

Sobre o problema de Sitnikov

Danilo Tonini Ferreira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática Aplicada  
Orientador: Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio  
financeiro do CNPq

São Paulo, junho de 2009

## Sobre o problema de Sitnikov

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Danilo Tonini Ferreira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Manuel Valentim de Pera Garcia (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli - IME-USP.
- Prof. Dr. Diego Colón - UNESP.

*Aos meus pais*



# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Manuel Valentim de Pera Garcia. Obrigado pela oportunidade. A ele e à professora Sônia Regina Leite Garcia agradeço pela amizade e pelos ensinamentos que vêm desde a época da minha graduação.

Agradeço aos membros da banca examinadora pelas sugestões.

Pela participação nos seminários e pela ajuda, agradeço ao professor Angelo Barone Netto e aos colegas Marcelo, Ricardo e Oda.

Gostaria ainda de agradecer aos diversos professores com os quais tive aula, no IME-USP e no IF-USP.

Agradeço especialmente aos meus pais, Paulo e Jary, e ao meu tio José Reis. Obrigado pela criação, pelas lições preciosas, pelos mimos, pelas repreensões, por tudo. A eles e ao meu irmão, agradeço pelo amor incondicional e pelo lar. Ter crescido nessa família foi um privilégio e um presente que levarei sempre comigo.

Agradeço também a todos meus amigos. Suas amizades, de uma forma ou de outra, sempre me ajudaram. A alguns agradecerei aqui explicitamente. Ao meu primeiro e sempre grande amigo, meu prezado irmão Paulo. Pela amizade mais que valorosa, desde nosso primeiro ano de faculdade, agradeço ao Rafaello, e à sua Dani pela amizade recente e já tão estimada. À cara Carolina, obrigado pela amizade tão especial e pela lasanha de berinjela. Agradeço a todos os Vergamotas e afiliados, em especial ao Thomas. Agradeço ainda aos meus amigos de longa data Kadu, Washington, Binho, Rogerio, Éric.

E, pela ajuda financeira, agradeço ao CNPq.



# Resumo

Nessa dissertação tratamos do problema de Sitnikov, que é um caso especial do problema restrito de 3 corpos, principalmente aspectos ligados ao comportamento caótico da dinâmica resultante deste problema. Num plano, dois corpos pontuais de massas idênticas, ditos primários, descrevem trajetórias elípticas. Um terceiro corpo, de massa desprezível, descreve uma trajetória perpendicular ao tal plano, passando pelo centro de massa dos corpos primários. Nós estudamos o movimento desse corpo. Para isso, estudamos uma equação diferencial mais geral, da qual a equação de movimento daquele corpo é um caso particular, reduzindo o problema a uma aplicação no plano. Mostramos que essa aplicação é conjugada ao *shift* de Bernoulli. Mostramos também que a região desse plano onde estão definidas as soluções parabólicas é uma curva analítica. Seguimos as idéias apresentadas por V. M. Alekseev, J. Moser e R. McGehee.

**Palavras-chave:** Problema de Sitnikov, problema restrito dos 3 corpos, dinâmica simbólica, *shift*.





# Abstract

In this dissertation we deal with Sitnikov's problem, which is a special case of the restricted three-body problem, mainly the aspects of the chaotic behavior resulting from the dynamics of this problem. On a plane, two point-like bodies of equal masses, called primaries, describe elliptic trajectories. A third body, of negligible mass, describes a trajectory that is perpendicular to that plane crossing the center of mass of the primaries bodies. We studied the movement of this third body. In order to do so, we studied a more general differential equation, in which the movement equation of the third body is a special case, restricting the problem to a plane application. We showed that this application is conjugated to the Bernoulli shift. We also showed that the region on this plane in which the parabolic solutions are defined is an analytical curve. We followed the ideas presented by V. M. Alekseev, J. Morser and R. McGehee.

**Keywords:** Sitnikov problem, restricted three-body problem, symbolic dynamics, shift.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Dinâmica Simbólica</b>	<b>3</b>
1.1	O <i>shift</i> como uma aplicação topológica . . . . .	4
1.2	O <i>shift</i> como subsistema . . . . .	5
1.3	Condições alternativas para a aplicação $\phi$ . . . . .	12
1.4	Estrutura hiperbólica do conjunto invariante . . . . .	14
<b>2</b>	<b>O Problema de Sitnikov</b>	<b>23</b>
2.1	A Equação $\ddot{x} = -Q(x, t)$ . . . . .	25
2.2	Propriedades diferenciais das funções . . . . .	50
2.3	O <i>shift</i> como subsistema da dinâmica $S$ . . . . .	113
2.4	As curvas $\Pi_0^+$ e $\Pi_0^-$ . . . . .	130



# Introdução

O problema de Sitnikov é um dos casos mais simples do problema elíptico do sistema restrito de três corpos. Neste sistema, em um plano  $(x, y)$  dois corpos de massas iguais, chamados de corpos primários, descrevem trajetórias elípticas, de excentricidade  $\varepsilon$ , em torno de seu centro de massa. Passando por esse centro de massa, e perpendicularmente ao plano  $(x, y)$ , um terceiro corpo, de massa desprezível quando comparada às dos corpos primários, descreve uma trajetória sujeita à força de atração gravitacional destes. Se a massa desse terceiro corpo é nula, os corpos primários descrevem órbitas de Kepler.

Aqui admitimos dois sistemas de coordenadas, um com a origem fixa no centro de massa dos três corpos e outro com a origem no centro de massa dos corpos primários. Pode-se considerar que a massa do terceiro corpo é tão pequena compara à massa dos corpos primários que este terceiro corpo não exerce influência sobre os primários, nesse caso os corpos primários descrevem órbitas de Kepler. Este caso limite é comumente referido na literatura como *o caso em que a massa do terceiro corpo é nula*, e é exatamente essa situação limite, onde os dois sistemas de coordenadas acima coincidem, que serviu de modelo e motivação para nosso estudo.

Em 1959 Sitnikov provou a existência de oscilações nesse problema, que fora proposto por Chazy em 1922. Alekseev descobriu que dinâmica simbólica poderia ser aplicada ao problema, e realizou um estudo sistemático nesse campo. Porém, no que toca à dinâmica simbólica, seguimos a abordagem dada por Moser.

Pode-se investigar aspectos do problema através do estudo da equação de movimento  $\ddot{x} = -Q(x, t)$ , onde  $Q(x, t)$  possui certas propriedades que fazem com que o problema de Sitnikov seja um caso particular seu.

Esse caso mais geral é devido a Alekseev, que em seu trabalho reduz o problema a uma aplicação  $S$  no plano, que ele estuda em grande detalhe.

Moser, em seu livro *Stable and random motions in dynamical systems*, estabelece condições sobre uma função  $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de forma que

há um conjunto invariante  $I$  em  $[0, 1] \times [0, 1]$  sobre o qual a dinâmica  $\phi$  é conjugada ao *shift* de Bernoulli.

No primeiro capítulo desta dissertação tratamos disso, determinando as condições para  $\phi$  para que exista a referida conjugação, bem como estudando a estrutura hiperbólica do conjunto invariante.

No segundo capítulo apresentamos a configuração do problema de Sitnikov e tratamos da abordagem mais geral de Alekseev. Também relacionamos seu trabalho com o de Moser, mostrando que o *shift* de Bernoulli é um subsistema da dinâmica  $S$ .

Finalmente, admitindo alguns resultados devidos a McGehee, mostramos a analiticidade das curvas  $\Pi_0^-$  e  $\Pi_0^+$ , que limitam os conjuntos abertos  $R_0^- \cup \{0\}$  e  $R_0^+ \cup \{0\}$ , respectivamente, onde os conjuntos  $R_0^- \cup \{0\}$  e  $R_0^+ \cup \{0\}$  são os domínios de definição das funções  $S^{-1}$  e  $S$ , respectivamente.

Procuramos nesta dissertação apresentar este assunto, que nos parece interessante e rico, de uma maneira concisa e didática, concatenando diferentes abordagens presentes na literatura, principalmente ligando o trabalho de Alekseev ao de Moser.

# Capítulo 1

## Dinâmica Simbólica

Nesta dissertação *alfabeto* será um conjunto enumerável e não vazio.

Seja então  $\mathcal{A}$  um alfabeto e chamemos de  $\Sigma$  o espaço das sequências duplamente infinitas de elementos de  $\mathcal{A}$ , isto é, sequências da forma:

$$s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \dots),$$

onde  $s_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{Z}$ .

Para munir esse espaço de uma topologia, será dado um sistema fundamental de vizinhanças em cada ponto de  $\Sigma$ .

Considere então  $s^* = (\dots, s_{-2}^*, s_{-1}^*, s_0^*; s_1^*, s_2^*, \dots) \in \Sigma$  e  $j \in \mathbb{N}$ . Introduzimos a base de vizinhanças em  $s^*$  dada por

$$\mathcal{U}_j(s^*) = \{s \in \Sigma : s_k = s_k^* \text{ para } |k| < j\} \text{ para } j = 1, 2, \dots$$

A topologia considerada em  $\Sigma$  será aquela gerada por esse sistema.

O *shift* é a aplicação  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  dada por:

$$\sigma(s) = (\dots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, \dots)$$

É claro que esta aplicação é um homeomorfismo de  $\Sigma$  sobre si mesmo.

Sejam  $a_1, \dots, a_r$  em  $\mathcal{A}$  e  $k_1, \dots, k_r$  inteiros dois a dois distintos. O conjunto

$$E_{k_1 \dots k_r}(a_1, \dots, a_r) = \{s \in \Sigma : s_{k_1} = a_1, \dots, s_{k_r} = a_r\}$$

será denominado *aberto fundamental* de  $\Sigma$ .

Note que a topologia gerada pelos abertos fundamentais é a mesma topologia definida antes em  $\Sigma$ .

Agora vamos prover  $\Sigma$  de uma medida.

Para cada  $a \in \mathcal{A}$  associamos um número real  $p_a \geq 0$  de modo que  $\sum_{a \in \mathcal{A}} p_a = 1$ .

Definimos agora a medida do aberto fundamental  $E_{k_1 \dots k_r}(a_1, \dots, a_r)$  como sendo

$$m(E_{k_1 \dots k_r}(a_1, \dots, a_r)) = p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdot \dots \cdot p_{a_r}$$

e a estendemos à sigma álgebra de Borel  $\mathcal{B}$  da maneira habitual. Com isso, tem-se o espaço de medida  $(\Sigma, \mathcal{B}, m)$ .

É claro que  $m(\Sigma) = 1$  e que o *shift*  $\sigma$  definido antes preserva essa medida.

A aplicação  $\sigma$  costuma ser chamada *shift de Bernoulli*.

### 1.1 O *shift* como uma aplicação topológica

Seja  $\phi : Q = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação contínua cuja imagem intercepta  $Q$  em duas componentes, denotadas por  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ , com as correspondências de fronteiras denotadas na figura 1.1, onde  $\mathcal{V}_i = \phi(\mathcal{U}_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

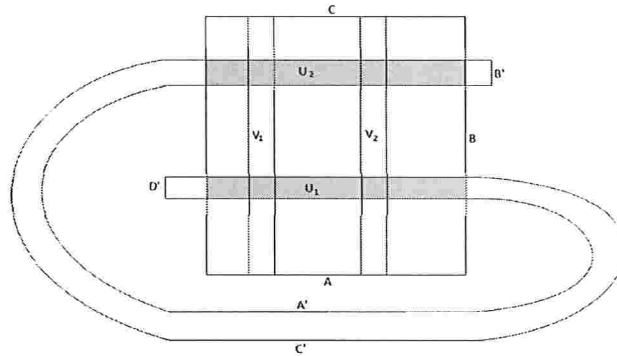


Figura 1.1: Imagem de  $\phi$

As iterações  $\phi^k$  de  $\phi$  não estão definidas em  $Q$  todo. Construímos um conjunto invariante:

$$I = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} \phi^{-k}(Q)$$



A questão de verificar que  $I \neq \emptyset$  será discutida adiante, por enquanto admitamos que isto é verdade nas seguintes considerações.

Associamos a  $p \in I$  uma sequência de símbolos  $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \dots)$  em  $A = \{1, 2\}$  pela regra:

$$\phi^{-k}(p) \in V_{s_k} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ou

$$p \in \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} \phi^k(V_{s_k}).$$

Isso nos dá uma aplicação de  $I$  em  $\Sigma$ , o espaço das sequências com alfabeto  $A = \{1, 2\}$ . Sob condições específicas mostraremos que essa aplicação tem uma inversa  $\tau : \Sigma \rightarrow I$ , e que  $\tau$  será um homeomorfismo.

## 1.2 O *shift* como subsistema

**Definição 1.2.1.** Dado  $\mu \in (0, 1)$  chamamos a uma curva  $y = u(x)$  de curva horizontal se  $u(x) \in [0, 1]$  para  $x \in [0, 1]$  e:

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu |x_1 - x_2|$$

**Definição 1.2.2.** Dado  $\mu \in (0, 1)$  chamamos a uma curva  $x = v(y)$  de curva vertical se  $v(y) \in [0, 1]$  para  $y \in [0, 1]$  e:

$$|v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu |y_1 - y_2|$$

**Definição 1.2.3.** Dadas duas curvas horizontais  $u_1$  e  $u_2$ , uma faixa horizontal é o conjunto:

$$U = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

**Definição 1.2.4.** Dadas duas curvas verticais  $v_1$  e  $v_2$ , uma faixa vertical é o conjunto:

$$V = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1; v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$$

Dada uma faixa horizontal  $U$ , limitada pelas curvas horizontais  $u_1$  e  $u_2$ , definimos seu diâmetro por:

$$d(U) = \max_{0 \leq x \leq 1} |u_2(x) - u_1(x)|$$

Analogamente, dada uma faixa vertical  $V$  limitada por curvas verticais  $v_1$  e  $v_2$ , seu diâmetro será dado por:

$$d(V) = \max_{0 \leq y \leq 1} |v_2(y) - v_1(y)|$$

Dado  $\mu \in (0, 1)$ ,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mu)$  é a coleção de todas as faixas horizontais e  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mu)$  é a coleção de todas as faixas verticais.

**Lema 1.2.1.** *Se  $U^{(1)} \supset U^{(2)} \supset U^{(3)} \supset \dots$  é uma seqüência de faixas horizontais encaixantes com  $U^{(k)} \in \mathcal{U}(\mu)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , e se  $d(U^{(k)}) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , então  $\bigcap_{k=1}^{\infty} U^{(k)}$  define uma curva horizontal.*

**demonstração:** Tomemos  $\bar{x} \in [0, 1]$ . Então  $(\{\bar{x}\} \times \mathbb{R}) \cap (\bigcap_{k=1}^{\infty} U^{(k)})$  é um ponto, pela propriedade dos intervalos encaixantes.

Para cada  $U^{(k)}$  sejam  $u_1^{(k)}$  sua fronteira superior e  $u_2^{(k)}$  sua fronteira inferior. Então, como  $U^{(k+1)} \subset U^{(k)}$  para qualquer  $k \in \mathbb{N}^*$ , temos que:

$$\begin{cases} u_1^{(k+1)}(x) \leq u_1^{(k)}(x) \\ u_2^{(k+1)}(x) \geq u_2^{(k)}(x) \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.1)$$

Decorre diretamente do fato de  $\{u_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  e  $\{u_2^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  serem curvas horizontais para o mesmo  $\mu$  que essas famílias de curvas são equicontínuas e equilimitadas. Assim, pelo teorema de Arzelá-Ascoli e por (1.1), existem funções  $u_1$  e  $u_2$  tais que  $u_1^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_1$  e  $u_2^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_2$  uniformemente. Como  $d(U^{(k)}) \rightarrow 0$ , temos que  $u_1 \equiv u_2$ . Por simplificação, definimos  $u \equiv u_1 \equiv u_2$ . Sejam  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  quaisquer, e notemos que:

$$\begin{aligned} |u(x_1) - u(x_2)| &= |u(x_1) - u_1^{(k)}(x_1) + u_1^{(k)}(x_1) - u_1^{(k)}(x_2) + u_1^{(k)}(x_2) - u(x_2)| \\ &\leq |u(x_1) - u_1^{(k)}(x_1)| + |u_1^{(k)}(x_1) - u_1^{(k)}(x_2)| + |u_1^{(k)}(x_2) - u(x_2)| \\ &\leq |u(x_1) - u_1^{(k)}(x_1)| + \mu|x_1 - x_2| + |u_1^{(k)}(x_2) - u(x_2)| \end{aligned}$$

Suponhamos que  $|u(x_1) - u(x_2)| > \mu|x_1 - x_2|$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que:

$$|u(x_1) - u(x_2)| = \mu|x_1 - x_2| + \varepsilon \quad (1.2)$$

Mas, como  $u_1^{(k)} \rightarrow u$  uniformemente quando  $k \rightarrow \infty$ , então existe  $\bar{k} \in \mathbb{N}$  tal que  $|u(x_1) - u_1^{(k)}(x)| < \varepsilon/4$ , para qualquer  $x \in [0, 1]$  e para qualquer  $k \geq \bar{k}$ . Então, para  $k \geq \bar{k}$ :

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu|x_1 - x_2|,$$

o que contradiz (1.2). Concluimos então que  $y = u(x)$ , com  $x \in [0, 1]$ , é uma curva horizontal, com:

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu|x_1 - x_2|,$$

para quaisquer  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ .

■

**Lema 1.2.2.** *Se  $V^{(1)} \supset V^{(2)} \supset V^{(3)} \supset \dots$  é uma sequência de faixas verticais encaixantes  $V^{(k)} \in \mathcal{V}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  e se  $d(V^{(k)}) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , então  $\bigcap_{k=1}^{\infty} V^{(k)}$  define uma curva vertical.*

**demonstração:** Análoga à do lema 1.2.1.

■

**Lema 1.2.3.** *Uma curva horizontal  $y = u(x)$  e uma curva vertical  $x = v(y)$  se interceptam em precisamente um ponto.*

**demonstração:** No ponto de intersecção vale:

$$(x, u(x)) = (v(y), y)$$

isto é:

$$\begin{cases} x = v(y) \\ y = u(x) \end{cases},$$

isto é:

$$\begin{cases} x = v(u(x)) \\ y = u(x) \end{cases}.$$

Como  $|v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu|y_1 - y_2|$ , temos que, para  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ :

$$x_2 - v(u(x_2)) - x_1 + v(u(x_1)) = x_2 - x_1 - (v(u(x_2)) - v(u(x_1))).$$

Mas:

$$|v(u(x_2)) - v(u(x_1))| \leq \mu |u(x_2) - u(x_1)| \leq \mu^2 |x_2 - x_1|, \text{ e } \mu^2 < 1.$$

Assim:

$$|v(u(x_2)) - v(u(x_1))| < |x_2 - x_1|.$$

Então  $x_2 - v(u(x_2)) - (x_1 - v(u(x_1))) > 0$  para  $x_2 > x_1$ , isto é,  $f(x) = x - v(u(x))$  é estritamente crescente.

Como  $f(0) = -v(u(0)) \leq 0$  e  $f(1) = 1 - v(u(1)) \geq 0$ , temos que  $x - v(x)$  tem um zero, e só um.

■

Com isso temos uma aplicação de  $\mathcal{U}(\mu) \times \mathcal{V}(\mu)$  em  $\mathbb{Q}$ . Essa aplicação é dada por:

$$(u, v) \mapsto \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}),$$

onde  $(\bar{x}, \bar{y})$  é o ponto de intersecção das curvas  $(x, u(x))$  e  $(v(y), y)$ .

Essa aplicação é Lipschitz-contínua nas normas:

$$\|u\| + \|v\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| + \max_{0 \leq y \leq 1} |v(y)| \text{ em } \mathcal{U}(\mu) \times \mathcal{V}(\mu)$$

e

$$|z| = |x| + |y| \text{ em } \mathbb{Q}$$

De fato, chamemos de  $F$  essa aplicação.

$$F(u_i, v_i) = z_i = (x_i, y_i), \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= |v_2(y_2) - v_1(y_1)| = |v_2(y_2) - v_1(y_2) + v_1(y_2) - v_1(y_1)| \\ &\leq |v_2(y_2) - v_1(y_2)| + |v_1(y_2) - v_1(y_1)| \\ &\leq \|v_2 - v_1\| + \mu |y_2 - y_1|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &= |u_2(x_2) - u_1(x_1)| = |u_2(x_2) - u_1(x_2) + u_1(x_2) - u_1(x_1)| \\ &\leq |u_2(x_2) - u_1(x_2)| + |u_1(x_2) - u_1(x_1)| \\ &\leq \|u_2 - u_1\| + \mu |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
|z_2 - z_1| &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\
&\leq \|v_2 - v_1\| + \|u_2 - u_1\| + \mu(|y_2 - y_1| + |x_2 - x_1|) \\
&= \|v_2 - v_1\| + \|u_2 - u_1\| + \mu|z_2 - z_1| \\
&\Rightarrow (1 - \mu)|z_2 - z_1| \leq \|v_2 - v_1\| + \|u_2 - u_1\| \\
&\Rightarrow |z_2 - z_1| \leq (1 - \mu)^{-1}(\|v_2 - v_1\| + \|u_2 - u_1\|)
\end{aligned}$$

o que demonstra a asserção de que  $F$  é lipschitziana nas normas dadas.

Agora assumimos algumas hipóteses sobre a aplicação  $\phi$ :

(i)  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, N\}$ , com  $N < \infty$ , ou  $\mathcal{A}$  é o conjunto dos inteiros positivos. É assumido que, para  $a \in \mathcal{A}$ ,  $U_a$  são faixas horizontais em  $Q$  disjuntas e  $V_a$  são faixas verticais em  $Q$ , disjuntas. A aplicação  $\phi$  leva  $V_a$  homeomorficamente em  $U_a$ . É também assumido que as fronteiras verticais de  $V_a$  são levadas nas fronteiras verticais de  $U_a$  e as fronteiras horizontais de  $V_a$  são levadas nas fronteiras horizontais de  $U_a$ .

(ii) Se  $V$  é uma faixa vertical contida em  $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} V_a$  então, para qualquer  $a \in \mathcal{A}$ :

$$\tilde{V}_a = \phi^{-1}(V) \cap V_a$$

é uma faixa vertical (em particular, não vazia) e, para algum  $\nu$  fixo em  $(0, 1)$ , requeremos:

$$d(\tilde{V}_a) \leq \nu d(V)$$

Se  $U$  é uma faixa horizontal contida  $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} U_a$ , então:

$$\tilde{U}_a = \phi(U) \cap U_a$$

é suposto ser uma faixa horizontal não com:

$$d(\tilde{U}_a) \leq \nu d(U).$$

**Teorema 1.2.1.** *Se  $\phi$  é um homeomorfismo que satisfaz (i) e (ii) então  $\phi$  possui o shift  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  como um subsistema. Isto é, existe um homeomorfismo  $\tau$  de  $\Sigma$  em  $\tau(\Sigma) \subset Q$  tal que:*

$$\phi\tau = \tau\sigma.$$

**demontração:** Definimos:

$$V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} = V_{s_0} \bigcap \phi^{-1}(V_{s_{-1} \dots s_{-n}}).$$

Mostremos, por indução que  $V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}$  é uma faixa vertical:

Para  $n = 1$ , temos que vale a asserção, pois  $V_{s_0 s_{-1}} = V_{s_0} \bigcap \phi^{-1}(V_{s_{-1}})$  é uma faixa vertical por (ii).

Suponhamos agora que  $V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}$  é uma faixa vertical para  $n = k$  e provemos que isso implica que também o é para  $n = k + 1$ .

$$V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-(k+1)}} = V_{s_0} \bigcap \phi^{-1}(V_{s_{-1} \dots s_{-(k+1)}}).$$

Seja  $t \in \Sigma$  tal que  $t_{-k} = s_{-(k+1)}$ . Então a igualdade acima se escreve:

$$V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-(k+1)}} = V_{s_0} \bigcap \phi^{-1}(\underbrace{V_{t_0 \dots t_{-k}}}_{\text{faixa vertical}}),$$

onde o termo destacado é faixa vertical pela hipótese de indução. Logo,  $V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-(k+1)}}$  é uma faixa vertical, pela hipótese (ii).

Usamos agora outra parte da hipótese (ii):

$$d(\bar{V}_a) \leq \nu d(V),$$

que, no presente caso, nos dá:

$$d(V_{s_0 \dots s_{-n}}) \leq \nu d(V_{s_{-1} \dots s_{-n}}) \leq \dots \leq \nu^n d(V_{s_{-n}}) \leq \nu^n.$$

Então:

$$d(V_{s_0 \dots s_{-n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pela definição de  $V_{s_0 \dots s_{-n}}$  temos que:

$$\begin{aligned} V_{s_0 \dots s_{-n}} &= \{p \in Q : \phi^k(p) \in V_{s_{-k}}, k = 0, 1, \dots, n\} \\ &= \{p \in Q : \phi^{-k}(p) \in V_{s_k}, k = 0, -1, \dots, -n\}, \end{aligned}$$

isto é:

$$V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} \subset V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n+1}}$$

Utilizando o lema 1.2.2, concluímos que o conjunto:

$$V(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} = \{p \in Q : \phi^{-k}(p) \in V_{s_k}, k = 0, -1, -2, \dots\}$$

define uma curva vertical que depende da sequência  $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \dots)$ , mais precisamente de  $s_0$  e dos termos à sua esquerda.

Analogamente, definimos, para  $n \geq 2$ :

$$U_{s_1 s_2 \dots s_n} = U_{s_1} \bigcap \phi(U_{s_2 \dots s_n}) \quad (1.3)$$

e, de forma similar, mostramos que:

$$d(U_{s_1 s_2 \dots s_n}) \leq \nu d(U_{s_2 \dots s_n}) \leq \dots \leq \nu^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Como  $\phi(V_{s_k}) = U_{s_k}$ , temos que:

$$\begin{aligned} U_{s_1 \dots s_n} &= \{p \in Q : \phi^{-k+1}(p) \in U_{s_k}, k = 1, 2, \dots, n\} \\ &= \{p \in Q : \phi^{-k}(p) \in V_{s_k}, k = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Utilizando o lema 1.2.1, temos que:

$$\begin{aligned} U(s) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{s_1 s_2 \dots s_n} = \{p \in Q : \phi^{-k+1}(p) \in U_{s_k}, k \geq 1\} \\ &= \{p \in Q : \phi^{-k}(p) \in V_{s_k}, k \geq 1\} \end{aligned}$$

é uma curva horizontal que depende da sequência  $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \dots)$ , mais precisamente de  $s_1$  e dos termos à sua direita.

Pelo lema 1.2.3,  $V(s) \cap U(s) = \{p \in Q : \phi^{-k}(p) \in V_{s_k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  define precisamente um ponto em  $Q$ .

Definimos agora a aplicação  $\tau$ :

$$\begin{array}{ccc} \tau : \Sigma & \longrightarrow & Q \\ s & \longmapsto & V(s) \cap U(s) \end{array}$$

Pela construção, é claro que se  $\tau(s) = p$ , então  $\tau(\sigma(s)) = \phi(p)$ , isto é,  $\tau\sigma = \phi\tau$ .

Mostremos agora que  $\tau$  é contínua.

Sejam  $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \dots)$  e  $t = (\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0; t_1, t_2, \dots)$  duas sequências de  $\Sigma$  tais que  $t_k = s_k$  para  $|k| \leq n$ . Então:

$$\begin{aligned}\tau(t), \tau(s) &\in V_{s_0 \cdots s_n}, \\ \tau(t), \tau(s) &\in U_{s_0 \cdots s_n},\end{aligned}$$

de onde:

$$\begin{aligned}d(V_{s_0 \cdots s_n}) &\leq \nu^n, \\ d(U_{s_1 \cdots s_n}) &\leq \nu^{n-1}.\end{aligned}$$

Portanto:

$$|\tau(s) - \tau(t)| \leq (1 - \mu)^{-1} |\nu^n - \nu^{n-1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dadas duas sequências  $s$  e  $t$  tais que  $s \neq t$ , tem-se que  $\exists k$  tal que  $s_k \neq t_k$ . Então, para esse  $k$ ,  $V_{s_k} \cap V_{t_k} = \emptyset$ , pois as diversas faixas verticais são disjuntas. Disso temos que  $\tau$  é injetora.

■

O teorema 1.2.1 nos diz que a dinâmica de  $\phi$  no conjunto  $I$  é a mesma, do ponto de vista de conjugação, que a dinâmica do *shift* sobre  $\Sigma$ .

Estudemos agora a estrutura hiperbólica do conjunto invariante  $I$ .

### 1.3 Condições alternativas para a aplicação $\phi$

Sendo  $\xi$  e  $\eta$  coordenadas do plano cartesiano  $\xi \times \eta$ , trocaremos (ii) pela condição:

(iii) Para algum  $\mu \in (0, 1)$  o cone  $S^+$  determinado por  $|\eta| \leq \mu|\xi|$ , definido sobre  $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} V_a$ , é levado em si mesmo por  $d\phi$ , isto é,  $d\phi(S^+) \subset S^+$ .

E mais, se  $(\xi_0, \eta_0) \in S^+$  e  $(\xi_1, \eta_1)$  é sua imagem por  $d\phi$ , então  $|\xi_1| \geq \mu^{-1}|\xi_0|$ .

Similarmente, o cone definido sobre  $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} U_a$ ,  $S^-$ , definido por  $|\xi| \leq \mu|\eta|$ , é levado em si mesmo por  $d\phi^{-1}$ , isto é,  $d\phi^{-1}(S^-) \subset S^-$ , assim como, se  $(\xi_1, \eta_1) \in S^-$ , e  $(\xi_0, \eta_0)$  é sua pré-imagem por  $d\phi$ , então  $|\eta_0| \geq \mu^{-1}|\eta_1|$ .

**Teorema 1.3.1.** *Se  $\phi$  é uma aplicação continuamente diferenciável e satisfaz as condições (i) e (iii), com  $0 \leq \mu \leq 1/2$ , então satisfaz a condição (ii) com  $\nu = \mu(1 - \mu)^{-1}$ , e a tese do teorema 1.2.1 é verdadeira.*



**demonstração:** Seja  $\gamma$  uma curva vertical na faixa  $V_b$ , com  $b \in \mathcal{A}$ .

A curva  $\gamma$  intercepta todas as curvas horizontais e, em particular, as fronteiras horizontais de  $U_a$ , para um dado  $a \in \mathcal{A}$ . Então  $\hat{\gamma} = \gamma \cap U_a$  liga as fronteiras horizontais de  $U_a$ , e  $\phi^{-1}(\hat{\gamma})$  liga as fronteiras horizontais de  $\phi^{-1}(U_a) = V_a$ , isto é,  $y = 0$  e  $y = 1$ .

Mostremos que  $\phi^{-1}(\hat{\gamma}) = \phi^{-1}(\gamma) \cap V_a$  é uma curva vertical.

A curva  $\gamma$  é uma curva vertical, diga-se  $x = v(y)$ , e então tem-se que  $|v(y_2) - v(y_1)| \leq \mu|y_2 - y_1|, \forall y_1, y_2 \in [0, 1]$ . Sejam  $(x_3, y_3), (x_4, y_4)$  pontos quaisquer de  $\phi^{-1}(\hat{\gamma})$ , e sejam  $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) = \phi(x_3, y_3)$  e  $(\tilde{x}_4, \tilde{y}_4) = \phi(x_4, y_4)$ . Como  $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3), (\tilde{x}_4, \tilde{y}_4) \in \hat{\gamma}$ , que é uma curva vertical, temos que:

$$|\tilde{x}_3 - \tilde{x}_4| \leq \mu|\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4|,$$

isto é,  $(\tilde{x}_4 - \tilde{x}_3, \tilde{y}_4 - \tilde{y}_3) \in S^-$ . Seja agora a curva  $\alpha(t)$  dada por:

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (1-t)(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) + t(\tilde{x}_4, \tilde{y}_4) \end{aligned}$$

Temos que, para qualquer  $t$ ,  $\alpha'(t) = (\tilde{x}_4 - \tilde{x}_3, \tilde{y}_4 - \tilde{y}_3)$ . Seja  $\beta(t) = \phi^{-1}(\alpha(t))$ . Então  $\beta'(t) = d\phi^{-1}(\alpha(t))\alpha'(t)$ . Pela hipótese (iii),  $\beta'(t) \in S^-$ , para qualquer  $t \in [0, 1]$ . Como  $\beta(t)$  é uma curva que liga  $(x_3, y_3)$  a  $(x_4, y_4)$ , concluímos que  $(x_4 - x_3, y_4 - y_3) \in S^-$ , isto é:

$$|x_3 - x_4| \leq \mu|y_3 - y_4|.$$

Como  $(x_3, y_3), (x_4, y_4) \in \phi^{-1}(\hat{\gamma})$  foram escolhidos arbitrariamente, concluímos que  $\phi^{-1}(\hat{\gamma})$  é uma curva vertical. Aplicando essa demonstração às fronteiras de uma faixa vertical  $V \subset V_b$  tem-se que a pré-imagem de  $\hat{V} = V \cap U_1$  dada por  $\phi^{-1}(\hat{V}) = \phi^{-1}(V) \cap V_a$  é uma faixa vertical.

Mostremos agora  $d(\hat{V}_a) \leq \nu d(V)$ , para algum  $\nu \in (0, 1)$ .

Sejam  $p_1, p_2$  dois pontos sobre as fronteiras verticais de  $\phi^{-1}(\hat{V})$  tal que  $d(\phi^{-1}(\hat{V})) = |p_2 - p_1|$ , e tais que suas coordenadas no eixo  $y$  sejam iguais. Então a curva:

$$p(t) = (1-t)p_1 + tp_2$$

é paralela ao eixo  $x$ , daí  $p' \in S^+$  e assim:

$$z(t) = \phi(p(t)).$$

tem derivada:

$$z'(t) = d\phi(p(t))p'(t) \in S^+, \text{ por (iii)}$$

Assim,  $z(0)$  e  $z(1)$  estão sobre uma curva horizontal. E estão também, como já sabíamos, cada um sobre uma linha vertical, que distam entre si no máximo  $d(\widehat{V})$ . Disso temos que:

$$|z(0) - z(1)| \leq (1 - \mu)^{-1} d(\widehat{V}),$$

pois  $|z_2 - z_1| \leq (1 - \mu)^{-1} (\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|)$ , e usamos que  $z(0)$  e  $z(1)$  estão sobre a mesma curva horizontal.

Escrevendo  $z(t) = (x(t), y(t))$ , temos por (iii) que:

$$|x'| \geq \mu^{-1} |p'| = \mu^{-1} |p_2 - p_1| > 0$$

o que nos dá que  $x'$  não troca de sinal e

$$\begin{aligned} |p_2 - p_1| &= \int_0^1 |p'| dt \leq \int_0^1 \mu |x'| dt \leq \mu |x(1) - x(0)| \\ &\leq \mu |z(1) - z(0)| \leq \mu (1 - \mu)^{-1} d(\widehat{V}) \leq d(\widehat{V}), \end{aligned}$$

isto é,

$$d(\phi^{-1}(\widehat{V})) \leq \frac{\mu}{1 - \mu} d(\widehat{V})$$

De forma análoga provam-se as asserções tocantes às faixas horizontais.

■

## 1.4 Estrutura hiperbólica do conjunto invariante

Associemos a cada  $p \in I = \tau(S)$  duas linhas  $L_p^+, L_p^-$  em  $T_p I$  tais que  $L_p^+, L_p^-$  variam continuamente com  $p \in I$ , e tais que  $L_p^\pm$  são invariantes sob  $d\phi$ , isto é,

$$d\phi L_p^\pm = L_p^\pm,$$

e que, com alguma constante  $\lambda > 1$  e a norma  $|\zeta| = \max(|\xi|, |\eta|)$ , para  $\zeta = (\xi, \eta)$ , temos:

$$\begin{cases} |d\phi(\zeta)| \geq \lambda |\zeta| & \text{para } \zeta \in L_p^+, \\ |d\phi^{-1}(\zeta)| \geq \lambda |\zeta| & \text{para } \zeta \in L_p^-. \end{cases}$$

Escrevemos a matriz jacobiana de  $d\phi$  num ponto  $p$  como:

$$\begin{pmatrix} f_x(p) & f_y(p) \\ g_x(p) & g_y(p) \end{pmatrix},$$

e o determinante jacobiano nesse ponto é  $\Delta = f_x(p)g_y(p) - f_y(p)g_x(p)$ .

**Teorema 1.4.1.** *Se, para todo ponto  $p \in I$ ,  $\Delta, \Delta^{-1} \leq \frac{1}{2}\mu^{-2}$ , então  $I$  é um conjunto hiperbólico.*

**demonstração:** Para cada  $p \in I$ , consideremos uma linha em  $S^+ = S_p^+$ , dada por  $L^+ = L_p^+$  na forma  $\eta_0 = \alpha_p \xi_0$ , onde  $\alpha_p$  é uma função contínua de  $p \in I$  com  $|\alpha_p| \leq \mu$ .

**Nota 1.** *Aqui comete-se um abuso de notação:  $L^+$  é a linha gerada por  $(\xi, \eta)$ .*

Por simplicidade, denotemos:

$$d\phi_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Considerando que  $d\phi_p(\xi_0, \eta_0) = (\xi_1, \eta_1)$ , obtemos

$$\eta_1 = \frac{c + d\alpha_p}{a + b\alpha_p} \xi_1 = \alpha_{\phi(p)}^* \xi_1.$$

Temos que  $d\phi_p(S^+) \subset S^+$ , e portanto:

$$\left| \frac{c + d\alpha_p}{a + b\alpha_p} \right| |\xi_1| \leq \mu |\xi_1|.$$

Então:

$$\left| \frac{c + d\alpha_p}{a + b\alpha_p} \right| \leq \mu.$$

Tínhamos, em (iii), que se  $(\xi_1, \eta_1)$  é a imagem de  $(\xi_0, \eta_0) \in S^+$  por  $d\phi$ , então  $|\xi_1| \geq \mu^{-1}|\xi_0|$ . Então, notando que  $\xi_1 = (a + b\alpha_p)\xi_0$ , ficamos com:

$$|(a + b\alpha_p)\xi_0| \geq \mu^{-1}|\xi_0| \Rightarrow |a + b\alpha_p| \geq \mu^{-1}. \quad (1.4)$$

Seja  $\beta_p$  tal que  $(\xi, \beta_p \xi)$  define uma linha em  $S^+ = S_p^+$ . Sua imagem por  $d\phi_p$  é definida por  $\beta_{\phi(p)}^*$ . Então:

$$\begin{aligned}
|\alpha_{\phi(p)}^* - \beta_{\phi(p)}^*| &= \left| \frac{c + d\alpha_p}{a + b\alpha_p} - \frac{c + d\beta_p}{a + b\beta_p} \right| \\
&= \left| \frac{(c + d\alpha_p)(a + b\beta_p) - (c + d\beta_p)(a + b\alpha_p)}{(a + b\alpha_p)(a + b\beta_p)} \right| \\
&= \left| \frac{(cb - da)\beta_p + (da - cb)\alpha_p}{(a + b\alpha_p)(a + b\beta_p)} \right| \\
&= \left| \frac{(ad - bc)(\alpha_p - \beta_p)}{(a + b\alpha_p)(a + b\beta_p)} \right| \\
&= \frac{|\Delta|}{|a + b\alpha_p||a + b\beta_p|} |\alpha_p - \beta_p| \\
&\leq \mu^2 |\Delta| |\alpha_p - \beta_p| \leq \frac{1}{2} |\alpha_p - \beta_p|.
\end{aligned}$$

Seja  $f$  a função dada por:

$$\begin{array}{ccc}
f & : & [-\mu, \mu] \longrightarrow [-\mu, \mu] \\
& & \alpha_p \longmapsto \alpha_{\phi(p)}^* .
\end{array}$$

Então:

$$|f(\alpha_p) - f(\beta_p)| \leq \frac{1}{2} |\alpha_p - \beta_p| \quad (1.5)$$

e

$$|f^n(\alpha_p) - f^n(\beta_p)| \leq \frac{1}{2^n} |\alpha_p - \beta_p|,$$

de onde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(\alpha_p) - f^n(\beta_p)| = 0$$

Então  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\alpha_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\beta_p) \in [-\mu, \mu]$ . Seja  $\bar{\mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\alpha_p)$ . Logo:

$$f(\bar{\mu}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\alpha_p)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(\alpha_p) = \bar{\mu}.$$

Suponhamos que existam dois pontos fixos de  $f$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Nesse caso:

$$|f(\mu_2) - f(\mu_1)| = |\mu_2 - \mu_1| > \frac{1}{2} |\mu_2 - \mu_1|,$$

contrariando (1.5). Então esse ponto fixo é único, e existe, posto que  $x \in [-\mu, \mu] \Rightarrow f(x) \in [-\mu, \mu]$  e  $[-\mu, \mu]$  é completo.

Chamemos esse ponto fixo de  $\gamma_p$ . Então  $\gamma_{\phi(p)}^* = \gamma_p$ .

Seja  $L_p \subset S_p^+$  a linha gerada por  $(\xi, \gamma_p \xi)$ . Mostramos que:

$$d\phi_p L_p^+ = L_p^+.$$

De forma análoga encontramos uma linha  $L_{\phi(p)}^-$ , invariante por  $d\phi_p^{-1}$ :

$$d\phi_p^{-1} L_{\phi(p)}^- = L_p^- \Rightarrow d\phi_p L_p^- = L_{\phi(p)}^-.$$

Provamos então que existem as linhas invariantes  $L_p^+$  e  $L_p^-$ . Agora, por (1.4):

$$|\xi_1| = |a + b\alpha_p| |\xi_0| \geq \mu^{-1} |\xi_0|.$$

Tomando  $\zeta = (\xi, \eta) \in S^+$ , temos  $|\xi| > |\eta|$ , de onde:

$$|\zeta| = \max\{|\xi|, |\eta|\} = |\xi|.$$

Dessa forma, como  $d\phi(S^+) \subset S^+$ , temos:

$$|d\phi(\zeta)| \geq \lambda |\zeta|, \quad \text{com } \lambda = \mu^{-1}.$$

Analogamente, se  $L^- \in S^-$  é gerada por  $\zeta$ :

$$|d\phi^{-1}(\zeta)| \geq \lambda |\zeta|, \quad \text{com } \lambda = \mu^{-1}.$$

■

Pode-se provar um resultado mais geral:

**Teorema 1.4.2.** *Se valem as hipóteses (i) e (iii), com  $0 < \mu \leq \frac{1}{2} \min\{|\Delta|^{\frac{1}{2}}, |\Delta|^{-\frac{1}{2}}\}$ , então as curvas  $U(s)$  e  $V(s)$  são curvas continuamente diferenciáveis cujas tangentes em pontos de  $I$  coincidem com as linhas da estrutura hiperbólica.*

**demonstração:** Demonstraremos o teorema apenas para curvas horizontais. Demonstra-se para as curvas verticais de forma semelhante.

Denotando a união de todas as curvas horizontais por:

$$\mathcal{U} = \bigcup_s U(s), \tag{1.6}$$

mostremos primeiro que  $\phi^{-1}(U) \subset U$ .

Seja  $U(s) \subset U$ . Por (1.3), temos que:

$$U(s) = U_{s_1} \cap \phi(U(\sigma(s))). \quad (1.7)$$

De fato:

$$\begin{aligned} U(s) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} [U_{s_1} \cap \phi(U_{s_2 \dots s_n})] \\ &= U_{s_1} \cap \left[ \bigcap_{n=2}^{\infty} \phi(U_{s_2 \dots s_n}) \right] \\ &= U_{s_1} \cap \left[ \phi \left( \bigcap_{n=2}^{\infty} (U_{s_2 \dots s_n}) \right) \right] \\ &= U_{s_1} \cap \phi(U(\sigma(s))), \end{aligned}$$

o que mostra (1.7). Agora:

$$\phi^{-1}(U(s)) = \phi^{-1}(U_{s_1} \cap \phi(U(\sigma(s)))) = \phi^{-1}(U_{s_1}) \cap U(\sigma(s)) \subset U(\sigma(s)) \in \mathcal{U},$$

o que mostra que  $\phi^{-1}(U) \subset U$ .

Seja agora  $p \in U(s)$ . Diga-se que  $p = (x^*, u(x^*))$ , considerando que  $U(s)$  é dada por  $y = u(x)$ . Definamos  $T_p$  como sendo o conjunto dos vetores da forma  $(\xi, \alpha_p \xi)$ , com  $\alpha_p \in A_p$ , onde:

$$A_p = \left\{ \alpha_p = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{u(x_\nu) - u(x'_\nu)}{x_\nu - x'_\nu} \right\},$$

com  $x_\nu, x'_\nu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$  e com  $x_\nu \neq x'_\nu$ , qualquer que seja  $\nu \in \mathbb{N}$ .

Temos, pelo fato de  $u(x)$  ser  $\mu$ -lipschitziana, que  $-\mu \leq \alpha_p \leq \mu$ . Então existem  $\sup A_p$  e  $\inf A_p$ .

Há duas possibilidades:  $A_p$  é finito ou  $A_p$  é infinito. Se  $A_p$  é finito, então  $A_p$  é fechado. Mostremos que, caso  $A_p$  seja infinito, será também fechado.

Seja  $\{\alpha_p^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência convergente de elementos de  $A_p$ , e  $\bar{\alpha}_p$  o seu limite.

Dado  $m > 0$ , existe  $n_m$  tal que, se  $n > n_m$ :

$$|\alpha_p^{n_m} - \bar{\alpha}_p| < \frac{1}{m}.$$

Como:

$$\alpha_p^{n_m} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{u(x_\nu^{n_m}) - u(x'_\nu^{n_m})}{x_\nu^{n_m} - x'_\nu^{n_m}},$$

existe  $\nu_{n_m}$  tal que:

$$\left| \frac{u(x_{\nu_{n_m}}^{n_m}) - u(x'_{\nu_{n_m}}^{n_m})}{x_{\nu_{n_m}}^{n_m} - x'_{\nu_{n_m}}^{n_m}} - \alpha_p^{n_m} \right| < \frac{1}{m}.$$

Então é possível construir duas sequências  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n \neq x'_n$ , com  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$  e  $x'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$  tais que:

$$\frac{u(x_n) - u(x'_n)}{x_n - x'_n} \rightarrow \bar{\alpha}_p, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo  $A_p$  é fechado, de forma que podemos definir:

$$w(A_p) = \max \alpha_p - \min \alpha_p \leq 2\mu.$$

Seja  $y = \tilde{u}(x)$  uma parametrização da curva  $\phi(x, u(x))$ . Escrevendo:

$$\phi(x, u(x)) = (f(x, u(x)), g(x, u(x))),$$

temos que:

$$g(x, u(x)) = \tilde{u}(f(x, u(x))).$$

Pela definição de diferencial, obtemos:

$$\begin{aligned} & \tilde{u}(f(x'_n, u(x'_n))) - \tilde{u}(f(x_n, u(x_n))) \\ &= g(x'_n, u(x'_n)) - g(x_n, u(x_n)) \\ &= g(p) + g_x(p)(x'_n) + g_y(p)(u(x'_n)) + R_{x'_n} - [g(p) + g_x(p)(x_n) + g_y(p)(u(x_n)) + R_{x_n}] \\ &= g_x(p)(x'_n - x_n) + g_y(p)(u(x'_n) - u(x_n)) + R_n \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{u}(f(x'_n, u(x'_n))) - \tilde{u}(f(x_n, u(x_n)))}{x'_n - x_n} = g_x(p) + g_y(p) \frac{u(x'_n) - u(x_n)}{x'_n - x_n} + \frac{R_n}{x'_n - x_n}. \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{\tilde{u}(f(x'_n, u(x'_n))) - \tilde{u}(f(x_n, u(x_n))))}{x'_n - x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g_x(p) + g_y(p)\alpha_p.$$

De forma análoga:

$$\frac{f(x'_n, u(x'_n)) - f(x_n, u(x_n))}{x'_n - x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_x(p) + f_y(p)\alpha_p.$$

Então, se tivermos  $f_x(p) + f_y(p)\alpha_p \neq 0$ , teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{u}(f(x'_n, u(x'_n))) - \tilde{u}(f(x_n, u(x_n))))}{f(x'_n, u(x'_n)) - f(x_n, u(x_n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{g_x(p) + g_y(p)\alpha_p}{f_x(p) + f_y(p)\alpha_p}.$$

Mostremos então que, de fato,  $f_x(p) + f_y(p)\alpha_p \neq 0$ :

Temos que:

$$\alpha_p \in (-\mu, \mu) \Rightarrow (1, \alpha_p) \in S^+.$$

Então, pela condição (iii),  $d\phi_p(1, \alpha_p) \in S^+$ . Mas:

$$d\phi_p(1, \alpha_p) = \begin{pmatrix} f_x(p) & f_y(p) \\ g_x(p) & g_y(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(p) + f_y(p)\alpha_p \\ g_x(p) + g_y(p)\alpha_p \end{pmatrix} \in S^+.$$

Então, por (1.4):

$$|f_x(p) + f_y(p)\alpha_p| \geq \mu^{-1},$$

isto é,  $f_x(p) + f_y(p)\alpha_p \neq 0$ .

Calculando  $\phi$  em  $y = u(x)$  chegamos que se  $(\xi, \eta)$  é um vetor de  $T_{\phi(p)}$ , então sua inclinação será dada por:

$$\alpha_{\phi(p)} = \frac{f_x(p) + f_y(p)\alpha_p}{g_x(p) + g_y(p)\alpha_p}.$$

Agora, se  $(\xi, \eta)$  é um vetor de  $T_p$ , sua inclinação será dada por:

$$d\phi_p T_p = \frac{f_x(p) + f_y(p)\alpha_p}{g_x(p) + g_y(p)\alpha_p},$$

isto é:

$$T_{\phi(p)} = d\phi_p \bar{T}_p \tag{1.8}$$



Como vale (1.6), temos que se  $p \in U$ , onde  $U$  é uma curva horizontal, então  $\phi^{-1}(p) \in \phi^{-1}(U)$ , onde  $\phi^{-1}(U)$  é uma curva horizontal. Então é lícito trocar  $p$  por  $\phi^{-1}(p)$  em (1.8):

$$T_p = d\phi_{\phi^{-1}(p)}T_{\phi^{-1}(p)}.$$

Chamando:

$$\Phi T_p = d\phi_{\phi^{-1}(p)}T_{\phi^{-1}(p)},$$

ficamos com:

$$\Phi T_p = T_p. \quad (1.9)$$

Mostremos agora que  $w(A_p) = 0$ , isto é, que existe apenas uma linha gerada pelos vetores de  $T_p$ , que vai coincidir, portanto, com a linha  $L_p^+$  da estrutura hiperbólica.

Temos que:

$$\begin{aligned} |\alpha_{\phi(p)} - \beta_{\phi(p)}| &= \left| \frac{f_x(p) + f_y(p)\alpha_p}{g_x(p) + g_y(p)\alpha_p} - \frac{f_x(p) + f_y(p)\beta_p}{g_x(p) + g_y(p)\beta_p} \right| \\ &= \left| \frac{a + b\alpha_p}{c + d\alpha_p} - \frac{a + b\beta_p}{c + d\beta_p} \right| \\ &= \left| \frac{(ad - bc)(\beta_p - \alpha_p)}{(c + d\alpha_p)(c + d\beta_p)} \right| \\ &= \frac{|\Delta||\beta_p - \alpha_p|}{|c + d\alpha_p||c + d\beta_p|} \leq \frac{1}{2}|\beta_p - \alpha_p|, \end{aligned}$$

de onde:

$$w(A_p) = w(\Phi A_p) \leq \frac{1}{2}w(A_p) \Rightarrow w(A_p) = 0,$$

onde  $\Phi A_p$  denota o conjunto das possíveis inclinações dos vetores de  $\Phi T_p$ .

O fato de  $U(s)$  ser diferenciável em todo ponto decorre do fato de  $A_p$  ser um conjunto unitário. Como a função:

$$f : Q \setminus \Delta_1 \rightarrow [-\mu, \mu],$$

dada por:

$$f(x, y) = \frac{u(x) - u(y)}{x - y}$$

se estende continuamente aos pontos de  $\Delta_1$ , que é a diagonal  $y = x$  de  $Q$ , essa função é continuamente diferenciável.



## Capítulo 2

# O Problema de Sitnikov

O problema conhecido como de Sitnikov é o problema de três corpos representado na figura abaixo:

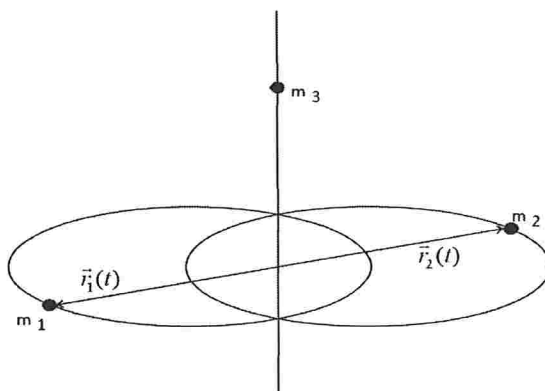


Figura 2.1: Configuração do problema de Sitnikov

Os corpos que descrevem trajetórias elípticas têm massas  $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ , e são chamados de corpos primários. Nosso interesse é estudar o movimento do terceiro corpo, que tem massa  $m_3 \ll m_1 = m_2$ , de forma a não interferir sensivelmente no movimento dos corpos primários. Esse corpo se movimenta sobre uma linha ortogonal ao plano de movimento dos corpos primários, que passa pelo centro de massa dos mesmos.

As distâncias  $\|\vec{r}_1(t)\|$  e  $\|\vec{r}_2(t)\|$  dos corpos primários ao seu centro de massa  $O$  são iguais. Normalizamos o período da órbita dos corpos primários

como  $2\pi$  e consideramos a constante gravitacional unitária. Temos que:

$$\|\vec{r}(t)\| = \|\vec{r}_1(t)\| = \|\vec{r}_2(t)\| = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon \cos(t)) + O(\varepsilon^2).$$

Nomeando o eixo de movimento do corpo de massa  $m_3$ , que chamaremos de corpo secundário, de  $x$ , a posição deste corpo será dada por  $x(t)$ . Então sua distância aos corpos primários será dada por:

$$d(t) = \sqrt{r^2(t) + x^2(t)}.$$

Assim, a força de atração gravitacional agindo no corpo secundário será:

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &= -\frac{m_1 m_3}{d^2(t)} \frac{\vec{x}(t) - \vec{r}_1(t)}{\|\vec{x}(t) - \vec{r}_1(t)\|} - \frac{m_2 m_3}{d^2(t)} \frac{\vec{x}(t) - \vec{r}_2(t)}{\|\vec{x}(t) - \vec{r}_2(t)\|} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m_3}{d^2(t)} \frac{\vec{x}(t) - \vec{r}_1(t)}{\|\vec{x}(t) - \vec{r}_1(t)\|} - \frac{1}{2} \frac{m_3}{d^2(t)} \frac{\vec{x}(t) - \vec{r}_2(t)}{\|\vec{x}(t) - \vec{r}_2(t)\|} \\ &= -\frac{m_3 \vec{x}(t)}{d^3(t)} = -\frac{m_3 \vec{x}(t)}{(x^2(t) + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{m_3 x(t)}{(x^2(t) + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_1, \end{aligned}$$

onde usamos que  $\vec{r}_1(t) = -\vec{r}_2(t)$ .

Aplicando a segunda lei de Newton:

$$m_3 \ddot{x}(t) = -\frac{m_3 x(t)}{(x^2(t) + r^2(t))^{\frac{3}{2}}},$$

ou seja:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{x(t)}{(x^2(t) + r^2(t))^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.1)$$

Notemos que uma solução qualquer de (2.1) tem pelo menos um zero. De fato, se  $x(t) \neq 0$  para todo  $t$ , por (2.1) vemos que, se  $x(t) > 0$  para todo  $t$ ,  $x(t)$  é côncava para baixo, o que não pode ocorrer juntamente com  $x(t) > 0$  para todo  $t$ . E, se  $x(t) < 0$  para todo  $t$ ,  $x(t)$  é côncava para cima, o que não pode ocorrer juntamente com  $x(t) < 0$  para todo  $t$ .

Suponhamos que  $x(t)$  seja uma solução de (2.1) com condições iniciais:

$$x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = v_0 > 0.$$

Então  $\tilde{x}(t) = -x(t)$  é solução do (2.1) com condições iniciais:

$$\tilde{x}(t_0) = 0, \dot{\tilde{x}}(t_0) = -v_0,$$

bastando, portanto, considerarmos  $v_0 \geq 0$ .

Trataremos do problema de forma mais geral, estudando doravante a equação:

$$\ddot{x} = -Q(x, t), \quad (2.2)$$

onde  $Q(x, t)$  é uma função de  $x$  e  $t$  provida de certas propriedades que veremos a seguir.

## 2.1 A Equação $\ddot{x} = -Q(x, t)$

Consideremos a equação (2.2) de forma que  $Q(x, t)$  satisfaça as seguintes propriedades:

- 1° -  $Q(x, t)$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ .
- 2° -  $Q(x, t)$  é ímpar em  $x$  e  $2\pi$ -periódica em  $t$ .
- 3° -  $Q(x, t) > 0$  para todo  $x > 0$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- 4° - Existe uma função  $\psi(x)$  integrável em  $[0, +\infty)$  tal que:

$$\left| \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right| \leq \psi(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$

**Definição 2.1.1.** Uma solução  $x(t)$  de (2.2) é dita

- *hiperbólica* para  $t \rightarrow \infty$  quando:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = v_\infty \neq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pm\infty;$$

- *parabólica* para  $t \rightarrow \infty$  quando:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pm\infty;$$

- *oscilatória* para  $t \rightarrow \infty$  quando existe uma sequência de tempos  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$  com  $x(t_n) = 0$ , e  $x(t) \neq 0$  para algum  $t$ .

De forma análoga definem-se soluções hiperbólicas, parabólicas e oscilatórias para  $t \rightarrow -\infty$ .

**Proposição 2.1.1.** Cada solução de (2.2) é parabólica, hiperbólica ou oscilatória para  $t \rightarrow \infty$ , e é parabólica, hiperbólica ou oscilatória para  $t \rightarrow -\infty$ , ou é identicamente nula.

**demonstração:** Demonstraremos para  $t \rightarrow \infty$ . A prova para  $t \rightarrow -\infty$  é análoga.

Como, por 2º,  $Q(x, t)$  é ímpar em  $x$ , temos que a função identicamente nula é solução de (2.2).

Seja  $x(t)$  uma solução com infinitos zeros no eixo positivo. Seja  $t_0$  um desses zeros. Se  $\dot{x}(t_0) = 0$ , então  $x(t) \equiv 0$ , pela unicidade de soluções. Suponhamos então que  $\dot{x}(t_0) \neq 0$ . Então os zeros não podem estar contidos num conjunto limitado, pois nesse caso eles se acumulariam em algum  $\tilde{t}$  e, pela continuidade de solução, teríamos  $\dot{x}(\tilde{t}) = 0$ , e  $x(t)$  seria a solução identicamente nula, e aí teríamos  $\dot{x}(t_0) = 0$ . Então existe  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$  com  $x(t_n) = 0$ , e a solução é oscilatória.

Consideremos agora o caso em que  $x(t)$  tem um número finito de zeros no semi-eixo positivo. Seja  $t_0$  o máximo destes zeros. Temos:

$$x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) \neq 0.$$

Suponhamos agora, sem perda de generalidade, que  $\dot{x}(t_0) > 0$ . Assim,  $x(t) > 0$  para  $t > t_0$ . Então, por 3º,  $Q(x(t), t) > 0$  para  $t > t_0$  e, portanto,  $\dot{x}(t)$  é decrescente para  $t > t_0$ , por (2.2). Isto é,  $\dot{x}(t_2) < \dot{x}(t_1) < \dot{x}(t_0) < \infty$ , se  $t_0 < t_1 < t_2$ . E temos também que  $\dot{x}(t) \geq 0$  para todo  $t > t_0$ , ou  $x(t)$  se anulava novamente, o que contraria a definição de  $t_0$ . Disso concluímos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = v_\infty$  com  $0 \leq v_\infty < \infty$ . É claro que esse limite existe, pois, para  $t > t_0$ ,  $\dot{x}(t)$  é uma função decrescente e limitada.

Se  $v_\infty > 0$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ , e a solução é hiperbólica.

Resta mostrarmos que, com  $v_\infty = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ . Suponhamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq b < \infty$ . Integrando (2.2), obtemos:

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(x(s), s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t Q(x(s), s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{x}(t_0) - \dot{x}(t)) = \dot{x}(t_0).$$

Assim, a integral acima converge. Pelo critério de Cauchy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} Q(x(s), s) ds = 0.$$

E então:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} Q(x(s), s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} Q(x(s + 2\pi n), s + 2\pi n) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} Q(x(s + 2\pi n), s) ds = \int_0^{2\pi} Q(b, s) ds. \end{aligned}$$

Então  $\int_0^{2\pi} Q(b, s) ds = 0$ , o que contradiz 3º. Logo  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ , e a solução é parabólica.

■

Seja  $x(t, v, \tau)$  a solução com condições iniciais:

$$x(\tau, v, \tau) = 0, \quad \dot{x}(\tau, v, \tau) = v.$$

Como  $Q(x, t)$  é ímpar em  $x$  e  $2\pi$ -periódica em  $t$ , temos que:

$$x(t, v, \tau) \equiv x(t + 2\pi, v, \tau + 2\pi), \quad (2.3)$$

$$x(t, -v, \tau) \equiv -x(t, v, \tau). \quad (2.4)$$

Pelas equações acima vemos que basta considerar, nas condições iniciais, apenas velocidades positivas e instantes iniciais  $\tau \bmod(2\pi)$ .

Seja  $v > 0$  e  $(\tau, \tau')$  o intervalo maximal onde  $x(t, v, \tau)$  permanece positiva, podendo  $\tau'$  ser infinito. Definimos então:

$$X^+(v, \tau) = \sup_{\tau < t < \tau'} x(t, v, \tau).$$

Se  $\tau'$  é finito:

$$X^+(v, \tau) = \max_{\tau < t < \tau'} x(t, v, \tau).$$

Ao instante de tempo  $t$  em que a solução atinge o valor  $X^+(v, \tau)$  chamamos  $T^+(v, \tau)$ . Esse tempo é determinado univocamente, pois  $Q(x, t) > 0$  para  $x > 0$ . Se  $X^+(v, \tau) = \infty$ , então a solução  $x(t, v, \tau)$  é parabólica ou hiperbólica. Nesse caso, definimos  $T^+(v, \tau) = \infty$ . Se  $X^+(v, \tau)$  é finito, então  $\tau' < \infty$ ,  $x(t, v, \tau)$  é côncava e  $\dot{x}$  é decrescente, e assim  $x(t, v, \tau)$  atinge uma única vez seu máximo  $X^+(v, \tau)$ .

Definimos  $X^+(0, \tau) \equiv 0$ .

Vide figura 2.2. As funções  $X^-(v, \tau)$  e  $T^-(v, \tau)$  são análogas a  $X^+(v, \tau)$  e  $T^+(v, \tau)$ , respectivamente, e serão posteriormente definidas com mais rigor.

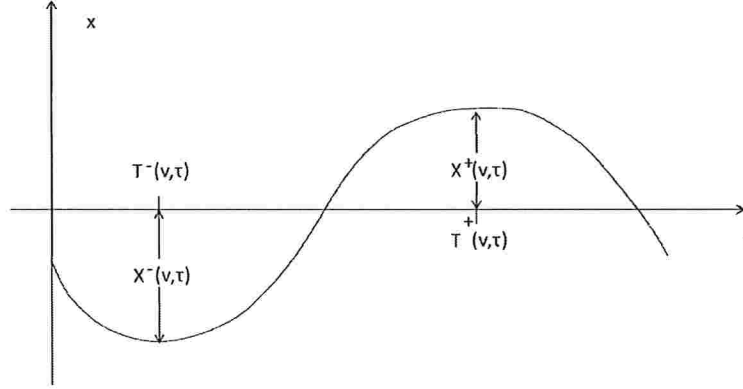


Figura 2.2:  $X^\pm(v, \tau)$  e  $T^\pm(v, \tau)$

**Proposição 2.1.2.** 1 - A função  $X^+$  é contínua para todo  $\tau$  e  $v \geq 0$  e a função  $T^+$  é contínua para todo  $\tau$  e  $v > 0$ .

2- Se  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência limitada inferiormente,  $Q(x, t)$  é limitada superiormente e  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de velocidades positivas tal que  $v_n \rightarrow \infty$  e  $X^+(v_n, \tau_n) \rightarrow \infty$ , então  $\tau'_n \rightarrow \infty$  e, consequentemente,  $T^+(v_n, \tau_n) \rightarrow \infty$ .

**demonstração:** Primeiramente, demonstremos a parte 1. Considere-mos  $v_0 > 0$ ,  $\tau'_0 < \infty$  e sejam  $t_1, t_2$  tais que  $\tau_0 < t_1 < T^+(v_0, \tau_0) < t_2 < \tau'_0$ . Temos:

$$\dot{x}(t, v_0, \tau_0) > 0 \text{ para } t \in [\tau_0, t_1] \text{ e } \dot{x}(t_2, v_0, \tau_0) < 0$$

e:

$$x(\tau_0, v_0, \tau_0) = 0, \quad \dot{x}(\tau_0, v_0, \tau_0) = v_0 \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita, existem uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $(v_0, \tau_0)$ , uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $\tau_0$  e uma única função  $t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  tal que  $x(t(v, \tau), v, \tau) = 0$  para qualquer  $(v, \tau) \in \mathcal{U}$ . Isso nos permite, localmente, trocar as condições iniciais  $(v_0, x(\tau_0, v_0, \tau_0))$  por  $(v_0, \tau_0)$ .



Pelo teorema de dependência contínua em relação às condições iniciais, o ponto  $(v_0, \tau_0)$  tem uma vizinhança  $\mathcal{U}_0$  tal que, para  $(v, \tau) \in \mathcal{U}_0$ :

$$\dot{x}(t, v, \tau) > 0, \text{ para } \tau \leq t \leq \tau_1, \quad (2.5)$$

$$\dot{x}(t_2, v, \tau) < 0 \text{ e } |x(t, v, \tau) - x(t, v_0, \tau_0)| < \varepsilon \text{ para } t \in [t_1, t_2]. \quad (2.6)$$

Por (2.5) e (2.6) temos que:

$$t_1 < T^+(v, \tau) < t_2.$$

Como  $t_1$  e  $t_2$  foram escolhidos arbitrariamente próximos de  $T^+(v_0, \tau_0)$ , concluímos que:

$$\lim_{(v, \tau) \rightarrow (v_0, \tau_0)} T^+(v, \tau) = T^+(v_0, \tau_0), \quad (2.7)$$

isto é,  $T^+(v, \tau)$  é uma função contínua para  $v > 0$ .

Usando a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} & |X^+(v, \tau) - X^+(v_0, \tau_0)| \\ &= |X^+(v, \tau) - X^+(v_0, \tau_0) - x(t_1, v, \tau) + x(t_1, v, \tau) - x(t_1, v_0, \tau_0) + x(t_1, v_0, \tau_0)| \\ &\leq |X^+(v, \tau) - x(t_1, v, \tau)| + |x(t_1, v, \tau) - x(t_1, v_0, \tau_0)| + |x(t_1, v_0, \tau_0) - X^+(v_0, \tau_0)|. \end{aligned}$$

Por (2.7), existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_0$  de  $(v_0, \tau_0)$  tal que, se  $(v, \tau) \in \mathcal{V}_0$ , então:

$$|X^+(v, \tau) - x(t_1, v, \tau)| < \varepsilon$$

e

$$|X^+(v_0, \tau_0) - x(t_1, v_0, \tau_0)| < \varepsilon,$$

se  $t_1$  é suficientemente próximo de  $\tau$  e de  $\tau_0$ .

E assim concluímos que  $X^+(v, \tau)$  é contínua se  $v > 0$ .

Tratamos até agora do caso  $\tau' < \infty$ . Se  $\tau' = \infty$ , temos:

$$X^+(v_0, \tau_0) = \infty = T^+(v_0, \tau_0).$$

Pelo teorema de dependência contínua em relação às condições iniciais, temos que para qualquer  $\varepsilon > 0$  e intervalo compacto  $[\tau, t_0] \subset [\tau, \infty]$ , se  $(v, \tau)$  está suficientemente próximo de  $(v_0, \tau_0)$ , então:

$$|x(t, v_0, \tau_0) - x(t, v, \tau)| < \varepsilon,$$

para qualquer  $t \in [\tau, t_0]$ , o que nos dá que  $X^+(v, \tau)$  e  $T^+(v, \tau)$  são funções contínuas quando  $\tau' = \infty$ .

Nos resta mostrar, da primeira parte da proposição, que  $X^+(v, \tau)$  é uma função contínua em  $v = 0$ .

Provaremos por contradição. Suponhamos que exista uma sequência  $\{(v_n, \tau_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergindo a  $(0, \tau_0)$  tal que  $X^+(v_n, \tau_n) \rightarrow \alpha > 0$ . Aqui  $\alpha$  pode ser finito ou infinito.

Temos que:

$$X^+(v, \tau) = \sup_{t \in (\tau, \tau')} x(t, v, \tau) = \sup_{t \in (\tau, T^+(v, \tau))} x(t, v, \tau).$$

Podemos escolher uma sequência de tempos  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que:

$$x(t_n, v_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha' < \alpha,$$

onde podemos supor que  $\alpha'$  é um número real positivo.

No intervalo  $[\tau_n, t_n]$ ,  $\dot{x}(t, v_n, \tau_n)$  é não crescente, pois  $\ddot{x} \leq 0$ , e então:

$$0 \leq \dot{x}(t, v_n, \tau_n) \leq v_n. \quad (2.8)$$

Com isso, segue que:

$$x(t_n, v_n, \tau_n) = \int_{\tau_n}^{t_n} \dot{x}(t, v_n, \tau_n) dt \leq v_n(t_n - \tau_n),$$

de onde:

$$t_n - \tau_n \geq \frac{x(t_n, v_n, \tau_n)}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

pois  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  e  $x(t_n, v_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha'$ , que é finito.

Então podemos escolher  $t_n$  tal que  $t_n - 2\pi > \tau_n$ . Daí, usando (2.8):

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_n}^{t_n} \ddot{x}(t, v_n, \tau_n) dt &= \dot{x}(t_n, v_n, \tau_n) - \dot{x}(\tau_n, v_n, \tau_n) \\
\Rightarrow \dot{x}(t_n, v_n, \tau_n) &= \int_{\tau_n}^{t_n} \ddot{x}(t, v_n, \tau_n) dt + \dot{x}(\tau_n, v_n, \tau_n) \\
\Rightarrow \dot{x}(t_n, v_n, \tau_n) &= \dot{x}(\tau_n, v_n, \tau_n) - \int_{\tau_n}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t) dt \\
\Rightarrow \dot{x}(t_n, v_n, \tau_n) &= v_n - \int_{\tau_n}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t) dt \in [0, v_n].
\end{aligned}$$

Agora:

$$t_n - 2\pi > \tau_n \Rightarrow \int_{t_n - 2\pi}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t) dt \leq \int_{\tau_n}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t) dt.$$

Portanto:

$$0 \leq \int_{t_n - 2\pi}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t) dt \leq \int_{\tau_n}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t) dt \leq v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

de onde temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_n - 2\pi}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t) dt = 0.$$

Consideremos  $t, \bar{t} \in [t_n - 2\pi, t_n]$ , com  $t < \bar{t}$ . Pelo teorema do valor médio, existe  $t' \in [t, \bar{t}]$  tal que:

$$\frac{x(\bar{t}, v_n, \tau_n) - x(t, v_n, \tau_n)}{\bar{t} - t} = \dot{x}(t', v_n, \tau_n).$$

Mas, por (2.8) e como  $\bar{t} - t \leq 2\pi$ , temos:

$$|x(t, v_n, \tau_n) - x(\bar{t}, v_n, \tau_n)| \leq 2\pi v_n.$$

Consideremos agora  $s \in [0, 2\pi]$ . Então, pela desigualdade acima:

$$|x(t_n, v_n, \tau_n) - x(t_n - 2\pi + s, v_n, \tau_n)| \leq 2\pi v_n.$$

Logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(t_n, v_n, \tau_n) - x(t_n - 2\pi + s, v_n, \tau_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi v_n = 0,$$

pois  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  e portanto, como  $x(t_n, v_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha'$ , temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n - 2\pi + s, \tau_n) = \alpha'. \quad (2.9)$$

A integral:

$$\int_{t_n - 2\pi}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t) dt,$$

sob a mudança de variável  $u = t - t_n + 2\pi$ , será escrita como:

$$\int_0^{2\pi} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n - 2\pi) du.$$

Como  $Q(x, t)$  é  $2\pi$ -periódica em  $t$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n - 2\pi) du \\ &= \int_0^{2\pi} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n \pmod{2\pi}) du. \end{aligned}$$

A sequência  $\{t_n \pmod{2\pi}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tem uma subsequência convergente em  $[0, 2\pi]$ . Suporemos então que a própria sequência  $\{t_n \pmod{2\pi}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $t_0 \in [0, 2\pi]$ .

Assim, por (2.9):

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n \pmod{2\pi}) du \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n \pmod{2\pi}) du \\ &= \int_0^{2\pi} Q(\alpha', u + t_0) du. \end{aligned}$$

Mas, como  $\alpha' > 0$ , então  $Q(\alpha', u + t_0) > 0$ , qualquer  $t_0 \in [0, 2\pi]$ , o que contradiz esta última igualdade. Assim,  $X^+(v, \tau)$  é uma função contínua em  $v = 0$ .

Demonstremos agora a segunda parte da proposição, por contradição:

Suponhamos, atendendo as hipóteses de 2, que exista uma sequência  $\{(v_n, \tau_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que:

$$X^+(v_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

$$T^+(v_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b < \infty,$$

e

$$\tau_n \geq a \geq -\infty.$$

Consideramos, sem perda de generalidade,  $\tau \pmod{2\pi}$ . Passando a uma subsequência, se necessário, consideramos  $\tau_n \rightarrow \tau_0 \in [0, 2\pi]$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_n}^{T^+(v_n, \tau_n)} Q(x(s, v_n, \tau_n), s) ds &= - \int_{\tau_n}^{T^+(v_n, \tau_n)} \ddot{x}(s, v_n, \tau_n) ds \\ &= \dot{x}(\tau_n, v_n, \tau_n) - \dot{x}(T^+(v_n, \tau_n), v_n, \tau_n) \\ &= v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, estamos supondo que  $Q(x, t)$  é limitado por uma constante  $C$  para qualquer  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , e daí:

$$\int_{\tau_n}^{T^+(v_n, \tau_n)} Q(x(s, v_n, \tau_n), s) ds \leq C(T^+(v_n, \tau_n) - \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C(b - \tau_0) < \infty,$$

e temos uma contradição.

■

Consideramos agora a média de  $Q(x, t)$ , dada por:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x, t) dt.$$

Veremos que podemos obter boas informações sobre o comportamento no infinito das soluções de (2.2) através das soluções de:

$$\ddot{x} = -Q_0(x). \tag{2.10}$$

**Lema 2.1.1.** *Se 4° é satisfeita, então:*

$$|Q_0(x) - Q(x, t)| \leq 2\pi\psi(x).$$

**demonstração:** Temos que:

$$\begin{aligned} |Q_0(x) - Q(x, t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x, t) dt - Q(x, t) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} Q(x, t_x) 2\pi - Q(x, t) \right| \\ &= |Q(x, t_x) - Q(x, t)|, \end{aligned}$$

para algum  $t_x \in [0, 2\pi]$ . Então, utilizando o teorema do valor médio e também 4° :

$$|Q_0(x) - Q(x, t)| = |Q(x, t_x) - Q(x, t)| = \left| \frac{\partial Q(x, \bar{t}_x)}{\partial t} \right| |t_x - t| \leq 2\pi\psi(x).$$

■

Introduzimos agora a seguinte notação:

$$h^+(v, \tau) = \begin{cases} \frac{v_\infty^2}{2} + \int_0^\infty Q_0(x) dx, & \text{se } X^+(v, \tau) = \infty, \\ \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x) dx, & \text{se } X^+(v, \tau) < \infty. \end{cases} \quad (2.11)$$

Definimos:

$$\mathfrak{S} = \int_0^\infty Q_0(x) dx.$$

Quando (2.2) é uma equação autônoma, isto é, quando  $Q(x, t) \equiv Q_0(x)$ , a fórmula (2.11) coincide com a integral de energia:

$$h(v) \equiv \frac{v^2}{2} \equiv \frac{\dot{x}}{2} + \int_0^x Q_0(y) dy.$$

**Proposição 2.1.3.** *A função  $h^+(v, \tau)$  é contínua para todo  $\tau$  e para todo  $v \geq 0$  e satisfaz a desigualdade:*

$$\frac{v^2}{2} - 2\pi \int_0^\infty \psi(x) dx \leq h^+(v, \tau) \leq \frac{v^2}{2} + 2\pi \int_0^\infty \psi(x) dx. \quad (2.12)$$

Além disso, se existirem funções reais  $Q(x)$  e  $q(x)$  tais que:

$$0 \leq q(x) \leq Q(x, t) \leq Q(x), \quad (2.13)$$

então:

$$\frac{v^2}{2} - \int_0^{X^+(v, \tau)} Q(x) dx \leq h^+(v, \tau) - \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x) dx \leq \frac{v^2}{2} - \int_0^{X^+(v, \tau)} q(x) dx. \quad (2.14)$$

**demonstração:** No intervalo  $[\tau, T^+(v, \tau))$  a solução de (2.2) é monótona crescente em  $t$ , pois  $\dot{x}(t, v, \tau) > 0$ . Então a equação:

$$x(t, v, \tau) = \bar{x}, \quad \bar{x} \in (0, X^+(v, \tau))$$

admite uma única solução  $\bar{t} \in (0, T^+(v, \tau))$ . Tomemos agora:

$$f(t, y, v, \tau) = x(t, v, \tau) - y$$

Temos então que:

$$\left. \frac{\partial f(t, y, v, \tau)}{\partial t} \right|_{t=\bar{t}} = \dot{x}(t, v, \tau)|_{t=\bar{t}} \neq 0.$$

Então, se  $\bar{y} \in [0, X^+(v, \tau))$ , pelo teorema da função implícita, existem abertos  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ , com  $(\bar{y}, v, \tau) \in \mathcal{U}$  e com  $\bar{t} \in \mathcal{V}$ , tais que existe uma única função  $t: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  para a qual vale  $t(\bar{y}, v, \tau) = \bar{t}$  e  $f(t(y, v, \tau), y, v, \tau) = 0$ , para qualquer  $(y, v, \tau) \in \mathcal{U}$ , e  $t: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  é diferenciável em  $\mathcal{U}$ .

Então  $t$  é diferenciável em suas entradas, se  $\bar{y} \in [0, X^+(v, \tau))$ , e é contínua se  $\bar{y} \in [0, X^+(v, \tau)]$ .

Calculemos a derivada de  $t(y, v, \tau)$  com relação a  $y$  quando  $y$  percorre o intervalo  $[0, X^+(v, \tau))$ :

$$x(t(y, v, \tau), v, \tau) - y = 0 \Rightarrow \frac{\partial x(t(y, v, \tau), v, \tau)}{\partial t} \frac{\partial t(y, v, \tau)}{\partial y} = 1,$$

o que nos dá:

$$\frac{\partial t(y, v, \tau)}{\partial y} = \left( \frac{\partial x(t(y, v, \tau), v, \tau)}{\partial t} \right)^{-1} = \frac{1}{\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)} \quad (2.15)$$

Temos que  $\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)$  é contínua em  $0 \leq y \leq X^+(v, \tau)$ , decrescendo de  $v$  a 0 nesse intervalo. Seja:

$$V(y, v, \tau) = \begin{cases} \dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau), & \text{se } y \in [0, X^+(v, \tau)), \\ 0, & \text{se } y \in [X^+(v, \tau), \infty). \end{cases} \quad (2.16)$$

Mostremos que  $V(y, v, \tau)$  é contínua em  $y = X^+(v, \tau)$ .

Seja  $y_0 = X^+(v_0, \tau_0) < \infty$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $\dot{x}(t(y, v_0, \tau_0), v_0, \tau_0)$  decresce estritamente até 0 quando  $y$  cresce até  $y_0$ , podemos escolher  $y_1 < y_0$  tal que:

$$0 < \dot{x}(t(y_1, v_0, \tau_0), v_0, \tau_0) < \varepsilon.$$

Por continuidade das soluções, existem uma vizinhança  $\mathcal{U}_0$  de  $(v_0, \tau_0)$  tal que, se  $(v, \tau) \in \mathcal{U}_0$ , então:

$$0 < \dot{x}(t(y_1, v, \tau), v, \tau) < \varepsilon.$$

O conjunto  $\{(y, v, \tau) : y > y_1, (v, \tau) \in \mathcal{U}_0\}$  é uma vizinhança de  $(y_0, v_0, \tau_0)$  e  $V(y, v, \tau) < \varepsilon$  nessa vizinhança. Dessa maneira,  $V(y, v, \tau)$  é contínua em  $y = X^+(v, \tau)$  e, sendo assim, em todo o seu domínio.

Para  $0 \leq y < X^+(v, \tau)$ ,  $V$  é diferenciável em seus argumentos:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)] = \ddot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau) \frac{\partial t(y, v, \tau)}{\partial y}.$$

Por (2.15):

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -Q(y, t(y, v, \tau)) \frac{1}{\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)}. \quad (2.17)$$

Definimos agora:

$$h^+(y, v, \tau) = \begin{cases} \frac{V(y, v, \tau)^2}{2} + \int_0^y Q_0(\xi) d\xi, & \text{se } y \in [0, X^+(v, \tau)), \\ \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(\xi) d\xi, & \text{se } y \in [X^+(v, \tau), \infty). \end{cases} \quad (2.18)$$



Essa função é contínua, já que ambas funções que a definem são contínuas e coincidem em  $y = X^+(v, \tau)$ . E mais,  $h^+(y, v, \tau)$  é diferenciável em cada uma das regiões de definição. Derivemos, pois,  $h^+(y, v, \tau)$ . Como:

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{\partial V(y, v, \tau)^2}{\partial y} &= \frac{\partial \dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)^2}{\partial y} \\ &= 2\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau) \ddot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau) \frac{\partial t}{\partial y} \\ &= 2\ddot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau) = -2Q(y, t(y, v, \tau)), \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y Q_0(\xi) d\xi = Q_0(y)$$

e

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(\xi) d\xi = 0,$$

ficamos com:

$$\frac{\partial h^+(y, v, \tau)}{\partial y} = \begin{cases} Q_0(y) - Q(y, t(y, v, \tau)), & \text{se } y \in [0, X^+(v, \tau)), \\ 0, & \text{se } y \in [X^+(v, \tau), \infty). \end{cases} \quad (2.19)$$

Portanto, pelo lema 2.1.1, ficamos com:

$$\left| \frac{\partial h^+(y, v, \tau)}{\partial y} \right| \leq 2\pi\psi(y),$$

de onde:

$$\left| \int_0^\infty \frac{\partial h^+(y, v, \tau)}{\partial y} dy \right| \leq \int_0^\infty \left| \frac{\partial h^+(y, v, \tau)}{\partial y} \right| dy \leq 2\pi \int_0^\infty \psi(y) dy < \infty,$$

pois  $\psi(y)$  é integrável. Então existe o limite:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} h^+(y, v, \tau) &= h^+(0, v, \tau) + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{\partial h^+(x, v, \tau)}{\partial x} dx \\ &= h^+(0, v, \tau) + \int_0^\infty \frac{\partial h^+(x, v, \tau)}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Se em (2.18) fazemos  $y \rightarrow \infty$ , obtemos (2.11), ou seja:

$$\begin{aligned} h^+(v, \tau) &= \lim_{y \rightarrow \infty} h^+(y, v, \tau) \\ &= \frac{v^2}{2} + \int_0^{X^+(v, \tau)} [Q_0(y) - Q(y, t(y, v, \tau))] dy \end{aligned} \quad (2.20)$$

Então, utilizando novamente o lema 2.1.1:

$$\begin{aligned} \left| h^+(v, \tau) - \frac{v^2}{2} \right| &= \left| \int_0^{X^+(v, \tau)} [Q_0(y) - Q(y, t(y, v, \tau))] dy \right| \\ &\leq \int_0^{X^+(v, \tau)} |Q_0(y) - Q(y, t(y, v, \tau))| dy \\ &\leq \int_0^\infty |Q_0(y) - Q(y, t(y, v, \tau))| dy \leq 2\pi \int_0^\infty \psi(y) dy, \end{aligned}$$

o que demonstra (2.12).

Agora, por (2.20), se vale (2.13), ficamos com:

$$\frac{v^2}{2} + \int_0^{X^+(v, \tau)} [Q_0(y) - Q(y)] dy \leq h^+(v, \tau) \leq \frac{v^2}{2} + \int_0^{X^+(v, \tau)} [Q_0(y) - q(y)] dy,$$

o que demonstra (2.14).

■

Para simplificação de alguns argumentos, lançaremos mão da simetria do problema. Primeiramente,  $h^+(v, \tau)$  e  $X^+(v, \tau)$  têm período  $2\pi$  em  $\tau$ , e para  $x(t, v, \tau)$  nós levamos em consideração (2.3). Então é natural considerarmos  $\tau$  pertencente a  $[0, 2\pi]$ . A equação (2.4) nos permite considerar  $v \geq 0$ , e, como  $x(t, 0, \tau) \equiv X^+(0, \tau) \equiv h^+(0, \tau) \equiv 0$ , nós podemos identificar todos os pares  $(0, \tau)$  com a origem. Assim, é razoável considerarmos  $v$  e  $\tau$  como coordenadas polares em um plano que agora denotamos por  $\Phi$ .

Um papel importante é desempenhado pela constante

$$\mathfrak{S} = \int_0^\infty Q_0(x) dx,$$

pois o comportamento das soluções depende do fato dessa constante ser ou não infinita. Dividimos então o plano  $\Phi$  nos seguintes subconjuntos:

$$\{0\} = \{(v, \tau) : v = 0\} = \{(v, \tau) : h^+(v, \tau) = 0\},$$

$$R_0^+ = \{(v, \tau) : 0 < h^+(v, \tau) < \mathfrak{S}\},$$

$$\Pi_0^+ = \{(v, \tau) : h^+(v, \tau) = \mathfrak{S}\}$$

e

$$H_0^+ = \{(v, \tau) : h^+(v, \tau) > \mathfrak{S}\}.$$

**Teorema 2.1.1.** *O conjunto  $R_0^+$  é aberto e não vazio, e se  $(v, \tau) \in R_0^+$  a solução associada  $x(t, v, \tau)$  retorna ao plano  $x = 0$  pelo menos uma vez para  $t > \tau$ . Se  $\mathfrak{S} = \infty$ , então todas as soluções não triviais de (2.2) são oscilatórias. Se  $\mathfrak{S} < \infty$ , então  $\Pi_0^+$  é não vazio e fechado e a solução  $x(t, v, \tau)$  é parabólica para  $(v, \tau) \in \Pi_0^+$ .  $H_0^+$  é não vazio e aberto e a solução  $x(t, v, \tau)$  é hiperbólica para  $(v, \tau) \in H_0^+$ .*

**demonstração:** Como  $h^+(v, \tau)$  é contínua, temos que  $R_0^+$  e  $H_0^+$  são abertos, enquanto  $\Pi_0^+$  é fechado, já que a pré-imagem de abertos (respec. fechados) por funções contínuas são abertos (respec. fechados). Por (2.12), temos que  $h^+(v, \tau)$  pode atingir valores arbitrariamente grandes, de onde, se  $\mathfrak{S} < \infty$ ,  $R_0^+$ ,  $H_0^+$  e  $\Pi_0^+$  são não vazios.

De (2.11), é claro que  $h^+(v, \tau) > \mathfrak{S}$  se, e somente se,  $X^+(v, \tau) = \infty$ . Nesse caso,  $h^+(v, \tau) - \mathfrak{S} = \frac{v_\infty^2}{2}$ , de onde temos  $(v, \tau) \in \Pi_0^+ \Rightarrow v_\infty = 0$ , isto é, tais pontos são parabólicos, e para os pontos de  $H_0^+$  temos  $v_\infty > 0$ , ou seja, estes são pontos hiperbólicos.

A solução  $x(t, v, \tau)$  é não trivial e retorna a  $x = 0$  se, e somente se,  $0 < X^+(v, \tau) < \infty$ , isto é:

$$0 < h^+(v, \tau) = \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x) dx < \mathfrak{S}.$$

Para a solução trivial tem-se  $v = 0$ , e  $h^+(v, \tau) = 0$ . Seja agora  $\mathfrak{S} = \infty$ . Neste caso,  $\Phi = \{0\} \cup R_0^+$ , e então toda solução que cruza  $x = 0$  indo para  $x > 0$  retorna a  $x = 0$ , e pela simetria imposta por (2.4), toda a solução que cruza  $x = 0$  indo para  $x < 0$  também retorna a  $x = 0$ , isto é, a solução é oscilatória.

■

**Corolário 2.1.1.** *O conjunto  $\{0\} \cup R_0^+$  está contido em um disco de raio  $(2\mathfrak{S} + 4\pi \int_0^\infty \psi(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ , e num disco de raio  $(2 \int_0^\infty Q(x)dx)^{\frac{1}{2}}$  se o lado direito de (2.13) for satisfeito. O conjunto contém um disco de raio  $(2 \int_0^\infty q(x)dx)^{\frac{1}{2}}$  se o lado esquerdo de (2.13) for satisfeito.*

**demonstração:** Por (2.12), temos que:

$$\left| h^+(v, \tau) - \frac{v^2}{2} \right| \leq 2\pi \int_0^\infty \psi(x)dx.$$

Como  $\{0\} \cup R_0^+ = \{(v, \tau) : 0 \leq h^+(v, \tau) < \mathfrak{S}\}$ , ficamos com:

$$\mathfrak{S} - \frac{v^2}{2} \leq 2\pi \int_0^\infty \psi(x)dx \Rightarrow v \leq \left( 2\mathfrak{S} + 4\pi \int_0^\infty \psi(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se o lado direito de (2.13) for satisfeito teremos, por (2.14):

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} - \int_0^{X^+(v, \tau)} Q(x)dx &\leq h^+(v, \tau) - \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x)dx \\ \Rightarrow \frac{v^2}{2} &\leq \int_0^{X^+(v, \tau)} Q(x)dx - \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x)dx \leq \int_0^\infty Q(x)dx \\ \Rightarrow \frac{v^2}{2} &\leq \int_0^\infty Q(x)dx \Rightarrow v \leq \left( 2 \int_0^\infty Q(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Se o lado esquerdo de (2.13) for satisfeito teremos, por (2.14):

$$\begin{aligned} h^+(v, \tau) - \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x)dx &\leq \frac{v^2}{2} - \int_0^{X^+(v, \tau)} q(x)dx \\ \Rightarrow h^+(v, \tau) - \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x)dx &+ \int_0^{X^+(v, \tau)} q(x)dx \leq \frac{v^2}{2} \\ \Rightarrow h^+(v, \tau) - \int_0^\infty Q_0(x)dx &+ \int_0^{X^+(v, \tau)} q(x)dx \leq \frac{v^2}{2}. \end{aligned}$$

Em  $\{0\} \cup R_0^+$  temos que  $h^+(v, \tau) - \int_0^\infty Q_0(x)dx < 0$ . Então, se  $(v, \tau) \in \Phi \setminus \{0\} \cup R_0^+$ , teremos  $h^+(v, \tau) - \int_0^\infty Q_0(x)dx \geq 0$ , e daí:

$$\begin{aligned}
\frac{v^2}{2} &\geq h^+(v, \tau) - \int_0^\infty Q_0(x)dx + \int_0^{X^+(v, \tau)} q(x)dx \\
\Rightarrow \frac{v^2}{2} &\geq \int_0^{X^+(v, \tau)} q(x)dx \geq \int_0^\infty q(x)dx \\
\Rightarrow v &\geq \left( 2 \int_0^\infty q(x)dx \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

o que termina a demonstração deste corolário.

■

Os resultados precedentes tratam do comportamento da solução  $x(t, v, \tau)$  para  $t > \tau$ . Definimos  $X^-(v', \tau')$  como sendo o supremo do valor absoluto de  $x(t, v', \tau')$  no intervalo maximal  $\tau \leq t \leq \tau'$  onde temos  $|x(t, v', \tau')| \neq 0$  (podemos ter  $\tau = -\infty$ ), e  $T^-(v', \tau')$  como o instante em que a solução atinge esse valor. Repetindo os argumentos, conseguimos resultados análogos também para o passado, isto é, para  $t < \tau$ . Vale notar, no entanto, que os conceitos de “mais” e “menos” não são idênticos. Em particular,  $h^+(v, \tau)$  não é necessariamente igual a  $h^-(v, \tau)$ . Aqui:

$$h^-(v, \tau) = \begin{cases} \frac{v^2}{2} + \int_0^\infty Q_0(x)dx, & \text{se } X^-(v, \tau) = \infty, \\ \int_0^{X^-(v, \tau)} Q_0(x)dx, & \text{se } X^-(v, \tau) < \infty. \end{cases} \quad (2.21)$$

Os conjuntos  $R_0^+$ ,  $\Pi_0^+$  e  $H_0^+$  também têm seus análogos negativos  $R_0^-$ ,  $\Pi_0^-$  e  $H_0^-$ .

**Definição 2.1.2.** A aplicação  $S : R_0^+ \rightarrow \Phi$ , chamada de aplicação primeiro retorno, leva  $(v, \tau) \in R_0^+$  em  $(v', \tau') \in \Phi$  de tal forma que:

$$x(\tau', v, \tau) = 0, \quad \dot{x}(\tau', v, \tau) + v' = 0 \quad (2.22)$$

e  $x > 0$  para  $\tau < t < \tau'$ .

Observamos que, por (2.3),  $(v', \tau')$  é unicamente determinado e, por um teorema de unicidade de soluções de equações diferenciais, a aplicação  $S$  é injetora.

**Proposição 2.1.4.**

$$X^- \circ S = X^+, \quad h^- \circ S = h^+, \quad T^- \circ S = T^+. \quad (2.23)$$

**demonstração:** Por (2.4) e por (2.22), temos que:

$$x(t, v', \tau') \equiv -x(t, -v', \tau') \equiv -x(t, v, \tau),$$

de onde  $X^+(v, \tau) = X^-(v', \tau')$ , o que nos dá também que  $T^+(v, \tau) = T^-(v', \tau')$  e que:

$$h^-(v', \tau') = \int_0^{X^-(v', \tau')} Q_0(x) dx = \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x) dx = h^+(v, \tau),$$

o que demonstra esta proposição. ■

**Corolário 2.1.2.**  $S(R_0^+) = R_0^-$

**demonstração:** Segue da equação  $h^- \circ S = h^+$  e da versão “menos” do teorema 2.1.1. ■

**Proposição 2.1.5.** *A aplicação  $S : R_0^+ \rightarrow R_0^-$  é um difeomorfismo que preserva o elemento de área  $vdvd\tau$  em  $\Phi$ . Se definirmos  $S(0) = 0$ , então a aplicação  $S : R_0^+ \cup \{0\} \rightarrow R_0^- \cup \{0\}$  é um homeomorfismo que preserva  $vdvd\tau$ .*

**demonstração:** Definimos a seguinte aplicação:

$$F : \begin{array}{ccc} R_0^+ \times R_0^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (v, \tau, v', \tau') & \longmapsto & (x(\tau', v, \tau), \dot{x}(\tau', v, \tau) + v') \end{array}$$

Para essa aplicação tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(v, \tau, v', \tau')}{\partial(v', \tau')} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x(\tau', v, \tau)}{\partial v'} & \frac{\partial x(\tau', v, \tau)}{\partial \tau'} \\ \frac{\partial[\dot{x}(\tau', v, \tau) + v']}{\partial v'} & \frac{\partial[\dot{x}(\tau', v, \tau) + v']}{\partial \tau'} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \dot{x}(\tau', v, \tau) \\ 1 & \ddot{x}(\tau', v, \tau) \end{vmatrix} = -\dot{x}(\tau', v, \tau) = v' \neq 0. \end{aligned}$$

Consideremos agora  $(\bar{v}, \bar{\tau}, \bar{v}', \bar{\tau}')$  tal que  $S(\bar{v}, \bar{\tau}) = (\bar{v}', \bar{\tau}')$ . Pelo jacobiano acima e pelo teorema da função implícita, existem abertos  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  com  $(\bar{v}, \bar{\tau}) \in \mathcal{U}$  e com  $(\bar{v}', \bar{\tau}') \in \mathcal{V}$  e existe uma única função  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , com a mesma classe de diferenciabilidade de  $F$ , tal que  $g(\bar{v}, \bar{\tau}) = (\bar{v}', \bar{\tau}')$  e tal que  $F(v, \tau, g(v, \tau)) = F(\bar{v}, \bar{\tau}, \bar{v}', \bar{\tau}') = (0, 0)$ .

Como  $g$  é única, temos que  $g = S$ . Como  $S$  é bijetora,  $S$  é um difeomorfismo de  $R_0^+$  em  $R_0^-$ .

Pela proposição 2.1.2 a função  $X^+(v, \tau)$  é contínua para qualquer  $\tau$  e para qualquer  $v \geq 0$ . Analogamente, prova-se que  $X^-(v, \tau)$  também o é.

Consideremos então uma sequência  $\{v_n, \tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  e  $\tau_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau_0$ . Sabemos que  $X^\pm(v, \tau) = 0$  se, e somente se,  $v = 0$ . Seja  $(v'_n, \tau'_n) = S(v_n, \tau_n)$ . Usamos que  $X^+ = X^- \circ S$ . Então:

$$(X^- \circ S)(v_n, \tau_n) = X^+(v_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X^+(0, \tau_0) = 0,$$

de onde:

$$X^-(S(v_n, \tau_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

o que significa que  $S(v_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , isto é,  $S(v, \tau)$  é uma função contínua na origem. Portanto,  $S : R_0^+ \cup \{0\} \rightarrow S : R_0^- \cup \{0\}$  é um homeomorfismo.

Agora nos falta somente provar que  $S$  preserva a área.

A equação (2.2) é equivalente ao sistema canônico:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial v} \\ \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}, \quad (2.24)$$

com a Hamiltoniana:

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + \int_0^x Q(y, t) dy. \quad (2.25)$$

Lançamos mão do seguinte teorema:

**Teorema 2.1.2.** (Poincarè-Cartan). *Seja o sistema Hamiltoniano:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial v} \\ \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases},$$

*Suponha que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são duas curvas envolvendo o mesmo tubo de trajetórias do hamiltoniano acima. Então a integral da forma  $vdx - Hdt$  é a mesma ao longo de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ :*

$$\oint_{\gamma_1} vdx - Hdt = \oint_{\gamma_2} vdx - Hdt$$

Por esse teorema, a forma  $vdx - Hdt$  é preservada pelo fluxo. Este fluxo, quando restrito ao plano  $x = 0$ , é a aplicação  $S$ . E em  $x = 0$  temos que essa forma se reduz a  $-Hdt$ . Agora, por (2.25), temos que, restrita ao plano  $x = 0$  tal forma reduz-se a:

$$-Hdt = -\left[\frac{v^2}{2} + \int_0^0 Q(y, t)dy\right] dt = -\frac{v^2}{2} dt,$$

cuja derivada é o elemento de área  $-v dv \wedge dt$ .

Seja então  $G \subset R_0^+$  a região limitada pela curva fechada  $\gamma = \{(v(\alpha), \tau(\alpha)) : \alpha \in [0, 1]\}$ , seja  $SG$  a região limitada por  $S\gamma : \{(v'(\alpha), \tau'(\alpha)) : \alpha \in [0, 1]\}$  e seja  $\mu$  a área. O contorno  $\Gamma' = \{(x, v, t) = (0, v'(\alpha), \tau'(\alpha))\}$  é obtido a partir de  $\Gamma = \{(x, v, t) = (0, v(\alpha), \tau(\alpha))\}$  por um deslocamento sobre as trajetórias do sistema (2.24) (deslocamentos de diferentes magnitudes para tempos diferentes). Usando o teorema 2.1.2, temos que:

$$\mu(G) = \oint_{\gamma} \frac{v^2}{2} d\tau = -\oint_{\Gamma} [vdx - Hdt] = -\oint_{\Gamma'} [vdx - Hdt] = \oint_{S\gamma} \frac{v'^2}{2} d\tau' = \mu(SG).$$

Então  $S$  preserva a área.

■

Consideramos agora a possibilidade de diversas iterações da aplicação  $S(v, \tau)$ .

Se  $S(v, \tau) = (v', \tau') \in R_0^+$ , podemos falar de  $S^2(v, \tau)$ . A solução associada  $x(t, v, \tau)$  então retorna a  $x = 0$  ao menos 2 vezes para  $t > \tau$ . Se, por exemplo,  $(v, \tau) \in S^{-1}(H_0^+ \cap R_0^-)$ , então  $(v', \tau') \in H_0^+$ , e portanto a solução



$x(t, v, \tau)$  retorna a  $x = 0$  uma vez para  $t > \tau$  e então diverge hiperbolicamente.

Para  $n \geq 1$ , definimos recursivamente:

$$\begin{cases} H_n^+ = S^{-1}(H_{n-1}^+ \cap R_0^-), & H^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n^+ \\ \Pi_n^+ = S^{-1}(\Pi_{n-1}^+ \cap R_0^-), & \Pi^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n^+ \\ R_n^+ = S^{-1}(R_{n-1}^+ \cap R_0^-), & R^+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n^+ \end{cases} \quad (2.26)$$

e

$$\begin{cases} H_n^- = S(H_{n-1}^- \cap R_0^+), & H^- = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n^- \\ \Pi_n^- = S(\Pi_{n-1}^- \cap R_0^+), & \Pi^- = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n^- \\ R_n^- = S(R_{n-1}^- \cap R_0^+), & R^- = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n^- \end{cases} \quad (2.27)$$

Nota-se que, se  $(v, \tau) \in H_n^+$ , a solução associada  $x(t, v, \tau)$  retorna  $n$  vezes ao plano  $x = 0$  e então diverge hiperbolicamente. Se  $(v, \tau) \in \Pi_n^+$ , a solução  $x(t, v, \tau)$  retorna  $n$  vezes ao plano  $x = 0$  e então diverge parabolicamente. Se  $(v, \tau) \in R_n^+$ ,  $x(t, v, \tau)$  retorna pelo menos  $n + 1$  vezes ao plano  $x = 0$ . O conjunto  $H^+$  é o conjunto de  $(v, \tau)$  tal que  $x(t, v, \tau)$  é hiperbólica para  $t \rightarrow \infty$ ,  $\Pi^+$  é o conjunto de  $(v, \tau)$  tal que  $x(t, v, \tau)$  é parabólica para  $t \rightarrow \infty$  e  $R^+$  é o conjunto de  $(v, \tau)$  tal que  $x(t, v, \tau)$  é oscilatória para  $t \rightarrow \infty$ . Analogamente para (2.27).

**Proposição 2.1.6.** *Para todo  $n \geq 1$  temos:*

$$\begin{aligned} R_{n-1}^+ &= R_n^+ \cup \Pi_n^+ \cup H_n^+, \\ R_{n-1}^- &= R_n^- \cup \Pi_n^- \cup H_n^-. \end{aligned} \quad (2.28)$$

*A solução  $x(t, v, \tau)$  é hiperbólica, parabólica ou oscilatória para  $t \rightarrow \infty$  (respec. para  $t \rightarrow -\infty$ ) se, e somente se,  $(v, \tau) \in H^+, \Pi^+$  ou  $R^+$  (respec.  $(v, \tau) \in H^-, \Pi^-$  ou  $R^-$ ), respectivamente. Além disso:*

$$\Phi \setminus \{0\} = H^+ \cup \Pi^+ \cup R^+ = H^- \cup \Pi^- \cup R^-.$$

*Os conjuntos  $H_n^+, H^+, H_n^-, H^-, R_n^+$  e  $R_n^-$  são abertos,  $\Pi_0^+ \cup \dots \cup \Pi_n^+$  e  $\Pi_0^- \cup \dots \cup \Pi_n^-$  são fechados,  $\Pi^+$  e  $\Pi^-$  são do tipo  $F_\sigma$  e  $R^+$  e  $R^-$  são do tipo  $G_\delta$ .*

**demonstração:** Apliquemos  $S$  na primeira equação de (2.28):

$$\begin{aligned}
S(R_{n-1}^+) &= S(R_n^+ \cup \Pi_n^+ \cup H_n^+) \\
&= S(R_n^+) \cup S(\Pi_n^+) \cup S(H_n^+) \\
&= (R_{n-1}^+ \cap R_0^-) \cup (\Pi_{n-1}^+ \cap \Pi_0^-) \cup (H_{n-1}^+ \cap H_0^-) \\
&= (R_{n-1}^+ \cup \Pi_{n-1}^+ \cup H_{n-1}^+) \cap R_0^-.
\end{aligned}$$

Então a primeira equação de (2.28) é equivalente a:

$$S(R_{n-1}^+) = (R_{n-1}^+ \cup \Pi_{n-1}^+ \cup H_{n-1}^+) \cap R_0^-. \quad (2.29)$$

Vamos agora provar a primeira equação de (2.28) por indução finita, utilizando sua equivalência com (2.29).

Para  $n = 1$ , (2.29) é:

$$S(R_0^+) = R_0^-,$$

que procede.

Suponhamos que a primeira equação de (2.28) vale para  $n = j - 1$ . Mostremos que (2.29) (que lhe é equivalente) vale para  $n = j$ :

$$\begin{aligned}
R_j^+ &= S^{-1}(R_{j-1} \cap R_0^-) = S^{-1}((R_j^+ \cup \Pi_j^+ \cup H_j^+) \cap R_0^-) \\
&\Rightarrow S(R_j^+) = (R_j^+ \cup \Pi_j^+ \cup H_j^+) \cap R_0^-
\end{aligned}$$

e isso prova (2.29) e, portanto, a primeira equação de (2.28).

A segunda equação de (2.28) demonstra-se de maneira análoga. Temos que:

$$\Phi \setminus \{0\} = R_0^+ \cup \Pi_0^+ \cup H_0^+.$$

Como  $R_0^+ = R_1^+ \cup \Pi_1^+ \cup H_1^+$ , por (2.28), ficamos então com:

$$\Phi \setminus \{0\} = R_1^+ \cup \Pi_1^+ \cup H_1^+ \cup \Pi_0^+ \cup H_0^+.$$

Procedendo dessa forma sucessivamente, obtemos:

$$\Phi \setminus \{0\} = R_n^+ \cup \left( \bigcup_{k=0}^n \Pi_k^+ \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^n H_k^+ \right).$$

Como  $R_{n+1}^+ \subset R_n^+$ , temos que:

$$R_n^+ = \bigcap_{k=0}^n R_k^+.$$

Assim:

$$\Phi \setminus \{0\} = \left( \bigcap_{k=0}^n R_k^+ \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^n \Pi_k^+ \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^n H_k^+ \right).$$

Como:

$$\left( \bigcup_{k=0}^n \Pi_k^+ \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^n H_k^+ \right) \subset \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k^+ \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k^+ \right),$$

ficamos com:

$$\Phi \setminus \{0\} = \left( \bigcap_{k=0}^n R_k^+ \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k^+ \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k^+ \right).$$

E mais, se  $(v, \tau)$  não está nem em  $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k^+$  e nem em  $\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k^+$ , então  $(v, \tau) \in R^+$ . Então podemos fazer:

$$\Phi \setminus \{0\} = \left( \bigcap_{k=0}^{\infty} R_k^+ \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k^+ \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k^+ \right) = R^+ \cup \Pi^+ \cup H^+$$

e, analogamente:

$$\Phi \setminus \{0\} = R^- \cup \Pi^- \cup H^-.$$

Os conjuntos  $H_0^+$ ,  $H_0^-$ ,  $R_0^+$  e  $R_0^-$  são abertos e  $S : R_0^+ \cup \{0\} \rightarrow R_0^- \cup \{0\}$  é um homeomorfismo. Logo, por (2.26) e por (2.27), os conjuntos  $H_n^+$ ,  $H^+$ ,  $H_n^-$ ,  $R_n^+$  e  $R_n^-$  são abertos e os conjuntos  $R^+$  e  $R^-$  são do tipo  $G_\delta$ . O conjunto  $\Pi_0^+$  é fechado em  $\Phi$ , e então  $\Pi_0^+ \cap R_0^-$  é relativamente fechado em  $R_0^- \cup \{0\}$ , de onde  $\Pi_1^+ = S^{-1}(\Pi_0^+ \cap R_0^-)$  é relativamente fechado em  $S^{-1}(R_0^- \cup \{0\}) = R_0^+ \cup \{0\}$ . Mas então  $\Pi_0^+ \cup \Pi_1^+$  é fechado em  $\Phi$ , já que a fronteira de  $R_0^+ \cup \{0\}$  é  $\Pi_0^+$ . Por indução  $\Pi_0^+ \cup \Pi_1^+ \cup \dots \cup \Pi_n^+$  é fechado, e então  $\Pi^+$  é do tipo  $F_\delta$ . De forma semelhante, mostramos que  $\Pi_0^- \cup \Pi_1^- \cup \dots \cup \Pi_n^-$  é fechado e que  $\Pi^-$  é do tipo  $F_\delta$ .



Da proposição acima, todos os conjuntos em (2.26) e em (2.27) são mensuráveis segundo Lebesgue. A medida  $\mu = vdv d\tau$  é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, de onde os conjuntos em questão são mensuráveis com respeito a  $\mu$ .

Consideramos agora a decomposição do plano  $\Phi$  gerada pelas partições:

$$\Phi = \{0\} \cup R^+ \cup \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^+ \right] \cup \Pi_0^+ \cup \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^+ \right] \cup H_0^+ \quad (2.30)$$

e

$$\Phi = \{0\} \cup R^- \cup \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^- \right] \cup \Pi_0^- \cup \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^- \right] \cup H_0^-. \quad (2.31)$$

Nos conjuntos  $\Pi_0^+$  e  $H_0^+$  a aplicação  $S$  não está definida, e em  $\Pi_0^-$  e  $H_0^-$  a aplicação  $S^{-1}$  não está definida. Intersecções de pares de elementos das decomposições (2.30) e (2.31) são feitas de acordo com o seguinte esquema:

**Proposição 2.1.7.** *Para todo  $n \geq 1$  e  $m \geq 0$ :*

$$\begin{aligned} S(R^+ \cap R^-) &= R^+ \cap R^-, & S(R^+ \cap \Pi_m^-) &= R^+ \cap \Pi_{m+1}^-, \\ S(R^+ \cap H_m^-) &= R^+ \cap H_{m+1}^-, & S(H_n^+ \cap R^-) &= H_{n-1}^+ \cap R^-, \\ S(H_n^+ \cap \Pi_m^-) &= H_{n-1}^+ \cap \Pi_{m+1}^-, & S(H_n^+ \cap H_m^-) &= H_{n-1}^+ \cap H_{m+1}^-, \\ S(\Pi_n^+ \cap R^-) &= \Pi_{n-1}^+ \cap R^-, & S(\Pi_n^+ \cap \Pi_m^-) &= \Pi_{n-1}^+ \cap \Pi_{m+1}^-, \\ S(\Pi_n^+ \cap H_m^-) &= \Pi_{n-1}^+ \cap H_{m+1}^-. \end{aligned}$$

**demonstração:** Se uma dada solução  $x(t, v, \tau)$  retornaria  $k$  vezes ao plano  $x = 0$  para  $t > \tau$ , a solução  $x(t, v', \tau')$ , onde  $(v', \tau') = S(v, \tau)$ , retornará  $k - 1$  vezes ao plano  $x = 0$  para  $t > \tau'$ , o que faz com que  $S$  diminua os índices dos conjuntos  $H_n^+$  e  $\Pi_n^+$  das igualdades acima em 1. Analogamente, se a solução  $x(t, v, \tau)$  retornaria  $k$  vezes ao plano  $x = 0$  para  $t < \tau$ , a solução  $s(t, v', \tau')$  retornará  $k + 1$  vezes para  $t < \tau'$ , o que faz com que a aplicação de  $S$  nos conjuntos  $H_m^-$  e  $\Pi_m^-$  aumente seus índices em 1. Os

símbolos  $R$ ,  $H$  e  $\Pi$  não mudam, pois o fato de irmos de um zero da solução para outro não altera seu comportamento.

■

**Teorema 2.1.3.** *Quase todas as soluções que são oscilatórias para  $t \rightarrow -\infty$  também o são para  $t \rightarrow \infty$ . Quase todas as soluções que são hiperbólicas ou parabólicas para  $t \rightarrow -\infty$  também são parabólicas ou hiperbólicas para  $t \rightarrow \infty$ .*

**demonstração:** Se  $\mathfrak{S} = \infty$ , então  $\Phi \setminus \{0\} = R^+ = R^-$ , e temos a tese demonstrada, pelo teorema 2.1.1.

Consideremos então  $\mathfrak{S} < \infty$ . Pelo corolário 2.1.1,  $R_0^+$  e  $R_0^-$  estão contidos em discos de raios finitos. O mesmo vale para  $R^+$  e  $R^-$ , já que estes estão contidos em  $R_0^+$  e  $R_0^-$ , respectivamente. Seja:

$$B_m = R^+ \cap [H_m^- \cup \Pi_m^-], \quad m \geq 0.$$

Pela proposição 2.1.7:

$$\begin{aligned} S(B_m) &= S(R^+ \cap [H_m^- \cup \Pi_m^-]) = S(R^+) \cap S(H_m^- \cup \Pi_m^-) \\ &= R^+ \cap (H_{m+1}^- \cup \Pi_{m+1}^-) = B_{m+1}. \end{aligned}$$

Como  $S$  preserva a área, temos que  $B_m$  e  $B_{m+1}$  tem a mesma área, de onde  $\mu(B_m) = \mu(B_n)$ , para quaisquer  $m, n \geq 0$ .

Notemos agora que:

$$B_0 = R^+ \cap [H_0^- \cup \Pi_0^-] \subset H_0^- \cup \Pi_0^- \subset \Phi \setminus R_0^-$$

e, para  $m \geq 1$ :

$$B_m \subset H_m^- \cup \Pi_m^- \Rightarrow B_m \subset R_0^-,$$

o que nos dá:

$$B_0 \cap B_m = \emptyset, \quad \text{para } m \geq 1.$$

Portanto, para  $k > m$ , temos:

$$B_k \cap B_m = S(B_{k-1} \cap B_{m-1}) = S^m(B_{k-m} \cap B_0) = \emptyset. \quad (2.32)$$

Mas:

$$\begin{aligned} \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m &= R^+ \cap \left[ \bigcup_{m=0}^{\infty} (H_m^- \cup \Pi_m^-) \right] = R^+ \cap (H^- \cup \Pi^-) \\ &= R^+ \cap [\Phi \setminus (\{0\} \cup R^-)] = R^+ \setminus R^-. \end{aligned}$$

Então, utilizando (2.32):

$$\mu(R^+ \setminus R^-) = \mu\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} B_m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu(B_m).$$

Conforme já observamos,  $R^+$  e  $R^-$  estão contidos em discos de raios finitos, ou seja,  $\mu(R^+ \setminus R^-) < \infty$ . Então  $\sum_{m=0}^{\infty} \mu(B_m) < \infty$ . Disso, como  $\mu(B_m) = \mu(B_k)$ , para quaisquer  $m, k \geq 0$ , devemos ter  $\mu(B_m) = 0$ , para qualquer  $m \geq 0$ , isto é,  $\mu(R^+ \setminus R^-) = 0$ . Analogamente, mostramos que  $\mu(R^- \setminus R^+) = 0$ .

■

## 2.2 Propriedades diferenciais das funções

Nesta seção será feito um estudo detalhado das propriedades diferenciais das funções  $h(v, \tau)$  e  $S$ . Assumiremos que  $Q(x, t)$  satisfaz condições mais restritivas que as anteriores. Nós mantemos 1° e 2°, mas trocamos 3° por:

3° -  $Q(x, t) \geq q(x) > 0$  para todo  $x > 0$  e todo  $t$ .

A condição 4° permanece a mesma se  $\mathfrak{F} < \infty$ , mas caso contrário é substituída por:

4° - A derivada  $\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2}$  é contínua, e para todo  $t$  e  $x > 0$  nós temos:

$$\left| \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} \right| \leq \psi_1(x) \text{ e } \int_0^{\infty} x \psi_1(x) dx < \infty.$$

E impomos, também, as seguintes condições:

5° - Existe  $x^* > 0$  tal que a função:

$$\xi(x) = \sup_{x^* \leq y \leq x} \frac{\psi(x)}{q(x)q(y)} \begin{cases} \text{é limitada para } x \geq x^*, \text{ se } \mathfrak{F} < \infty, \\ = o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ conforme } x \rightarrow \infty, \text{ se } \mathfrak{F} = \infty. \end{cases}$$

6° - Tem-se  $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \leq 0$  para  $x \geq x^*$ .

**Lema 2.2.1.** Se 4° é satisfeita, então 4° também o é:

$$\left| \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \right| \leq \psi(x) = 2\pi\psi_1(x),$$

onde  $\int_0^\infty x\psi(x)dx < \infty$  e  $\int_x^\infty \psi(y)dy = o\left(\frac{1}{x}\right)$  conforme  $x \rightarrow \infty$ .

**demonstração:** Como  $Q(x,t)$  é  $2\pi$ -periódica em  $t$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} dt = 0.$$

Então:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} dt,$$

de onde:

$$\left| \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} dt \right|.$$

Existe  $\bar{t} \in [0, 2\pi]$  tal que:

$$2\pi \frac{\partial Q(x,\bar{t})}{\partial t} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} dt$$

e daí:

$$\left| \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial Q(x,\bar{t})}{\partial t} \right|.$$

Assim, pelo teorema do valor médio, existe  $\hat{t} \in [0, 2\pi]$  tal que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \right| &= \left| \frac{\partial^2 Q(x,\hat{t})}{\partial t^2} \right| |\bar{t} - t| \\ &\leq 2\pi \left| \frac{\partial^2 Q(x,\hat{t})}{\partial t^2} \right| \leq 2\pi\psi_1(x). \end{aligned}$$

Fazendo  $\psi(x) = 2\pi\psi_1(x)$ , obtemos 4°.

Por 4°,  $\int_0^\infty x \frac{\psi(x)}{2\pi} dx = \int_0^\infty x\psi_1(x)dx < \infty$ . Então  $\int_0^\infty x\psi(x)dx < \infty$ , e assim:

$$\int_x^\infty \psi(y)dy = \frac{1}{x} \int_x^\infty \psi(y)dy \leq \frac{1}{x} \int_x^\infty y\psi(y)dy = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

■

Os resultados anteriores tocantes à continuidade de  $X^\pm(v, \tau)$  e  $T^\pm(v, \tau)$  ainda continuam válidos. Soma-se a esses:

**Proposição 2.2.1.** *As funções  $X^+(v, \tau)$  e  $T^+(v, \tau)$  pertencem a  $C^1(R_0^+)$ . Se  $\tau$  é limitado inferiormente, então:*

$$\lim_{X^+ \rightarrow \infty} T^+(v, \tau) = \infty, \quad \lim_{X^+ \rightarrow \infty} \tau' = \infty. \quad (2.33)$$

**demonstração:**  $X^+(v, \tau)$  e  $T^+(v, \tau)$  satisfazem:

$$\begin{cases} x(T^+(v, \tau), v, \tau) - X^+(v, \tau) = 0, \\ \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau) = 0. \end{cases}$$

Definimos  $F(X^+, T^+, v, \tau) = (x(T^+(v, \tau), v, \tau) - X^+(v, \tau), \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau))$ . Seu jacobiano será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(X^+, T^+, v, \tau)}{\partial(X^+, T^+)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial(x(T^+(v, \tau), v, \tau) - X^+(v, \tau))}{\partial X^+} & \frac{\partial(x(T^+(v, \tau), v, \tau) - X^+(v, \tau))}{\partial T^+} \\ \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial X^+} & \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial T^+} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau) \\ 0 & \ddot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau) \end{vmatrix} = -\ddot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau) \\ &= Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau)). \end{aligned}$$

Então, por  $3^{\circ\circ}$ ,  $\frac{\partial F(X^+, T^+, v, \tau)}{\partial(X^+, T^+)} \neq 0$ . Assim, podemos aplicar o teorema da função implícita. Fixemos  $(\bar{v}, \bar{\tau})$  e sejam  $\bar{X}^+ = X^+(\bar{v}, \bar{\tau})$  e  $\bar{T}^+ = T^+(\bar{v}, \bar{\tau})$ . Pelo teorema da função implícita, existem abertos  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ , com  $(\bar{v}, \bar{\tau}) \in \mathcal{U}$  e  $(\bar{X}^+, \bar{T}^+) \in \mathcal{V}$  e uma única função  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  com  $g(\bar{v}, \bar{\tau}) = (\bar{X}^+, \bar{T}^+)$ , tal que  $F(g(v, \tau), v, \tau) = 0$  para qualquer  $(v, \tau) \in \mathcal{U}$ . Pela unicidade de  $g$ ,  $(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau)) = g(v, \tau)$ . Como  $F$  é continuamente diferenciável em  $R_0^+$ , então  $X^+$  e  $T^+$  também o são. Se denotarmos a diferenciação com respeito a  $v$  ou  $\tau$  por  $\delta$ , teremos, de  $x(T^+(v, \tau), v, \tau) - X^+(v, \tau) = 0$ :



$$\delta X^+(v, \tau) = \delta x(T^+(v, \tau), v, \tau) \quad (2.34)$$

De  $\dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau) = 0$ , temos:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial T^+} \delta T^+ + \delta \dot{x} = 0 \Rightarrow \delta T^+ = -\delta \dot{x} \frac{1}{\ddot{x}},$$

isto é:

$$\delta T^+(v, \tau) = \frac{\delta \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))}. \quad (2.35)$$

Por 6º, temos que:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \leq 0$$

para  $x \geq x^*$ , isto é, para cada  $t$  fixado,  $Q(x, t)$  é limitada, já que  $Q(x, t)$  é ímpar. Como  $Q(x, t)$  é  $2\pi$ -periódica, podemos considerar que  $t \in [0, 2\pi]$ , e concluímos que  $Q(x, t)$  é limitada superiormente. Aí, a proposição 2.1.2 mostra a validade de (2.33).

■

Lembremos que em  $\Phi$  nós identificamos valores de  $\tau$  que diferem por  $2\pi$ . Como  $T^+(v, \tau + 2\pi) = T^+(v, \tau) + 2\pi$ , podemos considerar também  $T^+$  como pertencente ao intervalo  $[0, 2\pi]$ . Consideremos o anel:

$$\mathcal{K}^\pm = \{(h^\pm, T^\pm) : 0 < h^\pm < \mathfrak{S}, T^\pm = T^\pm(\text{mod} 2\pi)\} \quad (2.36)$$

**Proposição 2.2.2.** *A aplicação  $P^+ : R_0^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$  definida por:*

$$P^+(v, \tau) = (h^+(v, \tau), T^+(v, \tau)(\text{mod} 2\pi))$$

*é um difeomorfismo.*

**demonstração:** Em  $R_0^+$ :

$$h^+(v, \tau) = \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x) dx,$$

onde, por 3º:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x, t) dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x) dt = q(x) > 0,$$

e disso concluímos que os valores assumidos por  $h^+(v, \tau)$  em  $(0, \mathfrak{S})$  apresentam uma correspondência biúnivoca com os valores assumidos por  $X^+(v, \tau)$  em  $(0, \infty)$ .

Agora, como:

$$\begin{cases} x(T^+, v, \tau) - X^+ = 0 \\ \dot{x}(T^+, v, \tau) = 0 \end{cases},$$

temos que o par  $(X^+, T^+)$  determina uma solução  $x(t)$  do problema. E esta solução determina um  $\tau$  pela condição:

$$\begin{cases} x(\tau) = 0, \\ \dot{x}(t) > 0 \text{ para } \tau < t < T^+. \end{cases}$$

E, finalmente, determinamos  $v = \dot{x}(\tau)$ . Assim,  $P^+ : R_0^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$  é uma bijeção.

Para mostrarmos que  $P^+ : R_0^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$  é um difeomorfismo nos resta provar apenas que é um difeomorfismo local. Calculemos, para tanto, o seu jacobiano:

$$\frac{\partial(h^+, T^+)}{\partial(v, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h^+(v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial h^+(v, \tau)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial T^+(v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial T^+(v, \tau)}{\partial \tau} \end{vmatrix}.$$

De  $h^+(v, \tau) = \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(x) dx$ , temos que:

$$\delta h^+(v, \tau) = Q_0(X^+(v, \tau)) \delta X^+(v, \tau).$$

Por (2.34):

$$\delta h^+(v, \tau) = Q_0(X^+(v, \tau)) \delta x(T^+(v, \tau), v, \tau). \quad (2.37)$$

E, lembrando (2.35):

$$\delta T^+(v, \tau) = \frac{\dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))}.$$

Assim, o jacobiano acima fica:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(h^+, T^+)}{\partial(v, \tau)} &= \left| \begin{array}{cc} Q_0(X^+(v, \tau)) \frac{\partial X^+(v, \tau)}{\partial v} & Q_0(X^+(v, \tau)) \frac{\partial X^+(v, \tau)}{\partial \tau} \\ \frac{1}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))} \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial v} & \frac{1}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))} \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial \tau} \end{array} \right| \\
&= \frac{Q_0(X^+(v, \tau))}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X^+(v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial X^+(v, \tau)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial \tau} \end{array} \right| \\
&= \frac{Q_0(X^+(v, \tau))}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial x(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial \tau} \end{array} \right|.
\end{aligned}$$

Na última passagem acima utilizamos (2.34).

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(h^+, T^+)}{\partial(v, \tau)} &= \frac{Q_0(X^+(v, \tau))}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial x(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau)}{\partial \tau} \end{array} \right| \\
&= \frac{Q_0(X^+(v, \tau))}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))} \frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(v, \tau)} \Big|_{t=T^+(v, \tau)}.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que  $\frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(v, \tau)}$  é constante em relação a  $t$ . Para isso, notemos primeiramente que, por (2.2):

$$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial v} = - \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v}$$

e

$$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial \tau} = - \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau}.$$

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(v, \tau)} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial \dot{x}}{\partial v} \right) \\
&= \frac{\partial \dot{x}}{\partial v} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \tau} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial \tau} \frac{\partial \dot{x}}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial v} \\
&= \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial v} \\
&= -\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.
\end{aligned}$$

Temos então que:

$$\frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(v, \tau)} \Big|_{t=T^+(v, \tau)} = \frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(v, \tau)} \Big|_{t=\tau}.$$

Calculemos pois o valor desse determinante. Para isso, observamos que:

$$x(\tau, v, \tau) \equiv 0 \quad (2.38)$$

e

$$\dot{x}(\tau, v, \tau) \equiv v. \quad (2.39)$$

Por (2.38) temos que:

$$\frac{\partial x(\tau, v, \tau)}{\partial \tau} + v = 0, \quad \frac{\partial x(\tau, v, \tau)}{\partial v} = 0,$$

e de (2.39) temos:

$$\frac{\partial \dot{x}(\tau, v, \tau)}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial \dot{x}(\tau, v, \tau)}{\partial \tau} = 0.$$

Então ficamos com:

$$\frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(v, \tau)} \Big|_{t=\tau} = \begin{vmatrix} 0 & -v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = v > 0,$$

isto é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(h^+, T^+)}{\partial(v, \tau)} &= \frac{Q_0(X^+(v, \tau))}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))} \frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(v, \tau)} \Big|_{t=\tau} \\
&= \frac{Q_0(X^+(v, \tau))}{Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau))} v > 0.
\end{aligned}$$

Logo,  $P^+ : R_0^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$  é um difeomorfismo local e, como é uma bijeção, é um difeomorfismo.

■

**Corolário 2.2.1.** *A função  $h^+(v, \tau)$  pertence a  $C^1(R_0^+)$ , seu gradiente  $\nabla h^+$  não se anula, e as curvas de nível  $h^+(v, \tau) = C$ ,  $0 < C < \mathfrak{S}$ , são difeomorfas ao círculo. Se seguirmos uma curva de nível por uma volta na direção positiva,  $T^+(v, \tau)$  aumentará de  $2\pi$ , sendo estritamente crescente.*

**demonstração:** Como  $P^+(v, \tau) \in C^1(R_0^+)$ , então  $h^+(v, \tau) \in C^1(R_0^+)$ . Se tivéssemos  $\nabla h^+(v, \tau) = 0$ , teríamos também  $\frac{\partial P^+(v, \tau)}{\partial(v, \tau)} = 0$ , e vê-se que isso é falso na demonstração da proposição 2.2.2.

Consideremos a curva de nível  $\gamma = \{(v, \tau) : h^+(v, \tau) = C\}$ . Então  $P^+(\gamma) = \{(C, T^+(v, \tau)(\text{mod}2\pi)) : h^+(v, \tau) = C\}$ .

Sejam  $(v_1, \tau_1), (v_2, \tau_2) \in \gamma$ . Como  $P^+(v, \tau)$  é injetora e  $h^+(v_1, \tau_1) = h^+(v_2, \tau_2) = C$ , temos que  $T^+(v_1, \tau_1)(\text{mod}2\pi) \neq T^+(v_2, \tau_2)(\text{mod}2\pi)$ , isto é,  $T^+(v, \tau)$  é injetora sobre as curvas de nível, o que mostra que o crescimento ou decréscimo deve ser estrito. O fato de  $T^+(v, \tau)$  crescer no sentido positivo sobre a curva de nível e aumentar de  $2\pi$  em uma volta vem diretamente de  $T^+(v, \tau + 2\pi) = T^+(v, \tau) + 2\pi$

Suponhamos que não exista  $(v, \tau)$  tal que  $h^+(v, \tau) = C$  e  $T^+(v, \tau)(\text{mod}2\pi) = a \in [0, 2\pi)$ . Isso significa que não existe  $(v, \tau)$  tal que  $P^+(v, \tau) = (C, a)$ , o que é falso, posto que  $P^+(v, \tau)$  é uma função sobrejetora. Então  $P^+(\gamma) = \{(C, T^+(v, \tau)(\text{mod}2\pi)) : h^+(v, \tau) = C\}$  é tal que  $T^+(v, \tau)(\text{mod}2\pi)$  assume todos os valores do intervalo  $[0, 2\pi)$ , isto é,  $P^+(\gamma)$  é um conjunto difeomorfo ao círculo. Como  $P^+(v, \tau)$  é um difeomorfismo,  $\gamma$  é um conjunto difeomorfo ao círculo.

■

Para as funções  $X^-(v, \tau)$ ,  $T^-(v, \tau)$  e  $h^-(v, \tau)$  valem versões com “menos” das proposições 2.2.1 e 2.2.2 e do corolário 2.2.1. Nota-se que em algumas fórmulas há mudança de sinais:

$$\delta X^-(v, \tau) = -\delta x(T^-(v, \tau), v, \tau), \quad (2.40)$$

$$\delta T^-(v, \tau) = -\frac{\delta \dot{x}(T^-(v, \tau), v, \tau)}{Q(X^-(v, \tau), T^-(v, \tau))}. \quad (2.41)$$

$$\delta h^-(v, \tau) = -Q_0(X^-(v, \tau))\delta X^-(v, \tau). \quad (2.42)$$

**Corolário 2.2.2.**  $S = (P^-)^{-1} \circ P^+$ .

**demonstração:** Pela proposição 2.23:

$$\begin{aligned} P^+(v, \tau) &= (h^+(v, \tau), T^+(v, \tau)(\text{mod}2\pi)) \\ &= (h^-(v', \tau'), T^-(v', \tau')(\text{mod}2\pi)) \\ &= P^-(v', \tau') = (P^- \circ S)(v, \tau). \end{aligned}$$

■

Se  $\mathfrak{S} = \int_0^\infty Q_0(x)dx < \infty$ , então  $R_0^+$  e  $R_0^-$  não ocupam totalmente  $\Phi \setminus \{0\}$ , e então a informação fornecida pelo corolário 2.2.1 não é suficiente. Se  $\mathfrak{S} = \infty$  e  $R_0^+ = R_0^- = \Phi \setminus \{0\}$ , nós precisamos de informações sobre o comportamento assintótico de  $h^+(v, \tau)$  conforme  $v \rightarrow \infty$ . A expressão “uniformemente em  $\tau$ ” vai sempre significar que  $\tau$  varia sobre um período fixo, por exemplo,  $\tau \in [0, 2\pi]$ .

**Nota 2.** *Como todos os argumentos valerão tanto para o passado como para o futuro, os índices  $\pm$  serão frequentemente omitidos.*

Como antes,  $V(y, v, \tau)$  denotará a magnitude da velocidade  $\dot{x}$  da solução  $x(t, v, \tau)$  no instante de tempo  $t(y, v, \tau)$  no qual a solução vale  $y$ . Essas funções são diferenciáveis em  $0 \leq y < X(v, \tau)$ , e suas derivadas com respeito a  $y$  são dadas por (2.15) e (2.17). Sendo  $V(y, v, \tau) \geq 0$ , uma melhor expressão para esta grandeza, independente dos índices  $\pm$ , é:

$$V(y, v, \tau) = \begin{cases} |\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)|, & \text{se } y \in [0, X(v, \tau)], \\ 0, & \text{se } y \in (X(v, \tau), \infty). \end{cases} \quad (2.43)$$

**Lema 2.2.2.** 1) Se  $0 \leq y \leq X(v, \tau)$ , então:

$$V(y, v, \tau) \geq \left[ 2 \int_y^{X(v, \tau)} q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}}.$$

2) Se  $x^* \leq \left\{ \begin{array}{l} x_0 \\ x_1 \end{array} \right\} \leq x_2 \leq X(v, \tau)$ , onde  $x^*$  é o número em  $5^\circ$ , então:

$$\int_{x_0}^{x_2} \psi(s) \left[ \int_{x_1}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] ds \leq \max_{x_0 \leq s \leq x_2} \xi(s) \left[ 2 \int_{x_0}^{X(v, \tau)} q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.44)$$

3) Conforme  $v \rightarrow \infty$  no intervalo  $0 \leq y \leq o(v^2)$  nós temos a fórmula assintótica:

$$V(y, v, \tau) = v - o(v),$$

com um resto que é uniforme em  $\tau$ .

4) Se  $\mathfrak{S} = \infty$ , então, conforme  $v \rightarrow \infty$ :

$$\theta(v, \tau) = \int_0^{X(v, \tau)} \psi(y) \left[ \int_0^y \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] dy = o\left(\frac{1}{v}\right)$$

uniformemente em  $\tau$ .

**demonstração:** Por (2.17):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) = V \frac{\partial V}{\partial y} = V \left( -\frac{Q}{V} \right) = -Q(y, t(y, v, \tau)),$$

e então:

$$\begin{aligned} \frac{(V(y, v, \tau))^2}{2} - \int_y^X Q(\sigma, t) d\sigma &= \frac{(V(y, v, \tau))^2}{2} + \int_y^X \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) d\sigma \\ &= \frac{(V(y, v, \tau))^2}{2} + \lim_{\sigma \rightarrow X} \frac{(V(\sigma, v, \tau))^2}{2} - \frac{(V(y, v, \tau))^2}{2} \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow X} \frac{(V(\sigma, v, \tau))^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{(V(y, v, \tau))^2}{2} - \int_y^X Q(\sigma, t) d\sigma \geq 0 \Rightarrow \frac{(V(y, v, \tau))^2}{2} \geq \int_y^X Q(\sigma, t) d\sigma.$$

Utilizando 3º:

$$\frac{(V(y, v, \tau))^2}{2} \geq \int_y^X q(\sigma) d\sigma,$$

isto é,

$$V(y, v, \tau) \geq \left[ 2 \int_y^{X(v, \tau)} q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}},$$

o que demonstra a primeira parte do lema.

Provemos agora a segunda parte. Assumamos  $x^* \leq x_1 \leq \sigma \leq s$ . Por 5º temos:

$$\xi(x) = \sup_{x^* \leq y \leq x} \frac{\psi(x)}{q(y)q(x)}.$$

Então:

$$\psi(s) \leq \xi(s)q(s)q(y), \text{ para qualquer } y \in [x^*, x].$$

Como nenhuma dessas funções assumem valores negativos, temos que:

$$\psi(s) \leq \int_{x_1}^s \xi(s)q(s)q(y)dy.$$

Logo:



$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_2} \psi(s) \left[ \int_{x_1}^s \frac{d\sigma}{\left(2 \int_y^X q(\eta) d\eta\right)^{\frac{3}{2}}} \right] ds \\
& \leq \int_{x_0}^{x_2} \xi(s) q(s) \left[ \int_{x_1}^s \frac{d\sigma}{\left(2 \int_y^X q(\eta) d\eta\right)^{\frac{3}{2}}} \right] ds \\
& = \int_{x_0}^{x_2} \xi(s) q(s) \left\{ \frac{1}{\left[2 \int_s^X q(\eta) d\eta\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[2 \int_{x_1}^X q(\eta) d\eta\right]^{\frac{1}{2}}} \right\} ds \\
& \leq \int_{x_0}^{x_2} \xi(s) q(s) \frac{1}{\left[2 \int_s^X q(\eta) d\eta\right]^{\frac{1}{2}}} ds \\
& \leq \max_{x_0 \leq x \leq x_2} \xi(s) \int_{x_0}^{x_2} \frac{q(s)}{\left[2 \int_s^X q(\eta) d\eta\right]^{\frac{1}{2}}} ds \\
& \leq \max_{x_0 \leq x \leq x_2} \xi(s) \int_{x_0}^{X(v, \tau)} \frac{q(s)}{\left[2 \int_s^X q(\eta) d\eta\right]^{\frac{1}{2}}} ds \\
& = \max_{x_0 \leq x \leq x_2} \xi(s) \left[ 2 \int_{x_0}^X q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} ds,
\end{aligned}$$

o que demonstra a segunda parte do lema.

Provemos agora a terceira parte. Seja  $[0, y^*(v, \tau)]$  o maior intervalo em que  $V^*(y, v, \tau) \geq \frac{y}{2}$ . Na demonstração da proposição 2.2.1 mostramos que  $Q(x, t)$  é limitada superiormente, digamos por  $\hat{Q}$ .

Seja  $\varphi(v)$  uma função arbitrária que vai a zero quando  $v \rightarrow \infty$ . Para  $y$  que satisfaz:

$$0 \leq y \leq v^2 \varphi(v), \quad 0 \leq y \leq y^* \quad (2.45)$$

temos que:

$$\begin{aligned}
V(y, v, \tau) &= v - \int_0^y \frac{\partial V(\sigma, v, \tau)}{\partial y} d\sigma \\
&= v - \int_0^y \frac{Q(\sigma, t)}{V(\sigma, v, \tau)} d\sigma \\
&\geq v - \int_0^y \frac{\hat{Q}}{\frac{v}{2}} d\sigma = v - \frac{2\hat{Q}}{v} y \\
&\geq v - \frac{2}{v} \hat{Q} v^2 \varphi(v) = v(1 - 2\hat{Q}\varphi(v)).
\end{aligned}$$

Se  $v$  é suficientemente grande para que tenhamos  $\varphi(v) < \frac{1}{6\hat{Q}}$ , então:

$$V(y, v, \tau) \geq v \left(1 - 2\hat{Q} \frac{1}{6\hat{Q}}\right) = v \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2v}{3}.$$

Temos que  $V(y^*, v, \tau) = \frac{v}{2} < \frac{2v}{3}$ , e por isso a primeira condição em (2.45) é violada antes da segunda, isto é,  $v^2\varphi(v) < y^*$  e:

$$v \geq V(y, v, \tau) > v - 2\hat{Q}\varphi(v) = v - o(v),$$

o que prova a terceira parte.

Resta-nos somente mostrar a quarta parte.

Sendo  $\xi(y)$  a função em 5º, coloquemos:

$$\hat{\xi}(x) = \sup_{y \geq x} \xi(y), \quad v(x) = 4 \sqrt{\frac{x}{\hat{\xi}(x)}}$$

Quando  $x \rightarrow \infty$  tem-se que  $v(x) \rightarrow \infty$ . Se  $\varphi = v^{-1}$ , então  $x = \varphi(v) \rightarrow \infty$  conforme  $v \rightarrow \infty$ . Por 5º, se  $\mathfrak{S} = \infty$ , então  $\xi(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$  e  $\hat{\xi}(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$  quando  $x \rightarrow \infty$ , e:

$$\begin{aligned}
\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\varphi(v)}{v^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(v(x))}{(v(x))^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(v(x))^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{x}{\hat{\xi}(x)}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\hat{\xi}(x)}{\frac{1}{x}}} = 0
\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
\lim_{v \rightarrow \infty} v^2 \hat{\xi}(\varphi(v)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (v(x))^2 \hat{\xi}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x}{\hat{\xi}(x)}} \hat{\xi}(x) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x \hat{\xi}(x)} = 0.
\end{aligned}$$

Agora, temos:

$$\begin{aligned}
\theta(v, \tau) &= \int_0^{X(v, \tau)} \psi(y) \left[ \int_0^y \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] dy \\
&= \int_0^{X(v, \tau)} \psi(y) \left[ \int_0^{\varphi(v)} \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] dy + \int_0^{X(v, \tau)} \psi(y) \left[ \int_{\varphi(v)}^y \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] dy \\
&= \int_0^{X(v, \tau)} \psi(y) \left[ \int_0^{\varphi(v)} \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] dy + \int_{\varphi(v)}^{X(v, \tau)} \psi(y) \left[ \int_{\varphi(v)}^y \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] dy \\
&\leq \int_0^\infty \psi(y) \left[ \int_0^{\varphi(v)} \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] dy + \int_{\varphi(v)}^{X(v, \tau)} \psi(y) \left[ \int_{\varphi(v)}^y \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] dy.
\end{aligned}$$

Analisemos, pois, essas duas integrais que limitam  $\theta(v, \tau)$ . Como  $\varphi(v) = o(v^2)$ , pois já mostramos que  $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\varphi(v)}{v^2} = 0$ , segue do que já mostramos que  $V(\sigma) = v - o(v)$  e:

$$\int_0^\infty \psi(y) dy \int_0^{\varphi(v)} \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} = O\left(\frac{\varphi(v)}{v^3}\right) = o\left(\frac{1}{v}\right).$$

Quanto à segunda integral, usemos (2.44):

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(v)}^{X(v, \tau)} \psi(y) \left[ \int_{\varphi(v)}^y \frac{d\sigma}{(V(\sigma, v, \tau))^3} \right] dy &\leq \max_{\varphi(v) \leq s \leq X} \xi(s) \left[ 2 \int_{\varphi(v)}^X q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left| \sup_{\varphi(v) \leq s} \xi(s) \right| \left[ 2 \int_{\varphi(v)}^X q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \hat{\xi}(\varphi(v)) \left[ 2 \int_0^X q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Utilizando (2.14):

$$\begin{aligned}
h(v, \tau) - \int_0^X Q(x) dx &\leq \frac{v^2}{2} - \int_0^Z q(\sigma) d\sigma \\
&\Rightarrow \int_0^Z q(\sigma) d\sigma + h(v, \tau) - \int_0^X Q(x) dx \leq \frac{v^2}{2}.
\end{aligned}$$

Mas no presente caso temos  $\mathfrak{S} = \infty$ , então  $h(v, \tau) = \int_0^X Q_0(x) dx$ , e a desigualdade acima fica:

$$2 \int_0^X q(\sigma) d\sigma \leq v^2.$$

Então:

$$\int_{\varphi}^X \psi(x) \left[ \int_{\varphi(v)}^x \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} \right] dx \leq \hat{\xi}(\varphi(v))v = o\left(\frac{1}{v}\right),$$

pois já provamos que  $\hat{\xi}(\varphi(v)) = o\left(\frac{1}{v^2}\right)$ .

■

**Lema 2.2.3.** *Se  $\xi(x)$ ,  $\eta(x)$ ,  $a(x)$  e  $b(x)$  são não negativas em  $[x_0, X)$ , onde  $\xi(x)$  e  $\eta(x)$  são absolutamente contínuas e  $a(x)$  e  $b(x)$  são integráveis em cada intervalo  $[x_0, x] \subset [x_0, X)$ ,  $\xi_0 = \xi(0)$ ,  $\eta_0 = \eta(x_0)$ , e se*

$$\xi'(x) \leq a(x)\eta(x), \quad \eta'(x) \leq b(x)\xi(x),$$

então para  $x_0 \leq x < X$  nós temos:

$$\xi(x) \leq \left[ \xi_0 + \eta_0 \int_{x_0}^x a(s) ds \right] \exp \left[ \int_{x_0}^x a(s) \int_{x_0}^s b(\sigma) d\sigma ds \right] \quad (2.46)$$

e

$$\eta(x) \leq \eta_0 + \left[ \xi_0 + \eta_0 \int_{x_0}^x a(s) ds \right] \int_{x_0}^x b(s) ds \cdot \exp \left[ \int_{x_0}^x a(s) \int_{x_0}^s b(\sigma) d\sigma ds \right]. \quad (2.47)$$

**demonstração:** Seja:

$$g(x) = \max_{x_0 \leq y \leq x} \xi(y).$$

Então:

$$\eta(x) \leq \eta_0 + \int_{x_0}^x b(s)\xi(s) ds \leq \eta_0 + g(x) \int_{x_0}^x b(s) ds, \quad (2.48)$$

de onde:

$$\begin{aligned}\xi'(x) &\leq a(x)\eta(x) \leq a(x) \left[ \eta_0 + g(x) \int_{x_0}^x b(s) ds \right] \\ &= a(x)\eta_0 + a(x)g(x) \int_{x_0}^x b(s) ds.\end{aligned}$$

Com isso:

$$\begin{aligned}g(x) &= \max_{x_0 \leq y \leq x} \xi(y) = \max_{x_0 \leq y \leq x} \left[ \xi_0 + \int_{x_0}^y \xi'(s) ds \right] \\ &\leq \max_{x_0 \leq y \leq x} \left[ \xi_0 + \eta_0 \int_{x_0}^x a(s) ds + \int_{x_0}^y a(s)g(s) \int_{x_0}^s b(\sigma) d\sigma ds \right] \\ &\leq \xi_0 + \eta_0 \int_{x_0}^x a(s) ds + \int_{x_0}^x a(s)g(s) \int_{x_0}^s b(\sigma) d\sigma ds.\end{aligned}$$

Por um lema de Bellman-Gronwall:

$$g(x) \leq \left[ \xi_0 + \eta_0 \int_{x_0}^x a(s) ds \right] \exp \int_{x_0}^x a(s) \int_{x_0}^s b(\sigma) d\sigma ds.$$

Isso prova (2.46), e substituindo-a em (2.48) obtemos (2.47). ■

**Lema 2.2.4.** As derivadas parciais  $\frac{\partial h(y,v,\tau)}{\partial v}$  e  $\frac{\partial h(y,v,\tau)}{\partial \tau}$  de

$$h(y, v, \tau) = \begin{cases} \frac{(V(y,v,\tau))^2}{2} + \int_0^y Q_0(\xi) d\xi, & 0 \leq y \leq X(v, \tau), \\ \int_0^{X(v,\tau)} Q_0(\xi) d\xi, & X(v, \tau) \leq y < \infty. \end{cases} \quad (2.49)$$

são contínuas com respeito a  $(y, v, \tau)$  na região  $\{v > 0, y \neq X(v, \tau)\}$ , e na superfície  $y = X(v, \tau)$  elas têm valores por ambos os lados, para  $v > 0$ , que são contínuos e, em geral, distintos.

**demonstração:** Lembrando que:

$$h(v, \tau) = \begin{cases} \frac{v_{\infty}^2}{2} + \int_0^y Q_0(\xi) d\xi, & 0 \leq y \leq X(v, \tau) \\ \int_0^{X(v,\tau)} Q_0(\xi) d\xi, & X(v, \tau) \leq y < \infty \end{cases},$$

se  $y > X(v, \tau)$  tem-se que  $h(y, v, \tau) \equiv h(v, \tau)$  e

$$\delta h(y, v, \tau) = \delta h(v, \tau) = Q_0(X(v, \tau))\delta X(v, \tau),$$

onde, como antes,  $\delta$  denota a derivação com respeito a  $v$  ou  $\tau$ .

Essas derivadas são contínuas pelo corolário 2.2.1, e tem valor limite para  $y \rightarrow X(v, \tau)$  dado por:

$$\delta h_+ = Q_0(y)\delta X(v, \tau), \quad y = X(v, \tau). \quad (2.50)$$

Agora, consideremos as identidades:

$$\begin{cases} x(t(y, v, \tau), v, \tau) \equiv y \\ \dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau) \equiv V(y, v, \tau) \end{cases} ,$$

Diferenciando a primeira:

$$\dot{x}\delta t + \delta x = 0 \Rightarrow \delta t = -\frac{\delta x}{\dot{x}} = -\frac{\delta x}{V},$$

concluimos, diferenciando a segunda, que, para  $0 \leq y < X(v, \tau)$ :

$$\begin{aligned} \delta V &= \ddot{x}\delta t + \delta \dot{x} = -Q\delta t + \delta \dot{x} \\ &= \frac{Q\delta x}{V} + \delta \dot{x}. \end{aligned}$$

De onde:

$$\delta h(y, v, \tau) = V(y, v, \tau)\delta V(y, v, \tau) = Q(y, t(y, v, \tau))\delta x + V(y, v, \tau)\delta \dot{x}.$$

Assim, essas derivadas são também contínuas para  $0 \leq y < X(v, \tau)$ , e temos seu limite para  $y \rightarrow X(v, \tau)$ :

$$\delta h_- = Q(y, T(v, \tau))\delta X(v, \tau), \quad y = X(v, \tau), \quad (2.51)$$

já que para  $y = X(v, \tau)$  a função  $t(y, v, \tau)$  vale  $T(v, \tau)$ ,  $V(y, v, \tau) = 0$  e  $\delta x = \delta X$  por (2.34). Deve-se fazer aqui uma observação. O cálculo de  $\delta V$  acima foi feito como se tivéssemos o índice +, pois caso contrário teríamos  $\delta V = -\ddot{x}\delta t - \delta \dot{x} = -\frac{Q\delta x}{V} - \delta \dot{x}$ , por (2.43). No entanto, pela diferença de sinais entre (2.34) e (2.40) o limite  $\delta h_-$  é o mesmo nos dois casos.

Comparando (2.50) com (2.51) vemos que, ao atravessar a superfície  $y = X(v, \tau)$ ,  $\delta h(y, v, \tau)$  sofre um salto de magnitude dado por:

$$\begin{aligned}\Delta &= |\delta h_+ - \delta h_-| = |[Q(y, T(v, \tau)) - Q_0(y)]\delta X| \\ &= \left| \left[ \frac{Q(y, T) - Q_0(y)}{Q(y, T)} \right] \delta h_- \right|.\end{aligned}$$

Usando agora o lema 2.1.1:

$$\Delta \leq \left| \frac{2\pi\psi(y)}{Q(y, T)} \delta h_- \right|.$$

Tomando  $q(y)$  dada por 3º:

$$\Delta \leq \left| \frac{2\pi\psi(y)}{q(y)} \delta h_- \right|.$$

Sendo  $\xi(y)$  a função dada por 5º :

$$\begin{aligned}\xi(y) &= \sup_{x^* \leq z \leq x} \frac{\psi(x)}{q(z)q(x)} \\ \Rightarrow \xi(x) &\geq \frac{\psi(x)}{(q(x))^2} \Rightarrow \psi(x) \leq \xi(x)(q(x))^2.\end{aligned}$$

E então temos uma estimativa para  $\Delta$ :

$$\Delta \leq 2\pi\xi(y)q(y)|\delta h_-|, \quad y = X(v, \tau). \quad (2.52)$$

■

**Teorema 2.2.1.** *A função  $h(v, \tau)$  pertence  $C^1(\Phi \setminus \{0\})$ . Seu gradiente é não degenerado. Então as curvas de nível  $h(v, \tau) = C > 0$  são curvas de Jordan suaves.*

**demonstração:**

Como na demonstração da proposição 2.1.3 é natural considerarmos o limite  $\lim_{y \rightarrow \infty} h(y, v, \tau) = h(v, \tau)$ . No entanto, há aqui uma complicação: o salto que  $\delta h(y, v, \tau)$  sofre na superfície  $y = X(v, \tau)$ .

Se  $0 \leq y < X(v, \tau)$ , então:

$$\frac{\partial h(y, v, \tau)}{\partial y} = V(y, v, \tau) \frac{\partial V(y, v, \tau)}{\partial y} + Q_0(y).$$

Mas:

$$V(y, v, \tau) = |\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)|$$

nos dá que:

$$\frac{\partial V(y, v, \tau)}{\partial y} = \pm \ddot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau) \frac{\partial t(y, v, \tau)}{\partial y},$$

onde o sinal  $\pm$  vem da diferença entre os casos  $h^+$  e  $h^-$ . Mas  $\frac{\partial t}{\partial y}$  é dada por (2.15):

$$\frac{\partial t(y, v, \tau)}{\partial y} = \frac{1}{\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)} = \frac{1}{\pm V(y, v, \tau)},$$

com a mesma justificativa para  $\pm$ . Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(y, v, \tau)}{\partial y} &= V(y, v, \tau) (\pm \ddot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)) \left( \frac{1}{\pm V(y, v, \tau)} \right) + Q_0(y) \\ &= \ddot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau) + Q_0(y) = Q_0(y) - Q(y, t(y, v, \tau)). \end{aligned}$$

Pelos resultados acima, temos que, para  $0 \leq y < X(v, \tau)$ ,  $h(y, v, \tau)$  e  $t(y, v, \tau)$  satisfazem um sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dy} = Q_0(y) - Q(y, t), \\ \frac{dt}{dy} = \frac{1}{V}, \end{cases}$$

onde  $V(y, v, \tau) = [2(h(y, v, \tau) - \int_0^y Q_0(\xi) d\xi)]^{\frac{1}{2}}$ .

Se aplicarmos a o operador derivativo  $\delta$  (derivada com relação a  $v$  ou  $\tau$ ) na primeira equação:

$$\frac{d}{dy} \delta h = - \frac{\partial Q(y, t)}{\partial t} \delta t.$$

Se aplicarmos  $\delta$  na segunda equação:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \delta t &= - \frac{\delta V}{V^2} = - \frac{V \delta V}{V^3} \\ &= - \frac{\delta h}{V^3}. \end{aligned}$$



Então, denotando a derivada com relação a  $y$  por  $'$ , chegamos ao seguinte sistema de equações variacionais:

$$(\delta h)' = -\frac{\partial Q(y, t)}{\partial t} \delta t, \quad (\delta t)' = -\frac{\delta h}{V^3}. \quad (2.53)$$

Aplicaremos agora o lema 2.2.3, com  $\xi = |\delta h|$ ,  $\eta = |\delta t|$ ,  $a = \psi$  e  $b = \frac{1}{V^3}$ . Para  $0 \leq y_0 \leq y < X(v, \tau)$  teremos, portanto:

$$|\delta h(y)| \leq \left[ |\delta h(y_0)| + |\delta t(y_0)| \int_{y_0}^y \psi(s) ds \right] \exp \int_{y_0}^y \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds, \quad (2.54)$$

$$|\delta t(y)| \leq |\delta t(y_0)| + \int_{y_0}^y \frac{ds}{(V(\sigma))^3} \left[ |\delta h(y_0)| + |\delta t(y_0)| \int_{y_0}^y \psi(s) ds \right] \exp \int_{y_0}^y \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds. \quad (2.55)$$

Na região  $R_0 = \{(v, \tau) : 0 < h(v, \tau) < \mathfrak{S}\}$  o presente teorema já está demonstrado pelo corolário 2.2.1. Então, se  $\mathfrak{S} = \infty$ ,  $R_0 = \Phi \setminus \{0\}$ , e o teorema está provado. Sendo assim, assumiremos  $\mathfrak{S} < \infty$ .

Por 6º,  $Q(x, t)$  é não crescente em  $x$  para  $x \geq x^*$ . Então  $x^* \leq x_1 < x_2 \Rightarrow Q(x_2, t) \leq Q(x_1, t), \forall t \Rightarrow \int_0^{2\pi} Q(x_2, t) dt \leq \int_0^{2\pi} Q(x_1, t) dt \Rightarrow Q_0(x_2) \leq Q_0(x_1)$ , isto é,  $Q_0(x)$  é não crescente, para  $x \geq x^*$ .

Como  $Q_0(x)$  é integrável ( $\mathfrak{S} < \infty$ ),  $\lim_{x \rightarrow \infty} Q_0(x) = 0$ . E, por 3º, temos:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x, t) dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x) dt = q(x) \\ &\Rightarrow 0 < q(x) < Q_0(x). \end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_0^\infty q(x) dx < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} q(x) dx = 0. \quad (2.56)$$

Para  $y_0$  escolhemos  $x^*$  de 5º e 6º. Como a função  $\xi(x)$  de 5º é limitada para  $x \geq x^*$ , existe  $C$  tal que  $\xi(x) \leq C$ . Por (2.44) e (2.56):

$$\begin{aligned} \int_{x^*}^y \psi(s) \int_{x^*}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds &\leq C \left[ 2 \int_{x^*}^X q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left[ 2 \int_0^\infty q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned} \quad (2.57)$$

para  $x^* \leq y < X$ . Seja  $R \geq 0$  arbitrário, e definamos o conjunto:

$$K_R = \{(v, \tau) : x^* + 1 \leq X(v, \tau), v \leq R\}.$$

Fora da curva  $x^* = X(v, \tau)$ , pelo lema 2.2.4, as funções  $\delta h(x^*, v, \tau)$  e  $\delta t(x^*, v, \tau)$  são contínuas em  $(v, \tau)$ . Consequentemente, essas funções são contínuas em todo o conjunto  $K_R$ , que é compacto. Então:

$$M_1 = \sup_{K_R} |\delta t(x^*, v, \tau)| < \infty, \quad (2.58)$$

$$M_2 = \sup_{K_R} \left\{ |\delta h(x^*, v, \tau)| + |\delta t(x^*, v, \tau)| \int_0^\infty \psi(s) ds \right\} \exp \left[ C \left( 2 \int_0^\infty q(\sigma) d\sigma \right) \right]^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (2.59)$$

Seja  $M \geq \max\{M_1, 2\pi C M_2\}$ . Em (2.54) colocamos  $y_0 = x^*$  e usamos (2.57):

$$|\delta h(y)| \leq \left[ |\delta h(x^*)| + |\delta t(x^*)| \int_{x^*}^y \psi(s) ds \right] \exp \int_{x^*}^y \psi(s) \int_{x^*}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds \leq M_2. \quad (2.60)$$

Também em (2.55) colocamos  $y_0 = x^*$  e usamos (2.57):

$$\begin{aligned} |\delta t(y)| &\leq |\delta t(x^*)| + \int_{x^*}^y \frac{ds}{(V(s))^3} \left[ |\delta h(x^*)| + |\delta t(x^*)| \int_{x^*}^y \psi(s) ds \right] \exp \int_{x^*}^y \psi(s) \int_{x^*}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds \\ &\leq M_1 + M_2 \int_{x^*}^y \frac{ds}{(V(s))^3}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Em (2.60) e (2.61) temos  $x^* \leq y < X(v, \tau)$  e  $(v, \tau) \in K_R$ .

De 4º, do lema 2.2.1 e de (2.53), temos:

$$\begin{aligned} |(\delta h)'| &= \left| \frac{\partial Q(y, t)}{\partial t} \delta t \right| \leq \psi(y) |\delta t| \\ &\leq \psi(y) \left[ M_1 + M_2 \int_{x^*}^y \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} \right], \end{aligned}$$

de onde:

$$\int_{x^*}^y |(\delta h(s))'| ds \leq \int_{x^*}^y \psi(s) \left[ M_1 + M_2 \int_{x^*}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} \right] ds. \quad (2.62)$$

Assim, como vale (2.57) e como  $\psi(y)$  é integrável, se  $X(v, \tau) = \infty$ , então  $|(\delta h(y))'|$  é integrável.

Consideremos agora duas seqüências  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  e  $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  com  $y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$  e com  $y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \delta h(y_m) - \delta h(y_k) &= \int_{y_k}^{y_m} (\delta h)'(s) ds \\ \Rightarrow |\delta h(y_k) - \delta h(y_m)| &\leq \int_{y_k}^{y_m} |(\delta h)'(s)| ds \\ \Rightarrow \lim_{k, m \rightarrow \infty} |\delta h(y_k) - \delta h(y_m)| &= 0. \end{aligned}$$

Logo, se  $X(v, \tau) = \infty$ , existe o limite :

$$\delta h(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \delta h(y). \quad (2.63)$$

Vejamos o que acontece quando  $X(v, \tau) < \infty$ . Quando  $y$  tende a  $X$  por valores menores que  $X$ , então  $\delta h(y)$  tem um limite dado por (2.51). Por (2.60),  $|\delta h_-| \leq M_2$ . Quando cruza  $y = X(v, \tau)$ ,  $\delta h(y)$  tem um salto estimado por (2.52). Para  $y > X(v, \tau)$ :

$$\delta h(y, v, \tau) = \delta \left( \int_0^{X(v, \tau)} Q_0(x) dx \right) = Q_0(X(v, \tau)) \delta X(v, \tau),$$

isto é, para  $X(v, \tau) < \infty$ , temos que o limite (2.63) existe, e seu valor é  $Q_0(X(v, \tau)) \delta X(v, \tau)$ .

Do que mostramos, podemos concluir:

$$|\delta(\infty) - \delta(y)| \begin{cases} \leq \int_y^{X(v, \tau)} |(\delta h)'(\xi)| d\xi + \Delta, & \text{se } 0 \leq y \leq X(v, \tau), \\ = 0, & \text{se } y > X(v, \tau). \end{cases}$$

Então, usando (2.62):

$$\begin{aligned}
|\delta h(\infty, v, \tau) - \delta h(y, v, \tau)| &\leq \int_y^{X(v, \tau)} |(\delta h)'(s)| ds + \Delta \\
&\leq M_1 \int_{x^*}^{X(v, \tau)} \psi(s) ds + M_2 \int_{x^*}^{X(v, \tau)} \psi(s) \int_{x^*}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds + \Delta \\
&\leq M_1 \int_{x^*}^{\infty} \psi(s) ds + M_2 \int_{x^*}^{X(v, \tau)} \psi(s) \int_{x^*}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds + \Delta \\
&\leq M_1 \int_{x^*}^{\infty} \psi(s) ds + M_2 \int_{x^*}^{X(v, \tau)} \psi(s) \int_{x^*}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds \\
&\quad + 2\pi\xi(y)q(y)|\delta h_-| \\
&\leq M_1 \int_{x^*}^{\infty} \psi(s) ds + M_2 \int_{x^*}^{X(v, \tau)} \psi(s) \int_{x^*}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds \\
&\quad + 2M_2\pi\xi(y)q(y) \\
&\leq M \left[ \int_y^{\infty} \psi(s) ds + q(y) \right] + M_2 \int_{x^*}^{X(v, \tau)} \psi(s) \int_{x^*}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds.
\end{aligned}$$

Aplicando (2.44) à segunda integral ficamos com:

$$\begin{aligned}
|\delta h(\infty, v, \tau) - \delta h(y, v, \tau)| &\leq M \left[ \int_y^{\infty} \psi(s) ds + q(y) \right] + M_2 C \left[ 2 \int_{x^*}^{X(v, \tau)} q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= M \left[ \int_y^{\infty} \psi(s) ds + q(y) \right] + \frac{2\pi M_2 C}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{x^*}^{X(v, \tau)} q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M \left[ \int_y^{\infty} \psi(s) ds + q(y) \right] + 2\pi M_2 C \left[ \int_{x^*}^{X(v, \tau)} q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M \left\{ \int_y^{\infty} \psi(s) ds + q(y) + \left[ \int_{x^*}^{X(v, \tau)} q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq M \left\{ \int_y^{\infty} \psi(s) ds + q(y) + \left[ \int_{x^*}^{\infty} q(\sigma) d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Como  $\psi$  e  $q$  são funções integráveis, por (2.56), e notando que o lado direito da desigualdade acima não depende de  $(v, \tau)$ , temos que:

$$|\delta h(\infty, v, \tau) - \delta h(y, v, \tau)| \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$$

uniformemente em  $(v, \tau)$ , isto é,

$$\delta h(y, v, \tau) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \delta h(\infty, v, \tau)$$

em  $K_R$ , uniformemente em  $(v, \tau)$ . Mas  $\delta h(y, v, \tau)$  é contínua em  $K_R$ , exceto em  $y = X(v, \tau)$ . Nessa superfície  $\delta h(y, v, \tau)$  sofre um salto de magnitude estimado por (2.52):

$$\Delta \leq 2\pi\xi(y)q(y)|\delta h_-| \leq 2CM_2\pi q(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$$

E, como o lado direito desta desigualdade não depende de  $(v, \tau)$ , essa convergência é uniforme em  $(v, \tau)$ . Então  $\delta h(\infty, v, \tau)$  é contínua em  $K_R$ .

A função  $h(y, v, \tau)$  é contínua em  $K_R$ , e suas derivadas parciais  $\delta h(y, v, \tau)$  convergem uniformemente em  $(v, \tau)$  para uma função  $\delta h(\infty, v, \tau)$  conforme  $y \rightarrow \infty$ , sendo, portanto, limitadas e contínuas, exceto em  $y = X(v, \tau)$ . Então a função  $h(v, \tau) = \lim_{y \rightarrow \infty} h(y, v, \tau)$  é diferenciável em  $K_R$ , e:

$$\delta h(v, \tau) = \lim_{y \rightarrow \infty} \delta h(y, v, \tau) = \delta h(\infty, v, \tau).$$

Como  $\delta h(\infty, v, \tau)$  é contínua em  $K_R$ , então  $h(v, \tau) \in C^1(K_R)$ . Mas, como  $R$  foi escolhido arbitrariamente, então  $h(v, \tau) \in C^1(\Phi \setminus \{0\})$ . Isso demonstra a primeira asserção do teorema.

Continuamos considerando  $\mathfrak{S} < \infty$ , conforme já foi discutido. Se  $X(v, \tau) < \infty$ , então  $(v, \tau) \in R_0 \cup \{0\}$  e, pelo corolário 2.2.1, o gradiente é não degenerado em  $R_0$ . Consideraremos então  $X(v, \tau) = \infty$ .

Escolhemos  $y_0$  tal que:

$$y_0 \geq x^*, \quad C \left[ 2 \int_{y_0}^{\infty} q(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} < \ln \frac{3}{2}. \quad (2.64)$$

As derivadas  $\frac{\partial h}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial \tau}$ ,  $\frac{\partial t}{\partial v}$  e  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  são soluções de (2.53) e, portanto  $\frac{\partial(h, t)}{\partial(v, \tau)}$  é não nulo para  $0 \leq y < X = \infty$ . Consequentemente existem  $\alpha$  e  $\beta$  tais que o vetor

$$\begin{pmatrix} \delta h \\ \delta t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{pmatrix}$$

se torna  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  para  $y = y_0$ . O par  $\begin{bmatrix} \delta h \\ \delta t \end{bmatrix}$  é uma solução de (2.53), e então (2.54) e (2.55) procedem e, como  $\delta h(y_0) = 1$  e  $\delta t(y_0) = 0$ , para  $y \geq y_0$ :

$$|\delta h(y)| \leq \exp \int_{y_0}^y \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds,$$

$$|\delta t(y)| \leq \int_{y_0}^y \frac{ds}{(V(s))^3} \exp \int_{y_0}^y \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds.$$

Conforme já mostramos:

$$(\delta h(y))' = -\frac{\partial Q(y, t)}{\partial t} \delta t \Rightarrow |(\delta h(y))'| \leq \psi(y) |\delta t(y)|.$$

E aí:

$$|(\delta h(y))'| \leq \psi(y) \int_{y_0}^y \frac{ds}{(V(s))^3} \exp \int_{y_0}^y \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds.$$

Então:

$$\begin{aligned} |\delta(\infty) - \delta(y_0)| &= \left| \int_{y_0}^{\infty} (\delta h(y))' dy \right| \leq \int_{y_0}^{\infty} |(\delta h(y))'| dy \\ &\leq \int_{y_0}^{\infty} \left[ \psi(y) \int_{y_0}^y \frac{ds}{(V(s))^3} \exp \int_{y_0}^y \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds \right] dy \\ &\leq \int_{y_0}^{\infty} \left[ \psi(y) \int_{y_0}^y \frac{ds}{(V(s))^3} \exp \int_{y_0}^{\infty} \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds \right] dy \\ &= \left\{ \int_{y_0}^{\infty} \psi(y) \int_{y_0}^y \frac{ds}{(V(s))^3} dy \right\} \exp \int_{y_0}^{\infty} \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds \\ &\leq \left\{ \exp \int_{y_0}^y \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds - 1 \right\} \exp \int_{y_0}^y \psi(s) \int_{y_0}^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds, \end{aligned}$$

onde usamos que  $x \leq e^x - 1$ , se  $x \geq 0$ , no termo entre chaves.

Como  $y_0 \geq x^*$ , para estimarmos a integral acima utilizamos (2.44) e (2.64). Por (2.44):

$$|\delta(\infty) - \delta(y_0)| \leq \left\{ \exp \left[ C \left( 2 \int_{y_0}^{X(v, \tau)} q(\sigma) d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \right] - 1 \right\} \exp \left[ C \left( 2 \int_{y_0}^{X(v, \tau)} q(\sigma) d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

e, por (2.64):

$$|\delta(\infty) - \delta(y_0)| \leq \left(\frac{3}{2} - 1\right) \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Mas  $\delta h(y_0) = 1$ . Então:

$$|\delta h(\infty) - \delta h(y_0)| < \frac{3}{4} \Rightarrow \delta h(\infty) > \frac{1}{4},$$

isto é:

$$\alpha \frac{\partial h(v, \tau)}{\partial v} + \frac{\partial h(v, \tau)}{\partial \tau} > \frac{1}{4},$$

ou seja,  $\frac{\partial h(v, \tau)}{\partial v}$  e  $\frac{\partial h(v, \tau)}{\partial \tau}$  não se anulam simultaneamente.

Resta-nos somente demonstrar que as curvas de nível  $h(v, \tau) = C > 0$  são curvas de Jordan suaves.

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  tais que:

$$0 < C_1 < \mathfrak{S} < C_2 < \infty.$$

Por (2.12), temos que, para  $v$  suficientemente grande,  $h(v, \tau) > C_2$ , isto é, existe  $R$  tal que, se  $v \geq R$ , então  $h(v, \tau) > C_2$ . Como  $h(0, \tau) \equiv 0$ , existe  $r$  tal que, se  $0 \leq v \leq r$ , então  $h(v, \tau) < C_1$ . Então as curvas de nível  $h(v, \tau) = C_1$  e  $h(v, \tau) = C_2$  estão em  $r \leq v \leq R$ .

Tomemos um  $\varepsilon > 0$ . Aproximamos as funções contínuas:

$$A = \frac{\partial h / \partial v}{|\nabla h|^2}, \quad B = \frac{\partial h / \partial \tau}{|\nabla h|^2}$$

em  $r \leq v \leq R$  por funções  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ , de classe  $C^1$ , que se anulam fora de  $r - \varepsilon \leq v \leq R + \varepsilon$ .

Consideremos o sistemas de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dv}{ds} = \tilde{A}, \quad \frac{d\tau}{ds} = \tilde{B}.$$

Sendo  $(v_1(\alpha), \tau_1(\alpha))$ , para  $\alpha \in I$ , uma parametrização de  $h(v, \tau) = C_1$ , podemos tomar soluções desse sistema de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais nessa curva, ou seja, para cada  $\alpha$  fixo,  $(v(s, \alpha), \tau(s, \alpha))$  será uma solução do sistema com  $(v(0, \alpha), \tau(0, \alpha)) = (v_1(\alpha), \tau_1(\alpha))$ .

Já sabemos, pelo corolário 2.2.1, que a curva  $h(v, \tau) = C_1$  é difeomorfa ao círculo. Isso e a diferenciabilidade das soluções nos leva a concluir que  $(v(s, \alpha), \tau(s, \alpha))$  é uma função diferenciável em  $(s, \alpha)$ .

Explicitemos  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  por:

$$\tilde{A} = A + f(v, \tau), \quad \tilde{B} = B + g(t, \tau).$$

Então, se  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  estão suficientemente próximas de  $A$  e  $B$ , respectivamente, então, para  $r \leq v \leq R$ :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= \frac{\partial h}{\partial v} \tilde{A} + \frac{\partial h}{\partial \tau} \tilde{B} \\ &= \frac{\partial h}{\partial v} \left( \frac{\partial h / \partial v}{|\nabla h|^2} + f(v, \tau) \right) + \frac{\partial h}{\partial \tau} \left( \frac{\partial h / \partial \tau}{|\nabla h|^2} + g(v, \tau) \right) \\ &= \frac{|\nabla h|^2}{|\nabla h|^2} + f(v, \tau) \frac{dh}{dv} + g(v, \tau) \frac{dh}{d\tau} \\ &= 1 + f(v, \tau) \frac{dh}{dv} + g(v, \tau) \frac{dh}{d\tau} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Então, como  $h(v(0, \alpha), \tau(0, \alpha)) \equiv C_1$ , para cada  $\alpha$  existe um único  $s(\alpha)$  tal que  $h(v(s(\alpha), \alpha), \tau(s(\alpha), \alpha)) = C_2$ . Também temos, pelo teorema da função implícita, que  $s$  é um difeomorfismo local. Como é injetora, pela unicidade das soluções,  $s$  é um difeomorfismo, que leva  $h(v, \tau) = C_1$  em  $h(v, \tau) = C_2$ .

■

**Proposição 2.2.3.** *Se  $\mathfrak{S} = \infty$ , então, para  $v \rightarrow \infty$ , temos as fórmulas assintóticas:*

$$h^+(v, \tau) = \frac{v^2}{2} + \int_0^\infty [Q_0(x) - Q(x, \tau)] dx - \frac{1}{v} \int_0^\infty x \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} dx + o\left(\frac{1}{v}\right), \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial h^+(v, \tau)}{\partial v} = v + o(1), \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial h^+(v, \tau)}{\partial \tau} = - \int_0^\infty \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial t} dx - \frac{1}{v} \int_0^\infty x \frac{\partial^2 Q(x, \tau)}{\partial t^2} dx + o\left(\frac{1}{v}\right), \quad (2.67)$$

com restos que são uniformes em  $\tau$ .



**demonstração:** Pelo lema 2.2.1,  $\int_x^\infty \psi(y)dy = o\left(\frac{1}{x}\right)$ . Como no lema 2.2.2, construímos  $\varphi(v)$  tal que  $\varphi(v) = o(v^2)$ . Então:

$$\int_{\varphi(v)}^\infty \psi(y)dy = o\left(\frac{1}{\varphi(v)}\right) = o\left(\frac{1}{v^2}\right).$$

Temos:

$$\begin{aligned} h^+(v, \tau) &= \lim_{y \rightarrow \infty} h^+(0, v, \tau) + \int_0^\infty \frac{\partial h^+(y, v, \tau)}{\partial y} dy \\ &= h^+(0, v, \tau) + \int_0^{X^+(v, \tau)} [Q_0(y) - Q(y, t)] dy \\ &= \frac{v^2}{2} + \int_0^{X^+(v, \tau)} [Q_0(y) - Q(y, t)] dy \\ &= \frac{v^2}{2} + \int_0^{X^+(v, \tau)} [Q_0(x) - Q(x, t)] dx \\ &= \frac{v^2}{2} + \int_0^{X^+(v, \tau)} [Q_0(x) - Q(x, \tau)] dx + \int_0^{X^+(v, \tau)} [Q(x, \tau) - Q(x, t)] dx \\ &= \frac{v^2}{2} + \int_0^{\varphi(v)} [Q_0(x) - Q(x, \tau)] dx + \int_{\varphi(v)}^{X^+(v, \tau)} [Q_0(x) - Q(x, \tau)] dx \\ &\quad + \int_0^{\varphi(v)} [Q(x, \tau) - Q(x, t)] dx + \int_{\varphi(v)}^{X^+(v, \tau)} [Q(x, \tau) - Q(x, t)] dx \\ &= \frac{v^2}{2} + \int_0^\infty [Q_0(x) - Q(x, \tau)] dx + \int_{\varphi(v)}^\infty [Q(x, \tau) - Q_0(x)] dx \\ &\quad + \int_{\varphi(v)}^{X^+(v, \tau)} [Q_0(x) - Q(x, \tau)] dx + \int_0^{\varphi(v)} [Q(x, \tau) - Q(x, t)] dx \\ &\quad + \int_{\varphi(v)}^{X^+(v, \tau)} [Q(x, \tau) - Q(x, t)] dx \\ &= \frac{v^2}{2} + \int_0^\infty [Q_0(x) - Q(x, \tau)] dx + \int_{\varphi(v)}^\infty [Q(x, \tau) - Q_0(x)] dx \\ &\quad + \int_{\varphi(v)}^{X^+(v, \tau)} [Q_0(x) - Q(x, t)] dx + \int_0^{\varphi(v)} [Q(x, \tau) - Q(x, t)] dx \end{aligned}$$

Pelo lema 2.1.1,  $|Q_0(x) - Q(x, t)| \leq 2\pi\psi(x)$ , e aí:

$$\left| \int_{\varphi(v)}^{X^+(v,\tau)} [Q_0(x) - Q(x,t)] dx \right| \leq 2\pi \int_{\varphi(v)}^{\infty} \psi(x) dx = o\left(\frac{1}{v^2}\right),$$

$$\left| \int_{\varphi(v)}^{\infty} [Q(x,\tau) - Q_0(x)] dx \right| \leq 2\pi \int_{\varphi(v)}^{\infty} \psi(x) dx = o\left(\frac{1}{v^2}\right).$$

Agora:

$$\frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial \sigma} = \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{V(y)} \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t}.$$

Daí:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi(v)} [Q(x, \tau) - Q(x, t(x))] dx &= \int_0^{\varphi(v)} \left[ - \int_0^x \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial y} dy \right] dx \\ &= - \int_0^{\varphi(v)} \left[ \int_0^x \frac{1}{V(y)} \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} dy \right] dx \\ &= - \frac{1}{v} \int_0^{\varphi(v)} \int_0^x \frac{1}{V(y)} \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} v dy dx. \end{aligned}$$

Então:

$$h^+(v, \tau) = \frac{v^2}{2} + \int_0^{\infty} [Q_0(x) - Q(x, \tau)] dx - \frac{1}{v} \int_0^{\varphi(v)} \int_0^x \frac{1}{V(y)} \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} v dy dx + o\left(\frac{1}{v^2}\right).$$

Para mostrarmos a primeira asserção da proposição basta mostrarmos que:

$$\int_0^{\varphi(v)} \int_0^x \frac{1}{V(y)} \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} v dy dx \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} x \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial t} dx \quad (2.68)$$

uniformemente em  $\tau$ .

Seja:

$$\Lambda(x, v, \tau) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{V(y)} \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} v dy, & \text{se } 0 \leq x \leq \varphi(v), \\ 0, & \text{se } x > \varphi(v). \end{cases}$$

Conforme a parte 3) do lema 2.2.2:

$$V(y, v, \tau) = v - o(v),$$

quando  $v \rightarrow \infty$ , para  $0 \leq y \leq o(v^2)$ . Então:

$$\frac{v}{V} \rightarrow \frac{v}{v - o(v)} = \frac{1}{1 - \frac{o(v)}{v}} \rightarrow 1,$$

isto é,  $\frac{v}{V} = O(1)$ . Então, conforme  $v \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} |\Lambda(x, v, \tau)| &\leq \left| \int_0^x \frac{1}{V(y)} \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} v dy \right| \\ &\leq C \left| \int_0^x \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} dy \right| \\ &= C \left| \int_0^x \psi(x) dy \right| = Cx\psi(x), \end{aligned}$$

para algum  $C > 0$ . Pelo lema 2.2.1,  $\int_0^\infty x\psi(x)dx < \infty$ . Então  $\Lambda(x, v, \tau)$  é majorada por uma função integrável.

Conforme  $v \rightarrow \infty$ :

$$t(x, v, \tau) = \tau + \int_0^x \frac{dy}{V(y)} \rightarrow \tau,$$

pois  $V(y) = v - o(v)$  para  $v \rightarrow \infty$ .

E:

$$\int_0^x \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} \frac{v}{V(y)} dy \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial t} dy = x \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial t},$$

uniformemente em  $\tau$ .

Então:

$$\int_0^{\varphi(v)} \int_0^x \frac{\partial Q(x, t(y))}{\partial t} \frac{v}{V(y)} dy dx \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \int_0^x x \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial t} dx,$$

uniformemente em  $\tau$ , o que prova (2.65).

Vamos mostrar agora (2.66).

As derivadas  $\delta h^+$  podem ser encontradas a partir de (2.53). Para  $\delta = \frac{\partial}{\partial v}$ , temos as condições iniciais:

$$\delta h^+(0) = v, \quad \delta t(0) = 0, \quad (2.69)$$

Isso porque:

$$h^+(0, v, \tau) = \frac{v^2}{2}, \quad t(0, v, \tau) = \tau.$$

Por (2.54) e (2.69):

$$|\delta h^+(y)| \leq v \exp \int_0^y \psi(s) \int_0^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} ds \leq v e^\theta,$$

onde  $\theta = o\left(\frac{1}{v}\right)$ , de acordo com a parte 4) do lema 2.2.2.

Usaremos que  $\delta h^+(v, \tau) = \lim_{y \rightarrow \infty} h^+(y, v, \tau)$ . Se  $y \rightarrow \infty$ , teremos  $y \geq X^+(v, \tau)$ , pois  $y < X^+(v, \tau) \Rightarrow X^+(v, \tau) = \infty$ , o que não ocorre para  $\mathfrak{S} = \infty$ , que é uma das hipóteses da proposição. Então:

$$\delta h^+(v, \tau) = Q_0(X^+(v, \tau)) \delta X^+(v, \tau).$$

Notamos agora que essa derivada é constante para  $y \geq X^+(v, \tau)$ , e é igual a  $\delta h^+(X^+(v, \tau), v, \tau)$ . De onde:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h^+}{\partial v} - v \right| &= |\delta h^+(X^+(v, \tau), v, \tau) - v| \\ &= |\delta h^+(X^+(v, \tau), v, \tau) - \delta h^+(0, v, \tau)| \\ &= \left| \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial \delta h^+(y, v, \tau)}{\partial y} dy \right| \\ &= \left| \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} \delta t(y, v, \tau) dy \right| \\ &= \left| \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} \int_0^y \frac{\delta h^+(\sigma, v, \tau)}{(V(\sigma))^3} d\sigma dy \right| \\ &\leq \int_0^{X^+(v, \tau)} \psi(y) \int_0^y \frac{v e^\theta}{(V(\sigma))^3} d\sigma dy \\ &= v e^\theta \int_0^{X^+(v, \tau)} \psi(y) \int_0^y \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} dy \leq v \theta e^\theta = o(1), \end{aligned}$$

o que prova (2.66). Provemos agora (2.67). Ou seja, doravante  $\delta = \frac{\partial}{\partial \tau}$ .

Neste caso, as condições iniciais serão dadas por:

$$\delta h^+(0) = 0, \quad \delta t(0) = 1. \quad (2.70)$$

Então, por (2.54):

$$|\delta h^+(y)| \leq \int_0^y \psi(s) ds \exp \int_0^y \psi(s) ds \int_0^s \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} \leq e^\theta \int_0^\infty \psi(s) ds, \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^+}{\partial \tau} &= \delta h^+(X^+(v, \tau), v, \tau) = \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial \delta h^+(y, v, \tau)}{\partial y} dy \\ &= - \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} \delta t(y, v, \tau) dy \\ &= - \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau), v, \tau)}{\partial t} \left[ \delta t(0) + \int_0^y \frac{\partial \delta t(\sigma, v, \tau)}{\partial \sigma} d\sigma \right] dy \\ &= - \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} \left[ 1 - \int_0^y \frac{\delta h^+(\sigma, v, \tau)}{(V(\sigma))^3} d\sigma \right] dy \\ &= - \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} dy \\ &\quad + \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} \int_0^y \frac{\delta h^+(\sigma, v, \tau)}{(V(\sigma))^3} d\sigma dy. \end{aligned}$$

Aqui, utilizando (2.71) e a parte 4) do lema 2.2.2:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} \int_0^y \frac{\delta h^+(\sigma, v, \tau)}{(V(\sigma))^3} d\sigma dy \right| \\ &\leq \int_0^{X^+(v, \tau)} \psi(y) \int_0^y \frac{e^\theta \int_0^\infty \psi(s) ds}{(V(\sigma))^3} d\sigma dy \\ &= e^\theta \int_0^\infty \psi(s) ds \int_0^{X^+(v, \tau)} \psi(y) \int_0^y \frac{d\sigma}{(V(\sigma))^3} dy \\ &\leq \theta e^\theta \int_0^\infty \psi(s) ds = o\left(\frac{1}{v}\right). \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{\partial h^+(v, \tau)}{\partial \tau} = - \int_0^{X^+(v, \tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} dy + o\left(\frac{1}{v}\right).$$

Mas:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{X^+(v,\tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} dy \\
&= \int_0^{\varphi(v)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} dy + \int_{\varphi(v)}^{X^+(v,\tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} dy \\
&= \int_{\varphi(v)}^{X^+(v,\tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} dy + \int_0^{\varphi(v)} \frac{\partial Q(y, \tau)}{\partial t} dy \\
&+ \int_0^{\varphi(v)} \left[ \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} - \frac{\partial Q(y, \tau)}{\partial t} \right] dy \\
&= \int_{\varphi(v)}^{X^+(v,\tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} dy + \int_0^{\varphi(v)} \frac{\partial Q(y, \tau)}{\partial t} dy + \int_0^{\varphi(v)} \int_0^y \frac{\partial^2 Q(y, t(\sigma))}{\partial t^2} d\sigma dy \\
&= \int_{\varphi(v)}^{X^+(v,\tau)} \frac{\partial Q(y, t(y, v, \tau))}{\partial t} dy + \int_0^{\infty} \frac{\partial Q(y, \tau)}{\partial t} dy - \int_{\varphi(v)}^{\infty} \frac{\partial Q(y, \tau)}{\partial t} dy \\
&+ \int_0^{\varphi(v)} \int_0^y \frac{\partial^2 Q(y, t(\sigma))}{\partial t^2} d\sigma dy.
\end{aligned}$$

Aqui:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\varphi(v)}^{X^+(v,\tau)} \frac{\partial Q(y, t)}{\partial t} dy \right| &\leq \int_{\varphi(v)}^{X^+(v,\tau)} \psi(y) dy \leq \int_{\varphi(v)}^{\infty} \psi(y) dy = o\left(\frac{1}{v^2}\right), \\
\left| \int_{\varphi(v)}^{\infty} \frac{\partial Q(y, \tau)}{\partial t} dy \right| &\leq \int_{\varphi(v)}^{\infty} \psi(y) dy = o\left(\frac{1}{v^2}\right).
\end{aligned}$$

Então:

$$\frac{\partial h^+(v, \tau)}{\partial \tau} = - \left[ \int_0^{\infty} \frac{\partial Q(y, \tau)}{\partial t} dy + \int_0^{\varphi(v)} \int_0^y \frac{\partial^2 Q(y, t(\sigma, v, \tau))}{\partial t^2} d\sigma dy \right] + o\left(\frac{1}{v}\right).$$

Agora, provamos que:

$$\int_0^{\varphi(v)} \int_0^y \frac{\partial^2 Q(y, t(\sigma, v, \tau))}{\partial t^2} d\sigma dy \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} y \frac{\partial^2 Q(y, \tau)}{\partial t^2} dy < \infty,$$

uniformemente em  $\tau$ , de forma análoga àquela com a qual mostramos (2.68).

■

Para a função  $h^-(v, \tau)$  também há as fórmulas assintóticas análogas àsquelas em (2.65), (2.66) e (2.67). Se denotarmos por  $V^-(y, v, \tau)$  o módulo da velocidade  $|\dot{x}|$  que a solução  $x(t, v, \tau)$  tem em no tempo  $t^-(y, v, \tau)$  no qual  $x(t^-, v, \tau) = y < 0$ , então:

$$\dot{x}(t^-(y, v, \tau), v, \tau) \frac{\partial t^-(y, v, \tau)}{\partial y} = 1 \Rightarrow \frac{\partial t^-}{\partial y} = \frac{1}{\dot{x}} = -\frac{1}{V^-}.$$

Então o sistema de equações variacionais fica:

$$(\delta h)' = -\frac{\partial Q(y, t^-)}{\partial t} \delta t, \quad (\delta t)' = \frac{\delta h}{(V^-)^3}. \quad (2.72)$$

E as fórmulas assintóticas para  $h^-(v, \tau)$  serão:

$$h^-(v, \tau) = \frac{v^2}{2} + \int_0^\infty [Q_0(x) - Q(x, \tau)] dx + \frac{1}{v} \int_0^\infty x \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} dx + o\left(\frac{1}{v}\right), \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial h^-(v, \tau)}{\partial v} = v + o(1), \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial h^-(v, \tau)}{\partial \tau} = -\int_0^\infty \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial t} dx + \frac{1}{v} \int_0^\infty x \frac{\partial^2 Q(x, \tau)}{\partial t^2} dx + o\left(\frac{1}{v}\right). \quad (2.75)$$

Comparando as fórmulas (2.65) e (2.73), vemos que se  $\int_0^\infty x \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial t} \neq 0$ , então  $h^+(v, \tau)$  não coincidem.

Usaremos a notação:

$$A_0(\tau) = \int_0^\infty [Q(x, \tau) - Q_0(x)] dx, \quad A_1(\tau) = \int_0^\infty x \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial t} dx. \quad (2.76)$$

Então:

$$h^\pm(v, \tau) = \frac{v^2}{2} - A_0(\tau) \mp \frac{A_1(\tau)}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right), \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial h^\pm(v, \tau)}{\partial v} = v + o(1), \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial h^\pm(v, \tau)}{\partial \tau} = -A'_0(\tau) \mp \frac{A'_1(\tau)}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right). \quad (2.79)$$

uniformemente em  $\tau$ .

**Proposição 2.2.4.** *Suponhamos que  $A'_1(\tau) > 0$  em  $[\tau_1, \tau_2]$ . Para algum  $\Theta$  existe um difeomorfismo  $a : (\xi, \eta) \mapsto (v, \tau)$  tal que:*

$$\xi = h^-(v, \tau), \quad \eta = h^+(v, \tau), \quad (2.80)$$

definido no conjunto:

$$\xi - A_1(\tau_2)\sqrt{\frac{2}{\xi}} \leq \eta \leq \xi - A_1(\tau_1)\sqrt{\frac{2}{\xi}}, \quad \xi \geq \Theta \quad (2.81)$$

e levando a curva  $\eta = \xi - A_1(\tau_0)\sqrt{\frac{2}{\xi}}$ ,  $\tau_0 \in [\tau_1, \tau_2]$ , em um arco suave tendo  $\tau = \tau_0$  como assíntota. Para  $A'_1(\tau) < 0$  trocamos de lugar  $\tau_1$  e  $\tau_2$  em (2.81).

**demonstração:** Suponhamos  $A'_1 > 0$ . Então, para algum  $\varepsilon > 0$  e algum  $m > 0$ :

$$\begin{cases} A_1(\tau_1 - \varepsilon) < A_1(\tau) \leq A_1(\tau_2) < A_1(\tau_2 + \varepsilon), \\ A'_1(\tau) \geq m > 0, \text{ se } \tau \in [\tau_1 - \varepsilon, \tau_2 + \varepsilon]. \end{cases} \quad (2.82)$$

Calculemos o jacobiano:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(v, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h^-(v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial h^-(v, \tau)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial h^+(v, \tau)}{\partial v} & \frac{\partial h^+(v, \tau)}{\partial \tau} \end{vmatrix}.$$

Usamos então (2.78) e (2.79):

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(v, \tau)} = \begin{vmatrix} v + o(1) & -A'_0(\tau) + \frac{A'_1(\tau)}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right) \\ v + o(1) & -A'_0(\tau) - \frac{A'_1(\tau)}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right) \end{vmatrix} = -2A'_1(\tau) + o(1). \quad (2.83)$$

Assim  $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(v, \tau)}$  é não nulo em



$$\{(v, \tau) : v \geq v_0, \tau_1 - \varepsilon \leq v \leq \tau_2 + \varepsilon\}. \quad (2.84)$$

para  $v_0$  suficientemente grande, diga-se para  $v_0 \geq v_1$ . Então (2.80) é um difeomorfismo local.

De acordo com (2.74), para  $v$  suficientemente grande, temos  $\frac{\partial h^-}{\partial v} > 0$ , e então as curvas de nível que estão contidas completamente fora do círculo  $v = v_2$  são dadas por uma equação da forma  $v = v^-(\tau)$ . Por (2.78) e (2.79), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[h^- - h^+]}{\partial \tau} &= \left[ \frac{\partial h^-}{\partial v} - \frac{\partial h^+}{\partial v} \right] \frac{\partial v^-}{\partial \tau} + \left[ \frac{\partial h^-}{\partial \tau} - \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \right] \\ &= o(1) \frac{\partial v^-}{\partial \tau} + \frac{2A'_1}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right) \\ &= o(1) \frac{\partial v^-}{\partial h^-} \frac{\partial h^-}{\partial \tau} + \frac{2A'_1}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right) \\ &= o(1) \frac{\partial h^- / \partial \tau}{\partial h^- / \partial v^-} + \frac{2A'_1}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right) \\ &= o(1) \left[ \frac{-A'_0 + A'_1 + o(1/v)}{v + o(1)} \right] + \frac{2A'_1}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right) \\ &= \frac{o(1)O(1)}{v + o(1)} + \frac{2A'_1}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right) \\ &= \frac{2A'_1}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right). \end{aligned}$$

Consequentemente, no setor (2.84), para  $v_0$  suficientemente grande, diga-se para  $v_0 > v_3$ , temos que:

$$\frac{d}{d\tau} [h^-(v^-(\tau), \tau) - h^+(v^-(\tau), \tau)] > 0. \quad (2.85)$$

Por (2.77), para  $\tau = \tau_0$ :

$$h^-(v, \tau_0) - h^+(v, \tau_0) = \frac{2A_1(\tau_0)}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right).$$

Então, por (2.82):

$$\begin{aligned} h^-(v, \tau_1 - \varepsilon) - h^+(v, \tau_1 - \varepsilon) &\leq \frac{2A_1(\tau_1) - \delta}{v} < \frac{2A_1(\tau_2) + \delta}{v} \\ &\leq h^-(v, \tau_2 + \varepsilon) - h^+(v, \tau_2 + \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.86)$$

para algum  $\delta > 0$  e  $v \geq v_4$ . Por (2.73), para  $v$  grande,  $h^-(v, \tau) \simeq \frac{v^2}{2}$ . Então existe  $\Theta$  tal que nas curvas de nível  $h^-(v, \tau) = \xi \geq \Theta$  nós temos  $v \geq \max\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e:

$$h^-(v, \tau) \simeq \frac{v^2}{2}, \quad h^-(v, \tau) = \xi \Rightarrow \frac{v^2}{2} \simeq \xi \Rightarrow v \simeq \sqrt{2\xi} \Rightarrow \frac{2}{v} \simeq \sqrt{\frac{2}{\xi}},$$

e assim:

$$\frac{2A_1(\tau_1) - \delta}{v} < A_1(\tau_1) \sqrt{\frac{2}{\xi}} \leq A_1(\tau_2) \sqrt{\frac{2}{\xi}} < \frac{2A_1(\tau_2) + \delta}{v}.$$

Seja  $(\xi, \eta)$  satisfazendo (2.81). Na porção da curva de nível  $h^-(v, \tau) = \xi$  que está no setor  $\tau_1 - \varepsilon \leq \tau \leq \tau_2 + \varepsilon$  nós sabemos, por (2.85) e (2.86), que  $h^- - h^+$  cresce monotonicamente de:

$$\xi - h^+(v, \tau_1 - \varepsilon) \leq \frac{2A_1(\tau_1) - \delta}{v} < \frac{2A_1(\tau_1)}{v} < \sqrt{\frac{2}{\xi}} A_1(\tau_1) \leq \xi - \eta$$

até:

$$\xi - h^+(v, \tau_2 + \varepsilon) \geq \frac{2A_1(\tau_2) + \delta}{v} > \frac{2A_1(\tau_2)}{v} > \sqrt{\frac{2}{\xi}} A_1(\tau_2) \geq \xi - \eta.$$

De onde concluímos que existe um único  $\tau$  tal que  $\xi - h^+(v, \tau) = \xi - \eta$ , isto é, tal que  $h^+(v, \tau) = \eta$ . Então existe uma bijeção de (2.81) em  $\tau_1 - \varepsilon \leq \tau \leq \tau_2 + \varepsilon$ . Como essa bijeção é um difeomorfismo local, ela é um difeomorfismo.

Consideremos o conjunto dado por:

$$\xi - \eta = A_1(\tau_0) \sqrt{\frac{2}{\xi}}.$$

Ele será levado pelo difeomorfismo encontrado em um subconjunto de  $\Phi$  tal que para  $(v, \tau)$  neste subconjunto:

$$h^+(v, \tau) - h^-(v, \tau) = A_1(\tau_0) \sqrt{\frac{2}{\xi}}.$$

Este arco é suave.

Seja então  $\{(v(\xi), \tau(\xi))\}$  uma representação desse arco. Assim, por (2.77), temos:

$$h^-(v, \tau) - h^+(v, \tau) = \frac{2A_1(\tau)}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right),$$

de onde:

$$A_1(\tau_0)\sqrt{\frac{2}{\xi}} \equiv h^-(v(\xi), \tau(\xi)) - h^+(v(\xi), \tau(\xi)) = \frac{2A_1(\tau(\xi))}{v(\xi)} + o\left(\frac{1}{v(\xi)}\right),$$

e então:

$$\begin{aligned} A_1(\tau(\xi)) &= A_1(\tau_0)\sqrt{\frac{2}{\xi}}\frac{v(\xi)}{2} + o\left(\frac{1}{v(\xi)}\right)\frac{v(\xi)}{2} \\ &= A_1(\tau_0)\frac{v(\xi)}{\sqrt{2\xi}} + o(1), \end{aligned}$$

e então  $A_1(\tau(\xi)) = A_1(\tau_0) + o(1)$  para  $v(\xi) \simeq \sqrt{2\xi} \rightarrow \infty$ . Como  $A_1(\tau)$  é uma função monótona em  $[\tau_1, \tau_2]$ , tem-se que  $\tau(\xi) \rightarrow \tau_0$ , e então o raio  $\tau = \tau_0$  é uma assíntota do arco  $\{(v(\xi), \tau(\xi))\}$ .

■

Investiguemos as propriedades diferenciais da função primeiro retorno  $S$ . Como  $S$  é definida em termos das soluções  $x(t, v, \tau)$ , investiguemos primeiramente algumas propriedades das derivadas dessas soluções com respeito a  $v$  e a  $\tau$ .

Se  $v$  e  $\tau$  dependem de um parâmetro  $s$ , então  $\delta x = \frac{\partial x(t, v(s), \tau(s))}{\partial s}$  é uma solução da equação variacional:

$$\delta \ddot{x} = -\frac{\partial Q(x(t, v, \tau), t)}{\partial x} \delta x, \quad (2.87)$$

com condições iniciais:

$$\delta x(\tau) = -v \frac{\partial \tau}{\partial s} = -v \delta \tau \quad (2.88)$$

e

$$\delta \dot{x}(\tau) = \frac{\partial v}{\partial s} = \delta v. \quad (2.89)$$

A condição inicial (2.88) vem de:

$$\begin{aligned}
x(\tau(s), v(s), \tau(s)) = 0 &\Rightarrow \dot{x}(\tau(s), v(s), \tau(s))\delta\tau(s) + \delta x(\tau(s), v(s), \tau(s)) = 0 \\
&\Rightarrow \delta x(\tau(s), v(s), \tau(s)) \\
&= -\dot{x}(\tau(s), v(s), \tau(s))\delta\tau(s) = -v\delta\tau(s).
\end{aligned}$$

e (2.89) vem de:

$$\dot{x}(\tau(s), v(s), \tau(s)) = v(s) \Rightarrow \delta\dot{x}(\tau(s), v(s), \tau(s)) = \delta v(s).$$

A solução  $\delta x$  depende continuamente das condições iniciais acima e do ponto  $(v, \tau) \in \Phi$ .

A aplicação  $S$  é definida em  $R_0^+$ , mas temos que estudar o comportamento das soluções de (2.87) quando  $(v, \tau) \rightarrow \partial R_0^+$ , isto é, quando  $X^+(v, \tau) \rightarrow \infty$

Se  $\mathfrak{S} < \infty$ , a fronteira de  $R_0^+$  é  $\Pi_0^+$ , região onde (2.87) faz sentido e a dependência contínua com relação a  $(v, \tau)$  é preservada. Se  $\mathfrak{S} = \infty$ , por uniformidade de notação, definimos  $\Pi_0^+$  como o conjunto dos pontos da forma  $(\infty, \tau)$ .

Seja:

$$p(t, v, \tau) = \begin{cases} -\frac{\partial Q(x(t, v, \tau), t)}{\partial x}, & \text{se } 0 \leq v < \infty, \\ 0, & \text{se } v = \infty. \end{cases} \quad (2.90)$$

**Lema 2.2.5.** *Uma solução  $w(t, v, \tau)$  da equação*

$$\ddot{w} = p(t, v, \tau)w \quad (2.91)$$

*depende continuamente de  $(v, \tau)$  e das condições:*

$$\begin{cases} w_0 = w(\tau, v, \tau), \\ \dot{w}_0 = \dot{w}(\tau, v, \tau). \end{cases} \quad (2.92)$$

**demonstração:** A asserção é não trivial apenas para pontos da forma  $(\infty, \tau)$ .

Suponhamos que, conforme  $n \rightarrow \infty$ ,  $(v_n, \tau_n) \rightarrow (\infty, \tau')$  e  $(w_{0n}, \dot{w}_{0n}) \rightarrow (a, b)$ .

Seja  $w_n(t)$  a solução de (2.91) determinada pelas condições iniciais  $w_{0n} = w(\tau_n, v_n, \tau_n)$  e  $\dot{w}_{0n} = \dot{w}(\tau_n, v_n, \tau_n)$ . Temos que mostrar que para  $t_0$  arbitrário:

$$w_n(t_0) \rightarrow a + b(t_0 - \tau'), \quad \dot{w}_n(t_0) \rightarrow b. \quad (2.93)$$

A sequência  $\{w_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  se divide em duas subsequências, uma com  $\tau_n \geq t_0$  e outra com  $\tau_n \leq t_0$ . Provaremos (2.93) para  $\tau_n \leq t_0$ , e o outro caso demonstra-se de forma análoga.

Pela segunda parte da proposição 2.1.2, como  $\tau_n \geq t_0$ , concluímos que para  $n$  suficientemente grande temos  $T^+(v_n, \tau_n) > t_0$ , isto é,  $t_0 \in [\tau_n, T^+(v_n, \tau_n)]$ . Então, para  $t \in [\tau_n, t_0]$ , temos que  $x(t, v_n, \tau_n)$  é crescente e  $\dot{x}(t, v_n, \tau_n)$  é decrescente. Daí:

$$\begin{aligned} 0 &= x(\tau_n, v_n, \tau_n) \leq x(t, v_n, \tau_n) \\ &\leq \dot{x}(\tau_n, v_n, \tau_n)(t - \tau_n) \leq v_n(t - \tau_n) = o(v_n^2), \quad \tau_n \leq t \leq t_0. \end{aligned}$$

Pela parte 3) do lema 2.2.2, para  $n$  suficientemente grande:

$$\dot{x}(t, v_n, \tau_n) = V(x(t, v_n, \tau_n), v_n, \tau_n) \geq \frac{v_n}{2}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \theta_n &= \int_{\tau_n}^{t_0} \left| \frac{\partial Q(x(t, v_n, \tau_n), t)}{\partial x} \right| dt \\ &= \int_0^{x(t_0, v_n, \tau_n)} \left| \frac{\partial Q(x, t(x, v_n, \tau_n))}{\partial x} \frac{1}{V(x(t, v_n, \tau_n), v_n, \tau_n)} \right| dx \\ &\leq \frac{2}{v_n} \int_0^{v_n(t_0 - \tau_n)} \left| \frac{\partial Q(x, t(x, v_n, \tau_n))}{\partial x} \right| dx = \frac{2}{v_n} \int_0^{o(v_n^2)} \left| \frac{\partial Q(x, t(x, v_n, \tau_n))}{\partial x} \right| dx. \end{aligned}$$

Tomando  $x^*$  de 6º, temos que, no intervalo  $0 \leq x \leq x^*$ ,  $\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right|$  é uma função limitada, diga-se por uma constante  $C$ . Se  $x \geq x^*$ , então  $\frac{\partial Q}{\partial t} \leq 0$  e:

$$\left| \frac{\partial Q(x, t(x, v_n, \tau_n))}{\partial x} \right| = -\frac{d}{dx}[Q(x, t(x, v_n, \tau_n))] + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x},$$

e daí:

$$\begin{aligned} \theta_n &\leq \frac{2}{v_n} \int_0^{x^*} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dx + \frac{2}{v_n} \int_{x^*}^{o(v_n^2)} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dx \\ &\leq \frac{2}{v_n} C x^* + \frac{2}{v_n} \int_{x^*}^{o(v_n^2)} \left[ \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{dQ(x, t(x, v_n, \tau_n))}{dx} \right] dx. \end{aligned}$$

Usamos agora (2.15) e 4° (pelo lema 2.2.1):

$$\begin{aligned}
\theta_n &\leq \frac{2}{v_n} Cx^* + \frac{2}{v_n} \left[ \int_{x^*}^{o(v_n^2)} \frac{2}{v_n} \psi(x) dx - [Q(o(v_n^2), t(o(v_n^2))) - Q(x^*, t(x^*))] \right] \\
&\leq \frac{2}{v_n} [Cx^* + Q(x^*, t(x^*)) - Q(o(v_n^2), t(o(v_n^2)))] + \frac{4}{v_n^2} \int_0^\infty \psi(x) dx \\
&\leq \frac{2}{v_n} Cx^* + \frac{2}{v_n} Cx^* - \frac{2Q(o(v_n^2), t(o(v_n^2)))}{v_n} + \frac{4}{v_n^2} \int_0^\infty \psi(x) dx \\
&\leq \frac{4}{v_n} Cx^* + \int_0^\infty \psi(x) dx \\
&= O\left(\frac{1}{v_n}\right).
\end{aligned}$$

Seja  $M_n = \max_{\tau_n \leq t \leq t_0} |w_n(t)|$ . Se integrarmos (2.91), para  $t \in [\tau_n, t_0]$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_n}^t \ddot{w}_n(s) ds &= \int_{\tau_n}^t p(s, v_n, \tau_n) w_n(s) ds \\
&\leq \int_{\tau_n}^t \left| \frac{\partial Q(x(s, v_n, \tau_n), s)}{\partial x} w(s) \right| ds \\
&\leq M_n \theta_n,
\end{aligned}$$

isto é:

$$\begin{aligned}
\dot{w}_n(t) - \dot{w}_{0n} &= \dot{w}_n(t) - \dot{w}_n(\tau_n) = \int_{\tau_n}^t \ddot{w}_n(s) ds \\
\Rightarrow \dot{w}_n(t) - \dot{w}_{0n} &\leq M_n \theta_n \Rightarrow \dot{w}_n(t) \leq \dot{w}_{0n} + M_n \theta_n,
\end{aligned}$$

e daí:

$$\begin{aligned}
w_n(t) - w_{0n} &= w_n(t) - w_n(\tau_n) = \int_{\tau_n}^t \dot{w}_n(s) ds \\
&\leq \int_{\tau_n}^t \dot{w}_{0n} ds + \int_{\tau_n}^t M_n \theta_n ds \\
&\leq \dot{w}_{0n}(t - \tau_n) + M_n \theta_n(t - \tau_n) \\
\Rightarrow w_n(t) &\leq w_{0n} + \dot{w}_{0n}(t - \tau_n) + M_n \theta_n(t - \tau_n).
\end{aligned}$$

Como  $\max_{\tau_n \leq t \leq t_0} |w_n(t)| = M_n$  e  $\max_{\tau_n \leq t \leq t_0} (t - \tau_n) = (t_0 - \tau_n)$ , ficamos com:

$$M_n \leq |w_{0n}| + |\dot{w}_{0n}|(t_0 - \tau_n) + M_n \theta_n (t_0 - \tau_n),$$

então:

$$M_n \leq \frac{|w_{0n}| + |\dot{w}_{0n}|(t_0 - \tau_n)}{1 - \theta_n(t_0 - \tau_n)} = O(1)$$

Agora:

$$\begin{aligned} & |w_n(t_0) - [a + b(t_0 - \tau')]| \\ &= \left| \int_{\tau_n}^{t_0} \dot{w}_n(t) dt + w_{0n} + (\dot{w}_{0n} - \dot{w}_{0n})(t_0 - \tau') - [a + b(t_0 - \tau')] \right| \\ &\leq |w_{0n} - a| + |\dot{w}_{0n} - b|(t_0 - \tau') + \left| \int_{\tau_n}^{t_0} \dot{w}_n(t) dt - \dot{w}_{0n}(t_0 - \tau') \right| \\ &= |w_{0n} - a| + |\dot{w}_{0n} - b|(t_0 - \tau') + \left| \int_{\tau_n}^{t_0} \dot{w}_n(t) dt - \int_{\tau'}^{t_0} \dot{w}_{0n} dt \right| \\ &= |w_{0n} - a| + |\dot{w}_{0n} - b|(t_0 - \tau') + \left| \int_{\tau_n}^{\tau'} \dot{w}_n(t) dt + \int_{\tau'}^{t_0} \dot{w}_n(t) dt - \int_{\tau'}^{t_0} \dot{w}_{0n} dt \right| \\ &\leq |w_{0n} - a| + |\dot{w}_{0n} - b|(t_0 - \tau') + \left| \int_{\tau_n}^{\tau'} \dot{w}_n(t) dt \right| + \left| \int_{\tau'}^{t_0} (\dot{w}_n(t) - \dot{w}_{0n}) dt \right| \\ &\leq |w_{0n} - a| + |\dot{w}_{0n} - b|(t_0 - \tau') + \left| \int_{\tau_n}^{\tau'} \dot{w}_n(t) dt \right| + \int_{\tau'}^{t_0} |(\dot{w}_n(t) - \dot{w}_{0n})| dt \\ &\leq |w_{0n} - a| + |\dot{w}_{0n} - b|(t_0 - \tau') + \left| \int_{\tau_n}^{\tau'} \dot{w}_n(t) dt \right| + M_n \theta_n (t_0 - \tau') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

E temos também:

$$\begin{aligned} |\dot{w}_n(t_0) - b| &= \left| \int_{\tau_n}^{t_0} \ddot{w}(t) dt + \dot{w}_n(\tau_n) - b \right| \\ &\leq |\dot{w}(\tau_n) - b| + \left| \int_{\tau_n}^{t_0} \ddot{w}_n(t) dt \right| \\ &\leq |\dot{w}_{0n} - b| + M_n \theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

■

O aspecto mais importante das soluções de (2.87) e de (2.91) é a magnitude da velocidade  $\delta x(t)$  ou  $\dot{w}(t)$  para  $t$  grande. Por 6° a função  $p(t, v, \tau)$  é não negativa para  $t$  grande, se  $(v, \tau) \in \Pi_0^+ \cup H_0^+$ . Então o seguinte resultado é bastante útil:

**Lema 2.2.6.** *Se na equação:*

$$\ddot{w} = p(t)w \quad (2.94)$$

$p(t)$  é não negativo para todo  $t \geq t_0$ , então as seguintes asserções são válidas:

1 - Para cada solução o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{w}(t) = \dot{w}(\infty)$  (finito ou infinito) existe.

2 - Existe uma solução  $w_1(t)$ , que é única a menos de um fator constante positivo, tal que ela é não trivial, é não negativa para  $t$  grande e  $\dot{w}_1(\infty) = 0$ ; aqui  $w_1(t) > 0$  e  $\dot{w}_1(t) \leq 0$  para todo  $t \geq t_0$ .

3 - Para uma solução arbitrária  $w_2(t)$ :

$$\text{sinal}(\dot{w}_2(\infty)) = \text{sinal} \left( \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ \dot{w}_1 & \dot{w}_2 \end{vmatrix} \right).$$

**demonstração:** Seja  $\{w_3(t), w_4(t)\}$  um sistema fundamental de soluções de (2.94) com condições iniciais em  $t_0$  dadas por:

$$\begin{pmatrix} w_3(t_0) & w_4(t_0) \\ \dot{w}_3(t_0) & \dot{w}_4(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para  $t \geq t_0$  uma solução de (2.94) tem no máximo um zero. De fato, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $w(\bar{t}) > 0$ , com  $\bar{t} > t_0$  e  $w(t) > 0$  para  $t \in (t_0, \bar{t})$ . Se tivéssemos um zero para  $\hat{t} > \bar{t}$ , em algum momento deveríamos ter  $\dot{w}(t) < 0$  e  $w(t) > 0$ , com  $t > t_0$ . Mas para isso deveríamos ter  $\ddot{w}(t) < 0$ , o que não ocorre para  $t \geq t_0$ , pois nesse caso  $p(t) \geq 0$ .

Então cada uma solução de (2.94) tem no máximo um zero para  $t \geq t_0$ . Ou seja, depois de um dado ponto seu sinal é constante. Sem perda de generalidade, supomos que  $w(t) > 0$ . Então  $\ddot{w} = pw \geq 0$ , isto é,  $\dot{w}$  é não decrescente, de onde o limite  $\dot{w}(\infty)$  existe.

O único zero de  $w_4$  para  $t \geq t_0$  é em  $t = t_0$ . Como  $\dot{w}_4(t_0) = 1$ , para  $t > t_0$  tem-se, para  $t > t_0$ ,  $w_4(t) > 0$  e  $\dot{w}_4(t) \geq 1$ , de onde  $\lim_{t \rightarrow \infty} w_4(t) = \infty$ .

Agora, temos:



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{w_3}{w_4} \right) &= \frac{\dot{w}_3}{w_4} - \frac{w_3 \dot{w}_4}{w_4^2} = \frac{\dot{w}_3 w_4 - w_3 \dot{w}_4}{w_4^2} \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} w_3 & w_4 \\ \dot{w}_3 & \dot{w}_4 \end{vmatrix}}{w_4^2} = - \frac{1}{w_4^2} < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{w}_3}{\dot{w}_4} \right) &= \frac{\ddot{w}_3}{\dot{w}_4} - \frac{\dot{w}_3 \ddot{w}_4}{\dot{w}_4^2} = \frac{\ddot{w}_3 \dot{w}_4 - \dot{w}_3 \ddot{w}_4}{\dot{w}_4^2} \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} \dot{w}_3 & \dot{w}_4 \\ \ddot{w}_3 & \ddot{w}_4 \end{vmatrix}}{w_4^2} = - \frac{\begin{vmatrix} \dot{w}_3 & \dot{w}_4 \\ p w_3 & p w_4 \end{vmatrix}}{w_4^2} \\ &= \frac{p}{\dot{w}_4^2} \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w_3}{w_4} - \frac{\dot{w}_3}{\dot{w}_4} &= \frac{w_3 \dot{w}_4 - \dot{w}_3 w_4}{w_4 \dot{w}_4} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} w_3 & w_4 \\ \dot{w}_3 & \dot{w}_4 \end{vmatrix}}{w_4 \dot{w}_4} = \frac{1}{w_4 \dot{w}_4} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Então existe o limite:

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w_3}{w_4} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{w}_3}{\dot{w}_4},$$

onde:

$$\frac{w_3}{w_4} > \alpha \geq \frac{\dot{w}_3}{\dot{w}_4}.$$

Consideremos então a solução  $w_1 = w_3 - \alpha w_4$ :

$$w_1(t) = w_3(t) - \alpha w_4(t) > w_3(t) - \frac{w_3(t)}{w_4(t)} w_4(t) = 0, \text{ para } t \geq 0, \quad (2.95)$$

$$w_1(t) = \dot{w}_3(t) - \alpha \dot{w}_4(t) \leq \dot{w}_3(t) - \frac{\dot{w}_3(t)}{\dot{w}_4(t)} \dot{w}_4(t) = 0, \text{ para } t \geq 0. \quad (2.96)$$

Por (2.95) é claro que  $\dot{w}_1(\infty)$  não pode ser negativa. De (2.96) conclui-se que  $\dot{w}_1(\infty)$  não pode ser positiva. Então  $\dot{w}_1(\infty) = 0$ .

Então já demonstramos as partes 1 e 2 do lema. Demonstramos agora a parte 3.

Para uma solução arbitrária  $w_2(t)$  temos:

$$\begin{aligned} w_2(t) &= w_2(t_0)w_3(t) + \dot{w}_2(t_0)w_4(t) \\ &= w_2(t_0)w_3(t) - \alpha w_2(t_0)w_4(t) + \alpha w_2(t_0)w_4(t) + \dot{w}_2(t_0)w_4(t) \\ &= w_2(t_0)[w_3(t) - \alpha w_4(t)] + [\alpha w_2(t_0) + \dot{w}_2(t_0)]w_4(t) \\ &= w_2(t_0)w_1(t) + \begin{vmatrix} 1 & w_2(t_0) \\ -\alpha & \dot{w}_2(t_0) \end{vmatrix} w_4(t) \\ &= w_2(t_0)w_1(t) + \begin{vmatrix} w_1(t_0) & w_2(t_0) \\ \dot{w}_1(t_0) & \dot{w}_2(t_0) \end{vmatrix} w_4(t). \end{aligned}$$

E então:

$$\dot{w}_2(\infty) = w_2(t_0)\dot{w}_1(\infty) + \begin{vmatrix} w_1(t_0) & w_2(t_0) \\ \dot{w}_1(t_0) & \dot{w}_2(t_0) \end{vmatrix} \dot{w}_4(\infty).$$

Como  $\dot{w}_1(\infty) = 0$  e  $\dot{w}_4(\infty) \geq 1$ , temos que:

$$\text{signal}(\dot{w}_2(\infty)) = \text{signal} \left( \begin{vmatrix} w_1(t_0) & w_2(t_0) \\ \dot{w}_1(t_0) & \dot{w}_2(t_0) \end{vmatrix} \right).$$

Se  $\dot{w}_2(\infty) = 0$ , então o wronskiano acima é nulo e  $w_2(t)$  é proporcional a  $w_1$ . Se  $w_2$  é não negativo para  $t$  grande, o fator de proporcionalidade é positivo.

■

Comparando (2.92) com (2.88) e (2.89), percebemos que cada par de condições iniciais  $\{w_0, \dot{w}_0\}$  corresponde ao vetor tangente  $(\delta v, \delta \tau) = (\dot{w}_0, -w_0/v)$  no ponto  $(v, \tau)$ , o que determina a derivada de uma função  $f$  na direção de  $(\delta v, \delta \tau)$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial v} \delta v + \frac{\partial f}{\partial \tau} \delta \tau = \dot{w}_0 \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{w_0}{v} \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

O campo de condições iniciais  $\delta = \{w_0(v, \tau), \dot{w}_0(v, \tau)\}$ , definido em alguma região, determina um operador diferencial:

$$\delta = \dot{w}_0(v, \tau) \frac{\partial}{\partial v} - \frac{w_0(v, \tau)}{v} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (2.97)$$

que denotamos pela mesma letra que o campo. Reciprocamente, o operador diferencial acima determina um campo de condições iniciais para (2.87) ou (2.91).

**Lema 2.2.7.** *Suponha que em uma vizinhança do ponto  $(v_0, \tau_0) \in \Pi_0^+$  estão definidos dois campos de condições iniciais contínuos:*

$$\delta_i = \{w_{0i}(v, \tau), \dot{w}_{0i}(v, \tau)\}, \quad i = 1, 2$$

e seja  $w_i(t, v, \tau)$  a solução de (2.91) com condições iniciais dadas por  $\delta_i$ .  
Se:

$$1) \delta_1 h^+ = 0, \delta_1 T^+ < 0 \text{ em } R_0^+$$

e

$$2) \begin{vmatrix} w_{01} & w_{02} \\ \dot{w}_{01} & \dot{w}_{02} \end{vmatrix} > 0,$$

então existem uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $(v_0, \tau_0)$ ,  $t^*$  e  $C > 0$  tais que:

$$\dot{w}_2(t, v, \tau) \geq C > 0$$

para todo  $(v, \tau) \in \mathcal{U} \cap R_0^+$  e  $t \in [t^*, T^+(v, \tau)]$ .

O mesmo é verdade se trocarmos  $+$  por  $-$ .

**demonstração:** Provemos para o caso  $+$ :

Como  $(v_0, \tau_0) \in \Pi_0^+$ , ou  $x(t, v_0, \tau_0)$  é parabólica ou  $v_0 = \infty$  (definimos  $\Pi_0^+ = \{(\infty, \tau)\}$  para o caso em que  $\mathfrak{S} = \infty$ ). Pela parte 3 do lema 2.2.2, quando  $v \rightarrow \infty$ , no intervalo  $0 \leq y \leq o(v^2)$ , vale  $V(y, v, \tau) = v - o(v)$ , com  $o(v)$  uniforme em  $\tau$ . Então, para  $0 \leq x \leq o(v^2)$ ,  $\dot{x} > v/2$ , para  $v$  suficientemente grande.

Em ambos os casos, existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $(v_0, \tau_0)$  e um número  $t_0 \geq \max_{(v, \tau) \in \mathcal{V}} \tau$  tal que para  $(v, \tau) \in \mathcal{V} \cap R_0^+$  nós temos  $x(t_0, v, \tau) \geq x^*$ , e no intervalo  $[\tau, t_0]$   $\dot{x}(t, v, \tau) > 0$  (e então  $T^+(v, \tau) > t_0$ ). Aqui  $x^*$  é aquele em  $6^\circ$  e, portanto, para  $(v, \tau) \in \mathcal{V} \cap (R_0^+ \cup \Pi_0^+)$  e  $t_0 \leq t \leq T^+(v, \tau)$ , a função  $p(t, v, \tau)$  é não negativa.

Em  $R_0^+$  (2.87) e (2.91) são idênticas, e a derivada  $\delta_i x(t, v, \tau)$ , que é solução de (2.87), coincide com  $w_i(t, v, \tau)$ . Então (2.34), (2.35) e (2.37), juntamente com as hipóteses em 1), nos dão que:

$$w_1(T^+(v, \tau), v, \tau) = \delta_1 x(T^+(v, \tau), v, \tau) = \frac{\delta h^+(v, \tau)}{Q_0(X^+(v, \tau))} = 0 \quad (2.98)$$

e

$$\begin{aligned}\dot{w}_1(T^+(v, \tau), v, \tau) &= \delta_1 \dot{x}(T^+(v, \tau), v, \tau) \\ &= Q(X^+(v, \tau), T^+(v, \tau)) \delta_1 T^+(v, \tau) < 0.\end{aligned}\quad (2.99)$$

Em  $[t_0, T^+(v, \tau)]$  temos  $p(t, v, \tau) > 0$  e, então, como no lema 2.2.6, a solução tem, no máximo, um zero para  $t \geq t_0$ .

Então (2.98) e (2.99) nos dizem que  $w_1 \geq 0$  para  $t_0 \leq t \leq T^+(v, \tau)$ . Temos também que, em  $t_0 \leq t \leq T^+(v, \tau)$ ,  $\ddot{w}_1 = pw_1 \geq 0$ . Logo  $\dot{w}_1$  é não decrescente em  $[t_0, T^+(v, \tau)]$ . E, para  $t_0 \leq t < T^+(v, \tau)$ :

$$w_1(t, v, \tau) > 0, \quad \dot{w}_1(t, v, \tau) < 0. \quad (2.100)$$

Como  $(v_0, \tau_0) \in \Pi_0^+$ , então  $X^+(v, \tau) \rightarrow \infty$  quando  $(v, \tau) \rightarrow (v_0, \tau_0)$ . Então, pela proposição 2.2.1,  $T^+(v, \tau) \rightarrow \infty$ . Assim, passando o limite em (2.100), achamos que para  $t_0 \leq t < \infty$ :

$$w_1(t, v_0, \tau_0) \geq 0, \quad \dot{w}_1(t, v_0, \tau_0) \leq 0. \quad (2.101)$$

No ponto  $(v_0, \tau_0)$  (2.91) satisfaz as hipóteses do lema 2.2.6, e então o limite  $\dot{w}_1(\infty, v, \tau)$  existe. Como  $\dot{w}_1(t, v_0, \tau_0) \leq 0$ , esse limite não pode ser positivo. Como  $w_1(t, v_0, \tau_0) \geq 0$ , esse limite não pode ser negativo, ou teríamos  $w_1(t, v_0, \tau_0) < 0$  para  $t$  suficientemente grande. Então  $\dot{w}_1(\infty, v, \tau) = 0$ . Logo,  $w_1$  é a solução referida no item 2) do lema 2.2.6 e, pelo mesmo item, essa solução é não trivial. Temos, por hipótese, que:

$$\begin{vmatrix} w_{01} & w_{02} \\ \dot{w}_{01} & \dot{w}_{02} \end{vmatrix} > 0.$$

Mas o wronskiano de soluções de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem é constante em  $t$ , de onde, aplicando 3) do lema 2.2.6:

$$\dot{w}_2(\infty, v_0, \tau_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{w}_2(t, v_0, \tau_0) > 0.$$

Seja  $t^* \geq t_0$  tal que:

$$w_2(t^*, v_0, \tau_0) > 0, \quad \dot{w}_2(t^*, v_0, \tau_0) > 0.$$

Escolhemos então uma vizinhança  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  de  $(v_0, \tau_0)$  tal que em  $\mathcal{U} \cap R_0^+$ :

$$w_2(t^*, v, \tau) > 0, \quad \dot{w}_2(t^*, v, \tau) > C = \frac{1}{2} \dot{w}_2(t^*, v_0, \tau_0)$$

(pelo lema 2.2.5 a dependência de  $w_2$  em relação a  $(v, \tau)$  é contínua).

Seja  $(t^*, t^{**})$  o subintervalo máximo em  $[t^*, T^+(v, \tau))$  no qual  $\dot{w}_2(t, v, \tau) > 0$ . Nesse subintervalo:

$$w_2(t, v, \tau) > w_2(t^*, v, \tau) > 0 \text{ e } \ddot{w}_2 = pw_2 \geq 0.$$

Então  $\dot{w}_2$  é não decrescente até  $t^{**}$  e, portanto, permanece maior ou igual a  $C$ . Como esse subintervalo é máximo,  $t^{**} = T^+(v, \tau)$ .

■

A diferencial da aplicação  $S$  pode ser convenientemente escrita nas coordenadas:

$$\xi = h^-(v, \tau), \quad \eta = h^+(v, \tau), \quad (2.80)$$

que são regulares na vizinhança de um ponto arbitrário  $(v_0, \tau_0)$  onde o jacobiano  $\partial(\xi, \eta)/\partial(v, \tau)$  não se anula.

Isso será suficiente quando  $\mathfrak{S} < \infty$ , mas se  $\mathfrak{S} = \infty$  teremos que lidar com vizinhanças de pontos da forma  $(\infty, \tau)$ .

Usando as fórmulas assintóticas (2.83) podemos estender o jacobiano para pontos dessa forma por continuidade, e teremos:

$$J(v, \tau) = \begin{cases} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(v, \tau)} & \text{para } v < \infty, \\ -2A'_1(\tau) & \text{para } v = \infty. \end{cases} \quad (2.102)$$

Se em algum ponto  $(\infty, \tau_0)$  o jacobiano é não nulo, então  $A'_1(\tau_0) = -\frac{1}{2}J(\infty, \tau_0) \neq 0$ . Podemos aí aplicar a proposição 2.2.4 num intervalo  $\Delta = [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon]$  suficientemente pequeno e construir uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $(\infty, \tau_0)$  em cujos pontos de coordenadas finitas as coordenadas (2.80) são regulares ( para  $\mathcal{U}$  podemos tomar a união de  $\infty \times \Delta$  com a imagem do conjunto (2.81) sob a aplicação da proposição 2.2.4).

**Proposição 2.2.5.** *Se  $J \neq 0$  em  $(v_0, \tau_0) \in \Pi_0^+$ , então para algum  $C > 0$ , conforme  $(v, \tau) \rightarrow (v_0, \tau_0)$  em  $R_0^+$ :*

$$\frac{\partial T^+}{\partial \xi} = -\frac{v}{J} + o(v), \quad \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \frac{\partial T^+}{\partial \xi} \geq \frac{C}{vQ_0(X^+)} + o(1). \quad (2.103)$$

**demonstração:** De acordo com (2.34) e (2.35):

$$\left( \frac{\partial T^+}{\partial \xi}, \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right) = \frac{(\dot{x}_\xi(T^+), \dot{x}_\eta(T^+))}{Q(X^+, T^+)},$$

onde o subscrito indica derivada parcial.

O wronskiano para um par de soluções  $x_\xi, x_\eta$  da equação (2.87) é constante. Se nós o calcularmos para os tempos  $\tau$  e  $T^+$  podemos encontrar  $\dot{x}_\xi$ . De fato, por (2.34) e (2.11):

$$\delta x(T^+) = \delta X^+ = \frac{\delta h^+}{Q_0(X^+)} = \frac{\delta \eta}{Q_0(X^+)},$$

e então:

$$x_\xi(T^+) = 0, \quad x_\eta(T^+) = \frac{1}{Q_0(X^+)}.$$

Usando (2.88) e (2.89):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{Q_0(X^+)} \\ \dot{x}_\xi(T^+) & \dot{x}_\eta(T^+) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ \dot{x}_\xi & \dot{x}_\eta \end{vmatrix}_{t=T^+} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ \dot{x}_\xi & \dot{x}_\eta \end{vmatrix}_{t=\tau} \\ &= \begin{vmatrix} -v\tau_\xi & -v\tau_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{vmatrix} = v \begin{vmatrix} -\tau_\xi & -\tau_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{vmatrix} \\ &= -v \frac{\partial(v, \tau)}{\partial(\xi, \eta)} = v \frac{\partial(v, \tau)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{v}{J(v, \tau)}. \end{aligned}$$

Então:

$$\dot{x}_\xi(T^+) = -\frac{vQ_0(X^+)}{J(v, \tau)} \quad (2.104)$$

e

$$\frac{\partial T^+}{\partial \xi} = \frac{\dot{x}_\xi}{Q(X^+, T^+)} = -\frac{vQ_0(X^+)}{Q(X^+, T^+)J(v, \tau)}. \quad (2.105)$$

Mas:

$$\lim_{\substack{v \rightarrow v_0 \\ \tau \rightarrow \tau_0}} \frac{Q_0(X^+)}{Q(X^+, T^+)} = 1. \quad (2.106)$$

Demonstremos a veracidade do limite acima:

Como  $(v_0, \tau_0) \in \Pi_0^+$ ,  $X^+ \rightarrow \infty$ . Pelo lema 2.1.1 e pelas condições 3º e 5º, para  $X^+ \geq x^*$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{Q_0(X^+)}{Q(X^+, T^+)} - 1 \right| &= \frac{|Q_0(X^+) - Q(X^+, T^+)|}{Q(X^+, T^+)} \\ &\leq \frac{2\pi\psi(X^+)}{q(X^+)} \leq 2\pi\xi(X^+)q(X^+). \end{aligned}$$

Se  $\mathfrak{S} < \infty$ , então, por 5º,  $\xi$  é limitada, e  $q$  converge a zero, por (2.56). Se  $\mathfrak{S} = \infty$ , então  $\xi = o(1/X^+)$ . Mas  $q(x) \leq Q(x, t)$ , e  $Q(x, t)$  é limitada superiormente. Então vale (2.106).

Então, por (2.106) e por (2.105), chegamos a primeira equação em (2.103).

Para estimarmos  $x_\eta$ , usamos o lema 2.2.7. Os dois campos descritos em tal lema são dados pelos operadores diferenciais:

$$\delta_1 = \frac{J(v, \tau)}{v^2} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

e

$$\delta_2 = \begin{cases} v \frac{\partial}{\partial \eta}, & \text{se } \mathfrak{S} < \infty, \\ \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \xi}, & \text{se } \mathfrak{S} = \infty. \end{cases}$$

Temos  $\delta_2$  definido por duas expressões porque, para um ponto  $(v_0, \tau_0)$  com  $v_0 = \infty$ , nós sabemos por (2.77), (2.78) e (2.79) que, quando  $v \rightarrow \infty$ , as curvas de nível  $h^- = \xi$  e  $h^+ = \eta$  são quase ortogonais ao raio  $\tau = \text{constante}$ , mas isso não é necessariamente verdade para  $(v_0, \tau_0)$  com  $v_0$  finito e, ainda mais, o operador  $v \frac{\partial}{\partial \eta}$  não pode ser continuamente estendido até uma linha infinitamente distante.

Sendo  $f(\xi, \eta)$  uma função diferenciável qualquer:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial h^-}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h^+}{\partial v}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial h^-}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h^+}{\partial \tau}.$$

Então:

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.107)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (2.108)$$

De (2.107):

$$\frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Substituindo em (2.108)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &\Rightarrow \left[ \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial h^+}{\partial \tau} - \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial h^+}{\partial v} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{J(v, \tau)} \left[ \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} \right]. \end{aligned}$$

De (2.107):

$$\frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Usando essa igualdade em (2.108):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ &\Rightarrow \left[ \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial h^-}{\partial \tau} - \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \frac{\partial h^-}{\partial v} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{J(v, \tau)} \left[ \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} \right]. \end{aligned}$$

Agora:

$$\delta_1 = \frac{J}{v^2} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{v^2} \left[ \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} \right].$$

Para  $\mathfrak{S} < \infty$ , temos:

$$\delta_2 = v \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{v}{J(v, \tau)} \left[ \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} \right],$$



e, para  $\mathfrak{S} = \infty$ , temos:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{J(v, \tau)} \left[ \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial h^+}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \\ &= \frac{1}{J(v, \tau)} \left[ \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial h^+}{\partial \tau} - \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial h^+}{\partial v} \right] \frac{\partial}{\partial v} \\ &= \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

De acordo com (2.97) esses campos correspondem aos campos de condições iniciais:

$$\{w_{01}, \dot{w}_{01}\} = \left\{ \frac{1}{v} \frac{\partial h^+}{\partial v}, \frac{1}{v^2} \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \right\}$$

e

$$\{w_{02}, \dot{w}_{02}\} = \begin{cases} \left\{ -\frac{v^2}{J} \frac{\partial h^-}{\partial v}, -\frac{v}{J} \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \right\}, & \text{se } \mathfrak{S} < \infty, \\ \{0, 1\}, & \text{se } \mathfrak{S} = \infty. \end{cases}$$

O wronskiano desses campos é dado por:

$$\begin{vmatrix} w_{01} & w_{02} \\ \dot{w}_{01} & \dot{w}_{02} \end{vmatrix} = \begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{1}{v} \frac{\partial h^+}{\partial v} & -\frac{v^2}{J} \frac{\partial h^-}{\partial v} \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial h^+}{\partial \tau} & -\frac{v}{J} \frac{\partial h^-}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \left[ -\frac{\partial h^-}{\partial \tau} \frac{\partial h^+}{\partial v} + \frac{\partial h^-}{\partial v} \frac{\partial h^+}{\partial \tau} \right] = 1, & \text{se } \mathfrak{S} < \infty, \\ \begin{vmatrix} \frac{1}{v} \frac{\partial h^+}{\partial v} & 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial h^+}{\partial \tau} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v} \frac{\partial h^+}{\partial v} = \frac{v+o(1)}{v} = 1 + o\left(\frac{1}{v}\right), & \text{se } \mathfrak{S} = \infty \text{ e } v \rightarrow v_0 = \infty. \end{cases}$$

A continuidade desses campos numa vizinhança de  $(v_0, \tau_0) \in \Pi_0^+$  é clara se  $\mathfrak{S} < \infty$ , já que, por definição,  $J(v_0, \tau_0) \neq 0$ , e  $v$  não pode ser 0 ou  $\infty$  em  $\Pi_0^+$ . E, se  $\mathfrak{S} = \infty$ , por (2.78) e (2.79), temos:

$$\begin{aligned} \{w_{01}, \dot{w}_{01}\} &= \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{v}\right), \frac{A'_0(\tau)}{v^2} + \frac{A'_1(\tau)}{v^3} - \frac{1}{v^2} o\left(\frac{1}{v}\right) \right\} \\ &= \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{v}\right), \frac{A'_0(\tau)}{v^2} + \frac{A'_1(\tau)}{v^3} - o\left(\frac{1}{v^3}\right) \right\} \\ &= \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{v}\right), O\left(\frac{1}{v^2}\right) \right\}, \end{aligned}$$

onde usamos que  $A'_0(\tau)$  e  $A'_1(\tau)$  são funções limitadas, pois estão definidas num compacto  $[0, 2\pi]$  e são funções contínuas, e a continuidade de  $\delta_1$  é então garantida se estendermos esse campo para o infinito colocando  $\{w_{01}, \dot{w}_{01}\} = \{0, 1\}$ .

Além disso:

$$\delta_1 h^+ = \frac{J}{v^2} \frac{\partial h^+}{\partial \xi} = \frac{\partial J}{\partial v^2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0$$

e

$$\delta_1 T^+ = \frac{J}{v^2} \frac{\partial T^+}{\partial \xi} = \frac{J}{v^2} \left( -\frac{vQ_0}{QJ} \right) = -\frac{Q_0}{vQ} < 0,$$

em virtude de (2.105).

Então as hipóteses do lema 2.2.7 são satisfeitas. Assim, existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  e números  $t^*$  e  $C > 0$  tais que em  $\mathcal{V} \cap R_0^+$  temos  $\dot{w}_2(t, v, \tau) \geq 2C > 0$  para  $t^* \leq t \leq T^+(v, \tau)$ .

Se  $\mathfrak{S} < \infty$ , então  $\delta_2 = v \frac{\partial}{\partial \eta}$  e, portanto, em  $\mathcal{V} \cap R_0^+$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} &= \frac{\dot{x}_\eta(T^+)}{Q(X^+, T^+)} = \frac{v \dot{x}_\eta(T^+)}{vQ(X^+, T^+)} = \frac{\delta_2 \dot{x}}{vQ(X^+, T^+)} \\ &= \frac{\dot{w}_2(T^+)}{vQ(X^+, T^+)} \geq \frac{2C}{vQ(X^+, T^+)}. \end{aligned}$$

Então, por (2.105):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \frac{\partial T^+}{\partial \xi} &\geq \frac{2C}{vQ(X^+, T^+)} - \frac{vQ_0(X^+)}{Q(X^+, T^+)} \\ &= \frac{1}{vQ(X^+, T^+)} \left[ 2C - \frac{v^2 Q_0(X^+)}{J} \right] \\ &\simeq \frac{1}{vQ_0(X^+)} \left[ 2C - \frac{v^2 Q_0(X^+)}{J} \right], \end{aligned}$$

numa vizinhança suficientemente pequena de  $(v_0, \tau_0)$ , por (2.106).

Dáí:

$$\frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \frac{\partial T^+}{\partial \xi} \geq \frac{2C}{vQ_0(X^+)} - \frac{v}{J} \geq \frac{C}{vQ_0(X^+)},$$

pois, nesse caso  $v_0$  é finito e  $Q_0(X^+) \rightarrow 0$ .

Provemos agora essa desigualdade no caso  $\mathfrak{S} = \infty$ . Nesse caso:

$$\dot{w}_2 = \delta_2 \dot{x} = \frac{\partial h^+}{\partial v} \dot{x}_\eta + \frac{\partial h^-}{\partial v} \dot{x}_\xi.$$

Aplicando (2.78), (2.104) e (2.106):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^+}{\partial \xi} + \frac{\partial T^+}{\partial \eta} &= \frac{\dot{x}_\eta + \dot{x}_\xi}{Q(X^+, T^+)} = \frac{1}{Q(X^+, T^+)} \left( \frac{\frac{\partial h^-}{\partial v} \dot{x}_\eta + \frac{\partial h^-}{\partial v} \dot{x}_\xi}{\frac{\partial h^-}{\partial v}} \right) \\ &= \frac{1}{Q(X^+, T^+)} \left( \frac{\frac{\partial h^-}{\partial v} \dot{x}_\eta + \frac{\partial h^+}{\partial v} \dot{x}_\xi - \frac{\partial h^+}{\partial v} \dot{x}_\xi + \frac{\partial h^-}{\partial v} \dot{x}_\xi}{\frac{\partial h^-}{\partial v}} \right) \\ &= \frac{1}{Q(X^+, T^+)} \left( \frac{\frac{\partial h^-}{\partial v} \dot{x}_\eta + \frac{\partial h^+}{\partial v} \dot{x}_\xi}{\frac{\partial h^-}{\partial v}} + \frac{\left( \frac{\partial h^-}{\partial v} - \frac{\partial h^+}{\partial v} \right)}{\frac{\partial h^-}{\partial v}} \dot{x}_\xi \right) \\ &= \frac{1}{Q(X^+, T^+)} \left( \frac{\frac{\partial h^-}{\partial v} \dot{x}_\eta + \frac{\partial h^+}{\partial v} \dot{x}_\xi}{\frac{\partial h^-}{\partial v}} + \frac{\left( \frac{\partial h^-}{\partial v} - \frac{\partial h^+}{\partial v} \right)}{\frac{\partial h^-}{\partial v}} \left( -\frac{vQ_0(X^+)}{J} \right) \right) \\ &= \frac{\dot{w}_2(T^+)}{(v + o(1))Q(X^+, T^+)} + \frac{o(1)vQ_0(X^+)}{Q(X^+, T^+)J(v + o(1))} \\ &\geq \frac{2C}{(v + o(1))Q(X^+, T^+)} + o(1). \end{aligned}$$

■

Uma asserção similar é válida para derivadas de  $T^-$ . Nesse caso, quando  $(v, \tau) \rightarrow (v_0, \tau_0) \in \Pi_0^-$ , nós temos que em  $R_0^-$ :

$$\frac{\partial T^-}{\partial \eta} + \frac{\partial T^-}{\partial \xi} \leq -\frac{C}{vQ_0(X^-)} + o(1), \quad \frac{\partial T^-}{\partial \eta} = \frac{v}{J} + o(v). \quad (2.109)$$

Notamos que:

$$\dot{x}_\eta(T^-) = -\frac{vQ_0(X^-)}{J(v, \tau)} \quad (2.110)$$

e

$$\frac{\partial T^-}{\partial \eta} = \frac{vQ_0(X^-)}{Q(X^-, T^-)J(v, \tau)}. \quad (2.111)$$

**Proposição 2.2.6.** *Sejam  $\mathcal{U}_1$  e  $\mathcal{U}_2$  vizinhanças dos pontos  $(v_1, \tau_1) \in \Pi_0^+$  e  $(v_2, \tau_2) \in \Pi_0^-$ , respectivamente. Se  $J(v_i, \tau_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ , então conforme  $\mathcal{U}_i \rightarrow (v_i, \tau_i)$  na intersecção  $\mathcal{U}_1 \cap S^{-1}[\mathcal{U}_2 \cap R_0^-]$ :*

$$dS = \begin{pmatrix} d\xi' \\ d\eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ O(1) & \frac{\alpha J(v_2, \tau_2)}{v^2 Q_0(X^+(v, \tau))} + O(1) \end{pmatrix}, \quad \alpha(v, \tau) \geq C > 0. \quad (2.112)$$

**demonstração:** Conforme foi observado no parágrafo imediatamente anterior à proposição 2.2.5, as coordenadas (2.80) podem ser assumidas regulares em  $\mathcal{U}_i$  (ou em  $\mathcal{U}_i \cap R_0^\pm$ , se  $\mathfrak{S} = \infty$ ). E, conforme mostraremos na seção 2.3, a imagem de  $\mathcal{U}_2 \cap R_0^-$  por  $S^{-1}$  espirala tendendo à curva  $\Pi_0^+$ , de onde  $\mathcal{U}_1 \cap S^{-1}[\mathcal{U}_2 \cap R_0^-] \neq \emptyset$ .

Na intersecção  $\mathcal{U}_1 \cap S^{-1}(\mathcal{U}_2 \cap R_0^-)$  nós podemos usar essas coordenadas para os próprios pontos ou para suas imagens por  $S$ .

Lembrando que:

$$P^+ : (v, \tau) \longrightarrow (h^+(v, \tau), T^+(v, \tau))$$

e

$$P^- : (v, \tau) \longrightarrow (h^-(v, \tau), T^-(v, \tau)).$$

e que o corolário 2.2.2 nos dava que:

$$S = (P^-)^{-1} \circ P^+,$$

temos:

$$\begin{aligned} (\xi, \eta) \xrightarrow{P^+} (\eta, T^+(\xi, \eta)) &= (h^-(\xi', \eta'), T^-(\xi', \eta')) \\ &= (\xi', T^-(\xi', \eta')) \xrightarrow{(P^-)^{-1}} (\xi', \eta') = S(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Como  $S = (P^-)^{-1} \circ P^+$ :

$$\begin{aligned}
dS &= d[(P^-)^{-1} \circ P] = d((P^-)^{-1})dP = (dP^-)^{-1}dP \\
&= \left[ \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{\partial T^-}{\partial \xi} & \frac{\partial T^-}{\partial \eta} \end{array} \right)_{(\xi', \eta')} \right]^{-1} \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{\partial T^+}{\partial \xi} & \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{\frac{\partial T^-}{\partial \eta'}} \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial T^-}{\partial \eta'} & 0 \\ -\frac{\partial T^-}{\partial \xi'} & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{\partial T^+}{\partial \xi} & \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{\frac{\partial T^-}{\partial \eta'}} \left( \begin{array}{cc} 0 & \frac{\partial T^-}{\partial \eta'} \\ \frac{\partial T^+}{\partial \xi} & \frac{\partial T^+}{\partial \eta} - \frac{\partial T^-}{\partial \xi'} \end{array} \right),
\end{aligned}$$

onde escrevemos:

$$\frac{\partial T^-}{\partial \xi'} = \frac{\partial T^-}{\partial \xi} \Big|_{(\xi', \eta') \sim (v', \tau')}, \quad \frac{\partial T^-}{\partial \eta'} = \frac{\partial T^-}{\partial \eta} \Big|_{(\xi', \eta') \sim (v', \tau')}.$$

Pela proposição 2.1.4 temos  $X^+(v, \tau) \equiv X^-(v', \tau')$  e  $T^+(v, \tau) = T^-(v', \tau')$ . Então, por (2.105) e (2.111), temos em  $\mathcal{U}_1 \cap S^{-1}(\mathcal{U}_2 \cap R_0^-)$  conforme  $\mathcal{U}_i \rightarrow (v_i, \tau_i)$ :

$$\frac{\frac{\partial T^+}{\partial \xi}}{\frac{\partial T^-}{\partial \eta'}} = -\frac{\frac{vQ_0(X^+)}{Q(X^+, T^+)J} \Big|_{(v, \tau)}}{\frac{v'Q_0(X^-)}{Q(X^-, T^-)J} \Big|_{(v', \tau')}} = \frac{vJ(v', \tau')}{v'J(v, \tau)} = O(1). \quad (2.113)$$

Se  $\mathfrak{S} < \infty$  e  $(v_i, \tau_i)$  são finitos, então (2.113) é clara, por continuidade.

Se  $v_i = \infty$ , então  $J$  permanece finito mesmo em pontos do tipo  $(\infty, \tau)$ , mas  $v'/v \rightarrow 1$  conforme  $\mathcal{U}_i \rightarrow (v_i, \tau_i)$ , já que podemos aplicar a proposição 2.1.4 e (2.77): de acordo com (2.77), para  $v$  e  $v'$  grandes:

$$v \sim \sqrt{2h^+(v, \tau)}, \quad v' \sim \sqrt{2h^-(v', \tau')}$$

e, pela proposição 2.1.4,  $h^+(v, \tau) = h^-(v', \tau')$ , e então  $v \sim v'$ .

De acordo com (2.103) e (2.109), na intersecção  $\mathcal{U}_1 \cap S^{-1}(\mathcal{U}_2 \cap R_0^-)$  conforme  $\mathcal{U}_i \rightarrow (v_i, \tau_i)$ :

$$\frac{\partial T^+}{\partial \xi} + \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \geq \frac{C_1}{vQ_0(X^+(v, \tau))} + o(1),$$

$$\frac{\partial T^-}{\partial \xi'} + \frac{\partial T^-}{\partial \eta'} \leq -\frac{C_1}{v'Q_0(X^-(v', \tau'))} + o(1) = -\frac{C_1 \frac{v}{v'}}{vQ_0(X^+(v, \tau))} + o(1).$$

onde a constante  $C_1$  pode ser considerada 1, sem perda de generalidade. Então:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T^+}{\partial \eta} - \frac{\partial T^-}{\partial \xi'} \right) + \left( \frac{\partial T^+}{\partial \xi} - \frac{\partial T^-}{\partial \eta'} \right) &\geq \frac{1}{vQ_0(X^+)} + \frac{v/v'}{vQ_0(X^+)} + o(1) \\ &= \frac{(v' + v)/v'}{vQ_0(X^+)} + o(1), \end{aligned}$$

isto é:

$$\left( \frac{\partial T^+}{\partial \eta} - \frac{\partial T^-}{\partial \xi'} \right) + \left( \frac{\partial T^+}{\partial \xi} - \frac{\partial T^-}{\partial \eta'} \right) = \frac{\alpha_1}{vQ_0(X^+)} + o(1),$$

com  $\alpha_1 \geq C(v' + v)/v'$ .

Pela segunda equação de (2.109):

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial T^+}{\partial \eta} - \frac{\partial T^-}{\partial \xi'}}{\frac{\partial T^-}{\partial \eta'}} &= \frac{\alpha_1}{\left[ \frac{v'}{J(v', \tau')} + o(v') \right] vQ_0(X^+)} + \frac{o(1)}{\frac{v'}{J(v', \tau')} + o(v')} - \frac{\left( \frac{\partial T^+}{\partial \xi} - \frac{\partial T^-}{\partial \eta'} \right)}{\frac{\partial T^-}{\partial \eta'}} \\ &= \frac{\alpha_1}{\left[ \frac{v'}{J(v', \tau')} + o(v') \right] vQ_0(X^+)} + \frac{o(1)}{\frac{v'}{J(v', \tau')} + o(v')} - \frac{\frac{\partial T^+}{\partial \xi}}{\frac{\partial T^-}{\partial \eta'}} + 1 \\ &= \frac{\alpha_1}{\left[ \frac{v'}{vJ(v', \tau')} + \frac{o(v')}{v} \right] v^2 Q_0(X^+)} + \frac{o(1)}{\frac{v'}{J(v', \tau')} + o(v')} - \frac{-v/J(v, \tau) + o(v)}{v'/J(v', \tau') + o(v')} + 1 \\ &= \frac{vJ(v', \tau')\alpha_1}{[v' + J(v', \tau')o(v')]v^2 Q_0(X^+)} + \frac{o(1)}{\frac{v'}{J(v', \tau')} + o(v')} - \frac{-v/J(v, \tau) + o(v)}{v'/J(v', \tau') + o(v')} + 1. \end{aligned}$$

Quando  $v, v' \rightarrow \infty$ :

$$\frac{o(1)}{\frac{v'}{J(v', \tau')} + o(v')} = o(1)$$

e

$$\frac{-v/J(v, \tau) + o(v)}{v'/J(v', \tau') + o(v')} = \frac{-v + J(v', \tau')o(v)}{v' + J(v', \tau')o(v')} \rightarrow O(1).$$

Então:

$$\frac{\frac{\partial T^+}{\partial \eta} - \frac{\partial T^-}{\partial \xi'}}{\frac{\partial T^-}{\partial \eta'}} = \frac{J(v', \tau')\alpha}{v^2 Q_0(X^+)} + O(1),$$

onde, para algum  $\mathcal{U}$  na intersecção  $\mathcal{U}_1 \cap S^{-1}(\mathcal{U}_2 \cap R_0^-)$ :

$$\alpha = \frac{v\alpha_1}{v' + J(v', \tau')o(v')} = \frac{v\alpha_1}{v' + o(v')} \geq C_1 \left( \frac{v' + v}{v'} \right) \frac{v}{v' + o(v')} \geq C > 0,$$

pois, como já vimos,  $v/v'$  tem limite positivo.

Então:

$$dS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial T^+}{\partial \xi} & \frac{\partial T^+}{\partial \eta} - \frac{\partial T^-}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial T^-}{\partial \eta'} & \frac{\partial T^-}{\partial \eta'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ O(1) & \frac{J(v', \tau')\alpha}{v^2 Q_0(X^+)} + O(1) \end{pmatrix},$$

o que demonstra (2.112).

■

Estudemos  $\Pi_0^+$  e  $\Pi_0^-$  em mais detalhes. Se  $\mathfrak{S} < \infty$  essas linhas são curvas de Jordan suaves de acordo com o teorema 2.2.1.

$$\Pi_0^\pm = \left\{ (v, \tau) : h^\pm(v, \tau) = \int_0^\infty Q_0(x) dx \right\}.$$

Elas limitam as regiões  $R_0^+ \cup \{0\}$  e  $R_0^- \cup \{0\} = S(R_0^+ \cup \{0\})$ , respectivamente, que têm a origem em comum e que têm a mesma área pela proposição 2.1.5. Então a curva de Jordan  $\Pi_0^+$  não pode estar totalmente dentro ou totalmente fora do conjunto limitado pela curva de Jordan  $\Pi_0^-$ . Logo,  $\Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$  é não vazio. As tangentes a  $\Pi_0^+$  e  $\Pi_0^-$  num ponto  $(v_0, \tau_0)$  de sua intersecção coincidem se, e somente se:

$$J(v_0, \tau_0) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(v, \tau)} \Big|_{(v_0, \tau_0)} = \frac{\partial(h^-, h^+)}{\partial(v, \tau)} \Big|_{(v_0, \tau_0)} = 0.$$

Se  $\mathfrak{S} = \infty$  então, por definição,  $\Pi_0^+$  e  $\Pi_0^-$  coincidem com o conjunto dos pontos da forma  $(\infty, \tau)$ . Recordando (2.77):

$$h^\pm(v, \tau) = \frac{v^2}{2} - A_0(\tau) \mp \frac{A_1(\tau)}{v} + o\left(\frac{1}{v}\right),$$

vemos que  $h^+$  e  $h^-$  diferem menos perto dos raios  $\tau = \tau_0$  com  $A_1(\tau_0) = 0$ , e então os pontos  $(\infty, \tau_0)$  são, em algum sentido, pontos “reais” de  $\Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$ . Esses pontos existem, já que  $A_1(\tau)$  tem média zero:

$$A_1(\tau) = \int_0^\infty x \frac{\partial Q(x, \tau)}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty x [Q(x, \tau) - Q_0(x)] dx.$$

A condição  $J(v_0, \tau_0) \neq 0$  é agora equivalente, em virtude de (2.102), a  $A_1'(\tau_0) \neq 0$ , isto é,  $\tau_0$  é uma raiz simples de  $A_1(\tau) = 0$ .

**Definição 2.2.1.** Um ponto  $(v_0, \tau_0) \in \Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$ , com  $v_0 < \infty$ , é dito regular se  $J(v_0, \tau_0) \neq 0$ . Se  $v_0 = \infty$ , esse ponto é dito regular se  $J(v_0, \tau_0) \neq 0$  e  $A_1(\tau) = 0$ .

**Proposição 2.2.7.** Sejam  $(v_i, \tau_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  pontos regulares de  $\Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$ . Então existem arcos suaves

$$\gamma_i = \left\{ v = v_i(\xi), \tau = \tau_i(\xi), \Theta \leq \xi < \mathfrak{S} = \int_0^\infty Q_0(x) dx \right\}$$

tais que

$$h^-(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) \equiv h^+(v(\xi), \tau(\xi)) \equiv \xi,$$

e existem pontos  $P_{ij}^{(n)} \in \gamma_i \cap S^{-1}\gamma_j$ ,  $1 \leq i, j \leq p$ ,  $n \geq N$ , tais que:

- 1 )  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} SP_{ki}^{(n)} = (v_i, \tau_i)$ .
- 2 )  $h^\pm(P_{ij}^{(n-1)}) < h^\pm(P_{il}^{(n)}) < h^\pm(P_{jl}^{(n+1)})$ .
- 3 )  $SP_{ii}^{(n)} = P_{ii}^{(n)}$ .
- 4 )  $T^+(P_{ij}^{(n)}) - T^-(SP_{ij}^{(n)}) = 2\pi n$ .
- 5 ) Se para algum  $\alpha \in (0, 2)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q_0^\alpha(x) \int_0^x Q_0(y) dy = 0, \quad (2.114)$$

então  $\Theta$  pode ser escolhido de tal forma que  $\gamma_i \cap S^{-1}\gamma_j$  consiste somente de pontos  $P_{ij}^{(n)}$  e

$$\left| h^+(P_{ij}^{(n+1)}) - h^+(P_{ij}^{(n)}) \right| = o\left( [h^+(P_{ij}^{(n)})]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}} \right). \quad (2.115)$$



**demonstração:** Se  $\mathfrak{S} < \infty$ , então  $J(v_i, \tau_i) \neq 0$  implica que em alguma vizinhança de  $(v_i, \tau_i)$  (2.80) é um difeomorfismo.

Então para algum  $\Theta < \mathfrak{S}$  corresponde ao conjunto  $\{(\xi, \eta) : \Theta \leq \xi = \eta \leq \mathfrak{S}\}$  um arco suave  $\gamma_i$  contido completamente em  $R_0^+ \cap R_0^-$ , exceto por um extremo  $(v_i, \tau_i)$ . Nesse arco  $h^+ \equiv h^-$ .

Se  $\mathfrak{S} = \infty$ , então  $\tau_i$  é um zero simples da função  $A_1(\tau)$ ,  $A_1'(\tau) \neq 0$  em algum intervalo  $[\tau_i - \varepsilon, \tau_i + \varepsilon]$ , e  $0 \in [A_1(\tau_i - \varepsilon), A_1(\tau_i + \varepsilon)]$ . Pela proposição 2.2.4, nós sabemos que existe um arco suave dado pela equação  $h^-(v, \tau) = \xi = \eta = h^+(v, \tau)$  que tem  $\tau = \tau_i$  como assíntota (podemos tomar  $\varepsilon$  tão pequeno quanto queiramos), isto é,  $(v_i, \tau_i) = (\infty, \tau_i)$  é seu extremo infinitamente distante. Escolhendo  $\Theta$  suficientemente próximo de  $\mathfrak{S}$ , podemos assumir que os arcos  $\gamma_i$  são mutuamente disjuntos.

Seja  $(v_i(\xi), \tau_i(\xi))$  uma representação paramétrica de  $\gamma_i$ , onde escolhemos como parâmetro  $\xi = h^+ = h^-$ . A coordenada  $\tau$ , que é o ângulo nas coordenadas polares do plano  $\Phi$ , é definida *mod*  $2\pi n$ . Escolhemos um ramo ao longo de  $\gamma_1$ . Conforme nos movemos sobre a curva  $h^+(v, \tau) = \xi$  no sentido positivo (lembramos que as curvas de nível são curvas simples fechadas), a partir do ponto  $(v_1(\xi), \tau_1(\xi))$  encontramos pontos de todos os arcos  $\gamma_i$ ,  $i > 1$ , e estendemos para esses arcos nossa escolha de ramo da coordenada  $\tau$  por continuidade. Como os arcos  $\gamma_i$  são mutuamente disjuntos, essa construção não depende de  $\xi$ , e agora as funções  $\tau_i(\xi)$  são bem definidas.

Como  $(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) \rightarrow (v_i, \tau_i) \in \Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$  conforme  $\xi \rightarrow \mathfrak{S}$ , isso acarreta que  $X^\pm(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) \rightarrow \infty$  e, pela proposição 2.2.1 e pelo seu análogo com “menos”, temos:

$$\lim_{\xi \rightarrow \mathfrak{S}} T^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) = \infty$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow \mathfrak{S}} T^-(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) = -\infty,$$

onde ambas funções são contínuas. Então:

$$\varphi_{ij}^{(n)}(\xi) = T^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi)) - T^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) + 2\pi n$$

é contínua em  $[\Theta, \mathfrak{S})$  e vai a  $-\infty$  quando  $\xi \rightarrow \mathfrak{S}$ .

Percorrendo uma volta da curva  $h^-(v, \tau) = \xi$  na direção positiva a função  $T^-(v, \tau)$  cresce de  $2\pi$  de forma estrita, pela versão com “menos” do corolário 2.2.1. Se começarmos o circuito em  $(v_1(\xi), \tau_1(\xi))$ , então nós encontramos todos os pontos  $(v_j(\xi), \tau_j(\xi))$ ,  $j \neq 1$ , e retornamos a  $(v_1(\xi), \tau_1(\xi))$ . Então:

$$\varphi_{ij}^{(n-1)}(\xi) < \varphi_{i1}^{(n)}(\xi) < \varphi_{il}^{(n)}(\xi) < \varphi_{i1}^{(n+1)}(\xi). \quad (2.116)$$

De fato, consideremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{ij}^{(n-1)}(\xi) = T^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi)) - T^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) + 2\pi(n-1), \\ \varphi_{i1}^{(n)}(\xi) = T^-(v_1(\xi), \tau_1(\xi)) - T^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) + 2\pi n, \\ \varphi_{il}^{(n)}(\xi) = T^-(v_l(\xi), \tau_l(\xi)) - T^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) + 2\pi n, \\ \varphi_{i1}^{(n+1)}(\xi) = T^-(v_1(\xi), \tau_1(\xi)) - T^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) + 2\pi(n+1). \end{array} \right.$$

Como  $T^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi)) - T^-(v_1(\xi), \tau_1(\xi)) < 2\pi$ , pelas primeiras duas equações acima vemos que vale a primeira desigualdade de (2.116). Como  $T^-(v_l(\xi), \tau_l(\xi)) > T^-(v_1(\xi), \tau_1(\xi))$ , pelas segunda e terceira igualdades acima, vemos que vale a segunda desigualdade de (2.116) e, como  $T^-(v_l(\xi), \tau_l(\xi)) - T^-(v_1(\xi), \tau_1(\xi)) < 2\pi$ , pelas duas últimas igualdades acima, vale a terceira desigualdade de (2.116).

De forma semelhante mostramos que:

$$\varphi_{kl}^{(n+1)}(\xi) > \varphi_{il}^{(n)}(\xi) > \varphi_{il}^{(n)}(\xi) > \varphi_{i1}^{(n-1)}(\xi). \quad (2.117)$$

De (2.116) e (2.117) chegamos a:

$$\varphi_{ij}^{(n-1)}(\xi) < \varphi_{il}^{(n)}(\xi) < \varphi_{kl}^{(n+1)}(\xi). \quad (2.118)$$

Se  $n \geq N > \frac{1}{2\pi} \max_{i,j} \{T^+(v_i(\Theta), \tau_i(\Theta)) - T^-(v_j(\Theta), \tau_j(\Theta))\}$ , então  $\varphi_{ij}^{(n)}(\xi)$  tem pelo menos um zero em  $(\mathfrak{S}, \Theta)$ . De fato:

$$\begin{aligned} 2\pi n &\geq 2\pi N > \max_{i,j} \{T^+(v_i(\Theta), \tau_i(\Theta)) - T^-(v_j(\Theta), \tau_j(\Theta))\} \\ &\Rightarrow \varphi_{ij}^{(n)}(\Theta) = 2\pi n + T^-(v_j(\Theta), \tau_j(\Theta)) - T^+(v_i(\Theta), \tau_i(\Theta)) > 0. \end{aligned}$$

Mas  $\varphi_{ij}^{(n)}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \mathfrak{S}} -\infty$ .

Se definirmos  $\xi_{ij}^{(n)}$  como o sendo o zero de  $\varphi_{ij}^{(n)}(\xi)$ , então teremos, por (2.118):

$$\xi_{ij}^{(n-1)} < \xi_{il}^{(n)} < \xi_{kl}^{(n+1)}. \quad (2.119)$$

Consideremos agora os pontos  $P_{ij}^{(n)} = (v_i(\xi_{ij}^{(n)}), \tau_i(\xi_{ij}^{(n)}))$ . Teremos, claramente, nestes pontos:

$$h^\pm(P_{ij}^{(n-1)}) < h^\pm(P_{il}^{(n)}) < h^\pm(P_{kl}^{(n+1)}),$$

o que demonstra a asserção 2) desta proposição.

É claro que, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\xi_{ij}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{S}$ , e aí  $P_{ij}^{(n)} \rightarrow (v_i, \tau_i)$ . Similarmemente,  $SP_{ij}^{(n)} \rightarrow (v_j, \tau_j)$ , se nós mostrarmos que  $SP_{ij}^{(n)} \in \gamma_j$ , já que  $h^-(SP_{ij}^{(n)}) = h^+(P_{ij}^{(n)})$ , e  $\xi_{ij}^{(n)}$  será o parâmetro para  $SP_{ij}^{(n)}$  em  $\gamma_j$ .

O ponto  $(v_i(\xi), \tau_i(\xi))$  pertence a  $\gamma_i \cap S^{-1}\gamma_j$  se, e somente se,  $S(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) = (v_j(\xi'), \tau_j(\xi'))$  para algum  $\xi'$ . Então, pela proposição 2.2.2, e seu análogo com “menos”, e pelo corolário 2.2.2:

$$\begin{aligned} (\xi, T^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)))(\text{mod}2\pi) &= (h^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)), T^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)))(\text{mod}2\pi) \\ &= P^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) = P^-[S(v_i(\xi), \tau_i(\xi))] \\ &= P^-(v_j(\xi'), \tau_j(\xi')) \\ &= (h^-(v_j(\xi'), \tau_j(\xi')), T^-(v_j(\xi'), \tau_j(\xi')))(\text{mod}2\pi) \\ &= (\xi', T^-(v_j(\xi'), \tau_j(\xi')))(\text{mod}2\pi), \end{aligned}$$

de onde  $\xi = \xi'$  e  $T^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)) \equiv T^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi))(\text{mod}2\pi)$ , isto é,  $\xi$  é zero de algum  $\varphi_{ij}^{(n)}(\xi)$ .

Em particular,  $SP_{ij}^{(n)} = S(v_i(\xi_{ij}^{(n)}), \tau_i(\xi_{ij}^{(n)})) = (v_j(\xi_{ij}^{(n)}), \tau_j(\xi_{ij}^{(n)})) \in \gamma_j$ , e então  $P_{ij}^{(n)} \in \gamma_i \cap S^{-1}\gamma_j$ . Também,  $SP_{ii}^{(n)} = P_{ii}^{(n)}$ . Assim, as asserções 1), 2) e 3) estão provadas.

Como  $T^\pm(v, \tau + 2\pi) = T^\pm(v, \tau) + 2\pi$ , temos que  $T^\pm(v, \tau + 2\pi) - (\tau + 2\pi) = T^\pm(v, \tau) + 2\pi - \tau - 2\pi = T^\pm(v, \tau) - \tau$ , isto é,  $T^\pm(v, \tau) - \tau$  é  $2\pi$ -periódica em  $\tau$ . Temos:

$$\begin{aligned} T^+(P_{ij}^{(n)}) - T^-(SP_{ij}^{(n)}) &= T^+(v_i(\xi_{ij}^{(n)}), \tau_i(\xi_{ij}^{(n)})) \\ &= 2\pi n - \varphi_{ij}^{(n)}(\xi_{ij}^{(n)}) = 2\pi n, \end{aligned}$$

o que demonstra 4).

Se  $\varphi_{ij}^{(n)}(\xi)$  é monótona em  $[\Theta, \mathfrak{S}]$ , então  $\xi_{ij}^{(n)}$  é seu único zero, e assim cada ponto de  $\gamma_i \cap S^{-1}\gamma_j$  coincide com algum  $\xi_{ij}^{(n)}$ . Nas coordenadas (2.80) os arcos  $\gamma_i$  têm a equação  $\xi = \eta$ . Portanto, por (2.103) e (2.109):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{ij}^{(n)}}{d\xi} &= \frac{\partial T^-}{\partial \xi} + \frac{\partial T^-}{\partial \eta} - \frac{\partial T^+}{\partial \xi} - \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ &\leq -\frac{C}{v_j(\xi)Q_0(X^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi)))} - \frac{C}{v_i(\xi)Q_0(X^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)))} + o(1), \end{aligned}$$

conforme  $\xi \rightarrow \mathfrak{S}$ . Mas:

$$\xi \equiv h^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi)) \equiv \int_0^{X^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi))} Q_0(y) dy,$$

e então, por (2.114):

$$\begin{aligned} &v_j(\xi)Q_0(X^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi))) \\ &= \frac{v_j(\xi)}{\sqrt{h^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi))}} [h^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi))]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}} [h^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi))Q_0^\alpha(X^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi)))]^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{v_j(\xi)\xi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{h^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi))}} \left[ Q_0^\alpha(X^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi))) \int_0^{X^-} Q_0(y) dy \right]^{\frac{1}{\alpha}} = o\left(\xi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}}\right), \end{aligned}$$

já que  $v_j(\xi)$  e  $h^-(v_j(\xi), \tau_j(\xi))$  têm limites positivos finitos para  $\mathfrak{S} < \infty$ . Se  $\mathfrak{S} = \infty$  usamos (2.73). Essas estimativas também valem para  $v_i(\xi)Q_0(X^+(v_i(\xi), \tau_i(\xi)))$ , e então:

$$\xi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}} \frac{d\varphi_{ij}^{(n)}}{d\xi} \rightarrow -\infty.$$

Portanto, para valores suficientemente grandes de  $\Theta$  a derivada  $d\varphi_{ij}^{(n)}/d\xi < 0$ , e  $\varphi_{ij}^{(n)}$  é monótona em  $[\Theta, \mathfrak{S})$ . Também:

$$\begin{aligned} 2\pi &= \varphi_{ij}^{(n+1)}(\xi) - \varphi_{ij}^{(n)}(\xi) \\ &= \varphi_{ij}^{(n+1)}(\xi_{ij}^{(n+1)}) - \varphi_{ij}^{(n+1)}(\xi_{ij}^{(n+1)}) \\ &= \varphi_{ij}^{(n)}(\xi_{ij}^{(n)}) - \varphi_{ij}^{(n+1)}(\xi_{ij}^{(n+1)}) \\ &= \frac{d\varphi_{ij}^{(n)}(\theta)}{d\xi} (\xi_{ij}^{(n)} - \xi_{ij}^{(n+1)}), \end{aligned}$$

o que nos dá:

$$\frac{|\xi_{ij}^{(n+1)} - \xi_{ij}^{(n)}|}{|\xi_{ij}^{(n)}|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}}} \leq \frac{2\pi}{\theta^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}} \left| \frac{d\varphi_{ij}^{(n)}}{d\xi} \right|} \rightarrow 0,$$

o que demonstra (2.115)

■

**Corolário 2.2.3.** *Para cada ponto regular  $P \in \Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$  existe uma sequência  $\{(v^{(n)}, \tau^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  com  $(v^{(n)}, \tau^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$  e um número  $N$  tal que para  $n \geq N$  a solução  $x(t, v^{(n)}, \tau^{(n)})$  tem período  $4\pi n$  e anti-período  $2\pi n$ , e seus sucessivos zeros ocorrem a intervalos de  $2\pi n$ .*

**demonstração:** Consideremos um ponto regular  $(v_1, \tau_1)$  e o conjunto  $\{(v^{(n)}, \tau^{(n)})\} = \{P_{11}^{(n)}\}$ . Pela proposição (2.2.7)  $P_{11}^{(n)}$  é ponto fixo de  $S$ , e então a solução  $x(t, v^{(n)}, \tau^{(n)})$  é periódica.

Como  $T^+(P_{11}^{(n)}) - T^-(SP_{11}^{(n)}) = 2\pi n$ , temos que  $T^+(P_{11}^{(n)}) = T^-(P_{11}^{(n)}) = 2\pi n$ , o que prova este corolário.

■

## 2.3 O shift como subsistema da dinâmica S

**Lema 2.3.1.** *Sendo  $\rho: \Phi \rightarrow \Phi$  dada por:*

$$\rho(v, \tau) = (v, -\tau),$$

*temos que  $R_0^-$  é dado por  $\rho(R_0^+)$ , e vice-versa. Além disso, temos que:*

$$S^{-1} = \rho^{-1} \circ S \circ \rho.$$

**demonstração:** Consideremos uma solução  $x(t, v, \tau)$  de (2.1) com  $(v, \tau) \in R_0^+$ . Em (2.1), temos que:

$$r(t) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon \cos t) + O(\varepsilon^2).$$

Pela simetria do problema temos que:

$$x(t, v, \tau) = -x(-t, -v, -\tau).$$

Agora, por (2.4), temos:

$$-x(-t, -v, -\tau) = x(-t, v, -\tau).$$

Então:

$$x(t, v, \tau) = x(-t, v, -\tau).$$

Como  $(v, \tau) \in R_0^+$ ,  $x(t, v, \tau) \neq 0$  para  $t \in (\tau, \tau')$ , isto é,  $x(-t, v, -\tau) \neq 0$  para  $t \in (-\tau', -\tau)$  e, além disso,  $x(-\tau', v, -\tau) = x(\tau', v, \tau) = 0$ , de onde concluímos que  $(v, -\tau) \in R_0^-$ , e também que  $S(v', -\tau') = (v, -\tau)$ .

De forma semelhante, mostramos que se  $(v, \tau) \in R_0^-$ , então  $\rho(v, \tau) = (v, -\tau) \in R_0^+$ . Assim, temos que  $R_0^- = \rho(R_0^+)$  e  $R_0^+ = \rho(R_0^-)$ .

Como  $\rho = \rho^{-1}$ , temos:

$$\begin{aligned} (\rho^{-1} \circ S \circ \rho)(v', \tau') &= (\rho \circ S \circ \rho)(v', \tau') = (\rho \circ S)(v', -\tau') \\ &= \rho(v, -\tau) = (v, \tau), \end{aligned}$$

isto é,  $S^{-1} = \rho^{-1} \circ S \circ \rho$ .

■

Observemos que, como  $\rho$  é um difeomorfismo, temos também que  $\rho(\Pi_0^+) = \Pi_0^-$  e  $\rho(\Pi_0^-) = \Pi_0^+$ .

**Lema 2.3.2.** *A aplicação  $S : R_0^+ \rightarrow R_0^-$  leva a curva de nível  $h^+(v, \tau) = C$ ,  $0 < C < \mathfrak{S}$ , na curva de nível  $h^-(v, \tau) = C$ .*

**demonstração:** Pela proposição 2.1.4, temos que  $h^- = h^+ \circ S$ . Seja  $(v, \tau) \in R_0^+$ , com  $h^+(v, \tau) = C$ ,  $0 < C < \infty$ , e seja  $(v', \tau') = S(v, \tau)$ . Temos então que:

$$h^-(v', \tau') = h^- \circ S(v, \tau) = h^+(v, \tau) = C.$$

Como  $S$  é um difeomorfismo de  $R_0^+$  em  $R_0^-$  concluímos que  $S$  leva a curva de nível  $h^+(v, \tau) = C$  na curva de nível  $h^-(v, \tau) = C$ , qualquer que seja  $C \in (0, \infty)$ .

■

**Lema 2.3.3.** *Se a excentricidade  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequena então  $R_0^+ \neq R_0^-$  e  $\Pi_0^-$  intercepta  $\Pi_0^+$  na linha de simetria não tangencialmente num ponto  $P$ .*

**demonstração:** Pelo teorema 2.2.1 podemos escrever  $\Pi_0^+$  como

$$v = \lambda(\tau, \varepsilon).$$

Agora, pelo lema 2.3.1,  $(v, -\tau) \in \Pi_0^- \Leftrightarrow (v, \tau) \in \Pi_0^+$ , e podemos escrever  $\Pi_0^-$  como:

$$v = \lambda(-\tau, \varepsilon).$$

Ambas as curvas se interceptam, portanto, em  $\tau = 0$ . Para que as tangentes nesse ponto difiram, devemos ter:

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \neq 0. \quad (2.120)$$

Conforme mostraremos na seção 2.4,  $\Pi_0^+$  e  $\Pi_0^-$  são curvas reais analíticas. Portanto, a função  $\lambda$  é analítica. Então podemos expandi-la em série Taylor:

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \frac{\partial \lambda(0, 0)}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial^2 \lambda(0, 0)}{\partial \tau \partial \varepsilon} + O(\varepsilon^2).$$

Mostraremos que:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \lambda(0, 0)}{\partial \tau \partial \varepsilon} < 0. \quad (2.121)$$

É claro que (2.121) implica (2.120) para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Consideremos o potencial:

$$\mathcal{U}(x, t) = (x^2 + r^2(t))^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.122)$$

Então (2.1) é escrita como:

$$\ddot{x} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}. \quad (2.123)$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por  $\dot{x}$  e integrando de  $t$  a  $\infty$  obtemos:

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \ddot{x} \dot{x} ds &= \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \dot{x} ds \Rightarrow \frac{1}{2} \int_t^\infty \frac{d\dot{x}^2}{ds} ds = \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \dot{x} ds \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{x}^2(s, v, \tau, \varepsilon) \Big|_t^\infty &= \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \dot{x} ds. \end{aligned}$$

Atendo-nos ao caso parabólico, quando  $\dot{x}(\infty, v, \tau, \varepsilon) = 0$ , ficamos com:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = - \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \dot{x} ds. \quad (2.124)$$

Fazendo  $\varepsilon = 0$  em (2.124):

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = - \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial x} \dot{x} ds = \mathcal{U}_0. \quad (2.125)$$

Expandindo  $\mathcal{U}(x, t) = \mathcal{U}(x, t, \varepsilon)$  em série de Taylor em torno de  $\varepsilon$ :

$$\mathcal{U}(x, t, \varepsilon) = \mathcal{U}(x, t, 0) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{U}(x, t, 0)}{\partial \varepsilon} + O(\varepsilon^2),$$

onde:

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}(x, t, 0) = \frac{1}{(x^2 + 1/4)^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= - \frac{r(t)}{(x^2 + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial r(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{r(t) \cos t}{2(x^2 + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{4} \frac{\cos t}{(x^2 + 1/4)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Então escrevemos:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \varepsilon \mathcal{U}_1 + O(\varepsilon^2). \quad (2.126)$$

Tendo que:

$$\mathcal{U}_0 = \frac{1}{(x^2 + 1/4)^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathcal{U}_1 = \frac{1}{4} \frac{\cos t}{(x^2 + 1/4)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.127)$$



A equação (2.125) é independente de  $t$  e pode ser integrada explicitamente. Mas isso é desnecessário no presente caso. Apenas consideremos sua solução única  $\zeta(t)$  com:

$$\zeta(0) = 0, \quad \dot{\zeta}(0) > 0.$$

De (2.125) e (2.127) obtemos:

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{\sqrt{2}}{(\zeta^2(t) + 1/4)^{1/4}}.$$

Então  $\zeta(t)$  é uma função positiva e estritamente crescente para  $t > 0$ , e  $\dot{\zeta}(0) = 2$ . Assim, a solução geral da equação autônoma (2.125) é dada por  $\zeta(t - \tau)$ . Podemos, portanto, escrever:

$$x(t, v, \tau, \varepsilon) = \zeta(t - \tau) + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2)$$

e

$$\begin{aligned} \lambda(\tau, \varepsilon) &= \dot{x}(\tau, v, \tau, \varepsilon) = \dot{\zeta}(0) + \varepsilon \dot{x}_1(\tau, v, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2) \\ &= 2 + \varepsilon \dot{x}_1(\tau, v, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Então, em primeira aproximação,  $\Pi_0^+$  é um círculo de raio 2.

Para calcularmos  $x_1$  nós usaremos (2.124), comparando os coeficientes de  $\varepsilon$  e impondo a condição de fronteira  $x_1 = 0$  quando  $t = \tau$ .

Primeiramente, temos que:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{\dot{\zeta}^2}{2} + \varepsilon \dot{\zeta} \dot{x}_1 + O(\varepsilon^2).$$

Agora:

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \dot{x} ds &= \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial x} \dot{x} ds + \varepsilon \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x} \dot{x} ds + O(\varepsilon^2) \\ &= -\mathcal{U}_0 + \varepsilon \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x} (\dot{\zeta} + \varepsilon \dot{x}_1 + O(\varepsilon^2)) ds. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de  $\varepsilon$  dessas duas equações encontramos:

$$\dot{\zeta} \dot{x}_1 = - \int_t^\infty \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x} \dot{\zeta} ds, \quad (2.129)$$

que, em  $t = \tau$ , fica:

$$\dot{\zeta}(0)\dot{x}_1(\tau) = - \int_{\tau}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x} \dot{\zeta}(s - \tau) ds.$$

Na integral fazemos a mudança de variável  $u = s - \tau$  e utilizamos (2.127), com  $\varepsilon = 0$ . Lembrando que  $\dot{\zeta}(0) = 2$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(\tau) &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} -\frac{1}{4} \frac{3}{2} \left( x^2(u) + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{5}{2}} 2x(u) \cos(u + \tau) \dot{\zeta}(u) du \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{\infty} \left( \zeta^2(u) + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{5}{2}} \zeta(u) \dot{\zeta}(u) \cos(u + \tau) du. \end{aligned}$$

Para uma notação mais simples, introduzimos a função:

$$\omega(t) = \left( \zeta^2(t - \tau) + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{4}},$$

ficando com:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(\tau) &= \frac{3}{8} \int_0^{\infty} \frac{\zeta(u) \dot{\zeta}(u) \cos(u + \tau)}{\omega^{10}(u + \tau)} du \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{\infty} \frac{\zeta(u) \dot{\zeta}(u) (\cos u \cos \tau - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \tau)}{\omega^{10}(u + \tau)} du. \end{aligned}$$

Então, por (2.128):

$$\lambda(\tau, \varepsilon) = 2 + \frac{3}{8} \varepsilon (-A \operatorname{sen} \tau + B \cos \tau) + O(\varepsilon^2), \quad (2.130)$$

onde:

$$A = \int_0^{\infty} \frac{\zeta(u) \dot{\zeta}(u)}{\omega^{10}(u + \tau)} \operatorname{sen} u du \quad (2.131)$$

e

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\zeta(u) \dot{\zeta}(u)}{\omega^{10}(u + \tau)} \cos u du. \quad (2.132)$$

A fórmula (2.130) nos mostra que  $\Pi_0^+$  é, em primeira aproximação, uma elipse, e que a condição (2.121) será satisfeita se  $A > 0$ . De fato:

$$\left. \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varepsilon \partial \tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial(-A \operatorname{sen} \tau + B \cos \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = -A.$$

Pois mostremos que  $A > 0$ .

Acreditando que não haverá confusão, omitiremos os argumentos de diversas funções. Notemos que  $\zeta(u) > 0$  e  $\dot{\zeta}(u) > 0$  para  $u > 0$ . Isto, juntamente com o fato de que  $\operatorname{sen} u > 0$  para  $0 < u \leq \pi/2$ , nos dá que:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \frac{\zeta \dot{\zeta}}{\omega^{10}} \operatorname{sen} u \, du \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\zeta \dot{\zeta}}{\omega^{10}} \operatorname{sen} u \, du \\ &= -\frac{\zeta \dot{\zeta}}{\omega^{10}} \cos u \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\infty + \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{d}{du} \left( \frac{\zeta \dot{\zeta}}{\omega^{10}} \right) \cos u \, du, \end{aligned}$$

onde aplicamos integração por partes.

Quando  $u \rightarrow \infty$ ,  $\cos u$  fica limitado,  $\omega^{10}(u + \tau) \rightarrow \infty$ ,  $\zeta(u) \rightarrow \infty$  e  $\dot{\zeta}(u) \rightarrow 0$ . Mas, como  $\omega^{10}(u + \tau) \sim \zeta^5(u)$ , temos que:

$$\frac{\zeta \dot{\zeta}}{\omega^{10}} \cos u \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0,$$

e temos também que  $\cos \pi/2 = 0$  e  $\omega(t) > 0$ , qualquer que seja  $t$ . Ficamos então com:

$$A \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{d}{du} \left( \frac{\zeta \dot{\zeta}}{\omega^{10}} \right) \cos u \, du. \quad (2.133)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left( \frac{\zeta \dot{\zeta}}{\omega^{10}} \right) &= \frac{\zeta \ddot{\zeta}}{\omega^{10}} + \dot{\zeta} \frac{d}{du} \left( \frac{\zeta}{\omega^{10}} \right) = \frac{\zeta \ddot{\zeta}}{\omega^{10}} + \dot{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\zeta}{\omega^{10}} \right) \dot{\zeta} \\ &= \frac{\zeta \ddot{\zeta}}{\omega^{10}} + \dot{\zeta}^2 \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\zeta}{\omega^{10}} \right). \end{aligned} \quad (2.134)$$

De (2.125) temos:

$$\frac{1}{2} \dot{\zeta}^2 = \mathcal{U}_0(\zeta) = \frac{1}{(\zeta^2 + 1/4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow \dot{\zeta}^2 = 2\omega^{-2}$$

e de (2.123) temos que:

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial x} \Big|_{x=\zeta} = -\zeta \left( \zeta^2 + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{3}{2}} = -\zeta \omega^{-6}.$$

Então (2.134) fica:

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\zeta \dot{\zeta}}{\omega^{10}} \right) = -\zeta^2 \omega^{-16} + 2\omega^{-2} \frac{d(\zeta \omega^{-1})}{d\zeta},$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{d(\zeta \omega^{-10})}{d\zeta} &= \omega^{-10} + \zeta \frac{d\omega^{-10}}{d\zeta} \\ &= \omega^{-10} + \zeta \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^2 + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{5}{2}} \\ &= \omega^{-10} - 5\zeta^2 \omega^{-14}. \end{aligned}$$

Ficamos então com:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left( \frac{\zeta \dot{\zeta}}{\omega^{10}} \right) &= -\zeta^2 \omega^{-16} + 2\omega^{-2} (\omega^{-10} - 5\zeta^2 \omega^{-14}) \\ &= -\zeta^2 \omega^{-16} + 2\omega^{-12} - 10\zeta^2 \omega^{-16} \\ &= -\zeta^2 \omega^{-16} + 2\omega^{-16} \omega^4 - 10\zeta^2 \omega^{-16} \\ &= -\zeta^2 \omega^{-16} + 2\omega^{-16} \left( \zeta^2 + \frac{1}{4} \right) - 10\zeta^2 \omega^{-16} \\ &= \omega^{-16} \left( -9\zeta^2 + \frac{1}{2} \right) = f(\zeta). \end{aligned}$$

Será importante mostrar que  $f(\zeta(u)) < 0$  para  $u \geq \pi/2$ . Isso decorre diretamente do seguinte fato:

$$\zeta^2(u) \geq \zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) > 1, \text{ para } u \geq \frac{\pi}{2}. \quad (2.135)$$

Pois mostremos (2.135). Para isso, basta mostrarmos que  $\zeta(\pi/2) > 1$ , pois já sabemos que  $\dot{\zeta}(u) > 0$  para  $u > 0$ . A fim de chegarmos em uma contradição, suponhamos  $\zeta(\pi/2) \leq 1$ . Como  $\dot{\zeta}(u) > 0$  para  $u > 0$ , temos que  $\zeta(u) \leq 1$  para  $u \in (0, \pi/2]$ . Então:

$$\dot{\zeta}^2(u) = \frac{2}{(\zeta^2 + 1/4)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{2}{(1 + 1/4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{5}} > \frac{4}{3}, \text{ para } 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Aí, como  $\zeta(0) = 0$ :

$$\zeta^2\left(\frac{\pi}{2}\right) > \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 > 1.$$

Mas, como  $\dot{\zeta}(u) > 0$  para  $u > 0$ , então a desigualdade acima implica que  $\zeta(\pi/2) > 1$ , e chegamos a uma contradição. Então fica demonstrado o resultado (2.135).

Notemos agora que:

$$\begin{aligned} \frac{df(\zeta)}{d\zeta} &= -16\omega^{-17} \frac{d\omega}{d\zeta} \left(-9\zeta^2 + \frac{1}{2}\right) + \omega^{-16}(-18\zeta) \\ &= -8\zeta\omega^{-20} \left(-9\zeta^2 + \frac{1}{2}\right) - 18\zeta\omega^{-20}\omega^4 \\ &= -8\zeta\omega^{-20} \left(-9\zeta^2 + \frac{1}{2}\right) - 19\zeta\omega^{-20} \left(\zeta^2 + \frac{1}{4}\right) \\ &= \omega^{-20}\zeta \left(54\zeta^2 - \frac{17}{2}\right). \end{aligned}$$

Como, por (2.135),  $\zeta(u) > 1$  para  $u > \pi/2$ , temos que:

$$\frac{df(\zeta(u))}{d\zeta} > 0 \text{ para } u \geq \frac{\pi}{2},$$

e, como  $\dot{\zeta}(u) > 0$  para  $u > 0$ , temos que  $f(\zeta(u))$  é uma função estritamente crescente de  $u$  para  $u \geq \pi/2$ .

Como  $f(\zeta(u)) < 0$  para  $u \geq \pi/2$  e  $f(\zeta(u))$  é estritamente crescente para  $u \geq \pi/2$ :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(\zeta(u)) = 0.$$

Com esses resultados podemos agora mostrar que  $A > 0$ , usando (2.133). Escrevemos:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f(\zeta(u)) \cos u du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} f(\zeta(u)) \cos u du = \sum_{n=1}^{\infty} I_n,$$

onde:

$$I_n = \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} f(\zeta(u)) \cos u \, du.$$

Consideremos  $n = 2k - 1$  e  $n = 2k$ ,  $k \geq 1$ . Notamos que:

$$\begin{cases} \cos u < 0 & \text{para } u \in \left( \frac{(2(2k-1)-1)\pi}{2}, \frac{(2(2k-1)+1)\pi}{2} \right), \\ \cos u > 0 & \text{para } u \in \left( \frac{(2(2k)-1)\pi}{2}, \frac{(2(2k)+1)\pi}{2} \right), \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} \cos u < 0 & \text{para } u \in \left( \frac{(4k-3)\pi}{2}, \frac{(4k-1)\pi}{2} \right), \\ \cos u > 0 & \text{para } u \in \left( \frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2} \right). \end{cases}$$

Então, como  $f(\zeta(u)) < 0$  para  $u \geq \pi/2$ , concluímos que:

$$\begin{cases} f(\zeta(u)) \cos u > 0 & \text{para } u \in \left( \frac{(4k-3)\pi}{2}, \frac{(4k-1)\pi}{2} \right), \\ f(\zeta(u)) \cos u < 0 & \text{para } u \in \left( \frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2} \right). \end{cases}$$

Agora, como  $f(\zeta(u))$  é negativa e estritamente crescente para  $u \geq \pi/2$ , temos que  $|f(\zeta(u))|$  é estritamente decrescente para  $u \geq \pi/2$ . Assim:

$$\int_{\frac{(4k-3)\pi}{2}}^{\frac{(4k-1)\pi}{2}} f(\zeta(u)) \cos u \, du + \int_{\frac{(4k-1)\pi}{2}}^{\frac{(4k+1)\pi}{2}} f(\zeta(u)) \cos u \, du > 0.$$

Logo,  $I_{2k-1} + I_{2k} > 0$ , para todo inteiro  $k \geq 1$ , ou seja,  $\sum_{n=1}^{\infty} I_n > 0$ . Com isso mostramos que  $A > 0$ , o que demonstra o lema.

■

**Lema 2.3.4.** *Seja  $\gamma : v = v(\lambda), \tau = \tau(\lambda)$ , com  $\lambda \in [0, 1]$ , um arco  $C^1$ , tal que  $\gamma$  encontra  $\Pi_0^+$  no ponto  $p$  correspondente a  $\lambda = 1$  transversalmente, enquanto  $\gamma \setminus \{p\} \in R_0^+$ . Então a curva  $S(\gamma(\lambda)) = (v'(\lambda), \tau'(\lambda))$  aproxima-se de  $\Pi_0^-$  espiralando-se com  $\tau'(\lambda) \rightarrow \infty$  quando  $\lambda \rightarrow 1$ .*

**demonstração:** Da continuidade de  $h^+$  e  $\gamma$  temos que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} h^+(v(\lambda), \tau(\lambda)) = \mathfrak{S}.$$

Pela proposição 2.1.4, temos que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} h^-(S(v(\lambda)), S(\tau(\lambda))) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} h^-(v'(\lambda), \tau'(\lambda)) = \mathfrak{S},$$

isto é,  $(v'(\lambda), \tau'(\lambda))$  está se aproximando de  $\Pi_0^-$ . Como  $T^+$  é uma função contínua em  $R_0^+ \setminus \{0\}$  temos que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} T^+(\gamma(\lambda)) = \infty \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 1} \tau'(\lambda) = \infty,$$

pois  $\tau'(\lambda) > T^+(v(\lambda), \tau(\lambda))$  para  $0 \leq \lambda < 1$ .

■

**Lema 2.3.5.** *Seja  $\gamma : v' = v'(\lambda), \tau' = \tau'(\lambda)$ , com  $\lambda \in [0, 1]$ , um arco  $C^1$ , tal que  $\gamma$  encontra  $\Pi_0^-$  no ponto  $p$  correspondente a  $\lambda = 1$  transversalmente, enquanto  $\gamma \setminus \{p\} \in R_0^-$ . Então a curva  $S^{-1}(\gamma(\lambda)) = (v(\lambda), \tau(\lambda))$  aproxima-se de  $\Pi_0^+$  espiralando-se com  $\tau(\lambda) \rightarrow -\infty$  quando  $\lambda \rightarrow 1$ .*

**demonstração:** Análoga à do lema 2.3.4

■

Seja  $\Sigma$  o espaço de sequências definido no capítulo 1. Sabemos que, para  $N = \infty$ , tal espaço não é compacto. É interessante, portanto, que agora apresentemos uma compatificação  $\bar{\Sigma}$  de  $\Sigma$ .

Para chegarmos a esta compatificação nós admitimos elementos do seguinte tipo: para  $\kappa$  e  $\lambda$  satisfazendo  $\kappa \leq 0$  e  $\lambda \geq 1$  seja:

$$(\infty, s_{\kappa+1}, \dots, s_{\lambda-1}, \infty), \quad s_k \in A,$$

onde  $\kappa = 0$ ,  $\lambda = 1$  correspondem ao elemento  $(\infty, \infty)$ , e se  $\kappa = -\infty$ ,  $\lambda = \infty$ , a sequência acima pertence a  $\Sigma$ . Admitimos também sequências semi-infinitas com  $\kappa = -\infty$ ,  $\lambda < \infty$  ou  $\kappa > -\infty$ ,  $\lambda = \infty$ .

Consideremos o elemento com  $\kappa = -\infty$ ,  $\lambda < \infty$ :

$$s^* = (\dots, s_{-1}^*, s_0^*; \dots, s_{\lambda-1}^*, \infty).$$

Introduzimos suas vizinhanças:

$$\mathcal{W}_N(s^*) = \{s \in \bar{\Sigma} : s_k = s_k^* \text{ para } -N \leq k < \lambda \text{ e } s_\lambda \geq N\}, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

É claro que  $\mathcal{W}_M \subset \mathcal{W}_N$  para  $M \geq N$ .

Para os elementos com  $\kappa > -\infty$ ,  $\lambda = \infty$  as vizinhanças são análogas.

Consideremos as sequências do tipo:

$$s^* = (\infty, s_{\kappa+1}, \dots, s_0; \dots, s_{\lambda-1}, \infty).$$

Definimos suas vizinhanças como:

$$\mathcal{W}_N(s^*) = \{s \in \bar{\Sigma} : s_k = s_k^* \text{ para } \kappa \leq k < \lambda \text{ e } s_\kappa, s_\lambda \geq N\}, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

Estendemos  $\sigma$  ao novo shift  $\bar{\sigma}$  que é definido como anteriormente no domínio:

$$D(\bar{\sigma}) = \{s \in \bar{\Sigma} : s_0 \neq \infty\}.$$

O contra-domínio é:

$$R(\bar{\sigma}) = \{s \in \bar{\Sigma} : s_1 \neq \infty\}.$$

E o teorema 1.2.1 fica, neste caso:

**Teorema 2.3.1.** *A função  $S$  definida em  $R_0^+$  possui o shift  $\bar{\sigma}$  em  $D(\bar{\sigma})$  como um subsistema.*

**demonstração:** Seja  $P_1 = (v_1, \tau_1)$  o ponto de intersecção de  $\Pi_0^+$  e  $\Pi_0^-$ , com  $\tau_1 = 0$ .

Pelo Teorema 2.2.1,  $h^\pm \in C^1(\Phi \setminus \{0\})$  e  $\nabla h^\pm(v, \tau) \neq 0$  para  $(v, \tau) \in \Phi \setminus \{0\}$ . Então  $\nabla h^+(P_1)$  e  $\nabla h^-(P_1)$  são não nulos e ortogonais. Nós provamos no lema 2.3.3 que, em  $P_1$ ,  $\Pi_0^+$  e  $\Pi_0^-$  interceptam-se transversalmente, isto é, nesse ponto suas tangentes são transversais. Como o ângulo entre  $\nabla h^+(P_1)$  e  $\nabla h^-(P_1)$  é o mesmo que entre tais tangentes, concluímos que  $J(v_1, \tau_1) \neq 0$ .

Consideremos:

$$R' = \{(v, \tau) : \mathfrak{S} - \varepsilon \leq h^\pm(v, \tau) \leq \mathfrak{S}\}.$$

Seja  $R$  a componente conexa de  $R'$  tal que  $P_1 \in R$ . Dos lemas 2.3.1 e 2.3.2 temos que  $R$  é simétrico em relação a linha  $\tau = 0$ .



Podemos folhear  $R$  com as curvas de nível de  $\Pi_0^-$ . A imagem por  $S$  de cada uma dessas curvas em  $R$ , pelo lema 2.3.4, é uma curva que espirala tendendo a  $\Pi_0^-$ , e a imagem de  $R$  por  $S$  será como na figura:

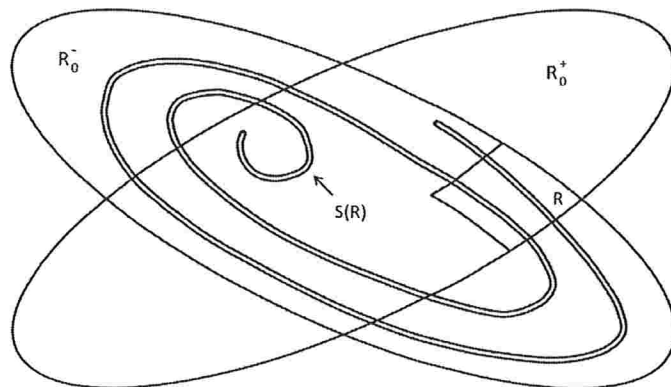


Figura 2.3:  $S(R)$

As componentes conexas de  $S(R) \cap R$ , salvo talvez um número finito delas, conectarão os lados opostos de  $R$  dados por  $h^+(v, \tau) = \mathfrak{S} - \varepsilon$  e  $h^+(v, \tau) = \mathfrak{S}$ , já que  $S(R)$  espirala tendendo a  $\Pi_0^-$ . A essas componentes denotaremos  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n, \dots$ , com o índice  $i$  aumentando conforme  $\mathcal{U}_i$  se aproxima de  $\Pi_0^-$ .

Definimos agora:

$$V_k = \rho(\mathcal{U}_k),$$

onde  $\rho$  é a reflexão dada no lema 2.3.1. Utilizando tal lema e a simetria de  $R$ , que nos dá que  $\rho(R) = R$ :

$$\begin{aligned} S^{-1}(R) \cap R &= S^{-1}(\rho(R)) \cap \rho(R) = \rho^{-1}(S(R)) \cap \rho^{-1}(R) \\ &= \rho^{-1}(S(R) \cap R) = \rho(S(R) \cap R), \end{aligned}$$

isto é,  $\bigcup_k V_k = S^{-1}(R) \cap R$ .

Queremos provar que  $S(V_k) = \mathcal{U}_k$ . Notemos que:

$$(v, \tau) \in V_k \Rightarrow (v, \tau) \in S^{-1}(R) \cap R \Rightarrow S(v, \tau) \in S(R) \cap R,$$

isto é,  $S(v, \tau) \in \mathcal{U}_j$ , para algum  $j$ .

Suponhamos que  $(v_a, \tau_a)$  e  $(v_b, \tau_b)$  pertencem a  $V_k$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow V_k$  uma curva contínua com  $\gamma(0) = (v_a, \tau_a)$  e  $\gamma(1) = (v_b, \tau_b)$  e tal que  $\gamma([0, 1]) \subset V_k$ . Pelo que mostramos acima, para cada  $\bar{t} \in [0, 1]$ ,  $S(\gamma(\bar{t})) \in \mathcal{U}_j$ , para algum  $J$ . Como  $S : R_0^+ \cup \{0\} \rightarrow R_0^- \cup \{0\}$  é um homeomorfismo, a imagem de  $\gamma$  por  $S$  será uma curva conexa. Então conclui-se que  $S(\gamma([0, 1])) \subset \mathcal{U}_j$ , para um certo  $j$ . Fixando  $(v_a, \tau_a)$  e variando  $(v_b, \tau_b)$  arbitrariamente em  $V_k$  concluímos que  $S(V_k) \subset \mathcal{U}_j$ , para um certo  $j$ .

De forma análoga mostramos que  $S^{-1}(\mathcal{U}_j) \subset V_l$ , para um certo  $l$ . Assim, se temos  $S(V_k) \subset \mathcal{U}_j$  e  $S^{-1}(\mathcal{U}_j) \subset V_l$ , concluímos que  $k = l$ , e  $S(V_k) = \mathcal{U}_j$ .

Mostraremos agora que  $S(V_k) = \mathcal{U}_k$ . Para isso, mostremos antes que:

$$S(V_k) = \mathcal{U}_i, \quad S(V_l) = \mathcal{U}_j \quad \text{e} \quad l > k \Rightarrow j > i.$$

Pois bem, se  $l > k$ , então  $V_l$  é uma faixa mais próxima de  $\Pi_0^+$  que  $V_k$ . Tomamos uma curva  $\gamma$  como a do lema 2.3.4 que intercepte  $V_l$  e  $V_k$ , com  $\gamma(0) \in V_k$ . Como  $S(\gamma(0)) \in \mathcal{U}_i$  e a curva  $S \circ \gamma$  espirala tendendo a  $\Pi_0^-$ , temos que a faixa  $\mathcal{U}_j$  está mais próxima de  $\Pi_0^-$  que  $\mathcal{U}_i$ , isto é,  $j > i$ .

Podemos agora provar que  $S(V_k) = \mathcal{U}_k$ . Suponhamos que  $S(V_k) = \mathcal{U}_j$ . Usando o lema 2.3.1:

$$\begin{aligned} S(V_k) &= (\rho \circ S^{-1} \circ \rho^{-1})(V_k) \Rightarrow \mathcal{U}_j = (\rho \circ S^{-1})(\mathcal{U}_k) \\ &\Rightarrow \rho^{-1}(\mathcal{U}_j) = S^{-1}(\mathcal{U}_k) \Rightarrow V_j = S^{-1}(\mathcal{U}_k) \\ &\Rightarrow S(V_j) = \mathcal{U}_k, \end{aligned}$$

isto é,  $S(V_k) = \mathcal{U}_j \Rightarrow S(V_j) = \mathcal{U}_k$ . Mas isso é impossível se  $j \neq k$ , pois mostramos acima que se  $S(V_k) = \mathcal{U}_i$  e  $S(V_l) = \mathcal{U}_k$ , então  $l > k \Rightarrow j > i$ . Logo,  $S(V_k) = \mathcal{U}_k$ .

Recordemos as coordenadas:

$$\xi = h^-(v, \tau), \quad \eta = h^+(v, \tau). \quad (2.80)$$

Nas coordenadas  $(\xi, \eta)$  as curvas de nível de  $\Pi_0^-$  são retas verticais e as curvas de nível de  $\Pi_0^+$  são retas horizontais, e  $R$  será o conjunto:

$$R = [\mathfrak{S} - \varepsilon, \mathfrak{S}] \times [\mathfrak{S} - \varepsilon, \mathfrak{S}].$$

Vamos agora utilizar a proposição 2.2.6, considerando  $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1$  e  $(v_2, \tau_2) = (v_1, \tau_1)$  (podemos fazer isso, pois no presente caso  $(v_1, \tau_1) \in \Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$ ). Podemos, de fato, utilizar essa proposição, pois já mostramos que  $J(v_1, \tau_1) \neq 0$ .

Temos que  $X^+(v, \tau) \rightarrow \infty$  quando  $(v, \tau) \rightarrow (v_1, \tau_1)$  e, como estamos tratando do caso  $\mathfrak{S} < \infty$ ,  $Q_0(X^+(v, \tau)) \rightarrow 0$  quando  $(v, \tau) \rightarrow (v_1, \tau_1)$ , conforme foi mostrado na demonstração do teorema 2.2.1.

Folheamos  $R$ , no plano  $\Phi$  de coordenadas polares, pelas curvas de nível de  $\Pi_0^-$ . Como já foi dito, nas coordenadas  $(\xi, \eta)$ , essas curvas são retas verticais, ou seja, os vetores unitários tangentes a essas curvas são sempre  $(0, 1)$ .

Se parametrizarmos uma dessas curvas por  $\gamma(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , com  $\gamma'(t) = (0, 1)$  para qualquer  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma(1) \in \Pi_0^+$  e  $\gamma([0, 1]) \subset R$ , e utilizamos a proposição 2.2.6, teremos:

$$\begin{aligned} dS(\gamma(t))\gamma'(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ O(1) & \frac{\alpha J(v_1, \tau_1)}{v^2 Q_0(X^+(\gamma(t)))} + O(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha J(v_1, \tau_1)}{v^2 Q_0(X^+(\gamma(t)))} + O(1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como já dissemos,  $Q_0(X^+(v, \tau)) \rightarrow 0$  quando  $(v, \tau) \rightarrow (v_1, \tau_1)$ . Então, dado  $N \in \mathbb{N}$ , para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno:

$$\frac{\alpha J(v_1, \tau_1)}{v^2 Q_0(X^+(v, \tau))} + O(1) > N,$$

de onde concluímos que, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n, \dots$  são faixas verticais. Pela construção, é claro que  $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$  são faixas horizontais.

Nosso intuito é mostrar que essas faixas satisfazem as hipóteses (i) da seção 1.2 e (iii) da seção 1.3, e então usar os teoremas 1.2.1 e 1.3.1.

Mostremos que (ii) é satisfeita. Já mostramos que  $V_k$  é levada homeomorficamente por  $S$  em  $\mathcal{U}_k$ . A correspondência entre as fronteiras é uma consequência direta da construção e do fato de  $S : R_0^+ \cup \{0\} \rightarrow R_0^- \cup \{0\}$  ser um homeomorfismo.

Mostremos que vale (iii).

**Nota 3.** Nas coordenadas  $(\xi, \eta)$ ,  $V_k$  é faixa horizontal, qualquer  $k \geq 1$ , e  $\mathcal{U}_k$  é faixa vertical, para qualquer  $k \geq 1$ , ao contrário do que tínhamos no capítulo 1

Para utilizarmos o teorema 1.2.1 e a hipótese (iii), devemos utilizar o teorema 1.3.1, e aí devemos ter, em (iii),  $0 < \mu < 1/2$ . Considerando isso e a nota 3, nossa hipótese (iii) fica:

(iii) Para  $\mu \in (0, 1/2)$ , o cone  $S^+ : |\xi| \leq \mu|\eta|$  definido em  $\bigcup_{k \geq 1} V_k$  é levado em si mesmo por  $dS$ , isto é,  $dS(S^+) \subset S^+$ . E mais, se  $(\xi_0, \eta_0) \in S^+$  e  $(\xi_1, \eta_1)$  é sua imagem por  $dS$ , então  $|\eta_1| \geq \mu^{-1}|\eta_0|$ . Similarmente, o cone  $S^- : |\eta| \geq \mu|\xi|$  definido em  $\bigcup_{k \geq 1} U_k$  é levado em si mesmo por  $dS^{-1}$ , isto é,  $dS^{-1}(S^-) \subset S^-$ , assim como, se  $(\xi_1, \eta_1) \in S^-$  e  $(\xi_0, \eta_0)$  é sua pré-imagem por  $dS$ , então  $|\xi_0| \geq \mu^{-1}|\xi_1|$ .

Aplicamos  $dS$  num vetor  $(\xi_0, \eta_0)$ :

$$dS \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ O(1) & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ O(1)\xi_0 + a\eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}, \quad (2.136)$$

onde  $a = a(v, \tau) = \frac{\alpha J(v_1, \tau_1)}{v^2 Q_0(X^+(v, \tau))} + O(1)$ , isto é,  $a \rightarrow \infty$  quando  $(v, \tau) \rightarrow (v_1, \tau_1)$ .

Temos que mostrar que  $|\xi_1| \leq \mu|\eta_1|$  e também que  $|\eta_1| \geq \mu^{-1}|\eta_0|$ . Mas essas duas desigualdades são a mesma. De fato:

$$|\xi_1| \leq \mu|\eta_1| \Leftrightarrow |\eta_0| \leq \mu|O(1)\xi_0 + a\eta_0|$$

e

$$|\eta_1| \geq \mu^{-1} \Leftrightarrow |O(1)\xi_0 + a\eta_0| \geq \mu^{-1}|\eta_0| \Leftrightarrow |\eta_0| \leq \mu|O(1)\xi_0 + a\eta_0|.$$

Assim, mostremos que  $|\eta_0| \leq \mu|O(1)\xi_0 + a\eta_0|$ , dado que  $|\xi_0| \leq \mu|\eta_0|$ . Temos que:

$$|O(1)\xi_0 + a\eta_0| \geq ||a\eta_0| - |O(1)\xi_0||.$$

Como  $a \rightarrow \infty$  para  $(v, \tau) \rightarrow (v_1, \tau_1)$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, diga-se  $\varepsilon < \varepsilon_1$ , temos:

$$|a\eta_0| - |O(1)\xi_0| > 0.$$

Aí, como  $|\xi_0| \leq \mu|\eta_0|$ :

$$|O(1)\xi_0 + a\eta_0| \geq ||a\eta_0| - |O(1)\mu\eta_0|| = ||a| - |O(1)\mu||\eta_0|.$$

Se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, diga-se  $\varepsilon < \varepsilon'_1 < \varepsilon_1$ , então  $||a| - |O(1)\mu||$ , lembrando que  $\mu \in (0, 1/2)$ . Então:

$$|O(1)\xi_0 + a\eta_0| \geq \mu|\eta_0|.$$

Para mostrar o restante da condição (iii), temos que mostrar que, se  $|\eta_1| \leq \mu|\xi_1|$ , então  $|\eta_0| \leq \mu|\xi_0|$ , e que  $|\xi_0| \geq \mu^{-1}|\xi_1|$ . Consideremos novamente (2.136), e resolvamos para  $\xi_0$  e  $\eta_0$  em termos de  $\xi_1$  e  $\eta_1$ :

$$\begin{cases} \eta_0 = \xi_1 \\ O(1)\xi_0 + a\eta_0 = \eta_1 \end{cases} \Rightarrow O(1)\xi_0 + a\xi_1 = \eta_1 \Rightarrow \xi_0 = \frac{\eta_1 - a\xi_1}{O(1)}.$$

Assim:

$$|\eta_0| \leq \mu|\xi_0| \Leftrightarrow |\xi_1| \leq \mu \left| \frac{\eta_1 - a\xi_1}{O(1)} \right|$$

e

$$|\xi_0| \geq \mu^{-1}|\xi_1| \Leftrightarrow |\xi_1| \leq \mu|\xi_0| \Leftrightarrow |\xi_1| \leq \mu \left| \frac{\eta_1 - a\xi_1}{O(1)} \right|.$$

Então basta provarmos:

$$|\eta_1| \leq \mu|\xi_1| \Rightarrow |\xi_1| \leq \mu \left| \frac{\eta_1 - a\xi_1}{O(1)} \right|.$$

Temos que:

$$\left| \frac{\eta_1 - a\xi_1}{O(1)} \right| \geq \left| \frac{a\xi_1}{O(1)} \right| - \left| \frac{\eta_1}{O(1)} \right| = \left| \frac{a}{O(1)} \right| |\xi_1| - \left| \frac{1}{O(1)} \right| |\eta_1|.$$

Se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, diga-se  $\varepsilon < \varepsilon_2$ ,  $\left| \frac{a}{O(1)} \right| |\xi_1| - \left| \frac{1}{O(1)} \right| |\eta_1| > 0$ , e aí:

$$\left| \frac{\eta_1 - a\xi_1}{O(1)} \right| \geq \left| \frac{a}{O(1)} \right| |\xi_1| - \left| \frac{1}{O(1)} \right| \mu |\xi_1| = \left| \frac{a}{O(1)} \right| - \mu \left| \frac{1}{O(1)} \right| |\xi_1|.$$

Se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, diga-se  $\varepsilon < \varepsilon'_2 < \varepsilon_2$ , então:

$$\left| \frac{a}{O(1)} \right| - \mu \left| \frac{1}{O(1)} \right| \geq \mu^{-1}, \text{ para } \mu \in (0, 1/2),$$

e aí:

$$\left| \frac{\eta_1}{O(1)} - \frac{a\xi_1}{O(1)} \right| \geq \mu^{-1} |\xi_1|.$$

Assim, se  $\varepsilon < \min\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$ , vale (iii).

**Nota 4.** *Pela demonstração da proposição 2.2.6 nota-se que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno  $O(1) \neq 0$ .*

Então vale o teorema 1.2.1, como  $\mu \in (0, 1/2)$ .

Podemos, de forma padrão, estender o homeomorfismo  $\tau$  do teorema 1.2.1 a um homeomorfismo  $\bar{\tau}$  de  $\bar{\Sigma}$  em  $R$  tal que:

$$\bar{\tau}\bar{\sigma} = S\bar{\tau}|_{D(\bar{\sigma})}$$

■

## 2.4 As curvas $\Pi_0^+$ e $\Pi_0^-$

Utilizamos anteriormente o fato de que  $\Pi_0^+$  e  $\Pi_0^-$  são curvas analíticas. Nesta seção exporemos esse fato.

Para um difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definimos o conjunto assintótico local de  $f$  como:

$$A^+(f, U) = \{(x, y) \in U : f^k(x, y) \in U \ \forall k > 0, f^k(x, y) \rightarrow 0 \text{ conforme } k \rightarrow \infty\}.$$

Considerando o seguinte setor centrado no eixo  $x$  positivo:

$$B(\beta, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \delta, |y| \leq \beta x\}.$$

O conjunto assintótico restrito a tal setor é:

$$A^+(f, B) = \{(x, y) \in B : f^k(x, y) \in B \ \forall k > 0, f^k(x, y) \rightarrow 0 \text{ conforme } k \rightarrow \infty\}.$$

Usaremos, sem a demonstração, um teorema de [2] e uma proposição que faz parte da demonstração de tal teorema. O teorema é:

**Teorema 2.4.1.** *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função real e analítica da forma*

$$f = id + p + r,$$

*onde  $id$  é a identidade,  $p = (p_1, p_2)$  é um polinômio homogêneo de grau  $n \geq 2$ , e  $r$  consiste de termos de ordem, pelo menos,  $n+1$ . Suponha também que, para  $x > 0$ ,*

$$\begin{aligned} p_1(x, 0) &< 0, \\ p_2(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial p_2(x, 0)}{\partial y} &> 0. \end{aligned}$$

Então existem constantes positivas  $\beta$  e  $\delta$  tais que  $A^+(f, B(\beta, \delta))$  é o gráfico de uma função  $\phi : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . E mais,  $f|_{(0, \delta]}$  é real e analítica.

Antes de enunciarmos a referida proposição necessitamos de algumas definições. Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  números reais positivos. Definimos os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ :

$$B = B(\beta, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \delta, |y| \leq \beta x\},$$

$$b^+ = \{(x, y) \in B : y = \beta x\},$$

$$b^- = \{(x, y) \in B : y = -\beta x\},$$

$$B^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \delta, y \geq \beta x\},$$

$$B^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \delta, y \leq -\beta x\},$$

$$S(\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq \alpha|x|\}.$$

Seja  $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção no eixo  $y$ , isto é,  $\pi_2(x, y) = y$ .

**Proposição 2.4.1.** *Seja  $f = (f_1, f_2)$  uma função que satisfaz as hipóteses do teorema 2.4.1. Então existem constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta_1$  tais que, para qualquer  $\beta \in (0, \beta_1]$  existe um  $\delta$  tal que:*

$$0 < f_1(x, y) < x, \quad \forall (x, y) \in B(\beta, \delta), \quad x \neq 0, \quad (2.137)$$

$$f(b^\pm) \subset B^\pm, \quad (2.138)$$

$$Df(x, y) : S(\alpha) \rightarrow S(\alpha), \quad \forall (x, y) \in B(\beta, \delta), \quad (2.139)$$

$$|\pi_2 Df^{-1}(x, y)\xi| \leq |\pi_2 \xi|, \quad \forall (x, y) \in f(B(\beta, \delta)), \quad \xi \in S(\alpha). \quad (2.140)$$

Podemos agora demonstrar uma proposição que nos permitirá concluir que as curvas  $\Pi_0^+$  e  $\Pi_0^-$  são analíticas.

**Proposição 2.4.2.** *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função da forma:*

$$f : \begin{cases} x \rightarrow x - Kx^3(y + r_1(x, y)) \\ y \rightarrow y - Kx^3(x + r_2(x, y)) \end{cases}, \quad (2.141)$$

onde  $K$  é uma constante positiva e  $r_1$  e  $r_2$  são funções reais e analíticas e contém termos de pelo menos segunda ordem. Então existe um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  contendo a origem tal que  $\mathcal{A}^+(f, U) \cap \{x > 0\}$  é um arco analítico real.

**demonstração:** Escreveremos  $f$  em coordenadas polares. Para isso vamos desprezar os termos  $r_1(x, y)$  e  $r_2(x, y)$ , e chamaremos:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x - Kx^3y, \\ f_2(x, y) = y - Kx^4. \end{cases}$$

Escrevendo  $x$  e  $y$  em coordenadas polares:

$$\begin{cases} f_1(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cos \theta - Kr^4 \cos^3 \theta \sin \theta, \\ f_2(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \sin \theta - Kr^4 \cos^4 \theta. \end{cases}$$

Então escrevemos  $f$  em coordenadas polares da seguinte forma:

$$f : \begin{cases} r \rightarrow [(r \cos \theta - Kr^4 \cos^3 \theta \sin \theta)^2 + (r \sin \theta - Kr^4 \cos^4 \theta)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \theta \rightarrow \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \theta - Kr^3 \cos^4 \theta}{\cos \theta - Kr^3 \cos^3 \theta \sin \theta} \right) \end{cases}$$

Notemos que:

$$[f_1^2(r \cos \theta, r \sin \theta) + f_2^2(r \cos \theta, r \sin \theta)]^{\frac{1}{2}} = r (1 - 4Kr^3 \cos^4 \theta \sin \theta + K^2 r^6 \cos^6 \theta)^{\frac{1}{2}}.$$

Considerando  $\theta$  constante e derivando sucessivas vezes, em relação a  $r$ , a função:

$$h_r(r) = (1 - 4Kr^3 \cos^4 \theta \sin \theta + K^2 r^6 \cos^6 \theta)^{\frac{1}{2}},$$

obtemos  $h_r'(0) = 0$ ,  $h_r''(0) = 0$  e  $h_r'''(0) = -12K \cos^4 \theta \sin \theta$ .

Então a expansão em série de Taylor de  $h_r(r)$  fica:



$$h_r(r) = h_r(0) + \frac{h_r'''(0)}{3!}r^3 + O(r^4) = 1 - 2Kr^3 \cos^4 \theta \sin \theta + O(r^4),$$

de onde:

$$\begin{aligned} [f_1^2(r \cos \theta, r \sin \theta) + f_2^2(r \cos \theta, r \sin \theta)]^{\frac{1}{2}} &= r(1 - 2Kr^3 \cos^4 \theta \sin \theta + O(r^4)) \\ &= r - Kr^4 \cos^3 \theta (2 \cos \theta \sin \theta + O(r)). \end{aligned}$$

Derivemos sucessivas vezes, em relação a  $r$ , a função:

$$h_\theta(r) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \theta - Kr^3 \cos^4 \theta}{\cos \theta - Kr^3 \cos^3 \theta \sin \theta} \right),$$

onde consideramos  $\theta$  constante. Obtemos  $h'_\theta(0) = 0$ ,  $h''_\theta(0) = 0$  e:

$$h_\theta'''(0) = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \frac{6K \cos^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{\cos \theta},$$

de onde:

$$\begin{aligned} h_\theta(r) &= h_\theta(0) + \frac{h_\theta'''(0)}{3!}r^3 + O(r^4) \\ &= \theta + Kr^3(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta + O(r)). \end{aligned}$$

Então podemos escrever  $f$  em coordenadas polares:

$$f : \begin{array}{l} r \rightarrow r - Kr^4 \cos^3 \theta (2 \cos \theta \sin \theta + O(r)) \\ \theta \rightarrow \theta + Kr^3 \cos^3 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta + O(r)) \end{array} . \quad (2.142)$$

Candidatos à variedade estável ou instável só podem ocorrer quando  $\theta$  é aproximadamente constante, isto é, quando  $\cos^3 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 0$ , ou seja, quando  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  ou  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ . Consideremos o caso  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Fazemos a transformação:

$$\begin{cases} x = u - v, \\ y = u + v. \end{cases}$$

De onde:

$$f : \begin{array}{l} u - v \rightarrow u - v - K(u - v)^3(u + v + r_1(u, v)) \\ u + v \rightarrow u + v - K(u - v)^3(u - v + r_2(u, v)) \end{array} .$$

Agora:

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \end{cases} \Rightarrow v = \frac{y - x}{2}, u = \frac{x + y}{2}.$$

Então, se escrevermos  $f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$ , teremos:

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \frac{u - v - K(u - v)^3(u + v) + u + v - K(u - v)^3(u - v)}{2} + \dots \\ &= \frac{2u - K(u - v)^3(2v)}{2} + \dots = u - K(u - v)^3 + \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2(u, v) &= \frac{u + v - K(u - v)^3(u - v) - [u - v - K(u - v)^3(u - v)]}{2} + \dots \\ &= \frac{2v + K(u - v)^3(2v)}{2} + \dots = v + K(u - v)^3v + \dots \end{aligned}$$

Então  $f$  nas coordenadas  $(u, v)$  fica:

$$f : \begin{array}{l} u \rightarrow u - K(u - v)^3u + \dots \\ v \rightarrow v + K(u - v)^3v + \dots \end{array},$$

isto é:

$$f : \begin{array}{l} u \rightarrow u + p_1(u, v) + \dots \\ v \rightarrow v + p_2(u, v) + \dots \end{array},$$

com  $p_1(u, v) = -K(u - v)^3u$  e  $p_2(u, v) = K(u - v)^3v$ . Disso temos que, para  $u > 0$ :

$$p_1(u, 0) = -Ku^4 < 0,$$

$$p_2(u, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial p_2(u, 0)}{\partial v} = [-3K(u - v)^2v + K(u - v)^3]_{v=0} = Ku^3 > 0.$$

Então  $f$ , nas coordenadas  $(u, v)$ , satisfaz as hipóteses do teorema 2.4.1. Antes de utilizarmos este fato, consideremos constantes positivas  $\delta$  e  $\bar{\beta}$  e o seguinte conjunto:

$$B^+ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \delta, |v| \leq \bar{\beta}\}.$$

Lembrando que  $u = \frac{x+y}{2}$  e  $v = \frac{y-x}{2}$ , podemos expressar  $u$  e  $v$  nas coordenadas polares utilizadas em (2.142) como:

$$u = \frac{r}{2}(\cos \theta + \sen \theta)$$

e

$$v = \frac{r}{2}(\sen \theta - \cos \theta).$$

Se  $0 \leq u \leq \delta$ , devemos ter  $\cos \theta + \sen \theta \geq 0$ , isto é:

$$\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right].$$

E, como  $\cos \theta + \sen \theta \leq 2$ :

$$\frac{r}{2} \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow r \leq \delta.$$

Devemos ter também  $|v| \leq \bar{\beta}u$ , ou seja, devemos ter:

$$\frac{r}{2}|\sen \theta - \cos \theta| \leq \frac{\bar{\beta}r}{2}(\cos \theta + \sen \theta) \Rightarrow |\sen \theta - \cos \theta| \leq \bar{\beta}(\cos \theta + \sen \theta).$$

Para  $\theta = \pi/4$ ,  $\sen \theta - \cos \theta = 0$  e  $\sen \theta + \cos \theta = 2$ . Considerando que  $\theta \in [0, 3\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$ , trocaremos a condição “ $\exists \bar{\beta}$  tal que  $|\sen \theta - \cos \theta| \leq \bar{\beta}(\cos \theta + \sen \theta)$ ” por “ $\exists \beta_1$  tal que  $|\theta - \pi/4| \leq \beta_1$ ”. Agora usaremos o teorema 2.4.1, e também a proposição 2.4.1, para mostrar que o conjunto:

$$B^+ = \left\{ (r, \theta) : r \leq \delta, \left| \theta - \frac{\pi}{4} \right| \leq \beta_1 \right\}$$

tem as seguintes propriedades:

$$A^+ = \{(r, \theta) \in B^+ : f^k(r, \theta) \in B^+ \forall k > 0\} \setminus \{0\} \text{ é um arco analítico,} \quad (2.143)$$

$$\text{Se } (r, \theta) \in A^+, \text{ então } f^k(r, \theta) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow 0, \quad (2.144)$$

Se  $\|(r, \theta)\| < \delta$ ,  $\|f(r, \theta)\| < \delta$  e  $(r, \theta) \notin \mathcal{B}^+$ , então  $f(r, \theta) \notin \mathcal{B}^+$ . (2.145)

A propriedades 2.143 e 2.144 decorrem diretamente do teorema 2.4.1, e a propriedade 2.145 decorre de 2.137 e 2.138 da proposição 2.4.1.

Mostraremos que  $A^+ = \mathcal{A}^+ \cap \{x > 0\}$ . Para isso, mostraremos que pontos que não pertencem a  $\mathcal{B}^+$  e que tendem a origem por iterações positivas de  $f$  não existem.

Com esse objetivo, dividiremos  $U$  em setores e vamos eliminá-los um por um. Notamos que  $v = 0 \Rightarrow y = x$  e  $u = 0 \Rightarrow y = -x$ . Rotacionamos as coordenadas de forma que a reta  $y = -x$  seja levada no eixo  $u$ . Agora podemos aplicar o teorema 2.4.1 a  $f^{-1}$ , e temos que existem  $\delta$  e  $\beta_2$  tais que o conjunto:

$$\mathcal{B}^- = \left\{ (r, \theta) : r \leq \delta, \left| \theta + \frac{\pi}{4} \right| \leq \beta_2 \right\}$$

tem as seguintes propriedades:

$$A^- = \{(r, \theta) \in \mathcal{B}^- : f^{-k} \in \mathcal{B}^- \forall k > 0\} \setminus \{0\} \text{ é um arco analítico,} \quad (2.146)$$

$$\text{Se } (r, \theta) \in A^-, \text{ então } f^{-k}(r, \theta) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow 0, \quad (2.147)$$

$$\text{Se } \|(r, \theta)\| < \delta, \|f^{-1}(r, \theta)\| < \delta \text{ e } (r, \theta) \notin \mathcal{B}^-, \text{ então } f^{-1}(r, \theta) \notin \mathcal{B}^-. \quad (2.148)$$

Trocando  $(r, \theta)$  por  $f(r, \theta)$  em (2.148):

$$\|f(r, \theta)\| < \delta, \|(r, \theta)\| \leq \delta \Rightarrow (r, \theta) \notin \mathcal{B},$$

isto é:

$$(r, \theta) \in \mathcal{B}^- \Rightarrow \|f(r, \theta)\| \geq \delta \text{ ou } \|(r, \theta)\| \geq \delta \text{ ou } f(r, \theta) \in \mathcal{B},$$

ou seja:

$$\text{Se } \|(r, \theta)\| < \delta, \|f(r, \theta)\| < \delta \text{ e } (r, \theta) \in \mathcal{B}^- \Rightarrow f(r, \theta) \in \mathcal{B}^-. \quad (2.149)$$

Seja:

$$\mathcal{C}^+ = \left\{ (r, \theta) : r \leq \delta, \beta_3 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Se escolhermos  $\beta_3 > \pi/4$  e  $\delta$  suficientemente pequeno,  $\mathcal{C}^+$  terá as seguintes propriedades:

$$\text{Se } (r, \theta) \in \mathcal{C}^+ \text{ e } \|f(r, \theta)\| \leq \delta, \text{ então } f(r, \theta) \in \mathcal{C}^+, \quad (2.150)$$

Se  $r \neq 0$  e  $f^k(r, \theta) \in \mathcal{C}^+$  para todo  $k \geq 0$ , então  $f^k(r, \theta) \not\rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .  
(2.151)

A propriedade (2.150) decorre do fato de  $f$  ser crescente em  $\theta$  no primeiro quadrante, e o crescimento de  $\theta$  depender de  $r^3$ .

Demonstremos a validade da propriedade (2.151). Se  $\theta \in (\pi/4, \pi/2)$ , então  $\cotg \theta < 1$ . Podemos então escolher  $\delta$  suficientemente pequeno para que tenhamos:

$$|r_1(x, y)| + |r_2(x, y)| \leq (1 - \cotg \beta_3)y.$$

Para  $\theta \in (\pi/4, \pi/2)$ ,  $\cotg \theta$  é estritamente crescente. Então, como:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sen \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \cotg \theta,$$

temos que, para  $(x, y) \in \mathcal{C}^+$ ,  $x \leq y \cotg \beta_3$ . Así:

$$\begin{aligned} |r_1(x, y)| + |r_2(x, y)| &\leq (1 - \cotg \beta_3)y \\ \Rightarrow y \cotg \beta_3 + |r_2(x, y)| &\leq y - |r_1(x, y)| \\ \Rightarrow y \cotg \beta_3 + r_2(x, y) &\leq y + r_1(x, y) \\ \Rightarrow x + r_2(x, y) &\leq y + r_1(x, y), \end{aligned}$$

isto é:

$$x + r_2(x, y) \leq y + r_1(x, y) \text{ para } (x, y) \in \mathcal{C}^+. \quad (2.152)$$

Escrevendo (2.141) como  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  temos:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x - Kx^3(y + r_1(x, y)) \\ f_2(x, y) = y - Kx^3(x + r_2(x, y)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x, y) - x = -Kx^3(y + r_1(x, y)) \\ f_2(x, y) - y = -Kx^3(x + r_2(x, y)) \end{cases},$$

de onde, por (2.152):

$$f_1(x, y) - x \leq f_2(x, y) - y.$$

Seja  $\mathcal{D}(x_0, y_0) = \{(x, y) : y - y_0 \geq x - x_0\}$ . Nós provamos que se  $f^k(x_0, y_0) \in \mathcal{C}^+$  para  $k \geq 0$ , então  $f^k(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(x_0, y_0)$ . Como  $0 \notin \mathcal{D}(x_0, y_0)$  para  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}^+$ , fica provada a propriedade (2.151).

Definimos agora, de forma análoga:

$$\mathcal{C}^- = \left\{ (r, \theta) : r \leq \delta, \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \beta_4 \right\}$$

com propriedades análogas às (2.150) e (2.151) para  $f^{-1}$ . A propriedade análoga à (2.150) é:

$$\begin{aligned} &\text{Se } (r, \theta) \in \mathcal{C}^- \text{ e } \|f^{-1}(r, \theta)\| \leq \delta, \text{ então } f^{-1} \in \mathcal{C}^- \\ &\Rightarrow \text{Se } f(r, \theta) \in \mathcal{C}^- \text{ e } \|(r, \theta)\| \leq \delta, \text{ então } (r, \theta) \in \mathcal{C}^- \\ &\Rightarrow \text{Se } (r, \theta) \notin \mathcal{C}^-, \text{ então } f(r, \theta) \notin \mathcal{C}^- \text{ ou } \|(r, \theta)\| > \delta, \end{aligned}$$

isto é:

$$\text{Se } (r, \theta) \notin \mathcal{C}^- \text{ e } \|(r, \theta)\| \leq \delta, \text{ então } f(r, \theta) \notin \mathcal{C}^-. \quad (2.153)$$

Seja:

$$U = \{(r, \theta) : r < \delta\}.$$

Mostraremos que:

$$A^+ = \mathcal{A}^+(f, U) \cap \{x > 0\}.$$

Seja  $(x, y) \in \mathcal{A}^+(f, U) \cap \{x > 0\}$ , isto é,  $\|f^k(x, y)\| < \delta$  para qualquer  $k > 0$  e  $f^k(x, y) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Em  $\mathcal{B}^-$ ,  $\cos \theta > 0$  e  $\sin \theta < 0$ , de onde temos que  $r$  é crescente por  $f$  em  $\mathcal{B}^-$ . Então (2.149) implica que  $f^k(x, y)$  não pertence a  $\mathcal{B}^-$  para todo  $k$ . Se  $f^k(x, y) \in \mathcal{C}^+$  para algum  $k = k_1$ , então  $f^k(x, y) \in \mathcal{C}^+$  para todo  $k \geq k_1$ , por (2.150). Mas (2.151) implica que  $f^k(x, y) \not\rightarrow 0$ . Então  $f^k(x, y) \notin \mathcal{C}^+$  para todo  $k$ . Em  $\mathcal{C}^- \cap \{x > 0\}$   $\theta$  é crescente por  $f$ . Então (2.153) implica que existe  $k_2$  tal que  $f^k(x, y) \notin \mathcal{C}^-$  para todo  $k \geq k_2$ . Suponhamos, a fim de chegarmos à uma contradição, que existe um  $k_3 \geq k_2$  tal que  $f^{k_3}(x, y) \notin \mathcal{B}^+$ . Então, por (2.145),  $f^k(x, y) \notin \mathcal{B}^+$  para todo  $k \geq k_3$ . Dessa forma:

$$f^k(x, y) \notin \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^- \cup \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- = \mathcal{B} \text{ para todo } k \geq k_3.$$

Mas  $\theta$  é estritamente monótona quando  $\cos^3 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \neq 0$ , isto é, quando  $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta \neq \pm \frac{\pi}{4}$  (estamos nos restringindo a  $x > 0$ ), isto é,  $\theta$  é estritamente monótona no complementar de  $\mathcal{B}$ . Contradição.

Então  $f^k(x, y) \in \mathcal{B}^+$  para todo  $k \geq k_2$ , e aí a propriedade (2.145) implica que  $f^k(x, y) \in \mathcal{B}^+$  para todo  $k \geq 0$ . Então  $x \in A^+$ , por (2.143).

Suponhamos agora que  $(x, y) \in A^+ \setminus \{0\}$ . A propriedade (2.144) implica que:

$$(x, y) \in \mathcal{A}^+(f, U) \cap \{x > 0\},$$

e então:

$$\mathcal{A}^+(f, U) \cap \{x > 0\} = A^+,$$

e é um arco analítico por (2.143).

■

Vamos agora aplicar esse resultado ao problema de Sitnikov. Mas, aqui, consideraremos o referencial com a origem no centro de massa.

A partícula  $k$  tem posição  $(w_k, z_k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  e massa  $m_k$ . Assumimos que:

$$\begin{cases} w_1 = 0, \\ z_2 = z_3, \\ w_2 = -w_3, \\ m_2 = m_3. \end{cases} \quad (2.154)$$

As equações do movimento são:

$$\ddot{z}_1 = -\frac{2m_2}{(z_1 - z_2)} [(z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2]^{\frac{3}{2}}$$

e

$$\ddot{w}_2 = \frac{2m_2 w_2}{|2w_2|^3} - \frac{m_1 w_2}{[(z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

A primeira delas é semelhante à equação (2.1). Mostremos a segunda:

A equação do movimento da partícula 2 em relação a partícula 3 será dada por:

$$m_2 \ddot{w}_2 = -\frac{m_2 m_3}{(2|w_2|)^2} \frac{2w_2}{2|w_2|} = -\frac{2m_2^2}{|2w_2|^3} \Rightarrow \ddot{w}_2 = -\frac{2m_2 w_2}{|2w_2|^3}.$$

A equação do movimento da partícula 2 em relação a partícula 1 será:

$$\begin{aligned} m_2(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 - \ddot{w}_2) &= -\frac{m_1 m_2}{|z_1 - z_2 - w_2|^2} \frac{(z_1 - z_2 - w_2)}{|z_1 - z_2 - w_2|} \\ &= -\frac{m_1 m_2}{|z_1 - z_2 - w_2|^3} (z_1 - z_2 - w_2) \\ &= -\frac{m_1 m_2}{((z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2)^{\frac{3}{2}}} (z_1 - z_2) + \frac{m_1 m_2}{((z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2)^{\frac{3}{2}}} w_2. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\ddot{w}_2 = -\frac{m_1 w_2}{((z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Fica assim demonstrada a segunda equação do movimento.

Queremos agora a expressão da energia total. Deduzamos primeiro a fórmula da energia cinética:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} (\dot{z}_2^2 + |\dot{w}_2|^2) + \frac{1}{2} (\dot{z}_3^2 + |\dot{w}_3|^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 (\dot{z}_2^2 + |\dot{w}_2|^2). \end{aligned}$$

Agora a energia potencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= -\frac{m_1 m_2}{[(z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_1 m_3}{[(z_1 - z_3)^2 + |w_3|^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_2 m_3}{|2w_2|} \\ &= -\frac{2m_1 m_2}{[(z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_2^2}{|2w_2|}. \end{aligned}$$

Então a energia total será:

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 (\dot{z}_2^2 + |\dot{w}_2|^2) - \frac{2m_1 m_2}{[(z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_2^2}{|2w_2|} = -h < 0,$$

onde a fizemos negativa arbitrariamente.



Definimos agora  $m = (2m_2)^{\frac{1}{3}}$  e  $M = (m_1 + 2m_2)^{\frac{1}{3}}$  e fazemos a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} z = M^2 m^{-3} z_1, \\ \zeta = 2m^{-1} w_2. \end{cases}$$

Vejamos como ficam as equações do movimento nessas novas coordenadas. Considerando que o centro de massa está fixo em  $(0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0, \\ m_2 w_2 + m_3 w_3 = 0. \end{cases}$$

Usando (2.154):

$$\begin{aligned} m_1 z_1 + 2m_2 z_1 = 0 &\Rightarrow z_2 = -\frac{m_1 z_1}{2m_2} \Rightarrow z_2 - z_1 = -\frac{m_1}{2m_2} z_1 - z_1 \\ &\Rightarrow z_1 - z_2 = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2}\right) z_1. \end{aligned}$$

Temos também que:

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{m_1 + 2m_2}{2m_2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

E portanto:

$$z_1 - z_2 = M^3 m^{-3} z_1.$$

Então, fazendo a mudança de coordenadas, a primeira equação do movimento fica:

$$\begin{aligned}
M^{-2}m^3\ddot{z} &= -m^3M^3m^{-3}z_1 \left[ M^6m^{-6}z_1^2 + \frac{m^2}{4}|\zeta|^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \ddot{z} &= -M^5m^{-3} \left[ M^6m^{-6}z_1^2 + \frac{m^2}{4}|\zeta|^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
&= -M^5m^{-3}z_1 \left[ M^2M^4m^{-6}z_1^2 + \frac{m^2}{4}|\zeta|^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
&= -M^5m^{-3}z_1 \left[ M^2z^2 + \frac{m^2}{4}|\zeta|^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
&= M^5m^{-3}z_1 \left[ M^2z^2 \left( 1 + \frac{M^{-2}m^2z^{-2}}{4}|\zeta|^2 \right) \right]^{-\frac{3}{2}} \\
&= -M^2m^{-3}z_1|z|^{-3} \left[ 1 + \left( \frac{M^{-1}mz^{-1}}{2}|\zeta| \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
&= -z|z|^{-3} [1 + u^2]^{-\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

com  $u = \frac{M^{-1}m|\zeta|z^{-1}}{2}$ .

Utilizando os cálculos feitos acima para o termo entre colchetes, encontramos a expressão para a segunda equação do movimento nas novas coordenadas:

$$\begin{aligned}
\ddot{w}_2 &= -2m_2w_2|2w_2|^{-3} - m_1M^{-3}|z|^{-3}w_2[1 + u^2]^{-\frac{3}{2}} \\
&= -m^3\frac{1}{2}m\zeta m^{-3}|\zeta|^{-3} - m_1M^{-3}|z|^{-3}\frac{1}{2}m\zeta[1 + u^2]^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{2}m \left[ -|\zeta|^{-3}\zeta - m_1M^{-3}|z|^{-3}[1 + u^2]^{-\frac{3}{2}}\zeta \right].
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
2m^{-1}\ddot{w}_2 &= -|\zeta|^{-3}\zeta - m_1M^{-3}|z|^{-3}[1 + u^2]^{-\frac{3}{2}}\zeta \\
\Rightarrow \ddot{\zeta} &= -|\zeta|^{-3}\zeta - m_1M^{-3}[1 + u^2]^{-\frac{3}{2}}|z|^{-3}\zeta.
\end{aligned}$$

As equações do movimento são, portanto:

$$\begin{cases} \ddot{z} = -[1 + u^2]^{-\frac{3}{2}}|z|^{-3}z, \\ \ddot{\zeta} = -|\zeta|^{-3}\zeta - m_1M^{-3}[1 + u^2]^{-\frac{3}{2}}|z|^{-3}\zeta. \end{cases}$$

Queremos estudar as órbitas parabólicas, aquelas em que  $z_1 \rightarrow \infty$  e  $\dot{z}_1 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , isto é,  $z \rightarrow \infty$  e  $z \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Como a energia total é negativa,  $|w_2|$  fica limitado, e então  $u \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Notando que:

$$\frac{d}{du}[1+u^2]^{-\frac{3}{2}} = -3[1+u^2]^{-\frac{5}{2}}u \Rightarrow \frac{d}{du}[1+u^2]^{-\frac{3}{2}} \Big|_{u=0} = 0.$$

Concluimos que a expansão de  $[1+u^2]^{-\frac{3}{2}}$  em torno da origem será da forma:

$$[1+u^2]^{-\frac{3}{2}} = 1 + O(u^2).$$

Então:

$$\begin{cases} \ddot{z} = -z|z|^{-3}(1+g_1(u)), \\ \ddot{\zeta} = -\zeta|\zeta|^{-3}(1+g_2(u)), \end{cases}$$

com  $g_1(u) = O(u^2)$  e  $g_2(u) = O(u^3)$ . A primeira equação decorre da simples substituição da expansão de  $(1+u^2)^{-\frac{3}{2}}$ . Lembrando que  $u = \frac{M^{-1}m|\zeta|z^{-1}}{2}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} &= -\zeta|\zeta|^{-3} \left( 1 + m_1 M^{-3} |z|^{-3} [1+u^2]^{-\frac{3}{2}} |\zeta|^3 \right) \\ &= -\zeta|\zeta|^{-3} \left( 1 + m_1 M^{-3} O(u^3) [1+O(u^2)] |\zeta|^2 \right) \\ &= -\zeta|\zeta|^{-3} (1+g_2(u)), \end{aligned}$$

e temos a segunda equação.

Vejam agora como fica a expressão da energia nessas novas coordenadas:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + m_2(\dot{z}_2^2 + |\dot{w}_2|^2) - \frac{2m_1m_2}{[(z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_2^2}{|2w_2|} = -h \\ \Rightarrow &\frac{1}{2}\frac{m_1}{h}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{h}(\dot{z}_2^2 + |\dot{w}_2|^2) - \frac{2m_1m_2}{h[(z_1 - z_2)^2 + |w_2|^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_2^2}{h|2w_2|} = -1. \end{aligned}$$

Como já foi visto,  $z_2 = -\frac{m_1 z_1}{2m_2}$ . Então:

$$z_2 = -\frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2}\frac{m^3}{m^2}z = -m_1M^{-2}z,$$

onde usamos a definição de  $m$ .

Temos também que:

$$z_1 - z_2 = M^3 m^{-3} z_1 = M^3 m^{-3} M^{-2} m^3 z = Mz.$$

Então a expressão da energia fica:

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{1}{2} m_1 h^{-1} M^{-4} m^6 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m^3 h^{-1} \left[ m_1^2 M^{-4} \dot{z}^2 + \frac{1}{4} m^2 |\dot{\zeta}|^2 \right] \\ &\quad - 2m_1 \frac{1}{2} m^3 h^{-1} \left[ M^2 z^2 + \frac{1}{4} m^2 |\zeta|^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} m^6 h^{-1} m^{-1} |\zeta|^{-1} \\ &= \frac{1}{2} m_1 M^{-4} m^6 h^{-1} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_1^2 M^{-4} m^3 h^{-1} \dot{z}^2 + \frac{1}{8} m^5 h^{-1} |\dot{\zeta}|^2 \\ &\quad - m_1 m^3 h^{-1} \left[ M^2 z^2 \left( 1 + \frac{1}{4} m^2 M^{-2} z^{-2} |\zeta|^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} m^5 h^{-1} |\zeta|^{-1} \\ &= \frac{1}{2} m_1 M^{-4} m^3 h^{-1} \dot{z}^2 (m^3 + m_1) + \frac{1}{8} m^5 h^{-1} |\dot{\zeta}|^2 \\ &\quad - m_1 m^3 h^{-1} M^{-1} |z|^{-1} (1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} m^5 h^{-1} |\zeta|^{-1} \\ &= \frac{1}{2} m_1 M^{-4} m^3 h^{-1} (m^3 + m_1) \dot{z}^2 - m_1 m^3 h^{-1} M^{-1} |z|^{-1} (1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{4} m^5 h^{-1} \left[ \frac{1}{2} |\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right] \\ &= m_1 m^3 M^{-1} h^{-1} \left[ \frac{1}{2} M^{-3} (m^3 + m_1) \dot{z}^2 - (1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} |z|^{-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} m^5 h^{-1} \left[ \frac{1}{2} |\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Expandindo  $(1 + u^2)^{-\frac{1}{2}}$  em série de Taylor obtemos:

$$(1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + O(u^2).$$

Então, voltando à expressão da energia:

$$\begin{aligned}
-1 &= m_1 m^3 h^{-1} \left[ \frac{1}{2} M^{-3} (m^3 + m_1) \dot{z}^2 - (1 + O(u^2)) |z|^{-1} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} m^5 h^{-1} \left[ \frac{1}{2} |\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right] \\
&= m_1 m^3 M^{-1} h^{-1} \left[ \frac{1}{2} M^{-3} (m^3 + m_1) \dot{z}^2 - |z|^{-1} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} m^5 h^{-1} \left[ \frac{1}{2} |\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right] + O(u^2) |z|^{-1}.
\end{aligned}$$

Mas  $M^{-3}(m^3 + m_1) = (m_1 + 2m_2)^{-1}(2m_2 + m_1) = 1$ . Portanto:

$$\begin{aligned}
-1 &= m_1 m^3 M^{-1} h^{-1} \left[ \frac{1}{2} \dot{z}^2 - |z|^{-1} \right] + \frac{1}{4} m^5 h^{-1} \left[ \frac{1}{2} |\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right] + O(u^2) |z|^{-1} \\
&= 2a^2 \left[ \frac{1}{2} \dot{z}^2 - |z|^{-1} \right] + 2b^2 \left[ \frac{1}{2} |\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right] + v(u) |z|^{-1},
\end{aligned}$$

onde  $2a^2 = m_1 m^3 M^{-1} h^{-1}$ ,  $2b^2 = \frac{1}{4} m^5 h^{-1}$  e  $v(u) = O(u^2)$ .

Queremos agora trazer  $z = \infty$  para  $x = 0$ . Para isso fazemos a seguinte transformação:

$$\begin{cases} z = 2x^{-2}, \\ \dot{z} = y, \\ \sigma = b^{-2} [|\zeta| - b^2 - ib \operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})]. \end{cases} \quad (2.155)$$

Notemos que:

$$|\zeta| = b^2(1 + \operatorname{Re}(\sigma)).$$

Vejamos como fica a expressão da energia com essa transformação:

$$\begin{aligned}
2a^2 \left[ \frac{1}{2} \dot{z}^2 - |z|^{-1} \right] + 2b^2 \left[ \frac{1}{2} |\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right] + |z|^{-1} v(u) &= -1 \\
\Rightarrow 2a^2 \left[ \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 \right] + 2b^2 \left[ \frac{1}{2} |\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right] + \frac{1}{2} x^2 v(u) &= -1 \\
\Rightarrow a^2 (y^2 - x^2) + 2b^2 \left[ \frac{1}{2} |\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right] + \frac{1}{2} x^2 v(u) &= -1 \\
\Rightarrow a^2 (y^2 - x^2) + b^2 |\dot{\zeta}|^2 - 2b^2 |\zeta|^{-1} + \frac{1}{2} x^2 v(u) &= -1 \\
\Rightarrow a^2 |\zeta|^2 (y^2 - x^2) + b^2 |\dot{\zeta}|^2 |\zeta|^2 - 2b^2 |\zeta| + \frac{1}{2} |\zeta|^2 x^2 v(u) &= -|\zeta|^2.
\end{aligned}$$

Agora notemos que:

$$\begin{aligned}
 |\dot{\zeta}|^2 |\zeta|^2 = (\bar{\zeta} \dot{\zeta})(\zeta \bar{\dot{\zeta}}) &= [\operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta}) + i \operatorname{Im}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})][\operatorname{Re}(\zeta \bar{\dot{\zeta}}) + i \operatorname{Im}(\zeta \bar{\dot{\zeta}})] \\
 &= [\operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta}) + i \operatorname{Im}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})][\operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta}) - i \operatorname{Im}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})] \\
 &= [\operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})]^2 + [\operatorname{Im}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})]^2 \\
 &= [\operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})]^2 + \omega^2,
 \end{aligned}$$

onde  $\omega = \operatorname{Im}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})$  é o momento angular, uma integral para este problema. Então, voltando à expressão da energia:

$$\begin{aligned}
 a^2 |\zeta|^2 (y^2 - x^2) + b^2 \omega^2 + b^2 [\operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})]^2 - 2b^2 |\zeta| + \frac{1}{2} |\zeta|^2 x^2 v(u) &= -|\zeta|^2 \\
 \Rightarrow a^2 |\zeta|^2 (y^2 - x^2) + b^2 \omega^2 + b^2 [\operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})]^2 - 2b^4 - 2b^2 \operatorname{Re}(\sigma) + \frac{1}{2} |\zeta|^2 x^2 v(u) &= -|\zeta|^2 \\
 \Rightarrow a^2 |\zeta|^2 (y^2 - x^2) + b^2 \omega^2 + b^2 [\operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})]^2 - b^4 + |\zeta|^2 - 2b^2 \operatorname{Re}(\sigma) + \frac{1}{2} |\zeta|^2 x^2 v(u) &= b^4.
 \end{aligned}$$

Agora usaremos que:

$$\sigma = b^{-2} [|\zeta| - b^2 - ib \operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})] \Rightarrow [\operatorname{Re}(\bar{\zeta} \dot{\zeta})]^2 = b^2 |\sigma|^2 - b^{-2} (|\zeta| - b^2)^2.$$

Então:

$$\begin{aligned}
 a^2 |\zeta|^2 (y^2 - x^2) + b^4 |\sigma|^2 - (|\zeta| - b^2)^2 + b\omega^2 - b^4 + |\zeta|^2 - 2b^2 \operatorname{Re}(\sigma) + \frac{1}{2} |\zeta|^2 x^2 v(u) &= b^4 \\
 \Rightarrow a^2 |\zeta|^2 (y^2 - x^2) + b^4 |\sigma|^2 + 2|\zeta|b^2 - 2b^4 + b\omega^2 - 2b^2 \operatorname{Re}(\sigma) + \frac{1}{2} |\zeta|^2 x^2 v(u) &= b^4.
 \end{aligned}$$

Agora, usando que  $|\zeta| = b^2(1 + \operatorname{Re}(\sigma))$ :

$$\begin{aligned}
 a^2 |\zeta|^2 (y^2 - x^2) + b^4 |\sigma|^2 + 2b^4(1 + \operatorname{Re}(\sigma)) - 2b^4 + b\omega^2 - 2b^2 \operatorname{Re}(\sigma) + \frac{1}{2} |\zeta|^2 x^2 v(u) &= b^4 \\
 \Rightarrow a^2 |\zeta|^2 (y^2 - x^2) + b^4 |\sigma|^2 + 2b^4 \operatorname{Re}(\sigma) + b\omega^2 - 2b^2 \operatorname{Re}(\sigma) + \frac{1}{2} |\zeta|^2 x^2 v(u) &= b^4 \\
 \Rightarrow a^2 |\zeta|^2 (y^2 - x^2) + b^4 |\sigma|^2 + b\omega^2 + 2(b^4 - b^2) \operatorname{Re}(\sigma) + \frac{1}{2} |\zeta|^2 x^2 v(u) &= b^4.
 \end{aligned}$$

Então a expressão da energia fica:

$$a^2|\zeta|^2(y^2 - x^2) + b^4|\sigma|^2 + b\omega^2 + v_1(x, \sigma) = b^4,$$

onde  $v_1(x, \sigma) = 2(b^4 - b^2) \operatorname{Re}(\sigma) + \frac{1}{2}|\zeta|^2 x^2 v(u)$ . Como  $v(u) = O(u^2)$ , e:

$$u = \frac{M^{-1}m|\zeta|z^{-1}}{2} = \frac{M^{-1}m|\zeta|x^2}{4},$$

temos que  $v_1(x, \sigma)$  é de sexta ordem em  $x$ .

Tomemos a terceira equação de (2.155). Temos que  $\operatorname{Re}(\bar{\zeta}\dot{\zeta}) = \bar{\zeta}\dot{\zeta} - i \operatorname{Im}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})$ . Então:

$$\begin{aligned} \sigma &= b^{-2} [|\zeta| - b^2 - ib(\bar{\zeta}\dot{\zeta} - i \operatorname{Im}(\bar{\zeta}\dot{\zeta}))] \\ &= b^{-2} [|\zeta| - b^2 - ib\bar{\zeta}\dot{\zeta} - \operatorname{Im}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})]. \end{aligned}$$

Agora usaremos que o momento angular  $\omega = \operatorname{Im}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})$  é uma integral primeira do problema:

Como  $b^2\sigma = (\bar{\zeta}\dot{\zeta})^{\frac{1}{2}} - b^2 - ib\bar{\zeta}\dot{\zeta} - \omega$ , então:

$$\begin{aligned} b^2\dot{\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{\zeta}\bar{\zeta} + \zeta\dot{\bar{\zeta}}}{|\zeta|} - ib(\dot{\zeta}\dot{\zeta} + \bar{\zeta}\ddot{\zeta}) \\ &= \frac{\operatorname{Re}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})}{|\zeta|} - ib \left[ |\dot{\zeta}|^2 + \bar{\zeta} \left( -\frac{\zeta}{|\zeta|^3} (1 + g_2(u)) \right) \right] \\ &= \frac{\operatorname{Re}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})}{|\zeta|} - ib \left[ |\dot{\zeta}|^2 - \frac{1}{|\zeta|} (1 + g_2(u)) \right], \end{aligned}$$

isto é:

$$\dot{\sigma} = \frac{\operatorname{Re}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})}{b^2|\zeta|} - \frac{i}{b} \left[ |\dot{\zeta}|^2 - \frac{1}{|\zeta|} (1 + g_2(u)) \right].$$

Faremos a transformação no tempo  $dt = b|\zeta|d\tau$ , isto é, a diferenciação agora será em relação a  $\tau$ . Então temos:

$$\sigma' = \frac{\operatorname{Re}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})}{b} - i \left[ |\dot{\zeta}|^2 - 1 - g_2(u) \right],$$

de onde:

$$\begin{aligned}
\sigma' - i\sigma &= \frac{\operatorname{Re}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})}{b} - i \left[ |\zeta||\dot{\zeta}|^2 - 1 - g_2(u) \right] - ib^{-2}[|\zeta| - b^2 - ib \operatorname{Re}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})] \\
&= \frac{\operatorname{Re}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})}{b} - i \left[ |\zeta||\dot{\zeta}|^2 - 1 - g_2(u) \right] - i \frac{|\zeta|}{b^2} + i - \frac{\operatorname{Re}(\bar{\zeta}\dot{\zeta})}{b} \\
&= i \left[ -|\zeta||\dot{\zeta}|^2 + 1 + g_2(u) - \frac{|\zeta|}{b^2} + 1 \right] \\
&= i \left[ 2 - |\zeta||\dot{\zeta}|^2 - \frac{|\zeta|}{b^2} + g_2(u) \right].
\end{aligned}$$

Logo:

$$\sigma' = i \left( \sigma + 2 - |\zeta||\dot{\zeta}|^2 - \frac{|\zeta|}{b^2} + g_2(u) \right).$$

Da primeira equação de (2.155):

$$\begin{aligned}
\dot{z} = -4x^{-3}\dot{x} &\Rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{4}x^3\dot{z} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{4}x^3y \\
&\Rightarrow x' = -\frac{1}{4}b|\zeta|x^3y.
\end{aligned}$$

Da segunda equação de (2.155):

$$\begin{aligned}
\dot{y} = \ddot{z} &= -z|z|^{-3}(1 + g_1(u)) = -\frac{1}{4}x^{-2}|x|^6(1 + g_1(u)) = -\frac{1}{4}x^4(1 + g_1(u)) \\
&\Rightarrow y' = -\frac{1}{4}b|\zeta|x^4(1 + g_1(u)).
\end{aligned}$$

Lembrando que:

$$u = \frac{M^{-1}m|\zeta|x^2}{4} = \frac{1}{4}M^{-1}mb^2(1 + \operatorname{Re}(\sigma))x^2$$

e que  $g_1(u) = O(u^2)$ , podemos escrever:

$$y' = -\frac{1}{4}b|\zeta|x^4(1 + g_3(x, \sigma)),$$

onde  $g_3$  é de pelo menos ordem 4 em  $x$ .

Temos então as seguintes equações:



$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{4}b|\zeta|x^3y, \\ y' = -\frac{1}{4}b|\zeta|x^4(1 + g_3(x, \sigma)), \\ \sigma' = i \left( \sigma + 2 - |\zeta|\dot{\zeta}^2 - \frac{|\zeta|}{b^2} + g_2(u) \right). \end{cases}$$

Quando  $(x, y) = (0, 0)$ , temos que  $x' = y' = 0$ . Vejamos o que acontece com  $\sigma'$  quando  $(x, y) = (0, 0)$ . Como  $x = 0 \Rightarrow |z|^{-1} = 0$  e  $y = 0 \Rightarrow \dot{z} = 0$ , a expressão da energia, para  $(x, y) = (0, 0)$ , fica:

$$\begin{aligned} 2b^2 \left( \frac{1}{2}|\dot{\zeta}|^2 - |\zeta|^{-1} \right) &= -1 \Rightarrow \frac{1}{2}|\dot{\zeta}|^2 = -\frac{1}{2b^2} + |\zeta|^{-1} \\ \Rightarrow |\dot{\zeta}|^2 &= 2|\zeta|^{-1} - \frac{1}{b^2}. \end{aligned}$$

Então ficamos com:

$$\begin{aligned} \sigma' &= i \left( \sigma + 2 - |\zeta| \left( 2|\zeta|^{-1} - \frac{1}{b^2} \right) - \frac{|\zeta|}{b^2} \right) \\ &= i \left( \sigma + 2 - 2 + \frac{|\zeta|}{b^2} - \frac{|\zeta|}{b^2} \right) \\ &= i\sigma, \end{aligned}$$

para  $(x, y) = (0, 0)$ , onde usamos que  $g_2(u) = 0$  para  $(x, y) = (0, 0)$ .

Então, para  $(x, y) = (0, 0)$ , as soluções da equação diferencial para  $\sigma$  são órbitas periódicas, e a transformação de Poincaré terá a forma (2.141), com  $K = \frac{1}{2}\pi b^3$ . E, pela proposição 2.4.2, o conjunto das órbitas parabólicas é uma subvariedade analítica real do superfície de energia.



# Bibliografia

- [1] V.M. Alekseev, *Quasirandom Dynamical Systems. II. One-dimensional Nonlinear Oscillations in a Field With Periodic Perturbation*, Mat. USSR Sb. 77(119):4 (1968), 505-560.
- [2] Richard McGehee, *A Stable Manifold Theorem for Degenerate Fixed Points with Applications to Celestial Mechanics*, Journal of Differential Equations 14 (1973), 70-88
- [3] Jürgen Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press and University of Tokyo Press (1973)
- [4] Anatole Katok e Boris Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1995)
- [5] Fernando Pereira Micena, *Problema Restrito dos Três Corpos*, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP (2007)