

Estabilidade do equilíbrio relativo
no problema de $N + 1$ vórtices
no plano e na esfera

Djalma Meira Gomes Junior

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada
Orientadora: Profa. Dra. Helena Maria Ávila de Castro

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, 3 de junho de 2009

Estabilidade do equilíbrio relativo no problema de $N + 1$ vórtices no plano e na esfera

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Djalma Meira Gomes Junior
e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 3 de junho de 2009.

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Helena Maria Àvila de Castro (orientadora) - IME-USP.
- Prof. Dr. Fabio Armando Tal - IME-USP.
- Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral - UFPE.

Dedicatória

A minha mãe Maria José Tanajura Santos e irmãos
Vanessa, Joana Patrícia, Graciele e José Aparecido pelo
apoio e confiança durante todos
estes anos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por tudo, pois sem ele, não chegaria até aqui.

Em especial, a minha orientadora Profa. Dra. Helena Maria Ávila de Castro, pela ajuda, seus conselhos e sua dedicação e admirável conhecimento e experiência demonstrados ao orientar-me, que foram fundamentais para o meu amadurecimento matemático, que resultou na vitória em mais esta etapa da minha formação acadêmica.

Aos professores Sérgio Oliva, Sônia Regina Garcia, Manuel Valentim, Odilon Otávio, Alexandre Roma e funcionários Marilucia Paisos, Sebastião Francisco (Pinho), Alessandra Francisca e Emerson candido e todos os professores e funcionários do IME que contribuíram, direta ou indiretamente, em minha formação.

A todos os professores e funcionários da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB, onde iniciei meus estudos em matemática. Em especial aos professores Deusa, Augusto, Clênia, Cida e todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente, em minha formação.

A minha mãe Maria José Tanajura Santos pelas palavras de incentivo nas horas de angustia, pelo carinho e amor sem medidas e aos meus irmãos Vanessa, José Aparecido (Zeca), Joana Patrícia, Graciele e minha namorada Marcela.

Aos meus tios e tias, Alfredo, António, Adélia, Maria e todos os outros pelos conselhos. Aproveito e agradeço, também, à minha segunda mãe, minha avó Dalva Tanajura, que me acompanha desde criança.

Aos meus primos, Dalvinha, Carlos Alfredo, Eduardo, Ricardo, Jean, Valério, o meu agradecimento pelo companheirismo de todos.

Aos professores da banca examinadora, ainda não citados, a saber, Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral e Prof. Dr. Fábio Amaral Tal. Em especial ao professor Hildeberto, pois estava sempre disposto a tirar minhas dúvidas sem mesmo me conhecer pessoalmente.

Aos meus colegas do IME-USP. Vou lembrar alguns nomes e aqueles que não lembrei tentem me desculpar e se vejam entre aqueles que lembrei: Ricardo Ramos, Estela, Juliano, Pablo Laura (computação), David (computação), Getúlio, Ronaldo, Rodrigo, Jocirei, Samir, Gustavo, Gleidson (IAG), Davi, Severino, Nelson, Humberto, Tatiane Doy, Luiz (IAG), Graciele Cruz, Jaime, Priscila, Sebastián e Bruno.

Figure 1.1: Example of a function

Resumo

É estudada a estabilidade espectral e de Liapunov de um anel de vórtices de mesma intensidade, dispostos nos vértices de um polígono regular, no plano e na esfera. No plano, é mostrado que o anel de N vórtices é espectralmente estável para $N < 7$ e espectralmente instável para $N > 7$, sendo o caso $N = 7$ degenerado. Pode-se mostrar que o mesmo vale quanto à estabilidade de Liapunov, se $N \neq 7$. No caso $N = 7$, é possível mostrar a estabilidade segundo Liapunov, usando termos mais altos da hamiltoniana. Quando é inserido um vórtice de intensidade $\kappa \neq 0$ no centro deste anel, existe, para cada valor de N , um intervalo de valores de κ para o qual o sistema é espectralmente estável. Neste mesmo intervalo, o sistema é estável segundo Liapunov.

No caso de um anel de vórtices na latitude $|z| < 1$ de uma esfera de raio um, a configuração é estável segundo Liapunov para $N < 7$ e instável para $N \geq 7$. Quando é adicionado um vórtice de intensidade $\kappa \neq 0$ no pólo norte, obteremos, para cada valor de $N \geq 2$, regiões no plano $z\kappa$ nas quais a configuração é estável segundo Liapunov.

Este trabalho foi baseado nos artigos de H.E.Cabral e D.S.Schmidt [7] e de H.E.Cabral, K.R. Meyer e D.S.Schmidt [6].

Palavras-chave: Vórtices, Equilíbrio Relativo, Estabilidade Espectral, Estabilidade de Liapunov, Sistema Dinâmico, Sistema Hamiltoniano.

Abstract

We study spectral stability and Liapunov stability of a vortice's ring, where all vortices have the same strength and are at the vertices of a regular polygon, on the plane or on a fixed latitude of the sphere. It is shown that on the plane, the N vortice's ring is spectrally stable for $N < 7$ and spectrally unstable for $N > 7$, while the case $N = 7$ is degenerate. It can be shown that, for $N \neq 7$, the same is true for Liapunov stability. For $N = 7$, the analysis of higher order terms in the Hamiltonian expansion shows that this case is also Liapunov stable. When a vortex of strength $\kappa \neq 0$ is inserted in the center of this ring, there exists, for each value of N , an interval of values for κ for which the system is spectrally stable. In this same interval, the system is Liapunov stable.

For the vortice's ring at a latitude z on the unitary sphere, where $|z| < 1$, the configuration is Liapunov stable for $N < 7$ and Liapunov unstable for $N \geq 7$. When an additional vortex of strength $\kappa \neq 0$ is inserted in the north pole, for each $N \geq 2$, we get a region in the $z\kappa$ -plane, where the configuration is Liapunov stable.

This dissertation was based mainly on the papers [7] by H.E.Cabral and D.S.Schmidt, and [6] by H.E.Cabral, K.R. Meyer and D.S.Schmidt.

Keywords: Vortices, Relative Equilibrium, Spectral Stability, Liapunov Stability, Dynamical System, Hamiltonian System.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Básicos	5
1.1 Introdução	5
1.2 Estabilidade de Liapunov	5
1.3 Estabilidade de sistemas hamiltonianos	9
1.4 Problema de Kirchhoff	10
1.5 Resultados úteis	13
2 Equilíbrio relativo	15
2.1 Introdução	15
2.2 Obtenção da velocidade angular	15
2.3 Equilíbrio do anel de vórtices com um vórtice na origem	21
3 Estabilidade espectral de um anel de vórtices	29
3.1 Introdução	29
3.2 Obtenção da matriz hessiana	30
3.2.1 Obtenção das derivadas parciais de segunda ordem de U_1 em \tilde{Q}	31
4 Estabilidade espectral e de Liapunov de um anel de vórtices com um vórtice central	59
4.1 Introdução	59
4.2 Obtenção da matriz hessiana	61
4.3 Estabilidade de Liapunov para o anel de vórtices com um vórtice na origem	90
5 Estabilidade segundo Liapunov de um anel de vórtices em uma latitude	

fixada	99
5.1 Introdução	99
5.2 Verificação da formulação hamiltoniana da equação de movimento	100
5.3 Estabilidade segundo Liapunov do equilíbrio	106
5.3.1 Obtenção da matriz hessiana	110
5.3.2 Obtenção dos autovalores das matrizes circulantes	119
6 Estabilidade segundo Liapunov de um anel de vórtices em uma latitude fixada com um vórtice no pólo norte	125
6.1 Introdução	125
6.2 Dedução das equações de movimento	126
6.3 Estabilidade segundo Liapunov do equilíbrio	141
6.4 Dois vórtices em uma latitude fixada e um vórtice no pólo norte	165
Conclusões	175
Apêndice A	177
Referências Bibliográficas	185

Introdução

A teoria da vorticidade na mecânica dos fluidos é uma teoria de campo e, portanto, descrita por equações diferenciais parciais. A vorticidade é uma propriedade de um escoamento em rotação, onde as linhas de correntes (linhas contínuas tangentes ao campo de velocidade em um dado instante) apresentam um padrão circular ou espiral. Ela é encontrada nos mais diversos fenômenos da natureza, como furacões, tornados, efeitos de ponta de asa ou movimento de fluidos geofísicos. Helmholtz [10] mostrou que quando é considerado o escoamento de um fluido ideal, incompressível, bidimensional, no qual a velocidade está concentrada em N pontos isolados, o problema de determinar o movimento do fluido se reduz à determinar a solução de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Um número pequeno de vórtices pontuais modela regiões de alta concentração de vorticidade, enquanto um grande número de vórtices pode ser usado para aproximar regiões de menor concentração.

Kirchoff [12] estudou o problema dos vórtices no plano e mostrou que estas equações correspondem às de um sistema hamiltoniano. Como o campo de velocidades é singular nos vórtices, ele fez uma hipótese regularizadora para obter as equações: supôs que cada vórtice não se movimenta pela ação de seu campo, mas sim pela ação do campo gerado pelos outros vórtices. Em 1883, JJ.Thomson colocou N vórtices de igual intensidade nos vértices de um polígono regular. Trabalhando com um sistema de coordenadas em rotação uniforme, ele concluiu que a configuração poderia ser estável para $N \leq 6$, mas era instável para $N \geq 8$. Em 1999, Cabral e Schmidt [7], aplicando técnicas de normalização até termos de quarta ordem à função hamiltoniana mostraram que, exceto por simetria rotacional, o caso $N = 7$ é localmente estável segundo Liapunov.

Recentemente, tem havido um grande aumento de interesse na teoria dos vórtices, não só por suas aplicações físicas mas também por sua semelhança com o problema dos N corpos na mecânica celeste (olhe por exemplo [5] e [13]). Um grande número de artigos tratam dos vórtices no plano, tanto em casos integráveis, quanto não integráveis. Entretanto, do ponto de vista geofísico, nas aplicações em grande escala como movimentos atmosféricos e dos oceanos, é importante estudar o movimento destes vórtices também na esfera. O primeiro a deduzir o sistema de equações para N vórtices na esfera foi Bogomolov [3], [4], que tratou o problema no caso de uma esfera em repouso ou em rotação. Como no caso dos vórtices no plano, quando a esfera está em repouso, este sistema ainda tem uma formulação hamiltoniana se os vórtices estiverem afastados dos polos. Esta propriedade permite que estes vórtices sejam estudados de diversos pontos de vista. No caso de três vórtices o problema é completamente integrável tanto no plano quanto na esfera. Um livro interessante sobre a teoria dos vórtices é o de

P.Newton [15], o qual tem uma grande lista de referências e artigos relevantes.

Neste trabalho, estudaremos as estabilidades espectral e segundo Liapunov de um sistema constituído por um anel de N vórtices pontuais no plano e na esfera, todos com a mesma intensidade, localizados nos vértices de um polígono regular, com um vórtice adicional no centro do polígono (caso plano) ou no pólo norte (caso na esfera).

Esta dissertação tem a seguinte organização. No capítulo 1, apresentamos alguns conceitos e teoremas básicos que serão utilizados nos capítulos seguintes. Na seção 1.2 falaremos sobre estabilidade segundo Liapunov e definiremos um sistema hamiltoniano. Na seção 1.3 estudaremos a estabilidade de sistemas hamiltonianos e demonstraremos que o polinômio característico do sistema linearizado é par. Na seção 1.4 apresentaremos o problema de Kirchhoff e mostraremos que H é uma integral primeira deste sistema. Na seção 1.5 apresentaremos alguns teoremas clássicos do cálculo e demonstraremos uma proposição que será utilizada ao longo deste trabalho.

No capítulo 2, apresentaremos as equações de movimento de $N + 1$ vórtices localizados em $q_j = (x_j(t), y_j(t))$ com intensidade κ_j , para $j = 0, \dots, N$, dadas por

$$\begin{cases} \kappa_j \dot{x}_j = \frac{\partial U}{\partial y_j}(x, y) \\ \kappa_j \dot{y}_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}(x, y) \end{cases},$$

com função hamiltoniana $U(q) = -\sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}}$, onde $q = (x_0, x_1, \dots, x_N, y_0, y_1, \dots, y_N)$, com as quais trabalharemos ao longo dos quatro primeiros capítulos. Na seção 2.2 definiremos um ponto de equilíbrio relativo e obteremos, explicitamente, a velocidade angular dos vórtices necessária para que se possa ter um equilíbrio relativo. Na seção 2.3 mostraremos que para esta velocidade angular, o sistema de N vórtices de igual intensidade nos vértices de um polígono regular com um vórtice central é, de fato, um ponto de equilíbrio relativo do sistema.

No capítulo 3, mostraremos que um anel de vórtices posicionados nos vértices de um polígono regular de N lados com $N > 2$, inscrito na circunferência de raio 1, com intensidade $\kappa_j = 1$, com $j = 0, \dots, N - 1$ girando com velocidade $\nu = -\frac{N-1}{2}$, para $N \leq 6$, é um ponto de equilíbrio espectralmente estável da equação não linear $M\dot{Z} = \mathbf{J}\nabla V(Z)$, com $Z = \tilde{Q} - Q$, onde $\tilde{Q} \in R^{2N}$ representa a posição do anel de vórtices no referencial em rotação. Para isso, mostraremos que todas as raízes do polinômio $\det(\lambda \mathbf{J} - \nu \mathbf{I} + D^2 U(\tilde{Q})) = 0$, autovalores da equação linearizada, são imaginários puros, com exceção de duas raízes nulas que aparecem devido à invariância de U por rotações e translações. A função hamiltoniana considerada neste capítulo é

$$U_1(Q) = -\sum_{0 \leq i < j < N} \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}};$$

e com a configuração de equilíbrio $\tilde{Q} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$, definida por

$$\begin{cases} \tilde{x}_j = \operatorname{Re}(w^j), & \text{para } j = 0, \dots, N - 1 \\ \tilde{y}_j = \operatorname{Im}(w^j), & \text{para } j = 0, \dots, N - 1, \end{cases}$$

onde $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

No capítulo 4, seção 4.2, mostraremos que um anel de vórtices posicionados nos vértices de um polígono regular de N lados com $N > 2$, inscrito na circunferência de raio 1, com intensidade $\kappa_j = 1$, com $j = 0, \dots, N-1$, com um vórtice inserido no centro do anel, com intensidade $\kappa \neq 0$, girando com velocidade $\nu = -c_1 - \kappa$, é um ponto de equilíbrio espectralmente estável, para a intensidade deste vórtice central num certo intervalo. Neste caso, a função hamiltoniana é dada por

$$U(Q) = - \sum_{0 \leq i < j < N} \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \log((x_j(t) - x_N(t))^2 + (y_j(t) - y_N(t))^2)^{\frac{1}{2}}$$

com a configuração de equilíbrio $\tilde{Q} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ definida por

$$\tilde{x} = \begin{cases} \operatorname{Re}(w^j), & \text{para } j = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } j = N \end{cases}$$

e

$$\tilde{y} = \begin{cases} \operatorname{Im}(w^j), & \text{para } j = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } j = N. \end{cases}$$

Na seção 4.3, mostraremos a estabilidade segundo Liapunov para este equilíbrio quando o valor da intensidade do vórtice central está no intervalo onde ocorre estabilidade espectral.

No capítulo 5, analisaremos a estabilidade espectral de um anel de vórtices em uma esfera de raio um. Na seção 5.2, mostraremos que as equações que descrevem o movimento de N vórtices pontuais quando os vórtices estão em uma latitude fixa z , $|z| \leq 1$, da esfera de raio 1, dispostos nos vértices de um polígono regular, com intensidade $\kappa_j = 1$, para $j = 0, 1, \dots, N-1$, correspondem às de um sistema hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$H_1(\varphi, z) = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \ln[1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\varphi_i - \varphi_j)],$$

quando a posição de cada vórtice é representada por coordenadas cilíndricas $q_j = (\varphi_j, z_j)$, isto é, pela distância do vórtice ao plano equatorial, z_j , e pela sua longitude, φ_j , com configuração de equilíbrio relativo $\tilde{Q} = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ definida por

$$\begin{cases} z_j = z \\ \varphi_j = \frac{2\pi j}{N} \end{cases} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Na seção 5.3, estudaremos a estabilidade segundo Liapunov desta configuração de vórtices. Para isto, introduziremos um sistema de coordenadas que gira com uma velocidade angular

constante $\omega = -\frac{(N-1)z}{2(1-z^2)}$ em torno do seu eixo polar. Neste referencial, o sistema ainda será hamiltoniano, com uma nova hamiltoniana $H(\tilde{\varphi}_j(t), \tilde{z}) = H_1(\tilde{\varphi}_j(t), \tilde{z}) - \omega \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{z}_i(t)$, com o equilíbrio relativo descrito acima correspondendo a um ponto de equilíbrio deste novo sistema. Mostraremos que a hessiana de H calculada no ponto de equilíbrio possui todos os autovalores negativos para $N < 7$, ou seja, a hessiana para $N < 7$ é definida negativa (exceto pelo autovalor nulo correspondente à invariância por rotação). Portanto, temos estabilidade no sentido de Liapunov somente quando $N < 7$, enquanto para $N \geq 7$ o equilíbrio não é estável no sentido de Liapunov.

No capítulo 6, estudaremos novamente o anel de vórtices do capítulo 5, mas agora com um vórtice inserido no pólo norte da esfera, com intensidade κ . Como o pólo norte é uma singularidade do sistema de coordenadas cilíndricas usado para os demais vórtices, usaremos coordenadas cartesianas para descrevê-lo. Na seção 6.2, apresentaremos as equações de movimento para este caso. Agora, elas não correspondem mais a um sistema hamiltoniano, mas ainda existe uma função H que é uma integral primeira do movimento e em relação à qual se pode escrever estas equações. Mostraremos que, quando girando com velocidade angular constante $\omega = -\frac{(N-1)z}{2(1-z^2)} - \frac{\kappa}{2(1-z)}$ em torno do eixo polar, esta é uma configuração de equilíbrio relativo do sistema. Na seção 6.3, estudaremos a estabilidade segundo Liapunov deste equilíbrio, e encontraremos regiões que dependem da latitude z e da intensidade κ nas quais a configuração é estável, para cada valor de $N \geq 3$. Na seção 6.4, estudaremos o caso particular em que $N = 2$, no qual novamente encontraremos uma região de estabilidade no sentido de Liapunov.

Finalmente, em Conclusões, apresentamos algumas extensões para as quais acreditamos que as técnicas aqui usadas possam produzir resultados novos.

Para facilitar a leitura e compreensão de alguns cálculos e demonstrações, colocamos no apêndice A alguns resultados de álgebra linear e variável complexa utilizados (como referência para este último assunto citamos [8]).

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos básicos envolvendo estabilidade. Apresentaremos também alguns teoremas sobre estabilidade segundo Liapunov (como referência para este assunto citamos [16] e [9]), definiremos um sistema Hamiltoniano e estudaremos sua estabilidade (como referência para este assunto citamos [1]), e descreveremos o problema de Kirchhoff. Apresentaremos, a título de ilustração, a demonstração de alguns resultados. A demonstração dos outros podem ser encontrados nas referências já citadas.

Estes conceitos serão úteis para a compreensão dos capítulos seguintes.

1.2 Estabilidade de Liapunov

Apresentamos, inicialmente, a definição de ponto de equilíbrio de uma equação diferencial.

Definição 1.2.1. Sejam $\Omega \subset R^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow R^N$ de classe C^{k+1} , com $k > 0$. Um ponto x_0 é chamado de ponto de equilíbrio da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, se $\varphi : R \rightarrow R^N$, definida por $\varphi(t) = x_0$, para todo $t \in R$, é solução dessa equação. É claro isto ocorre se e só se $f(x_0) = 0$.

Definição 1.2.2. Sejam $\Omega \subset R^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow R^N$ de classe C^{k+1} , com $k > 0$. Um ponto de equilíbrio x_0 da equação $\dot{x} = f(x)$ diz-se estável segundo Liapunov, se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\epsilon)$) tal que $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ e, para todo $\hat{x} \in B_\delta(x_0)$, a solução ψ do problema

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \hat{x}, \quad (1.1)$$

fica definida em $[0, \infty[$ e $\psi(t) \in B_\epsilon(x_0), \forall t \geq 0$. Caso contrário, o ponto de equilíbrio é dito instável segundo Liapunov.

Definição 1.2.3. Sejam $\Omega \subset R^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow R^N$ de classe C^{k+1} , com $k > 0$. Um ponto de equilíbrio $x_0 \in \Omega$ da equação $\dot{x} = f(x)$ é dito atrator, se existe $\epsilon > 0$ tal que, para

todo $\hat{x} \in B_\epsilon(x_0)$, a solução φ de

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \hat{x},$$

fica definida em $[0, \infty[$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$.

A solução de (1.1) passando por $x \in \Omega$ em $t = 0$ será sempre indicada por $\varphi_x(t)$, com $\varphi_x(0) = x$

Definição 1.2.4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} , com $k > 0$. Um ponto de equilíbrio $x_0 \in \Omega$ da equação $\dot{x} = f(x)$ é dito assintoticamente estável segundo Liapunov, se ele for estável e atrator.

Os métodos mais usados no estudo de estabilidade de pontos de equilíbrio são a linearização da equação diferencial e os que usam funções auxiliares. Os dois teoremas a seguir usam linearização.

Teorema 1.2.5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} . Se $x_0 \in \Omega$ é um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$ e todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real estritamente negativa, então x_0 é assintoticamente estável segundo Liapunov.

Teorema 1.2.6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} . Se $x_0 \in \Omega$ é um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$ e $Df(x_0)$ possui um autovalor com parte real estritamente positiva, então x_0 é instável segundo Liapunov.

As funções de Liapunov, definidas a seguir, são funções auxiliares importantes no estudo de estabilidade.

Definição 1.2.7. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} . Seja x_0 um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$. Uma função de Liapunov para x_0 é uma função diferenciável $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um aberto $U \subset \Omega$, tal que $x_0 \in U$, satisfazendo as seguintes condições

$$(a) V(x_0) = 0 \text{ e } V(x) > 0, \forall x \neq x_0;$$

$$(b) \dot{V}(x) = DV(x)f(x) \leq 0, \forall x \in U.$$

A função de Liapunov V diz-se estrita quando

$$(c) \dot{V}(x) < 0, \forall x \in U - \{x_0\}.$$

Observação 1.2.8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^{k+1} , e $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma solução de $\dot{x} = f(x)$, então $\frac{d}{dt}(V \circ \varphi)(t) = DV(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = DV(\varphi(t))f(\varphi(t))$. Isto motiva a definição de $\dot{V} : U \rightarrow \mathbb{R}$ por $\dot{V}(x) = DV(x)f(x)$.

Teorema 1.2.9. Seja x_0 um ponto singular de (1.1). Se existir uma função de Liapunov para x_0 , então x_0 é estável. Se ela for uma função de Liapunov estrita, x_0 é assintoticamente estável.

Demonstração. Seja $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Liapunov para x_0 . Dado $B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| \leq \delta\} \subset U$, o número $m = \min\{V(x) \mid |x - x_0| = \delta\}$ é positivo, já que $V(x) > 0$ para $x \in U - \{x_0\}$. Em virtude da continuidade de V , existe um aberto com $x_0 \in U_1$, contido em B , tal que $V(x) < m$, para todo $x \in U_1$. Como V decresce ao longo das órbitas de (1.1), temos que $\varphi_x(t)$ permanece no interior de B , para todo $t \geq 0$ e $x \in U_1$. Portanto, x_0 é estável.

Agora, vamos supor que V é uma função de Liapunov estrita para x_0 . Pelo que demonstramos na primeira parte do Teorema, temos que $x_0 \in U_1 \subset B \subset U$ e $\varphi_x(t) \in U$ para quaisquer $x \in U_1$ e $t > 0$; em particular, $\varphi_x(t) \in U$ para quaisquer $x \in U_1$ e $t > 0$ e portanto somente resta mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_x(t) = x_0$ vale para qualquer $x \in U_1$. Por hipótese, temos que $\dot{V}(\varphi(t)) < 0, \forall x \in U - \{x_0\}$. Dado $x \in U_1$ existe uma sequência t_n crescente de números reais positivos com a sequência dada por $\varphi_x(t_n) \subset B$, e como B é compacto, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência $\varphi_x(t_{n_k})$ convergente, cujo limite y está em B . Temos que $V(\varphi_x(t_k)) \rightarrow V(y)$ e, $V(\varphi_x(t)) > V(y), \forall t \geq 0$. Suponhamos $y \neq x_0$. Então $V(\varphi_y(t)) < V(y)$ e para todo z suficientemente próximo de y , $V(\varphi_z(1)) < V(y)$. Mas então, se k for suficientemente grande, $z = \varphi_x(t_k)$ está suficiente próximo de y e $V(\varphi_x(t_k + 1)) < V(y)$, o que é um absurdo. Portanto, $y = x_0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$ \square

Exemplo 1.2.1. Consideremos a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2(x_3 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1(x_3 - 1) \\ \dot{x}_3 = -x_3, \end{cases}$$

definida pelo campo de vetores não-linear $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2x_3 - 2x_2, x_1 - x_1x_3, -x_3)$, com parte linear

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

em $x_0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Os autovalores de $Df(x_0)$ são $\pm i\sqrt{2}$ e -1 . Portanto, não vale que todos os autovalores têm parte real negativa, donde não podemos utilizar o resultado do teorema (1.2.6) para estabelecer a estabilidade do sistema na origem. Vamos tentar obter uma função de Liapunov para o sistema, na origem, na forma $V(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, com $a, b, c > 0$. Claramente, temos $V(0, 0, 0) = 0$ e $V(x) > 0$ para cada $x \neq x_0 = (0, 0, 0)$. Também,

$$\begin{aligned} DV(x)f(x) &= \langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3) \rangle \\ &= \langle (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3), (2x_2x_3 - 2x_2, x_1 - x_1x_3, -x_3) \rangle \\ &= (2b - 4a)x_1x_2 + (4a - 2b)x_1x_2x_3 - 2cx_3^2 \end{aligned}$$

e assim, se tomarmos $a=1, b=2, c=1$, obtemos a simplificação

$$\langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3) \rangle = -2x_3^2 \leq 0,$$

para $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$. Logo, pela teorema (1.2.9), podemos concluir que x_0 é um ponto de equilíbrio estável do sistema.

Vamos agora introduzir uma classe importante de equações diferenciais, os sistemas hamiltoniano.

Definição 1.2.10. Um sistema hamiltoniano é um sistema com $2N$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(t, q, p) \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(t, q, p), \end{cases}$$

onde H é uma função a valores reais, de classe C^2 , definida para $(t, q, p) \in \Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é aberto, chamada função hamiltoniana. Os vetores $q = (q_1, \dots, q_N)$ e $p = (p_1, \dots, p_N)$ são chamados de vetor posição e vetor momento, respectivamente.

Definição 1.2.11. Chamamos de sistema hamiltoniano autônomo ao sistema cuja função hamiltoniana, H , é independente de t . Nesse caso, consideramos H definida em $(p, q) \in \Omega$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ aberto.

Definição 1.2.12. Considere um sistema hamiltoniano autônomo. Um ponto crítico de H é um ponto onde o gradiente de H é nulo.

Observação 1.2.13. Um ponto crítico de H é um ponto de equilíbrio do sistema hamiltoniano correspondente.

Teorema 1.2.14. Considere um sistema Hamiltoniano autônomo

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p) \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p). \end{cases} \quad (1.2)$$

(a) H é constante ao longo das órbitas do sistema.

(b) Se (q_0, p_0) é um ponto de mínimo estrito de H , então (q_0, p_0) é um ponto de equilíbrio estável segundo Liapunov, para o sistema hamiltoniano considerado.

Demonstração. (a) Seja $\varphi(t)$ uma solução do sistema (1.6). Precisamos apenas mostrar que $\dot{H}(\varphi(t)) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(\varphi(t))) &= DH(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \langle \nabla H(\varphi(t)), \frac{d\varphi}{dt} \rangle = \langle \nabla H(\varphi(t)), J\nabla H(\varphi(t)) \rangle = 0, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que a matriz J é anti-simétrica. (b) Como $\dot{H}(x) = 0$, H é uma função de Liapunov para (1.2). \square

Definição 1.2.15. Seja X um campo vetorial de classe C^1 em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Uma função contínua $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se integral primeira de X em Ω se :

- (a) I é constante ao longo de toda órbita de X
- (b) I não é constante em nenhum aberto de Ω .

Na próxima secção usaremos o seguinte resultado do cálculo:

Proposição 1.2.16. *Seja A é uma matriz simétrica real, $2N \times 2N$. Se uma aplicação diferenciável $H : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $H(x) = x^T A x$, então $\nabla H(x) = 2Ax$*

1.3 Estabilidade de sistemas hamiltonianos

Nesta secção, mostraremos um resultado útil para introduzir os demais conceitos relacionados com a estabilidade de um sistema Hamiltoniano.

Considere o sistema Hamiltoniano (1.2). Seja $x_0 = (p_0, q_0)$ um ponto de equilíbrio deste sistema. Usando uma translação, o que não altera o sistema (1.2), podemos supor que $x_0 = 0$ e, portanto, temos que $\nabla H(0) = 0$. Então,

$$H(x) = H(0) + \nabla H(0)x + \frac{1}{2}x^T D^2H(0)x + \dots$$

onde $x = (p, q)$, as reticências representam os termos de ordem superior e $D^2H(0)$ denota matriz hessiana de H na origem. Assim, o sistema (1.2) pode ser reescrito na forma

$$\dot{x} = \frac{1}{2}Jx^T D^2H(0)x + \dots$$

onde J é a matriz simplética, definida por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

onde I é a matriz identidade de ordem N . Fazendo $D^2H(0) = G$, e usando a proposição (1.2.16) obtemos

$$\dot{x} = JGx + \dots$$

Assim, o sistema linearizado é dado por $\dot{x} = JGx$

Proposição 1.3.1. *O polinômio característico de JG é par.*

Demonstração. Agora, denotaremos por I_{2N} a matriz identidade $2N \times 2N$. Observemos, inicialmente, que a matriz simplética J é tal $J^2 = -I_{2N}$, $J^t = -J$ e que a Hessiana é simétrica, ou seja, $G^t = G$. Assim, $(\lambda I_{2N} - JG)^t = \lambda I_{2N} + GJ = J(-\lambda I_{2N} - JG)J$ e,

por conseguinte, o polinômio característico de \mathbf{JG} satisfaz a condição $p(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbf{JG}) = \det(\mathbf{J}(-\lambda I_{2N} - \mathbf{JG})\mathbf{J}) = (\det \mathbf{J})^2 \det(-\lambda I_{2N} - \mathbf{JG}) = \det(-\lambda I_{2N} - \mathbf{JG}) = p(-\lambda)$, usando a propriedade que o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta. Assim, se λ é autovalor de \mathbf{JG} , então $-\lambda$ também o é. \square

Observação 1.3.2. Pela proposição (1.3.1), se existir um autovalor λ de \mathbf{JG} , com $\text{Re}(\lambda) \neq 0$, existirá um com parte real positiva. Assim, se existir um autovalor λ com $\text{Re}(\lambda) \neq 0$, pelo teorema (1.2.6) de Liapunov, $x_0 = 0$ não será estável.

1.4 Problema de Kirchhoff

Agora, introduziremos, a noção heurística de vórtices. Um vórtice é um escoamento em rotação onde as linhas de correntes (linha contínua que é sempre tangente ao campo de velocidade em um dado instante) apresentam um padrão circular ou espiral. São movimentos espirais ao redor de um centro de rotação. Ele surge devido a diferenças de pressão entre duas regiões vizinhas. Quando isso ocorre, o fluido tende a equilibrar o sistema e escoar para esta região de menor pressão mudando, eventualmente, a direção original do escoamento e, com isso, gera vorticidade. Eles são encontrados nos mais diversos locais da natureza, como correntes circulares de água provenientes de marés conflitantes, furacões, tornados ou efeitos de ponta de asa. Este último é muito estudado pela indústria aeronáutica, pois uma geração de vórtices aumenta o arrasto da aeronave. Esse efeito recebe o nome de arrasto induzido e é minimizado pela presença de Winglets (um componente aerodinâmico, posicionado na extremidade livre da asa de uma aeronave, que tem por função diminuir o arrasto induzido, relacionado aos vórtices de ponta de asa). A redução do arrasto melhora a eficiência da aeronave, significando aumento da velocidade e economia de combustível. Tecnicamente, um vórtice pode ser qualquer escoamento circular ou rotacional que possui vorticidade. Vorticidade é um conceito matemático utilizado na dinâmica dos fluidos. Ela pode ser entendida como a quantidade de circulação ou rotação de um fluido por unidade de área no campo de escoamento. Nos estudos atmosféricos, vorticidade é uma propriedade que caracteriza a rotacionalidade em grande escala das massas de ar. Para mais informações sobre o assunto citamos como referência [14] e [15].

Os vórtices se caracterizam pela propriedade de que a vorticidade se concentra em uma região pequena. Do ponto de vista matemático, consideremos a situação aproximada na qual a vorticidade está concentrada em um único ponto. Isto simplifica enormemente as equações que descrevem os vórtices e a interação entre eles, pois reduz o problema de fluido para um sistema de equações diferenciais ordinárias, de dimensão finita.

Kirchhoff foi o primeiro a obter em 1897, as equações do movimento para esse vórtices no plano como sendo

$$k_j \dot{\xi}_j = J \frac{\partial U}{\partial \xi_j}(\xi), \text{ para } j = 0, \dots, N-1, \quad (1.4)$$

em que $\xi_j = (x_j, y_j)$ é o vetor posição do j -ésimo vórtice, cuja intensidade é $k_j \neq 0$, para

$j = 0, \dots, N-1$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e a função hamiltoniana é

$$U(\xi) = - \sum_{0 \leq i < j \leq N-1} \kappa_i \kappa_j \log \| \xi_i - \xi_j \|.$$

O sistema (1.4) não é um sistema Hamiltoniano, mas, introduzindo novas variáveis, podemos transformá-lo em um sistema Hamiltoniano:

$$\begin{cases} q_j = \sqrt{|k_j|} x_j \\ \dot{p}_j = -\sqrt{|\kappa_j|} \operatorname{sgn}(\kappa_j) y_j, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_j = \frac{q_j}{\sqrt{|\kappa_j|}} \\ y_j = -\frac{p_j}{\sqrt{|k_j|}} \operatorname{sgn}(\kappa_j), \end{cases} \quad (1.5)$$

De fato, usando (1.5) obtemos a função hamiltoniana

$$H(q, p) = U(x(p, q), y(p, q)).$$

Calculando as derivadas parciais de primeira ordem de H e substituindo em (1.4) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_j} &= \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_j} + \frac{\partial U}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial p_j} \\ &= -\kappa_j y_j \cdot 0 + \kappa_j \dot{x}_j \frac{\operatorname{sgn}(\kappa_j)}{\sqrt{|k_j|}} \\ &= \kappa_j \left(\frac{\dot{q}_j}{\sqrt{|\kappa_j|}} \right) \left(\frac{\operatorname{sgn}(\kappa_j)}{\sqrt{|\kappa_j|}} \right) \\ &= \frac{\kappa_j}{\sqrt{|\kappa_j|^2}} \dot{q}_j \operatorname{sgn}(\kappa_j) \\ &= \frac{\kappa_j}{|\kappa_j|} \dot{q}_j \operatorname{sgn}(\kappa_j) = \dot{q}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_j} &= \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_j} \\ &= -\kappa_j \dot{y}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_j} \\ &= -\kappa_j \dot{y}_j \frac{1}{\sqrt{|\kappa_j|}} \\ &= -\kappa_j \frac{\dot{p}_j}{\sqrt{|\kappa_j|}} \operatorname{sgn}(\kappa_j) \frac{1}{\sqrt{|\kappa_j|}} \\ &= -\kappa_j \left(\frac{\dot{p}_j}{\sqrt{|\kappa_j|}} \operatorname{sgn}(\kappa_j) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{|\kappa_j|}} \right) = -\dot{p}_j, \end{aligned}$$

Logo, obtemos o sistema hamiltoniano autônomo em R^{2N} :

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p) \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p). \end{cases} \quad (1.6)$$

Com isso podemos trabalhar com o sistema (1.4), usando as propriedades correspondentes de um sistema Hamiltoniano.

As equações de movimento de vórtices pontuais no espaços são dadas por:

$$\dot{\psi}_j(t) = \sum_{i \neq j}^N k_i \frac{\psi_i(t) \times \psi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.7)$$

Observe que o sistema (1.4) pode ser escrito na forma

$$M\dot{\xi} = \mathbf{J}\nabla U(\xi),$$

onde $\xi = (x_0, \dots, x_{N-1}, y_0, \dots, y_{N-1})$ e M é a matriz $2N \times 2N$ abaixo

$$M = \begin{pmatrix} \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \kappa_{N-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \kappa_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_N \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

com $\kappa_j \neq 0$, $j = 0, \dots, N-1$.

Observação 1.4.1. A função U é chamada função Hamiltoniana para o sistema

$$M\dot{\xi} = \mathbf{J}\nabla U(\xi)$$

Proposição 1.4.2. Seja $\Omega \subset R^N \times R^N$ aberto. Consideremos um sistema

$$M\dot{\xi} = \mathbf{J}\nabla U(\xi),$$

com U independente de t , de classe C^2 , e M dada por (1.8). Se $\widehat{\xi}$ é um ponto de mínimo local estrito de $U(\xi)$, então $\widehat{\xi}$ é um ponto de equilíbrio estável segundo Liapunov, para o sistema considerado.

Demonstração. Seja $V(\xi)$ a função auxiliar definida por $V(\xi) = U(\xi)$. Como $\widehat{\xi}$ é ponto de mínimo local estrito de U , então $\widehat{\xi}$ é ponto de mínimo local estrito de V . Pela proposição (1.2.14), $\dot{U} = 0$, e então $\dot{V} = \dot{U} = 0$. Assim, V é função de Liapunov para esse sistema, e, pelo teorema (1.2.9), temos que $\widehat{\xi}$ é estável segundo Liapunov. \square

Observação 1.4.3. O mesmo vale se $\widehat{\xi}$ for um ponto de máximo local estrito de $U(\xi)$, pois neste caso basta tomar $U(\xi) = -U(\xi)$ para obter a tese.

1.5 Resultados úteis

Nesta seção recordaremos alguns noções de Análise no R^N e Álgebra Linear, definiremos o conceito de menores principais para matrizes e recordaremos o critério de Sylvester. Adicionalmente, serão descritas algumas notações utilizadas ao longo deste trabalho.

Não é objetivo desta seção um tratamento completo dos assuntos aqui abordados. Maiores detalhes podem ser encontrados em [11] e [2]

Definição 1.5.1. Seja A uma $N \times N$ matriz. Os menores principais de A são os N escalares definidos por

$$\det A^k = \det \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}, k = 1, \dots, N.$$

Teorema 1.5.2. *Seja A uma matriz $N \times N$ sobre o corpo dos números complexos e suponhamos que A seja auto-adjunta (hermitiana). Então A é positiva definida se, e somente se, os menores principais de A forem todos estritamente positivos.*

Teorema 1.5.3. *Seja A uma matriz $N \times N$ sobre o corpo dos números complexos e suponhamos que A seja auto-adjunta (hermitiana). Então A é negativa definida se, e somente se, os menores principais de A alternam de sinal, com $\det A_1 < 0$.*

Proposição 1.5.4. *Considere $L \in N^*$ e $P_L(x) = x^L - 1$, cujas raízes são $w^0 = 1, w^1, w^2, \dots, w^{L-1}$, onde $w = e^{\frac{2\pi i}{L}}$. Então*

1. $\sum_{j=0}^{L-1} w^j = 0$,
2. $\sum_{j=1}^{L-1} w^j = -1$,
3. $\sum_{j=0}^{L-1} w^{nj} = L$ se $n \in N, n = 0 \pmod L$,
4. $\sum_{j=0}^{L-1} w^{nj} = 0$ se $n \in N, n \neq 0 \pmod L$,
5. $\sum_{j=0}^{L-1} w^{(n-2)j} = 0$ se $n \in N, n \neq 2 \pmod L$,
6. $\sum_{j=0}^{L-1} w^{(n-2)j} = L$ se $n \in N, n = 2 \pmod L$,

$$7. \sum_{j=1}^{L-1} w^{nj} = -1 \text{ se } n \in N, n \neq 0 \text{ mod } L,$$

$$8. \sum_{j=1}^{L-1} w^{nj} = L - 1 \text{ se } n \in N, n = 0 \text{ mod } L.$$

Demonstração. Como $P_L(x) = \sum_{j=0}^{L-1} a_j x^j$, $a_L = 1, a_j = 0$, para $j = 1, \dots, L - 1$, e $a_0 = -1$, então $\sum_{j=0}^{L-1} w^j = -a_{L-1} = 0$, ou seja, (1) está demonstrado. Temos que (2) decorre imediatamente de (1). (3) decorre do fato de que $w^n = 1$, quando $n = 0 \text{ mod } L$.

Também (4) decorre de (1), observando-se que, se $n \neq 0 \text{ mod } L$, então w^n é uma das raízes L -ésimas da unidade, donde, $w^n \in \{w, w^2, \dots, w^{L-1}\}$. Assim, o subgrupo gerado por w^n tem k elementos, onde k é a ordem de w^n , $km = L$, $\{1, w^n, w^{2n}, \dots, w^{(k-1)n}\}$ são as raízes k -ésimas da unidade e, devido a (1), aplicada quando $k = l$,

$$\sum_{j=0}^{L-1} w^{nj} = m \sum_{j=0}^{k-1} w^{nj} = 0.$$

Finalmente, (5) segue de (4), (6) segue de (3), (7) segue de (4) e (8) segue de (3). \square

Vejamos, agora, um teorema clássico de análise, que nos diz, a partir da hessiana, quando temos um ponto de mínimo ou máximo local.

Teorema 1.5.5. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dotada de derivadas parciais de segunda ordem contínuas em Ω , e $c \in \Omega$ com ponto crítico de f .*

a) *se $x^T D^2 f(c)x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$, então f tem mínimo relativo estrito em c .*

b) *se $x^T D^2 f(c)x < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$, então f tem máximo relativo estrito em c .*

Capítulo 2

Equilíbrio relativo

2.1 Introdução

O problema a ser considerado é o movimento de $N + 1$ vórtices localizados nos $q_j = (x_j(t), y_j(t))$, com intensidade κ_j , para $j = 0, \dots, N$. As equações de movimento para estes vórtices, no contexto da mecânica hamiltoniana, são:

$$\kappa_i x_i'(t) = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (y_i(t) - y_j(t))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2}, \quad (2.1)$$

$$\kappa_i y_i'(t) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (x_i(t) - x_j(t))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2}, \quad (2.2)$$

com função hamiltoniana

$$U(q) = - \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ onde } q = (x_0, \dots, x_N, y_0, \dots, y_N).$$

Nesta seção, definiremos um ponto de equilíbrio relativo, e obteremos, explicitamente, a velocidade angular com que devem girar uniformemente para conseguirmos um ponto de equilíbrio relativo. Mostraremos que existem equilíbrios relativos com N vórtices localizados nos vértices de um polígono regular, inscrito em uma circunferência de raio 1, com intensidade $\kappa_j = \kappa_0$ para $j = 0, 1, \dots, N - 1$ e um vórtice central na origem, com intensidade κ_N quando a velocidade angular for adequadamente escolhida.

2.2 Obtenção da velocidade angular

Definição 2.2.1. Um ponto de equilíbrio relativo é uma configuração dos vórtices que se torna estacionária em um sistema de coordenadas em rotação uniforme.

Considere a mudança de coordenadas dada por $\tilde{x}_i(t) = \cos(\nu t)x_i(t) - y_i(t)\sin(\nu t)$ e $\tilde{y}_i(t) = \sin(\nu t)x_i(t) + \cos(\nu t)y_i(t)$, para um referencial que gira uniformemente, ao redor da origem, com velocidade angular ν .

Começemos introduzindo a mudança de coordenadas na equação (2.1).

$$\begin{aligned}
\kappa_i (\tilde{x}_i(t))' &= -\nu\kappa_i\sin(\nu t)x_i(t) + \kappa_i\cos(\nu t)x_i'(t) - \nu\kappa_i\cos(\nu t)y_i(t) - \kappa_i\sin(\nu t)y_i'(t) \\
&= -\nu\kappa_i\sin(\nu t)x_i + \cos(\nu t) \left(-\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i\kappa_j (y_j(t) - y_i(t))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right) - \\
&\quad \nu\kappa_i\cos(\nu t)y_i(t) - \sin(\nu t) \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i\kappa_j (x_j(t) - x_i(t))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right) \\
&= -\nu\kappa_i\sin(\nu t)x_i(t) - \nu\kappa_i\cos(\nu t)y_i(t) - \\
&\quad \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i\kappa_j (\cos(\nu t) (y_i(t) + y_j(t)) + \sin(\nu t) (x_i(t) + x_j(t)))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right) \\
&= -\nu\kappa_i (\sin(\nu t)x_i(t) + \cos(\nu t)y_i(t)) - \\
&\quad \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i\kappa_j (\cos(\nu t)y_i(t) - \cos(\nu t)y_j(t) + \sin(\nu t)x_i(t) - \sin(\nu t)x_j(t))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right) \\
&= -\nu\kappa_i (\sin(\nu t)x_i(t) + \cos(\nu t)y_i(t)) - \\
&\quad \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i\kappa_j (\cos(\nu t)y_i(t) + \sin(\nu t)x_i - (\cos(\nu t)y_j(t) + \sin(\nu t)x_j(t)))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\kappa_i (\tilde{x}_i(t))' = -\nu\kappa_i (\tilde{y}_i(t)) - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i\kappa_j (\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} \right). \quad (2.3)$$

Agora, na equação (2.2), temos que

$$\begin{aligned}
\kappa_i (\tilde{y}_i(t))' &= \nu \kappa_i \cos(\nu t) x_i(t) + \kappa_i \sin(\nu t) x_i'(t) - \nu \kappa_i \sin(\nu t) y_i(t) + \kappa_i \cos(\nu t) y_i'(t) \\
&= \nu \kappa_i \cos(\nu t) x_i + \sin(\nu t) \left(- \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (y_i(t) - y_j(t))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right) - \\
&\quad \nu \kappa_i \sin(\nu t) y_i(t) + \cos(\nu t) \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (x_i(t) - x_j(t))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right) \\
&= \nu \kappa_i \cos(\nu t) x_i(t) - \nu \kappa_i \sin(\nu t) y_i(t) + \\
&\quad \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\sin(\nu t) (y_j(t) + y_i(t)) + \cos(\nu t) (x_i(t) - x_j(t)))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right) \\
&= \nu \kappa_i (\cos(\nu t) x_i(t) - \sin(\nu t) y_i(t)) + \\
&\quad \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (-\sin(\nu t) y_i(t) + \sin(\nu t) y_j(t) + \cos(\nu t) x_i(t) - \cos(\nu t) x_j(t))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right) \\
&= \nu \kappa_i (\cos(\nu t) x_i(t) - \sin(\nu t) y_i(t)) + \\
&\quad \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\cos(\nu t) x_i(t) - \sin(\nu t) y_i - (\cos(\nu t) x_j(t) - \sin(\nu t) y_j(t)))}{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2} \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\kappa_i (\tilde{y}_i(t))' = \nu \kappa_i (\tilde{x}_i(t)) - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} \right). \quad (2.4)$$

Assim, as equações do movimento, nas novas coordenadas $(\tilde{x}_i(t), \tilde{y}_i(t))$, ficam:

$$\begin{cases} \kappa_i (\tilde{x}_i(t))' = -\nu \kappa_i (\tilde{y}_i(t)) - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} \right) \\ \kappa_i (\tilde{y}_i(t))' = \nu \kappa_i (\tilde{x}_i(t)) + \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} \right). \end{cases} \quad (2.5)$$

Observação 2.2.2. A mudança de coordenadas acima pode ser descrita de forma mais compacta por $(x_j(t), y_j(t)) = e^{\nu J t}(\tilde{x}_j(t), \tilde{y}_j(t))$

Pela definição (1.2.1), $\tilde{Q} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_N, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_N)$ será um ponto equilíbrio de (2.5) e, portanto, descreverá um movimento estacionário se, e somente se, satisfizer

$$\begin{cases} -\nu \kappa_i (\tilde{y}_i(t)) - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} \right) = 0 \\ \nu \kappa_i (\tilde{x}_i(t)) - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

para $i = 0, 1, \dots, N$, para algum valor de ν .

Multiplicando-se ambos os lados da primeira equação de (2.6) por $(\tilde{y}_i(t))$, e da segunda equação por $(\tilde{x}_i(t))$, obtemos

$$-\nu \kappa_i (\tilde{y}_i(t))^2 - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{y}_i^2(t) - \tilde{y}_j(t) \tilde{y}_i(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} \right) = 0, \quad (2.7)$$

$$\nu \kappa_i (\tilde{x}_i(t))^2 + \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t) \tilde{x}_i(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} \right) = 0. \quad (2.8)$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{y}_i^2(t) - \tilde{y}_j(t) \tilde{y}_i(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = -\nu \kappa_i (\tilde{y}_i(t))^2 \\ \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t) \tilde{x}_i(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = -\nu \kappa_i (\tilde{x}_i(t))^2. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Tomando-se a somatória em i , para $i = 0, \dots, N$, dos dois lados das duas equações (2.9), obtemos as equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{y}_i^2(t) - \tilde{y}_j(t) \tilde{y}_i(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = -\nu \sum_{i=0}^N \kappa_i (\tilde{y}_i(t))^2 \\ \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t) \tilde{x}_i(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = -\nu \sum_{i=0}^N \kappa_i (\tilde{x}_i(t))^2. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Como temos

$$1/2 \sum_{\substack{i,j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t))^2}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = \sum_{\substack{i,j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{y}_i^2(t) - \tilde{y}_j(t) \tilde{y}_i(t))}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2},$$

e também a equação análoga para \tilde{x}_i e \tilde{y}_i , então, por (2.10), obtemos as equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/2 \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t))^2}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = -\nu \sum_{i=0}^N \kappa_i (\tilde{y}_i(t))^2 \\ 1/2 \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t))^2}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = -\nu \sum_{i=0}^N \kappa_i (\tilde{x}_i(t))^2, \end{array} \right.$$

que correspondem a

$$\sum_{i < j}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t))^2}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = -\nu \sum_{i=0}^N \kappa_i \tilde{x}_i^2(t), \quad (2.11)$$

$$\sum_{i < j}^N \frac{\kappa_i \kappa_j (\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t))^2}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = -\nu \sum_{i=0}^N \kappa_i \tilde{y}_i^2(t). \quad (2.12)$$

Somando-se a equação (2.11) com a (2.12), obtemos:

$$\sum_{i < j}^N \frac{\kappa_i \kappa_j ((\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t))^2 + (\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t))^2)}{(\tilde{x}_j(t) - \tilde{x}_i(t))^2 + (\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t))^2} = -\nu \sum_{i=0}^N \kappa_i (\tilde{y}_i^2(t) + \tilde{x}_i^2(t)).$$

Então,

$$\sum_{i < j}^N \kappa_i \kappa_j = -\nu \sum_{i=0}^N \kappa_i (\tilde{y}_i^2(t) + \tilde{x}_i^2(t)).$$

Logo, a velocidade angular deste sistema em rotação é dada por:

$$\nu = -\frac{\sum_{i < j}^N \kappa_i \kappa_j}{\sum_{i=0}^N \kappa_i (\tilde{y}_i^2(t) + \tilde{x}_i^2(t))}.$$

Observação 2.2.3. Observe inicialmente que o denominador da igualdade acima é constante, pois para encontrar ν fizemos $\tilde{x}_i(t) = 0$ e $\tilde{y}_i(t) = 0$. Além disso, se todos os κ possuírem os mesmos sinais $\nu \neq 0$, e com isto, concluímos que o sistema neste caso não tem ponto de equilíbrio.

Demonstremos assim o seguinte teorema:

Teorema 2.2.4. *Considere um sistema com $N + 1$ vórtices localizados em (x_j, y_j) , $j = 0, \dots, N$, com intensidade, respectivamente, k_0, \dots, k_N . Para que esta configuração seja equilíbrio relativo é necessário que a velocidade de rotação seja dada por:*

$$\nu = -\frac{\sum_{i < j}^N \kappa_i \kappa_j}{\sum_{i=0}^N \kappa_i (\tilde{y}_i^2(t) + \tilde{x}_i^2(t))}.$$

Observação 2.2.5. Sejam $Q = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_N, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_N)$, $Q_j = (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) = (\cos(\nu t)x_i(t) - \sin(\nu t)y_i(t), \sin(\nu t)x_i(t) + \cos(\nu t)y_i(t))$ e $q_j = e^{\nu J t} Q_j = (\cos(\nu t)\tilde{x}_i(t) + \sin(\nu t)\tilde{y}_i(t), \cos(\nu t)\tilde{y}_i(t) - \sin(\nu t)\tilde{x}_i(t))$. Como $\|Q_i - Q_j\| = \|q_i - q_j\|$, para $i, j = 0, \dots, N$, segue que $U(q) = U(Q)$.

O sistema (2.5) pode ser escrito na forma vetorial

$$M\dot{Q} = J(-\nu MQ + \nabla U(Q)). \quad (2.13)$$

Para deixar a notação menos carregada usa-se $(x_0, x_1, \dots, x_N, y_0, y_1, \dots, y_N)$ como coordenadas do ponto Q .

Para determinar a estabilidade de um equilíbrio relativo \tilde{Q} de (2.13), nós olhamos para soluções que começam próximas do equilíbrio e analisamos o que ocorre com elas. Fazemos a transformação $Q = \tilde{Q} + Z$. Substituindo, no sistema (2.13), acima, obtemos

$$M\dot{Z} = \mathbf{J}\nabla V(Q), \quad Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_N, \hat{Z}_0, \dots, \hat{Z}_N), \quad (2.14)$$

onde

$$V(Z) = -\frac{\nu}{2}(\tilde{Q} + Z)^T M(\tilde{Q} + Z) + U(\tilde{Q} + Z), \quad (2.15)$$

e o problema passa a ser estudar as soluções de (2.13) que começam próximas de $Z = 0$. Como \tilde{Q} é ponto de equilíbrio de (2.13), $\nabla V(0) = -\nu M\tilde{Q} + \nabla U(\tilde{Q}) = 0$. Como $D^2V(\tilde{Q}) = -\nu M + D^2U(\tilde{Q})$, então a forma linearizada de (2.14) é

$$M\dot{Z} = \mathbf{J}(-\nu M + D^2U(\tilde{Q}))Z. \quad (2.16)$$

λ é um autovalor do sistema linearizado se e somente se existem soluções não triviais da forma $Z = e^{\lambda t}\xi$ se, e somente se, a matriz

$$\left(M^{-1}\mathbf{J}(-\nu M + D^2U(\tilde{Q})) - \lambda Id \right) = \mathbf{J}(\lambda\mathbf{J} - \nu\mathbf{I} + M^{-1}D^2U(\tilde{Q})) \quad (2.17)$$

é singular, isto é, se, e somente se,

$$\det(\lambda\mathbf{J} - \nu\mathbf{I} + M^{-1}D^2U(\tilde{Q})) = 0. \quad (2.18)$$

Definição 2.2.6. Um ponto de equilíbrio \tilde{Q} de (2.13) é espectralmente estável, se todas as raízes de (2.18) são imaginárias puros, isto é, $\lambda = \pm bi$, com $b \in \mathbb{R}^*$.

Um fato que levou à definição de estabilidade espectral é que a forma linearizada do sistema hamiltoniano (2.14) possui, pela preposição (1.3.1), um polinômio característico par e com isto \tilde{Q} ser espectralmente estável é condição necessária para ser estável segundo Liapunov.

Na próxima seção, apresentaremos uma configuração de equilíbrio relativo e mostraremos que esta configuração é, de fato, um ponto de equilíbrio relativo para (2.13).

2.3 Equilíbrio do anel de vórtices com um vórtice na origem

Estudaremos o caso de N vórtices, posicionados nos vertices de um polígono regular de N lados, e um vórtice na origem, sendo κ_0 , a intensidade do j -ésimo vórtice, para $j = 0, \dots, N-1$. A intensidade do vórtice na origem será denotada por κ_N . Não há perda em generalidade em supor que o anel está inscrito em um círculo de raio 1.

Proposição 2.3.1. *Seja $\tilde{Q} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_N, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_N)$, com configuração definida por*

$$\tilde{x} = \begin{cases} \operatorname{Re}(w^j), \text{ para } j = 0, \dots, N-1 \\ 0, \text{ para } j = N \end{cases}$$

e

$$\tilde{y} = \begin{cases} \operatorname{Im}(w^j), \text{ para } j = 0, \dots, N-1 \\ 0, \text{ para } j = N. \end{cases}$$

Usando a indentificação canônica entre \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} , pode-se escrever $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) = w^j$, $j = 0, \dots, N-1$ e $(0, 0) = 0$. Se $\kappa_j = \kappa_0$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, e se \tilde{Q} for um ponto de equilíbrio relativo então a velocidade de rotação é $\nu = -\frac{(N-1)\kappa_0}{2} - \kappa_N$.

Demonstração. Se \tilde{Q} for uma configuração de equilíbrio relativo, então, sabemos que

$$\nu = -\frac{\sum_{i < j}^N \kappa_i \kappa_j}{\sum_{i=0}^{N-1} \kappa_i}$$

e temos que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \kappa_i = N\kappa_0,$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^N \kappa_i \kappa_j &= \sum_{0 \leq i < j < N} \kappa_i \kappa_j + \sum_{i=0}^{N-1} \kappa_i \kappa_N \\ &= \frac{\kappa_0^2 (N-1)N}{2} + \kappa_0 \kappa_N N. \end{aligned}$$

Assim,

$$\nu = -\frac{(N-1)\kappa_0}{2} - \kappa_N.$$

□

Agora, a matriz M , de ordem $(N+1) \times (N+1)$, tem a forma

$$M = \begin{pmatrix} \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \kappa_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \kappa_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \kappa_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_N \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Teorema 2.3.2. *Sejam \tilde{Q} e ν , como definidos na proposição (2.3.1), e*

$$U(Q) = -\kappa_0^2 \sum_{0 \leq i < j < N} \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}} - \kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \log((x_j(t) - x_N(t))^2 + (y_j(t) - y_N(t))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja M dado por (2.19). Então

$$\nabla U(\tilde{Q}) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_0}(\tilde{Q}), \frac{\partial U}{\partial x_1}(\tilde{Q}), \dots, \frac{\partial U}{\partial x_N}(\tilde{Q}), \frac{\partial U}{\partial y_0}(\tilde{Q}), \dots, \frac{\partial U}{\partial y_N}(\tilde{Q}) \right),$$

onde

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} -\operatorname{Re}(w^i) \left(\frac{N-1}{2} \kappa_0^2 + \kappa_0 \kappa_N \right), & \text{para } i = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } i = N, \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} -\operatorname{Im}(w^i) \left(\frac{N-1}{2} \kappa_0^2 + \kappa_0 \kappa_N \right), & \text{para } i = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } i = N \end{cases}$$

e \tilde{Q} é ponto de equilíbrio de (2.13).

Demonstração. Sabemos que $(\tilde{x}_j(t), \tilde{y}_j(t)) = w^j$, onde $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, para algum $j = 0, \dots, N-1$. Temos, no caso $i < N$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) &= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \kappa_i \kappa_j \frac{(\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t))}{(\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t))^2 + (\tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_j(t))^2} \\
&= -\kappa_0^2 \sum_{\substack{0 \leq j < N \\ j \neq i}}^N \frac{(\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t))}{(x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2} - \\
&\quad \kappa_0 \kappa_N \frac{(\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_N(t))}{(x_i(t) - x_N(t))^2 + (y_i(t) - y_N(t))^2} \\
&= -\kappa_0^2 \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{0 \leq j < N \\ j \neq i}} \frac{(w^i - w^j)}{|w^i - w^j|^2} \right) - \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re} \left(\frac{w^i}{|w^i|^2} \right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = -\kappa_0^2 \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{0 \leq j < N \\ j \neq i}} w^i \frac{(1 - w^{j-i})}{|1 - w^{j-i}|^2} \right) - \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re}(w^i).$$

Fazendo a mudança $k = j - i$, isto é, $i = j - k$ (excluindo o caso onde $k = 0$, pois $i = j$) obtemos

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = -\kappa_0^2 \operatorname{Re} \left(w^i \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(1 - w^k)}{|1 - w^k|^2} \right) - \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re}(w^i). \quad (2.20)$$

Para calcular $\left(\sum_{k=1}^N \frac{(1 - w^k)}{|1 - w^k|^2} \right)$, vamos considerar separadamente o caso em que N é par e o caso em que N é ímpar.

Se N é par, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(1 - w^k)}{|1 - w^k|^2} &= \frac{1 - w^{\frac{N}{2}}}{|1 - w^{\frac{N}{2}}|^2} + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{(1 - w^k)}{|1 - w^k|^2} + \frac{1 - w^{N-k}}{|1 - w^{N-k}|^2} \right) \\
&= \frac{1 - w^{\frac{N}{2}}}{|1 - w^{\frac{N}{2}}|^2} + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{1 - w^k + \overline{(1 - w^k)}}{|1 - w^k|^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - w^{\frac{N}{2}}}{\left(1 - w^{\frac{N}{2}}\right) \overline{\left(1 - w^{\frac{N}{2}}\right)}} + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{1 - w^k + \overline{(1 - w^k)}}{|1 - w^k|^2} \right) \\
&= \frac{1}{\left(1 - w^{\frac{N}{2}}\right)} + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{1 - w^k + \overline{(1 - w^k)}}{|1 - w^k|^2} \right) \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{N} \frac{N}{2}}} + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{1 - w^k + \overline{(1 - w^k)}}{|1 - w^k|^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{2(1 - \operatorname{Re}(w^k))}{|1 - w^k|^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(w^k))}{(1 - \operatorname{Re}(w^k))^2 + (\operatorname{Im}(w^k))^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(w^k))}{1 - 2\operatorname{Re}(w^k) + (\operatorname{Re}w^k)^2 + (\operatorname{Im}w^k)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \frac{2(1 - \operatorname{Re}(w^k))}{2 - 2\operatorname{Re}(w^k)}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(1 - w^k)}{|1 - w^k|^2} = \frac{1}{2} + \frac{N-2}{2} = \frac{N-1}{2}$$

Se N é ímpar, obtemos, analogamente, $\sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1 - w^j)}{|1 - w^j|^2} = \frac{N-1}{2}$. Substituindo estes valores em (2.20), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) &= -\kappa_0^2 \operatorname{Re}(w^i) \frac{N-1}{2} - \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re}(w^i) \\
&= -\operatorname{Re}(w^i) \left(\frac{N-1}{2} \kappa_0^2 + \kappa_0 \kappa_N \right).
\end{aligned}$$

Agora, em relação a y , para $i < N$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) = -\kappa_0 \kappa_N \operatorname{Im}(w^i) - \kappa_0^2 \operatorname{Im} \left(w^i \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(1 - w^k)}{|1 - w^k|^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Im}(w^i) - \kappa_0 \operatorname{Im}(w^i) \frac{N-1}{2} \\
&= \operatorname{Im}(w^i) \left(\frac{N-1}{2} \kappa_0^2 + \kappa_0 \kappa_N \right).
\end{aligned}$$

Para $i = N$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x_N}(\tilde{Q}) &= -\kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_N(t) - \tilde{x}_j(t))}{(\tilde{x}_N(t) - \tilde{x}_j(t))^2 + (\tilde{y}_N(t) - \tilde{y}_j(t))^2} \\
&= -\kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(0 - \tilde{x}_j(t))}{(0 - \tilde{x}_j(t))^2 + (0 - \tilde{y}_j(t))^2} \\
&= -\kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(0 - \tilde{x}_j(t))}{(0 - \tilde{x}_j(t))^2 + (0 - \tilde{y}_j(t))^2} \\
&= -\kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(0 - \tilde{x}_j(t))}{(0 - \tilde{x}_j(t))^2 + (0 - \tilde{y}_j(t))^2} \\
&= \kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{x}_j(t)}{(\tilde{x}_j(t))^2 + \tilde{y}_j(t)^2} \\
&= \kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{x}_j(t) \\
&= \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{N-1} w^j \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y_N}(\tilde{Q}) &= -\kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{y}_N(t) - \tilde{y}_j(t))}{(\tilde{x}_N(t) - \tilde{x}_j(t))^2 + (\tilde{y}_N(t) - \tilde{y}_j(t))^2} \\
&= -\kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(0 - \tilde{y}_j(t))}{(0 - \tilde{x}_j(t))^2 + (0 - \tilde{y}_j(t))^2} \\
&= \kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{y}_j(t)}{(\tilde{x}_j(t))^2 + \tilde{y}_j(t)^2} \\
&= \kappa_0 \kappa_N \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{y}_j(t) \\
&= \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{N-1} w^j \right)
\end{aligned}$$

Como $\sum_{j=0}^{N-1} w^j = 0$, temos que

$$\frac{\partial U}{\partial y_N}(\tilde{Q}) = \kappa_0 \kappa_N \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^{N-1} w^j\right) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} -\operatorname{Re}(w^i) \left(\frac{N-1}{2} \kappa_0^2 + \kappa_0 \kappa_N\right), & \text{para } i = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } i = N, \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q}) = \begin{cases} -\operatorname{Im}(w^i) \left(\frac{N-1}{2} \kappa_0^2 + \kappa_0 \kappa_N\right), & \text{para } i = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } i = N. \end{cases}$$

Substituindo estes valores de $\frac{\partial U}{\partial x_i}(\tilde{Q})$ e $\frac{\partial U}{\partial y_i}(\tilde{Q})$, para $i = 0, \dots, N$, no segundo membro da equação diferencial $M\dot{Q} = J(-\nu MQ + \nabla U(Q))$, verificamos que \tilde{Q} é, de fato, ponto de equilíbrio. Observe que para o caso em que o vórtice central não está presente, temos também ponto de equilíbrio. \square

Observação 2.3.3. A matriz hessiana de U possui dois autovalores iguais a zero, devido a invariância por rotação e translações. Seja $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_1, h_2) \in R^{2N+2}$. Então, $U(q + t\mathbf{h}) \equiv U(q)$ para todo $q \in R^{2N+2}$. Derivando esta identidade em relação a q , obtemos a identidade $\nabla U(q) \equiv \nabla U(q + t\mathbf{h})$ e, agora, derivando esta em relação a t e fazendo $t = 0$, obtemos $D^2U(q) \cdot \mathbf{h} = 0$, o que mostra que zero é um autovalor de $D^2U(q)$, com autovetor \mathbf{h} . Analogamente, derivando a identidade $U(e^{Jt}Q) \equiv U(Q)$ em relação a q , obtemos $\nabla U(q) \equiv \nabla U(e^{Jt}q)$ e, agora, derivando esta em relação a t , obtemos $D^2U(q) \cdot Jq = 0$; portanto, zero é autovalor de $D^2U(q)$, com autovetor Jq .

Observação 2.3.4. A estabilidade espectral de \tilde{Q} quando as vorticidades são $\kappa_j = \kappa_0 \neq 0$, para $j = 0, \dots, N-1$, e κ_N para o vórtice central é equivalente a estabilidade espectral de \tilde{Q} , quando as vorticidades são $\bar{\kappa}_j = \kappa_0 = 1$, $j = 0, \dots, N-1$, e $\bar{\kappa}_N = \frac{\kappa_N}{\kappa_0}$ para o vórtice central. Assim, pode-se, sem perda de generalidade, considerar $\bar{\kappa}_j = \kappa_0 = 1$, $j = 0, \dots, N-1$, e deixar apenas $\bar{\kappa}_N = \kappa$ como parâmetro.

A função potencial a ser considerada fica, portanto,

$$U(Q) = - \sum_{0 \leq i < j < N} \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}}$$

e a velocidade angular fica

$$\nu = -\frac{N-1}{2} - \kappa$$

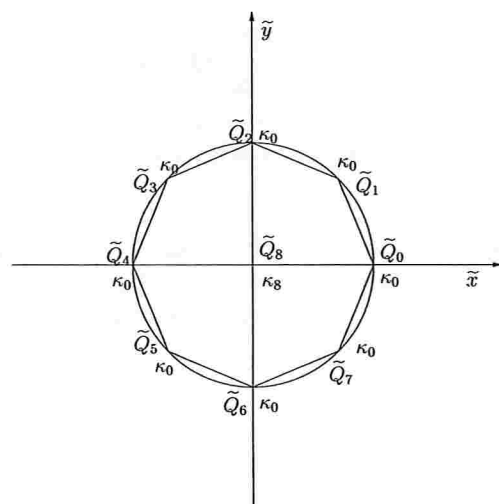


Figura 2.1: Posição do Equilíbrio Relativo do Anel de Vórtices, com um Vórtice Central na Origem, para $N=8$.

Capítulo 3

Estabilidade espectral de um anel de vórtices

3.1 Introdução

Neste capítulo, mostraremos que um anel de vórtices posicionados nos vértices de um polígono regular de N lados, com $N > 2$, inscrito na circunferência de raio 1, com intensidade $\kappa_j = 1$, com $j = 0, \dots, N - 1$ girando com velocidade $\nu = -\frac{N-1}{2}$ para certos valores de N é um ponto de equilíbrio espectralmente estável da equação não linear $M\dot{Z} = J\nabla V(Z)$, com $Z = -\tilde{Q} + Q$ onde $\tilde{Q} \in R^{2N}$ representa a posição do anel de vórtices no referencial em rotação. Para isso, mostraremos que todas as raízes do polinómio $\det(\lambda J - \nu I + D^2U(\tilde{Q})) = 0$, os autovalores da equação linearizada, são puramente imaginárias, com exceção de duas raízes nulas que aparece devido à invariância de U por rotação e translação. Neste processo, utilizaremos fortemente propriedades de determinantes.

No caso em que o vórtice central está presente e posicionado em $\tilde{Q}_N = (0, 0)$, tratado no próximo capítulo, o problema é considerado em R^{2N+2} . Neste capítulo, consideraremos o caso em que o vórtice central não está presente, donde podemos ignorar as coordenadas correspondentes a \tilde{Q}_N no ponto de equilíbrio e considerar o problema em R^{2N} . No caso em que o vórtice central está presente, a função hamiltoniana é dada por $U(Q) = -\sum_{0 \leq i < j < N} \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \log((x_j(t) - x_N(t))^2 + (y_j(t) - y_N(t))^2)^{\frac{1}{2}}$. Quando o vórtice central não está presente, podemos considerar $\kappa = 0$ e trabalhar apenas com a função Hamiltoniana.

$$U_1(Q) = -\sum_{0 \leq i < j < N} \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}},$$

e com a configuração de equilíbrio $\tilde{Q} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$, onde

$$\begin{cases} \tilde{x}_j = \operatorname{Re}(w^j), & \text{para } j = 0, \dots, N-1 \\ \tilde{y}_j = \operatorname{Im}(w^j), & \text{para } j = 0, \dots, N-1. \end{cases}$$

e

$$\nu = -\frac{N-1}{2}$$

3.2 Obtenção da matriz hessiana

Para facilitar a obtenção dos autovalores, utilizaremos uma transformação que deixa a hessiana de U_1 em uma forma conveniente. Em notação real, a transformação é $Z = Q - \tilde{Q} = By$, com

$$B = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \frac{W+\bar{W}}{2} & \frac{i(W-\bar{W})}{2} \\ -\frac{i(W-\bar{W})}{2} & \frac{W+\bar{W}}{2} \end{pmatrix},$$

onde

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

No apêndice, mostramos que B é ortogonal. Assim, utilizando a transformação $Q = \tilde{Q} + By$ na equação diferencial (2.13) e o fato que $B^t \mathbf{J} B = \mathbf{J}$ e M é a matriz identidade, tem-se que

$$B\dot{y} = \mathbf{J}(-\nu \mathbf{I} + D^2 U_1(\tilde{Q}))By$$

e

$$\begin{aligned} \dot{y} &= B^t \mathbf{J}(-\nu \mathbf{I} + D^2 U_1(\tilde{Q}))By \\ &= (-\nu B^t \mathbf{J} B + B^t \mathbf{J} D^2 U_1(\tilde{Q})B)y \\ &= (-\nu \mathbf{J} + B^t \mathbf{J} D^2 U_1(\tilde{Q})B)y \\ &= (-\nu \mathbf{J} + B^t (B \mathbf{J} B^t) D^2 U_1(\tilde{Q})B)y \\ &= (-\nu \mathbf{J} + \mathbf{J} B^t D^2 U_1(\tilde{Q})B)y \end{aligned}$$

Portanto, a equação diferencial (2.13) se torna

$$\dot{y} = \left(-\nu \mathbf{J} + \mathbf{J} B^t D^2 U_1(\tilde{Q})B \right) y.$$

Observação 3.2.1. Note que $B^t D^2 U_1(\tilde{Q})B = D^2 \tilde{U}_1(0)$, onde $\tilde{U}_1(y) = U_1(\tilde{Q} + By)$.

Agora, vamos obter as segundas derivadas parciais de U_1 , para escrever a sua Hessiana.

3.2.1 Obtenção das derivadas parciais de segunda ordem de U_1 em \tilde{Q}

As derivadas de primeira ordem de U_1 são

$$\frac{\partial U_1}{\partial y_l}(Q) = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(y_l(t) - y_j(t))}{(x_l(t) - x_j(t))^2 + (y_l(t) - y_j(t))^2}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_l}(Q) = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{x_l(t) - x_j(t)}{(x_l(t) - x_j(t))^2 + (y_l(t) - y_j(t))^2}$$

Para calcular as derivadas de segunda ordem precisamos considerar diversos casos. Primeira caso, $k \neq l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1(Q)}{\partial y_k \partial y_l} &= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{(y_l(t) - y_j(t))}{(x_l(t) - x_j(t))^2 + (y_l(t) - y_j(t))^2} \right) \\ &= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{\frac{\partial}{\partial y_k} (y_l - y_j) ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j))^2} - \\ &\quad \frac{(y_l - y_j) \frac{\partial}{\partial y_k} ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j))^2} \\ &= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(-\delta_{kj}) ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2) - 2(y_l - y_j)^2 (-\delta_{kj})}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\ &= - \frac{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2 - 2(y_l - y_k)^2}{((x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2)^2} \\ &= \frac{(x_l - x_k)^2 - (y_l - y_k)^2}{((x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2)^2} \\ \frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial y_k \partial y_l} &= \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} \end{aligned}$$

Segundo caso, $k \neq l$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_1(Q)}{\partial y_k \partial x_l} &= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{(x_l(t) - x_j(t))}{(x_l(t) - x_j(t))^2 + (y_l(t) - y_j(t))^2} \right) \\
&= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{\frac{\partial}{\partial y_k} (x_l - x_j) ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(x_l - x_j) \frac{\partial}{\partial y_k} ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{-2(x_l - x_j)(y_l - y_j)(-\delta_{jk})}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{2(x_l - x_j)(y_l - y_j)(\delta_{jk})}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= \frac{-2(x_l - x_k)(y_l - y_k)}{((x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial y_k \partial x_l} &= \frac{-2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2}
\end{aligned}$$

Terceiro caso, $k \neq l$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_1(Q)}{\partial x_k \partial x_l} &= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{(x_l(t) - x_j(t))}{(x_l(t) - x_j(t))^2 + (y_l(t) - y_j(t))^2} \right) \\
&= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(-\delta_{kj}) ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2) - 2(x_l - x_j)^2 (-\delta_{kj})}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(\delta_{kj}) ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2) - 2(x_l - x_j)^2 (\delta_{kj})}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= \frac{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2 - 2(x_l - x_k)^2}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= \frac{(y_l - y_k)^2 - (x_l - x_k)^2}{((x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial x_k \partial x_l} &= \frac{(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2 - (\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2}
\end{aligned}$$

Quarto caso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_1(Q)}{\partial y_l^2} &= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{(y_l(t) - y_j(t))}{((x_l(t) - x_j(t))^2 + (y_l(t) - y_j(t))^2)} \right) \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} - \frac{\frac{\partial}{\partial y_l} (y_l - y_j) ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} + \\
&\quad \frac{(y_l - y_j) \frac{\partial}{\partial y_l} ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2) - 2(y_l - y_j)^2}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(x_l - x_j)^2 - (y_l - y_j)^2}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial y_l^2} &= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2)^2}
\end{aligned}$$

Quinto caso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_1(Q)}{\partial y_l \partial x_l} &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{(x_l(t) - x_j(t))}{((x_l(t) - x_j(t))^2 + (y_l(t) - y_j(t))^2)} \right) \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} - \frac{\frac{\partial}{\partial y_l} (x_l - x_j) ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} + \\
&\quad \frac{(x_l - x_j) \frac{\partial}{\partial y_l} ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{-2(x_l - x_j)(y_l - y_j)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{2(x_l - x_j)(y_l - y_j)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial y_l \partial x_l} &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2)^2}
\end{aligned}$$

Sexto caso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_1(Q)}{\partial x_l^2} &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} -\frac{\frac{\partial}{\partial x_l}(x_l - x_j) ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} + \\
&\quad \frac{(x_l - x_j) \frac{\partial}{\partial x_l} ((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= -\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2 - 2(x_l - x_j)^2}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(x_l - x_j)^2 - (y_l - y_j)^2}{((x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial x_l^2} &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2)^2}
\end{aligned}$$

Seja

$$H_1 = D^2 U_1(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} A & C \\ D & E \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

onde A, C, D e E são matrizes $N \times N$. Como a hessiana é simétrica, ou seja, $H_1^t = H_1$, então $A^t = A$, $E = E^t$ e $C = D^t$, onde $A = (a_{ij})$, com $0 \leq i \leq N-1$, $0 \leq j \leq N-1$ e com $a_{ij} = \frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial x_i \partial x_j}$ e $C = (c_{ij})$, com $0 \leq i \leq N-1$, $0 \leq j \leq N-1$ e com $c_{ij} = \frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial x_i \partial y_j}$. Por inspeção nas derivadas de segunda ordem, vemos que $E = -A$ e $C^t = C$. Logo, a hessiana fica:

$$H_1 = \begin{pmatrix} A & C \\ C & -A \end{pmatrix}.$$

Tomando $G = B^t H_1 B$, temos que

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{W^t + \bar{W}^t}{2} & \frac{-i(W^t - \bar{W}^t)}{2} \\ \frac{i(W^t - \bar{W}^t)}{2} & \frac{W^t + \bar{W}^t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{W + \bar{W}}{2} & \frac{i(W - \bar{W})}{2} \\ \frac{-i(W - \bar{W})}{2} & \frac{W + \bar{W}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{W^t + \bar{W}^t}{2} & \frac{-i(W^t - \bar{W}^t)}{2} \\ \frac{i(W^t - \bar{W}^t)}{2} & \frac{W^t + \bar{W}^t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{AW + A\bar{W} - iCW + iC\bar{W}}{2} & \frac{iAW - iA\bar{W} + CW + C\bar{W}}{2} \\ \frac{CW + C\bar{W} + iAW - iA\bar{W}}{2} & \frac{iCW - iC\bar{W} - AW - A\bar{W}}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Analisamos inicialmente o primeiro bloco da diagonal principal.

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{1}{4N} \left((W^t + \bar{W}^t)(AW + A\bar{W} - iCW + iC\bar{W}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4N} \left((-iW^t + i\bar{W}^t)(CW + C\bar{W} + iAW - iA\bar{W}) \right) \\
&= \frac{1}{4N} (W^t AW + W^t A\bar{W} - i\bar{W}^t CW + iW^t C\bar{W} + \bar{W}^t AW \\
&\quad + \bar{W}^t A\bar{W} - i\bar{W}^t CW + i\bar{W}^t C\bar{W} - iW^t CW - i\bar{W}^t C\bar{W} \\
&\quad + W^t AW - W^t AW + i\bar{W}^t CW + i\bar{W}^t C\bar{W} - \bar{W}^t AW + \bar{W}^t A\bar{W}) \\
&= \frac{1}{4N} (WAW + WA\bar{W} - iWCW + iWC\bar{W} + \bar{W}AW \\
&\quad + \bar{W}A\bar{W} - i\bar{W}CW + i\bar{W}C\bar{W} - iWCW - iWC\bar{W} \\
&\quad + WAW - WAW + i\bar{W}CW + i\bar{W}C\bar{W} - \bar{W}AW + \bar{W}A\bar{W}) \\
&= \frac{1}{4N} (2WAW + 2\bar{W}A\bar{W} - 2iWCW + 2i\bar{W}C\bar{W}) \\
&= \frac{1}{2N} (WAW + \bar{W}A\bar{W} - iWCW + i\bar{W}C\bar{W}) \\
&= \frac{1}{2N} (WAW + \bar{W}A\bar{W} - i(WCW - \bar{W}C\bar{W})) \\
&= \frac{1}{2N} (2\text{Re}(WAW) + 2\text{Im}(WCW)) \\
&= \frac{1}{N} (\text{Re}(WAW) + \text{Im}(WCW)).
\end{aligned}$$

Analisamos, agora, o primeiro bloco da diagonal secundária.

$$\begin{aligned}
G_{12} &= \frac{1}{4N} (W + \bar{W})(iAW - iA\bar{W} + CW + C\bar{W}) \\
&\quad + \frac{1}{4N} (-iW^t + i\bar{W}^t)(iCW - iC\bar{W} - AW - A\bar{W}) \\
&= \frac{1}{4N} (iWAW - iWA\bar{W} + WCW + WC\bar{W} + i\bar{W}AW \\
&\quad - \bar{W}A\bar{W} + \bar{W}CW + \bar{W}C\bar{W} + WCW - WC\bar{W} \\
&\quad + i\bar{W}AW + i\bar{W}A\bar{W} - \bar{W}CW + \bar{W}C\bar{W} - i\bar{W}AW - i\bar{W}A\bar{W}) \\
&= \frac{1}{4N} (iWAW - iWA\bar{W} + i\bar{W}AW - i\bar{W}A\bar{W} + iWAW \\
&\quad + iWA\bar{W} - i\bar{W}AW - i\bar{W}A\bar{W} + WCW + WC\bar{W} \\
&\quad + \bar{W}CW + \bar{W}C\bar{W} + WCW - WC\bar{W} - \bar{W}CW + \bar{W}C\bar{W}) \\
&= \frac{1}{4N} (2iWAW - 2i\bar{W}A\bar{W} + 2\bar{W}C\bar{W} + 2WCW)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2N}(iWAW - i\bar{W}A\bar{W} + \bar{W}C\bar{W} + WCW) \\
&= \frac{1}{2N}(i(WAW - \bar{W}A\bar{W}) + (\bar{W}C\bar{W} + WCW)) \\
&= \frac{1}{2N}(2i^2\text{Im}(WAW) + 2\text{Re}(WCW)) \\
&= \frac{1}{2N}(-2\text{Im}(WAW) + 2\text{Re}(WCW)) \\
&= \frac{1}{N}(\text{Re}(WCW) - \text{Im}(WAW)).
\end{aligned}$$

Como H_1 é simétrica temos que G também é simétrica. Portanto $G_{21} = G_{12}$. Finalmente, o segundo bloco da diagonal principal é:

$$\begin{aligned}
G_{22} &= \frac{1}{4N}(iW - i\bar{W})(iAW - iA\bar{W} + CW + C\bar{W}) \\
&\quad + \frac{1}{4N}(W + \bar{W})(iCW - iC\bar{W} - AW - A\bar{W}) \\
&= \frac{1}{4N}(-WAW + WA\bar{W} + iWCW + iWC\bar{W} + \bar{W}AW \\
&\quad - \bar{W}A\bar{W} - i\bar{W}CW - i\bar{W}C\bar{W} + iWCW - iWC\bar{W} \\
&\quad - WAW - WA\bar{W} + i\bar{W}CW - i\bar{W}C\bar{W} - \bar{W}AW - \bar{W}A\bar{W}) \\
&= \frac{1}{4N}(-WAW + WA\bar{W} + \bar{W}AW - \bar{W}A\bar{W} - WAW \\
&\quad - WA\bar{W} - \bar{W}AW - \bar{W}A\bar{W} + iWCW + iWC\bar{W} \\
&\quad - i\bar{W}CW - i\bar{W}C\bar{W} + iWCW - iWC\bar{W} + i\bar{W}CW - i\bar{W}C\bar{W}) \\
&= \frac{1}{4N}(-2WAW - 2\bar{W}A\bar{W} - 2i\bar{W}C\bar{W} + 2iWCW) \\
&= \frac{1}{2N}(-WAW - \bar{W}A\bar{W} - i\bar{W}C\bar{W} + iWCW) \\
&= \frac{1}{2N}(-2\text{Re}(WAW) + i(2i\text{Im}(WCW))) \\
&= \frac{1}{N}(-\text{Re}(WAW) - \text{Im}(WCW))
\end{aligned}$$

Observe que $G_{22} = -G_{11}$.

Agora, obteremos os elementos da multiplicação das matrizes WAW .

$$\begin{aligned}
(WAW)_{rs} &= \sum_{j=0}^{N-1} w_{rl}(AW)_{ls} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} w_{rl}A_{lk}w_{ks}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} A_{ll} w_{ls} + \sum_{\substack{k,l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} A_{lk} w_{ks} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial x_l^2} w_{ls} + \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial x_l \partial x_k} w_{ks}
\end{aligned}$$

$$\text{Substituindo } \frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial x_l^2} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2)^2} e \frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l} = \frac{(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2 - (\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
(WAW)_{rs} &= \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} w_{rl} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2)^2} w_{ls} - \\
&\quad \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} w_{rl} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} w_{ks} \\
&= \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} w_{rl} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} w_{ls} - \\
&\quad \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} w_{rl} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} w_{ks} \\
&= \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} w_{rl} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} w_{ls} - \\
&\quad \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} w_{rl} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} w_{ks} \\
&= \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} (w^{l(r+s)} - w^{r+l+ks}) \\
&= \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{x}_{l(r+s)} + i\tilde{y}_{l(r+s)}) \\
&\quad - \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{x}_{lr+ks} + i\tilde{y}_{lr+ks})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{x}_{l(r+s)} - \tilde{x}_{lr+ks}) + \\
&\quad i \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{y}_{l(r+s)} - \tilde{y}_{lr+ks}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{Re}((WAW)_{rs}) = \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} (\tilde{x}_{l(r+s)} - \tilde{x}_{rl+ks}) \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2}$$

e

$$\operatorname{Im}((WAW)_{rs}) = \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} (\tilde{y}_{l(r+s)} - \tilde{y}_{rl+ks}) \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2}.$$

Agora, obteremos os elementos da multiplicação das matrizes WCW .

$$\begin{aligned}
(WCW)_{rs} &= \sum_{j=0}^{N-1} w_{rl}(CW)_{ls} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} w_{rl} C_{lk} w_{ks} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} C_{ll} w_{ls} + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\substack{k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} C_{lk} w_{ks} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U(\tilde{Q})}{\partial y_l \partial x_l} w_{ls} + \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U(\tilde{Q})}{\partial y_k \partial x_l} w_{ks}
\end{aligned}$$

$$\text{Substituindo } \frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial y_l \partial x_l} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)^2)^2} e \frac{\partial^2 U_1(\tilde{Q})}{\partial y_k \partial x_l} = \frac{-2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
(WCW)_{rs} &= 2 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} w_{rl} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_j)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_j)^2)^2} w_{ls} - \\
&\quad 2 \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} w_{rl} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} w_{ks}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} (w^{l(r+s)} - w^{r+l+ks}) \\
&= 2 \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{x}_{l(r+s)} + i\tilde{y}_{l(r+s)}) \\
&\quad - 2 \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{x}_{lr+ks} + i\tilde{y}_{lr+ks}) \\
&= 2 \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{x}_{l(r+s)} - \tilde{x}_{lr+ks}) + \\
&\quad i \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{y}_{l(r+s)} - \tilde{y}_{lr+ks}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{Re}((WCW)_{rs}) = 2 \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} (x_{l(r+s)} - x_{rl+ks}) \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2}$$

e

$$\operatorname{Im}((WCW)_{rs}) = 2 \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} (\tilde{y}_{l(r+s)} - \tilde{y}_{rl+ks}) \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2}.$$

Como $G_{11} = -G_{22}$, basta calcular os elementos da matriz $P = G_{11} = \frac{1}{N}(\operatorname{Re}(WAW) + \operatorname{Im}(WCW))$. Sabemos que

$$\begin{aligned}
P_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} (\tilde{x}_{l(r+s)} - \tilde{x}_{rl+ks}) \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} + \\
&\quad \frac{2}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} (\tilde{y}_{l(r+s)} - \tilde{y}_{rl+ks}) \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2}
\end{aligned}$$

Podemos considerar $(\tilde{x}_{l(r+s)} - \tilde{x}_{rl+ks}) = \operatorname{Re}(w^{l(r+s)} - w^{r+l+ks})$ e $(\tilde{y}_{l(r+s)} - \tilde{y}_{rl+ks}) = \operatorname{Im}(w^{l(r+s)} - w^{r+l+ks})$. Dai,

$$\frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l + \tilde{y}_k)^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} + \frac{1}{(w^l + w^k)^2} \right)$$

e

$$\frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} = \frac{-i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} - \frac{1}{(\overline{w^l - w^k})^2} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} P_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}) + (\overline{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}})}{2} \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} + \frac{1}{(\overline{w^l - w^k})^2} \right) + \\ &\quad \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} -i \left(\frac{(w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}) - (\overline{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}})}{2} \right) \\ &\quad \frac{-i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} - \frac{1}{(\overline{w^l - w^k})^2} \right) \\ &= \frac{1}{4N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left(w^{l(r+s)} - w^{rl+ks} + \overline{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}} \right) \\ &\quad \left(\frac{1}{(\overline{w^l - w^k})^2} + \frac{1}{(w^l - w^k)^2} \right) - \\ &\quad \frac{1}{4N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left(w^{l(r+s)} - w^{rl+ks} - \overline{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}} \right) \\ &\quad \left(\frac{1}{(\overline{w^l - w^k})^2} - \frac{1}{(w^l - w^k)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks} + \overline{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}}}{(\overline{w^l - w^k})^2} + \\ &\quad \frac{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks} + \overline{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}}}{(w^l - w^k)^2} + \\ &\quad \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{-w^{l(r+s)} + w^{rl+ks} + \overline{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}}}{(\overline{w^l - w^k})^2} + \\ &\quad \frac{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks} - \overline{w^{l(r+s)} - w^{rl+ks}}}{(w^l - w^k)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4N} \left(\sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{2w^{l(r+s)} - 2w^{r+l+ks}}{(w^l - w^k)^2} + \frac{2\overline{w^{l(r+s)}} - 2\overline{w^{r+l+ks}}}{(\overline{w^l} - \overline{w^k})^2} \right) \\
&= \frac{1}{2N} \left(\sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{l(r+s)} - w^{r+l+ks}}{(w^l - w^k)^2} + \frac{\overline{w^{l(r+s)}} - \overline{w^{r+l+ks}}}{(\overline{w^l} - \overline{w^k})^2} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{w^{l(r+s)} - w^{r+l+ks}}{(w^l - w^k)^2} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{l(r+s)} - w^{r+l+ks}}{(w^l - w^k)^2} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{-1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{r+l+ks} - w^{l(r+s)}}{(w^l - w^k)^2} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{-1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{rl}(w^{ks} - w^{ls})}{w^{2l}(w^l - w^k)^2} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{-1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{rl-2l}(w^{ks} - w^{ls})}{(1 - w^{k-l})^2} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{-1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{rl-2l+ls}(w^{ks-ls} - 1)}{(1 - w^{k-l})^2} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{l(r-2+s)}(1 - w^{s(k-l)})}{(1 - w^{k-l})^2} \right).
\end{aligned}$$

Fazendo $n = k - l$, obtemos

$$P_{rs} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\substack{n=-l \\ n \neq 0}}^{N-1-l} \frac{w^{l(r-2+s)}(1 - w^{ns})}{(1 - w^n)^2} \right)$$

Como $w^n = w^{N+n}$ para todo $0 \leq n < N$, temos que

$$\begin{aligned} P_{rs} &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{w^{l(r-2+s)}(1-w^{ns})}{(1-w^n)^2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(1-w^{ns})}{(1-w^n)^2} \sum_{l=0}^{N-1} w^{l(r+s-2)} \right) \end{aligned}$$

Usando a proposição (1.5.4.3 e 4), temos que $\sum_{l=0}^{N-1} w^{l(r+s-2)} = \begin{cases} N, & \text{para } r+s = 2 \bmod N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

e, portanto, temos que

$$P_{rs} = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(1-w^{ns})}{(1-w^n)^2} \right), & \text{para } r+s = 2 \bmod N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 3.2.2. *Suponha que $w^L = 1$, para algum L natural. Então*

$$\sum_{n=1}^{L-1} \operatorname{Re} \left(\frac{(1-w^{ns})}{(1-w^n)^2} \right) = \sum_{n=1}^{L-1} \operatorname{Re} \left(\frac{(1-w^{ns})(1-w^{nr})}{2(1-w^n)^2} \right),$$

quando $r+s = 2 \bmod L$.

Demonstração. Vamos calcular

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \left(\frac{1-w^{ns}}{(1-w^n)^2} - \frac{(1-w^{ns})(1-w^{nr})}{2(1-w^n)^2} \right) \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1-w^n)^2} \left(1-w^{ns} - \frac{(1-w^{nr})(1-w^{ns})}{2} \right) \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1-w^n)^2} \left(1-w^{ns} - \frac{(1-w^{nr}-w^{ns}+w^{n(r+s)})}{2} \right) \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1-w^n)^2} \left(1-w^{ns} - \frac{1}{2} + \frac{w^{ns}}{2} + \frac{w^{nr}}{2} - \frac{w^{n(r+s)}}{2} \right) \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1-w^n)^2} \left(1-w^{ns} - \frac{1}{2} + \frac{w^{ns}}{2} + \frac{w^{nr}}{2} - \frac{w^{n(Lq+2)}}{2} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1-w^n)^2} \left(1 - w^{ns} - \frac{1}{2} + \frac{w^{ns}}{2} + \frac{w^{nr}}{2} - \frac{(w^{nq})^L w^{2n}}{2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1-w^n)^2} \left(1 - w^{ns} - \frac{1}{2} + \frac{w^{ns}}{2} + \frac{w^{nr}}{2} - \frac{w^{2n}}{2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1-w^n)^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{w^{ns}}{2} + \frac{w^{nr}}{2} - \frac{w^{2n}}{2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1-w^{ns}}{(1-w^n)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{w^{2n}(1-w^{n(r-2)})}{(1-w^n)^2} \right) = \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1-w^{ns}}{(1-w^n)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{w^{2n} w^{-2n} (1-w^{n(Lq-s)})}{(w^{-n}-1)^2} \right) = \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1-w^{ns}}{(1-w^n)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{(1-w^{-sn})}{(w^{-n}-1)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1-w^{ns}}{(1-w^n)^2} - \sum_{n=1}^{L-1} \frac{(1-\bar{w}^{sn})}{(\bar{w}^n-1)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1-w^{ns}}{(1-w^n)^2} - \sum_{n=1}^{L-1} \frac{(1-w^{sn})}{(w^n-1)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(2i \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1-w^{ns}}{(1-w^n)^2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Re} \left(i \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1-w^{ns}}{(1-w^n)^2} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

□

Voltando ao cálculo dos elementos de P , temos que

$$P_{rs} = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(1-w^{ns})(1-w^{nr})}{(1-w^n)^2} \right), & \text{para } r+s = 2 \bmod N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(1-w^{ns})(1-w^{nr})}{(1-w^n)^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } r=0, \text{ ou } s=0 \\ \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(1-w^{ns})(1-w^{nr})}{(1-w^n)(1-w^n)} = \\ \sum_{n=1}^{N-1} (1+w^n+\dots+w^{n(r-1)})(1+w^n+\dots+w^{n(s-1)}), & \text{se} \\ r \neq 0 \text{ e } s \neq 0 (*) \end{cases}$$

Observe que a soma em (*) pode ser escrita como $\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} w^{n(i+j)} = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{n=1}^{N-1} w^{n(i+j)}$.

Mas, sabemos da proposição (1.5.4) que

$$\sum_{n=1}^{N-1} w^{nm} = \begin{cases} N-1, & \text{se } m = 0 \pmod{N} \\ -1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotando por $K(r, s)$ o número de pares (i, j) tais que $i + j = 0 \pmod{N}$, com $0 \leq i < r$ e $0 \leq j < s$, vemos que a soma (*) é igual a

$$\begin{aligned} K(r, s)(N-1) + (rs - K(r, s))(-1) &= K(r, s)(N-1) - (rs - K(r, s)) \\ &= NK(r, s) - rs \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_{rs} &= \begin{cases} \operatorname{Re}(\frac{1}{2}(NK(r, s) - rs)), & \text{para } r + s = 2 \pmod{N}, rs \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(NK(r, s) - rs), & \text{para } r + s = 2 \pmod{N}, rs \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular o valor de $K(r, s)$. Para isto, sabemos que

$$0 < r \leq N-1,$$

$$0 < s \leq N-1,$$

ou seja, $0 < r + s \leq 2N - 2$. Como $r + s = 2 \pmod{N}$, temos que existem apenas dois casos a serem considerados. O primeiro caso é $r = s = 1$ e segundo é $r + s = N + 2$, com $r \neq 0$ e $s \neq 0$.

No caso $r = s = 1$, tem-se imediatamente que $K(r, s) = 1$.

No caso $r + s = N + 2$, tem-se $K(r, s) = 2$, pois

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq r - 1 \\ 0 \leq j \leq s - 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq i + j \leq r + s - 2 = N \Rightarrow \begin{cases} i + j = 0 \Rightarrow i = j = 0 \\ i + j = N \Rightarrow i = r - 1 \text{ e } j = s - 1 \end{cases} .$$

Portanto,

$$P_{rs} = \begin{cases} \frac{N-1}{2}, & \text{para } r = s = 1 \\ \frac{2N-rs}{2}, & \text{para } r + s = N + 2, \text{ com } r \neq 0 \text{ e } s \neq 0 \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Observe que $P_{rs} = P_{sr}$. Com isso, calculamos os dois blocos diagonais de G , G_{11} e $G_{22} = -G_{11}$.

Demonstraremos que $G_{12} = G_{21} = 0$. Seja $\tilde{P} = G_{12} = G_{21} = \frac{1}{N} (\text{Re}(WCW) - \text{Im}(WAW))_{rs}$. Então

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{rs} &= \frac{2}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{x}_{l(r+s)} - \tilde{x}_{rl-ks}) - \\ &\quad \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} (\tilde{y}_{l(r+s)} - \tilde{y}_{rl-ks}) \end{aligned}$$

Podemos considerar $(\tilde{x}_{l(r+s)} - \tilde{x}_{rl+ks}) = \text{Re}(w^{l(r+s)} - w^{rl+ks})$ e $(\tilde{y}_{l(r+s)} - \tilde{y}_{rl+ks}) = \text{Im}(w^{l(r+s)} - w^{rl+ks})$. Dai,

$$\frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} + \frac{1}{(w^l + w^k)^2} \right)$$

e

$$\frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_k)^2)^2} = \frac{-i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} - \frac{1}{(w^l + w^k)^2} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{(w^{l(r+s)} - w^{r l + ks}) + \overline{(w^{l(r+s)} - w^{r l + ks})}}{2} \frac{-i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} - \frac{1}{(\overline{w^l - w^k})^2} \right) - \\
&\quad \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{-i}{2} \left((w^{l(r+s)} - w^{r l + ks}) - \overline{(w^{l(r+s)} - w^{r l + ks})} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} - \frac{1}{(\overline{w^l - w^k})^2} \right) \\
&= \frac{i}{4N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} (-w^{l(r+s)} + w^{r l + ks} - \overline{w^{l(r+s)}} + \overline{w^{r l + ks}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} - \frac{1}{(\overline{w^l - w^k})^2} \right) + \\
&\quad \frac{i}{4N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} (w^{l(r+s)} - w^{r l + ks} - \overline{w^{l(r+s)}} + \overline{w^{r l + ks}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^k)^2} + \frac{1}{(\overline{w^l - w^k})^2} \right) \\
&= \frac{i}{4N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left(\frac{(-w^{l(r+s)} + w^{r l + ks} - \overline{w^{l(r+s)}} + \overline{w^{r l + ks}})}{(w^l - w^k)^2} + \frac{(w^{l(r+s)} - w^{r l + ks} - \overline{w^{l(r+s)}} + \overline{w^{r l + ks}})}{(w^l - w^k)^2} \right) \\
&\quad + \frac{i}{4N} \left(\frac{(w^{l(r+s)} - w^{r l + ks} - \overline{w^{l(r+s)}} + \overline{w^{r l + ks}})}{(w^l - w^k)^2} + \frac{(w^{l(r+s)} - w^{r l + ks} - \overline{w^{l(r+s)}} + \overline{w^{r l + ks}})}{(w^l - w^k)^2} \right) \\
&= \frac{i}{4N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left(\frac{2w^{l(r+s)} - 2w^{r l + ks}}{(w^l - w^k)^2} + \frac{2\overline{w^{l(r+s)}} - 2\overline{w^{r l + ks}}}{(\overline{w^l - w^k})^2} \right) \\
&= \frac{i}{2N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \left(\left(\frac{w^{l(r+s)} - w^{r l + ks}}{(w^l - w^k)^2} \right) - \left(\frac{\overline{w^{l(r+s)}} - \overline{w^{r l + ks}}}{(\overline{w^l - w^k})^2} \right) \right) \\
&= \frac{-1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \operatorname{Im} \left(\frac{w^{l(r+s)} - w^{r l + ks}}{(w^l - w^k)^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{l(r+s)} - w^{r l + ks}}{(w^l - w^k)^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{l r + ks} - w^{l(r+s)}}{(w^l - w^k)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{rl}(w^{ks} - w^{ls})}{w^{2l}(1 - w^{k-l})^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{rl-2l}(w^{ks} - w^{ls})}{(1 - w^{k-l})^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{rl-2l+ls}(w^{ks-ls} - 1)}{(1 - w^{k-l})^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{w^{l(r-2+s)}(1 - w^{s(k-l)})}{(1 - w^{k-l})^2} \right).
\end{aligned}$$

Fazendo $n = k - l$, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{rs} &= \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\substack{n=-l \\ n \neq 0}}^{N-1-l} \frac{w^{l(r-2+s)}(1 - w^{ns})}{(1 - w^n)^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{w^{l(r-2+s)}(1 - w^{ns})}{(1 - w^n)^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(1 - w^{ns})}{(1 - w^n)^2} \sum_{l=0}^{N-1} w^{l(r+s-2)} \right)
\end{aligned}$$

Novamente, usando (1.5.4.3 e 4), temos que $\sum_{l=0}^{N-1} w^{l(r+s-2)} = \begin{cases} N, & \text{para } r + s = 2 \pmod N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Com isto, obtemos

$$\tilde{P}_{rs} = \begin{cases} -\sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Im} \left(\frac{1 - w^{ns}}{(1 - w^n)^2} \right), & \text{se } r + s = 2 \pmod N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 3.2.3. *Suponha que $w^L = 1$, para algum L natural. Então*

$$\sum_{l=1}^{L-1} \operatorname{Im} \left(\frac{(1 - w^{ns})}{(1 - w^n)^2} \right) = \sum_{l=0}^{L-1} \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{2} \frac{(1 - w^{ns})(1 - w^{nr})}{(1 - w^n)^2} \right),$$

quando $r + s = 2 \pmod L$.

Demonstração. Vamos calcular

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \left(\frac{w^{ns} - 1}{(1 - w^n)^2} + \frac{1(1 - w^{ns})(1 - w^{nr})}{2(1 - w^n)^2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1 - w^n)^2} \left(w^{ns} - 1 + \frac{(1 - w^{nr})(1 - w^{ns})}{2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1 - w^n)^2} \left(w^{ns} - 1 + \frac{1 - w^{nr} - w^{ns} + w^{n(r+s)}}{2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1 - w^n)^2} \left(w^{ns} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{w^{ns}}{2} - \frac{w^{nr}}{2} + \frac{w^{n(r+s)}}{2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1 - w^n)^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{w^{ns}}{2} - \frac{w^{nr}}{2} + \frac{w^{n(r+s)}}{2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1 - w^n)^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{w^{ns}}{2} - \frac{w^{nr}}{2} + w^{2n} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1}{(1 - w^n)^2} (1 + w^{ns} + w^{nr} - w^{2n}) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1 - w^{ns}}{(1 - w^n)^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{w^{2n}(-1 + w^{n(r-2)})}{(1 - w^n)^2} \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{w^{2n}(-1 + w^{n(r-2)})}{(1 - w^n)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1 - w^{ns}}{(1 - w^n)^2} \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{w^{2n}(-1 + w^{nLq - ns})}{(1 - w^n)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1 - w^{ns}}{(1 - w^n)^2} \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{w^{2n}(-1 + w^{-ns})}{(1 - w^n)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1 - w^{ns}}{(1 - w^n)^2} \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{w^{2n}w^{-2n}(-1 + w^{-ns})}{(w^{-n} - 1)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1 - w^{ns}}{(1 - w^n)^2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{(w^{-ns} - 1)}{(w^{-n} - 1)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} \frac{1 - w^{ns}}{(1 - w^n)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{(\overline{w^{ns}} - 1)}{(\overline{w^n} - 1)^2} + \sum_{n=1}^{L-1} \frac{w^{ns} - 1}{(w^n - 1)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{(w^{ns} - 1)}{(w^n - 1)^2} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{L-1} \frac{(w^{ns} - 1)}{(w^n - 1)^2} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

□

Voltando ao cálculo dos elementos de \tilde{P} , temos que

$$\tilde{P}_{rs} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Im} \left(\frac{(1 - w^{ns})(1 - w^{nr})}{(1 - w^n)^2} \right), & \text{se } r + s = 2 \pmod{N} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos que

$$\sum_{l=0}^{N-1} \frac{(1 - w^{ls})(1 - w^{lr})}{(1 - w^l)^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } r = 0, \text{ ou } s = 0 \\ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(1 - w^{ls})(1 - w^{lr})}{(1 - w^l)(1 - w^l)} = \\ \sum_{n=1}^{N-1} (1 + w^n + \dots + w^{n(r-1)})(1 + w^n + \dots + w^{n(s-1)}), & \text{se} \\ r \neq 0 \text{ e } s \neq 0 (**) \end{cases}$$

Recordando novamente que, da proposição (1.5.4), temos

$$\sum_{n=1}^{N-1} w^{nm} = \begin{cases} N - 1, & \text{se } m = 0 \pmod{N} \\ -1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e usando a definição de $K(r, s)$, temos que $(**)$ é igual a

$$\begin{aligned}
K(r, s)(N - 1) + (rs - K(r, s))(-1) &= K(r, s)(N - 1) - (rs - K(r, s)) \\
&= NK(r, s) - rs.
\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \tilde{P}_{rs} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\text{Im}(nK(r, s) - rs), & \text{para } r + s = 2 \bmod N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $K(r, s)N - rs$ é real, temos que $\tilde{P}_{rs} = 0$ para todo $0 \leq r, s \leq N - 1$ e assim $G_{12} = G_{21} = 0$.

Voltando ao cálculo de G , obsevamos que ela tem a forma

$$G = B^t H_1 B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix},$$

Observe que os elementos não nulos de R ocorrem nas posições $(1, 1)$ e $(r, N + 2 - r)$, $r = 3, \dots, N - 1$ (pois $s = N + 2 - r < N$). Vamos denotar $c_1 = P_{11}$, $c_r = P_{r, N+2-r}$, $r = 3, \dots, N - 1$. Como P é simétrica, $c_r = c_{N+2-r}$. Por (3.3), $c_r = N - \frac{r}{2}(N + 2 - r) = -\frac{1}{2}(N - r)(r - 2)$, $r = 3, \dots, N - 1$. Observe ainda que a equação acima vale também para $r = 1$ ($c_1 = \frac{N-1}{2}$) e para $r = 2$ ($c_2 = 0$).

Assim, a matriz R é dada por uma das duas formas:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_\gamma & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se N é par e, neste caso, $\gamma = \frac{N}{2} + 1$ e

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_\gamma & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_\gamma & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se N é ímpar e, neste caso, $\gamma = \frac{N+1}{2}$.

Na tabela abaixo, estão os valores de c_r , quando o número de vórtices varia entre 3 e 12. Apenas metade dos valores estão listados, devido à simetria em c_r .

N	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
3	1.0	0.0					
4	1.5	0.0	-0.5				
5	2.0	0.0	-1.0				
6	2.5	0.0	-1.5	-2.0			
7	3.0	0.0	-2.0	-3.0			
8	3.5	0.0	-2.5	-4.0	-4.5		
9	4.0	0.0	-3.0	-5.0	-6.0		
10	4.5	0.0	-3.5	-6.0	-7.5	-8.0	
11	5.0	0.0	-4.0	-7.0	-9.0	-10.0	
12	5.5	0.0	-4.5	-8.0	-10.5	-12.0	-12.5

Vamos agora encontrar os autovalores da equação linearizada, $\dot{y} = (-\nu\mathbf{J} + \mathbf{J}G)y = \mathbf{J}(-\nu\mathbf{I} + G)y$, ou seja, queremos analisar os zeros do determinante de $-\lambda\mathbf{I} + \mathbf{J}(-\nu\mathbf{I} + G) = \mathbf{J}(\lambda\mathbf{J} - \nu\mathbf{I} + G)$. Isto é equivalente a estudar os zeros do determinante de

$$S = \begin{pmatrix} -\nu\mathbf{I} + R & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & -\nu\mathbf{I} - R \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Devido à natureza de R , o determinante de (3.4) pode ser decomposto no produto de determinantes de submatrizes 2×2 e 4×4 . Para isso, usaremos que trocas de linhas e colunas podem alterar apenas o sinal do determinante. Inicialmente moveremos as colunas $1, 2, \dots, j, \dots, N$ da matriz (3.4) para as colunas $1, 3, \dots, 2j-1, \dots, 2N-1$ ($j \leq N$) e as colunas $N+1, \dots, j, \dots, 2N$ para as colunas $2, \dots, 2(j-N), \dots, 2N$ ($j \geq N+1$); ou seja, intercalamos as primeiras N colunas e as últimas N colunas da matriz. Posteriormente, faremos o mesmo com as linhas da matriz, ou seja intercalamos as primeiras N linhas e as últimas N linhas. Se a matriz (3.4) é igual a $(a_{kl})_{1 \leq k, l \leq 2N}$

(1) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\nu\mathbf{I} + R$ são os a_{kk} , para $l = 1, \dots, N$ e os a_{kl} , com $l = N+4-k$, para $k = 4, \dots, N$;

(2) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $\lambda\mathbf{I}$ são os a_{kl} , com $l = k+N$, para $k = 1, \dots, N$;

(3) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\lambda\mathbf{I}$ são os a_{kl} , com $l = k-N$, para $k = N+1, \dots, 2N$;

(4) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\nu\mathbf{I} - R$ são os a_{kk} , para $k = N + 1, N + 2, \dots, 2N$ e os a_{kl} , com $l = 3N + 4 - k$, para $k = N + 4, \dots, 2N$.

Se $B = b_{ij}$ for a matriz obtida depois das trocas de colunas e linhas.

(1) os elementos não nulos correspondente ao bloco $-\nu\mathbf{I} + R$ são $b_{2k-1,2k-1} = a_{kk}$ para $1 \leq k \leq N$ e $b_{2k-1,2N+7-2k} = a_{k,N+4-k}$ para $k = 4, \dots, N$. Observe que $a_{kk} = -\nu$ se $k \neq 2$ e $a_{22} = -\nu + c_1$ e que $a_{k,N+4-k} = c_{k-1}$

(2) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $\lambda\mathbf{I}$ são $b_{2k-1,2k} = a_{k,k+N}$, para $k = 1, \dots, N$. Observe que $a_{k,k+N} = \lambda$

(3) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\lambda\mathbf{I}$ são $b_{2k,2k-1} = a_{k+N,k}$, para $k = 1, \dots, N$. Observe que $a_{k+N,k} = -\lambda$

(4) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\nu\mathbf{I} - R$ são $b_{2k,2k} = a_{k+N,k+N}$, $k = 1, \dots, N$ e $b_{2k,2N-2k+8} = a_{k+N,2N+4-k}$, $k = 4, \dots, N$. Observe que $a_{k+N,k+N} = -\nu$ se $k \neq 2$ e $a_{k+2,k+2} = -\nu - c_1$ e $a_{k+N,2N+4-k} = c_{k-1}$.

Para N ímpar, após estas trocas de linhas e colunas, o determinante da matriz (3.4) fica

$$\det \begin{pmatrix} -\nu\mathbf{I} + R & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & -\nu\mathbf{I} - R \end{pmatrix} = \det F_1 \det F_2, \text{ onde}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu + c_1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\nu - c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & -\nu \end{pmatrix}$$

$$\text{e também } F_i = \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{i+1} & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -c_{i+1} \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & F_{i+1} & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ c_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & -c_{i+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & -\nu \end{pmatrix},$$

para $i = 2, \dots, \frac{N+1}{2}$. Mas, trocando a posição das ultimas duas colunas e as ultimas duas

linhas de F_i obtemos

$$\det F_i = \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_{i+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_{i+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ c_{i+1} & 0 & -\nu & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{i+1} & -\lambda & -\nu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ F_{i+1} \end{matrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_{i+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_{i+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_{i+1} & 0 & -\nu & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{i+1} & \lambda & -\nu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ F_{i+1} \end{matrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_{i+1} & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_{i+1} \\ c_{i+1} & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & -c_{i+1} & -\lambda & -\nu \end{pmatrix} \det F_{i+1}.$$

Denotando por

$$S_r = \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_r & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_r \\ c_r & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & -c_r & -\lambda & -\nu \end{pmatrix},$$

temos que $\det F_2 = \prod_{r=3}^{\frac{N+1}{2}} \det S_r$ e portanto

$$\det S = \det F_1 \prod_{r=3}^{\frac{N+1}{2}} \det S_r.$$

Então,

$$\det F_1 = \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda \\ -\lambda & -\nu \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -\nu + c_1 & \lambda \\ -\lambda & -\nu - c_1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda \\ -\lambda & -\nu \end{pmatrix} = 0$$

e obtemos os autovalores $\lambda = \pm i\nu$ e $\lambda = 0$, com (multiplicidade 2), ou

$$\det S_r = \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_r & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_r \\ c_r & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & -c_r & -\lambda & -\nu \end{pmatrix} = (\lambda^2 + \nu^2 - c_r^2)^2 = 0$$

e obtemos os autovalores $\lambda = \pm \sqrt{c_r^2 - \nu^2}$, para $r = 3, \dots, \frac{N+1}{2}$.

Finalmente, quando N é par,

$$\det S = \det F_1 \det F_2 \det \begin{pmatrix} -\nu - \frac{c_{N+2}}{2} & \lambda \\ -\lambda & -\nu - \frac{c_{N+2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\text{onde } F_i = \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{i+1} & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -c_{i+1} \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & F_{i+1} & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ c_i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & -c_{i+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & -\nu \end{pmatrix},$$

para $i = 2, \dots, \frac{N}{2}$ e

$$\text{Se } \det \begin{pmatrix} -\nu - \frac{c_{N+2}}{2} & \lambda \\ -\lambda & -\nu - \frac{c_{N+2}}{2} \end{pmatrix} = \lambda^2 + \nu^2 - \frac{c_{N+2}^2}{4} = 0, \text{ obtemos os autovalores } \lambda = \pm \sqrt{\frac{c_{N+2}^2}{4} - \nu^2}$$

Como queremos analisar a estabilidade espectral para o anel de vórtices pela definição de ponto espectralmente estável, precisamos verificar se as raízes do polinômio $|\lambda \mathbf{J} - \nu \mathbf{I} + B^t D^2 U_1(\tilde{Q}) B| = 0$ são imaginárias puros. Para isso, analisaremos se $\lambda = \pm \sqrt{c_r^2 - \nu^2}$ são imaginárias puros. Sabemos que $\nu = -\frac{N-1}{2} = -c_1$ e $c_r = -\frac{1}{2}(N-r)(r-2)$. Então

$$\begin{aligned} c_r^2 - \nu^2 &= c_r^2 - c_1^2 \\ &= (c_r - c_1)(c_r + c_1) \\ &= \frac{[(r-2)(N-r) + (N-1)][(r-2)(N-r) - (N-1)]}{4} \end{aligned}$$

Denotando $f(r, N) = \frac{[(r-2)(N-r) + (N-1)][(r-2)(N-r) - (N-1)]}{4} = \frac{1}{4} f_1(r, N) f_2(r, N)$, onde $f_1(r, N) = (r-2)(N-r) + (N-1)$ e $f_2(r, N) = (r-2)(N-r) - (N-1)$, estudaremos o

senal de f . Primeiro, analisaremos a função $f_1(r, N)$. Para cada N fixo, seu gráfico está mostrado na figura 3.1. Observe que para os valores de r que nos interessam ($r = 3, \dots, N - 1$) seus valores são sempre positivos e portanto, para estudar o sinal de f basta estudar o si-

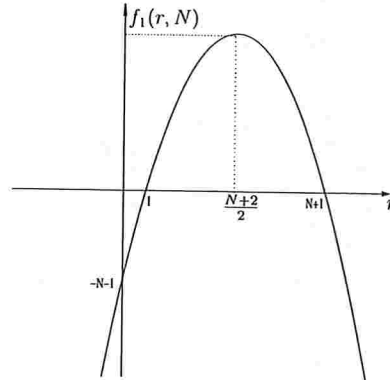


Figura 3.1: gráfico de $f_1(r, N)$

nal de $f_2(r, N)$. Observe inicialmente que o gráfico corresponde a uma translação vertical para baixo de $2(N - 1)$ do gráfico de $f_1(r, N)$, com vértice em $(N + 1, N^2 - 8N + 8)$. Mas $N^2 - 8N + 8 = (N - 4)^2 - 8$ é negativo para $N \leq 6$. Logo, neste caso, $f_2(r, N) < 0$ e todos os autovalores são imaginários puros.

Para $N \geq 7$, como a abscissa do vértice é positiva, existem valores de r tais que $f_2(r, N) > 0$. Mas, para $N = 7$ os zeros de $f_2(r, 7)$ são 4 e 5, e entre eles não há nenhum valor de r que nos interesse. Desta forma, para $r = 7$ temos mais quatro autovalores nulos, mas não aparecerá nenhum autovalor real.

Para $N > 7$, as raízes de $f_2(r, N)$ são $r_1 = \frac{N+2-\sqrt{N^2-8N+8}}{2}$ e $r_2 = \frac{N+2+\sqrt{N^2-8N+8}}{2}$. Precisamos saber quantas entre $r = 3, \dots, N - 1$ estão entre r_1 e r_2 , ou, equivalentemente, quantas estão fora de $[r_1, r_2]$. Mas $r_1 = \frac{N+2-\sqrt{N^2-8N+8}}{2} = \frac{N+2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4(3N-1)}{(N+2)^2}} \right)$, e chamando $\xi(N) = \frac{4(3N-1)}{(N+2)^2}$ temos que ξ é decrescente para $N > \frac{1}{3}$, portanto é decrescente para $N \geq 8$ e $\xi(N) \leq \frac{4.23}{100} = 0.92$, para $N \geq 8$. Seja $F(x) = \sqrt{1-x}$ para $0 \leq x \leq 0.92$. Como F é derivável até a 3ª ordem no intervalo $[0; 0.92]$, então, por Taylor existe pelo menos um \bar{x} em $]0; 0.92[$ tal que $F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + E(x)$, onde $E(x) = \frac{F'''(\bar{x})}{6}x^3$ é o erro que se comete na aproximação de $F(x)$ por $p(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2$ em torno de $x = 0$. Logo $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{1}{16} \frac{x^3}{\sqrt{(1-\bar{x})^5}}$, isto é, $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \leq 1 - \sqrt{1-x} =$

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16} \frac{x^3}{\sqrt{(1-x)^5}} \leq \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8} + \frac{1}{16} \frac{1}{\sqrt{(1-0.08)^5}}. \text{ Assim}$$

$$\begin{aligned} r_1 &\geq \frac{N+2}{2} \left(\frac{4(3N-1)}{2(N+2)^2} + \frac{16(3N-1)^2}{8(N+2)^4} + \frac{64(3N-1)^3}{16(N+2)^6} \right) = \\ &= \frac{3N-1}{N+2} + \frac{(3N-1)^2}{(N+2)^3} + \frac{2(3N-1)^3}{(N+2)^5} \\ &= \frac{3N+6-7}{N+2} + \frac{(3N+6-7)^2}{(N+2)^3} + \frac{2(3N-7+6)^3}{(N+2)^5} \\ &= \frac{3N+6-7}{N+2} + \frac{(3(N+2)-7)^2}{(N+2)^3} + \frac{2(3(N+6)-7)^3}{(N+2)^5} \\ &= \frac{3N+6}{N+2} - \frac{7}{N+2} + \frac{(3(N+2)-7)^2}{(N+2)^3} + \frac{2(3(N+6)-7)^3}{(N+2)^5} \\ &= 3 - \frac{7}{N+2} + \frac{9(N+2)^2 + 2(3)(-7)(N+2) + 49}{(N+2)^3} + \frac{2(3(N+2)-7)^3}{(N+2)^5} \\ &= 3 - \frac{7}{N+2} + \frac{9}{N+2} - \frac{42}{(N+2)^2} + \frac{49}{(N+2)^3} + \\ &\quad 2 \left(\frac{3^3(N+2)^3 + 3 \cdot 3^2(N+2)^2(-7) + 3^2(N+2)(-7)^2 + (-7)^3}{(N+2)^5} \right) \\ &= 3 - \frac{7}{N+2} + \frac{9}{N+2} - \frac{42}{(N+2)^2} + \frac{49}{(N+2)^3} + \frac{2 \cdot 3^3}{(N+2)^2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^2(-7)}{(N+2)^3} + \frac{2 \cdot 3^2(-7)^2}{(N+2)^4} + \\ &\quad \frac{2 \cdot (-7)^3}{(N+2)^5} \\ &= 3 - \frac{7}{N+2} + \frac{9}{N+2} - \frac{42}{(N+2)^2} + \frac{49}{(N+2)^3} + \frac{54}{(N+2)^2} - \frac{378}{(N+2)^3} - \frac{882}{(N+2)^4} + \\ &\quad \frac{686}{(N+2)^5} \\ &= 3 + \frac{2}{N+2} + \frac{12}{(N+2)^2} - \frac{329}{(N+2)^3} - \frac{882}{(N+2)^4} + \frac{686}{(N+2)^5}. \end{aligned}$$

Mas a soma do 2º e 4º termo é positivo para $N \geq 11$ e a soma do 5º e 6º é positivo para $N \geq 1$. Logo, $r_1 > 3$ e portanto, temos autovalores reais. Por outro lado, se $N = 12$, $\xi(12) = \frac{5}{7}$ e para $N \geq 12$

$$r_1 \leq \frac{N+2}{2} \left(\frac{4(3N-1)}{2(N+2)^2} + \frac{16(3N-1)^2}{8(N+2)^4} + \frac{64(3N-1)^3}{16(N+2)^6 \sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^5}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N+2}{2} \left(\frac{2(3N-1)}{(N+2)^2} + \frac{2(3N-1)^2}{(N+2)^4} + \frac{4(3N-1)^3}{(N+2)^6 \frac{\sqrt{5^5}}{\sqrt{7^5}}} \right) \\
&= \frac{3N-1}{N+2} + \frac{(3N-1)^2}{(N+2)^3} + 2 \frac{\sqrt{7^5} (3N-1)^3}{\sqrt{5^5} (N+2)^5} \\
&= \frac{3N+6-7}{N+2} + \frac{3(N+2)-7^2}{(N+2)^3} + \frac{\sqrt{7^5}}{\sqrt{5^5}} \left(\frac{2(3(N+2)-7)^3}{(N+2)^5} \right) \\
&= 3 - \frac{7}{N+2} - \frac{42}{(N+2)^2} + \frac{49}{(N+2)^3} + \\
&\quad \left(\frac{7}{5} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{54}{(N+2)^2} - \frac{378}{(N+2)^3} + \frac{882}{(N+2)^4} - \frac{686}{(N+2)^5} \right) \\
&= 3 + \frac{2}{N+2} + \frac{1}{N+2} \left(-42 + \left(\frac{7}{5} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot 54 \right) + \frac{1}{(N+2)^3} \left(49 - \left(\frac{7}{5} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot 378 \right) + \\
&\quad \left(\frac{7}{5} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{686}{(N+2)^4} \\
&= 3 + \frac{2}{N+2} + \frac{83.28}{(N+2)^2} - \frac{827.96}{(N+2)^3} + \frac{882}{(N+2)^4} - \frac{686}{(N+2)^5} \\
&\leq 3 + \frac{2}{N+2} + \frac{83.28}{(N+2)^2} + \frac{882}{(N+2)^4}
\end{aligned}$$

Fazendo $N = 12$, obtemos

$$\begin{aligned}
r_1 &\leq 3 + 0,15 + \frac{43}{100} \\
&= 3,61 < 4.
\end{aligned}$$

Portanto, para $N \geq 12$ temos que $3 < r_1 < 4$. Agora verificaremos se para $N = 8, 9, 10, 11$ r_1 também esta entre 3 e 4. Para $N = 8, 9, 10, 11$ temos que $r_1 = 3,58$, $r_1 = 3,435$, $r_1 = 3,355$ e $r_1 = 3,295$ respectivamente, ou seja, para $N = 8, 9, 10, 11$ também temos que $3 < r_1 < 4$. Como $r_1 + r_2 = N + 2$, $N - 2 < r_2 = N + 2 - r_1 < N - 1$. Logo, para $N \geq 8$ existem 2 valores de r (3 e $N - 1$) para os quais $f_2(r, N) < 0$. Para todo os outros $(4, \dots, N - 2)$, $f_2(r, N) > 0$ o que corresponde a $N - 5$ autovalores reais positivos e $N - 5$ autovalores reais negativos.

Depois destas considerações, construiremos a tabela abaixo, que leva em consideração o número de raízes com a parte real positiva, o número de raízes com a parte real negativa, o número de raízes nulas e o número de raízes imaginarias puras.

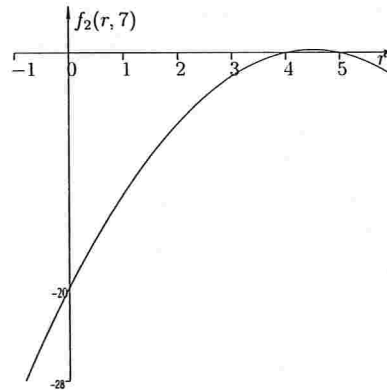


Figura 3.2: gráfico de $f_2(r, N)$ para $N = 7$.

N	<i>Positivas</i>	<i>Negativas</i>	<i>Nulas</i>	<i>Imaginaria</i>
3	0	0	2	4
4	0	0	2	6
5	0	0	2	8
6	0	0	2	10
7	0	0	6	8
≥ 8	N-5	N-5	2	8

Observamos na tabela acima que para $N \geq 8$ o polinômio $|\lambda \mathbf{J} - \nu \mathbf{I} + B^t D^2 U_1(\tilde{Q}) B| = 0$ apresenta raízes com parte real diferente de zero e para $N \leq 7$ todas as raízes têm parte real nula. Assim, para $N \geq 8$ o problema é espectralmente instável. Para $N < 7$, o problema é espectralmente estável, quando considera o problema no espaço quociente por rotações e translações. O caso $N = 7$ é um caso degenerado, mas que ainda assim é possível mostrar que é estável segundo Liapunov [7].

Capítulo 4

Estabilidade espectral e de Liapunov de um anel de vórtices com um vórtice central

4.1 Introdução

Vamos ver agora o que ocorre, quanto à estabilidade espectral, quando se insere um vórtice no centro do anel, ou seja, quando se considera a intensidade do vórtice central $\kappa \neq 0$. Neste caso, a função hamiltoniana é dada por.

$$U(Q) = - \sum_{0 \leq i < j < N} \log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}} - \kappa \sum_{j=0}^{N-1} \log((x_j(t) - x_N(t))^2 + (y_j(t) - y_N(t))^2)^{\frac{1}{2}}$$

com variável $Q = (x_0, \dots, x_N, y_0, \dots, y_N)$ em $R^{2(N+1)}$. Agora a matriz identidade \mathbf{I} é $N + 1 \times N + 1$ e a simplética \mathbf{J} é $(2N + 2) \times (2N + 2)$, a velocidade angular do ponto de equilíbrio relativo é dada por $\nu = -c_1 - \kappa$ e a matriz das intensidade, M , não é a matriz identidade e, sim

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \kappa & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa \end{pmatrix}.$$

Neste caso, tomaremos W como

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} & 0 \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{N} \end{pmatrix},$$

Novamente usando a transformação $Z = By$, onde $B = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \frac{W+\bar{W}}{2} & \frac{i(W-\bar{W})}{2} \\ -\frac{i(W-\bar{W})}{2} & \frac{W+\bar{W}}{2} \end{pmatrix}$, na equação diferencial (2.16) e o fato que B é ortogonal e $\mathbf{J}M = M\mathbf{J}$, $M^{-1}\mathbf{J} = \mathbf{J}M^{-1}$, $B^t M^{-1} = M^{-1}B^t$ e $B^t \mathbf{J}B = \mathbf{J}$ (a demonstração que B é ortogonal e as comutatividades estão no apêndice), podemos mostrar que

$$\begin{aligned} MB\dot{y} &= \mathbf{J}(-\nu M + D^2U_1(\tilde{Q}))By \\ B\dot{y} &= M^{-1}\mathbf{J}(-\nu M + D^2U(\tilde{Q}))By \\ \dot{y} &= B^t M^{-1}\mathbf{J}(-\nu M + D^2U(\tilde{Q}))By \\ &= (-\nu B^t M^{-1}\mathbf{J}MB + B^t M^{-1}\mathbf{J}D^2U(\tilde{Q})B)y \\ &= (-\nu B^t M^{-1}M\mathbf{J}B + M^{-1}B^t\mathbf{J}D^2U(\tilde{Q})B)y \\ &= (-\nu B^t\mathbf{J}B + M^{-1}B^t(B\mathbf{J}B^t)D^2U(\tilde{Q})B)y \\ &= (-\nu\mathbf{J} + M^{-1}\mathbf{J}B^t D^2U(\tilde{Q})B)y \\ &= (-\nu\mathbf{J} + \mathbf{J}M^{-1}B^t D^2U(\tilde{Q})B)y \\ &= \mathbf{J}(-\nu\mathbf{I} + M^{-1}B^t D^2U(\tilde{Q})B)y, \end{aligned}$$

com \tilde{Q} dada por

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} \operatorname{Re}(w^j), & \text{para } j = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } j = N \end{cases}$$

e

$$\tilde{y}_j = \begin{cases} \operatorname{Im}(w^j), & \text{para } j = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{para } j = N. \end{cases}$$

Substituindo o valor de $U = U_1 + \kappa U_2$ na equação acima e usando o fato que a hessiana é linear, obtemos

$$\dot{y} = \mathbf{J} \left(-\nu\mathbf{I} + M^{-1}B^t D^2U_1(\tilde{Q})B + \kappa M^{-1}B^t D^2U_2(\tilde{Q})B \right) y$$

Observação 4.1.1. Note que $B^t D^2U_1(\tilde{Q})B + \kappa B^t D^2U_2(\tilde{Q})B = D^2\tilde{U}(0)$, onde $\tilde{U}(y) = U(\tilde{Q} + By)$

Na última seção do capítulo, estudaremos a estabilidade segundo Liapunov, dos casos nos quais o equilíbrio é espectralmente estável.

4.2 Obtenção da matriz hessiana

Repetindo o raciocínio do capítulo anterior, vamos obter as segundas derivadas de \tilde{U} em $Z = 0$. Para isto, temos que obter as segundas derivadas de U_1 e U_2 em \tilde{Q} , mas como já temos as segundas derivadas de U_1 (observe que U_1 não depende de x_N e y_N) basta obter as segundas derivada de U_2 , que é dada por

$$U_2(Q) = - \sum_{j=0}^{N-1} \log((x_j(t) - x_N(t))^2 + (y_j(t) - y_N(t))^2)^{\frac{1}{2}}$$

Primeiras derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial x_l}(Q) &= \frac{-1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\log((x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{-1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2(x_j - x_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_l} - \frac{\partial x_N}{\partial x_l} \right) \\ &= - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_j - x_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2} \delta_{jl} + \\ &\quad \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_j - x_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2} \delta_{Nl} \\ &= \begin{cases} \frac{(x_N - x_l)}{(x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2}, \text{ para } l < N \\ \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_j - x_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2}, \text{ para } l = N. \end{cases} \end{aligned}$$

De maneira análogo obtém-se

$$\frac{\partial U_2}{\partial y_l}(Q) = \begin{cases} \frac{(y_N - y_l)}{(x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2}, \text{ para } l < N \\ \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_j - y_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2}, \text{ para } l = N. \end{cases}$$

Segunda derivada, primeiro caso:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_N^2}(Q) &= \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_j - x_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\frac{\partial}{\partial x_N} (x_j - x_N) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(x_j - x_N) \frac{\partial}{\partial x_N} ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_N} - \frac{\partial x_N}{\partial x_N} \right) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{2(x_j - x_N)^2 \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_N} - \frac{\partial x_N}{\partial x_N} \right)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\delta_{jN} - 1) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{2(x_j - x_N)^2 (\delta_{jN} - 1)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\delta_{jN} - 1) ((y_j - y_N)^2 + (x_j - x_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\delta_{jN} ((y_j - y_N)^2 - (x_j - x_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} + \\
&\quad \sum_{j=0}^{N-1} \frac{((x_j - x_N)^2 - (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_j - x_N)^2 - (y_j - y_N)^2}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_N^2}(\tilde{Q}) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)^2)^2}.
\end{aligned}$$

Segundo caso, $l < N$:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_l^2}(Q) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{(x_N - x_l)}{(x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_l} (x_N - x_l) ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(x_l - x_N) \frac{\partial}{\partial x_l} ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{\partial x_N}{\partial x_l} - \frac{\partial x_l}{\partial x_l}\right) ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} + \\
&\quad \frac{2(x_l - x_N)^2 \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_l} - \frac{\partial x_N}{\partial x_l}\right)}{((x_j - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{(\delta_{Nl} - 1) ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{2(x_l - x_N)^2 (\delta_{Nl} - 1)}{((x_j - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{(\delta_{Nl} - 1) ((x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{(x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2}{((x_j - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_l^2}(\tilde{Q}) &= \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N) + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N))^2}.
\end{aligned}$$

Terceiro caso, $l, k < N$ e $l \neq k$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_k \partial x_l}(Q) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{(x_l - x_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)} \right) \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_k} (x_N - x_l) ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(x_l - x_N) \frac{\partial}{\partial x_k} ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{(\delta_{Nk} - \delta_{lk}) ((x_l - x_N) + (y_l - y_N))}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} + \\
&\quad \frac{2(x_l - x_N)^2 (\delta_{lk} - \delta_{Nk})}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} = 0 \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_k \partial x_l}(\tilde{Q}) &= 0.
\end{aligned}$$

Quarto caso, $k < N$:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_k \partial x_N}(Q) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_j - x_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\frac{\partial}{\partial x_k} (x_j - x_N) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(x_j - x_N) \frac{\partial}{\partial x_k} ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\delta_{jk} - \delta_{Nk}) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{-2(x_j - x_N)^2 (\delta_{jk} - \delta_{Nk})}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\delta_{jk} - \delta_{Nk}) (y_j - y_N)^2 - (x_j - x_N)^2}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{(y_k - y_N)^2 - (x_k - x_N)^2}{((x_k - x_N)^2 + (y_k - y_N)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_k \partial x_N}(\tilde{Q}) &= \frac{(\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)^2 - (\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)^2}{((\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)^2)^2}
\end{aligned}$$

Quinto caso:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial y_N^2}(Q) &= \frac{\partial}{\partial y_N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_j - y_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\frac{\partial}{\partial y_N} (y_j - y_N) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(y_j - y_N) \frac{\partial}{\partial y_N} ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\delta_{jN} - 1) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{2(y_j - y_N)^2 (\delta_{jN} - 1)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\delta_{jN} - 1) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\delta_{jN} ((y_j - y_N)^2 - (x_j - x_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} + \\
&\quad \sum_{j=0}^{N-1} \frac{((x_j - x_N)^2 - (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_j - y_N)^2 - (x_j - x_N)^2}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_N^2}(\tilde{Q}) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)^2 - (\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)^2}{((\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)^2)^2}. \end{aligned}$$

Sexto caso, $l < N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_l^2}(Q) &= \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{(y_N - y_l)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial y_l} (y_N - y_l) ((x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} - \\ &\quad \frac{(y_l - y_N) \frac{\partial}{\partial y_l} ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\ &= \frac{(\delta_{Nl} - 1) ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} - \\ &\quad \frac{2(x_l - x_N)^2 (\delta_{Nl} - 1)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\ &= \frac{(\delta_{Nl} - 1) ((x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\ &= \frac{(y_l - y_N)^2 - (x_l - x_N)^2}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_l^2}(\tilde{Q}) &= \frac{(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2 - (\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)^2}. \end{aligned}$$

Sétimo caso, $l, k < N$ e $l \neq k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_k \partial y_l^2}(Q) &= \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{(y_l - y_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial y_k} (y_N - y_l) ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} + \\ &\quad \frac{2(y_l - y_N)^2 \frac{\partial}{\partial y_k} (y_l - y_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\ &= \frac{(\delta_{Nk} - \delta_{lk}) ((x_l - x_N) + (y_l - y_N))}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} + \\ &\quad \frac{2(x_l - x_N)^2 (\delta_{lk} - \delta_{Nk})}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_k \partial y_l^2}(\tilde{Q}) &= 0. \end{aligned}$$

Oitavo caso, $k < N$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial y_k \partial y_N}(Q) &= \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_j - y_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\frac{\partial}{\partial y_k} (y_j - y_N) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(y_j - y_N) \frac{\partial}{\partial x_k} ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\delta_{jk} - \delta_{Nk}) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{2(y_j - y_N)^2 (\delta_{jk} - \delta_{Nk})}{((x_j - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\delta_{jk} - \delta_{Nk})(x_j - x_N)^2 - (y_j - y_N)^2}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{(x_k - x_N)^2 - (y_k - y_N)^2}{((x_k - x_N)^2 + (y_k - y_N)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial y_k \partial y_N}(\tilde{Q}) &= \frac{(\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)^2)^2}.
\end{aligned}$$

Nono caso, $k < N$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_k \partial y_N}(Q) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_j - y_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\frac{\partial}{\partial x_k} (y_j - y_N) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(y_j - y_N) \frac{\partial}{\partial x_k} ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{-2(y_j - y_N)(x_j - x_N)(\delta_{jk} - \delta_{Nk})}{((x_j - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{-2(y_k - y_N)(x_k - x_N)}{((x_k - x_N)^2 + (y_k - y_N)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_k \partial y_N}(\tilde{Q}) &= \frac{-2(\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)(\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)}{((\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)^2)^2}.
\end{aligned}$$

Décimo caso, $l < N$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_N \partial y_l}(Q) &= \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{(y_N - y_l)}{(x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2} \right) \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_N} (y_N - y_l) ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(y_N - y_l) \frac{\partial}{\partial x_N} ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{-2(y_N - y_l)(x_l - x_N) \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_N} - 1 \right)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
&= \frac{-2(y_N - y_l)^2 (x_N - x_l)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_N \partial y_l}(\tilde{Q}) &= \frac{-2(y_N - \tilde{y}_l)^2 (\tilde{x}_N - \tilde{x}_l)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)^2}
\end{aligned}$$

Décimo-primeiro caso, $l, k < N$ e $l \neq k$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_k \partial y_l}(Q) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{(y_N - y_l)}{(x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2} \right) \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_k} (y_N - y_l) ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(x_N - x_l) \frac{\partial}{\partial x_k} ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} = 0 \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_k \partial y_l}(\tilde{Q}) &= 0.
\end{aligned}$$

Décimo-segundo caso:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_N \partial y_N}(Q) &= \frac{\partial}{\partial y_N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_j - y_N)}{(x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\frac{\partial}{\partial y_N} (y_j - y_N) ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} - \\
&\quad \frac{(y_j - y_N) \frac{\partial}{\partial y_N} ((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{-2(y_j - y_N)(x_j - x_N)(\delta_{jN} - 1)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(y_j - y_N)(x_j - x_N)}{((x_j - x_N)^2 + (y_j - y_N)^2)^2} \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_N \partial y_N}(\tilde{Q}) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)(\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)}{((\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)^2)^2}. \end{aligned}$$

Décimo-terceiro caso, $l < N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_l \partial y_l}(Q) &= \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{(y_N - y_l)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial y_l} (y_N - y_l) ((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} - \\ &\quad \frac{2(y_l - y_N)(x_l - x_N) \frac{\partial}{\partial x_l} (x_l - x_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\ &= \frac{2(y_l - y_N)(x_l - x_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_l \partial y_l}(\tilde{Q}) &= \frac{2(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)^2}. \end{aligned}$$

Agora, vamos escrever as hessianas de U_1 e de U_2 , lembrando que estamos trabalhando em R^{2N+2} . Novamente usando as propriedade de simetria da hessiana e olhando para derivadas segundas de U_2 , temos que

$$D^2 U_2(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} A^1 & C^1 \\ D^1 & E^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 & C^1 \\ C^1 & -A^1 \end{pmatrix}.$$

Denotando $G_1 = B^t D^2 U_2(\tilde{Q}) B = \begin{pmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1 \end{pmatrix}$, temos que

$$G_1 = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{w^t + \bar{w}^t}{2} & \frac{-i(w^t - \bar{w}^t)}{2} \\ \frac{i(w^t - \bar{w}^t)}{2} & \frac{w^t + \bar{w}^t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 & C^1 \\ C^1 & -A^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{w + \bar{w}}{2} & \frac{i(w - \bar{w})}{2} \\ \frac{-i(w - \bar{w})}{2} & \frac{w + \bar{w}}{2} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando obtemos

$$G_{11}^1 = \frac{1}{N} (\operatorname{Re}(W A^1 W) + \operatorname{Im}(W C^1 W))$$

$$G_{12}^1 = \frac{1}{N} (\operatorname{Re}(W C^1 W) - \operatorname{Im}(W A^1 W))$$

$$G_{21}^1 = \frac{1}{N} (\operatorname{Re}(W C^1 W) + \operatorname{Im}(W A^1 W))$$

e

$$G_{22}^1 = \frac{1}{N} (\operatorname{Re}(W A^1 W) - \operatorname{Im}(W C^1 W)).$$

Observe que $G_{22}^1 = -G_{11}^1$ e $G_{21}^1 = G_{12}^1$. Portanto para calcular G_1 , basta calcular os blocos G_{22}^1 e G_{21}^1

Agora, obteremos os elementos da multiplicação das matrizes (WA^1W)

$$\begin{aligned}
(WA^1W)_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N w_{rl}(A^1W)_{ls} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^N w_{rl}A_{lk}^1 w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^N w_{rl}A_{ll}^1 w_{ls} + \frac{1}{N} w_{rN}A_{NN}^1 w_{Ns} + \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl}A_{lk}^1 w_{ks} + \\
&\quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_{rN}A_{Nk}^1 w_{ks} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl}A_{lN}^1 w_{Ns} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_l^2}(\tilde{Q}) w_{ls} + \frac{1}{N} w_{rN} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_N^2}(\tilde{Q}) w_{Ns} + \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_l \partial x_k}(\tilde{Q}) w_{ks} + \\
&\quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_{rN} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_N \partial x_k}(\tilde{Q}) w_{ls} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_l \partial x_N}(\tilde{Q}) w_{Ns}
\end{aligned}$$

Substituindo os valores das segundas derivadas, temos

$$\begin{aligned}
(WA^1W)_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)^2} w_{ls} + \\
&\quad \frac{1}{N} w_{rN} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)^2}{(\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)^2} w_{Ns} + \\
&\quad \frac{1}{N} w_{rN} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)^2 - (\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)^2}{(\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)^2} w_{ks} + \\
&\quad \frac{1}{N} w_{rl} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{y}_N - \tilde{y}_l)^2 - (\tilde{x}_N - \tilde{x}_l)^2}{(\tilde{x}_N - \tilde{x}_l)^2 + (\tilde{y}_N - \tilde{y}_l)^2} w_{Ns} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2} (w_{rl} w_{ls} + w_{rN} w_{Ns}) - \\
&\quad \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)^2} (w_{rN} w_{ls} + w_{rl} w_{Ns})
\end{aligned}$$

Como os elementos de W são:

$$w_{ij} = \begin{cases} w^{ij}, & \text{para } 0 \leq i, j \leq N-1 \\ 0, & \text{para } 0 \leq i \leq N-1 \text{ e } j = N, \text{ ou } 0 \leq j \leq N-1 \text{ e } i = N \\ \sqrt{N}, & \text{para } i = j = N \end{cases} \quad (4.1)$$

$$(WA^1W)_{Ns} = -\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} w_{ls} w_{NN}, \text{ para } 0 \leq s \leq N-1.$$

Devido a simetria de W e A^1 temos $(WA^1W)_{sN} = (WA^1W)_{Ns}$.

Para $0 \leq r, s \leq N-1$.

$$(WA^1W)_{rs} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} w_{rl} w_{ls}$$

Finalmente,

$$(WA^1W)_{NN} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} (w_{NN})^2$$

Com isto, temos que os elementos de (WA^1W) ficam:

$$(WA^1W)_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} w^{(r+s)l}, & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \\ -\frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} w^{sl}, & \text{para } 0 \leq s \leq N-1 \text{ e } r = N \\ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)}, & \text{para } r = s = N \end{cases}$$

Temos que a parte real de (WA^1W) é

$$\text{Re}(WA^1W)_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} \tilde{x}_{(r+s)l}, & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \\ -\frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} \tilde{x}_{sl}, & \text{para } 0 \leq s \leq N-1 \text{ e } r = N \\ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)}, & \text{para } r = s = N \end{cases}$$

e a parte imaginária de (WA^1W) é

$$\text{Im}(WA^1W)_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} \tilde{y}_{(r+s)l}, & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \\ -\frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 - (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} \tilde{y}_{sl}, & \text{para } 0 \leq s \leq N-1 \text{ e } r = N \\ 0, & \text{para } r = s = N \end{cases}$$

De modo análogo, obteremos os elementos da multiplicação das matrizes (WC^1W)

$$\begin{aligned} (WC^1W)_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N w_{rl}(C^1W)_{ls} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^N w_{rl}C_{lk}^1w_{ks} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl}C_{ll}^1w_{ls} + \frac{1}{N} w_{rN}C_{NN}^1w_{Ns} + \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl}C_{kl}^1w_{ks} + \\ &\quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_{rN}C_{Nk}^1w_{ks} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl}C_{lN}^1w_{Ns} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_l^2}(\tilde{Q})w_{ls} + \frac{1}{N} w_{rN} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_N^2}(\tilde{Q})w_{Ns} + \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_l \partial y_k}(\tilde{Q})w_{ks} + \\ &\quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_{rN} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_N \partial y_k}(\tilde{Q})w_{ls} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_l \partial x_N}(\tilde{Q})w_{Ns} \end{aligned}$$

Substituindo os valores das segundas derivadas

$$\begin{aligned} (WC^1W)_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)^2} w_{ls} + \\ &\quad \frac{1}{N} w_{rN} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)(\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)^2}{(\tilde{x}_j - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_N)^2} w_{Ns} + \\ &\quad \frac{1}{N} w_{rN} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{-2(\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)(\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)}{(\tilde{x}_k - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_k - \tilde{y}_N)^2} w_{ks} + \\ &\quad \frac{1}{N} w_{rl} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{-2(\tilde{y}_N - \tilde{y}_l)(\tilde{x}_N - \tilde{x}_l)}{(\tilde{x}_N - \tilde{x}_l)^2 + (\tilde{y}_N - \tilde{y}_l)^2} w_{Ns} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)^2} w_{ls} + \\
&\quad \frac{1}{N} w_{rN} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2}{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2} w_{Ns} - \\
&\quad \frac{1}{N} w_{rN} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)}{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2} w_{ls} - \\
&\quad \frac{1}{N} w_{rl} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{y}_N - \tilde{y}_l)(\tilde{x}_N - \tilde{x}_l)}{(\tilde{x}_N - \tilde{x}_l)^2 + (\tilde{y}_N - \tilde{y}_l)^2} w_{Ns} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2} (w_{rl}w_{ls} + w_{rN}w_{Ns} - w_{rN}w_{ls} - w_{rl}w_{Ns})
\end{aligned}$$

Como os elementos de W são dados por (4.1),

$$(WC^1W)_{Ns} = -\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} w_{ls}w_{NN}, \text{ para } 0 \leq s \leq N-1.$$

Devido a simetria de W e C^1 temos $(WC^1W)_{sN} = (WC^1W)_{Ns}$.

Para $0 \leq r, s \leq N-1$,

$$(WC^1W)_{rs} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} w_{rl}w_{ls}.$$

Para $r = s = N$,

$$(WC^1W)_{NN} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} (w_{NN})^2.$$

Com isto temos que os elementos de (WC^1W) ficam:

$$(WC^1W)_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} w^{(r+s)l}, & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \\ -\frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} w^{sl}, & \text{para } 0 \leq s \leq N-1 \text{ e } r = N \\ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)}, & \text{para } r = s = N \end{cases}$$

Temos que a parte real de (WC^1W) é

$$\operatorname{Re}(WC^1W)_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} \tilde{x}_{(r+s)l}, & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \\ -\frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} \tilde{x}_{sl}, & \text{para } 0 \leq s \leq N-1 \text{ e } r = N \\ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)}, & \text{para } r = s = N \end{cases}$$

e a parte imaginária de (WC^1W) é

$$\operatorname{Im}(WC^1W)_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} \tilde{y}_{(r+s)l}, & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \\ -\frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)(\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)}{((\tilde{x}_l - \tilde{x}_N)^2 + (\tilde{y}_l - \tilde{y}_N)^2)} \tilde{y}_{sl}, & \text{para } 0 \leq s \leq N-1 \text{ e } r = N \\ 0, & \text{para } r = s = N \end{cases}$$

Denotando por $L = \frac{1}{N} (\operatorname{Re}(WAW) + \operatorname{Im}(WC^1W))$, temos que, para $0 \leq s \leq N$

$$L_{Ns} = \frac{-\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} x_{rl} + \frac{-\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(x_l - x_N)(y_l - y_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)} y_{rl}$$

Podemos considerar $x_{(r+s)l} = \operatorname{Re}(w^{(r+s)l})$ e $y_{(r+s)l} = \operatorname{Im}(w^{(r+s)l})$. Dai,

$$\frac{(x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l + w^N)^2} \right) \quad (4.2)$$

e

$$\frac{(x_l - x_N)^2 (y_l - y_N)^2}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} = \frac{-i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(w^l + w^N)^2} \right). \quad (4.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
L_{Ns} &= \frac{-\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{rl} + \overline{w^{rl}}}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&\quad - \frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} -i \frac{(w^{rl} - \overline{w^{rl}})}{2} \left(\frac{-i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \right) \\
&= \frac{-\sqrt{N}}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} (w^{rl} + \overline{w^{rl}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{N}}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} (w^{rl} - \overline{w^{rl}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{-\sqrt{N}}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} (w^{rl} + \overline{w^{rl}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=0}^{N-1} (w^{rl} - \overline{w^{rl}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \right) \\
&= \frac{-\sqrt{N}}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{w^{rl} + \overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{w^{rl} + \overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{\overline{w^{rl}} - w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{w^{rl} - \overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} \right) \right) \\
&= \frac{-\sqrt{N}}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{rl} + \overline{w^{rl}} + \overline{w^{rl}} + w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{w^{rl} + \overline{w^{rl}} + w^{rl} - \overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{N}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{2\overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{2w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{-\sqrt{N}}{2N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{-\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} \right) = \frac{-\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w^{(r-2)l} = \\
&= \begin{cases} -\sqrt{N}, & \text{para } r = 2 \bmod N \\ 0, & \text{para } r \neq 2 \bmod N \end{cases}
\end{aligned}$$

Agora, vamos obter L para $0 < r, s \leq N - 1$:

$$L_{rs} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} x_{(r+s)l} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(x_l - x_N)(y_l - y_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} y_{(r+s)l}.$$

Podemos considerar $x_{(r+s)l} = \operatorname{Re}(w^{(r+s)l})$ e $y_{(r+s)l} = \operatorname{Im}(w^{(r+s)l})$. Dai,

$$\frac{(x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \quad (4.4)$$

e

$$\frac{(x_l - x_N)(y_l - y_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} = \frac{-i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \quad (4.5)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L_{sr} &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}}}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} -i \frac{(w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}})}{2} \left(\frac{-i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} (w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} (w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\overline{w^{(r+s)l}} - w^{(r+s)l}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}} + \overline{w^{(r+s)l}} + w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}} + w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{2\overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{2w^{(r+s)l}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{w^{(r+s)l}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left(\frac{w^{(r+s)l}}{(w^l - w^N)^2} \right) = \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(\sum_{l=0}^{N-1} w^{(r+s-2)l} \right) = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{para } r + s = 2 \bmod N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Resta calcular L_{NN} :

$$\begin{aligned}
L_{NN} &= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l + w^N)^2} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l)^2} + \frac{1}{(w^l)^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{w^{2l} + \bar{w}^{2l}}{((w^l)^2)(w^l)^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{2l} + \bar{w}^{2l}}{(|w^l|)^2} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{2l} + \bar{w}^{2l}}{2} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \operatorname{Re}(w^{2l}) \\
&= \operatorname{Re} \left(\sum_{l=0}^{N-1} w^{2l} \right) = 0
\end{aligned}$$

e, portanto, os elementos de L são.

$$L_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{para } r + s = 2 \bmod N \\ -\sqrt{N}, & \text{para } r = 2 \text{ e } s = N, \text{ ou } r = N \text{ e } s = 2 \\ 0, & \text{para os outros casos} \end{cases}$$

Agora, demonstraremos, que os blocos G_{12}^2, G_{21}^2 são nulos. Seja

$$\tilde{L} = \frac{1}{N} (\operatorname{Re}(WA^2W) + \operatorname{Im}(WC^2W)),$$

como $(WA^2W)_{Ns} = (WA^2W)_{sN}$ e $(WC^2W)_{Ns} = (WC^2W)_{sN}$ devido a simetria de W, A^2 e C^2 , temos $\tilde{L}_{Ns} = \tilde{L}_{sN}$. Então, $\tilde{L}_{Ns} = \tilde{L}_{sN}$. Então, para $0 \leq s \leq N - 1$

$$\tilde{L}_{Ns} = -\frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)} y_{rl} - \frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(x_l - x_N)(y_l - y_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} x_{rl}$$

Usando as igualdades (4.4), (4.5) e $x_{(r+s)l} = \operatorname{Re}(w^{(r+s)l})$, $y_{(r+s)l} = \operatorname{Im}(w^{(r+s)l})$, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{Ns} &= \frac{-\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(w^{rl} + \overline{w^{rl}})}{2} \frac{-i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{-i}{2} \frac{(w^{rl} - \overline{w^{rl}})}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{i\sqrt{N}}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} (w^{rl} + \overline{w^{rl}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&\quad - \frac{i\sqrt{N}}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} (w^{rl} + \overline{w^{rl}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{i\sqrt{N}}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{w^{rl} + \overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} - \frac{w^{rl} + \overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&\quad - \frac{i\sqrt{N}}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{\overline{w^{rl}} - w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{w^{rl} - \overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{-i\sqrt{N}}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{rl} + \overline{w^{rl}} + \overline{w^{rl}} + w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{(-w^{rl} - \overline{w^{rl}} - w^{rl} + \overline{w^{rl}})}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{i\sqrt{N}}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{2\overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} - \frac{2w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{-i\sqrt{N}}{2N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} - \frac{w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{i}{2} \left(\frac{\overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} - \frac{w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{-i}{2} \left(\frac{w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} - \frac{\overline{w^{rl}}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{-\sqrt{N}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \operatorname{Im} \left(\frac{w^{rl}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{N}}{N} \operatorname{Im} \left(\sum_{l=0}^{N-1} w^{(r-2)l} \right)
\end{aligned}$$

De w^l ser a l -ésima raiz N -ésima da unidade e da Proposição (1.5.4)

$$\sum_{l=0}^{N-1} w^{(r-2)l} = \begin{cases} N, & \text{para } r = 2 \bmod N \\ 0, & \text{para } r \neq 2 \bmod N \end{cases}$$

Logo, como N e zero são reais, temos que $\tilde{L}_{Ns} = \tilde{L}_{sN} = 0$

Para $0 \leq r, s \leq N - 1$ temos

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(x_l - x_N)(y_l - y_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)^2} x_{(r+s)l} - \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(x_l - x_N)^2 - (y_l - y_N)^2}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)} y_{(r+s)l} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} -\frac{i}{2} \left(\frac{w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}}}{2} \right) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(\overline{w^l - w^N})^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} -\frac{i}{2} (w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}}) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(\overline{w^l - w^N})^2} \right) \\
&= -\frac{i}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} (w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(\overline{w^l - w^N})^2} \right) \\
&\quad + \frac{i}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} (w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}}) \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} + \frac{1}{(\overline{w^l - w^N})^2} \right) \\
&= -\frac{i}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)^2} - \frac{(w^{(r+s)l} + \overline{w^{(r+s)l}})}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&\quad + \frac{i}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\overline{w^{(r+s)l}} - w^{(r+s)l}}{(w^l - w^N)^2} + \frac{w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)^2} \\
&= -\frac{i}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}} + w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}} + w^{(r+s)l} - \overline{w^{(r+s)l}}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= \frac{i}{4N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{2w^{(r+s)l}}{(w^l - w^N)^2} - \frac{2\overline{w^{(r+s)l}}}{(\overline{w^l - w^N})^2} \right) \\
&= \frac{i}{2N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{(r+s)l}}{(w^l - w^N)^2} - \frac{\overline{w^{(r+s)l}}}{(\overline{w^l - w^N})^2} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{i}{2} \left(\frac{w^{(r+s)l}}{(w^l - w^N)^2} - \frac{\overline{w^{(r+s)l}}}{(\overline{w^l - w^N})^2} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} -\text{Im} \left(\frac{w^{(r+s)l}}{(w^l - w^N)^2} \right) \\
&= -\frac{1}{N} \text{Im} \left(\sum_{l=0}^{N-1} w^{(r+s-2)l} \right)
\end{aligned}$$

Novamente, usando a proposição (1.5.4), temos $\sum_{l=0}^{N-1} w^{(r+s-2)l} = \begin{cases} 1, & \text{para } r + s = 2 \bmod N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Portanto, $\tilde{L}_{rs} = 0$, para $0 \leq s, r \leq N - 1$.

Resta calcular \tilde{L}_{NN} :

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_{NN} &= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2(x_l - x_N)(y_l - y_N)}{((x_l - x_N)^2 + (y_l - y_N)^2)} \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{(w^l - w^N)^2} - \frac{1}{(\overline{w^l - w^N})^2} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{(w^l)^2} - \frac{1}{(\overline{w^l})^2} \right) \\
 &= -\frac{i}{2} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{w^{2l} - \overline{w}^{2l}}{((w^l)^2)(\overline{w^l})^2} \right) \\
 &= -\frac{i}{2} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{w^{2l} - \overline{w}^{2l}}{(|w^l|)^2} \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} -\frac{i}{2} (w^{2l} + \overline{w}^{2l}) \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} \text{Im}(w^{2l}) \\
 &= \text{Im} \left(\sum_{l=0}^{N-1} w^{2l} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{L} = 0$, ou seja, G_{12}^2 e G_{21}^2 são nulos. Logo, G_1 é da forma

$$G_1 = B^t D^2 U_2(\tilde{Q}) B = \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{pmatrix}$$

onde a matriz R_2 é dada por

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora escreveremos a hessiana de \tilde{U}_1 em $Z = 0$. Novamente usando as propriedades de simetria da hessiana e olhando para segundas derivadas de U_1 , temos que $D^2U_1(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} A^2 & C^2 \\ D_2 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & C^2 \\ C^2 & -A^2 \end{pmatrix}$.

Escrevendo $G_2 = B^t D^2U_2(\tilde{Q}) B = \begin{pmatrix} G_{11}^2 & G_{12}^2 \\ G_{21}^2 & G_{22}^2 \end{pmatrix}$, temos que

$$G_2 = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{W^t + \bar{W}^t}{2} & \frac{-i(W^t - \bar{W}^t)}{2} \\ \frac{i(W^t - \bar{W}^t)}{2} & \frac{W^t + \bar{W}^t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 & C^2 \\ C^2 & -A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{W + \bar{W}}{2} & \frac{i(W - \bar{W})}{2} \\ \frac{-i(W - \bar{W})}{2} & \frac{W + \bar{W}}{2} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando obtemos

$$\begin{aligned} G_{11}^2 &= \frac{1}{N} (\operatorname{Re}(WA^2W) + \operatorname{Im}(WC^2W)) \\ G_{12}^2 &= \frac{1}{N} (\operatorname{Re}(WC^2W) - \operatorname{Im}(WA^2W)) \\ G_{21}^2 &= \frac{1}{N} (\operatorname{Re}(WC^2W) + \operatorname{Im}(WA^2W)) \\ G_{22}^2 &= -\frac{1}{N} (\operatorname{Re}(WA^2W) + \operatorname{Im}(WC^2W)) \end{aligned}$$

Agora obteremos os elementos da multiplicação das matrizes (WA^2W) .

$$\begin{aligned} (WA^2W)_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N w_{rl} (A^2W)_{ls} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^N w_{rl} A_{lk}^2 w_{ks} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} A_{ll}^2 w_{ls} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\substack{k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} A_{lk}^2 w_{ks} + \\
&\quad \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\substack{k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} A_{lN}^2 w_{Ns} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\substack{k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rN} A_{Nk}^2 w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} A_{ll}^2 w_{ls} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\substack{k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} A_{lk}^2 w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{ls} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{(x_l - x_j)^2 - (y_l - y_j)^2}{((x_l - x_j)^2 + (y_l + y_j)^2)^2} w_{ls} + \\
&\quad \frac{1}{2} \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} \frac{(x_l - x_k)^2 - (y_l - y_k)^2}{((x_l - x_k)^2 + (y_l + y_k)^2)^2} w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{ls} \sum_{\substack{k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \frac{(x_l - x_k)^2 - (y_l - y_k)^2}{((x_l - x_j)^2 + (y_l + y_j)^2)^2} w_{ls} + \\
&\quad \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} \frac{(x_l - x_k)^2 - (y_l - y_k)^2}{((x_l - x_k)^2 + (y_l + y_k)^2)^2} w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \frac{(x_l - x_k)^2 - (y_l - y_k)^2}{((x_l - x_k)^2 + (y_l + y_k)^2)^2} (w_{rl} w_{ls} - w_{rl} w_{ks})
\end{aligned}$$

Como os elementos de W são dados por (4.1) temos que para $0 \leq r \leq N-1$ e $s = N$ ou $0 \leq s \leq N-1$ e $r = N$, $(WA^2W)_{rs} = 0$

$$(WA^2W)_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \frac{(x_l - x_k)^2 - (y_l - y_k)^2}{((x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2)} (w^{(r+s)l} - w^{r+l+ks}), & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \\ 0, & \text{para } r = s = N \end{cases}$$

Calcularemos os elementos da multiplicação das matrizes (WC^2W) :

$$\begin{aligned}
(WC^2W)_{rs} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w_{rl} (C^2W)_{ls} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} w_{rl} C_{lk}^2 w_{ks}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{l,k=0}^{N-1} w_{rl} C_{lk}^2 w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} C_{ll}^2 w_{ks} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} C_{lk}^2 w_{ks} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} C_{rl}^2 w_{Ns} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_{rN} C_{Nk}^2 w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{rl} C_{ll}^2 w_{ks} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} C_{lk}^2 w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{ls} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} \frac{2(x_l - x_j)(y_l - y_j)}{((x_l - x_j)^2 + (y_l + y_j)^2)^2} w_{ls} + \\
&\quad \frac{1}{2} \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} \frac{2(x_l - x_k)(y_l - y_k)}{((x_l - x_k)^2 + (y_l + y_k)^2)^2} w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} w_{ls} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{N-1} \frac{2(x_l - x_k)(y_l - y_k)}{((x_l - x_k)^2 + (y_l + y_k)^2)^2} w_{ls} + \\
&\quad \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} w_{rl} \frac{2(x_l - x_k)(y_l - y_k)}{((x_l - x_k)^2 + (y_l + y_k)^2)^2} w_{ks} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \frac{2(x_l - x_k)(y_l - y_k)}{((x_l - x_k)^2 + (y_l + y_k)^2)^2} (w_{rl} w_{ls} - w_{rl} w_{ks})
\end{aligned}$$

Novamente, usando a definição de W temos que para $0 \leq r \leq N-1$ e $s = N$ ou $0 \leq s \leq N-1$ e $r = N$, $(WC^2W)_{rs} = 0$

$$(WC^2W)_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\substack{l,k=0 \\ l \neq k}}^{N-1} \frac{2(x_l - x_k)(y_l - y_k)}{((x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2)} (w^{l(r+s)} - w^{r+l+ks}) & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma, obtemos o mesmo resultado que para o anel de vórtices, ou seja,

$$G_2 = D^2 \tilde{U}_1(0) = B^t D^2 U_1(\tilde{Q}) B = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -R_1 \end{pmatrix}$$

onde a matriz R_1 é dada por uma das duas formas

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_4 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_\gamma & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se N é par, e neste caso $\gamma = \frac{N}{2} + 1$,

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_4 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_\gamma & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_\gamma & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se N é ímpar, e neste caso $\gamma = \frac{N+1}{2}$.

$$\begin{aligned} M^{-1}D^2\tilde{U}(0) &= M^{-1}(G_2 + \kappa G_1) \\ &= \begin{pmatrix} R_3 & 0 \\ 0 & -R_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde R_3 , é dada por uma das duas formas:

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \kappa & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_3 + \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c_4 + \kappa & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_\gamma + \kappa & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 + \kappa & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se N é par, e neste caso $\gamma = \frac{N}{2} + 1$, ou

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \kappa & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_3 + \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & c_4 + \kappa & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_\gamma + \kappa & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_\gamma + \kappa & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 + \kappa & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se N é ímpar, e neste caso $\gamma = \frac{N+1}{2}$

Vamos agora encontrar os autovalores da equação linearizada,

$$\dot{y} = (-\nu J + JM^{-1}G_2 + \kappa JM^{-1}G_1) y = J(-\nu I + M^{-1}G_2 + \kappa M^{-1}G_1) y,$$

ou seja, queremos analisar os zeros do determinante de

$$-\lambda I + J(-\nu I + M^{-1}(G_2 + \kappa G_1)) = J(\lambda J - \nu I + M^{-1}(G_2 + \kappa G_1)).$$

Isto é equivalente a estudar os zeros do determinante de

$$S_1 = \begin{pmatrix} -\nu\mathbf{I} + R_3 & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & -\nu\mathbf{I} - R_3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Devido à natureza de R , o determinante de (4.6) pode ser decomposto no produto de determinantes de submatrizes 2×2 e 4×4 . Para isso usaremos que trocas de linhas e colunas podem alterar apenas o sinal do determinante. Inicialmente, moveremos as colunas $1, 2, \dots, j, \dots, N+1$ da matriz (3.4) para as colunas $1, 3, \dots, 2j-1, \dots, 2N+1$ ($j \leq N+1$) e as colunas $N+1, \dots, j, \dots, 2N+2$ para as colunas $2, \dots, 2(j-N), \dots, 2N+2$ ($j \geq N+1$); ou seja, intercalamos as primeiras $N+1$ colunas e as últimas $N+1$ colunas da matriz. Posteriormente, faremos o mesmo com as linhas da matriz, ou seja intercalamos as primeiras $N+1$ linhas e as últimas $N+1$ linhas. Se a matriz (4.6) é igual a $(a_{kl})_{1 \leq k, l \leq 2N+2}$

(1) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\nu\mathbf{I} + R$ são os a_{kk} , para $k = 1, \dots, N+1$ e os a_{kl} , com $l = N+4-k$, para $k = 3, \dots, N+1$;

(2) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $\lambda\mathbf{I}$ são os a_{kl} , com $l = k+N+1$, para $k = 1, \dots, N+1$;

(3) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\lambda\mathbf{I}$ são os a_{kl} , com $l = k-N-1$, para $k = N+2, \dots, 2N+2$;

(4) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\nu\mathbf{I} - R$ são os a_{kk} , para $k = N+2, \dots, 2N+2$ e os a_{kl} , com $l = 3N+6-k$, para $k = N+4, \dots, 2N+2$.

Se $B = b_{ij}$ for a matriz obtida depois das trocas de colunas e linhas.

(1) os elementos não nulos correspondente ao bloco $-\nu\mathbf{I} + R$ são $b_{2k-1, 2k-1} = a_{kk}$ para $1 \leq k \leq N+1$ e $b_{2k-1, 2N+7-2k} = a_{k, N+4-k}$ para $k = 3, \dots, N+1$. Observe que $a_{kk} = -\nu$ se $k \neq 2$ e $a_{22} = -\nu + c_1 + \kappa$ e que $a_{k, N+4-k} = c_{k-1} + \kappa$, $a_{3, N+1} = -\kappa\sqrt{N}$ e $a_{N+1, 3} = -\sqrt{N}$

(2) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $\lambda\mathbf{I}$ são $b_{2k-1, 2k} = a_{k, k+N+1}$, para $k = 1, \dots, N+1$. Observe que $a_{k, k+N+1} = \lambda$

(3) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\lambda\mathbf{I}$ são $b_{2k, 2k-1} = a_{k+N+1, k}$, para $k = 1, \dots, N$. Observe que $a_{k+N+1, k} = -\lambda$

(4) os elementos não nulos correspondentes ao bloco $-\nu\mathbf{I} - R$ são $b_{2k, 2k} = a_{k+N+1, k+N+1}$, $k = 1, \dots, N+1$ e $b_{2k, 2N-2k+8} = a_{k+N+1, 2N+5-k}$, $k = 3, \dots, N+1$. Observe que $a_{k+N+1, k+N+1} = -\nu$ se $k \neq 2$ e $a_{N+3, N+3} = -\nu - c_1 - \kappa$, $a_{k+N+1, 2N+5-k} = -c_{k-1} - \kappa$, $a_{2N+2, N-4} = \sqrt{N}$ e $a_{N+4, 2N+2} = \kappa\sqrt{N}$.

Para N ímpar, após estas trocas de linhas e colunas, o determinante da matriz S_1 fica

$$\det S_1 = \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & -\nu & \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & -\lambda & -\nu & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{N} & -\lambda & -\nu \end{pmatrix} \det F_2, \text{ onde}$$

$$F_i = \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{i+1} + \kappa & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -c_{i+1} + \kappa \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & F_{i+1} & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ c_{i+1} + \kappa & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & -c_{i+1} + \kappa & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & -\nu \end{pmatrix}$$

para $i = 2, \dots, \frac{N+1}{2}$. Trocando a posição das 2 últimas colunas e as duas últimas linhas obtemos

$$\begin{aligned} \det F_i &= \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_{i+1} + \kappa & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_{i+1} + \kappa & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & F_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ c_{i+1} - \kappa & 0 & -\nu & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{i+1} - \kappa & -\lambda & -\nu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_{i+1} + \kappa & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_{i+1} + \kappa & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_{i+1} - \kappa & 0 & -\nu & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{i+1} - \kappa & \lambda & -\nu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & F_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_{i+1} + \kappa & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_{i+1} - \kappa \\ c_{i+1} + \kappa & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & -c_{i+1} - \kappa & -\lambda & -\nu \end{pmatrix} \det F_{i+1}$$

Denotando por

$$S_r = \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_r + \kappa & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_r - \kappa \\ c_r + \kappa & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & -c_r - \kappa & -\lambda & -\nu \end{pmatrix},$$

temos que o $\det F_2 = \prod_{r=3}^{\frac{N+1}{2}} \det S_r$ e portanto, para determinar os autovalores, temos

$$\det S_1 = \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & -\nu & \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & -\lambda & -\nu & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{N} & -\lambda & -\nu \end{pmatrix} \prod_{r=3}^{\frac{N+1}{2}} \det S_r = 0$$

Calcularemos os determinantes, começando por:

$$\det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & -\nu & \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & -\lambda & -\nu & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{N} & -\lambda & -\nu \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\nu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ \kappa & 0 & -\nu & \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & -\lambda & -\nu & 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{N} & 0 & -\nu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{N} & -\lambda & -\nu & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & -\nu & \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & -\lambda & -\nu & 0 & \kappa\sqrt{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & -\nu & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{N} & -\lambda & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\nu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & -\nu & \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 \\ 0 & -\kappa & -\lambda & -\nu & 0 & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{N} & -\lambda & -\nu \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -2\nu & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\det \begin{pmatrix} -2\nu & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0$, ou seja, zero é autovalor de multiplicidade 2. Agora calcularemos o determinante 6×6 restante.

$$\det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & -\nu & \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 \\ 0 & -\kappa & -\lambda & -\nu & 0 & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{N} & -\lambda & -\nu \end{pmatrix} = (\lambda^2 + \nu^2)(\lambda^2 + \nu^2 - \kappa^2 - \kappa_N)^2 = 0$$

O primeiro fator gera as soluções $\lambda = \pm i\nu$ e o segundo fator, as raízes,

$$\lambda = \pm \sqrt{\kappa - \frac{(N-1)^2}{4}}. \quad (4.7)$$

Portanto, para λ ser imaginário puros em (4.7), é necessário e suficiente que

$$\kappa < \left(\frac{N-1}{2}\right)^2 \quad (4.8)$$

Agora, como $\det F_2 = \prod_{r=3}^{\frac{N+1}{2}} \det S_r$, basta igualar o determinante de S_r a zero para cada r .

$$\det S_r = \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & c_r + \kappa & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & -c_r - \kappa \\ c_r + \kappa & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & -c_r - \kappa & -\lambda & -\nu \end{pmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

obtemos as raízes

$$\lambda = \pm \sqrt{(c_r - c_1)(2\kappa + c_r + c_1)} \quad (4.10)$$

Portanto, λ é imaginário puros em (4.10) se e só se

$$\kappa > -\frac{c_r + c_1}{2} \quad (4.11)$$

Finalmente, quando N é par,

$$\det S_1 = \det \begin{pmatrix} -\nu & \lambda & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & -\nu & 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & -\nu & \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & -\lambda & -\nu & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{N} & 0 & -\nu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{N} & -\lambda & -\nu \end{pmatrix} \det F_1,$$

$$\text{onde } \det F_1 = \prod_{r=3}^{\frac{N}{2}} \det S_r \det \begin{pmatrix} -\nu + \frac{c_{N+2}}{2} + \kappa & \lambda \\ -\lambda & -\nu - \frac{c_{N+2}}{2} - \kappa \end{pmatrix}$$

$$\text{Primeiramente, calcularemos } \det \begin{pmatrix} -\nu + \frac{c_{N+2}}{2} + \kappa & \lambda \\ -\lambda & -\nu - \frac{c_{N+2}}{2} - \kappa \end{pmatrix} =$$

$$\left(-\nu + \frac{c_{N+2}}{2} + \kappa\right) \left(-\nu - \frac{c_{N+2}}{2} - \kappa\right) + \lambda^2.$$

Para o determinante acima obtem-se os mesmos valores de λ que em (4.9), exceto que agora são autovalores simples.

A mudança na estabilidade ocorre para os valores de κ dados em (4.8) e (4.11). Esses valores de κ não dependem apenas de r , mas também de N . Com N fixado, denotando-se os valores de κ por

$$\kappa(r, N) = \begin{cases} -\frac{c_r + c_1}{2} = \frac{1}{4}[(N-r)(r-2) - (N-1)], & \text{para } 2 < r \leq \left[\frac{N+2}{2}\right] \\ \left(\frac{N-1}{2}\right)^2, & \text{para } r = 2 \end{cases}$$

e colocando esse valores de κ em ordem crescente obtem-se

$$-0.5 = \kappa(3, N) < \kappa(4, N) < \dots < \kappa\left(\left[\frac{N+2}{2}\right], N\right) < \kappa(2, N) = \frac{(N-1)^2}{4} \quad (4.12)$$

Fixando N , para ter estabilidade espectral é necessário que todas as raízes λ de S_1 ; sejam imaginárias puros. Logo, observando a sequência os valores de κ em (4.12) conclui-se que para a configuração de $N + 1$ vórtices, a estabilidade espectral ocorre apenas para os valores da intensidade do vórtice central no intervalo

$$\kappa\left(\left[\frac{N+2}{2}\right], N\right) < \kappa < \kappa(2, N) \quad (4.13)$$

Resumindo, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 4.2.1. *O equilíbrio \tilde{Q} definido na proposição (2.3.1) no problema de $N + 1$ vórtices com o vórtices central de intensidade κ é espectralmente estável se*

$$\begin{cases} \frac{(N^2-8N+8)}{16} < \kappa < \frac{(N-1)^2}{4}, \text{ para } N \text{ par} \\ \frac{(N^2-8N+7)}{16} < \kappa < \frac{(N-1)^2}{4}, \text{ para } N \text{ impar.} \end{cases} \quad (4.14)$$

4.3 Estabilidade de Liapunov para o anel de vórtices com um vórtice na origem

Nesta seção, vamos estudar a estabilidade segundo Liapunov apenas para os valores de κ em (4.13), pois para os valores de κ onde não temos estabilidade espectral também não teremos estabilidade segundo Liapunov.

Teorema 4.3.1. *O equilíbrio \tilde{Q} definido na proposição (2.3.1) no problema de $N + 1$ vórtices com o vórtices central de intensidade κ é estável segundo Liapunov se*

$$\begin{cases} \frac{(N^2-8N+8)}{16} < \kappa < \frac{(N-1)^2}{4}, \text{ para } N \text{ par} \\ \frac{(N^2-8N+7)}{16} < \kappa < \frac{(N-1)^2}{4}, \text{ para } N \text{ impar.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Demonstração. Seja $M\dot{q} = \mathbf{J}\nabla U(q)$ a equação diferencial que representa o movimento dos vórtices. Fazendo a mudança de variáveis $q_i = (\cos vt \tilde{x}_i - \text{sen} vt \tilde{y}_i, \text{sen} vt \tilde{x}_i + \cos vt \tilde{y}_i)$ (referencial em rotação) para $i = 0, 1, \dots, N$, encontramos o sistema $M\dot{Q} = \mathbf{J}(-\nu MQ + \nabla U(Q))$. Aplicando a transformação $Q = \tilde{Q} + Z$, obtemos o sistema $M\dot{Z} = \mathbf{J}\nabla V(Z)$, onde $V(Z) = -\frac{\nu}{2}(\tilde{Q} + Z)^t M(\tilde{Q} + Z) + U(\tilde{Q} + Z)$ e o problema passa a ser estudar as soluções que começam perto de $\tilde{Z} = 0$. Aplicando a transformação $Z = By$ e o fato de $BM = MB$ e $B^t M = MB^t$, obtem-se o sistema $M\dot{y} = \mathbf{J}B^t \nabla V(By)$. Se definimos $H(y) \doteq V(By)$, temos que $DH(y) = DV(By)B$ ou, tomando o transporte, $\nabla H(y) = B^t \nabla V(By)$. Substituindo esta expressão no sistema acima, ficamos com $M\dot{y} = \mathbf{J}\nabla H(y)$, onde $y \in \mathbb{R}^{2N+2}$, que possui ponto de equilíbrio em $y = 0$. Agora vamos mostrar que para os valores de κ pertencentes ao intervalo (4.15), H é uma função de Liapunov para o sistema, ou seja, satisfaz às seguintes condições:

1. $\tilde{y} = 0$ é ponto de mínimo local estrito de $H(y)$.

2. $\dot{H} \leq 0$.

Pela Teorema (1.2.14), a segunda condição é satisfeita. Resta mostrar que \tilde{y} é ponto de mínimo local estrito de H . Para mostrar que \tilde{y} é ponto de mínimo local estrito é suficiente mostrar pelo Teorema (1.5.5) que a matriz hessiana $D^2H(0)$ é definida positiva o que é equivalente a mostrar que os autovalores de $D^2H(0) = -\nu M + B^t D^2U(\tilde{Q})B = \begin{pmatrix} -\nu \mathbf{I} + R & 0 \\ 0 & -\nu \mathbf{I} - R \end{pmatrix}$ são estritamente positivos.

Para N ímpar, temos

$$\det(D^2H(0) - \lambda I) = \det(-\nu I + R - \lambda I)\det(-\nu I - R - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_3 + \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -c_3 - \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 - \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} \det F_1 \det F_2,$$

onde

$$F_1 = \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c_i + \kappa \\ 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{i+1} + \kappa & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & F_{i+1} & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & c_{i+1} + \kappa & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ c_i + \kappa & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix}$$

para $i = 3, \dots, \frac{N+1}{2}$

$$\det F_i = \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & c_i + \kappa & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_{i+1} + \kappa & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_{i+1} + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_i + \kappa & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} F_{i+1}$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & c_i + \kappa & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_{i+1} + \kappa & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_{i+1} + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_i + \kappa & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} F_{i+1}$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & c_i + \kappa \\ 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_{i+1} + \kappa & 0 \\ 0 & c_{i+1} + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ c_i + \kappa & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix} \det F_{i+1}$$

Denotando por

$$S_l = \begin{pmatrix} c_l + \kappa - \lambda & 0 & 0 & c_l + \kappa \\ 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_{l+1} + \kappa & 0 \\ 0 & c_{l+1} + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ c_l + \kappa & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix},$$

e

$$T_l = \begin{pmatrix} c_l + \kappa - \lambda & 0 & 0 & -c_l - \kappa \\ 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -c_{l+1} - \kappa & 0 \\ 0 & -c_{l+1} - \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ -c_l - \kappa & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix},$$

temos que o $\det F_1 = \prod_{l=3}^{\frac{N+1}{2}} \det S_l$. Usando os mesmos argumentos para calcular F_2 que usaremos para calcular F_1 obtemos $\det F_2 = \prod_{l=3}^{\frac{N+1}{2}} \det T_l$ e, portanto,

$$\det F_2 = \prod_{l=3}^{\frac{N+1}{2}} \det T_l$$

$$\det(D^2H(0) - \lambda I) = \det(-\nu I + R)\det(-\nu I - R) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_3 + \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -c_3 - \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 - \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} \prod_{l=3}^{\frac{N+1}{2}} \det S_l \prod_{k=3}^{\frac{N+1}{2}} \det T_k.$$

Como $\det(S_l - \lambda I) = \det(T_l - \lambda I)$, isto é, possuem o mesmo conjunto de autovalores, que são $\lambda_1 = c_1 - c_l$, $\lambda_2 = c_1 - c_{l+1}$, $\lambda_3 = 2\kappa + c_l + c_1$ e $\lambda_4 = 2\kappa + c_{l+1} + c_1$, temos:

$$\det(D^2H(0) - \lambda I) = \det(-\nu I + R)\det(-\nu I - R) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_3 + \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -c_3 - \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 - \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} \left(\prod_{l=3}^{\frac{N+1}{2}} \det S_l \right)^2$$

Agora mostraremos que os autovalores de S_l , $l \geq 3$, ou seja, λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 são positivos, com κ pertencente ao intervalo (4.15):

$$\lambda_1 = c_1 - c_l = \frac{N-1}{2} - \left(-\frac{(N-l)(l-2)}{2} \right) = \frac{N-1}{2} + \left(\frac{(N-l)(l-2)}{2} \right) > 0$$

$$\lambda_2 = c_1 - c_{l+1} > \frac{N-1}{2} - \left(-\frac{(N-l-1)(l-3)}{2} \right) = \frac{N-1}{2} + \left(\frac{(N-l-1)(l-3)}{2} \right) > 0$$

$$\lambda_3 = c_1 + c_l + 2\kappa > c_1 + c_l + 2 \left(-\frac{c_1 + c_l}{2} \right) = 0$$

$$\lambda_4 = c_1 + c_{l+1} + 2\kappa > c_1 + c_{l+1} + 2 \left(-\frac{c_1 + c_{l+1}}{2} \right) = 0$$

Agora obteremos os autovalores das matrizes 6×6 , e em seguida mostraremos que são positivos:

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_3 + \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} = \\
 & = -\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_3 + \kappa & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \end{pmatrix} = \\
 & = \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_3 + \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \end{pmatrix} = \\
 & = -\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & c_3 + \kappa \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix} = \\
 & = -\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & c_3 + \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix} = \\
 & = \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & c_3 + \kappa \\ c_3 + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Calcularemos os determinantes separadamente:

$\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & c_3 + \kappa \\ c_3 + \kappa & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - c_1 - c_3 - 2\kappa)(\xi - c_1 + c_3)$, cujo os autovalores são $\lambda = c_1 + c_3 + 2\kappa$ e $\xi = c_1 - c_3$. Vamos verificar se são positivos com κ no intervalo (4.15):

$$\lambda = c_1 + c_3 + 2\kappa = \frac{N-1}{2} + \frac{3-N}{2} + 2\kappa = \kappa + 1 > 0$$

$$\xi = c_1 - c_3 = N - 2 > 0, \text{ pois } N \geq 3$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Por outro lado, } \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} = \\
 & = -\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} = \\
 & = \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \\ 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 & = \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & \kappa & 0 & 0 \\ \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & -\kappa\sqrt{N} & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \\ 0 & 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 \end{pmatrix} = \\
 & = \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & \kappa & 0 & 0 \\ \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa\sqrt{N} & 0 \\ 0 & -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} = \\
 & = \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & \kappa & 0 \\ \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} \det(2(c_1 + \kappa) - \lambda)
 \end{aligned}$$

Para mostrar que os autovalores da matriz $\begin{pmatrix} c_1 + \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & c_1 + \kappa & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) \end{pmatrix}$ são positivos,

basta usar o critério de Sylvester (teorema 1.5.2):

$$\det(c_1 + \kappa) = c_1 + \kappa > c_1 = \frac{N-1}{2} > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa & \kappa \\ \kappa & c_1 + \kappa \end{pmatrix} = (c_1 + \kappa)^2 - \kappa^2 = c_1^2 + 2c_1\kappa + \kappa^2 - \kappa^2 = c_1(c_1 + 2\kappa) > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & \kappa & 0 \\ \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (c_1 + \kappa) \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa & -\kappa\sqrt{N} \\ -\kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) \end{pmatrix} - \kappa \det \begin{pmatrix} \kappa & -\kappa\sqrt{N} \\ 0 & \kappa(c_1 + \kappa) \end{pmatrix}$$

$$= (c_1 + \kappa) (\kappa(c_1 + \kappa)^2 - \kappa^2 N) - \kappa (\kappa^2 (c_1 + \kappa))$$

$$= \kappa(c_1 + \kappa)^3 - \kappa^2 N(c_1 + \kappa) - \kappa^3(c_1 + \kappa)$$

$$= (c_1 + \kappa) \kappa ((c_1 + \kappa)^2 - \kappa N - \kappa^2)$$

$$= (c_1 + \kappa) \kappa (c_1^2 + 2c_1\kappa - \kappa N)$$

$$\begin{aligned}
&= (c_1 + \kappa)\kappa (c_1^2 + \kappa(2c_1 - N)) \\
&= (c_1 + \kappa)\kappa \left(c_1^2 + \kappa \left(2\left(\frac{N-1}{2}\right) - N \right) \right) \\
&= (c_1 + \kappa)\kappa(c_1^2 - \kappa) > 0
\end{aligned}$$

já que $c_1 + \kappa > 0$ e $c_1^2 - \kappa = \frac{(N-1)^2}{2} - \kappa > 0$, pois κ esta no intervalo (4.15). Portanto, os autovalores são positivos

Finalmente, vamos calcular os autovalores da matriz 6×6 :

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & -c_3 - \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 - \kappa & c_1 + \kappa - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} & 0 & 0 & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} &= \\
= \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} &\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & -c_3 - \kappa \\ -c_3 - \kappa & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Novamente, calcularemos os determinantes separadamente:

$$\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & -c_3 - \kappa \\ -c_3 - \kappa & c_1 + \kappa - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - c_1 - c_3 - 2\kappa)(\lambda - c_1 + c_3), \text{ que são os mesmo autovalores obtidos acima.}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & c_1 + \kappa - \lambda & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & 0 & \kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} &= \\
= \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa & 0 \\ -\kappa & c_1 + \kappa - \lambda & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & \kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} &\det(-\lambda)
\end{aligned}$$

encontramos $\lambda = 0$ e, para mostra que os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} c_1 + \kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & c_1 + \kappa & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & \kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) \end{pmatrix} \text{ são positivos, novamente usaremos o critério de Sylvester.}$$

$$\det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & c_1 + \kappa \end{pmatrix} = (c_1 + \kappa)^2 - \kappa^2 = c_1^2 - 2c_1\kappa > c_1 + 2c_1 = \frac{(N-1)^2}{4} + (N+1) > 0$$

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa - \lambda & -\kappa & 0 \\ -\kappa & c_1 + \kappa - \lambda & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & \kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) - \lambda \end{pmatrix} &= \\
 &= (c_1 + \kappa) \det \begin{pmatrix} c_1 + \kappa & \kappa\sqrt{N} \\ \kappa\sqrt{N} & \kappa(c_1 + \kappa) \end{pmatrix} + \kappa \det \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa\sqrt{N} \\ 0 & \kappa(c_1 + \kappa) \end{pmatrix} \\
 &= (c_1 + \kappa) (\kappa(c_1 + \kappa)^2 - \kappa^2 N) - \kappa^3 (c_1 + \kappa) \\
 &= (c_1 + \kappa) \kappa ((c_1 + \kappa)^2 - \kappa N - \kappa^2) \\
 &= (c_1 + \kappa) \kappa (c_1^2 + 2c_1\kappa - \kappa N) \\
 &= (c_1 + \kappa) \kappa (c_1^2 + \kappa(2c_1 - N)) \\
 &= (c_1 + \kappa) \kappa (c_1^2 - \kappa) > 0
 \end{aligned}$$

Finalmente quando N é par, além dos já descritos, os seguintes autovalores devem ser considerados:

$$\mu = c_1 + c_{\frac{N+2}{2}} + 2\kappa \text{ e } \eta = c_1 - c_{\frac{N+2}{2}}.$$

É fácil ver que estes autovalores também são positivos:

$$\mu = c_{\frac{N+2}{2}} + c_1 + 2\kappa > c_{\frac{N+2}{2}} + c_1 - c_1 + c_{\frac{N+2}{2}} = 0$$

$$\eta = c_1 - c_{\frac{N+2}{2}} = \frac{N-1}{2} - \left(-\frac{(N-2)^2}{4} \right) = \frac{N-1}{2} + \frac{(N-2)^2}{4} > 0.$$

Como todos os autovalores de $D^2H(0)$ são positivos, com exceção do autovalor nulo correspondente à invariância por rotações, a função $H(y)$ tem um ponto de mínimo estrito em $y = 0$ quando considerada no espaço quociente. \square

Capítulo 5

Estabilidade segundo Liapunov de um anel de vórtices em uma latitude fixada

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos alguns dos resultados do artigo [6]. Como já vimos no capítulo 1, a equação que descreve o movimento de N vórtices pontuais é dada por

$$\dot{\psi}_j(t) = \sum_{i \neq j}^N k_i \frac{\psi_i(t) \times \psi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

Mostraremos na seção 5.2 que, quando os vórtices estão na esfera de raio 1 afastados dos polos, estas equações são equivalentes às equações de um sistema hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$H_1(\varphi(t), \mathbf{z}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \ln[1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}\sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))] \quad (5.2)$$

onde a posição de cada vórtice é representada por coordenadas cilíndricas $q_j = (\varphi_j, z_j)$, isto é, pela distância do vórtice ao plano equatorial, z_j , e pela sua longitude φ_j e onde $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{N-1}(t))$, $\mathbf{z}(t) = (z_0(t), z_1(t), \dots, z_{N-1}(t))$. Na seção 5.3 estudaremos em particular o caso de N vórtices em uma latitude fixa, com intensidade $\kappa_j = 1$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, $N > 2$, dispostos nos vértices de um polígono regular. Mostraremos que para uma certa velocidade angular, esta configuração em rotação é um ponto de equilíbrio do sistema quando descrito em um referencial em rotação, com esta mesma velocidade angular, ou seja, é uma configuração de equilíbrio relativo. Além disso, mostraremos que o sistema de equações diferenciais obtido neste novo sistema de referência ainda corresponde a um sistema hamiltoniano. A seguir, estudaremos a estabilidade segundo Liapunov desse anel de vórtices

em rotação. Para isto, mostraremos que a hessiana de H neste anel em rotação possui todos os autovalores negativos para $N < 7$, ou seja, a hessiana para $N < 7$ é definida negativa, o que implica que o oposto da função hamiltoniana é uma função de Liapunov para o sistema.

Portanto, temos estabilidade no sentido de Liapunov somente quando $N < 7$, enquanto para $N \geq 7$ o anel de vórtices numa latitude fixada não é estável no sentido de Liapunov.

5.2 Verificação da formulação hamiltoniana da equação de movimento

A proposição seguinte mostra que as equações do movimento para um sistema de N vórtices podem ser descritas por um sistema hamiltoniano.

Proposição 5.2.1. *Seja $H_1 : R^N \times R^N \rightarrow R$ definida por (5.2). Então as equações (5.1) que descrevem o movimento de N vórtices afastados dos polos na esfera, para $i = 0, 1, \dots, N - 1$ são equivalentes a*

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_j(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial z_j}(\varphi(t), z(t)) \\ \dot{z}_j(t) = \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_j}(\varphi(t), z(t)) \end{cases} \quad \text{para } j = 0, \dots, N - 1.$$

Demonstração. Para demonstrar esta afirmação tomamos $\psi_j(t) = (x_j(t), y_j(t), z_j(t))$. Então

$$\begin{cases} x_j(t) = \sqrt{1 - z_j^2(t)} \cos \varphi_j(t) \\ y_j(t) = \sqrt{1 - z_j^2(t)} \sin \varphi_j(t) \\ z_j(t) = z_j(t) \end{cases}$$

e

$$\dot{\psi}(t) = \left(\frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)\cos\varphi_j(t)}{\sqrt{1 - z_j^2(t)}} - \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin(\varphi_j(t))\dot{\varphi}_j(t), \frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)\sin\varphi_j(t)}{\sqrt{1 - z_j^2(t)}} + \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin(\varphi_j(t))\dot{\varphi}_j(t), \dot{z}_j(t) \right).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \psi_i(t) \times \psi_j(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t) & \sqrt{1 - z_i^2(t)}\sin\varphi_i(t) & z_i(t) \\ \sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t) & \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin\varphi_j(t) & z_j(t) \end{vmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin\varphi_i(t) & z_i(t) \\ \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin\varphi_j(t) & z_j(t) \end{pmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos\varphi_i(t) & z_i(t) \\ \sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t) & z_j(t) \end{pmatrix} \mathbf{j} + \\ &\det \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos\varphi_i(t) & \sqrt{1 - z_i^2(t)}\sin\varphi_i(t) \\ \sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t) & \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin\varphi_j(t) \end{pmatrix} \mathbf{k} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(z_j(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{sen}\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{sen}\varphi_i(t) \right) \mathbf{i} \\
 &- \left(z_j(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t) \right) \mathbf{j} \\
 &+ \left(z_i(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t)\text{sen}\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t)\text{sen}\varphi_j(t) \right) \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{\psi_i(t) \times \psi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2} &= \left(\frac{z_j(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{sen}\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{sen}\varphi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{-z_j(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t) + z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t)\text{sen}\varphi_i(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t)\text{sen}\varphi_i(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2} \right)
 \end{aligned}$$

Igualando as primeiras duas componentes das equações acima obtemos

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)\text{cos}\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\
 &\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{sen}\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}\varphi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}, \\
 &\frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)\text{sen}\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\
 &\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}
 \end{aligned} \right. \quad (5.3)$$

Multiplicando a primeira das equações acima por $(-\text{sen}\varphi_j(t))$ e a outra por $(\text{cos}\varphi_j(t))$ temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)\cos\varphi_j(t)\sen\varphi_j(t)}{1 - \sqrt{z_j^2(t)}} + \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sen^2\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\ = - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1 - z_i^2(t)}\sen\varphi_j(t)\sen\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1 - z_j^2(t)}\sen^2\varphi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}, \\ \frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)\sen\varphi_j(t)\cos\varphi_j(t)}{1 - \sqrt{z_j^2(t)}} + \sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos^2\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\ = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos\varphi_i(t)\cos\varphi_j(t) - z_i(t)\sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos^2\varphi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2} \end{array} \right.$$

e somando temos,

$$\sqrt{1 - z_j^2(t)}\dot{\varphi}_j(t) = - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) + z_i(t)\sqrt{1 - z_j^2(t)}}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}$$

isto é,

$$\dot{\varphi}_j(t) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-z_j(t)\frac{\sqrt{1 - z_i^2(t)}}{\sqrt{1 - z_j^2(t)}}\cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) + z_i(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}.$$

Mas,

$$(\psi_j(t) - \psi_i(t)) = \left(\sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos(\varphi_j(t)) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos(\varphi_i(t)), \right. \\ \left. \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sen(\varphi_j(t)) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}\sen(\varphi_i(t)), z_j(t) - z_i(t) \right)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2 &= (\sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos(\varphi_j(t)) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos(\varphi_i(t)))^2 + \\ &+ (\sqrt{1 - z_j^2(t)}\sen(\varphi_j(t)) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}\sen(\varphi_i(t)) + (z_j(t) - z_i(t)))^2 \\ &= (1 - z_j(t))\cos^2(\varphi_j(t)) - 2\sqrt{1 - z_j^2(t)}\sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos(\varphi_j(t))\cos(\varphi_i(t)) + \\ &+ (1 - z_i^2(t))\cos^2(\varphi_i(t)) + (1 - z_j^2(t))\sen^2(\varphi_j(t)) \\ &- 2\sqrt{1 - z_i^2(t)}\sqrt{1 - z_j^2(t)}\sen(\varphi_j(t))\sen(\varphi_i(t)) \\ &+ (1 - z_i^2(t))^2\sen^2(\varphi_i(t)) + z_j(t) - 2z_j(t)z_i(t) + z_i^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos^2(\varphi_j(t)) - z_j^2(t)\cos^2(\varphi_j(t)) \\
 &\quad - 2\sqrt{1 - z_j^2(t)}\sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos(\varphi_j(t))\cos(\varphi_i(t)) + \cos^2(\varphi_j(t)) \\
 &\quad - z_i^2(t)\cos^2(\varphi_i(t)) + \sin^2(\varphi_j(t) - z_j^2(t)\sin^2(\varphi_j(t)) \\
 &\quad - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)}\sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin(\varphi_j(t))\sin(\varphi_i(t)) + \\
 &\quad + \sin^2(\varphi_j(t)) - z_i^2(t)\sin^2(\varphi_i(t)) + z_j(t) - 2z_j(t)z_i(t) + z_i^2(t) \\
 &= 2 - 2z_j(t)z_i(t) - 2\sqrt{1 - z_j^2(t)}\sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{\varphi}_j(t) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{1}{2} \frac{-z_j(t)\frac{\sqrt{1-z_i^2(t)}}{\sqrt{1-z_j^2(t)}}\cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) + z_i(t)}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))}$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (5.3) por $(\cos(\varphi_j(t)))$ e a segunda por $(\sin(\varphi_j(t)))$, obtemos as equações,

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)\cos^2(\varphi_j(t))}{\sqrt{1 - z_j^2(t)}} - \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin(\varphi_j(t))\cos(\varphi_j(t))\dot{\varphi}_j(t) = \\
 &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1 - z_i^2(t)}\sin\varphi_j(t)\cos\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos(\varphi_j(t))\sin\varphi_j(t)}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}, \\
 &\frac{-z_j\dot{z}_j\sin^2(\varphi_j(t))}{\sqrt{1 - z_j^2(t)}} + \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin(\varphi_j(t))\cos(\varphi_j(t))\dot{\varphi}_j(t) = \\
 &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-z_j(t)\sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos(\varphi_i(t))\sin(\varphi_j(t) + z_i(t))\sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos(\varphi_j(t))\sin(\varphi_j(t))}{\|\psi_j(t) - \psi_i(t)\|^2}
 \end{aligned} \right.$$

Somando as duas equações acima, obtemos:

$$\frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)}{\sqrt{1 - z_j^2(t)}} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{\|\psi_i - \psi_j(t)\|^2},$$

de onde,

$$-z_j(t)\dot{z}_j(t) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1 - z_i^2(t)}\sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{2 - 2z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}\sqrt{1 - z_j^2(t)}\cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}$$

e

$$\dot{z}_j(t) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-1}{2} \frac{\sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1-z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}.$$

Agora, calcularemos as derivadas parciais $\frac{\partial H_1}{\partial z_j}(\varphi(t), \mathbf{z}(t))$ e $\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_j}(\varphi(t), \mathbf{z}(t))$ e compararemos os resultados.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial z_k}(\varphi(t), \mathbf{z}(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{\partial}{\partial z_k} \ln[1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{-\delta_{ik}z_j(t) - \delta_{jk}z_i(t) + \frac{z_i(t)}{\sqrt{1-z_i^2(t)}}\delta_{ik}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} + \\ &\quad + \frac{\frac{z_i(t)}{\sqrt{1-z_i^2(t)}}\delta_{jk}\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{-\delta_{ik}z_j(t)}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} - \\ &\quad - \frac{-\delta_{jk}z_i(t)}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} + \\ &\quad + \frac{\frac{z_i(t)}{\sqrt{1-z_i^2(t)}}\delta_{ik}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} + \\ &\quad + \frac{\frac{z_i(t)}{\sqrt{1-z_i^2(t)}}\delta_{jk}\sqrt{1-z_i^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{-\delta_{ik}z_j(t)}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{-\delta_{jk}z_i(t)}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{\frac{z_i(t)}{\sqrt{1-z_i^2(t)}}\delta_{ik}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{\frac{z_i(t)}{\sqrt{1-z_i^2(t)}} \delta_{jk} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} \\
 = & \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \frac{-z_j(t)}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} - \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=k-1}^0 \frac{-z_i(t)}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \frac{\frac{z_i(t)}{\sqrt{1-z_i^2(t)}} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{j=k-1}^0 \frac{\frac{z_i(t)}{\sqrt{1-z_i^2(t)}} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} \\
 = & \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \frac{-z_j(t) \frac{z_k(t)}{\sqrt{1-z_k^2(t)}} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_k(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_k(t)z_j(t) - \sqrt{1-z_k^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_k(t) - \varphi_j(t))} + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{j=k-1}^0 \frac{-z_j(t) + \frac{z_k(t)}{\sqrt{1-z_k^2(t)}} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_j(t) - \varphi_k(t))}{1 - z_j(t)z_k(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)} \sqrt{1-z_k^2(t)} \cos(\varphi_j(t) - \varphi_k(t))} \\
 = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-z_j(t) + \frac{z_k(t)}{\sqrt{1-z_k^2(t)}} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_k(t) - \varphi_j(t))}{1 - z_k(t)z_j(t) - \sqrt{1-z_k^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos(\varphi_k(t) - \varphi_j(t))}.
 \end{aligned}$$

A outra derivada parcial é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_k(t)}(\varphi(t), \mathbf{z}(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{\partial}{\partial \varphi_k(t)} \ln[1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{-\sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} (-\text{sen}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))) (\delta_{ik} - \delta_{jk})}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{-\sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} \text{sen}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) \delta_{ik}}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} - \\
 & \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j < N} \frac{\sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j^2(t)} \text{sen}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) \delta_{jk}}{1 - z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} \sqrt{1-z_j(t)} \cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^0 \frac{-\sqrt{1-z_k^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}(\varphi_k(t)-\varphi_j(t))}{1-z_k(t)z_j(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_k(t)-\varphi_j(t))} - \\
&\frac{1}{2} \sum_{i=k-1}^0 \frac{\sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_k^2(t)}\text{sen}(\varphi_i(t)-\varphi_k(t))}{1-z_i(t)z_k(t)-\sqrt{1-z_i^2(t)}\sqrt{1-z_k^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t)-\varphi_k(t))} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \frac{-\sqrt{1-z_k^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}(\varphi_k(t)-\varphi_j(t))}{1-z_k(t)z_j(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_k(t)-\varphi_j(t))} - \\
&\frac{1}{2} \sum_{j=k-1}^0 \frac{\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_k^2(t)}\text{sen}(\varphi_j(t)-\varphi_k(t))}{1-z_j(t)z_k(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_k^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t)-\varphi_k(t))} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \frac{-\sqrt{1-z_k^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}(\varphi_j(t)-\varphi_k(t))}{1-z_k(t)z_j(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}(\varphi_k(t)-\varphi_j(t))} - \\
&\frac{1}{2} \sum_{j=k-1}^0 \frac{\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_k^2(t)}\text{sen}(\varphi_j(t)-\varphi_k(t))}{1-z_j(t)z_k(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_k^2(t)}\text{cos}(\varphi_j-\varphi_k(t))} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-\sqrt{1-z_k^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}(\varphi_j(t)-\varphi_k(t))}{1-z_k(t)z_j(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_k^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t)-\varphi_k(t))}.
\end{aligned}$$

Comparando os resultados, verificamos que a proposição (5.2.1) é de fato válida. \square

5.3 Estabilidade segundo Liapunov do equilíbrio

Introduzimos um sistema de coordenadas que gira com velocidade angular ω no sentido anti-horário em torno do eixo polar. Neste novo referencial, as coordenadas são dadas por $\tilde{\varphi}_j(t) = \varphi_j(t) + \omega t$ e $\tilde{z}_j(t) = z_j(t)$. Como $\dot{\tilde{\varphi}}_j(t) = \dot{\varphi}_j(t) + \omega$ e sabemos que $\dot{\varphi}_j(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial z_j}(\varphi, \mathbf{z})$, ou seja, $\dot{\tilde{\varphi}}_j(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial z_j}(\tilde{\varphi} - \omega, \tilde{\mathbf{z}}) + \omega$ onde $\omega = (\omega, \omega, \dots, \omega) \in R^N$, e como $z_j(t) = \tilde{z}_j(t)$ temos

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varphi}}_j(t) = -\left(\frac{\partial H_1}{\partial \tilde{z}_j}(\tilde{\varphi}, \tilde{\mathbf{z}}) - \omega\right) \\ \dot{\tilde{z}}_j(t) = \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\varphi}_j}(\tilde{\varphi}, \tilde{\mathbf{z}}). \end{cases}$$

Com isto, se formarmos a hamiltoniana $H(\tilde{\varphi}, \tilde{z}) = H_1(\tilde{\varphi} - \omega, \tilde{z}) - \omega \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{z}_i(t)$ teremos

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varphi}}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{z}_j}(\tilde{\varphi}, \tilde{z}) \\ \dot{\tilde{z}}_j(t) = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\varphi}_j}(\tilde{\varphi}, \tilde{z}) \end{cases} \quad (5.4)$$

Por simplicidade, usaremos a notação antiga, $\varphi_j(t)$ e $z_j(t)$, no lugar da nova, $\tilde{\varphi}_j(t)$ e $\tilde{z}_j(t)$.

Coloquemos N vórtices de intensidade unitária numa latitude fixada z , com $-1 < z < 1$, nos vértices de um polígono regular com configuração

$$\tilde{Q} = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$$

definida por

$$\begin{cases} z_j = z \\ \varphi_j = \frac{2\pi j}{N} \end{cases} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.5)$$

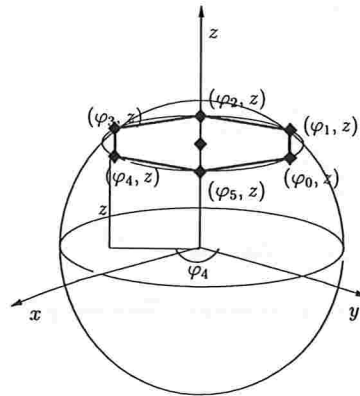


Figura 5.1: Posição de equilíbrio do anel de vórtices em uma latitude fixada, para $N = 6$.

Isto corresponde a termos os vórtices nos vértices de um polígono regular em um plano paralelo ao plano xy . Então, para esta configuração ser estacionária neste sistema em rotação é necessário que

$$\omega = -\frac{(N-1)z}{2(1-z^2)}$$

Para demonstramos esta afirmação, usaremos que

$$\frac{\partial H}{\partial z_k}(\varphi, \mathbf{z}) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-z_j + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j)} - 2\omega \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Fazendo $\frac{\partial H}{\partial z_k}(\varphi, \mathbf{z}) = 0$, obtemos

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-z_j + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j)}$$

Substituindo $z_j = z$,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-z + z \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{1 - z^2 - (1-z)^2 \cos(\varphi_k - \varphi_j)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-z(1 - \cos(\varphi_k - \varphi_j))}{(1-z^2)(1 - \cos(\varphi_k - \varphi_j))} \\ &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-z}{2(1-z^2)} \\ &= -\frac{(N-1)z}{2(1-z^2)}, \end{aligned}$$

que é o que queríamos demonstrar.

Agora, demonstraremos que a configuração (5.5) de fato é um ponto de equilíbrio para o sistema (5.4) para esta velocidade angular. Temos que mostrar $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial z_k}(\tilde{Q}) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_k}(\tilde{Q}) = 0 \end{cases}$. Fazendo $z_j = z$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial z_k}(\tilde{Q}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-z + z \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{1 - z^2 - (1-z)^2 \cos(\varphi_k - \varphi_j)} - \omega \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-z(1 - \cos(\varphi_k - \varphi_j))}{(1-z^2)(1 - \cos(\varphi_k - \varphi_j))} - \omega \\ &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-z}{2(1-z^2)} - \omega \\ &= -\frac{(N-1)z}{2(1-z^2)} - \omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

para nossa escolha de ω . Agora, fazendo $z = z_j$ e $\varphi_j = \frac{2\pi j}{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \varphi_k}(\tilde{Q}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-(1-z^2)\text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{(1-z^2)(1-\cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-\text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{(1-\cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-2\text{sen}\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-2\text{sen}\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right)}{2\text{sen}^2\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-\cos\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} -\text{cotg}\left(\left(j-k\right)\frac{\pi}{N}\right)
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de índices $l = j - k$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \varphi_k}(\tilde{Q}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{l=-k \\ l \neq k}}^{N-k-1} -\text{cotg}\left(\frac{l\pi}{N}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l=-k}^{-1} \text{cotg}\left(\frac{l\pi}{N}\right) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N-k-1} \text{cotg}\left(\frac{l\pi}{N}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l=-k}^{-1} \text{cotg}\left(\frac{l\pi}{N} + \frac{N\pi}{N}\right) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N-k-1} \text{cotg}\left(\frac{l\pi}{N}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l=-k}^{-1} \text{cotg}\left(\frac{\pi}{N}(l+N)\right) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N-k-1} \text{cotg}\left(\frac{l\pi}{N}\right)
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de índices $i = l + N$, obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_k}(\tilde{Q}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=N-k}^{N-1} \text{cotg}\left(\frac{\pi i}{N}\right) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N-k-1} \text{cotg}\left(\frac{l\pi}{N}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \sum_{l=N-k}^{N-1} \cotg\left(\frac{\pi l}{N}\right) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N-k-1} \cotg\left(\frac{l\pi}{N}\right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N-1} \cotg\left(\frac{l\pi}{N}\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Queremos mostrar que o ponto de equilíbrio \tilde{Q} é estável segundo Liapunov. Pelo teorema (1.2.14) a função H é uma integral primeira do sistema (5.4) e, portanto, $G = H - H(0)$, é uma integral primeira deste sistema. Como $\nabla H(\tilde{Q}) = 0$, o desenvolvimento de Taylor de G é

$$G(\tilde{Q} + h) = \frac{1}{2} h^T D^2 H(\tilde{Q}) h + \dots$$

onde as reticências significam os termos de ordem superior. Para estudar a estabilidade deste equilíbrio, vamos estudar a matriz simétrica $D^2 H(\tilde{Q})$. Se ela for definida negativa G terá um máximo estrito em um vizinhança de \tilde{Q} . Logo, $-G$ terá um mínimo estrito e, servirá como função de Liapunov para o equilíbrio \tilde{Q} de (5.4) e, pelo teorema (1.2.6), temos estabilidade segundo Liapunov para o equilíbrio estudado.

5.3.1 Obtenção da matriz hessiana

Agora, obteremos as segundas derivadas de H no equilíbrio \tilde{Q} . Para isto utilizaremos as formulas

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\pi j}{N}} = \frac{N^2 - 1}{3} \quad (5.6)$$

e

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}^2 \frac{kj\pi}{N}}{\text{sen}^2 \frac{j\pi}{N}} = k(N - k), \text{ para } k = 0, 1, \dots, N \quad (5.7)$$

que estão demonstradas no apêndice A.

Vamos então calcular as derivadas de segunda ordem de H . Para $l \neq k$,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_l \partial \varphi_k}(\varphi, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \varphi_l} \left(\frac{-\sqrt{1 - z_k^2} \sqrt{1 - z_j^2} \text{sen}(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1 - z_k^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \delta_{jl} \frac{-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_k^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)} + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \delta_{jl} \frac{\left(\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_k^2} \operatorname{sen}(\varphi_j - \varphi_k) \right)}{\left(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k) \right)} \\
&\quad \frac{\left(\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \operatorname{sen}(\varphi_j - \varphi_k) \right)}{\left(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k) \right)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\left(-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_k^2} \cos(\varphi_l - \varphi_k) \right)}{1 - z_k z_l - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \cos(\varphi_l - \varphi_k)} + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\left(\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \operatorname{sen}(\varphi_l - \varphi_k) \right) \left(\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \operatorname{sen}(\varphi_l - \varphi_k) \right)}{\left(1 - z_k z_l - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \cos(\varphi_l - \varphi_k) \right)^2}
\end{aligned}$$

Fazendo $z_l = z_k = z$, $\varphi_l = \frac{2\pi l}{N}$ e $\varphi_k = \frac{2\pi k}{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_l \partial \varphi_k}(\tilde{Q}) &= \frac{1}{2} \frac{\left(-(1-z^2) \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right) \left(1 - z^2 - (1-z^2) \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)}{\left(1 - z^2 - (1-z^2) \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)^2} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\left((1-z^2) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right) \left((1-z^2) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)}{\left(1 - z^2 - (1-z^2) \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)^2} \\
&= \frac{-\left(1-z^2\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) + \left(1-z^2\right)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) + \left(1-z^2\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{2\left(1-z^2\right)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)\right)^2} \\
&= \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)\right)^2} \\
&= \frac{1}{2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi l}{N}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi l}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{k-l}{N}\right) \pi}
\end{aligned}$$

Ainda para $l \neq k$,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial z_k}(\varphi, z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial z_l} \left(\frac{-z_j + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \sqrt{1-z_j} \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k} \sqrt{1-z_j} \cos(\varphi_k - \varphi_j)} - w \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\left(-\delta_{jl} + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \frac{\delta_{jl}}{\sqrt{1-z_j^2}} \cos(\varphi_k - \varphi_j) \right)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\left(-z_j + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j) \right)}{\left(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j) \right)} \\
 &\quad \frac{\left(-\delta_{jl} z_k - \delta_{jl} \frac{\sqrt{1-z_k^2}}{\sqrt{1-z_j^2}} \cos(\varphi_k - \varphi_l) \right)}{\left(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j) \right)} \\
 &= \frac{\left(-1 + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \frac{\cos(\varphi_k - \varphi_l)}{\sqrt{1-z_l^2}} \right)}{1 - z_k z_l - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \cos(\varphi_k - \varphi_l)} \\
 &\quad - \frac{\left(-z_l + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \sqrt{1-z_l^2} \cos(\varphi_k - \varphi_l) \right) \left(-z_k - \frac{\sqrt{1-z_k^2}}{\sqrt{1-z_l^2}} \cos(\varphi_k - \varphi_l) \right)}{\left(1 - z_k z_l - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \cos(\varphi_k - \varphi_l) \right)^2}
 \end{aligned}$$

Fazendo $z_l = z_k = z$, $\varphi_l = \frac{2\pi l}{N}$ e $\varphi_k = \frac{2\pi k}{N}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial z_k}(\tilde{Q}) &= \frac{1}{2} \frac{\left(-1 + \frac{z}{1-z^2} \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \right) \left((1-z^2) - (1-z^2) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \right)}{\left(1 - z^2 - (1-z^2) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \right)^2} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\left(-z + z \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \right) \left(-z - \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \right)}{\left(1 - z^2 - (1-z^2) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \right)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right)}{\left(1 - z^2 - (1-z^2) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \right)^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right)}{\left(1 - z^2 \right)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \right)^2} \right) \\
 &= \frac{-1}{2 \left(1 - z^2 \right)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \right)} \\
 &= \frac{-1}{2 \left(1 - z^2 \right)^2 \left(1 - \cos 2\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi l}{N}\right) \right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2(1-z^2)(2\text{sen}^2(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi l}{N}))} \\
&= \frac{-1}{4(1-z^2)\text{sen}^2(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi l}{N})}
\end{aligned}$$

Para $l = k$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_k^2}(\varphi, z) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\frac{-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \text{sen}(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{(-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} (\cos(\varphi_j - \varphi_k))(0-1))}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_j^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)} - \\
&\quad \frac{(-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} (-\text{sen}(\varphi_l - \varphi_k))(-1)) (-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \text{sen}(\varphi_l - \varphi_k))}{(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_j^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k))^2}
\end{aligned}$$

Fazendo $z_j = z_k = z$, $\varphi_j(t) = \frac{2\pi j}{N}$ e $\varphi_k(t) = \frac{2\pi k}{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_k^2}(\tilde{Q}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{((1-z^2)\cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}))}{1-z^2 - (1-z^2)\cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N})} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{((1-z^2)\text{sen}(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N})) (- (1-z^2)\text{sen}(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}))}{(1-z^2 - (1-z^2)\cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}))^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{(1-z^2)^2 \cos(\varphi_j - \frac{2\pi k}{N}) - (1-z^2)^2 \cos^2(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N})}{(1-z^2 - (1-z^2)\cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}))^2} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{(1-z^2)^2 \text{sen}^2(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N})}{(1-z^2 - (1-z^2)\cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}))} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}) - \cos^2(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}) - \text{sen}^2(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N})}{(1-z^2)^2 (1 - \cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}))} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}) - 1}{(1 - \cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}))^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{1}{2\text{sen}^2\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi k}{N}\right)} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{1}{2\text{sen}^2\left(\frac{(j-k)\pi}{N}\right)}
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de índices $i = j - k$ e excluindo o caso em que $i = 0$, pois corresponde a $j = k$, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi_k^2}(\tilde{Q}) &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi i}{N}\right)} \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{N^2 - 1}{3} \right) \\
 &= -\frac{N^2 - 1}{12}
 \end{aligned}$$

Para $k = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 H}{\partial z_k^2}(\varphi, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{-z_j + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j)} - w \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\left(\frac{1}{(1-z_k^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j) \right)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j)} \\
 &\quad \frac{\left(-z_j + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j) \right)^2}{\left(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_k - \varphi_j) \right)^2}
 \end{aligned}$$

Fazendo $z_j = z_k = z, \varphi_k = \frac{2k\pi}{N}$ e $\varphi_j = \frac{2j\pi}{N}$,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z_k^2}(\tilde{Q}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\frac{\cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right)}{(1-z^2)} (1 - z^2 - (1 - z^2) \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right)) - \left(-z + z \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right)\right)}{(1 - z^2)^2 (1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right))^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right) - \cos^2\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right) - \left(-z(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right))\right)^2}{(1 - z^2)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right)\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right)(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right))}{(1 - z^2)^2 (1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right))^2} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{z^2 (1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right))^2}{(1 - z^2)^2 (1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right))^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\cos\left(\frac{2j\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right)}{(1 - z^2)^2 (1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N} - \frac{2j\pi}{N}\right))} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{z^2}{(1 - z^2)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi j}{N}\right)}{(1 - z^2)^2 (2\text{sen}^2\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi j}{N}\right))} - \frac{1}{2} \frac{(N-1)z^2}{(1 - z^2)^2} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{1}{(1 - z^2)^2 (\text{sen}^2\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi j}{N}\right))} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{2\text{sen}^2\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi j}{N}\right)}{2\text{sen}^2\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi j}{N}\right)} - \frac{1}{2} \frac{(N-1)z^2}{(1 - z^2)^2} \\
&= \frac{1}{4(1 - z^2)^2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}(k - j)\right)} - \frac{N-1}{2} - \frac{(N-1)z^2}{2(1 - z^2)^2}
\end{aligned}$$

Fazendo $l = k - j$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial z_k^2}(\tilde{Q}) &= \frac{1}{4(1 - z^2)^2} \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{N}l\right)} - \frac{N-1}{2} - \frac{(N-1)z^2}{2(1 - z^2)^2} \\
&= \left(\frac{1}{4(1 - z^2)^2}\right) \left(\frac{N^2 - 1}{3}\right) - \frac{(N-1)}{2} - \frac{(N-1)z^2}{2(1 - z^2)^2} \\
&= \frac{N^2 - 1}{12(1 - z^2)^2} - \frac{(N-1)}{2} - \frac{(N-1)z^2}{2(1 - z^2)^2} \\
&= \frac{N^2 - 1 - 6(N-1) - 6(N-1)z^2}{12(1 - z^2)^2} \\
&= \frac{(N-1)(N+1-6-6z^2)}{12(1 - z^2)^2} \\
&= \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1 - z^2)^2}
\end{aligned}$$

Temos ainda,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial \varphi_l}(\varphi, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial z_l} \left(\frac{-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \text{sen}(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_j^2} \sqrt{1-z_j^2} \text{cos}(\varphi_j - \varphi_k)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\frac{z_k}{\sqrt{1-z_k^2}} \sqrt{1-z_j^2} \text{sen}(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_j^2} \sqrt{1-z_j^2} \text{cos}(\varphi_j - \varphi_k)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\left(-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \text{sen}(\varphi_j - \varphi_k) \right)}{\left(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_j^2} \sqrt{1-z_j^2} \text{cos}(\varphi_j - \varphi_k) \right)} \\
 &\quad \frac{\left(-z_j + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_j^2}} \sqrt{1-z_j^2} \text{cos}(\varphi_j - \varphi_k) \right)}{\left(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_j^2} \sqrt{1-z_j^2} \text{cos}(\varphi_j - \varphi_k) \right)}
 \end{aligned}$$

Fazendo $z_j = z_k = z$, $\varphi_j = \frac{2\pi j}{N}$, e $\varphi_k = \frac{2\pi k}{N}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial \varphi_l}(\tilde{Q}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-z^2} \text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{1 - z^2 - (1 - z^2) \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-(1 - z^2) \text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{\left(1 - z^2 - (1 - z^2) \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)} \\
 &\quad \frac{\left(-z + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-z^2} \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)}{\left(1 - z^2 - (1 - z^2) \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{z \text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{(1 - z^2)(1 - \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\left(-(1 - z^2) \text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right) \left(-z + z \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)}{(1 - z^2)^2 (1 - \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{z(1 - z^2) \text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) - z(1 - z^2) \text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{(1 - z^2)(1 - \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))} \\
 &\quad - \frac{z(1 - z^2) \text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) + z(1 - z^2) \text{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{(1 - z^2)^2 (1 - \text{cos}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Para $l \neq k$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial \varphi_k}(\varphi, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\partial}{\partial z_l} \left(\frac{-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \operatorname{sen}(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\frac{z_j \delta_{jl}}{\sqrt{1-z_j^2}} \sqrt{1-z_k^2} \operatorname{sen}(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\left(-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \operatorname{sen}(\varphi_j - \varphi_k) \right)}{\left(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k) \right)} \\
&\quad \frac{\left(-z_k \delta_{jl} + \frac{z_k \delta_{jl}}{\sqrt{1-z_j^2}} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k) \right)}{\left(1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k) \right)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\frac{z_l}{\sqrt{1-z_l^2}} \sqrt{1-z_k^2} \operatorname{sen}(\varphi_l - \varphi_k)}{1 - z_k z_l - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \cos(\varphi_l - \varphi_k)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\left(-\sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \operatorname{sen}(\varphi_l - \varphi_k) \right)}{\left(1 - z_k z_l - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \cos(\varphi_l - \varphi_k) \right)} \\
&\quad \frac{\left(-z_k + \frac{z_k}{\sqrt{1-z_l^2}} \sqrt{1-z_l^2} \cos(\varphi_l - \varphi_k) \right)}{\left(1 - z_k z_l - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_l^2} \cos(\varphi_l - \varphi_k) \right)}
\end{aligned}$$

Fazendo $z_l = z$, $z_k = z$ e $\varphi_l = \frac{2\pi l}{N}$, $\varphi_k = \frac{2\pi k}{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial \varphi_k}(\tilde{Q}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-z^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{1 - z^2 - (1 - z^2) \cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-(1 - z^2) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{\left(1 - z^2 - (1 - z^2) \cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)} \\
&\quad \frac{\left(-z + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-z^2} \cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)}{\left(1 - z^2 - (1 - z^2) \cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{z \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{(1-z^2)(1-\cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{(-(1-z^2)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))(-z + z\cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))}{(1-z^2)^2(1-\cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{z(1-z^2)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) - z(1-z^2)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{(1-z^2)(1-\cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))} \\
 &\quad - \frac{-z(1-z^2)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right) + z(1-z^2)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right)}{(1-z^2)^2(1-\cos\left(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi k}{N}\right))^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto, a Hessiana é da forma $D^2H(\tilde{Q}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, onde

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}(\tilde{Q}) \right) = \begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_i^2}(\tilde{Q}) = -\frac{N^2-1}{12} \text{ para } i = j \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}(\tilde{Q}) = \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{(j-i)\pi}{N}\right)} \text{ para } i \neq j \end{cases}$$

e

$$B_{ij} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}(\tilde{Q}) \right) = \begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial z_i^2}(\tilde{Q}) = \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} \text{ para } i = j \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}(\tilde{Q}) = \frac{-1}{4(1-z^2)\operatorname{sen}^2\left(\frac{(j-i)\pi}{N}\right)} \text{ para } i \neq j \end{cases}$$

Das expressões acima, é fácil concluir que

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{N-1} \\ b_{N-1} & b_0 & b_1 & \dots & b_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_0 \end{pmatrix}.$$

Matrizes desta forma são conhecidas como matrizes circulantes. Observe ainda que $a_i = a_{N-i}$ e $b_i = b_{N-i}$ para $i = 0, 1, \dots, N-1$.

apenas da parte real do fator w^{jk} , donde, usando as formulas (5.6) e (5.7),

$$\begin{aligned}
 \lambda_k &= \sum_{j=0}^{N-1} b_j w^{kj} = b_0 + \sum_{j=1}^{N-1} b_j w^{kj} \\
 &= \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{-\cos \frac{2\pi jk}{N}}{4(1-z^2)^2 \text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}} \\
 &= \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\cos^2 \frac{\pi jk}{N} - \text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}}{4(1-z^2)^2 \text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}} \\
 &= \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N} - \text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}}{4(1-z^2)^2 \text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}} \\
 &= \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - 2\text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}}{4(1-z^2)^2 \text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}} \\
 &= \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{-1}{4(1-z^2)^2 \text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}} + \\
 &\quad + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}}{4(1-z^2)^2 \text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}} \\
 &= \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} - \frac{1}{2(1-z^2)^2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}} + \\
 &\quad + \frac{1}{2(1-z^2)^2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}}{\text{sen}^2 \frac{\pi jk}{N}} \\
 &= \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} - \frac{1}{2(1-z^2)^2} \frac{N^2-1}{3} + \\
 &\quad + \frac{k(N-k)}{2(1-z^2)^2} \\
 &= \frac{(N-1)(N-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} + \frac{1-N^2}{12(1-z^2)^2} + \\
 &\quad + \frac{k(N-k)}{2(1-z^2)^2} \\
 &= \frac{(N-1)(N-5-6z^2) - N^2 + 1 + 6k(N-k)}{12(1-z^2)^2} \\
 &= \frac{-6N - 6Nz^2 + 6z^2 + 6 + 6k(N-k)}{12(1-z^2)^2} \\
 &= \frac{-N - Nz^2 + z^2 + 1 + k(N-k)}{2(1-z^2)^2} \\
 &= \frac{1-N + z^2(1-N) + k(N-k)}{2(1-z^2)^2} \\
 &= \frac{(1-N)(1+z^2) + k(N-k)}{2(1-z^2)^2} \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

Agora, obteremos os autovalores correspondente ao outro bloco. Pela mesma razão de λ_k , os autovalores σ_k são reais, portanto encontraremos sua expressão da mesma forma.

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \sum_{j=0}^{N-1} a_j w^{kj} = a_0 + \sum_{j=1}^{N-1} a_j w^{kj} \\
&= -\frac{N^2-1}{12} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\cos \frac{2\pi jk}{N}}{4\text{sen}^2(\frac{j\pi}{N})} \\
&= -\frac{N^2-1}{12} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\cos^2(\frac{\pi jk}{N}) - \text{sen}^2(\frac{\pi jk}{N})}{4\text{sen}^2(\frac{j\pi}{N})} \\
&= -\frac{N^2-1}{12} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \text{sen}^2(\frac{\pi jk}{N}) - \text{sen}^2(\frac{\pi jk}{N})}{4\text{sen}^2(\frac{j\pi}{N})} \\
&= -\frac{N^2-1}{12} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - 2\text{sen}^2(\frac{\pi jk}{N})}{4\text{sen}^2(\frac{j\pi}{N})} \\
&= -\frac{N^2-1}{12} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\text{sen}^2(\frac{j\pi}{N})} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}^2(\frac{\pi jk}{N})}{\text{sen}^2(\frac{j\pi}{N})} \\
&= -\frac{N^2-1}{12} + \frac{N^2-1}{12} - \frac{k(N-k)}{2} \\
&= -\frac{k(N-k)}{2} \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

Vemos destas expressões que todos estes autovalores são repetidos, pois $\lambda_k = \lambda_{N-k}$ e $\sigma_k = \sigma_{N-k}$ para $k = 1, \dots, [\frac{N}{2}]$. Os únicos autovalores simples ocorrem quando $k = 0$ no caso em que N é ímpar e quando $k = 0$ e $\lambda_0 < 0$, e $k = \frac{N}{2}$ no caso em que N é par. Como os $\sigma_k < 0$ para $k = 1, \dots, N-1$, $\sigma_0 = 0$ a estabilidade depende de λ_k ser negativo para $k = 1, \dots, [\frac{N}{2}]$. Como estes autovalores estão em ordem crescente, o maior valor alcançado é quando $k = [N/2]$.

Para N par e $k = \frac{N}{2}$ temos

$$\begin{aligned}
\lambda_{\frac{N}{2}} &= \frac{-(N-1)(1+z^2) + \frac{N}{2}(N - \frac{N}{2})}{2(1-z^2)^2} \\
&= \frac{-(N-1)(1+z^2) + (\frac{N^2}{2} - \frac{N^2}{4})}{2(1-z^2)^2} \\
&= \frac{-(N-1)(1+z^2) + \frac{N^2}{4}}{2(1-z^2)^2}
\end{aligned}$$

Vamos impor que $\lambda_{\frac{N}{2}} < 0$, pois queremos mostrar que a hamiltoniana é definida negativa:

$$\frac{-(N-1)(1+z^2)}{2(1-z^2)^2} < \frac{-\frac{N^2}{4}}{2(1-z^2)^2}.$$

Como $2(1-z^2)^2 > 0$, devemos ter

$$-(N-1)(1+z^2) < -\frac{N^2}{4}$$

ou seja,

$$(N-1)z^2 > \frac{N^2}{4} - (N-1)$$

e,

$$\begin{aligned} z^2 &> \frac{N^2}{4(N-1)} - 1 \\ z^2 &> \frac{N^2 - 4(N-1)}{4(N-1)} \\ z^2 &> \frac{N^2 - 4N + 4}{4(N-1)} \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a condição abaixo

$$z^2 > \frac{(N-2)^2}{4(N-1)} \tag{5.9}$$

Para N ímpar e $k = \frac{N-1}{2}$ temos

$$\begin{aligned} \lambda_{\frac{N-1}{2}} &= \frac{-(N-1)(1+z^2) + \frac{N-1}{2} \left(N - \left(\frac{N-1}{2}\right)\right)}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{-(N-1)(1+z^2) + \left(\frac{N+1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{-4(N-1)(1+z^2) + (N+1)(N-1)}{8(1-z^2)^2} \end{aligned}$$

Impondo que $\lambda_{\frac{N-1}{2}} < 0$, temos

$$\frac{(-4N+4) + (-4N+4)z^2}{8(1-z^2)^2} < \frac{-(N+1)(N-1)}{8(1-z^2)^2}.$$

Como $8(1 - z^2)^2 > 0$, esta expressão é equivalente a

$$(-4N + 4) + (-4N + 4)z^2 < -(N + 1)(N - 1),$$

ou seja,

$$z^2 > \frac{N^2 - 4N + 3}{4N - 4}$$

Portanto, obtemos a condição abaixo

$$z^2 > \frac{(N - 1)(N - 3)}{4(N - 1)} = \frac{N - 3}{4}. \quad (5.10)$$

Como $-1 < z < 1$, para que as formulas (5.9) e (5.10) possam ser satisfeitas devemos ter os lados direitos de (5.9) e (5.10) menores do que 1. Para N par, $(N - 2)^2 < 4(N - 1)$ é equivalente a $N^2 - 8N + 8 < 0$, ou seja, $N < \frac{8 + \sqrt{64 - 32}}{2} = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,8$ e para N ímpar, $N - 3 < 4$, ou seja $N < 7$. Portanto, só podemos ter estabilidade no sentido de Liapunov, quando $N < 7$ e z suficientemente próximo de 1. Demonstramos assim o seguinte teorema

Teorema 5.3.2. *Um anel de N vórtices na latitude z com intensidade $\kappa_j = 1$, para $j = 0, 1, \dots, N - 1$, nos vértices de um polígono regular, descrito em um referencial em rotação é estável segundo Liapunov para $N < 7$ e instável para $N \geq 7$.*

Outra maneira de olhar a estabilidade de um anel de vórtices a uma distancia z do equador é analisar quando cada λ_k muda de positivo para negativo, conforme o valor de z^2 aumenta. Este valores estão dado na tabela abaixo até $N = 12$.

N/k	1	2	3	4	5	6	7
3	0	0					
4	0	1/3	0				
5	0	1/2	1/2	0			
6	0	3/5	4/5	3/5	0		
7	0	2/3	1	1	2/3	0	
8	0	5/7	8/7	9/7	8/7	5/7	0
9	0	3/4	5/4				
10	0	7/9	4/3				
11	0	4/5	7/5				
12	0	9/11	16/11				

Observação 5.3.3. Novamente apareceu o autovalor nulo, aqui com multiplicidade 1. Ele corresponde à invariância do sistema por rotações.

Observação 5.3.4. Como os autovetores da matriz hessiana nas colunas de 2 a N da matriz W são complexos, se $u+iv$ é um destes autovetores de A associado ao autovalor y , então da equação $Au + iAv = yu + iyv$ vemos que a parte imaginária e a parte real são também autovetores associados a y , quando o autovalor é duplo, podemos escolher u e v linearmente independentes. Tomando uma base de autovetores reais ordenados na forma $u_0, u_1, u_2, \dots, v_2, v_1$ segue que os autovetores são dados pelas colunas da seguinte matriz real $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$, onde a matriz T_1 é dada por

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{1}{\sqrt{N/2}} & \frac{1}{\sqrt{N/2}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{\cos(2\pi/N)}{\sqrt{N/2}} & \frac{\cos(4\pi/N)}{\sqrt{N/2}} & \dots & \frac{\text{sen}(4\pi/N)}{\sqrt{N/2}} & \frac{\text{sen}(2\pi/N)}{\sqrt{N/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{\cos(4\pi/N)}{\sqrt{N/2}} & \frac{\cos(8\pi/N)}{\sqrt{N/2}} & \dots & \frac{\text{sen}(8\pi/N)}{\sqrt{N/2}} & \frac{\text{sen}(4\pi/N)}{\sqrt{N/2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{\cos(2(N-1)\pi/N)}{\sqrt{N/2}} & \frac{\cos(4(N-1)\pi/N)}{\sqrt{N/2}} & \dots & \frac{\text{sen}(4(N-1)\pi/N)}{\sqrt{N/2}} & \frac{\text{sen}(2(N-1)\pi/N)}{\sqrt{N/2}} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Para que a matriz T_1 seja ortogonal normalizamos os vetores coluna dividindo por \sqrt{N} (primeira coluna) e $\sqrt{N/2}$ (demais colunas).

Outra maneira de obter o teorema (5.3.2) é substituindo a transformação $Q = \tilde{Q} + T\xi$ na equação (5.4). Obtemos assim o sistema

$$\dot{\xi} = \mathbf{J}\nabla\tilde{H}(\xi), \quad \text{onde } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

onde $\tilde{H}(\xi) = H(\tilde{Q} + T\xi)$. O problema passa a ser estudar as soluções de (5.12) que começam perto de $\xi = 0$, pois $\nabla\tilde{H}(0) = T^t\nabla H(\tilde{Q}) = T^t \cdot 0 = 0$. Para mostrar que $\xi = 0$ é um ponto de equilíbrio estável segundo Liapunov para este sistema, observe que pela teorema (1.2.14) a função \tilde{H} é uma integral primeira e, portanto, $G = \tilde{H} - \tilde{H}(0)$ é uma integral primeira deste sistema. Mas $\nabla\tilde{H}(0) = 0$ e $D^2\tilde{H}(0) = T^t D^2 H(\tilde{Q}) T$ e o termo quadrático da hamiltoniana G é transformado na forma normal

$$G(\xi) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \xi_k^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k \xi_{k+N}^2 \right) + \dots$$

onde ξ_k são as componentes de ξ na base formada pelos autovalores nas colunas de T . A análise da estabilidade é feita como anteriormente

Capítulo 6

Estabilidade segundo Liapunov de um anel de vórtices em uma latitude fixada com um vórtice no pólo norte

6.1 Introdução

A partir do estudo feito no capítulo 5 do anel de vórtices em uma latitude fixa da esfera, vamos ver o que ocorre, quanto à estabilidade segundo Liapunov, quando se insere um vórtice no pólo norte, com intensidade $\kappa \neq 0$. Quando um vórtice aproxima-se do pólo norte da esfera, não podemos descrevê-lo com as mesmas coordenadas cilíndricas usadas para os outros vórtices, pois o pólo é uma singularidade deste sistema de coordenadas. Assim, usaremos coordenadas cartesianas para este vórtice. Usaremos (x_N, y_N, z_N) para denotar a posição deste $(N + 1)$ -ésimo vórtice, próximo do pólo norte.

Na seção (3.2) serão apresentadas as equações do movimento para estes $N + 1$ vórtices. Neste caso, a presença do vórtice no pólo norte faz com que o sistema não seja mais hamiltoniano. Entretanto, mostraremos, que a função $H = H_1 + H_2$, onde H_1 é a hamiltoniana do anel de vórtices, dada pela equação (5.2) e H_2 é da forma

$$H_2 = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \ln[1 - z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_j(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))] \quad (6.1)$$

ainda é uma integral primeira do sistema e que as equações de movimento podem ser escritas em termos das derivadas parciais de primeira ordem desta função. Mostraremos que o anel de vórtices em uma latitude fixa com um vórtice no pólo, girando com uma velocidade angular adequada, é um equilíbrio relativo deste sistema. Na seção 3.3 mostraremos a estabilidade segundo Liapunov deste equilíbrio, para $N \geq 3$, para certas regiões de valores da latitude z do anel de vórtices e da intensidade κ do vórtice no pólo. Na seção 3.4 obteremos um resultado análogo para $N = 2$.

6.2 Dedução das equações de movimento

A proposição seguinte mostra que as equações do movimento para o sistema de $N + 1$ vórtices na esfera, com um vórtice próximo ao pólo norte podem ser escritas em termos das derivadas parciais de primeira ordem da função $H = H_1 + H_2$.

Proposição 6.2.1. *O sistema de equações diferenciais que rege este sistema de vórtices é*

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial z_j} & \dot{z}_j(t) = \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} \\ \kappa \dot{x}_N(t) = -z_N(t) \frac{\partial H}{\partial y_N} & \kappa \dot{y}_j(t) = z_N(t) \frac{\partial H}{\partial x_N}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Além disso, H é uma integral primeira do movimento.

Demonstração. Para o $N + 1$ -ésimo vórtice,

$$\dot{\mathbf{x}}_N(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mathbf{x}_i(t) \times \mathbf{x}_N(t)}{\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_N(t)\|}$$

onde

$$\mathbf{x}_i(t) = \left(\sqrt{1 - z_i^2(t)} \cos \varphi_i(t), \sqrt{1 - z_i^2(t)} \sin \varphi_i(t), z_i(t) \right)$$

e

$$\mathbf{x}_N(t) = \left(x_N(t), y_N(t), \sqrt{1 - x_N^2(t) - y_N^2(t)} \right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t) \times \mathbf{x}_N(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{1 - z_i^2(t)} \cos \varphi_i(t) & \sqrt{1 - z_i^2(t)} \sin \varphi_i(t) & z_i(t) \\ x_N(t) & y_N(t) & z_N(t) \end{vmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z_i^2(t)} \sin \varphi_i(t) & z_i(t) \\ y_N(t) & z_N(t) \end{pmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z_i^2(t)} \cos \varphi_i(t) & z_i(t) \\ x_N(t) & z_N(t) \end{pmatrix} \mathbf{j} + \\ &\quad \det \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z_i^2(t)} \cos \varphi_i(t) & \sqrt{1 - z_i^2(t)} \sin \varphi_i(t) \\ x_N(t) & y_N(t) \end{pmatrix} \mathbf{k} \\ &= \left(\sqrt{1 - z_i^2(t)} z_N(t) \sin \varphi_i(t) - y_N(t) z_i(t) \right) \mathbf{i} - \\ &\quad \left(\sqrt{1 - z_i^2(t)} z_N(t) \cos \varphi_i(t) - z_i(t) x_N(t) \right) \mathbf{j} + \\ &\quad \left(\sqrt{1 - z_i^2(t)} y_N(t) \cos \varphi_i(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)} x_N(t) \sin \varphi_i(t) \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_N(t) \|^2 = \\
& = (\sqrt{1 - z_i^2(t)} \cos \varphi_i(t) - x_N(t))^2 + (\sqrt{1 - z_i^2(t)} \sin \varphi_i(t) - y_N(t))^2 + (z_i(t) - z_N(t))^2 \\
& = (1 - z_i^2(t)) \cos^2 \varphi_i(t) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} x_N(t) \cos \varphi_i(t) + x_N^2(t) + \\
& \quad (1 - z_i^2(t)) \sin^2 \varphi_i(t) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} y_N(t) \sin \varphi_i(t) + y_N^2(t) + z_i^2(t) - 2z_i(t)z_N(t) + z_N^2(t) \\
& = (1 - z_i^2(t)) (\cos^2 \varphi_i(t) + \sin^2 \varphi_i(t)) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} x_N(t) \cos \varphi_i(t) + x_N^2(t) + y_N^2(t) - \\
& \quad 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} y_N(t) \sin \varphi_i(t) + z_i^2(t) - 2z_i(t)z_N(t) + z_N^2(t) \\
& = (1 - z_i^2(t)) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} x_N(t) \cos \varphi_i(t) + 1 - z_N^2(t) - \\
& \quad 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} y_N(t) \sin \varphi_i(t) + z_i^2(t) - 2z_i(t)z_N(t) + z_N^2(t) \\
& = 2 - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} x_N(t) \cos \varphi_i(t) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} y_N(t) \sin \varphi_i(t) - 2z_i(t)z_N(t) \\
& = 2 - 2z_i(t)z_N(t) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_i(t) - y_N(t) \sin \varphi_i(t)).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\mathbf{x}_i(t) \times \mathbf{x}_N(t)}{\| \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_N(t) \|^2} = \left(\frac{\sqrt{1 - z_i^2(t)} z_N(t) \sin \varphi_i(t) - y_N(t) z_i(t)}{2 - 2z_i(t)z_N(t) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_i(t) - y_N(t) \sin \varphi_i(t))}, \right. \\
\left. \frac{-\sqrt{1 - z_i^2(t)} z_N(t) \cos \varphi_i(t) + x_N(t) z_i(t)}{2 - 2z_i(t)z_N(t) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_i(t) - y_N(t) \sin \varphi_i(t))}, \right. \\
\left. \frac{\sqrt{1 - z_i^2(t)} y_N(t) \cos \varphi_i(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)} x_N(t) \sin \varphi_i(t)}{2 - 2z_i(t)z_N(t) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_i(t) - y_N(t) \sin \varphi_i(t))} \right)$$

e

$$\dot{\mathbf{x}}_N(t) = \left(\dot{x}_N(t), \dot{y}_N(t), \frac{\dot{x}_N(t)x_N(t) - \dot{y}_N(t)y_N(t)}{\sqrt{1 - x_N^2(t) - y_N^2(t)}} \right)$$

o que fornece

$$\begin{cases} \dot{x}_N = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{1 - z_i^2(t)} z_N(t) \sin \varphi_i(t) - y_N(t) z_i(t)}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_i(t) - y_N(t) \sin \varphi_i(t))} \\ \dot{y}_N = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{-\sqrt{1 - z_i^2(t)} z_N(t) \cos \varphi_i(t) + x_N(t) z_i(t)}{2 - 2z_i(t)z_N(t) - 2\sqrt{1 - z_i^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_i(t) - y_N(t) \sin \varphi_i(t))} \end{cases}$$

Agora, calcularemos as derivadas parciais $\frac{\partial H}{\partial x_N}$ e $\frac{\partial \dot{H}}{\partial y_N}$ e comparamos os resultados.

$$\frac{\partial H}{\partial x_N} = \frac{\partial H_1}{\partial x_N} + \frac{\partial H_2}{\partial x_N} = \frac{\partial H_2}{\partial x_N},$$

pois H_1 é independente de x_N . Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial x_N} &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\ln[1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))] \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\frac{z_i(t)x_N(t)}{\sqrt{1 - x_N^2(t) - y_N^2(t)}} - \sqrt{1 - z_i^2(t)}\cos\varphi_i(t)}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))} \\ &= \frac{\kappa}{2z_N(t)} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{-\sqrt{1 - z_i^2(t)}z_N(t)\cos\varphi_i(t) + z_i(t)x_N(t)}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\frac{\partial H}{\partial y_N} = \frac{\partial H_1}{\partial y_N} + \frac{\partial H_2}{\partial y_N} = \frac{\partial H_2}{\partial y_N},$$

pois H_1 é independente de y_N . Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial y_N} &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial y_N} \left(\ln[1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))] \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\frac{z_i(t)y_N(t)}{\sqrt{1 - x_N^2(t) - y_N^2(t)}} - \sqrt{1 - z_i^2(t)}\sen\varphi_i(t)}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))} \\ &= \frac{\kappa}{2z_N(t)} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{-\sqrt{1 - z_i^2(t)}z_N(t)\sen\varphi_i(t) + z_i(t)y_N(t)}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \kappa \dot{x}_N = -z_N(t) \frac{\partial H}{\partial y_N} \\ \kappa \dot{y}_N = z_N(t) \frac{\partial H}{\partial x_N} \end{cases}$$

Agora, mostraremos as outras duas equações.

Para $j < N$,

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{\mathbf{x}_i(t) \times \mathbf{x}_j(t)}{\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|^2} + \kappa \frac{\mathbf{x}_N(t) \times \mathbf{x}_j(t)}{\|\mathbf{x}_N(t) - \mathbf{x}_j(t)\|^2}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_N(t) \times \mathbf{x}_j(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_N(t) & y_N(t) & z_N(t) \\ \sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t) & \sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j(t) & z_j(t) \end{vmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} y_N(t) & z_N(t) \\ \sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j(t) & z_j(t) \end{pmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{pmatrix} x_N(t) & z_N(t) \\ \sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t) & z_j(t) \end{pmatrix} \mathbf{j} + \\
&\quad \det \begin{pmatrix} x_N(t) & y_N(t) \\ \sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t) & \sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j(t) \end{pmatrix} \mathbf{k} \\
&= \left(y_N(t)z_j - z_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j \right) \mathbf{i} - \\
&\quad \left(-z_j(t)x_N(t) + \sqrt{1-z_j^2(t)}z_N(t)\cos\varphi_j(t) \right) \mathbf{j} + \\
&\quad \left(\sqrt{1-z_j^2(t)}x_N(t)\sen\varphi_j(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}y_N(t)\cos\varphi_j(t) \right) \mathbf{k}
\end{aligned}$$

e,

$$\| \mathbf{x}_N(t) - \mathbf{x}_j(t) \|^2 = 2 - 2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{x}_N(t) \times \mathbf{x}_j(t)}{\| \mathbf{x}_N(t) - \mathbf{x}_j(t) \|^2} &= \left(\frac{y_N(t)z_j(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}z_N(t)\sen\varphi_j(t)}{2 - 2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) - y_N(t)\sen\varphi_j(t))}, \right. \\
&\quad \frac{-x_N(t)z_j(t) + \sqrt{1-z_j^2(t)}z_N(t)\cos\varphi_j(t)}{2 - 2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) - y_N(t)\sen\varphi_j(t))}, \\
&\quad \left. \frac{\sqrt{1-z_j^2(t)}x_N(t)\sen\varphi_j(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}y_N(t)\cos\varphi_j(t)}{2 - 2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) - y_N(t)\sen\varphi_j(t))} \right)
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_j(t) &= \left(\frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)\cos\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sen(\varphi_j(t))\dot{\varphi}_j(t), \frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)\sen\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{1-z_j^2(t)}\sen(\varphi_j(t))\dot{\varphi}_j(t), \dot{z}_j(t) \right)
\end{aligned}$$

Usando o resultado já demonstrado anteriormente que

$$\frac{\mathbf{x}_i(t) \times \mathbf{x}_j(t)}{\|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)\|^2} = \left(\begin{array}{l} \frac{z_j(t)\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{sen}\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_j(t)^2(t)}\text{sen}\varphi_j(t)}{\|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)\|^2}, \\ \frac{-z_j(t)\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t) + z_i(t)\sqrt{1-z_j(t)^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t)}{\|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)\|^2}, \\ \frac{\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t)\text{sen}\varphi_i(t)}{\|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)\|^2}, \\ \frac{-\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t)\text{sen}\varphi_i(t)}{\|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)\|^2} \end{array} \right),$$

obtemos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-z_j\dot{z}_j\text{cos}\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{sen}\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}\varphi_j(t)}{2-2z_j(t)z_i(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} + \\ \kappa \left(\frac{y_N(t)z_j(t) - z_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}\varphi_j}{2-2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\text{cos}\varphi_j(t) - y_N(t)\text{sen}\varphi_j(t))} \right), \\ \frac{-z_j(t)\dot{z}_j\text{sen}\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} + \sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t)}{2-2z_j(t)z_i(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} + \\ \kappa \left(\frac{-x_N(t)z_j(t) + z_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}\varphi_j(t)}{2-2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\text{cos}\varphi_j(t) - y_N(t)\text{sen}\varphi_j(t))} \right) \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Multiplicando a primeira equação acima por $(-\text{sen}\varphi_j(t))$ e a outra por $(\text{cos}\varphi_j(t))$, obtemos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z_j(t)\dot{z}_j(t)\text{sen}\varphi_j(t)\text{cos}\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} + \sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}^2\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-z_j(t)\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{sen}\varphi_i(t)\text{sen}\varphi_j(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}^2\varphi_j(t)}{2-2z_j(t)z_i(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} - \\ \kappa \left(\frac{y_N(t)z_j(t)\text{sen}\varphi_j(t) - z_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{sen}^2\varphi_j(t)}{2-2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\text{cos}\varphi_j - y_N(t)\text{sen}\varphi_j)} \right), \\ \frac{-z_j(t)\dot{z}_j\text{cos}\varphi_j(t)\text{sen}\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}^2\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}\varphi_i(t)\text{cos}\varphi_j(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}^2\varphi_j(t)}{2-2z_j(t)z_i(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} + \\ \kappa \left(\frac{-x_N(t)z_j(t)\text{cos}\varphi_j(t) + z_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\text{cos}^2\varphi_j}{2-2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\text{cos}\varphi_j - y_N(t)\text{sen}\varphi_j)} \right) \end{array} \right.$$

Somando as duas equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{1-z_j^2(t)}\dot{\varphi}_j(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-z_j(t)\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) + z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}}{1-z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} + \\ &\frac{\kappa - x_N(t)z_j(t)\text{cos}\varphi_j(t) - y_N(t)z_j(t)\text{sen}\varphi_j(t) + z_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}}{2} \\ &\frac{1-z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} \end{aligned}$$

ou, seja

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_j(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_i(t) - \frac{z_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1-z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} + \\ &\frac{\kappa}{2} \frac{z_N(t) - \frac{z_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}}(x_N(t)\text{cos}\varphi_j(t) + y_N(t)\text{sen}\varphi_j(t))}{1-z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\text{cos}(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} \end{aligned}$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (6.3) por $(\cos\varphi_j(t))$ e a segunda por $(\sen\varphi_j(t))$, obtemos as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z_j(t)\dot{z}_j\cos^2\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j(t)\cos\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1-(z_i(t))^2}\sen\varphi_i(t)\cos\varphi_j(t) - z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j(t)\cos\varphi_i(t)}{2-2z_j(t)z_i(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\cos(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} + \\ \kappa \left(\frac{y_N(t)z_j(t)\cos\varphi_j(t) - z_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j(t)\cos\varphi_j(t)}{2-2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j - y_N(t)\cos\varphi_j)} \right), \\ -\frac{z_j(t)\dot{z}_j\sen^2\varphi_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} + \sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t)\sen\varphi_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = \\ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1-z_i(t)^2}\cos\varphi_i(t)\sen\varphi_j(t) + z_i(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t)\sen\varphi_i(t)}{2-2z_j(t)z_i(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\cos(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} + \\ \kappa \left(\frac{-x_N(t)z_j(t)\sen\varphi_j(t) + z_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j(t)\cos\varphi_j(t)}{2-2z_j(t)z_N(t) - 2\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) - y_N(t)\sen\varphi_j(t))} \right). \end{array} \right.$$

Somando as duas equações acima, obtemos

$$\frac{-z_j(t)\dot{z}_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{z_j(t)\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\sen(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1-z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} + \frac{\kappa}{2} \frac{y_N(t)z_j(t)\cos\varphi_j(t) - x_N(t)z_j\sen\varphi_j(t)}{1-z_jz_N(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) - y_N(t)\sen\varphi_j(t))},$$

de modo que

$$\dot{z}_j(t) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\sqrt{1-z_j^2(t)}\sen(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))}{1-z_j(t)z_i(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sqrt{1-z_i(t)^2(t)}\cos(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))} + \frac{\kappa}{2} \frac{x_N(t)\sqrt{1-z_j^2}\sen\varphi_j(t) - y_N(t)\sqrt{1-z_j^2}\cos\varphi_j(t)}{1-z_jz_N(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) - y_N(t)\sen\varphi_j(t))}$$

Agora, calcularemos as derivadas parciais $\frac{\partial H}{\partial \varphi_j}$ e $\frac{\partial H}{\partial z_j}$ e comparemos os resultados.

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial H_2}{\partial \varphi_j}$$

Como já temos as derivadas parciais de H_1 basta calcular a derivada de H_2 em relação a φ_j . Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial \varphi_j} &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \left(\ln[1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sin\varphi_i(t))] \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{-\sqrt{1 - z_i^2(t)}(-x_N(t)\sin\varphi_i(t)\delta_{ij} + y_N(t)\cos\varphi_i(t)\delta_{ij})}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sin\varphi_i(t))} \\ &= \frac{\kappa}{2} \frac{x_N(t)\sqrt{1 - z_j^2}\sin\varphi_j - y_N(t)\sqrt{1 - z_j^2}\cos\varphi_j}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sin\varphi_i(t))}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} &= \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial H_2}{\partial \varphi_j} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \frac{-\sqrt{1 - z_k^2(t)}\sqrt{1 - z_j^2(t)}\sin(\varphi_j(t) - \varphi_k(t))}{1 - z_k(t)z_j(t) - \sqrt{1 - z_j^2(t)}\sqrt{1 - z_k^2(t)}\cos(\varphi_j(t) - \varphi_k(t))} + \\ &\quad \frac{\kappa}{2} \frac{x_N(t)\sqrt{1 - z_j^2}\sin\varphi_j(t) - y_N(t)\sqrt{1 - z_j^2}\cos\varphi_j(t)}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sin\varphi_i(t))} \end{aligned}$$

Alem disso,

$$\frac{\partial H}{\partial z_j} = \frac{\partial H_1}{\partial z_j} + \frac{\partial H_2}{\partial z_j}$$

Novamente, como já calculamos as derivadas primeiras de H_1 basta calcular a derivada de H_2 em relação a z_j . Obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial z_j} &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\ln[1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sin\varphi_i(t))] \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{-z_N(t)\delta_{ij} + \frac{z_i(t)\delta_{ij}}{\sqrt{1 - z_i^2(t)}}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sin\varphi_j)}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sin\varphi_i(t))} \\ &= \frac{\kappa}{2} \frac{-z_N(t) + \frac{z_j}{\sqrt{1 - z_j^2}}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sin\varphi_j)}{1 - z_j z_N(t) - \sqrt{1 - z_j^2}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sin\varphi_j(t))} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial z_j} = \frac{\partial H_1}{\partial z_j} + \frac{\partial H_2}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-z_i(t) + \frac{z_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} \sqrt{1-z_i(t)} \cos(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))}{1 - z_j z_i(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)} \sqrt{1-z_i(t)} \cos(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))} + \\ \frac{-z_N(t) + \frac{z_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}} (x_N(t) \cos \varphi_j(t) + y_N(t) \sin \varphi_j(t))}{\frac{\kappa}{2} 1 - z_j(t) z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_j(t) + y_N(t) \sin \varphi_j(t))}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_j = -\frac{\partial H}{\partial z_j}(\varphi, x_N(t), \mathbf{z}, y_N(t)) \\ \dot{z}_j = \frac{\partial H}{\partial \varphi_j}(\varphi, x_N(t), \mathbf{z}, y_N(t)) \end{cases} \quad \text{para } j = 0, \dots, N-1.$$

Para mostrar que H é uma integral primeira do movimento, observe que o sistema (6.9) pode ser reescrito na forma

$$M\dot{Q}(t) = K\nabla H(Q(t)) \tag{6.4}$$

onde $Q(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{N-1}(t), x_N(t), z_0(t), z_1(t), \dots, z_{N-1}(t), y_N(t)) = (\varphi, x_N, \mathbf{z}, y_N)$, M e K são matrizes $(2N+2) \times (2N+2)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \kappa & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa \end{pmatrix}$$

e

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -z_N(t) \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_N(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_0}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \varphi_{N-1}}, \frac{\partial H}{\partial x_N}, \frac{\partial H}{\partial z_0}, \frac{\partial H}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial z_{N-1}}, \frac{\partial H}{\partial y_N} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= M^{-1} K \nabla H(Q(t)) \\ &= \left(-\frac{\partial H}{\partial z_0}, -\frac{\partial H}{\partial z_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial z_{N-1}}, -\frac{z_N(t)}{k} \frac{\partial H}{\partial y_N}, \frac{\partial H}{\partial \varphi_0}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \varphi_{N-1}}, \frac{z_N(t)}{k} \frac{\partial H}{\partial x_N} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{H}(Q(t)) = \langle \nabla H(Q(t)), \dot{Q}(t) \rangle = \langle \nabla H(Q(t)), M^{-1} K \nabla H(Q(t)) \rangle = 0$$

Portanto, H é uma integral primeira para o sistema (6.4). \square

Introduzimos um sistema de coordenadas que gira com velocidade angular ω no sentido anti-horário em torno do eixo polar. Neste novo referencial, as coordenadas são dadas por $\tilde{\varphi}_j(t) = \varphi_j(t) + \omega t$ e $\tilde{z}_j(t) = z_j(t)$. Como $\dot{\tilde{\varphi}}_j(t) = \dot{\varphi}_j(t) + \omega$ e sabemos que $\dot{\varphi}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial z_j}(\varphi, \tilde{x}_N, \mathbf{z}, \tilde{y}_N)$, ou seja, $\dot{\tilde{\varphi}}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial z_j}(\tilde{\varphi} - \omega, \tilde{x}_N, \tilde{z}, \tilde{y}_N) + \omega$ onde $\omega = (\omega, \omega, \dots, \omega) \in R^N$, e como $z_j(t) = \tilde{z}_j(t)$ temos

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varphi}}_j(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{z}_j}(\tilde{\varphi}, \tilde{z}) - \omega \right) \\ \dot{\tilde{z}}_j(t) = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\varphi}_j}(\tilde{\varphi}, \tilde{z}). \end{cases}$$

Além disso, as coordenadas de $N+1$ -ésimo vórtice serão dadas por $\tilde{x}_N = (\tilde{x}_N, \tilde{y}_N, \tilde{z}_N)$ onde $\tilde{x}_N(t) = \cos(\omega t)x_N(t) - y_N(t)\sin(\omega t)$ e $\tilde{y}_N(t) = \sin(\omega t)x_N(t) + \cos(\omega t)y_N(t)$ e $\tilde{z}_N(t) = z_N(t)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \ln[1 - \tilde{z}_j(t)\tilde{z}_N(t) - \sqrt{1 - \tilde{z}_j(t)} \cos \varphi_j(t) (\cos(\omega t)\tilde{x}_N(t) + \tilde{y}_N(t)\sin(\omega t)) + \\ &\quad \sin \varphi_j(t) (-\sin(\omega t)\tilde{x}_N(t) + \cos(\omega t)\tilde{y}_N(t))] \\ &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \ln[1 - \tilde{z}_j(t)\tilde{z}_N(t) - \sqrt{1 - \tilde{z}_j(t)} (\cos \varphi_j(t) \cos(\omega t)\tilde{x}_N(t) + \cos \varphi_j(t) \sin(\omega t)\tilde{y}_N(t) - \\ &\quad \sin \varphi_j(t) \sin(\omega t)\tilde{x}_N(t) + \sin \varphi_j(t) \cos(\omega t)\tilde{y}_N(t))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \ln[1 - \tilde{z}_j(t)\tilde{z}_N(t) - \sqrt{1 - \tilde{z}_j(t)} (\tilde{x}_N(t) (\cos\varphi_j(t)\cos(\omega t) - \text{sen}\varphi_j(t)\text{sen}(\omega t)) + \\
&\quad \tilde{y}_N(\cos\varphi_j(t)\text{sen}(\omega t) + \text{sen}\varphi_j(t)\cos(\omega t)))] \\
&= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \ln[1 - \tilde{z}_j(t)\tilde{z}_N(t) - \sqrt{1 - \tilde{z}_j(t)} (\tilde{x}_N(t)\cos(\varphi_j(t) + \omega t) + \tilde{y}_N\text{sen}(\varphi_j(t) + \omega t))] \\
&= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \ln[1 - \tilde{z}_j(t)\tilde{z}_N(t) - \sqrt{1 - \tilde{z}_j(t)} (\tilde{x}_N(t)\cos(\tilde{\varphi}_j(t)) + \tilde{y}_N\text{sen}(\tilde{\varphi}_j(t)))]
\end{aligned}$$

ou seja H_2 , nas novas variáveis é dada por

$$\tilde{H}_2(\tilde{\varphi}, \tilde{x}_N, \tilde{z}, \tilde{y}_N) = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \ln[1 - \tilde{z}_j(t)\tilde{z}_N(t) - \sqrt{1 - \tilde{z}_j(t)} (\tilde{x}_N(t)\cos(\tilde{\varphi}_j(t)) + \tilde{y}_N\text{sen}(\tilde{\varphi}_j(t)))] .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\kappa\dot{\tilde{x}}_N(t) &= -\omega\kappa\text{sen}(\omega t)x_N(t) + \kappa\cos(\omega t)\dot{x}_N(t) - \omega\kappa\cos(\omega t)y_N - \kappa\text{sen}(\omega t)\dot{y}_N(t) \\
&= -\omega\kappa (\text{sen}(\omega t)x_N(t) + \cos(\omega t)y_N(t)) + \cos(\omega t)(\kappa\dot{x}_N) - \text{sen}(\omega t)(\kappa\dot{y}_N) \\
&= -\omega\kappa\tilde{y}_N(t) + \cos(\omega t) \left(-z_N(t) \frac{\partial H}{\partial y_N} \right) - \text{sen}(\omega t) \left(z_N(t) \frac{\partial H}{\partial x_N} \right) \\
&= -\omega\kappa\tilde{y}_N(t) - z_N(t) \left(\cos(\omega t) \frac{\partial H}{\partial y_N} + \text{sen}(\omega t) \frac{\partial H}{\partial x_N} \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\kappa\dot{\tilde{y}}_N(t) &= \omega\kappa\cos(\omega t)x_N(t) + \kappa\text{sen}(\omega t)\dot{x}_N(t) - \omega\kappa\text{sen}(\omega t)y_N(t) + \kappa\cos(\omega t)\dot{y}_N(t) \\
&= \omega\kappa (\cos(\omega t)x_N - \text{sen}(\omega t)y_N(t)) + \text{sen}(\omega t) (\kappa\dot{x}_N) + \cos(\omega t) (\kappa\dot{y}_N) \\
&= \omega\kappa\tilde{x}_N(t) + \text{sen}(\omega t) \left(-z_N \frac{\partial H}{\partial y_N} \right) + \cos(\omega t) \left(z_N \frac{\partial H}{\partial x_N} \right) \\
&= \omega\kappa\tilde{x}_N(t) + z_N(t) \left(-\text{sen}(\omega t) \frac{\partial H}{\partial y_N} + \cos(\omega t) \frac{\partial H}{\partial x_N} \right) .
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos as seguinte equações

$$\kappa\dot{\tilde{x}}_N(t) = -\omega\kappa\tilde{y}_N(t) - z_N(t) \left(\cos(\omega t) \frac{\partial H}{\partial y_N} + \text{sen}(\omega t) \frac{\partial H}{\partial x_N} \right) \quad (6.5)$$

$$\kappa\dot{\tilde{y}}_N(t) = \omega\kappa\tilde{x}_N(t) + z_N(t) \left(-\text{sen}(\omega t) \frac{\partial H}{\partial y_N} + \cos(\omega t) \frac{\partial H}{\partial x_N} \right) . \quad (6.6)$$

Denotando

$$\tilde{G}(\tilde{\varphi}, \tilde{x}_N, \tilde{z}, \tilde{y}_N) = H(\tilde{\varphi} + \omega t, \cos(\omega t)\tilde{x}_N(t) + \tilde{y}_N(t)\text{sen}(\omega t), \tilde{z}, \cos(\omega t)\tilde{y}_N(t) - \tilde{x}_N(t)\text{sen}(\omega t))$$

temos que

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{x}_N} = \frac{\partial H}{\partial x_N} \frac{\partial x_N}{\partial \tilde{x}_N} + \frac{\partial H}{\partial y_N} \frac{\partial y_N}{\partial \tilde{x}_N} = \cos(\omega t) \frac{\partial H}{\partial x_N} - \sin(\omega t) \frac{\partial H}{\partial y_N} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{y}_N} = \frac{\partial H}{\partial x_N} \frac{\partial x_N}{\partial \tilde{y}_N} + \frac{\partial H}{\partial y_N} \frac{\partial y_N}{\partial \tilde{y}_N} = \sin(\omega t) \frac{\partial H}{\partial x_N} + \cos(\omega t) \frac{\partial H}{\partial y_N} \quad (6.8)$$

Substituindo (6.7) em (6.6) e (6.8) em (6.5), temos que:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_N(t) &= -\omega \kappa \tilde{y}_N(t) - z_N(t) \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{y}_N} \\ &= -\omega \kappa \tilde{y}_N(t) - z_N(t) \left(\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \tilde{y}_N} + \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \tilde{y}_N} \right) \\ &= -z_N(t) \left(\frac{\omega \kappa \tilde{y}_N(t)}{z_N(t)} + \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \tilde{y}_N} + \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \tilde{y}_N} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa \dot{\tilde{y}}_N(t) &= \omega \kappa \tilde{x}_N(t) + z_N(t) \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{x}_N} \\ &= \omega \kappa \tilde{x}_N(t) + z_N(t) \left(\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \tilde{x}_N} + \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \tilde{x}_N} \right) \\ &= z_N(t) \left(\frac{\omega \kappa \tilde{x}_N(t)}{z_N(t)} + \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \tilde{x}_N} + \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \tilde{x}_N} \right) \end{aligned}$$

Assim, as equações do movimento, nas novas coordenadas $(\tilde{\varphi}(t), \tilde{x}_N, \tilde{z}(t), \tilde{y}_N(t))$, ficam:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varphi}}_j(t) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{z}_j} & \dot{\tilde{z}}_j(t) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\varphi}_j} \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N-1 \\ \kappa \dot{\tilde{x}}_N(t) = -\tilde{z}_N \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{y}_N} & \kappa \dot{\tilde{y}}_N(t) = \tilde{z}_N \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_N}. \end{cases} \quad (6.9)$$

onde a função \tilde{H} é dada por

$$\tilde{H}(\tilde{\varphi}, \tilde{x}_N, \tilde{z}, \tilde{y}_N) = H_1(\tilde{\varphi} - \omega t, \tilde{z}) + H_2(\tilde{\varphi} - \omega t, \tilde{x}_N, \tilde{z}, \tilde{y}_N) - \omega \left(\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{z}_i(t) + \kappa \tilde{z}_N(t) \right) \quad (6.10)$$

com $\omega = (\omega, \omega, \dots, \omega) \in R^N$.

Por simplicidade, usaremos a notação antiga, $\varphi_j(t)$, $z_j(t)$ e H , no lugar da nova, $\tilde{\varphi}_j(t)$, $\tilde{z}_j(t)$ e \tilde{H} . O sistema (6.9) pode ser reescrito na forma vetorial

$$M \dot{Q}(t) = K \nabla H(Q(t)) \quad \text{onde } Q = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, x_N, z_0, z_1, \dots, z_{N-1}, y_N) \quad (6.11)$$

Lema 6.2.2. *Seja $H = H_1 + H_2 - \omega \left(\sum_{i=0}^{N-1} z_i(t) + \kappa z_N(t) \right)$, com H_1 e H_2 dadas por (5.2) e (6.1), respectivamente. Para que um anel de N vórtices de intensidade unitária numa latitude fixada z com $-1 < z < 1$, nos vértices de um polígono regular e um vórtice de intensidade κ no pólo norte (isto é, $x_N(t) = 0$ e $y_N(t) = 0$) com configuração $Q_1 = (\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1}, x_N, z_0, \dots, z_{N-1}, y_N)$, definida por*

$$\begin{cases} \varphi_j = \frac{2\pi j}{N} \\ z_j = z \\ x_N(t) = 0 \\ y_N(t) = 0 \end{cases} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.12)$$

seja um ponto de equilíbrio de (6.9) é necessário que

$$\omega = -\frac{(N-1)z}{2(1-z^2)} - \frac{\kappa}{2(1-z)} \quad (6.13)$$

Demonstração. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial z_j}(\varphi, x_N(t), z, y_N(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-z_i(t) + \frac{z_j}{\sqrt{1-z_j^2}} \sqrt{1-z_i(t)} \cos(\varphi_j - \varphi_i(t))}{1 - z_j z_i(t) - \sqrt{1-z_j} \sqrt{1-z_i(t)} \cos(\varphi_j - \varphi_i(t))} + \\ &\quad \frac{\kappa}{2} \frac{-z_N(t) + \frac{z_j}{\sqrt{1-z_j^2}} (x_N(t) \cos \varphi_j + y_N(t) \sin \varphi_j)}{1 - z_j z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2} (x_N(t) \cos \varphi_j + y_N(t) \sin \varphi_j)} - \\ &\quad w \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial z_j} (z_j + \kappa z_N(t)) \right) \quad \text{para } i, j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Impondo $\frac{\partial H}{\partial z_j}(\varphi, x_N(t), z, y_N(t)) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-z_i(t) + \frac{z_j}{\sqrt{1-z_j^2}} \sqrt{1-z_i(t)} \cos(\varphi_j - \varphi_i(t))}{1 - z_j z_i(t) - \sqrt{1-z_j} \sqrt{1-z_i(t)} \cos(\varphi_j - \varphi_i(t))} + \\ &\quad \frac{\kappa}{2} \frac{-z_N(t) + \frac{z_j}{\sqrt{1-z_j^2}} (x_N(t) \cos \varphi_j + y_N(t) \sin \varphi_j)}{1 - z_j z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2} (x_N(t) \cos \varphi_j + y_N(t) \sin \varphi_j)} \end{aligned}$$

Fazendo $z_j = z_i(t) = z$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $z_N(t) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-z + z \cos(\varphi_j - \varphi_i(t))}{1 - z^2 - (1 - z^2) \cos(\varphi_j - \varphi_i(t))} \\ &= -\frac{(N-1)z}{2(1-z^2)} - \frac{\kappa}{2(1-z)}.\end{aligned}$$

□

A próxima proposição garante que Q_1 é de fato um ponto de equilíbrio de (6.9). Em seguida analisaremos sua estabilidade segundo Liapunov.

Proposição 6.2.3. *Seja H definida por (6.10), e seja ω dada por (6.13). Então Q_1 definido em (6.12) é um ponto de equilíbrio de (6.9).*

Demonstração. Temos que mostrar que $\nabla H(Q_1) = 0$. Para isto, observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial z_j}(\varphi, x_N(t), \mathbf{z}, y_N(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \frac{-z_i(t) + \frac{z_j}{\sqrt{1-z_j^2}} \sqrt{1-z_i(t)} \cos(\varphi_j - \varphi_i(t))}{1 - z_j z_i(t) - \sqrt{1-z_j} \sqrt{1-z_i(t)} \cos(\varphi_j - \varphi_i(t))} + \\ &\quad - z_N(t) + \frac{z_j}{\sqrt{1-z_j^2}} (x_N(t) \cos \varphi_j + y_N(t) \sin \varphi_j) \\ &\quad - \frac{\kappa}{2} \frac{1 - z_j z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2} (x_N(t) \cos \varphi_j + y_N(t) \sin \varphi_j)}{1 - z_j z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2} (x_N(t) \cos \varphi_j + y_N(t) \sin \varphi_j)} - \omega.\end{aligned}$$

Fazendo $z_j = z_k = z$, $\varphi_j = \frac{2\pi j}{N}$, $\varphi_i = \frac{2\pi i}{N}$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $z_N(t) = 1$ temos

$$\frac{\partial H}{\partial z_j}(Q_1) = -\frac{(N-1)z}{2(1-z^2)} - \frac{\kappa}{2(1-z)} - \omega,$$

e, como $\omega = -\frac{(N-1)z}{2(1-z^2)} - \frac{\kappa}{2(1-z)}$

$$\frac{\partial H}{\partial z_j}(Q_1) = 0$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \varphi_j}(\varphi, x_N(t), \mathbf{z}, y_N(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} \frac{-\sqrt{1-z_i^2} \sqrt{1-z_j^2} \sin(\varphi_j - \varphi_i)}{1 - z_i z_j - \sqrt{1-z_j^2} \sqrt{1-z_i^2} \cos(\varphi_j - \varphi_i)} + \\ &\quad - \frac{\kappa}{2} \frac{x_N(t) \sqrt{1-z_j^2} \sin \varphi_j - y_N(t) \sqrt{1-z_j^2} \cos \varphi_j}{1 - z_i(t) z_N(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_i(t) + y_N(t) \sin \varphi_i(t))}.\end{aligned}$$

Fazendo $z_j = z_i = z$, $\varphi_j = \frac{2\pi j}{N}$, $\varphi_i = \frac{2\pi i}{N}$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $z_N = 1$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \varphi_j}(Q_1) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} \frac{-(1-z^2) \operatorname{sen}(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi i}{N})}{(1-z^2)(1 - \cos(\frac{2\pi j}{N} - \frac{2\pi i}{N}))} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para o $N + 1$ -ésimo vórtice temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_N}(\varphi, x_N(t), z, y_N(t)) &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\frac{z_j x_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2} \cos \varphi_j}{1-z_k z_j - \sqrt{1-z_j^2}(x_N(t) \cos \varphi_j + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_j)} + \\ &\quad \frac{\omega \kappa x_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}}. \end{aligned}$$

Fazendo $z_j = z_k = z$, $\varphi_j = \frac{2\pi j}{N}$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $z_N = 1$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_N}(Q_1) &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} -\frac{\sqrt{1-z^2} \cos \frac{2\pi j}{N}}{1-z} \\ &= -\frac{\kappa \sqrt{1-z^2}}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \cos \frac{2\pi j}{N} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, mostraremos que $\frac{\partial H}{\partial y_N}(Q_1) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y_N}(\varphi, x_N(t), z, y_N(t)) &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\frac{z_j y_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2} \operatorname{sen} \varphi_j}{1-z_k z_j - \sqrt{1-z_j^2}(x_N(t) \cos \varphi_j + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_j)} + \\ &\quad \frac{\omega \kappa y_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}}. \end{aligned}$$

Fazendo $z_j = z_k = z$, $\varphi_j = \frac{2\pi j}{N}$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $z_N = 1$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y_N}(Q_1) &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} -\frac{\sqrt{1-z^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi j}{N}}{1-z} \\ &= -\frac{\kappa \sqrt{1-z^2}}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{sen} \frac{2\pi j}{N} \\ &= -\kappa \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-z} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{sen} \frac{\pi j}{N} \cos \frac{\pi j}{N} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

6.3 Estabilidade segundo Liapunov do equilíbrio

Agora, mostraremos que o ponto de equilíbrio Q_1 é estável segundo Liapunov. Para simplificar os cálculos, faremos uma nova mudança de variáveis linear. Para este propósito, usaremos uma matriz T ortogonal $(2N+2) \times (2N+2)$ definida a partir da matriz T_1 ortogonal $2N \times 2N$ definida em (5.11) da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que $TM = MT$, e que $KT^t = T^tK$. Substituindo a transformação $Q = Q_1 + T\xi$ na equação (6.11), obtemos

$$T\dot{\xi} = K\nabla H(Q_1 + T\xi)$$

ou seja, se tomarmos $\tilde{H}(\xi) = H(Q_1 + T\xi)$, como $\nabla\tilde{H}(\xi) = T^tH(Q_1 + T\xi)$, obtemos

$$M\dot{\xi} = K\nabla\tilde{H}(\xi) \quad (6.14)$$

Assim, estudar a estabilidade segundo Liapunov do equilíbrio Q_1 é equivalente à estudar a estabilidade segundo Liapunov do equilíbrio $\xi = 0$ de (6.14). A demonstração de que H é uma integral primeira de (6.4) mostra também que \tilde{H} é uma integral primeira de (6.14) e, portanto, $G_1(\xi) = \tilde{H} - \tilde{H}(0)$ é uma integral primeira deste sistema. Como $\nabla\tilde{H}(0) = 0$ e $D^2\tilde{H}(0) = T^tD^2H(Q_1)T$, a série de Taylor de G_1 em torno de $\xi = 0$ é dada por

$$G_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi^t (T^tD^2H(Q_1)T) \xi + \dots$$

onde as reticências significam os termos de ordem superior. Assim, para mostrar que $\xi = 0$ é um ponto de máximo estrito de G_1 calcularemos as derivadas parciais de segunda ordem de H_2 em Q_1 . Para isto utilizaremos as formulas

$$\sum_{j=0}^{N-1} \text{sen}^2\left(\frac{2\pi j}{N}\right) = \begin{cases} 0, & \text{para } N = 2 \\ \frac{N}{2}, & \text{para } N > 2 \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \text{cos}^2\left(\frac{2\pi j}{N}\right) = \begin{cases} 2, & \text{para } N = 2 \\ \frac{N}{2}, & \text{para } N > 2 \end{cases} \quad (6.16)$$

que estão demonstradas no apêndice A.

Para $l \neq j$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z_l \partial z_j} &= \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial z_l} \left(\frac{-z_N(t) + \frac{z_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j^2} &= \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{-z_N(t) + \frac{z_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)}}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))} \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \frac{\frac{x_N(t)\cos\varphi_k + y_N(t)\sen\varphi_j(t)}{(1 - z_j(t))^{3/2}}}{1 - z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))} - \\ &\quad \frac{-z_N(t) + \frac{z_j(t)}{\sqrt{1-z_j(t)}}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))}{1 - z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))} \\ &\quad \frac{-z_N(t) + \frac{z_j(t)}{\sqrt{1-z_j(t)}}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))}{\left(1 - z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sen\varphi_j(t))\right)^2}. \end{aligned}$$

Fazendo $z_N(t) = 1$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $z_j(t) = z$, obtemos

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j^2}(Q_1) = -\frac{\kappa}{2(1-z)^2}$$

Para $0 \leq j, l \leq N-1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_l \partial \varphi_j} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_l} \left(\frac{x_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j(t) - y_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t)}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))} \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \frac{-x_N\sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t)\delta_{jl} + y_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\sen\varphi_j(t)\delta_{jl}}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))} - \\ &\quad \frac{\sqrt{1-z_j^2(t)}(-x_N(t)\sen\varphi_j(t)\delta_{jl} + y_N(t)\sen\varphi_j(t)\delta_{jl})}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))} \\ &\quad \frac{\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\sen\varphi_j(t) - y_N(t)\sen\varphi_j(t))}{1 - z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1 - z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sen\varphi_i(t))} \end{aligned}$$

$$= \frac{\kappa}{2} \frac{-x_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\sin\varphi_j(t)}{1-z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sin\varphi_i(t))} + \frac{(x_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\sin\varphi_j(t) - y_N(t)\sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t))^2}{1-z_i(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_i^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_i(t) + y_N(t)\sin\varphi_i(t))}$$

Fazendo $z_N(t) = 1$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $z_j(t) = z$, temos

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial\varphi_l\partial\varphi_j}(Q_1) = 0$$

Para $0 \leq l \leq N-1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial\varphi_l\partial y_N} &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial\varphi_l} \left(\frac{\frac{z_j(t)y_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sin\varphi_j(t)}{1-z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sin\varphi_j(t))} \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{-\sqrt{1-z_j^2(t)}\cos\varphi_j(t)\delta_{jl}}{1-z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sin\varphi_j(t))} - \\ &\quad \frac{\left(\frac{z_j(t)x_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)} - \sqrt{1-z_j^2(t)}\sin\varphi_j(t)} \right)}{1-z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sin\varphi_j(t))} \\ &\quad \frac{\left(-\sqrt{1-z_j^2(t)}(-x_N(t)\sin\varphi_j(t)\delta_{jl} + y_N(t)\cos\varphi_j(t)\delta_{jl}) \right)}{1-z_j(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t) + y_N(t)\sin\varphi_j(t))} \\ &= \frac{\kappa}{2} \frac{-\sqrt{1-z_l^2(t)}\cos\varphi_l(t)}{1-z_l(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_l^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_l(t) + y_N(t)\sin\varphi_l(t))} - \\ &\quad \frac{\left(\frac{z_l(t)x_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)} - \sqrt{1-z_l^2(t)}\sin\varphi_l(t)} \right)}{1-z_l(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_l^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_l(t) + y_N(t)\sin\varphi_l(t))} \\ &\quad \frac{\left(-\sqrt{1-z_l^2(t)}(-x_N(t)\sin\varphi_l(t) + y_N(t)\cos\varphi_l(t)) \right)}{1-z_l(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_l^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_l(t) + y_N(t)\sin\varphi_l(t))} \end{aligned}$$

Fazendo $z_N(t) = 1$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$, $z_l(t) = z$ e $\varphi_l(t) = \frac{2\pi l}{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial\varphi_l\partial y_N}(Q_1) &= \frac{\kappa(-\sqrt{1-z^2}\cos\varphi_l(t))(1-z)}{2(1-z)^2} \\ &= -\frac{r\kappa\cos\frac{2\pi l}{N}}{2(1-z)} \end{aligned}$$

Para $0 \leq l \leq N - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_N \partial \varphi_l} &= \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{x_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{sen} \varphi_l(t) - y_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{cos} \varphi_l(t)}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \frac{\sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{sen} \varphi_l(t)}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} - \\ &\quad \frac{\frac{z_l(t) x_N(t)}{\sqrt{1 - x_N^2(t) - y_N^2(t)}} - \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{cos} \varphi_l(t)}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \end{aligned}$$

Fazendo $z_l(t) = 0$, $z_N(t) = 1$, $x_N(t) = 0 = y_N(t)$ e $\varphi_l(t) = \frac{2\pi l}{N}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_N \partial \varphi_l}(Q_1) &= \frac{\kappa}{2} \frac{\sqrt{1 - z^2} \operatorname{sen}(\frac{2\pi l}{N})}{1 - z} \\ &= \frac{\kappa r \operatorname{sen}(\frac{2\pi l}{N})}{2(1 - z)} \end{aligned}$$

Para $0 \leq l \leq N - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_N \partial z_l} &= \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{-z_N(t) + \frac{z_l(t)}{\sqrt{1 - z_l^2(t)}} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \right) \\ &= \frac{\frac{x_N(t)}{\sqrt{1 - x_N^2(t) - y_N^2(t)}} + \frac{\operatorname{cos} \varphi_l(t) z_l(t)}{\sqrt{1 - z_l^2(t)}}}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} - \\ &\quad \frac{-z_N(t) + \frac{x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t)}{\sqrt{1 - z_l^2(t)}}}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \\ &\quad \frac{\frac{x_N(t) z_l(t)}{\sqrt{1 - x_N^2(t) + y_l^2}} - \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{cos} \varphi_l(t)}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \end{aligned}$$

Fazendo $z_N(t) = 1$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$, $z_l(t) = z$ e $\varphi_l(t) = \frac{2\pi l}{N}$, temos

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_N \partial z_l}(Q_1) = \frac{z \frac{\operatorname{cos} \frac{2\pi l}{N}}{\sqrt{1 - z^2}} (1 - z) - \sqrt{1 - z^2}}{(1 - z)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z \cos \frac{2\pi l}{N} (1-z) - (1-z^2) \cos \frac{2\pi l}{N}}{\sqrt{1-z^2}(1-z)^2} \\
&= -\frac{\kappa \cos \frac{2\pi l}{N} (1-z)}{2 r (1-z)^2} \\
&= -\frac{\kappa \cos \frac{2\pi l}{N}}{2 r (1-z)}
\end{aligned}$$

Para $0 \leq l \leq N-1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_2}{\partial y_N \partial z_l} &= \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial y_N} \left(\frac{-z_N(t) + \frac{z_l(t)}{\sqrt{1-z_l^2(t)}} (x_N(t) \cos \varphi_l(t) + y_N(t) \sin \varphi_l(t))}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1-z_l^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_l(t) + y_N(t) \sin \varphi_l(t))} \right) \\
&= \frac{\frac{-y_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}} + \frac{\sin \varphi_l(t) z_l(t)}{\sqrt{1-z_l^2(t)}}}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1-z_l^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_l(t) + y_N(t) \sin \varphi_l(t))} - \\
&\quad \frac{-z_N(t) + \frac{x_N(t) \cos \varphi_l(t) + y_N(t) \sin \varphi_l(t)}{\sqrt{1-z_l^2(t)}}}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1-z_l^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_l(t) + y_N(t) \sin \varphi_l(t))} \\
&\quad \frac{\frac{y_N(t) z_l(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)+y_N^2(t)}} - \sqrt{1-z_l^2(t)} \cos \varphi_l(t)}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1-z_l^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_l(t) + y_N(t) \sin \varphi_l(t))}
\end{aligned}$$

Fazendo $z_N(t) = 1$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$, $z_l(t) = z$ e $\varphi_l(t) = \frac{2\pi l}{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_2}{\partial y_N \partial z_l} (Q_1) &= \frac{z \frac{\sin \frac{2\pi l}{N}}{\sqrt{1-z^2}} (1-z) - \sqrt{1-z^2}}{(1-z)^2} \\
&= \frac{z \sin \frac{2\pi l}{N} (1-z) - (1-z^2) \sin \frac{2\pi l}{N}}{\sqrt{1-z^2}(1-z)^2} \\
&= -\frac{\kappa \sin \frac{2\pi l}{N} (1-z)}{2 r (1-z)^2} \\
&= -\frac{\kappa \sin \frac{2\pi l}{N}}{2 r (1-z)}
\end{aligned}$$

Alem disso,

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_N^2} = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\frac{z_j(t) x_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)} \cos \varphi_j(t)}{1 - z_j(t) z_N(t) - \sqrt{1-z_j^2(t)} (x_N(t) \cos \varphi_j(t) + y_N(t) \sin \varphi_j(t))} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & z_j(t)\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)} + \frac{x_N^2(t)z_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)\cos\varphi_j(t)}} \\
 = & \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}{1-z_j(t)z_N(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t)+y_N(t)\sin\varphi_j(t))} - \\
 & \frac{\frac{z_j(t)x_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)\cos\varphi_j(t)}}{\left(1-z_j(t)z_N(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t)+y_N(t)\sin\varphi_j(t))\right)^2}
 \end{aligned}$$

Fazendo $z_N(t) = 1$, $z_j(t) = z$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $\varphi_j(t) = \frac{2\pi j}{N}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_N^2}(Q_1) &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z(1-z) - (-\sqrt{1-z^2}\cos\frac{2\pi j}{N})(-\sqrt{1-z^2}\cos\frac{2\pi j}{N})}{(1-z)^2} \\
 &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z(1-z) - (1-z^2)\cos^2\frac{2\pi j}{N}}{(1-z)^2} \\
 &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z}{1-z} - \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\cos^2\frac{2\pi j}{N}}{1-z} - \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z\cos^2\frac{2\pi j}{N}}{1-z} \\
 &= \frac{\kappa}{2} \frac{Nz}{1-z} - \frac{k}{2} \frac{N}{1-z} - \frac{k}{2} \frac{zN}{1-z} \\
 &= \frac{2\kappa N - \kappa N - \kappa Nz}{4(1-z)} \\
 &= \frac{-\kappa N(1-z)}{4(1-z)} \\
 &= \frac{-\kappa N}{4}
 \end{aligned}$$

Temos antes que,

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial y_N^2} = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial y_N} \left(\frac{\frac{z_j(t)y_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)\sin\varphi_j(t)}}{1-z_j(t)z_N(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\cos\varphi_j(t)+y_N(t)\sin\varphi_j(t))} \right)$$

$$\begin{aligned}
& z_j(t)\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)} + \frac{y_N^2(t)z_j(t)}{\sqrt{1-z_j^2(t)\text{sen}\varphi_j(t)}} \\
= & \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}{1-z_j(t)z_N(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\text{sen}\varphi_j(t)+y_N(t)\text{sen}\varphi_j(t))} - \\
& \frac{\frac{z_j(t)y_N(t)}{\sqrt{1-x_N^2(t)-y_N^2(t)}} - \sqrt{1-z_j^2(t)\text{sen}\varphi_j(t)}}{\left(1-z_j(t)z_N(t)-\sqrt{1-z_j^2(t)}(x_N(t)\text{cos}\varphi_j(t)+y_N(t)\text{sen}\varphi_j(t))\right)^2}
\end{aligned}$$

Fazendo $z_N(t) = 1$, $z_j(t) = z$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $\varphi_j(t) = \frac{2\pi j}{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_2}{\partial y_N^2}(Q_1) &= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z(1-z) - (-\sqrt{1-z^2}\text{sen}\frac{2\pi j}{N})(-\sqrt{1-z^2}\text{sen}\frac{2\pi j}{N})}{(1-z)^2} \\
&= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z(1-z) - (1-z^2)\text{sen}^2\frac{2\pi j}{N}}{(1-z)^2} \\
&= \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z}{1-z} - \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\text{sen}^2\frac{2\pi j}{N}}{1-z} - \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z\text{sen}^2\frac{2\pi j}{N}}{1-z} \\
&= \frac{\kappa}{2} \frac{Nz}{1-z} - \frac{k}{2} \frac{\frac{N}{2}}{1-z} - \frac{k}{2} \frac{z\frac{N}{2}}{1-z} \\
&= \frac{2\kappa N - \kappa N - \kappa Nz}{4(1-z)} \\
&= \frac{-\kappa N(1-z)}{4(1-z)} \\
&= \frac{-\kappa N}{4}
\end{aligned}$$

Para $l \neq k$, $0 \leq l, k \leq N-1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_k \partial \varphi_l} &= \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{x_N(t)\sqrt{1-z_l^2(t)\text{sen}\varphi_l(t)} - y_N(t)\sqrt{1-z_l^2(t)\text{cos}\varphi_l(t)}}{1-z_l(t)z_N(t) - \sqrt{1-z_l^2(t)}(x_N(t)\text{cos}\varphi_l(t) + y_N(t)\text{sen}\varphi_l(t))} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Além disso, para $0 \leq l \leq N - 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_l^2} &= \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi_l} \left(\frac{x_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{sen} \varphi_l(t) - y_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{cos} \varphi_l(t)}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \frac{x_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{sen} \varphi_l(t)}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \\ &\quad \frac{\left(x_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{sen} \varphi_l(t) - y_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{cos} \varphi_l(t) \right)^2}{\left(1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t)) \right)^2} \end{aligned}$$

Fazendo $z_N(t) = 1$, $z_j(t) = z$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $\varphi_j(t) = \frac{2\pi j}{N}$

$$\frac{\partial H_2}{\partial \varphi_l^2}(Q_1) = 0$$

Finalmente, para $0 \leq l \leq N - 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z_l \partial \varphi_l} &= \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial z_l} \left(\frac{x_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{sen} \varphi_l(t) - y_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{cos} \varphi_l(t)}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \right) \\ &= \frac{\kappa}{2} \frac{\frac{-x_N(t) z_l(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t)}{\sqrt{1 - z_l^2(t)}} + \frac{y_N(t) z_l(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t)}{\sqrt{1 - z_l^2(t)}}}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \\ &\quad \frac{\kappa}{2} \frac{x_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{sen} \varphi_l(t) - y_N(t) \sqrt{1 - z_l^2(t)} \operatorname{cos} \varphi_l(t)}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \\ &\quad \frac{-z_N(t) + \frac{z_l(t)}{\sqrt{1 - z_l^2(t)}} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))}{1 - z_l(t) z_N(t) - \sqrt{1 - z_l^2(t)} (x_N(t) \operatorname{cos} \varphi_l(t) + y_N(t) \operatorname{sen} \varphi_l(t))} \end{aligned}$$

Fazendo $z_N(t) = 1$, $z_j(t) = z$, $x_N(t) = y_N(t) = 0$ e $\varphi_j(t) = \frac{2\pi j}{N}$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_l \partial \varphi_l}(Q_1) = 0$$

Para calcular $D^2 H_2(0)$, vamos ignorar os termos da diagonal da hessiana $D^2 H_2(Q_1)$ por um momento. Sem eles, a hessiana $D^2 H_2(Q_1)$ fica, em forma de blocos,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{u}_{\varphi x} & 0 & \mathbf{u}_{\varphi y} \\ \mathbf{u}_{\varphi x}^t & 0 & \mathbf{u}_{zx}^t & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_{zx} & 0 & \mathbf{u}_{zy} \\ \mathbf{u}_{\varphi y}^t & 0 & \mathbf{u}_{zy}^t & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\mathbf{u}_{\varphi x}$, $\mathbf{u}_{\varphi y}$, \mathbf{u}_{zx} e \mathbf{u}_{zy} são os vetores colunas formados por $\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j x_N}$, $\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j y_N}$, $\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j x_N}$ e $\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j y_N}$ com $j = 0, 1, \dots, N - 1$, respectivamente. Como

$$T^t = \begin{pmatrix} T_1^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0^t & 0 \\ 0 & 0 & T_1^t & 0 \\ 0^t & 0 & 0^t & 1 \end{pmatrix}$$

temos então que

$$T^t C T = \begin{pmatrix} 0 & T_1^t \mathbf{u}_{\varphi x} & 0 & T_1^t \mathbf{u}_{\varphi y} \\ \mathbf{u}_{\varphi x}^t T_1 & 0 & \mathbf{u}_{zx}^t T_1 & 0 \\ 0 & T_1^t \mathbf{u}_{zx} & 0 & T_1^t \mathbf{u}_{zy} \\ \mathbf{u}_{\varphi y}^t T_1 & 0 & \mathbf{u}_{zy}^t T_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que temos que encontrar os produtos do tipo $T_1^t \mathbf{u}_{\varphi x}$. Usando as expressões das derivadas parciais de segunda ordem da função H_2 , temos que

$$\mathbf{u}_{\varphi x} = \left(0, \frac{\kappa \sqrt{1-z^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{2(1-z)}, \frac{\kappa \sqrt{1-z^2} \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{N}\right)}{2(1-z)}, \dots, \frac{\kappa \sqrt{1-z^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2(N-1)\pi}{N}\right)}{2(1-z)} \right)$$

Observamos que este vetor é um múltiplo da última coluna da matriz T_1 , e portanto perpendicular à todas as outras. Assim será perpendicular às linhas de T_1^t , a menos da última linha e isto dá a única componente não nula obtida pela multiplicação na posição $N - 1$, e chamaremos este valor de α . É fácil ver que

$$\alpha = \frac{\kappa r}{2(1-z)} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}^2(2l\pi/N)}{\sqrt{N/2}} = \frac{\kappa r \sqrt{N/2}}{2(1-z)}.$$

Por outro lado, $\mathbf{u}_{\varphi y} = \left(-\frac{\kappa \sqrt{1-z^2}}{2(1-z)}, -\frac{\kappa \sqrt{1-z^2} \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{2(1-z)}, \dots, -\frac{\kappa \sqrt{1-z^2} \operatorname{cos}\left(\frac{2(N-1)\pi}{N}\right)}{2(1-z)} \right)$. O valor $-\alpha$ ocorre na posição 1 em $T_1^t \mathbf{u}_{\varphi y}$ e é a única componente não nula deste produto. Os vetores \mathbf{u}_{zx} e \mathbf{u}_{zy} por sua vez são dados por

$$\mathbf{u}_{zx} = \left(-\frac{\kappa}{2\sqrt{1-z^2}(1-z)}, -\frac{\kappa \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{2\sqrt{1-z^2}(1-z)}, \dots, -\frac{\kappa \operatorname{cos}\left(\frac{2(N-1)\pi}{N}\right)}{2\sqrt{1-z^2}(1-z)} \right).$$

$$\mathbf{u}_{zy} = \left(0, -\frac{\kappa \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{2\sqrt{1-z^2}(1-z)}, \dots, -\frac{\kappa \operatorname{sen}\left(\frac{2(N-1)\pi}{N}\right)}{2\sqrt{1-z^2}(1-z)} \right).$$

A única componente não nula de $T_1^t \mathbf{u}_{zx}$ é a primeira e a única de $T_1^t \mathbf{u}_{zy}$ é a componente $N - 1$, ambas iguais a β , onde β é dada por:

$$\beta = -\frac{\kappa r}{2(1-z)} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\cos^2(2l\pi/N)}{\sqrt{N/2}} = \frac{\kappa\sqrt{N/2}}{2r(1-z)}.$$

Observe que o termo de rotação de H , $\omega \left(\sum_{i=0}^{N-1} z_i(t) + \kappa z_N(t) \right)$, contribuirá para as derivadas de segunda ordem uma vez que $z_N(t) = \sqrt{1 - x_N^2(t) - y_N^2(t)}$ e portanto

$$\frac{\partial^2 z_N}{\partial x_N^2} = \frac{\partial^2 z_N}{\partial y_N^2} = -1$$

quando $x_N(t) = y_N(t) = 0$.

Combinando a hessiana de H_1 com a matriz diagonal $D = T^t D T$ (esta igualdade ocorre, pois $\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j^2}(Q_1) = -\frac{\kappa}{2(1-z)^2}$ para $j = 0, 1, \dots, N - 1$) cujos elementos diagonais são iguais aos elementos da diagonal da matriz $D^2 H_2(Q_1)$, com H_2 e com o termo de rotação, a hessiana de H calculada na solução estacionária é

$$G = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1} & \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \sigma_N & 0 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} & \beta \\ 0 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Observe que os elementos $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}$ na diagonal do primeiro bloco $(N - 1) \times (N - 1)$ são os mesmos das posições correspondentes da matriz hessiana de H_1 , pois as derivadas de segunda ordem de H_2 em relação a cada um dos φ_j , $j = 0, 1, \dots, N - 1$ é nula. Por outro lado, os elementos $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ na diagonal do segundo bloco $(N - 1) \times (N - 1)$ tem a contribuição dos elementos correspondentes das matrizes hessianas de H_1 e de H_2 . Os termos σ_N e λ_N vêm do termo de rotação e os demais termos vêm dos resultados obtidos pela transformação T .

Os termos ao longo da diagonal têm os seguintes valores:

$$\sigma_k = -\frac{k(N-k)}{2} \text{ para } k = 0, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{-(N-1)(1+z^2) + k(N-k)}{2(1-z^2)^2} - \frac{\kappa}{2(1-z)^2} \\ &= \frac{-(N-1)(1+z^2) + k(N-k) - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1\end{aligned}$$

$$\sigma_N = \lambda_N = -\frac{\kappa N}{2} + \kappa w.$$

Das expressões acima, é imediato que $\sigma_k = \sigma_{N-k}$ e $\lambda_k = \lambda_{N-k}$, para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Observe que parte da matriz G já esta na forma diagonal de modo que alguns autovalores podem ser vistos facilmente. Estes são

$$\sigma_0 = 0$$

$$\lambda_0 = -\frac{(N-1)(1+z^2) + \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2}$$

$$\sigma_k = -\frac{k(N-k)}{2} \text{ para } k = 2, 3, \dots, N-2$$

$$\lambda_k = -\frac{(N-1)(1+z^2) - k(N-k) + \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \text{ para } k = 2, \dots, N-2$$

Resta encontrar seis autovalores, que veêm das duas matrizes abaixo

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & -\alpha \\ 0 & \lambda_{N-1} & \beta \\ -\alpha & \beta & \lambda_N \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{N-1} & \alpha & 0 \\ \alpha & \sigma_N & \beta \\ 0 & \beta & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Como $\sigma_1 = \sigma_{N-1}$ e $\lambda_1 = \lambda_{N-1}$ e $\lambda_N = \sigma_N$, temos que:

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_1 - \mu & 0 & -\alpha \\ 0 & \lambda_{N-1} - \mu & \beta \\ -\alpha & \beta & \lambda_N - \mu \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{N-1} - \mu & \alpha & 0 \\ \alpha & \sigma_N - \mu & \beta \\ 0 & \beta & \lambda_1 - \mu \end{pmatrix}$$

Assim, obtemos que elas têm o mesmo conjunto de autovalores reais. Portanto, a análise da estabilidade pode ser reduzida à análise dos autovalores de uma dessas matrizes. Como $\sigma_k < 0$ para $k = 2, \dots, N-2$ nos só precisamos verificar em que condições $\lambda_k < 0$ para os mesmos índices. Como temos que $\lambda_k = \lambda_{N-k}$ e o maior autovalor ocorre para $k = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, basta impor que $\lambda_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} < 0$. Para a matriz

$$m_3 = \begin{pmatrix} -\frac{(N-1)}{2} & 0 & -\frac{\kappa\sqrt{N/2}\sqrt{1-z^2}}{2(1-z)} \\ 0 & -\frac{(N-1)z^2 - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} & -\frac{\kappa\sqrt{N/2}}{2(1-z)\sqrt{1-z^2}} \\ -\frac{\kappa\sqrt{N/2}\sqrt{1-z^2}}{2(1-z)} & -\frac{\kappa\sqrt{N/2}}{2(1-z)\sqrt{1-z^2}} & -\frac{\kappa N}{4} - \left(\frac{\kappa(N-1) + \kappa^2(1+z)}{4}\right) \end{pmatrix},$$

ao invés de calcular seus autovalores diretamente, é mais fácil decidir se todos os autovalores são negativos olhando para os determinantes dos menores principais da diagonal principal (critério de Sylvester). O primeiro elemento da diagonal de m_3 já é negativo e o próximo menor será positivo se

$$F_1(z, k) = (N - 1)z^2 + \kappa(1 + z)^2 > 0 \quad (6.17)$$

e finalmente nós precisamos $|m_3| < 0$. Acontece que a expressão para o determinante de m_3 , calculado pelo Maple, se fatora em

$$|m_3| = \frac{\kappa((N - 1)z + \kappa(1 + z))((N - 1)z(2z - N - 2Nz + Nz^2) + \kappa(2 - N + Nz)(1 + z)^2)}{16(1 - z^2)^3}$$

como o denominador é sempre positivo, basta exigir que

$$\kappa F_2(z, \kappa) F_3(z, k) < 0 \quad (6.18)$$

onde

$$F_2(z, \kappa) = (N - 1)z + \kappa(1 + z) \quad (6.19)$$

e

$$F_3(z, \kappa) = (N - 1)z(2z - N - 2Nz + Nz^2) + \kappa(2 - N + Nz)(1 + z)^2 \quad (6.20)$$

Já que as funções de F_1 , F_2 e F_3 são todas lineares em κ , nós podemos traçar os gráficos de suas curvas de nível zero no plano $z\kappa$ e assim encontrar as regiões onde os três autovalores serão negativos. Estas curvas de nível são dadas pelas seguintes expressões para κ como função de z

$$g_1(z) = -\frac{(N - 1)z^2}{(1 + z)^2},$$

$$g_2(z) = -\frac{(N - 1)z}{(1 + z)},$$

$$g_3(z) = -\frac{(N - 1)z(2z - N - 2Nz + Nz^2)}{(2 - N + Nz)(1 + z)^2}.$$

Para $N = 3$, basta analisar a matriz m_3 . As três curvas

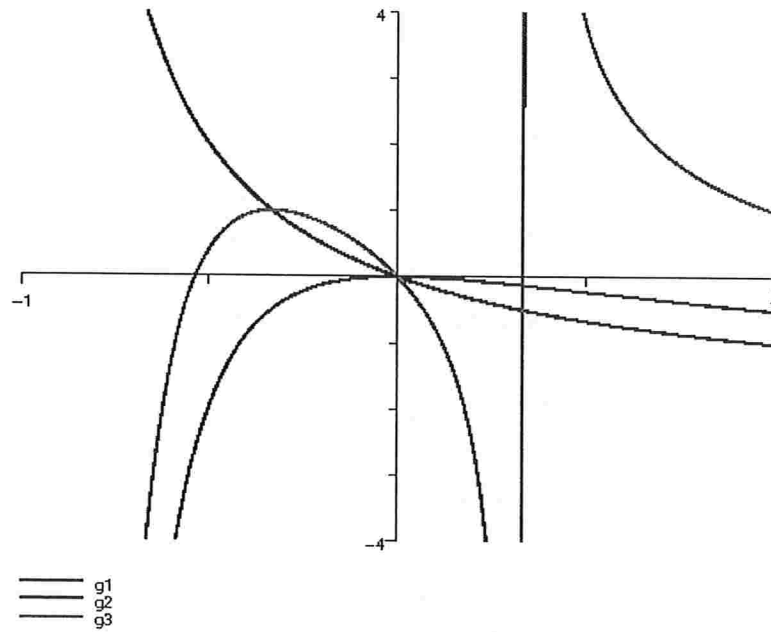
$$\kappa_1(z) = g_1(z) = -\frac{(N - 1)z^2}{(1 + z)^2},$$

$$\kappa_2(z) = g_2(z) = -\frac{(N - 1)z}{(1 + z)},$$

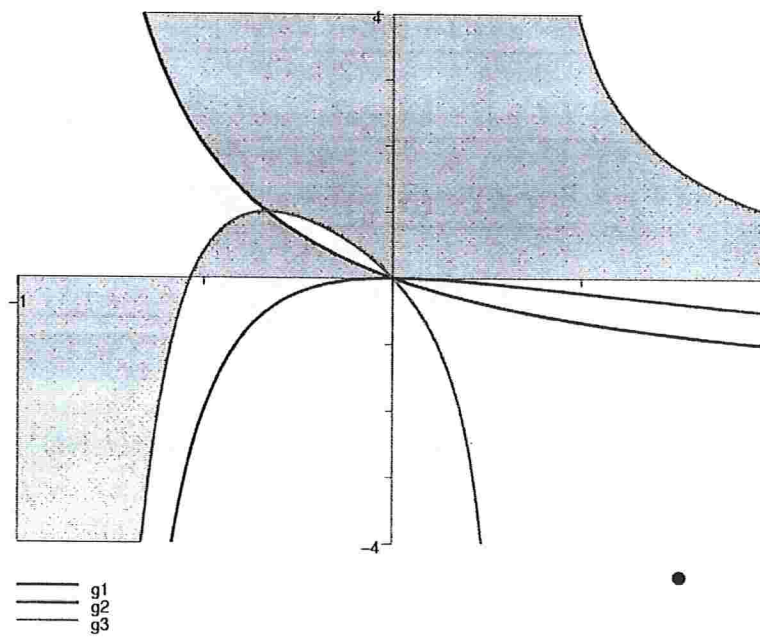
e

$$\kappa_3(z) = g_3(z) = -\frac{(N - 1)z(2z - N - 2Nz + Nz^2)}{(2 - N + Nz)(1 + z)^2},$$

definem as fronteiras onde os autovalores são negativos para m_3 . Nos gráficos abaixo, as regiões onde os autovalores são negativos estão sombreadas .



(a) gráficos das curvas de nível zero no plano $z\kappa$ de F_1 , F_2 e F_3 para $N = 3$



(b) região onde os autovalores são negativo para $N = 3$

Para $N > 3$ temos que considerar λ_k para $k = 2, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Como estes autovalores estão em ordem crescente ($\lambda_k - k^2 + kN + \text{cte}$, crescente em $[2, \frac{N}{2}]$) o maior valor alcançado é quando $k = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, ou seja, basta olhar para este autovalor.

Para N par, $k = \frac{N}{2}$ e

$$\begin{aligned} \lambda_{\frac{N}{2}} &= \frac{(N-1)(1+z^2) - (N - \frac{N}{2})\frac{N}{2} + \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{-(N-1)(1+z^2) + \frac{N^2}{4} - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{-(N-1) - (N-1)z^2 + \frac{N^2}{4} - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{-N+1 - (N-1)z^2 + \frac{N^2}{4} - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{\frac{N^2}{4} - N+1 - (N-1)z^2 - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - (N-1)z^2 - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \end{aligned}$$

Para N ímpar, $k = \frac{N-1}{2}$ e

$$\begin{aligned} \lambda_{\frac{N-1}{2}} &= \frac{(N-1)(1+z^2) - (N - \frac{N+1}{2})\frac{N-1}{2} - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{(N-1) - (N-1)z^2 - \frac{(N+1)(N-1)}{2} - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{-N+1 - (N-1)z^2 + \frac{(N-1)(N+1)}{4} - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{-N+1 - (N-1)z^2 + \frac{(N^2-1)}{4} - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{+\frac{(N^2-1)}{4} - N+1 - (N-1)z^2 - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ &= \frac{+\frac{(N-1)(N-3)}{4} - (N-1)z^2 - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \end{aligned}$$

Para todo $N \geq 4$, as curvas de nível zero de g_1, g_2, g_3 e $\kappa_4(z) = g_4$ no plano $z\kappa$ definem as regiões onde os autovalores são negativos. Os casos $N = 4, 5, 6, 7$ e 8 estão mostrados nas Figuras 6.1, 6.3, 6.5, 6.7 e 6.9 respectivamente.

Podemos observar que a equação $\lambda_{[\frac{N}{2}]} = 0$ é linear em κ para N par ou ímpar, de modo que dela nos podemos facilmente traçar o gráfico de sua solução, κ como uma função de z . A nova função que temos de considerar é:

$$g_4 = \begin{cases} \frac{\left(\frac{(N-2)}{2}\right)^2 - (N-1)z^2}{(1+z)^2} & \text{para } N \text{ par,} \\ \frac{(N-1)(N-3) - (N-1)z^2}{4(1+z)^2} & \text{para } N \text{ ímpar.} \end{cases}$$

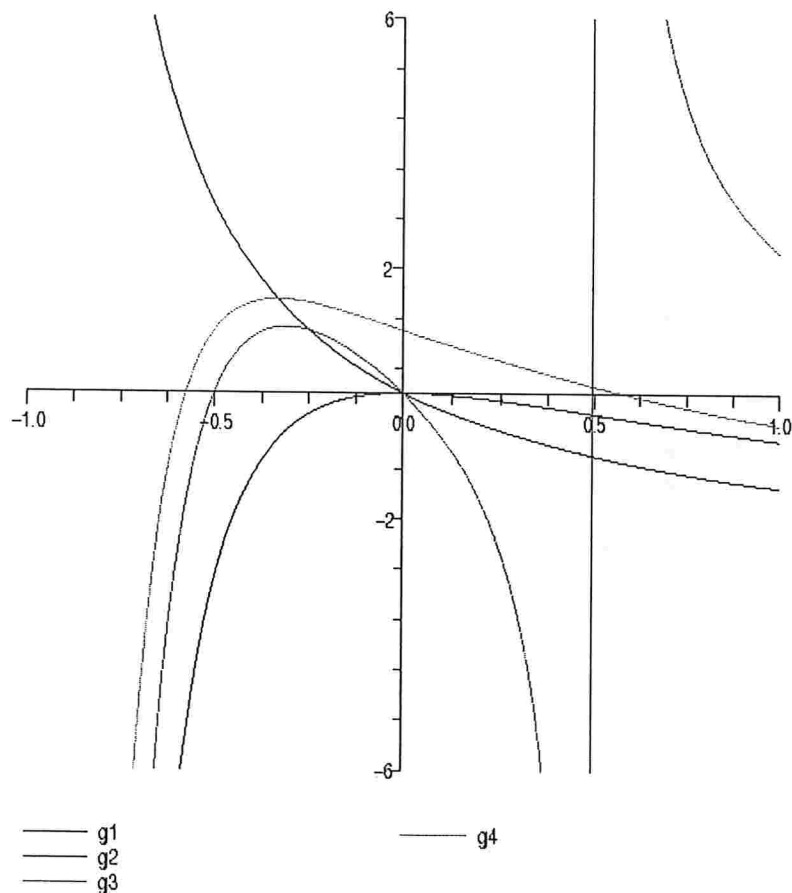


Figura 6.1: gráficos das funções g_1 , g_2 , g_3 e g_4 para $N = 4$ (a)

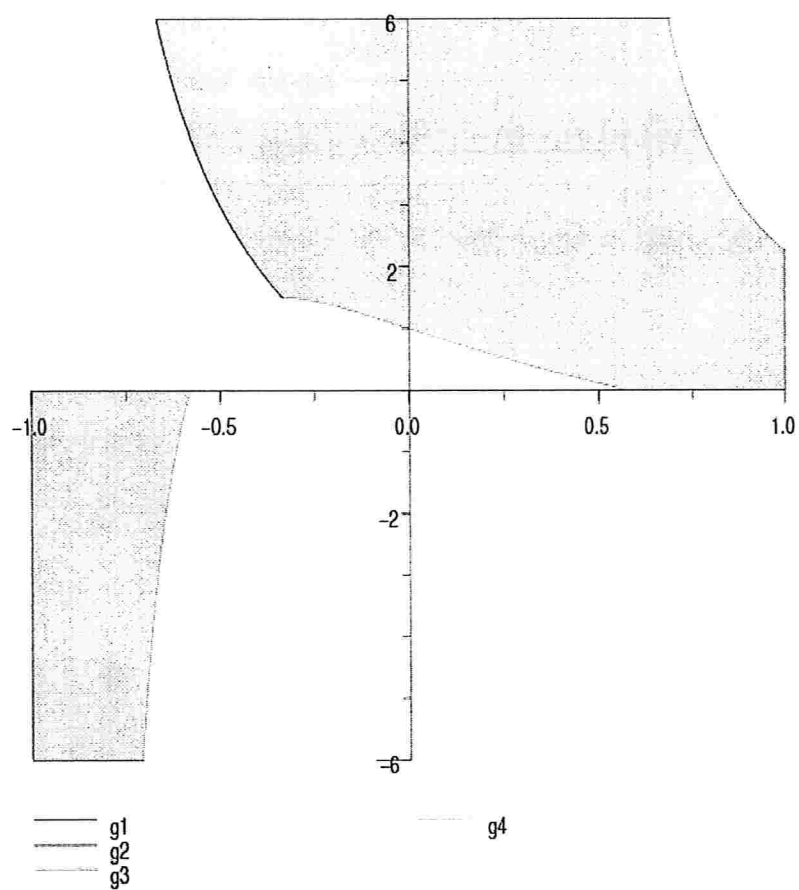


Figura 6.2: região onde os autovalores são negativos para $N = 4$ (b)

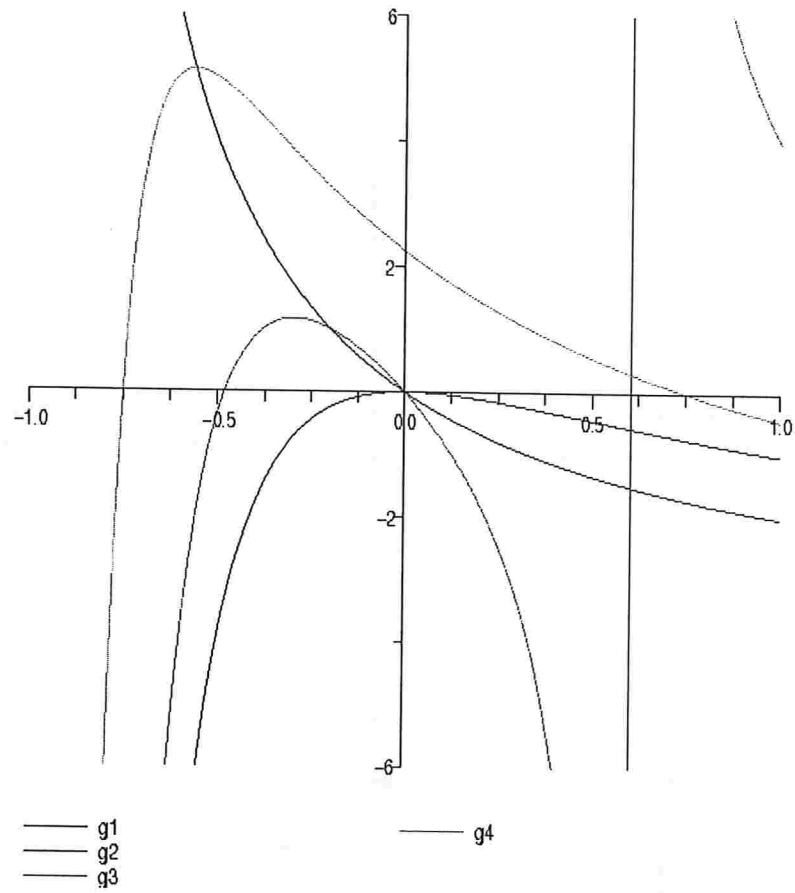


Figura 6.3: gráficos das funções g_1 , g_2 , g_3 e g_4 para $N = 5$ (a)

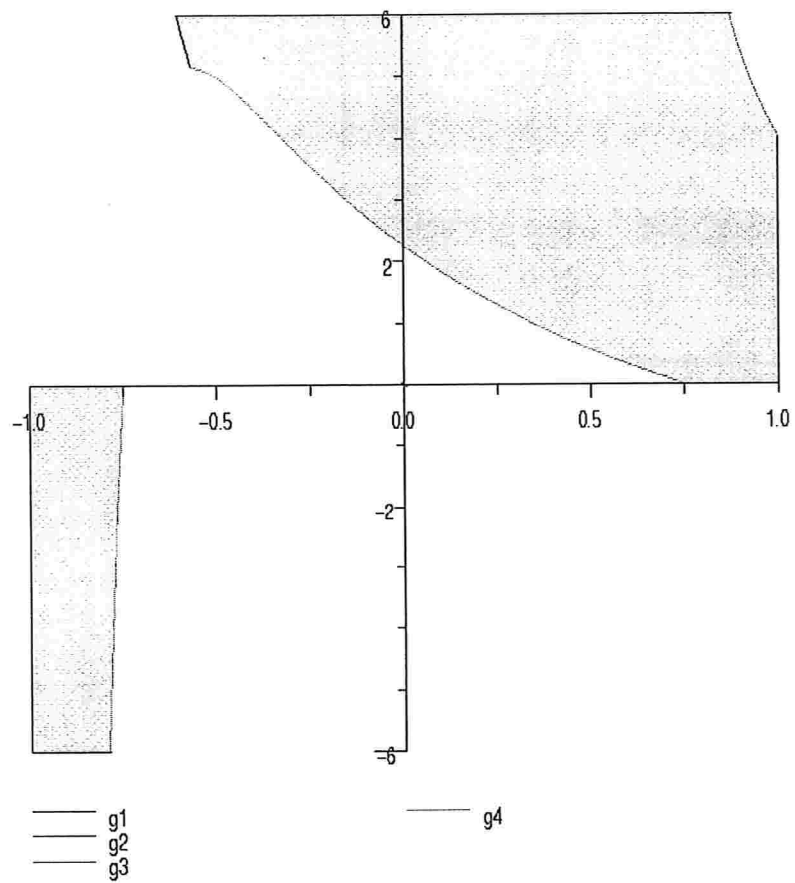
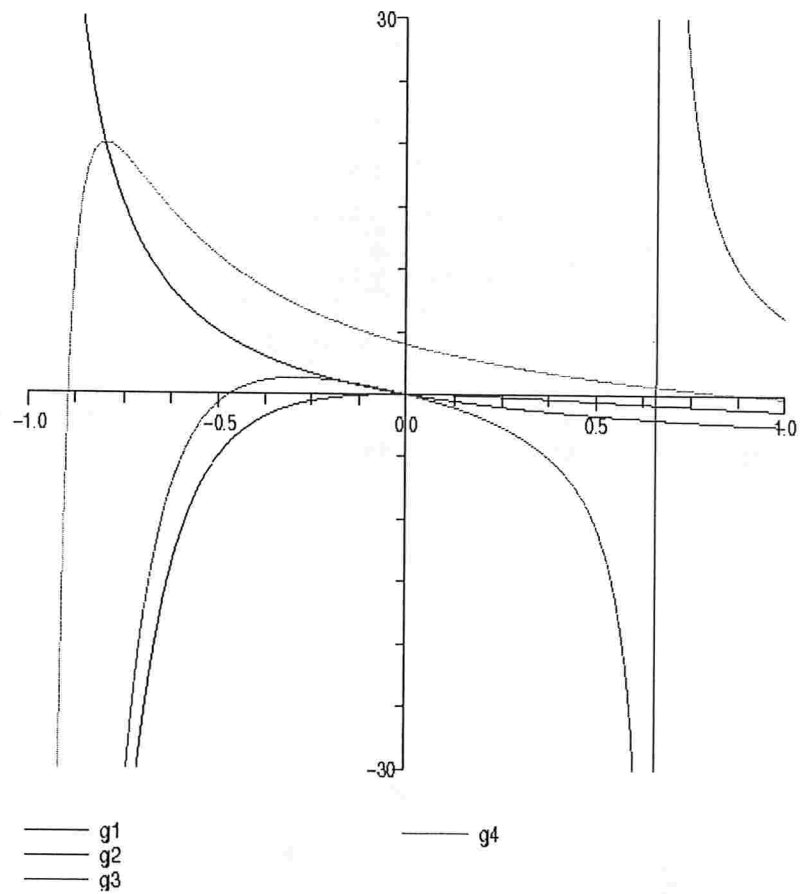


Figura 6.4: região onde os autovalores são negativos para $N = 5$ (b)

Figura 6.5: gráficos das funções g_1 , g_2 , g_3 e g_4 para $N = 6$ (a)

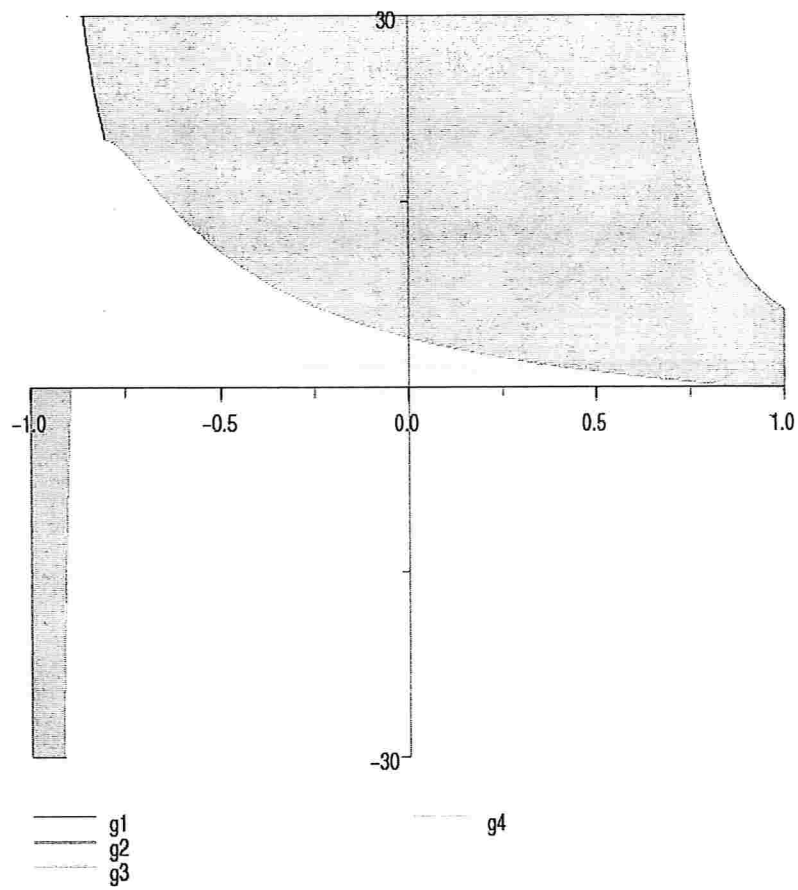
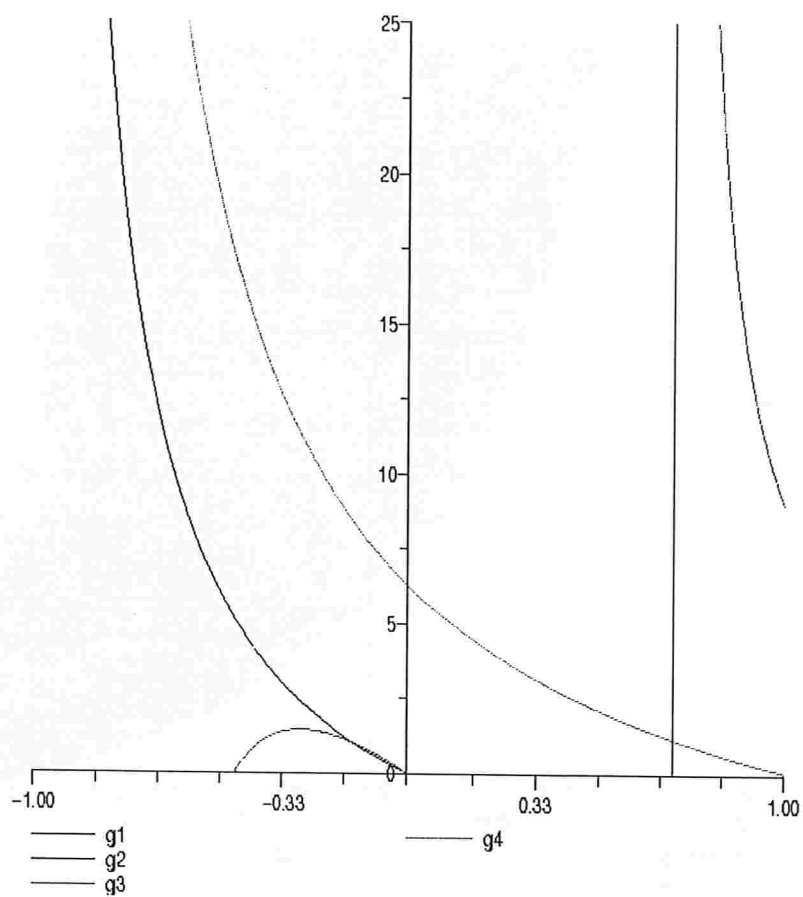


Figura 6.6: região onde os autovalores são negativos para $N = 6$ (b)

Figura 6.7: gráficos das funções g_1 , g_2 , g_3 e g_4 para $N = 7$ (a)

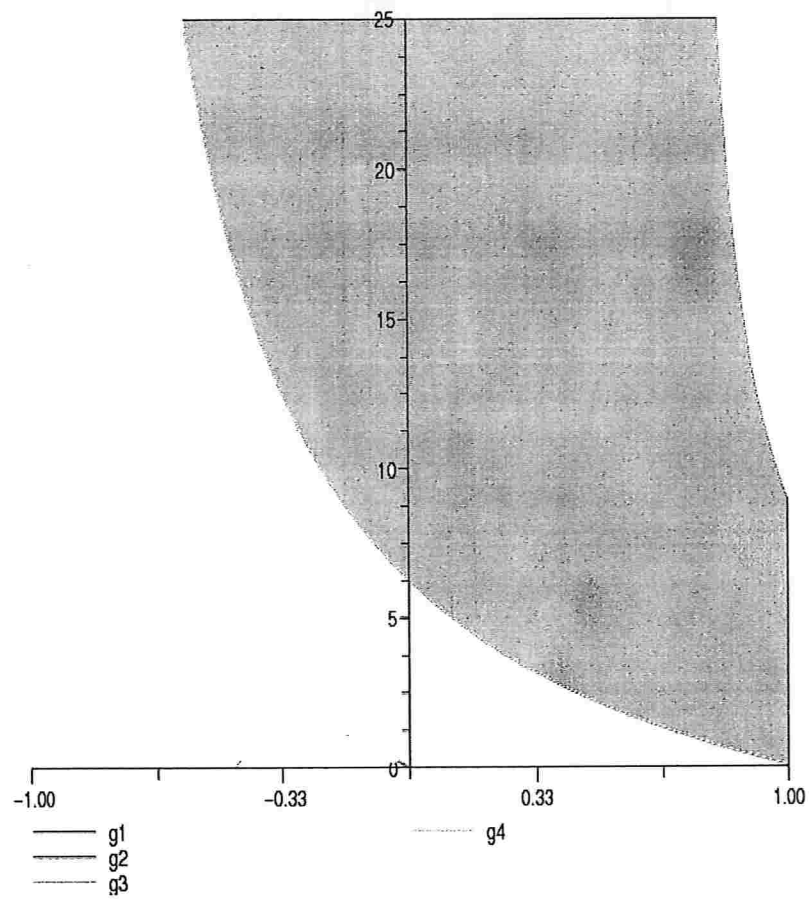
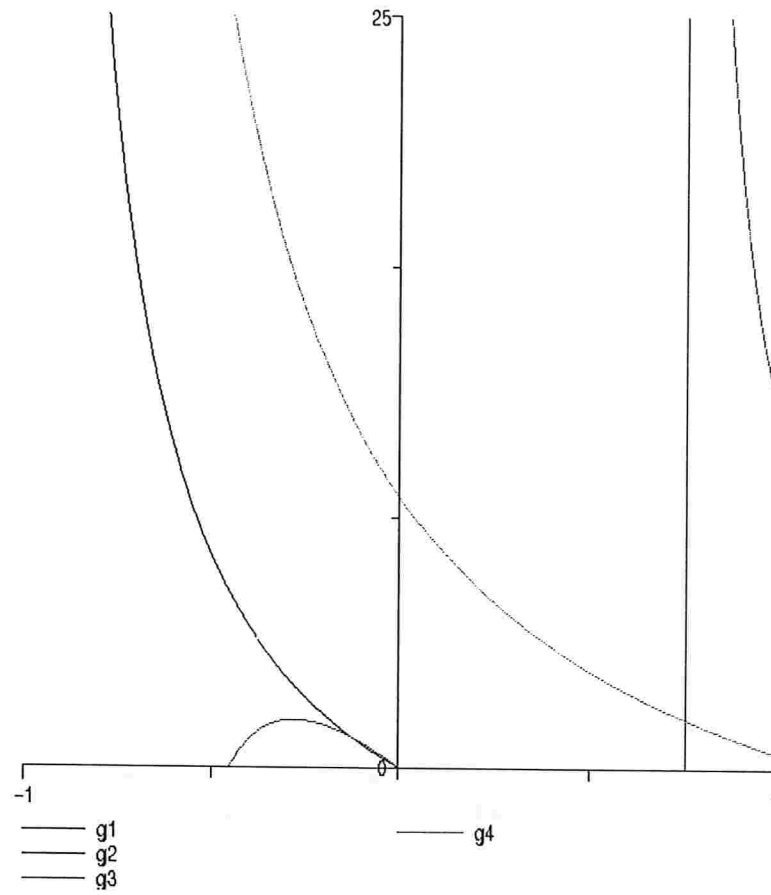


Figura 6.8: região onde os autovalores são negativos para $N = 7$ (b)

Figura 6.9: gráficos das funções g_1 , g_2 , g_3 e g_4 para $N = 8$ (a)

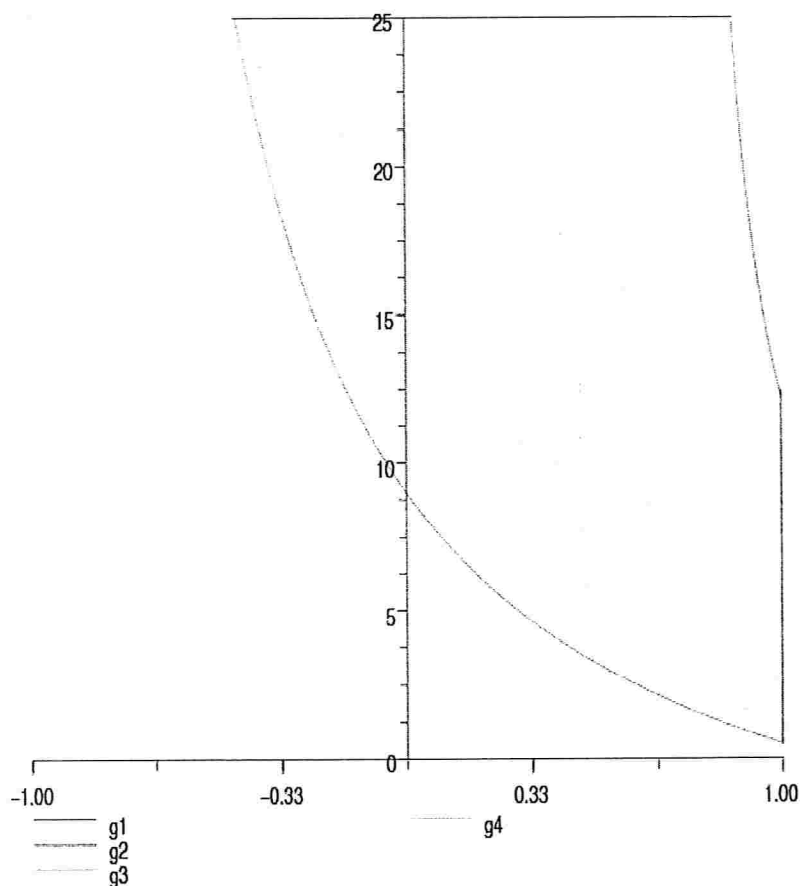


Figura 6.10: região onde os autovalores são negativos para $N = 8$ (b)

Observação 6.3.1. Para $4 \leq N < 7$ as funções g_4 tem duas raízes em $-1 < z < 1$ e também um valor máximo neste intervalo. Além disso, ela tende para $-\infty$ quando $z \rightarrow -1$. Isto permite a existência de uma região onde os autovalores são negativos para κ negativo, próximo a $z = -1$. Quando $N > 7$, $g_4(z)$ tende a $+\infty$ quando $z \rightarrow -1$ e portanto esta região desaparece. Para $N = 4, 5$ e 6 , as curvas $g_4(z)$ e $g_2(z)$ se interceptam e, à esquerda do ponto de intersecção, $g_2(z)$ é limite inferior para a região onde os autovalores são negativos. Para $N > 7$ a função $g_4(z)$ é o limite inferior para todo $-1 < z < 1$. O caso $N = 7$ é caso de transição, e aqui a função $g_4(z)$ se simplifica para $g_4(z) = \frac{6(1-z)}{(1+z)}$. De $z = -1$ à sua raiz em $z = 1$, esta função é o limite inferior para κ em todo o intervalo $-1 < z < 1$. Para todos os valores de $N > 2$, a função $g_3(z)$ impõe um limite superior sobre κ , desde seu ponto singular em $z = \frac{(N-2)}{N}$ até $z = 1$.

Observação 6.3.2. No seguinte teorema, juntamos os nossos resultados. Os intervalos em κ onde uma configuração é estável muda em certos valores de z . Estes valores são indexado por

N e eles são α_N as raízes positivas de $g_4(z) = 0$, β_N a interseção de $g_4(z)$ e $g_2(z)$, e γ_N , que é o ponto singular de $g_3(z)$. Os valores de interesse em $-1 < z < 1$ são.

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{\sqrt{3}}{3}, \alpha_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha_6 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \beta_4 &= -\frac{1}{3}, \beta_5 = -\frac{1}{2}, \beta_6 = -\frac{4}{5} \\ \gamma_N &= \frac{N-2}{N} \text{ para todo } N \geq 3 \end{aligned}$$

Teorema 6.3.3. *Um anel de N vórtices de intensidade 1 na latitude z nos vértices de um polígono regular e um vórtice no pólo norte da esfera de vorticidade κ é estável segundo Liapunov nas seguintes regiões:*

Caso $N = 3$:

$$\begin{aligned} \text{para } -1 < z \leq \frac{(2-\sqrt{13})}{3} & \text{ quando } g_3(z) < \kappa < 0 \text{ ou } g_2(z) < \kappa, \\ \text{para } \frac{(2-\sqrt{13})}{3} < z \leq -\frac{1}{3} & \text{ quando } 0 < \kappa < g_3(z) \text{ ou } g_2(z) < \kappa, \\ \text{para } -\frac{1}{3} \leq z \leq 0 & \text{ quando } 0 < \kappa < g_2(z) \text{ ou } g_3(z) < \kappa, \\ \text{para } 0 < z \leq \frac{1}{3} & \text{ quando } 0 < \kappa, \\ \text{para } \frac{1}{3} \leq z \leq 1 & \text{ quando } 0 < \kappa < g_3(z), \end{aligned}$$

Caso $N = 4, 5$ ou 6:

$$\begin{aligned} \text{para } -1 < z \leq -\alpha_N & \text{ quando } g_4(z) < \kappa < 0 \text{ ou } g_2(z) < \kappa, \\ \text{para } -\alpha_N < z \leq \beta_N & \text{ quando } g_2(z) < \kappa, \\ \text{para } \beta_N < z \leq \gamma_N & \text{ quando } g_4(z) < \kappa, \\ \text{para } \gamma_N < z \leq \alpha_N & \text{ quando } g_4(z) < \kappa < g_3(z), \\ \text{para } \alpha_N < z \leq 1 & \text{ quando } 0 < \kappa < g_3(z), \end{aligned}$$

Caso $N \geq 7$:

$$\begin{aligned} \text{para } -1 < z \leq \gamma_N & \text{ quando } g_4(z) < \kappa, \\ \text{para } \gamma_N < z \leq 1 & \text{ quando } g_4(z) < \kappa < g_3(z). \end{aligned}$$

6.4 Dois vórtices em uma latitude fixada e um vórtice no pólo norte

Vamos, nesta seção, estudar o caso em que $N = 2$, pois algumas segundas derivadas de H_2 no equilíbrio tem expressões diferentes do caso $N > 2$. Nós usaremos os mesmos métodos que para $N > 2$. A função hamiltoniana a ser considerada é

$$H = H_1 + H_2 - w(z_0 + z_1 + \kappa z_2) \tag{6.21}$$

onde H_1 e H_2 são dada por (5.2) e (6.1) respectivamente (com $N = 2$) e o sistema correspondente é

$$M\dot{Q} = K\nabla H(Q) \quad (6.22)$$

onde $Q = (\varphi_0, \varphi_1, x_2, z_0, z_1, y_2)$ M e K as matrizes 6×6

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, mostraremos que o ponto de equilíbrio $\tilde{Q} = (0, \pi, 0, z, z, 0)$ é estável segundo Liapunov. Para isso, consideremos as matrizes

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0^t & 0 \\ 0 & 0 & T_1^t & 0 \\ 0^t & 0 & 0^t & 1 \end{pmatrix} \text{ e } T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

e a transformação linear $Q = \tilde{Q} + T\xi$. Como já vimos, $TM = MT$, $KT^t = T^tK$, e se definirmos $\tilde{H}(\xi) = H(\tilde{Q} + T\xi)$, a substituição desta transformação na equação (6.22) fornece

$$M\xi = K\nabla\tilde{H}(\xi) \quad (6.23)$$

Queremos assim estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio $\xi = 0$ de (6.23).

Como já vimos, a função \tilde{H} é uma integral primeira deste sistema e, portanto, $G = \tilde{H} - \tilde{H}(0)$ também é uma integral primeira. Como $\nabla\tilde{H}(0) = 0$ e $D^2\tilde{H}(0) = T^T D^2 H(\tilde{Q}) T$, então a serie de Taylor de G em torno de $\xi = 0$ é dada por

$$G(\xi) = \frac{1}{2}\xi^T \left(T^T D^2 H(\tilde{Q}) T \right) \xi + \dots$$

Os cálculos da hessiana de H_1 permanecem os mesmos e seus autovalores são

$$\sigma_0 = 0, \sigma_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_0 = -\frac{1+z^2}{2(1-z^2)^2}, \lambda_1 = \frac{-z^2}{2(1-z^2)^2}$$

Como já dizemos no início desta seção algumas das derivadas de segunda ordem de H_2 tem expressões diferentes do caso $N > 2$. As componentes da hessiana de H_2 , são dadas por:

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_i \partial z_j} = 0 \quad \text{para } i \neq j,$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j^2} = \frac{-\kappa}{2(1-z^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j \partial x_2} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j(t) \partial y_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j \partial y_2} = \frac{-\kappa r (-1)^j}{2(1-z)},$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j \partial x_2} = \frac{-\kappa (-1)^j}{2r(1-z)},$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_j^2} = \frac{-\kappa}{1-z},$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial y_j^2} = \frac{-\kappa z}{1-z},$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_2 \partial y_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_i(t) \partial z_j} = 0 \quad \text{para } i \neq j,$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_i(t) \partial z_i} = 0,$$

com i, j tomando os valores zero ou um.

Agora, calcularemos a multiplicação $T^t D^2 H_2(\tilde{Q}) T$. Para isto ignoraremos os termos da diagonal da hessiana $D^2 H_2(\tilde{Q})$ por um momento e denotaremos esta matriz por C . Usando a mesma motivação que no caso $N > 2$, temos

$$\begin{aligned} T^t C T &= \begin{pmatrix} T_1^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0^t & 0 \\ 0 & 0 & T_1^t & 0 \\ 0^t & 0 & 0^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u_{\varphi x} & 0 & u_{\varphi y} \\ u_{\varphi x}^t & 0 & u_{zx}^t & 0 \\ 0 & u_{zx}^t & 0 & u_{zy}^t \\ u_{\varphi y}^t & 0 & u_{zy}^t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0^t & 1 & 0^t & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & 0 \\ 0^t & 0 & 0^t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & T_1^t u_{\varphi x} & 0 & T_1^t u_{\varphi y} \\ u_{\varphi x}^t T_1 & 0 & u_{zx}^t T_1 & 0 \\ 0 & T_1^t u_{zx}^t & 0 & T_1^t u_{zy}^t \\ u_{\varphi y}^t T_1 & 0 & u_{zy}^t T_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vemos que temos que encontrar os seguintes produtos:

$$\begin{aligned} T_1^t u_{\varphi x} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_2}{\partial \varphi_0 \partial x_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial \varphi_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$u_{\varphi x}^t T_1 = (T_1^t u_{\varphi x})^t = (0, 0),$$

$$\begin{aligned}
 T_1^T u_{zx} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_2}{\partial z_0 \partial x_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k \\ \frac{2r(1-z)}{2r(1-z)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-k}{\sqrt{2}r(1-z)} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\varphi y}^t T_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial H_2}{\partial \varphi_0 \partial y_2} & \frac{\partial H_2}{\partial \varphi_1 \partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{-kr}{2(1-z)} & \frac{kr}{2(1-z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-kr}{\sqrt{2}(1-z)} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1^t u_{\varphi y}^t &= (u_{\varphi y}^t T_1)^t = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-kr}{\sqrt{2}(1-z)} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{zx}^t T_1 &= (T_1^t u_{zx})^t = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-k}{\sqrt{2}r(1-z)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1^t u_{zy} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_2}{\partial z_0 \partial y_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_1 \partial y_2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$u_{zy}^t T_1 = (T_1^t u_{zy}) = (0, 0).$$

Combinando os resultados da multiplicação $T^t D T$ onde D é a matriz diagonal com elementos na diagonal iguais aos elementos da diagonal da hessiana $D^2 H_2(\tilde{Q})$, com os elementos da multiplicação $T^t C T$ obtemos a matriz

$$T^t D^2 H_2(\tilde{Q}) T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\kappa r}{\sqrt{2}(1-z)} \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{1-z} & 0 & \frac{-\kappa}{\sqrt{2}r(1-z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\kappa}{2(1-z)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\kappa}{\sqrt{2}r(1-z)} & 0 & \frac{-\kappa}{2(1-z)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa r}{\sqrt{2}(1-z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa z}{1-z} \end{pmatrix}$$

Finalmente, obtemos usando (6.21), que a hessiana no ponto de equilíbrio é

$$D^2 \tilde{H}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\kappa r}{\sqrt{2}(1-z)} \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa(2+3z+\kappa(1+z))}{2(1-z)^2} & 0 & \frac{-\kappa}{\sqrt{2}r(1-z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1+z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1+z^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\kappa}{\sqrt{2}r(1-z)} & 0 & -\frac{z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1-z)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa r}{\sqrt{2}(1-z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa(z+2z^2-\kappa(1+z))}{2(1-z)^2} \end{pmatrix},$$

lembrando que esta matriz foi construída a partir da soma das matrizes hessianas de H_1 e de H_2 e do termo de rotação. Não é difícil ver, por permutação de linhas e colunas, que esta matriz tem os mesmos autovalores que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-\kappa r}{\sqrt{2}(1-z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa r}{\sqrt{2}(1-z)} & \frac{\kappa(z+2z^2-\kappa(1+z))}{2(1-z)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa(2+3z+\kappa(1+z))}{2(1-z^2)} & \frac{-\kappa}{\sqrt{2}r(1-z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\kappa}{\sqrt{2}r(1-z)} & -\frac{z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1-z)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1+z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Portanto, dois de seus autovalores são:

$$\sigma_0 = 0 \quad (6.24)$$

e

$$\lambda_0 = -\frac{1+z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1+z^2)^2} \quad (6.25)$$

e os outros autovalores vêm das seguintes matrizes

$$m_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-r\kappa}{\sqrt{2}(1-z)} \\ \frac{-\kappa r}{\sqrt{2}(1-z)} & \frac{\kappa(z+2z^2-\kappa(1+z))}{\sqrt{2}(1-z)} \end{pmatrix} \text{ e } m_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa(2+3z+\kappa(1+z))}{2(1-z^2)} & \frac{-\kappa}{\sqrt{2}r(1-z)} \\ \frac{-\kappa}{\sqrt{2}(1-z)r} & -\frac{z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Usando o Maple achamos que os autovalores de m_2 são:

$$\lambda_1 = -\frac{z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \quad (6.26)$$

$$\sigma_2 = -\frac{\kappa(2+3z+\kappa(1+z))}{2(1-z^2)} \quad (6.27)$$

Os autovalores λ_2 e σ_1 da matriz de m_1 são dadas por expressões complicadas, difíceis de analisar. Então, usaremos o critério de Sylvester para matrizes definidas negativas. Para que ele seja satisfeito, basta que $|m_1|$ seja positivo. Mas

$$|m_1| = -\frac{-\kappa(1+2z)(z+\kappa(1+z))}{4(1-z^2)}$$

Como o denominador desta expressão é sempre positivo, podemos garantir que o determinante é positivo quando

$$F(z, \kappa) = \kappa(1+2z)(z+\kappa(1+z)) < 0$$

A menos do autovalor $\sigma_0 = 0$, para que todos os outros autovalores sejam negativos nós devemos exigir $\lambda_0 < 0$, $\sigma_2 < 0$, $\lambda_1 < 0$ e $F(z, \kappa) < 0$. De (6.26) e (6.27) é óbvio que $\lambda_0 < \lambda_1$, de

modo que a condição para λ_0 pode ser ignorada. As fronteiras para estas condições podem ser encontradas ao traçarmos as curvas solução de $F(z, \kappa) = 0$, $\sigma_2 = 0$ e $\lambda_1 = 0$. Estas equações dão origem a cinco curvas:

$$\kappa = 0, \quad \kappa = -\frac{1}{2}, \quad \kappa = \frac{-z}{1+z}, \quad \kappa = \frac{-z^2}{(1+z)^2}, \quad \kappa = -\frac{2+3z}{1+z}$$

Estas curvas e retas estão desenhadas nas figuras abaixo, e as regiões onde os autovalores de m_1 e m_2 são negativos estão sombreadas.

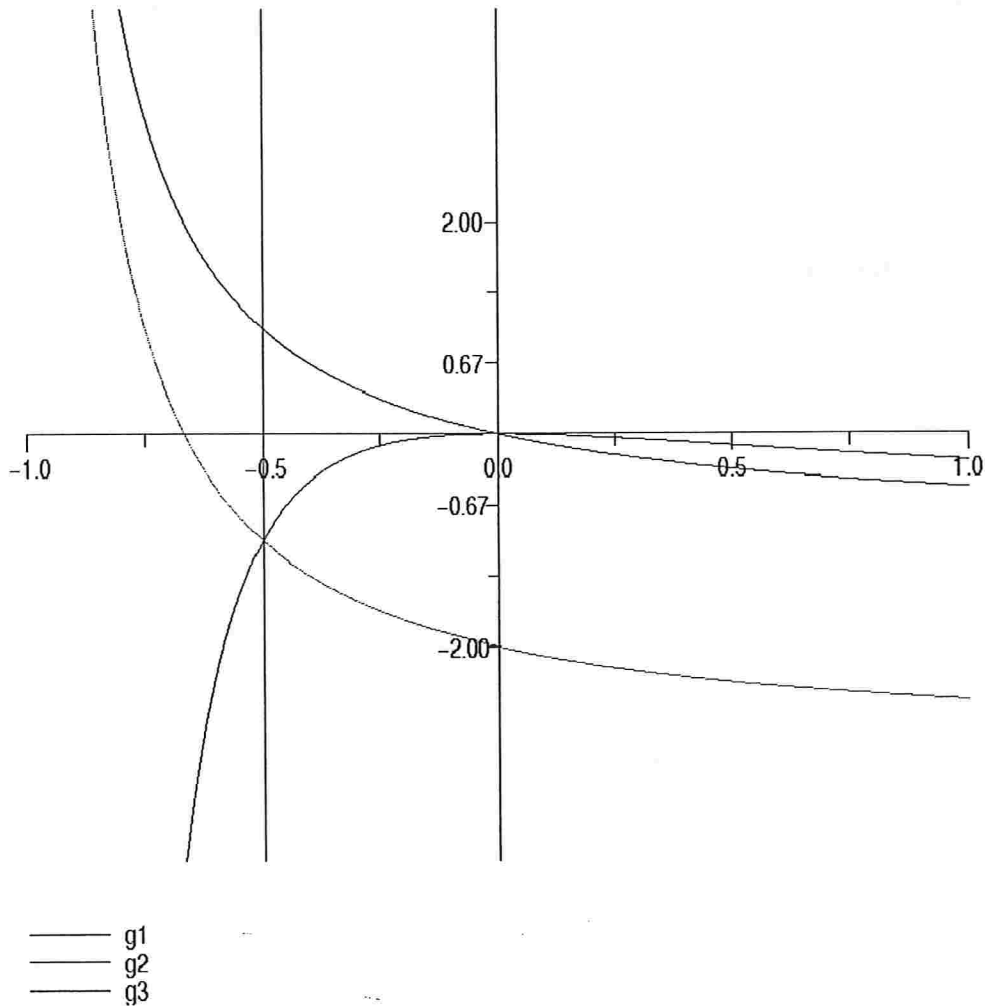


Figura 6.11: N=2 vórtices

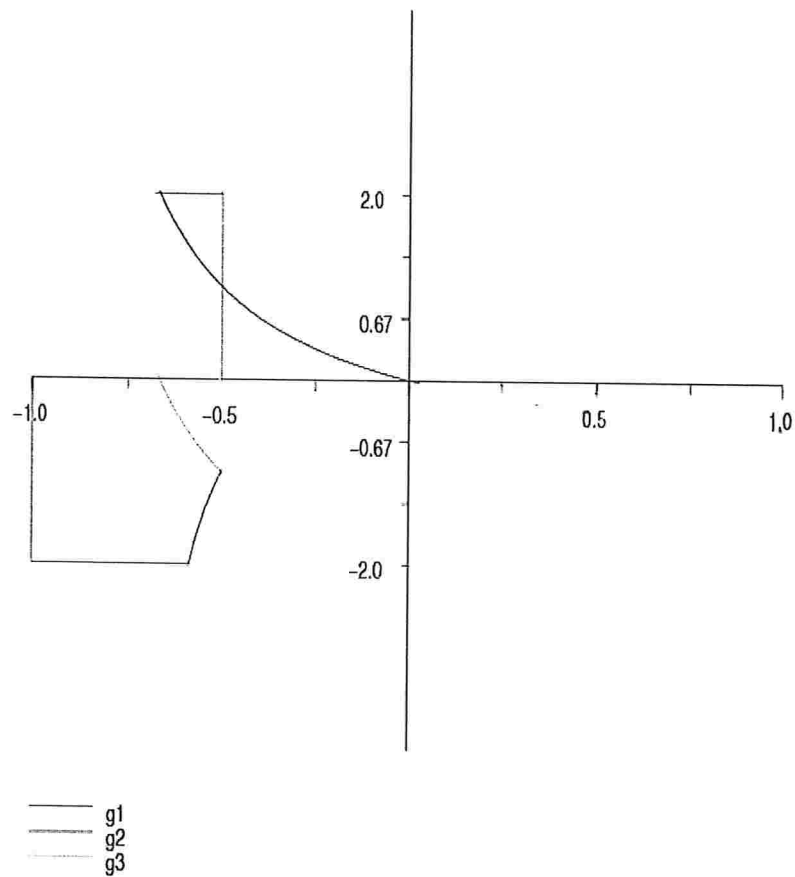


Figura 6.12: $N=2$ vórtices

Como sempre, o autovalor nulo corresponde ao fato de \tilde{H} ser invariante por rotação e consideramos o problema no espaço quociente..

Já que os autovalores de m_1 e m_2 são negativos, temos que $\xi = 0$ é um ponto de máximo estrito de G , e conseqüentemente, a função $-G$ serve como função de Liapunov para o equilíbrio $\xi = 0$ de $M\dot{\xi} = K\nabla\tilde{H}(\xi)$, e pela proposição (1.4.2), temos estabilidade segundo Liapunov para o equilíbrio estudado.

CAPÍTULO 6. ESTABILIDADE SEGUNDO LIAPUNOV DE UM ANEL DE VÓRTICES
174 EM UMA LATITUDE FIXADA COM UM VÓRTICE NO PÓLO NORTE

Conclusões

Nosso objetivo neste trabalho foi estudar boa parte do artigos [7] e [6] sobre as estabilidades espectral e segundo Liapunov de um sistema constituído por um anel de N vórtices pontuais no plano e na esfera e também do sistema com um vórtice adicional no centro, no caso plano, e no pólo norte, na esfera. Mas os cálculos foram na grande maioria feitos de modo independente, seguindo caminhos um pouco diferentes do original.

Este trabalho me proporcionou a oportunidade de me aprofundar nas técnicas utilizadas para atacar problemas hamiltonianos. Acreditamos que com base no presente trabalho possamos abordar questões um pouco mais gerais. Entre estas mencionamos:

- O estudo de dois anéis de vórtices concêntricos no plano, com os vórtices de um anel nas mediatrizes dos vórtices do outro anel.
- O estudo de três ou mais anéis concêntricos no plano.
- O estudo de dois anéis de vórtices, em latitudes diferentes, na esfera.

Além disso, esta dissertação fornece uma base sólida para o estudo dos diversos problemas de interesse associados aos vórtices. Esperamos no futuro voltar a trabalhar nesta ampla gama de problemas.

Apêndice A

Proposição A.0.1. Sejam W e B definidas por $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$ e $B = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \frac{W+\bar{W}}{2} & \frac{i(W-\bar{W})}{2} \\ -i\frac{(W-\bar{W})}{2} & \frac{W+\bar{W}}{2} \end{pmatrix}$ respectivamente. Então B é ortonormal e $B^t J B = J$.

Demonstração. Basta calcular

$$\begin{aligned} (BB^t) &= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{(W+\bar{W})}{2} & \frac{i(W-\bar{W})}{2} \\ -i\frac{(W-\bar{W})}{2} & \frac{(W+\bar{W})}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{W^T+\bar{W}^T}{2} & \frac{-i(W^T-\bar{W}^T)}{2} \\ i\frac{(W^T-\bar{W}^T)}{2} & \frac{W^T+\bar{W}^T}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} W\bar{W} & 0 \\ 0 & W\bar{W} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Os elementos de W são $w_{ij} = w^{(i-1)(j-1)}$ para $1 \leq i, j \leq N$:

$$(w\bar{w})_{ij} = \sum_{l=1}^N w_{il}\bar{w}_{lj} = \begin{cases} \sum_{l=1}^N w_{il}\bar{w}_{li} \text{ para } i = j \\ \sum_{l=1}^{N-1} w_{il}\bar{w}_{lj} \text{ para } i \neq j \end{cases}.$$

Para $i=j$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N w_{il}\bar{w}_{li} &= \sum_{l=1}^N w^{(i-1)(l-1)}\bar{w}^{(i-1)(l-1)} \\ &= \sum_{l=1}^N |w^{(i-1)(l-1)}|^2 = \sum_{l=1}^N 1 = N \end{aligned}$$

Para $i \neq j$, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^N w_{il} \bar{w}_{lj} &= \sum_{l=1}^N w^{(i-1)(l-1)} \bar{w}^{(j-1)(l-1)} \\
 &= \sum_{l=1}^N w^{(i-1)(l-1)} \overline{w^{(j-1)(l-1)}} \\
 &= \sum_{l=1}^N w^{(i-1)(l-1)} w^{-(l-1)(j-1)} \\
 &= \sum_{l=1}^N w^{il-i-l+1} w^{j-1-lj+l} \\
 &= \sum_{l=1}^N w^{il-i-l+1+j-1-lj+l} \\
 &= \sum_{l=1}^N w^{(i-j)(l-1)}. \text{ Fazendo } k = l - 1, \text{ como } l = 1, \dots, N, \text{ obtemos, pela} \\
 &\quad \text{proposição(1.5.4)} \\
 (w\bar{w})_{ij} &= \sum_{k=0}^{N-1} w^{(i-j)k} = 0.
 \end{aligned}$$

□

Mostraremos agora que B é ortogonal, onde $B = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \frac{W+\bar{W}}{2} & \frac{i(W-\bar{W})}{2} \\ -i(W-\bar{W}) & \frac{W+\bar{W}}{2} \end{pmatrix}$ e

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} & 0 \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{N} \end{pmatrix}. \text{ De fato, basta calcular}$$

$$\begin{aligned}
 (BB^t) &= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{W+\bar{W}}{2} & \frac{i(W-\bar{W})}{2} \\ -i(W-\bar{W}) & \frac{W+\bar{W}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{W^T+\bar{W}^T}{2} & \frac{-i(W^T-\bar{W}^T)}{2} \\ \frac{i(W^T+\bar{W}^T)}{2} & \frac{W^T+\bar{W}^T}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} W\bar{W} & 0 \\ 0 & W\bar{W} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Os elementos de W são $w_{ij} = \begin{cases} w^{ij}, & \text{para } 0 \leq i, j \leq N-1 \\ 0, & \text{para } 0 \leq i \leq N-1 \text{ e } j = N \text{ ou } 0 \leq j \leq N-1 \text{ e } i = N \\ \sqrt{N}, & \text{para } i = j = N. \end{cases}$

Queremos calcular $W\bar{W}$:

$$(W\bar{W})_{ij} = \sum_{l=0}^{N-1} w_{il}\bar{w}_{li} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{N-1} w_{il}\bar{w}_{li} & \text{se } i = j < N \\ \sum_{l=0}^{N-1} w_{il}\bar{w}_{li} & \text{se } i \neq j, 0 \leq i, j \leq N \end{cases}$$

Para $i = j < N$, temos:

$$\sum_{l=0}^N W_{il}\bar{W}_{li} = \sum_{l=0}^N w^{il}\bar{w}^{li} = \sum_{l=0}^{N-1} w^{il}\bar{w}^{li} + w^{iN}\bar{w}^{Ni} = N \text{ para } 0 \leq i \leq N.$$

Para $i \neq j$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N w_{il}\bar{w}_{li} &= \sum_{l=0}^{N-1} w^{il}\bar{w}^{li} + w^{iN}\bar{w}^{Nj} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} w^{il}\bar{w}^{-lj} + w^{iN}\bar{w}^{Nj} \\ &= \sum_{l=0}^N w^{(i-j)l} = 0 \end{aligned}$$

pois $i - j \neq 0 \pmod N$ quando $0 \leq i, j \leq N - 1$ e $i \neq j$. De modo análogo demonstra que $B^tJB = J$.

Agora mostraremos que $JM = MJ$, $M^{-1}J = JM^{-1}$ e $B^tM^{-1} = M^{-1}B^t$. Para isto

usaremos multiplicação por blocos. Denotando $M = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\kappa & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_\kappa \end{pmatrix}$, onde $\mathbf{I}_\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa \end{pmatrix}$

e usando que $\mathbf{I}_\kappa^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\kappa} \end{pmatrix}$ é a sua inversa, ambas de ordem $(N + 1) \times (N + 1)$,
obtemos:

$$\begin{aligned} MJ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\kappa & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_\kappa \\ -\mathbf{I}_\kappa & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} JM &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\kappa & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_\kappa \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_\kappa \\ -\mathbf{I}_\kappa & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{-1}\mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\kappa^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_\kappa^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_\kappa^{-1} \\ -\mathbf{I}_\kappa^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}M^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\kappa^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_\kappa^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_\kappa^{-1} \\ -\mathbf{I}_\kappa^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e, portanto, $\mathbf{J}M = M\mathbf{J}$, $M^{-1}\mathbf{J} = \mathbf{J}M^{-1}$. Resta mostraremos que $B^t M^{-1} = M^{-1} B^t$

$$\begin{aligned} B^t M^{-1} &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \begin{pmatrix} W + \bar{W} & -i(W - \bar{W}) \\ i(W - \bar{W}) & W + \bar{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\kappa^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_\kappa^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \begin{pmatrix} (W + \bar{W})\mathbf{I}_\kappa^{-1} & -i(W - \bar{W})\mathbf{I}_\kappa^{-1} \\ i(W - \bar{W})\mathbf{I}_\kappa^{-1} & (W + \bar{W})\mathbf{I}_\kappa^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \begin{pmatrix} W\mathbf{I}_\kappa^{-1} + \bar{W}\mathbf{I}_\kappa^{-1} & -iW\mathbf{I}_\kappa^{-1} + i\bar{W}\mathbf{I}_\kappa^{-1} \\ iW\mathbf{I}_\kappa^{-1} - i\bar{W}\mathbf{I}_\kappa^{-1} & W\mathbf{I}_\kappa^{-1} + \bar{W}\mathbf{I}_\kappa^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{-1}B^t &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\kappa^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_\kappa^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W + \bar{W} & -i(W - \bar{W}) \\ i(W - \bar{W}) & W + \bar{W} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\kappa^{-1}(W + \bar{W}) & -i\mathbf{I}_\kappa^{-1}(W - \bar{W}) \\ i\mathbf{I}_\kappa^{-1}(W - \bar{W}) & \mathbf{I}_\kappa^{-1}(W + \bar{W}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\kappa^{-1}W + \mathbf{I}_\kappa^{-1}\bar{W} & -i\mathbf{I}_\kappa^{-1}W + i\mathbf{I}_\kappa^{-1}\bar{W} \\ i\mathbf{I}_\kappa^{-1}W - i\mathbf{I}_\kappa^{-1}\bar{W} & \mathbf{I}_\kappa^{-1}W + \mathbf{I}_\kappa^{-1}\bar{W} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Como } \mathbf{I}_\kappa^{-1}W = W\mathbf{I}_\kappa^{-1} = \begin{cases} 0, & \text{para } r = N \text{ e } 0 \leq s \leq N-1 \text{ ou } r = N \text{ e } 0 \leq s \leq N-1 \\ \frac{\sqrt{N}}{\kappa}, & \text{para } r = s = N \\ w^{rs}, & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{I}_\kappa^{-1}\bar{W} = \bar{W}\mathbf{I}_\kappa^{-1} = \begin{cases} 0, & \text{para } r = N \text{ e } 0 \leq s \leq N-1 \text{ ou } r = N \text{ e } 0 \leq s \leq N-1 \\ \frac{\sqrt{N}}{\kappa}, & \text{para } r = s = N \\ \bar{w}^{rs}, & \text{para } 0 \leq r, s \leq N-1 \end{cases}, \text{ temos que}$$

$$B^t M^{-1} = M^{-1} B^t.$$

Proposição A.0.2. *As seguintes identidades são válidas:*

$$(a) \sum_{j=0}^N \cos^2 \frac{2\pi j}{N} = \begin{cases} 2, & \text{se } N = 2 \\ \frac{N}{2}, & \text{se } N > 2 \end{cases}$$

$$(b) \sum_{j=0}^N \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi j}{N} = \begin{cases} 0, & \text{se } N = 2 \\ \frac{N}{2}, & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

$$(c) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{kj\pi}{N}}{\operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{N}} = k(N-k), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

$$(d) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{N}} = \frac{N^2 - 1}{2}.$$

Demonstração. Se $N = 2$, o lado esquerdo do item (a) se reduz a $\cos^2 0 + \cos^2 \pi = 2$. Para $N > 2$, usando o fato de que

$$\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) = \frac{1}{2}(w^j + \bar{w}^j)$$

segue que, usando $\sum_{j=0}^{N-1} w^{pj} = 0$, para $p \neq 0 \pmod{N}$,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \cos^2 \frac{2\pi j}{N} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{N-1} (w^{2j} + 2 + \bar{w}^{2j}) = \frac{1}{4} 2N = \frac{N}{2}.$$

O item (b) segue do item (a) em virtude da identidade $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$. Para o item (c), observemos que

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{kj\pi}{N}}{\operatorname{sen} \frac{j\pi}{N}} = \frac{(w^{\frac{kj}{2}} - w^{-\frac{kj}{2}})}{(w^{\frac{j}{2}} - w^{-\frac{j}{2}})} = \frac{w^{-\frac{kj}{2}}(w^{kj} - 1)}{w^{-\frac{j}{2}}(w^j - 1)} = \frac{w^{\frac{j}{2}}(w^{kj} - 1)}{w^{\frac{kj}{2}}(w^j - 1)}$$

Assim,

$$S = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{kj\pi}{N}}{\operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{N}} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{w^j(1 - w^{kj})^2}{w^{kj}(1 - w^j)^2} = \sum_{j=1}^{N-1} w^{(1-k)j} (1 + w^j + w^{2j} + \dots + w^{(k-1)j})^2.$$

Portanto,

$$S = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{s=0}^{k-1} w^{(1+2s-k)j} + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{0 \leq r < s \leq k-1} w^{(1+r+s-k)j}$$

Pela proposição (1.5.4) sabemos que $\sum_{j=1}^{N-1} w^{Nt} = \begin{cases} -1, & t \neq 0 \pmod{N} \\ N-1, & t = 0 \pmod{N} \end{cases}$. Então, para $1 +$

$2s - k = 0 \pmod{N}$, como $-N < 2s + 1 - k < N$, temos que $2s + 1 - k = 0$, isto é, $s = \frac{k-1}{2}$.

Portanto, se k for par, $2s + 1 - k \not\equiv 0 \pmod{N}$ e $\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{s=0}^{k-1} w^{(1+2s-k)j} = -k$. Porém quando k

é ímpar $\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{s=0}^{k-1} w^{(1+2s-k)j} = -(k-1) + (N-1)$. Agora, calcularemos a outra parte de S e

somaremos o resultado. Para $1 + r + s - k \equiv 0 \pmod{N}$, novamente, temos usando o fato de que $-N < 1 + r + s - k < N$, temos $r + s = k - 1$. Portanto, quando k é par o total de termos para os quais $1 + r + s = 0$ com $r < s$ é $\frac{k}{2}$, quando k for ímpar o total de termos é $\frac{k-1}{2}$.

Como o total de termos em $\sum_{0 \leq r < s \leq k-1} w^{(1+r+s-k)j}$ é $\frac{k^2 - k}{2}$, temos para a soma S , no caso de k par,

$$\begin{aligned} S &= -k + 2 \left(\frac{k}{2}(N-1) + \left(\frac{k^2 - k}{2} - \frac{k}{2} \right) (-1) \right) \\ &= k(N - k) \end{aligned}$$

e, no caso em que k é ímpar, temos

$$\begin{aligned} S &= -(k-1) + (N-1) + 2 \left(\frac{k-1}{2}(N-1) + \left(\frac{k^2 - k}{2} - \frac{k-1}{2} \right) (-1) \right) \\ &= k(N - k) \end{aligned}$$

Isto demonstra o item (c). Agora demonstraremos o item (d). Observando que

$$w^{j/2} - w^{-j/2} = 2i \operatorname{sen} \frac{j\pi}{N},$$

segue que

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{N}} = -4 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{w^j}{(1-w^j)^2} \quad (\text{A.28})$$

Como

$$x^N w^N = x^N, x^{N+1} w^{N+1} = x^{N+1} w, x^{N+2} w^{N+2} = x^{N+2} w^2, \text{ etc,}$$

temos que, para $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-xw^j} &= 1 + xw^j + x^2w^{2j} + x^3w^{3j} \dots \\ &= (1 + xw^j + x^2w^{2j} + \dots + x^{N-1}w^{(N-1)j}) (1 + x^N + x^{2N} + \dots) \\ &= \frac{1}{1-x^N} (1 + xw^j + x^2w^{2j} + \dots + x^{N-1}w^{(N-1)j}). \end{aligned}$$

Levando em conta que, para qualquer inteiro $p \neq 0 \pmod{N}$ tem-se $\sum_{j=1}^{N-1} w^{pj} = -1$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{1-xw^j} \\ &= \frac{1}{1-x^N} (N-1-x-x^2-\dots-x^{N-1}) \\ &= \frac{N}{(1-x^N)^2} - \frac{1}{(1-x^N)} (1+x+x^2+\dots+x^{N-1}) \\ &= \frac{N}{1-x^N} - \frac{1-x^N}{(1-x)(1-x^N)}. \end{aligned}$$

observemos que

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{w^j}{(1-xw^j)^2},$$

e, portanto, disto e de (A.28), temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{w^j}{(1-w^j)^2} = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{j\pi}{N}}. \quad (\text{A.29})$$

Calculando a derivadas usando a expressão de $f(x)$ em (A.29), obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{N^2(1-x)^2x^{N-1} - (1-x^N)^2}{(1-x)^2(1-x^N)^2} \\ &= \frac{N^2x^{N-1}}{(1-x^2)(1-x^N)^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{N^2x^{N-1}}{(1-x^2)(1+x+x^2+\dots+x^{N-1})^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{N^2x^{N-1} - (1+x+x^2+x^{N-1})^2}{(1-x)^2(1+x+x^2+x^{N-1})^2} \\ &= \frac{K(x)}{G(x)}. \end{aligned}$$

Como $K(1) = N^2 - N^2 = 0$, e o denominador também se anula em $x = 1$, usaremos a regra de L'Hôpital para calcular o limite de $f'(x)$ quando x tende para 1.

O denominador

$$G(x) = (1-x)^2\beta(x), \quad \text{onde } \beta(x) = (1+x+x^2+x^{N-1})^2$$

tem o fator $(1-x)^2$ de modo que, ao calcular este limite pela regra de L'Hôpital, devemos derivar o numerador e o denominador duas vezes a fim de obtermos um denominador sem o fator $1-x$.

Para o denominador, temos

$$G''(x) = 2\beta(x) - 4(1-x)\beta'(x) + (1-x)^2\beta''(x),$$

enquanto que para o numerador $K(x) = N^2x^{N-1} - \beta(x)$, temos, para $N \geq 3$,

$$K''(x) = N^2(N-1)(N-2)x^{N-3} - \beta''(x). \quad (\text{A.30})$$

Agora,

$$\begin{aligned} \beta''(x) &= 2(1+2x+3x^2+\cdots+(N-1)x^{N-2})^2 \\ &\quad + 2(1+x+x^2+\cdots+x^{N-1})(1.2+2.3x+3.4x^2+ \\ &\quad + \cdots + (N-2)(N-1)x^{N-3}), \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \beta''(1) &= 2\left(\sum_{j=1}^{N-1} k\right)^2 + 2N\sum_{k=1}^{N-2} k(k+1) \\ &= 2\left(\frac{(N-1)N}{2}\right)^2 + 2N\left(\sum_{k=1}^{N-1} k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} k\right), \end{aligned}$$

e usando a formula para a soma dos quadrados dos primeiros $N-2$ números inteiros positivos, obtemos

$$\begin{aligned} \beta''(1) &= \frac{(N-1)^2N^2}{2} + 2N\left(\frac{1}{6}(N-2)(N-1)(2N-3) + \frac{1}{2}(N-2)(N-1)\right) \\ &= \frac{(N-1)^2N^2}{2} + \frac{2}{3}N^2(N-1)(N-2). \end{aligned}$$

Assim, por (A.30), temos

$$K''(1) = \frac{1}{3}N^2(N-1)(N-2) - \frac{(N-1)^2N^2}{2} = -\frac{1}{6}N^2(N^2-1).$$

Como $G''(1) = 2\beta(1) = 2N^2$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{K''(x)}{G''(x)} = \frac{K''(1)}{G''(1)} = -\frac{1}{12}(N^2-1).$$

Segue disto e de (A.29) que, para $N \geq 3$,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{j\pi}{N}} = \frac{N^2-1}{3}.$$

Para $N = 2$, formula também é valida pois $\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{j\pi}{N}} = \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\pi}{2}} = 1 = \frac{2^2-1}{3}$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] BARROS, I. D. Q. & GARCIA, M. V. P. G. (1995). *Mecânica Analítica Clássica*. Edgard blücher ltda ed.
- [2] BARTLE, R. G. (1964). *The Elements of Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- [3] BOGOMOLOV, V. (1977). Dynamics of vorticity at a sphere. *Fluid Dynamics* 12(6), 863–870.
- [4] BOGOMOLOV, V. (1979). Model of fluctuations of the centers of action of an atmosphere. *Izv., Acad. Sci., USSR, Atmos. Oceanic Phys* 15, 15–243.
- [5] BORISOV, A. & MAMAEV, I. (1999). Poisson structures and Lie algebras in Hamiltonian mechanics. *Izhevsk: RCD publ* , 464.
- [6] CABRAL, H. E., MEYER, K. R. & SCHMIDT, D. S. (2003). Stability and bifurcations for the $n+1$ vortex problem on the sphere. *Regular and Chaotic Dynamics* 8(3), 259–282.
- [7] CABRAL, H. E. & SCHMIDT, D. S. (1999). Stability of relative equilibria in the problem of $n+1$ vortices. *SIAM J. Math. Anal.* 31(2), 231–250.
- [8] CONWAY, J. (1978). *Functions of one complex variable I*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K.
- [9] DOERING, C. I. & O.LOPES, A. (2005). *Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada.
- [10] HELMHOLTZ, H. (1858). Uber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *J. reine angew. Math* 55(25), 25–55.
- [11] HOFFMAN, K. & KUNZE, R. (1961). *Álgebra Linear*. Editora da Universidade de São Paulo and Editora Polígono.
- [12] KIRCHHOFF, G. (1883). *Vorlesungen über mathematische Physik*. BG Teubner.
- [13] MEYER, K. & SCHMIDT, D. (1988). Bifurcations of Relative Equilibria in the N -Body and Kirchhoff Problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 19, 1295–1313.
- [14] MUNSON, B. R., YOUNG, D. F. & OKIISHI, T. H. (2002). *Fundamentals of Fluid Mechanics*. John wiley & sons ed.

- [15] NEWTON, P. (2001). *The N-Vortex Problem*, vol. 145. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag.
- [16] SOTOMAYOR, J. T. M. (1979). *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada.