

Método de Galerkin descontínuo aplicado
a problemas de escoamento em meios
porosos heterogêneos com forças
capilares descontínuas

Luciane Inês Assmann Schuh

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Saulo Rabello Maciel de Barros
Coorientador: Prof. Dr. Igor Mozolevski

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2011

Método de Galerkin descontínuo aplicado
a problemas de escoamento em meios
porosos heterogêneos com forças
capilares descontínuas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Luciane Inês Assmann Schuh e aprovada pela Comissão Julgadora.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Saulo Rabello Maciel de Barros (IME-USP)
- Prof. Dr. Igor Mozolevski (UFSC)
- Profa. Dra. Margarete Oliveira Domingues (INPE)
- Prof. Dr. Abimael Fernando Dourado Loula (LNCC)
- Prof. Dr. Dan Marchesin (IMPA)

Agradecimentos

A minha família e em especial a meus Pais, Roque e Geni Assmann, pelos ensinamentos e princípios transmitidos. Também pelo carinho e afeto tão importantes nesta jornada.

A meu esposo e companheiro, Mauro Schuh, pelo apoio e incentivo dados para concretizar esse sonho. Pelo amor, carinho, amizade e compreensão.

Aos orientadores, Saulo R. M. Barros e Igor Mozolevski, pelos ensinamentos, sugestões, conselhos e pela confiança em mim depositada.

Aos colegas e amigos, que contribuíram com sua amizade e com os quais compartilhei bons momentos.

Aos membros da banca examinadora da defesa pela participação e pelas valiosas contribuições.

Manifesto também a minha gratidão a todos os professores que de uma forma ou outra contribuíram para minha formação científica.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

A presença de heterogeneidades tem influência significativa no processo de escoamento bifásico em meios porosos. Em particular, em reservatórios de petróleo, geralmente provocam a redução da taxa de recuperação de petróleo, pois o óleo tende a ficar acumulado nas interfaces formadas entre dois tipos de sedimentos com propriedades físicas diferentes. Estas bruscas variações nas propriedades do meio poroso levam ao aparecimento de forças capilares descontínuas, que por sua vez geram uma condição não-linear para pressão e saturação nas interfaces, tornando necessária a imposição desta condição na modelagem numérica deste tipo de problema. Como consequência dessas discontinuidades, a pressão global e a saturação podem apresentar fortes gradientes ou até serem descontínuas na interface, complicando significativamente a resolução dos respectivos modelos numéricos, que geralmente envolvem um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não-lineares para pressão e saturação.

Neste trabalho introduzimos uma formulação do método de Galerkin descontínuo para resolver problemas de escoamento bifásico, imiscível e incompressível em meios porosos heterogêneos com forças capilares descontínuas. O problema acoplado pressão-saturação é resolvido sequencialmente, utilizando as técnicas de média ponderada e média harmônica para lidar adequadamente com as heterogeneidades do meio poroso e com problemas degenerados. A equação para pressão é discretizada através de uma formulação simétrica do método de Galerkin descontínuo. Na equação para a saturação usamos o método de Euler implícito para discretização temporal, método de Galerkin descontínuo simétrico com médias ponderadas para a aproximação do termo difusivo degenerado e fluxo numérico de Godunov para o termo advectivo não-linear. Recuperamos a velocidade total do sistema através da reconstrução de fluxos no espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas-Nédélec. Impomos fracamente as condições de interface não-lineares por meio de um tratamento adequado dos termos de penalização que envolvem os saltos para pressão e saturação entre elementos.

O método proposto é utilizado para modelar problemas de escoamento em meios porosos homogêneos e heterogêneos em domínios unidimensionais e bidimensionais. O esquema numérico é validado para problemas em meios homogêneos e para problemas com forças capilares descontínuas, cuja solução exata é conhecida na literatura. São apresentados resultados numéricos para problemas reais de escoamento em que o método fornece aproximações precisas e estáveis, ilustrando seu potencial para resolução deste tipo de problemas.

Palavras-chave: método de elementos finitos, Galerkin descontínuo, escoamento bifásico, meios porosos heterogêneos, condição de interface, reconstrução de fluxos, média ponderada.

Abstract

The presence of heterogeneities has significant influence on two-phase flow in porous media. In particular, in secondary oil recovery problems, it generally causes a reduction in the recovery rate, because the oil tends to accumulate at the interface formed between two types of sediments with different physical properties. These abrupt changes in properties of porous media lead to the appearance of discontinuous capillary forces, which in turn generate a nonlinear condition for pressure and saturation at the interfaces that has to be imposed in the numerical models of such problem. As a consequence of the porous media heterogeneities, the global pressure and saturation may exhibit strong gradients or even be discontinuous at the interface, significantly complicating the numerical solution of such problems, which involve a coupled system of nonlinear partial differential equations for pressure and saturation.

In this work we introduce a formulation of the discontinuous Galerkin method to deal with immiscible, incompressible, two-phase flows in heterogeneous porous media with discontinuous capillary forces. The coupled pressure-saturation problem is solved sequentially, using weighted averages and harmonic mean techniques to cope appropriately with the heterogeneities in the porous media and with degenerate problems. For the pressure equation we use a standard discontinuous Galerkin method in symmetric formulation. In the saturation equation, a backward Euler method is employed for time discretization, combined with a symmetric discontinuous Galerkin method with weighted averages for the approximation of the degenerate diffusion term, and Godunov numerical flux for the nonlinear advective term. The total velocity of the system is recovered through the flux reconstruction in the Raviart-Thomas-Nédélec finite element space. The nonlinear interface conditions are imposed weakly, using an adequate treatment of the penalty terms that involve the interelement jumps in pressure and saturation.

The proposed method is used in the numerical simulation of two phase flow problems in homogeneous and heterogeneous porous media on one-dimensional and two-dimensional domains. The numerical method is validated for particular problems in homogeneous media and for problems with discontinuous capillary forces, with exact analytical solutions are known. Numerical results for realistic two-phase problems in heterogeneous porous media are presented. The method provides accurate and stable approximations, thereby illustrating its potential in the solution of this type of problems.

Keywords: finite element methods, discontinuous Galerkin, two-phase flows, heterogeneous porous media, interface condition, flux reconstruction, weighted averages.

Sumário

Lista de Símbolos	ix
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xxi
1 Introdução	1
2 Modelos de Escoamento Bifásico Imiscível e Incompressível em Meios Porosos	7
2.1 Definições físicas relacionadas aos fluidos e ao meio poroso	7
2.1.1 Lei de Darcy	12
2.1.2 Lei de conservação de massa	12
2.2 Modelo matemático para escoamentos bifásicos	13
2.3 Formulação Pressão-Saturação em meios porosos heterogêneos	16
2.3.1 Condições iniciais e condições de fronteira	18
2.3.2 Condições de interface	18
3 Método de Galerkin Descontínuo Sequencial com Reconstrução de Fluxos	23
3.1 Discretização espacial e temporal	23
3.1.1 Média ponderada e média harmônica	25
3.2 Método de Galerkin descontínuo sequencial	27
3.2.1 Pressão Global P	27
3.2.2 Velocidade total u	28
3.2.3 Saturação S	28
3.3 Reconstrução de fluxos	31
3.3.1 Projeção do fluxo no espaço de Brezzi-Douglas-Marini	32
3.3.2 Projeção do fluxo no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec	33
3.4 Estimativas de erro	34
3.5 Forma residual do método de Galerkin descontínuo	39
4 Escoamento em Meios Porosos Homogêneos: Domínio Unidimensional	41
4.1 Equação de Buckley-Leverett	41

4.1.1	Resultados numéricos	43
4.2	Solução quase analítica de McWhorter e Sunada	49
4.3	Problema acoplado pressão-saturação	50
4.3.1	Esquema numérico	51
4.3.2	Resultados numéricos	52
5	Escoamento em Meios Porosos Heterogêneos: Domínio Unidimensional	57
5.1	Validação do método numérico	57
5.1.1	Equação parabólica degenerada	58
5.1.2	Equação advecção-difusão degenerada para saturação	59
5.1.3	Análise do comportamento qualitativo	62
5.2	Resultados numéricos obtidos com a formulação pressão-saturação	65
5.2.1	Resultados obtidos em meios heterogêneos com várias interfaces	69
6	Escoamento em Meios Porosos Homogêneos: Domínio Bidimensional	75
6.1	Análise da ordem de convergência em 2D	75
6.2	Equação de Buckley-Leverett	78
6.3	Problema acoplado pressão-saturação	80
6.3.1	Escoamento horizontal	80
6.3.2	Five-Spot homogêneo	85
7	Escoamento em Meios Porosos Heterogêneos: Domínio Bidimensional	93
7.1	Escoamento horizontal heterogêneo	93
7.2	Five-spot heterogêneo	95
7.2.1	Estabilização transversal de primeira ordem e de alta ordem	100
8	Conclusões e Trabalhos Futuros	111
8.1	Conclusões	111
8.2	Trabalhos futuros	114
A	Um Maior Detalhamento da Implementação	115
A.1	Espaço de aproximação polinomial	116
A.2	Geração de malhas	117
A.2.1	Qualidade da malha	118
A.3	Escolha adaptativa do passo no tempo	119
A.4	Resolução numérica do problema acoplado pressão-saturação	121
B	Reconstrução de Fluxos no Espaço $RT_0(\mathcal{T}_h)$	125
	Referências Bibliográficas	129

Lista de Símbolos

P_α	Pressão do fluido α , $\alpha = w, n$, sendo que w refere-se ao fluido da fase molhante e n ao fluido da fase não-molhante
P	Pressão global
S_α	Saturação do fluido α , $\alpha = w, n$ satisfazendo $S_w + S_n = 1$
u_α	Velocidade do fluido α , $\alpha = w, n$
u_t	Velocidade total dada por $u_t = u_w + u_n$
q_α	Termo de fonte ou sorvedouro do fluido α , $\alpha = w, n$
$S_{\alpha r}$	Saturação residual do fluido α , $\alpha = w, n$
S_e	Saturação efetiva dada por $S_e = \frac{S_n - S_{nr}}{1 - S_{nr} - S_{wr}}$, $S_{nr} \leq S_n \leq 1 - S_{wr}$
ρ_α	Densidade do fluido α , $\alpha = w, n$
μ_α	Viscosidade do fluido α , $\alpha = w, n$
ϕ	Porosidade
K	Permeabilidade
K_α	Permeabilidade relativa do fluido α , $\alpha = w, n$
λ_α	Mobilidade do fluido α , $\alpha = w, n$ sendo definida por $\lambda_\alpha = \frac{K_\alpha}{\mu_\alpha}$
λ_t	Mobilidade total definida por $\lambda_t = \lambda_w + \lambda_n$
M_r	Razão entre as mobilidades, ou seja, $M_r = \frac{\lambda_w}{\lambda_n}$
f_n	Fluxo fracionário definido por $f_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_t}$
π	Pressão capilar dada pela diferença entre as pressões $\pi = P_n - P_w$
$\epsilon(S_n)$	Coefficiente do termo difusivo na equação para a saturação dado por $\lambda_w f_n K$
θ	Quantifica o tamanho dos poros no modelo de Brooks-Corey
P_e	Pressão de entrada no modelo de Brooks-Corey
t	Variável temporal
\mathbf{T}	Instante de tempo final
$Temp$	Temperatura
g	Constante gravitacional
∇D_z	Direção z da gravidade
Ω	Domínio limitado e aberto em \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega$
d	Dimensão do espaço
$\mathbf{n}_{\partial\Omega}$	Normal unitária exterior a $\partial\Omega$
Ω_β	Subdomínios de Ω definidos tal que $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^{N_l} \bar{\Omega}_i$, $N_l \geq 2$, e $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$
Γ_{ij}	Interface formada entre dois subdomínios Ω_i e Ω_j tal que $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, $i \neq j$

$\partial\Omega_\alpha^D$	Conjuntos sobre os quais devem ser impostas as condições de fronteira de Dirichlet para a pressão ($\alpha = p$) ou saturação ($\alpha = s$)
$\partial\Omega_\alpha^N$	Conjuntos sobre os quais devem ser impostas as condições de fronteira de Neumann para a pressão ($\alpha = p$) ou saturação ($\alpha = s$)
$\partial\Omega_s^-$	$= \{x \in \partial\Omega_s^D; u(x) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} < 0\}$ - entrada de fluxo
$\partial\Omega_s^+$	$= \{x \in \partial\Omega_s^D; u(x) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \geq 0\}$ - saída de fluxo
P_D, S_D	Condição de Dirichlet para a pressão e saturação, respectivamente
P_N, S_N	Condição de Neumann para a pressão e saturação, respectivamente
S_0	Condição inicial para a saturação S_n
G	Operador introduzido para impor as condições de interface para a pressão
J	Operador introduzido para impor as condições de interface para a saturação
t^m	Instante de tempo referente discretização temporal $\{t^m\}_{0 \leq m \leq N}$
Δt_{m+1}	$= t^{m+1} - t^m, m = 0, 1, \dots, N - 1$ - passo no tempo
\mathcal{T}_h	$= \{T_i\}_{1 \leq i \leq M}$, partição do domínio Ω tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{T}$
h_T	Diâmetro do elemento $T \in \mathcal{T}$
h	$\max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ - diâmetro da malha
\hat{T}	Elemento mestre fixo
\mathcal{A}_T	Aplicação afim tal que $T = \mathcal{A}_T(\hat{T})$
$r_{insc}(T)$	Raio do círculo inscrito no elemento $T \in \mathcal{T}_h$
$r_{cir}(T)$	Raio do círculo circuncrito ao elemento $T \in \mathcal{T}_h$
$\hat{\alpha}_i(T)$	$i = 1, 2, 3$, ângulos internos do elemento triangular $T \in \mathcal{T}_h$
A_T	Área do elemento triangular $T \in \mathcal{T}_h$
$q_i(T)$	$i = 1, 2, 3$, Fatores que medem a qualidade do elemento triangular $T \in \mathcal{T}_h$
\hat{q}_i	$= \min\{q_i(T) : T \in \mathcal{T}_h\}, i = 1, 2, 3,$
\bar{q}_i	$= \frac{1}{M} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} q_i(T), i = 1, 2, 3,$
\mathcal{F}_h	Conjunto de todas as $(d - 1)$ -faces abertas F de todos os elementos $T \in \mathcal{T}_h$
NT	Número total de faces na malha \mathcal{T}_h
\mathcal{F}_h^i	$= \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \Omega\}$ - conjunto das faces interiores
\mathcal{F}_h^Γ	$= \{F \in \mathcal{F}_h^i : F \subset \Gamma\}$ - conjunto das faces que cobrem a interface
\mathcal{F}_h^{i*}	$= \mathcal{F}_h^i \setminus \mathcal{F}_h^\Gamma$
\mathcal{F}_h^∂	$= \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \partial\Omega\}$ - conjuntos das faces sobre a fronteira
\mathcal{F}_{hp}^D	$= \{F \in \mathcal{F}_h^\partial : F \subset \partial\Omega_p^D\}$
\mathcal{F}_{hs}^D	$= \{F \in \mathcal{F}_h^\partial : F \subset \partial\Omega_s^D\}$
\mathcal{F}_{hp}^N	$= \{F \in \mathcal{F}_h^\partial : F \subset \partial\Omega_p^N\}$
\mathcal{F}_{hs}^N	$= \{F \in \mathcal{F}_h^\partial : F \subset \partial\Omega_s^N\}$
\mathcal{F}_{hs}^-	$= \{F \in \mathcal{F}_h^\partial : F \subset \partial\Omega_s^-\}$ - faces que cobrem as regiões de entrada de fluxo $\partial\Omega_s^-$
\mathcal{F}_{hs}^+	$= \{F \in \mathcal{F}_h^\partial : F \subset \partial\Omega_s^+\}$ - faces que cobrem as regiões de saída de fluxo $\partial\Omega_s^+$
h_F	Diâmetro da face $F \in \mathcal{F}_h$
\mathbf{n}_F	Normal unitária da face $F = \partial T^- \cup \partial T^+$, definida exterior ao elemento T^-

k_T	Grau de aproximação polinomial local
s_T	Índice de Sobolev local
$\mathbb{P}_k(\hat{T})$	$= \text{span}\{\hat{x}^\alpha : 0 \leq \alpha \leq k\}$ - espaço de polinômios de grau $k \geq 1$
$L^k(\Omega)$	$= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lebesgue mensurável}\}$
$W_k^s(\Omega)$	$= \{v \in L^k(\Omega); \partial^\alpha v \in L^k(\Omega), \alpha \leq k\}$, $1 \leq k < \infty$ - espaço de Sobolev
$H^s(\Omega)$	$= W_2^s(\Omega)$ - espaço de Hilbert
\mathcal{A}	$= \{\mathcal{A}_T : T \in \mathcal{T}_h\}$
k	$= \{k_T : T \in \mathcal{T}_h\}$
s	$= \{s_T : T \in \mathcal{T}_h\}$
$V_h^k(\Omega, \mathcal{A})$	$:= \{v \in L^2(\Omega); v _T \circ \mathcal{A}_T \in \mathbb{P}_{k_T}(\hat{T}), \text{ desde que } \mathcal{A}_T^{-1}(T) = \hat{T}; \forall T \in \mathcal{T}_h\}$
$H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$	$= \{v \in L^2(\Omega) : v _T \in H^{s_T}(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$ - espaço de Sobolev particionado
$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$	$= \{v \in [L^2(\Omega)]^d; \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}$
$\mathbf{RT}_l(\mathcal{T}_h)$	$= \{u_h \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, u_h _T \in [\mathbb{P}_l(T)]^d + x\mathbb{P}_l(T)\}$
a	Representa o coeficiente do termo difusivo
$\llbracket v \rrbracket$	$:= v _{T^-} - v _{T^+}$, salto da função v definida na face $F = \partial T^- \cup \partial T^+$
$\langle v \rangle$	$:= \frac{1}{2}(v _{T^-} + v _{T^+})$, média usual da função v definida na face $F = \partial T^- \cup \partial T^+$
$\langle v \rangle_\omega$	$:= \omega_{T^-, F} v^- + \omega_{T^+, F} v^+$, média ponderada de v definida em $F = \partial T^- \cup \partial T^+$
$\langle a \rangle_F$	$:= \frac{2a_{T^-, F} a_{T^+, F}}{a_{T^-, F} + a_{T^+, F}}$, média harmônica
$\omega_{T^-, F}$	$:= \frac{a_{T^+, F}}{a_{T^-, F} + a_{T^+, F}}$, peso referente à média ponderada
$\omega_{T^+, F}$	$:= \frac{a_{T^-, F}}{a_{T^-, F} + a_{T^+, F}}$, peso referente à média ponderada
$\gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F}$	Parâmetro de penalização para a pressão, sendo $\gamma_F = \langle a \rangle_F$, $\sigma_F = \tilde{\sigma} k^2$, $\tilde{\sigma} > 0$
$\delta_F \frac{\sigma_F}{h_F}$	Parâmetro de penalização para a saturação, sendo $\delta_F = \langle a \rangle_F$, $\sigma_F = \tilde{\sigma} k^2$, $\tilde{\sigma} > 0$
ϑ	$\in \{-1, 0, 1\}$ permite migrar entre as formulações não-simétrica, incompleta ou simétrica do método DG
Tol	Tolerância no passo de integração no tempo adaptativo
K_i	$i = p, I, D$, Parâmetros PID necessários para escolha adaptativa do passo no tempo
α_{ref}	Taxa de convergência referência para o método iterativo

Lista de Figuras

2.1	Sistemas em uma fase à esquerda e em duas fases à direita.	9
2.2	Fase molhante (água) e fase não-molhante (ar).	11
2.3	Mobilidades λ_n , λ_w e λ_t usando o modelo de Brooks-Corey (2.7) para as permeabilidades relativas.	17
2.4	Pressão capilar π , sendo π_1 a pressão capilar associada ao domínio com permeabilidade alta e π_2 referente domínio com permeabilidade mais baixa, (a) Modelo de Van Genuchten e (b) Modelo de Brooks-Corey.	19
4.1	Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D sem pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 1$ e: (a) $\Delta t = 6$ horas e (b) $\Delta t = 1,5$ horas.	44
4.2	Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D sem pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 2$	44
4.3	(a) Aproximações obtidas com o método DG implícito (4.5) para o problema de Buckley-Leverett 1D sem pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 1$, $\Delta t = 12$ horas. (b) Ampliação na frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.3a.	45
4.4	(a) Aproximações obtidas com o método DG implícito (4.5) para o problema de Buckley-Leverett 1D sem pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 2$, $\Delta t = 12$ horas. (b) Ampliação na frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.4a.	45
4.5	(a) Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar, após 100, 200 e 300 dias, usando $\Delta t = 6$ horas e $k = 1$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.5a.	46
4.6	(a) Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar, após 100, 200 e 300 dias, usando $\Delta t = 6$ horas e $k = 2$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.6a.	46

4.7 (a) Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar, após 100, 200 e 300 dias, usando $\Delta t = 6$ horas e $k = 3$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.7a. 47

4.8 (a) Aproximações obtidas com o método DG implícito (4.5) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 1$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.8a. 47

4.9 (a) Aproximações obtidas com o método DG implícito (4.5) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 2$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.9a. 48

4.10 (a) Comparação entre os métodos DG explícito (4.4) e DG implícito (4.5) para o problema Buckley-Leverett com pressão capilar, usando $k = 1$. (b) Ampliação na frente do fluido após 300 dias da Fig. 4.10a. 48

4.11 (a) Comparação entre os métodos DG explícito (4.4) e DG implícito (4.5) para o problema Buckley-Leverett, com pressão capilar, usando $k = 2$. (b) Ampliação na frente do fluido após 300 dias da Fig. 4.11a. 48

4.12 Comparando solução numérica obtida com o método DG (3.17) com solução quase analítica obtida por McWhorter e Sunada (1990) para a equação parabólica (4.7) no instante de tempo $\mathbf{T} = 8000\text{s}$, sendo: (a) Ordem de aproximação polinomial $k = 1$, (b) Ordem de aproximação polinomial $k = 2$ 50

4.13 Exemplo 4.3: Comparando aproximações para pressão global P , saturação S_w e velocidade total u_t obtidas usando projeções nos espaços BDM, RT ou sem reconstrução (SR), após 360 dias sendo que na coluna da esquerda usamos: $\Delta t = 5$ dias, $M = 32$ elementos e na da direita $\Delta t = 2$ dias, $M = 64$ elementos. 54

4.14 Exemplo 4.3: Análise de convergência para a saturação S_w após 360 dias, usando reconstrução de fluxos RT e $k_P = 1$, $k_S = 1$ em (a), $k_P = 2$, $k_S = 2$ em (c) e $k_P = 3$, $k_S = 3$ em (e). Em (b), (d) e (f) apresentamos zoom da frente do fluido referente às Figs. 4.14a, 4.14c e 4.14e, respectivamente. 55

4.15 Variação da velocidade total como função do tempo para o Exemplo 4.3. 56

4.16 Exemplo 4.4: Comparação entre aproximações obtidas para a saturação S_w após 200 dias com o método implícito e com o método semi-implícito, usando reconstrução de fluxos RT e $k_P = 1$, $k_S = 1$ em (a) e $k_P = 2$, $k_S = 2$ em (c). Em (b) e (d) apresentamos zoom da frente do fluido referente às Figs. 4.16a e 4.16c, respectivamente. 56

5.1 **Exemplo 5.1:** Análise de convergência no instante de tempo $\mathbf{T} = 1$, (a) aproximação polinomial $k = 1$, (b) aproximação polinomial $k = 2$ 59

5.2 **Exemplo 5.2:** Análise de convergência no instante de tempo $\mathbf{T} = 1$, (a) aproximação polinomial $k = 1$, (b) aproximação polinomial $k = 2$ 59

5.3 Resultados referem-se às aproximações obtidas com o método DG (3.17) usando $k = 1$, $M = 200$, $\Delta t = 5$ no instante de tempo $\mathbf{T} = 1000$ para os Exemplos 5.3, 5.4 e 5.5. 61

5.4 Comparando as integrais definidas em (5.8). 63

5.5 **Exemplo 5.6, u constante:** Saturação S_n nos instantes de tempos: $\mathbf{T} = 0$, $\mathbf{T} = 6e - 3$, $\mathbf{T} = 1e - 2$ e $\mathbf{T} = 2e - 1$, usando o método DG (3.17) com $k = 1$, $M = 200$ e $\Delta t = 1e - 4$ 64

5.6 **Exemplo 5.7, u constante:** Saturação S_n nos instantes de tempos: $\mathbf{T} = 0$, $\mathbf{T} = 1e - 2$, $\mathbf{T} = 0.48$ e $\mathbf{T} = 0.96$, usando o método DG (3.17) com $k = 1$, $M = 400$ e $\Delta t = 1e - 4$ 64

5.7 **Exemplo 5.8:** Saturação S_n . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada. 66

5.8 **Exemplo 5.8:** Pressão capilar π . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada. 66

5.9 **Exemplo 5.8:** Pressão global P . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada. 67

5.10 **Exemplo 5.8:** Pressão da fase não-molhante P_n . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada. 67

5.11 **Exemplo 5.8:** Pressão da fase molhante P_w . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada. 68

5.12 **Exemplo 5.8:** Variação da velocidade total u_t em função do tempo. Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada. 68

5.13 **Exemplo 5.8:** Comparando aproximações para saturação e velocidade total obtidas para o escoamento PMA-PMB com reconstrução de fluxos no espaço RT (linha contínua) com aproximações obtidas sem reconstrução (linha pontilhada). 71

5.14 **Exemplo 5.9,** Pressão-Saturação várias interfaces: Saturação S_n nos instantes de tempo: $\mathbf{T} = 0.0048$, $\mathbf{T} = 0.08$, $\mathbf{T} = 0.224$, $\mathbf{T} = 0.52$ e $\mathbf{T} = 0.664$ obtidas usando o método DG (3.15), (3.17) com $k = 1$, $M = 500$ e $\Delta t = 4e - 4$ e variação da velocidade total com o avanço do tempo. 72

5.15 **Exemplo 5.10,** Pressão-Saturação várias interfaces: Saturação S_n nos instantes de tempo: $\mathbf{T} = 20$ dias, $\mathbf{T} = 300$ dias, $\mathbf{T} = 2400$ dias, $\mathbf{T} = 6400$ dias e $\mathbf{T} = 768000$ dias obtidas usando o método DG (3.15), (3.17) com $k = 1$, $M = 400$ e variação da velocidade total com o avanço do tempo. 73

6.1	Domínio Ω para o Exemplo 6.1.	79
6.2	Malhas utilizadas para resolução numérica do Exemplo 6.1: (a) 128 elementos ($h = 17.6777$) (b) 512 elementos ($h=8.8388$).	79
6.3	Exemplo 6.1, com $\pi = 0$: Comparando soluções obtidas com o método DG bidimensional usando ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e fixando a coordenada $y = 40$, com soluções obtidas para o problema em 1D nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 20$ dias (b) $\mathbf{T} = 50$ dias.	80
6.4	Exemplo 6.1, com $\pi = 0$: Comparando soluções obtidas com o método DG bidimensional usando ordem de aproximação polinomial $k = 2$ e fixando a coordenada $y = 40$, com soluções obtidas para o problema em 1D nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 20$ dias (b) $\mathbf{T} = 50$ dias.	80
6.5	Exemplo 6.1, com $\pi = 0$: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.17) no instante de tempo $\mathbf{T} = 60$ dias, usando $k = 1$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 1$ dia; (b) $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas.	81
6.6	Exemplo 6.1, com $\pi = 0$: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.17) no instante de tempo $\mathbf{T} = 60$ dias, usando $k = 2$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 1$ dia; (b) $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas.	81
6.7	Exemplo 6.1, considerando efeitos capilares: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.17) no instante de tempo $\mathbf{T} = 60$ dias, usando $k = 1$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 1$ dia; (b) $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas.	82
6.8	Exemplo 6.1, considerando efeitos capilares: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.17) no instante de tempo $\mathbf{T} = 60$ dias, usando $k = 2$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 12$ horas; (b) $M = 2048$, $\Delta t = 6$ horas.	82
6.9	Exemplo 6.1, considerando efeitos capilares: Comparando soluções obtidas com o método DG bidimensional usando ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e fixando a coordenada $y = 40$, com soluções obtidas para o problema em 1D nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 20$ dias (b) $\mathbf{T} = 50$ dias.	83
6.10	Exemplo 6.1, considerando efeitos capilares: Comparando soluções obtidas com o método DG bidimensional usando ordem de aproximação polinomial $k = 2$ e fixando a coordenada $y = 40$, com soluções obtidas para o problema em 1D nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 20$ dias (b) $\mathbf{T} = 50$ dias.	83
6.11	Exemplo 6.2: Análise de convergência para aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) bidimensional para a pressão global P usando ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e fixando a coordenada $y = 40$ nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 40$ dias (b) $\mathbf{T} = 80$ dias.	84
6.12	Exemplo 6.2: Análise de convergência para aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) bidimensional para a pressão global P usando ordem de aproximação polinomial $k = 2$ e fixando a coordenada $y = 40$ nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 40$ dias (b) $\mathbf{T} = 80$ dias.	84

6.13	Exemplo 6.2: Análise de convergência para aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) bidimensional para a saturação S_n usando ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e fixando a coordenada $y = 40$ nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 40$ dias (b) $\mathbf{T} = 80$ dias.	85
6.14	Exemplo 6.2: Análise de convergência para aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) bidimensional para a saturação S_n usando ordem de aproximação polinomial $k = 2$ e fixando a coordenada $y = 40$ nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 40$ dias (b) $\mathbf{T} = 80$ dias.	85
6.15	Exemplo 6.2: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) para a saturação S_n no instante de tempo $\mathbf{T} = 31$ dias usando $k_p = k_s = 1$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 1$ dia (b) $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas.	86
6.16	Exemplo 6.2: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) para a saturação S_n no instante de tempo $\mathbf{T} = 31$ dias usando $k_p = k_s = 2$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 12$ horas (b) $M = 2048$, $\Delta t = 6$ horas.	86
6.17	Exemplo 6.2: Aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) para a pressão global P usando $k_p = k_s = 1$, $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas nos instantes de tempo (a) 31 dias (b) 77 dias.	86
6.18	Exemplo 6.2: Aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) para a velocidade total u usando $k_p = k_s = 1$, $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas nos instantes de tempo (a) 31 dias (b) 77 dias.	87
6.19	(a) Domínio original para o problema five-spot com 4 poços de produção localizados um em cada vértice do domínio e um poço de injeção localizado no centro do reservatório. (b) Um quarto do domínio original para o problema five-spot cujo domínio é considerado no Exemplo 6.3.	88
6.20	Malhas para o Exemplo 6.3: (a) 260 elementos (b) 1052 elementos	88
6.21	Exemplo 6.3: Aproximações para a Pressão e a velocidade total obtidas com o método DG (3.15),(3.17) nos instantes de tempo $\mathbf{T} = 50$ dias à esquerda e $\mathbf{T} = 100$ dias à direita. Em ambos os resultados usamos $k = 1$ e $M = 1052$, $\Delta t = 1$ dia.	89
6.22	Exemplo 6.3: Comparando aproximações para a saturação da fase molhante S_w obtidas com o método DG (3.15),(3.17) em diferentes malhas no instante de tempo $\mathbf{T} = 50$ dias na coluna da esquerda e $\mathbf{T} = 100$ dias na coluna da direita, usando $k = 1$	90
6.23	Exemplo 6.3: Comparando aproximações para a saturação da fase molhante S_w obtidas com o método DG (3.15),(3.17) em diferentes malhas no instante de tempo $\mathbf{T} = 50$ dias na coluna da esquerda e $\mathbf{T} = 100$ dias na coluna da direita, usando $k = 2$	91

6.24 **Exemplo 6.3:** Comparando aproximações para a saturação da fase molhante S_w do problema five-spot ao longo da diagonal $x = y$ no instante de tempo $\mathbf{T} = 48$ dias à esquerda e $\mathbf{T} = 100$ dias à direita usando $k = 1, 2$ e $M = 260, 1052, 4086$ 92

6.25 **Exemplo 6.3:** Aproximações para a saturação da fase molhante S_w obtidas com o método DG (3.15),(3.17) usando $k = 1, M = 4086, \Delta t = 12$ horas nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 116$ dias, (b) $\mathbf{T} = 121$ dias. 92

7.1 Ilustração do domínio para o Exemplo 7.1. 94

7.2 Malhas para o Exemplo 7.1: (a) 1000 elementos (b) 3956 elementos 95

7.3 Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (3.15),(3.17) no instante de tempo $\mathbf{T} = 6.10$ dias na coluna da esquerda e $\mathbf{T} = 14.2$ dias na coluna da direita, sendo que: Na primeira linha usamos $k = 1, M = 1000$; Na segunda linha: $k = 1, M = 3956$ 96

7.4 Linhas de contorno para a saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (3.15),(3.17) usando $k = 1, M = 3956$, no instante de tempo $\mathbf{T} = 6.10$ dias na coluna da esquerda e $\mathbf{T} = 14.2$ dias na coluna da direita. 96

7.5 Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (3.15),(3.17) no instante de tempo $\mathbf{T} = 6.10$ dias na coluna da esquerda e $\mathbf{T} = 14.2$ dias na coluna da direita, sendo que: Na primeira linha usamos $k = 2, M = 1000$; Na segunda linha: $k = 2, M = 3956$ 97

7.6 Aproximações para a Pressão e velocidade total obtidas com o método DG (3.15),(3.17) nos instantes de tempo $\mathbf{T} = 6.10$ dias à esquerda e $\mathbf{T} = 14.2$ dias à direita. Em ambos os resultados usamos $k = 1$ e $M = 1000$ 97

7.7 (a) Domínio Ω dividido nos subdomínios Ω_1 e Ω_2 para o Exemplo 7.2. (b) Domínio Ω com identificação do subdomínio Ω_3 necessário para definição da condição inicial (7.4). 98

7.8 **Exemplo 7.2:** (a) Coeficiente difusivo $\epsilon \nabla \pi$ da equação para a saturação no subdomínio Ω_1 . (b) Coeficiente difusivo $\epsilon \nabla \pi$ da equação para a saturação no subdomínio Ω_2 99

7.9 **Exemplo 7.2:** Pressão capilar π associada aos subdomínios Ω_1 (permeabilidade baixa) e Ω_2 (permeabilidade alta). 99

7.10 (a) Malha para o Exemplo 7.2 com 1296 elementos. (b) Malha para o Exemplo 7.3 com 1840 elementos. 100

7.11 **Exemplo 7.2:** Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com e sem estabilização no instante de tempo $\mathbf{T} = 70$ dias usando $k = 1, M = 1296$ 103

7.12 **Exemplo 7.2:** Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com e sem estabilização no instante de tempo $\mathbf{T} = 350$ dias usando $k = 1$, $M = 1296$ 104

7.13 **Exemplo 7.2:** Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com e sem estabilização no instante de tempo $\mathbf{T} = 725$ dias usando $k = 1$, $M = 1296$ 105

7.14 **Exemplo 7.2:** Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com e sem estabilização no instante de tempo $\mathbf{T} = 1800$ dias usando $k = 1$, $M = 1296$ 106

7.15 **Exemplo 7.2:** Aproximações para a velocidade total u_t obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com estabilização de primeira ordem e $k = 1$, $M = 1296$ em vários instantes de tempo. 107

7.16 **Exemplo 7.3:** Aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com estabilização transversal de primeira ordem e $k = 1$, $M = 1840$ em vários instantes de tempo. 108

7.17 **Exemplo 7.3:** Aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com estabilização de primeira ordem e $k = 1$, $M = 1840$ em vários instantes de tempo. 109

7.18 **Exemplo 7.3:** Aproximações para a velocidade total u_t obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com estabilização de primeira ordem e $k = 1$, $M = 1840$ em vários instantes de tempo. 109

A.1 Elemento triangular após refinamento usando método da biseccção descrito em Chen (2008a,b). 118

B.1 (a) Dois triângulos vizinhos T^+ e T^- que compartilham a mesma face $F = \partial T^+ \cup \partial T^-$, que inicia no nó A e termina no nó B e possui normal unitária \mathbf{n}_F .
 (b) Triângulo $T = conv\{P_1, P_2, P_3\}$ com vértice P_1, P_2, P_3 (ordenados no sentido anti-horário) e com faces opostas $F_1 = conv\{P_2, P_3\}$, $F_2 = conv\{P_1, P_3\}$, $F_3 = conv\{P_1, P_2\}$ de comprimento $|F_1|, |F_2|, |F_3|$, respectivamente, sendo que ν_1, ν_2, ν_3 são as normais exteriores de cada aresta. 127

Lista de Tabelas

4.1	Erros e ordens de convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ obtidas com o método DG (3.17) para ordens de aproximação polinomial de $k = 1, 2$ na resolução da equação (4.7) no instante de tempo $\mathbf{T} = 8000s$	51
5.1	Erros e ordens de convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ obtidas com o método DG (3.17) para ordens de aproximação polinomial de $k = 1, 2$ na resolução dos Exemplos 5.1 e 5.2 no instante de tempo $\mathbf{T} = 1$	60
5.2	Propriedades do meio poroso para o Exemplo 5.8	65
6.1	Erros e ordens de convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ obtidas com o método DG (3.17) com ordens de aproximação polinomial de $k = 1, 2, 3$ na resolução da equação (6.1) com $\alpha = 2$	76
6.2	Erros e ordens de convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ obtidas com o método DG (3.17) com ordens de aproximação polinomial de $k = 1, 2, 3$ na resolução da equação (6.1) com $\alpha = -\frac{3}{2}$	77
6.3	Parâmetros de qualidade para as malhas utilizadas para resolução do problema de escoamento five-spot. Veja a definição dos parâmetros \hat{q}_i e \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$, na Seção A.2.1.	87
7.1	Parâmetros \hat{q}_i e \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ que fornecem a qualidade das malhas utilizadas para resolução do Exemplo 7.1 de escoamento horizontal em meios heterogêneos com uma interface. A definição destes parâmetros pode ser encontrada na Seção A.2.1.	95
7.2	Parâmetros \hat{q}_i e \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ que fornecem a qualidade das malhas utilizadas para resolução dos Exemplos 7.2 e 7.3 de escoamento em meios heterogêneos com interface. A definição destes parâmetros pode ser encontrada na Seção A.2.1.	100

Capítulo 1

Introdução

O escoamento de fluidos em meios porosos é assunto de interesse em várias áreas de aplicação como engenharia de reservatório de petróleo, engenharia química, hidrologia, entre outras. Devido à complexidade, é praticamente impossível encontrar soluções analíticas para problemas de escoamento gerais, o que torna necessário o uso de métodos numéricos acurados. A utilização de simulações numéricas em meios porosos, como na engenharia de petróleo contribui na compreensão do processo de escoamento físico e químico envolvido, permitindo otimizar o processo de recuperação de hidrocarbonetos. Obter aproximações precisas para problemas de escoamento reais constitui uma tarefa difícil e desafiadora, pois é praticamente impossível conhecer completamente as características do reservatório. E mesmo tendo conhecimento completo do reservatório, efetuar simulações numéricas usando todas as informações demandaria um alto custo computacional. De outro lado, simulações numéricas aplicadas a esse tipo de problema requerem a solução de equações transientes não-lineares de difusão e advecção-difusão degeneradas. Uma das dificuldades encontradas na resolução desses problemas deve-se ao fato da solução perder regularidade, pois os termos difusivo e advectivo são não-lineares e além disso o termo difusivo degenera em partes do meio poroso.

Na prática, a estrutura geológica do subsolo é altamente heterogênea e pode conter diferentes tipos de rochas, imperfeições, canais e fraturas. Os efeitos capilares e bruscas mudanças nas propriedades das rochas em um reservatório de petróleo, tais como porosidade e permeabilidade, levam a forças capilares descontínuas, o que pode provocar redução na taxa de recuperação do petróleo, podendo até causar acúmulo de óleo (*oil trapping*) na interface formada entre dois tipos de sedimentos (ver Bertsch *et al.* (2003); Duijn *et al.* (1995); Erslund *et al.* (1998)). Nesta interface, a pressão capilar permanece contínua se usamos modelos de pressão capilar em que a pressão de entrada é zero, como o modelo de Van Genuchten (1980), e pode ser descontínua em modelos em que a pressão de entrada é positiva, como no modelo de Brooks e Corey (1964). No modelo de Brooks-Corey a pressão capilar permanece contínua na interface se a fase não-molhante (óleo) está presente em ambos os lados da interface. Quando a fase não-molhante é ausente de um lado da interface e as pressões de entrada no modelo para as forças capilares são diferentes, a saturação necessita alcançar um certo valor na interface para atingir pressão capilar igual ou superior à pressão de entrada para cruzar a interface. Neste caso a pressão capilar pode ser descontínua na interface. Para tais tipos de problemas, é essencial o desenvolvimento de métodos numéricos que lidem de maneira adequada com modelos de pressão capilar que podem apresentar discontinuidades para escoamentos multifásicos em meios porosos heterogêneos.

O sistema das equações que governam o escoamento bifásico, imiscível e incompressível em meios porosos heterogêneos não-deformáveis pode ser reduzido a uma equação elíptica tipo Darcy para a pressão global e uma equação parabólica não-linear degenerada

para a saturação, sendo que o acoplamento entre estas equações ocorre através da velocidade total. Mais detalhes sobre as equações e os princípios físicos que modelam o escoamento em meios porosos podem ser encontrados em Aziz e Settari (1979); Bear (1978); Chavent e Jaffré (1978); Chen *et al.* (2006); Dake (1978); Helmig (1997). Em geral a equação não-linear para a saturação tem advecção dominante, o que pode gerar problemas na convergência do método numérico empregado, tornando necessária uma atenção maior com a discretização utilizada. Resolver numericamente leis de conservação não-lineares, problemas de advecção-difusão e problemas de escoamento requer a aplicação de métodos precisos, robustos e eficientes que lidem adequadamente com o aparecimento de várias dificuldades, como capturar precisamente e resolver problemas de camada limite, formação de choques e descontinuidades na solução.

Frequentemente a resolução destas equações é feita de maneira sequencial, ou seja, em cada passo no tempo primeiramente é resolvida a equação para a pressão, em seguida a velocidade total é obtida a partir do gradiente de pressão e por fim a velocidade total é usada na equação da saturação. Essa aproximação sequencial reduz as não-linearidades do sistema acoplado pressão-saturação, e o uso da pressão global ao invés da pressão da fase molhante permite trabalhar com um sistema fracamente acoplado. Uma das maiores dificuldades encontradas na resolução de problemas de escoamento em meios heterogêneos está em encontrar um tratamento adequado para a condição de interface não-linear, resultante de processos físicos na interface formada entre dois subdomínios com rochas de propriedades diferentes. A imposição desta condição de interface não-linear deve ser feita para pressão e saturação, e ambas, pressão e saturação, podem apresentar fortes gradientes ou saltos não nulos na interface (ver Bertsch *et al.* (2003); Duijn *et al.* (1995); Enchéry *et al.* (2006)).

Em Chavent e Jaffré (1978); Chen (2001, 2002); Schroll e Tveito (1997) podem ser encontrados resultados de existência, unicidade e regularidade de solução para o problema de escoamento bifásico e incompressível. Nos últimos anos, um crescente número de pesquisadores vem dedicando atenção à resolução de problemas de escoamento bifásico em meios heterogêneos. Muitas técnicas de discretização foram analisadas e aplicadas para resolver problemas de escoamento em ambos os casos não-degenerados e degenerados. Dentre esses métodos numéricos podemos citar: o método de diferenças finitas (Aziz e Settari, 1979; Douglas, 1983; Peaceman, 1977), que pode apresentar perda de estabilidade em malhas não-estruturadas e exige um tratamento adequado quando as propriedades do meio são descontínuas; o método de volumes finitos (Eymard *et al.*, 2000, 2003; Michel, 2003), que é um método de baixa ordem; e o método de elementos finitos mistos (Afif e Amaziane, 2003; Chavent e Jaffré, 1978; Chen e Ewing, 2001; Ohlberger, 1997), que evita dificuldades apresentadas com a utilização do método de elementos finitos clássicos em algumas aplicações. A existência e unicidade de solução fraca para o sistema acoplado pressão-saturação com condições de interface gerais foram analisadas por Amaziane *et al.* (1996); Bertsch *et al.* (2003); Bourgeat e Hidani (1995) usando técnicas de homogenização. Em Cancès (2010, 2008); Cancès *et al.* (2009) foi considerada uma condição de interface mais geral e introduzida uma nova definição de solução fraca para tais problemas de interface. Também foram demonstradas existência e unicidade da solução fraca.

Um método que vem ganhando destaque nesta área é o método de Galerkin descontínuo (*Discontinuous Galerkin* - DG), e sua aplicação na resolução de problemas de escoamento tem se tornado cada vez maior devido às vantagens do método, dentre as quais podemos destacar a propriedade de conservação local de massa, flexibilidade com o uso de malhas não-estruturadas, habilidade para lidar com geometrias complicadas e vários tipos de condições de fronteira. O método é altamente paralelizável, admite fácil implementação de alta ordem de aproximação polinomial; a robustez do método permite lidar com equações que

possuem coeficientes e/ou soluções descontínuas e estabilidade na resolução de problemas não-lineares. Em geral, os métodos numéricos que utilizam espaços de aproximação descontínuos apresentam pouca ou quase nenhuma difusão numérica. O método DG pode ser visto como uma generalização natural das técnicas de volumes finitos e elementos finitos, possuindo vantagens de ambos os métodos. Similarmente ao método de volumes finitos, o método DG usa aproximações descontínuas e os fluxos na fronteira são calculados com auxílio do fluxo numérico, o que permite ao método captar com precisão descontinuidades e fortes gradientes. Similarmente ao método de elementos finitos, o método DG usa aproximações polinomiais de alta ordem para as soluções, produzindo assim uma aproximação acurada em regiões em que a solução é suave.

O método de elementos finitos de Galerkin descontínuo foi introduzido originalmente para resolver a equação de transporte de nêutrons por Reed e Hill (1973). Posteriormente LeSaint e Raviart (1974) apresentaram a primeira estimativa de convergência do método para equações hiperbólicas. O método DG foi aplicado para problemas elípticos incluindo várias formulações: método com penalização interior simétrico (Arnold, 1982; Baker, 1977; Wheeler, 1978), método com penalização interior não-simétrico (Rivière *et al.*, 2001) e método não-simétrico sem penalização (Oden *et al.*, 1998). Nestes artigos foram demonstrados resultados de convergência, estabilidade e estimativas de erro *a priori* ótimas em H^1 e L^2 (veja revisão em Arnold *et al.* (2000, 2002)).

Uma ampla análise do método DG para aproximar equações de advecção-difusão-reação é efetuada em Houston *et al.* (2002). Ern e Guermond (2006a,b) efetuaram um estudo da aplicação do método DG ao sistema de Friedrichs e desenvolveram uma análise válida para uma variedade de sistemas de equações diferenciais parciais lineares. A resolução das equações de Navier-Stokes com o método DG foi abordada por Bassi e Rebay (1997); Baumann e Oden (1999). Recentemente, Di Pietro *et al.* (2008); Ern *et al.* (2009d) propuseram um método simétrico com penalização interior utilizando a técnica de média ponderada para problemas de advecção-difusão-reação com anisotropia e difusão degenerada. A idéia do método é usar média ponderada para formular os termos de consistência e penalizar os saltos da solução discreta por um fator proporcional à média harmônica do coeficiente difusivo.

Outra versão do método DG, conhecida como método de Galerkin descontínuo local (LDG) para sistemas hiperbólicos não-lineares e sistemas de advecção-difusão não-lineares com dependência no tempo foi introduzida e desenvolvida por Cockburn e Shu (1998a,b, 1989, 1991); Cockburn *et al.* (1989, 1990). Uma revisão desses trabalhos pode ser encontrada em (Cockburn, 1998). O método de Galerkin descontínuo local foi aplicado para resolução do sistema de Stokes por Cockburn *et al.* (2002) e para as equações de Oseen por Cockburn *et al.* (2004). Sherwin *et al.* (2006) efetuaram um comparativo entre as formulações do método LDG (Cockburn e Shu, 1998b) e do método DG clássico (Bassi e Rebay, 1997) para o problema de Poisson. Em Rivière e Wheeler (1999) é apresentada uma formulação DG para a equação parabólica não-linear e os autores obtêm também estimativas de erro *a priori*.

Diferentes versões do método DG têm sido aplicadas para resolução de problemas de escoamento na formulação sequencial pressão-saturação. Rivière e Bastian (2004) aplicaram o método de Galerkin descontínuo não-simétrico com penalização interior para discretização espacial da equação para pressão e também para o termo difusivo na saturação, já para o termo advectivo foi usado *upwinding*, com o pós-processamento proposto por Rivière e Bastian (2003) para a velocidade total. Métodos adaptativos foram estudados por Klieber e Rivière (2006). Em Eslinger (2005), o autor desenvolveu um estudo numérico para o problema de escoamento ar-água compressível utilizando variações do método DG para resolver a equação para a pressão e o método LDG para a equação da saturação.

Aizinger *et al.* (2001) estudam a aplicação do método de Galerkin descontínuo local, proposto por Cockburn e Shu (1998b), em meios porosos homogêneos. O uso das formulações simétricas e não-simétricas do método de Galerkin descontínuo com penalização interior para resolução de problemas de escoamento em meios porosos pode ser encontrado em Bastian (2003); Rivière e Wheeler (2002a,b).

Nos métodos de Galerkin descontínuo citados acima, é comum o aparecimento de oscilações provocadas pelo fenômeno de Gibbs quando usados para aproximar soluções com fortes gradientes/descontinuidades. Estas oscilações podem tomar proporções significativas em escoamentos bifásicos. Para controlar essas oscilações costuma-se usar limitantes como proposto por Rivière e Bastian (2004); Rivière e Wheeler (2002a). Porém a técnica do uso de limitantes torna-se complicada em malhas não estruturadas e em duas e três dimensões não existe análise na literatura. Uma outra alternativa é trabalhar com um sistema de equações totalmente implícito para o sistema acoplado pressão-saturação, proposto por Epshteyn e Rivière (2007), mas este método demanda um alto custo computacional. Os métodos DG citados acima para problemas de escoamento também não incluem a imposição da condição de interface não-linear para modelos de escoamento heterogêneo em que temos a presença de forças capilares descontínuas. Para isto, torna-se necessário reformular as estratégias de penalização para incorporar a imposição da condição de interface, o que constitui um dos objetivos deste trabalho.

Problemas de escoamento bifásico com forças capilares descontínuas vêm sendo intensamente estudados no contexto do método de volumes finitos. O problema de interface para a equação parabólica não-linear com pressão capilar descontínua foi analisado em Enchéry *et al.* (2006) empregando um esquema de volumes finitos. Em Cancès (2009) foi considerada a equação parabólica incluindo o termo advectivo não-linear com condições de interface. Também foram apresentados resultados numéricos em domínio unidimensional obtidos com o método de volumes finitos. Erslund *et al.* (1998) combinam o método de características modificado com a formulação fraca em que as funções de base são descontínuas somente na interface formada entre dois tipos de sedimentos. São apresentados resultados numéricos para problemas unidimensionais e bidimensionais com pressão capilar descontínua. Em Nayagum *et al.* (2004) é apresentado um modelo numérico para resolver problemas de escoamento bifásico e incompressível com a utilização do método de elementos finitos mistos para a equação da pressão. Os termos advectivo e difusivo na equação para a saturação são tratados separadamente, para o termo difusivo é usado elementos finitos híbridos mistos e o termo advectivo é resolvido usando elementos finitos descontínuos. Os autores incluem também um tratamento diferenciado no método para impor as condições de interface no caso em que as forças capilares são descontínuas. São apresentados resultados numéricos em meios homogêneos e heterogêneos em domínio unidimensional.

Outra dificuldade encontrada na resolução sequencial do problema acoplado pressão-saturação é a necessidade de recuperar com precisão a velocidade total utilizada na equação para a saturação durante o processo sequencial de resolução. Rivière e Bastian (2003) introduziram a reconstrução da velocidade total no espaço de elementos finitos Brezzi-Douglas-Marini (BDM), em que é usado o valor médio do gradiente da solução DG nas faces entre elementos da malha para definir os graus de liberdade. Mais recentemente Ern *et al.* (2007a) propuseram a reconstrução de fluxos no espaço de elementos finitos Raviart-Thomas-Nédélec (RT), em que o fluxo é calculado elemento por elemento e o seu divergente é igual à projeção ortogonal L^2 do termo de fonte sobre o espaço discreto.

Neste trabalho é proposto um novo método de Galerkin descontínuo sequencial para resolver o problema acoplado pressão-saturação em meios porosos heterogêneos com forças capilares descontínuas. As condições de interface não-lineares para pressão e saturação

são impostas fracamente através de uma penalização adequada entre elementos (publicado em Ern *et al.* (2010)). Esta constitui a primeira contribuição deste trabalho. A reconstrução de fluxos proposta por Ern *et al.* (2007a) para problemas elípticos é estendida para problemas de escoamento bifásico em meios porosos homogêneos e heterogêneos (publicado em Ern *et al.* (2009a, 2010)). Para lidar adequadamente com as heterogeneidades do meio poroso e com problemas degenerados, e conseqüentemente, com soluções que possuem descontinuidades ou fortes gradientes foram utilizadas as técnicas de média ponderada e média harmônica, introduzidas em Di Pietro *et al.* (2008); Ern *et al.* (2009d). Para o termo advectivo não-linear é utilizada a técnica de fluxo numérico de Godunov, através da estabilização introduzida em (Brezzi *et al.*, 2004) para um caso particular da equação hiperbólica linear. Para a discretização temporal é empregado o método de Euler implícito.

No método proposto o sistema acoplado pressão-saturação é resolvido de maneira sequencial, desta forma aliviando as não linearidades no processo de resolução do problema. A recuperação de fluxos acurada é essencial para garantir a precisão numérica do método numérico, objetivo que é alcançado por meio da reconstrução no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec como introduzido na formulação do método. Esta reconstrução impõe a continuidade da componente normal da velocidade total entre elementos da malha e conseqüentemente fornece um campo de velocidades no espaço $\mathbf{H}(\text{div})$, o qual é obtido com taxas ótimas de convergência. O coeficiente difusivo na equação para a saturação é não-linear e o mesmo degenera para alguns valores da saturação, o que pode resultar em problemas com soluções que possuem singularidades (como por exemplo o choque entrópico). A utilização das técnicas de média ponderada e média harmônica permitem ao método numérico lidar de forma automatizada com problemas em que o termo difusivo degenera, desta forma tornando o método eficiente para resolver problemas que possuam comportamento hiperbólico ou parabólico em diferentes regiões do meio poroso. Além disso, a introdução destas técnicas também são essenciais para lidar adequadamente com as heterogeneidades do meio poroso, bem como para obter aproximações precisas, sem oscilações espúrias, para problemas com coeficientes ou soluções que apresentam descontinuidades, evitando assim o uso de limitantes. Também adequamos a estratégia de penalização usual do método DG para incorporar as condições de interface não-lineares, assim possibilitando a resolução de problemas heterogêneos com forças capilares descontínuas.

A discretização temporal por meio do método de Euler implícito, em conjunto com as técnicas descritas acima, permite a obtenção de um método numérico eficiente para resolver problemas reais de escoamento, que fornece soluções que não apresentam oscilações espúrias. No decorrer do trabalho são apresentados resultados numéricos para meios porosos homogêneos e heterogêneos, em que o método proposto exhibe soluções estáveis e robustas, captando com precisão o comportamento da saturação na frente do fluido e nas interfaces.

Esta tese está estruturada em sete capítulos organizados da seguinte forma:

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação de definições físicas relacionadas a problemas de escoamento em meios porosos e o modelo matemático geral. Além disso, também é introduzida a formulação do sistema acoplado pressão-saturação em meios porosos heterogêneos com respectivas condições de fronteira e condições de interface consideradas neste trabalho. Na parte final desse capítulo é efetuada uma discussão relacionada às dificuldades encontradas na resolução deste tipo de problemas.

No Capítulo 3 são introduzidas definições necessárias para o desenvolvimento do método de Galerkin descontínuo, como malhas espaciais e temporais, introdução dos conceitos de salto, média, média ponderada e média harmônica. É apresentado também o método de Galerkin descontínuo proposto neste trabalho, efetuando paralelamente uma discussão detalhada das técnicas utilizadas. Com base na literatura são apresentadas estimativas de erro

a priori do método DG para alguns casos particulares.

Em seguida, no Capítulo 4 a formulação DG proposta é utilizada para resolver problemas de escoamento bifásico água-óleo (fase molhante e fase não-molhante, respectivamente). Almejando estudar as dificuldades encontradas nesse tipo de problemas, como uma primeira fase do trabalho, é estudado um problema de escoamento unidimensional, de fluidos imiscíveis e incompressíveis em meios porosos. Para este caso pode ser obtido um sistema simplificado, em que é necessário resolver somente uma equação para a saturação, a equação de Buckley-Leverett, que foi introduzida por Buckley e Leverett (1942). Quando são desconsiderados os efeitos da pressão capilar na equação de Buckley-Leverett, esta se reduz a uma lei de conservação hiperbólica que possui uma solução analítica conhecida, o que oferece a possibilidade de estudar a convergência da solução numérica. Na literatura existem vários estudos feitos para obter a solução analítica para este caso da equação de Buckley-Leverett, dentre os quais pode-se destacar Ahmed (2001); Dake (1998); Helmig (1997); Kleppe (2007). O método numérico também é validado para a solução quase analítica de McWhorter e Sunada (1990) que corresponde à equação para saturação sem o termo advectivo. E por último são apresentados resultados numéricos obtidos para o problema acoplado pressão-saturação que ilustram a importância da reconstrução de fluxos acurada.

No Capítulo 5 o método proposto é validado por meio da modelagem de problemas de escoamento com pressão capilar descontínua, cuja solução exata é conhecida na literatura (Duijn e Neef, 1998; Fučík, 2006; Fučík *et al.*, 2008) ou com comportamento qualitativo da solução conhecido para um problema particular (Bertsch *et al.*, 2003). O método também é utilizado para resolver problemas unidimensionais em meios heterogêneos, com escoamento de um meio poroso com permeabilidade alta para meio poroso com permeabilidade mais baixa e vice-versa, e ainda escoamento em meios porosos com mais de uma interface, com o objetivo de estudar o efeito do acúmulo de petróleo em meios heterogêneos.

Na sequência, no Capítulo 6 são apresentadas taxas de convergência para o caso bidimensional obtidas com o método de Galerkin descontínuo para resolução de um problema de advecção-difusão não-linear com dependência no tempo e comparadas com resultados teóricos da literatura. O método é validado para problemas de escoamento em meios porosos homogêneos em domínio bidimensional por meio da resolução da equação de Buckley-Leverett e da resolução da formulação acoplada pressão-saturação para um problema de escoamento horizontal degenerado. Também são apresentadas aproximações obtidas para o problema de escoamento homogêneo five-spot e os resultados numéricos são comparados com resultados conhecidos na literatura.

O Capítulo 7 é dedicado à resolução de problemas de escoamento heterogêneos em domínio bidimensional. É abordado primeiramente o problema de escoamento horizontal heterogêneo com uma interface. Em seguida são apresentadas aproximações para o problema five-spot heterogêneo em que permeabilidade e forças capilares possuem descontinuidades. Através destes exemplos é possível observar que o método proposto impõe adequadamente as condições de interface não-lineares, e garante a precisão numérica tanto em regiões onde a solução é suave como também na frente do fluido ou na interface, onde a solução é descontínua.

Por fim, no Capítulo 8, são apresentadas algumas conclusões e o levantamento de possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelos de Escoamento Bifásico Imiscível e Incompressível em Meios Porosos

O desenvolvimento de métodos numéricos para a simulação de escoamentos em meios porosos é tema de grande interesse, devido a sua aplicação em diversos problemas, tais como a exploração em reservatórios de petróleo, extração de águas subterrâneas e transporte de contaminantes em meios porosos não saturados. Embora a arte de simulações para problemas de escoamento tenha evoluído nas últimas décadas, ainda existe uma substancial atividade de pesquisa que necessita ser desenvolvida para obter simuladores que forneçam soluções rápidas, robustas e precisas. Para o desenvolvimento de métodos numéricos eficientes na resolução de problemas de escoamento é necessário conhecer bem o modelo matemático que representa os fenômenos físicos que envolvem o processo de escoamento de fluidos. Neste capítulo são introduzidas brevemente algumas definições físicas necessárias para o estudo de problemas de escoamento em meios porosos. Primeiramente são apresentados conceitos relacionados ao meio poroso e aos fluidos, como suas propriedades básicas e em seguida são apresentadas as equações que modelam o escoamento bifásico, imiscível e incompressível, bem como as condições de fronteira e condições de interface associadas. Por fim, apresentamos notações usadas no decorrer deste trabalho para resolução de problemas em meios porosos homogêneos e heterogêneos.

2.1 Definições físicas relacionadas aos fluidos e ao meio poroso

A distinção da existência de diferentes dependências de escalas é particularmente importante para a abordagem de problemas de escoamento e processos de transporte. A modelagem de escoamentos multifásicos concentra-se principalmente no comportamento na escala de campo (em quilômetros). Porém, o escoamento de fluidos através de um meio permeável geralmente situa-se na escala dos poros (micro). Entre estas escalas temos uma grande diferença nas ordens de magnitude, originando as seguintes subdivisões em meios porosos: a macroescala, a microescala e a escala molecular. É importante observar que o comportamento do escoamento é influenciado pelos efeitos de todas essas diferentes escalas. Propriedades do fluido como viscosidade, densidade, coeficientes difusivos binários, miscibilidade com outros fluidos e tensões interfaciais, etc. são determinados na escala molecular pelas propriedades individuais das moléculas. Na escala microscópica a configuração dos poros influencia o

comportamento do escoamento através da distribuição dos poros, e na escala macroscópica a larga escala das não-homogeneidades governa o escoamento.

Para obter o modelo matemático na macroescala, as escalas moleculares e microscópicas são substituídas por uma quantidade contínua hipotética e por valores médios sobre volumes elementares, respectivamente. Mais detalhes podem ser encontrados em Bear e Bachmat (1990); Chavent e Jaffré (1978); Helmig (1997). Como resultado, algumas das definições e equações que descrevemos abaixo fazem sentido na escala de campo somente em um sentido de média. Apresentamos definições de propriedades de essencial importância em escoamentos do meio poroso como porosidade e permeabilidade e também de propriedades específicas dos fluidos como densidade e viscosidade. Esta descrição baseia-se em Bastian (1999); Chavent e Jaffré (1978); Chen *et al.* (2006); Eslinger (2005); Fučík (2006); Helmig (1997).

Densidade:

A densidade de um fluido α , ρ_α , é definida como a massa de uma unidade de volume do fluido a uma pressão e temperatura específica. A densidade pode depender da pressão P do fluido e da temperatura $Temp$ do sistema, $\rho_\alpha = \rho_\alpha(P_\alpha, Temp)$. Se o fluido é incompressível, temos densidade constante. Já para fluidos compressíveis a densidade depende fortemente da pressão do fluido, e nos casos em que essa dependência é mais fraca o fluido é chamado de levemente compressível, sendo que a magnitude da densidade não varia muito com a variação da pressão.

Viscosidade:

A viscosidade de um fluido α , μ_α , é a medida da resistência interna que o fluido apresenta para escoar, ou seja, viscosidade elevada caracteriza um fluido com alta resistência para escoar. Por exemplo, a água possui uma viscosidade baixa, logo tem facilidade para escoar, já o óleo é mais espesso e possui uma viscosidade mais alta, tornando assim seu escoamento mais difícil. A viscosidade pode depender da pressão e da temperatura do fluido, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(P_\alpha, Temp)$.

Fluidos miscíveis e imiscíveis:

Dois fluidos são miscíveis se eles se misturam quando entram em contato. Neste caso, as propriedades do fluido como, densidade, viscosidade, entre outras irão depender da concentração de massa de cada fluido na mistura. Já fluidos imiscíveis são aqueles que não se misturam, e não tem transferência de massa entre si, sendo que cada fluido preserva suas propriedades.

Meios porosos:

Um meio poroso pode ser definido como uma fase sólida que contém muitos espaços vazios, ou poros, que podem estar distribuídos de diversas formas em seu interior. Como exemplos de meios porosos podemos citar: rochas porosas, solos, areia, cascalho, esponjas, papéis, tecidos, tecidos biológicos (por exemplo, ossos), etc. Os espaços vazios em um meio poroso podem estar interconectados ou não. Meios porosos em que os espaços vazios não estão conectados entre si impedem que fluidos escoem através deles, desta forma gerando uma barreira ao escoamento de fluidos. Estes meios são descritos como impermeáveis ao escoamento de fluidos e aqueles em que os espaços vazios estão interconectados são conhecidos como permeáveis. Por exemplo, caixas de isopor contêm muitos poros, mas são impermeáveis devido à estrutura dos poros que não possuem interconexão. Já uma pilha de areia tem menos poros mas seus poros são interconectados, de modo que os fluidos podem atravessá-los facilmente. Neste trabalho consideramos somente meios porosos permeáveis.

Podemos notar que os meios porosos compreendem uma vasta variedade de materiais sendo que a caracterização do meio poroso dá-se principalmente por meio da porosidade e da permeabilidade, cujas definições são dadas a seguir.

Porosidade:

Supomos que o domínio físico está contido em uma superfície composta por rochas não-ho-

mogêneas. Quando uma rocha apresenta maior número de poros do que outra diz-se que tem maior porosidade. Desta forma a porosidade ϕ de uma rocha está relacionada à quantidade de espaços vazios que ela contém e é definida como a razão entre o volume total dos espaços vazios V_v e o volume total da rocha V_t , em porcentagem,

$$\phi = \frac{V_v}{V_t}.$$

A porosidade pode depender do instante de tempo t e da posição espacial x , $\phi = \phi(t, x)$, pois em alguns tipos de solos a porosidade varia na presença de algum fluido como água. Para obter a porosidade em um ponto x_0 do domínio no nível macroscópico no sentido de média a partir do nível microscópico consideramos a seguinte definição mais específica: Seja Ω o meio poroso com volume $means(\Omega)$, considere $\Omega_0(x_0) \subset \Omega$, um subconjunto de Ω com centro em x_0 no nível macroscópico. Defina a função espaço vazio no nível microscópico como:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \text{espaço vazio,} \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus \{\text{espaço vazio}\}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Então a porosidade $\phi(x_0)$, no ponto x_0 em relação ao volume médio $\Omega_0(x_0)$ é definida como

$$\phi(x_0) = \frac{1}{means(\Omega_0(x_0))} \int_{\Omega_0(x_0)} \gamma(x) dx. \quad (2.2)$$

Desta forma a porosidade na macroescala é obtida a partir da média da função espaço vazio na microescala. O volume de $\Omega_0(x_0)$ é chamado de volume elementar representativo (*representative elementary volume* - REV) e o mesmo deve ser escolhido de tal forma que a porosidade no sentido de média não dependa do seu volume.

É nesses espaços vazios que são encontrados fluidos como água, petróleo, gás, etc. Em um sistema monofásico os espaços vazios do meio poroso são ocupados por um único fluido (por exemplo: água) ou por vários fluidos completamente miscíveis uns com os outros (por exemplo: água doce e água salgada). Em um sistema multifásico os espaços vazios são ocupados por dois ou mais fluidos, imiscíveis entre si (por exemplo água e óleo). Na Fig. 2.1 ilustramos esses sistemas, sendo que à esquerda temos um sistema monofásico (uma fase) e à direita um sistema bifásico (duas fases). Neste trabalho abordamos problemas de escoamento bifásico, ou seja, temos a presença de dois fluidos imiscíveis no escoamento.

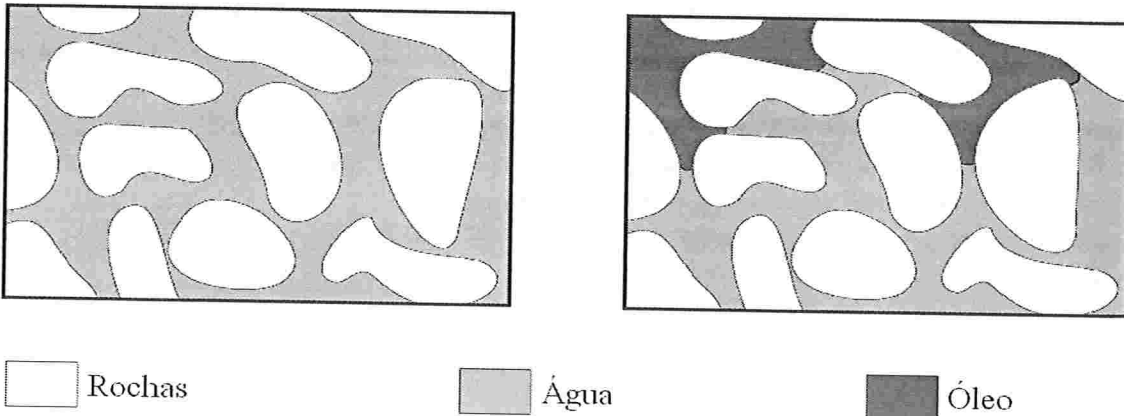


Figura 2.1: Sistemas em uma fase à esquerda e em duas fases à direita.

Permeabilidade absoluta

Permeabilidade absoluta K é uma propriedade física das rochas, ou qualquer outro material,

e fornece uma medida da habilidade da rocha em permitir o escoamento de água ou outro fluido, como petróleo, em maior ou menor vazão por unidade de área. A permeabilidade depende do tamanho e do número de poros, bem como da sua distribuição no meio poroso e normalmente é mensurada em Darcy ou miliDarcy, sendo que $1 \text{ Darcy} \approx 0.987 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$.

A porosidade e a permeabilidade estão relacionadas entre si, pois um aumento na porosidade implica num aumento da facilidade do fluido permear a estrutura porosa o que se reflete no aumento da permeabilidade. Devido às transições entre diferentes formações de rochas, a permeabilidade pode variar rapidamente várias ordens de magnitude no meio poroso.

Saturação:

Qualquer fluido encontrado no subsolo está nos espaços vazios descritos acima. Suponha que existam dois fluidos imiscíveis no domínio, fluidos n e w . A cada fluido presente no domínio associamos o volume total V_n e V_w , respectivamente. Logo em um meio saturado temos $V_n + V_w = V_v$, sendo V_v o volume total dos espaços vazios. Então, $\frac{V_n}{V_v} + \frac{V_w}{V_v} = 1$. Desta forma a saturação do fluido n é definida como $S_n = \frac{V_n}{V_v}$ e para o fluido w , $S_w = \frac{V_w}{V_v}$, obtendo assim a seguinte equação para a saturação:

$$S_n + S_w = 1. \quad (2.3)$$

A saturação de um fluido α depende do instante de tempo e da posição espacial, $S_\alpha = S_\alpha(t, x)$. A equação (2.3) pode ser estendida para domínios com três ou mais fases usando um raciocínio análogo ao acima.

Molhabilidade e pressão capilar:

O escoamento em uma fase é governado pelas diferenças de pressão dentro do reservatório e pela força gravitacional exterior. Já em escoamentos multifásicos a formação da interface entre as fases dos fluidos gera uma força conhecida como força capilar. Essa força capilar é oriunda das forças adesivas e aderentes. Em um escoamento multifásico as forças adesivas atraem as moléculas do fluido para a parede sólida e as forças aderentes atraem uma molécula de fluido à outra. Na interface entre os fluidos essas forças não estão em equilíbrio, gerando a formação de uma curva na interface.

A magnitude das forças adesivas decresce rapidamente à medida que aumenta a distância da parede. A interação com as forças aderentes leva a formação de um ângulo de contato θ entre a superfície sólida e a interface formada entre os fluidos. Esse ângulo depende das propriedades dos fluidos. O fluido para o qual o ângulo $\theta < 90^\circ$ é chamado fase molhante e o outro é chamado fase não-molhante. Na Fig. (2.2) ilustramos a formação desse ângulo θ , sendo água a fase molhante e o ar a fase não-molhante. O fluido da fase molhante será indicado com o índice w (do inglês *wetting phase fluid*) e o fluido da fase não-molhante será identificado com o índice n (do inglês *non-wetting phase fluid*). Muitas vezes em escoamentos bifásicos com as fases água-óleo ou água-gás, a água é a fase molhante, por outro lado, o óleo é considerado molhante em escoamentos de óleo-gás.

De acordo com comentários efetuados acima, quando dois fluidos estão em contato e contidos em um meio poroso, existe uma diferença entre as pressões do fluido da fase molhante e da fase não-molhante na interface que separa ambos os fluidos. Essa diferença de pressão na interface é conhecida como pressão capilar π , e definida por

$$\pi = P_n - P_w \geq 0, \quad (2.4)$$

em que P_n é a pressão da fase não-molhante, P_w é a pressão da fase molhante e consideramos π dependendo da saturação da fase não-molhante S_n de maneira não-linear. Podemos interpretar π como uma medida da tendência do meio poroso absorver um fluido molhante

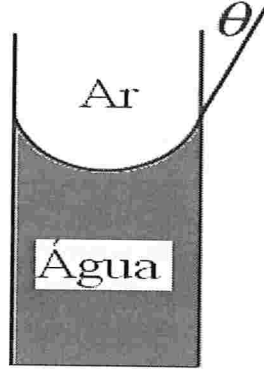


Figura 2.2: Fase molhante (água) e fase não-molhante (ar).

ou repelir um fluido não-molhante, sendo que quanto menores os poros, maior será a pressão capilar. Como consequência no caso de drenagem da fase molhante, os poros maiores serão drenados primeiro e o fluido permanece retido nos menores poros. A quantidade de fluido da fase molhante que permanece retida no meio poroso é conhecida como saturação residual da fase molhante S_{wr} . Da mesma forma temos a saturação residual da fase não-molhante S_{nr} .

A existência da saturação residual torna evidente que a definição da pressão capilar somente faz sentido se for definida entre estes dois extremos. Para isso definimos a saturação efetiva S_e como

$$S_e = \frac{S_n - S_{nr}}{1 - S_{nr} - S_{wr}}, \quad S_{nr} \leq S_n \leq 1 - S_{wr}. \quad (2.5)$$

Devido a irregularidade dos poros no meio poroso, muitas vezes desconhecida, a pressão capilar não pode ser obtida analiticamente, o que torna comum o uso de aproximações empíricas. Uma aproximação muito usada para a pressão capilar é o modelo de Brooks e Corey (1964):

$$\pi(S_n) = P_e(1 - S_e)^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (2.6)$$

onde θ caracteriza a distribuição do tamanho dos poros e a conectividade dos poros no domínio e P_e a pressão de entrada, que corresponde à pressão necessária para a fase molhante deslocar a fase não-molhante no meio poroso.

Permeabilidade relativa

Se um único fluido ocupa todos os poros do domínio, então a maior ou menor dificuldade do fluido escoar será dada pela interação entre o fluido e o domínio físico, que é medida pela permeabilidade absoluta. Quando existem dois fluidos ou mais que ocupam os poros, temos também a dificuldade de escoamento que um fluido exerce sobre o outro. Desta forma teremos uma redução na permeabilidade efetiva do meio para cada fluido. A permeabilidade relativa K_α , $0 < K_\alpha < 1$, mede essa interação entre os fluidos e é uma propriedade de fundamental importância no processo de escoamento.

Da mesma forma como para pressão capilar, é praticamente impossível encontrar uma expressão que descreva exatamente a influência da permeabilidade relativa, o que torna necessário o uso de aproximações. Apresentamos o modelo proposto por Brooks e Corey (1964):

$$K_w(S_n) = (1 - S_e)^{\frac{2+3\theta}{\theta}} \quad K_n(S_n) = (S_e)^2(1 - (1 - S_e)^{\frac{2+\theta}{\theta}}). \quad (2.7)$$

O parâmetro θ é o mesmo usado no perfil para pressão capilar do modelo de Brooks-Corey

dado na equação (2.6). Podemos observar que à medida que a saturação da fase não-molhante diminui, a sua permeabilidade relativa em relação à fase molhante também diminui.

Heterogeneidade e anisotropia:

Um meio poroso, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, é homogêneo em relação à uma quantidade macroscópica (porosidade, permeabilidade, temperatura,...) se o parâmetro varia pouco de um ponto à outro ou se assume o mesmo valor em todo domínio. Por outro lado, o meio poroso é heterogêneo quando o parâmetro depende fortemente da posição considerada no domínio, podendo até sofrer bruscas mudanças ou ser descontínuo de uma região para outra. Neste trabalho estaremos considerando problemas em meios porosos heterogêneos em relação à permeabilidade K e em relação às forças capilares π .

Um meio é chamado isotrópico em relação a uma quantidade macroscópica quando esta quantidade é igual em todas as direções e caso contrário é considerado meio anisotrópico. No meio isotrópico a resistência ao escoamento é igual em todas as direções e no meio anisotrópico essa resistência varia. Aqui consideramos somente meios isotrópicos.

2.1.1 Lei de Darcy

A Lei de Darcy surgiu a partir do trabalho de Darcy (1856), em que o autor descreve uma série de experimentos realizados em laboratório para estudar o escoamento de água em uma camada de areia, ou seja, escoamento monofásico onde o único fluido presente é a água. A partir dessas experiências Darcy obteve um coeficiente de proporcionalidade que relaciona o escoamento do fluido ao gradiente de pressão:

$$u_\alpha = -\frac{K}{\mu_\alpha}(\nabla P_\alpha - \rho_\alpha g \nabla D_z), \tag{2.8}$$

onde, u_α é a velocidade de Darcy do fluido α , g é a magnitude da aceleração devido à gravidade e ∇D_z é a direção z . O sinal negativo na equação (2.8) deve-se ao fato do fluido escoar de uma região onde a pressão é mais alta para regiões onde a pressão é mais baixa.

A extensão da Lei de Darcy para escoamentos multifásicos é dada por (Aziz e Settari (1979); Muskat (1949); Peaceman (1977); Scheidegger (1957)):

$$u_\alpha = -\frac{K_\alpha}{\mu_\alpha}K(\nabla P_\alpha - \rho_\alpha g \nabla D_z). \tag{2.9}$$

2.1.2 Lei de conservação de massa

A equação de conservação de massa para cada fase do escoamento é dada por:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha u_\alpha) = \rho_\alpha q_\alpha, \quad \alpha = w, n, \tag{2.10}$$

onde, ϕ é a porosidade, S_α é a saturação do fluido α , u_α é a velocidade de Darcy do fluido α e q_α termo de fonte ou sorvedouro. A saturação da fase não-molhante assume valores no intervalo $[S_{nr}, 1 - S_{wr}]$, em que S_{wr} e S_{nr} são a saturação residual da fase molhante e não-molhante, respectivamente. A equação de conservação de massa (2.10) na sua forma integral afirma que a taxa de variação da massa do fluido em um volume de controle arbitrário $V \subset \Omega$ é igual ao fluxo líquido sobre a superfície ∂V e a contribuição das fontes ou sorvedouros em V . A propriedade de conservação de massa e a lei de Darcy aplicam-se a todos os fluidos presentes em escoamentos multifásicos, desde que não haja transferência de massa entre as fases.

2.2 Modelo matemático para escoamentos bifásicos

Na Seção 2.1 apresentamos uma revisão sobre definições e propriedades de fluidos para escoamentos em meios porosos. Deste ponto em diante passaremos a abordar exclusivamente assuntos relacionados ao escoamento bifásico de fluidos imiscíveis. Os fluidos molhante e não-molhante serão identificados com os índices w e n , respectivamente.

Seja Ω um domínio em \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, limitado e aberto, com fronteira $\partial\Omega$ e normal exterior $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$. As equações que regem o escoamento bifásico em um meio poroso Ω são descritas pela lei de Darcy e pela conservação de massa. A lei de Darcy e a equação de conservação de massa para cada fase são descritas pelas equações (2.9) e (2.10), respectivamente, com $\alpha = w, n$. Desta forma temos um sistema de equações diferenciais que regem o escoamento bifásico de fluidos imiscíveis em meios porosos, dado por:

$$\frac{\partial(\phi\rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w u_w) = \rho_w q_w, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial(\phi\rho_n S_n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n u_n) = \rho_n q_n, \quad (2.12)$$

$$u_w = -\frac{K_w}{\mu_w} K(\nabla P_w - \rho_w g \nabla D_z), \quad (2.13)$$

$$u_n = -\frac{K_n}{\mu_n} K(\nabla P_n - \rho_n g \nabla D_z), \quad (2.14)$$

$$S_w + S_n = 1, \quad (2.15)$$

$$P_n - P_w = \pi(S_n), \quad (2.16)$$

onde as relações (2.15) e (2.16) devem ser satisfeitas para completar o sistema de equações, sendo π a pressão capilar dada pela diferença de pressões das duas fases conforme descrito acima. Supomos que a pressão capilar é uma função crescente que depende da saturação da fase não-molhante de forma não-linear. Mais detalhes podem ser encontrados em Aziz e Settari (1979); Chavent e Jaffré (1978); Helmig (1997). Associado ao sistema de equações (2.11)-(2.16) temos também as condições iniciais e as condições de fronteira de Dirichlet, Neumann ou mistas, que serão definidas um pouco mais adiante. As incógnitas desse sistema de equações são as saturações, as pressões e as velocidades de ambas as fases molhante e não-molhante: $S_w, S_n, P_w, P_n, u_w, u_n$. A existência de solução fraca para o sistema de equações (2.11)-(2.16) com condições de fronteira de Dirichlet e mistas foi estudada por Kroener e Luckhaus (1984).

O sistema de seis equações (2.11)-(2.16) é fortemente não-linear devido à dependência da pressão capilar e das permeabilidades relativas de forma não-linear da saturação. Este sistema pode ser reduzido a um sistema acoplado de duas equações e duas incógnitas. Essa redução pode ser feita de diferentes formas, e dependendo da escolha teremos diferentes formulações para modelar o problema de escoamento bifásico:

- Formulação Pressão-Pressão: onde as incógnitas são as pressões de cada uma das fases, ou seja, P_n e P_w ;
- Formulação Pressão-Saturação: onde uma das incógnitas é a pressão e a outra é dada pela saturação de uma das fases;
- Formulação Saturação-Saturação: onde as incógnitas são as saturações de cada uma das fases, ou seja, S_n e S_w .

As propriedades de cada uma destas formulações matemáticas depende do problema a ser resolvido, sendo que em alguns casos a escolha da formulação adequada pode influenciar

nos resultados obtidos com simulações numéricas (Bastian, 1999; Chen *et al.*, 2006; Helmig, 1997). Aqui optamos por trabalhar com uma formulação pressão global-saturação que iremos descrever a seguir.

Os métodos de extração em reservatórios por intermédio da injeção de fluidos imiscíveis têm seus efeitos controlados pela mobilidade e pela razão de mobilidade. Consideramos $\lambda_\alpha = \frac{K_\alpha}{\mu_\alpha}$ como sendo a mobilidade do fluido α , $\alpha = w, n$, a soma $\lambda_t = \lambda_w + \lambda_n$ é a mobilidade total. Da mesma forma definimos a velocidade total como a soma das velocidades $u_t = u_w + u_n$. A razão da mobilidade M_r é dada pela razão entre a mobilidade do fluido deslocante e a do fluido deslocado. Para injeção de água temos $M_r = \frac{\lambda_w}{\lambda_n}$. Em reservatórios com óleos pesados, com alta viscosidade e baixa permeabilidade relativa do óleo, M_r pode alcançar valores elevados. O ideal em escoamentos é $M_r \leq 1$, ou seja, óleo com viscosidade inferior ou igual ao do fluido deslocante.

Supondo que os fluidos são incompressíveis temos das equações (2.11) e (2.12):

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot u_w = q_w, \quad (2.17)$$

$$\phi \frac{\partial S_n}{\partial t} + \nabla \cdot u_n = q_n. \quad (2.18)$$

Somando as equações (2.17) e (2.18) obtemos:

$$\nabla \cdot (u_w + u_n) = q_w + q_n. \quad (2.19)$$

Desprezando os efeitos gravitacionais e usando a definição de velocidade total e as Equações (2.13), (2.14), (2.16) temos que,

$$\begin{aligned} u_t &= -\lambda_w K \nabla P_w - \lambda_n K \nabla P_n \\ &= -\lambda_t K \nabla P_w - \lambda_n K \nabla \pi = \frac{\lambda_t}{\lambda_w} u_w - \lambda_n K \nabla \pi \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\Rightarrow u_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_t} u_t + \frac{\lambda_n \lambda_w}{\lambda_t} K \nabla \pi. \quad (2.21)$$

Da mesma forma obtemos:

$$u_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_t} u_t - \frac{\lambda_n \lambda_w}{\lambda_t} K \nabla \pi. \quad (2.22)$$

As equações (2.21) e (2.22) são relações para as velocidades u_w e u_n em termos da velocidade total sem referência explícita às pressões P_w e P_n . Substituindo (2.22) em (2.18) temos:

$$\phi \frac{\partial S_n}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_t} u_t \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_n \lambda_w}{\lambda_t} K \nabla \pi \right) = q_n. \quad (2.23)$$

Note que $\pi = \pi(S_n)$, logo

$$\nabla \pi(S_n) = \frac{d\pi(S_n)}{dS_n} (\nabla S_n). \quad (2.24)$$

Denotando o fluxo fracionário por $f_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_t}$ podemos reescrever a equação (2.23) e obter a

seguinte equação para a saturação da fase não-molhante S_n ,

$$\phi \frac{\partial S_n}{\partial t} + \nabla \cdot (u_t f_n) - \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_n \lambda_w}{\lambda_t} K \pi'(S_n) \nabla S_n \right) = q_n. \quad (2.25)$$

Para facilitar a notação escrevemos $\pi'(S_n)$ ao invés de $\frac{d\pi(S_n)}{dS_n}$.

Substituindo (2.20) em (2.19) e usando $\nabla \pi = \pi'(S_n) \nabla S_n$ temos a seguinte equação para a pressão da fase molhante P_w :

$$-\nabla \cdot (\lambda_t K (\nabla P_w + f_n \pi'(S_n) \nabla S_n)) = q_w + q_n. \quad (2.26)$$

A ideia é introduzir a pressão global P tal que

$$\nabla P = \nabla P_w + f_n \nabla \pi(S_n). \quad (2.27)$$

Desta forma, a equação (2.26) ficaria similar à lei de Darcy e a velocidade total dada por,

$$u_t = -\lambda_t K \nabla P.$$

Usando a pressão global ao invés da equação com P_w , temos uma equação para P com acoplamento muito mais fraco com a saturação (somente por intermédio de λ_t). Além disso, o uso das relações (2.21) e (2.22) para u_w e u_n dependendo da velocidade total reduz a influência da pressão capilar na equação da saturação. A equação (2.27) requer escrever $f_n \nabla \pi(S_n)$ como gradiente de alguma função escalar Π_n . Seguindo Chavent e Jaffré (1978), definimos,

$$\Pi_n(S_n(x, t)) = \int_{S_{nr}}^{S_n(x, t)} f_n(\xi) \pi'(\xi) d\xi + \pi(S_{nr}).$$

Logo, a relação entre a pressão global P e a pressão da fase molhante P_w é dada por

$$P(x, t) = P_w(x, t) + \int_{S_{nr}}^{S_n(x, t)} f_n(\xi) \pi'(\xi) d\xi + \pi(S_{nr}). \quad (2.28)$$

O uso da definição de pressão capilar: $\pi(S_n) = P_n - P_w$ permite obter a relação entre pressão global P e pressão da fase não-molhante P_n :

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_n(x, t) - \pi(S_n(x, t)) + \int_{S_{nr}}^{S_n(x, t)} f_n(\xi) \pi'(\xi) d\xi + \pi(S_{nr}) \\ &= P_n(x, t) - \int_{S_{nr}}^{S_n(x, t)} \pi'(\xi) d\xi - \pi(S_{nr}) + \int_{S_{nr}}^{S_n(x, t)} f_n(\xi) \pi'(\xi) d\xi + \pi(S_{nr}) \\ \Rightarrow P(x, t) &= P_n(x, t) + \int_{S_{nr}}^{S_n(x, t)} (f_n(\xi) - 1) \pi'(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Mais detalhes relacionados com a formulação pressão global-saturação podem ser encontrados em Chavent e Jaffré (1978). Desta forma o sistema acoplado pressão global-saturação

com incógnitas (P, S_n) a ser resolvido é:

$$-\nabla \cdot (\lambda_t K \nabla P) = q_w + q_n, \quad (2.30)$$

$$u_t = -\lambda_t K \nabla P, \quad (2.31)$$

$$\phi \frac{\partial S_n}{\partial t} + \nabla \cdot (u_t f_n(S_n)) - \nabla \cdot (\epsilon(S_n) \pi'(S_n) \nabla S_n) = q_n, \quad (2.32)$$

em que, $\epsilon(S_n) = \lambda_w f_n K$ é o coeficiente difusivo na equação para a saturação. Usaremos este modelo para problemas de escoamento como em reservatórios de petróleo, onde é comum a injeção de água no reservatório através de poços de injeção, conduzindo desta forma o óleo para os poços de produção. Neste problema a água é a fase molhante e o óleo a fase não-molhante.

Notamos que o acoplamento entre as equações para a pressão (2.30) e a saturação (2.32) ocorre por meio da velocidade total (2.31), que contribui no termo advectivo da equação para a saturação. Como a pressão capilar e as permeabilidades relativas dependem da saturação S_n de maneira não-linear, temos como resultado um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não-lineares a resolver, sendo uma equação elíptica para a pressão global e outra parabólica degenerada para a saturação. A saturação S_n varia no intervalo $[S_{nr}, 1 - S_{wr}]$ e a equação (2.32) degenera nos extremos deste intervalo, pois quando $S_n \rightarrow S_{nr}$, temos $\lambda_n(S_n) \rightarrow 0$, já quando a saturação do óleo é muito alta, ou seja, $S_n \approx 1 - S_{wr}$ temos $\lambda_w(S_n) \rightarrow 0$ (ver Fig. 2.3a). Portanto a solução da equação para a saturação (2.32) apresenta propriedades parabólicas e hiperbólicas. Por outro lado a equação para a pressão (2.30) não degenera (ver Fig. 2.3b).

Existência de solução para a formulação variacional do sistema (2.30)-(2.32) foi demonstrada por Chavent e Jaffré (1978) para o caso não degenerado ($\epsilon(S_n) \pi'(S_n) \geq \eta > 0$) e para o caso degenerado. Quanto à unicidade de solução, os autores obtiveram resultados somente para o caso desacoplado das equações pressão-saturação. A existência de solução clássica local no tempo para o problema de escoamento bifásico, incompressível, elíptico-hiperbólico ($\pi = 0$) foi demonstrada por Schroll e Tveito (1997). Mais recentemente Chen (2001, 2002) demonstrou existência, unicidade e regularidade da solução para o problema de escoamento bifásico incompressível completo.

2.3 Formulação Pressão-Saturação em meios porosos heterogêneos

Bruscas mudanças nas propriedades das rochas em um reservatório, tais como porosidade e permeabilidade, combinadas às forças capilares, geralmente têm um efeito desfavorável na taxa de recuperação do petróleo. Por exemplo, se existem caminhos preferenciais (regiões com permeabilidade alta) do poço de injeção até o poço de produção, teremos muito óleo que ficará retido nas regiões de baixa permeabilidade e conseqüentemente teremos uma redução na taxa de recuperação. Isto ocorre devido às dificuldades em remover óleo em grandes quantidades das partes heterogêneas com baixa escala do reservatório, onde o óleo tende a ficar acumulado (Bertsch *et al.*, 2003; Duijn *et al.*, 1995), sendo que o óleo necessita atingir uma pressão de acesso para poder entrar em uma região com baixa permeabilidade. Outra dificuldade nesses tipos de problemas é o fato da saturação apresentar fortes gradientes ou até ser descontínua na interface formada por dois tipos de sedimentos.

Pretendemos investigar a influência das heterogeneidades do meio poroso introduzidas através de bruscas variações da porosidade e permeabilidade em conjunto com descontinuidades nas forças capilares, em escoamentos bifásicos. Para estudar este tipo de problemas

consideramos o domínio Ω dividido em subdomínios Ω_β tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_l} \bar{\Omega}_i$, $N_l \geq 2$, e $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$. Considere $\Gamma_{ij} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ a interface formada entre dois subdomínios vizinhos Ω_i e Ω_j . Cada subdomínio Ω_β , $\beta \in \{1, 2, \dots, N_l\}$, representa um meio poroso com porosidade ϕ_β e permeabilidade (absoluta) intrínseca K_β . Supomos que ambas quantidades são constantes em cada subdomínio. Seja π_β a pressão capilar no subdomínio Ω_β . De maneira geral, o índice β é usado para indicar a restrição de uma função definida em Ω ao subdomínio Ω_β . Denotamos a mobilidade da fase molhante ($\alpha = w$) e da fase não-molhante ($\alpha = n$) por λ_α , a soma $\lambda := \lambda_w + \lambda_n$ como a mobilidade total e $f := \frac{\lambda_n}{\lambda}$ o fluxo fracionário. No decorrer do trabalho consideramos que os perfis para as funções λ_n , λ_w , λ , f não alteram de um subdomínio para outro, ou seja, consideramos um único perfil para estas funções sobre o domínio Ω . Em cada subdomínio Ω_β , $\beta \in \{1, 2, \dots, N_l\}$, a pressão capilar e as mobilidades são dadas como funções suaves da saturação da fase não-molhante e a pressão capilar $\pi_\beta : [S_{nr}, 1 - S_{wr}) \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função crescente e continuamente diferenciável, sendo $\pi_\beta(S_{nr})$ a pressão de entrada, pressão mínima necessária para o óleo entrar em um meio saturado por água. Apresentamos modelos para as mobilidades na Fig. 2.3 e para pressão capilar na Fig. 2.4.

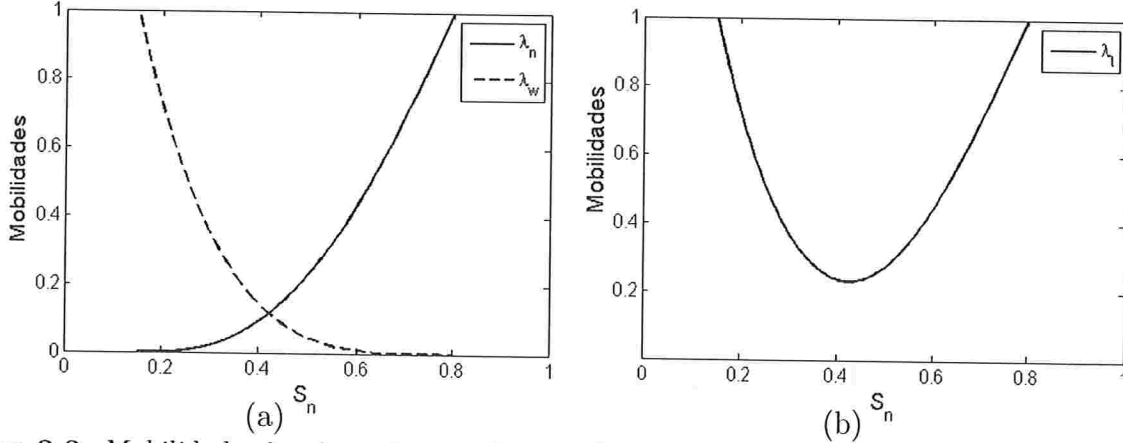


Figura 2.3: Mobilidades λ_n , λ_w e λ_l usando o modelo de Brooks-Corey (2.7) para as permeabilidades relativas.

Reescrevendo as equações (2.30), (2.31) e (2.32) que regem o escoamento bifásico, incompressível e imiscível em um meio poroso heterogêneo Ω na formulação pressão-saturação temos: Dado o instante de tempo \mathbf{T} , encontrar (P, S) que satisfazem em $\Omega_\beta \times [0, \mathbf{T}]$ para cada $\beta \in \{1, 2, \dots, N_l\}$,

$$-\nabla \cdot (\lambda(S_\beta) K_\beta \nabla P_\beta) = q_{w\beta} + q_{n\beta}, \quad (2.33)$$

$$u_\beta = -\lambda(S_\beta) K_\beta \nabla P_\beta, \quad (2.34)$$

$$\phi_\beta \partial_t S_\beta + \nabla \cdot (u_\beta f(S_\beta)) - \nabla \cdot (\epsilon_\beta(S_\beta) \nabla \pi_\beta(S_\beta)) = q_{n\beta}, \quad (2.35)$$

em que passamos a usar S e u ao invés de S_n e u_l para a saturação da fase não-molhante e velocidade total, respectivamente, com o objetivo de facilitar a notação. Além disso temos o coeficiente difusivo $\epsilon_\beta = \lambda_w f K_\beta$ e os termos de fonte correspondentes a cada fase $q_{\alpha\beta}$, $\alpha \in \{w, n\}$. Para completar o sistema consideramos condições de fronteira e iniciais e condições de interface conforme descrição abaixo.

2.3.1 Condições iniciais e condições de fronteira

A condição inicial prescreve a saturação sobre os subdomínios Ω_β em um instante inicial $S|_{t=0} = S_0$. As condições de fronteira para pressão e saturação podem ser de Dirichlet ou Neumann. A condição de fronteira de Dirichlet é imposta sobre os conjuntos $\partial\Omega_p^D$ e $\partial\Omega_s^D$ para pressão e saturação, respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} P &= P_D, \text{ sobre } \partial\Omega_p^D, \\ S &= S_D, \text{ sobre } \partial\Omega_s^D. \end{aligned} \quad (2.36)$$

As regiões $\partial\Omega_p^D$ e $\partial\Omega_s^D$ podem ser distintas, e além disso, $\partial\Omega_s^D$ coincide com $\partial\Omega_s^- \cup \partial\Omega_s^+$, onde

$$\partial\Omega_s^- = \{x \in \partial\Omega_s^D; u(x) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} < 0\}, \quad (2.37)$$

$$\partial\Omega_s^+ = \{x \in \partial\Omega_s^D; u(x) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \geq 0\}, \quad (2.38)$$

sendo $\partial\Omega_s^-$ a região de entrada de fluxo e $\partial\Omega_s^+$ a região de saída de fluxo. Já a condição de fronteira de Neumann impõe a componente normal da velocidade total ou a componente normal do fluxo para a saturação, sobre os conjuntos $\partial\Omega_p^N$ e $\partial\Omega_s^N$, respectivamente, cujas condições são descritas por

$$\begin{aligned} -\lambda(S)K\nabla P \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} &= P_N, \text{ sobre } \partial\Omega_p^N, \\ (uf(S) - \epsilon(S)\nabla\pi(S)) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} &= S_N, \text{ sobre } \partial\Omega_s^N. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para mais detalhes sobre condições de fronteira para a formulação pressão-saturação, referenciamos Chavent e Jaffré (1978); Chen *et al.* (1994).

2.3.2 Condições de interface

As Equações (2.33)-(2.35) são válidas somente em Ω_β , $\beta \in \{1, 2, \dots, N_l\}$. Nas interfaces Γ_{ij} , em que porosidade, permeabilidade e forças capilares são descontínuas, estas equações deixam de ser válidas. Logo precisamos de condições para serem impostas em $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, $j \neq i$, que são as condições de interface. Como o escoamento dos fluidos é descrito por uma equação diferencial de segunda ordem no espaço, vamos precisar de duas condições de interface.

A pressão capilar em $S = S_{nr}$ é chamada de pressão de entrada P_e da fase não-molhante (em inglês *threshold pressure or nonwetting phase entry value*), e representa a pressão mínima necessária para o fluido da fase não-molhante entrar em um meio poroso saturado por um fluido molhante. De acordo com Leverett (1941), a pressão capilar em um meio poroso depende da porosidade e da permeabilidade, sendo que para o modelo de Brooks-Corey (2.6) a pressão de entrada pode ser expressa por $P_e = \sigma_p \left(\frac{\phi}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$, em que σ_p é a constante de proporcionalidade. Desta forma, se a permeabilidade ou porosidade forem descontínuas, teremos como consequência modelos de pressão capilar com pressão de entrada diferentes.

Se consideramos modelos de pressão capilar em que a pressão de entrada for zero (ver modelo de Van Genuchten (1980) na Fig. 2.4a), então para cada valor da saturação em um subdomínio Ω_1 existe uma saturação correspondente no outro subdomínio Ω_2 tal que a pressão capilar é contínua. Neste caso as condições de interface devem garantir a continuidade da pressão capilar. Porém se a pressão de entrada é positiva e diferente nos subdomínios Ω_1 e Ω_2 , podemos ver pela Fig. 2.4b que existe uma saturação crítica S^* , tal que a continuidade da pressão capilar somente é obtida se a saturação da fase não-molhante S no subdomínio

Ω_1 (domínio correspondendo a curva inferior) é maior ou igual a S^* (Duijn e Neef, 1994a,b; Duijn *et al.*, 1995). Neste trabalho consideramos modelos de pressão capilar com pressão de entrada positiva, logo existe a saturação de entrada S^* , dada por $\pi_1(S^*) = \pi_2(S_{nr})$. Ilustramos por meio da Fig. 2.4b a pressão capilar do modelo de Brooks-Corey dada na equação (2.6) em dois subdomínios, um com permeabilidade baixa (π_2) e outro com permeabilidade mais alta (π_1), em que destacamos a pressão de entrada P_e que o óleo deve atingir em Ω_1 para conseguir entrar em Ω_2 .

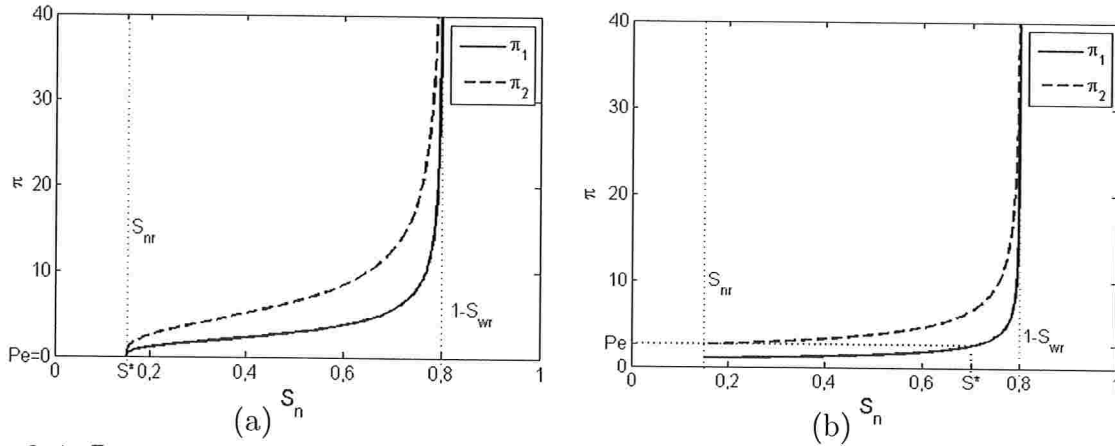


Figura 2.4: Pressão capilar π , sendo π_1 a pressão capilar associada ao domínio com permeabilidade alta e π_2 referente domínio com permeabilidade mais baixa, (a) Modelo de Van Genuchten e (b) Modelo de Brooks-Corey.

Consideremos a interface $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, $j \neq i$. Suponha que o escoamento está ocorrendo na direção Ω_i para Ω_j , ou seja, $(u \cdot \mathbf{n})|_{\Omega_i} > 0$. Em um reservatório podemos ter dois tipos de escoamento: escoamento de um meio poroso com permeabilidade mais alta para um meio poroso com permeabilidade mais baixa (meio com estrutura média mais fina) e vice-versa. De acordo com comentários feitos acima, para o primeiro caso, o óleo precisa atingir a saturação de entrada S^* em Ω_i para conseguir penetrar em Ω_j e temos a pressão capilar satisfazendo $\pi_i(S) \leq \pi_j(S)$ (ver Fig. 2.4). Já no segundo caso o óleo não terá dificuldade de escoar de um meio para outro, pois a pressão de entrada em Ω_j é menor do que a pressão de entrada em Ω_i e temos $\pi_i(S) \geq \pi_j(S)$. Mais detalhes sobre as condições de interface são dados em Chavent e Jaffré (1978); Duijn e Neef (1994a,b); Duijn *et al.* (1995); Enchéry *et al.* (2006).

Caso 1: Condições sobre a interface Γ_{ij} , quando $\pi_i(S) \leq \pi_j(S)$

Para a saturação: A primeira condição de interface para a saturação origina-se da conservação de massa através da interface e conduz à imposição da continuidade da componente normal do fluxo advectivo-difusivo sobre Γ_{ij} ,

$$(u_i f(S_i) - \epsilon_i(S_i) \nabla \pi_i(S_i)) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}} = (u_j f(S_j) - \epsilon_j(S_j) \nabla \pi_j(S_j)) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}}, \quad (2.40)$$

onde $S_i = \lim_{x \rightarrow \Gamma_{ij}} S(x)$, com $x \in \Omega_i$, $S_j = \lim_{x \rightarrow \Gamma_{ij}} S(x)$, com $x \in \Omega_j$. Já a segunda condição de interface depende fortemente do comportamento qualitativo da pressão capilar π e prescreve o valor de S_j como sendo S_{nr} se $S_i \in [S_{nr}, S^*]$, e força a continuidade da pressão capilar se

$S_i \in [S^*, 1 - S_{wr})$. Desta forma, temos sobre Γ_{ij} ,

$$\begin{aligned} S_j &= S_{nr}, & \text{se } S_i \in [S_{nr}, S^*], \\ \pi_i(S_i) &= \pi_j(S_j), & \text{se } S_i \in [S^*, 1 - S_{wr}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

sendo S^* a solução da equação $\pi_i(S) = \pi_j(S_{nr})$. Mais detalhes sobre a obtenção destas condições de interface para a saturação podem ser obtidos em Duijn e Neef (1994a,b).

Precisamos encontrar uma forma simples e prática de incorporar as condições de interface ao método numérico. Para isto, introduzimos a função $J_{S1} : [S_{nr}, 1 - S_{wr}) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que,

$$J_{S1}(S) = \begin{cases} S - S_{nr}, & \text{se } S_{nr} \leq S \leq S^*, \\ S - \pi_j^{-1}(\pi_i(S)), & \text{se } S^* \leq S \leq 1 - S_{wr}. \end{cases} \quad (2.42)$$

e assim podemos reescrever a segunda condição de interface (2.41) em função do salto de S como,

$$S_i - S_j = J_{S1}(S_i). \quad (2.43)$$

Uma importante consequência dessas condições de interface é fato do problema admitir soluções que descrevem o acúmulo da fase não-molhante.

Para pressão global: A primeira condição de interface para pressão impõe a continuidade da componente normal da velocidade total sobre Γ_{ij} ,

$$-\lambda(S_i)K_i \nabla P_i \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}} = -\lambda(S_j)K_j \nabla P_j \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}}, \quad (2.44)$$

onde, $P_i = \lim_{x \rightarrow \Gamma_{ij}} P(x)$, com $x \in \Omega_i$, $P_j = \lim_{x \rightarrow \Gamma_{ij}} P(x)$, com $x \in \Omega_j$. A segunda condição de interface para pressão global prescreve a continuidade da pressão da fase molhante P_w se $S_i \in [S_{nr}, S^*]$ e a continuidade da pressão da fase não-molhante P_n se $S_i \in [S^*, 1 - S_{wr})$. Neste último caso além da continuidade de P_n , temos também a continuidade de P_w , que é consequência da continuidade da pressão capilar.

Logo para o caso em que $S_i \in [S_{nr}, S^*]$, temos que o óleo localizado no sudomínio Ω_i não consegue escoar através da interface Γ_{ij} e entrar no subdomínio Ω_j , desta forma $S_j = S_{nr}$. Além disso a pressão do fluido molhante P_w é contínua ($P_{w_i} - P_{w_j} = 0$). Então da definição de pressão global (2.28) segue,

$$\begin{aligned} P_i - P_j &= P_{w_i} + \int_{S_{nr}}^{S_i} f(\xi) \pi'_i(\xi) d\xi + \pi_i(S_{nr}) - P_{w_j} - \int_{S_{nr}}^{S_j} f(\xi) \pi'_j(\xi) d\xi - \pi_j(S_{nr}) \\ &= \int_{S_{nr}}^{S_i} f(\xi) \pi'_i(\xi) d\xi + \pi_i(S_{nr}) - \pi_j(S_{nr}). \end{aligned}$$

Se $S_i \in [S^*, 1 - S_{wr}]$, o óleo já atingiu a pressão de entrada necessária para cruzar a interface Γ_{ij} e escoar através de Ω_j , logo P_n é contínua ($P_{n_i} - P_{n_j} = 0$). Desta forma usando a definição (2.29) para a pressão global temos:

$$\begin{aligned} P_i - P_j &= P_{n_i} + \int_{S_{nr}}^{S_i} (f(\xi) - 1) \pi'_i(\xi) d\xi - P_{n_j} - \int_{S_{nr}}^{S_j} (f(\xi) - 1) \pi'_j(\xi) d\xi \\ &= \int_{S_{nr}}^{S_i} (f(\xi) - 1) \pi'_i(\xi) d\xi - \int_{S_{nr}}^{S_j} (f(\xi) - 1) \pi'_j(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Então, a segunda condição de interface para pressão sobre Γ_{ij} é dada por,

$$P_i - P_j = J_{P1}(S_i, S_j), \quad (2.46)$$

em que a função J_{P1} é definida tal que,

$$J_{P1}(S_i, S_j) = \begin{cases} \int_{S_{nr}}^{S_i} f(\xi)\pi'_i(\xi)d\xi + \pi_i(S_{nr}) - \pi_j(S_{nr}), & \text{se } S_i \in [S_{nr}, S^*], \\ \int_{S_{nr}}^{S_i} (f(\xi) - 1)\pi'_i(\xi)d\xi - \int_{S_{nr}}^{S_j} (f(\xi) - 1)\pi'_j(\xi)d\xi, & \text{se } S_i \in [S^*, 1 - S_{\omega r}]. \end{cases} \quad (2.47)$$

É importante observar que as funções J_{S1} e J_{P1} são contínuas em S^* . Veremos no Capítulo 3 que as definições das funções J_{S1} e J_{P1} facilitam a introdução das condições de interface para saturação e para pressão ao método de Galerkin descontínuo.

Caso 2: Condições sobre a interface Γ_{ij} , quando $\pi_i(S) \geq \pi_j(S)$

Usando raciocínio análogo ao efetuado para o Caso 1, temos as seguintes condições de interface para saturação e pressão sobre Γ_{ij} :

Para saturação:

$$(u_i f(S_i) - \epsilon_i(S_i)\nabla\pi_i(S_i)) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}} = (u_j f(S_j) - \epsilon_j(S_j)\nabla\pi_j(S_j)) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}}, \quad (2.48)$$

$$S_i - S_j = J_{S2}(S_j), \quad (2.49)$$

em que,

$$J_{S2}(S) = \begin{cases} S_{nr} - S, & \text{se } S_{nr} \leq S \leq S^*, \\ -S + \pi_i^{-1}(\pi_j(S)), & \text{se } S^* \leq S \leq 1 - S_{\omega r}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Para a pressão:

$$-\lambda(S_i)K_i\nabla P_i \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}} = -\lambda(S_j)K_j\nabla P_j \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}}, \quad (2.51)$$

$$P_i - P_j = J_{P2}(S_i, S_j), \quad (2.52)$$

em que,

$$J_{P2}(S_i, S_j) = \begin{cases} \int_{S_{nr}}^{S_j} f(\xi)\pi'_j(\xi)d\xi + \pi_i(S_{nr}) - \pi_j(S_{nr}), & \text{se } S_j \in [S_{nr}, S^*], \\ \int_{S_{nr}}^{S_i} (f(\xi) - 1)\pi'_i(\xi)d\xi - \int_{S_{nr}}^{S_j} (f(\xi) - 1)\pi'_j(\xi)d\xi, & \text{se } S_j \in [S^*, 1 - S_{\omega r}]. \end{cases} \quad (2.53)$$

As condições de interface (2.40), (2.41), (2.48) e (2.49) para saturação foram obtidas matematicamente por meio de técnicas de regularização para meios heterogêneos por Duijn *et al.* (1995). Já as condições de interface para pressão foram deduzidas em Chavent e Jaffré (1978) a partir da continuidade da pressão da fase molhante e não-molhante, usando as definições de pressão global (2.28) e (2.29) e a equação para pressão capilar $\pi_\beta = P_{n\beta} - P_{w\beta}$.

A existência e unicidade de solução fraca para o sistema acoplado pressão-saturação com condições de interface usando técnicas de homogeneização foram analisadas por Amaziane *et al.* (1996); Bertsch *et al.* (2003); Bourgeat e Hidani (1995). Mais recentemente Cancès (2010,

2008); Cancès *et al.* (2009) demonstraram existência e unicidade de solução fraca usando uma condição de interface mais geral para o problema unidimensional de escoamento bifásico em meios porosos heterogêneos.

A modelagem numérica para resolver o problema acoplado pressão-saturação (2.33)-(2.35), com condições de fronteira e condições de interface em meios porosos heterogêneos constitui uma tarefa desafiadora, pois a resolução deste problema apresenta várias dificuldades numéricas. Dentre essas dificuldades destacamos:

- Problemas com termo advectivo dominante: em diversas simulações de escoamento em meios porosos, o fenômeno predominante é o de transporte. Nestes casos a solução da equação para a saturação (2.35) tem comportamento predominantemente hiperbólico, o que pode provocar instabilidades numéricas;
- Resolução de um sistema acoplado não-linear: o sistema de equações (2.33)-(2.35) é não-linear e o acoplamento ocorre por meio da velocidade total (2.34). A resolução desse sistema exige lidar de forma coerente com essas não linearidades, aliviando ao máximo o tratamento não linear, mantendo precisão numérica e além disso o problema depende da variação no tempo, o que torna necessário a utilização de uma discretização temporal estável;
- Reconstrução da velocidade total: na resolução desse sistema é usual a utilização da resolução sequencial, ou seja, resolve-se a equação para pressão (2.33) dependendo da saturação no instante de tempo anterior e após calcula-se a saturação no instante de tempo atual. Mas esse processo exige a reconstrução precisa da velocidade total a partir da solução obtida para pressão global, pois o cálculo efetuado diretamente a partir da equação (2.34) gera oscilações numéricas;
- Problema degenerado: de acordo com comentários efetuados na Seção 2.2, a equação para saturação (2.35) é parabólica degenerada, e o método numérico empregado deve ser capaz de lidar com os termos degenerados;
- Descontinuidades das propriedades do meio poroso: heterogeneidades tem grande influência no processo de escoamento, porém a abordagem numérica é uma tarefa difícil. O método numérico deve ser capaz de lidar com propriedades descontínuas como porosidade, permeabilidade e pressão capilar, impondo de forma coerente as condições de interface decorrentes dessas descontinuidades;
- Solução descontínua: além das descontinuidades nas propriedades do meio poroso, a solução para pressão e saturação pode ser descontínua ou apresentar fortes gradientes na frente do fluido ou nas interfaces formadas entre dois tipos de sedimentos.

No próximo capítulo iremos descrever detalhadamente o método numérico proposto neste trabalho para resolver problemas de escoamentos em meios porosos heterogêneos, identificando as técnicas empregadas para contornar os problemas acima expostos.

Capítulo 3

Método de Galerkin Descontínuo Sequencial com Reconstrução de Fluxos

Neste capítulo introduzimos algumas definições relacionadas ao método de Galerkin Descontínuo, como definição das malhas espaciais e temporais, introdução dos conceitos de salto, média, média ponderada e média harmônica. Em seguida, na Seção 3.2, apresentamos o método de Galerkin Descontínuo que propomos neste trabalho para resolver o problema acoplado pressão-saturação (2.33), (2.34) e (2.35) em meios porosos heterogêneos. Apresentamos na Seção 3.3 três maneiras para calcular a velocidade total a partir do gradiente de pressão, identificando as características de cada uma delas. Na seção seguinte, apresentamos alguns resultados existentes na literatura referentes a estimativas de erro para o método DG com a utilização das técnicas de média ponderada e média harmônica e também para a equação parabólica não-linear. Na Seção 3.5, são discutidos alguns aspectos relacionados ao método DG. É obtida também a forma residual da formulação, evidenciando assim a importância de cada termo no método numérico.

3.1 Discretização espacial e temporal

Seja $\{t^m\}_{0 \leq m \leq N}$ uma sequência de tempos com $t^0 = 0$ e $t^N = \mathbf{T}$ e passo no tempo $\Delta t_{m+1} := t^{m+1} - t^m$, $m = 0, 1, \dots, N-1$. Em geral usamos Δt para referenciar o passo no tempo e desta forma facilitar a notação. Seja Ω um domínio aberto e limitado em \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega$. Para discretização espacial consideramos uma partição \mathcal{T}_h do domínio Ω composta por M elementos abertos, disjuntos,

$$\mathcal{T}_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq M}, \text{ tal que } \bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{T}. \quad (3.1)$$

Para cada elemento T da malha \mathcal{T}_h , associamos o diâmetro h_T e definimos o diâmetro da malha como sendo

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

Dizemos que F é uma face interior da malha se F tem medida de dimensão $(d-1)$ não-nula e se existem T^- e T^+ tal que $F = \partial T^- \cap \partial T^+$. Uma face F é uma face da fronteira se F tem medida de dimensão $(d-1)$ não-nula e se existe $T \in \mathcal{T}_h$ tal que $F = \partial T \cap \partial\Omega$. Denotamos

por \mathcal{F}_h^i como sendo o conjunto formado pelas faces interiores e \mathcal{F}_h^∂ o conjunto das faces da fronteira, $\mathcal{F}_h := \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^\partial$ o conjunto de todas as faces e para qualquer $F \in \mathcal{F}_h$, h_F representa o diâmetro da face F .

Supomos que a malha \mathcal{T}_h é consistente com a divisão do domínio Ω em subdomínios e com as condições de fronteira. Portanto, assumimos que as interfaces Γ são exatamente cobertas por um conjunto de faces armazenadas em \mathcal{F}_h^Γ . Definimos $\mathcal{F}_h^{i*} := \mathcal{F}_h^i \setminus \mathcal{F}_h^\Gamma$. Também supomos que os conjuntos $\partial\Omega_p^D$ e $\partial\Omega_s^D$ onde a condição de Dirichlet é satisfeita são exatamente cobertos por faces da fronteira. Desta forma \mathcal{F}_{hp}^D e \mathcal{F}_{hs}^D correspondem ao conjunto das faces onde a condição de Dirichlet é satisfeita para pressão e saturação, respectivamente e \mathcal{F}_{hp}^N e \mathcal{F}_{hs}^N , onde a condição de Neumann deve ser imposta. Quando necessário, usaremos \mathcal{F}_{hs}^- e \mathcal{F}_{hs}^+ para identificar as faces da fronteira que cobrem as regiões de entrada de fluxo $\partial\Omega_s^-$ e saída de fluxo $\partial\Omega_s^+$, respectivamente.

Seja \mathbb{N} o conjunto dos números inteiros positivos. Chamamos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ em \mathbb{N}^d de multi-índice, e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ é o comprimento de α . Supomos que cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$ é imagem de um elemento mestre fixo \hat{T} por uma aplicação afim \mathcal{A}_T , isto é, $T = \mathcal{A}_T(\hat{T})$, em que \hat{T} é o simplex dado por,

$$\hat{T} = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d) \in \mathbb{R}^d : \hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_d \leq 0, \hat{x}_i \geq -1, i = 1, \dots, d\}.$$

Sobre \hat{T} definimos o espaço de polinômios de grau $k \geq 1$ como segue:

$$\mathbb{P}_k(\hat{T}) = \text{span}\{\hat{x}^\alpha : 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

em que, $\hat{x}^\alpha = \hat{x}_1^{\alpha_1} \cdot \hat{x}_2^{\alpha_2} \dots \hat{x}_d^{\alpha_d}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$. Observamos que para um dado elemento $T \in \mathbb{R}^2$, a dimensão do espaço $\mathbb{P}_k(\hat{T})$ é $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ e como base polinomial para este espaço usamos uma base ortonormalizada que permite explorar a ortogonalidade $L^2(\hat{T})$, cuja representação pode ser encontrada em Hesthaven e Warburton (2008). Também apresentamos alguns detalhes no Apêndice A.

Definimos a derivada com multi-índice no sentido de distribuições

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} \text{ em que } \partial_j = \partial/\partial x_j, \text{ para } j = 1, \dots, d.$$

Consideremos agora funções de valores reais definidas sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ que são Lebesgue integráveis. Para $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ como o conjunto de todas as funções u definidas em Ω , tal que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω . O espaço $L^p(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Consideremos também o espaço de Sobolev $W_p^s(\Omega)$, definido abaixo, ao qual associamos o índice de Sobolev s .

Definição 3.1 *Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^d , então para $1 \leq k < \infty$, o espaço de Sobolev $W_p^s(\Omega)$ é definido como sendo,*

$$W_p^s(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq s\},$$

e equipamos esse espaço com a norma de Sobolev dada por,

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Em particular para $p = 2$, denotamos $H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega)$ o espaço de Hilbert de ordem s . Seu produto interno e norma, serão denotados por $(\cdot, \cdot)_{s,\Omega}$ e $\|\cdot\|_{s,\Omega}$, respectivamente. Para o espaço de Lebesgue $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$, usaremos a notação equivalente para o produto interno e para a norma, isto é, $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ e $\|\cdot\|_{0,\Omega}$.

Desta forma, associando a cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$ a função afim \mathcal{A}_T , o grau de aproximação polinomial local k_T e o índice de Sobolev local s_T e armazenando nos vetores $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_T : T \in \mathcal{T}_h\}$, $k = \{k_T : T \in \mathcal{T}_h\}$ e $s = \{s_T : T \in \mathcal{T}_h\}$, podemos definir o espaço de elementos finitos descontínuo:

$$V_h^k(\Omega, \mathcal{A}) := \{v \in L^2(\Omega); v|_T \circ \mathcal{A}_T \in \mathbb{P}_{k_T}(\hat{T}), \text{ desde que } \mathcal{A}_T^{-1}(T) = \hat{T}; \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.2)$$

e o espaço de Sobolev particionado

$$H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in H^{s_T}(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.3)$$

com norma e seminorma associada:

$$\|v\|_{s,\mathcal{T}_h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^{s_T}(T)}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

$$|v|_{s,\mathcal{T}_h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^{s_T}(T)}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.5)$$

respectivamente. Por simplicidade passamos a usar V_h^k ao invés de $V_h^k(\Omega, \mathcal{A})$. Particularmente vamos estar considerando os valores escalares k e s como sendo o grau de aproximação polinomial e o índice de Sobolev, respectivamente, definidos de maneira uniforme na malha. Definimos também o espaço $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ por

$$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^d; \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.6)$$

Para uma função v suficientemente suave, definimos o salto e a média em $F \in \mathcal{F}_h^i$, em que $F = \partial T^- \cap \partial T^+$, respectivamente como:

$$[[v]] := v|_{T^-} - v|_{T^+}, \quad \{v\} := \frac{1}{2}(v|_{T^-} + v|_{T^+}). \quad (3.7)$$

Extendemos essas definições para as faces da fronteira $F \in \mathcal{F}_h^\partial$ como $[[v]] = \{v\} := v|_T$. Para a face $F \in \mathcal{F}_h^i$, $F = \partial T^- \cap \partial T^+$ também definimos a normal \mathbf{n}_F como sendo exterior ao elemento T^- e para uma face de fronteira $F \in \mathcal{F}_h^\partial$, a normal \mathbf{n}_F coincide com a normal exterior $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$.

3.1.1 Média ponderada e média harmônica

Sabemos que a solução para a saturação S pode ser descontínua ou apresentar fortes gradientes na interface Γ , onde temos descontinuidades nas propriedades do meio poroso, ou em regiões onde o coeficiente do termo difusivo zera (equação parabólica degenerada). É

necessário dedicar atenção especial para lidar com o termo difusivo nas regiões onde esse se anula ou se torna arbitrariamente pequeno, pois além da perda de regularidade da solução, a presença do campo advectivo pode conduzir ao aparecimento de camadas limites no interior do domínio (Croisille *et al.* (2005); Ern *et al.* (2009d)).

Em geral os métodos de Galerkin descontínuo têm a característica de impor fracamente a continuidade da solução discreta nas interfaces da malha, desta forma precisamos de um tratamento diferenciado para problemas com coeficientes descontínuos ou que tenham difusividade nula. Uma das técnicas para lidar com equações hiperbólicas-parabólicas degeneradas em problemas de transporte é decompor o domínio espacial de acordo com as propriedades físicas e geológicas e usar diferentes esquemas numéricos em cada região de acordo com classificação hiperbólica ou parabólica (Ern e Proft, 2006; Wheeler e Yotov, 1998). Mas o uso destas técnicas requer o conhecimento *a priori* das regiões onde a equação degenera, o que se torna difícil em problemas não-lineares. Para tratar de forma automatizada da detecção destas regiões e lidar com problemas heterogêneos Di Pietro *et al.* (2008); Ern *et al.* (2009d) desenvolveram um método de Galerkin descontínuo para a equação de advecção-difusão em que usaram as técnicas de média ponderada e média harmônica para simetrização e penalização do termo difusivo. Este método impõe fracamente a continuidade dos fluxos entre as diferentes regiões. Ern e Stephansen (2008) obtiveram estimativas de erro *a posteriori* na norma energia para o método proposto.

Neste trabalho adequamos as técnicas de média ponderada e média harmônica propostas por Di Pietro *et al.* (2008); Ern *et al.* (2009d) para lidar com as heterogeneidades do meio poroso e com o termo difusivo degenerado na equação para a saturação. Para introduzir estas definições, considere uma função escalar a , representando a difusividade definida sobre uma face $F \in \mathcal{F}_h^i$, com valores $a_{T^-,F}$ e $a_{T^+,F}$ associados a T^- e T^+ , respectivamente. Então na face $F \in \mathcal{F}_h^i$ definimos a média ponderada para uma função v e a média harmônica de a , respectivamente por,

$$\{v\}_\omega := \omega_{T^-,F} v^- + \omega_{T^+,F} v^+, \text{ sendo } \omega_{T^-,F} := \frac{a_{T^+,F}}{a_{T^-,F} + a_{T^+,F}}, \omega_{T^+,F} := \frac{a_{T^-,F}}{a_{T^-,F} + a_{T^+,F}} \quad (3.8)$$

$$\langle a \rangle_F := \frac{2a_{T^-,F}a_{T^+,F}}{a_{T^-,F} + a_{T^+,F}}, \quad (3.9)$$

em que os pesos $\omega_{T^-,F}$ e $\omega_{T^+,F}$, são definidos tais que $\omega_{T^-,F} + \omega_{T^+,F} = 1$. Para faces na fronteira, $F \in \mathcal{F}_h^\partial$ extendemos as definições acima por $\{v\}_\omega := v$ e $\langle a \rangle_F := a$. A difusividade a pode assumir valores não necessariamente positivos em problemas degenerados, tais como em problemas de escoamento bifásico. Se somente um dos valores $a_{T^\pm,F}$ zera ou se ambos zera, os pesos são considerados iguais a $\frac{1}{2}$ e a média harmônica é dada por $\langle a \rangle_{F \subset \Omega_\beta} = a_\beta^*$, em que $a_\beta^* = \max_{x \in \Omega_\beta} a_\beta(x)$ é um valor referência. Para $F \in \mathcal{F}_h^\Gamma$ consideramos $\omega_{T^-,F} = \omega_{T^+,F} = \frac{1}{2}$ e $\langle a \rangle_F = \frac{a_i^* a_j^*}{a_i^* + a_j^*}$, sendo $F \subset \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$. Para as faces interiores $F \in \mathcal{F}_h^i$ definimos também a média ponderada conjugada por,

$$\{v\}_{\bar{\omega}} := \omega_{T^+,F} v^- + \omega_{T^-,F} v^+, \quad (3.10)$$

por meio da qual temos a seguinte identidade para funções v e w ,

$$\llbracket vw \rrbracket = \{v\}_\omega \llbracket w \rrbracket + \{w\}_{\bar{\omega}} \llbracket v \rrbracket. \quad (3.11)$$

3.2 Método de Galerkin descontínuo sequencial

Procuramos aproximações no instante de tempo t^m com $m \in \{1, \dots, N\}$, para a pressão P_h^m e para a saturação S_h^m no espaço de elementos finitos descontínuo V_h^k definido em (3.2). Observamos que procuramos aproximações para pressão e saturação de mesma ordem polinomial. A escolha de diferentes ordens de aproximações polinomiais também é possível, mas esta escolha parece mais natural. Reescrevendo as equações (2.33), (2.34) e (2.35) que regem o escoamento bifásico, incompressível e imiscível em meios porosos heterogêneos: Dado o instante de tempo \mathbf{T} , encontrar (P, S) que satisfazem em $\Omega_\beta \times [0, \mathbf{T}]$ para cada $\beta \in \{1, 2, \dots, N_l\}$,

$$-\nabla \cdot (\lambda(S_\beta)K_\beta \nabla P_\beta) = q_{\omega\beta} + q_{n\beta}, \quad (3.12)$$

$$u_\beta = -\lambda(S_\beta)K_\beta \nabla P_\beta, \quad (3.13)$$

$$\phi_\beta \partial_t S_\beta + \nabla \cdot (u_\beta f(S_\beta)) - \nabla \cdot (\epsilon_\beta(S_\beta) \nabla \pi_\beta(S_\beta)) = q_{n\beta}. \quad (3.14)$$

Descrevemos abaixo o método de Galerkin descontínuo sequencial proposto para resolver o sistema de equações (3.12)-(3.14). A resolução desse sistema será efetuada de forma sequencial, ou seja, primeiramente obtemos a aproximação para pressão P_h^m no instante de tempo t^m usando a saturação S_h^{m-1} do instante de tempo anterior t^{m-1} . Após obtemos a velocidade total u_h^m por intermédio da equação (3.13), a qual é utilizada na equação (3.14) para obter a saturação S_h^m no instante de tempo t^m . E após recomeçamos o processo para obter aproximações P_h^{m+1} , u_h^{m+1} e S_h^{m+1} para o próximo instante de tempo t^{m+1} .

A formulação de Galerkin descontínuo apresentada nesta seção para resolver o sistema acoplado pressão-saturação (3.12)-(3.14) é resultado de um estudo efetuado com diferentes formulações. No decorrer deste estudo foram realizadas análises numéricas em domínios unidimensionais e bidimensionais, utilizando problemas com diferentes graus de complexidade, permitindo assim obter a formulação mais adequada para resolver problemas de escoamento em meios porosos homogêneos e heterogêneos.

3.2.1 Pressão Global P

Dada a saturação $S_h^m \in V_h^k$, para $m = 0, 1, \dots, N-1$ do passo no tempo anterior ($m \geq 1$) ou da condição inicial S_0 ($m = 0$), resolvemos primeiramente a equação para pressão (3.12) usando o método DG com penalização interior, ou seja, procuramos $P_h^{m+1} \in V_h^k$ tal que $\forall z_h \in V_h^k$,

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1} \cdot \nabla z_h \\ & - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hp}^D} \int_F (\mathbf{n}_F \cdot \{\lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1}\}_\omega [z_h] + \vartheta \mathbf{n}_F \cdot \{\lambda(S_h^m) K \nabla z_h\}_\omega [P_h^{m+1}]) \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hp}^D} \int_F \gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F} [P_h^{m+1}] [z_h] = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (q_w + q_n) z_h - \sum_{F \in \mathcal{F}_{hp}^N} \int_F P_N z_h \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hp}^D} \int_F \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \cdot \lambda(S_h^m) K \nabla z_h + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F} z_h \right) P_D \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \cdot \{\lambda(S_h^m) K \nabla z_h\}_\omega + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F} [z_h] \right) G(S_h^m) \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que P_D e P_N representam a condição de Dirichlet (2.36) e de Neumann (2.39), respectivamente, para a pressão e $\vartheta \in \{-1, 0, 1\}$ permite migrar entre as formulações não-simétrica, incompleta ou simétrica do método DG. O parâmetro $\sigma_F = \tilde{\sigma}k^2$, sendo $\tilde{\sigma} > 0$ suficientemente grande para garantir a estabilidade do método se $\vartheta = 1$ e γ_F é dado pela média harmônica de acordo com a definição (3.9),

$$\gamma_F = \langle a \rangle_F,$$

em que a representa o coeficiente difusivo tal que, $a_{T^\pm, F} = \|\lambda(S_h^m)K|_{T^\pm}\|_{L^\infty(F)}$, para $F \in \mathcal{F}_h^i$ e $a_{T, F} = \|\lambda(S_h^m)K|_T\|_{L^\infty(F)}$, para $F \in \mathcal{F}_h^\partial$. O operador $G(S_h^m)$ sobre a interface Γ_{ij} , é definido como,

$$G(S_h^m) = \begin{cases} J_{P1}(S_{h,i}^m, S_{h,j}^m), & \text{se } \pi_i(S) \leq \pi_j(S), \\ J_{P2}(S_{h,i}^m, S_{h,j}^m), & \text{se } \pi_i(S) \geq \pi_j(S). \end{cases} \quad (3.16)$$

em que $S_{h,\beta}^m$, $\beta \in \{i, j\}$, denota a restrição de S_h^m ao subdomínio Ω_β , J_{P1} e J_{P2} são funções definidas em (2.47) e (2.53), respectivamente. Note que em (3.15) estamos linearizando a equação para pressão ao usar a saturação S_h^m do instante t^m para calcular a pressão P_h^{m+1} . Essa linearização facilita a solução do sistema de equações pressão-saturação, pois permite calcular pressão e saturação separadamente. Lembramos que a equação para a pressão não degenera, sendo que a técnica da média ponderada é usada para lidar adequadamente com as heterogeneidades do meio poroso.

Observamos que para calcular a solução para pressão no primeiro passo no tempo t^1 usamos a saturação no instante inicial S_h^0 como sendo uma aproximação construída a partir da condição inicial S_0 . Obtemos essa aproximação pela projeção L^2 -ortogonal de S_0 no espaço V_h^k . Outra observação importante a ser feita é a necessidade do conhecimento da direção do fluxo ($u \cdot \mathbf{n}_F \leq 0$ ou $u \cdot \mathbf{n}_F \geq 0$) para aplicar a condição de interface por intermédio do operador $G(S_h^m)$ sobre a face $F \in \mathcal{F}_h^\Gamma$. Para $m = 0$, essa direção do fluxo é obtida por meio do cálculo da pressão usando a Eq. (3.15), com $G(S_h^m) = 0$. Após obtemos a velocidade u por intermédio de uma das técnicas de reconstrução que descrevemos na Seção 3.3. Já para $m \geq 1$, usamos u_h^m , velocidade total do instante de tempo anterior, para fornecer uma aproximação da direção do fluxo.

3.2.2 Velocidade total u

Após obter a aproximação para a pressão global P_h^{m+1} no instante t^{m+1} , calculamos a velocidade total u_h^{m+1} no instante t^{m+1} por meio da relação (3.13). Para garantir estabilidade na resolução do sistema acoplado pressão-saturação é essencial desenvolver esquemas numéricos que permitam recuperar com precisão a velocidade total. Discutimos algumas formas de obter a velocidade total na Seção 3.3.

3.2.3 Saturação S

Para calcular S_h^{m+1} , usamos para discretização temporal o método de Euler implícito no tempo, juntamente com uma discretização espacial do termo difusivo pelo método DG com penalização interior e fluxo de Godunov (ou equivalentemente fluxo *upwind* desde que a função fluxo fracionário é monótona) para o termo advectivo não-linear. Consequentemente, procuramos $S_h^{m+1} \in V_h^k$ tal que para todo $v_h \in V_h^k$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^{m+1} v_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u_h^{m+1} f(S_h^{m+1}) \cdot \nabla v_h \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^+} \int_F \mathbf{n}_F \cdot \{u_h^{m+1} f(S_h^{m+1})\} \llbracket v_h \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{i^*}} \int_F \llbracket 0.5 |u_h^{m+1} \cdot \mathbf{n}_F| f(S_h^{m+1}) \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket \\
& + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla S_h^{m+1} \cdot \nabla v_h - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \int_F \mathbf{n}_F \cdot \{\epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla S_h^{m+1}\}_\omega \llbracket v_h \rrbracket \\
& - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \int_F \vartheta \mathbf{n}_F \cdot \{\epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla v_h\}_\omega \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \int_F \delta_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket = (3.17) \\
& + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_n v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^m v_h - \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^-} \int_F (\mathbf{n}_F \cdot u_h^{m+1}) f(S_D) v_h \\
& - \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^N} \int_F S_N v_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^D} \int_F \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \cdot \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla v_h + \delta_F \frac{\sigma_F}{h_F} v_h \right) S_D \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \cdot \{\epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla v_h\}_\omega + \delta_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket v_h \rrbracket \right) J(S_h^m).
\end{aligned}$$

em que S_D e S_N representam a condição de Dirichlet (2.36) e a condição de Neumann (2.39), respectivamente, para a saturação e $\delta_F = \langle a \rangle_F$, sendo a média harmônica definida por (3.9) com a representando o coeficiente difusivo de tal forma que, $a_{T^\pm, F} = \|\epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m)|_{T^\pm}\|_{L^\infty(F)}$, para $F \in \mathcal{F}_h^i$ e $a_{T, F} = \|\epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m)|_T\|_{L^\infty(F)}$, para $F \in \mathcal{F}_h^\partial$. O operador $J(S_h^m)$ sobre a interface Γ_{ij} é definido como,

$$J(S_h^m) = \begin{cases} J_{S_1}(S_{h,i}^m), & \text{se } \pi_i(S) \leq \pi_j(S), \\ J_{S_2}(S_{h,i}^m), & \text{se } \pi_i(S) \geq \pi_j(S). \end{cases} \quad (3.18)$$

sendo J_{S_1} e J_{S_2} definidos em (2.42) e (2.50), respectivamente. Observe que no método DG para a saturação (3.17) linearizamos o coeficiente do termo difusivo calculando-o em S_h^m , da mesma forma como efetuamos na equação da pressão (3.15), mas o método continua não-linear devido ao fluxo fracionário que depende de S_h^{m+1} . Para resolver (3.17) usamos o método de Newton.

Estamos usando o método de Euler implícito para discretização no tempo, que fornece uma aproximação de primeira ordem estável. Uma outra alternativa para a discretização no tempo seria usar métodos de Runge-Kutta TVD (*Total Variation Diminishing*), que são métodos de alta ordem no tempo. Um método é dito TVD quando,

$$TV(\bar{\mathbf{U}}^{m+1}) \leq TV(\bar{\mathbf{U}}^m), \text{ onde } TV(\bar{\mathbf{U}}^m) = \sum_j |\bar{\mathbf{U}}_{j+1}^m - \bar{\mathbf{U}}_j^m|,$$

sendo $\bar{\mathbf{U}}_j^m$ a projeção ortogonal L^2 de \mathbf{U}^m sobre o espaço $V_h^0|_{T_j}$, $1 \leq j \leq M$, e $\mathbf{U}^m \in V_h^k$ a aproximação numérica de ordem k no instante de tempo t^m . Mas para poder usar os métodos TVD de alta ordem precisamos ter a garantia de que o método de Euler explícito associado com uma dada discretização espacial é fortemente estável (TVD) sob uma certa restrição no passo no tempo. Além disso, o método de Runge-Kutta de alta ordem associado com esta mesma discretização espacial também deve satisfazer à condição TVD, cuja propriedade é fundamental para garantir estabilidade. Se o método de Euler explícito associado a uma dada discretização espacial não satisfaz a condição TVD, então não podemos usar métodos TVD de alta ordem, pois não teremos garantia da convergência desse método. Em Gottlieb e Shu

(1998); Gottlieb *et al.* (2001) pode ser encontrado um exemplo numérico onde aparecem oscilações quando é usado um método numérico de alta ordem que não possui a propriedade TVD.

Essas oscilações são provocadas pelo fenômeno de Gibbs. Uma manifestação desse fenômeno é o fato que a projeção L^2 de uma função descontínua ou com fortes gradientes sobre o espaço DG pode exibir oscilações para $k \geq 1$. Oscilações podem incluir dificuldades em muitas aplicações, desde que elas podem provocar a perda do conjunto admissível de valores, muitas vezes violando princípios físicos fundamentais de leis de conservação. Nesse contexto usar esquemas com a propriedade de produzir soluções não-oscilatórias torna-se indispensável. Para que possamos encontrar esquemas de Runge-Kutta de alta ordem tipo TVD é necessário a introdução de limitantes após cada passo no tempo para garantir a propriedade TVD do método (Cockburn, 1999; Ern e Piperno, 2008). Porém a introdução de limitantes torna-se complicada em malhas não-estruturadas e em duas e três dimensões não existe uma análise na literatura, mas em geral ocorre a redução na ordem de convergência do método. Já o uso do método de Euler implícito fornece soluções estáveis sem a necessidade da introdução de limitantes, conforme será visto por meio de resultados numéricos nos próximos capítulos.

No método de Galerkin descontínuo apresentado em (3.17) utilizamos fluxo numérico de Godunov para o termo advectivo não-linear, sendo que para $F \in \mathcal{F}_h^{i*}$, $F = \partial T^- \cap \partial T^+$ temos,

$$\{\mathbf{n}_F \cdot u_h^{m+1} f(S_h^{m+1})\} + \llbracket 0.5|\mathbf{n}_F \cdot u_h^{m+1}|f(S_h^{m+1}) \rrbracket = \begin{cases} \mathbf{n}_F \cdot u_h^{m+1} f(S_h^{m+1})|_{T^-}, & \text{se } \mathbf{n}_F \cdot u_h^{m+1} \geq 0, \\ \mathbf{n}_F \cdot u_h^{m+1} f(S_h^{m+1})|_{T^+}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desta forma, o fluxo de Godunov é usado para todas as faces exceto para as que cobrem a interface $F \in \mathcal{F}_h^\Gamma$, onde é usado fluxo centrado médio. O fluxo de Godunov é uma das melhores escolhas para tratar o termo advectivo em problemas não-lineares, tendo em vista que esta estabilização produz poucos efeitos de viscosidade artificial quando comparada a outras técnicas como por exemplo o fluxo local de Lax-Friedrich, que produz mais viscosidade artificial, mas o desempenho de ambas as técnicas é similar. Para mais detalhes relacionados ao fluxo de Godunov ver Cockburn e Shu (2001).

Já para a discretização do termo difusivo usamos o método de Galerkin descontínuo com penalização interior (veja Arnold (1982)), associado às técnicas de média ponderada e média harmônica conforme descrito em Ern *et al.* (2009d). A introdução dessas técnicas é essencial para lidar de forma adequada com os coeficientes descontínuos e degenerados do sistema de equações pressão-saturação.

Um dos diferenciais do método de Galerkin descontínuo (3.15) e (3.17) proposto neste trabalho em relação a outras formulações encontradas na literatura (por ex. Epshteyn e Rivière (2007); Eslinger (2005); Klieber e Rivière (2006); Rivière e Bastian (2004)) é a introdução das condições de interface para a pressão e para a saturação por meio dos operadores $G(S)$ e $J(S)$, respectivamente. A introdução da condição de interface no método DG é uma das contribuições deste trabalho e nos permite resolver problemas heterogêneos em que temos descontinuidades na permeabilidade e também na pressão capilar, assim possibilitando ao método captar o fenômeno de acúmulo de óleo. Na literatura podemos encontrar alguns trabalhos publicados nos últimos anos em que são propostas diferentes idéias para incorporar as condições de interface não-lineares ao método de Volumes Finitos. Enchéry *et al.* (2006) propuseram um método de Volumes Finitos para a equação da saturação degenerada com pressão capilar descontínua em que foram incorporadas as condições de interface não-lineares. Em (Cancès, 2008; Cancès *et al.*, 2009) os autores consideraram condições de interface

mais gerais e apresentam resultados de existência e unicidade de solução para a formulação de Volumes Finitos. Já Cancès (2009) analisou o método de Volumes Finitos para a equação parabólica degenerada incluindo o termo advectivo não-linear com uma descontinuidade na interface. Porém, os métodos citados acima, trabalham somente com a equação para a saturação, utilizando a velocidade prescrita, enquanto que no método DG aqui proposto trabalhamos com o problema acoplado pressão-saturação.

A utilização do método de Euler implícito e a reconstrução de fluxos acurada que descrevemos na Seção 3.3 em conjunto com as técnicas de média ponderada e média harmônica são essenciais para obter um método estável, sem empregar limitantes. Outra característica importante proporcionada pela utilização das médias harmônica e ponderada, é o fato do método DG proposto captar automaticamente regiões em que o termo difusivo degenera na equação para a saturação e aplicar o tratamento adequado, sem necessidade de conhecer as regiões degeneradas previamente.

3.3 Reconstrução de fluxos

Na Seção 3.2 descrevemos o método de Galerkin descontínuo empregado para resolver a equação elíptica para pressão e a equação parabólica degenerada e não-linear para a saturação. Porém não detalhamos como calcular a velocidade total u_h^{m+1} no instante de tempo t^{m+1} a partir da pressão global P_h^{m+1} , e que será utilizada para obter a saturação S_h^{m+1} , pois o acoplamento entre as equações para a pressão e para a saturação ocorre por meio da velocidade total.

Para calcular a velocidade total u , temos a seguinte relação:

$$u = -\lambda K \nabla_h P_h, \quad (3.19)$$

em que o operador ∇_h representa o gradiente de uma função calculado localmente na malha \mathcal{T}_h . Uma das formas para obter a velocidade total é calcular a derivada por partes da pressão global P_h e usar em (3.19), mas desta forma o fluxo é descontínuo e conseqüentemente não pertence ao espaço $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ e além disso, para problemas heterogêneos, gera campos de velocidades não conservativos. Nos resultados numéricos identificaremos esta forma de obter a velocidade total de SR (sem reconstrução). Uma desvantagem do método de Galerkin descontínuo é o fato da componente normal do campo de velocidades não ser contínua na fronteira entre elementos. O que por sua vez leva ao aparecimento de oscilações não físicas quando um cálculo do fluxo DG é acoplado a um cálculo de transporte DG de maneira direta. A descontinuidade pontual na componente normal da velocidade DG produz um erro numérico adicional que pode ser significativo em aplicações em que o transporte é acoplado a um fluxo não uniforme. Além da importância na resolução de problemas de escoamento em meios porosos, a reconstrução de fluxos também pode ser utilizada na obtenção de estimativas de erro *a posteriori* para o método DG, indispensáveis para implementação de técnicas adaptativas (Cochez-Dhondt e Nicaise, 2008; Ern *et al.*, 2007b).

Para resolver este problema é necessário usar algum tipo de pós-processamento para o fluxo. Descrevemos abaixo dois processos de reconstrução de fluxos: um projeta o fluxo sobre o espaço de elementos finitos BDM (Brezzi-Douglas-Marini) reconstrução introduzida por Rivière e Bastian (2003) e o outro projeta o fluxo no espaço RT (Raviart-Thomas-Nédélec), reconstrução proposta por Ern *et al.* (2007a) para problemas elípticos, sendo que aqui efetuamos a extensão dessa reconstrução para problemas de escoamento bifásico.

3.3.1 Projeção do fluxo no espaço de Brezzi-Douglas-Marini

Para a reconstrução de fluxos a partir da solução obtida com o método DG para uma formulação do tipo (3.15), de tal forma que o fluxo reconstruído seja localmente conservativo e que tenha a componente normal contínua, Rivière e Bastian (2003) propuseram o seguinte algoritmo:

Seja $P_h \in V_h^k, k \geq 2$, a pressão global obtida pelo método de Galerkin descontínuo (3.15) e seja,

$$\mathbf{u}^{DG} = -\lambda K \nabla_h P_h \in [V_h^{k-1}]^d, \quad (3.20)$$

o respectivo fluxo. Então o fluxo reconstruído \mathbf{u}_{BDM} é a projeção de \mathbf{u}^{DG} no espaço BDM introduzido por Brezzi *et al.* (1985), sendo que o valor médio do gradiente da solução DG nas interfaces é usado para determinar os graus de liberdade. Para qualquer $T \in \mathcal{T}_h$, o fluxo $\mathbf{u}_{\text{BDM}} \in (\mathbb{P}^{k-1}(T))^d$ é definido como segue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{\text{BDM}} \cdot \mathbf{n}_T, v)_{0, \partial T} &= (\{\mathbf{u}^{DG}\} \cdot \mathbf{n}_T, v)_{0, \partial T}, \quad \forall v \in \mathbb{P}^{k-1}(\partial T), \\ (\mathbf{u}_{\text{BDM}}, \nabla w)_{0, T} &= (\mathbf{u}^{DG}, \nabla w)_{0, T}, \quad \forall w \in \mathbb{P}^{k-2}(T), \\ (\mathbf{u}_{\text{BDM}}, \mathbf{S}(z))_{0, T} &= (\mathbf{u}^{DG}, \mathbf{S}(z))_{0, T}, \quad \forall z \in M_k(T), \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que

$$M_k(T) = \{z \in \mathbb{P}^k(T) \mid z|_{\partial T} = 0\} \quad \text{e} \quad S(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}, -\frac{\partial z}{\partial x_1} \right).$$

De acordo com Brezzi e Fortin (1991), as condições descritas em (3.21) definem unicamente o fluxo \mathbf{u}_{BDM} no espaço BDM.

Características do campo de velocidades após a reconstrução no espaço BDM:

- O novo campo de velocidades reproduz identicamente o fluxo normal médio do campo de velocidades DG. Esta propriedade é importante, porque o fluxo normal médio é localmente conservativo no método DG;
- O novo campo de velocidades tem a componente normal contínua na fronteira entre elementos;
- A projeção preserva a propriedade de conservação local de massa.

Além destas propriedades, supondo que a solução exata P de (3.12) pertence ao espaço $H^s(\mathcal{T}_h)$, $s \geq 1$, Rivière e Bastian (2003) obtiveram os seguintes resultados para a velocidade reconstruída \mathbf{u}_{BDM} :

Lema 3.2 *Sejam P e u as soluções exatas das equações (3.12) e (3.13), respectivamente e seja \mathbf{u}^{DG} definido por (3.20). Então, para qualquer elemento $T \in \mathcal{T}_h$ temos,*

$$\|(\{\mathbf{u}^{DG}\} - u) \cdot \mathbf{n}_F\|_{0, F} \leq C \frac{h^{\min(k+1, s) - 3/2}}{k^{s-7/2}} \|P\|_{H^s(\mathcal{T}_h)}, \quad \forall F \subset \partial T, \quad (3.22)$$

em que C é uma constante independente de h e k .

Pela construção de \mathbf{u}_{BDM} , temos como consequência do Lema 3.2:

$$\|(\mathbf{u}_{\text{BDM}} - u) \cdot \mathbf{n}_F\|_{0, F} \leq C \frac{h^{\min(k+1, s) - 3/2}}{k^{s-7/2}} \|P\|_{H^s(\mathcal{T}_h)}, \quad \forall F \subset \partial T. \quad (3.23)$$

Teorema 3.3 *Existe uma constante C independente de h , tal que para qualquer elemento $T \in \mathcal{T}_h$,*

$$\|\mathbf{u}_{\text{BDM}} - \mathbf{u}^{DG}\|_{0,T} \leq Ch^{\min(k+1,s)-1} \|P\|_{H^s(\mathcal{T}_h)}. \quad (3.24)$$

Garantindo assim que a velocidade total após a reconstrução tem a mesma precisão e ordem de convergência que o campo de velocidades DG original.

3.3.2 Projeção do fluxo no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec

Neste caso, após obter a pressão P_h^{m+1} , a velocidade total u_h^{m+1} é obtida por meio da reconstrução de fluxos no espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas-Nédélec (RT) de grau l , $l \in \{k-1, k\}$, onde

$$\mathbf{RT}_l(\mathcal{T}_h) = \{u_h \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, u_h|_T \in [\mathbb{P}_l(T)]^d + x\mathbb{P}_l(T)\}, \quad (3.25)$$

Esta reconstrução de fluxos foi proposta por Ern *et al.* (2007a) para problemas elípticos e a seguir efetuamos a extensão para problemas de escoamento bifásico. Em particular, $u_h \in \mathbf{RT}_l(\mathcal{T}_h)$ é tal que $\nabla \cdot u_h \in \mathbb{P}_l(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}_h$, $u_h \cdot \mathbf{n}_F \in \mathbb{P}_l(F)$ para todo $F \in \mathcal{F}_h$ e todo $T \in \mathcal{T}_h$, e tal que seu traço normal é contínuo.

A reconstrução prescreve localmente em cada elemento da malha $T \in \mathcal{T}_h$ os graus de liberdade locais de u_h^{m+1} como segue: Para todo $F \in \mathcal{F}_h$ e $\forall q \in \mathbb{P}_l(F)$,

$$\int_F (u_h^{m+1} \cdot \mathbf{n}_F) q = \int_F \left(-\mathbf{n}_F \cdot \{\lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1}\}_\omega + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket' \right) q, \quad (3.26)$$

e para todo $T \in \mathcal{T}_h$, $\forall w \in [\mathbb{P}_{l-1}(T)]^d$

$$\int_T u_h^{m+1} \cdot w = - \int_T \lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1} \cdot w + \vartheta \sum_{F \in \partial T} \int_F \omega_{T,F} \mathbf{n}_F \cdot (\lambda(S_h^m) K w) \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket', \quad (3.27)$$

onde $\llbracket \cdot \rrbracket'$ é definido em (3.57). Estas condições prescrevem todos os graus de liberdade do campo vetorial u_h^{m+1} (Brezzi e Fortin, 1991). Para mais detalhes referentes à reconstrução de fluxos descrita acima, ver Ern *et al.* (2007a, 2009a, 2010).

Características do campo de velocidades após a reconstrução no espaço RT:

Ern *et al.* (2007a,b) demonstraram que o divergente do fluxo reconstruído no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec é ótimo, ou seja, é igual à projeção ortogonal L^2 do termo de fonte sobre o espaço de aproximação discreto DG. Os autores apresentaram esse resultado através do seguinte teorema:

Teorema 3.4 *Seja $P_h \in V_h^k$ a solução DG do problema elíptico (3.12) e $u_h \in \mathbf{RT}_l(\mathcal{T}_h)$ o fluxo reconstruído obtido por meio das equações (3.26) e (3.27), então,*

$$-\nabla \cdot u_h = \Pi_h^k f, \quad (3.28)$$

onde $f = q_w + q_n$ e $\Pi_h^k f$ é a projeção L^2 -ortogonal de f no espaço V_h^k .

Esta é uma propriedade muito importante quando o fluxo reconstruído é usado posteriormente como velocidade em um escoamento advectivo ou como ferramenta para estimativa de erro *a posteriori*.

Definimos a norma energia discreta associada ao espaço V_h^k de acordo com Ern *et al.* (2007a, 2009d) por,

$$\|v\|_{\Omega}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_T^2, \quad \text{onde} \quad \|v\|_T^2 = \int_T \lambda(S)K \nabla v \cdot \nabla v + \sum_{F \subset \partial T} \gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket v \rrbracket. \quad (3.29)$$

Outra propriedade importante da reconstrução de fluxos no espaço RT é o fato do erro referente ao fluxo difusivo na norma energia ser limitado pela norma energia discreta do erro na variável primal ($P - P_h$), independentemente das heterogeneidades difusivas. Apresentamos esse resultado no teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Ern *et al.* (2007a):

Teorema 3.5 *Seja P a solução exata do problema elíptico (3.12) e $u_h \in \mathbf{RT}_l(\mathcal{T}_h)$ o fluxo reconstruído obtido por meio das equações (3.26) e (3.27), então,*

$$\|(\lambda K)^{\frac{1}{2}} \nabla P + (\lambda K)^{-\frac{1}{2}} u_h\|_{0,\Omega} \leq C \max_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\Lambda_{M,T}}{\Lambda_{m,T}} \right) \|P - P_h\|_{\Omega}, \quad (3.30)$$

em que $\Lambda_{M,T}$ e $\Lambda_{m,T}$ são o maior e o menor autovalor do coeficiente difusivo λK no elemento T .

Devido a estimativa de erro *a priori* que apresentamos no Teorema 3.6 da Seção 3.4 para $\|P - P_h\|_{\Omega}$, o Teorema 3.5 garante o mesmo limitante para o fluxo reconstruído u_h . Como consequência, $\|(\lambda K)^{\frac{1}{2}} \nabla P + (\lambda K)^{-\frac{1}{2}} u_h\|_{0,\Omega}$ fornece um valor ótimo para estimativas de erro *a posteriori*.

Além das propriedades destacadas acima para o fluxo reconstruído no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec, temos ainda:

- O campo de velocidades é obtido com taxas ótimas de convergência e também é conservativo;
- A reconstrução é feita elemento por elemento, logo não demanda significativo custo computacional;
- Esta projeção no espaço RT é mais precisa que a projeção no espaço BDM. Resultados numéricos que comprovam essa afirmação podem ser encontrados nos artigos publicados (Ern *et al.*, 2009a, 2010) e também nos resultados numéricos que serão apresentados nos próximos capítulos.

No Apêndice B descrevemos com detalhes a reconstrução da velocidade total no espaço $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ para domínios bidimensionais.

3.4 Estimativas de erro

Nesta seção apresentamos alguns resultados que podem ser encontrados na literatura referentes a estimativas de erro *a priori* para o método de Galerkin descontínuo e discutimos as semelhanças e diferenças com o método DG aqui proposto, procurando identificar quais estimativas de erro são as mais adequadas.

Para o problema difusivo (2.30), consideramos a norma energia discreta definida em (3.29). Ern *et al.* (2009d) demonstraram, sob a hipótese de que o coeficiente difusivo seja constante por partes e limitado inferiormente por uma constante positiva, que o método DG aplicado à equação de advecção-difusão, com a utilização das técnicas de média ponderada e

média harmônica como descrito acima satisfaz as propriedades de coercividade, consistência e continuidade na norma energia discreta (3.29) no sentido do segundo Lema de Strang (ver (Ern e Guermond, 2004)), garantindo assim existência e unicidade de solução para o método DG. Os autores também obtiveram as seguintes estimativas de erro *a priori* ótimas para a solução do método DG, $P_h \in V_h^k$, na norma energia e na norma L^2 :

Teorema 3.6 *Seja $\Lambda_M := \max(1, \Lambda_{M,\Omega})$, em que $\Lambda_{M,\Omega}$ é o maior autovalor do coeficiente difusivo $\lambda(S)K$ em Ω . Então, se a solução exata P da equação (2.30) está em $H^{k+1}(\mathcal{T}_h)$,*

$$\|P - P_h\|_{\Omega} \leq C \Lambda_M^{\frac{1}{2}} h^k \|P\|_{H^{k+1}(\mathcal{T}_h)}, \quad (3.31)$$

em que $C > 0$ é uma constante que pode depender da regularidade da malha, mas independe do diâmetro de malha h .

Supondo que o coeficiente difusivo não seja muito pequeno e usando o argumento de dualidade de Aubin-Nitsche, demonstraram também que a estimativa de erro na norma L^2 pode ser aprimorada como descrito pelo Teorema,

Teorema 3.7 *Se a solução exata P da equação (2.30) está em $H^{k+1}(\mathcal{T}_h)$, então,*

$$\|P - P_h\|_{0,\Omega} \leq C \frac{\Lambda_M}{\Lambda_{m,\Omega}} h^{k+1} \|P\|_{H^{k+1}(\mathcal{T}_h)}, \quad (3.32)$$

em que $\Lambda_{m,\Omega}$ é o menor autovalor do coeficiente difusivo $\lambda(S)K$ em Ω .

Ern e Stephansen (2008) também obtiveram estimativas de erro ótimas para o método de Galerkin descontínuo com penalização interior usando média ponderada para o problema de advecção-difusão linear. Já para o problema não-linear e transiente é muito mais complicado efetuar análise de convergência e obter estimativas de erro. De fato, em 1982, Chavent e Salzano (1982) usaram pela primeira vez o método DG para discretização espacial para uma lei de conservação hiperbólica não-linear com aplicação à problemas de recuperação de petróleo, e após tanto tempo não existe análise de convergência para a discretização espacial DG para problemas de lei de conservação não-linear com soluções não suaves, exceto para alguns casos particulares, como o caso de aproximação polinomial constante por partes. A seguir passaremos a descrever alguns resultados referentes a análise de erro que podem ser encontrados na literatura para o método DG aplicado a problemas transientes não-lineares.

Rivière e Wheeler (1999) introduziram uma formulação DG com penalização interior, localmente conservativa para resolver o problema parabólico não-linear:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot a(x, U) \nabla U = q(x, U), \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega \quad (3.33)$$

com condição de fronteira de Neumann homogênea, e obtiveram estimativas de erro em H^1 ótimas, sob a hipótese da existência de ς e ς^* tal que $0 < \varsigma \leq a(U) \leq \varsigma^*$.

Recentemente Epshteyn e Rivière (2009) obtiveram taxas de convergência para o método DG aplicado à resolução do problema de escoamento bifásico, incompressível e totalmente acoplado para o caso não-degenerado:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\lambda_t K \nabla P) &= q_w + q_n, \\ \phi \frac{\partial S_n}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\lambda_w K \nabla P - \frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda_t} K \nabla \pi \right) &= -q_w. \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde a pressão global é definida por,

$$P(t, x) = P_n(t, x) + \pi(1 - S_{nr}) - \int_{1-S_{nr}}^{1-S_n(t,x)} \frac{\lambda_w(\xi)}{\lambda_t(\xi)} \pi'(\xi) d\xi. \quad (3.35)$$

Observamos que a equação para saturação S_n (3.34) utilizada em (Epshteyn e Rivière, 2009) e a formulação de Galerkin descontínuo para esta equação são diferentes das utilizadas neste trabalho (veja equação (2.32)). Os autores obtêm estimativas na malha espacial e para ordem de aproximação polinomial, e exibem o parâmetro de penalização que deve ser escolhido para garantir estabilidade e convergência. Também são apresentados resultados numéricos que confirmam as taxas de convergência teóricas.

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de hp-estimativas de erro *a priori* na norma L^2 e na seminorma H^1 obtidas no artigo (Dolejší, 2007) para o método DG aplicado ao problema de advecção-difusão não-linear transiente mais geral:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{F}(U) - \nabla \cdot A(U, \nabla U) = q, \quad \text{em } (0, \mathbf{T}) \times \Omega, \quad (3.36)$$

onde $U : (0, \mathbf{T}) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $A = (A_1, \dots, A_d) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, com $A_s = A_s(\zeta) = A_s(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_d)$, são funções não lineares. Como condição de fronteira e inicial são consideradas:

$$\begin{aligned} U &= U_D, \quad \text{sobre } \partial\Omega^D, \\ A(U, \nabla U) \cdot n_{\partial\Omega} &= U_N, \quad \text{sobre } \partial\Omega^N, \\ U|_{t=0} &= U^0, \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Se consideramos $\mathbb{F}(U) = u_t f_n(U)$, $A(U, \nabla U) = \epsilon(U) \pi'(U) \nabla U$ e $q = q_n$ na equação (3.36) recuperamos a equação para a saturação da fase não-molhante (2.32).

Para demonstrar as estimativas de erro, Dolejší (2007) supõe que o problema (3.36)-(3.37) possui uma única solução U , suficientemente regular e além disso assume:

- (i) a função \mathbb{F} é Lipschitz-contínua com constante $C_{\mathbb{F}}$, ou seja,

$$|\mathbb{F}(v) - \mathbb{F}(w)| \leq C_{\mathbb{F}} |v - w|, \quad (3.38)$$

- (ii) as funções $A_s = A_s(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_d)$ são contínuas em \mathbb{R}^{d+1} e existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$|A_s(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_d)| \leq c_1 \left(1 + \sum_{i=0}^d |\zeta_i| \right), \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad s = 1, \dots, d, \quad (3.39)$$

- (iii) existem derivadas contínuas e limitadas $\frac{\partial A_s}{\partial \zeta_i}(\zeta)$, ou seja, existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial A_s(\zeta)}{\partial \zeta_i} \right| \leq c_2, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad s = 1, \dots, d, \quad i = 0, \dots, d, \quad (3.40)$$

(iv) existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\sum_{s=1}^d \sum_{i=0}^d \frac{\partial A_s(\zeta)}{\partial \zeta_i} \psi_s \psi_i \geq c_3 \sum_{i=1}^d \psi_i^2, \quad \forall \zeta, \psi \in \mathbb{R}^{d+1}. \quad (3.41)$$

As hipóteses (3.38) e (3.39) auxiliam na definição do problema discreto, sendo que (3.38) é amplamente utilizada para resolver leis de conservação não-lineares. Já as afirmações (3.40) e (3.41) são utilizadas na teoria de operadores monótonos, assegurando monotonicidade e continuidade para as respectivas formas difusivas não-lineares.

Para a triangulação, assume-se que tenha as seguintes características:

- localmente quase uniforme, ou seja, existe uma constante C_Q tal que

$$h_{T_i} \leq C_Q h_{T_j}, \quad \forall T_i, T_j \in \mathcal{T}_h \text{ que compartilham a face } F \in \mathcal{F}_h^i, \quad (3.42)$$

- forma-regular, ou seja, existe uma constante $C_s > 0$ tal que

$$h_T \leq C_s r_{\text{insc}}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.43)$$

e relacionado à aproximação polinomial, supõe-se que existe $C_p \geq 1$ tal que

$$\frac{k_T}{k_{T'}} \leq C_p, \quad \forall T, T' \in \mathcal{T}_h \text{ tal que } T, T' \text{ compartilham uma face.} \quad (3.44)$$

Associado a cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$ definimos o parâmetro

$$d(T) = \frac{h_T}{k_T^2}, \quad (3.45)$$

e para cada face $F \in \mathcal{F}_h$,

$$d(F) = \begin{cases} \min(d(T^-), d(T^+)), & \text{se } F \in \mathcal{F}_h^i, \\ d(T), & \text{se } F \in \mathcal{F}_h^D \cup \mathcal{F}_h^N. \end{cases} \quad (3.46)$$

Na definição a seguir, apresentamos o formulação discreta do método DG para o problema (3.36)-(3.37) utilizada no artigo (Dolejší, 2007) para obter a estimativa de erro *a priori*.

Definição 3.8 *Seja $u_h^0 \in V_h^k$ a projeção $L^2(\Omega)$ da condição inicial U^0 sobre o espaço V_h^k , isto é, a função definida por*

$$(u_h^0 - U^0, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (3.47)$$

u_h é solução DG do problema (3.36)-(3.37), se

(a) $u_h \in C^1([0, \mathbf{T}]; V_h^k)$;

(b) $\forall v_h \in V_h^k, \forall t \in (0, \mathbf{T})$,

$$\left(\frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, v_h \right) + a_h(u_h(t), v_h) + b_h(u_h(t), v_h) + J_h^\sigma(u_h(t), v_h) = l_h(v_h)(t); \quad (3.48)$$

onde,

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T A(u, \nabla u) \cdot \nabla v dx - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^D} \int_F \{A(u, \nabla u) \cdot \mathbf{n}_F\} \llbracket v \rrbracket dS, \\ b_h(u, v) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbb{F}(u) \cdot \nabla v dx + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F H(u|_F^-, u|_F^+, \mathbf{n}_F) \llbracket v \rrbracket dS, \\ J_h^\sigma(u, v) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^D} \int_F \sigma \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket dS, \\ l_h(v)(t) &= \int_\Omega q(t) v dx + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^N} \int_F U_N(t) v dS + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^D} \int_F \sigma U_D(t) v dS, \end{aligned}$$

em que

$$\sigma|_F = \frac{C_w}{d(F)}, \quad F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^D, \quad (3.49)$$

sendo que C_w será definido mais adiante. A função $H(u|_F^-, u|_F^+, \mathbf{n}_F)$ é o fluxo numérico que aproxima $\mathbb{F}(u) \cdot \mathbf{n}_F$.

(c) $u_h(0) = u_h^0$.

Observamos que o método DG apresentado acima é semelhante ao apresentado para a equação da saturação em (3.17), exceto que na Definição 3.8 o autor utilizou a média usual e não introduziu o termo de simetrização para evitar problemas relacionados à introdução desse termo durante a análise de convergência. Porém sem a introdução desse termo, o método proposto no artigo (Dolejší, 2007), não é coercivo e não tem as propriedades da simetria. A ausência destas propriedades pode provocar a perda de taxas ótimas de convergência em L^2 .

Sobre o fluxo numérico $H(u|_F^-, u|_F^+, \mathbf{n}_F)$, Dolejší (2007) efetuou as seguintes hipóteses:

Hipótese H:

1. $H(u, v, \mathbf{n})$ é definido em $\mathbb{R}^d \times B_1$, onde $B_1 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d; |\mathbf{n}| = 1\}$, e é Lipschitz-contínua em relação a u, v :

$$|H(u, v, \mathbf{n}) - H(u^*, v^*, \mathbf{n})| \leq C_H(|u - u^*| + |v - v^*|), \quad u, v, u^*, v^* \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in B_1. \quad (3.50)$$

2. $H(u, v, \mathbf{n})$ é consistente:

$$H(u, v, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^d \mathbb{F}_s(u) \mathbf{n}_s, \quad u \in \mathbb{R}, \mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d) \in B_1. \quad (3.51)$$

3. $H(u, v, \mathbf{n})$ é conservativo:

$$H(u, v, \mathbf{n}) = -H(u, v, -\mathbf{n}), \quad u, v \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in B_1. \quad (3.52)$$

Para obter a estimativa de erro *a priori*, Dolejší (2007) assume ainda que a solução exata $U = U(t, x)$ do problema (3.36)-(3.37) possui alguma regularidade:

$$\frac{\partial U}{\partial t}|_T \in L^2(0; \mathbf{T}; H^{st}(T)), \quad U|_T \in L^\infty(0, \mathbf{T}; H^{st}(T)) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3.53)$$

Teorema 3.9 *Seja U a solução exata de (3.36)-(3.37) satisfazendo (3.53) e \mathcal{T}_h a partição do domínio computacional satisfazendo (3.42) e (3.43). Seja u_h a solução aproximada obtida da resolução de (3.48), onde o parâmetro de penalização σ satisfaz (3.49), com C_w suficientemente grande para garantir estabilidade ao método DG. Suponha que as hipóteses (3.38)-(3.41), (3.44) e (3.50)-(3.52) são válidas. Então o erro de discretização $e_h = u_h - U$ satisfaz a estimativa:*

$$\max_{t \in [0, \mathbf{T}]} \|e_h(t)\|_{0, \Omega} + C_m \int_0^{\mathbf{T}} \|e_h(\xi)\|^2 d\xi \leq Q(\Omega) \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T^{2\mu_T-2}}{k_T^{2s_T-3}} \|U\|_T^2, \quad (3.54)$$

em que $\mu_T = \min(k_T + 1, s_T)$, $T \in \mathcal{T}_h$, C_m constante positiva independente de h , $Q(\Omega)$ uma função dependendo do domínio $(0, \mathbf{T}) \times \Omega$ e de constantes das hipóteses, mas independe de h_T , k_T , s_T , $T \in \mathcal{T}_h$ e a norma $\|\cdot\|$ para $v \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ é definida por:

$$\|v\| := |v|_{1, \mathcal{T}_h}^2 + J_h^\sigma(v, v). \quad (3.55)$$

De acordo com Dolejší (2007) a estimativa de erro apresentada no Teorema 3.9 não é válida para o caso em que o termo difusivo $A(U, \nabla U)$ zera, pois para este caso o termo $Q(\Omega)$ diverge. De acordo com comentários efetuados anteriormente, para esse caso em que o termo difusivo zera na equação parabólica não-linear (ou seja, quando a equação torna-se uma lei de conservação), não existe na literatura análise de erro para o método DG até o momento.

Na Seção 6.1 do Capítulo 6 apresentamos um exemplo em domínio bidimensional por meio do qual avaliamos o erro e as ordens de convergência na norma L^2 e seminorma H^1 obtidas com o método DG (3.17) aqui proposto e comparamos com o resultado teórico do Teorema 3.9.

3.5 Forma residual do método de Galerkin descontínuo

Nesta seção escrevemos as equações (3.15) e (3.17) na forma residual, o que nos permite identificar a importância de cada termo no método DG proposto. Para isto, integramos o primeiro termo na equação (3.15) por partes e após reorganizamos os termos utilizando a definição de média ponderada conjugada (3.10) e a identidade (3.11),

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T -(\nabla \cdot (\lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1}) + q_w + q_n) z_h \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \mathbf{n}_F \cdot \llbracket \lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1} \rrbracket \{z_h\}_{\bar{\omega}} + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hp}^N} \int_F (\mathbf{n}_F \cdot \lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1} + P_N) z_h \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hp}^D} \int_F \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \cdot \{\lambda(S_h^m) K \nabla z_h\}_\omega + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket z_h \rrbracket \right) \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket' = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

em que

$$\llbracket P_h^{m+1} \rrbracket' = \begin{cases} \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket, & \text{se } F \in \mathcal{F}_h^{i*}, \\ \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket - G(S_h^m), & \text{se } F \in \mathcal{F}_h^I, \\ P_h^{m+1} - P_D, & \text{se } F \in \mathcal{F}_{hp}^D. \end{cases} \quad (3.57)$$

Desta forma, podemos observar que o primeiro termo em (3.56) impõe fracamente o resíduo volumétrico da equação diferencial parcial, o segundo termo a continuidade do fluxo, o terceiro termo a condição de fronteira de Neumann sobre Ω_p^N e o último termo impõe a

continuidade da pressão no interior de $\cup_{\beta=1}^{N_l} \Omega_\beta$, a condição de interface sobre Γ e a condição de Dirichlet sobre $\partial\Omega_p^D$. Notamos também que a condição de interface é imposta fracamente através da igualdade $\llbracket P_h^{m+1} \rrbracket = G(S_h^m)$, com ordem de aproximação $O(\Delta t^m)$.

Usando um raciocínio similar obtemos para o método de Galerkin descontínuo (3.17) após integração por partes do segundo e do quinto termo,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left(\Delta t^{-1} \phi(S_h^{m+1} - S_h^m) + \nabla \cdot (u_h^{m+1} f(S_h^{m+1}) - \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla S_h^{m+1}) - q_n \right) v_h \\
 & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \mathbf{n}_F \cdot \llbracket -u_h^{m+1} f(S_h^{m+1}) + \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla S_h^{m+1} \rrbracket \{v_h\}_{\bar{\omega}} \\
 & + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^N} \int_F (\mathbf{n}_F \cdot (-u_h^{m+1} f(S_h^{m+1}) + \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla S_h^{m+1}) + S_N) v_h \\
 & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \int_F \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \cdot \{ \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla v_h \}_{\omega} + \delta_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket v_h \rrbracket \right) \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket' \\
 & + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^{i*}} \int_F \llbracket 0.5 |\mathbf{n}_F \cdot u_h^{m+1}| f(S_h^{m+1}) \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket = 0,
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

em que

$$\llbracket S_h^{m+1} \rrbracket' = \begin{cases} \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket, & \text{se } F \in \mathcal{F}_h^{i*}, \\ \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket - J(S_h^m), & \text{se } F \in \mathcal{F}_h^\Gamma, \\ S_h^{m+1} - S_D, & \text{se } F \in \mathcal{F}_{hp}^D. \end{cases} \tag{3.59}$$

Então, da equação (3.58), notamos que o primeiro termo impõe fracamente o resíduo volumétrico da equação diferencial parcial, o segundo termo a continuidade do fluxo, o terceiro termo a condição de fronteira de Neumann Ω_s^N e o quarto termo impõe a continuidade da saturação no interior de $\cup_{\beta=1}^{N_l} \Omega_\beta$, a condição de interface sobre Γ e a condição de Dirichlet sobre $\partial\Omega_s^D$. Notamos que é essencial que o coeficiente de penalização δ_F seja diferente de zero na interface, mesmo para problemas degenerados, para que a condição de interface seja imposta fracamente por meio da igualdade $\llbracket S_h^{m+1} \rrbracket = J(S_h^m)$, com ordem de aproximação $O(\Delta t^m)$. Já o último termo da equação (3.58) resulta da estabilização tipo *upwinding* para o termo advectivo, e esse termo é dissipativo desde que f é uma função crescente.

Capítulo 4

Escoamento em Meios Porosos Homogêneos: Domínio Unidimensional

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos para problemas de escoamento em meios porosos homogêneos e domínio unidimensional. Apesar da simplicidade, o modelo unidimensional tem importância indiscutível em uma grande variedade de problemas práticos quando, devido à geometria do problema, é possível captar um fenômeno predominante de problemas multidimensionais. Um outro aspecto importante é o fato que em domínios unidimensionais existem vários problemas de escoamento bifásico em que a solução analítica é conhecida e portanto podem ser usados na validação do método numérico desenvolvido. Inicialmente abordamos a equação de Buckley-Leverett, analisamos a convergência do método numérico e comparamos a solução aproximada com a solução exata para o caso em que os efeitos da pressão capilar são desconsiderados, ou seja, para o caso em que temos uma lei de conservação hiperbólica. Também validamos o método DG proposto para a solução de McWhorter e Sunada obtida para a equação parabólica degenerada, comparamos a solução numérica com a solução quase analítica e apresentamos os erros na norma L^2 e respectivas ordens de convergência. Em seguida na Seção 4.3 consideramos o problema acoplado pressão-saturação, em que analisamos os efeitos obtidos com reconstrução de fluxos BDM e RT e sem reconstrução (SR). Também comparamos resultados obtidos com formulações explícita, semi-implícita e implícita.

4.1 Equação de Buckley-Leverett

Inicialmente vamos apresentar alguns resultados para um problema mais simplificado, a equação de Buckley-Leverett em domínio unidimensional $\Omega = (0, L)$, que consiste em trabalhar somente com a equação para a saturação (2.32) sem termos de fonte:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_t f_n(S)) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon(S) \pi'(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.1)$$

e condições de fronteira e iniciais:

$$\begin{aligned} S(t, 0) &= S_{D1}, & S(t, L) &= S_{D2}, \\ S(0, x) &= S_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Esta equação foi introduzida por Buckley e Leverett (1942) para modelar um problema simplificado de escoamento bifásico de fluidos imiscíveis em meios porosos na indústria do petróleo. Aqui a utilizamos para modelar o escoamento de petróleo e água, em que a fase molhante é a água e o petróleo a fase não-molhante. Simulamos o deslocamento unidimensional horizontal de petróleo provocado pela injeção de água em um meio poroso homogêneo. Estudamos o processo de escoamento do petróleo provocado pela injeção de água na extremidade esquerda do reservatório.

Para abordar o problema de escoamento de fluidos imiscíveis em duas fases em 1D podemos resolver somente a equação de Buckley-Leverett (4.1), uma vez que a velocidade total $u_t = u_w + u_n$ do escoamento é uma função constante em relação a x . Para verificar isto, basta considerar a equação (2.19) sem termos de fonte,

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_w + u_n) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u_t) = 0. \quad (4.3)$$

Devido à sua simplicidade, a equação de Buckley-Leverett é frequentemente utilizada para validar métodos numéricos. Além disso, para o caso em que são desconsiderados os efeitos capilares, a equação de Buckley-Leverett torna-se uma lei de conservação hiperbólica que possui uma solução analítica conhecida.

Para este problema consideramos duas formulações do método de Galerkin descontínuo: uma explícita e outra implícita, com o objetivo de avaliar o comportamento da solução numérica obtida com cada método. No método explícito removemos as não-linearidades da equação de Buckley-Leverett escrevendo os coeficientes do termo difusivo e do termo advectivo como função da saturação no instante de tempo anterior. Empregando uma aproximação implícita de primeira ordem para discretização temporal, propomos a seguinte formulação do método de Galerkin descontínuo que chamaremos de formulação explícita.

Dado $S_h^m \in V_h^k$, encontrar $S_h^{m+1} \in V_h^k$, tal que para todo $v_h \in V_h^k$:

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^{m+1} v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) S_h^{m+1'} v_h' \\ & - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^D} \left(\{ \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) S_h^{m+1'} \} \llbracket v_h \rrbracket + \vartheta \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket \{ \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) v_h' \} \right) \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^D} \delta_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^m v_h \\ & + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u_t f_n(S_h^m) v_h' - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} (u_t \{ f_n(S_h^m) \} + 0.5 |u_t \cdot \mathbf{n}_F| \llbracket f_n(S_h^m) \rrbracket) \llbracket v_h \rrbracket \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^D} \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \cdot \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla v_h + \delta_F \frac{\sigma_F}{h_F} v_h \right) S_D \\ & + u_t f_n(S_{D1}) v_h(0) - u_t f_n(S_{D2}) v_h(L) \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que S_{D1} e S_{D2} são as condições de Dirichlet em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente.

Se consideramos na equação de Buckley-Leverett o termo advectivo e o coeficiente do termo difusivo dependendo de S_h^{m+1} temos a seguinte formulação implícita não-linear do método de Galerkin descontínuo:

Dado $S_h^m \in V_h^k$, encontrar $S_h^{m+1} \in V_h^k$, tal que para todo $v_h \in V_h^k$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^{m+1} v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon(S_h^{m+1}) \pi'(S_h^{m+1}) S_h^{m+1'} v_h' \\
& - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \left(\left\{ \epsilon(S_h^{m+1}) \pi'(S_h^{m+1}) S_h^{m+1'} \right\} \llbracket v_h \rrbracket + \vartheta \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket \left\{ \epsilon(S_h^{m+1}) \pi'(S_h^{m+1}) v_h' \right\} \right) \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \delta_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u_t f_n(S_h^{m+1}) v_h' \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \left(u_t \left\{ f_n(S_h^{m+1}) \right\} + 0.5 |u_t \cdot \mathbf{n}_F| \llbracket f_n(S_h^{m+1}) \rrbracket \right) \llbracket v_h \rrbracket \\
& = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^m v_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^D} \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \cdot \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla v_h + \delta_F \frac{\sigma_F}{h_F} v_h \right) S_D \\
& + u_t f_n(S_{D1}) v_h(0) - u_t f_n(S_{D2}) v_h(L)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

4.1.1 Resultados numéricos

Nesta seção apresentamos resultados numéricos obtidos para a equação de Buckley-Leverett com os métodos de Galerkin descontínuo explícito (4.4) e Galerkin descontínuo implícito (4.5), para dois casos: desconsideramos os efeitos da pressão capilar ($\pi = 0$) e no segundo caso supomos que os efeitos da pressão capilar não são desprezíveis ($\pi \neq 0$). No primeiro caso temos um problema de lei de conservação hiperbólica. Estes resultados numéricos também podem ser encontrados no artigo publicado Mozolevski *et al.* (2008).

Exemplo 4.1 *Utilizamos o modelo de Brooks e Corey (1964) para as permeabilidades relativas dos fluidos e para a pressão capilar descritas respectivamente pelas equações (2.7) e (2.6). A implementação foi efetuada utilizando os seguinte dados:*

$$\begin{aligned}
& \text{Domínio: } \Omega = (0, 300[m]), \\
& \text{Propriedades dos fluidos: } \mu_w = 0.001[Pa \cdot s], \quad \mu_n = 0.01[Pa \cdot s], \\
& \text{Propriedades das rochas: } \phi = 0.2, \quad K = 10^{-11}[m^2], \\
& \text{Velocidade total: } u_t = 9 \cdot 10^{-7}[m/s], \\
& \text{Parâmetros do modelo de Brooks-Corey: } S_{wr} = 0.2, \quad S_{nr} = 0.15, \\
& \theta = 2, \quad P_e = 10^4[Pa] \\
& \text{Condições de fronteira: } S_n(t, 0) = S_{nr}, \quad S_n(t, 300) = 1 - S_{wr}, \\
& \text{Condição inicial: } S_0 = 1 - S_{wr}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Em todos os resultados numéricos apresentados nesta seção consideramos $\vartheta = 1$ (formulação simétrica), parâmetro de penalização $\delta_F = 10^{-3}$, $\sigma_F = k^2$ e as aproximações apresentadas são referentes aos instantes de tempos $\mathbf{T} = 100, 200, 300$ dias.

Desconsiderando os efeitos da pressão capilar

Agora vamos considerar o caso em que $\pi = 0$, ou seja, os efeitos da pressão capilar são desconsiderados. Neste caso temos um problema hiperbólico não-linear, que possui solução exata conhecida (Buckley e Leverett, 1942), para mais detalhes ver Ahmed (2001); Dake (1998); Helmig (1997); Kleppe (2007). Nas Figs. 4.1 e 4.2 apresentamos as aproximações numéricas obtidas com o método DG explícito (4.4), juntamente com a solução exata após períodos de tempo $\mathbf{T} = 100, 200, 300$ dias. Notamos que é necessário refinamento na malha espacial para eliminar as oscilações na frente do fluido e redução do passo no tempo para que

a frente da solução aproximada acompanhe a frente da solução exata. Percebemos através da Fig. 4.2b que ao trabalharmos com $k = 2$, Δt bem pequeno, e malha espacial 256 e 512, obtemos melhores aproximações, mas ainda insatisfatórias pois apresentam acúmulo de erros a medida que avançamos no tempo. Isto pode ser observado pelo retardo da frente do fluido que aumenta significativamente em relação à frente da solução exata à medida que avançamos no tempo.

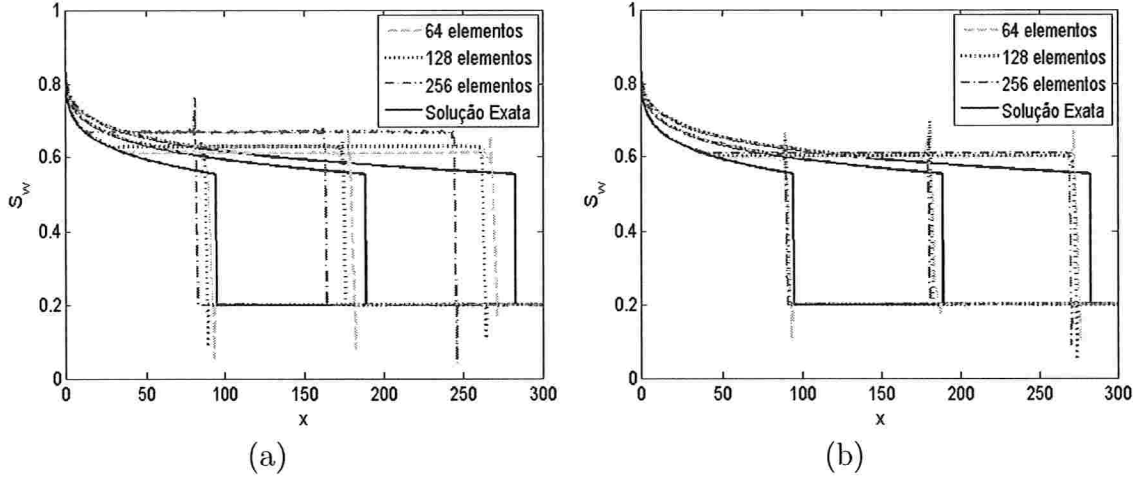


Figura 4.1: Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D sem pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 1$ e: (a) $\Delta t = 6$ horas e (b) $\Delta t = 1,5$ horas.

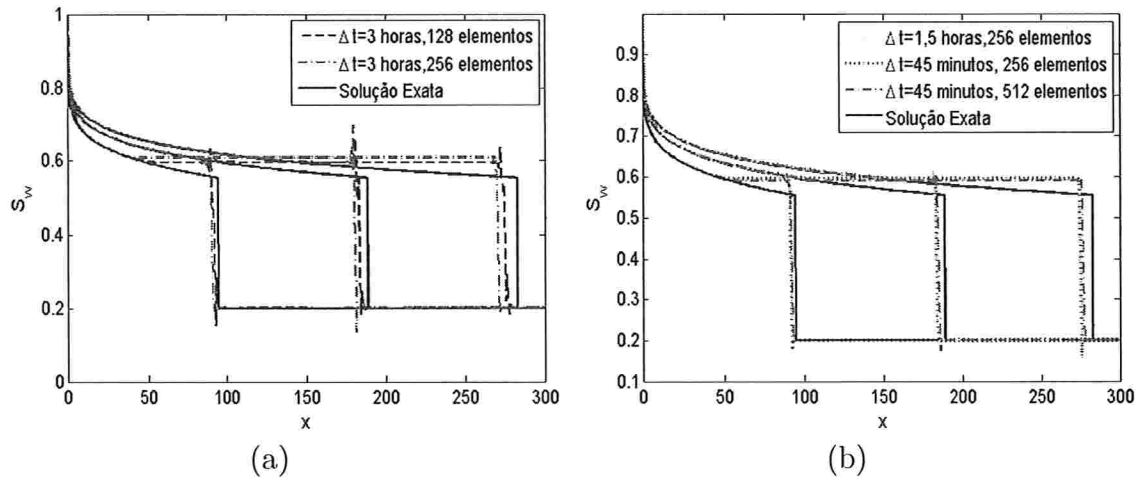


Figura 4.2: Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D sem pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 2$.

Apresentamos nas Figs. 4.3 e 4.4 as aproximações obtidas com o método implícito (4.5) para o caso sem pressão capilar. Podemos notar que obtemos bons resultados com o método implícito para o problema hiperbólico, apesar de estar usando um passo no tempo relativamente grande ($\Delta t = 12$ horas), diferentemente do que foi observado ao utilizar o método explícito, onde foi necessário usar um passo muito pequeno no tempo para obter aproximações condizentes com a solução exata. Da mesma forma como no método explícito, as oscilações na frente do fluido são eliminadas através do refinamento da malha espacial.

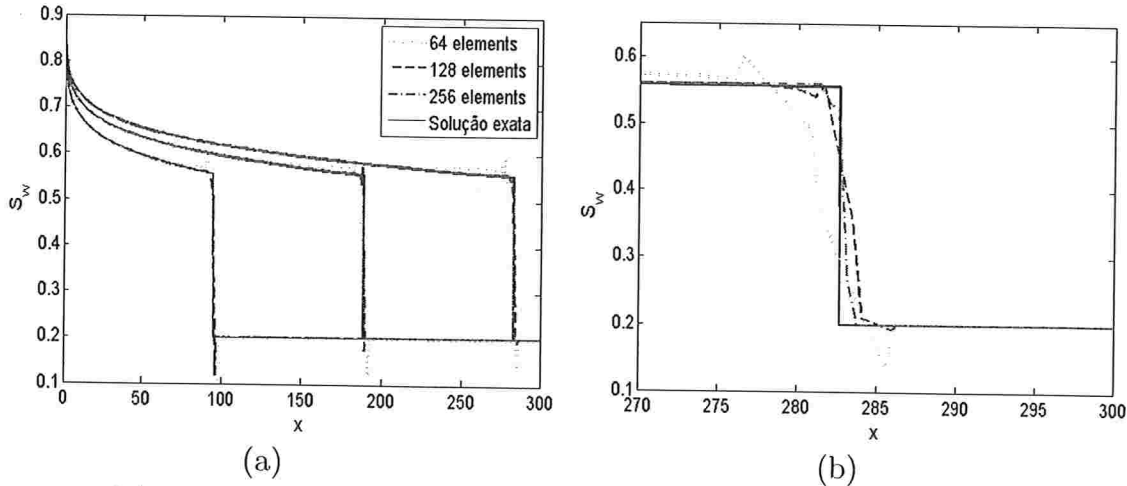


Figura 4.3: (a) Aproximações obtidas com o método DG implícito (4.5) para o problema de Buckley-Leverett 1D sem pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 1$, $\Delta t = 12$ horas. (b) Ampliação na frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.3a.

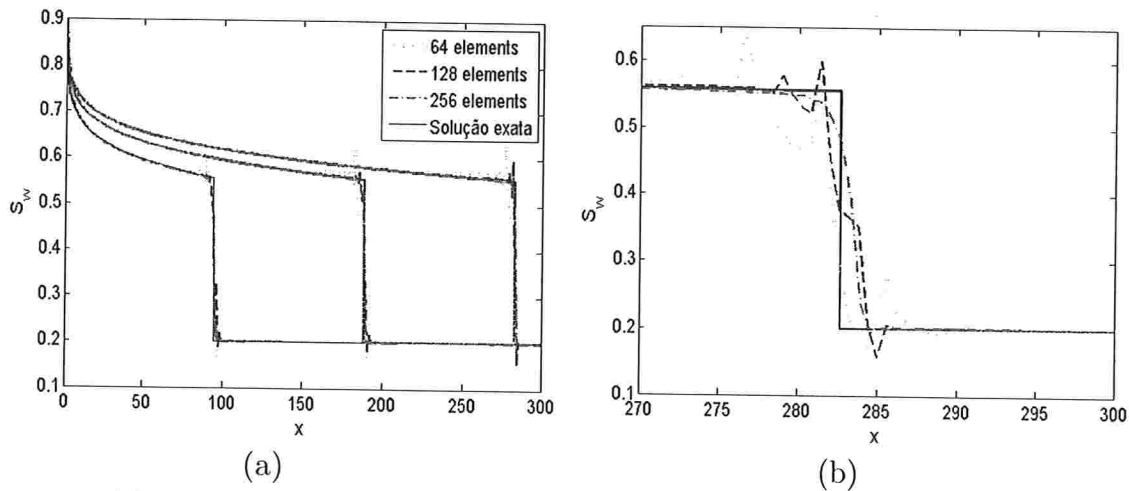


Figura 4.4: (a) Aproximações obtidas com o método DG implícito (4.5) para o problema de Buckley-Leverett 1D sem pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 2$, $\Delta t = 12$ horas. (b) Ampliação na frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.4a.

Considerando os efeitos da pressão capilar

Nas Figs. 4.5, 4.6 e 4.7 apresentamos os resultados numéricos obtidos com o método de Galerkin descontínuo explícito (4.4) para este caso usando ordens de aproximação polinomial $k = 1, 2, 3$. Nestes gráficos efetuamos um comparativo das aproximações obtidas com uma solução referência, pois este problema não possui solução exata conhecida. A solução referência foi obtida usando um passo pequeno no tempo ($\Delta t = 1, 5$ horas), malha espacial bem refinada (1024 elementos) e aproximação polinomial $k = 2$. Apresentamos ampliação da frente do fluido após 300 dias para aproximações polinomiais $k = 1, 2, 3$ nas Figs. 4.5b, 4.6b e 4.7b, respectivamente. Podemos notar por intermédio destes gráficos que a solução obtida com o método numérico (4.4) de fato converge para a solução do problema quando refinamos a malha espacial (h convergência) e(ou) aumentamos o grau de aproximação polinomial (k convergência). Notamos que o método explícito é condicionalmente estável e portanto obtemos convergência somente para um passo pequeno no tempo. O atraso na frente da solução aproximada é eliminado através da redução de Δt , enquanto que as oscilações na frente do fluido são eliminadas com o refinamento na malha espacial ou com o aumento da ordem de

aproximação polinomial.

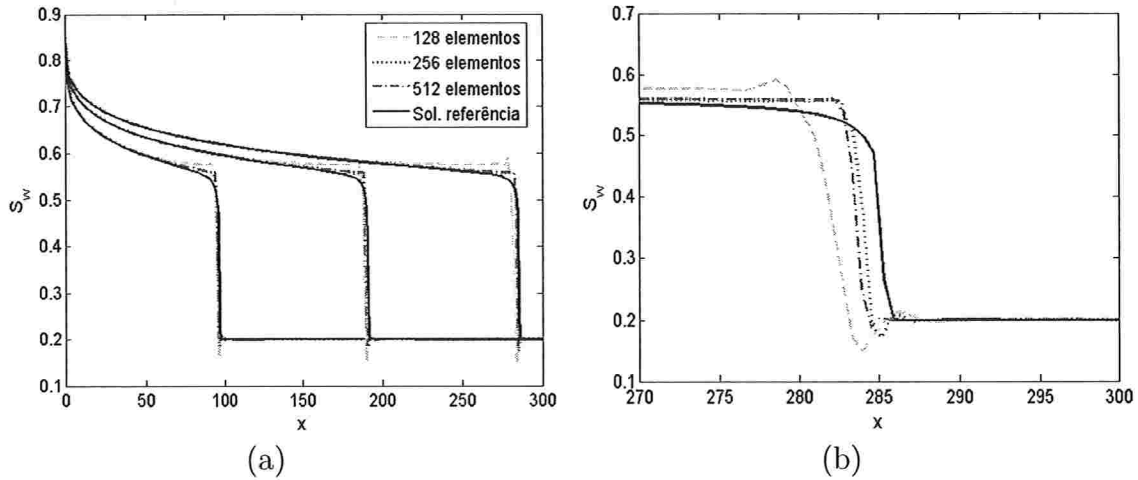


Figura 4.5: (a) Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar, após 100, 200 e 300 dias, usando $\Delta t = 6$ horas e $k = 1$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.5a.

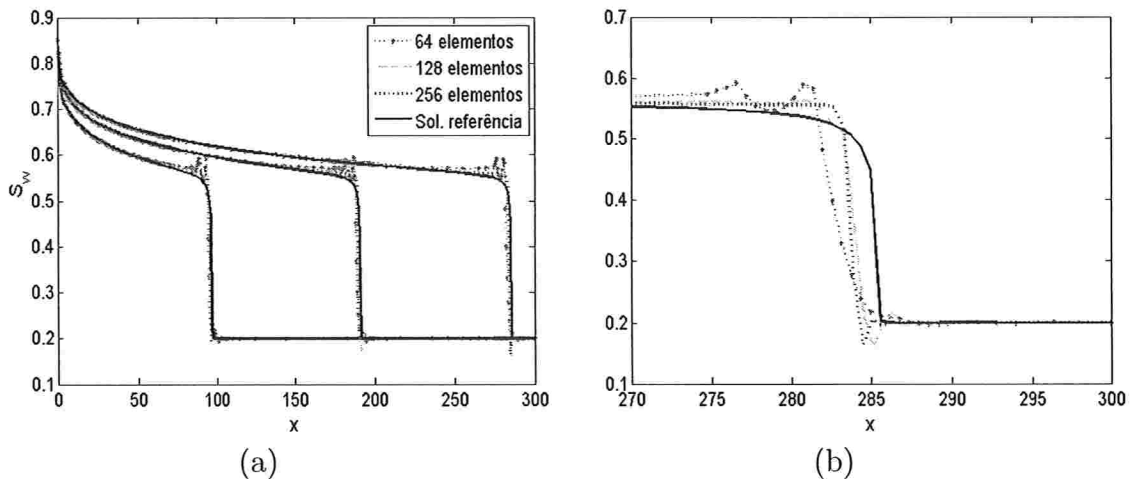


Figura 4.6: (a) Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar, após 100, 200 e 300 dias, usando $\Delta t = 6$ horas e $k = 2$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.6a.

Por fim apresentamos os resultados numéricos com ordens de aproximação polinomial $k = 1, 2$ obtidos com o método de Galerkin descontínuo implícito (4.5) para a equação de Buckley-Leverett com pressão capilar nas Figs. 4.8 e 4.9. Podemos notar por meio destes gráficos que obtemos resultados muito bons com o método implícito mesmo para uma malha relativamente grosseira no espaço e sem diminuir muito o passo no tempo (o método é incondicionalmente estável). Porém a convergência do método de Newton utilizado para resolução do sistema não-linear é afetada pela escolha do passo no tempo, sendo que em alguns casos ocorre a divergência do método iterativo, assim impossibilitando o uso de passos no tempo arbitrariamente grandes. Nas Figs. 4.10 e 4.11 apresentamos um comparativo entre os métodos DG explícito e DG implícito para o caso com pressão capilar, com $k = 1$ e $k = 2$. Podemos notar que a frente do fluido no método explícito se aproxima da frente do fluido do método implícito a medida que reduzimos o passo no tempo e refinamos a malha espacial. Observamos ainda que as melhores aproximações obtidas com método explícito ($k = 1, 2$,

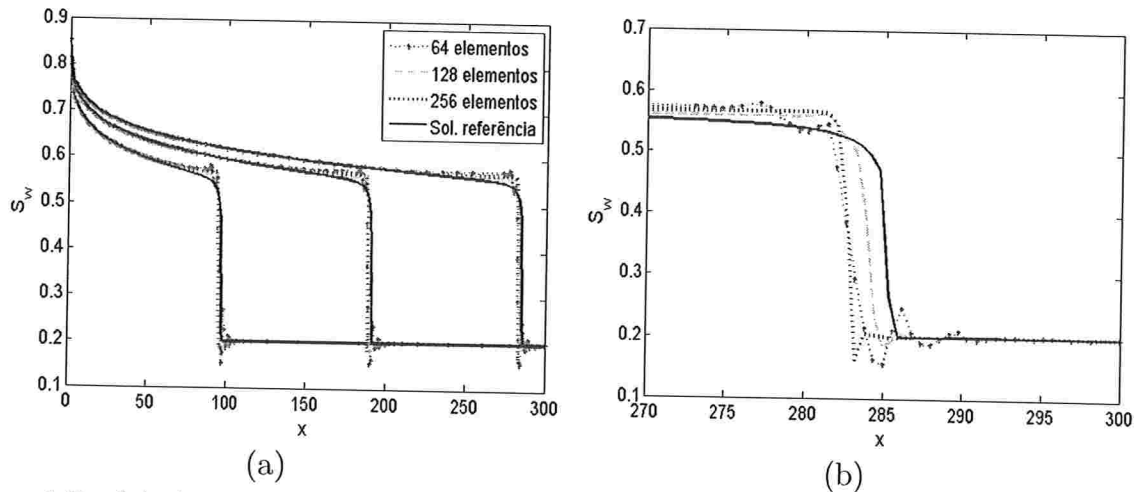


Figura 4.7: (a) Aproximações obtidas com o método DG explícito (4.4) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar, após 100, 200 e 300 dias, usando $\Delta t = 6$ horas e $k = 3$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.7a.

$\Delta t = 1,5$ horas, 1024 elementos) ainda não são tão boas quanto as aproximações obtidas com o método implícito, para isto é necessário refinar mais a malha espacial e reduzir o passo no tempo. O custo computacional por passo no tempo do método implícito é maior que o custo computacional do método explícito, pois no método implícito torna-se necessário a utilização do método de Newton na resolução do sistema não-linear e como consequência o cálculo do jacobiano e a resolução de sistemas lineares diversas vezes até obter convergência do método iterativo, enquanto no método explícito é resolvido somente um sistema linear por passo no tempo. Mas por outro lado o método explícito exige um passo menor no tempo do que o método implícito, o que nos leva a observar que o custo computacional do método explícito é superior ao custo computacional do método implícito para obter soluções qualitativamente semelhantes. Esta comparação reforça o fato de que o método implícito (4.5) fornece melhores aproximações quando comparadas com as aproximações obtidas com o método explícito (4.4), a um custo computacional menor.

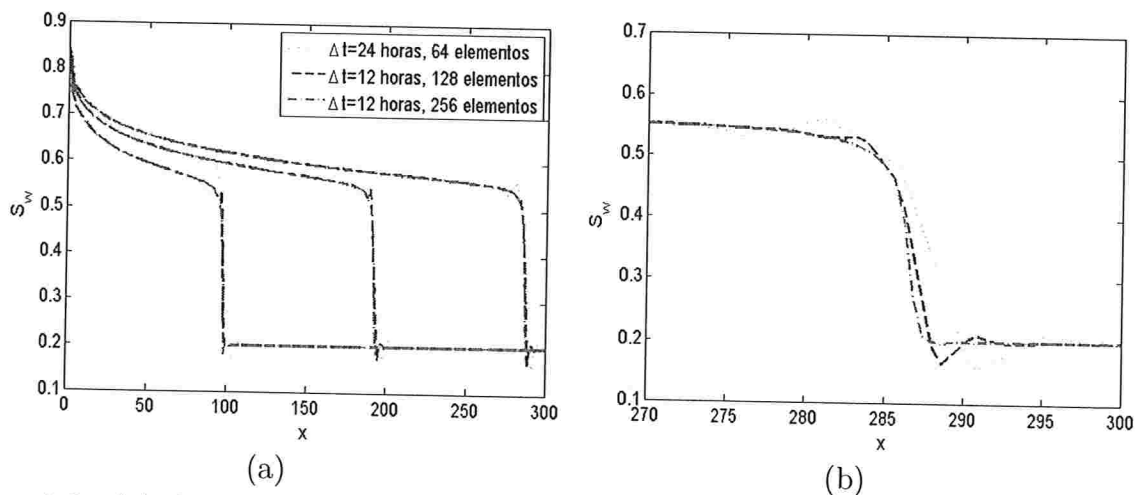


Figura 4.8: (a) Aproximações obtidas com o método DG implícito (4.5) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 1$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.8a.

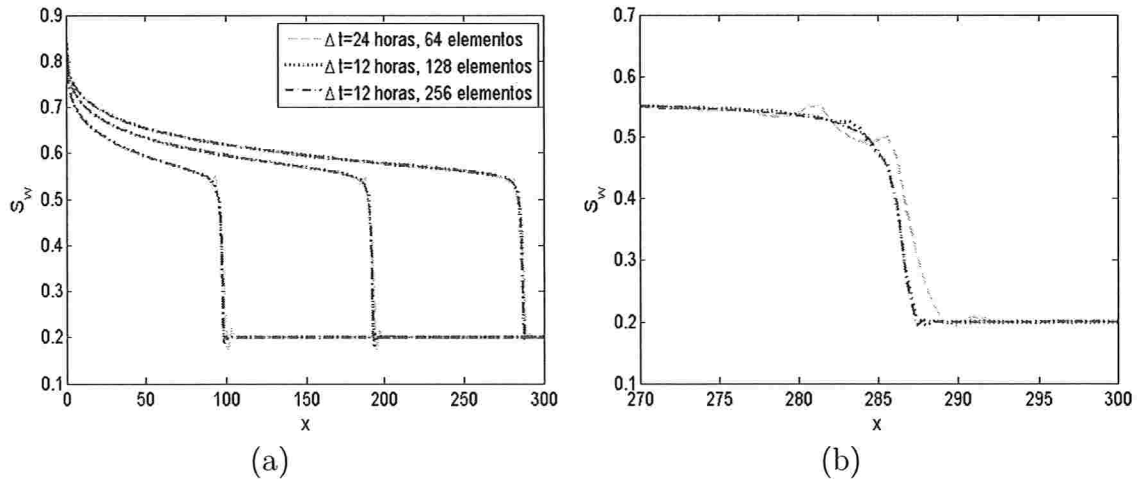


Figura 4.9: (a) Aproximações obtidas com o método DG implícito (4.5) para o problema de Buckley-Leverett 1D com pressão capilar após 100, 200 e 300 dias, usando $k = 2$. (b) Ampliação da frente do fluido após 300 dias referente à Fig. 4.9a.

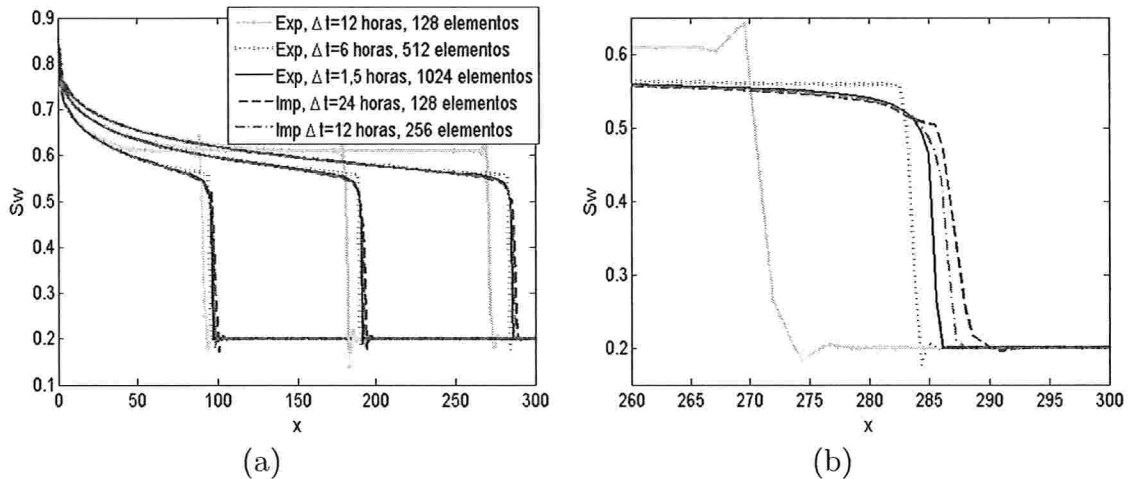


Figura 4.10: (a) Comparação entre os métodos DG explícito (4.4) e DG implícito (4.5) para o problema Buckley-Leverett com pressão capilar, usando $k = 1$. (b) Ampliação na frente do fluido após 300 dias da Fig. 4.10a.

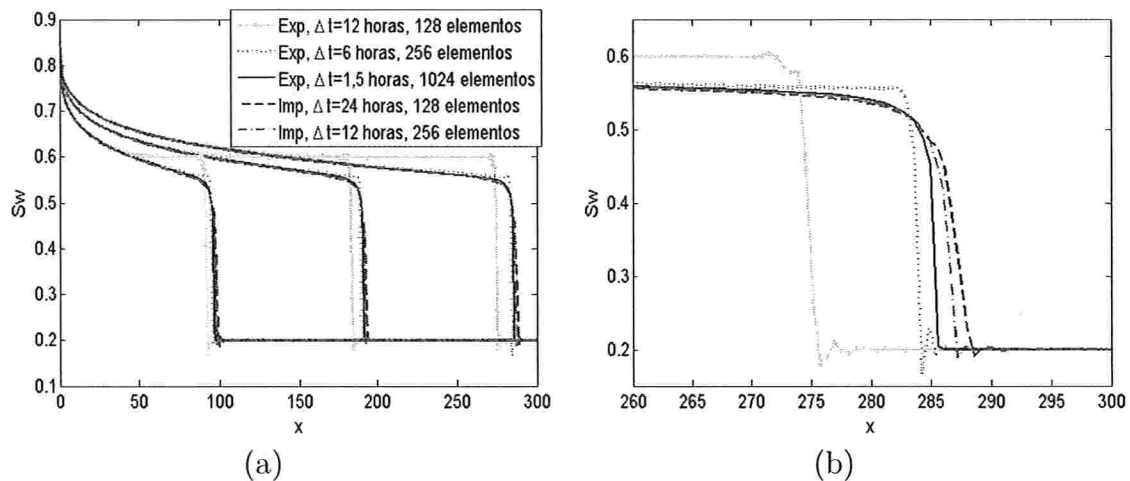


Figura 4.11: (a) Comparação entre os métodos DG explícito (4.4) e DG implícito (4.5) para o problema Buckley-Leverett, com pressão capilar, usando $k = 2$. (b) Ampliação na frente do fluido após 300 dias da Fig. 4.11a.

4.2 Solução quase analítica de McWhorter e Sunada

Considere a equação para a saturação (4.1) com velocidade total $u_t = 0$ e definida no domínio $(0, \infty) \times \mathbb{R}^+$, logo obtemos a equação parabólica:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon(S) \pi'(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.7)$$

McWhorter e Sunada (1990) obtiveram uma solução quase analítica para a equação (4.7) com as seguintes condições de fronteira e iniciais:

$$\begin{aligned} S(t, 0) &= S_{D1}, & S(t, \infty) &= S_\infty, \\ S(0, x) &= S_\infty. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A obtenção dessa solução foi abordada posteriormente e discutida em Bastian (1999); Fučík *et al.* (2007). Nesta seção iremos comparar a solução numérica obtida com o método DG (3.17) com a solução quase analítica e assim avaliar a qualidade da solução numérica obtida. Descrevemos no Exemplo 4.2 os dados utilizados para resolver a equação (4.7).

Exemplo 4.2 *Resolvemos o problema de escoamento bifásico de McWhorter e Sunada no domínio $\Omega = (0, 1.6[m])$ para o instante de tempo $\mathbf{T} = 8000s$. Utilizamos o modelo de Brooks-Corey para as permeabilidades relativas dos fluidos e para a pressão capilar descritas pelas equações (2.7) e (2.6), respectivamente, e os seguintes dados:*

$$\begin{aligned} \text{Propriedades dos fluidos: } & \mu_w = 0.001[Pa\ s], & \mu_n &= 0.001[Pa\ s], \\ \text{Propriedades das rochas: } & \phi = 0.3, & K &= 10^{-10}[m^2], \\ \text{Parâmetros do modelo de Brooks-Corey: } & S_{wr} = 0, & S_{nr} &= 0, \\ & \theta = 2, & P_e &= 5000[Pa], \\ \text{Condições de fronteira: } & S(t, 0) = 0, & S(t, 1.6) &= 1, \\ \text{Condição inicial: } & S_0 = 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nos resultados numéricos apresentados nesta seção consideramos o método DG (3.17) com $J(S) = 0$, $\vartheta = 1$ (formulação simétrica) e parâmetro de penalização $\sigma_F = 10k^2$. É importante observar que o coeficiente do termo difusivo na equação (4.7) zera para $S = 0$ e $S = 1$, ou seja, a equação parabólica degenera nestes pontos.

Analisamos na Fig. 4.12 a convergência numérica das soluções obtidas com o método DG (3.17) a medida que refinamos a malha espacial para o Exemplo 4.2 com ordens de aproximação polinomial $k = 1, 2$ e comparamos as aproximações com a solução quase analítica obtida por McWhorter e Sunada (1990). Observamos que a solução aproximada obtida com o método DG converge para a solução quase analítica à medida que refinamos a malha e reduzimos o passo no tempo. Na Tab. 4.1 apresentamos os erros na norma L^2 e respectivas ordens de convergência (OC) para $k = 1, 2$. A ordem de convergência é dada por:

$$OC = \frac{\log \left(\frac{\|e\|_h}{\|e\|_{\frac{h}{2}}} \right)}{\log(2)}, \quad (4.10)$$

em que $\|e\|_h = \|U - u_h\|_h$ representa o erro da aproximação u_h em uma dada norma na malha com diâmetro h . Notamos que as OC obtidas para $k = 1$ e $k = 2$ são semelhantes. Isto ocorre

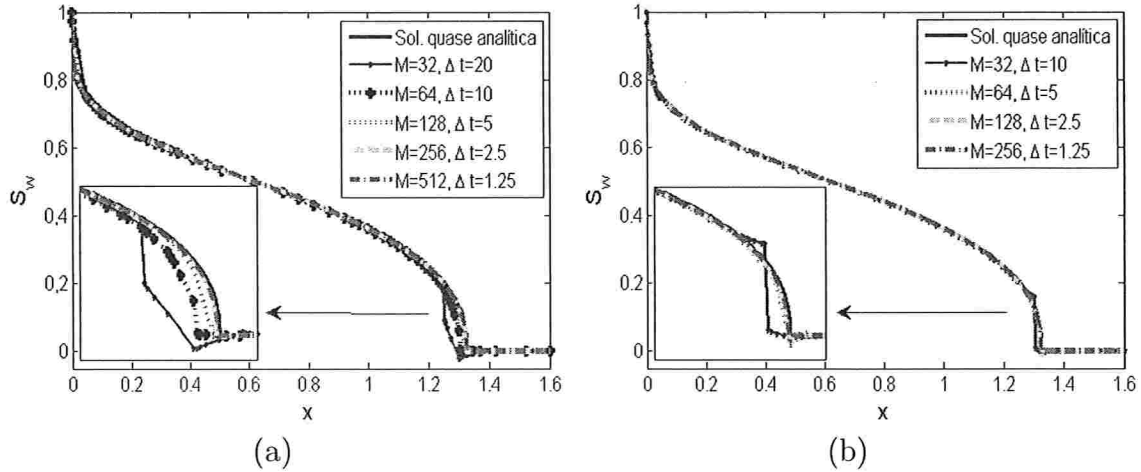


Figura 4.12: Comparando solução numérica obtida com o método DG (3.17) com solução quase analítica obtida por McWhorter e Sunada (1990) para a equação parabólica (4.7) no instante de tempo $T = 8000s$, sendo: (a) Ordem de aproximação polinomial $k = 1$, (b) Ordem de aproximação polinomial $k = 2$.

pois a solução perde regularidade na frente do fluido, em que o coeficiente do termo difusivo degenera. O Teorema 3.9 de estimativa de erro *a priori* não se aplica ao Exemplo 4.2, pois o coeficiente do termo difusivo zera para $S = 0$ e $S = 1$. As taxas de convergência apresentadas na Tab. 4.1 são similares às obtidas por Bastian (1999) na resolução deste mesmo problema.

4.3 Problema acoplado pressão-saturação

Nesta seção abordaremos o problema acoplado pressão-saturação em domínio unidimensional com o objetivo de avaliar a importância da reconstrução de fluxos em problemas de escoamento bifásico. Para isso reescrevemos as equações (2.30), (2.31) e (2.32) em um domínio unidimensional $\Omega = (0, L)$ e obtemos o seguinte problema acoplado pressão-saturação:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t(S) K \frac{\partial P}{\partial x} \right) = q_w + q_n, \quad (4.11)$$

$$u_t = -\lambda_t(S) K \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (4.12)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_t f_n(S)) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon(S) \pi'(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) = q_n, \quad (4.13)$$

com condições de fronteira de Dirichlet para a pressão e Dirichlet (ou mistas) para a saturação:

$$\begin{aligned} P|_{x=0} &= P_{D1}, & P|_{x=L} &= P_{D2}, \\ S|_{x=0} &= S_{D1}, & S|_{x=L} &= S_{D2} \quad \left(-\epsilon(S) \frac{\partial \pi}{\partial x}(S)|_{x=L} = 0 \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

e condição inicial:

$$S|_{t=0} = S_0. \quad (4.15)$$

É importante observar que para problemas unidimensionais sem termos de fonte a equação (4.11) garante que a velocidade total u_t é constante em x , mas permanece a dependência temporal.

Tabela 4.1: Erros e ordens de convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ obtidas com o método DG (3.17) para ordens de aproximação polinomial de $k = 1, 2$ na resolução da equação (4.7) no instante de tempo $\mathbf{T} = 8000s$.

Parâmetros de discretização			Ordens em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$	
k	M	Δt	$\ e\ _{L^2}$	OC
1	16	40	7.0431e-02	-
	32	20	3.9854e-02	0.8215
	64	10	2.1074e-02	0.9193
	128	5	1.1364e-02	0.8910
	256	2.5	5.9742e-03	0.9277
	512	1.25	3.5898e-03	0.7348
2	8	40	3.5474e-02	-
	16	20	2.2397e-02	0.6634
	32	10	1.2701e-02	0.8184
	64	5	7.6881e-03	0.7242
	128	2.5	4.8536e-03	0.6636
	256	1.25	2.9188e-03	0.7337

4.3.1 Esquema numérico

Descrevemos a seguir o método DG utilizado para resolver o problema acoplado pressão-saturação (4.11)-(4.13) com condições de fronteira e iniciais descritas em (4.14) e (4.15) Dado $S_h^m \in V_h^k$ e para $m = 0, 1, \dots, N-1$, obter $P_h^{m+1} \in V_h^k$ tal que $\forall z_h \in V_h^k$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \lambda(S_h^m) K d_x P_h^{m+1} d_x z_h - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hp}^D} \mathbf{n}_F \{ \lambda(S_h^m) K d_x P_h^{m+1} \} \llbracket z_h \rrbracket \\
& - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hp}^D} \vartheta \mathbf{n}_F \{ \lambda(S_h^m) K d_x z_h \} \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hp}^D} \gamma_F \frac{\sigma_F}{h} \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket \llbracket z_h \rrbracket \\
& = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (q_w + q_n) z_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hp}^D} \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \lambda(S_h^m) K d_x z_h + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h} z_h \right) P_D.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Em seguida obtemos a velocidade total u_h^{m+1} por meio da reconstrução de fluxos BDM ou RT descritas na Seção 3.3 do capítulo anterior. Agora uso essa velocidade total para encontrar $S_h^{m+1} \in V_h^k$ tal que $\forall v_h \in V_h^k$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^{m+1} v_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u_h^{m+1} f_n(S_h^{m+1}) d_x v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) d_x S_h^{m+1} d_x v \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \left(\mathbf{n}_F \{ u_h^{m+1} f_n(S_h^{m+1}) \} + \llbracket 0.5 |u_h^{m+1} \mathbf{n}_F | f_n(S_h^{m+1}) \rrbracket \right) \llbracket v_h \rrbracket \\
& - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \left(\mathbf{n}_F \{ \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) d_x S_h^{m+1} \} \llbracket v_h \rrbracket + \vartheta \mathbf{n}_F \{ \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) d_x v_h \} \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket \right) \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \delta_F \frac{\sigma_F}{h} \llbracket S_h^{m+1} \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_n v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^m v_h \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^D} \left(-\vartheta \mathbf{n}_F \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) d_x v_h + \delta_F \frac{\sigma_F}{h} v_h \right) S_D,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

em que os parâmetros de penalização γ_F e δ_F são definidos como,

$$\begin{aligned}\gamma_F &= \gamma_* \min_{T; x_i \in \partial T} \{\lambda(S_h^m)|_T(x_i)K\} \quad \text{e} \\ \delta_F &= \delta_* \min_{T; x_i \in \partial T} \{\epsilon(S_h^m)\pi'(S_h^m)|_T(x_i)\},\end{aligned}$$

com as constantes γ_* e δ_* definidas no intervalo $[5, 10]$. Note que o método (4.16) é semelhante ao método descrito por (3.15), exceto que aqui não usamos a média ponderada. O mesmo ocorre com o método para a saturação (4.17) que é semelhante ao descrito em (3.17). E além disso, como nesta seção pretendemos avaliar as técnicas de reconstrução de fluxos descritas na Seção 3.3, apresentamos resultados numéricos para um exemplo em que a equação para a saturação é não degenerada. Observamos ainda que a formulação para pressão é linear e para a saturação é não-linear, pois apesar de ter linearizado o coeficiente do termo difusivo, ainda continuamos tratando o termo advectivo implicitamente. Chamaremos o método descrito acima como semi-implícito.

4.3.2 Resultados numéricos

Inicialmente no Exemplo 4.3 vamos ilustrar o impacto da reconstrução de fluxos BDM (3.21), RT (3.26)-(3.27) e comparar com os resultados obtidos sem reconstrução de fluxos (SR). No exemplo seguinte comparamos aproximações obtidas com o método DG semi-implícito descrito pela formulação (4.16)-(4.17) com aproximações obtidas com método implícito.

Exemplo 4.3 *Apresentamos resultados numéricos com os seguintes dados:*

$$\begin{aligned}\text{Domínio:} \quad & \Omega = (0, 300[m]), \\ \text{Propriedades dos fluidos:} \quad & \mu_w = 0.001[Pa\ s], \quad \mu_n = 0.01[Pa\ s], \\ \text{Propriedades das rochas:} \quad & \phi = 0.2, \quad K = 10^{-11}[m^2], \\ \text{Modelo de Brooks-Corey (2.7) e (2.6) com:} \quad & S_{wr} = 0.2, \quad S_{nr} = 0.15, \\ & \theta = 2, \quad P_e = 10^3[Pa], \\ \text{Condição inicial:} \quad & S_0 = 0.7.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Como condição de fronteira para a pressão usamos $P_{w1} = 3e + 5Pa$ e $P_{w2} = 1.5e + 5Pa$, sendo que a pressão global P_1 e P_2 pode ser calculada por intermédio da relação (2.28). Para a saturação consideramos condições de fronteira de Dirichlet em $x = 0$, com $S_{n1} = 0.25$ e condição de fronteira de Neumann homogênea em $x = L$.

Na Fig. 4.13 comparamos resultados numéricos obtidos com as reconstruções de fluxos nos espaços BDM e RT com o caso sem reconstrução identificado por SR. Nesses resultados usamos malhas uniformes com $M = 32, 64$ elementos e aproximação polinomial de primeira ordem para a pressão global P e para a saturação da fase não-molhante S , ou seja, $k_P = 1$, $k_S = 1$. Consideramos também $\vartheta = 1$, $\gamma_* = \delta_* = 10$ e $\sigma_F = k_S^2$. Observamos que a reconstrução de fluxos não afeta as aproximações obtidas para a pressão global, já a saturação apresenta oscilações não físicas quando usamos SR e BDM. Por outro lado, quando é usada a reconstrução de fluxos no espaço RT os resultados numéricos para a saturação e velocidade total não apresentam oscilações, evidenciando assim a precisão e o potencial dessa recuperação de fluxos. Notamos que as oscilações na saturação originam-se a partir da instabilidade obtida no cálculo dos fluxos com as técnicas BDM e SR. Lembramos que em domínios unidimensionais a velocidade total u_t é constante em x , podendo variar somente com o passar do tempo. Essa variação da velocidade total u_t como função do tempo t pode

ser observada por meio da Fig. 4.15 para o problema de escoamento em questão. Através destes resultados numéricos podemos concluir que a reconstrução de fluxos tem papel fundamental na resolução do problema acoplado pressão-saturação, sendo que o método DG (4.16)-(4.17) com reconstrução de fluxos no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec apresentou os melhores resultados, eliminando as oscilações não físicas sem necessidade do uso de limitantes. Devido a isso passaremos a usar a reconstrução de fluxos no espaço RT nos demais resultados numéricos. Na Fig 4.14 analisamos a convergência do método DG (4.16)-(4.17) com reconstrução da velocidade total no espaço RT para ordens de aproximação polinomial $k_P = k_S = 1$, $k_P = k_S = 2$ e $k_P = k_S = 3$. Notamos que o método numérico proposto de fato converge a medida que refinamos a malha espacial e reduzimos o passo no tempo, para as três ordens de aproximação polinomial consideradas.

Exemplo 4.4 *Na Seção 4.1 apresentamos resultados numéricos para a equação de Buckley-Leverett usando um método explícito e outro implícito, sendo que o último apresentou melhores resultados. Agora vamos comparar o método semi-implícito (4.16)-(4.17) com um método implícito. No método implícito usamos a formulação (4.16) para resolver a equação para a pressão e o método (4.5) para obter a saturação S . Em ambos os métodos usamos a reconstrução de fluxos no espaço RT. Nos resultados numéricos apresentados usamos os mesmos dados do Exemplo 4.3, exceto as condições de fronteira:*

$$P_1 = 3e + 5, P_2 = 2e + 5, S_{n1} = S_{rn} + 0.05,$$

e a condição inicial

$$S_0 = 1 - S_{rw} - 0.05.$$

Apresentamos um comparativo entre as aproximações obtidas com o método DG implícito com o método DG semi-implícito na Fig. 4.16 para ordens de aproximação polinomial $k_P = k_S = 1$ e $k_P = k_S = 2$. Notamos que os resultados obtidos com o método implícito e com o método semi-implícito, usando as mesmas malhas e passo no tempo, são qualitativamente muito semelhantes. Mas o método implícito tem mais não linearidades para a saturação que o método semi-implícito, o que traz dificuldades na aplicação do método de Newton. Devido a isso passaremos a usar a formulação semi-implícita descrita em (3.15) para a pressão e (3.17) para a saturação em meios heterogêneos.

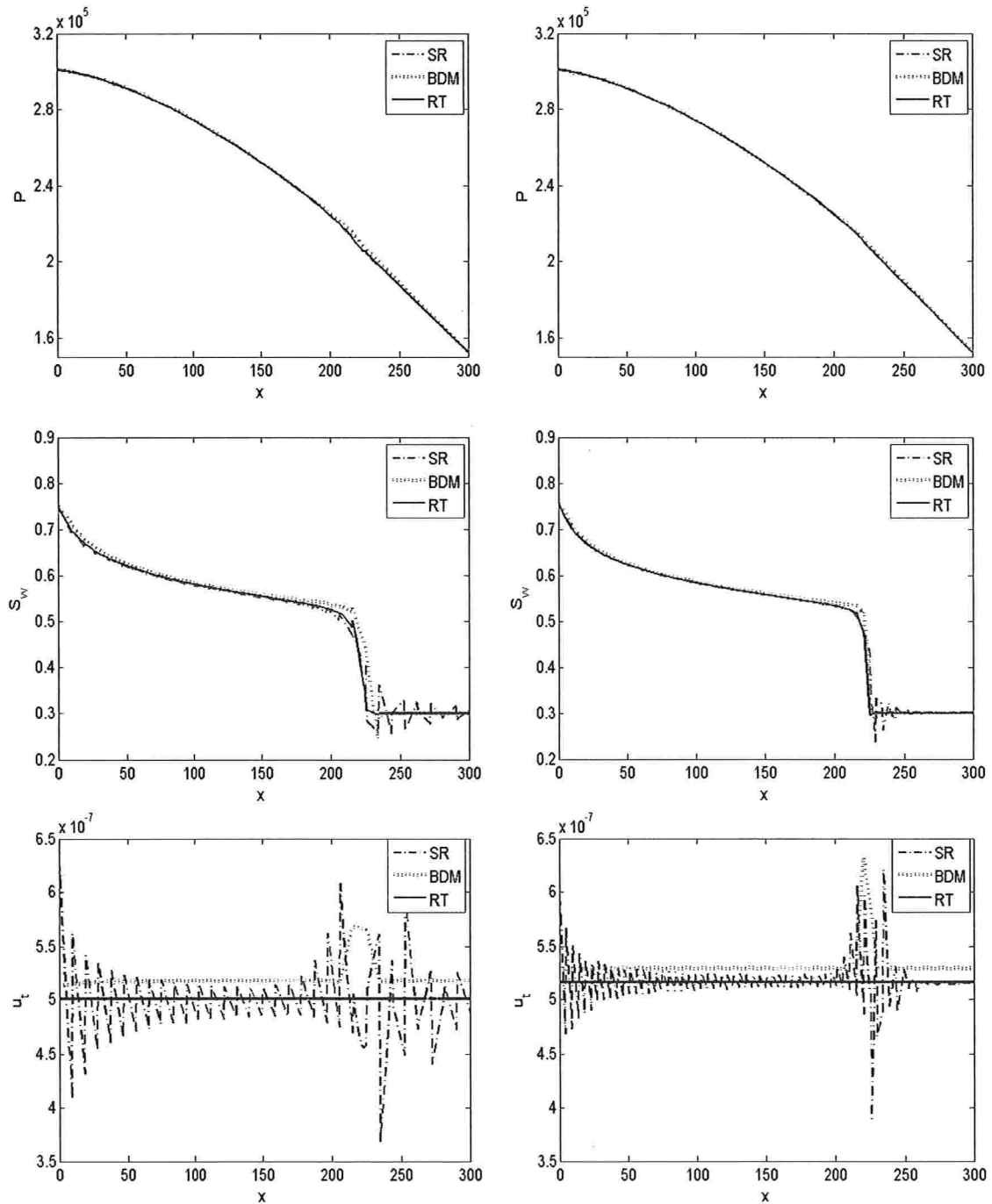


Figura 4.13: Exemplo 4.3: Comparando aproximações para pressão global P , saturação S_w e velocidade total u_t obtidas usando projeções nos espaços BDM, RT ou sem reconstrução (SR), após 360 dias sendo que na coluna da esquerda usamos: $\Delta t = 5$ dias, $M = 32$ elementos e na da direita $\Delta t = 2$ dias, $M = 64$ elementos.

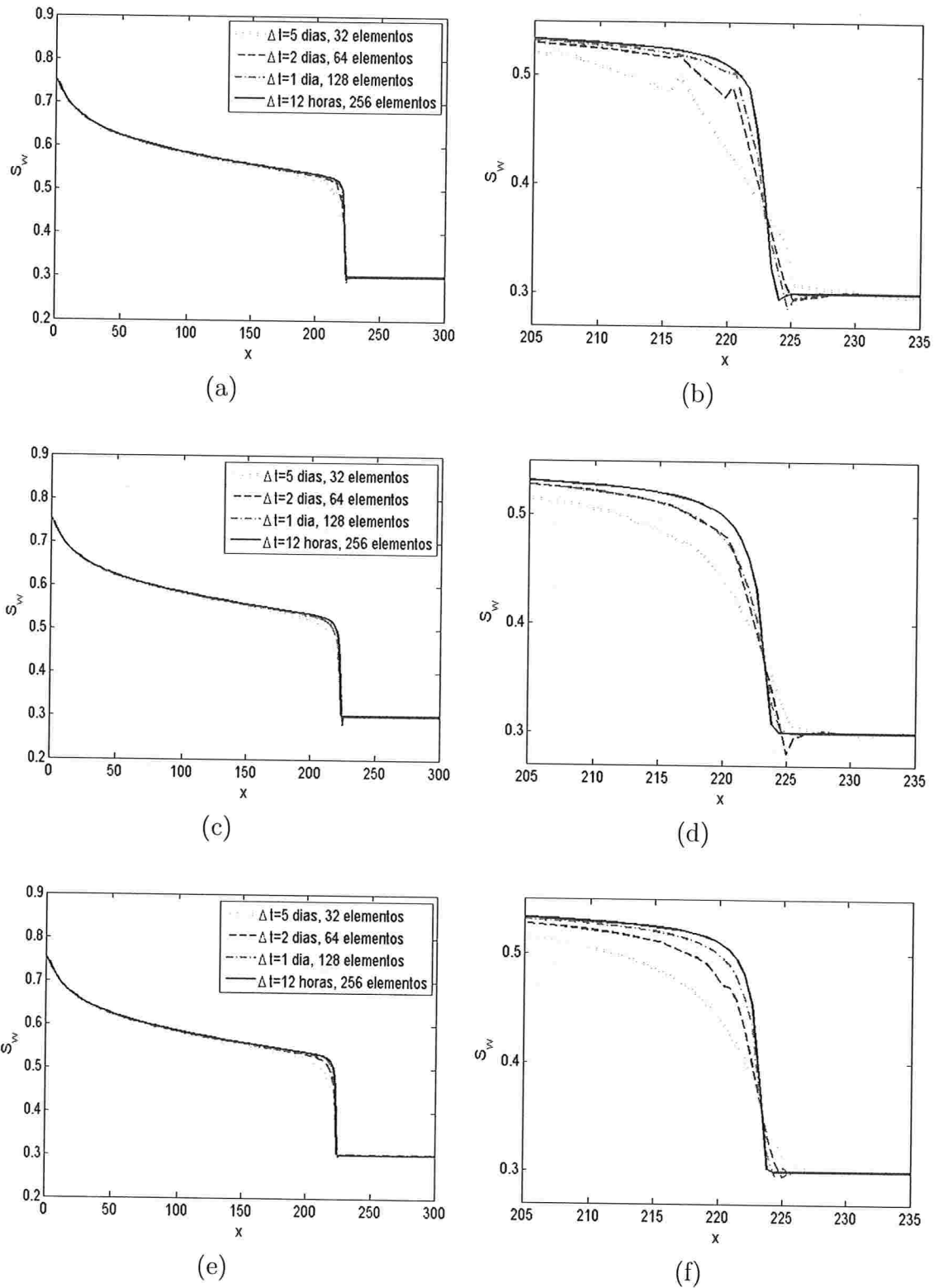


Figura 4.14: Exemplo 4.3: Análise de convergência para a saturação S_w após 360 dias, usando reconstrução de fluxos RT e $k_P = 1$, $k_S = 1$ em (a), $k_P = 2$, $k_S = 2$ em (c) e $k_P = 3$, $k_S = 3$ em (e). Em (b), (d) e (f) apresentamos zoom da frente do fluido referente às Figs. 4.14a, 4.14c e 4.14e, respectivamente.

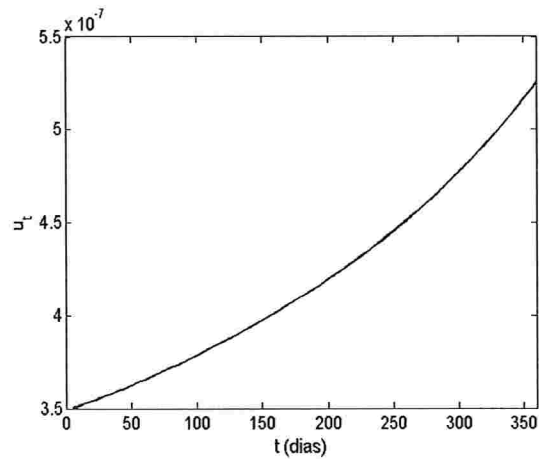


Figura 4.15: Variação da velocidade total como função do tempo para o Exemplo 4.3.

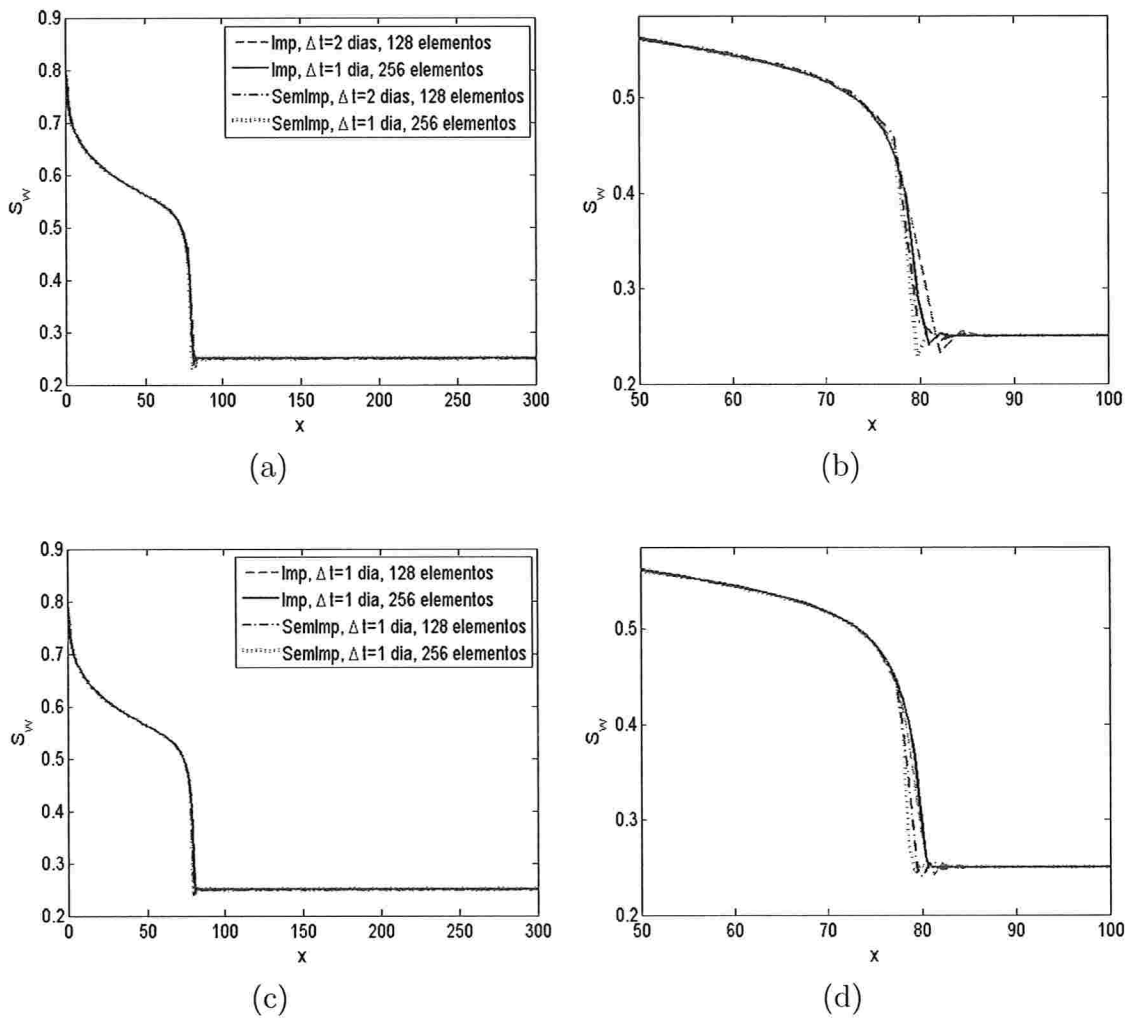


Figura 4.16: Exemplo 4.4: Comparação entre aproximações obtidas para a saturação S_w após 200 dias com o método implícito e com o método semi-implícito, usando reconstrução de fluxos RT e $k_P = 1$, $k_S = 1$ em (a) e $k_P = 2$, $k_S = 2$ em (c). Em (b) e (d) apresentamos zoom da frente do fluido referente às Figs. 4.16a e 4.16c, respectivamente.

Capítulo 5

Escoamento em Meios Porosos Heterogêneos: Domínio Unidimensional

Na engenharia de petróleo uma técnica amplamente usada para extração de petróleo é a injeção de água no reservatório através de poços de injeção, desta forma conduzindo o óleo para os poços de produção (*water-drive*). A presença de heterogeneidades no reservatório geralmente tem um efeito desfavorável na taxa de recuperação do petróleo, pois o óleo tende a ficar acumulado nas regiões de baixa permeabilidade. Para estudar esse tipo de problemas inicialmente consideramos um escoamento bifásico de um fluido molhante (água) e outro não-molhante (óleo), imiscíveis e incompressíveis, que são direcionados perpendicularmente através de interfaces nas quais temos alteração nas características do reservatório (meio poroso heterogêneo). Essa simplificação nos conduz à resolução de problemas de escoamento unidimensionais.

Apresentamos neste capítulo resultados numéricos obtidos com o método DG sequencial apresentado no Capítulo 3 para vários problemas em meios heterogêneos. Faremos a validação do método por meio de testes cuja solução exata é conhecida e também avaliamos qualitativamente as soluções de acordo com a literatura. Em seguida apresentamos aproximações para problemas de escoamento em meios heterogêneos com uma ou mais interfaces. Todos os testes aqui apresentados foram realizados em um domínio unidimensional com o objetivo de mostrar o potencial do método para resolução numérica de problemas de escoamento na extração secundária de petróleo. De acordo com observações feitas anteriormente, as propriedades do meio poroso tais como porosidade e permeabilidade, tem influência direta no perfil da pressão capilar. Nos exemplos abaixo consideramos permeabilidade K e forças capilares descontínuas nas interfaces formadas entre sedimentos com diferentes propriedades físicas.

5.1 Validação do método numérico

Inicialmente vamos apresentar aproximações fornecidas pelo método numérico (3.15),(3.17) para diferentes problemas de escoamento bifásico em meios porosos heterogêneos com solução exata conhecida, e desta forma assegurar que o método numérico proposto resolve adequadamente os problemas de escoamento em questão. Esta validação para problemas com solução analítica conhecida permite também estimar a precisão numérica do método em captar os diferentes fenômenos que ocorrem durante o processo de escoamento.

5.1.1 Equação parabólica degenerada

Primeiramente analisamos as aproximações obtidas com uso da média ponderada e penalização proposta no método DG (3.17) para o problema de escoamento bifásico puramente difusivo (velocidade total $u = 0$) em meios heterogêneos, e comparamos com a solução quase analítica obtida por similaridade por Duijn e Neef (1998). Os autores obtiveram por similaridade uma solução para o problema de escoamento heterogêneo unidimensional bifásico, imiscível e incompressível para o caso particular em que condição inicial e permeabilidade possuem uma descontinuidade no mesmo ponto e são constantes no restante do domínio. Pretendemos avaliar através deste exemplo o comportamento do método numérico na interface, onde a solução exata é descontínua, e na frente do fluido onde a solução degenera. Neste exemplo consideramos o domínio $\Omega = (-0.6, 0.6)$, com interface $\Gamma_{12} = 0$, onde as propriedades do meio poroso são descontínuas e a condição inicial também possui uma descontinuidade neste ponto, sendo constante no restante do domínio:

$$S|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Desta forma temos dois subdomínios $\Omega_1 = (-0.6, 0)$ e $\Omega_2 = (0, 0.6)$. Como condições de fronteira consideramos $S_{D1} = 0$, $S_{D2} = 1$. Utilizamos o modelo de Brooks-Corey (2.7), (2.6) para as mobilidades e pressão capilar. Na implementação consideramos $\mu_n = 1$, $\mu_w = 1$, $\theta = 2$, $S_{nr} = S_{wr} = 0$ e pressão de entrada da forma: $P_e = \sqrt{\frac{\phi}{K}}$. Apresentamos resultados numéricos para dois tipos de descontinuidade:

Exemplo 5.1 $\phi_1 = \phi_2 = 1$, $K_1 = 1$ e $K_2 = 0.25$.

Exemplo 5.2 $\phi_1 = \phi_2 = 1$, $K_1 = 1$ e $K_2 = 0.64$.

Nas Figs. 5.1 e 5.2 apresentamos a análise de convergência do método DG (3.17) com ordens de aproximação polinomial $k = 1$ e $k = 2$ para a solução exata obtida por similaridade em Duijn e Neef (1998) usando os dados do Exemplo 5.1 e Exemplo 5.2, respectivamente. Nestas figuras utilizamos a relação $S_w + S_n = 1$ para apresentar perfis para a saturação da fase molhante S_w . A saturação de entrada para o Exemplo 5.1 é $S_n^* = 0.75$ e como pode ser observado pela Fig. 5.1 no instante $\mathbf{T} = 1$, $S_n(1, 0)|_{\Omega_1} \approx 0.54 < S_n^*$, logo temos neste caso um exemplo fortemente heterogêneo com pressão capilar descontínua. Já no Exemplo 5.2 a saturação de entrada é $S_n^* = 0.36$ e $S_n(1, 0)|_{\Omega_1} \approx 0.58 > S_n^*$ (ver Fig. 5.2), o que nos fornece um exemplo com heterogeneidade mais suave em que a pressão capilar é contínua.

Podemos observar por meio das Figs. 5.1 e 5.2 que o método numérico de fato converge para a solução exata do problema para ambos os exemplos. Notamos pequenas oscilações na frente do fluido, onde o coeficiente difusivo degenera, pois $S = 0$ e $S = 1$. Porém as mesmas são eliminadas com refinamento da malha espacial (ver regiões ampliadas nas Figs. 5.1 e 5.2). A redução do passo no tempo elimina o atraso da solução aproximada em relação à exata e a ordem de aproximação polinomial maior requer um passo menor no tempo para garantir a estabilidade. Mas por outro lado, ao usar $p = 2$, não precisamos refinar tanto a malha espacial para eliminar as oscilações. Notamos ainda que todas as aproximações captam com precisão a descontinuidade da solução exata na interface $\Gamma_{12} = 0$, sem a presença de oscilações e além disso, o método DG impõe corretamente as condições de interface nesse ponto de heterogeneidade do meio poroso.

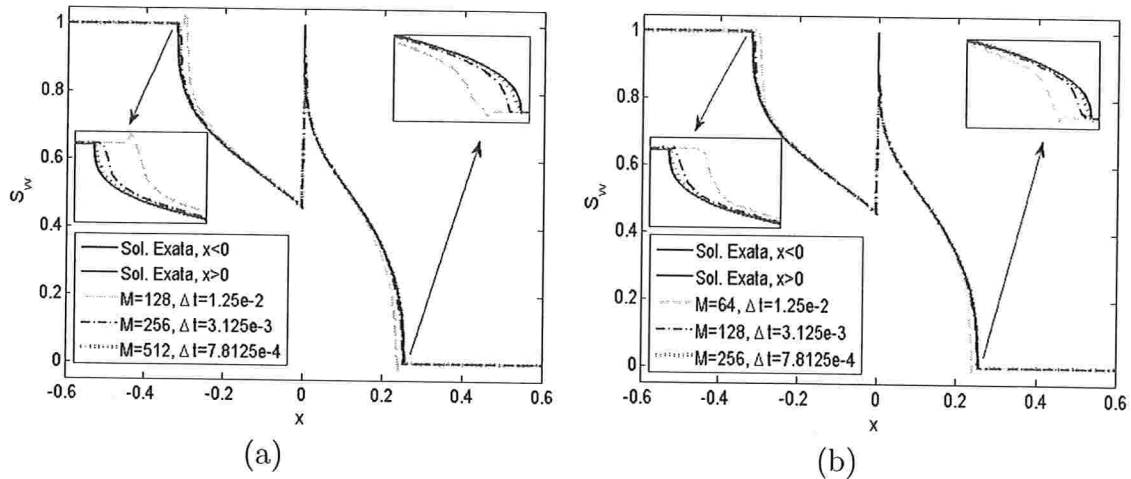


Figura 5.1: *Exemplo 5.1: Análise de convergência no instante de tempo $\mathbf{T} = 1$, (a) aproximação polinomial $k = 1$, (b) aproximação polinomial $k = 2$.*

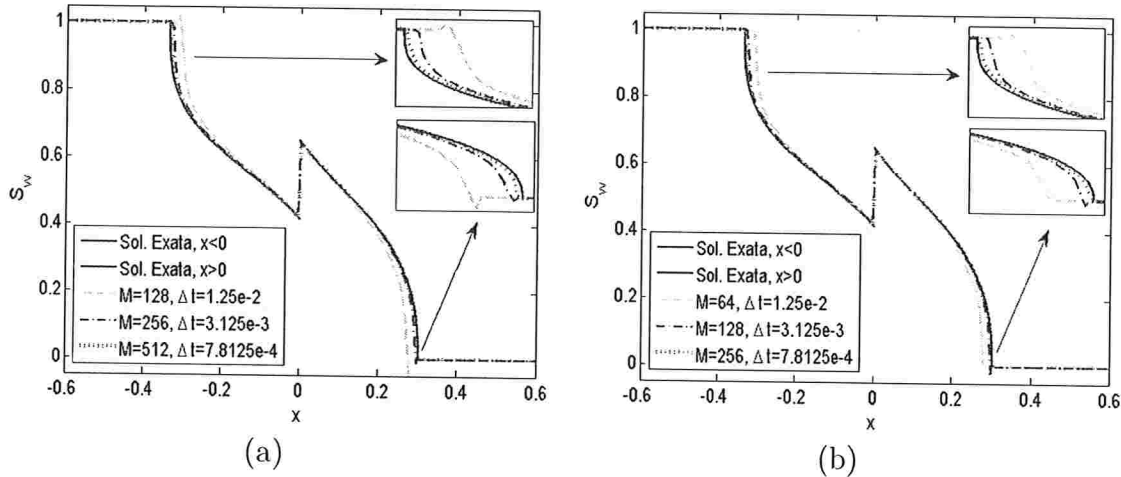


Figura 5.2: *Exemplo 5.2: Análise de convergência no instante de tempo $\mathbf{T} = 1$, (a) aproximação polinomial $k = 1$, (b) aproximação polinomial $k = 2$.*

Na Tab. 5.1 apresentamos os erros na norma L^2 para a solução numérica e respectivas ordens de convergência (OC) para os Exemplos 5.1 e 5.2. A definição de OC é dada em (4.10). Notamos que a OC para $k = 1$ e $k = 2$ é semelhante, o que se deve ao fato da solução perder regularidade na interface Γ_{12} , onde as propriedades físicas do meio poroso são descontínuas, e nas regiões onde o coeficiente do termo difusivo degenera. Devido ao fato do coeficiente difusivo degenerar, o Teorema 3.9 de análise de convergência não pode ser aplicado à esses exemplos.

5.1.2 Equação advecção-difusão degenerada para saturação

Nesta seção consideramos a equação para a saturação (3.14) em meios porosos que possuem uma única heterogeneidade nas propriedades físicas para o caso particular em que a velocidade total u possui a seguinte forma:

$$u = -RA_u t^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.2)$$

Tabela 5.1: Erros e ordens de convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ obtidas com o método DG (3.17) para ordens de aproximação polinomial de $k = 1, 2$ na resolução dos Exemplos 5.1 e 5.2 no instante de tempo $\mathbf{T} = 1$.

Parâmetros de discretização			Ordens em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ Exemplo 5.1		Ordens em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ Exemplo 5.2	
k	M	Δt	$\ e\ _{L^2}$	OC	$\ e\ _{L^2}$	OC
1	32	2.0000e-01	2.1565e-01	-	2.4595e-01	-
	64	5.0000e-02	1.1445e-01	0.9140	1.3984e-01	0.8146
	128	1.2500e-02	4.1918e-02	1.4490	5.1080e-02	1.4530
	256	3.1250e-03	1.4844e-02	1.4977	1.8564e-02	1.4602
	512	7.8125e-04	5.3270e-03	1.4785	6.4189e-03	1.5321
2	16	2.0000e-01	1.8366e-01	-	2.0620e-01	-
	32	5.0000e-02	9.1861e-02	0.9995	1.1616e-01	0.8280
	64	1.2500e-02	3.4777e-02	1.4013	4.4084e-02	1.3977
	128	3.1250e-03	1.2633e-02	1.4609	1.6209e-02	1.4435
	256	7.8125e-04	4.5588e-03	1.4705	5.6453e-03	1.5216

Fučík (2006); Fučík *et al.* (2008) obtiveram solução semi-analítica para este problema em domínio unidimensional efetuando uma extensão das idéias utilizadas por Duijn e Neef (1998) para obter a solução do problema difusivo discutido na Seção 5.1.1. Além da condição sobre a velocidade total dada na Eq. (5.2), os autores consideram que a condição inicial, permeabilidade e porosidade possuem uma descontinuidade no mesmo ponto e são constantes no restante do domínio. Porém esta solução semi-analítica encontrada não permite a simulação do efeito de acúmulo (*trapping*) discutido por Helmig (1997), pois para obtenção da solução os autores assumem que a pressão capilar é contínua através da interface.

Iremos validar a formulação DG (3.17) para esse problema utilizando os mesmos dados do artigo de Fučík *et al.* (2008):

$$\begin{aligned}
\text{Domínio: } & \Omega = (-0.15, 0.15), \quad \Gamma_{12} = 0, \\
\text{Subdomínios: } & \Omega_1 = (-0.15, 0), \quad \Omega_2 = (0, 0.15), \\
\text{Propriedades dos fluidos: } & \mu_w = 0.001, \quad \mu_n = 0.0009, \\
\text{Propriedades das rochas: } & \phi = [0.34 \quad 0.34] \quad K = [7e - 12 \quad 5.3e - 12], \\
\text{Modelo de Brooks-Corey (2.7) e (2.6) com: } & S_{wr} = 0, \quad S_{nr} = 0, \\
& \theta = 2.48, \quad P_e = [2218 \quad 2550].
\end{aligned}$$

Para estes parâmetros temos um problema onde a saturação de entrada é $S^* \approx 0.2924$, isto é, quando o fluxo é na direção positiva do eixo x , S^* representa o valor que a saturação da fase não-molhante precisa atingir em Ω_1 para conseguir entrar no meio de baixa permeabilidade Ω_2 . Como condição de fronteira e condição inicial são consideradas três diferentes escolhas como descrevemos a seguir:

Exemplo 5.3

$$S_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad S_{D1} = 0, \quad S_{D2} = 1.$$

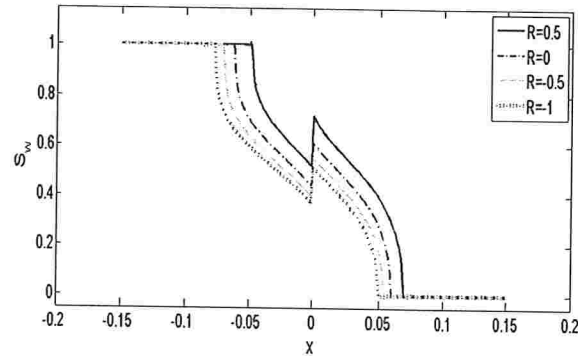
Exemplo 5.4

$$S_0 = \begin{cases} 0.6, & \text{se } x < 0, \\ 0.8, & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad S_{D1} = 0.6, \quad S_{D2} = 0.8.$$

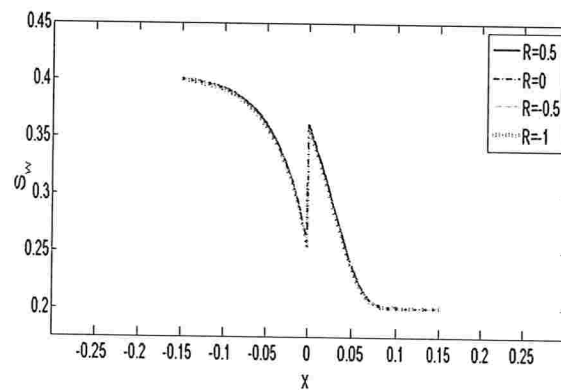
Exemplo 5.5

$$S_0 = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0, \\ 0.2, & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad S_{D1} = 1, \quad S_{D2} = 0.2.$$

(a) Exemplo 5.3



(b) Exemplo 5.4



(c) Exemplo 5.5

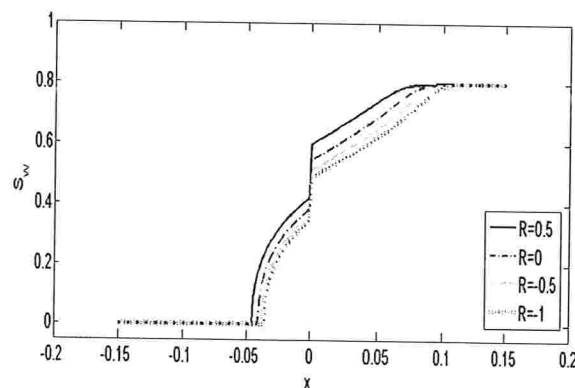


Figura 5.3: Resultados referem-se às aproximações obtidas com o método DG (3.17) usando $k = 1$, $M = 200$, $\Delta t = 5$ no instante de tempo $\mathbf{T} = 1000$ para os Exemplos 5.3, 5.4 e 5.5.

Apresentamos aproximações no instante de tempo $\mathbf{T} = 1000s$ obtidas com o método DG (3.17) para os Exemplos 5.3, 5.4 e 5.5 na Fig. 5.3 utilizando quatro escolhas para o parâmetro R ($R = 0.5, 0, -0.5, -1$). Para obtenção destes resultados consideramos $\vartheta = 1$ (método simétrico), $\sigma_F = 10k^2$, $k = 1$, $M = 200$, $\Delta t = 5$. Podemos observar que os perfis para saturação obtidos com o método DG para as três condições iniciais são muito semelhantes às respectivas soluções semi-analíticas obtidas por Fučík *et al.* (2008) para este exemplo.

Lembramos que o coeficiente difusivo na equação para a saturação S_n degenera para $S_n = 0$ (ou $S_w = 1$) e $S_n = 1$ (ou $S_w = 0$), logo os Exemplos 5.3 e 5.5 são degenerados na frente do fluido. Notamos que o método numérico aproxima com precisão a solução exata destes exemplos sem apresentar oscilações tanto na interface onde a solução é descontínua, como também em regiões onde a equação degenera.

5.1.3 Análise do comportamento qualitativo

Bertsch *et al.* (2003), efetuaram um estudo qualitativo para a solução da equação (3.14) em meios heterogêneos com uma interface em $\Gamma_{12} = 0$ para o caso particular onde a permeabilidade satisfaz $0 < K_2 < K_1 < \infty$ (escoamento de um meio com alta permeabilidade para um meio com baixa permeabilidade) e

$$f(S) = S, \quad \epsilon(S) = S, \quad \pi(S) = \sqrt{\frac{\phi}{K}}(S + 1). \quad (5.3)$$

Os autores obtêm resultados que fornecem condições sob as quais temos acúmulo de óleo no domínio Ω_1 , ou seja, o óleo fica retido no meio poroso com permeabilidade mais alta e não consegue entrar em Ω_2 , meio poroso com permeabilidade mais baixa. Supondo que a condição inicial S_0 satisfaz a Hipótese H, Bertsch *et al.* (2003) demonstraram que o problema com interface possui uma única solução fraca $S \in C_{loc}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \times \mathbb{R}^+)$ que converge quando $t \rightarrow +\infty$ para uma solução estacionária máxima admissível

$$\bar{S}(x) := \begin{cases} (S^* + \frac{1}{\sqrt{K_1}}x)_+, & \text{para } x < 0 \\ 0, & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

com massa \bar{M} , em que $(\cdot)_+ := \max\{\cdot, 0\}$. Além disso impondo a Hipótese H de Bertsch *et al.* (2003) sobre a condição inicial, os autores obtiveram o seguinte resultado referente ao acúmulo de óleo na interface:

Teorema 5.1 *Considere S_0 satisfazendo a Hipótese H de Bertsch et al. (2003) e*

(i) *Seja S_0 tal que*

$$\int_x^{+\infty} S_0(r)dr \leq \int_x^{+\infty} \bar{S}(r)dr, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Então $S = 0$ em Ω_2 .

(ii) *Se*

$$\int_{-\infty}^x S_0(r)dr \geq \int_{-\infty}^x \bar{S}(r)dr, \quad \text{para } x < 0. \quad (5.6)$$

Então a solução S da equação (3.14) com interface Γ_{12} satisfaz

$$\int_{-\infty}^0 S(r, t) \geq \int_{-\infty}^0 \bar{S}(r)dr, \quad \forall t > 0. \quad (5.7)$$

ou seja, em ambos os casos (i) e (ii) do Teorema 5.1 temos acúmulo de óleo (*oil trapping*) em Ω_1 , sendo que no caso (i) o óleo não consegue cruzar a interface $\Gamma_{12} = 0$, assim permanecendo totalmente retido no subdomínio Ω_1 . Já o item (ii) garante que existe uma certa quantidade de óleo que não consegue cruzar a interface $\Gamma_{12} = 0$ e que permanece retida em Ω_1 .

Para comparar o comportamento da solução numérica com os resultados obtidos por Bertsch *et al.* (2003) apresentamos resultados do método DG (3.17) para duas condições iniciais distintas:

Exemplo 5.6

$$S_{01}(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \in [-0.2, -0.1], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

Exemplo 5.7

$$S_{02}(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \in [-0.7, -0.1], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em que a saturação de entrada é dada por $S^* = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} - 1$ e além destas condições iniciais usamos f_n , ϵ , J dados em (5.3) e os seguintes parâmetros na implementação: domínio $\Omega = (-1, 1)$ no Exemplo 5.6 e $\Omega = (-1, 3)$ para o Exemplo 5.7, condição de Dirichlet $S_{D1} = S_{D2} = 0$, $\vartheta = 1$ (método simétrico), $\sigma_F = 10k^2$, $\phi_1 = \phi_2 = 0.4$, $K_1 = 1$, $K_2 = \frac{1}{3}$ e velocidade total constante $u = 1$. Defina

$$IM = \int_x^1 \bar{S}_n(r) dr, \quad IM_1 = \int_x^1 S_{01}(r) dr, \quad IM_2 = \int_{-1}^x \bar{S}_n(r) dr, \quad IM_3 = \int_{-1}^x S_{02}(r) dr, \quad (5.8)$$

Apresentamos essas integrais na Fig. 5.4, e podemos notar que $IM_1 \leq IM$, logo pelo item (i) do Teorema 5.1 temos que o óleo não consegue cruzar a interface Γ_{12} no Exemplo 5.6. Na Fig. 5.5 apresentamos a aproximação do método de Galerkin descontínuo (3.17) para o Exemplo 5.6 em vários instantes de tempo, e percebemos que de fato o óleo não atinge a saturação de entrada $S^* \approx 0.7321$ necessária para penetrar em Ω_2 e desta forma fica acumulado em Ω_1 . Vemos também na Fig. 5.4b que $IM_3 \geq IM_2$, desta forma pelo item (ii) do Teorema 5.1, teremos $\int_{-\infty}^0 S \geq \int_{-\infty}^0 \bar{S}$. Na Fig. 5.6 temos a aproximação DG para esse problema e percebemos que o óleo consegue entrar em Ω_2 após atingir a saturação de entrada S^* e no instante de tempo $\mathbf{T} = 0.96$ temos: $\int_{-\infty}^0 S = 0.2784$ e $\int_{-\infty}^0 \bar{S} = 0.2679$ o que está de acordo com o teorema. Ambas soluções dos Exemplos 5.6 e 5.7 convergem para a solução estacionária admissível para \mathbf{T} suficientemente grande.

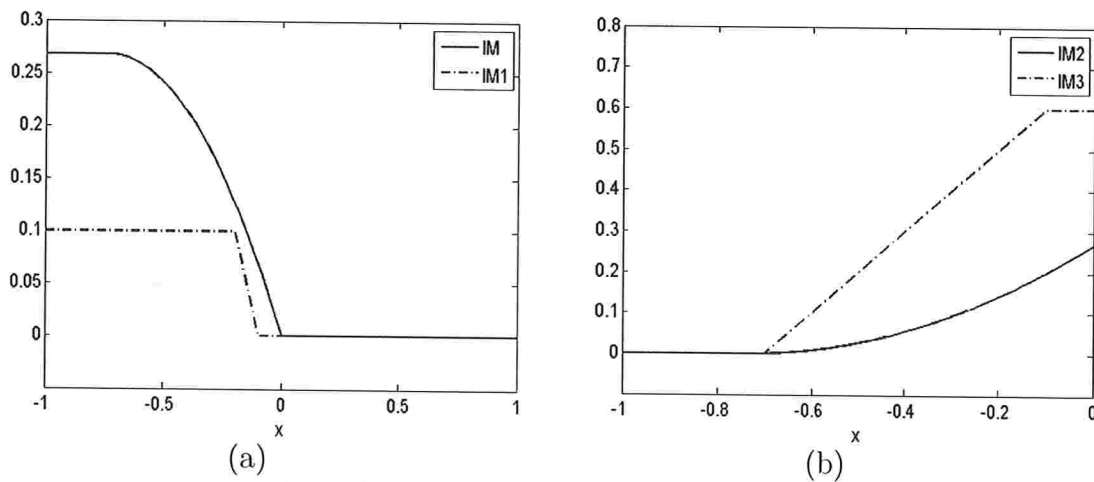


Figura 5.4: Comparando as integrais definidas em (5.8).

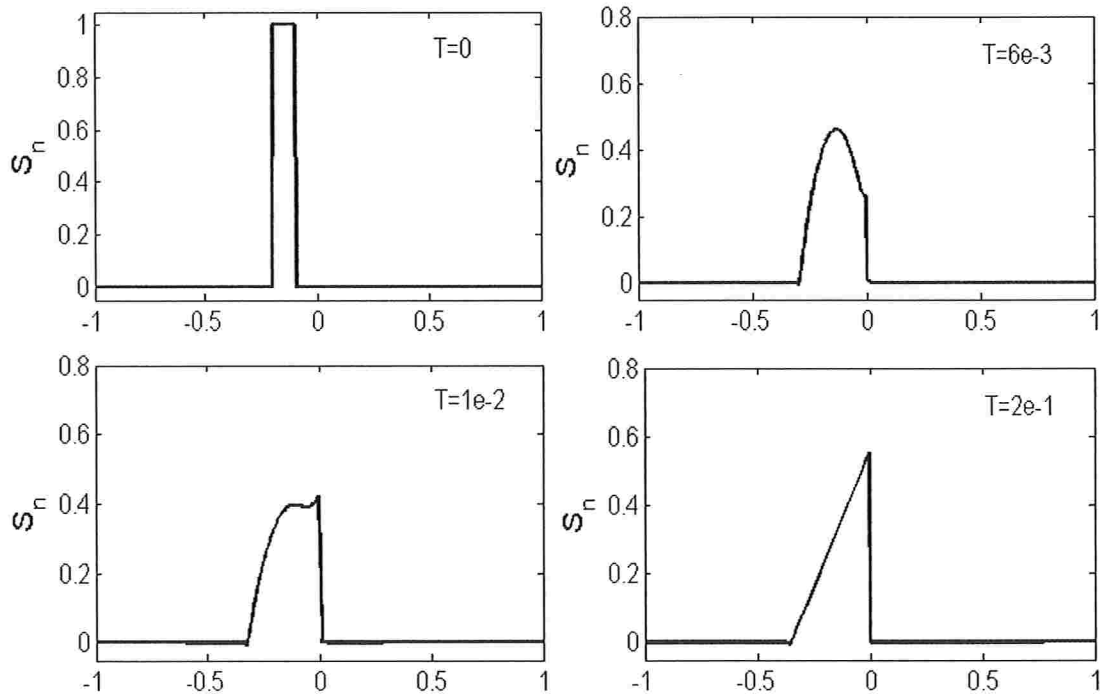


Figura 5.5: *Exemplo 5.6, u constante: Saturação S_n nos instantes de tempos: $T = 0$, $T = 6e - 3$, $T = 1e - 2$ e $T = 2e - 1$, usando o método DG (3.17) com $k = 1$, $M = 200$ e $\Delta t = 1e - 4$.*

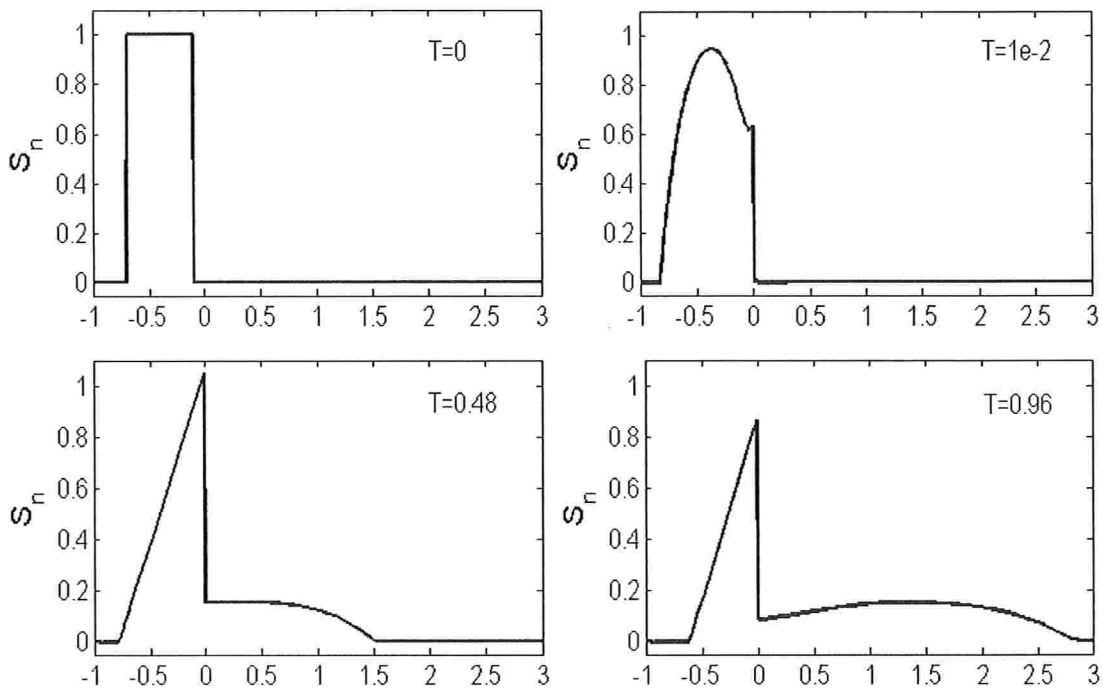


Figura 5.6: *Exemplo 5.7, u constante: Saturação S_n nos instantes de tempos: $T = 0$, $T = 1e - 2$, $T = 0.48$ e $T = 0.96$, usando o método DG (3.17) com $k = 1$, $M = 400$ e $\Delta t = 1e - 4$.*

5.2 Resultados numéricos obtidos com a formulação pressão-saturação

Na seção anterior trabalhamos com velocidade total u constante. Agora vamos considerar o sistema acoplado pressão-saturação, em que a velocidade varia com o passar do tempo. Para resolver este problema usamos o método DG apresentado nas Eqs. (3.15) e (3.17) com a reconstrução de fluxos no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec descrita nas Eqs. (3.26) e (3.27).

Tabela 5.2: *Propriedades do meio poroso para o Exemplo 5.8*

Parâmetro	Meio mais grosso	Meio mais fino	Meio homogêneo
ϕ	0.4	0.4	0.4
K (em m^2)	10^{-8}	10^{-9}	5.5×10^{-9}
S_{wr}	0	0	0
S_{nr} (em m^2)	0	0	0
P_e (em Pascal)	540	1000	770
$\theta,$	2	2	2

Exemplo 5.8 Neste exemplo apresentamos resultados que ilustram a influência da heterogeneidade do meio poroso na saturação, pressão e velocidade total. Pretendemos testar o método para parâmetros reais, desta forma consideramos a água e o óleo como a fase molhante e não-molhante, respectivamente. Consideramos $\mu_w = 10^{-3}$ kg/ms, $\mu_n = 10^{-2}$ kg/ms e para as mobilidades e pressão capilar usamos o modelo de Brooks-Corey. Iremos considerar 3 estruturas: duas em meios heterogêneos, sendo com transporte do meio poroso com permeabilidade mais alta (PMA) para um meio com permeabilidade mais baixa (PMB) e vice-versa e outro em meio homogêneo com as propriedades médias. Os parâmetros usados para os três casos são apresentados na Tabela 5.2. Consideramos o domínio $\Omega = (0, 100)$ com interface $\Gamma_{12} = 50$ no caso heterogêneo, condição de fronteira de Dirichlet para a pressão $P_{w1} = 1600$ Pa, $P_{w2} = 300$ Pa nos três casos, sendo que P_1 e P_2 podem ser calculados usando a relação (2.28), condição de fronteira mistas para a saturação com $S_{D1} = 0$ e $\epsilon(S)\pi'(S)\frac{dS}{dx}|_{x=100} = 0$ e como condição inicial

$$S_0(x) = \begin{cases} S^* = 0.7084, & \text{para } x \in [5, 45], \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.9)$$

de tal forma que inicialmente a fase não-molhante está presente somente no domínio da esquerda Ω_1 .

Usamos nos 3 casos malha uniforme com 200 elementos, ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e passo no tempo $\Delta t = 2$ horas. Nos gráficos identificamos os três casos da seguinte forma: escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada.

Nas Figs. 5.7-5.12 comparamos os perfis de saturação, pressão e velocidade total em meios homogêneos e heterogêneos nos instantes de tempo $\mathbf{T} = 16$ horas em (a) e $\mathbf{T} = 45$ dias em (b). Podemos observar que a heterogeneidade do meio reduz significativamente a velocidade total (Fig. 5.12) e como consequência temos um atraso na frente do óleo (Fig. 5.7) no escoamento em meio heterogêneo em relação ao perfil da saturação referente ao escoamento

em meio homogêneo. Em meios porosos heterogêneos notamos uma descontinuidade da saturação na interface gerada pela condição de interface não-linear, e os perfis para saturação são típicos de problemas degenerados sob o efeito da pressão capilar. No transporte do meio poroso com permeabilidade mais alta (PMA) para o meio com permeabilidade mais baixa (PMB) o óleo fica acumulado à esquerda da interface durante algum tempo até atingir a saturação de entrada S^* e conseguir fluir através da interface e entrar em Ω_2 enquanto que no transporte do meio PMB para o meio PMA a descontinuidade ocorre devido ao efeito de sucção do meio PMA.

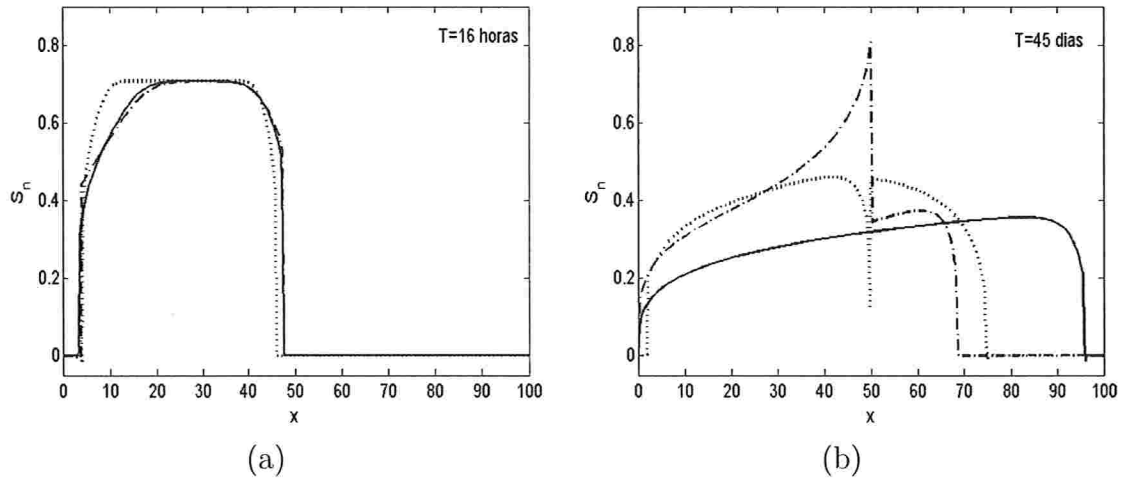


Figura 5.7: *Exemplo 5.8: Saturação S_n . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada.*

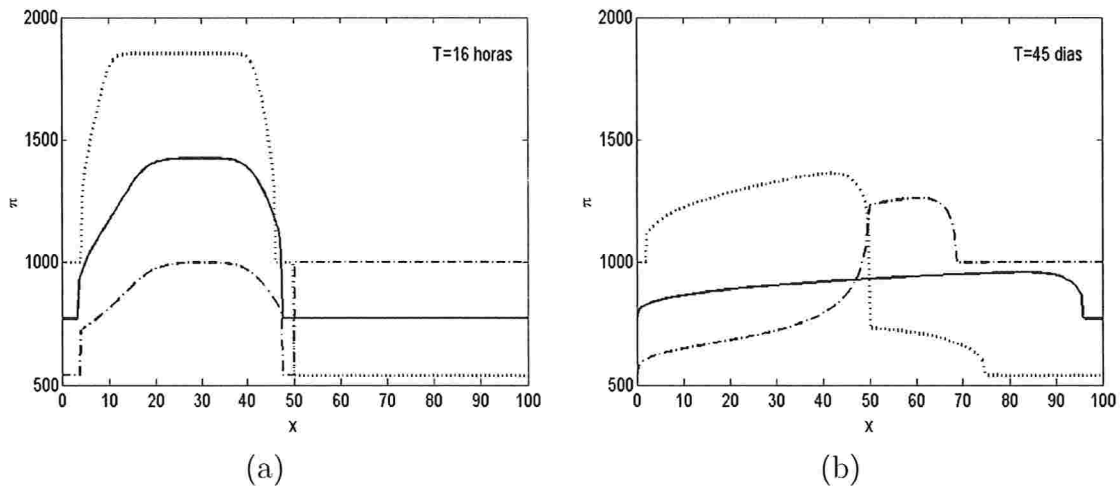


Figura 5.8: *Exemplo 5.8: Pressão capilar π . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada.*

Notamos por meio da Fig. 5.9 que a pressão global é descontínua na interface no escoamento em meios heterogêneos em qualquer instante de tempo e é contínua em meios homogêneos. Já a pressão capilar no escoamento do meio PMA para PMB é descontínua até o óleo cruzar a interface Γ_{12} e após passa a ser contínua pois a pressão da fase molhante P_w e a pressão da fase não-molhante P_n ambas passam a ser contínuas (ver Figs. 5.11 e

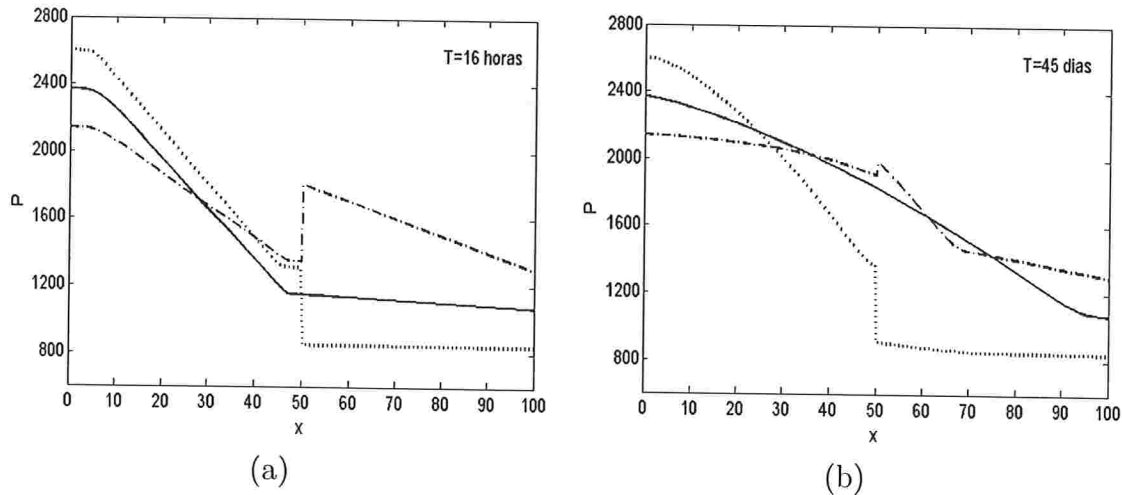


Figura 5.9: Exemplo 5.8: Pressão global P . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada.

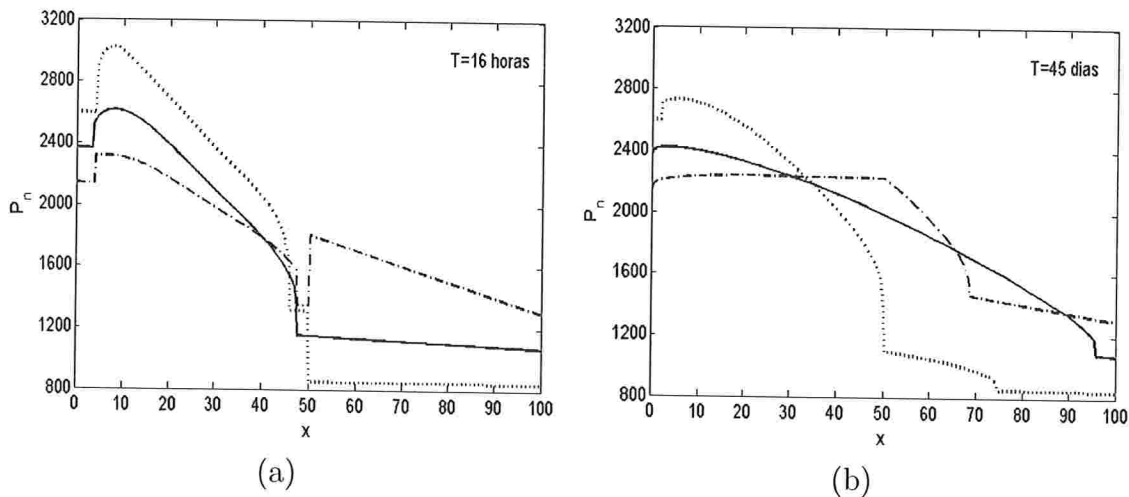


Figura 5.10: Exemplo 5.8: Pressão da fase não-molhante P_n . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada.

5.10) e em meios homogêneos temos pressão capilar contínua em Γ_{12} em qualquer instante de tempo (ver Fig. 5.8), cujo comportamento está de acordo com as condições de interface impostas. Como pode ser observado por meio da Fig. 5.11, a pressão da fase molhante P_w é contínua nos três casos, antes e após o óleo penetrar em Ω_2 , também de acordo com as condições de interface impostas. Isto ocorre pois a fase molhante está presente em todo o domínio Ω em qualquer instante de tempo. Enquanto que a pressão da fase não-molhante P_n é descontínua na interface nos casos de escoamento PMA-PMB e PMB-PMA antes do óleo cruzar a interface, pois o óleo está presente somente Ω_1 , e após o óleo entrar em Ω_2 , P_n passa a ser contínua na interface.

A Fig. 5.13 apresenta um comparativo entre aproximações obtidas com reconstrução da velocidade total no espaço RT e aproximações obtidas sem o uso de reconstrução de fluxos (SR) em vários instantes de tempo. Para obtenção destes resultados utilizamos malha uni-

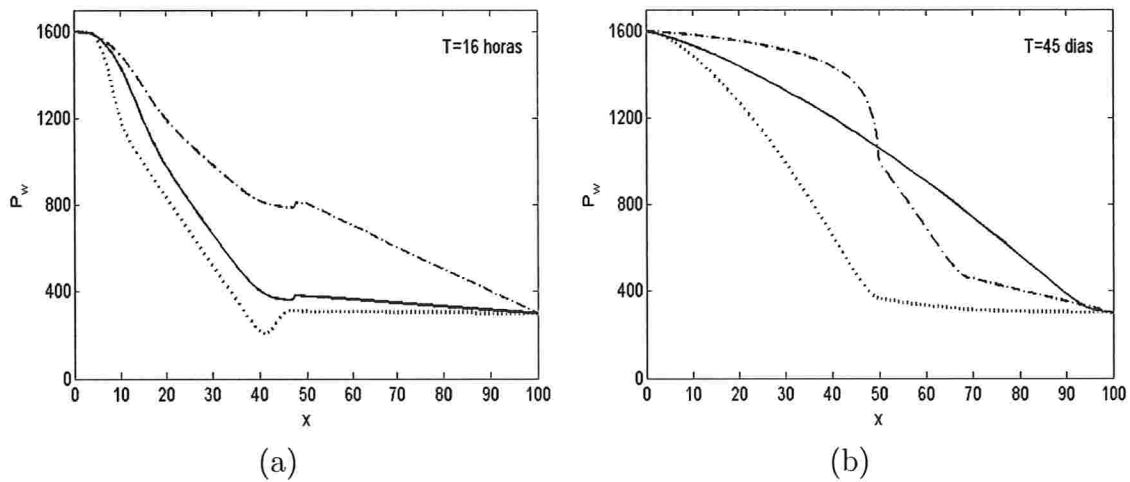


Figura 5.11: *Exemplo 5.8:* Pressão da fase molhante P_w . Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada.

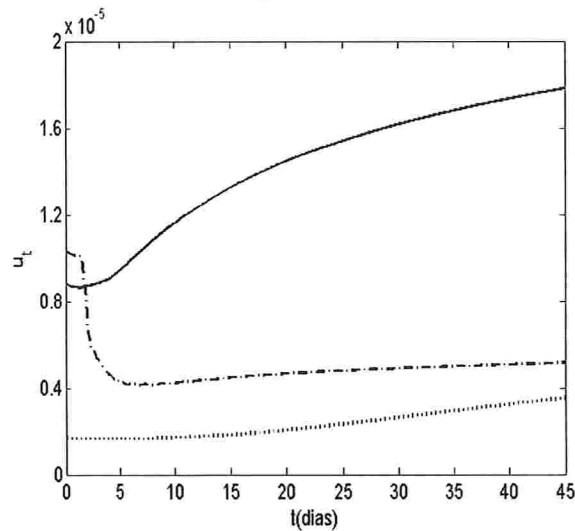


Figura 5.12: *Exemplo 5.8:* Variação da velocidade total u_t em função do tempo. Identificamos escoamento em meio Homogêneo=linha contínua, escoamento PMA-PMB=linha traço-ponto e escoamento PMB-PMA=linha pontilhada.

forme de $M = 100$ elementos, ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e passo no tempo $\Delta t = 4$ horas. Notamos que os resultados sem reconstrução apresentam oscilações espúrias significativas, para saturação e velocidade total e também podem ocorrer até formações de choques não-físicos como observado em resultados numéricos publicados no artigo Ern *et al.* (2010). Comparando resultados para velocidade e saturação, podemos observar que as oscilações na interface para a saturação no caso sem reconstrução são originadas pelo cálculo da velocidade total que apresenta problemas nessa região, já as oscilações para a velocidade ocorrem na interface e também na região onde se encontra a frente do fluido. Notamos que em $\mathbf{T} = 20$ dias essas oscilações não estão presentes para a saturação obtida sem reconstrução, mas reaparecem em seguida no instante de tempo $\mathbf{T} = 30$ dias e aumentam significativamente de amplitude em $\mathbf{T} = 35$ dias, tornando as oscilações incontroláveis a partir deste instante de tempo. Estes resultados comprovam mais uma vez a necessidade da recuperação da velocidade total ser efetuada com precisão em problemas de escoamento bifásico para

evitar o aparecimento de oscilações não-físicas.

5.2.1 Resultados obtidos em meios heterogêneos com várias interfaces

Apresentamos resultados para problemas heterogêneos com várias interfaces para dois modelos distintos:

Exemplo 5.9 Consideramos o domínio $\Omega = (-2, 3)$, interfaces $\Gamma = \{-1, 0, 1, 2\}$. Para $f(S)$, $\epsilon(S)$ e $\pi(S)$ usamos o modelo de Bertsch et al. (2003) dado em (5.3) e os seguintes dados:

$$\begin{aligned} \text{Condição Inicial: } S_0(x) &= \begin{cases} 0.9, & \text{para } x \in [-1, 0], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ \text{Condições de Fronteira: } &\begin{cases} P_{D1} = 8, P_{D2} = 1, \\ S_{D1} = S_{D2} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Porosidade: } \phi = [0.4 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.4],$$

$$\text{Permeabilidade: } K = [0.5 \ 1 \ 0.5 \ 1 \ 0.5].$$

A saturação de entrada para este exemplo é $S^* \approx 0.4142$.

Apresentamos aproximações para S e u na Fig. 5.14 referente ao Exemplo 5.9. Como a saturação inicial à esquerda da interface $\Gamma_2 = 0$ é maior que S^* o óleo consegue cruzar essa interface ($\mathbf{T} = 0.0048$) e a velocidade u decresce enquanto o óleo entra na região de baixa permeabilidade, após ter uma certa quantidade de óleo nessa região a velocidade volta a crescer ($\mathbf{T} = 0.08$). Quando o óleo atinge a interface $\Gamma_3 = 1$ ($\mathbf{T} = 0.224$), a velocidade continua aumentando, pois a pressão de entrada é menor em Ω_4 do que em Ω_3 , o que leva o óleo a cruzar a interface $\Gamma_3 = 1$ sem dificuldades. Já quando o óleo alcança a interface $\Gamma_4 = 2$ ($\mathbf{T} = 0.52$), a velocidade começa a decrescer, pois o óleo pára de escoar momentaneamente até atingir a saturação de entrada e penetrar em Ω_5 ($\mathbf{T} = 0.66$). Percebemos desta forma que a velocidade está diretamente relacionada com a região em que a frente do fluido se encontra e, dependendo do problema, pode variar significativamente com o tempo. Nestes casos a modelagem do escoamento bifásico em meios heterogêneos tem que ser feita usando o sistema acoplado pressão-saturação para incluir os efeitos de velocidade total variável no tempo.

Exemplo 5.10 Para este exemplo consideramos parâmetros reais associados a problemas de escoamento com a presença do fenômeno do acúmulo de óleo. Seja o domínio $\Omega = (0, 250)m$ dividido em 5 subdomínios com interfaces $\Gamma = \{50, 100, 150, 200\}$. Para as permeabilidades relativas e para pressão capilar utilizamos o modelo de Brooks-Corey dado em (2.7) e (2.6) com $\theta = 2$, $S_{nr} = S_{wr} = 0$, viscosidades $\mu_n = 10^{-2} Kg/ms$, $\mu_w = 10^{-3} Kg/ms$ e os seguintes parâmetros:

$$\text{Pressão de entrada: } P_e = [1000 \ 540 \ 1000 \ 540 \ 1000],$$

$$\text{Porosidade: } \phi = [0.4 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.4],$$

$$\text{Permeabilidade: } K = [1e-9 \ 1e-8 \ 1e-9 \ 1e-8 \ 1e-9],$$

e

$$\begin{aligned} \text{Condição Inicial:} \quad S_0(x) &= \begin{cases} 0.1, & \text{para } x \in [10, 45], \\ 0.4, & \text{para } x \in [50, 90], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ \text{Condições de Fronteira:} \quad &\begin{cases} P_{w1} = 4000 \Rightarrow P_{D1} = 5000, P_{w2} = 300 \Rightarrow P_{D2} = 1300, \\ S_{D1} = S_{D2} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

A saturação de entrada para este exemplo é $S^* \approx 0.7084$.

Na Fig. 5.15 apresentamos aproximações para o Exemplo 5.10 obtidas utilizando ordem de aproximação polinomial $k = 1$, malha uniforme com 400 elementos e passo no tempo variável com: $\Delta t = 6$ horas, para $t \in [0, 100]$; $\Delta t = 1$ dia, para $t \in [101, 200]$; $\Delta t = 2$ dias, para $t \in [201, 400]$; $\Delta t = 4$ dias, para $t \in [401, 800]$; $\Delta t = 8$ dias, para $t \in [801, 1600]$; $\Delta t = 16$ dias, para $t \in [1601, 3200]$; $\Delta t = 32$ dias, para $t \in [3201, 6400]$; $\Delta t = 64$ dias, para $t \in [6401, 12800]$; $\Delta t = 128$ dias, para $t \in [12801, 25600]$ e $\Delta t = 256$ dias, para $t \in [12801, 76800]$. Aqui, diferentemente do Exemplo 5.9, o óleo pára de escoar ao alcançar a interface $\Gamma_2 = 100$, pois a saturação à esquerda da interface Γ_2 é menor que a saturação de entrada $S^* = 0.7084$, sendo que o óleo somente consegue cruzar essa interface após atingir esse valor ($\mathbf{T} = 20$ dias e $\mathbf{T} = 300$ dias). Percebemos que apesar do óleo ter atingido S^* na interface Γ_2 , apenas uma pequena quantidade de óleo consegue escoar através de Ω_3 , região de baixa permeabilidade. O óleo cruza a interface $\Gamma_3 = 150$ sem dificuldades ($\mathbf{T} = 2400$ dias) e alcança a interface $\Gamma_4 = 200$ ($\mathbf{T} = 6400$ dias) e pára de escoar ($\mathbf{T} = 76800$ dias), pois não há óleo suficiente para atingir a saturação de entrada à esquerda de Γ_4 e assim permanece acumulado nos subdomínios Ω_2 e Ω_4 , que são as regiões com permeabilidade mais alta. Podemos notar que para este exemplo de acúmulo de óleo a velocidade tende a se tornar constante a medida que avançamos no tempo e a solução numérica converge para a solução estacionária em Ω_2 e Ω_4 .

Para mais resultados numéricos obtidos com o método DG proposto, ver exemplos que publicamos nos artigos Ern *et al.* (2009b,c).

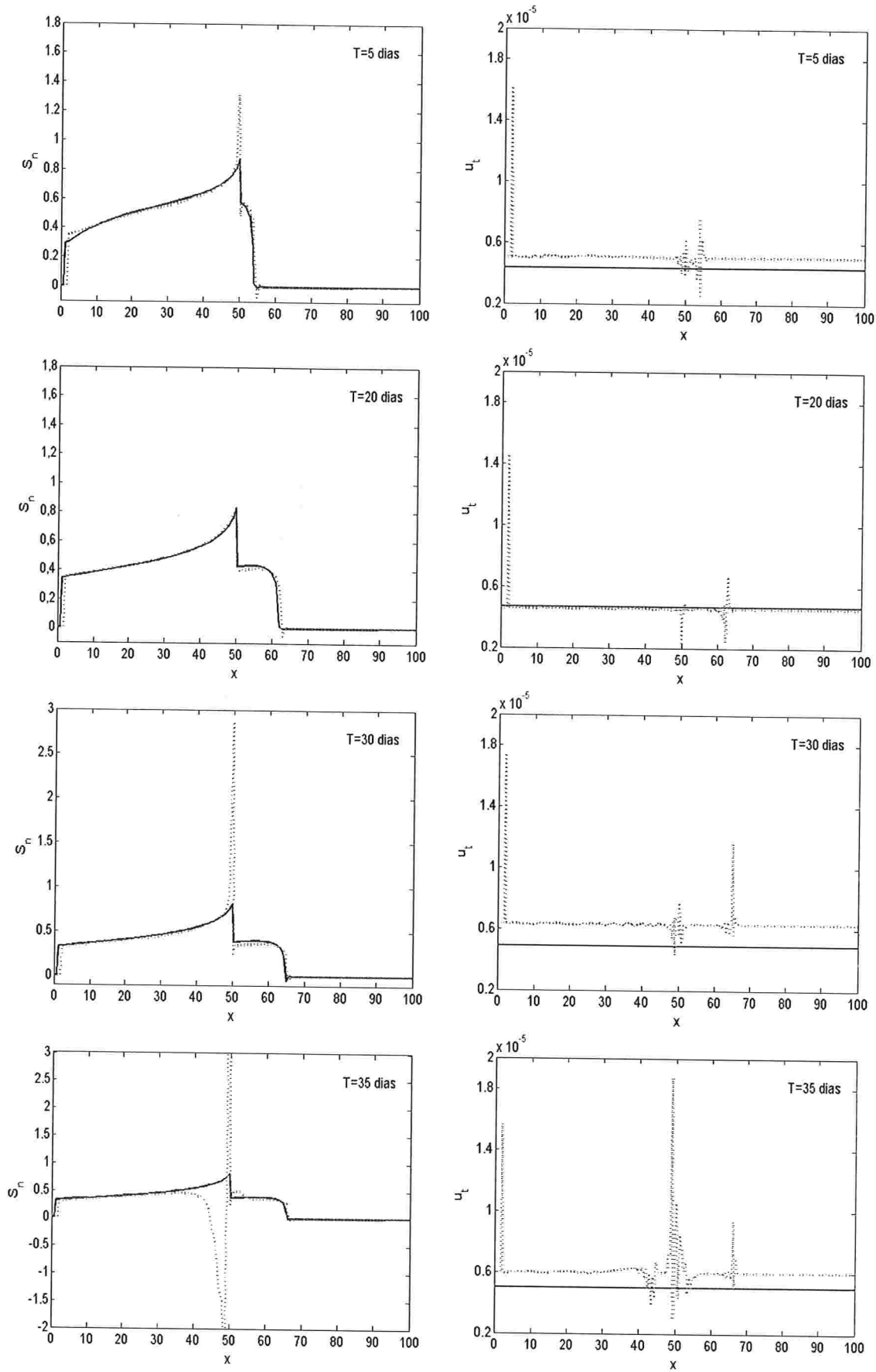


Figura 5.13: Exemplo 5.8: Comparando aproximações para saturação e velocidade total obtidas para o escoamento PMA-PMB com reconstrução de fluxos no espaço RT (linha contínua) com aproximações obtidas sem reconstrução (linha pontilhada).

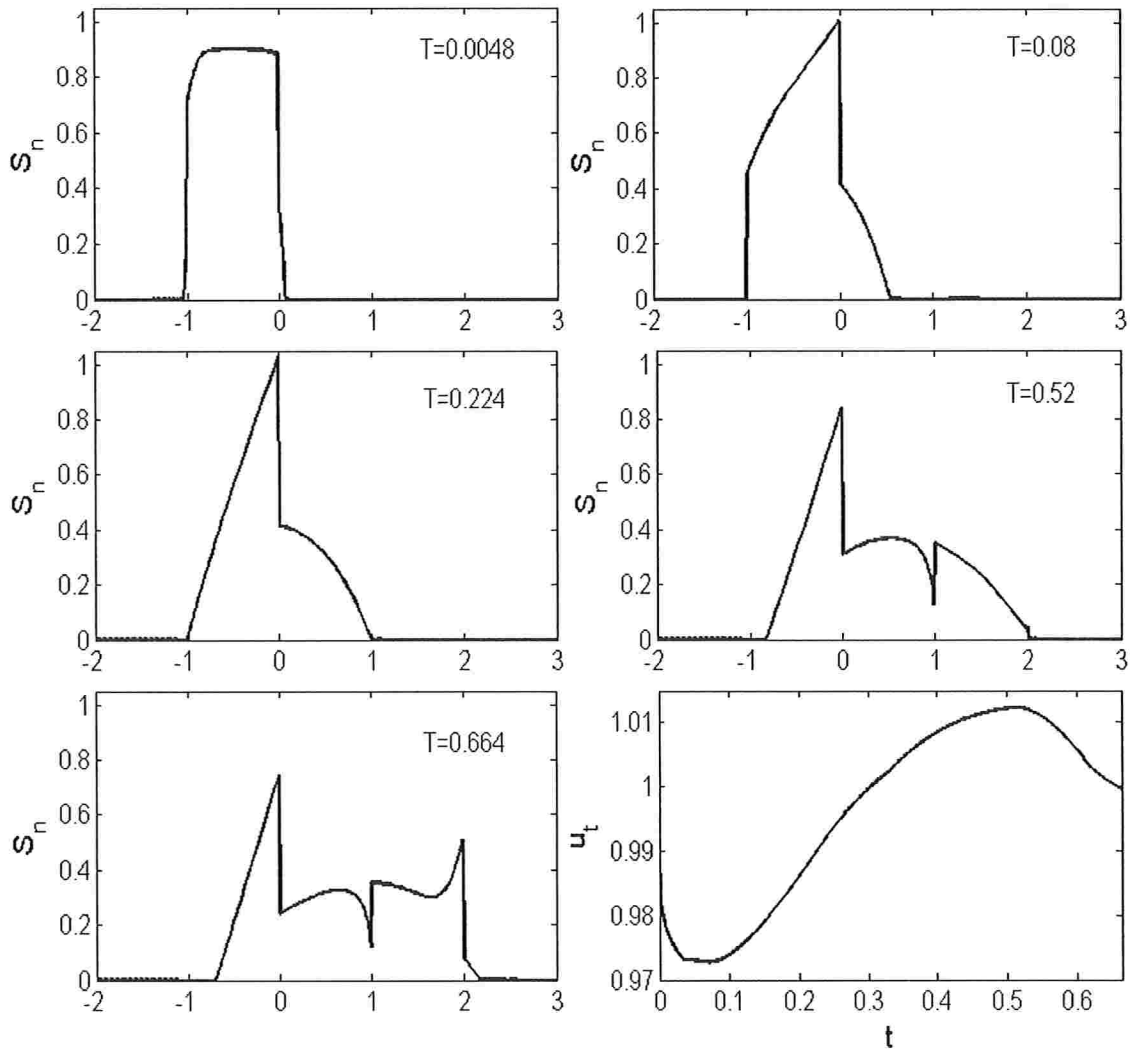


Figura 5.14: *Exemplo 5.9, Pressão-Saturação várias interfaces: Saturação S_n nos instantes de tempo: $T = 0.0048$, $T = 0.08$, $T = 0.224$, $T = 0.52$ e $T = 0.664$ obtidas usando o método DG (3.15), (3.17) com $k = 1$, $M = 500$ e $\Delta t = 4e - 4$ e variação da velocidade total com o avanço do tempo.*

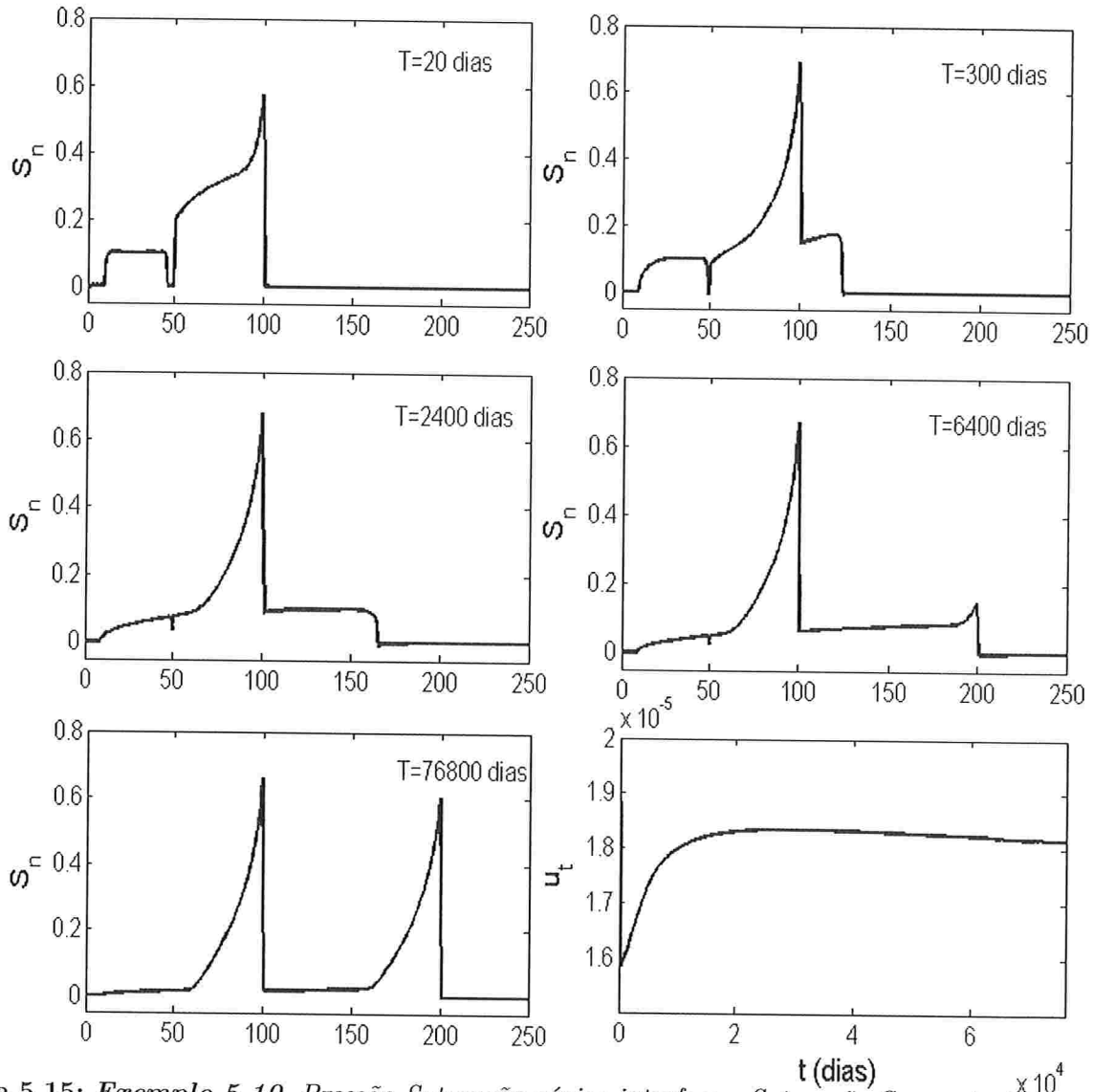


Figura 5.15: Exemplo 5.10, Pressão-Saturação várias interfaces: Saturação S_n nos instantes de tempo: $T = 20$ dias, $T = 300$ dias, $T = 2400$ dias, $T = 6400$ dias e $T = 768000$ dias obtidas usando o método DG (3.15), (3.17) com $k = 1$, $M = 400$ e variação da velocidade total com o avanço do tempo.

Capítulo 6

Escoamento em Meios Porosos Homogêneos: Domínio Bidimensional

Nos capítulos anteriores apresentamos resultados numéricos para problemas de escoamento em domínio unidimensional através dos quais validamos o método numérico proposto para resolução de problemas de escoamento em meios porosos homogêneos e heterogêneos. Essa experiência permitiu também avaliar a qualidade das soluções aproximadas fornecidas pelo método proposto, e ilustrar sua eficiência e potencial para resolução de problemas reais de escoamento bifásico. Após essa etapa, passaremos a abordar neste capítulo problemas de escoamento em meios porosos homogêneos em domínios bidimensionais.

Inicialmente na Seção 6.1 apresentamos um exemplo numérico por meio do qual avaliamos as ordens de convergência do método DG (3.17) em domínio bidimensional na norma L^2 e na seminorma H^1 e confrontamos os resultados obtidos numericamente com os resultados teóricos apresentados na Seção 3.4. Em seguida na Seção 6.2, também para validação em domínio bidimensional, apresentamos resultados numéricos para um problema de escoamento horizontal em meio homogêneo, com velocidade total constante. Essa abordagem permite comparar as aproximações bidimensionais com aproximações unidimensionais, já validadas anteriormente. Na Seção 6.3, abordamos a resolução do problema acoplado pressão-saturação, inicialmente na Subseção 6.3.1 apresentamos resultados para um modelo cujo escoamento também é horizontal, mas com velocidade total variando com o tempo e além disso o exemplo é degenerado, o que permite avaliar o comportamento do método para resolução deste tipo de problemas. Na Subseção 6.3.2 abordamos o problema five-spot, amplamente estudado na literatura, para o qual apresentamos resultados numéricos obtidos com o método DG (3.15), (3.17) e reconstrução de fluxos no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec e comparamos com resultados da literatura.

6.1 Análise da ordem de convergência em 2D

Nesta seção, são verificadas as taxas de convergência teóricas do método DG obtidas por Dolejší (2007) cujo resultado foi apresentado no Teorema 3.9, na Seção 3.4, para um caso particular da equação advecção-difusão não-linear. Seguindo este trabalho, consideramos a equação,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 U \frac{\partial U}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu(|\nabla U|) \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = q, \quad (6.1)$$

em que $\nu(w) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\nu(w) = \nu_\infty + \frac{\nu_0 - \nu_\infty}{(1-w)^\iota}, \quad \iota > 0,$$

com $\nu_0 = 0.15$, $\nu_\infty = 0.1$, $\iota = \frac{1}{2}$. Se consideramos $\mathbb{F}_j(U) = \frac{U^2}{2}$ e $a_j(U) = \nu(|\nabla U|) \frac{\partial U}{\partial x_j}$, $j = 1, 2$, recuperamos a equação (3.36).

Para obtenção das taxas de convergência, aplicamos o método DG (3.17) proposto neste trabalho para resolver a Equação (6.1) no domínio homogêneo $\Omega = (0, 1)^2$ e instante de tempo $\mathbf{T} = 80$. Definimos a função q e condições iniciais e de fronteira de tal forma que a solução exata da Equação (6.1) seja dada por:

$$U(t, x, y) = (1 - e^{-10t})\hat{U}(x, y), \quad (6.2)$$

em que,

$$\hat{U}(x, y) = 2(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}xy(1-x)(1-y), \quad (6.3)$$

sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante que interfere na regularidade da função \hat{U} , de tal forma que (Dolejší, 2007)

$$\hat{U} \in H^\beta(\Omega), \quad \forall \beta \in (0, \alpha + 3). \quad (6.4)$$

Nos resultados numéricos apresentamos taxas de convergência obtidas com o método DG (3.17) para dois casos: $\alpha = 2$ e $\alpha = -\frac{3}{2}$. Quando $\alpha = 2$ temos que a função \hat{U} é uma função suficientemente regular pertencendo a $H^\beta(\Omega)$, $\forall \beta < 5$, já para $\alpha = -\frac{3}{2}$, temos $\hat{U} \in H^\beta(\Omega)$, $\forall \beta$, $1 \leq \beta < \frac{3}{2}$. Notamos também que para $\mathbf{T} = 80$, a solução U difere pouco da solução estacionária \hat{U} .

Tabela 6.1: Erros e ordens de convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ obtidas com o método DG (3.17) com ordens de aproximação polinomial de $k = 1, 2, 3$ na resolução da equação (6.1) com $\alpha = 2$.

Parâmetros Discretização			Ordens em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$		Ordens em $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$	
k	M	h	$\ e\ _{L^2}$	OC	$ e _{H^1}$	OC
1	32	3.5355e-01	4.8087e-03	-	9.2822e-02	-
	128	1.7678e-01	1.5464e-03	1.6368	5.0397e-02	0.8811
	512	8.8388e-02	4.2664e-04	1.8578	2.5499e-02	0.9829
	2048	4.4194e-02	1.1179e-04	1.9322	1.2777e-02	0.9970
2	32	3.5355e-01	6.7422e-04	-	2.2127e-02	-
	128	1.7678e-01	8.4590e-05	2.9947	5.5537e-03	1.9943
	512	8.8388e-02	1.0689e-05	2.9843	1.3775e-03	2.0114
	2048	4.4194e-02	1.3549e-06	2.9799	3.4372e-04	2.0028
3	32	3.5355e-01	6.0133e-05	-	2.3221e-03	-
	128	1.7678e-01	3.5435e-06	4.0849	2.7031e-04	3.1028
	512	8.8388e-02	2.2944e-07	3.9490	3.2836e-05	3.0413
	2048	4.4194e-02	1.6586e-08	3.7901	4.0617e-06	3.0151

Tabela 6.2: Erros e ordens de convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ obtidas com o método DG (3.17) com ordens de aproximação polinomial de $k = 1, 2, 3$ na resolução da equação (6.1) com $\alpha = -\frac{3}{2}$.

Parâmetros Discretização			Ordens em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$		Ordens em $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$	
k	M	h	$\ e\ _{L^2}$	OC	$ e _{H^1}$	OC
1	32	3.5355e-01	2.0849e-02	-	5.3472e-01	-
	128	1.7678e-01	8.6013e-03	1.2774	3.9199e-01	0.4480
	512	8.8388e-02	3.2673e-03	1.3965	2.8402e-01	0.4648
	2048	4.4194e-02	1.1971e-03	1.4485	2.0435e-01	0.4749
2	32	3.5355e-01	6.5149e-03	-	2.3218e-01	-
	128	1.7678e-01	2.3506e-03	1.4707	1.6738e-01	0.4722
	512	8.8388e-02	8.4932e-04	1.4686	1.2077e-01	0.4709
	2048	4.4194e-02	3.0458e-04	1.4795	8.6500e-02	0.4815
3	32	3.5355e-01	3.3184e-03	-	9.3404e-02	-
	128	1.7678e-01	1.1733e-03	1.4999	6.6896e-02	0.4816
	512	8.8388e-02	4.1537e-04	1.4981	4.7715e-02	0.4875
	2048	4.4194e-02	1.4722e-04	1.4964	3.3910e-02	0.4928

Nas Tabelas 6.1 e 6.2 apresentamos os erros do método DG na norma $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e seminorma $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e respectivas ordens de convergência (OC) obtidas para $\alpha = 2$ e $\alpha = -\frac{3}{2}$. A ordem de convergência foi calculada usando a seguinte fórmula:

$$OC = \frac{\log\left(\frac{\|e\|_h}{\|e\|_{\frac{h}{2}}}\right)}{\log(2)}, \quad (6.5)$$

em que $\|e\|_h = \|U - u_h\|_h$ denota o erro da aproximação u_h em uma dada norma calculado na malha com diâmetro h . Pode-se observar que para $\alpha = 2$ (solução exata suficientemente regular) obtemos com o método DG (3.17) ordem de convergência ótima $O(h^{k+1})$, para ordens de aproximação polinomiais $k = 1, 2, 3$ na norma L^2 . Esta ordem de convergência é superior à garantida pelo Teorema 3.9. Para obtenção dessa estimativa, (Dolejší, 2007) considerou a formulação incompleta do método DG. Nesta tese o método numérico utilizado para obtenção dos resultados foi uma formulação simétrica ($\vartheta = 1$), o que pode ter originado a ordem de convergência superior observada. Na seminorma H^1 observamos ordem de convergência ótima $O(h^k)$, para $k = 1, 2, 3$, o que está de acordo com o resultado teórico obtido por Dolejší (2007).

Para o caso em que $\alpha = -\frac{3}{2}$, temos que $\hat{U} \in H^\beta(\Omega)$, $1 \leq \beta < \frac{3}{2}$, e as ordens de convergência obtidas foram: $O(h^{\frac{3}{2}})$ na norma L^2 e $O(h^{\frac{1}{2}})$ na seminorma H^1 , para ordens polinomiais $k = 1, 2, 3$. Estas ordens de convergência estão de acordo com as ordens obtidas em (Dolejší, 2007) para este mesmo problema. E ainda de acordo com o autor, considere o resultado do artigo (Feistauer, 1989), para $\beta \in (1, \frac{3}{2})$

$$\|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\beta) h^\mu \|v\|_{H^\beta(\Omega)}, \quad v \in H^\beta(\Omega), \quad (6.6)$$

em que $I_h v$ é a interpolação polinomial de Lagrange para v de grau $\leq k$, $\mu = \min(k + 1, \beta)$ e $C(\beta)$ uma constante que independe de h e v . E assim, através desse resultado, a ordem de convergência $O(h^{\frac{3}{2}})$ obtida na norma L^2 corresponde à ordem de convergência ótima.

6.2 Equação de Buckley-Leverett

Da mesma forma como no domínio unidimensional abordamos agora a resolução da equação de Buckley-Leverett em meios porosos homogêneos com condições iniciais e de fronteira:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (uf(S)) - \nabla \cdot (\epsilon(S)\nabla\pi(S)) &= q_n, & \text{em } \Omega, \\ S(x, y, t) &= S_D, & \text{em } \Omega_s^D \cup \Omega_s^-, \\ n \cdot (\epsilon(S)\nabla\pi(S)) &= S_N, & \text{em } \Omega_s^N, \\ S(x, y, 0) &= S_0, & \text{em } \Omega, \end{aligned} \quad (6.7)$$

sendo u a velocidade total, f o fluxo fracionário e $\epsilon(S)$ o coeficiente difusivo. O método de Galerkin descontínuo considerado para resolver esse problema é o descrito em (3.17), com $J(S) = 0$, pois consideramos problemas de escoamento em meios porosos homogêneos.

Exemplo 6.1 Consideramos o domínio $\Omega = (0, 100)^2$, com água sendo injetada na fronteira da esquerda $\Omega_s^- = \{0\} \times (0, 100)$ e óleo saindo do reservatório por $\Omega_s^+ = \{100\} \times (0, 100)$ e no restante da fronteira é assumida a condição de fluxo nulo (ver Fig. 6.1). Para as mobilidades e pressão capilar usamos o modelo de Brooks-Corey (2.7) e (2.6) e os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \text{Propriedades dos fluidos: } \mu_w &= 10^{-3} \text{ Kg/ms}, \quad \mu_n = 10^{-2} \text{ Kg/ms}, \\ \text{Propriedades das rochas: } \phi &= 0.2, \quad K = 1e - 11, \\ \text{Modelo de Brooks-Corey com: } S_{rw} &= 0.2 \quad S_{rn} = 0.15, \\ &\theta = 2, \quad P_e = 10^4, \\ \text{Velocidade total: } u &= [9e - 7, 0], \end{aligned} \quad (6.8)$$

e como condição inicial $S_0 = 0.7$ e condições de fronteira dadas por

$$\begin{cases} S_D = 0.25, & \text{sobre } \Omega_s^-, \\ S_D = 0.7, & \text{sobre } \Omega_s^+, \\ S_N = 0, & \text{sobre } \Omega_s^N, \end{cases} \quad (6.9)$$

Ao usar a velocidade total u da forma acima estamos trabalhando com um problema em que o escoamento é horizontal, o que nos permite comparar os resultados com aqueles obtidos em domínio unidimensional e assim iniciar a validação do método numérico em 2D. Para obtenção dos resultados numéricos consideramos malhas uniformes \mathcal{T}_h formadas por elementos triangulares que foram geradas utilizando o método da biseção de acordo com descrição efetuada na Seção A.2. Apresentamos exemplos de malhas uniformes com 128 e 512 elementos na Fig. 6.2.

Inicialmente resolvemos o Exemplo (6.1), onde desconsideramos os efeitos da pressão capilar, ou seja $\pi(S) = 0$. Nas Figs. 6.3 e 6.4 analisamos a convergência do método para ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e $k = 2$, respectivamente, comparando as soluções obtidas para saturação no domínio bidimensional, fixando a coordenada $y = 40$, com soluções obtidas no domínio unidimensional para este problema. Observamos que as aproximações obtidas com o método (3.17) em 2D convergem à medida que refinamos a malha espacial e aumentamos a ordem de aproximação polinomial para a solução obtida em 1D, com malha de $M = 256$ elementos. Nas Figs. 6.5 e 6.6, apresentamos gráficos em 3D no instante de tempo $\mathbf{T} = 60$ dias referente à aproximação obtida para saturação com malha de 512 e 2048 elementos e ordem de aproximação polinomial $k = 1, 2$. Podemos notar que a solução numérica é constante na direção y , o que já era esperado, pois o escoamento é horizontal.

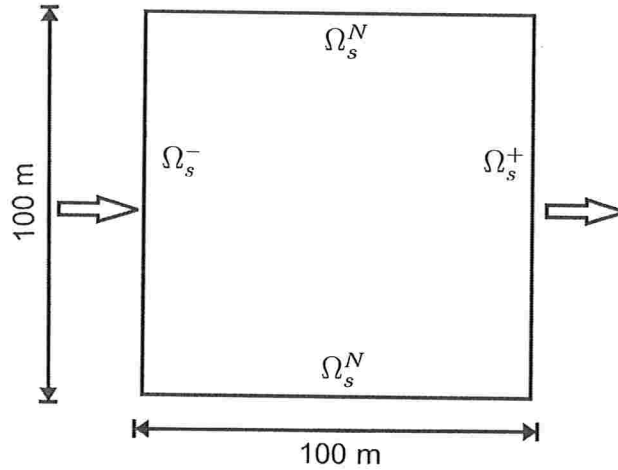


Figura 6.1: Domínio Ω para o Exemplo 6.1.

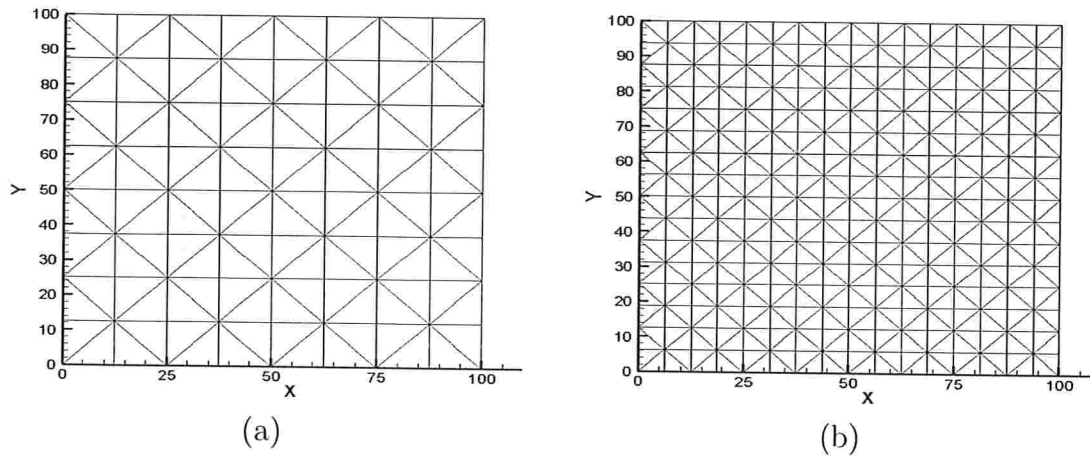


Figura 6.2: Malhas utilizadas para resolução numérica do Exemplo 6.1: (a) 128 elementos ($h = 17.6777$) (b) 512 elementos ($h=8.8388$).

Notamos também que a magnitude da oscilação presente na frente do fluido na malha de 512 elementos reduz com o uso da malha de 2048 elementos para ambas as ordens de aproximação polinomial $k = 1$ e $k = 2$. Ressaltamos que para obtenção dos resultados numéricos para este exemplo utilizamos passo de integração no tempo uniforme.

Agora consideramos o problema de Buckley-Leverett, levando em consideração os efeitos da pressão capilar, ou seja $\pi(S) \neq 0$. Apresentamos nas Figs. 6.9 e 6.10 um comparativo entre aproximações para saturação S_n obtidas em domínio bidimensional fixando a coordenada $y = 40$ e aproximações obtidas em domínio unidimensional, e podemos notar que as soluções obtidas em 2D convergem para a solução obtida com o problema unidimensional a medida que refinamos a malha, tanto para $k = 1$ como para $k = 2$. Neste caso onde consideramos os efeitos capilares, observamos que a solução é mais suave na frente do fluido do que no caso onde os efeitos capilares foram desconsiderados. Nas Figs. 6.7 e 6.8 apresentamos gráficos em 3D dos perfis para saturação S_n , por intermédio dos quais notamos que o método capta bem o comportamento horizontal do escoamento à medida que avançamos no tempo. Para ambos os casos, o método DG (3.17) forneceu soluções precisas que não apresentam oscilações na direção transversal e captam com eficiência o salto na frente do fluido.

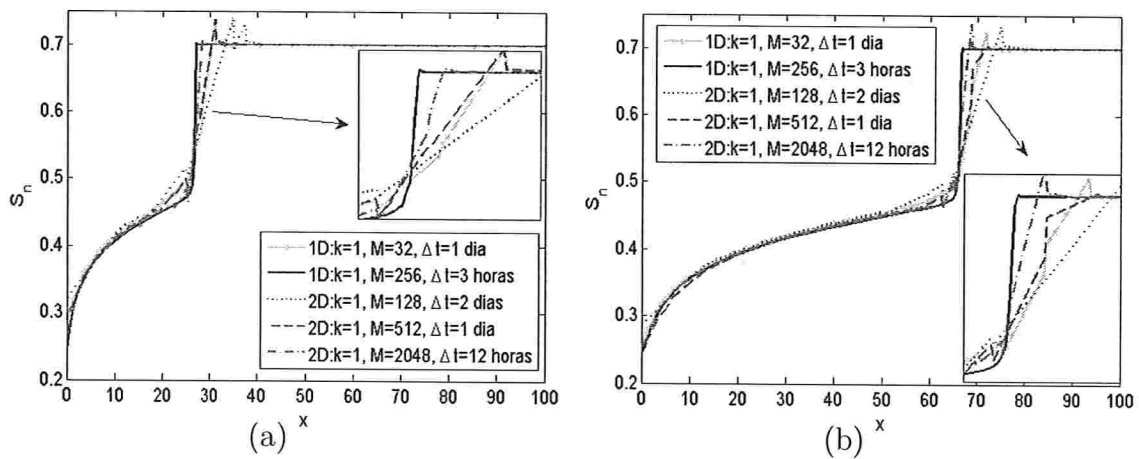


Figura 6.3: *Exemplo 6.1, com $\pi = 0$: Comparando soluções obtidas com o método DG bidimensional usando ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e fixando a coordenada $y = 40$, com soluções obtidas para o problema em 1D nos instantes de tempo: (a) $T = 20$ dias (b) $T = 50$ dias.*

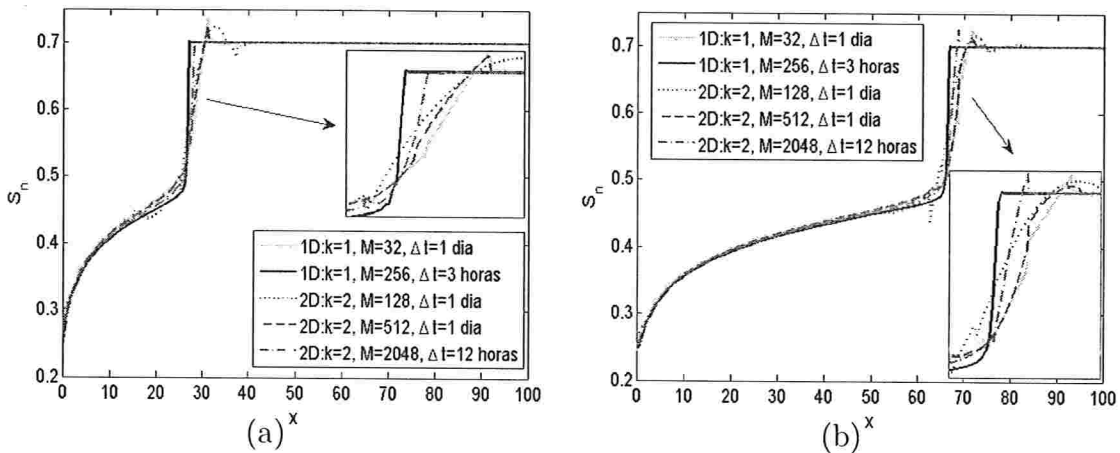


Figura 6.4: *Exemplo 6.1, com $\pi = 0$: Comparando soluções obtidas com o método DG bidimensional usando ordem de aproximação polinomial $k = 2$ e fixando a coordenada $y = 40$, com soluções obtidas para o problema em 1D nos instantes de tempo: (a) $T = 20$ dias (b) $T = 50$ dias.*

6.3 Problema acoplado pressão-saturação

Nesta seção apresentamos resultados numéricos obtidos com o método DG (3.15), (3.17) para dois problemas de escoamento em meios homogêneos: problema degenerado com escoamento horizontal e o five-spot. Parte destes resultados numéricos foram publicados no artigo (Mozolevski *et al.*, 2010).

6.3.1 Escoamento horizontal

Inicialmente validamos o método numérico (3.15), (3.17) para o problema acoplado pressão-saturação com reconstrução de fluxos no espaço \mathbf{RT}_0 mediante a resolução de um problema degenerado, cujo escoamento é horizontal. Para isto consideramos dados semelhantes aos utilizados para a equação de Buckley-Leverett no Exemplo 6.1.

Exemplo 6.2 Consideramos o domínio $\Omega = (0, 100)^2$, com água sendo injetada ao longo da fronteira da esquerda $\Omega^- = \{0\} \times (0, 100)$ e óleo saindo do reservatório através da fronteira

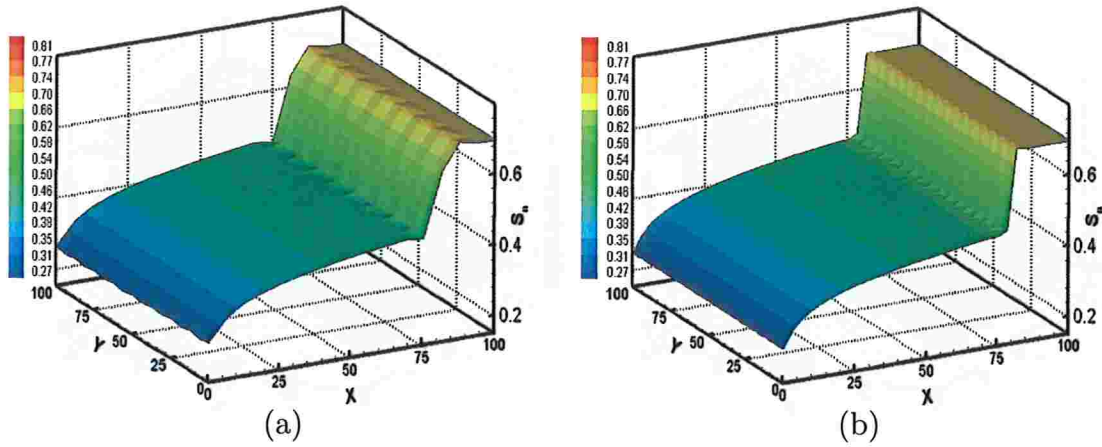


Figura 6.5: Exemplo 6.1, com $\pi = 0$: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.17) no instante de tempo $\mathbf{T} = 60$ dias, usando $k = 1$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 1$ dia; (b) $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas.

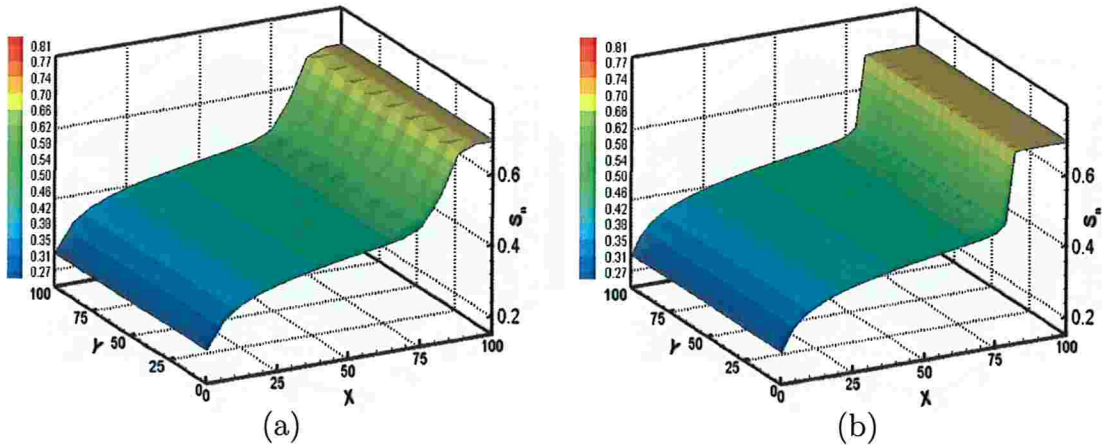


Figura 6.6: Exemplo 6.1, com $\pi = 0$: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.17) no instante de tempo $\mathbf{T} = 60$ dias, usando $k = 2$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 1$ dia; (b) $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas.

$\Omega^+ = \{100\} \times (0, 100)$ e no restante da fronteira é assumida a condição de fluxo nulo (para ilustração do domínio e condições de fronteira ver Fig. 6.1), para as mobilidades e pressão capilar usamos o modelo de Brooks-Corey descrito nas equações (2.7) e (2.6) com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
 \text{Propriedades dos fluidos: } & \mu_w = 10^{-3} \text{ Kg/ms}, \quad \mu_n = 10^{-2} \text{ Kg/ms}, \\
 \text{Propriedades das rochas: } & \phi = 0.2, \quad K = 1e-11, \\
 \text{Modelo de Brooks-Corey com: } & S_{wr} = 0.2 \quad S_{nr} = 0.15, \\
 & \theta = 2, \quad P_e = 10^4.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

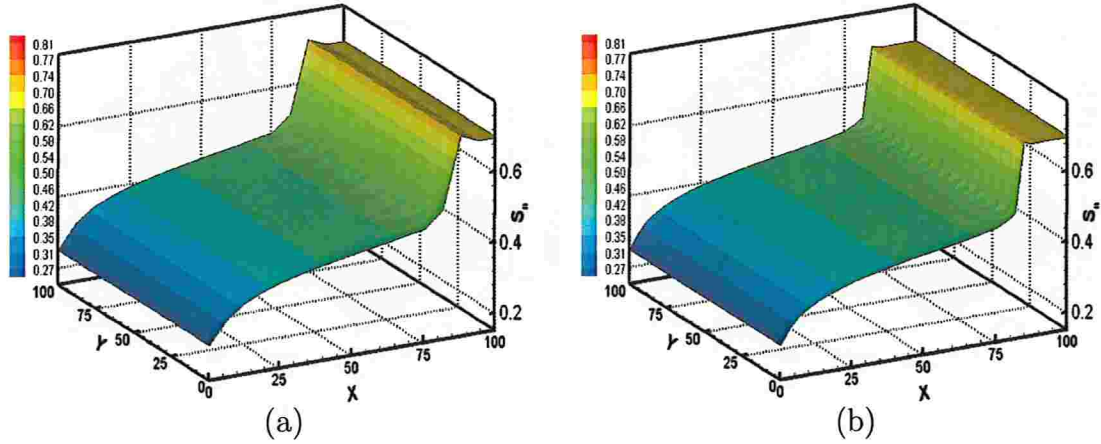


Figura 6.7: *Exemplo 6.1, considerando efeitos capilares: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.17) no instante de tempo $T = 60$ dias, usando $k = 1$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 1$ dia; (b) $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas.*

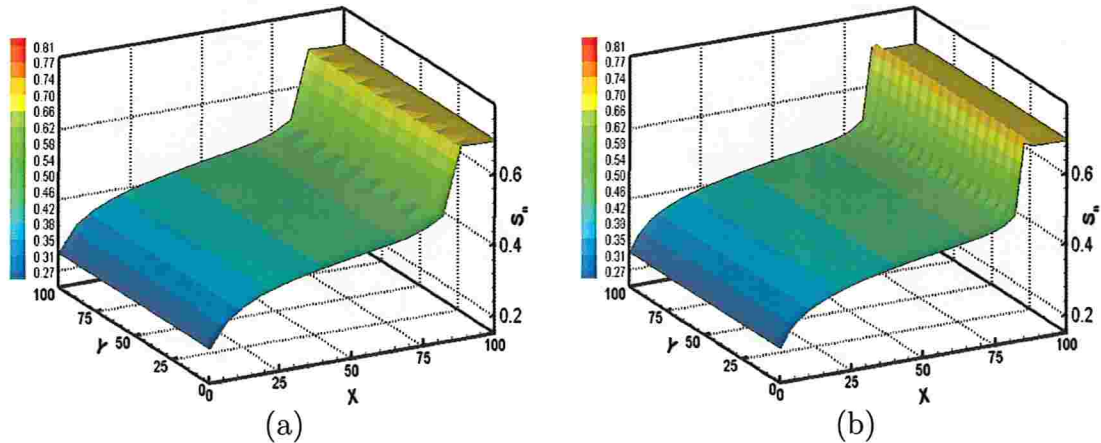


Figura 6.8: *Exemplo 6.1, considerando efeitos capilares: Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.17) no instante de tempo $T = 60$ dias, usando $k = 2$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 12$ horas; (b) $M = 2048$, $\Delta t = 6$ horas.*

$$\begin{aligned}
 &\text{Condição inicial:} && S_0 = 1 - S_{wr}, \\
 &\text{Condições de Fronteira:} && \begin{cases} P_{wD}^- = 5.5e + 5 \Rightarrow P^- = 5.5e + 5, S_D^- = S_{nr}, & \text{em } \Omega^-, \\ P_{wD}^+ = 1e + 5 \Rightarrow P^+ = 4.6643e + 5, S_D^+ = 1 - S_{wr}, & \text{em } \Omega^+, \\ P_N = 0, S_N = 0, & \text{em } \Omega^N. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nos resultados numéricos, da mesma forma como no Exemplo 6.1, consideramos passo no tempo Δt e malhas \mathcal{T}_h uniformes, sendo as malhas formadas por elementos triangulares. Neste problema o escoamento em meios porosos homogêneos é horizontal, o que nos permite analisar a convergência do método DG (3.15), (3.17) em domínio bidimensional com reconstrução de fluxos no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec fixando a coordenada y . Apresentamos essa análise de convergência na direção x para a pressão e a saturação nas

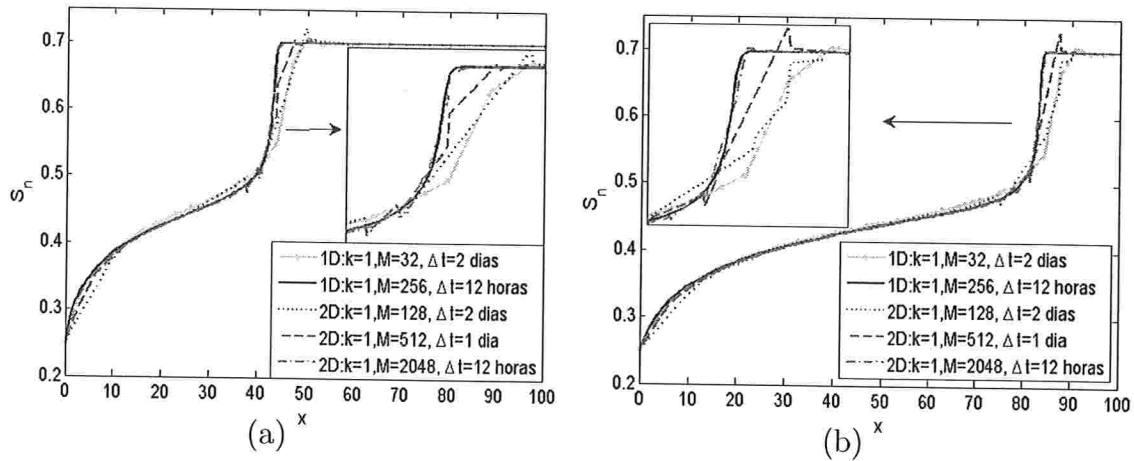


Figura 6.9: *Exemplo 6.1, considerando efeitos capilares: Comparando soluções obtidas com o método DG bidimensional usando ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e fixando a coordenada $y = 40$, com soluções obtidas para o problema em 1D nos instantes de tempo: (a) $T = 20$ dias (b) $T = 50$ dias.*

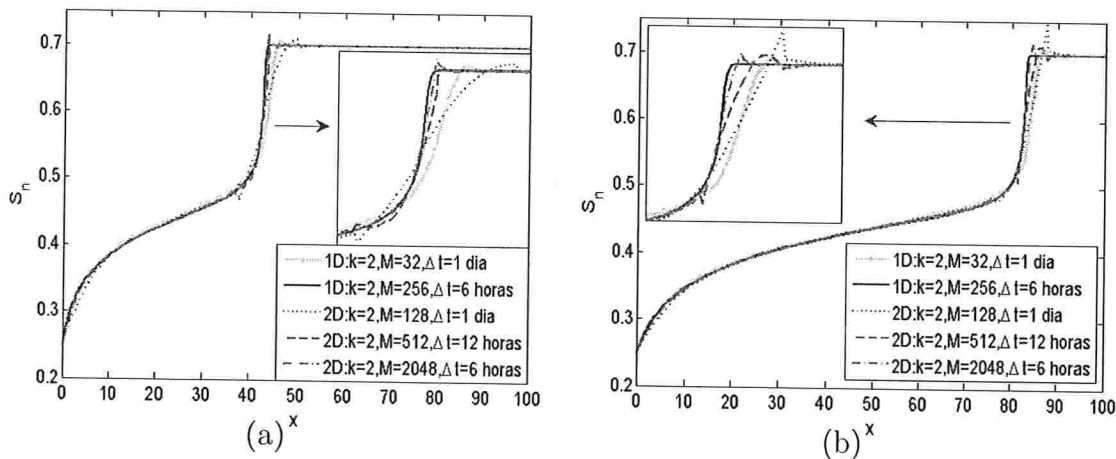


Figura 6.10: *Exemplo 6.1, considerando efeitos capilares: Comparando soluções obtidas com o método DG bidimensional usando ordem de aproximação polinomial $k = 2$ e fixando a coordenada $y = 40$, com soluções obtidas para o problema em 1D nos instantes de tempo: (a) $T = 20$ dias (b) $T = 50$ dias.*

Figs. 6.11, 6.12, 6.13 e 6.14 para ordens de aproximação polinomial 1 e 2, fixando a coordenada $y = 40$. Notamos por meio das Figs. 6.11 e 6.12 que as aproximações para a pressão não variam muito de uma malha para outra ou de uma ordem de aproximação polinomial para outra. Obtemos boas aproximações para P mesmo na malha mais grosseira de 128 elementos. Já para a saturação, a solução obtida na malha de 128 elementos ainda apresenta imprecisões, e a convergência para a solução do problema é obtida a medida que refinamos a malha espacial e aumentamos a ordem de aproximação polinomial (ver Figs. 6.13 e 6.14). Um complicador no problema em questão é o fato do termo difusivo na equação para saturação degenerar para $S = 1 - S_{wr}$ e $S = S_{nr}$, e além disso o termo advectivo também degenera para $S = S_{nr}$. Como consequência a solução numérica desse problema apresenta oscilações na frente do fluido com maior amplitude do que nos resultados numéricos apresentados para a equação de Buckley-Leverett do Exemplo 6.1. Observamos também que neste caso a velocidade total varia com o passar do tempo.

Nas Figs. 6.15 e 6.16 apresentamos gráficos em 3D no instante de tempo $\mathbf{T} = 31$ dias das aproximações obtidas com malha de 512 e 2048 elementos para a saturação. Podemos notar que a aproximação é constante na direção y , conforme esperado, pois o escoamento é horizontal. Notamos também que a magnitude da oscilação presente na frente do fluido na malha de 512 elementos reduz com o uso da malha 2048 para ambas ordens de aproximação polinomial $k = 1$ e $k = 2$. Na Figs. 6.17 e 6.18 apresentamos aproximações para a pressão e velocidade total obtidas na malha de 2048 elementos com ordem de aproximação polinomial $k = 1$. Através deste exemplo ilustramos a eficiência do método DG proposto para resolver problemas degenerados de escoamento, pois o método permite a obtenção de soluções precisas nas regiões onde a solução é suave e também na frente do fluido, onde a solução S apresenta uma descontinuidade e a equação para a saturação degenera. A reconstrução de fluxos no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec recupera o campo de velocidades, perfeitamente horizontal, de acordo com a geometria do problema.

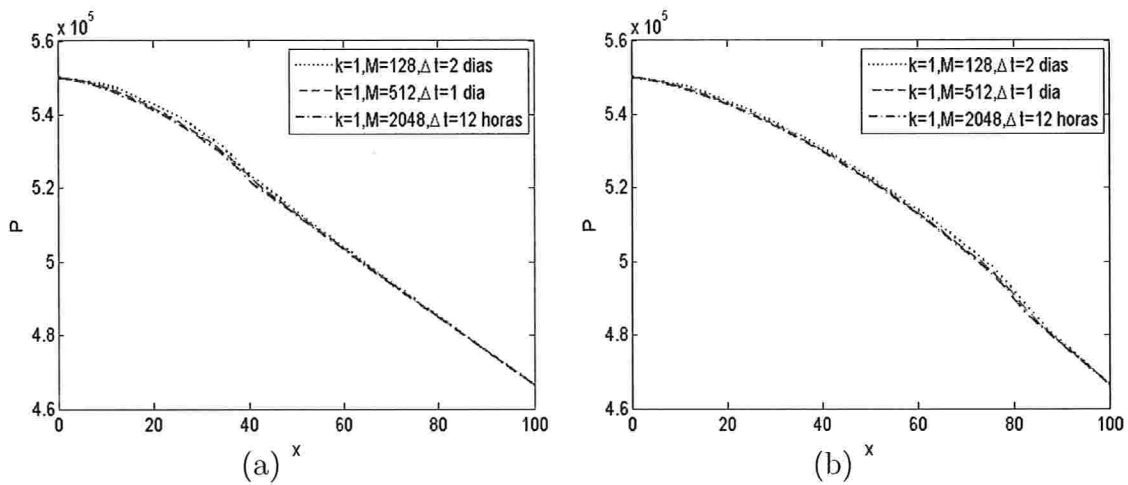


Figura 6.11: *Exemplo 6.2:* Análise de convergência para aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) bidimensional para a pressão global P usando ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e fixando a coordenada $y = 40$ nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 40$ dias (b) $\mathbf{T} = 80$ dias.

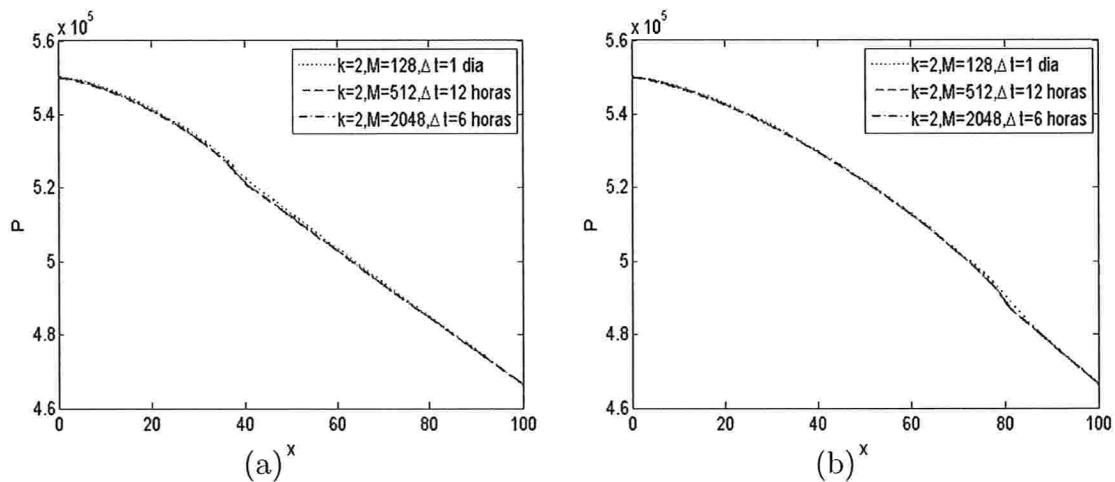


Figura 6.12: *Exemplo 6.2:* Análise de convergência para aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) bidimensional para a pressão global P usando ordem de aproximação polinomial $k = 2$ e fixando a coordenada $y = 40$ nos instantes de tempo: (a) $\mathbf{T} = 40$ dias (b) $\mathbf{T} = 80$ dias.

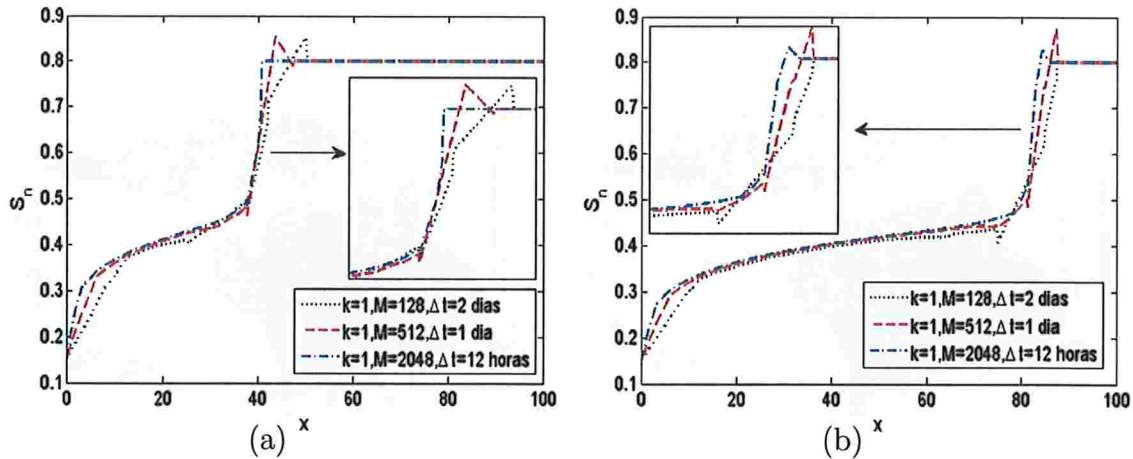


Figura 6.13: *Exemplo 6.2:* Análise de convergência para aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) bidimensional para a saturação S_n usando ordem de aproximação polinomial $k = 1$ e fixando a coordenada $y = 40$ nos instantes de tempo: (a) $T = 40$ dias (b) $T = 80$ dias.

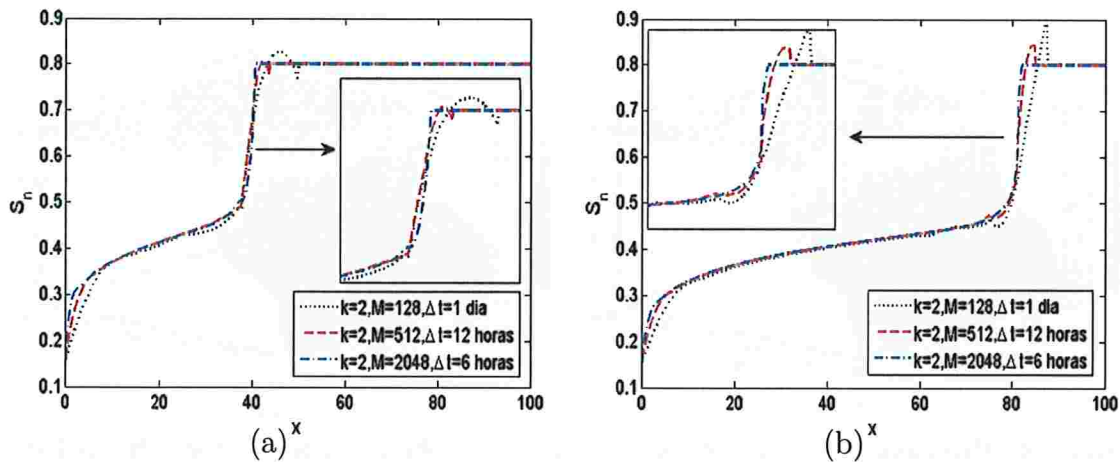


Figura 6.14: *Exemplo 6.2:* Análise de convergência para aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) bidimensional para a saturação S_n usando ordem de aproximação polinomial $k = 2$ e fixando a coordenada $y = 40$ nos instantes de tempo: (a) $T = 40$ dias (b) $T = 80$ dias.

6.3.2 Five-Spot homogêneo

O problema Five-Spot é um problema em que simulamos o escoamento de óleo provocado pela injeção de água em um poço de injeção. Temos um problema original com 4 poços de produção localizados em cada vértice do domínio pelos quais o óleo é ejetado do reservatório e um poço de injeção de água que está localizado no centro do reservatório. Para melhor analisar este exemplo e devido à simetria do problema, resolvemos esse problema em um quarto do domínio cujo problema é conhecido como five-spot (ver Fig. 6.19).

Exemplo 6.3 *Visando comparar os resultados numéricos obtidos com o método DG proposto para o problema five-spot em que são considerados os efeitos capilares com os resultados numéricos apresentados por Rivière (2004), apresentamos resultados numéricos nos quais utilizamos os mesmos dados do artigo Rivière (2004). Na resolução numérica desse problema consideramos o modelo de Brooks-Corey para as mobilidades e pressão capilar dado em (2.7) e (2.6) com os seguintes parâmetros:*

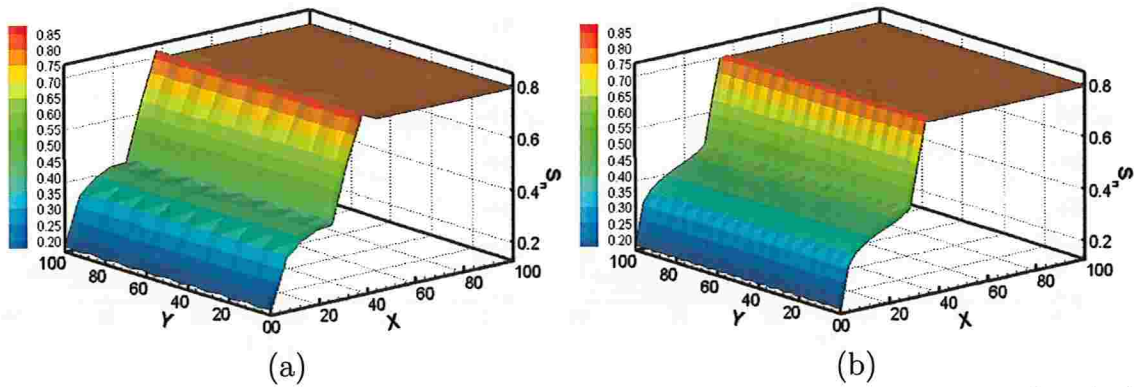


Figura 6.15: *Exemplo 6.2:* Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) para a saturação S_n no instante de tempo $T = 31$ dias usando $k_p = k_s = 1$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 1$ dia (b) $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas.

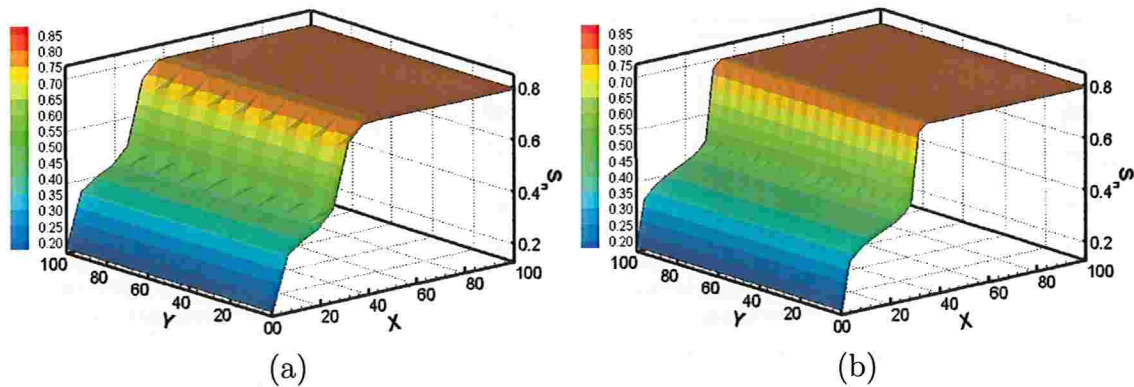


Figura 6.16: *Exemplo 6.2:* Comparando aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) para a saturação S_n no instante de tempo $T = 31$ dias usando $k_p = k_s = 2$ e: (a) $M = 512$, $\Delta t = 12$ horas (b) $M = 2048$, $\Delta t = 6$ horas.

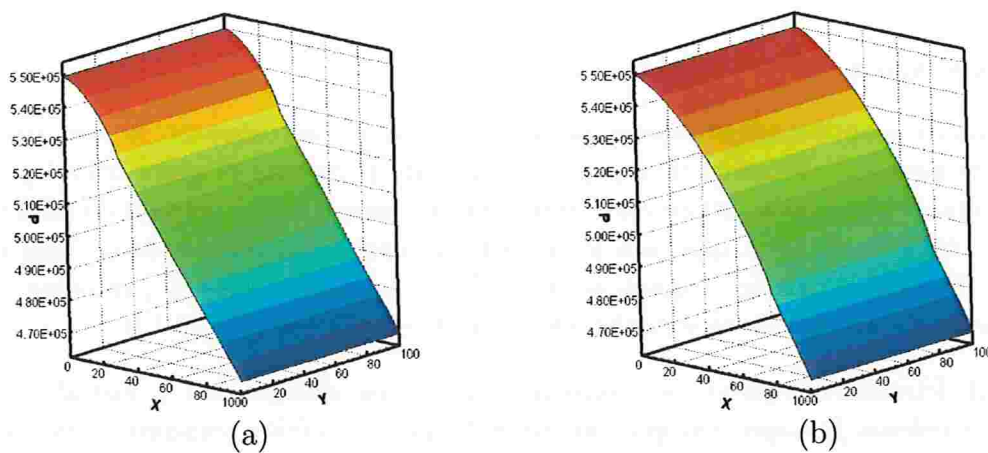


Figura 6.17: *Exemplo 6.2:* Aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) para a pressão global P usando $k_p = k_s = 1$, $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas nos instantes de tempo (a) 31 dias (b) 77 dias.

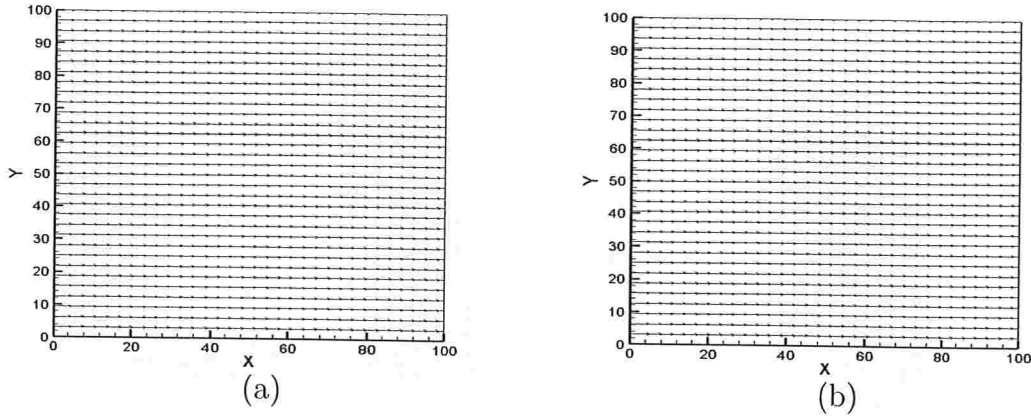


Figura 6.18: Exemplo 6.2: Aproximações obtidas com o método DG (3.15), (3.17) para a velocidade total u usando $k_p = k_s = 1$, $M = 2048$, $\Delta t = 12$ horas nos instantes de tempo (a) 31 dias (b) 77 dias.

$$\begin{aligned}
 \text{Domínio:} & \text{ de acordo com Fig. 6.19b,} \\
 \text{Propriedades dos fluidos:} & \mu_w = 5e - 4 \text{ Kg/ms}, \quad \mu_n = 2e - 3 \text{ Kg/ms}, \\
 \text{Propriedades das rochas:} & \phi = 0.2, \quad K = 1e - 11 \text{ m}^2, \\
 \text{Modelo de Brooks-Corey:} & S_{wr} = 0, \quad S_{nr} = 0, \\
 & \theta = 3, \quad P_e = 5e + 3 \text{ Pa}, \\
 \text{Condição inicial:} & S_0 = 0.8.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\text{Condições de Fronteira:} \begin{cases} P_{wD}^- = 3.45e + 6 \Rightarrow P^- = 3.4504e + 6, \quad S_D^- = 0.6, & \text{em } \Omega_s^-, \\ P_{wD}^+ = 2.41e + 6 \Rightarrow P^+ = 2.4119e + 6, \quad \mathbf{n} \cdot \epsilon(S) \nabla \pi(S) = 0, & \text{em } \Omega_s^+, \\ P_N = 0, \quad S_N = 0, & \text{em } \Omega_s^N. \end{cases}$$

O sistema acoplado pressão-saturação é resolvido através do método DG (3.15), (3.17) com $\vartheta = 1$ (formulação simétrica), $\sigma_F = 10k^2$, e a reconstrução de fluxos é efetuada no espaço $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$. Mais detalhes referente a reconstrução de fluxos no espaço $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ podem ser encontrados no Apêndice B. Para resolução do Exemplo 6.3 utilizamos malhas obtidas por meio do gerador de malhas GMSH. Na Fig. 6.20 apresentamos malhas com 260 e 1052 elementos. Na Seção A.2.1 discutimos parâmetros que podem ser utilizados para avaliar a qualidade da malha gerada pelo GMSH. Apresentamos o valor desses parâmetros para as malhas de 260, 1052 e 4086 elementos na Tab. 6.3. Podemos notar que à medida que refinamos a malha, os valores de qualidade médios \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ aumentam, aproximando-se mais de 1 o que indica que estamos melhorando a qualidade da malha através do refinamento.

Tabela 6.3: Parâmetros de qualidade para as malhas utilizadas para resolução do problema de escoamento five-spot. Veja a definição dos parâmetros \hat{q}_i e \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$, na Seção A.2.1.

K	h	\hat{q}_1	\bar{q}_1	\hat{q}_2	\bar{q}_2	\hat{q}_3	\bar{q}_3
260	51.9676	0.5829	0.9478	0.5400	0.8358	0.6876	0.9558
1052	29.2814	0.5949	0.9547	0.5119	0.8460	0.6958	0.9616
4086	14.1015	0.6331	0.9612	0.4866	0.8503	0.7115	0.9664

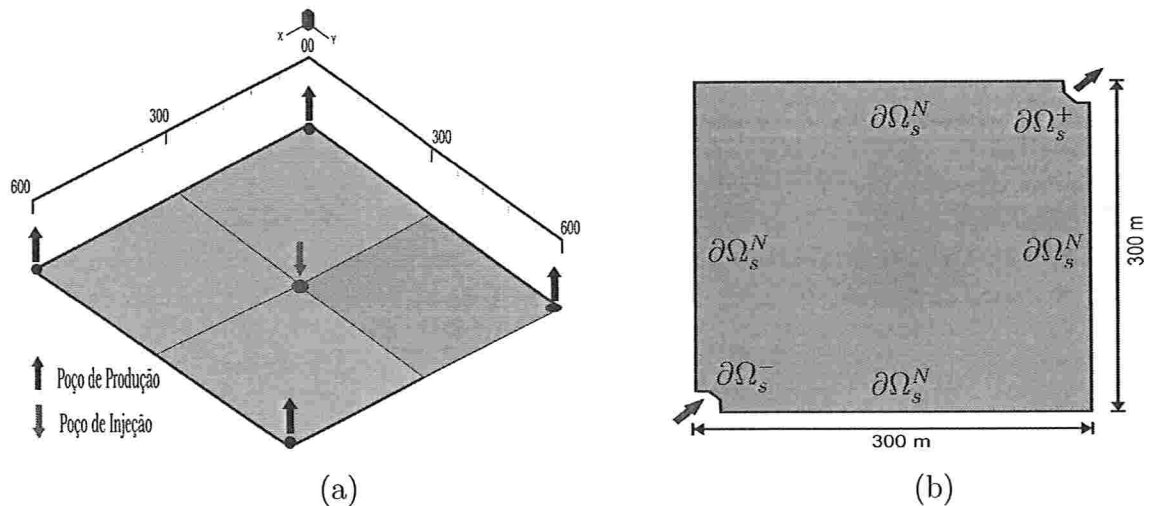


Figura 6.19: (a) Domínio original para o problema five-spot com 4 poços de produção localizados um em cada vértice do domínio e um poço de injeção localizado no centro do reservatório. (b) Um quarto do domínio original para o problema five-spot cujo domínio é considerado no Exemplo 6.3.

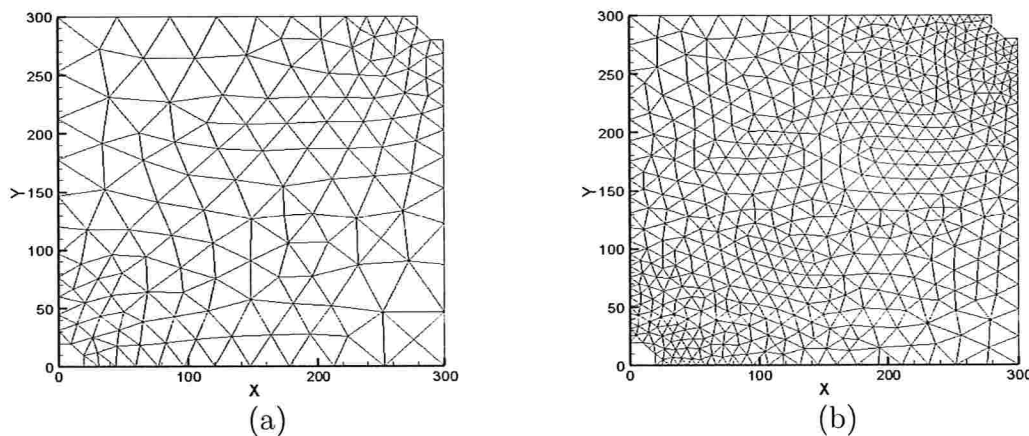


Figura 6.20: Malhas para o Exemplo 6.3: (a) 260 elementos (b) 1052 elementos .

Apresentamos na Fig. 6.21 aproximações para a pressão global P e o campo de velocidade u obtidas na malha de 1052 elementos e ordem de aproximação polinomial $k = 1$ para os instantes de tempo $\mathbf{T} = 50$ dias e $\mathbf{T} = 100$ dias. Apresentamos aproximações para a pressão e velocidade total somente nessa malha e ordem de aproximação polinomial, pois as aproximações obtidas em outras malhas são muito semelhantes às apresentadas na Fig. 6.21. Para a saturação da fase molhante apresentamos linhas de contorno nas Figs. 6.22 e 6.23 obtidas com ordens de aproximação polinomial $k = 1$ e $k = 2$, respectivamente, e malhas com $M = 260$, 1052, 4086 elementos. Comparando os nossos resultados em $\mathbf{T} = 100$ dias, obtidos com malha de 260 elementos (Fig. 6.22b) com resultados do artigo Rivière (2004), obtidos com malha de 264 elementos (Fig. 7 do artigo), percebemos que resultados são bem semelhantes quanto a localização da frente do fluido.

Para avaliar a convergência do método numérico apresentamos na Fig. 6.24 os perfis para a saturação da fase molhante ao longo da diagonal $x = y$ nos instantes de tempo $\mathbf{T} = 48$ dias e $\mathbf{T} = 100$ dias. Podemos notar que S_w possui um choque bem acentuado na frente do fluido, levando ao aparecimento de oscilações na solução numérica obtida com malhas menos refinadas, porém essas oscilações não aumentam de amplitude à medida que

avancamos no tempo e são eliminadas com o refinamento da malha espacial. Na Fig. 6.24 notamos também que a frente de fluido é capturada com precisão para ambas as ordens de aproximação polinomial ($k = 1$ e $k = 2$).

Notamos que a saturação da água cresce monótonamente atrás da frente do fluido devido a injeção de água através do poço de injeção, enquanto o óleo é gradualmente deslocado para o poço de produção onde é ejetado. Enquanto a frente do fluido molhante está próxima ao poço de injeção, as linhas de contorno são praticamente circulares, correspondendo a simetria da pressão no poço de injeção (por ex. em $T = 50$ dias). Quanto mais água é injetada, a frente da fase molhante, ou seja da água, desenvolve um *finger* que se estende até finalmente alcançar o poço de produção. Ilustramos a formação do finger para o Exemplo 6.3 na Fig. 6.25.

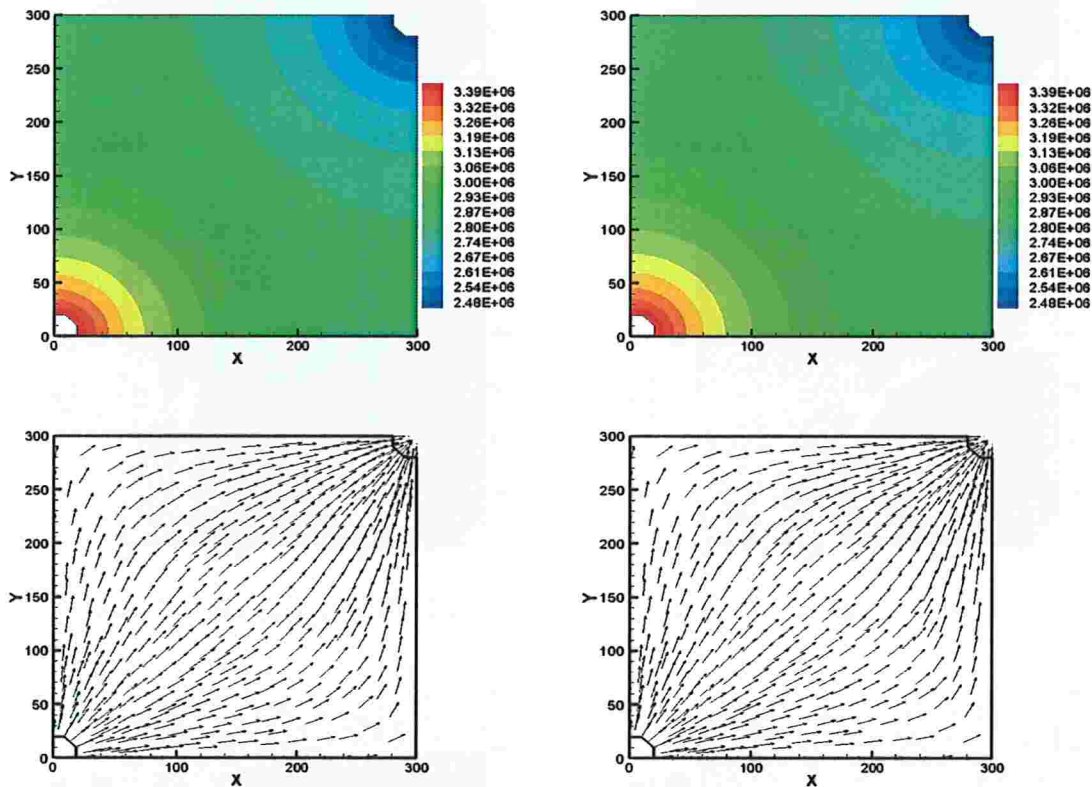


Figura 6.21: *Exemplo 6.3:* Aproximações para a Pressão e a velocidade total obtidas com o método DG (3.15), (3.17) nos instantes de tempo $T = 50$ dias à esquerda e $T = 100$ dias à direita. Em ambos os resultados usamos $k = 1$ e $M = 1052$, $\Delta t = 1$ dia.

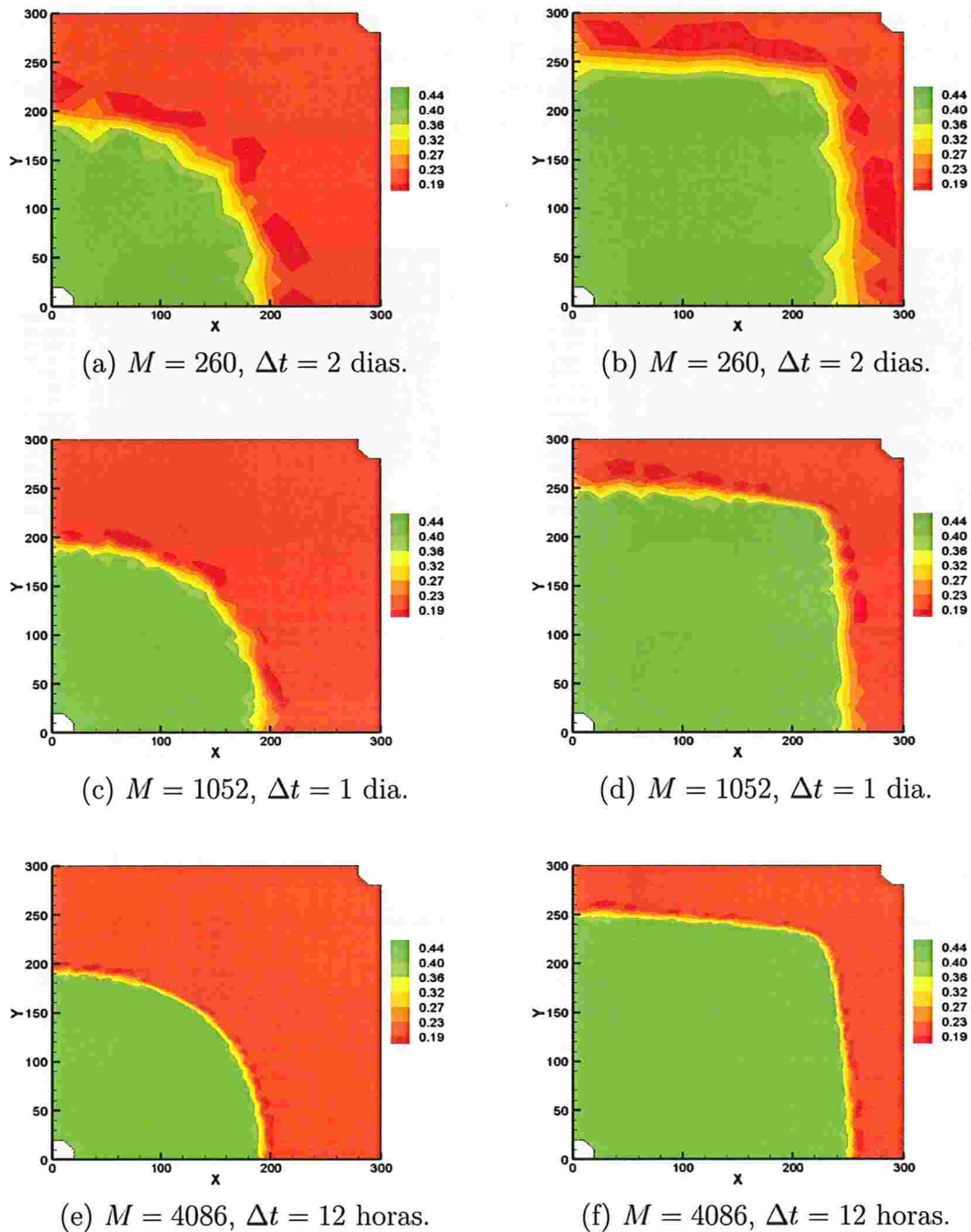


Figura 6.22: Exemplo 6.3: Comparando aproximações para a saturação da fase molhante S_w obtidas com o método DG (3.15), (3.17) em diferentes malhas no instante de tempo $T = 50$ dias na coluna da esquerda e $T = 100$ dias na coluna da direita, usando $k = 1$.

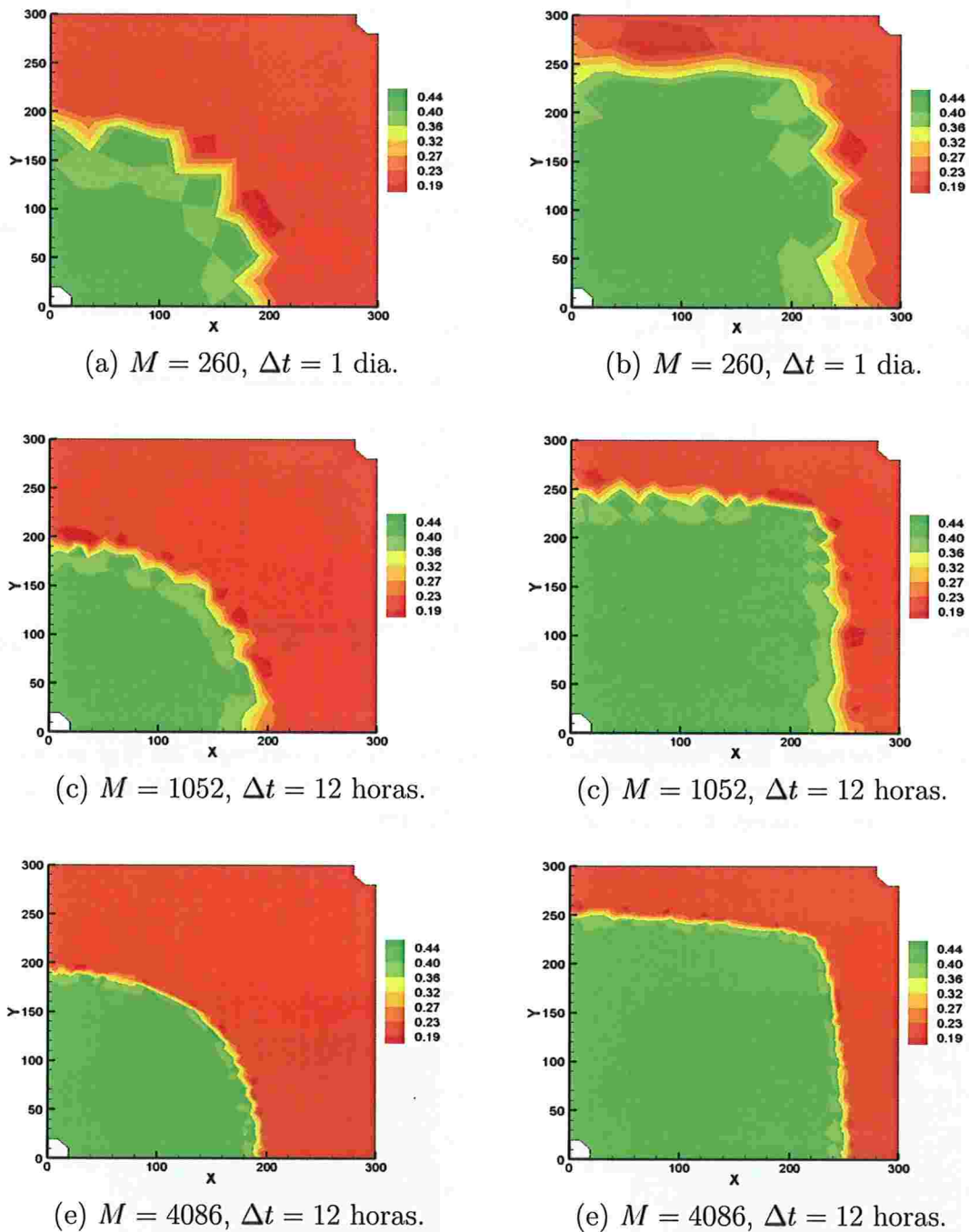


Figura 6.23: Exemplo 6.3: Comparando aproximações para a saturação da fase molhante S_w obtidas com o método DG (3.15),(3.17) em diferentes malhas no instante de tempo $T = 50$ dias na coluna da esquerda e $T = 100$ dias na coluna da direita, usando $k = 2$.

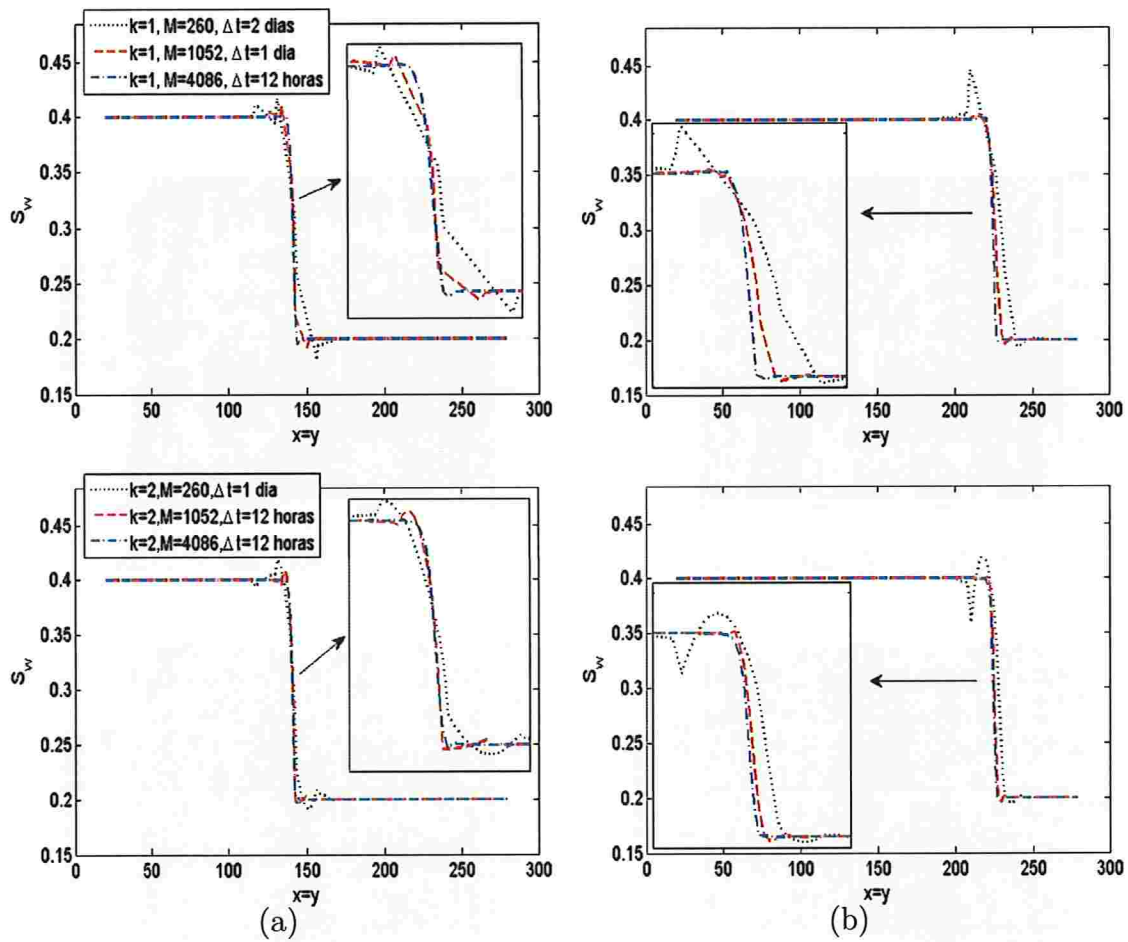


Figura 6.24: *Exemplo 6.3*: Comparando aproximações para a saturação da fase molhante S_w do problema five-spot ao longo da diagonal $x = y$ no instante de tempo $T = 48$ dias à esquerda e $T = 100$ dias à direita usando $k = 1, 2$ e $M = 260, 1052, 4086$.

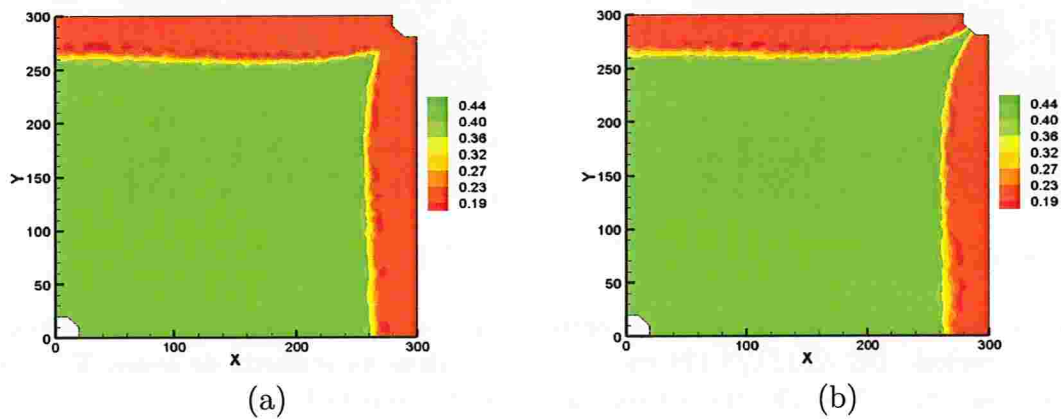


Figura 6.25: *Exemplo 6.3*: Aproximações para a saturação da fase molhante S_w obtidas com o método DG (3.15), (3.17) usando $k = 1$, $M = 4086$, $\Delta t = 12$ horas nos instantes de tempo: (a) $T = 116$ dias, (b) $T = 121$ dias.

Capítulo 7

Escoamento em Meios Porosos Heterogêneos: Domínio Bidimensional

Neste capítulo abordamos a resolução numérica de problemas de escoamento heterogêneo em domínio bidimensional, com permeabilidade e forças capilares descontínuas. Como já discutido anteriormente, as heterogeneidades podem ter grande impacto no comportamento dos perfis para a pressão e saturação, sendo que os mesmos podem apresentar fortes gradientes ou descontinuidades na frente do fluido e nas interfaces formadas entre dois tipos de sedimentos. Inicialmente, na Seção 7.1, apresentamos resultados numéricos para um problema de escoamento horizontal com uma interface. Em seguida, na Seção 7.2 será discutida em detalhes a resolução do problema de escoamento five-spot heterogêneo, em que o domínio é dividido em duas regiões, sendo uma com baixa permeabilidade e outra com permeabilidade mais alta. A esses subdomínios também estão associadas pressões de entrada diferentes, o que pode levar à obtenção de perfis descontínuos para a pressão capilar.

7.1 Escoamento horizontal heterogêneo

De acordo com observações feitas anteriormente, as propriedades do meio poroso tais como porosidade e permeabilidade, têm influência direta no perfil da pressão capilar. Agora vamos abordar o problema de escoamento água-óleo bidimensional com uma interface, em que a permeabilidade K e as forças capilares são consideradas descontínuas na interface formada entre sedimentos com diferentes propriedades físicas. Os dados utilizados para resolução desse problema são descritos a seguir.

Exemplo 7.1 Consideramos o modelo de Brooks-Corey para mobilidades e pressão capilar dados em (2.7) e (2.6) com os seguintes dados:

$$\begin{aligned} \text{Domínio: } & \Omega = (0, 100)^2, \text{ (ver Fig. 7.1),} \\ & \text{com interface } \Gamma = \{(x, y) \in \Omega \text{ tal que } x = 50\}, \\ \text{Propriedades dos fluidos: } & \mu_w = 1e - 3 \text{ kg/ms, } \mu_n = 1e - 2 \text{ kg/ms,} \\ \text{Propriedades das rochas: } & \phi = 0.4, \quad K = [1e - 8 \quad 1e - 9] \text{ m}^2, \\ \text{Modelo de Brooks-Corey: } & S_{wr} = 0, \quad S_{nr} = 0, \\ & \theta = 2, \quad P_c = [540 \quad 1000] \text{ Pa} \Rightarrow S^* = 0.7084, \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} \text{Condições de Fronteira: } & \begin{cases} P_D^- = 2140, & n \cdot u_w = -5e - 6, & \text{em } \Omega_s^-, \\ S_D^+ = 0.3141, & n \cdot u_t = 5e - 6, & \text{em } \Omega_s^+, \\ P_N = 0, & S_N = 0, & \text{em } \Omega_s^N, \end{cases} \\ \text{Condição inicial: } S_0(x, y) = & \begin{cases} 0.8, & \text{para } (x, y) \in \Omega, \text{ tal que } x \leq 50, \\ 0.3141, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde $\Omega_s^- = \{0\} \times (0, 100)$ é a região em que a água (fase molhante) é injetada e $\Omega_s^+ = \{100\} \times (0, 100)$ região pela qual temos saída de óleo (fase não-molhante) do reservatório.

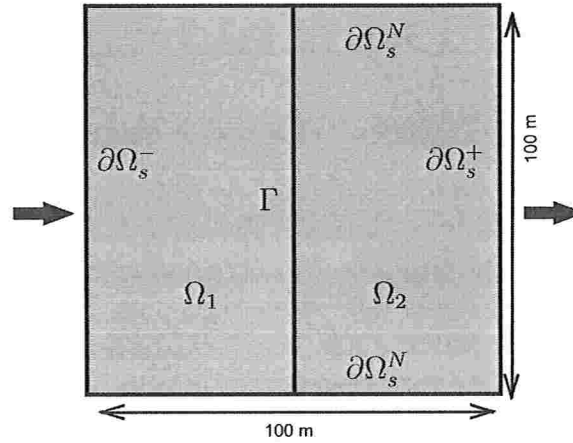


Figura 7.1: Ilustração do domínio para o Exemplo 7.1.

Note que neste exemplo o subdomínio Ω_1 , domínio da esquerda na Fig. 7.1, é a região com permeabilidade mais alta, enquanto o subdomínio Ω_2 , domínio da direita na Fig. 7.1, é uma região de baixa permeabilidade. Desta forma temos escoamento horizontal ocorrendo no sentido da região com permeabilidade mais alta para a região de baixa permeabilidade. Apresentamos abaixo resultados numéricos para o Exemplo 7.1 obtidos em diferentes malhas geradas por intermédio do GMSH, que ilustramos na Fig. 7.2. Estas malhas são mais refinadas próximo à interface Γ , onde temos descontinuidades nas propriedades físicas do problema, visando assim resolver mais eficientemente o fluxo nesta área. Na Tab. 7.1 apresentamos os parâmetros q_i , $i = 1, 2, 3$ definidos na Seção A.2.1, que nos permitem avaliar a qualidade destas malhas. Lembramos que os parâmetros \hat{q}_i e \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ são os valores mínimos e médios de $q_i(T)$, $T \in \mathcal{T}_h$. Podemos observar que os valores de qualidade médios \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ aumentam à medida que refinamos a malha, indicando que ocorre uma melhora na qualidade da malha através do refinamento.

Resolvemos o sistema acoplado pressão-saturação com o método DG (3.15), (3.17) usando $\vartheta = 1$ (formulação simétrica), $\sigma_F = 10k^2$, e a reconstrução de fluxos é efetuada no espaço $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ (Mais detalhes referentes à reconstrução de fluxos podem ser encontrados no Apêndice B). Para obtenção dos resultados numéricos apresentados para este exemplo usamos a técnica de escolha adaptativa do passo no tempo descrita na Seção A.3, com os seguintes parâmetros: $K_p = 0.075$, $K_I = 0.175$, $K_D = 0.01$, $r_{min} = 0.5$, $r_{max} = 2$ e $Tol = 0.06$ na malha de 1000 elementos e $Tol = 0.08$ na malha de 3956 elementos. Nas Figs. 7.3 e 7.5 apresentamos aproximações para saturação obtidas com ordens de aproximação polinomial 1 e 2, respectivamente, nas malhas de 1000 e 3956 elementos. Podemos notar que o método numérico consegue impor as condições de interface com precisão, permitindo que o óleo cruze a interface Γ somente se $S > S^*$ à esquerda da interface. Devido a isso podemos notar a formação daquela elevação da saturação da fase não-molhante à esquerda da interface,

garantindo assim que o óleo mantenha pressão suficiente para conseguir cruzar a interface e fluir através da região de baixa permeabilidade. É importante comentar que foi fundamental ser um pouco restritivo no parâmetro Tol utilizado para escolha adaptativa do passo no tempo para o método captar com precisão as condições de interface. Quanto menor o parâmetro Tol , menor é o passo no tempo utilizado pela técnica adaptativa de escolha do passo no tempo. Na Fig. 7.4 apresentamos as linhas de contorno para S , e podemos notar que a aproximação para a solução mantém comportamento horizontal à medida que avançamos no tempo. Aproximações para a pressão e velocidade total são apresentadas na Fig. 7.6.

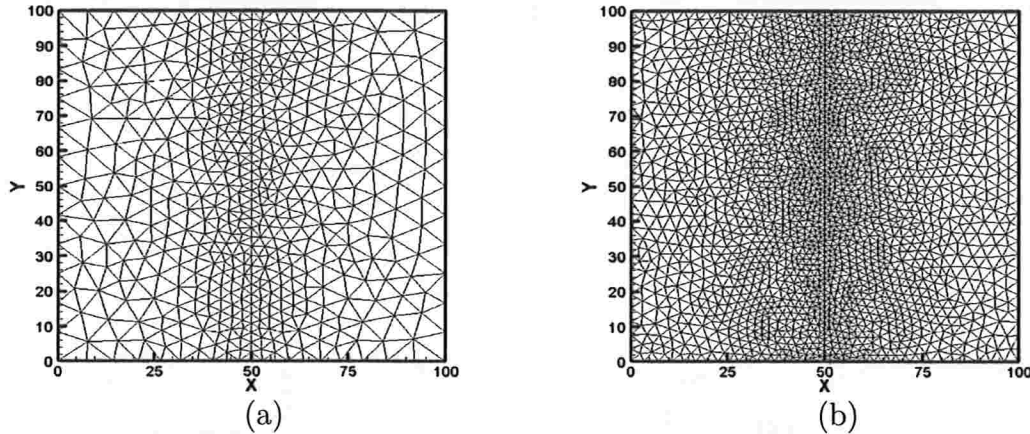


Figura 7.2: Malhas para o Exemplo 7.1: (a) 1000 elementos (b) 3956 elementos .

Tabela 7.1: Parâmetros \hat{q}_i e \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ que fornecem a qualidade das malhas utilizadas para resolução do Exemplo 7.1 de escoamento horizontal em meios heterogêneos com uma interface. A definição destes parâmetros pode ser encontrada na Seção A.2.1.

M	h	\hat{q}_1	\bar{q}_1	\hat{q}_2	\bar{q}_2	\hat{q}_3	\bar{q}_3
1000	11.1672	0.6600	0.9449	0.5224	0.8247	0.7272	0.9528
4086	5.1797	0.6152	0.9566	0.4621	0.8427	0.7073	0.9625

7.2 Five-spot heterogêneo

Agora vamos abordar o problema de escoamento five-spot heterogêneo em que temos duas regiões, uma com permeabilidade baixa e outra com permeabilidade mais alta (ver Fig. 7.7). Além da descontinuidade na permeabilidade sobre a interface Γ_{12} , também temos forças capilares descontínuas agindo no escoamento. Através deste exemplo pretendemos estudar os efeitos das forças capilares e da permeabilidade sobre o escoamento e analisar o comportamento da pressão e da saturação quando o fluido alcançar e cruzar a interface. Temos também como objetivo avaliar o comportamento do método DG (3.15),(3.17) na resolução deste tipo de problema, a precisão numérica e acompanhar a imposição da condição de interface em domínio bidimensional. Para isto consideramos o problema five-spot heterogêneo com os dados descritos a seguir.

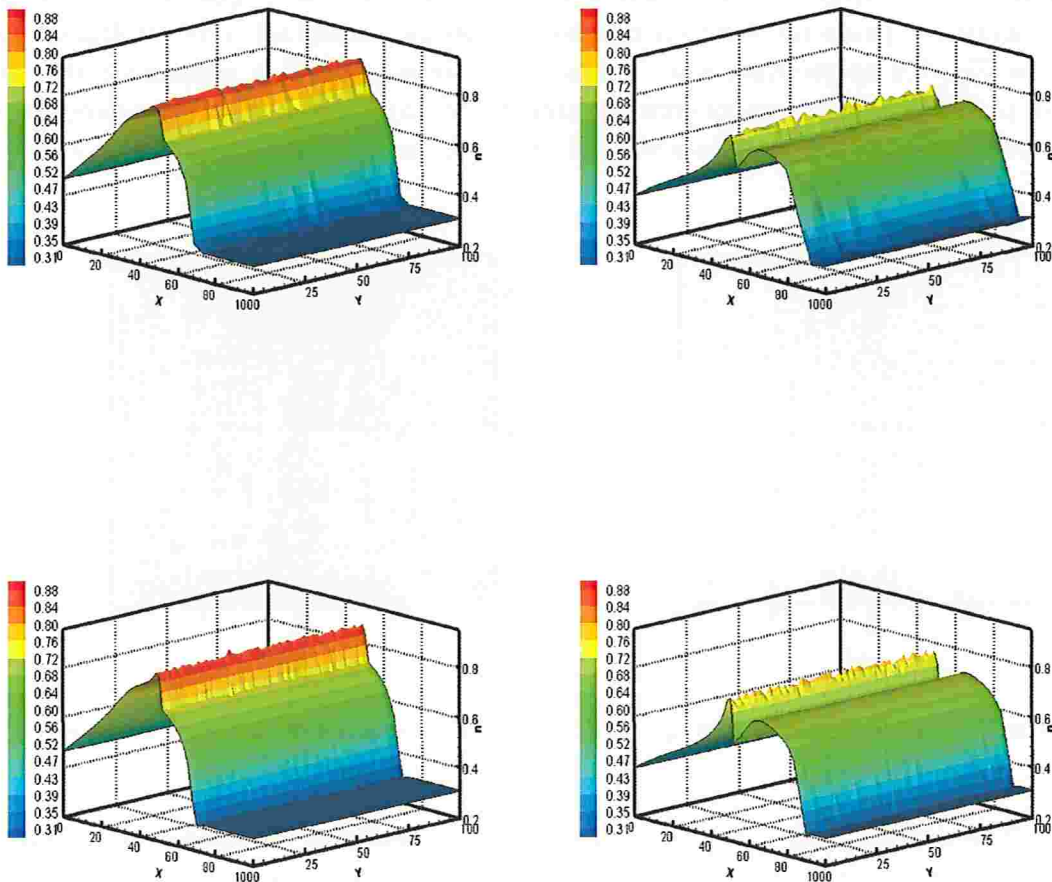


Figura 7.3: Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (3.15),(3.17) no instante de tempo $\mathbf{T} = 6.10$ dias na coluna da esquerda e $\mathbf{T} = 14.2$ dias na coluna da direita, sendo que: Na primeira linha usamos $k = 1$, $M = 1000$; Na segunda linha: $k = 1$, $M = 3956$.

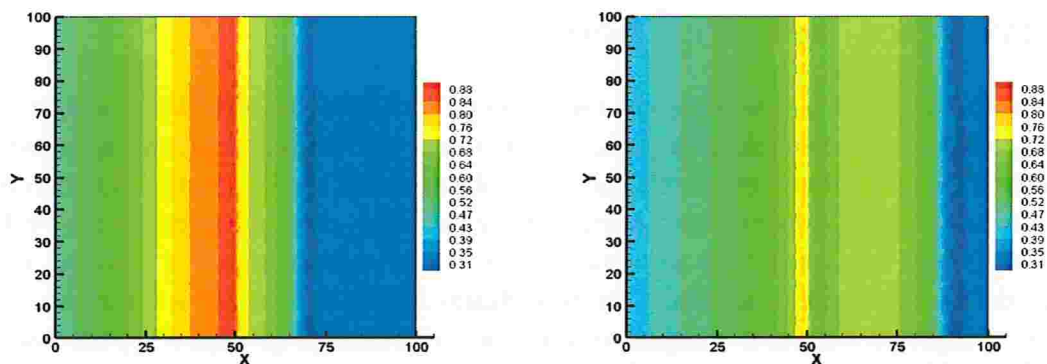


Figura 7.4: Linhas de contorno para a saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (3.15),(3.17) usando $k = 1$, $M = 3956$, no instante de tempo $\mathbf{T} = 6.10$ dias na coluna da esquerda e $\mathbf{T} = 14.2$ dias na coluna da direita.

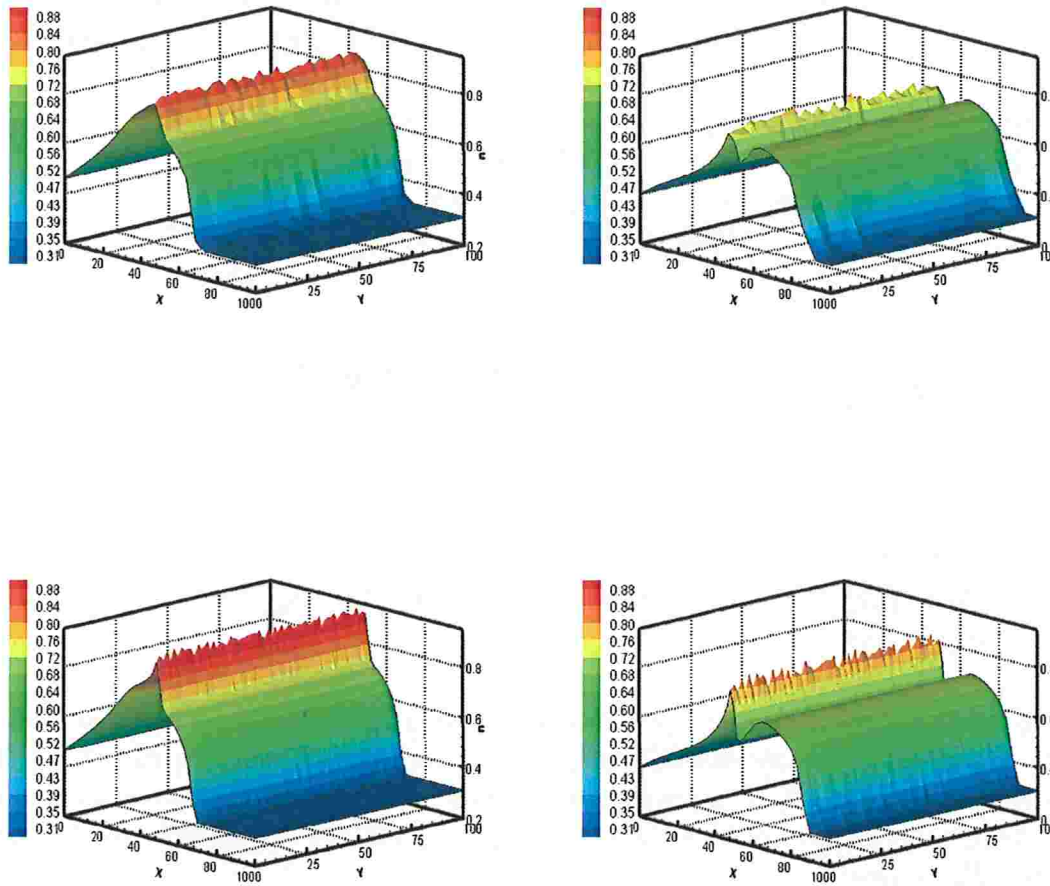


Figura 7.5: Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (3.15),(3.17) no instante de tempo $T = 6.10$ dias na coluna da esquerda e $T = 14.2$ dias na coluna da direita, sendo que: Na primeira linha usamos $k = 2$, $M = 1000$; Na segunda linha: $k = 2$, $M = 3956$.

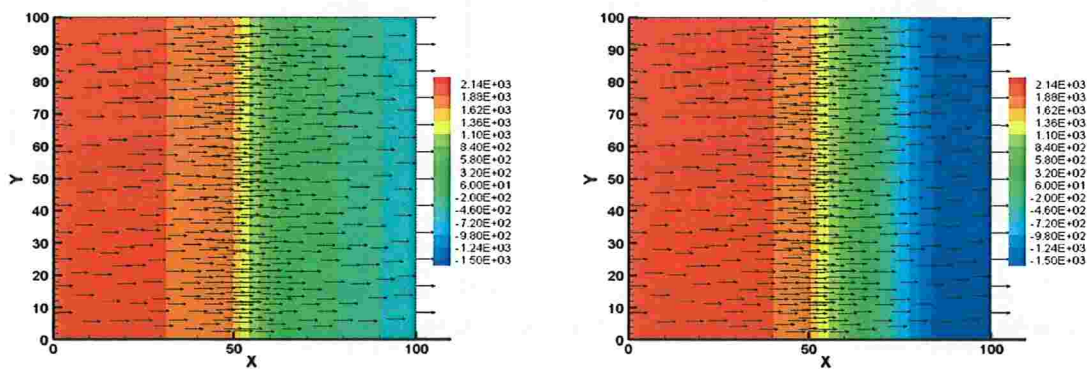


Figura 7.6: Aproximações para a Pressão e velocidade total obtidas com o método DG (3.15),(3.17) nos instantes de tempo $T = 6.10$ dias à esquerda e $T = 14.2$ dias à direita. Em ambos os resultados usamos $k = 1$ e $M = 1000$.

Exemplo 7.2 Consideramos o modelo de Brooks-Corey para as mobilidades e pressão capilar dado em (2.7) e (2.6) e os seguintes dados:

$$\begin{aligned}
 \text{Domínio: } & \Omega = (0, 300)^2 \text{ (Fig. 7.7a), dividido em subdomínios:} \\
 & \Omega_2 = (93.75, 206.25) \times (93.75, 206.25), \Omega_1 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_2, \\
 & \text{e com interface } \Gamma_{12} = \partial\Omega_2, \\
 \text{Propriedades dos fluidos: } & \mu_w = 1e - 3 \text{ Kg/ms}, \quad \mu_n = 1e - 2 \text{ Kg/ms}, \\
 \text{Propriedades das rochas: } & \phi = [0.2, 0.2], \quad K = [1e - 12 \quad 1e - 10] \text{ m}^2, \\
 \text{Modelo de Brooks-Corey com: } & S_{wr} = 0, \quad S_{nr} = 0, \quad \theta = 2, \\
 & P_e = [1.5811e + 4 \quad 1e + 4,] \text{ Pa} \Rightarrow S^* = 0.6,
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Condição inicial:

$$S_0(x, y) = \begin{cases} 0.8, & \text{para } (x, y) \in \Omega_3 \text{ (ver Fig. 7.7b),} \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \tag{7.4}$$

e condições de fronteira:

$$\text{Sobre } \partial\Omega_s^- : \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_w = -7e - 6, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_n = 0, \tag{7.5}$$

$$\text{Sobre } \partial\Omega_s^+ : \quad P_w = 1e + 5 \text{ Pa} \Rightarrow P = 115811 \text{ Pa}, \quad S_n = 0, \tag{7.6}$$

$$\text{Sobre } \partial\Omega_s^N : \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_n = 0, \tag{7.7}$$

onde $\partial\Omega_s^-$ é a região em que a água é injetada e $\partial\Omega_s^+$ região pela qual temos saída de fluxo do reservatório. As regiões de fronteira $\partial\Omega_s^N$, $\partial\Omega_s^-$ e $\partial\Omega_s^+$ são identificadas na Fig. 7.7a. Note que associamos permeabilidade K e pressão de entrada P_e diferentes para os subdomínios Ω_1 e Ω_2 , sendo que em Ω_1 temos $K_1 = 1e - 12$ e $P_{e1} = 1.5811e + 4$ enquanto em Ω_2 temos $K_2 = 1e - 10$ e $P_{e2} = 1e + 4$.

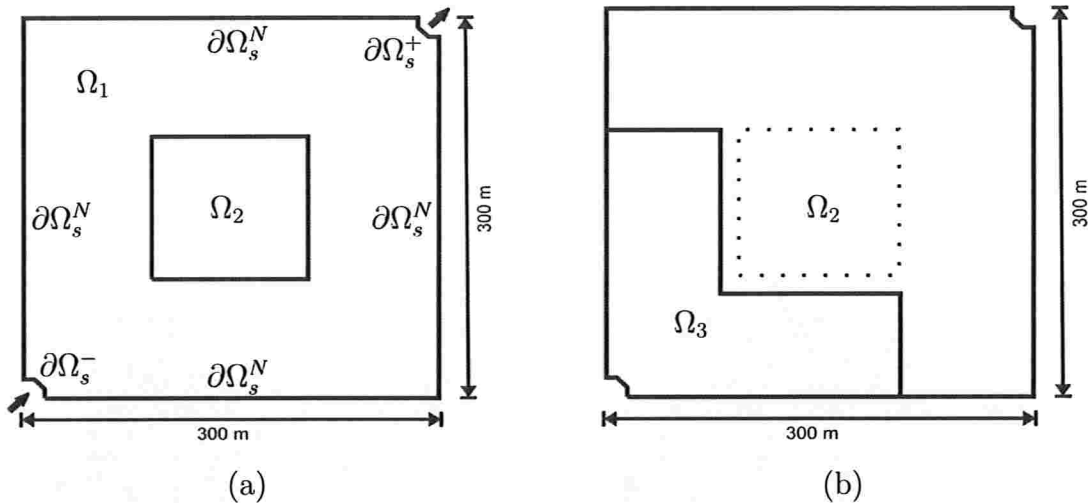


Figura 7.7: (a) Domínio Ω dividido nos subdomínios Ω_1 e Ω_2 para o Exemplo 7.2. (b) Domínio Ω com identificação do subdomínio Ω_3 necessário para definição da condição inicial (7.4).

É importante observar que o problema five-spot heterogêneo que estamos considerando no Exemplo 7.2 é diferente do problema five-spot heterogêneo considerado nos artigos (Afif e Amaziane, 2002; Epshteyn e Rivière, 2007; Klieber e Rivière, 2006; Rivière e Bastian, 2004), pois nestes artigos é considerada heterogeneidade com descontinuidade somente na permeabilidade K . Já no Exemplo 7.2 consideramos a permeabilidade K e pressão de entrada

P_e no modelo de Brooks-Corey ambas descontínuas na interface Γ_{12} . Como consequência, temos pressão capilar π que também pode ser descontínua na interface, tornando necessária a imposição da condição de interface não-linear discutida na Seção 2.3.2. A imposição da condição de interface traz uma dificuldade a mais para a resolução do problema, pois o método necessita lidar adequadamente com as descontinuidades da solução na interface. Através da Fig. 7.8 pode-se observar que as descontinuidades na permeabilidade tem grande impacto sobre o coeficiente difusivo $\epsilon \nabla \pi$ da equação para a saturação (veja diferença nas ordens de magnitude). A Fig. 7.9 ilustra o modelo de pressão capilar associado a Ω_1 e Ω_2 . A saturação de entrada para esse exemplo é $S^* = 0.6$, e representa a quantidade de óleo (fase não-molhante) que deve estar presente no subdomínio de permeabilidade alta (Ω_2) para o óleo conseguir cruzar a interface e escoar através do subdomínio de baixa permeabilidade (Ω_1).

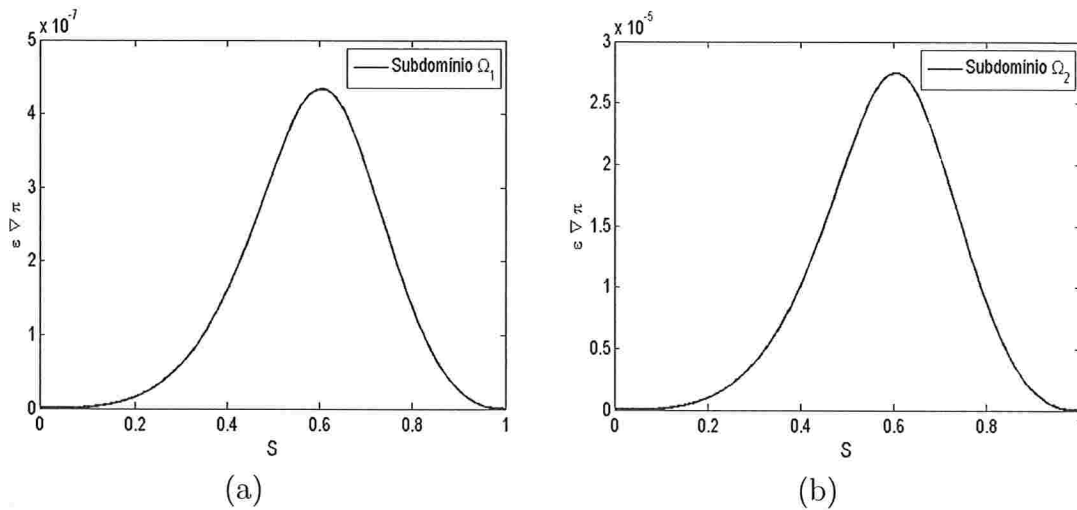


Figura 7.8: *Exemplo 7.2:* (a) Coeficiente difusivo $\epsilon \nabla \pi$ da equação para a saturação no subdomínio Ω_1 . (b) Coeficiente difusivo $\epsilon \nabla \pi$ da equação para a saturação no subdomínio Ω_2 .

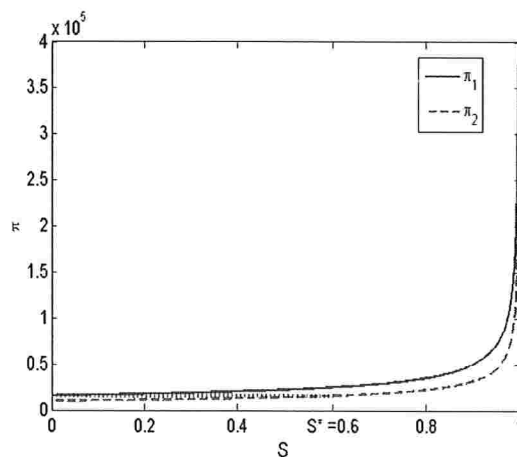


Figura 7.9: *Exemplo 7.2:* Pressão capilar π associada aos subdomínios Ω_1 (permeabilidade baixa) e Ω_2 (permeabilidade alta).

Na Fig. 7.10a é apresentada malha de $M = 1296$ elementos utilizada na resolução numérica deste problema. Os parâmetros q_i , $i = 1, 2, 3$ que fornecem indicativos de qualidade da malha são ilustrados na Tab. 7.2. A definição desses parâmetros foi introduzida na Seção A.2.1.

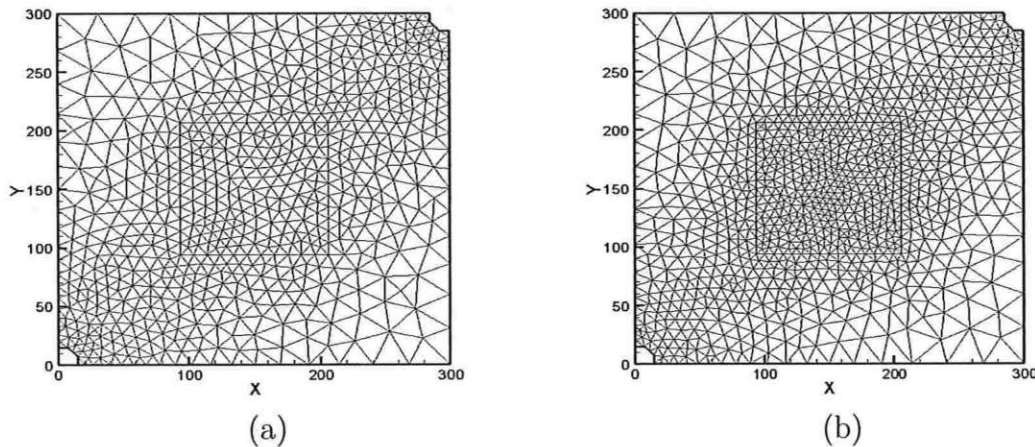


Figura 7.10: (a) Malha para o Exemplo 7.2 com 1296 elementos. (b) Malha para o Exemplo 7.3 com 1840 elementos.

Tabela 7.2: Parâmetros \hat{q}_i e \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ que fornecem a qualidade das malhas utilizadas para resolução dos Exemplos 7.2 e 7.3 de escoamento em meios heterogêneos com interface. A definição destes parâmetros pode ser encontrada na Seção A.2.1.

	M	h	\hat{q}_1	\bar{q}_1	\hat{q}_2	\bar{q}_2	\hat{q}_3	\bar{q}_3
Exemplo 7.2	1296	32.3147	0.6595	0.9486	0.5251	0.8304	0.7396	0.9559
Exemplo 7.3	1840	35.8470	0.6180	0.9481	0.4904	0.8307	0.6990	0.9554

Apresentamos aproximações obtidas com o método (3.15), (3.17) para a pressão e saturação referente ao Exemplo 7.2 nas Figs. 7.11a,b, 7.12a,b, 7.13a,b e 7.14a,b. Podemos notar algumas oscilações para as aproximações obtidas para a saturação, sendo mais elevadas nos instantes de tempo $\mathbf{T} = 70$ e $\mathbf{T} = 350$ dias. Essas oscilações são menores ou eliminadas nos instantes de tempo $\mathbf{T} = 725$ e $\mathbf{T} = 1800$ dias, quando a solução S já é mais suave. Observamos que essas oscilações não afetam as aproximações obtidas para a pressão. Note que a estabilização que estamos aplicando no método DG (3.15), (3.17) por meio dos saltos da solução é uma estabilização somente na direção da normal. Para os exemplos numéricos em meios heterogêneos com comportamento predominantemente unidimensional considerados anteriormente, somente esta estabilização bastava para evitar oscilações para saturação e manter a estabilidade do método. Mas para este exemplo bidimensional de geometria mais complexa com heterogeneidades na permeabilidade e nas forças capilares é necessário introduzir uma outra estabilização na direção transversal à normal para eliminar essas instabilidades. Na literatura podem ser encontrados diversos trabalhos que propõem a adição de dissipação numérica linear (Johnson *et al.*, 1987; Shih e Elman, 1999) ou não-linear (Codina, 1993; Hughes *et al.*, 1986) em relação à solução discreta. Para problemas multidimensionais podemos introduzir: (i) difusão isotrópica; (ii) somente difusão transversal (*crosswind diffusion*); (iii) ambas difusão *streamline* e transversal, mas com parâmetros diferentes. Implementamos duas formas de estabilização que são descritas a seguir.

7.2.1 Estabilização transversal de primeira ordem e de alta ordem

Passaremos a descrever duas formas de introduzir termos de estabilização para o método de Galerkin, uma difusiva de primeira ordem e outra de alta ordem. Nesta descrição seguire-

mos as idéias apresentadas no artigo (Burman e Ern, 2002), em que os autores introduziram termos de estabilização para a equação de advecção-difusão-reação.

Considere a equação para a saturação:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (uf(S)) - \nabla(\epsilon(S)\nabla\pi(S)) = q_n, \quad (7.8)$$

reescrevendo o termo advectivo

$$\nabla \cdot (uf(S)) = (\nabla \cdot u)f(S) + uf'(S)\nabla S.$$

Como estamos considerando a equação para pressão global (3.12) sem termos de fonte temos $\nabla \cdot u = 0$, logo

$$\nabla \cdot (uf(S)) = uf'(S)\nabla S = \beta(S)\nabla S,$$

em que denotamos por $\beta(S) = uf'(S)$ a velocidade não-linear.

Estabilização difusiva isotrópica de primeira ordem

Para introduzir a difusão isotrópica de primeira ordem, adicionamos ao método DG (3.17) o seguinte termo

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \eta_T \nabla S^{n+1} \cdot \nabla v, \quad (7.9)$$

em que $\eta_T = c_T \frac{|\beta_T| h_T}{2}$, $\beta_T = \beta(S^n(x_{cent}))$ sendo x_{cent} o centro do elemento T , $|\cdot|$ a norma Euclidiana e $0 \leq c_T \leq 1$. Para obtenção dos resultados numéricos apresentados abaixo consideramos $c_T = 0.5$.

Estabilização transversal difusiva de alta ordem

Na introdução da estabilização difusiva de alta ordem incluímos no método DG (3.17) o termo a seguir

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \eta_T |\beta_T|^2 S_{\beta_T^\perp}^{n+1} v_{\beta_T^\perp}, \quad (7.10)$$

em que $\eta_T = c_T \frac{h_T}{2|\beta_T|}$, $0 \leq c_T \leq 1$, $\beta_T = \beta(S^n(x_{cent}))$ e $v_{\beta_T^\perp} = P_{\beta_T^\perp} \cdot \nabla v$ é a derivada transversal (*crosswind derivative*), sendo $P_{\beta_T^\perp}$ o projetor ortogonal sobre o hiperplano β_T^\perp . Para qualquer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ temos

$$P_{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b},$$

Logo,

$$S_{\beta_T^\perp}^{n+1} v_{\beta_T^\perp} = \left(\frac{\beta_T^\perp \cdot \nabla S^{n+1}}{|\beta_T^\perp|^2} \beta_T^\perp \right) \left(\frac{\beta_T^\perp \cdot \nabla v}{|\beta_T^\perp|^2} \beta_T^\perp \right) = \frac{1}{|\beta_T^\perp|^2} (\beta_T^\perp \cdot \nabla S^{n+1}) (\beta_T^\perp \cdot \nabla v).$$

Então o termo de estabilização (7.10) pode ser reescrito como

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \eta_T (\beta_T^\perp \cdot \nabla S^{n+1}) (\beta_T^\perp \cdot \nabla v). \quad (7.11)$$

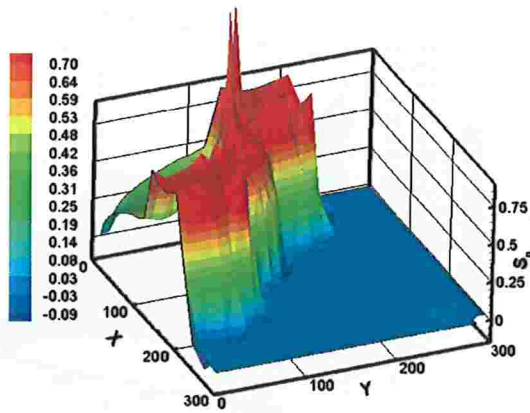
Resultados numéricos

São apresentados resultados numéricos obtidos com o método (3.15), (3.17) e estabilizações de primeira ordem e de alta ordem para a pressão e saturação referentes ao Exemplo 7.2 nas Figs. 7.11c,d,e,f, 7.12c,d,e,f, 7.13c,d,e,f e 7.14c,d,e,f. Podemos notar que a introdução da estabilização transversal de alta ordem reduz a amplitude das oscilações para S presentes nos resultados sem estabilização, porém não elimina-as completamente. Em $\mathbf{T} = 70$ dias essa redução é mais visível. A estabilização de primeira ordem consegue reduzir as oscilações para S com mais eficiência, fornecendo resultados estáveis e precisos. Para a pressão, as aproximações obtidas sem estabilização e com estabilização de primeira ordem e de alta ordem são semelhantes.

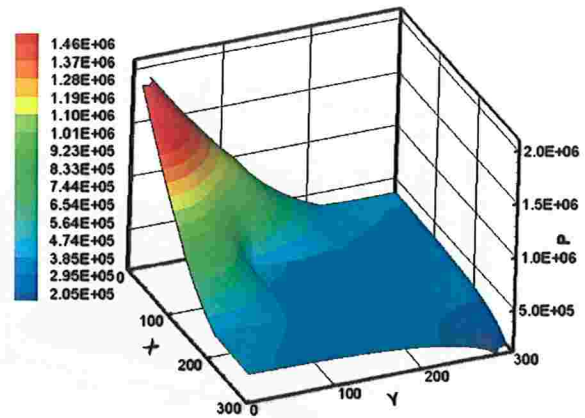
Agora analisamos com mais atenção os fenômenos envolvidos neste problema five-spot heterogêneo e avaliamos as aproximações obtidas para P , u_t e S com o método DG através da estabilização de primeira ordem, apresentadas nas Figs. 7.11c,d, 7.12c,d, 7.13c,d, 7.14c,d, e 7.15. Considerando para este exemplo que água é a fase molhante e o óleo a fase não-molhante, notamos que a água é injetada através de $\partial\Omega_s^-$, e o óleo será ejetado através de $\partial\Omega_s^+$, sendo que ambas fronteiras de entrada e saída de fluxo estão nas regiões de baixa permeabilidade. Inicialmente o óleo afasta-se do poço de injeção uniformemente até ser influenciado pela variação da permeabilidade e da pressão de entrada. Quando alcança Γ_{12} , o óleo não tem dificuldade de cruzar essa interface e entrar na região de alta permeabilidade ($\mathbf{T} = 70$ dias), pois a pressão de entrada em Ω_2 é menor do que em Ω_1 . Veja também o campo de velocidades nesse instante de tempo na Fig. 7.15a, onde notamos que a direção do fluxo está conduzindo o óleo para Ω_2 , região com permeabilidade mais alta. Como consequência o óleo vai saturando o subdomínio Ω_2 e quando atinge a interface na outra extremidade, pára de escoar momentaneamente ($\mathbf{T} = 350$ dias), pois S em Ω_2 é menor que a saturação de entrada $S^* = 0.6$. Para conseguir cruzar essa interface o óleo necessita atingir a pressão de entrada $P_e(1)$. Após atingir esse valor o óleo sai de Ω_2 e escoar através de Ω_1 , primeiramente nas vizinhanças do vértice superior direito de Ω_2 ($\mathbf{T} = 725$ dias) e a medida que avançamos no tempo essa região de saída do óleo de Ω_2 vai aumentando ($\mathbf{T} = 1800$ dias).

Note que o escoamento passou a transcorrer lentamente a partir do momento em que alcançou a interface superior de Ω_2 . Isto pode ser observado pelo deslocamento do fluido, mas principalmente pelo comportamento da pressão. Veja que o gradiente de pressão é muito alto nos instantes iniciais, como por exemplo em $\mathbf{T} = 70$ dias, e a medida que avançamos no tempo esse gradiente vai reduzindo-se ($\mathbf{T} = 350, 725, 1800$ dias). Pode-se observar também a formação do *finger* para o óleo à medida que vai se aproximando do poço de ejeção. Outra característica importante a observar é o campo de velocidades para este problema que tem bruscas variações, possuindo muitas regiões em que num ponto aponta para uma direção e no ponto vizinho já aponta para uma direção bem diferente. Apesar dessas bruscas variações na velocidade total o método DG manteve estabilidade e captou adequadamente a influência dessas velocidades no escoamento.

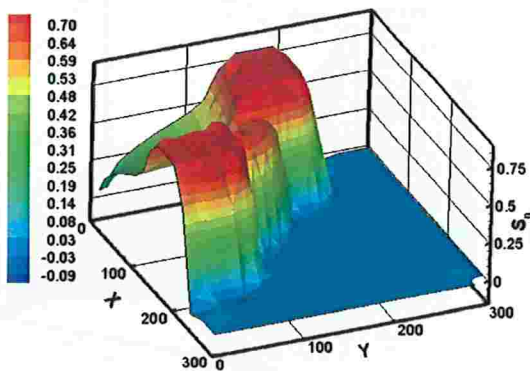
Através destes exemplos bidimensionais de escoamento em meios porosos heterogêneos com permeabilidade e forças capilares descontínuas notamos que o método capta com precisão os fenômenos físicos envolvidos no processo de escoamento heterogêneo, como os fortes gradientes na frente do fluido e a descontinuidade de S_n na interface. Fica assim evidenciada a sua aplicabilidade a problemas bidimensionais, mostrando o potencial do método para a extensão a problemas ainda mais gerais. Porém, antes da utilização do método em problemas de maior escala, é necessário efetuar um estudo mais aprofundado para a técnica de estabilização a ser usada, pois nos resultados apresentados foram consideradas somente duas técnicas de estabilização, transversal de primeira ordem e de alta ordem.



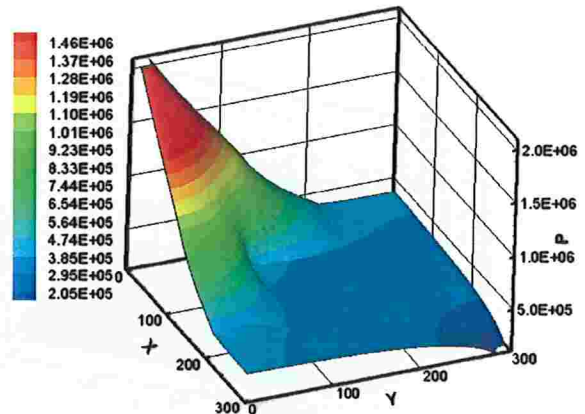
(a) Sol. sem estabilização



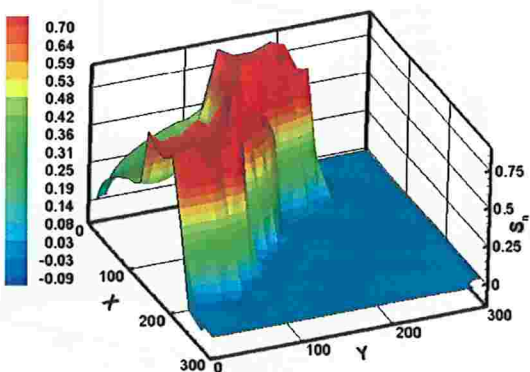
(b) Sol. sem estabilização



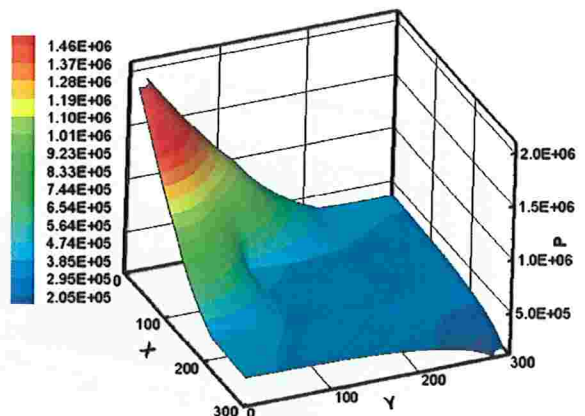
(c) Sol. com estabilização 1ª ordem



(d) Sol. com estabilização 1ª ordem



(e) Sol. com estabilização alta ordem



(f) Sol. com estabilização alta ordem

Figura 7.11: *Exemplo 7.2: Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com e sem estabilização no instante de tempo $T = 70$ dias usando $k = 1$, $M = 1296$.*

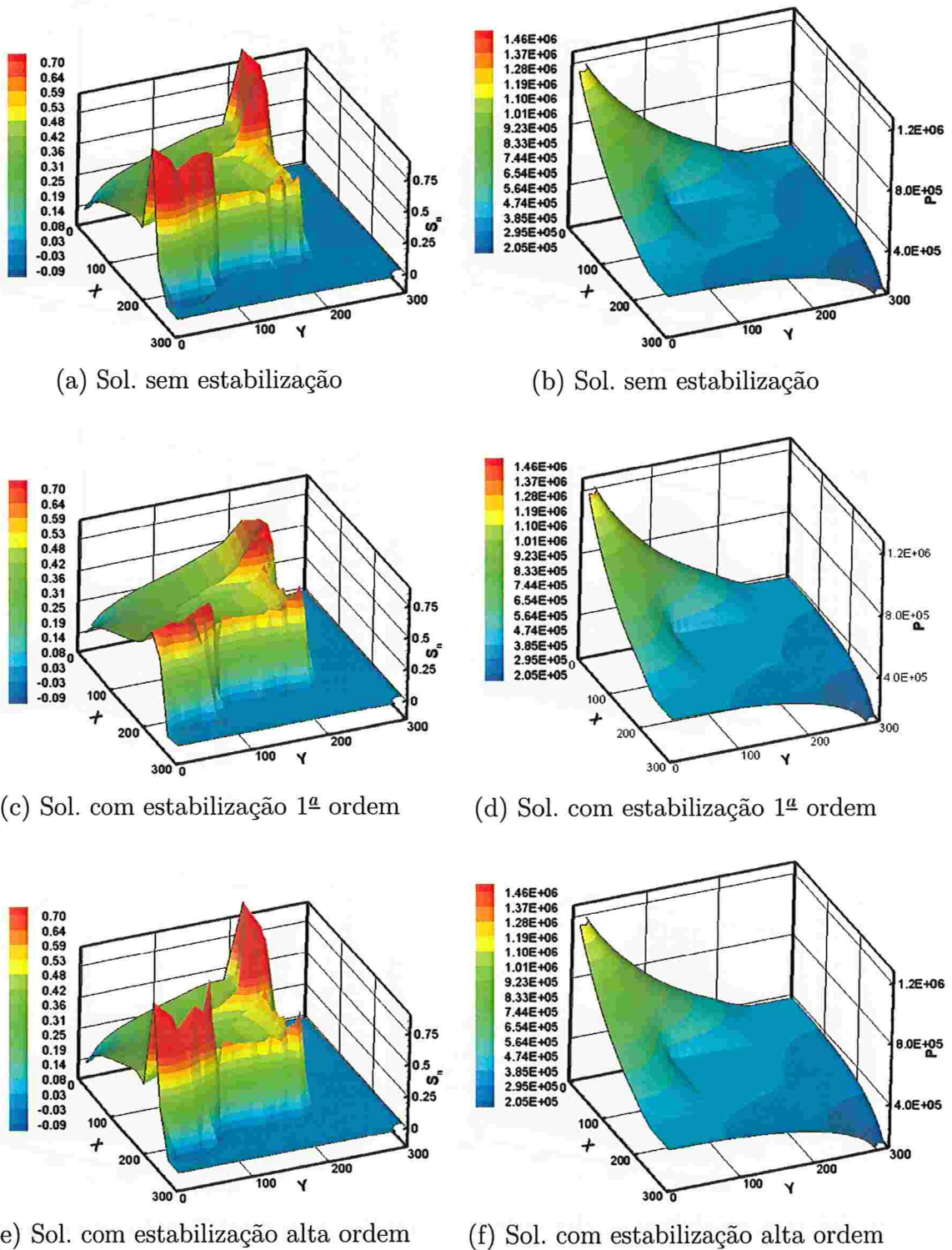
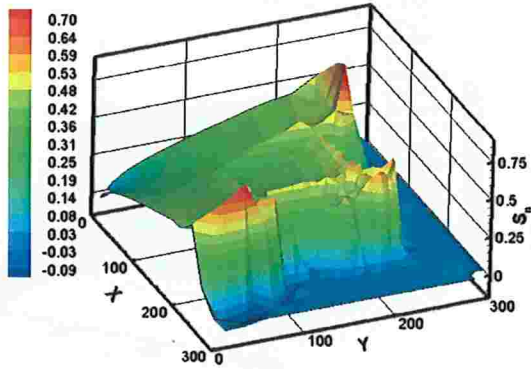
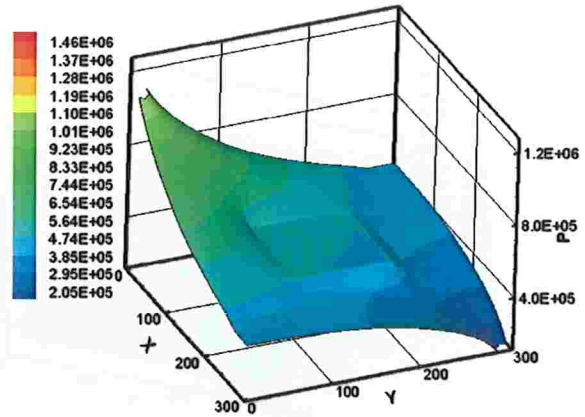


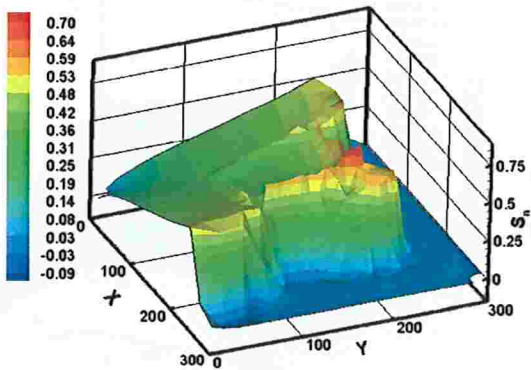
Figura 7.12: *Exemplo 7.2:* Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com e sem estabilização no instante de tempo $T = 350$ dias usando $k = 1$, $M = 1296$.



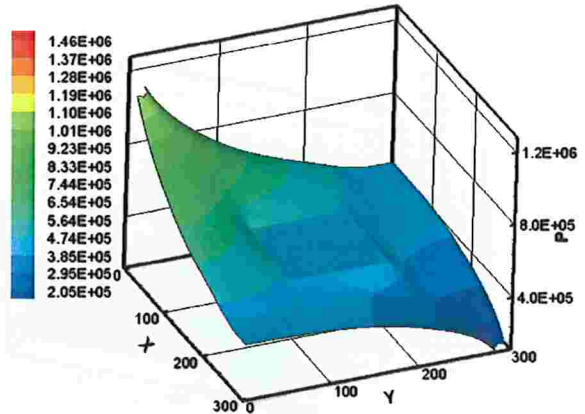
(a) Sol. sem estabilização



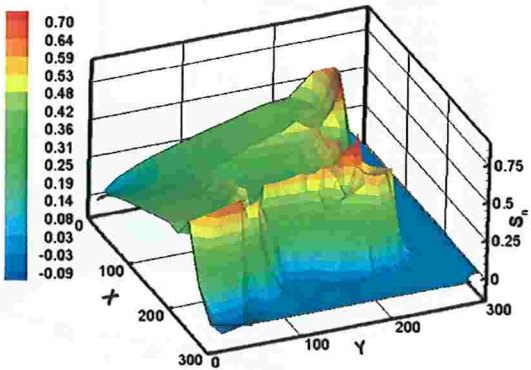
(b) Sol. sem estabilização



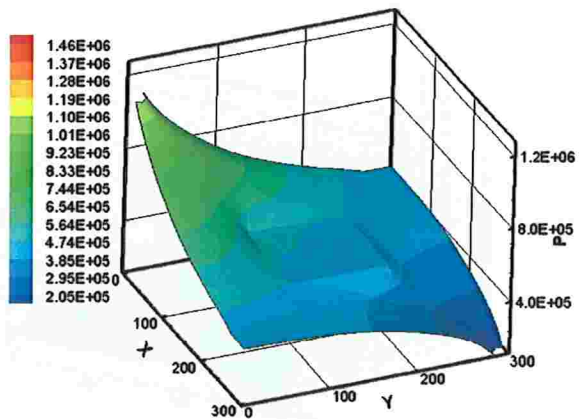
(c) Sol. com estabilização 1ª ordem



(d) Sol. com estabilização 1ª ordem



(e) Sol. com estabilização alta ordem



(f) Sol. com estabilização alta ordem

Figura 7.13: Exemplo 7.2: Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com e sem estabilização no instante de tempo $T = 725$ dias usando $k = 1$, $M = 1296$.

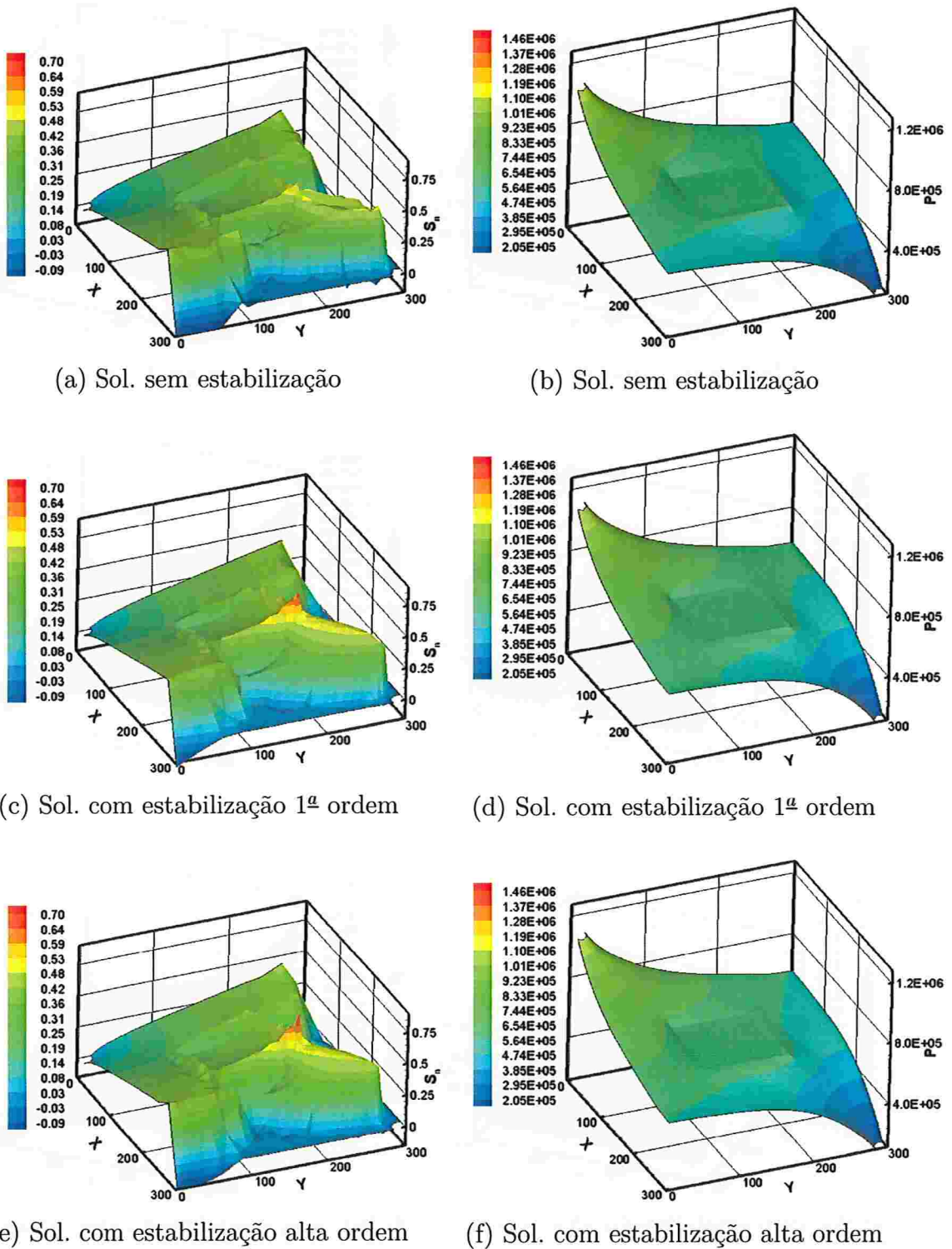


Figura 7.14: *Exemplo 7.2:* Comparando aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com e sem estabilização no instante de tempo $T = 1800$ dias usando $k = 1$, $M = 1296$.

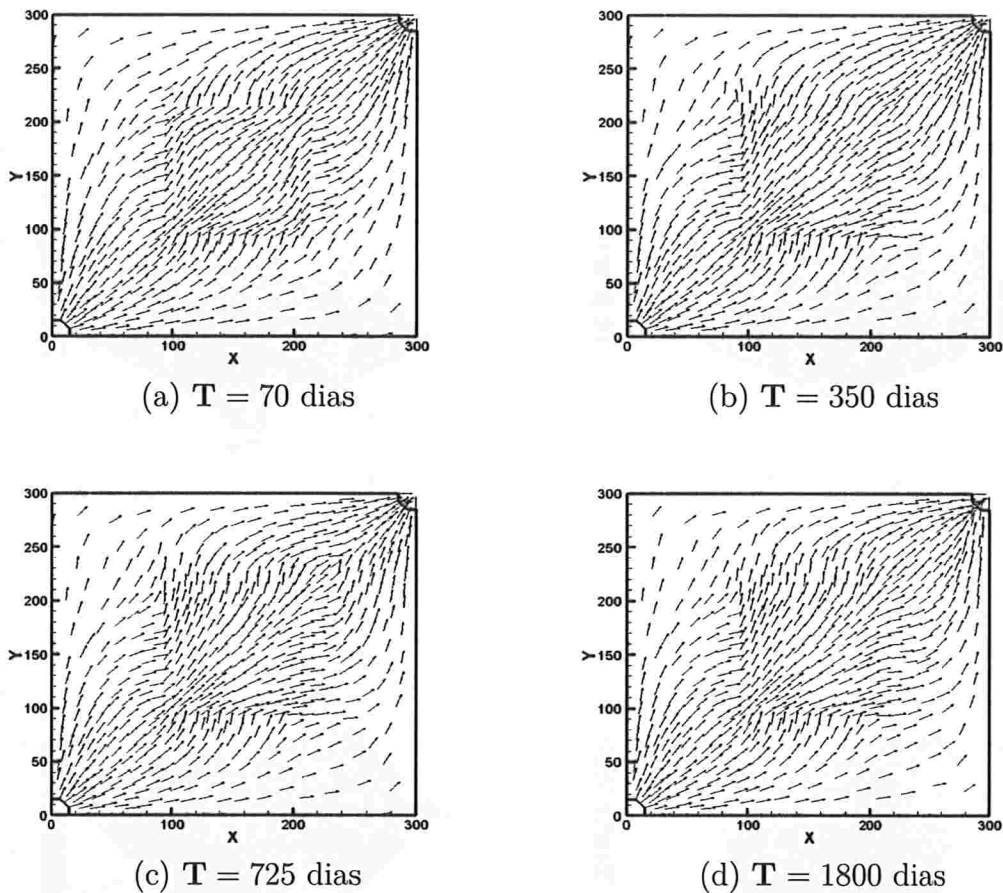


Figura 7.15: Exemplo 7.2: Aproximações para a velocidade total u_t obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com estabilização de primeira ordem e $k = 1$, $M = 1296$ em vários instantes de tempo.

Exemplo 7.3 Neste exemplo consideramos dados semelhantes aos utilizados no Exemplo 7.2, com a seguinte alteração:

$$\begin{aligned} \text{Propriedades das rochas: } K &= [1e - 10 \quad 1e - 11] m^2, \\ \text{Modelo de Brooks-Corey com: } P_e &= [1e + 4, \quad 1.5811e + 4] Pa \Rightarrow S^* = 0.6, \end{aligned} \quad (7.12)$$

ou seja, agora o subdomínio Ω_1 (ver Fig. 7.7a) é a região com permeabilidade alta e Ω_2 tem permeabilidade mais baixa.

A malha de $M = 1840$ elementos utilizada para resolução deste exemplo está ilustrada na Fig. 7.10b e os parâmetros \hat{q}_i e \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ referentes a qualidade da malha são dados na Tab. 7.2. Apresentamos aproximações para o Exemplo 7.3 obtidas com o método DG (3.15),(3.17) e estabilização transversal de primeira ordem para a pressão global P , saturação S_n e velocidade total u_t nas Figs. 7.16, 7.17 e 7.18.

Podemos notar que em $T = 60$ dias o óleo já alcançou a interface Γ_{12} e atingiu a saturação de entrada $S^* = 0.6$, e assim o óleo consegue cruzar a interface e escoar através de Ω_2 (região de baixa permeabilidade). Observamos por meio da Fig. 7.18a e 7.18b que ocorre uma alteração na direção do campo de velocidades do instante de tempo $T = 2$ dias para o instante de tempo $T = 60$ dias. Em $T = 2$ dias o campo de velocidades estava conduzindo o óleo para contornar a região de baixa permeabilidade. Porém em $T = 60$ dias, devido

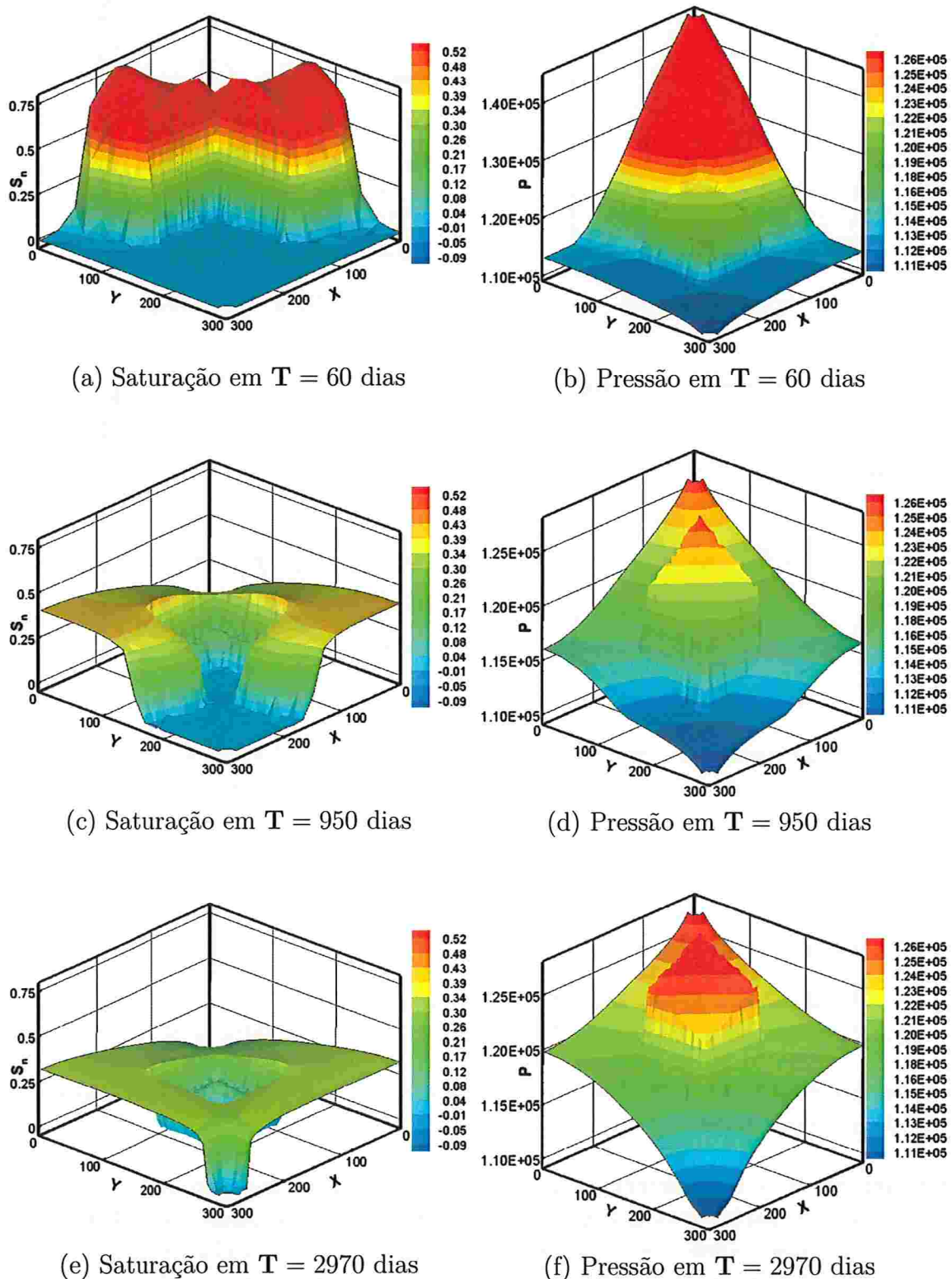


Figura 7.16: *Exemplo 7.3:* Aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n e para pressão global P obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com estabilização transversal de primeira ordem e $k = 1$, $M = 1840$ em vários instantes de tempo.

ao fato do óleo ter atingido a pressão de entrada necessária para cruzar a interface Γ_{12} , o campo mudou a direção de forma que agora o óleo está sendo conduzido para a região Ω_2 . Em $T = 950$ dias notamos que apenas uma pequena quantidade de óleo conseguiu cruzar

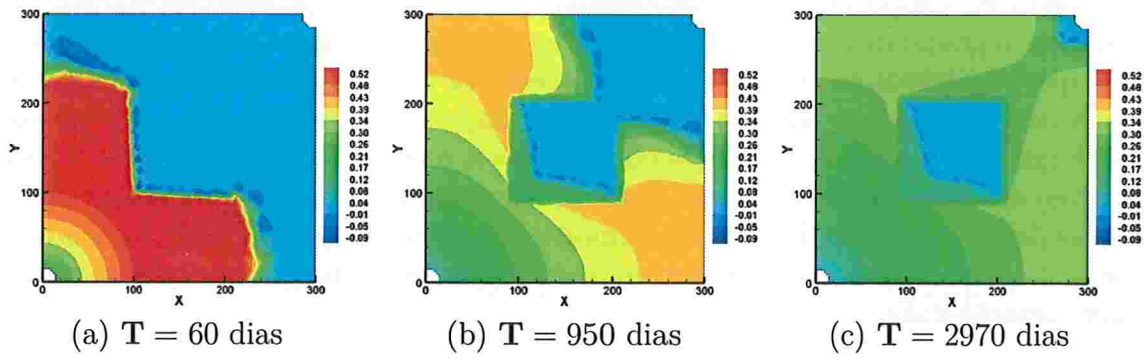


Figura 7.17: *Exemplo 7.3:* Aproximações para a saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com estabilização de primeira ordem e $k = 1$, $M = 1840$ em vários instantes de tempo.

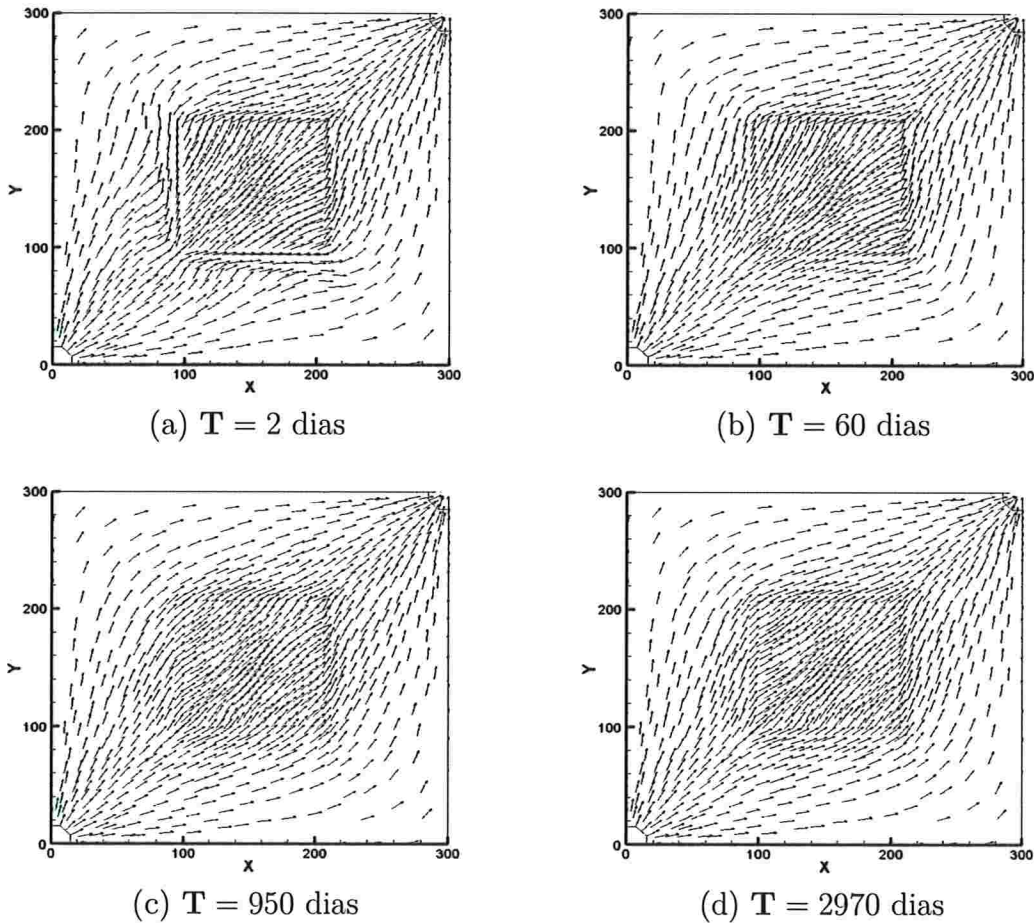


Figura 7.18: *Exemplo 7.3:* Aproximações para a velocidade total u_t obtidas com o método DG (3.15),(3.17) com estabilização de primeira ordem e $k = 1$, $M = 1840$ em vários instantes de tempo.

a interface e entrar na região de baixa permeabilidade, sendo que nesse instante de tempo já não ocorre mais entrada de óleo nesta região, pois a saturação $S(\Gamma_{12})|_{\Omega_1}$ é menor que S^* . Devido a esse fato, o óleo contorna a região de baixa permeabilidade e dirige-se para o poço de ejeção. Na Fig. 7.17 fica mais evidente que somente uma pequena quantidade de óleo consegue entrar em Ω_2 . No instante de tempo $T = 2970$ dias o óleo já está próximo do poço de ejeção e a solução para saturação já tem comportamento bem mais suave em relação

aos instantes de tempo iniciais. Neste exemplo, da mesma forma como no Exemplo 7.2, a pressão possui gradiente elevado próximo ao poço de injeção de água nos instantes iniciais. À medida que avançamos no tempo, a pressão apresenta um comportamento mais suave, mas continua com descontinuidades na interface Γ_{12} , onde as propriedades do meio poroso são descontínuas. Os resultados numéricos obtidos com o método DG proposto para o Exemplo 7.3 captam com eficiência os fenômenos físicos envolvidos no processo de escoamento, e as condições de interface não-lineares são impostas com precisão, reforçando mais uma vez o potencial do método para resolução de problemas em meios porosos heterogêneos com forças capilares descontínuas.

Capítulo 8

Conclusões e Trabalhos Futuros

Esta tese apresenta um estudo sobre a resolução numérica de problemas de escoamento bifásico, de fluídos imiscíveis e incompressíveis em meios porosos heterogêneos em que temos a presença de discontinuidades nas propriedades físicas do meio como, permeabilidade e forças capilares. São apresentados e discutidos detalhes relacionados à simulação numérica de fenômenos físicos presentes neste tipo de problema, bem como as dificuldades encontradas durante a resolução numérica. A seguir são destacadas as principais conclusões obtidas no decorrer do trabalho.

8.1 Conclusões

Introduzimos um novo método de Galerkin descontínuo sequencial para resolver problemas de escoamento bifásico, de fluídos incompressíveis e imiscíveis em meios porosos heterogêneos. No método proposto usamos a reconstrução de fluxos no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec, cuja extensão para problemas de escoamento foi efetuada neste trabalho. Empregamos as técnicas de média ponderada e média harmônica para lidar com as heterogeneidades no termo difusivo e fluxo numérico de Godunov para o termo advectivo não-linear. A utilização das técnicas de média ponderada e média harmônica atribui ao método a capacidade de resolver tanto problemas com comportamento hiperbólico, como problemas com comportamento parabólico, permitindo a detecção automática de regiões onde o coeficiente difusivo degenera na equação para a saturação. Desta forma não é necessário ter um conhecimento prévio das regiões degeneradas. De forma inovadora, impomos as condições de interface não-lineares de maneira fraca por meio de uma penalização adequada entre elementos, permitindo assim a resolução de problemas com heterogeneidades na permeabilidade e nas forças capilares. Para a discretização temporal usamos o método de Euler implícito, o que em conjunto com as técnicas descritas acima permitiu a obtenção de um método estável, sem necessidade de empregar limitantes a cada passo no tempo.

Validamos o método numérico proposto por meio da resolução de problemas unidimensionais e bidimensionais cuja solução exata ou comportamento qualitativo é conhecido na literatura. Em meios porosos homogêneos testamos a formulação para a equação de Buckley-Leverett unidimensional (Buckley e Leverett, 1942), com e sem pressão capilar e comparamos os resultados para o caso sem pressão capilar com a solução analítica. Notamos que o uso do método explícito é inviável para resolução deste tipo de problemas, pois exige a utilização de um passo no tempo muito pequeno e apresenta aproximações insatisfatórias. Por outro lado, o método implícito apresentou bons resultados, mantendo convergência para a solução do problema, sem a necessidade de empregar passos no tempo tão pequenos quanto no método explícito. Também comparamos aproximações com a solução quase analítica de

McWhorter e Sunada (1990) para a equação parabólica ($u_t = 0$) degenerada e apresentamos as ordens de convergência obtidas com o método. Observamos taxas de convergência semelhantes para as ordens de aproximação polinomial $k = 1$ e $k = 2$ devido à perda de regularidade da solução nas regiões degeneradas.

Em meios heterogêneos validamos o método por meio da modelagem do problema difusivo (velocidade total nula) e comparamos os resultados numéricos com a solução quase analítica obtida por similaridade em (Duijn e Neef, 1998). Também são apresentados erros da aproximação numérica na norma L^2 e respectivas ordens de convergência, em que devido à perda de regularidade da solução, obtivemos ordens de convergência semelhantes para $k = 1$ e para $k > 1$. Para o caso com velocidade não nula em meios heterogêneos analisamos o comportamento qualitativo da solução numérica e comparamos com os resultados teóricos obtidos por Bertsch *et al.* (2003). Observamos que o método numérico apresentou soluções estáveis e robustas, captando com precisão as descontinuidades ou fortes gradientes para a pressão e saturação, presentes na frente do fluido e nas interfaces formadas por dois tipos de sedimentos, sem a necessidade do uso de limitantes. Eliminamos oscilações na frente do fluido ou nas interfaces através do refinamento na malha espacial ou com o aumento da ordem de aproximação polinomial.

Efetuamos comparações entre aproximações numéricas obtidas com os métodos de Galerkin descontínuo explícito, semi-implícito e implícito, por intermédio dos quais notamos que os métodos semi-implícito e implícito forneceram melhores resultados em malhas relativamente grosseiras mesmo usando passos grandes no tempo, sendo que as soluções obtidas com estes dois métodos são qualitativamente muito similares, o que motivou o uso do método semi-implícito na maior parte dos resultados. Já o método de Galerkin descontínuo explícito requer o uso de um passo muito pequeno no tempo para fornecer boas aproximações, pois o método apresenta condições de estabilidade bem mais restritivas.

Observamos a importância do uso de uma reconstrução acurada para a velocidade total através da comparação dos resultados obtidos com reconstrução de fluxos no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec e no espaço BDM, com os resultados obtidos sem reconstrução de fluxos. O perfil obtido para saturação apresentou oscilações não físicas nos casos sem reconstrução de fluxos e no caso em que usamos reconstrução no espaço BDM. Notamos que estas instabilidades originaram-se das oscilações presentes na velocidade total reconstruída do potencial descontínuo. Já a reconstrução no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec forneceu aproximações acuradas para a velocidade total, sem oscilações não-físicas, garantindo aproximações robustas para a saturação.

Em meios heterogêneos lidamos com problemas com descontinuidades na permeabilidade e/ou porosidade do meio poroso, o que nos conduziu à resolução de problemas com forças capilares descontínuas, tornando assim necessária a imposição de condições de interface não-lineares adequadas. Notamos que as condições de interface são bem resolvidas no método de Galerkin descontínuo proposto, como mostram os resultados de simulações numéricas. A reconstrução da velocidade total e o uso das técnicas de média ponderada e média harmônica foram essenciais para obter soluções estáveis em meios heterogêneos e em problemas degenerados, sem necessidade de empregar limitantes. Notamos que a presença de heterogeneidades no meio poroso afeta diretamente a velocidade de escoamento do fluido, e dependendo do problema a mesma pode variar significativamente com o tempo. Nestes casos é essencial o uso do sistema acoplado pressão-saturação para modelar problemas de escoamento em meios heterogêneos e assim captar com precisão os efeitos da variação na velocidade total.

Estudamos numericamente a convergência do método DG proposto e apresentamos os erros na norma L^2 e seminorma H^1 e respectivas taxas de convergência obtidas para resolução

da equação advecção-difusão não-linear com dependência no tempo em domínio bidimensional e comparamos com as ordens de convergência teóricas obtidas por Dolejší (2007). Para o caso em que a solução exata é suficientemente regular, obtemos com o método DG ordens de convergência ótimas de $O(h^{k+1})$ na norma L^2 e $O(h^k)$ na seminorma H^1 . Para o caso em que a solução perde regularidade (pertence ao espaço de Sobolev H^β , com $1 \leq \beta < \frac{3}{2}$), as ordens de convergência obtidas foram $O(h^{\frac{3}{2}})$ na norma L^2 e $O(h^{\frac{1}{2}})$ na seminorma H^1 . Para domínios bidimensionais, efetuamos a validação do método numérico para a equação de Buckley-Leverett em meios porosos homogêneos, para os casos onde os efeitos capilares não são desprezíveis e onde desconsideramos os efeitos da pressão capilar e utilizamos um campo de velocidades de tal forma que o escoamento fosse horizontal, o que nos permitiu comparar os resultados com aqueles obtidos em domínio unidimensional e assim efetuar uma primeira validação do método numérico em 2D.

Apresentamos uma análise de convergência em domínio bidimensional para o problema acoplado pressão-saturação degenerado em meios homogêneos com reconstrução de fluxos no espaço \mathbf{RT}_0 para um problema de escoamento horizontal. Notamos que para a pressão obtemos boas aproximações mesmo na malha mais grosseira, já para a saturação foi necessária uma malha mais refinada para obter bons resultados. As oscilações em malhas grosseiras presentes nas aproximações para a saturação na frente do fluido, onde a solução degenera, foram reduzidas através de refinamento na malha espacial e com o aumento da ordem de aproximação polinomial. Ainda em meios homogêneos, comparamos aproximações numéricas obtidas com o método DG proposto para o problema five-spot com resultados numéricos apresentados em Rivière (2004), para o caso em que as forças capilares são consideradas. Percebemos que os resultados são bem semelhantes quanto à localização da frente do fluido e comportamento físico. A solução do problema five-spot abordado possuía um choque bem acentuado na frente do fluido e essa frente foi bem capturada pelo método numérico.

Através do exemplo de escoamento horizontal com uma interface perpendicular à direção do escoamento observamos que o método DG proposto manteve para este exemplo bidimensional a estabilidade e precisão apresentadas em domínio unidimensional. Porém para a resolução do problema five-spot heterogêneo, quando a interface apresentou geometria mais complexa, houve necessidade da introdução de termos de estabilização adicionais para lidar com oscilações numéricas nas direções transversais ao fluxo. Os resultados numéricos apresentados para este problema ilustram várias características e os diferentes fenômenos físicos presentes em problemas de escoamento em meios porosos heterogêneos, como caminhos preferenciais para escoamento, efeitos de sucção, acúmulo de óleo na interface, bruscas variações no campo de velocidade e soluções descontínuas. Apesar das dificuldades que este exemplo apresenta para resolução numérica, o método proposto após estabilização transversal de primeira ordem reproduz de forma eficiente os efeitos físicos envolvidos. A imposição das condições de interface é essencial para permitir que o método numérico capte esses fenômenos físicos envolvidos no processo de escoamento heterogêneo.

O código desenvolvido deve ser otimizado do ponto de vista de custo computacional para aplicar o método desenvolvido para problemas práticos de grande escala. Para atingir este objetivo existem várias ferramentas que podem ser empregadas, como uso de malhas adaptativas, paralelização do código, implementação em linguagem mais eficiente, entre outras. Em particular, antes da aplicação do método para resolução de problemas de escoamento bifásico em meios heterogêneos de grande escala, é necessário efetuar um estudo mais aprofundado relacionado à técnica de estabilização transversal empregada, possibilitando assim escolher a mais eficiente.

Os resultados obtidos ilustram o potencial do método proposto em captar bem vários

fenômenos físicos relevantes em problemas de escoamento bifásico em meios porosos heterogêneos, tais como campos de pressão e saturação descontínuos resultantes de descontinuidades nas forças capilares em interfaces formadas entre sedimentos com propriedades físicas diferentes. A qualidade das aproximações numéricas obtidas para problemas em meios homogêneos e heterogêneos mostra que o método desenvolvido tem potencial para ser usado na resolução de problemas reais da engenharia de reservatório de petróleo.

8.2 Trabalhos futuros

Os resultados obtidos com o esquema numérico proposto mostram que o método é promissor para resolver problemas reais de escoamento em meios heterogêneos. Porém permanecem em aberto algumas questões para serem abordadas em trabalhos futuros, dentre as quais podemos citar:

- Estudar técnicas para estabilização transversal e escolher a mais adequada para cada tipo de problema;
- Analisar a aplicação do método proposto a problemas de escoamento em meios porosos heterogêneos com forças capilares descontínuas em reservatórios com geometrias complexas;
- Implementar a formulação proposta em uma linguagem computacional mais eficiente com possível paralelização do código;
- Desenvolver estratégias de adaptatividade de malha.

Apêndice A

Um Maior Detalhamento da Implementação

Neste Apêndice apresentamos alguns detalhes relacionados à implementação do método de Galerkin descontínuo, explicando melhor quais ferramentas foram utilizadas para obtenção dos resultados numéricos apresentados nos capítulos anteriores, como geração de malhas, construção das funções de base no espaço de aproximação, escolha da quadratura de Gauss e do método utilizado na resolução do sistema não-linear. O ambiente utilizado para a implementação foi o MATLAB, que em geral tem um fator de eficiência menor quando comparado com outras linguagens como Fortran ou C^{++} . Porém, oferece facilidades para implementação e modificação de programas. A escolha pelo MATLAB para implementação deve-se ao fato do objetivo principal do trabalho ser o desenvolvimento e validação do método numérico proposto e verificação do seu potencial para resolver problemas reais de escoamento em meios porosos heterogêneos com descontinuidades na permeabilidade e na pressão capilar. Já para a resolução de problemas computacionais em larga escala que exigem um código rápido e robusto, é necessário efetuar a implementação do método em outro ambiente de programação usando uma linguagem mais eficiente, como por exemplo C^{++} . Essa tarefa permanece em aberto para trabalhos futuros.

O livro de Hesthaven e Warburton (2008) é certamente uma boa referência para obter uma introdução ao método de Galerkin descontínuo e acessar alguns detalhes sobre a implementação. Em parte seguimos este livro para a descrição efetuada neste apêndice. Um outro livro muito interessante é o livro de Gockenbach (2006) que aborda detalhes práticos relacionados à implementação de elementos finitos, como estrutura de dados e estratégias específicas a serem adotadas no código. Incluí também alguns programas escritos em linguagem de MATLAB nos quais são implementadas as idéias apresentadas. No quesito implementação no MATLAB, o artigo (Chen, 2008a) oferece informações importantes relacionadas ao armazenamento de matrizes esparsas e operações matriciais com matrizes esparsas através da vetorização.

Inicialmente na Seção A.1 apresentamos as funções de base utilizadas em domínio unidimensional e bidimensional. Na Seção A.2 discutimos alguns detalhes relacionados à geração de malhas e formas de avaliar a qualidade da malha obtida. Em seguida, na Seção A.3 abordamos a técnica de escolha adaptativa do passo no tempo empregada para obtenção de alguns dos resultados numéricos em domínios bidimensionais. E por fim, apresentamos na Seção A.4 uma discussão geral da resolução numérica do problema acoplado pressão-saturação.

A.1 Espaço de aproximação polinomial

Procuramos aproximações para a pressão P e a saturação S no espaço de elementos finitos descontínuo V_h^k . Generalizando, queremos encontrar uma representação para a solução u no espaço V_h^k de tal forma que

$$u(x, y) \simeq u_h(x, y) = \sum_{T=1}^M u_h^T(x, y), \quad \text{em que } u_h^T(x, y) = \sum_{k=1}^{N_k} \hat{u}_k^T \varphi_k^T(x, y), \quad (\text{A.1})$$

sendo $u_h^T(x, y)$ a representação local no elemento $T \in \mathcal{T}_h$ e φ_k^T é a função de base local a ser definida sendo um total de N_k funções de base por elemento.

Em domínios unidimensionais consideramos como elemento mestre o intervalo unitário $\hat{T} = [-1, 1]$ e a aplicação afim $\mathcal{A}_T : \hat{T} \rightarrow T$ associada ao elemento $T = (x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{T}_h$ é dada por:

$$\mathcal{A}_T(r) = x_i + \frac{1+r}{2} h_T, \quad r \in \hat{T}, \quad (\text{A.2})$$

sendo que $\mathcal{A}_T(\hat{T}) = T$. Como base para o espaço de polinômios $\mathbb{P}_k(\hat{T})$ de ordem k usamos os polinômios de Legendre de ordem $n = 0, 1 \dots N_k - 1$ que podem ser obtidos pela fórmula de recorrência

$$\varphi_{n+1}(r) = \frac{2n+1}{n+1} \varphi_n(r) - \frac{n}{n+1} \varphi_{n-1}(r), \quad n \geq 1, \quad (\text{A.3})$$

com

$$\varphi_0(r) = 1, \quad \varphi_1(r) = r.$$

Note que em domínio unidimensional a dimensão do espaço de polinômios $\mathbb{P}_k(\hat{T})$ é $N_k = k+1$. Os polinômios de Legendre possuem a propriedade de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^1 \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \quad \text{em que} \quad (\text{A.4})$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n, \\ 0, & \text{se } m \neq n, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

como consequência $\int_{-1}^1 \tilde{q}(x) \varphi_n(x) dx = 0$, para todo polinômio \tilde{q} de grau menor que n . Para integração numérica usamos a quadratura de Gauss de acordo com abordagem efetuada no livro (Hesthaven e Warburton, 2008).

Para a implementação de Galerkin descontínuo em domínio bidimensional usamos malhas formadas por triângulos, desta forma o elemento mestre é dado por:

$$\hat{T} = \{(r, s) / (r, s) \geq -1; \quad r + s \leq 0\}, \quad (\text{A.6})$$

ou seja, o elemento mestre \hat{T} é formado pelo triângulo que possui como vértices: $v^1 = (-1, -1)$, $v^2 = (1, -1)$, $v^3 = (-1, 1)$. A aplicação afim desse elemento mestre \hat{T} em qualquer outro triângulo T da malha é feita pela aplicação \mathcal{A}_T dada por:

$$\mathcal{A}_T(r, s) = -\frac{r+s}{2} v^1 + \frac{r+1}{2} v^2 + \frac{s+1}{2} v^3. \quad (\text{A.7})$$

Agora em 2D, a dimensão do espaço de polinômios $\mathbb{P}_k(\hat{T})$ de ordem k é dada por $N_k =$

$\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. A base ortogonal considerada no elemento mestre \hat{T} é:

$$\varphi_n(r, s) = \sqrt{2}P_i^{(0,0)}(a)P_j^{(2i+1,0)}(b)(1-b)^i, \quad m = 1, 2, \dots, N_p, \quad (\text{A.8})$$

em que,

$$a = 2\frac{1+r}{1-s} - 1, \quad b = s, \quad (\text{A.9})$$

$$m = j + (N+1)i + 1 - \frac{i}{2}(i-1), \quad (i, j) \geq 0, \quad i+j \leq k, \quad (\text{A.10})$$

$$(\text{A.11})$$

sendo $P_n^{(\alpha,\beta)}$ o polinômio de Jacobi de ordem n dado pela fórmula de recorrência:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{x - b_{n-1}}{a_n} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{a_{n-1}}{a_n} P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (\text{A.12})$$

em que os coeficientes são dados por:

$$a_n = \frac{2}{2n + \alpha + \beta} \sqrt{\frac{n(n + \alpha + \beta)(n + \alpha)(n + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta + 1)}}, \quad (\text{A.13})$$

$$b_n = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}, \quad (\text{A.14})$$

Para $\alpha = \beta = 0$ temos o polinômio de Legendre. Para iniciar a fórmula de recorrência precisamos dos valores iniciais,

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = \sqrt{2^{-\alpha-\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}}, \quad (\text{A.15})$$

$$P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2} P_0^{(\alpha,\beta)}(x) \sqrt{\frac{\alpha + \beta + 3}{(\alpha + 1)(\beta + 1)}} ((\alpha + \beta + 2)x + (\alpha - \beta)), \quad (\text{A.16})$$

aqui Γ é a clássica função Gamma. Para integração numérica sobre triângulos usamos quadratura Gaussiana baseada nos livros Šolín (2006); Šolín *et al.* (2004).

A.2 Geração de malhas

Apresentamos nesta seção alguns detalhes relacionados à geração de malhas em domínios unidimensionais e bidimensionais e formas de avaliar a qualidade da malha obtida. A geração de malhas exerce um papel importante na qualidade dos resultados numéricos obtidos. Para uma solução suave a melhor precisão numérica é alcançada com o uso de malhas uniformes. Porém, a malha computacional dificilmente é uniforme em simulações para problemas em que a solução é singular e/ou a geometria do domínio é complexa. Para estes casos é necessário ter fatores para avaliar a qualidade da malha com que estamos trabalhando e assim ter noção da influência da malha nas aproximações numéricas obtidas.

Nos resultados numéricos unidimensionais apresentados nos Capítulos 4 e 5 utilizamos malhas uniformes para discretização espacial do domínio $\Omega = (x_A, x_B)$, de comprimento $L = |x_B - x_A|$. Para isto, consideramos a partição uniforme $\mathcal{T}_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq M}$ com M elementos e nós $\mathcal{F}_h = \{x_i\}_{1 \leq i \leq M+1}$, em que os elementos são descritos por $T_i = (x_i, x_{i+1})$ e o diâmetro

da malha é $h = \frac{L}{M}$.

As simulações numéricas em 2D foram efetuadas em malhas triangulares. Para geração de malhas em domínios bidimensionais onde foi possível a utilização de malhas uniformes usamos uma malha grosseira como malha inicial e após aplicamos o método da biseccção uniforme descrito em Chen (2008a,b) sucessivas vezes, até obter a malha desejada. Ilustramos na Fig. A.1 o elemento T após um refinamento com o método da biseccção. Estes artigos também apresentam informações importantes relacionadas ao armazenamento de matrizes esparsas no MATLAB e suas operações, bem como o desenvolvimento de um eficiente código para a implementação de elementos finitos. Já para domínios mais irregulares ou com heterogeneidades, usamos malhas não-estruturadas geradas pelo software GMSH¹. Esse gerador de malhas 2D e 3D possibilita a visualização gráfica da malha gerada e a criação de arquivos contendo a conectividade entre os nós da mesma (Geuzaine e Remacle, 2009). Para avaliar a qualidade da malha obtida usamos alguns parâmetros que definimos a seguir.

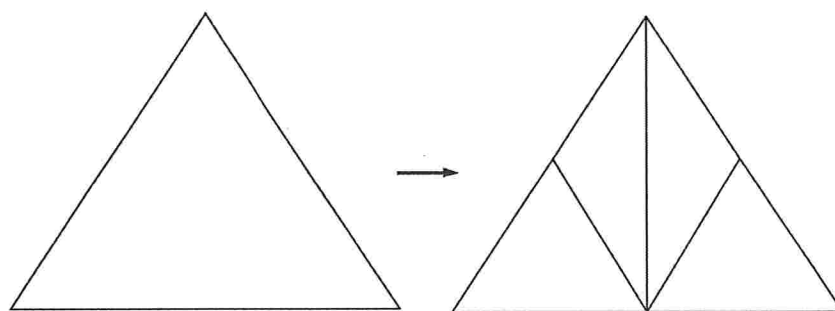


Figura A.1: Elemento triangular após refinamento usando método da biseccção descrito em Chen (2008a,b).

A.2.1 Qualidade da malha

A qualidade da malha pode ter considerável impacto na qualidade da solução e no tempo necessário para obtê-la. Esse aspecto torna-se ainda mais importante quando trabalhamos com problemas mal condicionados, não-lineares, e/ou transientes. A qualidade da malha tem efeito na solução pois as estimativas de erro em geral dependem de constantes relacionadas com a malha em que a solução é gerada, sendo que malhas de baixa qualidade podem fornecer resultados que dependem mais da malha que do modelo numérico. Desta forma ter um parâmetro para avaliar a qualidade da malha é muito útil e nos fornece algum indicativo de como a malha interfere na solução obtida.

Consideramos um elemento $T \in \mathcal{T}_h$ de baixa qualidade, se o mesmo possui pelo menos uma das seguintes características:

- Razão entre o diâmetro da maior e da menor face do elemento T é maior que 10;
- O menor ângulo interno do elemento T é menor que 20 graus;
- O maior ângulo interno do elemento T é maior que 120 graus.

Ou seja, devem ser evitadas malhas com elementos que possuam ângulos muito grandes ou muito pequenos. De maneira geral os ângulos muito grandes estão relacionados com o erro da aproximação de elementos finitos e os ângulos pequenos podem ter efeito negativo no número de condicionamento da matriz associada ao problema. Além disso, quando as

¹<http://geuz.org/gmsh/>

faces de um elemento passam a ter comprimentos muito diferentes, a precisão dos resultados diminui drasticamente (Fleischmann, 2000).

Existem diversas formas de avaliar a qualidade de cada elemento individualmente e de como quantificar esses valores na malha. Um fator sugerido no livro de Gockenbach (2006), que pode ser usado nesta avaliação é:

$$q_1(T) = \frac{2r_{insc}}{r_{circ}} = \frac{(h_{F_2} + h_{F_3} - h_{F_1})(h_{F_3} + h_{F_1} - h_{F_2})(h_{F_1} + h_{F_2} - h_{F_3})}{h_{F_1}h_{F_2}h_{F_3}}, \quad (\text{A.17})$$

onde r_{insc} é o raio do círculo incrito, r_{circ} é o raio do círculo circunscrito e $h_{F_1}, h_{F_2}, h_{F_3}$ são os diâmetros das três arestas do elemento T . O fator 2 foi incluído para que um triângulo equilátero (elemento ideal) tenha medida de qualidade $q_1 = 1$. Um segundo parâmetro para um elemento triangular T é a medida do seu menor ângulo, dividido por $\pi/3$:

$$q_2(T) = \frac{\min(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)}{\pi/3}, \quad (\text{A.18})$$

onde $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ são os ângulos internos do triângulo T . Uma outra estimativa que também avalia a qualidade de cada elemento em relação ao triângulo equilátero é usada por Ryppl (1998):

$$q_3(T) = 4\sqrt{3} \frac{A_T}{h_{F_1}^2 + h_{F_2}^2 + h_{F_3}^2}, \quad (\text{A.19})$$

onde A_T representa a área do triângulo T . O coeficiente $4\sqrt{3}$ normaliza a estimativa de qualidade em relação ao triângulo equilátero.

Para ilustrar a qualidade da malha \mathcal{T}_h , calculamos as quantidades q_i acima definidas para todos os elementos da malha e analisamos o valor de qualidade mínimo e médio:

$$\hat{q}_i = \min\{q_i(T) : T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{q}_i = \frac{1}{M} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} q_i(T), \quad (\text{A.21})$$

onde M é o número total de elementos da malha. O valor médio \bar{q}_i representa o melhor indicador para avaliar a qualidade da malha, cujo valor deve ser o mais próximo possível de 1.

A.3 Escolha adaptativa do passo no tempo

Considere o seguinte problema a resolver:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u), \quad (\text{A.22})$$

onde F representa a discretização espacial de Galerkin descontínuo descrita na formulação (3.17). Para a discretização temporal usamos o método de Euler implícito, com variação do passo no tempo Δt :

$$u^{m+1} = u^m + \Delta t F(u^{m+1}), \quad (\text{A.23})$$

O método de Euler implícito é incondicionalmente estável, mas na prática existe uma restrição no tamanho do passo máximo devido à não-convergência do método usado para resolver o problema não-linear ou simplesmente devido ao tamanho do erro temporal. A maior parte dos resultados numéricos apresentados nos capítulos anteriores foram obtidos com a escolha de passos uniformes no tempo de tal forma que o método de Newton ou método de Newton modificado não façam muitas iterações e mantenham a ordem de convergência. Porém nos testes bidimensionais tornou-se necessária a utilização de técnicas para controlar o tamanho do passo de maneira automatizada.

A evolução dos métodos numéricos para classes mais complexas de problemas acoplados e de transporte aumentou a necessidade da adoção de técnicas adaptativas de escolha do passo no tempo eficientes que garantam estabilidade e precisão na obtenção de soluções transientes. Técnicas adaptativas para automatizar a seleção do passo no tempo provavelmente são importantes para aumentar a eficiência de um dado método de integração. Em códigos que utilizam passo adaptativo, ou seja, efetuam a integração temporal com tamanho de passo variável, basta definir a tolerância e o código automaticamente ajusta Δt à variação local da solução calculada para alcançar um certo critério no erro local. Essa aproximação leva a menores (maiores) Δt em regiões com grandes (pequenas) variações e resultados precisos a um custo computacional eficiente. Estratégias de passo adaptativo geralmente baseiam-se na aproximação do erro local de truncamento ou apenas em considerações heurísticas. O objetivo da escolha do passo no tempo adaptativo é minimizar o esforço computacional para construir a solução aproximada de um dado problema dentro de uma precisão desejada.

A seguir descrevo a técnica utilizada para implementar a escolha do passo adaptativo, baseada no artigo de Valli *et al.* (2005) e no livro de Kuzmin *et al.* (2005). Nessa técnica os autores apresentam um controle para aproximar a escolha do passo adaptativo usando o conceito de controle proporcional-integral-diferencial (*proportional-integral-derivative control (PID) control*) que controla a precisão e a taxa de convergência de sucessivas iterações do método não-linear. O passo no tempo é limitado pela variação da solução de interesse, com base no erro local de truncamento e na taxa de convergência de sucessivas aproximações.

Gustafsson (1994) mostrou que a seleção do tamanho do passo no tempo pode ser vista como um problema de controle automático com um controle PID definido como:

$$\Delta t_{m+1} = \left(\frac{e_{m-1}}{e_m} \right)^{K_p} \left(\frac{Tol}{e_m} \right)^{K_I} \left(\frac{e_{m-1}^2}{e_m e_{m-2}} \right)^{K_D} \Delta t_m, \quad (\text{A.24})$$

onde Tol é a tolerância, e_m é a medida da variação da solução u no instante de tempo t^m , $\Delta t_{m+1} = t^{m+1} - t^m$ e K_p , K_I e K_D são parâmetros PID. A estimativa da variação da solução é comparada com a precisão especificada e o resultado é usado para calcular o novo passo no tempo. O controle do passo tenta selecionar o tamanho do passo tal que e_m torne-se tão próximo quanto possível da tolerância de entrada, Tol , ao longo de uma curva suave.

A escolha do tamanho do passo não afeta somente o erro, mas também a taxa de convergência do processo iterativo em problemas não-lineares. Desta forma, o critério de seleção do passo no tempo não pode ser desenvolvido sem levar em consideração a convergência do método iterativo. Os autores Gustafsson e Söderling (1997) introduziram um modelo para controlar o tamanho do passo no tempo que relaciona a taxa de convergência do método iterativo com o tamanho do passo. Logo o tamanho do passo deve ser escolhido como:

$$\Delta t_{m+1} = \frac{\alpha_{ref}}{\alpha_c} \Delta t_m, \quad (\text{A.25})$$

onde α_{ref} é a taxa de convergência referência e α_c é a estimativa da taxa de convergência

efetiva. A inserção desse controlador tentará manter a taxa de convergência do método iterativo o mais próximo possível do valor referência, que em geral é considerado $0.2 < \alpha_{ref} < 0.4$. A estimativa da taxa de convergência é calculada usando três iterações consecutivas do método iterativo, u_{l-2}, u_{l-1}, u_l , como segue:

$$\alpha_c = \frac{\|u_l - u_{l-1}\|}{\|u_{l-1} - u_{l-2}\|}. \quad (\text{A.26})$$

Para manter eficiência da técnica de passo adaptativo é necessário ajustar a escolha do passo levando em consideração a convergência do método iterativo (A.25) com a estimativa do tamanho do passo dada em (A.24). No algoritmo para controle do passo no tempo proposto por Valli *et al.* (2005) o passo no tempo é escolhido como segue:

$$\Delta t = \min(\Delta t_\alpha, \Delta t_r), \quad (\text{A.27})$$

onde,

$$\Delta t_\alpha = \frac{\alpha_{ref}}{\alpha_c} \Delta t_{prev}, \quad (\text{A.28})$$

$$\Delta t_r = \left(\frac{e_{m-1}}{e_m}\right)^{K_p} \left(\frac{1}{e_m}\right)^{K_I} \left(\frac{e_{m-1}^2}{e_m e_{m-2}}\right)^{K_D} \Delta t_{prev}, \quad (\text{A.29})$$

sendo,

$$e_m = \left(\frac{u^m - u^{m-1}}{u^m}\right) / Tol. \quad (\text{A.30})$$

Aqui, Δt_{prev} é o passo no tempo anterior, Tol é a tolerância exigida que corresponde a variação da solução. Os parâmetros PID são considerados de acordo com o artigo, ou seja, $K_p = 0.075$, $K_I = 0.175$ e $K_D = 0.01$. A implementação dessa técnica segue o seguinte raciocínio: O passo no tempo é estimado e a solução é calculada. Calcula-se então uma estimativa do erro e_m dessa solução, que é usada para aceitar ou rejeitar a solução. Se esse erro é maior do que 1, a solução é rejeitada e recalculamos a solução com um novo passo no tempo baseado na magnitude do erro relativo, ou seja,

$$\Delta t = \frac{(\max(r * \Delta t_{prev}, r_{min} * \Delta t_{prev}))^2}{\Delta t_{prev}},$$

onde $r = \frac{1}{e_m}$. Se o erro é aceitável, ou seja, $e_m \leq 1$, o novo passo no tempo é calculado usando (A.27) e efetuamos a próxima integração no tempo. Para evitar grandes crescimentos ou decréscimos do passo no tempo, são introduzidos fatores de crescimento máximo e mínimo, r_{max} e r_{min} , respectivamente.

A.4 Resolução numérica do problema acoplado pressão-saturação

Como já mencionado anteriormente, o método DG (3.15) associado à equação da pressão global P é linear, já o método DG (3.17) associado à equação para a saturação S_n é não-linear. Então para resolver a equação (3.15) é necessário efetuar a montagem da matriz A_p e do lado direito b_p associados à discretização e em seguida resolver o sistema linear $A_p P = b_p$.

Notamos que a matriz A_p associada ao método é uma matriz esparsa, ou seja, é uma matriz $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, $\mathcal{N} = N_p M$, consistindo em \mathcal{N}^2 entradas, sendo que apenas $c\mathcal{N}$ são entradas não nulas, onde c é uma constante pequena.

Para armazenar essa matriz utilizamos a estrutura esparsa do MATLAB para tomar vantagem dessa esparsidade da matriz, tornando assim a simulação numérica mais rápida e eficiente. A idéia da estrutura esparsa é armazenar as entradas não nulas da matriz em um único vetor e são necessários mais dois vetores para armazenar a localização de cada entrada. Porém, acessar e manipular elemento por elemento na estrutura de matriz esparsa requer tempo para encontrar a localização e a entrada não nula, podendo aumentar significativamente o tempo computacional, interferindo na performance. Logo essa manipulação elemento por elemento deve ser evitada. Para manipular essas matrizes esparsas utilizamos as técnicas introduzidas e discutidas por (Chen, 2008a).

Na resolução da equação (3.17) é necessária a aplicação do método de Newton para resolver o sistema não-linear em cada instante t^m :

$$\mathbf{F}(\hat{u}^m) = 0, \quad (\text{A.31})$$

onde $\hat{u}^m = \{\hat{u}_k^T\}_{1 \leq k \leq N_p, 1 \leq T \leq M}$. Notamos que a matriz obtida no jacobiano (J_s) do método de Newton também é esparsa, e para armazenamento utilizamos o pacote de matriz esparsa do MATLAB como descrito acima. Para reduzir o custo computacional com o método de Newton em cada passo no tempo, optamos pela utilização do método de Newton modificado (Kelley, 2003). No método de Newton modificado atualizamos o Jacobiano somente a cada q iterações. Calculamos a cada atualização do Jacobiano a fatoração LU para a matriz esparsa J_s através do comando $[L, U, P, Q] = lu(J_s)$ e armazenamos as matrizes esparsas L, U, P, Q para serem usadas posteriormente nas iterações em que o Jacobiano é mantido fixo. As matrizes P e Q são as matrizes de permutação para linhas e colunas, respectivamente. Esse comando no MATLAB é específico para obter a fatoração LU com pivotamento para matrizes esparsas, e as matrizes de permutação P e Q são selecionadas de tal forma que a esparsidade nos fatores LU seja otimizada.

Para resolução do sistema linear, para ambas pressão e saturação, utilizamos a resolução por métodos diretos do MATLAB, que resolvem o sistema com matriz esparsa de maneira otimizada. Foram efetuados alguns testes da resolução desse mesmo sistema linear utilizando métodos iterativos implementados no MATLAB, como o método de gradientes conjugados preconditionado - PCG com preconditionamento dado pela fatoração de Cholesky incompleta, mas a resolução direta manteve menor tempo computacional nas resoluções testadas. Para trabalhos em grande escala seria interessante efetuar um estudo mais aprofundado para melhorar o tempo computacional gasto com a resolução do sistema linear.

Conforme já mencionado na Seção A.2, utilizamos o GMSH para gerar malhas não-estruturadas para domínios mais irregulares e/ou com heterogeneidades. Os gráficos apresentados nas simulações em domínio unidimensional foram gerados no próprio MATLAB. Já a visualização dos resultados em domínio bidimensional foi obtida através do *software* TECPLOT, poderosa ferramenta para gerar gráficos XY , $2D$ e $3D$.

De maneira geral o método de Galerkin descontínuo oferece diversas vantagens tais como permite trabalhar com geometrias complexas, malhas não-estruturadas, alta ordem de aproximação polinomial, possui propriedades de conservação local de massa, as matrizes associadas à discretização pelo método DG são esparsas, o método é eficiente para resolver problemas temporais e não-lineares. Uma das dificuldades do método é o alto custo computacional devido à alta dimensão do espaço V_h^k comparada com os métodos conformes de elementos finitos clássicos. Porém este custo computacional pode ser aceitável em ca-

so de desenvolvimento de métodos para problemas com soluções descontínuas, pois uma implementação fraca de condições nas interfaces entre elementos permite evitar oscilações não-físicas na vizinhança de singularidades da solução.

Apêndice B

Reconstrução de Fluxos no Espaço $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$

O objetivo deste apêndice é explicitar mais detalhes relacionados a reconstrução da velocidade total no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ em domínios bidimensionais. Para isto reescrevemos as equações dadas na Seção 3.3 que prescrevem localmente em cada elemento da malha $T \in \mathcal{T}_h$ os graus de liberdade locais de u_h^{n+1} : Para todo $F \in \mathcal{F}_h$ e $\forall q \in \mathbb{P}_l(F)$,

$$\int_F (u_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_F) q = \int_F \left(-\mathbf{n}_F \cdot \{ \lambda(S_h^n) K \nabla P_h^{n+1} \}_\omega + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket P_h^{n+1} \rrbracket \right) q, \quad (\text{B.1})$$

e para todo $T \in \mathcal{T}_h$, $\forall w \in [\mathbb{P}_{l-1}(T)]^d$

$$\int_T u_h^{n+1} \cdot w = - \int_T \lambda(S_h^n) K \nabla P_h^{n+1} \cdot w + \vartheta \sum_{F \in \partial T} \int_F \omega_{T,F} \mathbf{n}_F \cdot (\lambda(S_h^n) K w) \llbracket P_h^{n+1} \rrbracket. \quad (\text{B.2})$$

Segundo Cochez-Dhondt e Nicaise (2008), na fronteira $\partial\Omega$ a equação B.1 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_F (u_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_F) q &= \int_F \left(-\mathbf{n}_F \cdot \lambda(S_h^n) K \nabla P_h^{n+1} + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F} (P_h^{n+1} - P_D) \right) q, & \text{se } F \in \mathcal{F}_h^D, \\ \int_F (u_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_F) q &= \int_F P_N q, & \text{se } F \in \mathcal{F}_h^N \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

As dimensões dos espaços $\mathbf{RT}_l(T)$, $\mathbb{P}_k(T)$ e $\mathbb{P}_k(\partial T)$, para $T \in \mathcal{T}_h$ é dada por (Brezzi e Fortin, 1991):

$$\dim(\mathbf{RT}_l(T)) = \begin{cases} (l+1)(l+3), & \text{para } d = 2, \\ \frac{1}{2}(l+1)(l+2)(l+4), & \text{para } d = 3, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\dim(\mathbb{P}_k(T)) = \begin{cases} \frac{(k+1)(k+2)}{2}, & \text{para } d = 2, \\ \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}, & \text{para } d = 3, \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\dim(\mathbb{P}_k(\partial T)) = \begin{cases} 3(k+1), & \text{para triângulos com } k \geq 1, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Logo $q \in \mathbf{RT}_k(T)$ pode ser escrito como $q = q_0 + xp_k$, com $q_0 \in [\mathbb{P}_k(T)]^d$ e $p_k \in \mathbb{P}_k(T)$. Ainda em Brezzi e Fortin (1991) são dadas as seguintes proposições:

Proposição B.1 Para qualquer elemento n -simplice T , temos para todo $q \in \mathbf{RT}_k(T)$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot q \in \mathbb{P}_k(T), \\ q \cdot \mathbf{n}|_{\partial T} \in \mathbb{P}_k(\partial T). \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Além disso, o operador divergente é sobrejetor de $\mathbf{RT}_k(T)$ sobre $\mathbb{P}_k(T)$.

Proposição B.2 Para $k \geq 0$, e $\forall q \in \mathbf{RT}_k(T)$, as seguintes relações garantem $q = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} q \cdot \mathbf{n} p_k ds &= 0, \quad \forall p_k \in \mathbb{P}_k(\partial T), \\ \int_T q \cdot p_{k-1} dx &= 0, \quad \forall p_{k-1} \in [\mathbb{P}_{k-1}(T)]^d. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Agora passaremos a tratar especificamente da reconstrução da velocidade total no espaço de Raviart-Thomas-Nédélec de mais baixa ordem, $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$, e para isso tomaremos como base o artigo de Bahriawati e Carstensen (2005), onde $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ é definido por,

$$\begin{aligned} \mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h) &= \{u_h \in L^2(T) : \forall T \in \mathcal{T}_h, \exists a \in \mathbb{R}^2, \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in T, u_h(x) = a + bx \\ &\text{e } \forall F \in \mathcal{F}_h, \llbracket u_h \rrbracket_F \cdot \mathbf{n}_F = 0\}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

A continuidade das componentes normais nas fronteiras refletem a conformidade $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h) \subset \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Neste espaço teremos somente as equações dadas em (B.1) para definir os graus de liberdade. As funções de base de $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ orientadas por arestas $\{\psi_j\}_{j=1:NT}$, onde NT é o número total de faces, para o espaço $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ são definidas a seguir.

Definição B.3 (Definição local de ψ_F) Sejam F_1, F_2, F_3 faces do triângulo T opostas aos vértices P_1, P_2, P_3 , respectivamente (ver Fig. B.1b) e seja \mathbf{n}_{F_j} a normal unitária da face F_j com orientação global fixa (ver Fig. B.1a) e ν_j o vetor normal unitário exterior de T ao longo de F_j . Defina

$$\psi_{F_j}(x) = \sigma_j \frac{|F_j|}{2|T|} (x - P_j), \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \text{ e } x \in T, \quad (\text{B.10})$$

onde $\sigma_j = \nu_j \cdot \mathbf{n}_{F_j}$ é $+1$ se \mathbf{n}_{F_j} aponta exterior ao elemento e -1 caso contrário; $|F_j| =$ comprimento de F_j e $|T|$ é a área do elemento T :

$$2|T| = \det(P_2 - P_1, P_3 - P_1) = \det \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Definição B.4 (Notação para elementos que compartilham uma aresta) Seja $T_{\pm} = \text{conv}\{F \cap \{P_{\pm}\}\}$ para o vértice P_{\pm} oposto a face F de T_{\pm} talque a aresta $F = \text{conv}\{A, B\}$, orientada de A para B . A normal \mathbf{n}_F aponta exterior a T_- apontando para o interior de T_+ . Se F é uma aresta exterior, então $\nu = \mathbf{n}_F$ é a normal exterior e $F \subset \partial T^-$.

Definição B.5 (Definição global de ψ_F) Dada uma aresta $F \in \mathcal{F}_h$ existem dois elementos T_+ e T_- em \mathcal{T}_h com $F = \partial T_+ \cap \partial T_-$ ou exatamente um elemento T_- em \mathcal{T}_h com $F \subset \partial T_-$.

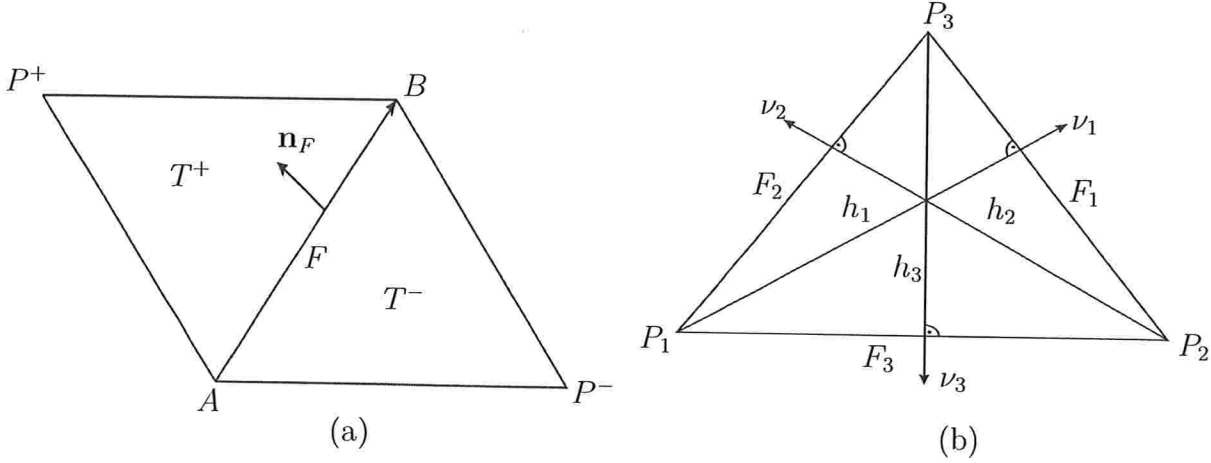


Figura B.1: (a) Dois triângulos vizinhos T^+ e T^- que compartilham a mesma face $F = \partial T^+ \cup \partial T^-$, que inicia no nó A e termina no nó B e possui normal unitária \mathbf{n}_F . (b) Triângulo $T = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\}$ com vértice P_1, P_2, P_3 (ordenados no sentido anti-horário) e com faces opostas $F_1 = \text{conv}\{P_2, P_3\}$, $F_2 = \text{conv}\{P_1, P_3\}$, $F_3 = \text{conv}\{P_1, P_2\}$ de comprimento $|F_1|, |F_2|, |F_3|$, respectivamente, sendo que ν_1, ν_2, ν_3 são as normais exteriores de cada aresta.

Então se $T_{\pm} = \text{conv}\{F \cup \{P_{\pm}\}\}$ para o vértice P_{\pm} oposto de F de T_{\pm} , seja

$$\psi_F(x) = \begin{cases} \mp \frac{|F|}{2|T_{\pm}|}(x - P_{\pm}), & \text{para } x \in T_{\pm}, \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

$$= \begin{cases} -\frac{|F|}{2|T_+|}(x - P_+), & \text{para } x \in T_+, \\ \frac{|F|}{2|T_-|}(x - P_-), & \text{para } x \in T_-, \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Lema B.6 As seguintes afirmações são válidas:

(a)

$$\psi_F \cdot \mathbf{n}_F = \begin{cases} 0, & \text{ao longo de } (\cup \mathcal{F}) \setminus F, \\ 1, & \text{ao longo de } F; \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

(b) $\psi_F \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$;

(c) $(\psi_F : F \in \mathcal{F}_h)$ é uma base de $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T})$;

(d)

$$\nabla \cdot \psi_F = \begin{cases} \mp \frac{|F|}{|T_{\pm}|}, & \text{sobre } T_{\pm}, \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

A demonstração desse Lema pode ser encontrada em Bahriawati e Carstensen (2005).

Agora queremos representar $u_h^{n+1}(x, y)$ na base $\{\psi_j\}$, $j = 1, 2, \dots, NT$, onde NT representa o número total de faces da malha. Logo, queremos encontrar $\{\hat{u}_j\}_{j=1:NT}$ tal que

$$u_h^{m+1}(x, y) = \sum_{j=1}^{NT} \hat{u}_j \psi_j, \quad (\text{B.16})$$

Para todo $F \in \mathcal{F}_h$ e $\forall q \in \mathbb{P}_l(F)$,

$$\int_F (u_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_F) q = \int_F \left(-\mathbf{n}_F \cdot \{ \lambda(S_h^n) K \nabla P_h^{n+1} \}_\omega + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h_F} \llbracket P_h^{n+1} \rrbracket \right) q, \quad (\text{B.17})$$

Para cada $F_i \in \mathcal{F}_h$ e para todo $q \in \mathbb{P}_0(F_j)$ temos

$$\int_{F_i} (u_h^{m+1} \cdot \mathbf{n}_{F_i}) q = \int_{F_i} \left(-\mathbf{n}_{F_i} \cdot \{ \lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1} \}_\omega + \gamma_{F_i} \frac{\sigma_{F_i}}{h_{F_i}} \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket \right) q, \quad (\text{B.18})$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{NT} \hat{u}_j \int_{F_i} (\psi_j \cdot \mathbf{n}_{F_i}) q = \int_{F_i} \left(-\mathbf{n}_{F_i} \cdot \{ \lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1} \}_\omega + \gamma_{F_i} \frac{\sigma_{F_i}}{h_{F_i}} \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket \right) q, \quad (\text{B.19})$$

Temos pelo item (a) do Lema B.6 que $\psi_j \cdot \mathbf{n}_{F_i} = 0$ sobre as faces $F_i \neq F_j$ e para $F_i = F_j$, $(\psi_i \cdot \mathbf{n}_{F_i}) = 1$, logo:

$$\hat{u}_i \int_{F_i} q = \int_{F_i} \left(-\mathbf{n}_{F_i} \cdot \{ \lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1} \}_\omega + \gamma_{F_i} \frac{\sigma_{F_i}}{h_{F_i}} \llbracket P_h^{m+1} \rrbracket \right) q, \quad (\text{B.20})$$

Desta forma, temos NT equações e NT incógnitas, sendo que a matriz associada ao sistema formado é uma matriz diagonal o que implica em baixo custo computacional para efetuar a reconstrução de fluxos no espaço $\mathbf{RT}_0(\mathcal{T}_h)$.

Referências Bibliográficas

- Afif e Amaziane(2002)** M. Afif e B. Amaziane. Convergence of finite volume schemes for a degenerate convection-diffusion equation arising in flow in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:5265–5286. Citado na pág. 98
- Afif e Amaziane(2003)** M. Afif e B. Amaziane. Numerical simulation of two-phase flow through heterogeneous porous media. *Numerical Algorithms*, 34:117–125. Citado na pág. 2
- Ahmed(2001)** T. Ahmed. *Reservoir engineering Handbook*. Gulf Professional Publishing, United States, second edition edição. Citado na pág. 6, 43
- Aizinger et al.(2001)** V. Aizinger, C. Dawson, B Cockburn, e P. Castillo. The local discontinuous Galerkin method for contaminant transport. *Advances in Water Resources*, 24:73–87. Citado na pág. 4
- Amaziane et al.(1996)** B. Amaziane, A. Bourgeat, e H. El Amri. Existence of solutions to various rock types odel model of two-phase flow in porous media. *Applicable Analysis: An International Journal*, 60(1-2):121–132. Citado na pág. 2, 21
- Arnold(1982)** D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(4):742–760. Citado na pág. 3, 30
- Arnold et al.(2000)** D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, e D. Marini. Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. Em Bernardo Cockburn, George E. Karniadakis, e Chi-Wang Shu, editors, *Discontinuous Galerkin Methods*, volume 11 of *LNCSE*, páginas 89–101. Citado na pág. 3
- Arnold et al.(2002)** D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, e D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5): 1749–1779. Citado na pág. 3
- Aziz e Settari(1979)** K. Aziz e A. Settari. *Petroleum reservoir simulation*. Applied Science Publishers. Citado na pág. 2, 12, 13
- Bahriawati e Carstensen(2005)** C. Bahriawati e C. Carstensen. Three matlab implementations of the lowest-order Raviart-Thomas MFEM with a posteriori error control. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 5(4):333–361. Citado na pág. 126, 127
- Baker(1977)** Garth Baker. Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. *Math. Comp.*, 31:44–59. Citado na pág. 3
- Bassi e Rebay(1997)** F. Bassi e S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys*, 131:267–279. Citado na pág. 3

- Bastian(1999)** P. Bastian. *Numerical computation of multiphase flows in porous media*. Tese de Doutorado, Universitat Kiel. Citado na pág. 8, 14, 49, 50
- Bastian(2003)** P Bastian. Higher order discontinuous Galerkin methods for flow and transport in porous media. *Challenges in Scientific Computing-CISC 2002*, 35:1–22. Citado na pág. 4
- Baumann e Oden(1999)** C.E. Baumann e Tinsley J. Oden. A discontinuous *hp* finite element method for the Euler and the Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. to appear. Citado na pág. 3
- Bear(1978)** J. Bear. *Dynamic of fluids in porous media*. Dover, New York. Citado na pág. 2
- Bear e Bachmat(1990)** J. Bear e Y. Bachmat. *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London. Citado na pág. 8
- Bertsch et al.(2003)** M. Bertsch, R. Dal Passo, e C.J. Van Duijn. Analysis of oil trapping in porous media flow. *SIAM J. Math. Anal.*, 35:245–267. Citado na pág. 1, 2, 6, 16, 21, 62, 63, 69, 112
- Bourgeat e Hidani(1995)** A. Bourgeat e A. Hidani. Effective model of two-phase flow in a porous medium made of different rock types. *appl. Anal.*, 58(1-2):1–29. Citado na pág. 2, 21
- Brezzi e Fortin(1991)** F. Brezzi e M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag. Citado na pág. 32, 33, 125
- Brezzi et al.(2004)** F. Brezzi, L.D. Marini, e E. Süli. Discontinuous Galerkin methods for first-order hyperbolic problems. *M3AS:Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.*, 14(12):1893–1903. Citado na pág. 5
- Brezzi et al.(1985)** Franco Brezzi, Donatella Marini, e Jim Douglas. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numer. Math.*, 47:217–235. Citado na pág. 32
- Brooks e Corey(1964)** R. Brooks e A. Corey. Hydraulic properties of porous media. *Colorado State University Hydrology Paper*, 3. Citado na pág. 1, 11, 43
- Buckley e Leverett(1942)** S.E. Buckley e M. C. Leverett. Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions, American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers*, 146:107–117. Citado na pág. 6, 42, 43, 111
- Burman e Ern(2002)** E. Burman e A. Ern. Nonlinear diffusion and discrete maximum principle for stabilized Galerkin approximations of the convection-diffusion-reaction equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:3833–3855. Citado na pág. 101
- Cancès(2010)** A. Cancès. On the effects of discontinuous capillarities for immiscible two-phase flows in porous media made of several rock-types. *Networks and Heterogeneous Media*, 5(3):635–647. Citado na pág. 2, 21

- Cancès(2008)** C. Cancès. Nonlinear parabolic equations with spatial discontinuities. *No-DEA*, 15:427–456. Citado na pág. 2, 22, 30
- Cancès(2009)** C. Cancès. Finite volume scheme for two-phase flow in heterogeneous porous media involving capillary pressure discontinuities. Relatório técnico, arXiv:0902.1873v1. Citado na pág. 4, 31
- Cancès et al.(2009)** C. Cancès, T. Gallouët, e A. Porretta. Two-phase flows involving capillary barriers in heterogeneous porous media. *Interfaces and Free Boundaries*, 11: 239–258. Citado na pág. 2, 22, 30
- Chavent e Jaffré(1978)** G. Chavent e J. Jaffré. *Mathematical models and Finite Elements for reservoir simulation*. Elsevier, North-Holland. Citado na pág. 2, 8, 13, 15, 16, 18, 19, 21
- Chavent e Salzano(1982)** G. Chavent e G. Salzano. A finite element method for the 1D water flooding problem with gravity. *J. Comput. Phys.*, 45:307–344. Citado na pág. 35
- Chen(2008a)** L. Chen. *iFEM: an innovative finite element method package in MATLAB*. Submitted. Citado na pág. xix, 115, 118, 122
- Chen(2008b)** L. Chen. Short implementation of bisection in MATLAB. *Recent Advances in Computational Sciences*, páginas 318–332. Selected Papers from the International Workshop on Computational Sciences and Its Education. Citado na pág. xix, 118
- Chen(2001)** Z. Chen. Degenerate two-phase incompressible flow I: Existence, uniqueness and regularity of a weak solution. *Journal of Differential Equations*, 171:203–232. Citado na pág. 2, 16
- Chen(2002)** Z. Chen. Degenerate two-phase incompressible flow II: regularity, stability and stabilization. *Journal of Differential Equations*, 186:345–376. Citado na pág. 2, 16
- Chen e Ewing(2001)** Z. Chen e R. Ewing. Degenerate two-phase incompressible flow. *Numerische Mathematik*, 90:215–240. Citado na pág. 2
- Chen et al.(1994)** Z. Chen, R.E. Ewing, e M. Espedal. Multiphase flow simulation with various boundary conditions. Em *Proceedings of the International Conference on Computational Methods in Water Resources X*, páginas 925–932. Citado na pág. 18
- Chen et al.(2006)** Z. Chen, G. Huan, e Y. Ma. *Computational methods for multiphase flows in porous media*. Siam. Citado na pág. 2, 8, 14
- Cochez-Dhondt e Nicaise(2008)** S. Cochez-Dhondt e S. Nicaise. Equilibrated error estimators for discontinuous Galerkin methods. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 24(5):1236–1252. Citado na pág. 31, 125
- Cockburn(1999)** B. Cockburn. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. Em *High-order methods for computational physics*, volume 9 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, páginas 69–224. Springer, Berlin. Citado na pág. 30
- Cockburn e Shu(1998a)** B. Cockburn e C. W. Shu. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws V: Multidimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 141:199–224. Citado na pág. 3

- Cockburn e Shu(1998b)** B. Cockburn e C.W. Shu. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM. J. Numer. Anal.*, 35: 2440–2463. Citado na pág. 3, 4
- Cockburn e Shu(2001)** B. Cockburn e C.W. Shu. Runge-kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. *Journal of Scientific Computing*, 16(3):173–261. Citado na pág. 30
- Cockburn e Shu(1989)** B. Cockburn e C.W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws II: General framework. *Math. Comput.*, 52:411–435. Citado na pág. 3
- Cockburn e Shu(1991)** B. Cockburn e C.W. Shu. The Runge-Kutta local projection p^1 -discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 25:337–361. Citado na pág. 3
- Cockburn et al.(1989)** B. Cockburn, S.Y. Lin, e C. W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One dimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 84:90–113. Citado na pág. 3
- Cockburn et al.(1990)** B. Cockburn, S. Hou, e C. W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case. *Math. Comput.*, 54:545–581. Citado na pág. 3
- Cockburn et al.(2002)** B. Cockburn, G. Kanschat, D. Schötzau, e C. Schwab. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1): 319–343. Citado na pág. 3
- Cockburn et al.(2004)** B. Cockburn, G. Kanschat, e D. Schötzau. Local discontinuous Galerkin methods for the Oseen equations. *Math. Comput.*, 73:569–593. Citado na pág. 3
- Cockburn(1998)** Bernardo Cockburn. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems. Em A. Quarteroni, editor, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, volume 1697, páginas 151–268. Springer Berlin / Heidelberg. Citado na pág. 3
- Codina(1993)** R. Codina. A discontinuity-capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:325–342. Citado na pág. 100
- Croisille et al.(2005)** J. P. Croisille, A. Ern, T. Lelièvre, e J. Proft. Analysis and simulation of a coupled hyperbolic/parabolic model problem. *J. Numer. Math.*, 13(2):81–103. Citado na pág. 26
- Dake(1978)** L. P. Dake. *Developments in petroleum science 8: Fundamentals of Reservoir Engineering*. Els, London, New York. Citado na pág. 2
- Dake(1998)** L.P. Dake. *Fundamentals of reservoir engineering*. Elsevier Science B.V. Citado na pág. 6, 43
- Darcy(1856)** H. Darcy. The public fountains of the city of Dijon. *chapter Appendix D*. Victor Dalmont, Paris. Citado na pág. 12

- Di Pietro et al.(2008)** D.A. Di Pietro, A. Ern, e J.L. Guermond. Discontinuous Galerkin methods for anisotropic semidefinite diffusion with advection. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(2):805–831. Citado na pág. 3, 5, 26
- Dolejší(2007)** V. Dolejší. Analysis and application of the IIPG method to quasilinear nonstationary convection-diffusion problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, doi: 10.1016/j.cam.2007.10.055. Citado na pág. 36, 37, 38, 39, 75, 76, 77, 113
- Douglas(1983)** J. Douglas. Finite difference methods for two-phase incompressible flow in porous media. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20:681–696. Citado na pág. 2
- Duijn e Neef(1994a)** C. J. van Duijn e M.J. Neef. The effect of capillary forces on immiscible two-phase flow in strongly heterogeneous porous media. Relatório Técnico 94-95, Faculty of technical mathematics and informatics. Citado na pág. 19, 20
- Duijn e Neef(1994b)** C. J. van Duijn e M.J. Neef. Self-similar profiles for capillary diffusion driven flow in heterogeneous porous media. Relatório técnico, Delft University of Technology. Citado na pág. 19, 20
- Duijn e Neef(1998)** C. J. van Duijn e M.J. Neef. Similarity solution for capillary redistribution of two phases in a porous medium with a single discontinuity. *Advances in Water Resources*, 21:451–461. Citado na pág. 6, 58, 60, 112
- Duijn et al.(1995)** C. J. van Duijn, J. Molenaar, e M.J. Neef. The effect of capillary forces on immiscible two-phase flow in heterogeneous porous media. *Transport in Porous Media*, 21:71–93. Citado na pág. 1, 2, 16, 19, 21
- Enchéry et al.(2006)** G. Enchéry, R. Eymard, e A. Michel. Numerical approximation of a two-phase flow problem in a porous medium with discontinuous capillary forces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(6):2402–2422. Citado na pág. 2, 4, 19, 30
- Epshteyn e Rivière(2007)** Y. Epshteyn e B. Rivière. Fully implicit discontinuous finite element methods for two-phase flow. *Applied Numerical Mathematics*, 57:383–401. Citado na pág. 4, 30, 98
- Epshteyn e Rivière(2009)** Y. Epshteyn e B. Rivière. Analysis of hp discontinuous Galerkin methods for incompressible two-phase flow. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 225:487–509. Citado na pág. 35, 36
- Ern e Guermond(2006a)** A. Ern e J. Guermond. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs' systems II: Second-order elliptic PDEs. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44:2363–2388. Citado na pág. 3
- Ern e Guermond(2004)** A. Ern e J. L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlang, New York. Citado na pág. 35
- Ern e Guermond(2006b)** A. Ern e J.L. Guermond. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs' systems I: General Theory. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(2):753–778. Citado na pág. 3
- Ern e Piperno(2008)** A. Ern e S. Piperno. Discontinuous Galerkin methods. Relatório técnico, Université Paris-Est, CERMICS. Citado na pág. 30

- Ern e Proft(2006)** A. Ern e J. Proft. Multi-algorithmic methods for coupled hiperbolic-parabolic problems. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 3(1): 94–114. Citado na pág. 26
- Ern e Stephansen(2008)** A. Ern e A. F. Stephansen. A posteriori energy-norm error estimates for advection-diffusion equations approximated by weighted interior penalty methods. *J. Comp. Math.*, 26(1):1–25. Citado na pág. 26, 35
- Ern et al.(2007a)** A. Ern, S. Nicaise, e M. Vochralík. An accurate $H(\text{div})$ flux reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. *C.R.Acad.Sci.Paris, Ser. I* 345:709–712. Citado na pág. 4, 5, 31, 33, 34
- Ern et al.(2007b)** A. Ern, A. F. Stephansen, e M. Vohralík. Improved energy norm a posteriori error estimation based on flux reconstruction for discontinuous Galerkin methods. Relatório técnico, Ecole nationale des ponts et chaussées and Université Pierre et Marie Curie. Citado na pág. 31, 33
- Ern et al.(2009a)** A. Ern, I. Mozolevski, e L. Schuh. Accurate velocity reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of two-phase porous media flows. *Comptes Rendus Mathematique*, 347:551–554. Citado na pág. 5, 33, 34
- Ern et al.(2009b)** A. Ern, I. Mozolevski, e L.I.A. Schuh. Método de Galerkin descontínuo aplicado a problemas de escoamento em meios porosos com pressão capilar descontínua. Em *XXX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. Citado na pág. 70
- Ern et al.(2009c)** A. Ern, I. Mozolevski, e L.I.A. Schuh. Discontinuous Galerkin method for two-phase flows in heterogeneous porous media with capillary pressure discontinuities. Em *XXX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. Citado na pág. 70
- Ern et al.(2009d)** A. Ern, A. F. Stephansen, e P. Zunino. A discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection-diffusion equations with locally vanishing and anisotropic diffusivity. *IMA J. Numer. Anal.*, 29(2):235–256. doi: 10.1093/imanum/drm050. Citado na pág. 3, 5, 26, 30, 34
- Ern et al.(2010)** A. Ern, I. Mozolevski, e L. Schuh. Discontinuous Galerkin approximation of two-phase flows in heterogeneous porous media with discontinuous capillary pressures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:1491–1501. Citado na pág. 5, 33, 34, 68
- Ersland et al.(1998)** Brit Gunn Ersland, Magne S. Espedal, e Roger Nybo. Numerical methods for flow in a porous medium with internal boundaries. *Computational Geosciences*, 2:217–240. Citado na pág. 1, 4
- Eslinger(2005)** O.J. Eslinger. *Discontinuous Galerkin Finite Element Methods applied to two-phase, air-water flow problems*. Tese de Doutorado, University of Texas at Austin. Citado na pág. 3, 8, 30
- Eymard et al.(2000)** R. Eymard, T. Gallouët, e R. Herbin. Finite volume methods. Em P. Ciarlet e J. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume VII, páginas 723–1020, North-Holland, Amsterdam. Citado na pág. 2

- Eymard et al.(2003)** R. Eymard, R. Herbin, e A. Michel. Mathematical study of a petroleum–engineering scheme. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37:937–962. Citado na pág. 2
- Feistauer(1989)** M. Feistauer. On the finite element approximation of functions with noninteger derivatives. *Numer. Funct. Anal. and Optim.*, 10:91–110. Citado na pág. 77
- Fleischmann(2000)** P. Fleischmann. *Mesh Generation for Technology CAD in Three Dimensions*. Tese de Doutorado, Technische Universität Wien. URL <http://www.iue.tuwien.ac.at/phd/fleischmann>. <http://www.iue.tuwien.ac.at/phd/fleischmann>. Citado na pág. 119
- Fučík(2006)** R. Fučík. Numerical analysis of multiphase porous media flow in groundwater contamination problems. Dissertação de Mestrado, Fakulta jaderná a fyzikálne inženýrská, Katedra matematiky. Citado na pág. 6, 8, 60
- Fučík et al.(2007)** R. Fučík, J. Mikyška, M. Beneš, e T. Illangasekare. An improved semi-analytical solution for verification of numerical models of two-phase flow in porous media. *Vadose Zone Journal*, 6:93–104. Citado na pág. 49
- Fučík et al.(2008)** R. Fučík, J. Mikyška, M. Beneš, e T. Illangasekare. Semianalytical solution for two-phase flow in porous media with a discontinuity. *Vadose Zone Journal*, 7(3):1001–1007. Citado na pág. 6, 60, 61
- Geuzaine e Remacle(2009)** C. Geuzaine e J. F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331. Citado na pág. 118
- Gockenbach(2006)** M.S. Gockenbach. *Understanding and implementing the finite element method*. SIAM. Citado na pág. 115, 119
- Gottlieb e Shu(1998)** S. Gottlieb e C. W. Shu. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*, 67(221):73–85. Citado na pág. 29
- Gottlieb et al.(2001)** S. Gottlieb, C. W. Shu, e E. Tadmor. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM*. 43:89–112. Citado na pág. 30
- Gustafsson(1994)** K. Gustafsson. Control theoretic techniques for stepsize selection in implicit runge-kutta methods. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20:496–517. Citado na pág. 120
- Gustafsson e Söderling(1997)** K. Gustafsson e G. Söderling. Control strategies for the iterative solution of nonlinear equations in ODE solvers. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1):23–40. Citado na pág. 120
- Helmig(1997)** R. Helmig. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface*. Springer. Citado na pág. 2, 6, 8, 13, 14, 43, 60
- Hesthaven e Warburton(2008)** Jan S. Hesthaven e T. Warburton. *Nodal discontinuous Galerkin methods algorithms, analysis, and applications*, volume 54 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer. Citado na pág. 24, 115, 116
- Houston et al.(2002)** P. Houston, C. Schwab, e E. Süli. Discontinuous hp-finite element methods for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*., 39(6):2133–2163. Citado na pág. 3

- Hughes et al.(1986)** T. Hughes, M. Mallet, e A. Mizukami. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54:341–355. Citado na pág. 100
- Johnson et al.(1987)** C. Johnson, A. Schatz, e L. Wahlbin. Crosswind smear and pointwise error in streamline diffusion finite element methods. *Math. Comp.*, 49:25–38. Citado na pág. 100
- Kelley(2003)** C.T. Kelley. *Solving Nonlinear equations with Newton's method*. SIAM. Citado na pág. 122
- Kleppe(2007)** J Kleppe. Buckley-Leverett analysis. Relatório técnico, Norwegian University of Science and Technology. Citado na pág. 6, 43
- Klieber e Riviére(2006)** W. Klieber e B. Riviére. Adaptive simulations of two-phase flow by discontinuous Galerkin methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(1-3): 404–419. Citado na pág. 3, 30, 98
- Kroener e Luckhaus(1984)** D. Kroener e S. Luckhaus. Flow of oil and water in a porous medium. *Journal of Differential Equations*, 55:276–288. Citado na pág. 13
- Kuzmin et al.(2005)** D. Kuzmin, R. Löhner, e S. Turek. *Flux-Corrected transport: principles, algorithms, and applications*. Springer-Verlag. Citado na pág. 120
- LeSaint e Raviart(1974)** P. LeSaint e Pierre-Arnaud Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. Em Carl de Boor, editor, *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*, páginas 89–123. Citado na pág. 3
- Leverett(1941)** M. Leverett. Capillary behavior in porous solids. *Trans. AIME*, 142: 152–169. Citado na pág. 18
- McWhorter e Sunada(1990)** D.B. McWhorter e D.K. Sunada. Exact integral solutions for two-phase flow. *Water Resources Research*, 26(3):399–413. Citado na pág. xiv, 6, 49, 50, 112
- Michel(2003)** A. Michel. A finite volume scheme for the simulation of two-phase incompressible flow in porous media. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 41:1301–1317. Citado na pág. 2
- Mozolevski et al.(2008)** I. Mozolevski, L.I.A. Schuh, e S.M.B. Barros. Método de Galerkin descontínuo aplicado à equação de Buckley-Leverett. Em *XXIX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, volume PAP1059. Citado na pág. 43
- Mozolevski et al.(2010)** I. Mozolevski, A. Ern, e L. Schuh. Método de Galerkin descontínuo de alta ordem aplicado à problemas de escoamento bifásico em meios porosos com heterogeneidades nas rochas e pressão capilar. Em *IX Argentinian Congress on Computational Mechanics and XXXI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. Citado na pág. 80
- Muskat(1949)** M. Muskat. *Physical principles of oil production*. McGraw-Hill, New York. Citado na pág. 12
- Nayagam et al.(2004)** D. Nayagam, G. Schäfer, e R. Mosé. Modelling two-phase incompressible flow in porous media using mixed hybrid and discontinuous finite elements. *Computational Geosciences*, 8(49–73):2004. Citado na pág. 4

- Oden et al.(1998)** J. Oden, I. Babuška, e C. Baumann. A discontinuous hp finite element method for diffusion problems. *J. Comput. Phys.*, 146(2):491–519. Citado na pág. 3
- Ohlberger(1997)** M. Ohlberger. Convergence of a mixed finite element - finite volume method for the two phase flow in porous media. *East-West Journal of Numerical Mathematics*, 5:183–210. Citado na pág. 2
- Peaceman(1977)** D.W. Peaceman. *Fundamentals of numerical reservoir simulation*. Elsevier, New York. Citado na pág. 2, 12
- Reed e Hill(1973)** W. Reed e T. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Relatório Técnico LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM. Citado na pág. 3
- Rivière(2004)** B. Rivière. Numerical study of a discontinuous Galerkin method for incompressible two-phase flow. Em *Proceedings of ECCOMAS*, volume 2. Citado na pág. 85, 88, 113
- Rivière e Bastian(2003)** B. Rivière e P. Bastian. Superconvergence and $H(\text{div})$ projection for discontinuous Galerkin methods. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 42:1043–1057. Citado na pág. 3, 4, 31, 32
- Rivière e Bastian(2004)** B. Rivière e P. Bastian. Discontinuous Galerkin methods for two-phase flow in porous media. *Kluwer Academic Publishers*. Citado na pág. 3, 4, 30, 98
- Rivière e Wheeler(1999)** B. Rivière e M. F. Wheeler. *A Discontinuous Galerkin Method Applied to Nonlinear Parabolic Equations*, volume 11 of *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*, páginas 231–244. in: B. Cockburn, G.E. Karniadakis, C.W. Schu, Discontinuous Galerkin methods. Theory, computation and applications. Citado na pág. 3, 35
- Rivière e Wheeler(2002a)** B. Rivière e M.F. Wheeler. Discontinuous Galerkin methods for flow and transport problems in porous media. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18:63–68. Citado na pág. 4
- Rivière e Wheeler(2002b)** B. Rivière e M.F. Wheeler. Non conforming methods for transport with non-linear reaction. *Fluid Flow and Transport in Porous Media*, 295:421–430. Citado na pág. 4
- Rivière et al.(2001)** B. Rivière, M. F. Wheeler, e V. Girault. A priori error estimates for finite element methods based on discontinuous approximation spaces for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(3):902–931. Citado na pág. 3
- Rypl(1998)** D. Rypl. *Sequential and parallel generation of unstructured 3D meshes*. Tese de Doutorado, Czech Technical University in Prague, Prague, Czech Republic. URL <http://power2.fsv.cvut.cz/~dr/papers/Thesis>. <http://power2.fsv.cvut.cz/dr/papers/Thesis>. Citado na pág. 119
- Scheidegger(1957)** A. E. Scheidegger. *The physics of flow through porous media*. University of Toronto Press. Citado na pág. 12
- Schroll e Tveito(1997)** H. Schroll e A. Tveito. Local existence and stability for a hyperbolic-elliptic system modeling two-phase reservoir flow. Relatório técnico, Institut für Geometry und Praktische Mathematik, RWTH Aachen. Citado na pág. 2, 16

- Sherwin et al.(2006)** S. J. Sherwin, R. M. Kirby, J. Peiró, R. L. Taylor, e O. C. Zienkiewicz. On 2d elliptic discontinuous galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65:752–784. Citado na pág. 3
- Shih e Elman(1999)** Y. Shih e H. Elman. Modified streamline diffusion schemes for convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174:137–151. Citado na pág. 100
- Valli et al.(2005)** A. Valli, G. Carey, e A. Coutinho. Control strategies for timestep selection in finite element simulation of incompressible flows and coupled reaction-convection-diffusion processes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 47:201–231. Citado na pág. 120, 121
- Van Genuchten(1980)** M. Van Genuchten. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44:892–898. Citado na pág. 1, 18
- Šolín(2006)** P. Šolín. *Partial differential equations and the finite element method*. John Wiley & Sons. Citado na pág. 117
- Šolín et al.(2004)** P. Šolín, K. Segeth, e I. Doležal. *Higher-Order finite element methods*. Chapman & Hall / CRC Press. Citado na pág. 117
- Wheeler e Yotov(1998)** M. Wheeler e I. Yotov. Physical and computational domain decomposition for modeling subsurface flows. *Contemporary Mathematics*, 218:217–228. Citado na pág. 26
- Wheeler(1978)** Mary F. Wheeler. An elliptic collocation finite element method with interior penalties. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:152–161. Citado na pág. 3