Regularização de correntes.
Aplicação aos espaços $\mathcal{L}_p^k(V)$ e $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$.

Sebastián Javier Vidal

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2009

Regularização de correntes.
Aplicação os espaços $\mathcal{L}_p^k(V)$ e $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$.

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Sebastián Javier Vidal
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro - IME-USP.
- Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie - DM-UFSCar.

Agradecimentos

A mi familia: Alberto y Nélida, Natalia, Patricia, Paula, Luciano y Marcos. Gracias, de corazón.
A toda a gente que me ajudou neste tempo, em especial a Pablo, e a Cristian e Sandra. Aos amigos que fiz aqui, pelos momentos compartilhados. Também não posso esquecer da gente da sala...
Finalmente, a meu orientador, por entender minhas inquietudes.
Obrigado a todos.

Resumo

Apresentamos as definições e propriedades básicas das correntes introduzidas por de Rham [4]. São introduzidos dois operadores muito usados na teoria: o bordo, e seu dual, o diferencial. Um papel importante é assumido pelas fórmulas de homotopia, as quais servem para provar que o operador de regularização comuta com o diferencial. O Teorema central do trabalho trata da existência de regularizadores (operadores de regularização) em variedades arbitrarias. Para obter este resultado é provada, primeiro, uma versão global em $\mathbb{R}^n$, para logo provar outra versão que tem as propriedades desejadas na bola euclideana unitaria, e é a identidade fora do fecho da bola. Como resultado deste processo, dada uma corrente, obtemos outra que é C^∞ e que converge à corrente original na topologia fraca do espaço das correntes. Finalmente seguindo o artigo [6], aplicamos este Teorema para provar propriedades dos regularizadores nos espaços das formas $\mathcal{L}_p^k(V)$ e $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$, já no contexto de uma variedade Riemanniana V.

Palavras-chave: Corrente, regularização, existência de regularizadores, propriedades dos regularizadores.

Abstract

We present definitions and basic properties of currents that were introduced by de Rham [4]. Two operators: the boundary and its dual the differential, are very important in the theory. A key role is assumed by the homotopy formulas, which are useful to prove that the regularization operator commutes with the differential. The central Theorem of this work is about the existence of regulators (operators of regularization) in arbitrary manifolds. To obtain this result a first version of this theorem in $\mathbb{R}^n$ is proved, which is then used to prove a second version in the euclidean unit ball. The regulator in the ball can be extended to $\mathbb{R}^n$ as the identity outside the ball. As a result of this process, given a current, we obtain other that is C^∞ and that converges to the original current in the weak topology of the current space. Finally, following [6], we apply this Theorem to prove properties of regulators in the space of forms $\mathcal{L}_p^k(V)$ and $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$, in a Riemannian manifold V.

Keywords: Current, regularization, existence of regulators, properties of regulators.

Sumário

Capítulo 1

Introdução.

Parafraseando de Rham, a noção de corrente foi introduzida por ele no ano 1936 em uma forma pouco geral e pouco precisa (no artigo [2]). Depois, apareceu uma definição formal das distribuições, feita por Laurent Schwartz nos anos 1945-1950 (ver [8]). Isto motivou a definição mais geral e precisa das correntes em 1950, [5] e [3], que finalmente foi publicada na primeira edição do livro [4] (em francês), no ano 1955. A idéia de corrente permitiu generalizar as idéias de distribuições para as variedades, sendo casos particulares, as formas localmante integráveis, as cadeias e os campos vetoriais entre outras. Até as mesmas variedades podem ser consideradas como correntes. Estas correntes permitem trabalhar com dois operadores muito importantes na teoria de formas e cadeias: o bordo e o diferencial.

Nesta dissertação apresentaremos as definições básicas da teoria, assim como o Teorema de existência de operadores de regularização de correntes. Estes operadores, além de regularizar correntes, tem propriedades muito boas, como o fato de comutar com o bordo e com o diferencial. Também tem a propriedade de manter o suporte da corrente regularizada dentro de uma vizinhança prefixada do suporte da corrente original. Para provar este Teorema é necessário usar as fórmulas de homotopia, as quais são demonstradas no contexto geral das correntes. A idéia da prova do teorema de existência do operador de regularização em variedades é a seguinte. Primeiramente mostra-se uma versão do teorema em $\mathbb{R}^n$. Então usando um certo difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ para a bola unitaria de $\mathbb{R}^n$ prova-se uma versão local do teorema, ou seja, constrói-se um operador que regulariza as correntes em uma vizinhança da bola e é a identidade fora dela. Finalmente usa-se este resultado mais partições da unidade para provar o teorema em variedades.

Na última parte desta dissertação, aproveitando as idéias da prova da existência de operadores de regularização em uma variedade V, analisamos as propriedades de convergência destes regularizadores nos espaços de correntes $\mathcal{L}_p^k(V)$ e $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$ em uma variedade Riemanniana, onde $\mathcal{L}_p^k(V)$ é uma generalização dos espaços $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ para formas de grau k, e $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$ é o espaço de formas de grau k tais que $\phi \in \mathcal{L}_p^k(V)$ e $d\phi \in \mathcal{L}_q^{k+1}(V)$.

Tais resultados são originalmente devidos a [6]. Vemos assim que os operadores se comportam bem em estes espaços, com o que obtemos um resultado de densidade, que é o corolário final do presente trabalho.

Capítulo 2

Noções básicas

Neste capítulo apresentaremos a definição de corrente e alguns exemplos importantes. Logo introduzimos o conceito de bordo, e depois o de operador diferencial. Finalmente provamos as fórmulas de homotopia, que serão muito úteis para provar que nosso operador de regularização comuta com o bordo e com o diferencial.

2.1 Noção de corrente

Ao longo do presente trabalho, V será uma *variedade orientável n-dimensional.* Usaremos a notação (x, Ω) para as cartas de V, ou seja que $x : \Omega \subset V \longrightarrow x(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo C^∞ entre conjuntos abertos. Se T^*V denota o fibrado cotangente usamos $\bigwedge^k T^*V$ para o k-ésimo produto exterior, assim como $\bigwedge T^*V$ para a álgebra exterior. Para começar introduzimos a noção de formas:

Definição 2.1.1 (Formas C^∞ e de suporte compacto). As *formas C^∞ em V* são denotadas por $\mathcal{E}_V = \{\phi / \phi$ é seção C^∞do fibrado $\bigwedge T^*V\}$. O espaço das *formas C^∞ com suporte compacto em V* é $\mathcal{D}_V = \{\phi \in \mathcal{E}_V / supp\, \phi$ é compacto$\}$.

Notação. Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, onde cada componente α_i é um inteiro não negativo, é chamado *multi-índice* de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Com isso introduzimos a notação

$$\partial^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

onde (x, Ω) é uma carta de V e $\phi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$.

Definição 2.1.2 (Convergência de formas). Dizemos que a seqüência de formas $\{\phi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ *converge a zero em* $\mathcal{E}_V$ se para quaisquer $u \in V$ e $|\alpha| \geq 0$, existe K_0 vizinhança compacta de u contida no domínio de uma carta

(x,Ω) e tal que

$$\sup_{v\in K_0} |\partial^\alpha \phi_{h,i_1\ldots i_p}(v)| \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.1}$$

onde $\phi_h = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \phi_{h,i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ é a representação de ϕ_h em (x,Ω). Escrevemos $\phi_h \to 0$ em $\mathcal{E}_V$ quando $h \to \infty$, ou simplesmente $\phi_h \xrightarrow[h\to\infty]{\mathcal{E}_V} 0$. Se alem disso, existe K compacto tal que $supp\,\phi_h \subset K$ para todo $h \in \mathbb{N}$, dizemos que $\{\phi_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ *converge a zero em* $\mathcal{D}_V$, e escrevemos $\phi_h \xrightarrow[h\to\infty]{\mathcal{D}_V} 0$.

Definição 2.1.3 (Correntes). Uma *corrente* é um funcional linear $\mathcal{T} : \mathcal{D}_V \to \mathbb{R}$, que é contínuo no seguinte sentido: se $\phi_h \xrightarrow[h\to\infty]{\mathcal{D}_V} 0$, então $\mathcal{T}[\phi_h] \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$. Como as correntes são os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{D}_V$, escrevemos $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V$. De forma análoga dizemos que $\mathcal{T} : \mathcal{E}_V \to \mathbb{R}$ é contínua se $\phi_h \xrightarrow[h\to\infty]{\mathcal{E}_V} 0$ implica que $\mathcal{T}[\phi_h] \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$, e escrevemos $\mathcal{E}'_V$ para os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{E}_V$.

Definição 2.1.4 (Formas limitadas). Um conjunto de formas $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}_V$ é *localmente limitado em uma vizinhança de* $u \in V$, se dado α um multi-índice com $|\alpha| \geq 0$, existe uma constante $M > 0$ e K_0 vizinhança compacta de u contida no domínio de uma carta (x,Ω) tal que

$$\sup_{v\in K_0} |\partial^\alpha \phi_{i_1\ldots i_p}(v)| \leq M \quad , \quad \phi \in \mathcal{B} \tag{2.2}$$

onde $\phi = \sum \phi_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$. Se além disso, $supp\,\phi \subset K$ compacto, para todo $\phi \in \mathcal{B}$, dizemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_V$ é *localmente limitado em uma vizinhança de* $u \in V$. Como a mudança de cartas é C^∞, se a fórmula (2.2) vale para uma carta, vale para qualquer outra. Assim, a constante M depende da carta escolhida. Se as propriedades acima se verificam para todo $u \in V$, dizemos respectivamente, que $\mathcal{B}$ é *limitado em* $\mathcal{E}_V$, e que $\mathcal{B}$ é *limitado em* $\mathcal{D}_V$.

A seguinte proposição será muito usada ao longo do trabalho, pois fornece uma forma alternativa para provar continuidade.

Proposição 2.1 (Continuidade e limitação). *Seja $\mathcal{H} = \mathcal{E}_V$ ou $\mathcal{D}_V$. O funcional linear $\mathcal{T}$ é contínuo em $\mathcal{H}$ se e somente se $\{|\mathcal{T}[\phi]|\}$ permanece limitado, quando ϕ varia em um conjunto limitado em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ um conjunto limitado em $\mathcal{H}$, e suponha que o conjunto $\{|\mathcal{T}[\phi]| : \phi \in \mathcal{B}\}$ não é limitado. Assim, para cada $h \in \mathbb{N}$, existe um $\phi_h \in \mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{T}[\phi_h]| > h$. Por outra parte, dado $u \in V$ e o multi-índice α, pela definição 2.1.4, existe K_0 vizinhança compacta de u contida em um domínio de uma carta (x, Ω) tal que

$$\sup_{v \in K_0} |\partial^\alpha \phi_{h,i_1 \ldots i_p}(v)| \leq M \quad , \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

Portanto $\sup_{v \in K_0} |\frac{\partial^\alpha \phi_{h,i_1 \ldots i_p}(v)}{h}| \leq M/|h|$, para todo $h \in \mathbb{N}$. Pela definição de convergência temos $\phi_h/h \xrightarrow[h \to \infty]{\mathcal{E}_V} 0$. Mas $|\mathcal{T}[\phi_h]/h| > 1$, para todo $h \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{T}$ não pode ser contínua em $\mathcal{E}_V$. Se $\mathcal{H} = \mathcal{D}_V$, temos que existe K compacto tal que $supp\, \phi_h \subset K$, $\forall h \in \mathbb{N}$. O mesmo raciocínio leva a $\phi_h/h \xrightarrow[h \to \infty]{\mathcal{D}_V} 0$ e que $\mathcal{T}$ não pode ser contínua.

Reciprocamente, seja $\{\phi_h\}_h \subset \mathcal{H}$ tal que $\phi_h \xrightarrow[h \to \infty]{\mathcal{H}} 0$. Seja $u \in V$ e $|\alpha| \geq 0$, existe K_0 vizinhança compacta de u contida em domínio de uma carta (x, Ω) tal que

$$\sup_{v \in K_0} |\partial^\alpha \phi_{h,i_1 \ldots i_p}(v)| \underset{h \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Então, existem $M > 0$ e uma seqüencia $\{m_h\}_h$ tal que $m_h \to \infty$ quando $h \to \infty$, e tais que

$$\sup_{v \in K_0} |m_h \partial^\alpha \phi_{h,i_1 \ldots i_p}(v)| \leq M$$

Segue que $\{m_h \phi_h\}_h$ é um conjunto limitado, e pela hipótese, $\{|\mathcal{T}[m_h \phi_h]|\}_h$ é limitado. Mas $|\mathcal{T}[m_h \phi_h]| = |m_h||\mathcal{T}[\phi_h]|$ com $m_h \to \infty$ quando $h \to \infty$; com isto, necessariamente deve ser $|\mathcal{T}[\phi_h]| \underset{h \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Logo $\mathcal{T}$ é contínua em $\mathcal{E}_V$. Se $\{\phi_h\}_h \subset \mathcal{D}_V$ então existe K compacto tal que $supp\, \phi_h \subset K$, para todo $h \in \mathbb{N}$. O raciocínio anterior leva a que $\mathcal{T}$ é contínua em $\mathcal{D}_V$. □

Vejamos agora alguns exemplos básicos, que nos dizem que as correntes generalizam diversos objetos comuns da matemática moderna.

Exemplo 2.1.1 (Formas localmente integráveis). Seja V uma variedade orientável e α uma forma *localmente integrável*, i.e., em cada carta $\alpha = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, com $\alpha_{i_1 \ldots i_p}$ localmente integráveis, então ela define uma corrente:

$$\alpha[\phi] = \int_V \alpha \wedge \phi \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}_V \quad , \quad grau\, \phi = n - p$$

pois $\alpha \wedge \phi$ ainda é integrável. Escrevemos $\mathcal{L}^p_{1,loc}(V)$ para as formas localmente integráveis de grau p. Assim, as formas $\alpha \in \mathcal{E}_V$ são correntes, pois seus coeficentes são C^∞, logo, localmente integráveis. Em particular, uma função $C^\infty(V)$ define uma corrente.

Exemplo 2.1.2 (Campos vetoriais). Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial em uma variedade Riemanniana V. Definimos a 0-forma $i_{\mathcal{X}}(\phi) = \phi(\mathcal{X})$, para toda forma ϕ de grau 1. Por exemplo, se (x, Ω) é uma carta e $\mathcal{X} = \sum_i \mathcal{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\phi = \sum_i \phi_i dx^i$ temos $i_{\mathcal{X}}(\phi) = \sum_i \mathcal{X}^i \phi_i$. Definimos a corrente $\mathcal{X}$ por

$$\mathcal{X}[\phi] = \int_V i_{\mathcal{X}}(\phi)\, d\mu \quad , \phi \in \mathcal{D}_V$$

onde $d\mu$ é o elemento de volume de V. A integral fica bem definida porque $\phi \in \mathcal{D}_V$, ou seja, $i_{\mathcal{X}}(\phi)$ tem suporte compacto.

Exemplo 2.1.3 (Distribuições). Uma *distribuição* $\mathcal{T}$ em qualquer aberto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ define uma corrente, pensando V com a estrutura de variedade induzida. Note a semelhança entre as definições de corrente e de distribuição; de fato a ideia de corrente generaliza a de distribuição para o contexto das variedades.

Exemplo 2.1.4 (Variedades). Uma variedade orientável V, induz uma corrente $\mathcal{V}$ da seguinte maneira

$$\mathcal{V}[\phi] = \int_V \phi \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}_V \quad , \phi \text{ de grau } n$$

Note que a integral sempre é convergente porque as formas ϕ tem suporte compacto.

Definição 2.1.5. Dizemos que a corrente $\mathcal{T}$ é *homogênea de dimensão* p, se $\mathcal{T}[\phi] = 0$ para toda forma homogênea ϕ que não seja de grau p. O número $n - p$ é chamado *grau de* $\mathcal{T}$.

Usando esta definição vemos que cada corrente pode ser decomposta em soma de $n + 1$ correntes homogêneas, que serão chamadas *componentes homogêneas*. Assim para toda corrente $\mathcal{T}$, podemos escrever $\mathcal{T} = \sum_{i=0}^n \mathcal{T}_i$, onde as $\mathcal{T}_i$ são correntes homogêneas de grau i. Note que a definição de grau e homogeneidade para correntes coincide com a definição para formas. Em particular, uma função $f \in C^\infty(V)$ é uma corrente de grau zero. Também, se tomamos um aberto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ com a estrutura induzida, as *distribuições* em V são correntes de grau n, pois agem nas funções C^∞ de suporte compacto (0-formas).

Definição 2.1.6. Dizemos que *$\mathcal{T}$ é igual a zero no aberto* Ω, se $\mathcal{T}[\phi] = 0$, $\forall \phi \in \mathcal{D}_V$ tal que $supp\,\phi \subset \Omega$. E dizemos que a corrente *$\mathcal{T}$ é de classe C^r no aberto* Ω, se $\mathcal{T} = \alpha$ em Ω, onde α é uma forma de classe C^r, i.e., $\mathcal{T} - \alpha = 0$ em Ω.

Com esta definição se pode provar o seguinte resultado básico.

Proposição 2.2. *Se $\mathcal{T} = 0$ em uma vizinhança de p, $\forall p \in \Omega$, então $\mathcal{T} = 0$ em Ω.*

Definição 2.1.7. Pela Proposição 2.2, existe um aberto maximal A onde $\mathcal{T} = 0$, então podemos definir o suporte de uma corrente como $supp\,\mathcal{T} = V \backslash A$, ou equivalentemente $supp\,\mathcal{T} = \bigcap\{F$ fechado$/\exists\,\Omega$ aberto, $\Omega \subset F$ e $\mathcal{T} \neq 0$ em $\Omega\}$.

Definição 2.1.8. Seja $\phi \in \mathcal{E}_V$, dizemos que $\mathcal{T}[\phi]$ é *convergente* se a série

$$\mathcal{T}[\phi] = \sum_i \mathcal{T}[\psi_i \phi]$$

é convergente para *toda* partição da unidade $\{\psi_i\}_i$ da variedade V.

Se $supp\,\mathcal{T}$ é compacto, a série sempre é convergente, pois só temos finitos somandos diferentes de zero. Neste caso podemos definir $\mathcal{T}[\phi]$, para toda forma $\phi \in \mathcal{E}_V$ (não precisa ter suporte compacto).

Notação. Usaremos a notação $\mathcal{T}[1] = \int_V \mathcal{T}$ se $\mathcal{T}[1]$ é convergente. Lembrar que isto sempre acontece se o suporte de $\mathcal{T}$ é compacto.

Proposição 2.3. *As correntes de suporte compacto são os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{E}_V$, ou seja, $\mathcal{E}'_V = \{\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V / supp\,\mathcal{T}$ é compacto$\}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{T} : \mathcal{E}_V \to \mathbb{R}$ linear contínuo. Vejamos que a restrição $\mathcal{T} : \mathcal{D}_V \to \mathbb{R}^n$ é linear, contínua e de suporte compacto. Obviamente esta restrição ainda é linear, e é contínua porque as formas limitadas em $\mathcal{D}_V$ são limitadas em $\mathcal{E}_V$. Falta ver que o suporte de $\mathcal{T}$ é compacto. Suponha que $supp\,\mathcal{T}$ não é compacto. Seja $\{\phi_h\}_h \subset \mathcal{D}_V$ uma seqüência com a seguinte propriedade: para todo compacto K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h \geq n$ implica que $supp\,\phi_h \cap K = \emptyset$. Como $supp\,\mathcal{T}$ não é compacto, segue que $\forall n \in \mathbb{N}$, existe $h \geq n$ tal que $supp\,\phi_h \cap supp\,\mathcal{T} \neq \emptyset$, ou seja, $\mathcal{T}[\phi_h] \neq 0$. Redefinimos $\{\phi_h\}_h$ multiplicando cada termo por uma constante adequada para que $|\mathcal{T}[\phi_h]| > h$, $\forall h \in \mathbb{N}$. Mas pela definição de $\{\phi_h\}_h$ sabemos que $\phi_h \xrightarrow[h\to\infty]{\mathcal{E}_V} 0$, e como $\mathcal{T}$ é contínua temos que $\mathcal{T}[\phi_h] \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$. Isto é um absurdo porque $|\mathcal{T}[\phi_h]/h| > 1$, $\forall h \in \mathbb{N}$. Logo $supp\mathcal{T}$ é compacto.

Reciprocamente, seja $\mathcal{T} : \mathcal{D}_V \to \mathbb{R}$ linear contínuo com suporte compacto. Como $supp\,\mathcal{T}$ é compacto, $\mathcal{T}[\phi]$ é convergente, $\forall \phi \in \mathcal{E}_V$. Então podemos estender a um funcional linear $\mathcal{T} : \mathcal{E}_V \to \mathbb{R}$. Provemos a continuidade. Seja $\{\psi_j\}_j$ uma partição da unidade. Como o suporte de $\mathcal{T}$ é compacto, dada $\phi \in \mathcal{E}_V$ a soma $\mathcal{T}[\phi] = \sum_j \mathcal{T}[\psi_j \phi]$ só tem finitos termos. Seja $\mathcal{B}$ um conjunto limitado em $\mathcal{E}_V$, então para todo j, $\{\psi_j \phi : \phi \in \mathcal{B}\}$ é um conjunto limitado em $\mathcal{D}_V$. Isto se deve a que, fixado j, $supp\,\psi_j \phi$ está contido no compacto $supp\,\psi_j$, para todo $\phi \in \mathcal{B}$. Pela Proposição 2.1 o conjunto $\{|\mathcal{T}[\psi_j \phi]|\}_{\phi \in \mathcal{B}}$ permanece limitado, para todo j. Segue que $\{|\mathcal{T}[\phi]|\}_{\phi \in \mathcal{B}}$ permanece limitado. Portanto $\mathcal{T}$ é contínua em $\mathcal{E}_V$. □

Exemplo 2.1.5. Se V é uma variedade compacta orientável, $\mathcal{V}$ define uma corrente de suporte compacto, pois $\mathcal{V}[\phi] = \int_V \phi$ faz sentido para toda $\phi \in \mathcal{E}_V$ de grau n.

Definição 2.1.9. Se $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V$ e $\alpha \in \mathcal{E}_V$, então *o produto exterior* de uma corrente por uma forma é

$$\mathcal{T} \wedge \alpha[\phi] = \mathcal{T}[\alpha \wedge \phi] \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}_V \tag{2.3}$$

Se $\mathcal{T}$ e α são homogêneas de grau p e q respectivamente definimos $\alpha \wedge \mathcal{T} = (-1)^{pq} \mathcal{T} \wedge \alpha$. Assim, por causa da decomposição em correntes homogêneas, podemos estender para o caso não homogêneo: $\alpha \wedge \mathcal{T} = \sum_{i,j} \alpha_j \wedge \mathcal{T}_i$, onde $\alpha = \sum_j \alpha_j$ e $\mathcal{T} = \sum_i \mathcal{T}_i$.

Note que a definição faz sentido para qualquer forma $\alpha \in \mathcal{E}_V$, pois o produto $\alpha \wedge \phi$ tem suporte compacto, qualquer que seja $\phi \in \mathcal{D}_V$. Para o caso $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_V$, a fórmula (2.3) ainda é convergente para qualquer forma $\phi \in \mathcal{E}_V$. Se $\mathcal{T} = \beta \in \mathcal{E}_V$, então uma conta mostra que $\mathcal{T} \wedge \alpha = \beta \wedge \alpha$, i.e., as definições dos produtos exteriores coincidem. Se f é uma função C^∞ então escrevemos $\mathcal{T} \wedge f = \mathcal{T} f$ ou $f\mathcal{T}$, ou seja: $\mathcal{T} f[\phi] = f\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[f\phi]$, para $\phi \in \mathcal{D}_V$.

Notação. Como $\mathcal{T} \wedge \phi[1] = \mathcal{T}[\phi \wedge 1] = \mathcal{T}[\phi \cdot 1] = \mathcal{T}[\phi]$, escrevemos

$$\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T} \wedge \phi[1] = \int_V \mathcal{T} \wedge \phi$$

Observe que esta notação serve para generalizar o caso $\mathcal{T} = \alpha \in \mathcal{L}^k_{1,loc}(V)$, onde $\alpha[\phi] = \int_V \alpha \wedge \phi$.

Se $\mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p}$ $(i_1 < \ldots < i_p)$ são $\binom{n}{p}$ correntes de grau zero definidas em Ω, onde (x, Ω) é carta de V, temos que

$$\mathcal{T} = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \tag{2.4}$$

é uma corrente de grau p em Ω. De fato $\mathcal{T}[\phi] = \sum \mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}[\phi] = \sum \mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p}[dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \phi] = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}_v$ de grau diferente de $n - p$, pois $\mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p}$ tem grau 0. Note a semelhança com a expressão de uma forma em coordenadas, só trocamos os coeficentes C^∞ por correntes de grau 0.
De maneira recíproca, cada corrente de grau p em Ω, pode ser representada por uma expressão do tipo (2.4), onde $\mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p}$ são correntes de grau zero. Dada $\mathcal{T}$ de grau p, sejam $\mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p}$ definidas por

$$\mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p}[a\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n] = \delta^{1 \ldots\ldots n}_{i_1 \ldots i_p\, j_1 \ldots j_{n-p}} \mathcal{T}[a\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{n-p}}]$$

onde $a \in C^\infty(\Omega)$ é de suporte compacto, e $\delta^{1 \ldots\ldots n}_{i_1 \ldots i_p\, j_1 \ldots j_{n-p}}$ é o símbolo de Kronecker, que é definido da seguinte maneira:

(i) Se $i_1 < \ldots < i_p$ e $j_1 < \ldots < j_p$ temos $\delta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p} = \begin{cases} 1 & \text{se } i_k = j_k,\ k = 1, \ldots, p \\ 0 & \text{se } \exists k \text{ tal que } i_k \neq j_k \end{cases}$

(ii) $\delta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p}$ é antisimétrico em i_k e j_k.

Com esta definição vemos que $\mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p}$ são correntes de grau 0, e uma conta mostra que vale a igualdade (2.4). Portanto, se escrevemos a corrente $\mathcal{T}$ de grau n na carta (x, Ω), obtemos $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, onde $\mathcal{T}_0$ é uma corrente de grau zero. Então, em (x, Ω) podemos identificar $\mathcal{T}$ com $\mathcal{T}_0$, i.e. uma forma de grau n com uma forma de grau 0. Assim, toda distribuição (corrente de grau n em $V \subset \mathbb{R}^n$) também é uma corrente de grau 0 (em $\mathbb{R}^n$).

Notação. Escrevemos

$$\mathcal{T} = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \mathcal{T}_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

para a equação (2.4), para pensar as correntes (localmente) como formas onde os coeficentes são distribuições.

Agora vamos introduzir as noções de limitação e continuidade até ordem p. Para isso, lembremos que $\mathcal{E}^p_V = \{\phi / \phi$ é seção C^p do fibrado $\bigwedge T^*V\}$ e $\mathcal{D}^p_V$ são as formas de $\mathcal{E}^p_V$ de suporte compacto. Note que $\mathcal{E}^{p+1}_V \subset \mathcal{E}^p_V$ e $\mathcal{D}^{p+1}_V \subset \mathcal{D}^p_V$. Também $\mathcal{E}_V = \cap_{0 \leq p < \infty} \mathcal{E}^p_V$ e $\mathcal{D}_V = \cap_{0 \leq p < \infty} \mathcal{D}^p_V$.

Definição 2.1.10 (Conjuntos limitados em $\mathcal{E}^p_V$ e $\mathcal{D}^p_V$.). Um conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^p_V$ é *localmente limitado até ordem p em uma vizinhança de $u \in V$* se vale a estimativa (2.2) da Definição 2.1.4, mas somente para $|\alpha| \leq p$. Se além disso todos os suportes estão contidos em um compacto K, dizemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}^p_V$ *é localmente limitado em uma vizinhança de $u \in V$*. Se estas propriedades valem $\forall u \in V$ dizemos respectivamente que $\mathcal{B}$ é limitado em $\mathcal{E}^p_V$ e que $\mathcal{B}$ é limitado em $\mathcal{D}^p_V$.

Com esta definição podemos pensar em uma noção de continuidade nos espaços $\mathcal{E}^p_V$ e $\mathcal{D}^p_V$.

Definição 2.1.11 (Continuidade até ordem p.). Uma corrente $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V$ é *contínua até ordem p*, se o conjunto $\{|\mathcal{T}[\phi]| : \phi \in \mathcal{B}\}$ é limitado para cada $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_V$ que seja limitado em $\mathcal{D}^p_V$.

Na verdade se pode provar que se $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V$ é contínua até ordem p, então é possível estender $\mathcal{T}$ para um único operador linear contínuo em $\mathcal{D}^p_V$ (veja [4]).

2.2 Bordo e diferencial de uma corrente.

Definição 2.2.1. O *bordo de uma corrente* $\mathcal{T}$ é a corrente $\partial\mathcal{T} : \mathcal{D}_V \to \mathbb{R}$ definida por

$$\partial\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[d\phi]\,,\ \forall\phi \in \mathcal{D}_V \tag{2.5}$$

Para ver que $\partial\mathcal{T}$ é efetivamente uma corrente basta notar que o operador diferencial $d : \mathcal{D}_V \to \mathcal{D}_V$ é contínuo, pois leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. Ou seja, se as derivadas de uma forma α são limitadas, então as derivadas de $d\alpha$ também o são (lembrar a definição de limitação). Seja $\{\alpha_h\}_h$ tal que quando $h \to \infty$, temos $\alpha_h \to 0$. Por continuidade $d\alpha_h \to 0$, e como $\mathcal{T}$ é corrente, $\partial\mathcal{T}[\alpha_h] = \mathcal{T}[d\alpha_h] \to 0$. Isto mostra que $\partial\mathcal{T}$ é corrente.
Se $\mathcal{T}$ tem suporte compacto, a definição 2.2.1 se aplica sem problemas para formas $\phi \in \mathcal{E}_V$ (pois $d\phi \in \mathcal{E}_V$). Em particular, fica bem definido $\partial\mathcal{T}[1] = \mathcal{T}[d\,1] = 0$. Note que o operador ∂ diminui a dimensão em um grau: se $\mathcal{T}$ é p-dimensional temos $\partial\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[d\phi] = 0$, para toda $\phi \in \mathcal{D}_V$ de grau diferente de $p-1$. Logo $\partial\mathcal{T}$ é de dimensão $p-1$.
Exemplo 2.2.1 (Teorema de Stokes). Notemos a similitude da fórmula (2.5) com o Teorema de Stokes. Seja V uma variedade orientável com bordo e consideremos a corrente $\mathcal{V}$, definida no exemplo (2.1.4). Usando a definição (2.2.1), e identificando a corrente $\partial\mathcal{V}$ com a variedade ∂V segue que

$$\int_{\partial V}\phi = \partial\mathcal{V}[\phi] = \mathcal{V}[d\phi] = \int_V d\phi \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}_V$$

que não é outra coisa que o Teorema de Stokes.

Antes de apresentar o diferencial de uma corrente precisamos de um novo operador.

Definição 2.2.2. Definimos o operador w como $\mathrm{w}\mathcal{T} = (-1)^p\mathcal{T}$ para correntes homogêneas de *grau p*, e estendemos por linearidade usando a decomposição em correntes homogêneas. Por dualidade, obtemos o operador linear w*: $\mathrm{w}^*\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[\mathrm{w}\phi]$, onde definimos para formas: $\mathrm{w}\alpha = (-1)^{grau\alpha}\alpha$. Também definimos $\overline{\mathrm{w}} = \mathrm{w}^{n+1}$.

Seja V uma variedade orientável. Se $\mathcal{T}$ é igual a uma forma α com coeficentes em $C^1(V)$ e ϕ tem suporte compacto, temos que $\int_V d(\alpha \wedge \phi) = 0$. De fato, como ϕ tem suporte compacto, $\alpha \wedge \phi$ também, segue do Teorema de Stokes que $\int_V d(\alpha \wedge \phi) = \int_{\partial V} \alpha \wedge \phi = 0$. Assim, como $d(\alpha \wedge \phi) = d\alpha \wedge \phi + \mathrm{w}\alpha \wedge d\phi$, segue que $\int_V d\alpha \wedge \phi = -\int_V \mathrm{w}\alpha \wedge \phi$, ou ainda

$$d\alpha[\phi] = -\mathrm{w}\alpha[d\phi] \tag{2.6}$$

Sabemos que $-\mathrm{w}d = d\mathrm{w}$, então $\mathrm{w}d\alpha[\phi] = -d\mathrm{w}\alpha[\phi] = (-1)^2\mathrm{w}^2\alpha[d\phi] = \alpha[d\phi]$, onde usamos (2.6) com $\mathrm{w}\alpha$ em lugar de α. Então $\alpha[d\phi] = \mathrm{w}d\alpha[\phi]$, e pela definição $\partial\mathcal{T}[\phi] = \partial\alpha[\phi] = \alpha[d\phi]$, portanto $\partial\mathcal{T}[\phi] = \mathrm{w}d\alpha[\phi] = \mathrm{w}d\mathcal{T}[\phi]$, $\forall\phi \in \mathcal{D}_V$, ou ainda $\partial\mathcal{T} = \mathrm{w}d\mathcal{T}$. Este caso particular, e o fato que $\mathrm{w}^2 = 1$ induz a seguinte:

Definição 2.2.3. Chamamos *diferencial de $\mathcal{T}$* à corrente $d\mathcal{T}$ definida por

$$d\mathcal{T} = \mathrm{w}\partial\mathcal{T}$$

Os operadores d e ∂, tem a seguintes propriedades importantes:

$$\partial^2\mathcal{T} = d^2\mathcal{T} = 0 \quad , \quad \mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V$$

As quais surgem da propriedade análoga do operador d para formas: $\partial^2\mathcal{T}[\phi] = \partial\mathcal{T}[d\phi] = \mathcal{T}[d^2\phi] = 0$. E como $d^2\mathcal{T} = d(\mathrm{w}\partial\mathcal{T}) = \mathrm{w}\partial(\mathrm{w}\partial\mathcal{T})$, temos $d^2\mathcal{T}[\phi] = \mathrm{w}\partial(\mathrm{w}\partial\mathcal{T})[\phi] = -\mathrm{w}(\mathrm{w}\partial\mathcal{T})[d\phi] = -\mathrm{w}^2\partial\mathcal{T}[d\phi] = -\mathcal{T}[d^2\phi] = 0$. Para formas, como conseqüência de $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + \mathrm{w}\alpha \wedge \beta$ temos que $\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \mathrm{w}\beta + \alpha \wedge \partial\beta$. Analogamente para correntes $\partial(\mathcal{T} \wedge \beta) = \partial\mathcal{T} \wedge \mathrm{w}\beta + \mathcal{T} \wedge \partial\beta$. Portanto, por dualidade

$$d(\mathcal{T} \wedge \beta) = d\mathcal{T} \wedge \beta + \mathrm{w}\mathcal{T} \wedge d\beta \quad , \quad \mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V,\ \beta \in \mathcal{E}_V$$

Definição 2.2.4. Seja α uma p-forma C^1, representada na carta (x, Ω) por $\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \alpha_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_p}$ então definimos a *derivada parcial $\frac{\partial\alpha}{\partial x^k}$ na carta* (x, Ω) por

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x^k} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial\alpha_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

Logo, se ϕ tem suporte compacto temos $\int_V \frac{\partial}{\partial x^k}(\alpha \wedge \phi) = 0$. Usando a definição podemos mostrar a regra de derivação do produto de formas

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\alpha \wedge \phi) = \frac{\partial\alpha}{\partial x^k} \wedge \phi + \alpha \wedge \frac{\partial\phi}{\partial x^k}$$

portanto $0 = \int_V \frac{\partial\alpha}{\partial x^k} \wedge \phi + \int_V \alpha \wedge \frac{\partial\phi}{\partial x^k}$, ou ainda $\frac{\partial\alpha}{\partial x^k}[\phi] = -\alpha\left[\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right]$, para $\phi \in \mathcal{D}_V$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 2.2.5. Seja $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V$, definimos *a derivada parcial $\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial x^k}$ na carta* (x, Ω) como

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial x^k}[\phi] = -\mathcal{T}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right] \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}_V$$

É fácil ver que o operador $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x^k}$ é uma corrente: se $\phi_h \to 0$ temos que $\frac{\partial \phi_h}{\partial x^k} \to 0$. Como $\mathcal{T}$ é contínua, $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x^k}[\phi_h] \to 0$. Também, note que a definição (2.2.5) permite pensar em $\frac{\partial \alpha}{\partial x^k}$ para uma função $\alpha \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$, Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, e que este conceito coincide com o de *derivada fraca*. Ainda vale que

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{T} \wedge \phi) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x^k} \wedge \phi + \mathcal{T} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}_V \, , \, \mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V$$

E fazendo algumas contas sai que $d\mathcal{T} = \sum_{k=1}^n dx^k \wedge \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x^k}$ para $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V$. Portanto, o operador diferencial d é representado em (x, Ω) por

$$d = \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2.7}$$

2.3 Imagem de uma corrente por uma aplicação.

Sejam agora V e W duas variedades, não necessariamente da mesma dimensão. Consideremos a variedade produto $V \times W$, e escrevamos $n = dimV$ e $m = dimW$.

Definição 2.3.1. Seja $\mu : V \to W$ uma aplicação C^∞ entre variedades. Se $\mathcal{T}$ é uma corrente com suporte compacto em V, chamamos de *imagem de $\mathcal{T}$ por μ* à corrente $\mu\mathcal{T}$ definida em W por

$$\mu\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[\mu^*\phi] \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}_W$$

onde $\mu^*\phi$ é o *pull-back* da forma ϕ.

Como $\mathcal{T}$ tem suporte compacto compacto e $\mu^*\phi \in \mathcal{E}_V$, $\mathcal{T}[\mu^*\phi]$ sempre converge. Aliás $\mu\mathcal{T}$ satisfaz a condição de continuidade imposta nas correntes: se $\{\phi_i\}_i$ é um conjunto limitado, então $\{\mu^*\phi_i\}_i$ é um conjunto limitado, e como $\mathcal{T}$ é corrente, $\{|\mathcal{T}[\mu^*\phi_i]|\}_i$ é um conjunto limitado. Pela Proposição 2.1, $\mu\mathcal{T}$ é uma corrente bem definida. Se $\mathcal{T}$ não tem suporte compacto, pode acontecer que $\mathcal{T}[\mu^*\phi]$ não seja convergente, pois o suporte de $\mu^*\phi$ não é necessariamente compacto mesmo que ϕ tenha suporte compacto. Mas, se μ é homeomorfismo C^∞, $\mu^*\phi$ tem suporte compacto e $\mu\mathcal{T}$ fica bem definida $\forall \mathcal{T} \in \mathcal{D}'_V$. Se μ é homeomorfismo C^∞, vale que

$$\mu\mu^{-1}\mathcal{T} = \mathcal{T} \tag{2.8}$$

pois $\mu\mu^{-1}\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[(\mu^{-1})^*\mu^*\phi] = \mathcal{T}[\phi]$. Notemos que a operação imagem, é linear nas correntes, i.e., $\mu(\mathcal{T} + \mathcal{S}) = \mu\mathcal{T} + \mu\mathcal{S}$. Temos também que a operação assim definida, comuta com o operador bordo

$$\partial\mu\mathcal{T} = \mu\partial\mathcal{T} \tag{2.9}$$

pois $\partial\mu\mathcal{T}[\phi] = \mu\mathcal{T}[d\phi] = \mathcal{T}[\mu^*d\phi] = \mathcal{T}[d\mu^*\phi] = \partial\mathcal{T}[\mu^*\phi] = \mu\partial\mathcal{T}[\phi]$, para toda $\phi \in \mathcal{D}_V$. Apesar disso, em geral, μ não comuta com o operador diferencial d, simplesmente porque $d\mathcal{T} = \mathrm{w}\partial\mathcal{T}$, se $\mathcal{T}$ é homogênea de grau p. Na verdade $d\mu\mathcal{T} = \mathrm{w}\mu\mathrm{w}d\mathcal{T} = (-1)^{m-n}\mu d\mathcal{T}$; se $dimV = dimW$ então $d\mu\mathcal{T} = \mu d\mathcal{T}$. Agora, se $\mu : V \to W$ é um homeomorfismo C^∞, temos:

$$\mu\phi = (\mu^{-1})^*\phi \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}_V \tag{2.10}$$

$$\mu^*\phi = \mu^{-1}\phi \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}_W \tag{2.11}$$

De fato, pela identidade $\int_W(\mu^{-1})^*\psi = \int_V \psi$ temos $\int_W(\mu^{-1})^*\phi \wedge \alpha = \int_W(\mu^{-1})^*[\phi \wedge \mu^*\alpha] = \int_V \phi \wedge \mu^*\alpha$, ou seja, $(\mu^{-1})^*\phi[\alpha] = \phi[\mu^*\alpha] = \mu\phi[\alpha]$, que é a fórmula (2.10). A equação (2.11) sai da anterior usando $\mu = \mu^{-1}$.

Definição 2.3.2. Se μ é um homeomorfismo C^∞, a *imagem inversa (pull-back) da corrente* $\mathcal{T}$ é a corrente $\mu^*\mathcal{T}$ definida como

$$\mu^*\mathcal{T} = \mu^{-1}\mathcal{T}$$

Segue que $\mu^*\partial\mathcal{T} = \partial\mu^*\mathcal{T}$ pois $\mu^*\partial\mathcal{T}[\phi] = \partial\mathcal{T}[(\mu^{-1})^*\phi] = \mathcal{T}[d(\mu^{-1})^*\phi] = \mathcal{T}[(\mu^{-1})^*d\phi] = \partial\mu^*\mathcal{T}[\phi]$, para toda $\phi \in \mathcal{D}_V$. Também

$$\mu^*\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[\mu\phi] \tag{2.12}$$

já que $\mu^*\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[(\mu^{-1})^*\phi] = \mathcal{T}[\mu\phi]$, pela equação (2.10).

2.4 Correntes duplas.

Definição 2.4.1 (Formas duplas). Sejam $\alpha \in \bigwedge^k T^*V$ e $\beta \in \bigwedge^l T^*W$ duas formas, definimos o *produto tensorial* $\alpha \odot \beta$ como a aplicação multilinear que em $(p,q) \in V \times W$ vale

$$(\alpha \odot \beta)_{(p,q)}(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l) = \alpha_p(v_1, \ldots, v_k).\beta_q(w_1, \ldots, w_l)$$

onde $v_i \in T_p^*V$ e $w_j \in T_q^*W$. Note que a definição é comutativa, i.e., $\alpha \odot \beta = \beta \odot \alpha$. Fica definido o produto $\bigwedge^k T_p^*V \odot \bigwedge^l T_q^*W$, que é um espaço vetorial com base $\{dx_p^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_p^{i_k} \odot dy_q^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_q^{j_l} : i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_l\}$. Portanto temos um fibrado $\bigwedge^k T^*V \odot \bigwedge^l T^*W$ na variedade produto $V \times W$, e tomando a soma direta para todos os graus temos $\bigwedge T^*V \odot \bigwedge T^*W$. Definimos o conjunto das *formas duplas em $V \times W$*

$$\mathcal{E}(V \times W) = \left\{\gamma / \gamma \text{ é seção } C^\infty \text{ de } \bigwedge T^*V \odot \bigwedge T^*W\right\}$$

E *as formas duplas em* $V \times W$ *de suporte compacto*

$$\mathcal{D}(V \times W) = \{\gamma \in \mathcal{E}(V \times W) / supp\, \gamma \text{ é compacto }\}$$

Nas cartas (x, Ω) de V e (y, Ω') de W, temos

$$\gamma(x,y) = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k \\ j_1<\cdots<j_l}} \gamma_{i_1\ldots i_p\, j_1\ldots j_q}(x,y)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \odot dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_l} = \sum_{IJ} \gamma_{IJ}(x,y) dx^I \odot dy^J \tag{2.13}$$

onde $\gamma_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}(x,y) \in C^\infty(\Omega \times \Omega')$. Como $\odot$ é comutativo, podemos pensar as formas duplas em $V \times W$, como formas em V com coeficentes em W, e/ou como formas em W com coeficentes em V. Por exemplo, $\gamma(x,y) = \sum_I \alpha_I(x,y) \odot dx^I$, onde $\alpha_I(x,y) = \sum_J \gamma_{IJ}(x,y) dy^J$ é uma forma em W, para cada $x \in \Omega$. Note a diferença com o produto tensorial $\otimes$ definido por $(dx \otimes dy)_p\, (v,w) = dx_p(v)\, .\, dy_p(w)$, onde $v, w \in T_p^*V$, ou seja pertencem ao mesmo espaço vetorial. Lembrar que este produto é usado para definir o produto $\wedge$ e que este $\otimes$ não é comutativo. Por outra parte, note que temos uma diferença importante entre os espaços $\mathcal{E}_{V\times W}$ (formas simples do produto) e $\mathcal{E}(V \times W)$ (formas duplas). No caso das formas duplas, a estrutura do espaço permite "integrar"só em uma variável como veremos no próximo Teorema. Como as formas duplas dependem de duas variáveis, podemos definir o operador $d_x : \bigwedge^k T^*V \odot \bigwedge^l T^*W \to \bigwedge^{k+1} T^*V \odot \bigwedge^l T^*W$ como

$$d_x\gamma(x,y) = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_k \\ j_1<\ldots<j_l}} \sum_i \frac{\partial \gamma_{i_1\ldots i_k\, j_1\ldots j_l}}{\partial x^i}(x,y)\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \odot dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_l}$$

onde γ tem a representação da equação (2.13). Analogamente se define d_y. As definições de limitação e convergência de formas duplas são análogas às de formas simples. Também definimos o *produto exterior de formas duplas* como a forma dupla obtida fazendo o produto exterior das formas correspondentes (ou seja, multiplicamos exteriormente as componentes de V com as de V e as de W com as de W).

Definição 2.4.2 (Corrente dupla)**.** Um operador $\mathcal{L} : \mathcal{D}(V \times W) \to \mathbb{R}$ linear contínuo é chamado de *corrente dupla*. Notamos as correntes duplas com $\mathcal{D}'(V \times W)$.

Definição 2.4.3. A corrente dupla $\mathcal{L}$ é *homogênea, de grau p em x e de grau q em y*, se $\mathcal{L}[\gamma] = 0$, para toda γ forma dupla, homogênea que não seja de grau $n - p$ em x, e que não seja de grau $m - q$ em y.

Se (x, Ω) e (y, Ω') são cartas em $V \times W$, então cada corrente dupla pode ser representada em $\Omega \times \Omega'$ por

$$\mathcal{L} = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k \\ j_1<\cdots<j_l}} \mathcal{L}_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \odot dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_l}$$

onde os coeficentes $\mathcal{L}_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l}$ são correntes duplas de grau zero em x e em y.

Notação. Se $\mathcal{L} \in \mathcal{D}'(V \times W)$ escrevemos $\mathcal{L}(x, y)$, onde $x \in V$, $y \in W$ denotam as variáveis das variedades.

Como antes, podemos definir suporte de uma corrente dupla, e provar que as correntes de suporte compacto são, na verdade, o espaço $\mathcal{E}'(V \times W)$.

Definição 2.4.4. O *suporte de uma corrente dupla* $\mathcal{L}$ é definido por $supp\mathcal{L} = V \backslash A$, onde A é o maior aberto tal que $\mathcal{L} = 0$, ou equivalentemente $supp\,\mathcal{L} = \cap\{F/\exists\, \Omega$ aberto, $\Omega \subset F$ e $\mathcal{T} \neq 0$ em $\Omega\}$.

Definição 2.4.5. Definimos as *correntes duplas de suporte compacto:*

$$\mathcal{E}'(V \times W) = \{\mathcal{L} \in \mathcal{D}'(V \times W) /\ supp\mathcal{L} \text{ é compacto}\}$$

Definição 2.4.6. Se $\mathcal{L} \in \mathcal{D}'(V \times W)$ e $\alpha \in \mathcal{E}(V \times W)$ definimos o *produto exterior* de uma corrente dupla por uma forma dupla

$$\mathcal{L} \wedge \alpha[\gamma] = \mathcal{L}[\alpha \wedge \gamma] \quad , \quad \gamma \in \mathcal{D}(V \times W)$$

Definição 2.4.7. Seja $\mathcal{L}$ uma corrente dupla homogênea de grau p em x, definimos as operações w_x, w_x^* e $\bar{\mathrm{w}}_x$ como $\mathrm{w}_x\mathcal{L} = (-1)^p\mathcal{L}$, $\mathrm{w}_x^*\mathcal{L} = (-1)^{(n-p)}\mathcal{L}$ e $\overline{\mathrm{w}_x}\mathcal{L} = (-1)^{p(n+1)}\mathcal{L}$, lembrando que $n = dimV$. Os operadores para y são análogos. Dada uma corrente dupla $\mathcal{L}$, definimos os operadores ∂_x e d_x como $\partial_x\mathcal{L}[\gamma] = \mathcal{L}[d_x\gamma]$ e $d_x\mathcal{L} = \mathrm{w}_x\partial_x\mathcal{L}$, onde $\gamma \in \mathcal{D}(V \times W)$. Os operadores ∂_y e d_y são análogos.

Agora, vejamos como "integrar"uma forma dupla só em uma variável. Seja $\gamma(x, y) \in \mathcal{D}(V \times W)$ uma forma dupla, e suponha que $\gamma(x, y)$ é representada em (x, Ω), (y, Ω') pela expressão:

$$\gamma(x, y) = \sum_J \alpha_J(x, y) \odot dy^J$$

onde os coeficentes $\alpha_J(x, y) = \sum_I \gamma_{IJ}(x, y)\, dx^I$ são formas em V, para cada $y \in \Omega'$. Pela definição de forma dupla, as funções γ_{IJ} são C^∞. Se $\mathcal{T}_x = \mathcal{T}(x)$ é uma corrente simples em V, então existe uma forma simples bem definida em W, que é representada em (y, Ω') por

$$\sum_J \mathcal{T}_x\left[\alpha_J(x, y)\right] dy^J \tag{2.14}$$

Isto é uma forma em W porque a função $\mathcal{T}_x[\alpha_J(x,\cdot)] : \Omega' \to \mathbb{R}$ é C^∞. De fato, para cada $x \in \Omega$ as funções $\alpha_J(x,\cdot) : \Omega' \subset W \to \mathcal{D}_V$ são C^∞ na variável y, e vale que $\frac{\partial}{\partial y^k}\mathcal{T}_x[\alpha_J(x,y)] = \mathcal{T}_x[\frac{\partial}{\partial y^k}\alpha_J(x,y)]$. Denotamos a forma da equação (2.14) por

$$\mathcal{T}_x[\gamma(x,y)] = \int_x \mathcal{T}_x \wedge \gamma(x,y) \in \mathcal{D}_W$$

Assim, se induz uma transformação linear $\mathcal{T}_x : \mathcal{D}(V \times W) \to \mathcal{D}_W$ dada por

$$\mathcal{T}_x[\gamma] = \mathcal{T}_x[\sum_J \alpha_J dy^J] = \sum_J \mathcal{T}_x[\alpha_J]dy^J = \beta_y \in \mathcal{D}_W \quad , \quad \gamma \in \mathcal{D}(V \times W) \tag{2.15}$$

Teorema 2.1. *Se $\mathcal{T}_x \in \mathcal{D}_V$, $\mathcal{T}_x$ induz uma aplicação linear contínua $\mathcal{T}_x : \mathcal{D}(V \times W) \to \mathcal{D}_W$, definida pela equação (2.15). Também temos*

$$d_y\mathcal{T}_x[\gamma] = d_y\beta_y = \mathcal{T}_x[d_y\gamma] \tag{2.16}$$

Finalmente, se γ permanece em um conjunto limitado de $\mathcal{D}(V \times W)$, então β_y permanece em um conjunto limitado de $\mathcal{D}_W$.

Demonstração. Para provar a continuidade, seja $\{\gamma_h\}_h$ tal que $\gamma_h \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$ em $\mathcal{D}(V \times W)$. Pela equação (2.15) os coeficentes de $\mathcal{T}_x[\gamma_h]$ são da forma $\mathcal{T}_x[\alpha_{h,J}(x,y)] = \sum_I \mathcal{T}_x[\gamma_{h,IJ}(x,y)dx^I]$ e como $\mathcal{T}_x : \mathcal{D}_V \to \mathbb{R}$ é contínua, $\mathcal{T}_x[\alpha_{h,J}(x,y)] \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$ em $\mathcal{D}_W$. Logo $\mathcal{T}_x : \mathcal{D}(V \times W) \to \mathcal{D}_W$ é contínua. Note que $\mathcal{T}_x[\frac{\partial\gamma}{\partial y_k}(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y_k}\mathcal{T}_x[\gamma(x,y)]$ pois, pela definição $\mathcal{T}_x[\gamma] = \mathcal{T}_x[\sum_J \alpha_J \odot dy^J] = \sum_J \mathcal{T}_x[\alpha_J]dy^J$. Assim, o operador $\mathcal{T}_x : \mathcal{D}(V \times W) \to \mathcal{D}_W$ comuta com cada derivada parcial em y^k, e usamos a equação (2.7) para obter a equação (2.16). Falta a última afirmação. Seja γ em um conjunto limitado de $\mathcal{D}(V \times W)$ então $supp\,\gamma \subset K \times K'$, para K e K' compactos. Logo $supp\,\beta_y \subset K'$. Se γ é limitada, $d_y\gamma$ é limitada. Como $\mathcal{T}_x$ é uma corrente em V, por (2.16) temos que $d_y\beta_y$ permanece limitada, e assim β_y também. □

Corolário 2.1. *Se $\mathcal{T}_x = \mathcal{T}(x)$ e $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}(y)$ são correntes em V e em W, respetivamente, segue que $\mathcal{L}$ definida por*

$$\mathcal{L}[\gamma(x,y)] = \mathcal{S}_y\left[\mathcal{T}_x\left[\gamma(x,y)\right]\right] \quad , \quad \gamma \in \mathcal{D}(V \times W) \tag{2.17}$$

é uma corrente dupla em $V \times W$.

Definição 2.4.8. Se $\mathcal{T}_x$ e $\mathcal{S}_y$ são correntes em V e W respetivamente, então a corrente dupla $\mathcal{L}$ definida por (2.17) é chamada *produto tensorial de $\mathcal{T}_x$ e $\mathcal{S}_y$*. Notaremos

$$\mathcal{L}[\gamma] = \mathcal{S}_y \odot \mathcal{T}_x[\gamma] \quad , \quad \gamma \in \mathcal{D}(V \times W)$$

A prova do seguinte Teorema não é difícil, pode ser achada no livro do de Rham [4].

Teorema 2.2. *O produto tensorial de duas correntes é comutativo.*

Notação. Por causa do Teorema 2.2 podemos escrever

$$\mathcal{T}_x \odot \mathcal{S}_y[\gamma(x,y)] = \int_x \int_y \mathcal{T}_x \odot \mathcal{S}_y \wedge \gamma(x,y) \tag{2.18}$$

e comutar as integrais como no Teorema de Fubini.

2.5 Fórmulas de homotopia.

Para obter as fórmulas de homotopia, precisamos definir antes alguns operadores. Seja ν uma forma simples em $V \times W$. Se (x, Ω) e (y, Ω') são cartas em V e W respetivamente, então

$$\bar{\nu} = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_p \\ j_1 < \cdots < j_q}} \nu_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_q} = \sum_{I,J} \nu_{IJ} dx^I \wedge dy^J \tag{2.19}$$

Associamos a $\bar{\nu}$ uma forma dupla ν definida por

$$\nu = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_p \\ j_1 < \cdots < j_q}} \nu_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \odot dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_q} = \sum_{I,J} \nu_{IJ} dx^I \odot dy^J \tag{2.20}$$

Definição 2.5.1. Isto define uma aplicação $\mathscr{A}^* : \mathcal{D}_{V \times W} \to \mathcal{D}(V \times W)$ que leva formas simples em formas duplas, dada por

$$\mathscr{A}^*[\bar{\nu}] = \nu \quad , \quad \bar{\nu} \in \mathcal{D}_{V \times W}$$

onde $\bar{\nu}$ e ν são como nas equações (2.19) e (2.20).

A ideia deste operador é levar as formas simples do produto $V \times W$ em formas duplas. Assim, por exemplo, podemos "integrar"na direção x, agindo com uma corrente $\mathcal{T}_x$, e logo "integrar"em y, agindo com $\mathcal{S}_y$. Isto é possível pelo Teorema 2.1. Observe que a ordem dos fatores $V \times W$ na definição de $\mathscr{A}^*$ é fundamental. Se trocamos a ordem, a componente de $\mathscr{A}^*\bar{v}$, de grau p em x e grau q em y, deve ser multiplicada por $(-1)^{pq}$. Vamos introduzir um operador $\mathscr{A} : \mathcal{D}'(V \times W) \to \mathcal{D}'_{V\times W}$. Seja $\mathcal{L} \in \mathcal{D}'(V \times W)$, definimos a corrente simples $\mathscr{A}\mathcal{L} \in \mathcal{D}'_{V\times W}$ por dualidade:

$$\mathscr{A}\mathcal{L}[\bar{v}] = \mathcal{L}[\mathscr{A}^*\bar{v}] \quad , \quad \bar{v} \in \mathcal{D}_{V\times W}$$

Se $n = dimV$, temos para $\bar{v}$

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^*\bar{v} = (-1)^{q(n-p)}\bar{v} \tag{2.21}$$

quando $\bar{v}$ tem grau p em x e q em y. Assim $\mathscr{A}^*$ tem *inversa a esquerda* $\mathscr{A}^{*-1} : \mathcal{D}(V \times W) \to \mathcal{D}_{V\times W}$ dada por

$$\mathscr{A}^{*-1}[v] = (-1)^{q(n-p)}\mathscr{A}[v] \quad , \quad v \in \mathcal{D}(V \times W) \tag{2.22}$$

onde v é homogênea e pensamos a forma dupla v como corrente dupla para calcular $\mathscr{A}[v]$. Para formas não homogêneas estendemos por linearidade. E por dualidade, o operador $\mathscr{A}$ tem *inversa a direita* $\mathscr{A}^{-1}$: $\mathcal{D}'_{V\times W} \to \mathcal{D}'(V \times W)$ dada por $\mathscr{A}^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}[v] = \widetilde{\mathcal{L}}[\mathscr{A}^{*-1}v]$, onde $\widetilde{\mathcal{L}} \in \mathcal{D}'_{V\times W}$ é uma corrente simples do produto. Da equação (2.21) segue para $\bar{v}$ homogênea

$$\mathscr{A}^*\bar{v} = (-1)^{q(n-p)}\mathscr{A}^{-1}\bar{v} \tag{2.23}$$

Pela definição de $\mathscr{A}^*$ e pela regra da derivação do produto deduzimos $\mathscr{A}^*d = (d_x + \mathrm{w}_x d_y)\mathscr{A}^*$ e por dualidade

$$\partial\mathscr{A} = \mathscr{A}(\partial_x + \mathrm{w}_x^*\partial_y) \tag{2.24}$$

Agora, se $\mathcal{P} : V \times W \to W$ é a projeção $\mathcal{P}(x, y) = y$ e se $\beta_y = \beta(y)$ é uma forma em W, temos que a forma dupla $\mathscr{A}^*\mathcal{P}^*\beta_y \in \mathcal{D}(V \times W)$ é um produto tensorial de duas formas simples

$$\mathscr{A}^*\mathcal{P}^*\beta_y = \mathbb{1}_x \odot \beta_y \tag{2.25}$$

onde $\mathbb{1}_x$ é a função 1, corrente de grau 0 em V. Se β_y tem grau k, $\mathcal{P}^*\beta_y$ tem grau k. Logo $\mathcal{P}^*\beta_y(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) \neq 0$ se e somente se $p = 0$ e $q = k$, ou seja $\mathcal{P}^*\beta_y(w_1, \dots, w_q) = \mathbb{1}_x \cdot \beta_y(w_1, \dots, w_q)$, ou ainda $\mathcal{P}^*\beta_y = \mathbb{1}_x \wedge \beta_y$, logo $\mathscr{A}^*\mathcal{P}^*\beta_y = \mathscr{A}^*(\mathbb{1}_x \wedge \beta_y)$ que é (2.25). Seja $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_{V\times W}$ uma corrente simples do produto, tal que $supp\,\mathcal{T} \cap \mathcal{P}^{-1}(K)$ é compacto, para todo K compacto tal que $K \subset W$. Então a imagem por $\mathcal{P}$ da corrente $\mathcal{T}$ é uma corrente em W dada por

$$\mathcal{P}\mathcal{T}[\beta_y] = \mathscr{A}^{-1}\mathcal{T}[\mathbb{1}_x \odot \beta_y] \quad , \quad \beta_y \in \mathcal{D}_W$$

pois $\mathcal{P}\mathcal{T}[\beta_y] = \mathcal{T}[\mathcal{P}^*\beta_y] = \mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}\mathcal{T}[\mathcal{P}^*\beta_y] = \mathscr{A}^{-1}\mathcal{T}[\mathscr{A}^*\mathcal{P}^*\beta_y] = \mathscr{A}^{-1}\mathcal{T}[\mathbb{1}_x \odot \beta_y]$, onde usamos a equação (2.25).

Notação. Escrevemos para $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_{V\times W}$:

$$\mathcal{P}\mathcal{T} = \int_x \mathscr{A}^{-1}\mathcal{T}(x,y) = \mathbb{1}_x\,[\mathscr{A}^{-1}\mathcal{T}(x,y)] \in \mathcal{D}'_W \tag{2.26}$$

Para a forma $\beta_y \in \mathcal{D}_W$ temos, da equação (2.25)

$$\mathcal{P}^*\beta_y = \mathscr{A}^{*-1}\{\mathbb{1}_x \odot \beta_y\} \tag{2.27}$$

Vamos introduzir os operadores $\ddot{f}$ e $\ddot{f}^*$. Para isso, sejam $f_1 : Z \to V$ e $f_2 : Z \to W$ funções C^∞, temos a função $f : Z \to V \times W$ dada por $f = (f_1, f_2)$. Queremos definir uma operação $\ddot{f}^* : \mathcal{D}(V \times W) \to \mathcal{D}_Z$. Se $\nu \in \mathcal{D}(V \times W)$ definimos

$$\ddot{f}^*\nu = f^*\mathscr{A}^{*-1}\nu$$

A forma $\ddot{f}^*\nu$ é chamada de *imagem inversa de ν por f*. Lembremos que na definição de $\mathscr{A}^*$ a ordem dos fatores em $V \times W$ é importante, portanto também e importante para definir $\ddot{f}^*$. Queremos também, uma operação $\ddot{f} : \mathcal{D}'_Z \to \mathcal{D}'(V \times W)$. Seja $\mathcal{T}$ uma corrente em Z tal que $supp\,\mathcal{T} \cap f^{-1}K$ é compacto, para todo compacto $K \subset Z$. Definimos o operador $\ddot{f} : \mathcal{D}'_Z \to \mathcal{D}'(V \times W)$ como

$$\ddot{f}\mathcal{T}[\nu] = \mathcal{T}[\ddot{f}^*\nu]$$

Em particular se $supp\,\mathcal{T}$ é compacto ou se f é própria, $\ddot{f}\mathcal{T}$ fica bem definida.

Estamos em condições de deduzir as fórmulas de homotopia. Consideremos a variedade V e o produto $\mathbb{R} \times V$. Para $t_0 \in \mathbb{R}$ definimos a aplicação $C_{t_0} : V \to \mathbb{R} \times V$ como

$$C_{t_0}(x) = (t_0, x) \in \mathbb{R} \times V$$

Denotando por $Q_t^{t_0} = Q^{t_0}(t)$ a corrente de dimensão zero em $\mathbb{R}$ que é igual a δ de Dirac no ponto $t = t_0$. Se $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times V)$ é de grau zero em t:

$$\ddot{C}_{t_0}^*\alpha = Q_t^{t_0}[\alpha(t,x)]$$

pois $\ddot{C}_{t_0}^*\alpha = C_{t_0}^*\mathscr{A}^{*-1}\alpha = C_{t_0}^*(\sum \alpha_{i_1\ldots i_p}(t,x)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) = \sum \alpha_{i_1\ldots i_p}(t_0,x)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = Q_t^{t_0}[\alpha(t,x)]$. Se $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times V)$ é de grau 1 em t, temos $\ddot{C}_{t_0}^*\alpha = 0$ pois $C_{t_0}^*dt = 0$. De fato, $\ddot{C}_{t_0}^*\alpha = \ddot{C}_{t_0}^*(dt \odot \alpha_0) =$

$C_{t_0}^* \mathcal{A}^{*-1}(dt \odot \alpha_0) = C_{t_0}^*(dt \wedge \alpha_0) = C_{t_0}^* dt \wedge C_{t_0}^* \alpha_0 = 0$. Portanto se $\mathcal{T}_x \in \mathcal{D}'_V$ temos a seguinte corrente dupla em $\mathbb{R} \times V$:

$$\ddot{C}_{t_0} \mathcal{T}_x = Q_t^{t_0} \odot \mathcal{T}_x \tag{2.28}$$

pois $\ddot{C}_{t_0} \mathcal{T}_x[\alpha] = \mathcal{T}_x[\ddot{C}^* \alpha] = \mathcal{T}_x[Q_t^{t_0}[\alpha]] = \mathcal{T}_x \odot Q_t^{t_0}[\alpha] = Q_t^{t_0} \odot \mathcal{T}_x[\alpha]$, lembrando que o produto tensorial é comutativo. Seja $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}(t)$ a função característica de $[0, 1]$. A corrente $\mathcal{I}_t$ é simplesmente a cadeia de dimensão 1 formada pelo intervalo orientado $[0, 1]$. Com isso temos $\mathcal{I}_t[\alpha(t, x)] = \int_0^1 \alpha(t, x)\, dt$, logo $\partial_t \mathcal{I}_t[\alpha(t, x)] = \mathcal{I}_t[d_t \alpha(t, x)] = \int_0^1 d_t \alpha(t, x) = \alpha(1, x) - \alpha(0, x) = Q_t^1[\alpha] - Q_t^0[\alpha]$, ou seja

$$\partial_t \mathcal{I}_t = Q_t^1 - Q_t^0 \tag{2.29}$$

Consideremos o produto tensorial $\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x$, obtemos que $(\partial_t + \mathrm{w}_t^* \partial_x)(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x)[\alpha] = \partial_t(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x)[\alpha] + \mathrm{w}_t^* \partial_x(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x)[\alpha] = \mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x[d_t \alpha] - (\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x)[d_x \alpha] = \mathcal{T}_x[\mathcal{I}_t[d_t \alpha]] - \mathcal{I}_t[\mathcal{T}_x[d_x \alpha]] = \mathcal{T}_x[\partial_t \mathcal{I}_t[\alpha]] - \mathcal{I}_t[\partial_x \mathcal{T}_x[\alpha]] = (\partial_t \mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x - \mathcal{I}_t \odot \partial_x \mathcal{T}_x)[\alpha]$, e usando 2.29 obtemos

$$(\partial_t + \mathrm{w}_t^* \partial_x)(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x) = Q_t^1 \odot \mathcal{T}_x - Q_t^0 \odot \mathcal{T}_x - \mathcal{I}_t \odot \partial_x \mathcal{T}_x$$

Assim pela equação (2.28)

$$\ddot{C}_1 \mathcal{T}_x - \ddot{C}_0 \mathcal{T}_x = (\partial_t + \mathrm{w}_t^* \partial_x)(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x) + \mathcal{I}_t \odot \partial_x \mathcal{T}_x \tag{2.30}$$

Usando (2.30) temos $\mathcal{T}_x[\ddot{C}_1^* \alpha] - \mathcal{T}_x[\ddot{C}_0^* \alpha] = \mathcal{T}_x[\mathcal{I}_t(d_t + \mathrm{w} d_x)\alpha] + \mathcal{T}_x[\mathcal{I}_t d_x \alpha]$, para toda $\mathcal{T}_x \in \mathcal{D}'V$, e com isso chegamos a

$$\ddot{C}_1^* \alpha - \ddot{C}_0^* \alpha = \mathcal{I}_t[(d_t + \mathrm{w}_t d_x)\alpha] + \mathcal{I}_t[d_x \alpha] \tag{2.31}$$

Seja $\mu : \mathbb{R} \times V \to W$ uma função C^∞, escrevemos $\mu(t, x) = y$. Então $\mu_t = \mu \circ C_t : V \to W$ e $\mu(t, x) = \mu_t(x)$. Se $\mathcal{T}_x \in \mathcal{E}'_V$, o suporte de $\mathcal{T}_x$ é compacto e fica bem definida a corrente simples $\mathscr{A} \ddot{C}_{t_0} \mathcal{T}_x \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R} \times V}$. Para $\phi \in \mathcal{D}_{V \times W}$ temos que $\mathscr{A} \ddot{C}_{t_0} \mathcal{T}_x[\phi] = \ddot{C}_{t_0} \mathcal{T}_x[\mathscr{A}^* \phi] = \mathcal{T}_x[\ddot{C}_{t_0}^* \mathscr{A}^* \phi] = \mathcal{T}_x[C_{t_0}^* \mathscr{A}^{*-1} \mathscr{A}^* \phi] = \mathcal{T}_x[C_{t_0}^* \phi] = C_{t_0} \mathcal{T}_x[\phi]$, ou ainda $\mathscr{A} \ddot{C}_{t_0} \mathcal{T}_x = C_{t_0} \mathcal{T}_x$, que é uma corrente simples em $\mathbb{R} \times V$. Logo usando (2.30) e aplicando $\mu \mathscr{A}$:

$$\mu_1 \mathcal{T}_x - \mu_0 \mathcal{T}_x = \mu \mathscr{A}(\partial_t + \mathrm{w}_t^* \partial_x)(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x) + \mu \mathscr{A}(\mathcal{I}_t \odot \partial \mathcal{T}_x)$$

e pelas fórmulas (2.24) e (2.9) obtemos

$$\mu_1 \mathcal{T}_x - \mu_0 \mathcal{T}_x = \partial \mu \mathscr{A}(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x) + \mu \mathscr{A}(\mathcal{I}_t \odot \partial \mathcal{T}_x)$$

Definindo um operador $\mathcal{M} : \mathcal{D}'_V \to \mathcal{D}'_W$ como

$$\mathcal{M}\mathcal{T}_x = \mu\mathscr{A}(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x) \tag{2.32}$$

temos que

$$\mu_1\mathcal{T}_x - \mu_0\mathcal{T}_x = \partial\mathcal{M}\mathcal{T}_x + \mathcal{M}\partial\mathcal{T}_x \tag{2.33}$$

Também, definimos $\mathcal{M}^* : \mathcal{D}_W \to \mathcal{D}_V$

$$\mathcal{M}^*\phi = \mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\mu^*\phi] \tag{2.34}$$

Então $\mathcal{M}^*$ é o operador dual de $\mathcal{M}$, ou seja

$$\mathcal{M}\mathcal{T}_x[\phi] = \mathcal{T}_x[\mathcal{M}^*\phi]$$

pois $\mathcal{T}_x[\mathcal{M}^*\phi] = \mathcal{T}_x[\mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\mu^*\phi]] = \mathcal{T}_x \odot \mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\mu^*] = \mu\mathscr{A}(\mathcal{T}_x \odot \mathcal{I}_t)[\phi] = \mathcal{M}\mathcal{T}_x[\phi]$, pela equação (2.32). Com isto, e a equação (2.33), segue que

$$\mu_1^*\phi - \mu_0^*\phi = \mathcal{M}^*d\phi + d\mathcal{M}^*\phi \tag{2.35}$$

Pela equação (2.34), se $\phi(x) = \phi_x$ é C^r segue que $\mathcal{M}^*\phi_x$ é C^r. Vejamos: os coeficentes de $\mu^*\phi_x$ são C^r em (t, x), logo a forma dupla $\mathscr{A}^*\mu^*\phi_x$ tem coeficentes C^r e é integrada em t pela corrente $\mathcal{I}_t$. Então para derivar os coeficentes de $\mathcal{M}^*\phi_x$ só temos que derivar sob o sinal de integração em t. Ou seja derivamos os coeficentes de $\mathscr{A}^*\mu^*\phi_x$, que são C^r, e logo integramos em t.

Definição 2.5.2. A função $\mu_t : V \to W$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, é chamada de *homotopia* se μ_t contínua em t. Dizemos que *a homotopia é* C^∞ se $\mu : I \times V \to W$ dada por $\mu(t, x) = \mu_t(x)$ é C^∞.

Definição 2.5.3. Os operadores $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^*$ definidos em (2.32) e (2.34) são chamados *os operadores associados com a homotopia* μ_t. E as fórmulas (2.33) e (2.35) são chamadas *fórmulas de homotopia.*

O operador $\mathcal{M}$ aumenta a dimensão em um, enquanto que $\mathcal{M}^*$ diminui o grau em um. De fato, se ϕ tem grau p a forma $\mathcal{M}^*\phi = \mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\mu^*\phi]$ tem grau $p - 1$, pois $\mu^*\phi$ tem grau p e $\mathcal{I}_t$ integra os termos de grau 1 em t e elimina os de grau 0 em t. Por outra parte, se $\mathcal{T}_x$ tem dimensão p e ϕ é de grau diferente de $p + 1$, então grau $\mu^*\phi \neq p + 1$ e grau $\mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\mu^*\phi] \neq p$, ou seja $\mathcal{M}\mathcal{T}_x[\phi] = \mu\mathscr{A}(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x)[\phi] = \mathcal{T}_x[\mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\mu^*\phi]] = 0$. Logo $\mathcal{M}\mathcal{T}_x$ tem dimensão $p + 1$. Agora queremos provar que $\mathcal{M}\mathcal{T}$ é C^r, se $\mathcal{T}$ é C^r, para isso precisamos do seguinte resultado.

Proposição 2.4. *Se para cada $t \in [0,1]$, a aplicação μ_t é um homeomorfismo, vale que*

$$\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}^* \mathrm{w} \tag{2.36}$$

onde $\tilde{\mathcal{M}}$ e $\tilde{\mathcal{M}}^*$ são os operadores associados com a homotopia inversa μ_t^{-1}, $0 \leq t \leq 1$, e pensamos $\mathcal{M}$ como operador sobre formas.

Demonstração. Definimos uma função $\lambda : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R} \times W$ como $\lambda(t,x) = (t, \mu_t(x))$. Se μ_t é homeomorfismo para todo t, então λ tambén é homeomorfismo. Escrevemos P para as duas projeções $\mathbb{R}\times V \to V$ e $\mathbb{R}\times W \to W$, i.e., $P(t,x) = x$ e $P(t,y) = y$. Com isso $\mu = \mathcal{P} \circ \lambda$ e para a homotopia inversa $\tilde{\mu} = P \circ \lambda^{-1}$. Pela definição, $\mathcal{M}\mathcal{T} = P\lambda\mathscr{A}(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x)$ ou usando (2.26): $\mathcal{M}\mathcal{T} = \int_t \mathscr{A}^{-1}\lambda\mathscr{A}\,(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T}_x)$. E usando (2.27) na equação $\mathcal{M}^*\phi_x = \mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\mu^*\phi_x] = \mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\lambda^*P^*\phi_x]$ temos que $\mathcal{M}^*\phi_x = \mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\lambda^*\mathscr{A}^{*-1}[\mathcal{I}_t \odot \phi_x]]$ ou seja $\mathcal{M}^*\phi_x = \int_t \mathscr{A}^*\lambda^*\mathscr{A}^{*-1}[\mathcal{I}_t \odot \phi_x]$, pois $\mathcal{I}_t$ comuta com $\mathscr{A}^*\lambda^*\mathscr{A}^{*-1}$. Fazendo as mesmas contas com $\tilde{\mu} = P \circ \lambda^{-1}$ e levando em conta que $\lambda^{*-1} = \lambda$ segue que $\tilde{\mathcal{M}}^*\phi_x = \int_t \mathscr{A}^*\lambda\mathscr{A}^{*-1}[\mathcal{I}_t \odot \phi_x]$. De (2.23) temos $\mathscr{A}^*\bar{\nu} = (-1)^{q(1-p)}\mathscr{A}^{-1}\bar{\nu}$ se $\mathscr{A}^{-1}\bar{\nu}$ é de grau p em t e q em x. Como a integral das formas de grau 0 em t é nula, só ficam os termos com $p = 1$ ou seja, podemos trocar $\mathscr{A}^*$ por $\mathscr{A}^{-1}$. Mas $\mathcal{I}_t \odot \phi_x$ é de grau 0 em t, então pela equação (2.22) também podemos trocar $\mathscr{A}^{*-1}$ por $\mathscr{A}\mathrm{w}_x$ (pois é $\mathscr{A}^{*-1}[\nu] = (-1)^{q(1-p)}\mathscr{A}[\nu] = (-1)^q\mathscr{A}[\nu]$). Assim $\tilde{\mathcal{M}}^*\phi_x = \int_t \mathscr{A}^{-1}\lambda\mathscr{A}\mathrm{w}_x[\mathcal{I}_t \odot \phi_x]$ e usando $\mathrm{w}_x\phi_x$ em lugar de ϕ_x temos $\tilde{\mathcal{M}}^*\phi_x = \int_t \mathscr{A}^{-1}\lambda\mathscr{A}[\mathcal{I}_t \odot \phi_x] = \mathcal{M}\phi_x$ □

Corolário 2.2. *Se μ_t é homeomorfismo para todo $t \in [0,1]$, então $\mathcal{M}\mathcal{T}$ é C^r se $\mathcal{T}$ é C^r.*

Demonstração. Pela Proposição 2.4 sabemos que $\mathcal{M}\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{M}}^*\mathrm{w}\mathcal{T}$. Mas sabemos que o fato de $\mathcal{T}$ ser C^r, implica que $\tilde{\mathcal{M}}^*\mathrm{w}\mathcal{T}$ é C^r. □

Se $\lambda : \mathbb{R}\times V \to \mathbb{R}\times W$ dada por $\lambda(t,x) = (t, \mu_t x)$ é difeomorfismo, definimos (lembrar que $\mu : \mathbb{R}\times V \to W$)

$$\mathcal{X}^i(t,y) = \lambda^{*-1}\frac{\partial \mu^* y^i}{\partial t} \tag{2.37}$$

Então, para o campo $\mathcal{X}(t,y) = (\mathcal{X}^1(t,y), \cdots \mathcal{X}^n(t,y))$ definimos também o *produto interior de $\mathcal{X}$ por ϕ* como

$$i_{\mathcal{X}}\,\phi(t,y) = \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}} \sum_i \mathcal{X}^i(t,y)\,\phi_{i\,i_1\ldots i_{p-1}}(y)\,dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_{p-1}}$$

onde $\phi(y) = \sum \phi_{i_1\ldots i_p}(y)\,dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p} \in \mathcal{D}_W$. Portanto, quando μ_t é homeomorfismo para todo $t \in [0,1]$, temos para $\phi \in \mathcal{D}_W$:

$$\mathcal{M}^*\phi = \int_0^1 \mu_t^* (i_X \phi)\, dt \in \mathcal{D}_V \tag{2.38}$$

Provemos esta fórmula. Usando a equação (2.34) para $\phi = \sum \phi_{i_1 \dots i_p} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i-p} \in \mathcal{D}_W$ temos

$$\mu^*\phi(t,x) = \sum_{i_1<\dots<i_p} \phi_{i_1\dots i_p}(\mu(t,x))\, d(y^{i_1} \circ \mu) \wedge \dots \wedge d(y^{i_p} \circ \mu) =$$

$$\sum_{i_1<\dots<i_p} \phi_{i_1\dots i_p}(\mu(t,x)) \left(\sum_k \frac{\partial(y^{i_1} \circ \mu)}{\partial x^k}(t,x) dx^k + \frac{\partial(y^{i_1} \circ \mu)}{\partial t}(t,x) \right) \wedge d(y^{i_2} \circ \mu) \wedge \dots \wedge d(y^{i_p} \circ \mu) =$$

$$\sum_{j_1<\dots<j_{p-1}} \sum_i \phi_{i\, j_1\dots j_{p-1}}(\mu(t,x)) \frac{\partial(\mu^* y^i)}{\partial t}(t,x) dt \wedge d(y \circ \mu_t) \wedge \dots \wedge d(y^{j_{p-1}} \circ \mu_t) + \omega(t,x) =$$

$$dt \wedge \left(\sum_{j_1<\dots<j_{p-1}} \left(\sum_i \lambda^* X^i(t,x) \phi_{i\, j_1\dots j_{p-1}}(\mu_t(x)) \right) d(y^{j_1} \circ \mu_t) \wedge \dots \wedge d(y^{j_{p-1}} \circ \mu_t) \right) + \omega(t,x) =$$

$$dt \wedge \mu_t^*(i_X\phi) + \omega(t,x)$$

onde $\omega(t,x)$ é uma forma em $\mathbb{R} \times V$ de grau 0 em t, e usamos que $\mu_t^*(i_X\phi)(x) = \mu_t^*(\sum \sum_i X^i(t,y)\phi_{i\, i_1\dots i_{p-1}}(y)$ $dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_{p-1}}) = \sum \sum_i X^i(t,\mu_t(x))\phi_{i\, i_1\dots i_{p-1}}(\mu_t(x))\, \mu_t^*(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_{p-1}})$ e também $X^i(t,\mu_t(x)) = X^i(\lambda(t,x)) = \lambda^* X^i(t,x)$. Ou seja $\mu^*\phi(t,x) = dt \wedge \mu_t^*(i_X\phi) + \omega(t,x)$, logo $\mathscr{A}^*\mu^*\phi(t,x) = dt \odot \mu_t^*(i_X\phi) + \tilde{\omega}(t,x)$, onde $\tilde{\omega}(t,x)$ é uma forma dupla de grau 0 em t. Então $\mathcal{M}^*\phi = \mathcal{I}_t[dt \odot \mu_t^*(i_X\phi)]$ que é a fórmula (2.38).

Observação 2.5.1. Como $\lambda^* x^i = \mu^* x^i$ temos pela definição de X^i:

$$\frac{\partial \lambda^* y^i}{\partial t} = \lambda^* X^i(t, y^1, \dots, y^n) = X^i(t, \lambda^* y^1, \dots, \lambda^* y^n)$$

ou mais simplesmente

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(t, x^1, \dots, x^n) \quad , \; i = 1, 2, \dots, n$$

Capítulo 3

Regularização.

Vamos provar a existência de operadores de regularização para as correntes, ou seja, operadores $\mathcal{R}_\varepsilon$ tais que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é C^∞ e tais que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ converge a $\mathcal{T}$ na topologia fraca de $\mathcal{D}'_V$. Começamos trabalhando em $\mathbb{R}^n$ para depois generalizar.

3.1 Regularização em $\mathbb{R}^n$.

Seja $y \in \mathbb{R}^n$ e seja s_y a traslação $s_y(x) = x + y$. Consideremos os operadores $\mathcal{S}_y$ e $\mathcal{S}_y^*$ associados com a homotopia s_{ty} $(0 \leq t \leq 1)$. Usando a definição 2.5.3 obtemos $\mathcal{S}_y\mathcal{T} = \mu\mathscr{A}(\mathcal{I}_t \odot \mathcal{T})$ e $\mathcal{S}_y^*\phi = \mathcal{I}_t[\mathscr{A}^*\mu^*\phi]$ onde $\mu(t,x) = s_{ty}(x)$. Seja $f_0(y)$ uma função C^∞ tal que $f_0 \geq 0$, $supp\, f_0 \subset B(0,1)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f_0(y)\,dy = 1$, onde $dy = dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$. Dado $\varepsilon > 0$, definimos $f_\varepsilon(y) = 1/\varepsilon^n f_0(y/\varepsilon)$, então $f_\varepsilon \geq 0$, $supp\, f_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(y)\,dy = 1$.

Definição 3.1.1. Com isto definimos

$$\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi(x) = \int_y s_y^*\phi(x) \odot f_\varepsilon(y)dy \quad , \ \phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$$

e também

$$\mathcal{A}_\varepsilon^*\phi(x) = \int_y \mathcal{S}_y^*\phi(x) \odot f_\varepsilon(y)dy \quad , \ \phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$$

Note que $\mathcal{R}_\varepsilon^* : \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{A}_\varepsilon^* : \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ são lineares. Vejamos a forma explícita dos operadores. Se $\phi(x) = \sum \phi_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, temos que

$$s_y^*\phi(x) = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \phi_{i_1\ldots i_p}(x+y)\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \tag{3.1}$$

e usando o Teorema 2.1 obtemos

$$\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi(x) = \sum_{i_1<\ldots<i_p}\left(\int_y \phi_{i_1\ldots i_p}(x+y)f_\varepsilon(y)dy\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p} \tag{3.2}$$

Como $s_{ty}(x) = ty + x = \mu(t,x)$, pela fórmula (2.37) temos que $X^i = y^i$, onde $y = (y^1,\ldots,y^n)$. Logo o produto interior é $i_X\,\phi(x) = \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}}\sum_i y^i\phi_{ii_1\ldots i_{p-1}}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}}$. Pela equação (2.38) com $\mu_t(x) = s_{ty}(x)$ temos $\mathcal{S}_y^*\phi(x) = \int_0^1 s_{ty}^*(i_X\phi)(x)\,dt$, ou seja

$$\mathcal{S}_y^*\phi(x) = \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}}\left\{\sum_i\int_0^1 y^i\phi_{i\,i_1\ldots i_{p-1}}(x+ty)dt\right\}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}} \tag{3.3}$$

Por tanto, temos

$$\mathcal{A}_\varepsilon^*\phi(x) = \int_y\left(\int_0^1 s_{ty}^*(i_X\phi)(x)dt\right)\odot f_\varepsilon(y)dy$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon^*\phi(x) = \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}}\left(\sum_i\int_y\int_0^1 y^i\phi_{i\,i_1\ldots i_{p-1}}(x+ty)\,f_\varepsilon(y)\,dtdy\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}} \tag{3.4}$$

Vejamos agora, algumas observações úteis para provar a existência de reguladores en $\mathbb{R}^n$.

Observação 3.1.1. Das equações (3.2) e (3.4) vemos que se ϕ é de grau p, temos que $s_y^*\phi$ é de grau p e $\mathcal{S}_y^*\phi$ é de grau $p-1$.

Observação 3.1.2. As expresões (3.1) e (3.3) e o Teorema do Valor Médio mostram que se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem q, então $s_y^*\phi$ e $\mathcal{S}_y^*\phi$ também permanecem limitadas até ordem q, sempre que $|y|$ seja limitado. Logo $\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi$ e $\mathcal{A}_\varepsilon^*\phi$ ficam em um conjunto limitado até ordem q, independentemente do parâmetro $\varepsilon > 0$, sempre que este seja limitado.

Observação 3.1.3. Os suportes de $\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi$ e $\mathcal{A}_\varepsilon^*\phi$ estão contidos em ε-vizinhanças do suporte de ϕ. Seja $U_\varepsilon = \{x\in\mathbb{R}^n/\exists y\in supp\,\phi : |x-y|<\varepsilon\}$, i.e., U_ε é uma ε-vizinhança de $supp\,\phi$. E seja W aberto tal que $W\cap U_\varepsilon = \emptyset$. Logo $supp\,\phi\cap W_\varepsilon = \emptyset$, onde W_ε é uma ε-vizinhança de W. Pela equação (3.2), $\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi(x) = 0$ se $x\in W$, pois quando $y\in supp\,f\subset B(0,\varepsilon)$, $x+y\in W_\varepsilon$, i.e., $x+y\notin supp\,\phi$.

Definição 3.1.2. Se $\mathcal{T}$ é corrente, definimos os operadores $\mathcal{R}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_\varepsilon$ como

$$\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi]\ ,\ \ \mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[\mathcal{A}_\varepsilon^*\phi] \tag{3.5}$$

Provemos que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ são correntes. Se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem q, pela Observação 3.1.2, $\mathcal{R}^*_\varepsilon\phi$ permanece limitado até ordem q. Se isto acontece para todo q, como $\mathcal{T}$ é corrente, $\{|\mathcal{T}[\mathcal{R}^*_\varepsilon\phi]|\}$ é limitado, portanto $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é corrente. Analogamente $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ é corrente. Note que este raciocínio também prova que se $\mathcal{T}$ é contínuo até ordem q, $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ são contínuas até ordem q. Agora estamos em condições de provar a seguinte

Proposição 3.1. *Para uma f_ε simétrica com respeito à origem (i.e. $f_\varepsilon(y) = f_\varepsilon(-y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$), os operadores $\mathcal{R}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_\varepsilon$ definidos nas fórmulas (3.5), possuem as seguintes propriedades*

(i) Se $\mathcal{T}$ é uma corrente homogênea p-dimensional em $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ são correntes homogêneas p e $p+1$ dimensionais respectivamente, as quais satisfazem

$$\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} - \mathcal{T} = \partial\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T} + \mathcal{A}_\varepsilon\partial\mathcal{T} \tag{3.6}$$

(ii) Os suportes de $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ estão contidos em uma ε-vizinhança do suporte de $\mathcal{T}$.

(iii) $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é C^∞.

(iv) Se $\mathcal{T}$ é C^r, então $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ é C^r. Aliás $\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R}^*_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}^*_\varepsilon$w.

(v) Se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem q e se $\varepsilon > 0$ permanece limitado, então $\mathcal{R}_\varepsilon\phi$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\phi$ permanecem em um conjunto limitado até ordem q.

(vi) Se $\varepsilon \to 0$, $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] \to \mathcal{T}[\phi]$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] \to 0$ uniformemente, $\forall\phi \in \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_V$ é um conjunto limitado de formas. Se $\mathcal{T}$ é contínua até ordem q, a convergência é uniforme em cada conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_V$ de formas limitadas até ordem $q+1$.

Demonstração. Provemos (i). Da Observação 3.1.1 segue que se $\mathcal{T}$ é homogênea de dimensão p, $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ são homogêneas de dimensões p e $p+1$ respetivamente. Para a homotopia s_{ty} $(0 \leq t \leq 1)$ a fórmula de homotopia (2.35) fica $s^*_y\phi - \phi = d_x\mathcal{S}^*_y\phi + \mathcal{S}^*_y d_x\phi$ (onde interpretamos $s^*_y\phi$ e $\mathcal{S}^*_y\phi$ como formas duplas). Agora aplicamos a corrente $f_\varepsilon(y)dy$ na equação anterior, pelo Teorema 2.1 obtemos $f_\varepsilon(y)dy[s^*_y\phi - \phi] = f_\varepsilon(y)dy[d_x\mathcal{S}^*_y\phi] + f_\varepsilon(y)dy[\mathcal{S}^*_y d_x\phi]$ ou seja $\int_y s^*_y\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy - \int_y \phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy = \int_y d_x\mathcal{S}^*_y\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy + \int_y \mathcal{S}^*_y d_x\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy = d_x\int_y \mathcal{S}^*_y\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy + \int_y \mathcal{S}^*_y d_x\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy$, i.e., $\mathcal{R}^*_\varepsilon\phi(x) - \phi(x) = d_x\mathcal{A}^*_\varepsilon\phi(x) + \mathcal{A}^*_\varepsilon d_x\phi(x)$, ou ainda

$$\mathcal{R}^*_\varepsilon\phi - \phi = d\mathcal{A}^*_\varepsilon\phi + \mathcal{A}^*_\varepsilon d\phi$$

Por dualidade segue que $(\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} - \mathcal{T})[\phi] = \mathcal{T}[\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi - \phi] = \mathcal{T}[d\mathcal{A}_\varepsilon^*\phi] + \mathcal{T}[\mathcal{A}_\varepsilon^* d\phi] = \mathcal{A}_\varepsilon\partial\mathcal{T}[\phi] + \partial\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi]$, ou seja, a fórmula (3.6).

Provemos (ii). Seja W_ε uma ε-vizinhança de $supp\,\mathcal{T}$. Pela definição de suporte temos que $\mathbb{R}^n\backslash supp\,\mathcal{T} = \cup\{A$ aberto$/\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} = 0$ em $A\}$. Seja A aberto tal que $A \cap W_\varepsilon = \emptyset$, vejamos que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} = 0$ em A. Seja $\phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ tal que $supp\,\phi \subset A$, então pela Observação 3.1.3, $supp\,\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi \subset A_\varepsilon$, onde A_ε é uma ε-vizinhança de A. Como $A \cap W_\varepsilon = \emptyset$ temos $A_\varepsilon \cap supp\,\mathcal{T} = \emptyset$, logo $supp\,\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi \cap supp\,\mathcal{T} = \emptyset$. Portanto, $\mathcal{T}[\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi] = 0$, i.e., $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = 0$. Segue que $supp\,\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} \subset W_\varepsilon$. Analogamente $supp\,\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T} \subset W_\varepsilon$.

Provemos (iii). Primeiro vejamos que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é C^∞ se $\mathcal{T}$ é corrente de grau 0. Neste caso como $\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi$ tem o mesmo grau que ϕ, $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é de grau 0, i.e., age nas formas de grau n. Seja $\phi(x)dx$ uma n-forma em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Temos $\mathcal{R}_\varepsilon^*(\phi(x)dx) = dx[\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi(x)]$, pois $\mathcal{R}_\varepsilon^*(\phi(x)dx) = \int_y s_y^*(\phi(x)dx) \odot f_\varepsilon(y)dy = \int_y \phi(x+y)dx \odot f_\varepsilon(y)dy = f_\varepsilon(y)dy[dx[\phi(x+y)]] = dx\left[\int_y \phi(x+y)f_\varepsilon(y)dy\right] = dx[\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi(x)]$ onde usamos a comutatividade do produto tensorial de correntes, ou seja, das integrais. Denotando $\mathcal{T} = \mathcal{T}_x$ por claridade segue que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}_x[\phi(x)dx] = \mathcal{T}_x[\mathcal{R}_\varepsilon^*(\phi(x)dx)] = \mathcal{T}_x[dx[\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi(x)]] = \mathcal{T}_x dx\left[\int_y \phi(x+y)f_\varepsilon(y)dy\right] = \mathcal{T}_x dx\left[\int_y \phi(y)f_\varepsilon(y-x)dy\right] = \mathcal{T}_x dx[\phi(y)dy[f_\varepsilon(y-x)]] = (\mathcal{T}_x dx \odot \phi(y)dy)[f_\varepsilon(y-x)] = (\phi(y)dy \odot \mathcal{T}_x dx)[f_\varepsilon(y-x)] = \phi(y)dy[g(y)]$ onde $g(y) = \mathcal{T}_x dx[f_\varepsilon(y-x)]$. Então $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}_x[\phi(x)dx] = \phi(y)dy[g(y)] = g(y)[\phi(y)dy] = g(x)[\phi(x)dx]$, logo

$$\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}_x = g(x) = \mathcal{T}_y dy[f_\varepsilon(x-y)]$$

que é uma corrente C^∞ pelo Teorema 2.1. No caso em que $\mathcal{T}$ tem grau positivo, usamos que $s_y^*(dx^i \wedge \phi) = dx^i \wedge s_y^*\phi$, e assim

$$\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{T} \wedge dx^i) = \mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} \wedge dx^i \tag{3.7}$$

Agora escrevemos $\mathcal{T}$ e $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ usando a descripção da equação (2.4). Então $\mathcal{T} = \sum \mathcal{T}_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ e $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} = \sum \mathcal{S}_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, onde $\mathcal{T}_{i_1\ldots i_p}$ e $\mathcal{S}_{i_1\ldots i_p}$ são correntes de grau 0. Logo, usando sucessivas vezes (3.7), obtemos $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} = \sum \mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{T}_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) = \sum \mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{T}_{i_1\ldots i_p} dx^{i^1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge dx^{i_p} = \ldots = \sum \mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, ou seja $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}_{i_1\ldots i_p} = \mathcal{S}_{i_1\ldots i_p}$. Segue, pelo caso de grau 0, que $\mathcal{S}_{i_1\ldots i_p}$ são correntes C^∞. Logo $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é C^∞ pois seus coeficentes o são.

Provemos (iv). Vejamos que, quando $\mathcal{T}$ é uma forma α, $\mathcal{R}_\varepsilon\alpha$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\alpha$ podem ser representadas por expressões análogas as de $\mathcal{R}_\varepsilon^*\phi$ e $\mathcal{A}_\varepsilon^*\phi$, mais explicitamente:

$$\mathcal{R}_\varepsilon\alpha(x) = \int_y s_y\alpha(x) \odot f_\varepsilon(y)dy \tag{3.8}$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon\alpha(x) = \int_y S_y\alpha(x) \odot f_\varepsilon(y)dy \tag{3.9}$$

Para $\mathcal{R}_\varepsilon$ temos a seguinte conta: $\mathcal{R}_\varepsilon\alpha(x)[\phi(x)] = \alpha(x)[\mathcal{R}^*_\varepsilon\phi(x)] = \alpha(x)[f_\varepsilon(y)dy[s^*_y\phi(x)]] = (\alpha(x)\odot f_\varepsilon(y)dy)$ $[s^*_y\phi(x)] = f_\varepsilon(y)dy[\alpha(x)[s^*_y\phi(x)]] = f_\varepsilon(y)dy[s_y\alpha(x)[\phi(x)]] = (f_\varepsilon(y)dy\odot s_y\alpha(x))[\phi(x)] = \int_x\int_y f_\varepsilon(y)dy\odot s_y\alpha(x)\wedge$ $\phi(x)$ onde usamos a notação da equação (2.18), ou seja

$$\mathcal{R}_\varepsilon\alpha(x)[\phi(x)] = \int_x\int_y f_\varepsilon(y)dy\odot s_y\alpha(x)\wedge\phi(x)$$

Mas $\mathcal{R}_\varepsilon\alpha(x)[\phi(x)] = \int_x \mathcal{R}_\varepsilon\alpha(x)\wedge\phi(x)$, logo $\mathcal{R}_\varepsilon\alpha(x) = \int_y f_\varepsilon(y)dy\odot s_y\alpha(x)$, a qual é (3.8) pois o produto tensorial é comutativo. Analogamente se prova (3.9). Provemos que podemos definir $\mathcal{R}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_\varepsilon$ tais que $\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R}^*_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}^*_\varepsilon$w. Como escolhemos a f_ε na definição 3.1.1 tal que $f_\varepsilon(y) = f_\varepsilon(-y)$, e como $'s_y\alpha = (s_y^{-1})^*\alpha = s^*_{-y}\alpha$ (pela equação (2.10)), segue que $\mathcal{R}^*_\varepsilon\phi(x) = \int_y s^*_y\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy = \int_y s^*_{-y}\phi(x)\odot f_\varepsilon(-y)dy = \int_y s_y\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy =$ $\mathcal{R}_\varepsilon\phi(x)$. Analogamente como $\mathcal{S}_y\alpha = \mathcal{S}^*_{-y}\mathrm{w}\alpha$ (pelo Teorema 2.4), segue que $\mathcal{A}^*_\varepsilon\mathrm{w}\phi(x) = \mathcal{A}_\varepsilon\phi(x)$. Com isso provamos que as propriedades válidas para $\mathcal{A}^*_\varepsilon$ e $\mathcal{R}^*_\varepsilon$ também valem para $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{R}_\varepsilon$. Com isto obtemos que se $\mathcal{T}_x = \alpha$ é C^r então $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}_x = \mathcal{A}_\varepsilon\alpha = \mathcal{A}^*_\varepsilon\mathrm{w}\alpha$ é C^r.

Provemos (v). Pela observação 3.1.2, $\mathcal{R}^*_\varepsilon\phi$ e $\mathcal{A}^*_\varepsilon\phi$ permanecem em um conjunto limitado até ordem q, se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem q, o que prova (v) pois $\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R}^*_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}^*_\varepsilon$w.

Provemos (vi). Usando o Teorema do Valor Médio temos que se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem $q+1$ então $\frac{s^*_y\phi-\phi}{|y|}$ e $\frac{S^*_y\phi}{|y|}$ também permanecem em um conjunto limitado até ordem q. De fato, se $|\alpha| = q$

$$|\partial^\alpha_x(\text{coeficente de }\frac{s^*_y\phi-\phi}{|y|})| = \frac{|\partial^\alpha_x\phi_{i_1\ldots i_p}(x+y) - \partial^\alpha_x\phi_{i_1\ldots i_p}(x)|}{|y|} \le \frac{M|y|}{|y|} \le M$$

pois as derivadas de $\partial^\alpha_x\phi_{i_1\ldots i_p}$ são de ordem $q+1$. Analogamente

$$|\partial^\alpha_x(\text{coeficente de }\frac{S^*_y\phi}{|y|})| \le \sum_{i=1}^n |\partial^\alpha_x\int_0^1 \phi_{i\,i_1\ldots i_p}(x+ty)dt| \le \sum_{i=1}^n\int_0^1 |\partial^\alpha_x\phi_{i\,i_1\ldots i_p}(x+ty)|dt \le \sum_{i=1}^n\int_0^1 M\,dt = nM$$

Logo as formas $\frac{\mathcal{R}^*_\varepsilon\phi-\phi}{\varepsilon}$ e $\frac{\mathcal{A}^*_\varepsilon\phi}{\varepsilon}$ ficam limitadas até ordem q se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem $q+1$, independentemente do valor de ε, sempre que este seja positivo e limitado. Assim, se $\mathcal{T}$ é contínua até ordem q, os valores correspondentes $|\frac{\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi]-\mathcal{T}[\phi]}{\varepsilon}|$ e $|\frac{\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi]}{\varepsilon}|$ também permanecem limitados independentemente do valor de ε. Ou seja $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{T}[\phi]$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em cada conjunto $\mathcal{B}\subset\mathcal{D}_V$ de formas limitadas até ordem $q+1$. Quando $\mathcal{T}$ é uma corrente, fazemos o mesmo raciocínio $\forall q\in\mathbb{N}$ e obtemos que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{T}[\phi]$ e $\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em cada $\mathcal{B}\subset\mathcal{D}_V$ de formas limitadas. □

Corolário 3.1. *Valem as seguintes expressões*

$$\mathcal{R}_\varepsilon \partial \mathcal{T} = \partial \mathcal{R}_\varepsilon \mathcal{T} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{R}_\varepsilon d\mathcal{T} = d\mathcal{R}_\varepsilon \mathcal{T} \tag{3.11}$$

Demonstração. De (i) da Proposição 3.1 segue que $\mathcal{R}_\varepsilon\partial\mathcal{T} - \partial\mathcal{T} = \mathcal{A}_\varepsilon\partial\partial\mathcal{T} + \partial\mathcal{A}_\varepsilon\partial\mathcal{T} = \partial\mathcal{A}_\varepsilon\partial\mathcal{T}$, onde usamos o fato que $\partial^2\mathcal{T} = 0$. Por outra parte $\partial\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} - \partial\mathcal{T} = \partial(\mathcal{A}_\varepsilon\partial\mathcal{T} + \partial\mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{T}) = \partial\mathcal{A}_\varepsilon\partial\mathcal{T} + \partial\partial\mathcal{A}_\varepsilon = \partial\mathcal{A}_\varepsilon\partial\mathcal{T}$, onde usamos a equação (3.6). Segue (3.10). Agora, como $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ tem a mesma dimensão que $\mathcal{T}$, obtemos $\mathcal{R}_\varepsilon d\mathcal{T} = \mathcal{R}_\varepsilon \mathrm{w}\partial\mathcal{T} = \mathrm{w}\mathcal{R}_\varepsilon\partial\mathcal{T} = \mathrm{w}\partial\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} = d\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$, que é (3.11). □

Corolário 3.2. *Se $\mathcal{T}$ é C^r ($r \geq 1$) e tem suporte compacto então $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ converge para $\mathcal{T}$ no espaço das formas C^{r-1} de $\mathbb{R}^n$, i.e., $\mathcal{T} = \phi \in \mathcal{D}^r_{\mathbb{R}^n}$, implica que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{E}^{r-1}_{\mathbb{R}^n}} \mathcal{T}$. Em particular, se $\mathcal{T} = \phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$, temos que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}} \mathcal{T}$.*

Demonstração. Na prova de (v) da Proposição 3.1, escolhemos $\mathcal{R}_\varepsilon$ tal que $\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R}^*_\varepsilon$. Assim

$$\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} - \mathcal{T} = \mathcal{R}^*_\varepsilon\phi - \phi = \int_y s^*_y\phi(x) - \phi(x) \odot f_\varepsilon(y)dy$$

Pelo Teorema do Valor Médio, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e uma vizinhança compacta K_0 de x_0, temos para $|\alpha| = r - 1$

$$|\partial^\alpha_x(\text{ coeficente de } \mathcal{R}^*_\varepsilon\phi(x) - \phi(x))| \leq \int_y |\partial^\alpha_x\phi_{i_1\dots i_p}(x+y) - \partial^\alpha_x\phi_{i_1\dots i_p}(x)| \odot |f_\varepsilon(y)|dy \leq$$

$$\int_{B(0,\varepsilon)} M\,|y|\,f_\varepsilon(y)dy \leq M\int_{B(0,\varepsilon)} \varepsilon f_\varepsilon(y)dy \leq M\,\varepsilon$$

para todo $x \in K_0$, pois $\mathcal{T} = \phi$ é C^r no compacto. Como M só depende de K_0 e x_0 é arbitrario segue que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{E}^{r-1}_{\mathbb{R}^n}} \mathcal{T}$. Se fazemos este análise para todo $r \in \mathbb{N}$ obtemos que $\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{T} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}} \mathcal{T}$ quando $\mathcal{T} = \phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$. □

Antes de generalizar para uma variedade qualquer, precisamos de outra proposição. Para isso introduzimos um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$. Seja $f(r)$ uma função C^∞ de r, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(r) = r$ se $r \in (0, 1/3)$, $f(r) = \exp\frac{1}{(r-1)^2}$ se $r \in (2/3, 1)$ e tal que $f'(r) > 0$, $\forall r \in (0,1)$. Se r varia de 0 até 1, $f(r)$ vai de 0 até ∞. Como $f' > 0$, existe $r(\rho)$ a função inversa de $\rho = f(r)$. Então definimos $h(\xi) = r(\rho)\frac{\xi}{|\xi|}$ onde $\rho = |\xi|$. Assim $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$ é um homeomorfismo C^∞. Se s_y é a translação $s_y(x) = x + y$, definimos $\mathrm{s}_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

como

$$\mathrm{s}_y(x) = \begin{cases} h \circ s_y \circ h^{-1}(x) & \text{se } x \in \mathbb{B}^n \\ x & \text{se } x \notin \mathbb{B}^n \end{cases} \tag{3.12}$$

Provemos que s_y é um homeomorfismo C^∞. Nos pontos interiores a $\mathbb{B}^n$ e $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{B}^n$ é claro. Vejamos que acontece em $\partial\mathbb{B}^n$. Como s_{ty} é subgrupo a um parâmetro, s_{ty} é subgrupo a um parâmetro: se $x \notin \mathbb{B}^n$ é obvio; se $x \in \mathbb{B}^n$, $\mathrm{s}_{(t+u)y}(x) = h \circ s_{(t+u)y} \circ h^{-1}(x) = h \circ s_{ty} \circ s_{uy} \circ h^{-1}(x) = h \circ s_{ty} \circ h^{-1} \circ h \circ s_{uy} \circ h^{-1}(x) = \mathrm{s}_{ty}(h \circ s_{uy} \circ h^{-1}(x)) = \mathrm{s}_{ty} \circ \mathrm{s}_{uy}(x)$, então $\mathrm{s}_{(t+u)y} = \mathrm{s}_{ty} \circ \mathrm{s}_{uy}$. Logo s_{ty} é gerado pelo campo $\mathcal{X} = \frac{\partial \mathrm{s}_{ty}}{\partial t}|_{t=0}$, i.e., $\mathcal{X}(x) = \frac{\partial \mathrm{s}(ty,x)}{\partial t}|_{t=0}$. Calculemos

$$\left.\frac{\partial \mathrm{s}(ty,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\, h \circ s_{ty} \circ h^{-1}(x) & \text{se } x \in \mathbb{B}^n \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{B}^n \end{cases}$$

Pela regra da cadeia, $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} h \circ s_{ty} \circ h^{-1}(x) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} h(s(ty, h^{-1}(x))) = Dh|_{s(0,h^{-1}(x))} \cdot \frac{\partial s}{\partial t}(ty, h^{-1}(x))|_{t=0} = Dh|_{h^{-1}(x)} \cdot y$, ou seja

$$\mathcal{X}(x) = \begin{cases} Dh|_{h^{-1}(x)} \cdot y & \text{se } x \in \mathbb{B}^n \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{B}^n \end{cases} \tag{3.13}$$

Mas $(Dh|_{h^{-1}(x)})_{ij} = \frac{\partial h^i}{\partial \xi^j}(h^{-1}(x))$, onde $h(\xi) = (h^1(\xi), \ldots, h^n(\xi))$. Como $h^i(\xi) = \frac{r(\rho)}{\rho}\xi^i$ e usando $\rho = |\xi|$, $\frac{\partial \rho}{\partial \xi^j} = \frac{\xi^j}{\rho}$ e $\frac{\partial r}{\partial \xi^j} = \frac{1}{f'(r)}\frac{\partial \rho}{\partial \xi^j}$ obtemos que

$$\frac{\partial h^i}{\partial \xi^j}(h^{-1}(x)) = \delta_{ij}\frac{r}{f(r)} + \frac{x^i x^j}{r^2 f'(r)} - \frac{x^i x^j}{r f(r)} := f_{ij}(x) \tag{3.14}$$

onde definimos $f_{ij}(x)$ para simplificar a notação. Para provar que $\mathcal{X}(x)$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n$, basta provar que f_{ij} é C^∞ na fronteira de $\mathbb{B}^n$. Mas em $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x^k}(x)$ só aparecem termos do tipo $\frac{1}{f(r)}$, $\frac{1}{f'(r)}$, $\frac{f'(r)}{f^2(r)}$ e $\frac{f''(r)}{(f'(r))^2}$ os quais vão para zero quando $r \longrightarrow 1$ (isto é conseqüência de que a exponencial domina aos polinômios). Um raciocínio similar mostra que as derivadas de qualquer ordem tem o mesmo comportamento. Portanto $\mathcal{X}$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n$, e assim $\mathrm{s}_{ty} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é C^∞, pelo Teorema de diferenciabilidade das soluções de equações diferenciais ordinarias respeito às condições iniciais[1]. Escrevemos S_y e S_y^* para os operadores associados com a homotopia s_{ty} $(0 \le t \le 1)$, ou seja $\mathrm{S}_y^*\phi(x) = \int_0^1 \mathrm{s}_{ty}^*(i_{\mathcal{X}}\phi)dt$ onde $\mathcal{X}$ é o campo da equação (3.13), isto é conseqüência da equação (2.38) com $\mu_t(x) = \mathrm{s}_{ty}(x)$. Definimos os seguintes operadores

$$\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi(x) = \int_y \mathrm{s}_y^*\phi(x) \odot f_\varepsilon(y)dy \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}_\varepsilon^*\phi(x) = \int_y \mathrm{S}_y^*\phi(x) \odot f_\varepsilon(y)dy \tag{3.15}$$

[1] Ver [1], por exemplo.

e por dualidade

$$\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi] \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi] \tag{3.16}$$

Note que se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem q, $\mathrm{s}_y^*\phi$ e $\mathrm{S}_y^*\phi$ permanecem limitadas até ordem q. A forma $\mathrm{s}_y^*\phi$ é limitada pois $s_y^*\phi$ permanece limitada até ordem q e h é um difeomorfismo. A forma $\mathrm{S}_y^*\phi$ é limitada porque $\mathrm{S}_y^*\phi(x) = \int_0^1 \mathrm{s}_{ty}^*(i_X\phi)dt$. Logo, as equações (3.15) dizem que $\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi$ e $\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi$ permanecem em um conjunto limitado até ordem q. Portanto se $\mathcal{T}$ é corrente, as equações (3.16) dizem que $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ são correntes. E se $\mathcal{T}$ e contínua até ordem q, $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ também são contínuas até ordem q.

Proposição 3.2. *Os operadores $\mathbf{R}_\varepsilon$ e $\mathbf{A}_\varepsilon$ definidos nas equações (3.16) tem as propriedades (i), (iv), (v) e (vi) da Proposição 3.1 e também as seguintes*

(ii') O suporte de $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ está contido no conjunto $E(\mathcal{T},\varepsilon)$ que é o conjunto varrido quando o suporte de $\mathcal{T}$ está sofrendo a ação das transformações s_y com $|y| < \varepsilon$. O suporte de $\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ está contido no conjunto $E(\mathcal{T},\varepsilon) \cap \overline{\mathbb{B}^n}$.

(iii') $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é C^∞ em $\mathbb{B}^n$, $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T} = \mathcal{T}$ no complemento de $\overline{\mathbb{B}^n}$. Se $\mathcal{T}$ é C^r $(0 \le r \le \infty)$, em uma vizinhança de um ponto de fronteira de $\mathbb{B}^n$, $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ também é C^r em uma vizinhança deste ponto.

Demonstração. Antes de começar a prova, note que se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem q as equações (3.15) dizem que $\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi$ e $\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi$ permanece em um conjunto limitado até ordem q. Portanto, se $\mathcal{T}$ é corrente, $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ são correntes. E se $\mathcal{T}$ é contínua até ordem q, $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ também são contínuas até ordem q.

Provemos (i). A prova é análoga à Proposição 3.1, notando que se ϕ é de grau p, $\mathrm{s}_y^*\phi$ e $\mathrm{S}_y^*\phi$ são de graus p e $p+1$ respetivamente. A fórmula (3.6) é deduzida da homotopia da mesma forma que antes.

A prova de (vi) também é análoga à da Proposição 3.1. Vemos que se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem $q+1$ e se $|y| > 0$ permanece limitado então as formas $\frac{\mathrm{s}_y^*\phi-\phi}{|y|}$ e $\frac{\mathrm{S}_y^*\phi}{|y|}$ permanecem em um conjunto limitado até ordem q. Logo, isto também é certo para as formas $\frac{\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi-\phi}{\varepsilon}$ e $\frac{\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi}{\varepsilon}$, sempre que ε seja limitado, o que prova (vi).

Provemos (v). Novamente, é possível provar que $\mathbf{R}_\varepsilon\phi(x) = \int_y \mathrm{s}_y\phi(x) \odot f_\varepsilon(y)dy$ e $\mathbf{A}_\varepsilon\phi(x) = \int_y \mathrm{S}_y\phi(x) \odot f_\varepsilon(y)dy$. Escolhendo f_ε tal que $f_\varepsilon(y) = f_\varepsilon(-y)$ temos de novo $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R}_\varepsilon^*$ e $\mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{A}_\varepsilon^*\mathrm{w}$. Assim, o que vale para $\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi$ e $\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi$, vale também para $\mathbf{R}_\varepsilon\phi$ e $\mathbf{A}_\varepsilon\phi$.

Provemos (iv). Se $\mathcal{T} = \phi$ é C^r, então $\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T} = \mathbf{A}_\varepsilon\phi = \mathbf{A}_\varepsilon^*\mathrm{w}\phi = \int_y \mathrm{S}_y^*\mathrm{w}\phi(x) \odot f_\varepsilon(y)dy$, que é uma forma C^r em $\mathbb{R}^n$.

Provemos (ii'). Seja $F = \{A/A = \mathrm{s}_y(supp\,\phi), |y| < \varepsilon\}$ o conjunto varrido pelas transformações s_y agindo em

$supp\,\phi$, quando $|y| < \varepsilon$. Pelas definições, os suportes de $\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi$ e $\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi$ estão contidos em F. Então $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = \mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = 0$ se o suporte de $\mathcal{T}$ não interseta $E(\mathcal{T},\varepsilon)$. Isto é conseqüência de

$$supp\,\mathcal{T} \cap F = \emptyset \iff supp\,\phi \cap E(\mathcal{T},\varepsilon) = \emptyset$$

Logo os suportes de $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ e $\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ estão contidos em $E(\mathcal{T},\varepsilon)$. Aliás, se $supp\,\phi$ está contido em $\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{B}^n$, como a homotopia s_{ty} se reduz à identidade fora de $\mathbb{B}^n$ temos $\mathbf{S}_y^*\phi = 0$. Segue que $\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi = 0$ e $\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = 0$, então $\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ é zero em $\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{B}^n$. E portanto $supp\,\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T}$ está contido em $E(\mathcal{T},\varepsilon) \cap \overline{\mathbb{B}^n}$.

Provemos (iii'). Vejamos que $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é C^∞ em $\mathbb{B}^n$. Usando a equação (2.8) obtemos $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi] = h\,h^{-1}\,\mathcal{T}[\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi] = h^{-1}\mathcal{T}[h^*\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi]$. Mais em $\mathbb{B}^n$ vale que $h^*\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi = \mathcal{R}_\varepsilon^*h^*\phi$, onde $\mathcal{R}_\varepsilon$ é o operador da Proposição 3.1. Esta igualdade vale, porque $h^*\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi(x) = h^*[\int_y s_y^*\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy] = \int_y h^*s_y^*\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy = \int_y h^*(h^{-1})^*s_y^*h^*\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy = \int_y s_y^*h^*\phi(x)\odot f_\varepsilon(y)dy = \mathbf{R}_\varepsilon^*h^*\phi(x)$. Logo $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}[\phi] = h^{-1}\mathcal{T}[\mathcal{R}_\varepsilon^*h^*\phi] = h\mathcal{R}_\varepsilon\,h^{-1}\mathcal{T}[\phi]$, ou ainda, $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T} = h\mathcal{R}_\varepsilon\,h^{-1}\mathcal{T}$, mas sabemos que $\mathcal{R}_\varepsilon h^{-1}\mathcal{T}$ é C^∞, e a imagem por h de uma forma C^∞ é uma forma C^∞. Portanto $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é C^∞ em $\mathbb{B}^n$. Como $s_y(x) = x$ quando $x \in \mathbb{B}^n$, obtemos que $\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi = \phi$ quando $supp\,\phi$ está contido em $\mathbb{R}^n\backslash\overline{\mathbb{B}^n}$. Logo $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T} = \mathcal{T}$em $\mathbb{R}^n\backslash\overline{\mathbb{B}^n}$. Se $\mathcal{T}$ é C^r (com $0 \le r \le \infty$) em uma vizinhança de $x_0 \in \partial\mathbb{B}^n$, então $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T}$ é C^r em uma vizinhança U de x_0. De fato, é possível encontrar $f \in C^\infty$ tal que $f = 1$ em W (vizinhança de x_0 contida em U) e $supp\,f \subset U$. Logo $\mathcal{T} = f\mathcal{T} + (1-f)\mathcal{T}$, onde $f\mathcal{T}$ é uma corrente C^r em $\mathbb{R}^n$ (quando $f \neq 0$, $\mathcal{T}$ é C^r), e $(1-f)\mathcal{T}$ é uma corrente que é zero em W. Logo, em W vale que $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T} = \mathbf{R}_\varepsilon f\mathcal{T} + \mathbf{R}_\varepsilon(1-f)\mathcal{T} = \mathbf{R}_\varepsilon f\mathcal{T}$ é C^r, pois $\mathbf{R}_\varepsilon f\mathcal{T}$ é C^r em W (lembrar que $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R}_\varepsilon^*$ implica que se $\mathcal{S}$ é C^r, $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{S}$ é C^r). Isto prova (iii'). □

Observação 3.1.4. Podemos dizer, por (iii'), que $\mathbf{R}_\varepsilon$ regulariza correntes em $\mathbb{B}^n$ e nunca as desregulariza. Isto será muito importante para a prova em variedades arbitrarias.

Corolário 3.3. *De novo temos as equações*

$$\partial\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T} = \mathbf{R}_\varepsilon\partial\mathcal{T} \qquad\qquad d\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T} = \mathbf{R}_\varepsilon d\mathcal{T}$$

Demonstração. Saem de $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T} - \mathcal{T} = \partial\mathbf{A}_\varepsilon\mathcal{T} + \mathbf{A}_\varepsilon\partial\mathcal{T}$, igual que no Corolário 3.1. □

Corolário 3.4. *Novamente, se $\mathcal{T} = \phi \in \mathcal{D}^r_{\mathbb{R}^n}$ ($r \ge 1$) então $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{E}^{r-1}_{\mathbb{R}^n}} \mathcal{T}$. Em particular, se $\mathcal{T} = \phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ então $\mathbf{R}_\varepsilon\mathcal{T} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}} \mathcal{T}$.*

Demonstração. Como $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{R}_\varepsilon^*$ podemos fazer uma conta análoga à do Corolário 3.2, lembrando que h é homeomorfismo C^∞. □

3.2 Regularização em variedades.

Antes de provar o Teorema de existência de regularizadores em uma variedade, precisamos de uns operadores auxiliares. Seja $\{(x_i, W_i)\}_i$ um atlas da variedade V, enumerável e localmente finito, tal que $\overline{\mathbb{B}^n} \subset x_i(W_i)$. Seja $U_i = x_i^{-1}(\mathbb{B}^n)$ e $f_i \in C^\infty(V)$ com as propriedades: $V = \cup_i U_i$, $f_i = 1$ em F_i, para algum fechado F_i com $U_i \subset F_i \subset W_i$, e $supp\, f_i \subset W_i$. Logo $f_i\mathcal{T}$ é uma corrente com suporte contido em W_i (domínio de uma carta). Portanto existe a imagem pelo homeomorfismo x_i que é C^∞, i.e., $x_i f_i\mathcal{T}$ é uma corrente em $x_i(W_i) \subset \mathbb{R}^n$. Como $x_i f_i\mathcal{T}$ é zero fora de $supp\, x_i f_i\mathcal{T} \subset x_i(W_i)$ estendemos a corrente para $\mathbb{R}^n$ como

$$x_i f_i\mathcal{T} = \begin{cases} x_i f_i\mathcal{T} & \text{em } x_i(W_i) \ \text{(aberto)} \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash supp\, x_i f_i\mathcal{T} \ \text{(aberto)} \end{cases}$$

Agora aplicamos o operador $\mathbf{R}_{\varepsilon_i}$ da Proposição 3.2 e temos $\mathbf{R}_{\varepsilon_i} x_i f_i\mathcal{T}$ que é uma corrente em $\mathbb{R}^n$ que depende de $\varepsilon_i > 0$, o qual é escolhido para que $supp\, \mathbf{R}_{\varepsilon_i} x_i f_i\mathcal{T} \subset \varepsilon_i$-vizinhança de $supp\, x_i f_i\mathcal{T} \subset x_i(W_i)$. A imagem por x_i^{-1} é também uma corrente em W_i com

$$supp\, x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i} x_i f_i\mathcal{T} \subset \varepsilon_i\text{-vizinhança de } supp\, f_i\mathcal{T} \subset W_i \tag{3.17}$$

Então podemos estender para toda a variedade, pondo zero fora do suporte de $x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i} x_i f_i\mathcal{T}$. Finalmente definimos

$$\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} = x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i} x_i f_i\mathcal{T} + (1 - f_i)\mathcal{T} \tag{3.18}$$

Note que $\mathcal{T} = f_i\mathcal{T} + (1 - f_i)\mathcal{T}$, ou seja, estamos agindo só na parte que tem suporte contido no domínio da carta (x_i, U_i). Analogamente definimos

$$\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} = x_i^{-1}\mathbf{A}_{\varepsilon_i} x_i f_i\mathcal{T} \tag{3.19}$$

onde pela Proposição 3.2 temos

$$supp\, x_i^{-1}\mathbf{A}_{\varepsilon_i} x_i f_i\mathcal{T} \subset x_i^{-1} supp\, \mathbf{A}_{\varepsilon_i} x_i f_i\mathcal{T} \subset x_i^{-1}(E(x_i f_i\mathcal{T}, \varepsilon_i) \cap \overline{\mathbb{B}^n}) \subset E(f_i\mathcal{T}, \varepsilon_i) \cap \overline{U_i} \tag{3.20}$$

Os operadores assim definidos tem as mesmas propriedades da Proposição 3.2, onde ε_i faz o papel de ε e U_i faz de $\mathbb{B}^n$. Então, provemos as propriedades para $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$:

Prova de (i). Se $\mathcal{T}$ é homogênea de dimensão p, $f_i\mathcal{T}$ também é homogênea de dimensão p. Vejamos que $x_i f_i\mathcal{T}$ também é homogênea p-dimensional. Seja ϕ de grau p, então $x_i f_i\mathcal{T}[\phi] = f_i\mathcal{T}[x_i^*\phi] = 0$ pois $x_i^*\phi$ também é de grau p. Pela Proposição 3.2, $\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}$ é homogênea de dimensão p. E assim $x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}$ também é p-dimensional. Logo $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$ é de dimensão p. Analogamente $\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$ é p-dimensional. Provemos a fórmula (3.6). Em U_i temos $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} - \mathcal{T} = x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} - f_i\mathcal{T} = x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} - x_i^{-1}x_if_i\mathcal{T} = x_i^{-1}(\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} - x_if_i\mathcal{T}) = x_i^{-1}(\partial\mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} + \mathbf{A}_{\varepsilon_i}\partial x_if_i\mathcal{T}) = \partial x_i^{-1}\mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} + x_i^{-1}\mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_i\partial f_i\mathcal{T} = \partial\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} + x_i^{-1}\mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_if_i\partial\mathcal{T} = \partial\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} + \mathcal{A}_{\varepsilon_i}\partial\mathcal{T}$, onde usamos sucessivamente a equação (2.8), a Proposição 3.2, a equação (2.9) e que $f_i = 1$ em U_i (como $x_i(U_i) \subset \overline{\mathbb{B}^n}$ e $supp\,\mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} \subset \overline{\mathbb{B}^n} \cap E(x_if_i\mathcal{T}, \varepsilon_i)$ temos $\mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_i\partial f_i\mathcal{T} = \mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_if_i\partial\mathcal{T}$). Fora de $\overline{U_i}$, provaremos em (iii') que $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} = \mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_{\varepsilon_i}$ é zero, portanto provamos a equação (3.6).

Prova de (ii'). Provemos que o suporte de $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$ está contido no conjunto $E(\mathcal{T}, \varepsilon_i)$. Seja U uma vizinhança aberta de $supp\,\mathcal{T}$ tal que $U \subset E(\mathcal{T}, \varepsilon_i)$ e vejamos que $supp\,\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} \subset U$. Como $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} = x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} + (1 - f_i)\mathcal{T}$ temos $supp\,\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} \subset supp\,(x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}) \cup supp\,(1 - f_i)\mathcal{T}$. Mas $supp\,(x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}) \subset W_i \cap U$, pois $supp\,x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} \subset \varepsilon_i$-vizinhança de $supp\,f_i\mathcal{T} \subset$ (ε_i-vizinhança de $supp\,f_i$) $\cap\, supp\,\mathcal{T} \subset W_i \cap U$, onde usamos (3.17). Então $supp\,\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} \subset U$. Analogamente, provemos que o suporte de $\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$ está contido no conjunto $E(\mathcal{T}, \varepsilon_i) \cap U_i$. Por (3.20) temos $supp\,\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} \subset E(f_i\mathcal{T}, \varepsilon_i) \cap \overline{U_i} \subset U \cap \overline{U_i}$, se escolhemos $\varepsilon_i > 0$ suficentemente pequeno (lembrar que $supp\,f_i\mathcal{T} \subset W_i \cap U \subset U$).

Prova de (iii'). Mostremos que $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$ é C^∞ em U_i e $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} = \mathcal{T}$ em $V \backslash \overline{U_i}$. Em U_i, onde $f_i = 1$, temos $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} = x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}$, mas $\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}$ é C^∞, logo como $x_i^{-1}\phi = x_i^*\phi$ (equação (2.11)) temos que $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$ é C^∞ em U_i. Em $V \backslash \overline{U_i}$ temos que $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} = x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} + (1 - f_i)\mathcal{T} = x_i^{-1}(\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} - x_if_i\mathcal{T}) + \mathcal{T} = \mathcal{T}$ onde usamos que fora de $\overline{U_i}$ vale que $x_i^{-1}(\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} - x_if_i\mathcal{T}) = 0$ (pois fora de $x_i(\overline{U_i}) = \overline{\mathbb{B}^n}$ vale $\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} = x_if_i\mathcal{T}$). Seja $0 \leq r \leq \infty$, provemos que se $x_0 \in \partial U_i$ e $\mathcal{T}$ é C^r em W_{x_0} (vizinhança de x_0), então $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$ é C^r em alguma vizinhança de x_0. Diminuindo se necessario, podemos conseguir que $W_{x_0} \subset F_i$ (lembrar que $f_i = 1$ em F_i). Então $f_i\mathcal{T}$ é C^r em W_{x_0}, segue que $x_if_i\mathcal{T}$ é C^r em $x_i(W_{x_0})$ que é vizinhança de $x_i(x_0) \in \partial\overline{\mathbb{B}^n}$. Pela Proposição 3.2, $\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}$ é C^r em uma vizinhança de $x_i(x_0)$, contida em $x_i(W_{x_0})$. Logo $x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}$ é C^r em uma vizinhança de x_0 contida em $W_{x_0} \subset F_i$. Como $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} = x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}$ em F_i, temos que $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}$ é C^r em uma vizinhança de x_0.

Prova de (iv). Se $\mathcal{T}$ é C^r, $f_i\mathcal{T}$ é C^r. Logo $x_if_i\mathcal{T}$ é C^r (usamos a equação (2.10)), e pela Proposição 3.2, $\mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}$ é C^r. Segue que $\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} = x_i^{-1}\mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}$ é C^r, onde usamos de novo a equação (2.10).

Prova de (v). Como $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\phi = x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\phi + (1 - f_i)\phi$ obtemos que se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem q, $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}$ permanece em um conjunto limitado até ordem q. Isto, pela Proposição 3.2 e porque x_i é um homeomorfismo C^∞. Da mesma forma $\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\phi = x_i^{-1}\mathbf{A}_{\varepsilon_i}x_if_i\phi$ permanece em um conjunto limitado até ordem q.

Prova de (vi). Quando $\varepsilon_i \to 0$, $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}[\phi] = x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}[\phi] - (1 - f_i)\mathcal{T}[\phi] \to \mathcal{T}[\phi]$ pois $\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T}[\phi] \to x_if_i\mathcal{T}[\phi]$, i.e., $x_i^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_i}x_if_i\mathcal{T} \to x_i^{-1}x_if_i\mathcal{T}[\phi] = f_i\mathcal{T}[\phi]$, e a convergência é uniforme em cada conjunto de formas limitadas. Analogamente obtemos $\mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}[\phi] \to 0$ uniformemente. Se $\mathcal{T}$ é contínua até ordem q, a convergência é uniforme em cada conjunto de formas limitadas até ordem $q + 1$, pois a mesma coisa vale para

$\mathbf{R}_{\varepsilon_i}$ e $\mathbf{A}_{\varepsilon_i}$.

Podemos enunciar agora o Teorema principal deste trabalho.

Teorema 3.1. *Em uma variedade V podemos construir operadores $\mathcal{R}_\lambda$ e $\mathcal{A}_\lambda$, onde $\lambda = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\}$ depende dos parâmetros $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, os quais são finitos ou infinitos, de acordo com que V seja compacta ou não, e que tem as seguintes propriedades*

(a) Se $\mathcal{T}$ é uma corrente homogênea de dimensão p, $\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T}$ são respetivamente correntes homogêneas de dimensões p e $p+1$ e que satisfazem

$$\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T} - \mathcal{T} = \partial\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T} + \mathcal{A}_\lambda\partial\mathcal{T} \tag{3.21}$$

(b) Os suportes de $\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T}$ estão contidos em qualquer vizinhança do suporte de $\mathcal{T}$, sempre que os parâmetros ε_i sejam suficentemente pequenos.

(c) $\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T}$ é C^∞.

(d) Se $\mathcal{T}$ é C^r, $\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T}$ é C^r.

(e) Se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem q e se cada ε_i permanece limitado, então $\mathcal{R}\phi$ e $\mathcal{A}\phi$ permanece em um conjunto limitado até ordem q.

(f) Se cada parâmetro ε_i tende para zero, $\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T}[\phi] \to \mathcal{T}[\phi]$ e $\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T}[\phi] \to 0$ uniformemente, $\forall\phi \in \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_V$ é um conjunto limitado de formas. Se $\mathcal{T}$ é contínua até ordem q, a convergência é uniforme em cada conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_V$ de formas limitadas até ordem $q+1$.

Demonstração. Usamos os operadores das equações (3.18) e (3.19) para definir

$$\mathcal{R}_\lambda^{(h)} = \mathcal{R}_{\varepsilon_1}\mathcal{R}_{\varepsilon_2}\ldots\mathcal{R}_{\varepsilon_h} \qquad\qquad \mathcal{A}_\lambda^{(h)} = \mathcal{R}_{\varepsilon_1}\mathcal{R}_{\varepsilon_2}\ldots\mathcal{R}_{\varepsilon_{h-1}}\mathcal{A}_{\varepsilon_h}$$

Seja $K \subset V$ um compacto qualquer, como $\{U_h\}$ é localmente finita, $\overline{U_h} \cap K = \emptyset$ para h suficentemente grande. Logo $\mathcal{R}_{\varepsilon_h}$ restrito a K é a identidade para h grande, pois $\mathcal{R}_{\varepsilon_h}\mathcal{T} = \mathcal{T}$ fora de $\overline{U_h}$. E $\mathcal{A}_{\varepsilon_h}$ restrito a K é nulo para h grande, pois $\mathcal{A}_{\varepsilon_h}\mathcal{T}$ tem suporte contido em $\overline{U_h}$. Portanto os operadores

$$\mathcal{R}_\lambda = \lim_{h\to\infty}\mathcal{R}_\lambda^{(h)} \qquad\qquad \mathcal{A}_\lambda = \sum_{h=1}^{\infty}\mathcal{A}_\lambda^{(h)}$$

ficam bem definidos. De fato, dado K compacto, sabemos que existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $h \geq h_0$, $\mathcal{R}_{\varepsilon_h}|_K = Id$ e $\mathcal{A}_{\varepsilon_h}|_K = 0$, logo

$$\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}[\phi] = \mathcal{R}_\lambda^{(h)} \mathcal{T}[\phi] \tag{3.22}$$

$$\mathcal{A}_\lambda \mathcal{T}[\phi] = \sum_{i=1}^{h} \mathcal{A}_\lambda^{(i)} \mathcal{T}[\phi] \tag{3.23}$$

para qualquer $h \geq h_0$, e assim $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_\lambda \mathcal{T}$ são correntes bem definidas.

Provemos (a). Se $\mathcal{T}$ é corrente homogênea de dimensão p, segue das propriedades das $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}$'s e das $\mathcal{A}_{\varepsilon_i}$'s que $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}$ e $\mathcal{A}_\lambda \mathcal{T}$ são homogêneas de dimensões p e $p+1$ respectivamente. Também

$$\mathcal{R}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} - \mathcal{R}_\lambda^{(h-1)} \mathcal{T} = \partial \mathcal{A}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} + \mathcal{A}_\lambda^{(h)} \partial \mathcal{T} \tag{3.24}$$

pois temos as seguintes igualdades $\mathcal{R}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} - \mathcal{R}_\lambda^{(h-1)} \mathcal{T} = \mathcal{R}_{\varepsilon_1} \mathcal{R}_{\varepsilon_2} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_{h-1}} (\mathcal{R}_{\varepsilon_h} \mathcal{T} - \mathcal{T}) = \mathcal{R}_{\varepsilon_1} \mathcal{R}_{\varepsilon_2} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_{h-1}} (\partial \mathcal{A}_{\varepsilon_h} \mathcal{T} + \mathcal{A}_{\varepsilon_h} \partial \mathcal{T}) = \partial \mathcal{R}_{\varepsilon_1} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_{h-1}} \mathcal{A}_{\varepsilon_h} \mathcal{T} + \mathcal{R}_{\varepsilon_1} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_{h-1}} \mathcal{A}_{\varepsilon_h} \partial \mathcal{T} = \partial \mathcal{A}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} + \mathcal{A}_\lambda^{(h)} \partial \mathcal{T}$, onde usamos que $\partial \mathcal{R}_{\varepsilon_k} \mathcal{T} = \mathcal{R}_{\varepsilon_k} \partial \mathcal{T}$ (equação (3.10)). Agora somamos as equações (3.24) e obtemos $\mathcal{R}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} - \mathcal{T} = \sum_{i=1}^h \partial \mathcal{A}_\lambda^{(i)} \mathcal{T} + \mathcal{A}_\lambda^{(i)} \partial \mathcal{T} = \partial(\sum_{i=1}^h \mathcal{A}_\lambda^{(i)} \mathcal{T}) + \sum_{i=1}^h \mathcal{A}_\lambda^{(i)} \partial \mathcal{T}$. E tomando limite fica

$$\lim_{h \to \infty} \mathcal{R}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} - \mathcal{T} = \partial \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_\lambda^{(i)} \mathcal{T} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_\lambda^{(i)} \partial \mathcal{T}$$

que é a fórmula (3.21).

Provemos (b). Seja U uma vizinhança do suporte de $\mathcal{T}$. Como $\mathcal{R}_\lambda^{(h)} = \mathcal{R}_{\varepsilon_1} \mathcal{R}_{\varepsilon_2} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_h}$ podemos achar $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$ tais que $supp\, \mathcal{R}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} \subset U$. De fato, usando (ii') para $\mathcal{R}_{\varepsilon_h}$ temos que $supp\, \mathcal{R}_{\varepsilon_h} \mathcal{T} \subset E(\mathcal{T}, \varepsilon_h)$. Usando esta inclusão e (ii') para $\mathcal{R}_{\varepsilon_{h-1}}$, temos $supp\, \mathcal{R}_{\varepsilon_{h-1}} \mathcal{R}_{\varepsilon_h} \mathcal{T} \subset E(\mathcal{R}_{\varepsilon_h} \mathcal{T}, \varepsilon_{h-1}) \subset E(\mathcal{T}, \varepsilon_h + \varepsilon_{h-1})$. E assim obtemos $supp\, \mathcal{R}_{\varepsilon_1} \mathcal{R}_{\varepsilon_2} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_h} \mathcal{T} \subset E(\mathcal{T}, \varepsilon_h + \ldots + \varepsilon_1)$, ou seja $supp\, \mathcal{R}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} \subset U$ se $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_h$ é suficentemente pequeno. Logo $supp\, \mathcal{R}_\lambda \mathcal{T} \subset U$, pela equação (3.22). Também $\mathcal{A}_\lambda^{(h)} = \mathcal{R}_{\varepsilon_1} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_{h-1}} \mathcal{A}_{\varepsilon_h}$, ou seja $supp\, \mathcal{A}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} \subset \cap_{i=1}^{h-1} supp\, \mathcal{R}_{\varepsilon_i} \mathcal{T} \cap supp\, \mathcal{A}_{\varepsilon_h} \mathcal{T} \subset U \cap (U \cap \overline{U_h}) \subset U \cap \overline{U_h}$. Assim $\cup_{i=1}^h supp\, \mathcal{A}_\lambda^{(h)} \mathcal{T} \subset \cup_{i=1}^h U \cap \overline{U_i} \subset U$, logo por (3.23) temos que $supp\, \mathcal{A}_\lambda \mathcal{T} \subset U$.

Provemos (c).Vejamos que $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}$ é C^∞ em uma vizinhança de um ponto arbitrario. Sejam $x \in V$ e K uma vizinhança compacta de x. Como $\{U_i\}$ é localmente finito, existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{U_h} \cap K = \emptyset$ se $h \geq h_0$, i.e., $K \subset \cup_{i=1}^{h_0-1} U_i$. Como já vimos, se $supp\, \phi \subset K$, $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}[\phi] = \mathcal{R}_\lambda^{(h)} \mathcal{T}[\phi]$, $\forall h \geq h_0$. Portanto se U é aberto tal que $x \in U \subset K$ temos que $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T} = \mathcal{R}_\lambda^{(h_0)} \mathcal{T} = \mathcal{R}_{\varepsilon_1} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_{h_0}} \mathcal{T}$ em $U \subset \cup_{i=1}^{h_0} U_i$. Como $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}$ regulariza em U_i e não desregulariza nunca, segue que $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}$ é C^∞ em U. Concluimos que $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}$ é C^∞ em V.

Provemos (d). Seja $\mathcal{T}$ uma corrente C^r. A prova é similar a (d) notando que $\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T}[\phi] = \sum_{i=1}^{h_0-1} \mathcal{A}_\lambda^{(i)}\mathcal{T}[\phi]$ quando $supp\,\phi \subset K$. Logo $\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T}$ é C^r em $U \subset K \subset \cup_{i=1}^{h_0-1} U_i$.
Provemos (e). Vejamos que $\mathcal{R}_\lambda\phi$ é limitado até ordem q se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem q. Seja $\mathcal{B}$ este conjunto. Seja $p \in V$, pela definição 2.1.10, existe K compacto com $p \in K \subset U$ (onde U é domínio de uma carta), tal que as derivadas até ordem q dos coeficentes de ϕ estão uniformemente limitadas em K. Mas, para este compacto sabemos que existe h_0 tal que $\mathcal{R}_\lambda\phi = \mathcal{R}_\lambda^{(h)}\phi$ para $h \geq h_0$. Ou seja $\mathcal{R}_\lambda\phi = \mathcal{R}_{\varepsilon_1}\ldots\mathcal{R}_{\varepsilon_h}\phi$ e como os $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}$'s tem a propriedade (v) temos que $\mathcal{R}_\lambda\phi$ permanece em um conjunto limitado até ordem q em $p \in V$. Como $p \in V$ é arbitrário, concluimos que vale (e).
Provemos (f). Pelas equações (3.22) e (3.23) temos, para qualquer $\phi \in \mathcal{D}_V$:

$$\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T}[\phi] - \mathcal{T}[\phi] = \sum_{h=1}^{\infty}(\mathcal{R}_\lambda^{(h)} - \mathcal{R}_\lambda^{(h-1)})\mathcal{T}[\phi] \qquad \mathcal{A}_\lambda\mathcal{T}[\phi] = \sum_{h=1}^{\infty}\mathcal{A}_\lambda^{(h)}\mathcal{T}[\phi]$$

Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_V$ é um conjunto limitado, existe K compacto tal que $supp\,\phi \subset K$, $\forall\phi \in \mathcal{B}$. Sabemos então, que existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall h \geq h_0$ e $\forall\phi \in \mathcal{B}$ vale que

$$\mathcal{R}_\lambda^{(h)}\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{T}[\phi] \qquad \mathcal{A}_\lambda^{(h)}\mathcal{T}[\phi] = 0$$

Segue que $(\mathcal{R}_\lambda^{(h)} - \mathcal{R}_\lambda^{(h-1)})\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{R}_{\varepsilon_1}\mathcal{R}_{\varepsilon_2}\ldots\mathcal{R}_{\varepsilon_{h-1}}(\mathcal{R}_{\varepsilon_h}\mathcal{T} - \mathcal{T})[\phi] = 0$ se $h \geq h_0$ e $\phi \in \mathcal{B}$. Logo

$$\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T}[\phi] - \mathcal{T}[\phi] = \sum_{i=1}^{h}(\mathcal{R}_\lambda^{(i)} - \mathcal{R}_\lambda^{(i-1)})\mathcal{T}[\phi] \qquad \mathcal{A}_\lambda\mathcal{T}[\phi] = \sum_{i=1}^{h}\mathcal{A}_\lambda^{(i)}\mathcal{T}[\phi]$$

as quais valem $\forall h \geq h_0$ e $\forall\phi \in \mathcal{B}$. Mostremos que os termos gerais destas somas tendem para zero uniformemente, $\forall\phi \in \mathcal{B}$, quando $\varepsilon_i \to 0$. Para isso: $(\mathcal{R}_\lambda^{(i)} - \mathcal{R}_\lambda^{(i-1)})\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{R}_{\varepsilon_1}\ldots\mathcal{R}_{\varepsilon_{i-1}}(\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} - \mathcal{T})[\phi] = (\mathcal{R}_{\varepsilon_i}\mathcal{T} - \mathcal{T})[\mathcal{R}_\lambda^{(i-1)*}\phi]$, onde $\mathcal{R}_\lambda^{(i-1)*}\phi = \mathcal{R}_{\varepsilon_{i-1}}^*\ldots\mathcal{R}_{\varepsilon_1}^*\phi$. Se ϕ permanece em um conjunto limitado até ordem $q+1$, $\mathcal{R}_\lambda^{(i-1)*}\phi$ permanece limitada até ordem $q+1$. Como $\mathcal{R}_i$ tem a propriedade (vi) temos, quando $\varepsilon_i \to 0$, $(\mathcal{R}_\lambda^{(i)} - \mathcal{R}_\lambda^{(i-1)})\mathcal{T}[\phi] \to 0$ uniformemente, $\forall\phi \in \mathcal{B}$, $\forall i \leq h$. Analogamente $\mathcal{A}_\lambda^{(i)}\mathcal{T}[\phi] = \mathcal{A}_{\varepsilon_i}\mathcal{T}[\mathcal{R}_\lambda^{(i-1)*}\phi] \to 0$ uniformemente, $\forall\phi \in \mathcal{B}$, $\forall i \leq h$, quando $\varepsilon_i \to 0$. Portanto $\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T}[\phi] \to \mathcal{T}[\phi]$ e $\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T}[\phi] \to 0$ uniformemente, $\forall\phi \in \mathcal{B}$. Note que se $\mathcal{T}$ é contínua até ordem q, só precisamos da limitação até ordem $q+1$. □

Vejamos algumas conseqüências deste Teorema.

Definição 3.2.1 (Regularizadores)**.** Cada operador $\mathcal{R}_\lambda$ com as propriedades do Teorema 3.1 será chamado de *regularizador*.

Definição 3.2.2. Os operadores $\mathcal{R}_\lambda$ e $\mathcal{A}_\lambda$ do Teorema 3.1 tem traspostas definidas por

$$\mathcal{R}_\lambda^* = \lim_{h\to\infty} \mathcal{R}_\lambda^{(h)*} \qquad \mathcal{A}_\lambda^* = \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{A}_\lambda^{(h)*}$$

Corolário 3.5. *Existem regularizadores tais que* $\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}_\lambda^*$ *e* $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_\lambda^* \mathrm{w}$

Demonstração. Sejam $\tilde{\mathcal{R}}_\lambda$ e $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda$ os operadores do Teorema 3.1. Defina

$$\mathcal{R}_\lambda = \tilde{\mathcal{R}}_\lambda \tilde{\mathcal{R}}_\lambda^{\,*} \qquad \mathcal{A}_\lambda = \frac{1}{2}\left(\tilde{\mathcal{A}}_\lambda + \tilde{\mathcal{A}}_\lambda \tilde{\mathcal{R}}_\lambda^{\,*} + \tilde{\mathcal{R}}_\lambda \tilde{\mathcal{A}}_\lambda^{\,*}\mathrm{w} + \tilde{\mathcal{A}}_\lambda^{\,*}\mathrm{w}\right) \tag{3.25}$$

Usando que $\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^{\,**} = \tilde{\mathcal{R}}_\lambda$ obtemos que $\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}_\lambda^*$ e também $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_\lambda^*\mathrm{w}$. □

Corolário 3.6. $\mathcal{R}_\lambda \partial \mathcal{T} = \partial \mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}$ *e* $d\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T} = \mathcal{R}_\lambda d\mathcal{T}$.

Demonstração. Análoga ao Corolário 3.1. □

Corolário 3.7. *Se* $\mathcal{T} = \phi \in \mathcal{D}_V^r$ $(r \geq 1)$*, então* $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ *em* $\mathcal{E}_V^{r-1}$*, quando cada* $\varepsilon_i \to 0$*. Em particular, se* $\mathcal{T} \in \phi \in \mathcal{D}_V$ *então* $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ *em* $\mathcal{E}_V$.

Demonstração. Usaremos os regularizadores do Corolário 3.5. Então, queremos provar que $\mathcal{R}_\lambda^*\phi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{E}_V} \phi$, se $\phi \in \mathcal{D}_V$. Pela definição de convergência de formas, sabemos que basta provar localmente, i.e., fixado $x_0 \in V$, queremos ver que existe K_0 vizinhança compacta de x_0 tal que valem as estimativas da equação (2.1). Mas, em uma vizinhança compacta, vale a equação (3.22), ou seja, só precisamos iterar finitas vezes para obter $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T}$ (que é igual a $\mathcal{R}_\lambda^*\phi$). Da definição 3.2.2, vemos que também temos finitos termos na expressão de $\mathcal{R}_\lambda^*$, i.e., $\mathcal{R}_\lambda^*\phi = \mathcal{R}_\lambda^{(h)*}\phi = \mathcal{R}_{\varepsilon_h}^* \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_2}^* \mathcal{R}_{\varepsilon_1}^*\phi$, e para cada $\mathcal{R}_{\varepsilon_i}^*\phi$ podemos fazer a conta usando o Teorema do Valor Médio (veja a prova dos Corolários 3.2 e 3.4). Com isso obtemos as estimativas desejadas em K_0. Isto para todo $x_0 \in V$. □

Corolário 3.8. *Vale que* $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{T} - \mathcal{T} = \mathrm{w} d\mathcal{A}_\lambda \mathcal{T} - \mathrm{w}\mathcal{A}_\lambda d\mathcal{T}$.

Demonstração. $d\mathcal{A}_\lambda \mathcal{T} - \mathcal{A}_\lambda d\mathcal{T} = \mathrm{w}\partial\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T} - \mathcal{A}_\lambda \mathrm{w}\partial\mathcal{T} = \mathrm{w}\partial\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T} + \mathrm{w}\mathcal{A}_\lambda\partial\mathcal{T} = \mathrm{w}(\partial\mathcal{A}_\lambda\mathcal{T} + \mathcal{A}_\lambda\partial\mathcal{T}) = \mathrm{w}(\mathcal{R}_\lambda\mathcal{T} - \mathcal{T})$. □

Capítulo 4

Regularizadores nos espaços $\mathcal{L}_p^k(V)$ e $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$.

Neste capítulo, V será uma variedade Riemanniana, e diremos que ϕ é uma *forma de grau k em V* se $\phi \in \mathcal{L}_{1,loc}^k(V)$ (ver exemplo 2.1.1 para a definição de $\mathcal{L}_{1,loc}^k(V)$). A métrica Riemanniana induz uma métrica no fibrado $\bigwedge^k T^*V$ das formas de grau k[1]. Con isso obtemos uma norma em cada fibra $\bigwedge^k T_x^*V$, e esta norma é denotada por $|v|_x$, onde $x \in V$ e $v \in \bigwedge^k T^*V$.

Definição 4.0.3 (Espaços $\mathcal{L}_p^k(V)$ e $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$). Seja $\rho(x)dx$ o elemento de volume induzido pela métrica de V. Definimos para $1 \leq p < \infty$:

$$\mathcal{L}_p^k(V) = \{\phi / \phi \in \mathcal{L}_{1,loc}^k(V) \text{ e } \int_V |\phi(x)|_x^p \rho(x)dx < \infty\}$$

e para $p = \infty$:

$$\mathcal{L}_\infty^k(V) = \{\phi / \phi \in \mathcal{L}_{1,loc}^k(V) \text{ e } ess \sup_{x \in V} |\phi(x)|_x < \infty\}$$

Também introduzimos os espaços

$$\mathcal{W}_{p,q}^k(V) = \{\phi / \phi \in \mathcal{L}_p^k(V) \text{ e } d\phi \in \mathcal{L}_q^{k+1}(V)\}$$

Se consideramos estes espaços com as seguintes normas $|\phi|_p = \{\int_V |\phi(x)|_x^p \rho(x)dx\}^{1/p}$, $|\phi|_\infty = ess\, sup_{x \in V} |\phi(x)|_x$ e $|\phi|_{p,q} = |\phi|_p + |d\phi|_q$ respectivamente, eles são espaços de Banach.

Queremos provar que existem parâmetros $\varepsilon_{ij} > 0$ e regularizadores $\mathcal{R}_{(i)}$ e $\mathcal{A}_{(i)}$ (associados com $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2} \ldots$) satisfazendo as seguintes propriedades:

---

[1] Para uma prova de isto ver [9]

- $\varepsilon_{ij} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ para cada j fixo.
- $\mathcal{R}_{(i)}\alpha \in \mathcal{L}_p^k(V)$ e $\mathcal{A}_{(i)}\alpha \mathcal{L}_p^{k-1}(V)$, se $\alpha \in \mathcal{L}_p^k(V)$, $1 \leq p \leq \infty$.
- $\mathcal{R}_{(i)}\alpha \to \alpha$ em $\mathcal{L}_p^k(V)$ quando $i \to \infty$, se $\alpha \in \mathcal{L}_p^k(V)$ e $1 \leq p < \infty$.
- Se $\phi \in \mathcal{W}_{p,q}^k(V)$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, então $\mathcal{R}_{(i)}\phi \in \mathcal{W}_{p,q}^k(V)$ e $\mathcal{R}_{(i)}\phi \to \phi$ em $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$ quando $i \to \infty$.
- Se $\phi \in \mathcal{W}_{p,p}^k(V)$ então $\mathcal{A}_{(i)}\phi \in \mathcal{W}_{p,p}^{k-1}(V)$.

4.1 Em um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos o caso em que V é aberto de $\mathbb{R}^n$, lembrando que V é variedade Riemanniana, mas V tem uma métrica que em geral é diferente da métrica usual de $\mathbb{R}^n$. A menos de uma homotetia, podemos supor que $\overline{\mathbb{B}^n} \subset V$. Agora, se ϕ é uma forma de grau k em V, podemos identificar os espaços cotangentes de V com $\mathbb{R}^n$ e pensar que ϕ é uma função localmente integrável com valores em $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$. Então, a métrica Riemanniana $< \cdot,\cdot >_x$ e a métrica usual $< \cdot,\cdot >$ induzem as normas $|\cdot|_x$ e $|\cdot|$ em $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ para cada ponto $x \in V$. Pela continuidade das métricas, temos uma isometria $\mathcal{H}_x : (\bigwedge^k(\mathbb{R}^n), < \cdot,\cdot >_x) \to (\bigwedge^k(\mathbb{R}^n), < \cdot,\cdot >)$ que é contínua em relação a x. Segue que $|v|_x = |\mathcal{H}_x v|$, $\forall v \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$, e com esta notação fica

$$\|\phi\|_p = \left\{ \int_V |\mathcal{H}_x\phi(x)|^p \rho(x)dx \right\}^{1/p}$$

Mostremos algumas propriedades adicionais do grupo de transformações s_{ty} definido na equação (3.12). Na verdade, vamos pensar na aplicação $\mathrm{s} : \mathbb{R}^n \times V \to V$ definida por $\mathrm{s}(y,x) = \mathrm{s}_y(x)$, então

(1) Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{s}_y : V \to V$ é C^∞, e é a identidade fora de $\overline{\mathbb{B}^n}$ (Isto já foi provado).

(2) $\mathrm{s} : \mathbb{R}^n \times V \to V$ é C^∞. Vejamos: para cada vetor da base canônica, $e_i \in \mathbb{R}^n$, temos que a função $\beta_i : \mathbb{R} \times V \to V$ definida por $\beta_i(t,x) = \mathrm{s}(te_i, x)$ é o fluxo gerado pelo campo da equação (3.13). Pelo Teorema de diferenciabilidade das soluções respeito aos parametros, temos que β_i é C^∞, pois $\mathcal{X}$ é C^∞. Como i é arbitrario, s é C^∞.

Usaremos os operadores $\mathbf{R}_\varepsilon$ e $\mathbf{A}_\varepsilon$ da Proposição 3.2, associados ao parâmetro $\varepsilon > 0$, e mostraremos que $\mathbf{R}_\varepsilon$ e $\mathbf{A}_\varepsilon$ transformam $\mathcal{L}_p^k(V)$ em $\mathcal{L}_p^k(V)$ e $\mathcal{L}_p^{k-1}(V)$ respectivamente. Para isto lembremos as definições dos operadores duais: $\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi(x) = \int_y \mathrm{s}_y^*\phi(x) \odot \tau_\varepsilon(y)$ e $\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi(x) = \int_y \left(\int_0^1 \mathrm{s}_{ty}^*(i_X\phi)(x)dt\right) \odot \tau_\varepsilon(y)$, onde $\tau_\varepsilon(y) = f_\varepsilon(y)dy$ e $\mathcal{X}$ é dado pela equação (3.13). Será necessario o seguinte resultado:

Lema 4.1. *Para cada forma ϕ em V, para cada $t \in I = [0,1]$ e cada $x \in V$ valem as seguintes estimativas*

$$|\mathrm{s}_y^*\phi(x)|_x \leq C(y)\, |\phi(\mathrm{s}_y(x))|_{\mathrm{s}_y(x)} \tag{4.1}$$

$$|\mathrm{s}_{ty}^*(i_X\phi)(x)|_x \leq M(y)\, |\phi(\mathrm{s}_{ty}(x))|_{\mathrm{s}_{ty}(x)} \tag{4.2}$$

onde $C(y) \to 1$ e $M(y) \to 0$ quando $y \to 0$, e onde $\mathcal{X}$ é dado pela equação (3.13).

Demonstração. Denotemos por $l_{y,x} : \bigwedge^k(\mathbb{R}^n) \to \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ o operador $l_{y,x} = (d\mathrm{s}_y|_x)^*$ induzido por $d\mathrm{s}_y|_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Segue que $\mathrm{s}_y^*\phi(x) = l_{y,x}\phi(\mathrm{s}_y(x))$, pois $\mathrm{s}_y^*\phi(x)(v_1,\ldots,v_p) = \phi(\mathrm{s}_y(x))(d\mathrm{s}_y|_x v_1,\ldots,d\mathrm{s}_y|_x v_p) = (d\mathrm{s}_y|_x)^*\phi(\mathrm{s}_y(x))$ $(v_1,\ldots,v_p) = l_{y,x}\phi(\mathrm{s}_y(x))(v_1,\ldots,v_p)$. Então

$$|\mathrm{s}_y^*\phi(x)|_x = |\mathcal{H}_x\mathrm{s}_y^*\phi(x)| = |\mathcal{H}_x l_{y,x}\phi(\mathrm{s}_y(x))| \leq |\mathcal{H}_x l_{y,x}\phi(\mathrm{s}_y(x)) - \mathcal{H}_x\phi(\mathrm{s}_y(x))| + |\mathcal{H}_x\phi(\mathrm{s}_y(x)) - \mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}\phi(\mathrm{s}_y(x))|$$

$$+|\mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}\phi(\mathrm{s}_y(x))| \leq \|\mathcal{H}_x\|\,\|l_{y,x} - Id\|\,|\phi(\mathrm{s}_y(x))| + \|\mathcal{H}_x - \mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}\|\,|\phi(\mathrm{s}_y(x))| + |\phi(\mathrm{s}_y(x))|_{\mathrm{s}_y(x)} \leq$$

$$\left(\|\mathcal{H}_x\|\,\|l_{y,x} - Id\|\,\|\mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}^{-1}\| + \|\mathcal{H}_x - \mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}\|\,\|\mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}^{-1}\| + 1\right)|\phi(\mathrm{s}_y(x))|_{\mathrm{s}_y(x)} \leq C(y)\,|\phi(\mathrm{s}_y(x))|_{\mathrm{s}_y(x)}$$

onde

$$C(y) = \sup_{x\in V}\left\{\left(\|\mathcal{H}_x\|\,\|l_{y,x} - Id\| + \|\mathcal{H}_x - \mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}\|\right)\|\mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}^{-1}\| + 1\right\}$$

Mas, quando $x \in V\backslash\overline{\mathbb{B}^n}$, $\mathrm{s}_y(x) = x$ logo $l_{y,x} = Id$ e $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}$ então $C(y) \geq 1$ e basta tomar supremo em $\overline{\mathbb{B}^n}$. Pela compacidade de $\overline{\mathbb{B}^n}$, temos que $C(y)$ é contínua. Quando $y = 0$, $\mathrm{s}_y(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{B}^n$, logo $l_{0,x} = Id$ e $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}$ em $\mathbb{B}^n$, i.e., $C(0) = 1$. Segue (4.1).

Para provar (4.2) definimos $l_{t,y,x} : \bigwedge^{k-1}(\mathbb{R}^n) \to \bigwedge^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ como $l_{t,y,x} = (d\mathrm{s}_{ty}|_x)^*$. Então $\mathrm{s}_{ty}^*\omega(x) = l_{t,y,x}\omega(\mathrm{s}_{ty}(x))$, para qualquer forma de grau $k-1$. Portanto

$$|\mathrm{s}_{ty}^*(i_X\phi)(x)|_x = |\mathcal{H}_x\mathrm{s}_{ty}^*(i_X\phi)(x)| = |\mathcal{H}_x l_{t,y,x}(i_X\phi)(\mathrm{s}_{ty}(x))| \leq \|\mathcal{H}_x\|.\,\|l_{t,y,x}\|.\,|i_X\phi(\mathrm{s}_{ty(x)})| \leq$$

$$\|\mathcal{H}_x\|.\,\|l_{t,y,x}\|.\,\|\mathcal{X}\|.\,|\phi(\mathrm{s}_{ty(x)})| \leq \|\mathcal{H}_x\|.\,\|l_{t,y,x}\|.\,\|\mathcal{X}\|.\,\|\mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}^{-1}\|.\,|\phi(\mathrm{s}_{ty(x)})|_{\mathrm{s}_{ty(x)}} \leq M(y)\,|\phi(\mathrm{s}_{ty(x)})|_{\mathrm{s}_{ty(x)}}$$

onde

$$M(y) = \sup_{(t,x)\in I\times V}\left\{\|\mathcal{H}_x\|.\,\|l_{t,y,x}\|.\,\|\mathcal{X}\|.\,\|\mathcal{H}_{\mathrm{s}_y(x)}^{-1}\|\right\}$$

Se $(t,x) \in I \times V\backslash\overline{\mathbb{B}^n}$ temos $s_{ty}(x) = x$, ou seja $l_{t,y,x} = Id$ e $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_{s_{ty}(x)}$, então o supremo em $I \times V\backslash\overline{\mathbb{B}^n}$ é $\|\mathcal{X}\|$. Mas, pela equação (3.13), $\|\mathcal{X}\| = 0$ em $V\backslash\overline{\mathbb{B}^n}$. Portanto

$$M(y) = \sup_{(t,x)\in I\times\overline{\mathbb{B}^n}} \left\{\|\mathcal{H}_x\|.\, \|l_{t,y,x}\|.\, \|\mathcal{X}\|.\, \|\mathcal{H}^{-1}_{s_y(x)}\|\right\}$$

Pela compacidade de $I\times\overline{\mathbb{B}^n}$ temos que $M(y)$ é contínua, já que $l_{t,y,x}$ é contínua em t, x e y (isto pela propriedade (2)), i.e., s é C^∞. Agora, para $y = 0$ temos $\|\mathcal{X}\| = 0$, logo $M(0) = 0$. Segue (4.2). □

Com estas estimativas e o seguinte Lema podemos provar as propriedades desejadas de $\mathbf{R}_\varepsilon^*$ e $\mathbf{A}_\varepsilon^*$.

Lema 4.2. *Se $\alpha(x, y)$ é uma forma dupla em $V \times \mathbb{R}^n$ de grau 0 em y, temos*

$$\left\| \int_y \alpha(x,y) \odot \tau_\varepsilon(y) \right\|_p \leq \int_y \|\alpha(x,y)\|_p \tau_\varepsilon(y) \tag{4.3}$$

Demonstração. Primeiramente, note que se $\beta(x,y) = \sum_I \beta_I(x,y)dx^I$ é uma forma dupla de grau 0 em y, vale que

$$\left|\int_y \beta(x,y) \odot f_\varepsilon(y)dy\right| = \left|\int_y \left(\sum_I \beta_I(x,y)dx^I\right) \odot f_\varepsilon(y)dy\right| =$$

$$\left|\sum_I \left(\int_y \beta_I(x,y)f_\varepsilon(y)dy\right)dx^I\right| \leq \left|\sum_I \left|\int_y \beta_I(x,y)f_\varepsilon(y)dy\right|dx^I\right| \leq \left|\sum_I \left(\int_y |\beta_I(x,y)f_\varepsilon(y)|\,dy\right)dx^I\right| =$$

$$\left|\int_y \left(\sum_I |\beta_I(x,y)|\,dx^I\right) f_\varepsilon(y)dy\right| \leq \int_y |\beta(x,y)|\, f_\varepsilon(y)dy$$

Usando isto segue que

$$\left\|\int_y \alpha(x,y) \odot \tau_\varepsilon(y)\right\|_p \leq \left\{\int_V \left|\mathcal{H}_x\left(\int_y \alpha(x,y)\odot\tau_\varepsilon(y)\right)\right|^p \rho(x)dx\right\}^{1/p}$$

$$\left\{\int_V \left|\int_y \mathcal{H}_x(\alpha(x,y)) \odot f_\varepsilon(y)dy\right|^p \rho(x)dx\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_V \left(\int_y |\mathcal{H}_x(\alpha(x,y))| f_\varepsilon(y)dy\right)^p \rho(x)dx\right\}^{1/p} \leq$$

$$\int_y \left(\int_V |\mathcal{H}_x(\alpha(x,y))|^p f_\varepsilon(y)^p \rho(x)dx\right)^{1/p} dy$$

onde usamos a desigualdade de Minkowsky no último paso[2]. Logo

$$\left\| \int_y \alpha(x,y) \odot \tau_\varepsilon(y) \right\|_p \leq \int_y \left(\int_V |\mathcal{H}_x(\alpha(x,y))|^p f_\varepsilon(y)^p \rho(x) dx \right)^{1/p} dy =$$

$$\int_y \left(\int_V |\alpha(x,y)|_x^p \rho(x) dx \right)^{1/p} f_\varepsilon(y) dy = \int_y \|\alpha(x,y)\|_p f_\varepsilon(y) dy$$

□

Lema 4.3. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *o operador* $\mathbf{R}_\varepsilon^*$ *transforma* $\mathcal{L}_p^k(V)$ *em* $\mathcal{L}_p^k(V)$ *e a norma do operador* $\mathbf{R}_\varepsilon^* : \mathcal{L}_p^k(V) \to \mathcal{L}_p^k(V)$ *satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|\mathbf{R}_\varepsilon^*\|_p \leq C_1(\varepsilon) \tag{4.4}$$

onde $C_1(\varepsilon)$ *não depende de* p *e* $C_1(\varepsilon) \to 1$ *quando* $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Suponha $p < \infty$. Para $\phi \in \mathcal{L}_p^k(V)$, usando o Lema 4.2 e a equação (4.1):

$$\|\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi\|_p = \left\| \int_y \mathbf{s}_y^*\phi(x) \odot \tau_\varepsilon(y) \right\|_p \leq \int_y \|\mathbf{s}_y^*\phi(x)\|_p \tau_\varepsilon(y) = \int_y \left\{ \int_V |\mathbf{s}_y^*\phi(x)|_x^p \rho(x) dx \right\}^{1/p} \tau_\varepsilon(y) \leq$$

$$\int_y \left\{ \int_V (C(y))^p |\phi(\mathbf{s}_y(x))|_{\mathbf{s}_y(x)} \rho(x) dx \right\}^{1/p} \tau_\varepsilon(y) \leq \int_y C(y) \left\{ \int_V |\phi(z)|_z^p \rho(\mathbf{s}_{-y}(z)) J_y(z) dz \right\}^{1/p} \tau_\varepsilon(y)$$

onde $J_y(z)$ é o jacobiano da aplicação $\mathbf{s}_{-y}$ no ponto z. A função $\frac{\rho(\mathbf{s}_{-y}(z))J_y(z)}{\rho(z)}$ depende continuamente de z e y e é igual a 1 se $y \in V \backslash \overline{\mathbb{B}^n}$. Então a função

$$C_2(y) = \sup_{z \in V} \frac{\rho(\mathbf{s}_{-y}(z))J_y(z)}{\rho(z)} \tag{4.5}$$

é contínua e $C_2(y) \geq 1$. Aliás $C_2(0) = 1$. Usando esta função segue que

$$\|\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi\|_p \leq \int_y C(y) C_2^{1/p}(y) \left\{ \int_V |\phi(z)|_z^p \rho(z) dz \right\}^{1/p} \odot \tau_\varepsilon(y) = \|\phi\|_p \int_y C(y) C_2^{1/p}(y) \odot \tau_\varepsilon(y) \leq \|\phi\|_p \int_y C(y) C_2(y) \tau_\varepsilon(y)$$

onde usamos $C_2^{1/p}(y) \leq C_2(y)$ (pois $C_2(y) \geq 1$). Se definimos $C_1(\varepsilon) = \int_y C(y)C_2(y)\tau_\varepsilon(y)$ obtemos $C_1(\varepsilon) =$

---

[2] Ver [7], Teorema 2.4.

$\int_y C(\varepsilon y)C_2(\varepsilon y)f_0(y)dy$, lembrando que $\tau_\varepsilon(y) = f_\varepsilon(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}f_0(\frac{y}{\varepsilon})dy$ e que $\int_y f_0(y)dy = 1$. Então $C_1(\varepsilon) \to 1$ quando $\varepsilon \to 0$, e obtemos $||\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi||_p \leq C_1(\varepsilon)||\phi||_p$ o que prova o caso $p < \infty$.

Se $p = \infty$, usando (4.1) temos

$$||\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi||_\infty = \left\| \int_y \mathbf{s}_y^*\phi(x) \odot \tau_\varepsilon(y) \right\|_\infty \leq \int_y ||\mathbf{s}_y^*\phi||_\infty \tau_\varepsilon(y) = \int_y ess\sup_{x\in V} \left\{ |\mathbf{s}_y^*\phi(x)|_x \right\} \tau_\varepsilon(y) \leq$$

$$\int_y ess\sup_{x\in V} \left\{ C(y)|\phi(\mathbf{s}_y(x))|_{\mathbf{s}_y(x)} \right\} \tau_\varepsilon(y) = ||\phi||_\infty \int_y C(y)\tau_\varepsilon(y) = ||\phi||_\infty C_1(\varepsilon)$$

onde $C_1(\varepsilon) = \int_y C(y)\tau_\varepsilon(y) = \int_y C(\varepsilon y)f_0(y)dy$. Logo $||\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi|| \leq C_1(\varepsilon)||\phi||_\infty$ e temos $C_1(\varepsilon) \to 1$ quando $\varepsilon \to 0$. Note que em ambos casos $C_1(\varepsilon)$ não depende de p. □

Lema 4.4. *O operador $\mathbf{A}_\varepsilon^*$ transforma $\mathcal{L}_p^k(V)$ em $\mathcal{L}_p^{k-1}(V)$, $1 \leq p \leq \infty$, e $\mathbf{A}_\varepsilon^* : \mathcal{L}_p^k(V) \to \mathcal{L}_p^{k-1}(V)$ satisfaz*

$$||\mathbf{A}_\varepsilon^*||_p \leq M_1(\varepsilon) \tag{4.6}$$

onde $M_1(\varepsilon)$ não depende de p e $M_1(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Suponha $p < \infty$. Usando o Lema 4.2 e a estimativa (4.2) temos

$$||\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi||_p = \left\| \int_y \left(\int_0^1 \mathbf{s}_{ty}^*(i_X\phi)dt \right) \odot \tau_\varepsilon(y) \right\|_p \leq \int_y \left(\int_0^1 ||\mathbf{s}_{ty}^*(i_X\phi)||_p dt \right) \tau_\varepsilon(y) =$$

$$\int_y \left(\int_0^1 \left\{ \int_V |\mathbf{s}_{ty}^*(i_X\phi)(x)|_{\mathbf{s}_{ty}(x)}^p \rho(x)dx \right\}^{1/p} dt \right) \tau_\varepsilon(y) \leq \int_y \left(\int_0^1 \left\{ \int_V (M(y))^p |\phi(\mathbf{s}_{ty}(x))|_{\mathbf{s}_{ty}(x)}^p \rho(x)dx \right\}^{1/p} dt \right) \tau_\varepsilon(y) =$$

$$\int_y \left(M(y) \int_0^1 \left\{ \int_V |\phi(z)|_z^p \rho(\mathbf{s}_{-ty}(z))J_{ty}(z)dz \right\}^{1/p} dt \right) \tau_\varepsilon(y) \leq$$

$$\int_y \left(M(y) \int_0^1 C_2(ty)^{1/p} \left\{ \int_V |\phi(z)|_z^p \rho(z)dz \right\}^{1/p} dt \right) \tau_\varepsilon(y) \leq |\phi|_p \int_y \left(\int_0^1 C_2(ty)dt \right) M(y)\tau_\varepsilon(y)$$

onde usamos de novo a definição e as propriedades de $C_2(y)$ definido em (4.5). Se definimos $M_1(\varepsilon) = \int_y \left(\int_0^1 C_2(ty)dt \right) M(y)\tau_\varepsilon(y) = \int_y \left(\int_0^1 C_2(t\varepsilon y)dt \right) M(\varepsilon y)f_0(y)dy$ temos $||\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi||_p \leq M_1(\varepsilon)||\phi||_p$ com $M_1(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$ (pois $M(y) \to 0$ se $y \to 0$).

Para $p = \infty$ temos

$$\|\mathbf{A}_\varepsilon^*\phi\|_\infty = \left\|\int_y \left(\int_0^1 \mathbf{s}_{ty}^*(i_X\phi)dt\right) \odot \tau_\varepsilon(y)\right\|_\infty \leq \int_y \left(\int_0^1 \operatorname*{ess\,sup}_{x\in V}\left\{|\mathbf{s}_{ty}^*(i_X\phi)(x)|_x\right\} dt\right)\tau_\varepsilon(y) \leq$$

$$\int_y \int_0^1 M(y)\|\phi\|_\infty dt\, \tau_\varepsilon(y) = \|\phi\|_\infty \int_y M(y)\,\tau_\varepsilon(y) = M_1(\varepsilon)\,\|\phi\|_\infty$$

onde $M_1(\varepsilon) = \int_y M(y)\tau_\varepsilon(y) = \int_y M(\varepsilon y) f_0(y)dy \to 0$ se $\varepsilon \to 0$. Finalmente, note que $\mathbf{A}_\varepsilon^*$ diminui o grau de ϕ em 1. □

Antes de começar com variedades, provemos que $\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi = \mathbf{R}_\varepsilon\phi$ para $\phi \in \mathcal{L}_p^k(V)$. Já sabemos que isto é verdade quando $\phi \in \mathcal{D}_V$. Agora, usando que $\tau_\varepsilon(y) = \tau_\varepsilon(-y)$ temos

$$\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi[\alpha] = \int_V \left(\int_y \mathbf{s}_y^*\phi(x) \odot \tau_\varepsilon(y)\right) \wedge \alpha(x) = \int_V \int_y (\mathbf{s}_y^*\phi(x)) \wedge \alpha(x) \odot \tau_\varepsilon(y) = \int_V \int_y \mathbf{s}_y^*(\phi(x) \wedge \mathbf{s}_{-y}^*\alpha(x)) \odot \tau_\varepsilon(y) =$$

$$\int_y \left[\int_V \mathbf{s}_y^*\left(\phi(x) \wedge \mathbf{s}_{-y}^*\alpha(x)\right)\right] \odot \tau_\varepsilon(y) = \int_y \left[\int_V \phi(x) \wedge \mathbf{s}_{-y}^*\alpha(x)\right] \odot \tau_\varepsilon(y) = \int_V \phi(x) \wedge \left[\int_y \mathbf{s}_{-y}^*\alpha(x) \odot \tau_\varepsilon(y)\right] =$$

$$\int_V \phi(x) \wedge \left[\int_y \mathbf{s}_y^*\alpha(x) \odot \tau_\varepsilon(-y)\right] = \int_V \phi(x) \wedge \mathbf{R}_\varepsilon^*\alpha(x) = \phi[\mathbf{R}_\varepsilon^*\alpha] = \mathbf{R}_\varepsilon\phi[\alpha]$$

ou seja $\mathbf{R}_\varepsilon^*\phi = \mathbf{R}_\varepsilon\phi$. Analogamente podemos provar que $\mathbf{A}_\varepsilon\phi = \mathbf{A}_\varepsilon^*\mathrm{w}\phi$.

4.2 Em uma variedade Riemanniana.

Agora, passamos ao estudo em variedades Riemannianas. Como na construção do Teorema 3.1 usamos um atlas $\{(x_j, W_j)\}_j$ localmente finito tal que $\overline{\mathbb{B}^n} \subset x_j(W_j)$. E para cada $\varepsilon_j > 0$, escrevemos $\mathcal{R}_{\varepsilon_j}$ e $\mathcal{A}_{\varepsilon_j}$ para os operadores das equações (3.18) e (3.19), ou seja

$$\mathcal{R}_{\varepsilon_j}\mathcal{T} = x_j^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_j}x_j f_j\mathcal{T} + (1 - f_j)\mathcal{T} \qquad\qquad \mathcal{A}_{\varepsilon_j}\mathcal{T} = x_j^{-1}\mathbf{A}_{\varepsilon_j}x_j f_j\mathcal{T}$$

onde $\mathbf{R}_{\varepsilon_j}$ e $\mathbf{A}_{\varepsilon_j}$ estão associados ao aberto W_j de $\mathbb{R}^n$. Seja $\lambda = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\}$ uma seqüência de números positivos, definimos os seguintes operadores

$$\mathcal{R}_\lambda^{(j)} = \mathcal{R}_{\varepsilon_1}\mathcal{R}_{\varepsilon_2}\ldots\mathcal{R}_{\varepsilon_j} \qquad\qquad \mathcal{A}_\lambda^{(j)} = \mathcal{R}_\lambda^{(j-1)}\mathcal{A}_{\varepsilon_j}$$

e com isso

$$\mathcal{R}_\lambda = \lim_{j\to\infty} \mathcal{R}_\lambda^{(j)} \qquad\qquad \mathcal{A}_\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_\lambda^{(j)}$$

Estes operadores tem as mesmas propriedades dos operadores do Teorema 3.1, ou seja, são *regularizadores*. Com os $\mathcal{R}_\lambda^{(j)}$'s podemos provar o último Teorema.

Teorema 4.1. *Para cada variedade Riemanniana V, existem seqüências de operadores $\mathcal{R}_{(i)}$ e $\mathcal{A}_{(i)}$ satisfazendo todas as propriedades do Teorema 3.1 e mais*

(1) Os operadores $\mathcal{R}_{(i)}$ e $\mathcal{A}_{(i)}$ transformam $\mathcal{L}_p^k(V)$ em $\mathcal{L}_p^k(V)$ e $\mathcal{L}_p^{k-1}(V)$ respectivamente, para $1 \leq p \leq \infty$. Além disso vale:

$$\|\mathcal{R}_{(i)}\|_p \leq 1 + \frac{1}{i} \qquad\qquad \|\mathcal{A}_{(i)}\|_p \leq \frac{1}{i} \tag{4.7}$$

(2) A forma $\mathcal{R}_{(i)}\phi$ é C^∞ para cada forma $\phi \in \mathcal{L}_p^k(V)$, e a forma $\mathcal{A}_{(i)}\phi$ é C^r se ϕ é C^r, para $0 \leq r \leq \infty$.

(3) $\mathcal{R}_{(i)}\phi \to \phi$ em $\mathcal{L}_p^k(V)$ quando $i \to \infty$, para cada forma $\phi \in \mathcal{L}_p^k(V)$ e $1 \leq p < \infty$.

(4) Se $\phi \in \mathcal{W}_{p,q}^k(V)$, então: $\mathcal{R}_{(i)}\phi \in \mathcal{W}_{p,q}^k(V)$, $d\mathcal{R}_{(i)}\phi = \mathcal{R}_{(i)}d\phi$, e $\mathcal{R}_{(i)}\phi \to \phi$ em $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$ para $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$.

(5) Se $\phi \in \mathcal{W}_{p,p}^k(V)$ então $\mathcal{A}_{(i)}\phi \in \mathcal{W}_{p,p}^{k-1}(V)$ e também

$$d\mathcal{A}_{(i)}\phi - \mathcal{A}_{(i)}d\phi = \mathrm{w}[\mathcal{R}_{(i)}\phi - \phi] \tag{4.8}$$

Demonstração. Provemos (1). Usando as estimativas (4.4) e (4.6) podemos encontrar $\varepsilon_{ij} > 0$ tais que $\varepsilon_{ij} < \frac{1}{i}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e tais que

$$\Pi_{j=1}^n \|\mathcal{R}_{\varepsilon_{ij}}\|_p \leq 1 + \frac{1}{i} \tag{4.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|\mathcal{R}_{\varepsilon_{i1}}\|_p \, \|\mathcal{R}_{\varepsilon_{i2}}\|_p \ldots \|\mathcal{R}_{\varepsilon_{i(j-1)}}\|_p \, \|\mathcal{A}_{\varepsilon_{ij}}\|_p \leq \frac{1}{i} \tag{4.10}$$

para $1 \leq p \leq \infty$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\lambda_i = \{\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2} \ldots\}$, definimos $\mathcal{R}_{(i)} = \mathcal{R}_{\lambda_i}$ e $\mathcal{A}_{(i)} = \mathcal{A}_{\lambda_i}$, ou seja

$$\mathcal{R}_{(i)} = \lim_{j\to\infty} \mathcal{R}^{(j)}_{\lambda_i} = \lim_{j\to\infty} \mathcal{R}_{\varepsilon_{i1}} \mathcal{R}_{\varepsilon_{i2}} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_{ij}}$$

$$\mathcal{A}_{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}^{(j)}_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{R}_{\varepsilon_{i1}} \ldots \mathcal{R}_{\varepsilon_{i(j-1)}} \mathcal{A}_{\varepsilon_{ij}}$$

As desigualdades (4.9) e (4.10) servem para concluir que os operadores $\mathcal{R}_{(i)}$ e $\mathcal{A}_{(i)}$ levam $\mathcal{L}^k_p(V)$ em $\mathcal{L}^k_p(V)$ e que $\|\mathcal{R}_{(i)}\|_p \leq 1 + \frac{1}{i}$ e $\|\mathcal{A}_{(i)}\|_p \leq \frac{1}{i}$.

Para provar (2), só temos que notar que $\mathcal{R}_{\lambda_i}$ e $\mathcal{A}_{\lambda_i}$ tem estas propriedades, pois são regularizadores.

Provemos (3). Seja $\phi \in \mathcal{L}^k_p(V)$, sabemos pelo Corolário 3.7 que $\mathcal{R}_{(i)}\phi \to \phi$ em $\mathcal{E}_V$, se $\phi \in \mathcal{D}_V$. Agora, as formas C^∞ de suporte compacto em V são densas em $\mathcal{L}^k_p(V)$, para $1 \leq p < \infty$. A prova de este fato não é difícil (provamos localmente, usando o fato conhecido da densidade de $C^\infty_0(\Omega)$) em $\mathcal{L}_p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$ e Ω aberto de $\mathbb{R}^n$; logo usamos uma partição da unidade). Portanto, existe $\{\phi_h\}_h \subset \mathcal{D}_V$ tal que $\phi_h \xrightarrow[h\to\infty]{} \phi$ em $\mathcal{L}^k_p(V)$. Podemos usar isso na seguinte limitação:

$$|\mathcal{R}_{(i)}\phi - \phi|_p \leq |\mathcal{R}_{(i)}\phi - \mathcal{R}_{(i)}\phi_h|_p + |\mathcal{R}_{(i)}\phi_h - \phi_h|_p + |\phi_h - \phi|_p \leq \|\mathcal{R}_{(i)}\|_p|\phi - \phi_h|_p + |\mathcal{R}_{(i)}\phi_h - \phi_h|_p + |\phi_h - \phi|_p$$

Como para todo $i \in \mathbb{N}$ vale que $\|\mathcal{R}_{(i)}\|_p < 2$ e para todo $h \in \mathbb{N}$ vale $\mathcal{R}_{(i)}\phi_h \xrightarrow[i\to\infty]{} \phi_h$ em $\mathcal{L}^k_p(V)$, segue que $\mathcal{R}_{(i)}\phi \xrightarrow[i\to\infty]{} \phi$ em $\mathcal{L}^k_p(V)$.

Provemos (4). Seja $\phi \in \mathcal{W}^k_{p,q}(V)$, pelo Corolário 3.6 sabemos que $d\mathcal{R}_{(i)}\phi = \mathcal{R}_{(i)}d\phi$. Como $d\phi \in \mathcal{L}^{k+1}_q(V)$, da parte (1) temos que $\mathcal{R}_{(i)}d\phi \in \mathcal{L}^{k+1}_q(V)$, e portanto $d\mathcal{R}_{(i)}\phi \in \mathcal{L}^{k+1}_p(V)$. Por outra parte, usando (1) novamente, como $\phi \in \mathcal{L}^k_p(V)$ temos que $\mathcal{R}_{(i)}\phi \in \mathcal{L}^k_p(V)$. Assim, pela definição $\mathcal{R}_{(i)}\phi \in \mathcal{W}^k_{p,q}(V)$. Vejamos que, para $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$ vale que $\mathcal{R}_{(i)}\phi \xrightarrow[i\to\infty]{} \phi$ em $\mathcal{W}^k_{p,q}(V)$. Por (3), como $p < \infty$ e $q < \infty$ temos $\mathcal{R}_{(i)}d\phi \xrightarrow[i\to\infty]{} d\phi$ em $\mathcal{L}^{k-1}_q(V)$ e $\mathcal{R}_{(i)}\phi \xrightarrow[i\to\infty]{} \phi$ em $\mathcal{L}^{k+1}_p(V)$. Segue que $\mathcal{R}_{(i)}\phi \xrightarrow[i\to\infty]{} \phi$ em $\mathcal{W}^k_{p,q}(V)$.

Provemos (5). Pelo Teorema 3.1 sabemos que $\mathcal{R}_{(i)}\mathcal{T} - \mathcal{T} = \partial\mathcal{A}_{(i)}\mathcal{T} + \mathcal{A}_{(i)}\partial\mathcal{T}$ para toda $\mathcal{T} \in \mathcal{D}_V$. Seja $\phi \in \mathcal{W}^k_{p,p}(V)$, usando a equação anterior: $\mathcal{R}_{(i)}\phi - \phi = \partial\mathcal{A}_{(i)}\phi + \mathcal{A}_{(i)}\partial\phi = \mathrm{w}d\mathcal{A}_{(i)}\phi + \mathcal{A}_{(i)}\mathrm{w}d\phi = \mathrm{w}d\mathcal{A}_{(i)}\phi - \mathrm{w}\mathcal{A}_{(i)}d\phi = \mathrm{w}(d\mathcal{A}_{(i)}\phi - \mathcal{A}_{(i)}d\phi)$, pois $\mathcal{A}_{(i)}$ aumenta a dimensão em um (i.e., diminui o grau em um). Logo $d\mathcal{A}_{(i)}\phi - \mathcal{A}_{(i)}d\phi = \mathrm{w}(\mathcal{R}_{(i)}\phi - \phi)$, que é a fórmula (4.8). Falta ver que $\mathcal{A}_{(i)} \in \mathcal{W}^{k-1}_{p,p}(V)$. Note que pela parte (1), $\mathcal{A}_{(i)}\phi \in \mathcal{L}^{k-1}_p(V)$. Pela equação anterior $d\mathcal{A}_{(i)}\phi = \mathcal{A}_{(i)}d\phi + \mathrm{w}(\mathcal{R}_{(i)}\phi - \phi)$, e denovo por (1) temos $\mathcal{A}_{(i)}d\phi \in \mathcal{L}^k_p(V)$ e $\mathcal{R}_{(i)}\phi \in \mathcal{L}^k_p(V)$ então $d\mathcal{A}_{(i)}\phi \in \mathcal{L}^k_p(V)$, ou seja $d\mathcal{A}_{(i)}\phi \in \mathcal{L}^k_p(V)$. Segue que $\mathcal{A}_{(i)}\phi \in \mathcal{W}^k_{p,p}(V)$. □

Para finalizar este trabalho apresentamos um corolário de este Teorema.

Corolário 4.1. *Em uma variedade Riemanniana V, as formas C^∞ de $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$ são densas em $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$, ou seja, $\mathcal{E}_V \cap \mathcal{W}_{p,q}^k(V)$ é denso em $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$.*

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{W}_{p,q}^k(V)$, por (2) do Teorema, $\mathcal{R}_{(i)}\phi$ é C^∞, ou seja $\mathcal{R}_{(i)}\phi \in \mathcal{E}_V$. Por outra parte, usando (4) do Teorema vemos que $\mathcal{R}_{(i)}\phi \xrightarrow[i\to\infty]{} \phi$ em $\mathcal{W}_{p,q}^k(V)$ e $\mathcal{R}_{(i)}\phi \in \mathcal{W}_{p,q}^k(V)$. Então $\{\mathcal{R}_{(i)}\phi\}_i$ são as formas procuradas. □

Referências Bibliográficas

[1] R. Abraham, R. Marsden, and T. Ratiu, *Manifolds, tensor analysis, and applications*, Springer-Verlag, 1988.

[2] G. de Rham, *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples*, L'Enseignement mathématique (1936), no. 35, 213–228.

[3] ______, *Intégrales harmoniques et théorie des intersections*, Proceedings of the international Congress of Mathematicians **II** (1950), 213–228.

[4] ______, *Differential manifolds*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

[5] G. de Rham and K. Kodaira, *Harmonic integrals*, Lectures delivered at the Institute for Advanced Study (1950).

[6] V.M. Gold'shtein, V.I. Kuz'minov, and I.A. Shvedov, *A property of de Rham regularization operators*, Siberian Mathematical Journal (1984).

[7] E.H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, second ed., American Mathematical Society, Providence, Rhode island, 1997.

[8] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, vol. I, Hermann et Cie, Paris, 1950.

[9] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, third ed., vol. 1, Publish or Perish, Inc., 1999.