

**Bifurcação de Hopf
num modelo de competição
dois predadores - uma presa**

Adela Luisa Cano Mamani

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CNPq

São Paulo, julho de 2010

Bifurcação de Hopf num modelo de competição dois predadores - uma presa

Esta versão definitiva da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Adela Luisa Cano Mamani em 5/07/2010.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira (orientador) - IME-USP
- Profa. Dra. Helena Maria Ávila de Castro - IME-USP
- Prof. Dr. Jair Silvério dos Santos - FFCLRP-USP

*A meus pais, Cirilo e Luisa
e a Sandrita.*

Agradecimentos

A Deus, por estar aqui e sobretudo pela força, acolhimento e refúgio nas horas difíceis.

A meus pais, pelo estímulo e apoio incondicional desde a primeira hora; pela paciência e compreensão com que sempre me brindaram acreditando na minha vontade e capacidade de realização profissional, sendo sempre os grandes incentivadores para continuar.

Agradeço imensamente ao Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira pela orientação deste trabalho.

À Prof^a. Dr^a. Helena Maria Ávila de Castro, pelo estímulo e confiança.

Ao Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello, pelo tempo dispensado à avaliação de meu trabalho, suas sugestões e por compartilhar seu conhecimento de modo a melhorar meu trabalho.

Ao Prof. Dr. Shiguelo Watanabe, pela sua amizade e atenção que sempre teve comigo e com meu irmão Nilo.

Ao pessoal da Secretaria da CPG do IME, pela atenção e serviços prestados durante todo o período do curso.

À CNPq, pelo apoio financeiro concedido, através da bolsa de estudo.

A minhas irmãs, Sandra e Martha, que apesar da saudade por não estarmos juntas me apoiaram e ao meu irmão Nilo pelo carinho, atenção e refúgio que sempre tive por aqui.

A meu amigo Valentin, que sempre esteve disposto para me ajudar, devo destacar, acima de tudo, a sua disponibilidade e paciência, que sem dúvida ajudou a fortalecer os meus conhecimentos nas muitas vezes que eu fui a sua sala, suas explicações foram muito importantes para concluir este trabalho.

A meu amigo Celso, pela sua amizade, apoio, incentivo, colaboração e por nunca ter me dito um 'não'.

Aos meus amigos: Ricardo, Nilda, Henry, Alberto, Carola, Núbia e em especial a Beatriz, pelo apoio e amizade que sempre me brindaram em todos os momentos.

A meus amigos do curso de Ciências da Computação: Edith, Alvaro, Edwin, Rosário pela amizade.

Resumo

Neste trabalho analisamos um modelo predador-presa caracterizado por um sistema de tres equações diferenciais ordinárias. Nosso objetivo é estudar as propriedades qualitativas dos pontos de equilíbrio desse sistema. Demonstramos que, sob certas condições sobre o parâmetro K , ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica e a existência de uma órbita periódica estável.

Palabras chaves: Presa-predador, Bifurcação de Hopf, Órbita Periódica estável.

Abstract

In this work we analyze a predator-prey model characterized by a system of three ordinary differential equations. Our aim is the study of the qualitative properties of the equilibrium points of this system. We prove that, under certain conditions on the parameter K , the system undergoes a supercritical Hopf bifurcation and the existence of a stable periodic orbit.

Key words: Prey-predator, Hopf bifurcation, periodic orbit stable.

Sumário

Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Análise assintótica dos pontos de equilíbrio	3
2.1 Preliminares	3
2.2 Pontos de equilíbrio e estabilidade local	9
2.3 Caso 2-dimensional	20
2.4 Análise assintótica dos pontos de equilíbrio do sistema 3-dimensional	25
3 Bifurcação de Hopf e a existência de uma órbita periódica em \mathbb{R}_+^3	29

Lista de Figuras

2.1	O Conjunto J .	8
2.2	$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < K$.	10
2.3	A reta L como conjunto de pontos de equilíbrio.	14
2.4	Os pontos acima de L_E são instáveis e os pontos abaixo são estáveis.	15
2.5	(i) $K > a_1 + 2\lambda$, todos os pontos de L são instáveis. (ii) $K < a_2 + \lambda$, todos os pontos de L são estáveis.	16
2.6	(a) Todos os pontos de L são estáveis. (b) Todos os pontos à direita de $B(K)$ são instáveis e à esquerda são estáveis. (c) Todos os pontos de L tornam-se instáveis	16
2.7	Os pontos de equilíbrio L e a variedade M_c .	17
2.8	Deslocamento do equilíbrio na variedade invariante M_c .	18
2.9	Cilindro de órbitas periódicas.	19
2.10	O ponto de equilíbrio (λ, \hat{x}) é assintoticamente estável se $K < a + 2\lambda$.	23
2.11	A existência de uma órbita periódica se $K > a + 2\lambda$.	24
3.1	Aplicação de Poincaré.	36
3.2	$a_2 > a_1$	42
3.3	Diagrama de bifurcação nas variáveis K e η .	43
3.4	Círculo unitário	43
3.5	Mudança de coordenadas no plano.	45
3.6	$H = \{(x_1, x_2, y) : x_1 = 0\}$.	45
3.7	Seção transversal.	46
3.8	Os pontos fixos da transformação de Poincaré.	49
3.9	(a) Órbita periódica de Hopf $p(t)$ estável. (b) Órbita periódica p_s estável.	50

1

Introdução

Nosso objetivo é analisar qualitativamente o comportamento de um sistema predador - presa consistindo de duas espécies de predadores, x_1 e x_2 , e uma única espécie presa S .

O modelo é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{m_1 x_1(t) S(t)}{y_1 a_1 + S(t)} - \frac{m_2 x_2(t) S(t)}{y_2 a_2 + S(t)} \\ \dot{x}_1(t) &= \frac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - D_1 x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)} - D_2 x_2(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde

γ : taxa de crescimento intrínseca da presa.

K : capacidade de suporte do meio ambiente das presas.

m_i : taxa máxima de consumo per-capita do predador x_i , é o número máximo de presas que podem ser consumidas por um predador em cada unidade de tempo.

a_i : constante de semi saturação do predador i , que é a densidade de presas em que a resposta funcional do predador é metade da máxima.

D_i : taxa de mortalidade para o predador x_i .

y_i : fator de produtividade para a alimentação do predador i sobre a presa.

$\gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right)$ é a taxa de crescimento per-capita da presa na ausência do predador e $\frac{m_i}{y_i} \frac{S}{a_i + S}$ é a taxa per-capita com o qual o predador x_i captura a presa.

A análise do comportamento das soluções deste sistema de equações diferenciais tem como objetivo responder questões biológicas: sob quais condições, nenhuma, uma ou ambas as espécies de predadores sobrevivem?. Os antecedentes biológicos e as referências, que ajudam a esclarecer, podem ser encontrados em [9].

O sistema foi analisado por Hsu, Hubbell e Waltmann em [9] e alguns estudos numéricos e interpretações analíticas são fornecidos em [10, 8]. Os resultados de Hsu [8] colocaram uma série de perguntas abertas sobre a existência de uma solução periódica no octante positivo aberto.

O conteúdo matemático deste trabalho é baseado no trabalho do Prof. Hal L. Smith [14] e consiste no estudo do comportamento local de soluções do sistema (1.1) na vizinhança de um dos pontos de equilíbrio, no qual $x_2 = 0$, S e x_1 são valores de equilíbrio diferentes de zero, e do modo como este comportamento muda quando dois parâmetros biologicamente significativos variam. Variando um dos parâmetros K , sobre um valor de equilíbrio produz-se uma bifurcação de Hopf; variando-se o outro parâmetro η , sobre o valor de equilíbrio produz-se uma bifurcação gerada pela órbita periódica de Hopf (órbita periódica supercrítica), para o interior da região $S > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

A organização deste trabalho é da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos a análise do comportamento assintótico das soluções do sistema (2.3), isto é, pontos de equilíbrio, resultados obtidos por Hsu, Hubell e Waltman [8]. A análise é baseada no parâmetro de bifurcação $K = K_0$. O capítulo 3 contém os resultados principais obtidos em [14], isto é, a ocorrência da bifurcação de Hopf no valor de bifurcação $K = K_0$ no equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$, e, portanto, a existência de uma órbita periódica assintoticamente estável. A seguir, identificamos o parâmetro de bifurcação η , para finalmente apresentar o teorema principal, que mostra a ocorrência da bifurcação pela perda de estabilidade da órbita periódica de Hopf por uma variação do parâmetro de bifurcação η .

2

Análise assintótica dos pontos de equilíbrio

Neste capítulo, apresentaremos a análise assintótica dos pontos de equilíbrio do sistema (2.3) considerado por Hsu, Hubbell e Waltman em [8]. Na primeira seção damos uma breve introdução sobre conceitos básicos que usaremos. Na segunda seção estudaremos os pontos de equilíbrio do sistema (2.3). Na terceira seção apresentamos uma análise do sistema no plano, isto é, $x_2 = 0$, com o objetivo de usar os resultados obtidos até aqui na seção 2.4 onde se analisa o comportamento das soluções do sistema (2.3). Também na seção 2.4 apresentamos brevemente o caso degenerado estudado por Farkas [6].

2.1 Preliminares

O conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov é importante para capturar a noção intuitiva de estabilidade: uma órbita é estável se soluções que começam próximas permanecem próximas.

Vamos dar as definições formais apenas para o caso autônomo. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e consideremos a equação

diferencial autônoma

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.1)$$

Suponhamos que para cada $x_0 \in U$, a equação (2.1) admite uma única solução $x : [0, \infty) \rightarrow U$ tal que $x(0) = x_0$. Fica então definida uma aplicação contínua $\Phi : [0, \infty) \times U \rightarrow U$, denominada *fluxo* da equação (2.1), definido por

$$\Phi(t, x_0) = x(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad x_0 \in U,$$

onde x é a (única) solução de (2.1) que satisfaz a condição inicial $x(0) = x_0$. Nesse contexto, dizemos que o conjunto aberto U é o *espaço de fase* de (2.1). Fixado $x_0 \in U$, o conjunto

$$\gamma(x_0) = \{\Phi(t, x_0) : t \geq 0\}$$

é chamado *semi-órbita positiva* de x_0 . Um dos principais objetivos do estudo de equações diferenciais autônomas é compreender a decomposição do espaço de fase U segundo as órbitas de (2.1). Nessa direção, dois conceitos são fundamentais na compreensão dessa decomposição: os *pontos de equilíbrios* e as *órbitas periódicas* de (2.1). Um *ponto de equilíbrio* de (2.1) é um ponto $x_0 \in U$ tal $\gamma(x_0) = \{x_0\}$. Naturalmente, isso ocorre se e somente se $f(x_0) = 0$, caso em que $x(t) = x_0, t \in \mathbb{R}$, é a solução de (2.1) que começa em x_0 . Quando a solução de (2.1) por x_0 é uma função periódica, isto é, existe $T > 0$ tal que $\Phi(t + T, x_0) = \Phi(t, x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos que a órbita por x_0 é *periódica*.

A seguir definimos os conceitos de estabilidade. Usaremos a notação $x(t, x_0)$ ou $\varphi(t, x_0)$ para indicar o valor no instante t da solução $x(\cdot, x_0) : [0, \infty) \rightarrow U$ de (2.1) com condição inicial $x(0, x_0) = x_0$.

Definição 2.1 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de (2.1).*

- a) *Dizemos que x_0 é estável (no sentido de Lyapunov) se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y_0 \in U$ e $|y_0 - x_0| < \delta$, então $|x(t, y_0) - x_0| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.*
- b) *Dizemos que x_0 é assintoticamente estável se x_0 é estável e existe uma constante $a > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, y_0) - x_0| = 0$ sempre que $|y_0 - x_0| < a$.*
- c) *Dizemos que x_0 é instável se não for estável.*

O conceito de estabilidade para órbitas periódicas é o de estabilidade orbital.

Definição 2.2 *Uma órbita periódica $\gamma = \{\Phi(t, x_0) : t \in [0, T]\}$ da equação (2.1) é estável se para cada subconjunto aberto $V \subset U$ que contém γ , existe um aberto $W \subseteq V$ tal que cada solução iniciando em um ponto em W em $t = 0$, permanece em V para todo $t \geq 0$. A órbita periódica γ é chamada assintoticamente estável se ela*

é estável e existe um subconjunto aberto $V_0 \subseteq W$ tal que, para cada $y_0 \in V_0$, existe $q = q(y_0) \in [0, T)$ tal que $|x(t, y_0) - x(t + q, x_0)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

As definições dadas capturam a essência do conceito de estabilidade. No entanto, elas não dão nenhuma indicação de como determinar se uma órbita dada é ou não estável. Com o objetivo de abordar tais questões, vamos doravante admitir que f é uma função de classe C^r , com $r \geq 1$. Com essa hipótese adicional, o problema de valor inicial para (2.1) tem solução única.

Se x_0 é um ponto de equilíbrio para o sistema não linear (2.1), podemos em alguns casos decidir a estabilidade ou instabilidade de x_0 usando o clássico resultado devido a Poincaré e Lyapunov, às vezes conhecido como *estabilidade pela aproximação linear*. Notemos que pela mudança de variáveis $u = x - x_0$, o sistema (2.1) é transformado na equação equivalente $\dot{u} = f(u + x_0)$, onde o ponto de equilíbrio correspondente a x_0 está na origem.

Se f é de classe C^1 , temos

$$f(x_0 + u) = f(x_0) + Df(x_0)u + R(u) = Df(x_0)u + R(u),$$

onde $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a diferencial de f em $x = x_0$ e R é uma função definida numa vizinhança aberta V da origem tal que $|R(x)|/|x| \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow 0$ em V . A partir desta estimativa e o fato que a estabilidade de um equilíbrio é uma propriedade local, é razoável esperar que a estabilidade da origem do sistema linear $\dot{y} = Df(x_0)y$ será a mesma estabilidade do equilíbrio original.

A equação diferencial linear

$$\dot{y} = Df(x_0)y \tag{2.2}$$

é chamada *equação linearizada de (2.1) em torno de x_0* . Lembremos que $Df(x_0)$ pode ser representada pela matriz constante $n \times n$

$$J = Df(x_0) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{x=x_0},$$

também chamada matriz Jacobiana (ou, mais simplesmente, Jacobiana) de f em x_0 . Lembremos ainda que a análise da estabilidade de $y = 0$ como solução de (2.2) é decidida pelo sinal da parte real dos autovalores de $Df(x_0)$.

O princípio de estabilidade pela aproximação linear estabelece que se o sistema linearizado da equação diferencial num ponto de equilíbrio tem $y = 0$ como equilíbrio

assintoticamente estável, então o ponto de equilíbrio original é também assintoticamente estável.

Teorema 2.1 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio para o sistema autônomo (2.1).*

a) se todos os autovalores da matriz $Df(x_0)$ têm parte real negativa, então x_0 é assintoticamente estável.

b) se $Df(x_0)$ tem ao menos um autovalor com parte real positiva, então x_0 é instável.

Se algum autovalor de $Df(x_0)$ pertence ao eixo imaginário, então a estabilidade ou instabilidade do equilíbrio pode ser um problema muito complicado de se resolver. Como veremos mais adiante, podemos esperar mudanças qualitativas no retrato de fase de um sistema próximo a tal equilíbrio, quando os parâmetros do sistema variam. Vamos analisar o caso em que a linearização de um sistema em volta de um equilíbrio apresenta dois autovalores no eixo imaginário, dando lugar ao fenômeno classicamente conhecido como *bifurcação de Hopf*.

O seguinte teorema é essencialmente devido a Andronov (1930) e Hopf (1942) e foi sugerido nos trabalhos de Poincaré (1892). Nossa referência para este teorema é Marsden e McCracken [13].

Teorema 2.2 (Teorema de Bifurcação de Hopf) *Considere o campo vetorial X_μ de classe C^k ($k \geq 4$) em \mathbb{R}^2 tal que $X_\mu(0) = 0$ para todo μ . Suponha que $dX_\mu(0,0)$ tenha dois autovalores diferentes conjugados complexos $\lambda(\mu)$ e $\overline{\lambda(\mu)}$ tal que para $\mu > 0$, $\text{Re}\lambda(\mu) > 0$. Suponha também que $\frac{d}{d\mu}\text{Re}\lambda(\mu)|_{\mu=0} > 0$. Então*

1. *Existe uma função $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{k-2} tal que $(x_1, 0, \mu(x_1))$ está sobre uma órbita fechada de período $\approx 2\pi/|\lambda|$ e raio crescendo com $\sqrt{\mu}$ de X para $x_1 \neq 0$ e tal que $\mu(0) = 0$.*
2. *Existe uma vizinhança U de $(0,0,0)$ em \mathbb{R}^3 tal que qualquer órbita fechada em U é uma destas acima.*
3. *Além do mais, se 0 é um "atrator fraco" [13] para X_0 , então $\mu(x_1) > 0$ para todo $x_1 \neq 0$ e as órbitas são atratoras.*

Vamos agora retornar ao sistema original (1.1). Com o objetivo de evitar complexidade matemática desnecessária e também para reduzir o número de parâmetros, vamos fazer uma mudança de variáveis em (1.1).

Sejam $\tilde{x}_i(t) = \frac{1}{y_i}x_i(\frac{t}{\gamma})$, $\tilde{S}(t) = S(\frac{t}{\gamma})$, $\tilde{m}_i = \frac{m_i}{\gamma}$ e $\tilde{D}_i = \frac{D_i}{\gamma}$. Substituindo em (1.1) obtemos um sistema nas variáveis \tilde{x}_i e \tilde{S} ; a seguir, re-nomeamos $\tilde{x}_i \rightarrow x_i$, $\tilde{S} \rightarrow S$,

$\tilde{m}_i \rightarrow m_i$ e $\tilde{D}_i \rightarrow D_i$ para manter as variáveis originais. Por meio dessa mudança, o sistema (1.1) se transforma no sistema

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - \frac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)} \\ \dot{x}_1(t) &= \frac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - D_1 x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)} - D_2 x_2(t).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Seja $\mathbb{R}_+^3 = \{(S, x_1, x_2) : S \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ o primeiro octante do espaço \mathbb{R}^3 . Vamos primeiramente observar que o campo de vetores dado pelo lado direito das equações (2.3) é de classe C^∞ num aberto que contém \mathbb{R}_+^3 , de modo que o problema de valor inicial para (2.3) admite uma única solução. Vamos mostrar que as soluções do sistema (2.3) estão definidas para todo $t \geq 0$ e que o primeiro octante do espaço \mathbb{R}^3 é um conjunto invariante, doravante tomado como espaço de fase para (2.3).

Lema 2.1 *Suponha que $u_0 = (S_0, x_{10}, x_{20}) \in \mathbb{R}_+^3$. Se $u(t) = (S(t), x_1(t), x_2(t))$ é a solução de (2.3) que satisfaz $u(0) = u_0$, então $u(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $u(t) \in \mathbb{R}_+^3$ para todo $t \geq 0$. Além disso, existe um conjunto compacto $J \subset \mathbb{R}_+^3$ com a seguinte propriedade: para cada conjunto limitado $B \subset \mathbb{R}_+^3$, existe $t_0 = t_0(B) \geq 0$ tal que se $u(0) \in B$, então $u(t) \in J$, para todo $t \geq t_0$. Em consequência, o sistema (2.3) possui um atrator global compacto $\mathcal{A} \subset J$.*

Demonstração. Observemos inicialmente que cada um dos planos coordenados Sx_1 , Sx_2 e x_1x_2 é invariante pelo sistema (2.3), de modo que se $u(t)$ é uma solução de (2.3) com condição inicial em \mathbb{R}_+^3 , então $u(t) \in \mathbb{R}_+^3$ enquanto a solução existir. Vamos mostrar que existe um conjunto compacto J em \mathbb{R}_+^3 que atrai qualquer solução com condição inicial em \mathbb{R}_+^3 .

Sejam $d_0 = \min\{D_1, D_2\}$ e $V : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $V(S, x_1, x_2) = S + x_1 + x_2$. Se $u(t) = (S(t), x_1(t), x_2(t))$ é uma solução de (2.3) com intervalo maximal $[0, t_1)$, então

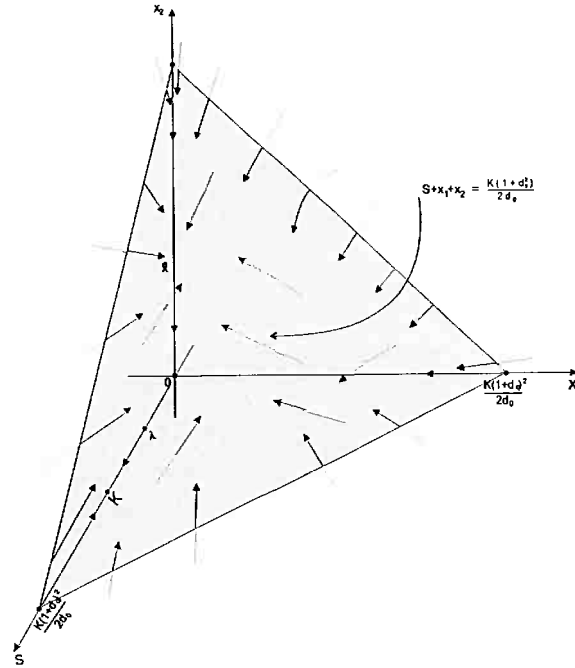
$$\frac{d}{dt} V(S(t), x_1(t), x_2(t)) = \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) S(t) - D_1 x_1(t) - D_2 x_2(t),$$

para $0 < t < t_1$. Como

$$S\left(1 - \frac{S}{K}\right) \leq \frac{K}{4}(1 + d_0)^2 - d_0 S,$$

para todo $S \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} V(u(t)) &\leq \frac{K}{4}(1 + d_0)^2 - d_0 S(t) - D_1 x_1(t) - D_2 x_2(t) \\ &\leq \frac{K}{4}(1 + d_0)^2 - d_0 S(t) - d_0 x_1(t) - d_0 x_2(t) \\ &= -d_0(S(t) + x_1(t) + x_2(t)) + \frac{K}{4}(1 + d_0)^2 \\ &= -d_0 V(t) + \frac{K}{4}(1 + d_0)^2,\end{aligned}$$

Figura 2.1: O Conjunto J .

e portanto

$$\begin{aligned} V(u(t)) &\leq V(u(0))e^{-d_0 t} + \int_0^t e^{-d_0(t-s)} \frac{K}{4}(1+d_0)^2 ds \\ &\leq V(u(0))e^{-d_0 t} + \frac{K}{4d_0}(1+d_0)^2, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, t_1)$. Se B é um conjunto limitado contido em \mathbb{R}_+^3 e se $u(0) \in B$, então existe $R > 0$ tal que $V(u(0)) \leq R$. Seja $t_0 = \frac{1}{d_0} \log \frac{4Rd_0}{K(1+d_0)^2}$. Se $u(0) \in B$, então

$$\begin{aligned} V(u(t)) &\leq V(u(0))e^{-d_0 \frac{1}{d_0} \log \left(\frac{4Rd_0}{K(1+d_0)^2} \right)} + \frac{K}{4d_0}(1+d_0)^2 \\ &\leq R \frac{K}{4Rd_0}(1+d_0)^2 + \frac{K}{4d_0}(1+d_0)^2 \\ &= \frac{K}{2d_0}(1+d_0)^2. \end{aligned}$$

Isso implica que $u(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e que o conjunto compacto

$$J = \{(S, x_1, x_2) : S \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } S + x_1 + x_2 \leq \frac{K}{2d_0}(1+d_0)^2\}$$

atrai qualquer conjunto limitado B , isto é, se $u(0) \in B$, então $u(t) \in J$ para todo $t \geq t_0$. \square

Nos próximos parágrafos vamos tentar descrever o comportamento assintótico das soluções de (2.3) e, em particular, a existência de bifurcação de Hopf a partir de um equilíbrio não-trivial quando variamos o parâmetro K .

2.2 Pontos de equilíbrio e estabilidade local

Os pontos de equilíbrio do sistema (2.3) são as soluções em \mathbb{R}_+^3 do sistema

$$\begin{aligned} S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} &= 0 \\ \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - D_1 x_1 &= 0 \\ \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} - D_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Possíveis soluções das equações que compõem (2.4) são $S = 0$, $S = K$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $S = \frac{a_1 D_1}{m_1 - D_1}$ e $S = \frac{a_2 D_2}{m_2 - D_2}$. Vamos daqui em diante admitir que $m_i > D_i$, para $i = 1, 2$. A existência e o número de equilíbrios biologicamente significativos de (2.3) dependem de dois parâmetros λ_1 e λ_2 , definidos por

$$\lambda_i = \frac{a_i D_i}{m_i - D_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.5)$$

Claramente, $(S, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$ e $(S, x_1, x_2) = (K, 0, 0)$ são soluções de (2.4), denominados *equilíbrios triviais* de (2.3). Consideremos primeiramente o caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 < \lambda_2$. Temos então as seguintes conclusões:

Caso A - Se $0 < K < \lambda_1 < \lambda_2$, então o sistema (2.3) tem apenas dois pontos de equilíbrio $(S, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$ e $(S, x_1, x_2) = (K, 0, 0)$.

Caso B - Se $0 < \lambda_1 < K < \lambda_2$, então o sistema (2.3) tem exatamente três pontos de equilíbrio $(S, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$, $(S, x_1, x_2) = (K, 0, 0)$ e $(S, x_1, x_2) = (\lambda_1, \frac{\lambda_1}{D_1}(1 - \frac{\lambda_1}{K}), 0)$.

Caso C - Se $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < K$, então o sistema (2.3) tem quatro pontos de equilíbrio $(S, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$, $(S, x_1, x_2) = (K, 0, 0)$ e $(S, x_1, x_2) = (\lambda_1, \frac{\lambda_1}{D_1}(1 - \frac{\lambda_1}{K}), 0)$ e $(S, x_1, x_2) = (\lambda_2, 0, \frac{\lambda_2}{D_2}(1 - \frac{\lambda_2}{K}))$.

Os pontos de equilíbrio do sistema (2.3) estão indicados na Figura 2.2.

Para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio obtidos acima, vamos examinar a equação linearizada do sistema (2.3) em cada um desses equilíbrios. A matriz jacobiana de f , num ponto arbitrário (S, x_1, x_2) , é dada por

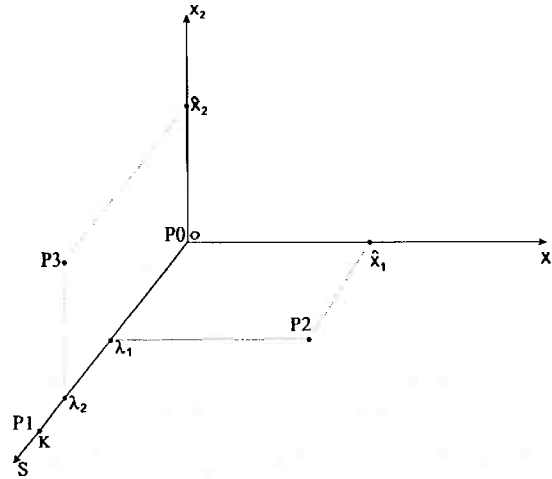


Figura 2.2: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < K$.

$$J(S, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2S}{K} - \frac{m_1 x_1 a_1}{(a_1 + S)^2} - \frac{m_2 x_2 a_2}{(a_2 + S)^2} & -\frac{m_1 S}{a_1 + S} & -\frac{m_2 S}{a_2 + S} \\ \frac{m_1 x_1 a_1}{(a_1 + S)^2} & \frac{m_1 S}{a_1 + S} - D_1 & 0 \\ \frac{m_2 x_2 a_2}{(a_2 + S)^2} & 0 & \frac{m_2 S}{a_2 + S} - D_2 \end{pmatrix}$$

Para o equilíbrio $(0, 0, 0)$, temos

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -D_1 & 0 \\ 0 & 0 & -D_2 \end{pmatrix}$$

de modo que, em quaisquer dos casos **A**, **B** ou **C**, $(0, 0, 0)$ é instável, com variedade instável unidimensional coincidindo como o eixo- S e variedade estável de dimensão dois coincidindo com o plano $x_1 x_2$, independentemente dos valores dos demais parâmetros.

Para o equilíbrio $(K, 0, 0)$, temos

$$J(K, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{m_1 K}{a_1 + K} & -\frac{m_2 K}{a_2 + K} \\ 0 & \frac{m_1 K}{a_1 + K} - D_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 K}{a_2 + K} - D_2 \end{pmatrix}$$

Sendo $J(K, 0, 0)$ uma matriz triangular superior, segue imediatamente que seus autovalores são os elementos da diagonal principal, isto é,

$$\mu_1 = \frac{m_1 K}{a_1 + K} - D_1, \quad \mu_2 = \frac{m_2 K}{a_2 + K} - D_2 \quad \text{e} \quad \mu_3 = -1.$$

Como

$$\frac{m_i K}{a_i + K} - D_i = \frac{K(m_i - D_i) - a_i D_i}{a_i + K} = \frac{m_i - D_i}{a_i + K} \left[K - \frac{a_i D_i}{m_i - D_i} \right] = \frac{m_i - D_i}{a_i + K} (K - \lambda_i),$$

temos:

Caso A - Se $0 < K < \lambda_1 < \lambda_2$, a matriz linearizada $J(K, 0, 0)$ tem todos os seus autovalores reais e negativos e, portanto, o ponto de equilíbrio $(K, 0, 0)$ é assintoticamente estável.

Caso B - Se $0 < \lambda_1 < K < \lambda_2$, matriz linearizada $J(K, 0, 0)$ tem autovalores

$$\mu_1 = \frac{m_1 K}{a_1 + K} - D_1 > 0 \quad , \quad \mu_2 = \frac{m_2 K}{a_2 + K} - D_2 < 0 \quad \text{e} \quad \mu_3 = -1 < 0$$

portanto o ponto de equilíbrio $(K, 0, 0)$ é instável, com variedade instável unidimensional tangente ao vetor $(1, \alpha, 0)$, onde $\alpha = \frac{a_1 + K}{m_1 K}(-1 - \mu_1)$ e variedade estável de dimensão dois tangente ao plano Sx_2 .

Agora vejamos a linearização no equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$, onde $\hat{x}_1 = \frac{\lambda_1}{D_1} (1 - \frac{\lambda_1}{K})$. Nesse caso, a matriz tem a forma

$$J(\lambda_1, \hat{x}_1, 0) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\lambda_1}{K} - \frac{m_1 \hat{x}_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^2} & -\frac{m_1 \lambda_1}{a_1 + \lambda_1} & -\frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} \\ \frac{m_1 \hat{x}_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - D_2 \end{pmatrix}.$$

Com o objetivo de simplificar os cálculos e evitar dificuldades desnecessárias, vamos escrever $J(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ na forma

$$J(\lambda_1, \hat{x}_1, 0) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de $J(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ é então dado por

$$p(\mu) = (\mu - f)[\mu(\mu - a) - bd] = (\mu - f)[\mu^2 - a\mu - bd]$$

e é então aparente que $\mu_1 = f$ é um autovalor real de $J(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ e os demais são as raízes do polinômio quadrático entre colchetes na expressão acima.

Como

$$\begin{aligned} \mu_1 &= f = \frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - D_2 = \frac{m_2 \lambda_1 - D_2 \lambda_1 - a_2 D_2}{a_2 + \lambda_1} \\ &= \frac{\lambda_1(m_2 - D_2) - a_2 D_2}{a_2 + \lambda_1} = \frac{m_2 - D_2}{a_2 + \lambda_1} \left[\lambda_1 - \frac{a_2 D_2}{m_2 - D_2} \right] = \frac{m_2 - D_2}{a_2 + \lambda_1} [\lambda_1 - \lambda_2] \end{aligned}$$

e como $\lambda_1 < \lambda_2$, segue que $\mu_1 < 0$.

Agora, como $-bd > 0$, uma condição necessária e suficiente para que as raízes do polinômio quadrático entre colchetes tenham parte real negativa é que $a < 0$, isto é, que

$$1 - \frac{2\lambda_1}{K} - \frac{m_1 \hat{x}_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^2} < 0,$$

que é equivalente a $K < a_1 + 2\lambda_1$.

Portanto, $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ é localmente assintoticamente estável se $K < a_1 + 2\lambda_1$ e instável se $K > a_1 + 2\lambda_1$.

Caso C - Se $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < K$, a matriz linearizada no ponto $(K, 0, 0)$ tem autovalores

$$\mu_1 = \frac{m_1 K}{a_1 + K} - D_1 > 0, \quad \mu_2 = \frac{m_2 K}{a_2 + K} - D_2 > 0 \quad \text{e} \quad \mu_3 = -1 < 0,$$

sendo assim instável, com variedade instável de dimensão dois tangente ao plano gerado pelos vetores $(1, \alpha, 0)$ e $(\beta, 0, 1)$, onde $\alpha = -\frac{a_1 + K}{m_1 K}(1 + \mu_1)$ e $\beta = -\frac{m_2 K}{a_2 + K}(1 + \mu_2)^{-1}$, e variedade estável unidimensional tangente ao eixo S .

A análise da estabilidade do ponto de equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ é a mesma que no caso anterior: $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ é localmente assintoticamente estável se $K < a_1 + 2\lambda_1$ e instável se $K > a_1 + 2\lambda_1$.

Agora vejamos a linearização no equilíbrio $(\lambda_2, 0, \hat{x}_2)$, onde $\hat{x}_2 = \frac{\lambda_2}{D_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K}\right)$. Nesse caso, a matriz tem a forma

$$J(\lambda_2, 0, \hat{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\lambda_2}{K} - \frac{m_2 \hat{x}_2 a_2}{(a_2 + \lambda_2)^2} & -\frac{m_1 \lambda_2}{a_1 + \lambda_2} & -\frac{m_2 \lambda_2}{a_2 + \lambda_2} \\ 0 & \frac{m_1 \lambda_2}{a_1 + \lambda_2} - D_1 & 0 \\ \frac{m_2 \hat{x}_2 a_2}{(a_2 + \lambda_2)^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com o objetivo de simplificar os cálculos e evitar dificuldades desnecessárias, vamos escrever $J(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ na forma

$$J(\lambda_1, \hat{x}_1, 0) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de $J(\lambda_2, 0, \hat{x}_2)$ é então dado por

$$p(\mu) = (\mu - d)[\mu(\mu - a) - ec] = (\mu - d)[\mu^2 - a\mu - ec],$$

donde $\mu_1 = d$ é um autovalor real de $J(\lambda_2, 0, \hat{x}_2)$ e os demais são as raízes do polinômio quadrático entre colchetes na expressão acima.

Como

$$\mu_1 = d = \frac{m_1 \lambda_2}{a_1 + \lambda_2} - D_1 = \frac{m_1 - D_1}{a_1 + \lambda_2} [\lambda_2 - \lambda_1]$$

e $\lambda_1 < \lambda_2$, segue que $\mu_1 > 0$.

Agora, como $-ec > 0$, uma condição necessária e suficiente para que as raízes do polinômio quadrático entre colchetes tenham parte real negativa é que $a < 0$, isto é, que

$$1 - \frac{2\lambda_2}{K} - \frac{m_2 \hat{x}_2 a_2}{(a_2 + \lambda_2)^2} < 0,$$

que é equivalente a $K < a_2 + 2\lambda_2$.

Portanto, se $K < a_2 + 2\lambda_2$, o ponto de equilíbrio $(\lambda_2, 0, \hat{x}_2)$ é instável, com variedade instável unidimensional tangente ao vetor $(0, \nu, 1)$, onde $\nu = -\frac{m_2}{m_1} \left(\frac{a_1 + \lambda_2}{a_2 + \lambda_2} \right)$ e variedade estável bidimensional tangente ao plano Sx_2 . Se $K > a_2 + 2\lambda_2$, o equilíbrio $(\lambda_2, 0, \hat{x}_2)$ é totalmente instável.

Hsu, Hubbell e Waltman [8] mostram que se $m_1/D_1 \geq m_2/D_2$, então $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ é globalmente assintoticamente estável desde que $K < a_1 + 2\lambda_1$. Se $K > a_1 + 2\lambda_1$ e $m_1/D_1 \geq m_2/D_2$, então todas as condições iniciais positivas, exceto as da variedade estável de $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ são atraídas para uma trajetória periódica no plano $x_2 = 0$ perto de $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$.

Simulações numéricas descritas em [9] indicam que a coexistência de todas as três espécies é possível, no caso C, quando $m_1/D_1 < m_2/D_2$ e determinadas outras condições sejam satisfeitas.

Vamos encerrar essa seção analisando o caso particular (degenerado) $\lambda_1 = \lambda_2$ estudado por Farkas em [5]. Nesse caso, o sistema (2.3) tem uma infinidade de pontos de equilíbrio: $(S, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$, $(S, x_1, x_2) = (K, 0, 0)$ e os pontos da reta L de equação

$$L = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^3 : S = \lambda \text{ e } \frac{m_1 x_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 x_2}{a_2 + \lambda} = 1 - \frac{\lambda}{K} \right\},$$

indicada na Figura 2.3. Naturalmente, estamos interessados apenas no caso em que $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$ satisfaz $\lambda < K$ e $a_1 > a_2$.

Como a análise da linearização em torno dos equilíbrios $(0, 0, 0)$ e $(K, 0, 0)$ é a mesma que aquela estudada anteriormente no caso C, vamos examinar a linearização em torno de um equilíbrio pertencente à reta L . Seja $(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in L$. A linearização do sistema (2.3) em torno desse ponto é dada pela matriz

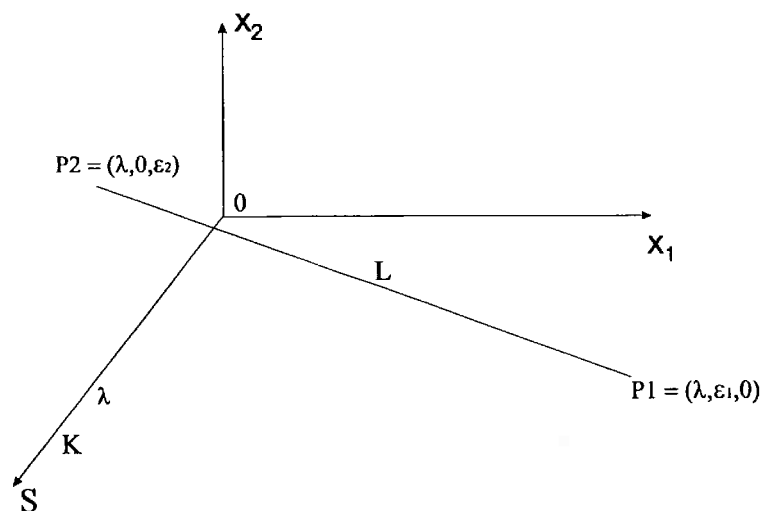


Figura 2.3: A reta L como conjunto de pontos de equilíbrio.

$$J(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\lambda}{K} - \frac{m_1 \varepsilon_1 a_1}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2 \varepsilon_2 a_2}{(a_2 + \lambda)^2} & -\frac{m_1 \lambda}{a_1 + \lambda} & -\frac{m_2 \lambda}{a_2 + \lambda} \\ \frac{m_1 \varepsilon_1 a_1}{(a_1 + \lambda)^2} & 0 & 0 \\ \frac{m_2 \varepsilon_2 a_2}{(a_2 + \lambda)^2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é dado por

$$p(\mu) = \mu[\mu^2 - a\mu - (bd + ce)],$$

onde

$$a = 1 - \frac{2\lambda}{K} - \frac{m_1 \varepsilon_1 a_1}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2 \varepsilon_2 a_2}{(a_2 + \lambda)^2}, \quad b = -\frac{m_1 \lambda}{a_1 + \lambda},$$

$$c = -\frac{m_2 \lambda}{a_2 + \lambda}, \quad d = \frac{m_1 \varepsilon_1 a_1}{(a_1 + \lambda)^2}, \quad e = \frac{m_2 \varepsilon_2 a_2}{(a_2 + \lambda)^2}.$$

Assim, $\mu = 0$ é um autovalor de $J(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Como $-(bd + ce) > 0$, o sinal da parte real dos demais autovalores depende do sinal de a . Como

$$\frac{m_1 \varepsilon_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 \varepsilon_2}{a_2 + \lambda} = 1 - \frac{\lambda}{K},$$

temos

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{2\lambda}{K} - \frac{m_1 \varepsilon_1 (a_1 + \lambda)}{(a_1 + \lambda)^2} - \frac{m_2 \varepsilon_2 (a_2 + \lambda)}{(a_2 + \lambda)^2} + \frac{m_1 \varepsilon_1 \lambda}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \varepsilon_2 a_2 \lambda}{(a_2 + \lambda)^2} \\ &= 1 - \frac{2\lambda}{K} - \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) + \frac{m_1 \varepsilon_1 \lambda}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \varepsilon_2 \lambda}{(a_2 + \lambda)^2} \\ &= \lambda \left[\frac{m_1 \varepsilon_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \varepsilon_2}{(a_2 + \lambda)^2} - \frac{1}{K} \right] \end{aligned}$$

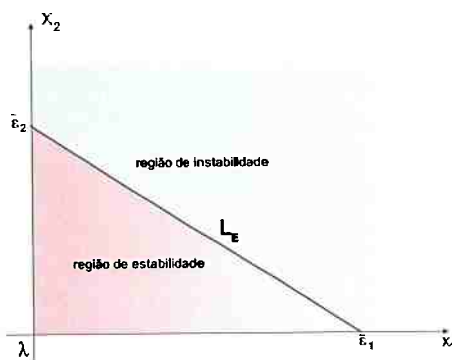


Figura 2.4: Os pontos acima de L_E são instáveis e os pontos abaixo são estáveis.

e portanto

$$a < 0 \text{ se e somente se } \frac{m_1 \varepsilon_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \varepsilon_2}{(a_2 + \lambda)^2} < \frac{1}{K}$$

$$a > 0 \text{ se e somente se } \frac{m_1 \varepsilon_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 \varepsilon_2}{(a_2 + \lambda)^2} > \frac{1}{K}.$$

Logo, a reta

$$L_E = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } \frac{m_1 x_1}{(a_1 + \lambda)^2} + \frac{m_2 x_2}{(a_2 + \lambda)^2} = \frac{1}{K} \right\}$$

determina a estabilidade dos pontos de equilíbrio do segmento de reta L , como na Figura 2.4.

Para determinarmos a estabilidade dos pontos do segmento de reta L , vamos começar comparando os pontos onde L e L_E interceptam o eixo x_1 e o eixo x_2 , respectivamente. Suponhamos que $a_1 > a_2$ e sejam $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in L$ e $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2) \in L_E$ tais que

$$\varepsilon_1 = \frac{(a_1 + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K} \quad \varepsilon_2 = \frac{(a_2 + \lambda)(K - \lambda)}{m_2 K}$$

e

$$\hat{\varepsilon}_1 = \frac{(a_1 + \lambda)^2}{m_1 K} \quad \hat{\varepsilon}_2 = \frac{(a_2 + \lambda)^2}{m_2 K}$$

Como

$$\frac{\varepsilon_1}{\hat{\varepsilon}_1} = \frac{K - \lambda}{a_1 + \lambda} \quad \text{e} \quad \frac{\varepsilon_2}{\hat{\varepsilon}_2} = \frac{K - \lambda}{a_2 + \lambda}$$

temos os seguintes casos:

(i) Suponha que $\frac{\varepsilon_1}{\hat{\varepsilon}_1} > 1$ e $\frac{\varepsilon_2}{\hat{\varepsilon}_2} > 1$, equivalentemente, que $K > a_1 + 2\lambda$ e $K > a_2 + 2\lambda$. Então os pontos do segmento de reta L são todos instáveis. Lembrando que $a_1 + 2\lambda > a_2 + 2\lambda$, pode-se concluir que para $K > a_1 + 2\lambda$, todos os pontos de L são instáveis.

(ii) Suponhamos que $\frac{\varepsilon_1}{\hat{\varepsilon}_1} < 1$ e $\frac{\varepsilon_2}{\hat{\varepsilon}_2} < 1$, equivalentemente, que $K < a_1 + 2\lambda$ e $K < a_2 + 2\lambda$. Nesse caso, os pontos de L são todos estáveis. Como $a_1 + 2\lambda > a_2 + 2\lambda$, conclui-se que para $K < a_2 + 2\lambda$, todos os pontos do segmento de reta L são estáveis.

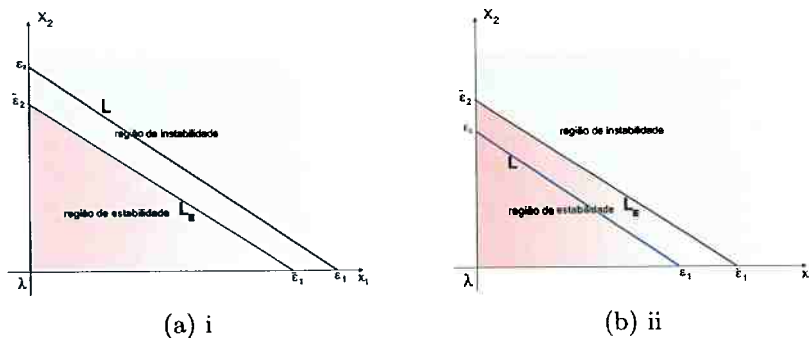


Figura 2.5: (i) $K > a_1 + 2\lambda$, todos os pontos de L são instáveis. (ii) $K < a_2 + \lambda$, todos os pontos de L são estáveis.

(iii) Suponhamos que $\frac{\varepsilon_1}{\hat{\varepsilon}_1} \leq 1$ e $\frac{\varepsilon_2}{\hat{\varepsilon}_2} \geq 1$, ou equivalentemente, que $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$. Fixando K , existe um ponto $\varepsilon(K) = (\lambda, \varepsilon_1(K), \varepsilon_2(K)) \in L \cap L_E$, tal que os pontos da reta L à direita de $\varepsilon(K)$ são todos instáveis e os pontos de L à esquerda do ponto $\varepsilon(K)$ são estáveis.

Portanto, variando K no intervalo $a_2 + 2\lambda \leq K \leq a_1 + 2\lambda$, o ponto $B(K) = (\lambda, \varepsilon_1(K), \varepsilon_2(K))$ se movimentava continuamente ao longo de L de um extremo a outro, desde o ponto $(\lambda, 0, \frac{(a_2 + \lambda)(K - \lambda)}{m_2 K})$ até o ponto $(\lambda, \frac{(a_1 + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K}, 0)$, de tal modo que os pontos que ficam para trás de $B(K)$ tornam-se instáveis, dando lugar ao fenômeno conhecido como *bifurcação zip* de Farkas [5].

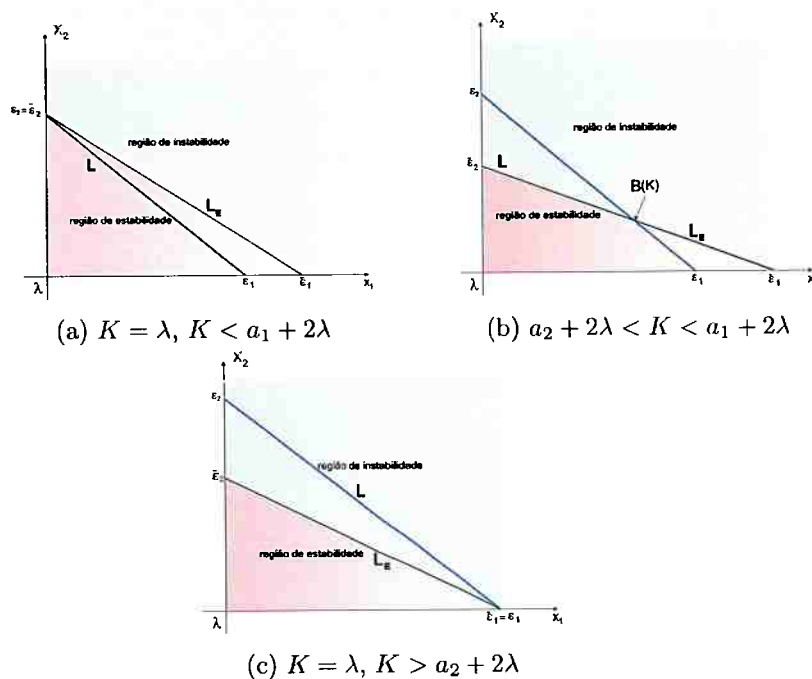


Figura 2.6: (a) Todos os pontos de L são estáveis. (b) Todos os pontos à direita de $B(K)$ são instáveis e à esquerda são estáveis. (c) Todos os pontos de L tornam-se instáveis

Consideremos agora o caso $a = a_1 = a_2$ e $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, no qual a reta L é dada por

$$L = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^3 : S = \lambda \text{ e } x_1 + \frac{m_1}{m_2} x_2 = \frac{(a + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K} \right\},$$

O sistema (2.3) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \dot{S} &= S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \frac{aS}{a+S} (m_1 x_1 - m_2 x_2) \\ \dot{x}_1 &= \frac{m_1 - D_1}{a+S} (S - \lambda) x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{m_2 - D_2}{a+S} (S - \lambda) x_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dividindo a terceira equação em (2.6) pela segunda, obtemos

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{m_2 - D_2}{m_1 - D_1} \frac{x_2}{x_1}$$

Integrando esta equação obtemos a seguinte integral primeira

$$V(S, x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^\rho}, \quad \text{onde } \rho = \frac{m_2 - D_2}{m_1 - D_1},$$

Consequentemente, para $c > 0$

$$\frac{x_2}{x_1^\rho} = c$$

é uma variedade de dimensão dois em \mathbb{R}_+^3 . Agora, para qualquer $c > 0$, denotemos por M_c a variedade invariante

$$M_c = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^3 : S > 0, x_2 = cx_1^\rho \right\}.$$

Então, a família $\{M_c : c > 0\}$ é uma folheação bidimensional do primeiro octante de \mathbb{R}^3 e cada folha é a imagem de um mergulho $h_c : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$h_c(S, x_1) = (S, x_1, cx_1^\rho).$$

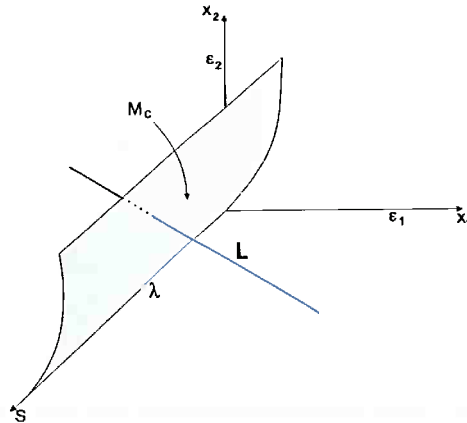


Figura 2.7: Os pontos de equilíbrio L e a variedade M_c .

Para $c > 0$ fixo, a restrição do sistema (2.6) à variedade M_c , parametrizada por S e x_1 é dada por

$$\begin{aligned}\dot{S} &= S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{aS}{a+S}(m_1x_1 - m_2cx_1^p) \\ \dot{x}_1 &= \frac{m_1 - D_1}{a+S}(S - \lambda)x_1\end{aligned}\quad (2.7)$$

e os pontos de equilíbrio de (2.7) são $(S, x_1) = (0, 0)$, $(S, x_1) = (K, 0)$ e o ponto $(S, x_1) = (\lambda, \varepsilon_1)$, onde $x_1 = \varepsilon_1$ é a única solução positiva da equação

$$x_1 + \frac{m_1}{m_2}cx_1^p = \frac{(a + \lambda)(K - \lambda)}{m_1K}.$$

Geometricamente, o ponto de equilíbrio não trivial de (2.7) é descrito como segue: ε_1 é a segunda componente do ponto $(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ obtido como a interseção transversal das variedades L e M_c .

A matriz Jacobiana do sistema (2.7) nos equilíbrios $(S, x_1) = (0, 0)$, $(S, x_1) = (K, 0)$ mostra que são pontos de sela se $K > \lambda$. No estudo da estabilidade do equilíbrio $(S, x_1) = (\lambda, \varepsilon_1)$, a capacidade de suporte K será considerado como parâmetro de bifurcação. Quando $K > \lambda$ é variado, a reta L se movimenta paralelamente cortando a variedade M_c em diferentes pontos $(\lambda, \varepsilon_1(c, K), \varepsilon_2(c, K))$ (ver Figura 2.8).

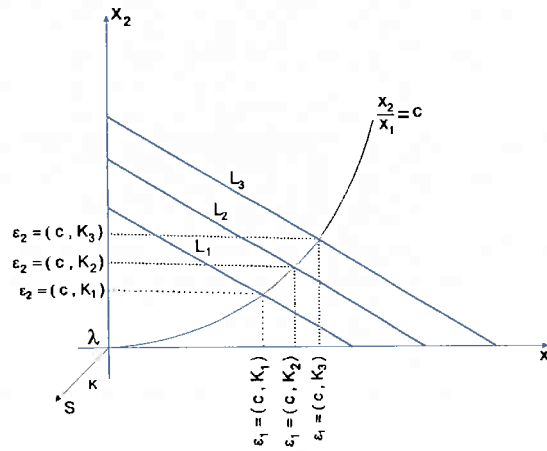


Figura 2.8: Deslocamento do equilíbrio na variedade invariante M_c .

Agora, a matriz linearizada do sistema (2.7) no equilíbrio (λ, ε_1) é dada por

$$J(\lambda, \varepsilon_1) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda(K - a - 2\lambda)}{K(a + \lambda)} & -\frac{m_1\lambda}{a + \lambda} \left(1 - \rho \frac{(a + \lambda)(1 - \lambda/K) - m_1\varepsilon_1}{m_1\varepsilon_1}\right) \\ \frac{m_1 - D_1}{a + \lambda}\varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

cujo polinômio característico é então dado por

$$p(\mu) = \mu^2 - \frac{\lambda(K - a - 2\lambda)}{K(a + \lambda)}\mu + \frac{\lambda(m_1 - D_1)}{(a + \lambda)^2} \left[1 + \rho \left(\frac{(a + \lambda)(1 - \lambda/K)}{m_1\varepsilon_1} - 1\right)\right].$$

O coeficiente do termo linear μ é positivo se e somente se $K < a + 2\lambda$. Assim, (λ, ε_1) é assintoticamente estável para $\lambda < K < a + 2\lambda$ e instável se $K > a + 2\lambda$.

Em $K = a + 2\lambda$, as raízes do polinômio característico $p(\mu)$ são imaginários puros e

$$\frac{d\mu}{dK}(a + 2\lambda) = \frac{\lambda}{2(a + 2\lambda)(a + \lambda)} > 0.$$

Logo, pelo teorema de bifurcação de Hopf [13], existe uma órbita periódica se $K > a + 2\lambda$ ao redor do equilíbrio (λ, ε_1) . Portanto, se $K > \lambda$, a reta L se move paralelamente cortando a superfície $x_2 = cx_1^p$, onde $c > 0$, em diferentes pontos $(\varepsilon_1(c, K), \varepsilon_2(c, K))$, dando origem a uma órbita periódica, para cada valor de $c > 0$. Conseqüentemente, temos o seguinte teorema devido a Farkas [5].

Teorema 2.3 *Se $\lambda < K < a + 2\lambda$, então o equilíbrio $(\lambda, \varepsilon_1(c, K))$ do sistema (2.7) é assintoticamente estável com região de atratividade \mathbb{R}_+^2 ; em $K = a + 2\lambda$ o sistema sofre uma bifurcação de Hopf.*

Como o ponto de bifurcação $K = a + 2\lambda$ não depende de c , a bifurcação ocorre no mesmo valor do parâmetro K em cada superfície da família de variedades invariantes. Assim tem-se os seguintes resultados:

Corolário 2.4 *Se $a = a_1 = a_2$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, então os pontos do segmento L são equilíbrios estáveis no sentido de Liapunov do sistema (2.3) se $\lambda < K < a + 2\lambda$ e instável se $K > a + 2\lambda$.*

Corolário 2.5 *Se $\lambda < K < a + 2\lambda$, então o segmento de reta L é um atrator global do sistema (2.3) com relação ao interior do octante positivo; se $K = a + 2\lambda$ o segmento L bifurca em um cilindro topológico C , que é uma reunião de órbitas periódicas, e é um atrator do sistema.*

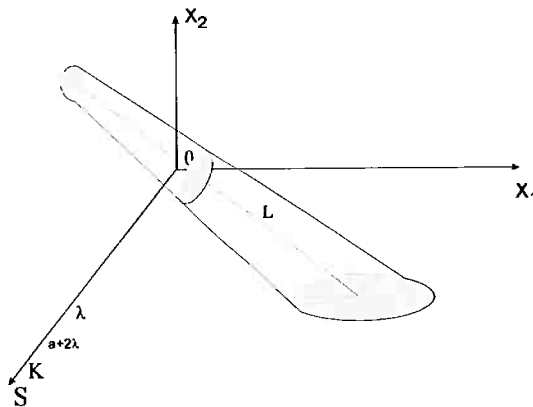


Figura 2.9: Cilindro de órbitas periódicas.

2.3 Caso 2-dimensional

Antes de explorar o comportamento assintótico das soluções de (2.3), vamos precisar de algumas propriedades das soluções do sistema bidimensional. Considere o sistema 2-dimensional

$$\begin{aligned}\dot{S} &= S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m x S}{a + S} \\ \dot{x} &= \frac{m x S}{a + S} - D_0 x\end{aligned}\quad (2.8)$$

onde K , m e D_0 são constantes positivas com $m > D_0$.

É imediato verificar que o primeiro quadrante \mathbb{R}_+^2 é invariante por (2.8) e que suas soluções estão definidas e são limitadas em $[0, \infty)$.

Os equilíbrios de (2.8) são as soluções das equações

$$S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m x S}{a + S} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{m x S}{a + S} - D_0 x = 0.$$

Sejam $\lambda = \frac{a D_0}{m - D_0}$ e $\hat{x} = \frac{a + \lambda}{m} \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right)$. Então os equilíbrios (\bar{S}, \bar{x}) de (2.8) são dados por

- a) se $0 < \lambda \leq K$, então $(\bar{S}, \bar{x}) = (0, 0)$ e $(\bar{S}, \bar{x}) = (K, 0)$ e $(\bar{S}, \bar{x}) = (\lambda, \hat{x})$;
b) se $\lambda > K$, então $(\bar{S}, \bar{x}) = (0, 0)$, $(\bar{S}, \bar{x}) = (K, 0)$.

Lema 2.2 (i) Se $K < \lambda$, então $(K, 0)$ é assintoticamente estável.

(ii) Se $\lambda < K < a + 2\lambda$, então (λ, \hat{x}) é assintoticamente estável. Se $K > a + 2\lambda$, então (λ, \hat{x}) é instável.

Demonstração. Consideremos a matriz Jacobiana do sistema (2.8) num ponto arbitrário $(S, x) \in \mathbb{R}_+^2$

$$J(S, x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2S}{K} - \frac{m x}{(a + S)^2} & -\frac{m S}{a + S} \\ \frac{m x}{(a + S)^2} & \frac{m S}{a + S} - D_0 \end{pmatrix}.$$

Para o equilíbrio $(0, 0)$, temos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -D_0 \end{pmatrix}$$

e portanto $(0, 0)$ é um ponto de sela. Para o equilíbrio $(K, 0)$, temos

$$J(K, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{m K}{a + K} \\ 0 & \frac{m K}{a + K} - D_0 \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são $\mu_1 = -1$ e $\mu_2 = \frac{mK}{a+K} - D_0 = \frac{m-D_0}{a+K}(K - \lambda)$.

Agora considerando a linearização no ponto (λ, \hat{x}) , obtemos a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{2\lambda}{K} - \frac{ma\hat{x}}{(a+\lambda)^2} & -\frac{m\lambda}{a+\lambda} \\ \frac{ma\hat{x}}{(a+\lambda)^2} & 0 \end{pmatrix},$$

cujos polinômio característico é dado por

$$p(\mu) = \mu^2 - \left(1 - \frac{2\lambda}{K} - \frac{ma\hat{x}}{(a+\lambda)^2}\right)\mu + \frac{m\lambda}{a+\lambda} \frac{ma\hat{x}}{(a+\lambda)^2}.$$

Como $\frac{m\lambda}{a+\lambda} \frac{ma\hat{x}}{(a+\lambda)^2} > 0$, o sinal da parte real dos autovalores de $J(\lambda, \hat{x})$ depende apenas do sinal de $1 - \frac{2\lambda}{K} - \frac{ma\hat{x}}{(a+\lambda)^2}$. Sendo $a + \lambda = \frac{am}{m-D_0}$, temos que

$$1 - \frac{2\lambda}{K} - \frac{ma\hat{x}}{(a+\lambda)^2} < 0 \quad \text{se e somente se} \quad K < a + 2\lambda$$

$$1 - \frac{2\lambda}{K} - \frac{ma\hat{x}}{(a+\lambda)^2} < 0 \quad \text{se e somente se} \quad K > a + 2\lambda$$

Portanto, o ponto de equilíbrio (λ, \hat{x}) é assintoticamente estável se $K < a + 2\lambda$ com variedade estável \mathbb{R}_+^2 e instável se $K > a + 2\lambda$. \square

Lema 2.3 *Se $0 < \lambda < K < a + 2\lambda$, então (2.8) não tem ciclo limite no primeiro quadrante do plano Sx .*

Demonstração. Sejam

$$f_1(S, x) = S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{mSx}{a+S} \quad \text{e} \quad f_2(S, x) = \frac{mSx}{a+S} - D_0x$$

e considere a função

$$h(S, x) = \left(\frac{S}{a+S}\right)^\alpha x^\delta, \quad S > 0 \quad x > 0$$

onde $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ serão selecionados mais adiante para que seja satisfeita a seguinte propriedade: a expressão $\frac{\partial}{\partial S}(f_1h) + \frac{\partial}{\partial x}(f_2h)$ não muda de sinal em \mathbb{R}_+^2 ; seguirá então do Critério de Dulac que (2.8) não tem ciclo limite em \mathbb{R}_+^2 .

Esta expressão pode ser calculado como

$$\frac{\partial}{\partial S}(f_1h) + \frac{\partial}{\partial x}(f_2h) = -ax^{\delta+1}S^\alpha(\alpha+1) + x^\delta S^\alpha(a+S)^{-(\alpha+1)}P_{\alpha,\beta}(S) \quad (2.9)$$

onde $\beta = \delta + 1$ e

$$P_{\alpha,\beta}(S) = \left(-\frac{2}{K}\right)S^2 + \left[\beta(m-D_0) + \left(1 - \frac{(\alpha+2)a}{K}\right)\right]S + a[(\alpha+1) - \beta D_0].$$

O lema será demonstrado se escolhermos $\alpha \geq -1$ e β de tal forma que $P_{\alpha,\beta}(S) \leq 0$, para todo $S > 0$. Agora, como $P_{\alpha,\beta}$ é um polinômio quadrático com coeficiente dominante negativo, basta mostrar que existem valores de α e β tais que o discriminante de $P_{\alpha,\beta}$ é negativo. O discriminante de $P_{\alpha,\beta}$ é dado por

$$\begin{aligned} D_\alpha(\beta) &= [\beta(m - D_0) + (1 - \frac{\alpha + 2}{K}a)]^2 - 4(-\frac{2}{K})a[(\alpha + 1) - \beta D_0] \\ &= \beta^2(m - D_0)^2 + 2\beta(m - D_0)(1 - \frac{\alpha + 2}{K}a) + (1 - \frac{\alpha + 2}{K}a)^2 + \frac{8a(\alpha + 1)}{K} \\ &\quad - \frac{8a}{K}\beta D_0 \\ &= \beta^2(m - D_0)^2 + 2\beta[(m - D_0)(1 - \frac{\alpha + 2}{K}a) - \frac{4aD_0}{K}] + (1 - \frac{\alpha + 2}{K}a)^2 \\ &\quad + \frac{8a(\alpha + 1)}{K}. \end{aligned}$$

Sendo $D_\alpha(\beta)$ um polinômio quadrático, para mostrar que $D_\alpha(\beta) < 0$, para algum valor de β e α , mostraremos que o discriminante $D(\alpha)$ de $D_\alpha(\beta)$ tem sinal positivo. O discriminante é dado por

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= 4[(m - D_0)(1 - \frac{\alpha + 2}{K}a) - \frac{4aD_0}{K}]^2 - 4(m - D_0)^2[(1 - \frac{\alpha + 2}{K}a)^2 + \frac{8a(\alpha + 1)}{K}] \\ &= 4[(m - D_0)^2(1 - \frac{\alpha + 2}{K}a)^2 - \frac{8aD_0}{K}(m - D_0)(1 - \frac{\alpha + 2}{K}a) + \frac{16a^2D_0^2}{K^2}] \\ &\quad - 4(m - D_0)^2(1 - \frac{\alpha + 2}{K}a)^2 - \frac{32a}{K}(m - D_0)^2(\alpha + 1) \\ &= -\frac{32aD_0}{K}(m - D_0) + \frac{32a^2D_0}{K^2}(m - D_0)\alpha + \frac{64a^2D_0}{K^2}(m - D_0) - \frac{64a^2D_0^2}{K^2} \\ &\quad - \frac{32a}{K}(m - D_0)^2(\alpha + 1) \\ &= \frac{32a}{K^2}[\alpha(m - D_0)(aD_0 - K(m - D_0)) + m(2aD_0 - K(m - D_0))] \\ &= \frac{32a}{K^2}[\alpha(m - D_0)^2(\lambda - K) + m(m - D_0)(2\lambda - K)] \end{aligned}$$

Agora, se existe α^* tal que $D(\alpha^*) > 0$, então $D_{\alpha^*}(\beta) = 0$ têm duas raízes reais β_1, β_2 . Se β^* é qualquer número real tal que $\beta_1 < \beta^* < \beta_2$, então $D_{\alpha^*}(\beta^*) < 0$ e $P_{\alpha^*,\beta^*}(S) = 0$ não tem raízes reais. Como o coeficiente de S^2 é negativo, tem-se $P_{\alpha^*,\beta^*}(S) < 0$ para todo S . A escolha de $\delta^* = \beta^* - 1$ completa o argumento.

Se $K < 2\lambda$, escolhemos $\alpha^* = 0$.

Para $K = 2\lambda$, escolhemos $\alpha^* > 0$.

Para $0 < 2\lambda < K < a + 2\lambda$, escolhemos α^* tal que

$$-1 < \alpha^* < \frac{m[2aD_0 - K(m - D_0)]}{(m - D_0)(K(m - D_0) - aD_0)} < 0 \quad \text{de modo que} \quad D(\alpha^*) > 0.$$

Se $K = a + 2\lambda$, escolhemos $\alpha^* = -1$, de modo que

$$\begin{aligned}
D_{\alpha^*}(\beta) &= \beta^2(m - D_0)^2 + 2\beta[(m - D_0)(1 - \frac{a}{K}) - \frac{4aD_0}{K}] + (1 - \frac{a}{K})^2 \\
&= (m - D_0)^2 \left\{ \beta^2 + \frac{2\beta}{(m - D_0)^2} [(m - D_0)(1 - \frac{a}{K}) - \frac{4aD_0}{K}] \right\} + (1 - \frac{a}{K})^2 \\
&= (m - D_0)^2 \left[\beta^2 + \frac{2\beta}{(m - D_0)^2} \frac{-2\lambda(m - D_0)}{a + 2\lambda} + \frac{1}{(m - D_0)^2} (\frac{2\lambda}{a + 2\lambda})^2 \right] \\
&= (m - D_0)^2 \left[\beta^2 - \frac{4\lambda}{(m - D_0)(a + 2\lambda)} \beta + (\frac{2\lambda}{(m - D_0)(a + 2\lambda)})^2 \right] \\
&= (m - D_0)^2 \left(\beta - \frac{2\lambda}{(m - D_0)(a + 2\lambda)} \right)^2
\end{aligned}$$

Logo, $\beta^* = \frac{2\lambda}{(m - D_0)(a + 2\lambda)}$ é raiz dupla da equação $D_{\alpha^*}(\beta) = 0$ e o polinômio $P_{\alpha^* \beta^*}(S) = -\frac{2}{K}(S - S_*)^2$ para algum S_* . Assim, $P_{\alpha^* \beta^*}(S) < 0$ para todo $S \geq 0$. Consequentemente, podemos concluir que, para $S > \lambda$ e $K < a + 2\lambda$, pelo critério de Dulac, o sistema (2.8) não admite órbitas periódicas no interior do primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 . Assim, se $K < a + 2\lambda$, o equilíbrio $(S, x) = (\lambda, \hat{x})$ será globalmente assintoticamente estável para soluções com condições iniciais no interior do quadrante positivo.

□

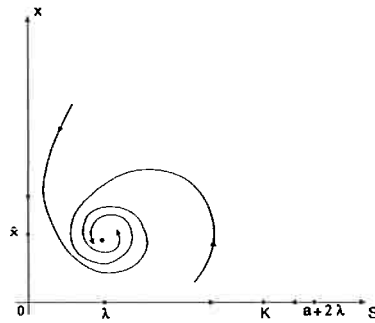


Figura 2.10: O ponto de equilíbrio (λ, \hat{x}) é assintoticamente estável se $K < a + 2\lambda$.

Lema 2.4 *Seja $(S(t), x(t))$ uma solução de (2.8) com $S(0) > 0$ e $x(0) > 0$. Temos*

- (i) *Se $0 < K < \lambda$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = K$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.*
- (ii) *Se $0 < \lambda < K < a + 2\lambda$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lambda$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \hat{x}$.*
- (iii) *Se $K > a + 2\lambda$, então existe ao menos uma órbita periódica no primeiro quadrante do plano Sx . Se existe apenas uma órbita periódica, esta é estável. Se a órbita periódica não é única, então a mais externa é semiestável exteriormente e a mais interna é semiestável interiormente.*

Demonstração. De (2.8), segue que

$$x(t) = x_0 \exp \int_0^t \frac{(m - D_0)S(\varepsilon) - aD_0}{a + S(\varepsilon)} d\varepsilon$$

e devemos mostrar que o integrando deve ser negativo. De fato,

$$\frac{(m - D_0)S(\varepsilon) - aD_0}{a + S(\varepsilon)} = \frac{(m - D_0)}{a + S(\varepsilon)}S(\varepsilon) - \lambda \leq \frac{m - D_0}{a + S(\varepsilon)}\left(\frac{K}{1 + C_0e^{-t}} - \lambda\right),$$

onde $C_0 = \frac{K - S_0}{S_0}$.

Logo

$$\frac{m - D_0}{a + S(\varepsilon)}\left(\frac{K}{1 + C_0e^{-t}} - \lambda\right) \leq \frac{aD_0}{\lambda(a + S(\varepsilon))} \frac{K - \lambda}{1 + C_0e^{-t}} < \frac{aD_0}{K(a + S(\varepsilon))} \frac{K - \lambda}{1 + C_0e^{-t}} < 0,$$

e portanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Como $S(t) \leq \frac{K}{1 + C_0e^{-t}}$, onde $C_0 = \frac{K - S_0}{S_0}$, segue que $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leq K$; sendo $K < \lambda$, pelo Lema 2.2 temos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = K$. Assim, $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = K$ se $0 < K < \lambda$.

Pelos Lemas 2.2 e 2.3 segue que $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lambda$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \hat{x}$.

Quando $K > a + 2\lambda$, o equilíbrio (S, \hat{x}) é totalmente instável. Assim, dado $\delta > 0$, existe uma vizinhança $D_\delta(S, \hat{x}) \subset J$, de tal forma que todas as órbitas convergem ao equilíbrio (S, \hat{x}) quando $t \rightarrow -\infty$, como na Figura 2.11.

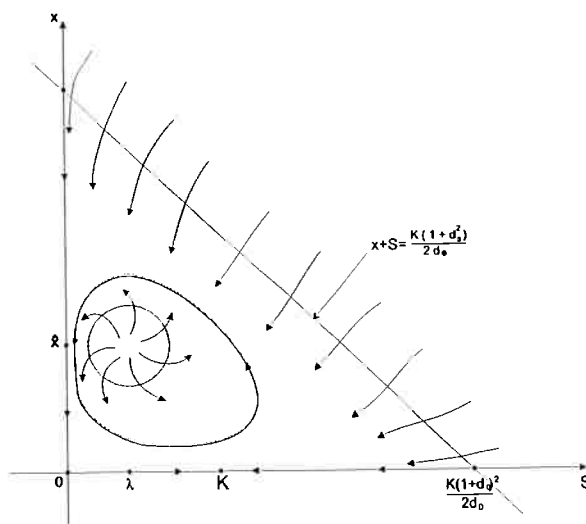


Figura 2.11: A existência de uma órbita periódica se $K > a + 2\lambda$.

Observe que o conjunto compacto

$$J = \{(S, x) : S \geq 0, x \geq 0 \text{ e } S + x \leq \frac{K}{2d_0}(1 + d_0)^2\}$$

tem a propriedade, que para cada conjunto limitado $B \subset \mathbb{R}_+^2$, existe $t_0 \geq 0$ tal que se $(S_0, x_0) \in B$, então $(S(t), x(t)) \in J$, para todo $t \geq t_0$. Logo, toda solução do sistema (2.8) entra para o conjunto compacto J a partir de um instante t_0 para nunca mais sair. Assim, existe uma região anular positivamente invariante sem pontos de equilíbrio contido no compacto J , e pelo Teorema de Poincaré-Bendixson existe uma órbita periódica. \square

2.4 Análise assintótica dos pontos de equilíbrio do sistema 3-dimensional

Mostremos que se $0 < \lambda_1 < K < \lambda_2$, qualquer solução $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ para $t \geq 0$ do sistema (2.3) converge para o ponto de equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ se $K < a_1 + 2\lambda_1$. Antes, mostremos alguns resultados que serão úteis para alcançar nosso objetivo.

Lema 2.5 *Uma condição necessária para cada espécie x_i , $i = 1, 2$, sobreviver é $0 < \lambda_i \leq K$.*

Demonstração. Suponhamos que $\lambda_i > K$. Do sistema (2.3) segue que

$$x_i = x_0 \exp \int_0^t \left(\frac{m_i - D_i}{a_i + S(\varepsilon)} (S(\varepsilon) - \lambda_i) \right) d\varepsilon.$$

Como

$$\frac{m_i - D_i}{a_i + S(\varepsilon)} (S(\varepsilon) - \lambda_i) \leq \frac{m_i - D_i}{a_i + S} \left(\frac{K - \lambda_i}{1 + C_0 e^{-t}} - \frac{\lambda_i C_0 e^{-t}}{1 + C_0 e^{-t}} \right) \leq \frac{m_i - D_i}{a_i + S} \frac{K - \lambda_i}{1 + C_0 e^{-t}} < 0,$$

segue que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = 0$. □

A seguir damos um resultado importante devido a Coppel [2]. Para tal fim, considere f uma função real de valor real duas vezes diferenciável no intervalo fechado $[a, b]$. Pelo Teorema de Taylor

$$\begin{aligned} f(b) - f(x) &= (b - x)f'(x) + \frac{1}{2}(b - x)^2 f''(\xi) \\ f(a) - f(x) &= (a - x)f'(x) + \frac{1}{2}(a - x)^2 f''(\eta) \end{aligned}$$

onde $a < \eta < x < \xi < b$.

Logo

$$f'(x) = \frac{1}{b - a} \left[f(b) - f(a) - \frac{1}{2} (f''(\xi)(b - x)^2 - f''(\eta)(a - x)^2) \right]$$

Observe que $(b - x)^2 + (a - x)^2 \leq (b - a)^2$ para $a \leq x \leq b$.

Se $|f(x)| \leq \alpha$ e $|f''(x)| \leq \gamma$, $x \in [a, b]$, então

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{b - a} \left[|f(b)| + |f(a)| + \frac{1}{2} (|f''(\xi)|(b - x)^2 + |f''(\eta)|(a - x)^2) \right]$$

Portanto

$$|f'(x)| \leq 2 \frac{\alpha}{b - a} + \frac{1}{2} \gamma (b - a), \quad (2.10)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Lema 2.6 *Suponha que $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz*

$$|f(x)| \leq \alpha \quad e \quad |f''(x)| \leq \gamma,$$

para todo $x \geq a$, onde $0 < \alpha \leq \gamma$. Então, temos

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{\alpha\gamma},$$

para todo $x \geq a$.

Demonstração. Seja $b > a$ arbitrário. Então,

$$|f'(x)| \leq 2\frac{\alpha}{b-a} + \frac{1}{2}\gamma(b-a),$$

para todo $x \in [a, b]$. Logo,

$$|f'(x)| \leq \min_{b>a} \left\{ 2\frac{\alpha}{b-a} + \frac{1}{2}\gamma(b-a) \right\} = 2\sqrt{\alpha\gamma},$$

para todo $x \geq a$. □

Lema 2.7 *(Veja Coppel [2]) Seja f uma função com limite finito quando $x \rightarrow \infty$ e tal que f'' é limitada para $x \geq x_0$. Então, $f'(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Como f tem limite finito, então existe L , tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Seja $g(x) = f(x) - L$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Como f'' é limitada, então $|g''(x)| \leq \gamma$ para $x \geq x_0$.

Dado $0 < \varepsilon < 2\gamma$, existe $x_0 > 0$ tal que se $x \geq x_0$, temos que

$$|g(x)| \leq \frac{\varepsilon^2}{4\gamma}.$$

Logo, pelo Lema 2.6 tem-se

$$|g'(x)| \leq 2\sqrt{\sup |g(x)|}\sqrt{\gamma} \leq 2\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma} = \varepsilon,$$

assim $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$.

Agora, como $f'(x) = g'(x)$, temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. □

Lema 2.8 *Sejam $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ solução do sistema (2.3) e $0 < \lambda_1 < K < \lambda_2$.*

Se $K < a_1 + 2\lambda_1$. Então, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \hat{x}_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \lambda_1$.

Demonstração. Dado que $0 < \lambda_1 < K < \lambda_2$, pelo Lema 2.5 conclui-se facilmente que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \neq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$.

Se $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t)$ existe e é igual a $c \neq 0$, isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = c \neq 0$. Pelo Lema 2.1 segue que x_1'' é limitado, logo aplicando o Lema 2.7, temos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1'(t) = 0$, assim no sistema (2.3) obtemos que

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x_1'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[x_1 \frac{m_1 - D_1}{a_1 + S} (S - \lambda_1) \right]$$

portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lambda_1$.

Novamente usando o Lema 2.7, como $S''(t)$ é limitado e $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lambda_1$, segue que

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} S'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \frac{m_1 S x_1}{a_1 + S} - \frac{m_2 S x_2}{a_2 + S} \right]$$

assim, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \frac{a_1 + \lambda_1}{m_1} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} \right) = \hat{x}_1 = c$.

Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t)$ não existe, escolhemos uma sequência t_n tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \infty$, $x_1(t_n)$ é um máximo relativo, $x_1(t_n) > \varepsilon \forall \varepsilon > 0$, para todo n e $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_1(t_n) = x_{lw}$ para algum $x_{lw} \geq \varepsilon > 0$.

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(t_n) = \lambda_1$, então $(\lambda_1, x_{lw}, 0) \in \Omega$, onde Ω é o conjunto ω -limite da solução $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ de (2.3) e permanece no plano Sx_1 . Usando o lema 2.4 com $m = m_1$, $a = a_1$, $D_0 = D_1$, segue que a solução de (2.3) com $S(0) = \lambda_1$, $x_1(0) = x_{lw}$, $x_2(0) = 0$ satisfaz $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \lambda_1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \hat{x}_1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$. Logo, pela invariância do conjunto ω -limite conclui-se que $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0) \in \Omega$. No entanto, $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ é assintoticamente estável pelas observações anteriores. Portanto a trajetória $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ aproxima-se ao ponto crítico $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$. Em particular $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \hat{x}_1$, o que é uma contradição a nossa afirmação.

Portanto podemos concluir que existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \hat{x}_1$. □

Lema 2.9 *Sejam $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ solução de (2.3) e $0 < \lambda_1 < K < \lambda_2$. Se $K > a_1 + \lambda_1$ então o conjunto ω -limite da trajetória de $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ encontra-se no plano $x_2 = 0$ contendo uma trajetória periódica, exceto os pontos que pertencem à variedade estável do ponto de equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$.*

Demonstração. Como acima, no Lema 2.8, temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) > 0$. Os argumentos usados na demonstração deste Lema dão que $(\lambda_1, x_{lw}, 0)$ para algum $x_{lw} > 0$.

Denote por Ω' denotando o conjunto ω -limite do sistema dois-dimensional ($x_2 \equiv 0$) por (λ_1, x_{lw}) . Pelo Lema 2.2, para $K > a_1 + 2\lambda_1$ o ponto de equilíbrio (λ_1, \hat{x}_1) é instável, e sendo a trajetória definida num compacto, então pelo teorema de Poincaré-Bendixson Ω' é uma solução periódica.

Seja Ω o conjunto ω -limite do sistema (2.3), logo, pela propriedade de invariância do conjunto ω -limite temos que $(\Omega', 0) \subset \Omega$, portanto o conjunto ω -limite da trajetória $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ permanece no plano Sx_1 contendo uma trajetória periódica.

Agora, como a matriz linearizada de (2.3) no equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ para $K > a_1 + 2\lambda_1$, tem dois autovalores positivos e um autovalor negativo, então $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ é instável com variedade instável de dimensão dois tangente ao plano Sx_1 e variedade estável tangente ao vetor $(0, 1, \frac{a-\mu_1}{b})$, onde $a = 1 - \frac{2\lambda_1}{K} - \frac{m_1\hat{x}_1a_1}{(a_1+\lambda_1)^2}$ e $b = -\frac{m_1\lambda_1}{a_1+\lambda_1}$. Logo, conclui-se que o sistema (2.3) tem uma variedade estável se $K > a_1 + 2\lambda_1$. Assim, todas as condições iniciais positivas são atraídos para tal trajetória periódica no plano Sx_1 em volta do ponto de equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$, exceto os pontos que pertencem à variedade estável de $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$. \square

Lema 2.10 *Sejam $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ solução de (2.3), $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < K$ e $\frac{m_1}{D_1} \leq \frac{m_2}{D_2}$.*

- (i) *Se $K < a_1 + 2\lambda_1$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lambda_1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \hat{x}_1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$.*
- (ii) *Se $K > a_1 + 2\lambda_1$, então o conjunto ω -limite da trajetória de $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ permanece no plano Sx_1 (isto é, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$) contendo uma trajetória periódica, exceto os pontos que pertencem à variedade estável do ponto de equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$.*

Demonstração. Análogo á demonstração dos Lemas 2.8 e 2.9.

3

Bifurcação de Hopf e a existência de uma órbita periódica em \mathbb{R}_+^3

Neste capítulo provaremos no Lema 3.1 a ocorrência da bifurcação de Hopf supercrítica no plano $x_2 = 0$ no equilíbrio (λ_1, \hat{x}_1) com valor de bifurcação $K = K_0$. Mediante uma análise cuidadosa introduzimos o parâmetro de bifurcação η e finalmente apresentaremos o Teorema 3.1 que prova a ocorrência da bifurcação no ponto de equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$, o que garantirá a existência de uma órbita periódica estável para $\eta < \eta(K)$ no octante positivo pela perda de estabilidade da órbita periódica de Hopf para $K > K_0$ e $a_2 > a_1$.

Em todo este capítulo admitiremos que $\lambda_1 < \lambda_2$ e $K > \lambda_1$.

Consideremos o ponto de equilíbrio $E_1 = (\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ de (2.3), onde $\lambda_1 = \frac{a_1 D_1}{m_1 - D_1}$ e $\hat{x}_1 = \frac{\lambda_1}{D_1} (1 - \frac{\lambda_1}{K})$. Já vimos anteriormente que se $K < a_1 + 2\lambda_1$, então E_1 é assintoticamente estável e que se $K > a_1 + 2\lambda_1$, então E_1 é instável. Mostraremos que $K_0 \equiv a_1 + 2\lambda_1$ é ponto de bifurcação e que a linearização de (2.3) em volta de E_1 apresenta, para $K = K_0$, um par de autovalores imaginários puros.

Lembremos que o polinômio característico da matriz linearizada do sistema (2.3) em torno do equilíbrio $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ é dada por:

$$p(\mu) = \left(\mu - \left(\frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - D_2 \right) \right) \left[\mu^2 - \left(1 - \frac{2\lambda_1}{K} - \frac{m_1 \hat{x}_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^2} \right) \mu + \frac{\lambda_1 m_1^2 \hat{x}_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^3} \right]$$

e que o primeiro autovalor é negativo:

$$\mu_1 = \frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - D_2 = \frac{(m_2 - D_2) \lambda_1 - a_2 D_2}{a_2 + \lambda_1} = \frac{m_2 - D_2}{a_2 + \lambda_1} (\lambda_1 - \lambda_2) < 0.$$

Os demais autovalores são as raízes da equação

$$\mu^2 - \left(1 - \frac{2\lambda_1}{K} - \frac{m_1 \hat{x}_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^2}\right) \mu + \frac{\lambda_1 m_1^2 \hat{x}_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^3} = 0.$$

Agora, para existir autovalor no eixo imaginário devemos ter que

$$1 - \frac{2\lambda_1}{K} - \frac{m_1 \hat{x}_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^2} = 0,$$

que é equivalente a

$$1 - \frac{2\lambda_1}{K} - \frac{m_1 \hat{x}_1}{a_1 + \lambda_1} - \frac{m_1 \hat{x}_1 \lambda_1}{(a_1 + \lambda_1)^2} = 0.$$

Sendo $(\lambda_1, \hat{x}_1, 0)$ equilíbrio da equação (2.3), claramente temos $1 - \frac{\lambda_1}{K} = \frac{m_1 \hat{x}_1}{a_1 + \lambda_1}$ e $\frac{m_1 \lambda_1}{a_1 + \lambda_1} = D_1$, de modo que a equação acima torna-se

$$\frac{\lambda_1}{K} \left[\frac{K - a_1 - 2\lambda_1}{a_1 + \lambda_1} \right] = 0.$$

Portanto, vamos ter autovalor no eixo imaginário se e somente se $K = a_1 + 2\lambda_1$ e os autovalores imaginários puros são dados por

$$\mu_{2,3} = \pm i \sqrt{\frac{m_1 \hat{x}_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^2} \frac{m_1 \lambda_1}{a_1 + \lambda_1}} = \pm i \sqrt{D_1 \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1}}.$$

$$\text{Seja } \beta_0 = \sqrt{D_1 \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1}}.$$

Como o plano Sx_1 é invariante por (2.3), então a bifurcação de Hopf deve ocorrer no plano $x_2 = 0$. Fazendo $x_2 = 0$ em (2.3), vamos examinar a bifurcação de Hopf para o sistema bidimensional

$$\begin{aligned} \dot{S} &= S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} \\ \dot{x}_1 &= \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - D_1 x_1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Lema 3.1 *Seja $K_0 = a_1 + 2\lambda_1$. O ponto de equilíbrio (λ_1, \hat{x}_1) de (3.1) assintoticamente estável para $K < K_0$, apresenta uma bifurcação de Hopf supercrítica em $K = K_0$. A órbita periódica da bifurcação é única para $K > K_0$, $K - K_0$ pequeno, e pode ser dada pela expressão em série*

$$\begin{aligned} S(t; \varepsilon) &= \tilde{S}(r; \varepsilon) = \lambda_1 + \varepsilon \cos r + \varepsilon^2 \bar{S}(r) + \dots \\ x_1(t; \varepsilon) &= \tilde{x}_1(r; \varepsilon) = \hat{x}_1 + \varepsilon \frac{\beta_0}{D_1} \sin r + \varepsilon^2 \bar{x}(r) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{t}{\omega} \\
K &= K_0 + \varepsilon^2 \bar{K} + \dots \quad \text{onde } \bar{K} > 0 \\
\omega &= \frac{1}{\beta_0} + \varepsilon^2 \bar{\omega} + \dots \\
\beta_0 &= \sqrt{D_1 \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1}}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

As expressões (3.2) convergem quando $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, para algum $\varepsilon_0 > 0$, mas toda a informação esta contida em (3.2) para $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$. De fato, $K(\varepsilon)$ e $\omega(\varepsilon)$ são funções pares de ε e $(S(t; -\varepsilon), x_1(t; -\varepsilon))$ é uma traslação de $(S(t; \varepsilon), x_1(t; \varepsilon))$.

Demonstração. Para simplificar os cálculos, multipliquemos o sistema (3.1) por $K(a_1 + S)$, obtendo

$$\begin{aligned}
K(a_1 + S)\dot{S} &= Ka_1S + (K - a_1)S^2 - S^3 - Km_1x_1S \\
K(a_1 + S)\dot{x}_1 &= (m_1 - D_1)KSx_1 - Ka_1D_1x_1
\end{aligned}$$

Inicialmente, aplicamos uma traslação, levando o ponto de equilíbrio na origem, isto é, tomamos

$$y_1 = S - \lambda_1, \quad y_2 = x_1 - \hat{x}_1, \quad k = K - K_0$$

no sistema (3.1). Obtemos

$$\begin{aligned}
K(a_1 + y_1 + \lambda_1)\dot{y}_1 &= -\frac{a_1^2 m_1 D_1 (m_1 + D_1)}{(m_1 - D_1)^2} y_2 + \frac{a_1 D_1}{m_1 - D_1} y_1 k - \frac{m_1 a_1 D_1}{m_1 - D_1} y_2 k \\
&\quad - \frac{a_1 m_1 (m_1 + D_1)}{m_1 - D_1} y_1 y_2 - m_1 y_1 y_2 k - \frac{a_1 D_1}{m_1 - D_1} y_1^2 + k y_1^2 - y_1^3.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, para a segunda equação obtemos

$$K(a_1 + y_1 + \lambda_1)\dot{y}_2 = \frac{a_1^2 m_1}{(m_1 - D_1)^2} y_1 + a_1 k y_1 + (m_1 - D_1) k y_1 y_2 + a_1 (m_1 + D_1) y_1 y_2.$$

Agora, para $|k| \ll 1$ e $|y_1| \ll 1$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K(a_1 + y_1 + \lambda_1)} &= \frac{1}{(a_1 + 2\lambda_1) \left[1 + \frac{k}{a_1 + 2\lambda_1}\right]} \frac{1}{(a_1 + \lambda_1) \left[1 + \frac{y_1}{a_1 + \lambda_1}\right]} \\
&= \frac{1}{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + 2\lambda_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-k}{a_1 + 2\lambda_1}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-y_1}{a_1 + \lambda_1}\right)^n \\
&= \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1^2 m_1 (m_1 + D_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-k}{a_1 + 2\lambda_1}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-y_1}{a_1 + \lambda_1}\right)^n
\end{aligned}$$

Pondo $P(y_1, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-k}{a_1 + 2\lambda_1}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-y_1}{a_1 + \lambda_1}\right)^n$, temos

$$\begin{aligned}
P(y_1, k) &= \left[1 - \frac{k}{a_1 + 2\lambda_1} + \frac{k^2}{(a_1 + 2\lambda_1)^2} - \dots \right] \cdot \left[1 - \frac{y_1}{a_1 + \lambda_1} + \frac{y_1^2}{(a_1 + \lambda_1)^2} - \dots \right] \\
&= 1 - \frac{y_1}{a_1 + \lambda_1} + \frac{y_1^2}{(a_1 + \lambda_1)^2} - \frac{k}{a_1 + 2\lambda_1} + \frac{ky_1}{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + 2\lambda_1)} \\
&\quad - \frac{ky_1^2}{(a_1 + 2\lambda_1)(a_1 + \lambda_1)^2} + \frac{k^2}{(a_1 + 2\lambda_1)^2} + o(|k|^3 + |y_1|^3) \\
&= 1 - \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1} y_1 + \left(\frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1} \right)^2 y_1^2 - \frac{(m_1 - D_1)k}{a_1(m_1 + D_1)} + \frac{(m_1 - D_1)^2 k}{a_1^2 m_1 (m_1 + D_1)} y_1 \\
&\quad - \frac{(m_1 - D_1)(m_1 + D_1)k}{a_1^3 m_1^2} y_1^2 + \left(\frac{m_1 - D_1}{a_1(m_1 + D_1)} \right)^2 k^2 + o(|k|^2 + |y_1|^2)
\end{aligned}$$

Substituindo, obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -D_1 y_2 + \frac{D_1 k (m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1 - \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} y_1 y_2 - \frac{D_1 (m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1^2 \\
&\quad - \frac{D_1 k^2 (m_1 - D_1)^2}{a_1^2 m_1 (m_1 + D_1)} y_1 + \frac{m_1 + 2D_1}{a_1^2 m_1^2} \left(\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} \right)^2 k y_1^2 - \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^3 \\
&\quad + \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2} y_1^2 y_2 + \dots \tag{3.3} \\
\dot{y}_2 &= \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} y_1 + \frac{D_1 k}{a_1 m_1} \left(\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} \right)^2 y_1 + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} y_1 y_2 - \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1^2 \\
&\quad + \frac{D_1 k^2}{a_1^2 m_1} \left(\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} \right)^2 y_1 - \frac{D_1 k (m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^2 + \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^3 \\
&\quad - \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2} y_1^2 y_2 + \dots
\end{aligned}$$

ou equivalentemente, na forma matricial,

$$\dot{y} = A_0 y + k A_1 y + Q_0(y, y) + k^2 A_2 y + k Q_1(y, y) + C_0(y, y, y) + \dots,$$

onde

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 \\ \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{D_1 (m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} & 0 \\ \frac{D_1}{a_1 m_1} \left(\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} \right)^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_0(y, y) = \begin{pmatrix} -\frac{D_1 (m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1^2 - \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} y_1 y_2 \\ -\frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1^2 + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} y_1 y_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{D_1 (m_1 - D_1)^2}{a_1^2 m_1 (m_1 + D_1)} & 0 \\ -\frac{D_1}{a_1^2 m_1} \left(\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} \right)^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_1(y, y) = \begin{pmatrix} -\frac{D_1^2}{a_1^2 m_1^2} \left(\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} \right)^2 y_1^2 \\ -\frac{D_1 (m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)^2} y_1^2 \end{pmatrix}, \quad C_0(y, y, y) = \begin{pmatrix} -\frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^3 + \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2} y_1^2 y_2 \\ \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^3 - \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2} y_1^2 y_2 \end{pmatrix}.$$

e os demais termos são combinações de potências de expoente maior ou igual a quatro.

Observe que $\pm i\beta_0 = \pm i\sqrt{D_1 \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1}}$ são as raízes características de A_0 . Seja $q_0 = (q_{01}, q_{02})$ tal que $A_0 q_0 = \mu q_0$, ou seja o autovetor correspondente ao autovalor $\mu = i\beta_0$. Então

$$\begin{pmatrix} 0 & -D_1 \\ \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} i\beta_0,$$

e assim

$$q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\beta_0}{D_1} \end{pmatrix}.$$

Fazendo uma mudança de escala do tempo, $t = \omega\tau$, onde $\omega > 0$ é um parâmetro a ser determinado, obtemos o sistema

$$\dot{y} = \omega A_0 y + \omega k A_1 y + \omega Q_0(y, y) + \omega k^2 A_2 y + \omega k Q_1(y, y) + \omega C_0(y, y, y) + \dots \quad (3.4)$$

para o qual procuramos uma solução periódica de período 2π .

Consideremos as soluções de (3.4) na forma de série

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ k &= \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots \\ \omega &= \beta_0^{-1} + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Inserindo (3.5) em (3.4) e igualando os coeficientes dos termos de mesma potência de ε , podemos resolver as equações que darão como resultado os coeficientes de (3.5):

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_1 + \varepsilon^2 \dot{u}_2 + \dots &= (\beta_0^{-1} + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) A_0 (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + (\beta_0^{-1} + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \\ &\quad (\varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots) A_1 (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + (\beta_0^{-1} + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) Q_0(y, y) + \dots \\ &= \frac{1}{\beta_0} A_0 u_1 \varepsilon + \frac{1}{\beta_0} A_0 u_1 \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon \omega_1 A_0 \varepsilon u_1 + \varepsilon \omega_1 A_0 \varepsilon^2 u_2 + \dots + \varepsilon^2 \omega_2 A_0 \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 \omega_2 A_0 \varepsilon^2 u_2 \dots \\ &= \frac{1}{\beta_0} A_0 u_1 \varepsilon + (\beta_0^{-1} A_0 u_2 + \omega_1 A_0 u_1 + \beta_0^{-1} k_1 A_1 u_1 + \beta_0^{-1} Q_0(u_1, u_1)) \varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{\beta_0} A_0 u_1 \quad , \quad u_1(0) = u_1(2\pi).$$

Resolvendo a equação acima temos

$$u_1(t) = \text{Re}(q_0 e^{it}) = \text{Re} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \frac{\beta_0}{D_1} \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) \right) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\beta_0}{D_1} \sin t \end{pmatrix}$$

Também temos

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 - \beta_0^{-1} A_0 u_2 &= \omega_1 A_0 \text{Re}(q_0 e^{it}) + \frac{k_1}{\beta_0} A_1 \text{Re}(q_0 e^{it}) + \frac{1}{\beta_0} Q_0(\text{Re} q_0 e^{it}, \text{Re} q_0 e^{it}) \\ &= \text{Re} \left(\frac{k_1}{\beta_0} A_1 e^{it} + \omega_1 A_0 q_0 e^{it} \right) + \frac{1}{\beta_0} Q_0(\text{Re} q_0 e^{it}, \text{Re} q_0 e^{it}) \\ &= \frac{k_1}{\beta_0} A_1 \cos t - \omega_1 q_0 \beta_0 \sin t + \frac{1}{\beta_0} Q_0(\text{Re} q_0 e^{it}, \text{Re} q_0 e^{it}) \\ &= \frac{1}{2} e^{it} \left(\frac{k_1}{\beta_0} A_1 q_0 + i \omega_1 \beta_0 q_0 \right) + \frac{1}{2} e^{-it} \left(\frac{k_1}{\beta_0} A_1 q_0 - i \omega_1 \beta_0 q_0 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\beta_0} (e^{2it} Q_0(q_0, q_0) + 2Q_0(q_0, \bar{q}_0) + e^{-2it} Q_0(\bar{q}_0, \bar{q}_0)) \end{aligned}$$

e, portanto, u_2 é solução da equação diferencial de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 - \beta_0^{-1} A_0 u_2 &= \frac{1}{2} e^{it} \left(\frac{k_1}{\beta_0} A_1 q_0 + i\omega_1 \beta_0 q_0 \right) + \frac{1}{2} \overline{e^{it} \left(\frac{k_1}{\beta_0} A_1 q_0 + i\omega_1 \beta_0 q_0 \right)} \\ &+ \frac{1}{4\beta_0} \left(e^{2it} Q_0(q_0, q_0) + 2Q_0(q_0, \bar{q}_0) + e^{-2it} Q_0(\bar{q}_0, \bar{q}_0) \right) \\ u_2(0) &= u_2(2\pi). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Seja $x_0 \neq 0$ tal que $A_0^T x_0 = -i\beta_0 x_0$ com $\langle q_0, \bar{x}_0 \rangle = 1$:

$$\begin{pmatrix} i\beta_0 & \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} \\ -D_1 & i\beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$x_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{D_1 \frac{m_1 + D_1}{m_1 - D_1}} \end{pmatrix}.$$

Agora, como o lado direito $g(t)$ de (3.6) é uma função 2π -periódica, pela Alternativa de Fredholm, a equação (3.6) tem solução 2π -periódica se e somente se $\int_0^{2\pi} \langle g(t), z(t) \rangle dt = 0$, para toda solução 2π -periódica $z(t)$ da equação adjunta da equação homogênea correspondente a (3.6), ou seja, $\dot{v}_2 = -\frac{1}{\beta_0} A_0^T v_2$. Como as soluções 2π -periódicas da equação adjunta são combinações lineares de funções e^{it} e e^{-it} , é necessário e suficiente que $\int_0^{2\pi} \langle g(t), e^{\pm it} v \rangle dt = 0$. Como $\int_0^{2\pi} e^{int} e^{\pm it} dt = 0$, para $n \neq \pm 1$, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \langle g(t), z(t) \rangle dt = \pi \left(\frac{k_1}{\beta_0} A_1 q_0 + i\omega_1 \beta_0 q_0 \right) v,$$

onde $v \in \mathbb{R}^2$ é arbitrário. Logo, devemos ter

$$\frac{k_1}{\beta_0} A_1 q_0 + i\omega_1 \beta_0 q_0 = 0.$$

Tomando produto escalar com x_0 , obtemos

$$\frac{k_1}{\beta_0} \langle A_1 q_0, x_0 \rangle + i\omega_1 \beta_0 = 0.$$

Agora,

$$\langle A_1 q_0, x_0 \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{D_1(m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} + i \frac{\beta_0^3}{a_1 m_1} \right] := b_1 + ib_2.$$

Substituindo, obtemos

$$\frac{k_1}{\beta_0} b_1 + i \left(\frac{k_1}{\beta_0} b_2 + \omega_1 \beta_0 \right) = 0.$$

Portanto, $k_1 = 0$ e $\omega_1 = 0$. Assim, o sistema (3.6) se escreve como

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 - \beta_0^{-1} A_0 u_2 &= \frac{1}{4\beta_0} \left(e^{2it} Q_0(q_0, p_0) + 2Q_0(q_0, \bar{q}_0) + e^{-2it} Q_0(\bar{q}_0, \bar{q}_0) \right) \\ u_2(0) &= u_2(2\pi), \end{aligned}$$

cuja solução é

$$u_2(t) = \operatorname{Re}(q_0 e^{it}) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(q_1 e^{2it}) + \frac{1}{2} q_2, \quad (3.7)$$

onde

$$q_1 = -\frac{1}{6} \left[\left(\begin{array}{c} \frac{2(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1 D_1} \\ \frac{2(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1 D_1} - \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} \end{array} \right) + i\beta_0 \left(\begin{array}{c} \frac{(m_1 - D_1)(m_1 + D_1 - 2)}{a_1 m_1 D_1} \\ \frac{(m_1 - D_1)(m_1 - 3D_1)}{a_1 m_1 D_1^2} \end{array} \right) \right],$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1} \\ -\frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} \end{array} \right).$$

Observe que

$$b_1 = \operatorname{Re}\langle A_1 q_0, x_0 \rangle = \frac{D_1(m_1 - D_1)}{2a_1 m_1 (m_1 + D_1)} \neq 0$$

é a condição de transversalidade da hipótese do Teorema de Bifurcação de Hopf. De fato, mostraremos que

$$\frac{d}{dk} \operatorname{Re}\mu(k)|_{k=0} = \operatorname{Re}\langle A_1 q_0, \bar{x}_0 \rangle,$$

onde $\mu = \mu(k)$ é o autovalor da parte linear que satisfaz $\mu(0) = 0$. Observe que $\frac{d}{dk} \operatorname{Re}\mu(k)|_{k=0} = \frac{d}{dK} \operatorname{Re}\mu(K)|_{K=K_0}$, onde $\mu = \mu(K)$ é a solução da equação

$$\mu^2 - a(K)\mu + b(K) = 0,$$

com

$$a(K) = \frac{\lambda_1}{K} \left(\frac{K - a_1 - 2\lambda_1}{a_1 + \lambda_1} \right) \quad \text{e} \quad b(K) = \frac{(K - \lambda_1)a_1 m_1^2 \lambda_1^2}{K D_1 (a_1 + \lambda_1)^3}.$$

Derivando a equação quadrática com respeito a K e do fato que $\mu(K_0) = i\beta_0$, obtemos

$$\frac{d\mu}{dK}(K_0) = \frac{1}{2} a'(K_0) + \frac{i}{2\beta_0} b'(K_0).$$

Como $b'(K_0)$ é um número real, obtemos que

$$\operatorname{Re} \frac{d\mu}{dK}(K_0) = \frac{1}{2} a'(K_0).$$

Sendo

$$a'(K_0) = \frac{\lambda_1}{K_0^2} \left(\frac{K_0 - a_1 - 2\lambda_1}{a_1 + \lambda_1} \right) + \frac{\lambda_1}{K_0} \frac{1}{a_1 + \lambda_1}$$

resulta que

$$\operatorname{Re} \frac{d\mu}{dK}(K_0) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{(a_1 + 2\lambda_1)(a_1 + \lambda_1)} = \frac{D_1(m_1 - D_1)}{2a_1 m_1 (m_1 + D_1)} = \operatorname{Re}\langle A_1 q_0, x_0 \rangle.$$

Logo, as hipóteses do Teorema de bifurcação de Hopf [13] estão satisfeitas. Podemos concluir que existe uma função de classe C^∞ $k : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(0, y_2, k(y_2))$ é uma órbita fechada de período $\approx 2\pi/\beta_0$ de Y_k para $y_2 \neq 0$ e tal que $k(0) = 0$.

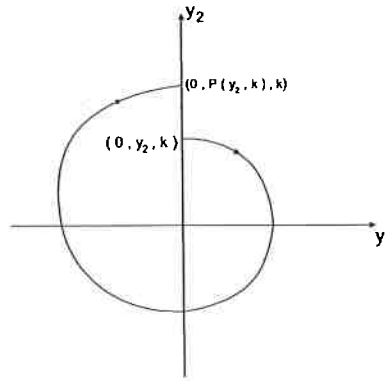


Figura 3.1: Aplicação de Poincaré.

Assim existe uma bifurcação de Hopf com ponto de bifurcação $K = K_0$, ou seja se $K < K_0$ temos que as órbitas apresentam um comportamento de foco e se $K > K_0$ apresenta uma órbita periódica.

Veamos agora a estabilidade e direção da bifurcação e para isso devemos mostrar que o equilíbrio $(0, 0)$ do sistema (3.3) é um “atrator fraco”. De acordo com Marsden e McCracken [13], o equilíbrio $(0, 0)$ é um atrator fraco de (3.3) (ou (λ_1, \hat{x}_1) é um atrator fraco para (3.1)) se $V'''(0) = \frac{d^3V}{dy_2^3}(0, 0) < 0$, sendo V a função de deslocamento definida como $V(y_2, k) = P(y_2, k) - y_2$, onde a aplicação $(0, y_2) \mapsto (0, P(y_2, k(y_2)))$ é a aplicação de Poincaré associado com a órbita fechada que passa por $(y_2, k(y_2))$ (Figura 3.1).

Considere o sistema (3.3) na seguinte forma

$$Y_k(y_1, y_2) = (Y_k^1(y_1, y_2), Y_k^2(y_1, y_2)) = (\dot{y}_1, \dot{y}_2),$$

onde k é o parâmetro de bifurcação.

Agora, para obter $V'''(0)$ usamos a seguinte expressão, obtida de [13]:

$$\begin{aligned} V'''(0) &= \frac{3\pi}{4|\mu_0|} \left(\frac{\partial^3 Y_0^1}{\partial y_1^3}(0, 0) + \frac{\partial^3 Y_0^1}{\partial y_1 \partial y_2^2}(0, 0) + \frac{\partial^3 Y_0^2}{\partial y_1^2 \partial y_2}(0, 0) + \frac{\partial^3 Y_0^2}{\partial y_2^3}(0, 0) \right) \\ &+ \frac{3\pi}{4|\mu_0|^2} \left(-\frac{\partial^2 Y_0^1}{\partial y_1^2}(0, 0) \frac{\partial^2 Y_0^1}{\partial y_1 \partial y_2}(0, 0) + \frac{\partial^2 Y_0^2}{\partial y_2^2}(0, 0) \frac{\partial^2 Y_0^2}{\partial y_1 \partial y_2}(0, 0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 Y_0^2}{\partial y_1^2}(0, 0) \frac{\partial^2 Y_0^2}{\partial y_1 \partial y_2}(0, 0) - \frac{\partial^2 Y_0^1}{\partial y_2^2}(0, 0) \frac{\partial^2 Y_0^1}{\partial y_1 \partial y_2}(0, 0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 Y_0^1}{\partial y_1^2}(0, 0) \frac{\partial^2 Y_0^2}{\partial y_1^2}(0, 0) + \frac{\partial^2 Y_0^1}{\partial y_2^2}(0, 0) \frac{\partial^2 Y_0^2}{\partial y_2^2}(0, 0) \right) \end{aligned}$$

Devemos fazer uma mudança de coordenadas tal que $dY_0(0, 0)$ tenha a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_0 \\ -\beta_0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\pm\beta_0 i$ são os autovalores correspondentes à matriz $DY_0(0,0)$. Para esse fim, devemos encontrar vetores \hat{e}_1 e \hat{e}_2 tais que $DY_0(0,0)\hat{e}_1 = -\beta_0\hat{e}_2$ e $DY_0(0,0)\hat{e}_2 = \beta_0\hat{e}_1$.

De fato, observe que, como $\beta_0 = \sqrt{D_1 \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1}}$, então $(\beta_0 i I - DX_0(0,0))v = 0$, para $v = (v_1, v_2)$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \beta_0 i & D_1 \\ -\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} & \beta_0 i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde obtemos facilmente que $v_2 = -\frac{\beta_0}{D_1} i v_1$. Logo, $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\beta_0}{D_1} \end{pmatrix}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} Y_0(y_1 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2) &= Y_0\left(y_1, -\frac{\beta_0}{D_1} y_2\right) \\ &= \left(\beta_0 y_2 + \frac{(m_1 - D_1)^2 \beta_0}{a_1 m_1 D_1} y_1 y_2 - \frac{D_1 (m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1^2 - \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m_1 - D_1)^3 \beta_0}{a_1^2 m_1^2 D_1} y_1^2 y_2 + \dots \right) \hat{e}_1 + \left(-\beta_0 y_1 + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} y_1 y_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m_1 - D_1) \beta_0}{a_1 m_1} y_1^2 - \frac{(m_1 - D_1)^2 \beta_0}{a_1^2 m_1^2} y_1^3 - \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2} y_1^2 y_2 + \dots \right) \hat{e}_2 \end{aligned}$$

Portanto, nas novas coordenadas temos que

$$\begin{aligned} Y_0^1(y_1, y_2) &= \beta_0 y_2 + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1 D_1} \beta_0 y_1 y_2 - \frac{D_1 (m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1^2 - \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^3 \\ &\quad - \frac{(m_1 - D_1)^3 \beta_0}{a_1^2 m_1^2 D_1} y_1^2 y_2 + \dots \\ Y_0^2(y_1, y_2) &= -\beta_0 y_1 + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} y_1 y_2 + \frac{(m_1 - D_1) \beta_0}{a_1 m_1} y_1^2 - \frac{(m_1 - D_1)^2 \beta_0}{a_1^2 m_1^2} y_1^3 \\ &\quad - \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2} y_1^2 y_2 + \dots \end{aligned}$$

Agora, determinamos o valor de $V'''(0)$, onde os valores das derivadas parciais da fórmula são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_0^1}{\partial y_1^2}(0,0) &= -\frac{2D_1(m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)}, \quad \frac{\partial^2 Y_0^1}{\partial y_1 \partial y_2}(0,0) = \frac{(m_1 - D_1)^2 \beta_0}{a_1 m_1 D_1}, \quad \frac{\partial^2 Y_0^1}{\partial y_2^2}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 Y_0^2}{\partial y_1^2}(0,0) &= \frac{2(m_1 - D_1) \beta_0}{a_1 m_1}, \quad \frac{\partial^2 Y_0^2}{\partial y_1 \partial y_2}(0,0) = \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1}, \quad \frac{\partial^2 Y_0^2}{\partial y_2^2}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 Y_0^1}{\partial y_1^3}(0,0) &= -\frac{6(m_1 - D_1)^2}{m_1^2 a_1^2 (m_1 + D_1)}, \quad \frac{\partial^3 Y_0^1}{\partial y_1 \partial y_1^2}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^3 Y_0^2}{\partial y_1^2 \partial y_2}(0,0) &= \frac{-2(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 Y_0^2}{\partial y_2^3}(0,0) = 0 \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas parciais obtidas acima em $V'''(0)$ tem-se

$$\begin{aligned}
V'''(0) &= \frac{3\pi}{4\beta_0} \left(-\frac{6(m_1 - D_1)^3}{m_1^2 a_1^2 (m_1 + D_1)} - \frac{2(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2} \right) \\
&+ \frac{3\pi}{4\beta_0^2} \left(\frac{2D_1(m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} \frac{(m_1 - D_1)^2 \beta_0}{a_1 m_1 D_1} - \frac{2(m_1 - D_1)\beta_0}{a_1 m_1} \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2D_1(m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} \frac{2(m_1 - D_1)\beta_0}{a_1 m_1} \right) \\
&= \frac{3\pi}{2\beta_0} \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} [-3(m_1 - D_1) - (m_1 - D_1)(m_1 + D_1)] \\
&+ \frac{3\pi}{2\beta_0^2} \frac{(m_1 - D_1)^2 \beta_0}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} [(m_1 - D_1) + (m_1 - D_1)(m_1 + D_1) - 2D_1] \\
&= \frac{3\pi}{2\beta_0} \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} [-2(m_1 + D_1) + 2D_1] \\
&= \frac{-3\pi}{\beta_0} \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1^2 m_1 (m_1 + D_1)} = \frac{-3\pi(m_1 - D_1)^2}{a_1^2 m_1 \sqrt{D_1(m_1 - D_1)(m_1 + D_1)}} < 0
\end{aligned}$$

Conclui-se daí que as órbitas periódicas são atratoras e a bifurcação é supercrítica [13]. Portanto, existe uma órbita periódica supercrítica $(\tilde{S}(r, \varepsilon), \tilde{x}_1(r, \varepsilon))$ dada por (3.2). \square

Consideremos agora a estabilidade da solução periódica dada por (3.2) e $x_2 = 0$ como solução de (2.3), isto é, da solução $p_\varepsilon(t) = (\tilde{S}(t, \varepsilon), \tilde{x}_1(t, \varepsilon), 0)$.

Lema 3.2 *A solução periódica $p_\varepsilon(t)$, onde \tilde{S} , \tilde{x}_1 são dadas por (3.2) e $x_2 = 0$, do sistema (2.3) é assintoticamente estável se*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2 \tilde{S}(r)}{a_2 + \tilde{S}(r)} - D_2 \right) dr < 0$$

e instável se

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2 \tilde{S}(r)}{a_2 + \tilde{S}(r)} - D_2 \right) dr > 0.$$

Demonstração. Seja $\dot{z} = DX(p_\varepsilon(t))z$ a linearização de (2.3) em volta de p_ε e seja $\Phi(t) = (\phi_{ij}(t))$ sua matriz fundamental que satisfaz $\Phi(0) = I$. Temos

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\tilde{S}}{K} - \frac{m_1 \tilde{x}_1 a_1}{(a_1 + \tilde{S})^2} & -\frac{m_1 \tilde{S}}{a_1 + \tilde{S}} & -\frac{m_2 \tilde{S}}{a_2 + \tilde{S}} \\ \frac{m_1 \tilde{x}_1 a_1}{(a_1 + \tilde{S})^2} & \frac{m_1 \tilde{S}}{a_1 + \tilde{S}} - D_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 \tilde{S}}{a_2 + \tilde{S}} - D_2 \end{pmatrix} \Phi(t). \quad (3.8)$$

Sendo $\dot{\phi}_{3j} = \left(\frac{m_2 \tilde{S}}{a_2 + \tilde{S}} - D_2 \right) \phi_{3j}$, $j = 1, 2, 3$, temos

$$\phi_{3j} = C_j \exp \int_0^t \left(\frac{m_2 \tilde{S}(\tau)}{a_2 + \tilde{S}(\tau)} - D_2 \right) d\tau$$

e como $\phi_{31}(0) = 0 = \phi_{32}(0)$ e $\phi_{33}(0) = 1$, temos que $\phi_{3j}(t) \equiv 0$ para todo t , $j = 1, 2$ e $\phi_{33} = \exp \int_0^t \left(\frac{m_2 \tilde{S}(\tau)}{a_2 + \tilde{S}(\tau)} - D_2 \right) d\tau$. Assim, Φ tem a forma

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ 0 & 0 & \exp \int_0^t \left(\frac{m_2 \tilde{S}(\tau)}{a_2 + \tilde{S}(\tau)} - D_2 \right) d\tau \end{pmatrix},$$

onde $\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}$ é precisamente a matriz fundamental principal da equação variacional 2-dimensional de (3.1) em volta da solução (\tilde{S}, \tilde{x}_1) . Portanto, os multiplicadores característicos de p_ε são as raízes do polinômio

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\Phi(2\pi\omega) - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} \phi_{11}(2\pi\omega) - \lambda & \phi_{12}(2\pi\omega) & z_1(2\pi\omega) \\ \phi_{21}(2\pi\omega) & \phi_{22}(2\pi\omega) - \lambda & z_2(2\pi\omega) \\ 0 & 0 & \exp \int_0^{2\pi\omega} \left(\frac{m_2 \tilde{S}}{a_2 + \tilde{S}} - D_2 \right) d\tau - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \det \left(\hat{\Phi}(2\pi\omega) - \lambda I \right) \left[\exp \int_0^{2\pi\omega} \left(\frac{m_2 \tilde{S}(\tau)}{a_2 + \tilde{S}(\tau)} - D_2 \right) d\tau - \lambda \right]. \end{aligned}$$

Logo, os multiplicadores característicos associados com (3.8) são precisamente os autovalores de $\hat{\Phi}(2\pi\omega)$ junto com

$$\lambda = \exp \int_0^{2\pi\omega} \left(\frac{m_2 \tilde{S}(\frac{\tau}{\omega})}{a_2 + \tilde{S}(\frac{\tau}{\omega})} - D_2 \right) d\tau = \exp \omega \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2 \tilde{S}(r)}{a_2 + \tilde{S}(r)} - D_2 \right) dr$$

Agora, pelo Lema 3.1, (\tilde{S}, \tilde{x}_1) é orbitalmente assintoticamente estável, o que implica que os autovalores de $\hat{\Phi}(2\pi\omega)$ são 1 e $|\mu_1| < 1$. Portanto, p_ε é orbitalmente assintoticamente estável (resp., instável) se $\lambda < 1$ (resp., $\lambda > 1$). \square

Com a ajuda do Lema 3.2, podemos determinar a estabilidade das soluções periódicas de Hopf consideradas como soluções do sistema 3-dimensional (3.1).

Definimos

$$G(\varepsilon) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2 \tilde{S}(r; \varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; \varepsilon)} - D_2 \right) dr. \quad (3.9)$$

Da expansão (2.3), temos

$$\begin{aligned} \frac{m_2 \tilde{S}(r; \varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; \varepsilon)} &= \frac{m_2 \lambda_1 + \varepsilon m_2 \cos r + \varepsilon^2 m_2 \bar{S}(r) + \dots}{a_2 + \lambda_1 + \varepsilon \cos r + \varepsilon^2 \bar{S}(r) + \dots} \\ &= \frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} + \varepsilon \frac{m_2 a_2}{(a_2 + \lambda_1)^2} \cos r + \varepsilon^2 \frac{a_2 m_2 ((a_2 + \lambda_1) \bar{S}(r) - \cos^2(r))}{(a_2 + \lambda_1)^3} + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

e de (3.7) temos

$$\int_0^{2\pi} \bar{S}(r) dr = \frac{m_1 - D_1}{2a_1 m_1}.$$

Substituindo na expressão (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} G(\varepsilon) &= \left(\frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - \frac{m_2 \lambda_2}{\lambda_2 + a_2} \right) + \frac{\varepsilon^2 m_2 a_2}{2(a_2 + \lambda_1)^3} \left((a_2 + \lambda_1) \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1} - 1 \right) + O(\varepsilon^3) \\ &= \left(\frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - \frac{m_2 \lambda_2}{\lambda_2 + a_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{m_2 a_2}{(a_2 + \lambda_1)^3} \varepsilon^2 \frac{(m_1 - D_1)(a_2 - a_1)}{a_1 m_1} + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

e portanto,

$$G(\varepsilon) = -\frac{m_2 a_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{m_2 a_2}{(a_2 + \lambda_1)^3} \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1} (a_2 - a_1) + O(\varepsilon^3) \quad (3.10)$$

determina a estabilidade da solução periódica $p(t) = (S(t; \varepsilon), x_1(t; \varepsilon), 0)$, essencialmente determinada pelo sinal de $\lambda_2 - \lambda_1$ exceto quando $|\lambda_2 - \lambda_1|$ é pequeno.

Nosso interesse é estudar uma possível bifurcação da solução periódica a partir de $(S(t; \varepsilon), x_1(t; \varepsilon), 0)$. Com isto em mente, seja

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \eta \quad (3.11)$$

e considere η como um pequeno parâmetro de bifurcação. Mais precisamente com λ_1 , a_2 , e D_2 fixados, consideremos m_2 variável como função de η , cuja expressão é

$$m_2 = m_2(\eta) = D_2 \left(1 + \frac{a_2}{\lambda_2} \right) = D_2 \left(1 + \frac{a_2}{\eta + \lambda_1} \right).$$

Vejamos para que valores de ε e η a solução periódica $(S(t; \varepsilon), x_1(t; \varepsilon), 0)$ é neutramente estável.

Definimos

$$H(\varepsilon, \eta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2(\eta) \tilde{S}(r; \varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; \varepsilon)} - D_2 \right) dr. \quad (3.12)$$

Como $\tilde{S}(r; -\varepsilon) = \tilde{S}(r; \varepsilon)$, temos que

$$\begin{aligned} H(-\varepsilon, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2(\eta) \tilde{S}(r; -\varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; -\varepsilon)} - D_2 \right) dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2(\eta) \tilde{S}(r; \varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; \varepsilon)} - D_2 \right) dr = H(\varepsilon, \eta) \end{aligned}$$

e, portanto, H é uma função par de ε .

Agora, a partir de (3.12) tem-se

$$H(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2(0) \tilde{S}(r; 0)}{a_2 + \tilde{S}(r; 0)} - D_2 \right) dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{D_2(1 + \frac{a_2}{\lambda_1}) \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - D_2 \right) dr = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m_2(\eta) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\tilde{S}(r; \varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; \varepsilon)} \right) dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m_2(\eta) a_2 \tilde{S}_\varepsilon(r, \varepsilon)}{(a_2 + \tilde{S}(r; \varepsilon))^2} dr$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m_2(0) a_2 \tilde{S}_\varepsilon(r, 0)}{(a_2 + \tilde{S}(r; 0))^2} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_2 \left(1 + \frac{a_2}{\lambda_1} \right) \frac{a_2 \cos r}{(a_2 + \lambda_1)^2} dr = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta}(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{S}(r; \varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; \varepsilon)} m_2'(\eta) dr = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{S}(r; \varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; \varepsilon)} \frac{a_2 D_2}{(\eta + \lambda_1)^2} dr$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta}(0, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_1}{a_2 + \lambda_1} \frac{a_2 D_2}{\lambda_1^2} dr = -\frac{a_2 D_2}{\lambda_1(a_2 + \lambda_1)} \neq 0$$

Então, pelo Teorema da Função Implícita, existem $\varepsilon_0 > 0$, $\eta_0 > 0$ e uma única função $\eta : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow (-\eta_0, \eta_0)$ de classe C^∞ satisfazendo $\eta(0) = 0$ tal que $H(\varepsilon, \eta) = 0$ em $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\eta_0, \eta_0)$ se e somente se $\eta = \eta(\varepsilon)$.

Derivando a equação $H(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) = 0$ com respeito a ε , obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) + \frac{\partial H}{\partial \eta}(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) \frac{d\eta}{d\varepsilon}(\varepsilon) = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) + \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon \partial \eta}(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) \frac{d\eta}{d\varepsilon}(\varepsilon) \right] \frac{d\eta}{d\varepsilon}(\varepsilon) + \frac{\partial H}{\partial \eta}(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) \frac{d^2 \eta}{d\varepsilon^2}(\varepsilon) = 0$$

e calculando em $\varepsilon = 0$, obtemos

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 \eta}{d\varepsilon^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}(0, 0)}{\frac{\partial H}{\partial \eta}(0, 0)}.$$

De (3.10), temos que

$$\begin{aligned} H(\varepsilon, \eta) &= -\frac{m_2(\eta) a_2 \eta}{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{m_2(\eta) a_2}{(a_2 + \lambda_1)^3} \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1} (a_2 - a_1) + O(\varepsilon^3) \\ \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \eta) &= \varepsilon \frac{m_2(\eta) a_2}{(a_2 + \lambda_1)^3} \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1} (a_2 - a_1) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon, \eta) &= \frac{m_2(\eta) a_2}{(a_2 + \lambda_1)^3} \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1} (a_2 - a_1) + O(\varepsilon) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2}(0, 0) &= \frac{m_2(0) a_2}{(a_2 + \lambda_1)^3} \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1} (a_2 - a_1) \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{d^2\eta}{d\varepsilon^2}(0) = \frac{m_1 - D_1}{a_1 m_1 (a_2 + \lambda_1)} (a_2 - a_1) \equiv N(a_2 - a_1), \quad \text{onde } N > 0.$$

Seja $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, com $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno. Sendo $\tilde{S}(r; -\varepsilon) = \tilde{S}(r; \varepsilon)$ e H uma função par de ε , temos

$$\begin{aligned} 0 &= H(-\varepsilon, \eta(-\varepsilon)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2(\eta(-\varepsilon)) \tilde{S}(r; -\varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; -\varepsilon)} \right) dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2(\eta(-\varepsilon)) \tilde{S}(r; \varepsilon)}{a_2 + \tilde{S}(r; \varepsilon)} \right) dr = H(\varepsilon, \eta(-\varepsilon)) \end{aligned}$$

e, pela unicidade do Teorema da Função Implícita, segue que $\eta(\varepsilon) = \eta(-\varepsilon)$, para $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Portanto, a função $\eta(\varepsilon)$ é uma função par de ε . Usando a expansão

$$\eta(\varepsilon) = \eta(0) + \frac{d\eta}{d\varepsilon}(0)\varepsilon + \frac{1}{2!} \frac{d^2\eta}{d\varepsilon^2}(0)\varepsilon^2 + \frac{1}{4!} \frac{d^4\eta}{d\varepsilon^4}(0)\varepsilon^4 + \dots,$$

obtemos a expressão

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \eta(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 N(a_2 - a_1) + O(\varepsilon^4), \quad (3.13)$$

que parametriza a curva de estabilidade neutra da solução $(S(t; \varepsilon), x_1(t; \varepsilon), 0)$ de (2.3). Portanto, se $a_2 > a_1$ o diagrama de estabilidade para a solução periódica é como indicado na Figura 3.2.

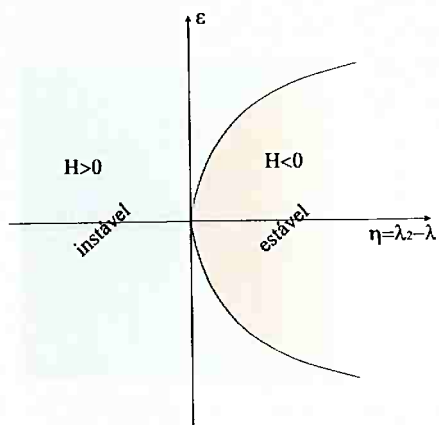


Figura 3.2: $a_2 > a_1$

O parâmetro ε não é natural em (2.3). Assim precisamos determinar a curva de estabilidade neutra no plano (K, η) . Usando as expansões (3.13) e (3.2) podemos escrever, para $K \geq K_0$, com $K - K_0 \ll 1$,

$$K - K_0 = \hat{f}(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 \bar{K} + o(|\varepsilon^2|), \quad \text{onde } \bar{K} > 0$$

e para $\varepsilon = 0$, tem-se $K - K_0 = 0$. Observe também que $\frac{df(\varepsilon^2)}{d(\varepsilon^2)} = \bar{K}$. Seja \hat{g} a inversa de \hat{f} . Então, $\varepsilon^2 = \hat{g}(K - K_0)$ e portanto

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\bar{K}}(K - K_0) + o(K - K_0).$$

Logo,

$$\eta = \eta(K) = \frac{1}{2}N(a_2 - a_1) \left(\frac{K - K_0}{\bar{K}} \right) + o(K - K_0) \tag{3.14}$$

Assim, no plano (K, η) temos o diagrama de estabilidade, como na Figura 3.3. De

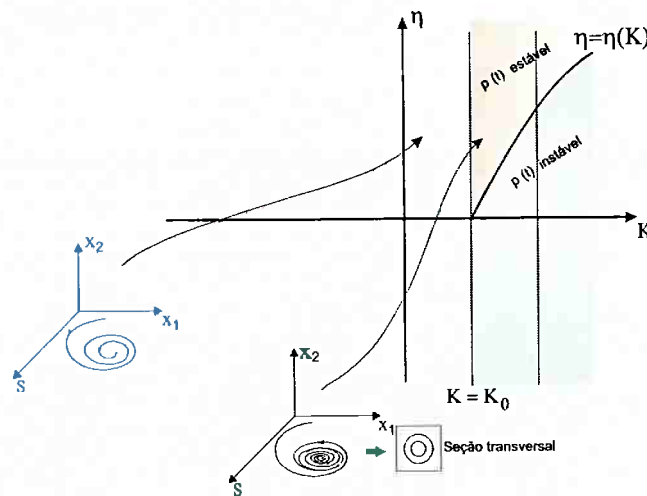


Figura 3.3: Diagrama de bifurcação nas variáveis K e η .

acordo com a Figura 3.3, se $a_2 > a_1$, podemos desestabilizar a bifurcação de Hopf no plano $x_2 = 0$ para um valor particular de $K > K_0$ próximo a K_0 decrescendo η e cortando a curva $\eta = \eta(K)$. O Lema 3.2 implica que a instabilidade aparece na direção de x_2 quando um multiplicador real abandona o interior do círculo unitário (Figura 3.4). Assim esperamos que quando η decresce por $\eta = \eta(K)$, uma solução periódica bifurcará da solução periódica estável supercrítica de Hopf no plano $x_2 = 0$ para o interior do primeiro octante.

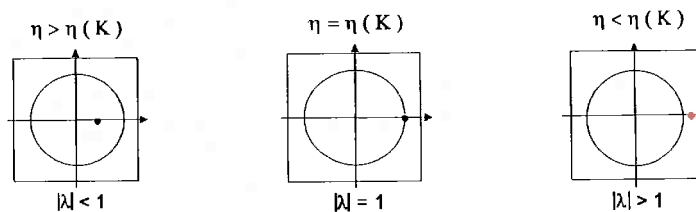


Figura 3.4: Círculo unitário

Teorema 3.1 *Seja K fixo, $K > K_0$ e $a_2 > a_1$, com $K - K_0$ e $a_2 - a_1$ suficientemente pequenos. Então, quando η decresce pelo valor $\eta(K) > 0$, uma solução periódica bifurca da solução periódica de Hopf do Lema 3.1 para o interior do primeiro octante. Esta solução é orbitalmente estável para $\eta(K) - \eta > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração. Fazendo uma mudança de variáveis $S = x_1$, $x_1 = x_2$ e $x_2 = y$, o sistema (2.3) se escreve na forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{m_1 x_1 x_2}{a_1 + x_1} - \frac{m_2(\eta) x_1 y}{a_2 + x_1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{m_1 x_1 x_2}{a_1 + x_1} - D_1 x_2 \\ \dot{y} &= \frac{m_2(\eta) x_1 y}{a_2 + x_1} - D_2 y\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x) + H(\eta, x, y) \\ \dot{y} &= G(\eta, x, y),\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{m_1 x_1 x_2}{a_1 + x_1} \\ \frac{m_1 x_1 x_2}{a_1 + x_1} - D_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad H(\eta, x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{m_2(\eta) x_1 y}{a_2 + x_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$G(\eta, x, y) = \left(\frac{m_2(\eta) x_1}{a_2 + x_1} - D_2 \right) y.$$

Note que $H(\eta, x, 0) \equiv 0 \equiv G(\eta, x, 0)$. Observe também que em (3.15) estamos ignorando a dependência de $F(x)$ em K , assim como os outros parâmetros, considerados fixos.

Seja $x = p(t)$ a solução periódica de Hopf de (3.1)

$$\dot{x} = F(x).\tag{3.16}$$

Pelo Lema 3.1 esta solução é assintoticamente estável.

Por uma mudança de coordenadas no espaço x (ver Figura 3.5), podemos supor que $p(0) = 0$, ou seja $p_1(0) = \lambda_1$ e $p_2(0) = x_1(0)$ no sistema Sx_1 .

Como $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ é solução periódica de (3.1), temos que $\dot{p}(t) = F(p(t))$, e portanto

$$\begin{aligned}(\dot{p}_1(0), \dot{p}_2(0)) &= F(\lambda_1, p_2(0)) = \left(\lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} - \frac{m_1 x_1(0)}{a_1 + \lambda_1}\right), x_1(0) \left(\frac{m_1 \lambda_1}{a_1 + \lambda_1} - D_1\right) \right) \\ &= \left(\lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_1}{K} - \frac{m_1 x_1(0)}{a_1 + \lambda_1}\right), 0 \right)\end{aligned}$$

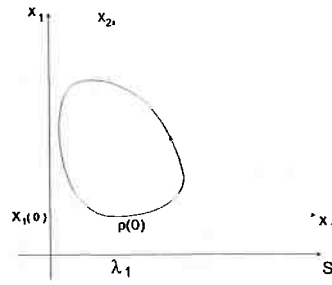


Figura 3.5: Mudança de coordenadas no plano.

assim podemos supor também que $\dot{p}(0) = (\dot{p}_1(0), 0)$.

Seja $\phi(t, (x, y); \eta)$ a solução de (3.15) satisfazendo $\phi(0, (x, y); \eta) = (x, y)$. Podemos definir uma aplicação de Poincaré $P : U \rightarrow V$ em uma vizinhança U de 0 no plano $H = \{(x_1, x_2, y) : x_1 = 0\}$ (Figura 3.6), onde V é uma vizinhança de 0 em H . P leva uma condição inicial próxima a 0 em H até a interseção seguinte com H . Mais precisamente, existe uma função suave $\tau(x_2, y, \eta)$, que é o primeiro instante para o qual a solução de (3.15) com condição inicial $(0, x_2, y)$ retorna a H , com $\tau(0, 0; \eta) \equiv \tau_0$, onde τ_0 é o menor período de $p(t)$.

Portanto, P pode ser dada por

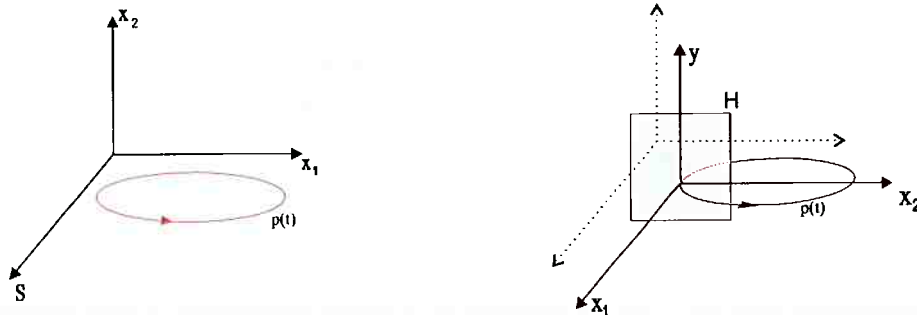
$$\begin{aligned} P(x_2, y; \eta) &= \phi(\tau(x_2, y; \eta), x_2, y; \eta) \\ P(0, 0; \eta) &= (0, 0) \end{aligned}$$

Seja $\bar{F} : U \times \mathbb{R} \rightarrow H$ definida por

$$\bar{F}(x_2, y; \eta) = (x_2, y) - P(x_2, y; \eta),$$

de modo que as soluções periódicas de (3.15) próximas a $p(t)$ correspondem aos zeros da aplicação \bar{F} .

Como o plano $y = 0$ é invariante por (3.15), $P = (P_1, P_2)$ satisfaz $P_2(x_2, 0; \eta) \equiv 0$ (Figura 3.7) e $P_1(x_2, 0, \eta)$ é independente de η .

Figura 3.6: $H = \{(x_1, x_2, y) : x_1 = 0\}$.

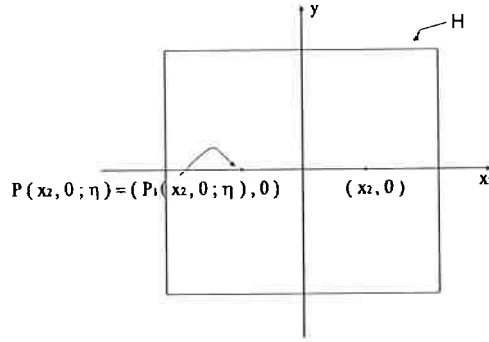


Figura 3.7: Seção transversal.

Portanto,

$$D_{x_2, y} P(0, 0; \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_2}(0, 0; \eta) & \frac{\partial P_1}{\partial y}(0, 0; \eta) \\ 0 & \frac{\partial P_2}{\partial y}(0, 0; \eta) \end{pmatrix}.$$

A estabilidade da órbita periódica dado pelo Lema 3.1, mostra que a derivada da aplicação de Poincaré satisfaz $0 < \frac{\partial P_1}{\partial x_2}(0, 0; \eta) < 1$.

Escrevendo $P_2(0, y; \eta) = \phi_3(\tau(0, y; \eta), 0, 0, y; \eta)$, temos

$$\frac{\partial P_2}{\partial y}(0, y; \eta) = \frac{\partial \phi_3}{\partial t}(\tau(0, 0; \eta), 0, 0, y; \eta) \frac{\partial \tau}{\partial y}(0, y; \eta) + \frac{\partial \phi_3}{\partial y}(\tau(0, 0; \eta), 0, 0, y; \eta).$$

Em vista de que $\phi(t, p(0), \eta) = (p(t), 0)$, para todo $t, \eta \in \mathbb{R}$, temos

$$\phi_3(t, 0, 0, 0; \eta) = 0 \quad \text{para todo } t, \eta \in \mathbb{R}$$

e portanto,

$$\frac{\partial P_2}{\partial y}(0, 0; \eta) = \frac{\partial \phi_3}{\partial y}(\tau(0, 0; \eta), 0, 0, 0; \eta) = \frac{\partial \phi_3}{\partial y}(\tau_0, 0, 0, 0; \eta).$$

Sendo ϕ_3 solução de $\dot{y} = G(\eta, x, y)$, temos $\dot{\phi}_3 = G(\eta, x, \phi_3)$. Assim, derivando com respeito a y , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y}(\eta, p_1(t), p_2(t), \phi_3(t)) = \frac{\partial G}{\partial y}(\eta, p_1(t), p_2(t), \phi_3(t)) \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial y},$$

donde

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial y}(\tau_0, 0, 0, 0; \eta) = \exp\left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial y}(\eta, p(s), 0) ds\right). \quad (3.17)$$

Lembrando que $\eta = \eta(\varepsilon)$ satisfaz $H(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) \equiv 0$, segue então

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial y}(\eta, p(s), 0) ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{m_2(\eta(\varepsilon))p_1(s)}{a_2 + p_1(s)} - D_2 \right) ds = 0$$

se $\eta = \eta(K) = \eta^*$, nos temos a orbita $p(t)$ no plano e $\tau_0 = 2\pi$, assim

$$\int_0^{\tau_0} \left(\frac{m_2(\eta^*)p_1(s)}{a_2 + p_1(s)} - D_2 \right) ds = 0.$$

Agora usaremos o seguinte Teorema, devido a Crandall e Rabinowitz [3], [4], para mostrar a existência de uma curva que será justamente o conjunto dos pontos fixos da aplicação de Poincaré.

Teorema 3.2 *Sejam X e Y espaços de Banach, V uma vizinhança de 0 em X e $F : (-1, 1) \times V \rightarrow Y$ com as seguintes propriedades*

- (a) $F(\eta, 0) = 0$, para todo $\eta \in (-1, 1)$;
- (b) As derivadas parciais F_η , F_x e $F_{\eta x}$ existem e são contínuas;
- (c) $\dim N(F_x(0, 0)) = \text{codim } R(F_x(0, 0)) = 1$;
- (d) $F_{\eta x}(0, 0) \cdot x_0 \notin R(F_x(0, 0))$, onde $N(F_x(0, 0)) = [x_0]$.

Se Z é um complemento de $N(F_x(0, 0))$ em X , então existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ em $\mathbb{R} \times X$, um intervalo $(-a, a)$ e funções continuamente diferenciáveis $\varphi : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : (-a, a) \rightarrow Z$ tal que $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, e se $x(s) = s\varphi(s) + \psi(s)$, então $F(\eta(s), x(s)) = 0$. Além disso, $F^{-1}(0)$ próximo a $(0, 0)$ consiste precisamente das curvas $x = 0$ e $(\eta(s), x(s))$, $s \in (-a, a)$.

Vamos aplicar o Teorema (3.2) com $X = Y = \mathbb{R}^2$ e $F = \bar{F}$ definida anteriormente. Temos $\bar{F}(0, 0; \eta) = 0$ e

$$D_{x_2, y} \bar{F} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_2} & 1 - \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \\ 0 & 1 - \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Se $\eta = \eta^* = \eta(K)$, temos que

$$1 - \frac{\partial P_2}{\partial y}(0, 0; \eta^*) = 1 - \frac{\partial \phi_3}{\partial y}(\tau_0, 0, 0, 0; \eta^*) = 1 - \exp \left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial y}(\eta^*, p(s), 0) ds \right) = 0,$$

e portanto $\dim N(D_{x_2, y} \bar{F}(0, 0; \eta^*)) = \text{codim } R(D_{x_2, y} \bar{F}(0, 0; \eta^*)) = 1$.

Agora, $u \in N(D_{x_2, y} \bar{F}(0, 0; \eta^*))$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e portanto, $u_1 = \frac{\partial P_1 / \partial y}{1 - \partial P_1 / \partial x_2} u_2$, de modo que $N(D_{x_2, y} \bar{F}(0, 0; \eta^*))$ é gerado pelo vetor

$$u = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial y} / (1 - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora verificaremos a condição de bifurcação

$$D_{(x_2, y), \eta} \bar{F}(0, 0; \eta^*) u \notin R(D_{x_2, y} \bar{F}(0, 0; \eta^*)).$$

Calculando diretamente, a imagem de $D_{x_2, y} \bar{F}$ apresenta a seguinte forma

$$R(D_{x_2, y} \bar{F}(0, 0; \eta^*)) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : b = 0 \right\}. \quad (3.18)$$

Como

$$D_{x_2, y, \eta} \bar{F}(0, 0; \eta^*) u = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial \eta}(0, 0; \eta^*) \\ 0 & -\frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial \eta}(0, 0; \eta^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial y} / (1 - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial \eta}(0, 0; \eta^*) \\ -\frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial \eta}(0, 0; \eta^*) \end{pmatrix},$$

temos que $D_{(x_2, y), \eta} \bar{F}(0, 0; \eta^*) u \notin R(D_{x_2, y} \bar{F}(0, 0; \eta^*))$ sempre que

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial \eta}(0, 0; \eta^*) \neq 0.$$

De (3.17), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial \eta}(0, 0; \eta^*) &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y \partial \eta}(\tau_0, 0, 0, 0; \eta^*) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\int_0^{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial y}(\eta^*, p(s), 0) ds \right] \\ &= \int_0^{\tau_0} \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \eta}(\eta, p(s), 0) ds \cdot \exp \left(\int_0^{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial y}(\eta^*, p(s), 0) ds \right) \\ &= \int_0^{\tau_0} \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \eta}(\eta, p(s), 0) ds. \end{aligned}$$

Como $G(\eta, x, y) = \left(\frac{m_2(\eta)x_1}{a_2 + x_1} - D_2 \right) y$, temos que

$$\frac{\partial G}{\partial y}(\eta, x, y) = \frac{m_2(\eta)x_1}{a_2 + x_1} - D_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \eta}(\eta^*, p(s), 0) = \frac{m'_2(\eta^*)x_1}{a_2 + x_1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial \eta}(0, 0; \eta^*) &= \int_0^{2\pi\omega} \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \eta}(\eta^*, p(s), 0) ds = \int_0^{2\pi\omega} \frac{m'_2(\eta^*)x_1}{a_2 + x_1} ds \\ &= m'_2(\eta^*) \int_0^{2\pi\omega} \frac{S(s)}{a_2 + S(s)} ds = m'_2(\eta^*)\omega \int_0^{2\pi} \frac{S(r)}{a_2 + S(r)} dr \\ &= m'_2(\eta^*)\omega \int_0^{2\pi} \frac{D_2}{m_2(\eta^*)} dr = m'_2(\eta^*)\omega \frac{D_2}{m_2(\eta^*)} 2\pi \\ &= \frac{m'_2(\eta^*)}{m_2(\eta^*)} D_2 2\pi\omega < 0 \end{aligned}$$

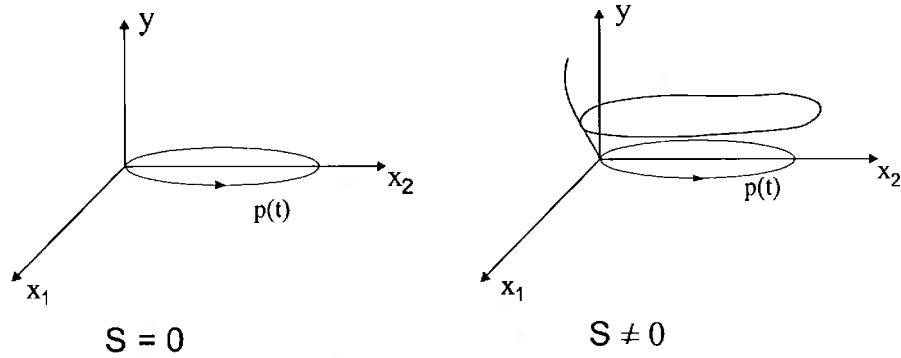


Figura 3.8: Os pontos fixos da transformação de Poincaré.

pois $m'_2(\eta^*) < 0$. Concluimos então que $D_{(x_2, y), \eta} \bar{F}(0, 0; \eta^*) \notin R(D_{x_2, y} \bar{F}(0, 0; \eta^*))$.

Agora pelo Teorema 3.2, se Z é um complemento de $N(D_{x_2, y} \bar{F}(0, 0; \eta^*))$, existe uma vizinhança U de $(0, 0; \eta^*)$, um intervalo $(-a, a)$, e funções continuamente diferenciáveis

$$\eta : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \tilde{\psi} : (-a, a) \rightarrow Z$$

tais que $\eta(0) = \eta^*$, $(x_2, y)(0) = (0, 0)$ e

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y \end{pmatrix} (s) = su + s\tilde{\psi}(s) \quad , \quad \eta = \eta(s),$$

isto é,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y \end{pmatrix} (s) &= s \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial y} / (1 - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}) \\ 1 \end{pmatrix} + o(s) \\ \eta(s) &= \eta^* + s\eta_1 + o(s) \quad , \quad \eta_1 = \eta'(0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sendo os zeros da transformação \bar{F} as curvas $(x_2, y) = (0, 0)$ e $(x_2(s), y(s); \eta(s))$.

A fim de mostrar que (3.19) corresponde a uma órbita periódica estável é suficiente mostrar que $\eta_1 < 0$.

Por um momento vamos assumir $\eta_1 < 0$ e começaremos a analisar (3.19).

Para $s = 0$ temos que $\eta = \eta^* = \eta(K)$.

Agora, para cada $s \neq 0$, existe $\gamma(\eta)$ autovalor de $D\bar{F}_{x_2, y}(\eta, 0)$ e $\mu(s)$ autovalor de $D\bar{F}_{x_2, y}(\eta(s), x(s))$, onde

$$D\bar{F}_{x_2, \eta}(\eta(s), x(s)) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}(x(s), \eta(s)) & \frac{\partial P_1}{\partial y}(x(s), \eta(s)) \\ 0 & 1 - \frac{\partial P_2}{\partial y}(x(s), \eta(s)) \end{pmatrix}$$

donde

$$\gamma(\eta) = 1 - \frac{\partial P_2}{\partial y}(0, 0; \eta) \quad \text{e} \quad \gamma'(\eta^*) = -\frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial \eta}(0, 0, \eta^*) > 0.$$

A fim de continuar com a análise, vamos a usar o seguinte teorema extraído também de [4]:

Teorema 3.3 *Sejam γ, μ funções definidas como acima. Se $\gamma(\eta^*) \neq 0$, então, próximo a $s = 0$, as funções $\mu(s)$ e $-s\eta'(s)\gamma'(\eta^*)$ têm os mesmos zeros, e, se $\mu(s) \neq 0$, têm o mesmo sinal. Mais precisamente*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s\eta'(s)\gamma'(\eta^*)}{\mu(s)} = 1.$$

Seja p_s a órbita correspondente a $(x_2(s), y(s); \eta(s))$. Se $\eta_1 < 0$, então a partir deste teorema e dos fatos já obtidos, podemos concluir que $\mu(s)$ e $-s\eta'(s)\gamma'(\eta^*)$ têm o mesmo sinal.

Como

$$\eta' < 0 \Rightarrow \text{quando } s > 0 : \mu(s) > 0 \text{ ou seja } \frac{\partial P_2}{\partial y} < 1 \Rightarrow p_s \text{ é estável}$$

$$\eta' < 0 \Rightarrow \text{quando } s < 0 : \mu(s) < 0 \text{ ou seja } \frac{\partial P_2}{\partial y} > 1 \Rightarrow p_s \text{ é instável}$$

pois $\mu(s) = 1 - \frac{\partial P_2}{\partial y}$.

Logo

$$\text{se } s > 0 \Rightarrow \eta < \eta(K) \Rightarrow p_s \text{ é estável}$$

$$\text{se } s < 0 \Rightarrow \eta > \eta(K) \Rightarrow p_s \text{ é instável.}$$

Assim temos que para $\eta < \eta(K)$ a órbita no plano vai perder a estabilidade, ganhando essa estabilidade a órbita periódica p_s no primeiro octante.

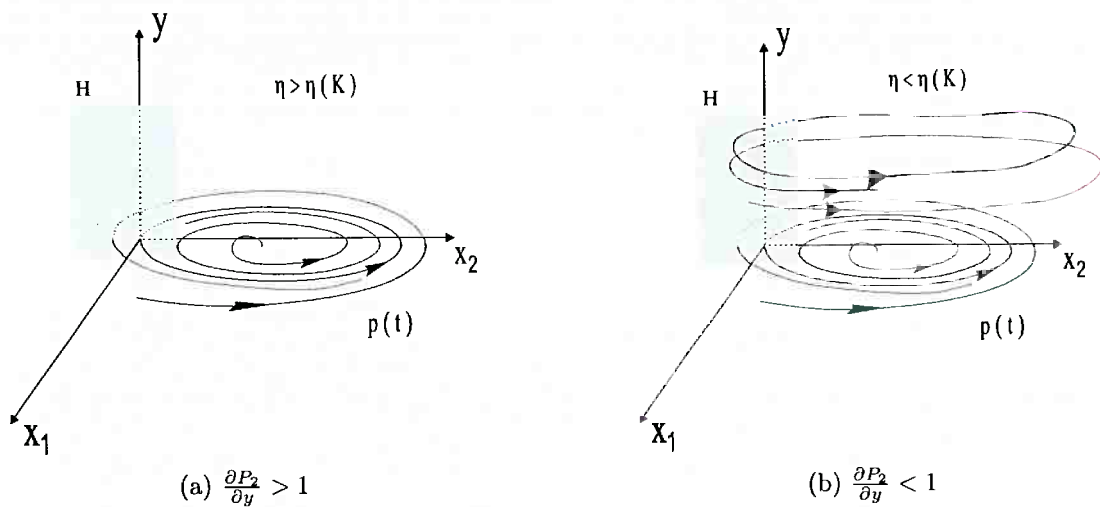


Figura 3.9: (a) Órbita periódica de Hopf $p(t)$ estável. (b) Órbita periódica p_s estável.

De agora em diante, vamos demonstrar que $\eta'(0) < 0$.

A solução periódica que obtemos pode ser representado pelas séries

$$\begin{aligned}\eta &= \eta^* + s\eta_1 + \dots \\ S(t) &= S_0(t) + sS_1(t) + \dots \\ x_1(t) &= x_{10}(t) + sx_{11}(t) + \dots \\ x_2(t) &= sx_{21}(t) + \dots,\end{aligned}\tag{3.20}$$

onde $\eta^* = \eta(K)$ e $(S_0(t), x_{10}(t))$ são translações da solução periódica de Hopf em (3.2) satisfazendo $S_0(0) = \lambda_1$ e $\dot{x}_{10}(0) = 0$.

Podemos fazer uso da maquinaria já iniciada na prova da bifurcação, sempre que identificamos a origem com o ponto $(\lambda_1, x_1(0), 0)$ e o hiperplano H com $S = \lambda_1$. Entretanto temporalmente retornamos à notação (S, x_1, x_2) voltando logo às variáveis (x_1, x_2, y) .

O período da solução (3.20) é

$$\tau \equiv \tau(x_1(0), x_2(0), \eta) \equiv \tau(s).$$

De (2.3) é claro que

$$g(s) = \int_0^{\tau(s)} \left(\frac{m_2(\eta)S(t)}{a_2 + S(t)} - D_2 \right) dt \equiv 0\tag{3.21}$$

pois $\int_0^{\tau(s)} \frac{\dot{x}_2}{x_2} dt = \log(x_2(\tau(s))) - \log(x_2(0)) = 0$.

Derivando (3.21), obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{ds} \int_0^{\tau(s)} \left(\frac{m_2(\eta)S(t)}{a_2 + S(t)} - D_2 \right) dt = \left(\frac{m_2(\eta(s))S(\tau(s))}{a_2 + S(\tau(s))} - D_2 \right) \frac{d\tau}{ds}(s) \\ &\quad + \int_0^{\tau(s)} \frac{m_2'(\eta(s))\eta'(s)S(t)}{a_2 + S(t)} dt + \int_0^{\tau(s)} \frac{m_2(\eta)a_2S'(t)}{(a_2 + S(t))^2} dt\end{aligned}$$

calculando o valor desta expressão em $s = 0$, resulta que

$$0 = \left(\frac{m_2(\eta^*)S(\tau(0))}{a_2 + S(\tau(0))} - D_2 \right) \frac{d\tau}{ds}(0) + \int_0^{\tau(0)} \frac{m_2'(\eta^*)\eta_1 S_0(t)}{a_2 + S_0(t)} dt + \int_0^{\tau(0)} \frac{m_2(\eta)a_2 S_1(t)}{(a_2 + S_0(t))^2} dt.$$

Agora, como

$$\int_0^{\tau(0)} \left(\frac{m_2(\eta^*)S_0(t)}{a_2 + S_0(t)} - D_2 \right) dt = 0,$$

segue que

$$\int_0^{\tau(0)} \frac{S_0(t)}{a_2 + S_0(t)} dt = \frac{1}{m_2(\eta^*)} D_2 \tau(0).$$

Portanto

$$\eta_1 \frac{m_2'(\eta^*)}{m_2(\eta^*)} D_2 \tau_0 = - \left(\frac{m_2(\eta^*) S(\tau_0)}{a_2 + S(\tau_0)} - D_2 \right) \frac{d\tau}{ds}(0) - m_2(\eta^*) a_2 \int_0^{\tau_0} \frac{S_1(t)}{(a_2 + S_0(t))^2} dt, \quad (3.22)$$

que é a equação que vamos usar para determinar o sinal de η_1 .

Como $\frac{\partial \tau}{\partial \eta}(x_{10}(0), 0, \eta^*) = 0$, temos

$$\frac{d\tau}{ds}(s) = \frac{\partial \tau}{\partial x_1}(x_1(0), x_2(0); \eta) \frac{dx_1}{ds}(s) + \frac{\partial \tau}{\partial x_2}(x_1(0), x_2(0); \eta) \frac{dx_2}{ds}(s) + \frac{\partial \tau}{\partial \eta}(x_1(0), x_2(0); \eta) \frac{d\eta}{ds}(s)$$

e

$$\frac{d\tau}{ds}(0) = \frac{\partial \tau}{\partial x_1}(x_{11}(0), 0; \eta^*) x_{11}(0) + \frac{\partial \tau}{\partial x_2}(x_{10}(0), 0; \eta^*) x_{21}(0). \quad (3.23)$$

As derivadas parciais de τ podem ser determinadas derivando a equação definida para τ :

$$\tau : \phi_1(\tau(x_1, x_2; \eta), 0, x_1, x_2; \eta) = \lambda_1$$

(nas variáveis (x_1, x_2, y) esta equação é $\phi_1 = 0$).

Por (3.19)

$$x_{11}(0) = \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial y}}{1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial y}}{1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}}(\tau(0), \lambda_1, x_{10}(0), 0; \eta^*) \quad \text{e} \quad x_{21}(0) = 1.$$

A fim de determinarmos $S(t)$ na expressão (3.20) escrevemos

$$\begin{aligned} S(t) &= \phi_1(t, s, x_1, x_2; \eta) \\ &= \phi_1(t, \lambda_1, x_{10}(0) + s \frac{\partial \phi_2}{\partial y} / (1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}) + \dots, s + \dots; \eta^* + s\eta_1 + \dots) \\ &= S_0(t) + s \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(t, \lambda_1, x_{10}(0) + \dots, s + \dots; \eta^* + s\eta_1 + \dots) \dot{x}_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \dot{y} \right) + \dots \\ &= S_0(t) + s \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(t, \lambda_1, x_{10}(0) + \dots, s + \dots; \eta^* + s\eta_1 + \dots) \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y} / (1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(t, \lambda_1, x_{10}(0) + \dots, s + \dots; \eta^* + s\eta_1 + \dots) \cdot 1 \right) + \dots, \end{aligned}$$

donde se obtém

$$S_1(t) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y} / (1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}.$$

Determinemos agora $\frac{d\tau}{ds}(0)$ para o que calculamos as derivadas parciais $\frac{\partial \tau}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial \tau}{\partial x_2}$ de

$$\phi_1(\tau(x_1, x_2; \eta), 0, x_1, x_2; \eta) = \lambda_1$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau(x_1, x_2; \eta), 0, x_1, x_2; \eta) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(\tau(x_1, x_2; \eta), 0, x_1, x_2; \eta) = 0$$

e

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau(x_1, x_2; \eta), 0, x_1, x_2; \eta) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(\tau(x_1, x_2; \eta), 0, x_1, x_2; \eta) = 0$$

logo

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} / \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_2} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} / \frac{\partial \phi_1}{\partial t}.$$

Substituindo estes resultados em (3.23) temos que

$$\frac{d\tau}{ds}(0) = -\frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial \phi_1}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial y}}{1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}}(\tau(0), \lambda_1, x_{10}(0), 0, \eta^*) - \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial y}}{\frac{\partial \phi_1}{\partial t}}.$$

Substituindo este resultado na equação (3.22), temos

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{m'_2(\eta^*)}{m_2(\eta^*)} D_2 \tau(0) &= - \left(\frac{m_2(\eta^*) S(\tau(0))}{a_2 + S(\tau(0))} - D_2 \right) \frac{d\tau}{ds}(0) - m_2(\eta^*) a_2 \int_0^{\tau(0)} \frac{S_1(t)}{(a_2 + S_0(t))^2} dt \\ &= - \left(\frac{m_2(\eta^*) S(\tau(0))}{a_2 + S(\tau(0))} - D_2 \right) \left(-\frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial y}}{\frac{\partial \phi_1}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial y}}{1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}}(\tau(0), \lambda_1, x_{10}(0), 0, \eta^*) - \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial y}}{\frac{\partial \phi_1}{\partial t}} \right) \\ &\quad - m_2(\eta^*) a_2 \int_0^{\tau(0)} \frac{1}{(a_2 + S_0(t))^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y} / (1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{m'_2(\eta^*)}{m_2(\eta^*)} D_2 \tau(0) \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0) \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) &= \\ &= \left(\frac{m_2(\eta^*) \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - D_2 \right) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(\tau_0) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\tau_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(\tau_0) \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) \right) \\ &\quad - m_2(\eta^*) a_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0) \int_0^{\tau_0} \frac{1}{(a_2 + S_0(t))^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(t) \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}\right) \right) dt \\ &= \left(\frac{D_2(\eta^* + \lambda_1 + a_2) \lambda_1}{(a_2 + \lambda_1)(\eta^* + \lambda_1)} - D_2 \right) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(\tau_0) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\tau_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(\tau_0) \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) \right) \\ &\quad - \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0) \frac{D_2(\eta^* + \lambda_1 + a_2) a_2}{\eta^* + \lambda_1} \int_0^{\tau_0} \frac{1}{(a_2 + S_0(t))^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\tau_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) \right) dt \\ &= \frac{-a_2 D_2 \eta^*}{(a_2 + \lambda_1)(\eta^* + \lambda_1)} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(\tau_0) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\tau_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(\tau_0) \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) \right) \\ &\quad - \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0) \frac{a_2 D_2(\eta^* + \lambda_1 + a_2)}{\eta^* + \lambda_1} \int_0^{\tau_0} \frac{1}{(a_2 + S_0(t))^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\tau_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) \right) dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\eta_1 \frac{m'_2(\eta^*)}{m_2(\eta^*)} D_2 \tau_0 \frac{\lambda_1 + \eta^*}{a_2 D_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0) \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) &= \\ &= \frac{\eta^*}{\lambda_1 + a_2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(\tau_0) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\tau_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(\tau_0) \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) \right) \quad (3.24) \\ &\quad + \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0) (\lambda_1 + \eta^* + a_2) \int_0^{\tau_0} \frac{1}{(a_2 + S_0(t))^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\tau_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) \right) dt \end{aligned}$$

ε (ou K) têm sido fixados; quase todos os símbolos em (3.24) são funções de ε com exceção de a_2 , λ_1 , D_2 , etc.

A expressão complicada do lado direito de (3.24) pode ser expandida somente em potência de ε . Portanto, iniciemos expandindo em potências de ε os termos do lado direito de (3.24):

$$\begin{aligned}
x_{10}(t) &= \frac{a_1 m_1}{(m_1 - D_1)(m_1 + D_1)} - \varepsilon \frac{\beta_0}{D_1} \cos \beta_0 t + \dots \\
S_0(t) &= \lambda_1 + \varepsilon \sin \beta_0 t + \dots \\
\tau_0 &= \frac{2\pi}{\beta_0} + \varepsilon^2 \tau_2 + \dots \\
\eta^* &= \frac{1}{2} N(a_2 - a_1) \varepsilon^2 + \dots \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0) &= \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(0) = S'_0(0) = \varepsilon \beta_0 + \dots \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(t) &= \psi_0(t) + \varepsilon \psi_1(t) + \dots \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(t) &= \delta_0(t) + \varepsilon \delta_1(t) + \dots \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(t) &= \gamma_0(t) + \varepsilon \gamma_1(t) + \dots \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(t) &= \rho_0(t) + \varepsilon \rho_1(t) + \dots
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Existem alguns termos de (3.24) que se anulam em $\varepsilon = 0$. Iniciemos considerando estes. Note que

$$1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0) = \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - P_1(x_2, 0))|_{x_2=0}.$$

A função $x_2 - P_1(x_2, 0)$ é a função deslocamento V dada na demonstração do Lema 3.1

$$x_2 - P_1(x_2, 0) = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial x_2^3}(0, 0) x_2^3 + \dots$$

que é negativa para $x_2 > 0$. Então

$$1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0) = \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 V}{\partial x_2^3}(0, 0) x_2^2 + \dots$$

Substituindo x_2 por ε , uma vez que eles coincidem em primeira ordem, temos

$$1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0) = \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 V}{\partial x_2^3}(0, 0) \varepsilon^2 + \dots$$

Como $\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0) = \varepsilon \beta_0 + \dots$, então os termos que multiplicam η_1 no lado esquerdo de (3.24) anulam-se numa ordem de ε^3 ; e podemos escrever o lado esquerdo como $g\varepsilon^3\eta_1$, onde $g = g(\varepsilon)$ satisfaz $\text{sign}(g(0)) = -1$.

Agora analisemos o lado direito de (3.24).

Considere a seguinte expressão, a qual é a última parcela do lado direito de (3.24),

$$* = \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0)(\lambda_1 + \eta^* + a_2) \int_0^{\tau(0)} \frac{1}{(a_2 + S_0(t))^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(t) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\tau_0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)\right) \right) dt.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a_2 + S_0(t))^2} &= \frac{1}{(a_2 + \lambda_1 + \varepsilon \sin \beta_0 t + \dots)^2} = \left(\frac{1}{a_2 + \lambda_1 + \varepsilon \sin \beta_0 t + \dots} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{a_2 + \lambda_1} - \frac{\sin \beta_0 t}{(a_2 + \lambda_1)^2} \varepsilon + \dots \right)^2 = \frac{1}{(a_2 + \lambda_1)^2} - \frac{2 \sin \beta_0 t}{(a_2 + \lambda_1)^3} \varepsilon + \dots \end{aligned}$$

inserindo (3.25) em * temos,

$$* = (\lambda_1 + \eta^* + a_2)(\varepsilon \beta_0 + \dots) \cdot \int_0^{\tau(0)} \left(\frac{1}{(a_2 + \lambda_1)^2} - \frac{2 \sin \beta_0 t}{(a_2 + \lambda_1)^3} \varepsilon + \dots \right) R(t) dt$$

onde

$$\begin{aligned} R(t) &= (\psi_0(t) + \varepsilon \psi_1(t) + \dots) \left(\rho_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \varepsilon \rho_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \dots \right) \\ &\quad + \left(1 - \delta_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) - \varepsilon \delta_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \dots \right) (\gamma_0(t) + \varepsilon \gamma_1(t) + \dots) \\ &= \psi_0(t) \rho_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \psi_0(t) \rho_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \varepsilon + \psi_1(t) \rho_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \varepsilon + \psi_1(t) \rho_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \varepsilon^2 + \dots \\ &\quad + \gamma_0(t) \left(1 - \delta_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right) + \gamma_1(t) \left(1 - \delta_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right) \varepsilon - \gamma_0(t) \delta_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \varepsilon - \gamma_1(t) \delta_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \varepsilon^2 + \dots \\ &= \psi_0(t) \rho_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \gamma_0(t) \left(1 - \delta_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right) + \left[\psi_0(t) \rho_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \psi_1(t) \rho_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1(t) \left(1 - \delta_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right) - \gamma_0(t) \delta_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right] \varepsilon + \left[\psi_1(t) \rho_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) - \gamma_1(t) \delta_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Como $\eta^* = O(\varepsilon^2)$ e $\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\tau_0) = O(\varepsilon)$, os termos de ordem inferior no lado direito de (3.24) são de ordem ε . Assim,

$$* = I_1 \varepsilon + I_2 \varepsilon^2 + I_3 \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$

onde

$$I_1 = (\lambda_1 + a_2) \beta_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \frac{1}{(a_2 + \lambda_1)^2} \left[\psi_0(t) \rho_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \gamma_0(t) \left(1 - \delta_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right) \right] dt,$$

$$I_2 = (\lambda_1 + a_2) \beta_0$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \frac{1}{(a_2 + \lambda_1)^2} \left[\psi_0 \rho_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \psi_1(t) \rho_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \gamma_1 \left(1 - \delta_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right) - \gamma_0 \delta_1 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right] dt \\ &\quad + (\lambda_1 + a_2) \beta_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} - \frac{2 \sin \beta_0 t}{(a_2 + \lambda_1)^3} \left[\psi_0(t) \rho_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) + \gamma_0(t) \left(1 - \delta_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right) \right] dt, \end{aligned}$$

$$I_3 = (\lambda_1 + a_2)\beta_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \frac{1}{(a_2 + \lambda_1)^2} [\psi_1(t)\rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) - \gamma_1(t)\delta_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right)] dt + (\lambda_1 + a_2)\beta_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} P(t) dt$$

com

$$P(t) = -\frac{2 \sin \beta_0 t}{(a_2 + \lambda_1)^3} [\psi_0(t)\rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) + \psi_1(t)\rho_0\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) + \gamma_1(t)(1 - \delta_0\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right)) - \gamma_0(t)\delta_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right)].$$

Consideremos o fluxo $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ de (2.3) e portanto satisfaz o sistema (3.3). Além disso, do sistema (3.25), considere

$$\begin{aligned} y_1 &= \varepsilon \sin \beta_0 t + \dots \\ y_2 &= -\varepsilon \frac{\beta_0}{D_1} \cos \beta_0 t + \dots \\ k &= \varepsilon^2 k_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Agora, derivando (3.3) calculado em $(\phi_1(t), \phi_2(t))$ com respeito a x_2 , e substituindo os valores obtidos em (3.25) e (3.26), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \psi'_0 + \varepsilon \psi'_1 + \dots &= -D_1 \delta_0 - \varepsilon D_1 \delta_1 - \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} [-\varepsilon \psi_0 \frac{\beta_0}{D_1} \cos \beta_0 t + \varepsilon \delta_0 \sin \beta_0 t] \\ &\quad - \frac{2D_1(m_1 - D_1)}{a_1 m_1(m_1 + D_1)} \varepsilon \psi_0 \sin \beta_0 t + O(\varepsilon^2) + \dots \\ \delta'_0 + \varepsilon \delta'_1 + \dots &= \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} [\psi_0 + \psi_1 \varepsilon] + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} [-\varepsilon \psi_0 \frac{\beta_0}{D_1} \cos \beta_0 t + \varepsilon \delta_0 \sin \beta_0 t] \\ &\quad - \frac{2(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1(m_1 + D_1)} \psi_0 \sin \beta_0 t + O(\varepsilon^2) + \dots \end{aligned}$$

Igualando os termos constantes, obtemos

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 \\ \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \delta_0(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \delta_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 \beta_0^{-1} \sin \beta_0 t \\ \cos \beta_0 t \end{pmatrix}.$$

Também

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= -D_1 \delta_1(t) - \frac{2D_1(m_1 - D_1)}{a_1 m_1(m_1 + D_1)} \sin(\beta_0 t) \psi_0(t) - \frac{(m_1 - D_1)^2 \beta_0}{a_1 m_1 D_1} \cos(\beta_0 t) \psi_0(t) \\ &\quad + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} \sin(\beta_0 t) \delta_0(t) \\ \delta'_1 &= \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} \psi_1(t) - \frac{2(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1(m_1 + D_1)} \sin(\beta_0 t) \psi_0(t) - \frac{(m_1 - D_1)^2 \beta_0}{a_1 m_1 D_1} \cos(\beta_0 t) \psi_0(t) \\ &\quad + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} \sin(\beta_0 t) \delta_0(t) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}'(t) &= A_0 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}(t) + B(t) \begin{pmatrix} -D_1 \beta_0^{-1} \sin \beta_0 t \\ \cos \beta_0 t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} B(t) &= \begin{pmatrix} a \sin \beta_0 t + b \cos \beta_0 t & c \sin \beta_0 t \\ d \sin \beta_0 t - b \cos \beta_0 t & -c \sin \beta_0 t \end{pmatrix}, \\ a &= -\frac{2D_1(m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} = \frac{-2\lambda_1}{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + 2\lambda_1)}, \\ b &= \frac{(m_1 - D_1)^2 \beta_0}{a_1 m_1 D_1} = \frac{m_1 a_1 \beta_0}{D_1 (a_1 + \lambda_1)^2}, \\ c &= -\frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} = \frac{-m_1 a_1}{(a_1 + \lambda_1)^2}, \\ d &= -\frac{2(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} = \frac{-2a_1}{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + 2\lambda_1)} \text{ e} \\ A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -D_1 \\ \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cuja solução é da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \delta_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_0 t & -\frac{D_1}{\beta_0} \sin \beta_0 t \\ \frac{\beta_0}{D_1} \sin \beta_0 t & \cos \beta_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{D_1}{3\beta_0^2}(-a + D_1 b - c) \sin^3 \beta_0 t + \frac{D_1}{3\beta_0^2} \left(b - \frac{\beta_0}{D_1} c\right) (\cos^3 \beta_0 t - 1) \\ &\quad + \frac{D_1^2}{\beta_0^2} d \left[\frac{1}{\beta_0} (\cos \beta_0 t - 1) - \frac{1}{3\beta_0} (\cos^3 \beta_0 t - 1) \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \frac{D_1}{3\beta_0^2} \left(\frac{\beta_0}{D_1} b - d - \frac{\beta_0^2}{D_1^2} c \right) \sin^3 \beta_0 t - \frac{D_1}{3\beta_0^2} \left(b - \frac{\beta_0}{D_1} c \right) (\cos^3 \beta_0 t - 1) \\ &\quad - a \left[\frac{1}{\beta_0} (\cos \beta_0 t - 1) - \frac{1}{3\beta_0} (\cos^3 \beta_0 t - 1) \right]. \end{aligned}$$

Como

$$0 = \rho_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) = \left(1 - \delta_0 \left(\frac{2\pi}{\beta_0} \right) \right) \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \psi_0(t) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \gamma_0(t) dt$$

segue que $I_1 = 0 = I_2$ e

$$P(t) = -\frac{2 \sin \beta_0 t}{(a_2 + \lambda_1)^3} [\psi_0(t) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) - \gamma_0(t) \delta_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right)].$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_3 &= (\lambda_1 + a_2) \beta_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \frac{1}{(a_2 + \lambda_1)^2} [\psi_1(t) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) - \gamma_1(t) \delta_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right)] dt \\ &\quad + (\lambda_1 + a_2) \beta_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} -\frac{2 \sin \beta_0 t}{(a_2 + \lambda_1)^3} [\psi_0(t) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) - \gamma_0(t) \delta_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right)] dt \end{aligned}$$

Das considerações anteriores de $1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\tau_0)$, temos $\delta_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) = 0$. Usando este fato e inserindo $\psi_0(t)$, $\gamma_0(t)$ na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} I_3 &= (\lambda_1 + a_2) \beta_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \frac{1}{(a_2 + \lambda_1)^2} \psi_1(t) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) dt \\ &\quad + (\lambda_1 + a_2) \beta_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \frac{-2}{(a_2 + \lambda_1)^3} \sin \beta_0 t (-D_1 \beta_0^{-1} \sin \beta_0 t) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) dt \\ &= \frac{\beta_0}{(a_2 + \lambda_1)^2} \left[(a_2 + \lambda_1) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \psi_1(t) dt + 2 \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) \frac{D_1}{\beta_0} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \sin^2 \beta_0 t dt \right] \\ &= \frac{\beta_0}{(a_2 + \lambda_1)^2} \left[(a_2 + \lambda_1) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \psi_1(t) dt + 2 \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) \frac{D_1}{\beta_0} \frac{\pi}{\beta_0} \right]. \end{aligned}$$

Assim, temos finalmente que

$$I_3 = \frac{\beta_0}{(a_2 + \lambda_1)^2} \left[(a_2 + \lambda_1) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \psi_1(t) dt + \frac{2\pi}{\beta_0^2} D_1 \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) \right]. \quad (3.27)$$

Agora, introduzindo a variável $x_2 = y_3$ no sistema (2.3) e considerando a translação para a origem, obtemos o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -D_1 y_2 - D_2 y_3 + \frac{D_1 k (m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1 - \frac{D_1 (m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1^2 - \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} y_1 y_2 \\ &\quad - \frac{m_2 a_2}{(a_2 + \lambda_1)^2} y_1 y_3 - \frac{D_1 k^2 (m_1 - D_1)^2}{a_1^2 m_1 (m_1 + D_1)} y_1 + \frac{m_1 + 2D_1}{m_1^2 a_1^2} \left(\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1}\right)^2 k y_1^2 \\ &\quad + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1^2 m_1^2} y_1^2 y_2 - \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^3 + \frac{a_2 m_2}{(a_2 + \lambda_1)^3} y_1^2 y_3 + \dots \\ \dot{y}_2 &= \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} y_1 + \frac{D_1 k}{a_1 m_1} \left(\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1}\right)^2 y_1 + \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} y_1 y_2 - \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} y_1^2 \\ &\quad + \frac{D_1 k^2}{a_1^2 m_1} \left(\frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1}\right)^2 y_1 - \frac{D_1 k (m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^2 + \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2 (m_1 + D_1)} y_1^3 \\ &\quad - \frac{(m_1 - D_1)^3}{a_1^2 m_1^2} y_1^2 y_2 + \dots \end{aligned}$$

Derivando o sistema obtido acima calculado em $(\phi_1(t), \phi_2(t))$ com respeito a y e inserindo as equações de (3.25) e (3.26), e observando que $\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \equiv 1$, tem-se

$$\begin{aligned}\gamma'_0 + \varepsilon \gamma'_1 + \dots &= -D_1 \rho_0 - D_2 - \varepsilon D_1 \rho_1 - \varepsilon \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} \left(\gamma_0 \frac{\beta_0}{D_1} \cos \beta_0 t + \rho_0 \sin \beta_0 t \right) \\ &\quad - \frac{2D_1(m_1 - D_1)}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} \varepsilon \gamma_0 \sin \beta_0 t + \varepsilon \frac{a_2 m_2}{(a_2 + \lambda_1)^2} (\gamma_0 + \sin \beta_0 t) + O(\varepsilon^2) \\ \rho'_0 + \varepsilon \rho'_1 + \dots &= \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} (\gamma_0 + \varepsilon \gamma_1) - \varepsilon \frac{(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1} \left(\gamma_0 \frac{\beta_0}{D_1} \cos \beta_0 t - \rho_0 \sin \beta_0 t \right) \\ &\quad - \varepsilon \frac{2(m_1 - D_1)^2}{a_1 m_1 (m_1 + D_1)} \gamma_0 \sin \beta_0 t + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} \gamma_0(t) \\ \rho_0(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 \\ \frac{m_1 - D_1}{m_1 + D_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0(t) \\ \rho_0(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cujas solução é dado por:

$$\begin{pmatrix} \gamma_0(t) \\ \rho_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-D_2}{\beta_0} \sin \beta_0 t \\ \frac{D_2}{D_1} (\cos \beta_0 t - 1) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \rho_1 \end{pmatrix}' = A_0 \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} + B(t) \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-D_2 a_2}{\beta_0 \lambda_1 (a_2 + \lambda_1)} [-D_2 \sin \beta_0 t + \beta_0 \sin \beta_0 t] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \rho_1 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cujas solução é da forma

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_0 t & -\frac{D_1}{\beta_0} \sin \beta_0 t \\ \frac{\beta_0}{D_1} \sin \beta_0 t & \cos \beta_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}g_1(t) &= \frac{1}{3\beta_0^2} (-D_2 a + \frac{D_1 D_2 b}{\beta_0} - D_2 c) \sin^3 \beta_0 t + \frac{D_2}{3\beta_0^2} (b - \frac{\beta_0}{D_1} c) (\cos^3 \beta_0 t - 1) \\ &\quad - \frac{1}{2\beta_0} \left(\frac{D_2}{D_1} c + \frac{a_2 D_2 (\beta_0 - D_2)}{\beta_0 \lambda_1 (a_2 + \lambda_1)} \right) \sin^2 \beta_0 t - \frac{D_1 D_2 d}{\beta_0^3} (1 - \cos \beta_0 t) + \frac{1}{3} (\cos^3 \beta_0 t - 1) \\ &\quad + \frac{D_2}{\beta_0} c \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{2\beta_0} \sin \beta_0 t \cos \beta_0 t \right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}g_2(t) &= \frac{1}{3\beta_0} \left(\frac{D_2 b}{D_1} - \frac{\beta_0 D_2 c}{D_1^2} - \frac{D_2 d}{\beta_0} \right) \sin^3 \beta_0 t - \frac{D_2}{3\beta_0} \left(\frac{1}{\beta_0} b - \frac{1}{D_1} c \right) (\cos^3 \beta_0 t - 1) \\ &\quad + \frac{D_2}{D_1} c \frac{1}{2\beta_0} \sin^2 \beta_0 t + \frac{D_2 a}{D_1} \left[\frac{1}{\beta_0} (1 - \cos \beta_0 t) + \frac{1}{3\beta_0} (\cos^3 \beta_0 t - 1) \right] \\ &\quad + \left(\frac{\beta_0 D_2}{D_1^2} c + \frac{a_2 D_2 (\beta_0 - D_2)}{D_1 \lambda_1 (a_2 + \lambda_1)} \right) \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{2\beta_0} \sin \beta_0 t \cos \beta_0 t \right).\end{aligned}$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta_0}} \psi_1(t) dt &= -\frac{2\pi D_1}{\beta_0^2(a_1 + \lambda_1)} \\ \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) &= \frac{D_2\pi}{D_1} \left[-\frac{a_1}{\lambda_1(a_1 + \lambda_1)} + \frac{a_2}{\lambda_1(a_2 + \lambda_1)} - \frac{a_2 D_2}{\beta_0 \lambda_1(a_2 + \lambda_1)} \right] \\ &= \frac{D_2\pi}{D_1} \left[\frac{a_2 - a_1}{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)} - \frac{a_2 D_2}{\beta_0 \lambda_1(a_2 + \lambda_1)} \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\beta_0}{(a_2 + \lambda_1)^2} \left[(a_2 + \lambda_1) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) \left(-\frac{2\pi D_1}{\beta_0^2(a_1 + \lambda_1)} \right) + \frac{2\pi}{\beta_0^2} D_1 \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) \right] \\ &= \frac{2\pi D_1}{\beta_0(a_2 + \lambda_1)^2} \left(-\frac{a_2 + \lambda_1}{a_1 + \lambda_1} + 1 \right) \rho_1\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) \\ &= \frac{2\pi D_1}{\beta_0(a_2 + \lambda_1)^2} \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + \lambda_1} \right) \frac{D_2\pi}{D_1} \left[\frac{a_2 - a_1}{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)} - \frac{a_2 D_2}{\beta_0 \lambda_1(a_2 + \lambda_1)} \right] \\ &= \frac{2\pi^2 D_2(a_2 - a_1)}{\beta_0(a_2 + \lambda_1)^3(a_1 + \lambda_1)^2} \left[\frac{(a_1 + \lambda_1)a_2 D_2}{\beta_0 \lambda_1} - (a_2 - a_1) \right] \\ &= \frac{2\pi^2 D_2(a_2 - a_1)}{\beta_0(a_2 + \lambda_1)^3(a_1 + \lambda_1)^2} \left[\frac{a_2 D_2 m_1}{D_1 \beta_0} - (a_2 - a_1) \right]. \end{aligned}$$

Portanto, $I_3 > 0$ sempre que

$$0 < a_2 - a_1 < \frac{a_2 D_2 m_1}{D_1 \beta_0}.$$

Em particular, $I_3 > 0$ para $a_2 - a_1$ suficientemente pequeno. Portanto, o coeficiente de ε^3 para o lado direito de (3.24) é positivo. Assim, conclui-se que $\eta_1 < 0$ para ε pequeno, o que completa a prova do teorema.

Consequentemente, uma solução periódica estável bifurca da solução periódica de Hopf para o interior do primeiro octante para $\eta(K) - \eta > 0$ suficientemente pequeno.

□

Referências Bibliográficas

- [1] Carmen Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag, New York, (1999).
- [2] W.A. Coppel, *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Heath, Boston, (1965).
- [3] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Funct. Anal., **8**, (1971), 321-340.
- [4] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability*, Arch. Rat. Mech. Anal., **52**, (1973), 161-180.
- [5] Miklós Farkas, *Zip Bifurcation in a Competition Model*, Methodos and Applications, **11**, (1984), 1295-1309.
- [6] Miklós Farkas, *Dynamical Models in Biology*, Academic Press, New York, (2001).
- [7] John Guckenheimer, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [8] S. B. Hsu, S. P. Hubbell and Paul Waltman, *Competing Predators*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **35**, (1978), 617-625.
- [9] S. B. Hsu, S. P. Hubbell and Paul Waltman, *A contribution to the theory of competing predators*, Ecol. Monogr., **48**, (1978), 337-349.
- [10] Arthur L. Koch, *Competitive coexistence of two predators utilizing the same prey under constant environmental conditions*, Journal of Theoretical Biology, **44**, (1974), 378-386.
- [11] Erwing Kreyszig, *Introductory Function Analysis with Applications*, John Wiley Sons. Inc., New York, (1978).
- [12] Yuri A.Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, Springer, New York, (1998).

-
- [13] J.E. Marsden and M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 2002.
- [14] Hal L. Smith, *The Interaction of steady state and hopf bifurcations in a two-predator-one-prey competition model*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **42**, (1982), 27-43.
- [15] Jorge Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Impa, Rio de Janeiro (1979).
- [16] D. R. Wilken: *Some remarks on a competing predator problem*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **42**, (1982), 895-902.