, temos que:

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{dV^*(t,T_i)}{V^*(t,T_i)} = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\frac{dV(t,T_i)}{V(t,T_i)} + \frac{dV^a(t,T_i)}{V^a(t,T_i)} \right) \qquad (79)$$

Neste caso, além das covariâncias entre os log-retornos dos valores de referência dos contratos ou preços dos vértices de renda fixa, o cálculo do VaR implica em considerar adicionalmente dois novos elementos:

(i) Covariâncias entre os log-retornos dos valores de referência dos vértices de renda fixa e os log-retornos dos valores de anomalia dos mesmos vértices

(ii) Covariâncias entre vértices dos log-retornos dos valores de referência de anomalias dos vértices de renda fixa.

Assim, a matriz de covariância para n vértices é agora uma matriz de covariância de tamanho $2n \times 2n$ e o vetor de exposições em risco é também um vetor de dimensão $2n$ contendo para cada um dos n vértices duas componentes: uma correspondente ao preço do vértice e outra correspondente ao ajuste feito no vértice. Instrumentos de renda fixa contendo ajustes de DI terão ambas componentes não-nulas, enquanto que instrumentos de renda fixa sem ajuste de DI conterão apenas a primeira componente não-nula e a segunda componente, igual a zero.

Proposição 5.6: *Se Π é uma carteira formada por contratos futuros $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ que o valor VaR ajustado, denotado aqui por VaR^* é dado por:*

$$VaR_\alpha^* = f_\alpha \sqrt{\mathbf{M}^{*T} \times \mathbf{\Sigma}^* \times \mathbf{M}^*} \qquad (80)$$

Onde $\mathbf{M}^* \in \mathbb{R}^{2n}$ *é o vetor de exposições*

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} MtM_1 \\ MtM_1^* \\ MtM_2 \\ MtM_2^* \\ \vdots \\ MtM_k \\ MtM_k^* \end{bmatrix},$$

Σ^* *é a matriz de covariância* $2n \times 2n$ *dos fatores de risco*

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} \sigma_{1,p}^2 & \sigma_{1,p;1,a} & \sigma_{1,p;2,a} & \sigma_{1,p;2,a} & \cdots & \sigma_{1,p;k,p} & \sigma_{1,p;k,a} \\ \sigma_{1,a;1,p} & \sigma_{1,a}^2 & \sigma_{1,a;2,p} & \sigma_{1,a;2,a} & \cdots & \sigma_{1,a;k,p} & \sigma_{1,a;k,a} \\ \sigma_{2,p;1,p} & \sigma_{2,p;1,a} & \sigma_{2,p}^2 & \sigma_{2,p;2,a} & \cdots & \sigma_{2,p;k,p} & \sigma_{2,p;k,a} \\ \sigma_{2,a;1,p} & \sigma_{2,a;1,a} & \sigma_{2,a;2,p} & \sigma_{2,a}^2 & \cdots & \sigma_{2,a;k,p} & \sigma_{2,a;k,a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{k,p;1,p} & \sigma_{k,p;1,a} & \sigma_{k,p;2,a} & \sigma_{k,p;2,a} & \cdots & \sigma_{k,p}^2 & \sigma_{k,p;k,a} \\ \sigma_{k,a;1,p} & \sigma_{k,a;1,a} & \sigma_{k,a;2,p} & \sigma_{k,a;2,a} & \cdots & \sigma_{k,a;k,p} & \sigma_{k,a}^2 \end{bmatrix} \quad (81)$$

e onde $f_\alpha = \mathbf{N}^{-1}(\alpha)$.

Esta matriz de tamanho $2n \times 2n$ é formada por blocos 2×2 dispostos ao longo da diagonal contendo as variâncias e covariâncias intra-vértices, isto é, as variâncias dos preços da curva e de anomalia (e suas covariâncias mútuas) e por blocos 2×2 dispostos fora da diagonal contendo covariâncias inter-vértices. Assim, o elemento:

$$\sigma_{i,p;j,a}$$

Denota a covariância entre o log-retorno do preço da curva pré correspondente ao vértice i e o log-retorno do preço de referência de anomalia (diferencial de ajuste) do vértice j da mesma curva pré. As demais entradas da matriz Σ^* são análogas. Na verdade, trata-se de uma duplicação dos fatores de risco de taxas de juros pré-fixadas causada pela inclusão dos ajustes dos vértices da curva.

5.3 Exemplos Numéricos

Nesta seção será desenvolvida uma aplicação numérica da metodologia de cálculo das medidas de VaR propostas na secção anterior, a qual incorpora as volatilidades e covariâncias dos efeitos das diferenças das taxas de um dia, ou anomalias de ajuste como definido anteriormente.

Para que os efeitos numéricos capturados pela metodologia proposta possam ser analisados, uma carteira composta por posições compradas em títulos de renda fixa livres de risco de crédito cujo risco de mercado é mitigado - ou em outras palavras, cujo *hedge* é realizado - por posições vendidas de contratos futuros de DI de vencimento, será construída. Os títulos de renda fixa e os contratos futuros de DI terão 126 dias de vencimento e são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 5.1: *Carteira com Instrumentos de Renda Fixa*

Posição	MtM (em R$ mil)	Vencimento (DU)
LTN	100.000,00	126
Fut DI	-100.000,00	126
LTN	200.000,00	126
Fut DI	-200.000,00	126

As alocações das exposições aos vértices da curva de juros é apresentada pela tabela 5.2, a seguir:

Tabela 5.2: *Alocação das Exposições aos Vértices*

Posição	21	42	63	84	105	126
LTN	0	0	0	0	0	100.000,00
Fut DI	0	0	0	0	0	-100.000,00
LTN	0	0	0	0	0	200.000,00
Fut DI	0	0	0	0	0	-200.000,00

Com as posições compradas e vendidas da carteira de renda fixa, uma medida de VaR Delta-Normal será calculada utilizando-se a metodologia proposta que será contrastasda com o resultado tradicionalmente adotado que corresponde a um valor de VaR nulo.

Para os cálculos estatísticos necessários para o cálculo das volatilidades e das correlações dos preços de referência dos contratos negociados para os diferentes prazos e das diferenças de ajuste (anomalias), preços reais de fechamento de setembro de 1999 a setembro de 2000 dos contratos de DI e da taxa de CDI foram utilizados, estando as séries históricas apresentadas na tabela A.1.

A matriz de correlação dos fatores de risco, ampliados pelos valores de referência das diferenças de ajuste das anomalias, é calculada e seus elementos são apresentados na tabela A.2.

A medida de $VaR(\xi)$ ajustada é calculada para $\xi = 0.99$ onde $f_\xi = 2.32635$ utilizando-se as posições das carteiras especialmente construídas para a captura dos efeitos nas medidas de risco dos ajustes contratuais diários dos contratos futuros de DI. A Tabela 5.3 apresentada abaixo sintetiza os resultados da aplicação da metodologia proposta:

Tabela 5.3: *Valor em Risco de Carteira com Instrumentos de Renda Fixa*

Nível Confiança	99,00%
Fator Confiança	2,326348
Volatilidade (em R$)	2.436,78
VaR 1 dia c/ ajuste DI	5.668,80
VaR 1 dia Tradicional	0

Nota-se que a utilização correta da metodologia VaR Delta-Normal que leva em consideração os efeitos dos ajustes estocásticos diários dos contratos futuros de DI, revela a existência de um risco tradicionalmente negligenciado, cuja mensuração integral foi evidenciada pela tabela acima.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho considerou os problemas da formalização teórica dos modelos de apreçamento de derivativos em economias em desenvolvimento ou emergentes, onde os mercados para os ativos financeiros básicos encontram-se ainda em fase de gestação. Em outras palavras, pretendeu-se construir um arcabouço teórico para o apreçamento de instrumentos financeiros de renda fixa em economias onde se verifica a inexistência original, ou de partida, de ativos básicos ou primitivos de renda fixa livre de risco.

Inicialmente foram formalizados os conceitos e definições que constituem uma economia ambliópica. Esta por sua vez foi definida e suas limitações teórico-formais verificadas historicamente. Ao mesmo tempo mecanismos de completamento e apreçamento foram desenvolvidos a partir da conceituação e formalização de certos contratos financeiros ou produtos derivativos adicionais que ao mesmo tempo respeitam a evolução histórica das economias ambliópicas.

Numa segunda parte, modelos de apreçamento de opções de renda fixa sobre estes mesmos contratos financeiros foram construídos, formalizados e propostos tendo em vista as especificidades e idiossincrasias de sua origem e evolução de caráter ambliópico.

Finalmente na terceira e final parte deste trabalho, problemas e questões relacionados com a mensuração e gestão de risco de carteiras de renda fixa que contenham estes mesmos contratos financeiros, previamente definidos, foram formatados e analisados. A partir de uma metodologia clássica, delta normal de mensuração de risco, ajustes e correções foram desenvolvidos e propostas no sentido de adequar esta metodologia às especificidades e peculiariedades contratuais destes instrumentos financeiros, levando-se sempre em consideração o embasamento ambliópico sobre o qual estes instrumentos foram desenvolvidos.

Apêndice

Tabelas

Tabela A.1: *Série Histórica de Taxas de Juros*

CDI	21	42	63	84	105	126
Taxa	Taxa	Taxa	Taxa	Taxa	Taxa	Taxa
19,16%	19,69%	20,06%	20,75%	21,60%	22,50%	23,24%
19,19%	19,64%	20,16%	20,89%	21,69%	22,53%	23,24%
19,21%	19,49%	19,90%	20,51%	21,24%	22,08%	22,78%
19,23%	19,27%	19,53%	19,95%	20,59%	21,35%	22,04%
19,27%	19,38%	19,85%	20,48%	21,15%	21,91%	22,59%
18,92%	19,42%	19,96%	20,55%	21,32%	22,09%	22,79%
18,90%	19,63%	20,25%	20,96%	21,78%	22,58%	23,24%
18,90%	19,47%	20,00%	20,56%	21,24%	21,96%	22,62%
18,90%	19,41%	19,88%	20,56%	21,21%	21,95%	22,57%
18,89%	19,35%	19,90%	20,61%	21,33%	22,10%	22,77%
18,88%	19,29%	19,84%	20,46%	21,18%	21,98%	22,67%
18,86%	19,63%	20,61%	21,28%	21,65%	22,67%	22,97%
18,90%	19,48%	20,17%	20,85%	21,70%	22,41%	23,16%
18,87%	19,33%	19,86%	20,39%	21,10%	21,88%	22,61%
18,86%	19,38%	20,04%	20,72%	21,52%	22,36%	23,11%
18,71%	19,30%	19,92%	20,56%	21,49%	22,37%	23,06%
18,83%	19,12%	19,66%	20,27%	21,00%	21,74%	22,48%
18,82%	19,06%	19,46%	20,01%	20,74%	21,49%	22,23%
18,77%	19,04%	19,34%	19,83%	20,53%	21,28%	21,97%
18,78%	19,22%	19,54%	20,09%	20,88%	21,70%	22,42%
18,78%	19,24%	19,62%	20,22%	21,09%	21,93%	22,64%
18,77%	19,22%	19,63%	20,21%	21,04%	21,89%	22,67%
18,77%	19,25%	19,73%	20,36%	21,21%	22,10%	22,92%
18,78%	19,27%	19,75%	20,41%	21,19%	22,03%	22,75%
18,77%	19,20%	19,58%	20,15%	20,90%	21,73%	22,44%
18,75%	19,12%	19,49%	20,08%	20,85%	21,55%	22,19%
18,73%	19,08%	19,43%	19,95%	20,64%	21,32%	21,90%
18,69%	19,17%	19,49%	20,00%	20,64%	21,33%	21,99%
18,70%	19,10%	19,49%	19,98%	20,66%	21,37%	22,01%

Série Histórica de Taxas de Juros (continuação)

18,69%	19,06%	19,44%	19,98%	20,69%	21,47%	22,24%
18,69%	19,00%	19,39%	19,86%	20,55%	21,32%	22,09%
18,70%	19,01%	19,31%	19,71%	20,28%	20,99%	21,83%
18,71%	18,95%	19,20%	19,53%	19,97%	20,59%	21,36%
18,70%	18,93%	19,13%	19,38%	19,79%	20,42%	21,14%
18,70%	18,94%	19,13%	19,37%	19,75%	20,26%	20,86%
18,69%	18,82%	19,05%	19,35%	19,68%	20,11%	20,61%
18,69%	18,72%	18,85%	19,05%	19,29%	19,53%	19,84%
18,68%	18,90%	19,10%	19,44%	19,82%	20,26%	20,65%
18,46%	18,93%	19,17%	19,46%	19,85%	20,31%	20,77%
18,74%	19,14%	19,47%	19,90%	20,37%	20,82%	21,29%
18,76%	19,47%	19,74%	20,20%	20,70%	21,18%	21,66%
18,77%	19,54%	19,89%	20,37%	20,92%	21,41%	21,87%
18,77%	19,67%	20,19%	20,80%	21,43%	21,97%	22,42%
18,79%	19,57%	20,01%	20,50%	21,02%	21,52%	21,98%
18,80%	19,57%	20,07%	20,69%	21,36%	21,95%	22,46%
18,79%	19,73%	20,36%	21,03%	21,69%	22,31%	22,81%
18,78%	19,57%	20,02%	20,60%	21,17%	21,67%	22,10%
18,78%	19,61%	20,28%	20,96%	21,50%	22,03%	22,50%
18,78%	19,66%	20,28%	20,88%	21,43%	21,84%	22,23%
18,80%	19,56%	20,01%	20,52%	21,03%	21,51%	21,93%
18,78%	19,56%	20,09%	20,65%	21,16%	21,63%	22,04%
18,81%	19,59%	20,18%	20,75%	21,33%	21,84%	22,30%
18,81%	19,49%	20,02%	20,58%	21,10%	21,63%	22,10%
18,80%	19,35%	19,81%	20,30%	20,80%	21,33%	21,79%
18,81%	19,36%	19,73%	20,18%	20,55%	21,03%	21,42%
18,82%	19,39%	19,92%	20,46%	21,01%	21,48%	21,90%
18,78%	19,51%	20,06%	20,65%	21,20%	21,70%	22,11%
18,75%	19,55%	19,97%	20,55%	21,11%	21,62%	22,06%
18,75%	19,67%	20,16%	20,73%	21,32%	21,83%	22,16%
18,74%	19,35%	19,74%	20,17%	20,68%	21,08%	21,43%
18,74%	19,29%	19,68%	20,15%	20,64%	21,03%	21,41%
18,74%	19,32%	19,77%	20,30%	20,81%	21,22%	21,55%
18,74%	19,26%	19,65%	20,15%	20,61%	20,97%	21,28%
18,76%	19,22%	19,58%	19,98%	20,32%	20,62%	20,88%
18,75%	19,15%	19,40%	19,66%	19,96%	20,27%	20,52%
18,77%	19,10%	19,33%	19,57%	19,85%	20,18%	20,49%
18,78%	19,08%	19,30%	19,57%	19,87%	20,21%	20,54%
18,77%	19,14%	19,43%	19,74%	20,10%	20,47%	20,82%
18,78%	19,18%	19,45%	19,73%	20,08%	20,48%	20,85%
18,74%	19,12%	19,37%	19,69%	20,05%	20,40%	20,77%
18,74%	19,23%	19,50%	19,85%	20,24%	20,69%	21,06%
18,73%	19,12%	19,35%	19,58%	19,82%	20,13%	20,43%
18,83%	19,06%	19,37%	19,60%	19,84%	20,12%	20,41%
18,78%	19,10%	19,38%	19,70%	20,04%	20,35%	20,65%
18,75%	19,26%	19,63%	20,00%	20,31%	20,62%	20,90%
18,74%	19,26%	19,54%	19,85%	20,17%	20,46%	20,74%
18,75%	19,21%	19,48%	19,77%	20,13%	20,48%	20,76%
18,75%	19,12%	19,28%	19,53%	19,83%	20,11%	20,37%
18,75%	19,05%	19,21%	19,39%	19,62%	19,88%	20,15%
18,77%	19,09%	19,31%	19,56%	19,84%	20,14%	20,39%
18,74%	19,02%	19,26%	19,52%	19,82%	20,12%	20,40%
18,74%	18,98%	19,12%	19,30%	19,51%	19,75%	20,00%
18,76%	18,94%	19,05%	19,17%	19,33%	19,51%	19,71%
18,74%	18,89%	19,02%	19,16%	19,30%	19,46%	19,64%
18,73%	18,78%	18,92%	19,09%	19,28%	19,45%	19,64%
18,68%	18,80%	18,94%	19,13%	19,33%	19,50%	19,70%
18,67%	18,95%	19,09%	19,25%	19,43%	19,65%	19,83%
18,76%	18,96%	19,14%	19,30%	19,48%	19,68%	19,84%
18,76%	18,99%	19,11%	19,32%	19,54%	19,70%	19,93%
18,72%	18,98%	19,14%	19,29%	19,50%	19,70%	19,91%
18,69%	19,02%	19,15%	19,36%	19,57%	19,77%	19,96%
18,69%	19,09%	19,27%	19,55%	19,77%	19,97%	20,23%
18,68%	18,92%	19,12%	19,37%	19,61%	19,84%	20,04%
18,71%	18,85%	19,02%	19,32%	19,58%	19,80%	20,03%
18,70%	18,88%	19,05%	19,31%	19,56%	19,80%	20,02%
18,70%	18,84%	19,00%	19,22%	19,45%	19,69%	19,90%

Série Histórica de Taxas de Juros (continuação)

18,72%	18,82%	18,92%	19,08%	19,24%	19,44%	19,58%
18,69%	18,82%	18,92%	19,04%	19,17%	19,30%	19,43%
18,72%	18,77%	18,85%	18,96%	19,07%	19,20%	19,34%
18,69%	18,75%	18,80%	18,91%	19,04%	19,17%	19,27%
18,71%	18,67%	18,75%	18,84%	18,97%	19,10%	19,23%
18,70%	18,65%	18,74%	18,84%	18,98%	19,12%	19,26%
18,70%	18,72%	18,85%	19,03%	19,17%	19,33%	19,49%
18,71%	18,75%	18,86%	19,01%	19,14%	19,27%	19,40%
18,73%	18,76%	18,82%	18,94%	19,07%	19,22%	19,35%
18,70%	18,86%	18,88%	18,93%	19,02%	19,11%	19,21%
18,74%	18,88%	18,93%	19,03%	19,12%	19,22%	19,33%
18,78%	18,89%	18,94%	19,05%	19,14%	19,25%	19,37%
18,76%	18,87%	18,93%	19,03%	19,15%	19,25%	19,36%
18,76%	18,90%	18,95%	19,02%	19,09%	19,18%	19,26%
18,75%	18,96%	19,01%	19,09%	19,17%	19,26%	19,37%
18,74%	19,00%	19,06%	19,13%	19,21%	19,32%	19,41%
18,73%	19,01%	19,04%	19,14%	19,24%	19,33%	19,43%
18,76%	18,94%	18,84%	18,95%	19,09%	19,21%	19,31%
18,75%	18,90%	18,95%	19,04%	19,14%	19,25%	19,34%
18,76%	18,86%	18,90%	18,97%	19,06%	19,14%	19,23%
18,75%	18,81%	18,89%	18,97%	19,03%	19,10%	19,17%
18,75%	18,85%	18,92%	18,98%	19,04%	19,11%	19,18%
18,76%	18,89%	18,93%	18,97%	19,01%	19,07%	19,14%
18,76%	18,90%	18,94%	19,00%	19,07%	19,16%	19,24%
18,76%	18,86%	18,89%	18,96%	19,03%	19,09%	19,16%
18,78%	18,80%	18,79%	18,83%	18,86%	18,90%	18,94%
18,78%	18,80%	18,82%	18,86%	18,89%	18,92%	18,95%
18,78%	18,78%	18,80%	18,83%	18,86%	18,88%	18,91%
18,76%	18,75%	18,78%	18,82%	18,84%	18,86%	18,89%
18,76%	18,62%	18,62%	18,63%	18,63%	18,63%	18,63%
18,77%	18,62%	18,60%	18,60%	18,60%	18,58%	18,57%
18,59%	18,62%	18,60%	18,59%	18,56%	18,53%	18,53%
18,71%	18,65%	18,57%	18,50%	18,45%	18,41%	18,39%
18,79%	18,55%	18,51%	18,47%	18,41%	18,35%	18,31%
18,78%	18,58%	18,47%	18,40%	18,31%	18,25%	18,20%
18,76%	18,54%	18,45%	18,39%	18,32%	18,25%	18,19%
18,41%	18,29%	18,22%	18,18%	18,12%	18,06%	18,02%
18,38%	18,33%	18,25%	18,26%	18,26%	18,19%	18,14%
18,37%	18,28%	18,23%	18,19%	18,14%	18,09%	18,06%
18,35%	18,29%	18,30%	18,27%	18,22%	18,20%	18,19%
18,36%	18,44%	18,48%	18,48%	18,43%	18,41%	18,45%
18,40%	18,50%	18,58%	18,65%	18,68%	18,68%	18,65%
18,41%	18,57%	18,67%	18,78%	18,77%	18,76%	18,78%
18,40%	18,49%	18,55%	18,60%	18,60%	18,58%	18,56%
18,39%	18,50%	18,56%	18,61%	18,64%	18,66%	18,64%
18,40%	18,54%	18,61%	18,68%	18,72%	18,75%	18,76%
18,41%	18,57%	18,64%	18,71%	18,78%	18,82%	18,84%
18,44%	18,76%	18,94%	19,02%	19,05%	19,11%	19,18%
18,48%	18,78%	18,92%	19,14%	19,30%	19,36%	19,46%
18,48%	18,83%	19,05%	19,26%	19,41%	19,61%	19,69%
18,48%	18,59%	18,65%	18,78%	18,95%	19,12%	19,25%
18,43%	18,70%	18,74%	18,82%	18,97%	19,12%	19,25%
18,47%	18,71%	18,81%	18,93%	19,08%	19,24%	19,34%
18,47%	18,75%	18,96%	19,16%	19,37%	19,57%	19,72%
18,47%	18,66%	18,87%	19,07%	19,23%	19,41%	19,57%
18,47%	18,70%	18,89%	19,13%	19,35%	19,48%	19,72%
18,47%	18,68%	18,89%	19,08%	19,26%	19,42%	19,53%
18,47%	18,74%	18,94%	19,07%	19,22%	19,40%	19,57%
18,49%	18,79%	19,02%	19,21%	19,42%	19,66%	19,88%
18,49%	18,78%	19,09%	19,35%	19,70%	19,99%	20,32%
18,51%	18,85%	19,37%	19,84%	20,33%	20,72%	21,13%
18,51%	18,69%	18,93%	19,18%	19,48%	19,89%	20,15%
18,48%	18,73%	18,96%	19,18%	19,50%	19,97%	20,28%
18,44%	18,71%	18,86%	19,03%	19,31%	19,69%	20,00%
18,44%	18,73%	18,88%	19,06%	19,31%	19,62%	19,99%
18,44%	18,73%	18,91%	19,15%	19,45%	19,85%	20,27%
18,42%	18,84%	19,04%	19,30%	19,67%	20,13%	20,54%
18,42%	18,78%	18,94%	19,17%	19,45%	19,82%	20,17%
18,42%	18,72%	18,86%	19,05%	19,32%	19,67%	20,02%
18,41%	18,75%	18,88%	19,08%	19,36%	19,74%	20,12%
18,41%	18,82%	19,01%	19,29%	19,60%	19,99%	20,41%

Série Histórica de Taxas de Juros (continuação)

18,41%	18,89%	19,13%	19,40%	19,82%	20,26%	20,63%
18,41%	18,98%	19,23%	19,58%	20,03%	20,51%	20,93%
18,41%	18,61%	19,25%	19,61%	20,08%	20,55%	20,97%
18,23%	18,29%	18,36%	18,46%	18,61%	18,78%	18,96%
18,24%	18,31%	18,36%	18,45%	18,60%	18,75%	18,91%
18,25%	18,24%	18,29%	18,39%	18,55%	18,71%	18,86%
18,24%	18,18%	18,25%	18,33%	18,46%	18,62%	18,78%
18,15%	18,20%	18,24%	18,35%	18,49%	18,60%	18,75%
17,43%	17,36%	17,37%	17,44%	17,56%	17,68%	17,83%
17,40%	17,46%	17,53%	17,67%	17,82%	17,97%	18,14%
17,35%	17,36%	17,42%	17,58%	17,72%	17,90%	18,06%
17,32%	17,24%	17,35%	17,46%	17,61%	17,76%	17,94%
17,19%	17,16%	17,22%	17,37%	17,54%	17,71%	17,88%
17,23%	17,19%	17,23%	17,35%	17,50%	17,66%	17,85%
17,21%	17,20%	17,33%	17,46%	17,62%	17,83%	17,98%
17,17%	17,19%	17,20%	17,31%	17,46%	17,64%	17,83%
17,18%	17,18%	17,26%	17,35%	17,54%	17,68%	17,90%
17,20%	17,16%	17,22%	17,37%	17,48%	17,61%	17,73%
17,22%	17,22%	17,26%	17,38%	17,50%	17,60%	17,74%
17,19%	17,19%	17,22%	17,34%	17,46%	17,56%	17,70%
16,94%	16,97%	17,03%	17,17%	17,29%	17,42%	17,58%
16,90%	16,99%	17,12%	17,30%	17,49%	17,63%	17,80%
16,89%	16,96%	17,11%	17,30%	17,49%	17,67%	17,84%
16,88%	17,06%	17,29%	17,52%	17,77%	18,02%	18,16%
16,89%	16,98%	17,13%	17,33%	17,54%	17,74%	17,92%
16,89%	16,86%	16,97%	17,12%	17,29%	17,47%	17,64%
16,88%	16,93%	17,04%	17,21%	17,42%	17,61%	17,79%
16,83%	16,91%	17,04%	17,22%	17,44%	17,66%	17,86%
16,49%	16,61%	16,73%	16,92%	17,15%	17,36%	17,55%
16,47%	16,59%	16,67%	16,84%	17,00%	17,19%	17,36%
16,45%	16,53%	16,64%	16,79%	16,96%	17,10%	17,24%
16,43%	16,54%	16,66%	16,84%	17,00%	17,16%	17,31%
16,42%	16,51%	16,62%	16,78%	16,95%	17,07%	17,18%
16,41%	16,48%	16,62%	16,79%	16,94%	17,07%	17,19%
16,40%	16,47%	16,63%	16,82%	16,99%	17,12%	17,24%
16,38%	16,40%	16,58%	16,78%	16,96%	17,10%	17,23%
16,37%	16,41%	16,56%	16,75%	16,91%	17,08%	17,24%
16,37%	16,40%	16,52%	16,67%	16,86%	17,01%	17,13%
16,37%	16,35%	16,43%	16,52%	16,65%	16,76%	16,87%
16,37%	16,31%	16,40%	16,48%	16,59%	16,70%	16,80%
16,38%	16,31%	16,39%	16,49%	16,59%	16,69%	16,80%
16,39%	16,30%	16,37%	16,48%	16,58%	16,66%	16,76%
16,38%	16,35%	16,39%	16,47%	16,54%	16,62%	16,71%
16,40%	16,31%	16,33%	16,40%	16,46%	16,52%	16,61%
16,43%	16,28%	16,32%	16,36%	16,40%	16,45%	16,50%
16,45%	16,25%	16,20%	16,20%	16,21%	16,27%	16,35%
16,41%	16,26%	16,27%	16,30%	16,33%	16,38%	16,45%
16,39%	16,32%	16,36%	16,44%	16,53%	16,60%	16,68%
16,41%	16,28%	16,29%	16,35%	16,39%	16,46%	16,54%
16,42%	16,33%	16,39%	16,48%	16,55%	16,66%	16,76%
16,48%	16,36%	16,39%	16,48%	16,55%	16,63%	16,72%
16,41%	16,28%	16,28%	16,30%	16,33%	16,37%	16,44%
16,15%	16,28%	16,27%	16,33%	16,37%	16,44%	16,54%
16,38%	16,40%	16,40%	16,40%	16,43%	16,46%	16,54%
16,41%	16,45%	16,47%	16,49%	16,53%	16,59%	16,66%
16,42%	16,49%	16,53%	16,58%	16,64%	16,73%	16,82%
16,43%	16,47%	16,50%	16,55%	16,59%	16,64%	16,70%
16,41%	16,45%	16,52%	16,54%	16,60%	16,68%	16,74%
16,37%	16,45%	16,53%	16,59%	16,63%	16,70%	16,76%
16,36%	16,44%	16,52%	16,58%	16,63%	16,69%	16,76%
16,39%	16,40%	16,49%	16,55%	16,63%	16,71%	16,77%
16,40%	16,45%	16,47%	16,52%	16,57%	16,64%	16,72%
16,44%	16,42%	16,47%	16,48%	16,52%	16,58%	16,63%
16,45%	16,42%	16,46%	16,49%	16,51%	16,56%	16,60%
16,49%	16,46%	16,50%	16,52%	16,54%	16,59%	16,64%

Série Histórica de Taxas de Juros (continuação)

16,49%	16,52%	16,56%	16,60%	16,64%	16,70%	16,76%
16,50%	16,52%	16,52%	16,53%	16,57%	16,64%	16,70%
16,51%	16,55%	16,56%	16,59%	16,65%	16,74%	16,81%
18,42%	18,87%	18,99%	19,27%	19,68%	20,15%	20,62%
18,42%	18,80%	18,92%	19,22%	19,65%	20,13%	20,61%
18,43%	18,71%	18,82%	19,10%	19,45%	19,89%	20,35%
18,42%	18,68%	18,83%	19,11%	19,46%	19,89%	20,34%
18,40%	18,64%	18,74%	19,01%	19,35%	19,73%	20,10%
18,39%	18,53%	18,73%	18,96%	19,29%	19,65%	19,95%
18,38%	18,61%	18,69%	18,88%	19,17%	19,39%	19,61%
18,37%	18,50%	18,61%	18,70%	18,86%	19,03%	19,22%
18,35%	18,47%	18,59%	18,68%	18,85%	19,02%	19,21%
18,32%	18,41%	18,52%	18,64%	18,84%	19,05%	19,26%
18,28%	18,37%	18,43%	18,52%	18,70%	18,90%	19,12%
18,26%	18,33%	18,41%	18,54%	18,76%	18,98%	19,20%
18,26%	18,35%	18,42%	18,54%	18,73%	18,95%	19,13%
18,25%	18,39%	18,48%	18,61%	18,80%	19,02%	19,24%
18,24%	18,32%	18,40%	18,50%	18,67%	18,86%	19,06%

Tabela A.2: *Matriz $\mathbf{\Sigma}^*$ de Covariância dos Fatores Primitivos de Risco*

Correl Fatores Risco	21PRE	21ANOM	42PRE	42ANOM	63PRE	63ANOM	84PRE	84ANOM	105PRE	105ANOM	126PRE	126ANOM
21PRE	100,00%	-72,39%	83,72%	-62,61%	77,42%	-60,82%	71,67%	-56,80%	70,28%	-56,57%	65,97%	-52,83%
21ANOM	-72,39%	100,00%	-64,94%	82,47%	-62,39%	75,97%	-59,63%	70,83%	-61,63%	71,03%	-57,80%	66,65%
42PRE	83,72%	-64,94%	100,00%	-86,44%	96,90%	-86,28%	89,51%	-79,61%	89,02%	-79,54%	82,13%	-72,98%
42ANOM	-62,61%	82,47%	-86,44%	100,00%	-86,13%	96,69%	-80,82%	89,22%	-82,70%	89,46%	-76,12%	82,41%
63PRE	77,42%	-62,39%	96,90%	-86,13%	100,00%	-91,72%	95,96%	-88,12%	95,18%	-87,47%	89,90%	-82,44%
63ANOM	-60,82%	75,97%	-86,28%	96,69%	-91,72%	100,00%	-89,40%	95,87%	-90,46%	95,43%	-85,47%	90,07%
84PRE	71,67%	-59,63%	89,51%	-80,82%	95,96%	-89,40%	100,00%	-93,82%	98,31%	-92,02%	96,72%	-90,63%
84ANOM	-56,80%	70,83%	-79,61%	89,22%	-88,12%	95,87%	-93,82%	100,00%	-93,70%	98,37%	-92,46%	96,80%
105PRE	70,28%	-61,63%	89,02%	-82,70%	95,18%	-90,46%	98,31%	-93,70%	100,00%	-95,13%	97,74%	-93,00%
105ANOM	-56,57%	71,03%	-79,54%	89,46%	-87,47%	95,43%	-92,02%	98,37%	-95,13%	100,00%	-93,19%	97,71%
126PRE	65,97%	-57,80%	82,13%	-76,12%	89,90%	-85,47%	96,72%	-92,46%	97,74%	-93,19%	100,00%	-95,59%
126ANOM	-52,83%	66,65%	-72,98%	82,41%	-82,44%	90,07%	-90,63%	96,80%	-93,00%	97,71%	-95,59%	100,00%

Bibliografia

1. Aït-Sahalia, Y. [1996] Testing Continuous-Time Models of the Spot Rate. The Review of financial Studies 9, 385-426.

2. Almeida, L., Yoshino, J., Schirmer, P. [2003] Derivativos de Renda Fixa no Brasil: Modelo de Hull-White. Pesquisa e Planejamento Econômico, Rio de Janeiro, Vol.33, N.2, 299-333, Agosto 2003.

3. Arrow, K. J. [1964] The Role of Securities in the Optimal Allocation on Risk-Bearing Review of Economic Studies Vol.2, N.2, 91-96

4. Baxter, M., Rennie, A. [1996] Financial Calculus, Cambridge University Press, Cambridge.

5. Billingsey, P. [1995] Probability and Measure, 3rd edition, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons.

6. Björk, T. [1997] Interest rate Theory. In Financial Mathematics, Bressanone 1996, W. Runggaldier, ed. Lecture Notes in Math. 1656, Springer, Berlin Heidelberg New York, 53-122.

7. Björk, T. [2004] Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press, Oxford.

8. Black, F. [1976] The pricing of commodity contracts, Journal of Financial Economics, 3, 167-179.

9. Black, F., Derman, E., Toy, W. [1990] A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options. Financial Analysts Journal 46, 33-39.

10. Black, F., Karasinski, P. [1991] Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. Financial Analysts Journal 47, 52-59.

11. Black, F., Scholes, M. [1973] The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81, 637-654.

12. Brace, A., Musiela, M. [1997] Swap Derivatives in a Gaussian HJM Framework. Mathematics of Derivative Securities, M.A.H. Dempster, S.R. Pliska, eds. Cambridge University Press, Cambridge, 336-368.

13. Brace, A. [2004] There are an Awful Lot of Options in Brazil. Working Paper presented to SFMW, April 2004.

14. Brace, A. [2008] Engineering BGM, Chapman & Hall/Crc Financial Mathematics Series, New York.

15. Breeden, D. T., Litzenberger, R. H. [1978] Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices. Journal of Business 51, 621-651.

16. Brenner, M., Subrahmanyam, M. G. [1994] A Simple Approach to Option Valuation in the Black-Scholes Model, Financial Analyst Journal, March/April 1994, 25-28.

17. Brigo D., Mercurio, F. [2001] Interest Rate Models: Theory and Practice, Springer Verlag. Heidelberg.

18. Cagan, P. [1956] The Monetary Dynamics of Hiperinflation in Studies of the Quantity Theory of Money, University of Chicago Press, Chicago.

19. Clewlow, L., Strickland, C. [1997] Monte Carlo Valuation of Interest Rate Derivatives Under Stochastic Volatility. The Journal of Fixed Income 7, 35-45.

20. Cochrane, J. [2001] Asset Pricing, Princeton University Press, Princeton.

21. Cox, J. C., Ross, S. A. [1976] The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. Journal of Financial Economics 3, 145-166.

22. Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A. [1985] A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica 53, 385-407.

23. Cox, J. C., Ross, S. A., Rubinstein, M. [1979] Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics 7, 229-263.

24. Cukierman, A. [1982] Wage Indexing, and Theory of Indexed Bonds. in Saving, Investment and Capital Markets in a Inflationary Economy, Ballinger, Cambridge.

25. Debreu, G. [1959] The Theory of Value. Wiley, New York.

26. Delbaen, F., Schachermayer, W. [2008] The Mathematics of Arbitrage, 2nd. ed., Springer Finance, Berlin.

27. Derman, E., Kani, I. [1994] Riding on a Smile. Risk Magazine, 7 [2], 98-101.

28. Derman E., Kani I., Chriss, N. [1996] Implied Binomial Trees of the Volatility Smile, Journal of Derivatives, 3 [4], 7-22.

29. Dothan, L. [1978] On the Term Structure of Interest Rates. Journal of Financial Economics 6, 59-69.

30. Dothan, M. [1990] Prices in Financial Markets, Oxford University Press, Oxford.

31. Duffie, D. [2001] Dynamic Asset Pricing Theory, 3rd. ed., Princeton University Press, Princeton.

32. Duffie, D., Pan, J. [1997] An Overview of Value at Risk, Working Paper, Preliminary Draft, Stanford University.

33. Dupire, B. [1994] Pricing with a Smile. Risk, Vol.7, N.1, January 1999, 18-20.

34. Dupire, B. [1997] Pricing and Hedging with Smiles. Mathematics of Derivative Securities, edited by M.A.H. Dempster and S.R. Pliska, Cambridge University Press, Cambridge, 103-111.

35. Dybvig, P. H., Ross, S. A. [1987] Arbitrage in New Palgrave: A Dictionary of Economics, Vol. 1, edited by J.Eatwell, M.Milgate and P. Newman., Macmillan, London, 100-106.

36. Fama, E. F., Schwert, G. W. [1977] Asset Returns and Inflation, Journal os Financial Economics 5, 115-146

37. Gatarek, D. [2007] The LIBOR Market Model in Practice. The Wiley Finance Series, John Wiley & Sons, New York.

38. German, H., El Karoui, N., Rochet, J. C. [1995] Changes of Numeraire, Changes of Probability Measures and Pricing of Options. Journal of Applied Probability 32, 443-458.

39. Giddy, I. [1994] Global Financial Markets, D.C. Heath and Company, Lexington.

40. Glasserman, P., Kou, S. G. [2001] The Term Structure of Simple Forward Rates with Jump Risk, Working Paper, Colombia University.

41. Gluckstern, M. [2001] Aplicação do Modelo de Hull-White à Precificação de Opção Sobre IDI, Tese de Doutorado, Fundação Getúlio Vargas, Junho 2001.

42. Harrison, J. M., Kreps, D. M. [1979] Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, Journal of Economic Theory 20, 381-408.

43. Harrison, J. M., Pliska, S. R. [1981] Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, Stochastic Processes and their Applications 11, 215-260.

44. Harrison, J. M., Pliska, S. R. [1983] A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets, Stochastic Processes and their Applications 15, 313-316.

45. Heath, D., Jarrow, R., Morton, A. [1992] Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology. Econometrica 60, 77-105.

46. Heston, S. L. [1993] A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. The Review of Financial Studies 6, 327-343.

47. Hirshleifer, J. [1970] Investment, Interest and Capital, Prentice-Hall, International Series in Managment, London.

48. Ho, T. S. Y., Lee, S.-B. [1986] Term Structure Movements and the Pricing of Interest Rate Contingent Claims. The Journal of Finance 41, 1011-1029.

49. Hull, J., White, A. [1990] Pricing Interest Rate Derivative Securities. The Review os Financial Studies 3, 573-592.

50. Hull, J. [1993] Single-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivatives Securities. Journal of Financial and Qualitative Analysis, 28, 235-254

51. Hull, J., White, A. [1994a] Branching Out. Risk 7, 34-37.

52. Hull, J., White, A. [1994b] Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models. The Journal of Derivatives 2, 7-16.

53. Hull, J., White, A. [1996] Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models. The Journal os Derivatives 2, 37-48

54. Hull, J. [2006] Options, Futures and Other Derivative Securities, 6th ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

55. Jamshidian, F. [1989] An Exact Bond Option Pricing Formula. The Journal of Finance 44, 205-209.

56. Jamshidian, F. [1997] LIBOR and Swap Market Models and Measures. Finance and Stochastics 1, 293-330.

57. Jarrow, R. A. [1997] The HJM Model: Its Past, Present, and Future. The Journal of Financial Engineering 6, 269-279.

58. Karatzas, I., Shreve, S. [1988] Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, Berlin.

59. Klebaner, F. [1999] Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial College Press, London

60. Klein, J. [1955] German Money and Prices, 1932-44 in Studies of the Quantity Theory of Money, University of Chicago Press, Chicago.

61. Levhari, D., Liviatan, N. [1982] The Effects of Indexed Bonds on Consumer Behavior. in Saving, Investment and Capital Markets in a Inflationary Economy, Ballinger, Cambridge

62. Lintner, J. [1975] Inflation and Security Returns, The Journal of Finance vol XXX, N.2, 259-280.

63. Longstaff, F. A., Schwartz, E. S. [1992a] Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. The Journal of Finance 47, 1259-1282.

64. Longstaff, F. A., Schwartz, E. S. [1992b] A Two-Factor Interest Rate Model and Contingent Claims Valuation. The Journal of Fixed Income 3, 16-23.

65. Longstaff, F. A., Schwartz, E. S. [2000] Pricing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. The Review of Financial Studies, forthcoming.

66. Merton, R. [1973] Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141-186.

67. Mina, J., Xiao, J. Y. [2001] Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard, RiskMetrics, New York.

68. Merton, R. [1990] Continuous Time Finance, Blackwell, Cambridge.

69. Mikosh, T. [1998] Stochastic Calculus with Finance in View, Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, Vol. 6, World Scientific, Singapore.

70. Miltersen, K. R., Sandmann, K., Sondermann, D. [1997] Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates. The Journal of Finance 52, 409-430.

71. Musiela, M., Rutkowski, M. [1998] Martingale Methods in Financial Modelling. Springer. Berlin.

72. Oksendal, B. [1995] Stochastic Differential Equations, 5th edn, Springer-Verlag, Berlin.

73. Pelsser, A. [2000] Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives, Springer. Heidelberg.

74. Rebonato, R. [1998] Interest Rate Option Models. Second Edition. Wiley, Chichester.

75. Rebonato, R. [1998a] Calibrating the BGM Model. Risk 12 [March, 1999], 74-79.

76. Rebonato, R. [1999] Volatility and Correlation. Wiley, Chichester.

77. Rebonato, R., Jaeckel, P. [2000] The most general methodology to create a valid correlation matrix, Journal of Risk, 2 [2], [Winter], 1-16.

78. Ritchken, P., Sankarasubramanian, L. [1995] Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure. Mathematical Finance 5, 55-72.

79. Rogers, L. C. G., Williams, D. [1987] Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. II, Wiley and Sons, New York.

80. Ross, S. A. [1973] Return, Risk and Arbitrage. Wharton Discussion Paper published in Risk and Return in Finance, edited by I. Friend and J. Bicksler, pp. 189-217. Cambridge: Ballinger, 1976.

81. Ross, S. A. [1978] A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams. Journal of Business 51(3), 453-75

82. Rutkowski, M. [1996] On Continuous-Time of Term Structure of Interest Rates. In Stochastic Processes and Related Topics. H. J. Englebert, H. Föllmer, and J. Zabczyk, eds. Gordon and Beach, New York.

83. Rutkowski, M. [1997] Models of forward LIBOR and swap rates, Working Paper, University of New South Wales.

84. Rutkowski, M. [1998] Dynamics of spot, forward and futures LIBOR rates, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1 [3], 425-445.

85. Rutkowski, M. [1999] Models of Forward LIBOR and Swap Rates. Preprint.

86. Sandmann, K., Sondermann, D. [1993] A Term Structure Model and the Pricing of Interest Rate Derivatives. The Review of Futures Markets 12, 391-423.

87. Sandmann, K., Sondermann, D. [1997] A Note on the Stability of Lognormal Interest Rate Models and the Pricing of Eurodollar Futures. Mathematical Finance 7, 119-128.

88. Senna, J. [1989] Tempos de Incerteza: A Economia Brasileira nos Anos 80, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro

89. Sharpe, W., Alexander, G. [1990] Investments, 4th Edition, Englewood, New Jersey, Prentice Hall.

90. Smith, R. C., Walter, I. [2003] Global Banking, Oxford University Press, New Tork.

91. Stapletom, R., Subrahmanyam, M. G. [1982] Uncertain Inflation, Exchange Rates, and Bond Yields, in Saving, Investment and Capital Markets in a Inflationary Economy, Ballinger, Cambridge

92. Stulz, R. M. [1986] Asset Pricing and Expected Inflation, The Journal of Finance, Vol.XLI, N.1, 209-223.

93. Vasicek, O. [1977] An Equilibrium Characterization of the Term Structure. Journal of Financial Economics 5, 177-188.

94. Williams, D. [1991] Probability with Martingales, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, New York.

95. Wilmott, P. [1998] Derivatives: the Theory and Practice of Financial Engineering, John Wiley, Chichester.

96. Zuehlsdorff, C. [2001] Extended LIBOR market models with affine and quadratic volatility, Working Paper, Department of Statistics, Rheinische Friederich-Wilhelms-Universität, Bonn, Germany.