

Uma esfera simétrica  
rolando sobre uma  
superfície de revolução

Bruno Tadeu Costa

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada  
Orientadora: Profa. Dra. Helena Maria Ávila de Castro

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu  
auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, outubro de 2010



# Uma esfera simétrica rolando sobre uma superfície de revolução

Esta versão definitiva da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Bruno Tadeu Costa em 14/10/2010.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Helena Maria Ávila de Castro IME - USP
- Prof. Dr. Frank Michael Forger IME - USP
- Prof. Dr. Fernando Martins Antoneli Júnior UNIFESP

# Resumo

O trabalho apresenta inicialmente as equações de movimento de uma esfera dinamicamente simétrica rolando sobre uma superfície de revolução convexa, obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange. O fato da esfera ser dinamicamente simétrica induz uma simetria pela ação de  $SO(3) \times S^1$ , a qual reduz o número de coordenadas da variedade vinculada. Mostra-se que uma solução no sistema  $SO(3) \times S^1$ -reduzido é ou um ponto de equilíbrio ou periódica. Além disso, demonstra-se que no caso de um campo vetorial em um  $G$ -fibrado principal, em que  $G$  é compacto e conexo, que seja invariante pela ação de  $G$  e que se projete em um campo vetorial no espaço base cujas órbitas sejam periódicas, as órbitas do campo original são quase-periódicas sobre toros de dimensão  $r + 1$  ( $r$  é o posto de  $G$ ). A partir destes resultados, mostra-se que as órbitas da esfera rolando sobre uma superfície são quase-periódicas em toros de dimensão 3. Por fim, verifica-se que existem órbitas particulares que são quase-periódicas sobre toros de dimensão 2.



# Abstract

This work starts by presenting the equations of motion of a dynamically symmetric sphere rolling on a convex surface of revolution, obtained from the Euler-Lagrange equations. The fact that the sphere is dynamically symmetric induces a symmetry by the action of  $SO(3) \times S^1$  which reduces the number of coordinates of the constraint manifold. It is shown that a solution to the  $SO(3) \times S^1$ -reduced system is either an equilibrium point or periodic. Furthermore, it is shown that in the case of a vector field on a  $G$ -principal bundle, where  $G$  is connected and compact, which is invariant under the action of  $G$  and which projects into a vector field in the base space whose orbits are periodic, the orbits of the original field are quasi-periodic on  $(r+1)$ -dimensional tori ( $r$  is the rank of  $G$ ). From these results, it is shown that the orbits of the sphere rolling on a surface are quasi-periodic on 3-dimensional tori. Finally, we found that there are particular orbits that are quasi-periodic on 2-dimensional tori.



# Sumário

Introdução	xi
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Grupos e Álgebras de Lie . . . . .	1
1.2 Dedução Heurística da Formulação Lagrangiana para Sistemas de Partículas	7
1.3 Formulação Lagrangiana Geral . . . . .	10
1.4 Ações de Grupos e Alguns Resultados . . . . .	14
<b>2 Uma Esfera Simétrica Rolando Sobre Uma Superfície</b>	<b>15</b>
2.1 Os Espaços de Configuração e de Fase . . . . .	15
2.2 Equação de Lagrange . . . . .	20
2.3 Movimento Vinculado . . . . .	22
2.4 Sistema $SO(3)$ -Reduzido . . . . .	36
2.5 Sistema $SO(3) \times S^1$ -reduzido . . . . .	46
<b>3 Resultados Principais</b>	<b>73</b>
3.1 Soluções do Sistema Reduzido . . . . .	73
3.2 Movimento Quase-Periódico em um Fibrado Principal . . . . .	88
3.3 Movimento Quase-Periódico Sobre Toros . . . . .	99
<b>Apêndice A</b>	<b>109</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>113</b>



# Introdução

O estudo do rolamento de esferas sobre superfícies tem uma longa história e aplicações importantes em teoria do controle. Em 1893, foi dada a solução do difícil problema do movimento de uma esfera oca, contendo um giroscópio em seu interior, que rola sem escorregar sobre um plano horizontal. Em sua solução, Bobylev expressou todos os parâmetros, determinando a posição da esfera e do giroscópio em termos de funções elípticas do tempo, e observou as trajetórias dos pontos de contato da esfera com o plano. Na construção de Bobylev, o giroscópio ocupou uma posição central dentro de uma casca esférica homogênea que a princípio parecia ser o tipo de casca que daria o movimento mais simples. Porém, Zukovskii demonstrou que o problema fica muito mais simples se for adicionado um anel do plano equatorial do giroscópio à casca esférica e em 1897 Zukovskii publicou "On Bobylev's gyroscopic sphere".

Em 1897, Caplygin publicou um artigo dizendo que a solução do problema do rolamento de um corpo de revolução sobre um plano horizontal dada por Lindelof estava errada. Caplygin fez sua própria investigação sobre o problema e adicionou a condição de que um giroscópio cujo eixo coincidia com o eixo de simetria do corpo era considerado. Caplygin encontrou novas condições em que integrais de movimento existiam. Ele apresentou aplicações em estudos onde esferas rígidas rolavam uma na outra. Em 1903, Caplygin resolveu o problema de uma esfera simétrica rolando sobre um plano horizontal.

Este tipo de estudo leva a outros tipos de problemas, como por exemplo o chamado problema de Kendall, analisado por Hammersley num artigo de 1983. Em tal problema considera-se uma bola de raio  $r$  movendo-se sobre um plano horizontal. Cada "estado" da bola é definido pelo ponto de contato e a posição de um referencial preso a ela em relação a um referencial fixo. Um movimento da bola é um rolamento sobre uma reta, onde não há escorregamento. O problema em questão é determinar o número  $k$  de movimentos necessários para levar a bola de um estado para outro sem que haja pivotamento. Esse tipo de problema

é importante também em teoria do controle (Jurđjević).

Neste trabalho, analisaremos o rolamento de uma esfera dinamicamente simétrica (isto é, a densidade de massa depende apenas da distância à origem) sobre uma superfície de revolução convexa. Assumiremos que a esfera rola sem escorregar sobre a superfície, o que criará um vínculo não holônomo para o sistema.

A partir das restrições da esfera rolar sobre uma superfície e não escorregar, observamos que o movimento no espaço de fase ocorre sobre uma variedade de dimensão 8, chamada variedade vinculada. O fato da esfera ser dinamicamente simétrica e a superfície onde a esfera rola de revolução, induz uma simetria pela ação de  $SO(3) \times S^1$  que reduzirá o número de coordenadas da variedade vinculada. Esse novo espaço será chamado  $SO(3) \times S^1$ -reduzido. Em um caso mais geral, “redução por simetrias” significa obter um sistema com menos coordenadas e que preserve a estrutura do espaço.

Começaremos mostrando que uma solução do sistema  $SO(3) \times S^1$ -reduzido é um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica. Demonstra-se que no caso de um campo vetorial em um  $G$ -fibrado principal, em que  $G$  é compacto e conexo, que seja invariante pela ação de  $G$  e que se projete em um campo vetorial no espaço base cujas órbitas sejam periódicas, as órbitas do campo original são quase-periódicas sobre toros de dimensão  $r + 1$  ( $r$  é o posto de  $G$ ). A partir destes resultados, mostra-se que as órbitas da esfera rolando sobre uma superfície são quase-periódicas em toros de dimensão 3.

Este trabalho foi dividido em três capítulos e um apêndice.

O primeiro capítulo apresenta as preliminares para um bom entendimento do trabalho. Na primeira seção deste capítulo, introduzimos definições e alguns resultados sobre grupos e álgebras de Lie. Já na segunda seção, deduzimos a formulação lagrangiana para um sistema de  $n$  partículas. Na terceira seção, abordamos a formulação lagrangiana em um caso geral. Aos leitores que estiverem familiarizados com tais teorias, recomendamos que omitam esse capítulo. Por fim, na quarta seção, apresentamos alguns resultados sobre grupos de Lie que serão usados.

No segundo capítulo, deduzimos as equações de movimento. Na primeira seção descrevemos o espaço de fase e as equações de movimento de uma esfera rolando sobre uma superfície arbitrária. Na segunda seção, usamos o fato da esfera ser dinamicamente simétrica para reduzir as simetrias induzidas por  $SO(3)$  e em seguida encontramos um campo vetorial sobre  $\frac{C}{SO(3)}$ . Assumimos na terceira seção que a superfície em que a esfera rola é de revolução para

reduzir as simetrias induzidas por  $S^1$  e então calculamos o campo vetorial sobre o espaço reduzido e mostramos algumas de suas propriedades.

O capítulo mais importante deste trabalho é o terceiro, para o qual referências significativas são [11] e [6]. Aqui apresentamos o resultado principal, que descreve como as órbitas se comportam no espaço de fase. Esse resultado é demonstrado nas primeira e segunda seções, onde começamos mostrando que uma curva integral de  $\chi$  no espaço  $SO(3) \times S^1$ -reduzido é um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica. Em seguida, mostramos um resultado geral sobre movimentos quasi-periódicos em um fibrado principal, a partir da hipótese de que as soluções no espaço base são periódicas. A partir dos resultados destas duas seções, concluimos que a variedade vinculada é folheada por toros de dimensão no máximo 3, nos quais o movimento é quasi-periódico. Finalmente, mostramos que existe movimento particulares que são quase-periódicos sobre toros de dimensão 2.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Grupos e Álgebras de Lie

Nesta seção recordaremos alguns resultados básicos sobre grupos e álgebras de Lie. Começaremos com a definição de campos  $\phi$ -relacionados, que será necessária para formular o teorema principal dessa seção. Introduziremos o conceito de distribuição  $C^\infty$  e de variedade integral de uma distribuição. Seguiremos então com as definições de álgebra e grupo de Lie e terminaremos com o resultado que garante que a álgebra de Lie de um grupo de Lie pode ser identificada com o espaço tangente na identidade.

**Definição 1.1.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $\Phi : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Um campo vetorial diferenciável  $X \in \mathfrak{X}(M)$  diz-se  $\phi$ -relacionado com o campo  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  se, para todo  $p \in M$ , for verdade que*

$$Y_{\phi(p)} = d\phi_p(X_p)$$

**Definição 1.2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e  $d$ , com  $1 \leq d \leq m$ , um inteiro. Uma distribuição  $d$ -dimensional  $D$  em  $M$  é uma aplicação que a cada  $p \in M$  associa um subespaço  $D_p \subset T_p M$  de dimensão  $d$ . Dizemos que a distribuição  $D$  é diferenciável se, para cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e campos vetoriais  $X_1, \dots, X_d \in \mathfrak{X}(M)$ , tais que*

$$D_q = \langle X_1(q), \dots, X_d(q) \rangle, \quad \forall q \in U$$

Se  $D$  é uma distribuição em  $M$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é um campo vetorial, dizemos que  $X$  é um campo vetorial em  $D$  ou que  $X$  é tangente a  $D$  se

$$X_p \in D_p, \forall p \in M$$

**Definição 1.3.** Seja  $D$  uma distribuição na variedade  $M$ . Uma subvariedade conexa  $(N, \Phi)$  de  $M$  diz-se uma variedade integral de  $D$  se

$$d_p\Phi(T_pN) = D_{\Phi(p)}, \forall p \in N.$$

**Definição 1.4.** Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  com uma operação  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , denominada colchete de Lie, que satisfaz:

1. *Anti-simetria:*  $[X, Y] = -[Y, X]$
2. *Bilinearidade:*  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \forall a, b \in \mathbb{R}$
3. *Identidade de Jacobi:*  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

**Exemplo 1.1.**  $\mathbb{R}^d$  com o colchete de Lie identicamente nulo,  $[\cdot, \cdot] \equiv 0$ , é uma álgebra de Lie, dita a álgebra de Lie abeliana de dimensão  $d$ .

**Exemplo 1.2.** Se  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  são álgebras de Lie, o seu produto cartesiano  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  é uma álgebra de Lie, com o colchete de Lie definido pela fórmula:

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{h}}).$$

Seguiremos com a definição de grupo de Lie.

**Definição 1.5.** Um grupo de Lie é um grupo  $G$  com uma estrutura diferenciável, tal que a operação

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh^{-1}, \end{aligned}$$

é diferenciável.

**Exemplo 1.3.**  $\mathbb{R}^d$  é um grupo de Lie com a adição de vetores.

**Exemplo 1.4.** O círculo  $S^1$  é um grupo de Lie.

**Exemplo 1.5.** Se  $G$  e  $H$  são grupos de Lie, então o produto cartesiano  $G \times H$  é um grupo de Lie com a operação  $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$ . Assim, o toro  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  é um grupo de Lie.

**Definição 1.6.** Um campo vetorial  $X$  diz-se invariante à esquerda se:

$$(L_g)_*X = X, \quad \forall g \in G,$$

onde  $L_g : G \rightarrow G$  é a translação à esquerda  $L_g(h) = gh$ . De forma análoga, definimos campos vetoriais invariantes à direita.

Aqui,  $(L_g)_*X = X$  significa que  $X$  está  $L_g$ -relacionado com si mesmo, ou seja,  $X_{L_g(p)} = dL_g(p)X_p$ . Assim,  $X$  é invariante à esquerda se  $X$  é  $L_g$ -invariante à esquerda para todo  $g \in G$ .

**Observação 1.1.** Se  $X$  e  $Y$  são campos vetoriais em  $G$ , seu colchete de Lie usual,  $[X, Y] = XY - YX$ , define uma operação de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , que satisfaz as propriedades da Definição 1.4.

**Proposição 1.1.** Seja  $\mathfrak{X}_{inv}(G)$  o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda sobre o grupo de Lie  $G$ , então:

1.  $\mathfrak{X}_{inv}(G)$  é uma álgebra de Lie, com o colchete de Lie usual,
2.  $\mathfrak{X}_{inv}(G)$  pode ser identificado com o espaço tangente a  $G$  na identidade.

**Demonstração:** É imediato que  $\mathfrak{X}_{inv}(G)$  é um subespaço vetorial de  $\mathfrak{X}(G)$ . Para demonstrar 1 basta mostrarmos que se  $X$  e  $Y$  são campos vetoriais invariantes à esquerda, então

$$(L_g)_*[X, Y] = [X, Y], \quad \forall g \in G$$

De fato, dada  $f \in C^\infty(G)$ ,

$$(L_g)_*[X, Y](f) = [X, Y](f \circ L_g) = X(Y(f \circ L_g)) - Y(X(f \circ L_g)) =$$

$$X((L_g)_*Yf) - Y((L_g)_*Xf) = XY(f) - YX(f) = [X, Y](f),$$

pois  $Y$  e  $X$  são  $L_g$ -invariantes.

Logo  $[ \cdot, \cdot ] : \mathfrak{X}_{inv}(G) \times \mathfrak{X}_{inv}(G) \rightarrow \mathfrak{X}_{inv}(G)$  está bem definida e satisfaz as propriedades que tornam  $\mathfrak{X}_{inv}(G)$  uma álgebra de Lie.

Para demonstrar 2, considere a aplicação :

$$\mathfrak{X}_{inv}(G) \rightarrow T_e G$$

$$X \mapsto X_e$$

Esta aplicação é um isomorfismo linear. De fato, para vermos que é sobrejetora, dado  $v \in T_e G$ , basta tomarmos um campo vetorial  $X$  em  $G$  da seguinte forma:

$$X_g = dL_g(e).v$$

Este campo vetorial é invariante à esquerda, pois:

$$dL_g(p)X_p = dL_g(p).dL_p(e)v = d(L_g \circ L_p)(e).v = X_{L_g(p)}$$

e  $X_e = v$ , pois como  $L_e = Id$ , então  $dL_e(g)v = Idv = v$ . Além disso, se  $X_e = 0$ , então  $X_g = dL_g X_e = 0$ , ou seja,  $X_g \equiv 0$  e portanto a aplicação é injetora. Claramente esta aplicação é linear. Assim  $\mathfrak{X}_{inv}(G)$  pode ser identificado com  $T_e G$  e

$$\dim \mathfrak{X}_{inv}(G) = \dim T_e G = \dim G$$

■

**Definição 1.7.** A aplicação exponencial de um grupo de Lie  $G$ ,  $exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ , é dada por  $exp(X) = \lambda_X(1)$ , onde  $\mathfrak{g}$  é a álgebra de Lie de  $G$  e  $\lambda_X : \mathbb{R} \rightarrow G$  é o único subgrupo a um parâmetro de  $G$  cujo vetor tangente a  $\lambda_X$  na identidade é igual a  $X$ , ou seja,  $\lambda'_X(0) = X$ .

**Observação 1.2.** Um subgrupo a um parâmetro é um homomorfismo contínuo de  $\mathbb{R}$  para um grupo  $G$ .

Para o próximo exemplo precisaremos dos seguintes resultados:

**Lema 1.1.** *O conjunto  $GL(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) / \det A \neq 0\}$  munido da estrutura diferenciável descrito abaixo e da multiplicação de matrizes é um grupo de Lie.*

**Demonstração:** Identificando o conjunto das matrizes  $n \times n$ ,  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , com  $\mathbb{R}^{n^2}$ , consideremos a função determinante  $\det : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ . Temos que  $\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = GL(n)$ . Como  $\mathbb{R} - \{0\}$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}$  e a função  $\det$  é contínua,  $GL(n)$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Assim, podemos considerar em  $GL(n)$  a estrutura diferenciável de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Agora, sejam  $A, B, C \in GL(n)$ .  $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$ , pois  $\det A \neq 0$  e  $\det B \neq 0$  e assim  $AB \in GL(n)$ . Também  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \neq 0$  e portanto  $A^{-1} \in GL(n)$  e  $IdA = AId = A$ . Além disso,  $(AB)C = A(BC)$ . Logo  $GL(n)$ , munido da multiplicação de matrizes, é um grupo. A operação  $(A, B) \mapsto AB^{-1}$  é diferenciável pois suas componentes, que podem ser vistas como funções coordenadas, são formadas por somas e multiplicações das coordenadas de  $A$  e  $B^{-1}$ .

Portanto  $GL(n)$  é um grupo de Lie. ■

**Observação 1.3.** A álgebra de Lie de  $GL(n)$  é o conjunto  $\mathfrak{gl}(n)$  das matrizes  $n \times n$ , com  $[X, Y] = XY - YX$ .

**Observação 1.4.** No grupo de Lie  $GL(n)$  das matrizes inversíveis com álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(n)$ , a aplicação exponencial  $exp : \mathfrak{gl}(n) \rightarrow GL(n)$  coincide com a exponencial usual de matrizes, dada por:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

onde  $A \in \mathfrak{gl}(n)$ .

**Definição 1.8.** *Um subgrupo de Lie  $H$  de um grupo de Lie  $G$  é um subgrupo tal que  $H$  é uma subvariedade imersa de  $G$  e  $\mu : H \times H \rightarrow H$ , dada por  $\mu(a, b) = ab^{-1}$  é diferenciável.*

A prova do próximo teorema pode ser encontrada em [2].

**Teorema 1.1.** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $H \subset G$  um subgrupo fechado de  $G$ . Então  $H$  é um subgrupo de Lie de  $G$ .*

**Exemplo 1.6.**  $SO(3)$ , o conjunto das matrizes ortogonais de determinante 1 é um grupo de Lie e sua álgebra de Lie é  $\mathfrak{so}(3)$ , o conjunto das matrizes anti-simétricas. Para vermos isso, considere  $GL(n)$ , que pelo Lema 1.1 é um grupo de Lie. Pelo Lema 1.1, para concluir que  $SO(3)$  é grupo de Lie basta vermos que ele é subgrupo fechado de  $GL(n)$ . Começaremos mostrando que é um subgrupo.

Temos que  $SO(3) = \{A \in GL(3); A^T A = I, \det(A) = 1\}$ . Sejam  $A, B \in SO(3)$ , então:

1.  $I^T I = I$  e  $\det(I) = 1$ , logo  $I \in SO(3)$ ;
2.  $(AB)^T(AB) = B^T A^T A B = B^T B = I$  e  $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$ , logo  $AB \in SO(3)$ ;
3.  $(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (A A^T)^{-1} = I^{-1} = I$  e  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1$ , logo  $A^{-1} \in SO(3)$ .

Assim  $SO(3)$  é um subgrupo de  $GL(3)$ . Para mostrar que é fechado, considere uma sequência  $(A_n) \in SO(3)$  que converge para  $A \in GL(n)$ , então

$$A^T A = (\lim A_n)^T \cdot \lim A_n = \lim A_n^T \cdot \lim A_n = \lim A_n^T \cdot A_n = \lim I = I,$$

logo  $A \in SO(3)$  e portanto  $SO(3)$  é fechado. Portanto  $SO(3)$  é grupo de Lie.

Mostraremos agora que a álgebra de Lie de  $SO(3)$  é  $so(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) / X + X^T = 0\}$ .

A derivada da curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$ , dada por  $\alpha(t) = e^{tX}$  é:

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX}.$$

Com isso, dado  $X \in T_e SO(3)$  e assim  $e^{tX} \in SO(3)$ , temos:

$$\begin{aligned} e^{tX} \cdot (e^{tX})^T = I &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ e^{tX} \cdot (e^{tX})^T \right] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} I = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} e^{tX} \Big|_{t=0} \cdot (e^{0X})^T + e^{0X} \cdot \frac{d}{dt} (e^{tX})^T \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow X e^{0X} + (X e^{0X})^T = 0 \Rightarrow X + X^T = 0 \Rightarrow X \in so(3). \end{aligned}$$

■

**Exemplo 1.7.** A álgebra de Lie do produto cartesiano  $G \times H$  de dois grupos de Lie é o produto cartesiano  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  das suas álgebras de Lie.

## 1.2 Dedução Heurística da Formulação Lagrangiana para Sistemas de Partículas

Apresentaremos nesta seção um modo alternativo de descrever o movimento mecânico de  $n$  partículas sem usar explicitamente a Segunda Lei de Newton, e para isso introduziremos o conceito de Lagrangiana e Equações de Lagrange. A vantagem de usar tais equações é que são boas para fazermos transformações arbitrárias de coordenadas no sistema, ou seja, depois de uma transformação de coordenadas, as equações de Euler-Lagrange são transformadas nas equações de Euler-Lagrange de uma Lagrangiana transformada. Começaremos a seção mostrando como encontrar a Lagrangiana relacionada ao sistema de  $n$  partículas e então encontraremos a Equação de Euler-Lagrange por meio de cálculo variacional.

Considere um sistema mecânico de  $n$  partículas, cujas trajetórias serão denotadas por  $s_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A cada partícula é associado um número real positivo  $m_i$ , chamado sua massa e  $r_i$  é o vetor que determina a posição da  $i$ -ésima partícula. A equação de Newton para cada partícula será dada por

$$m_i \ddot{r}_i = F_i^T,$$

onde  $F_i^T$  é a força total que age sobre a partícula  $r_i$  e  $\ddot{r}_i = \frac{d^2 r_i(t)}{dt^2}$ . Além disso, suporemos que a força que age sobre cada partícula depende apenas da posição da partícula.

Suporemos de agora em diante que o movimento do sistema está restrito, como por exemplo permanecer inalterada a distância entre as partículas ou serem obrigadas a mover-se sobre uma superfície. Consideraremos que as restrições podem ser expressas como equações que relacionam as posições das partículas, da seguinte forma:

$$f(r_1, \dots, r_n, t) = 0. \tag{1.1}$$

No caso do sistema com  $n$  partículas em  $\mathbb{R}^3$ , podemos observar que cada partícula depende de 3 coordenadas independentes e assim o sistema todo é determinado por  $3n$  coordenadas. Se existem restrições expressas por  $k$  equações da forma (1.1), poderemos utilizá-las para eliminar  $k$  das  $3n$  coordenadas, e assim teremos  $3n - k$  coordenadas independentes. Podemos agora introduzir  $3n - k$  coordenadas independentes  $q_1, \dots, q_{3n-k}$  em função das antigas

coordenadas  $r_1, \dots, r_n$ , ou seja, temos as equações:

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_m, t), \quad (1.2)$$

para  $i = 1, \dots, n$  e  $m = 3n - k$ .

Considere uma perturbação do sistema  $(s_i^\epsilon)_{\epsilon \in I}$ , onde em  $\epsilon = 0$  temos o sistema original.

Assim,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} r_i \right|_{\epsilon=0} = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} q_j \right|_{\epsilon=0}. \quad (1.3)$$

Para simplificar a notação denotaremos  $\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$  por  $\delta$ .

Além disso, temos:

$$v_i = \dot{r}_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}, \quad (1.4)$$

onde  $v_i = v_i(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t)$ .

Escreveremos a força total exercida no sistema como a soma de uma força externa  $F_i$  com a força de vínculo  $f_i$ , ou seja,  $F_i^T = F_i + f_i$

Consideraremos agora apenas sistemas nos quais  $f_i \cdot \delta r_i = 0$ , como é o caso de partículas que são obrigadas em mover-se sobre superfícies, pois neste caso a força de vínculo é perpendicular à superfície e o deslocamento é tangente a ela e assim o produto interno  $f_i \cdot \delta r_i = 0$ .

Além disso, pela lei de Newton, concluímos:

$$F_i^T - m\ddot{r}_i = 0 \quad (1.5)$$

e assim, como  $f_i \cdot \delta r_i = 0$ ,

$$\sum_i (F_i - m\ddot{r}_i) \delta r_i = 0. \quad (1.6)$$

Temos, por um lado que

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i,j} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j, \quad (1.7)$$

onde

$$Q_j = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}.$$

Por outro lado,

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1.8)$$

Usaremos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\} = \\ &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dr_i}{dt} \right) \right\} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right\}. \end{aligned}$$

Usando a expressão de  $v_i$ , concluímos que

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

e assim temos

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right\}.$$

Deste modo, a equação (1.8) se transforma em

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j.$$

Mas  $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$  é a energia cinética  $T$  do sistema, e assim, usando a equação (1.7), temos:

$$0 = \sum_i (F_i - m \ddot{r}_i) \delta r_i = \sum_j \left\{ Q_j - \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right\} \delta q_j.$$

Agora, como essa equação é satisfeita para qualquer perturbação do sistema, teremos que ter:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (1.9)$$

Veremos como fica a equação quando temos um sistema conservativo, ou seja, sistemas onde não há dissipação de energia, e portanto a energia total permanece constante no tempo. Neste caso, teremos

$$F_i = -\nabla_i V,$$

onde  $V = V(r_1, r_2, \dots, r_n)$  é a energia potencial do sistema e  $\nabla_i V = \frac{\partial V}{\partial r_i}$ .

Logo

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

e calculando a derivada parcial de  $-V(r_1, r_2, \dots, r_n)$  com respeito a  $q_j$ , ficamos com

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = Q_j.$$

Além do mais, como a força sobre cada partícula depende apenas da posição da partícula,  $V$  é uma função apenas de posição e assim

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Com essas informações, vemos que a equação (1.9) fica da forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0$$

e então definimos a função Lagrangiana por  $L = T - V$  e a equação acima se torna

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

que é denominada equação de Lagrange.

### 1.3 Formulação Lagrangiana Geral

O que fizemos até agora foi calcular as equações de Lagrange considerando o sistema de  $n$  corpos. Agora, calcularemos a equação de Lagrange para um movimento acontecendo sobre uma variedade diferenciável. Para isso começaremos definindo a variação de uma curva e então mostraremos o teorema que apresenta a equação de Euler-Lagrange.

Seja  $Q$  uma variedade diferenciável. Fixados  $q_a$  e  $q_b$  em  $Q$  e um intervalo  $[a, b]$ , defina o espaço das trajetória de  $q_a$  para  $q_b$  com extremos fixos por

$$\omega(q_a, q_b, [a, b]) = \{q : [a, b] \rightarrow Q/q \text{ é } C^2 \text{ e } q(a) = q_a, q(b) = q_b\}.$$

Suponha que seja dada a função diferenciável

$$L : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$$

e defina:

$$S_L : \omega \rightarrow \mathbb{R}$$

por:

$$S_L(q) = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt,$$

onde  $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}(t)$ . A aplicação  $L$  é chamada Lagrangiana e  $S_L$  o funcional ação correspondente.

**Definição 1.9.** *Uma variação de uma curva  $q \in \omega$  é uma família  $(q_s)_{s \in J}$ , com  $q_s \in \omega$  para todo  $s \in J$ , onde  $J$  é um intervalo aberto com  $0 \in J$ ,  $q_0 = q$  e a aplicação  $V : J \times [a, b] \rightarrow Q$ , tal que  $V(s, t) = q_s(t)$ , é de classe  $C^2$ .*

Definimos o campo variacional de uma variação  $(q_s)_{s \in I}$  por  $v(t) = \left. \frac{\partial q_s}{\partial s}(t) \right|_{s=0}$ . Como os extremos são fixos,  $v(a) = v(b) = 0$ .

**Definição 1.10.** *Dizemos que  $q \in \omega$  é um ponto crítico de  $S_L$  se para toda variação de  $q$ ,*

$$\left. \frac{dS_L}{ds}(q_s) \right|_{s=0} = 0$$

Considere agora uma outra variedade diferenciável  $\hat{Q}$  e  $\phi : Q \rightarrow \hat{Q}$  um difeomorfismo. A partir da Lagrangiana em  $Q$ , defina uma Lagrangiana  $L_\phi : \mathbb{R} \times T\hat{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $L_\phi \circ (Id \times d\phi) = L$ , onde  $d\phi_p : T_p Q \rightarrow T_{\phi(p)} \hat{Q}$ . Observemos que se  $q : [a, b] \rightarrow Q$  é diferenciável e  $\hat{q} = \phi \circ q : [a, b] \rightarrow \hat{Q}$ , então  $L(t, q(t), \dot{q}(t)) = L_\phi(t, \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t))$  para todo  $t \in [a, b]$ . Assim,  $S_L(q) = S_{L_\phi}(\hat{q})$ .

Além disso, como  $\phi$  é um difeomorfismo, a igualdade  $\hat{q}_s = \phi \circ q_s$  define uma bijeção entre as variações com pontos fixos, ou seja, definindo  $\omega(q_a, q_b, [a, b]) = \{q : [a, b] \rightarrow Q/q \text{ é } C^2 \text{ e } q(a) = q_a, q(b) = q_b\}$  e  $\hat{\omega}(\hat{q}_a, \hat{q}_b, [a, b]) = \{\hat{q} : [a, b] \rightarrow \hat{Q}/\hat{q} \text{ é } C^2 \text{ e } \hat{q}(a) = \hat{q}_a, \hat{q}(b) = \hat{q}_b\}$ , onde  $\hat{q}_a = \phi(q_a)$  e  $\hat{q}_b = \phi(q_b)$ , existe uma bijeção entre  $\omega(q_a, q_b, [a, b])$  e  $\hat{\omega}(\hat{q}_a, \hat{q}_b, [a, b])$ . Logo  $S_L(q_s) = S_{L_\phi}(\hat{q}_s)$  para todo  $s \in J$ . Segue que  $q$  é ponto crítico de  $S_L$  se, e somente se,  $\hat{q}$  é ponto crítico de  $S_{L_\phi}$ .

Considere uma carta local  $\phi : U \rightarrow \hat{U}$ , onde  $U$  é um aberto de  $Q$  e  $\hat{U}$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Pelo procedimento anterior, podemos obter uma lagrangiana a partir de  $\phi$ ,  $L_\phi : \mathbb{R} \times \hat{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Considere  $q : [a, b] \rightarrow U$ . Analogamente,  $q$  é um ponto crítico de  $S_L$  se, e somente se,  $\hat{q} = \phi \circ q$  é ponto crítico de  $S_{L_\phi}$ . Neste caso conseguimos uma bijeção entre as variações de curvas  $q$  que ficam dentro de  $U$  e variações de  $\hat{q}$  que ficam dentro de  $\hat{U}$ . Porém, como  $q([a, b]) \subset U$ , para qualquer variação  $(q_s)_{s \in J}$  existe um intervalo  $\hat{J} \subset J$  contendo zero, tal que  $q_s \in U$  para todo  $s \in \hat{J}$ .

Assim, para encontrarmos a equação de Euler-Lagrange para curvas em uma variedade, basta considerarmos sua representação por  $\phi$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Desse modo, podemos calcular

$$\left. \frac{\partial S_{L_\phi}(\hat{q}_s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \int_a^b \left[ \frac{\partial L_\phi}{\partial \hat{q}}(t, \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t)) \cdot \hat{v}(t) + \frac{\partial L_\phi}{\partial \dot{\hat{q}}}(t, \hat{q}(t), \dot{\hat{q}}(t)) \cdot \dot{\hat{v}}(t) \right] dt.$$

**Observação 1.5.** Quando escrevemos  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , queremos apenas representar o vetor  $\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right)$  com uma notação mais simples. Além disso, o símbolo  $\dot{q}_i$  é uma mera notação e não a velocidade de  $q_i$ .

Integrando por partes a segunda parcela temos

$$\int_a^b \frac{\partial L_\phi}{\partial \dot{\hat{q}}} \cdot \frac{\partial^2 \hat{q}_s}{\partial s \partial t} \Big|_{s=0} dt = \frac{\partial L_\phi}{\partial \dot{\hat{q}}} \cdot \hat{v} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_\phi}{\partial \dot{\hat{q}}} \right) \cdot \hat{v} dt.$$

Como  $\hat{v}$  é nulo nos extremos, então a primeira parcela à direita também é zero e assim teremos

$$\left. \frac{\partial S_{L_\phi}(\hat{q}_s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \int_a^b \left( \frac{\partial L_\phi}{\partial \hat{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_\phi}{\partial \dot{\hat{q}}} \right) \cdot \hat{v} dt.$$

Com isso, podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.** *Uma curva  $q$  é ponto crítico de  $S_L$  se, e somente se,  $q$  satisfaz as equações de Euler-Lagrange.*

A demonstração deste teorema sai diretamente do Lema Fundamental do Cálculo de Variações:

**Lema 1.2.** *Seja  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua e suponha que*

$$\int_a^b p(t) \cdot v(t) dt = 0,$$

para toda aplicação  $v$  de classe  $C^2$ , tal que  $v(a) = v(b) = 0$ . Então  $p = 0$ .

**Demonstração:** (Teorema) É imediato que se  $q$  satisfaz as equações de Euler-Lagrange então ele é um ponto crítico de  $S_L$ . Basta assim provar a recíproca. Temos que como  $L$  é de classe  $C^2$ , então a equação  $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  é contínua. Para cairmos nas hipóteses do Lema basta notarmos que dado uma aplicação  $v$  de classe  $C^2$ , podemos tomar  $q_s(t) = q(t) + sv(t)$  que satisfaz  $q_s(a) = q_a$ ,  $q_s(b) = q_b$ ,  $q_o(t) = q(t)$  e  $\left. \frac{\partial q_s}{\partial s}(t) \right|_{s=0} = v$ , ou seja, para todo  $v$ ,

$$\int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \cdot v \, dt = 0,$$

assim pelo lema acima,

$$\frac{\partial L_\phi}{\partial \hat{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_\phi}{\partial \dot{\hat{q}}} = 0, \quad (1.10)$$

para todo  $t \in [a, b]$ . ■

Dizemos então que a curva  $q$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange com respeito à carta  $\phi$ . Em um caso mais geral, consideremos curvas  $q : [a, b] \rightarrow Q$  e uma carta  $\phi : U \rightarrow \hat{U}$  cujo domínio não contém necessariamente a curva  $q$ . Diremos que a curva  $q$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange com respeito a carta  $\phi$  se a equação (1.10) é satisfeita para todo  $t \in q^{-1}(U)$ , onde  $\hat{q} = \phi \circ q|_{q^{-1}(U)}$ .

Com isso, um teorema mais geral, cuja demonstração pode ser encontrada em [14] é:

**Teorema 1.3.** *Seja  $L : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$  uma Lagrangiana e  $q : [a, b] \rightarrow Q$  uma curva diferenciável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $q$  é um ponto crítico de  $S_L$ ;
2. para toda carta local  $\phi$  sobre  $Q$ ,  $q$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange com respeito a  $\phi$ ;
3. existe uma família de cartas locais sobre  $Q$ , onde os domínios cobrem a imagem de  $q$ , tal que  $q$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange com respeito a qualquer carta pertencente àquela família.

## 1.4 Ações de Grupos e Alguns Resultados

**Definição 1.11.** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável  $\mu : G \times M \rightarrow M$  é dita uma ação à esquerda de  $G$  sobre  $M$  se:*

1.  $\mu(e, x) = x$ , para todo  $x \in M$ ;
2.  $\mu(g_1 \cdot \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 g_2, x)$ , para todo  $g_1, g_2 \in G$  e  $x \in M$ .

Analogamente definimos ação à direita.

**Definição 1.12.** *Seja  $\mu : G \times M \rightarrow M$  uma ação à esquerda e  $x \in M$ . O subgrupo  $G_x = \{g \in G : \mu(g, x) = x\}$  é chamado grupo de isotropia e  $G(x) = \{\mu(g, x) : g \in G\}$  é chamado órbita de  $x$ .*

No caso em que  $G_x = \{e\}$ , para todo  $x \in M$ , diremos que a ação é livre.

**Teorema 1.4.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial diferenciável. Então, para todo  $x \in U$ , vale:*

$$[X, Y](x) = dY_x(X(x)) - dX_x(Y(x)).$$

## Capítulo 2

# Uma Esfera Simétrica Rolando Sobre Uma Superfície

### 2.1 Os Espaços de Configuração e de Fase

Seja  $B$  um corpo rígido em  $\mathbb{R}^3$ . Dado um ponto  $O \in B$ , considere um sistema de referência  $\bar{R}$  para  $B$  com origem em  $O$ . Fixado um sistema de referência  $R$  em  $\mathbb{R}^3$ , a posição de um ponto  $P$  de  $B$  em relação a  $R$  será dada por  $r = o + \bar{r}$ , onde  $r$  é o vetor que representa  $P$  em relação a  $R$ ,  $\bar{r}$  é o vetor que representa  $P$  em relação a  $\bar{R}$  e  $o$  é o vetor que representa  $O$  em relação a  $R$ . Deste modo, um movimento rígido de  $B$  transforma  $r$  em um vetor  $r_1 = a + A\bar{r}$ , onde  $a$  é o vetor no sistema de referência  $R$  dado após fazermos uma translação de  $O$  e  $A$  é uma matriz de rotação com  $A\bar{r}$  sendo uma rotação de  $\bar{r}$ .

Seja  $\mathcal{E}(3)$  o conjunto de todos os movimentos euclidianos rígidos em  $\mathbb{R}^3$  e  $T\mathcal{E}(3)$ , seu fibrado tangente. Identificaremos  $\mathcal{E}(3)$  com  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  e definiremos a seguinte operação em  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ :

$$\text{dados } a, b \in \mathbb{R}^3 \text{ e } A, B \in SO(3): (a, A) \cdot (b, B) = (Ab + a, AB).$$

Essa operação é natural, considerando que os movimentos rígidos são vistos como a composição de uma rotação e uma translação, ou seja, dado  $x \in \mathbb{R}^3$ , um movimento rígido leva  $x$  em  $Bx + b$ , com  $B \in SO(3)$  e  $b \in \mathbb{R}^3$ . Além disso, se quisermos realizar um novo movimento a partir desse ponto, teremos  $A(Bx + b) + a$ , com  $A \in SO(3)$  e  $a \in \mathbb{R}^3$ , isto é, o novo ponto será  $ABx + Ab + a$ .

Com a estrutura diferenciável induzida por esta identificação e com esta operação,  $\mathcal{E}(3)$

é um grupo de Lie de dimensão 6. com elemento identidade  $\bar{I} = (0, I)$ .

A álgebra de Lie de  $\mathcal{E}(3)$ .  $e(3)$ , será identificada com  $\mathbb{R}^3 \times so(3)$ .

**Proposição 2.1.** *Sejam  $\xi = (x, X)$  e  $\eta = (y, Y) \in \mathbb{R}^3 \times so(3)$ , então o colchete de Lie será:*

$$[\xi, \eta] = (Xy - Yx, XY - YX)$$

**Demonstração:** Sejam  $X_\xi$  e  $X_\eta$  os campos invariantes à esquerda tal que  $X_\xi(\bar{I}) = \xi$  e  $X_\eta(\bar{I}) = \eta$ . Então, pelo Teorema 1.4.

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= [X_\xi, X_\eta](\bar{I}) = X_\xi(\bar{I})X_\eta(\bar{I}) - X_\eta(\bar{I})X_\xi(\bar{I}) = \\ &= DX_\eta(\bar{I})X_\xi(\bar{I}) - DX_\xi(\bar{I})X_\eta(\bar{I}), \end{aligned}$$

onde  $\bar{I} = (0, I)$ .

Seja  $\bar{A} = (a, A) \in \mathbb{R}^3 \times so(3)$ . Como estamos trabalhando com  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  e  $\mathbb{R}^3 \times so(3)$ , podemos calcular:

$$\begin{aligned} X_\eta(\bar{A}) &= DL_{\bar{A}}(\bar{I})\eta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_{\bar{A}}(\bar{I} + t\eta) - L_{\bar{A}}(\bar{I})}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a, A)(ty, I + tY) - (a, A)(0, I)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(tAy + a, A + tAY) - (a, A)}{t} = \\ &= (Ay, AY). \end{aligned}$$

Logo, dado  $\bar{B} = (b, B)$ , teremos:

$$\begin{aligned} DX_\eta(\bar{I})\bar{B} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_\eta(\bar{I} + t\bar{B}) - X_\eta(\bar{I})}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((I + tB)y, (I + tB)Y) - (y, Y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(y + tBy, Y + tBY) - (y, Y)}{t} = (By, BY). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$DX_\xi(\bar{I})\bar{B} = (Bx, BX).$$

Assim,

$$DX_\eta(\bar{I})X_\xi(\bar{I}) = (Xy, XY) \text{ e } DX_\xi(\bar{I})X_\eta(\bar{I}) = (Yx, YX).$$

Portanto,

$$[\xi, \eta] = (Xy, XY) - (Yx, YX) = (Xy - Yx, XY - YX).$$

**Proposição 2.2.** *Considere o isomorfismo  $i : so(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por:*

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_3 & \nu_2 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

*Tal isomorfismo tem as seguintes propriedades:*

1.  $\nu x = i(\nu) \wedge x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ ;
2.  $i(A\nu A^{-1}) = Ai(\nu)$ , para todo  $A \in SO(3)$ .

**Demonstração:** 1. Seja  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Por um lado,

$$\nu x = \begin{pmatrix} -\nu_3 x_2 + \nu_2 x_3 \\ \nu_3 x_1 - \nu_1 x_3 \\ -\nu_2 x_1 + \nu_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Por outro,

$$i(\nu) \wedge x = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_3 x_2 + \nu_2 x_3 \\ \nu_3 x_1 - \nu_1 x_3 \\ -\nu_2 x_1 + \nu_1 x_2 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\nu x = i(\nu) \wedge x$$

2. Existem ângulos  $a, b, c$  tal que  $A = R_3(c)R_1(b)R_3(a)$ , onde  $R_i(c)$  é a rotação de um ângulo  $c$  em torno do eixo  $i$  (ver [3], Seção 2.3). Assim,

$$A\nu A^{-1} = R_3(c)R_1(b)R_3(a)\nu R_3(a)^{-1}R_1(b)^{-1}R_3(c)^{-1}.$$

Como  $R_i(\cdot)$  é uma matriz ortogonal para  $i = 1, 2, 3$ , então:

$$A\nu A^{-1} = R_3(c)R_1(b)R_3(a)\nu R_3(a)^t R_1(b)^t R_3(c)^t.$$

Para facilitar o cálculo, começaremos por:

$$\begin{aligned} R_3(a)\nu R_3(a)^t &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\nu_3 & \nu_2 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \nu_3 \sin(a) & -\nu_3 \cos(a) & \nu_2 \cos(a) - \nu_1 \sin(a) \\ \nu_3 \cos(a) & \nu_3 \sin(a) & -\nu_2 \sin(a) - \nu_1 \cos(a) \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\nu_3 & \nu_2 \cos(a) - \nu_1 \sin(a) \\ \nu_3 & 0 & -\nu_2 \sin(a) - \nu_1 \cos(a) \\ -\nu_2 \cos(a) + \nu_1 \sin(a) & \nu_2 \sin(a) + \nu_1 \cos(a) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Porém  $X = \nu_2 \cos(a) - \nu_1 \sin(a)$  e  $Y = \nu_2 \sin(a) + \nu_1 \cos(a)$ . Com isso,

$$R_3(a)\nu R_3(a)^t = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_3 & X \\ \nu_3 & 0 & -Y \\ -X & Y & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} R_1(b)R_3(a)\nu R_3(a)^t R_1(b)^t &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(b) & \sin(b) \\ 0 & -\sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\nu_3 & X \\ \nu_3 & 0 & -Y \\ -X & Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(b) & -\sin(b) \\ 0 & \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\nu_3 & X \\ \nu_3 \cos(b) - X \sin(b) & Y \sin(b) & -Y \cos(b) \\ -\nu_3 \sin(b) - X \cos(b) & Y \cos(b) & Y \sin(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(b) & -\sin(b) \\ 0 & \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\nu_3 \cos(b) + X \sin(b) & \nu_3 \sin(b) + X \cos(b) \\ \nu_3 \cos(b) - X \sin(b) & 0 & -Y \\ -\nu_3 \sin(b) - X \cos(b) & Y & 0 \end{pmatrix}.$$

Pondo  $Z = \nu_3 \cos(b) - X \sin(b)$  e  $W = \nu_3 \sin(b) + X \cos(b)$ , teremos:

$$R_1(b)R_3(a)\nu R_3(a)^t R_1(b)^t = \begin{pmatrix} 0 & -Z & W \\ Z & 0 & -Y \\ W & Y & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A\nu A^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos(c) & \sin(c) & 0 \\ -\sin(c) & \cos(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Z & W \\ Z & 0 & -Y \\ W & Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(c) & -\sin(c) & 0 \\ \sin(c) & \cos(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -Z & W \cos(c) - Y \sin(c) \\ Z & 0 & -W \sin(c) - Y \cos(c) \\ -W \cos(c) + Y \sin(c) & W \sin(c) + Y \cos(c) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$i(A\nu A^{-1}) = \begin{pmatrix} W \sin(c) + Y \cos(c) \\ W \cos(c) - Y \sin(c) \\ Z \end{pmatrix}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} Ai(\nu) &= R_3(c)R_1(b)R_3(a)i(\nu) = \\ &= R_3(c)R_1(b) \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \\ &= R_3(c)R_1(b) \begin{pmatrix} \nu_1 \cos(a) + \nu_2 \sin(a) \\ -\nu_1 \sin(a) + \nu_2 \cos(a) \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_3(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(b) & \sin(b) \\ 0 & -\sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ X \\ \nu_3 \end{pmatrix} = R_3(c) \begin{pmatrix} Y \\ X \cos(b) + \nu_3 \sin(b) \\ -X \sin(b) + \nu_3 \cos(b) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ W \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \cos(c) + W \sin(c) \\ -Y \sin(c) + W \cos(c) \\ Z \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$i(A\nu A^{-1}) = Ai(\nu).$$

■

## 2.2 Equação de Lagrange

Deduziremos agora a forma da equação de Euler-Lagrange quando o movimento ocorre em um grupo de Lie de matrizes. Os calculos poderiam ser feitos para grupos de Lie em geral, porém para o nosso estudo, será o suficiente trabalharmos com matrizes. Para a demonstração mais geral, consultar [5].

Considere a Lagrangiana  $L : TG \rightarrow \mathbb{R}$ . Como vimos na seção 1.3, a equação de Lagrange em coordenadas locais  $q_j$  é dada por:

$$[L]_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie de  $G$  e  $\Psi(g, \dot{g}) = (g, DR_{g^{-1}}(g)\dot{g})$  a trivialização à direita que identifica  $TG$  e  $G \times \mathfrak{g}$ . Seja  $l = L \circ \Psi^{-1}$  a Lagrangiana em  $G \times \mathfrak{g}$ . Vamos deduzir a variação da ação correspondente à Lagrangiana em  $G \times \mathfrak{g}$ , ou seja, consideraremos uma variação da trajetória  $g : [a, b] \rightarrow G$  com extremos fixos, isto é, defina as variações  $g(\cdot, \epsilon) : [a, b] \rightarrow G$  para  $\epsilon \in I$ , com  $\left. \frac{\partial g(a, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{\partial g(b, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$  para todo  $\epsilon \in I$  e  $g(t, 0) = g(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$  e calcularemos  $\left. \frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$ , onde  $S = \int_a^b l(g, X) dt$ . Para simplificar, denotaremos por  $\delta$  a derivada parcial em relação a  $\epsilon$  no ponto  $(t, 0)$ , ou seja,  $\epsilon = 0$ . Além disso, com a

identificação acima.  $X = DR_{g^{-1}}\dot{g} = \dot{g}g^{-1}$  e então:

$$\delta X = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} g \right) g^{-1} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} g^{-1} + \dot{g} \frac{\partial}{\partial \epsilon} g^{-1} \Big|_{\epsilon=0},$$

onde  $g = g(t, \epsilon)$  e  $X = X(t, \epsilon)$ .

Temos que,  $g^{-1}g = I$ , assim:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} g^{-1} \Big|_{\epsilon=0} g + g^{-1} \delta g = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \epsilon} g^{-1} \Big|_{\epsilon=0} g = -g^{-1} \delta g \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \epsilon} g^{-1} \Big|_{\epsilon=0} = -g^{-1} (\delta g) g^{-1}.$$

Logo,

$$\delta X = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} g^{-1} - \dot{g} g^{-1} (\delta g) g^{-1}.$$

Defina  $\eta$  da seguinte forma :

$$\eta = (\delta g) g^{-1}.$$

Como  $\delta g(a, c) = \delta g(b, c) = 0$  para todo  $c$ ,  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ . Definido  $\eta$ , calculemos:

$$\dot{\eta} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon} g \Big|_{\epsilon=0} g^{-1} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} g^{-1} - (\delta g) g^{-1} \dot{g} g^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta X - \dot{\eta} &= -\dot{g} g^{-1} (\delta g) g^{-1} + (\delta g) g^{-1} \dot{g} g^{-1} = \\ &= \eta X - X \eta = -[X, \eta]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta X = \dot{\eta} - [X, \eta].$$

A seguir utilizaremos:

$$DR_g(I)\eta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_g(I + t\eta) - R_g(I)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g + t\eta g - g}{t} = \eta g \quad (2.1)$$

Agora podemos calcular o que pretendíamos:

$$\delta \int_a^b l(g; X) dt = \int_a^b \left[ \frac{\partial l}{\partial g} \delta g + \frac{\partial l}{\partial X} \delta X \right] dt = \int_a^b \frac{\partial l}{\partial g} \eta g dt + \int_a^b \frac{\partial l}{\partial X} (\dot{\eta} - [X, \eta]) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{\partial l}{\partial y} \eta g dt + \int_a^b \frac{\partial l}{\partial X} \dot{\eta} dt - \int_a^b \frac{\partial l}{\partial X} [X, \eta] dt = \\
&\stackrel{(2.1)}{=} \int_a^b \frac{\partial l}{\partial g} D_1 R_g \eta dt - \int_a^b \frac{\partial l}{\partial X} [X, \eta] dt + \frac{\partial l}{\partial X} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X} \eta dt = \\
&= - \int_a^b \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X} - \frac{\partial l}{\partial g} D_1 R_g + \frac{\partial l}{\partial X} adX \right) \eta dt.
\end{aligned}$$

Portanto, a variação da ação é nula se, e somente se,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X} - \frac{\partial l}{\partial g} D_1 R_g + \frac{\partial l}{\partial X} adX = 0, \quad (2.2)$$

que são as equações de Lagrange para o movimento definido pela Lagrangiana  $L$  em  $TG$  sem vínculo.

**Observação 2.1.** No caso particular em que  $G = \mathcal{E}(3)$ , teremos a identificação

$\Phi : T\mathcal{E}(3) \rightarrow \mathcal{E}(3) \times \mathcal{e}(3)$ , dado por  $\Phi(a, A, \dot{a}, \dot{A}) = (a, A, b, \nu)$ , onde  $(b, \nu) = DR_{(a,A)^{-1}}(a, A)(\dot{a}, \dot{A})$ .

Porém,

$$\begin{aligned}
DR_{(a,A)^{-1}}(a, A)(\dot{a}, \dot{A}) &= \frac{d}{ds} \left[ R_{(a(t), A(t))^{-1}}(a(s), A(s)) \right] \Big|_{s=t} = \frac{d}{ds} \left[ (a(s), A(s))(a(t), A(t))^{-1} \right] \Big|_{s=t} = \\
\frac{d}{ds} \left[ (a(s), A(s))(-A(t)^{-1}a(t), A(t)^{-1}) \right] \Big|_{s=t} &= \frac{d}{ds} \left[ (-A(s)A(t)^{-1}a(t) + a(s), A(s)A(t)^{-1}) \right] \Big|_{s=t} = \\
&= (-\dot{A}(t)A(t)^{-1}a(t) + \dot{a}(t), \dot{A}(t)A(t)^{-1}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$(b, \nu) = (\dot{a} - \dot{A}A^{-1}a, \dot{A}A^{-1}). \quad (2.3)$$

## 2.3 Movimento Vinculado

Nesta seção deduziremos as equações de movimento de uma esfera rolando sem escorregar sobre uma superfície diferenciável, ou seja, uma variedade de dimensão 2. Suporemos que a esfera é dinamicamente simétrica, ou seja, sua densidade de massa depende apenas da distância à origem. Neste caso, o centro de gravidade se encontra no centro da esfera e todos os momentos de inércia são os mesmos.

Em um caso particular, considere  $B$  como sendo uma esfera de raio  $r$ . Fixe um sistema de coordenadas em  $\mathbb{R}^3$  e uma esfera  $\mathcal{O}$  de raio  $r$  cujo centro esteja na origem desse sistema. Disso segue que dado um vetor  $s$  sobre  $\mathcal{O}$ , um movimento rígido transforma  $s$  em  $As + a$ , onde  $A \in SO(3)$  e  $a \in \mathbb{R}^3$ .

Precisamos descrever o vínculo holônomo, que garantirá que a esfera role sobre a superfície e o vínculo não-holônomo, que assegura que a bola não escorregue. Para finalizar, daremos as equações de movimento restritas a tais vínculos.

Considere a superfície  $\mathcal{H}$ , formada por todos os pontos a uma distância  $r$  da superfície  $\mathcal{S}$  na qual a bola está rolando. Aqui, a superfície  $\mathcal{H}$  restringe o movimento no sentido que o centro da esfera deve estar em  $\mathcal{H}$ . Em geral,  $\mathcal{H}$  não será uma variedade diferenciável. Podemos dizer que está se estudando uma bola “pequena” rolando sobre uma superfície  $\mathcal{S}$  diferenciável, onde seria interessante qualificar “pequena” em termos de uma desigualdade entre o raio da bola e as curvaturas da superfície  $\mathcal{S}$ . Uma condição necessária para que  $\mathcal{H}$  seja diferenciável é que a curvatura da bola seja maior do que a da superfície  $\mathcal{S}$ . Então suporemos tal condição. Tomemos  $N(a)$  como um vetor unitário normal a  $\mathcal{H}$  no ponto  $a \in \mathcal{H}$  e apontando para o lado em que está  $\mathcal{S}$ .

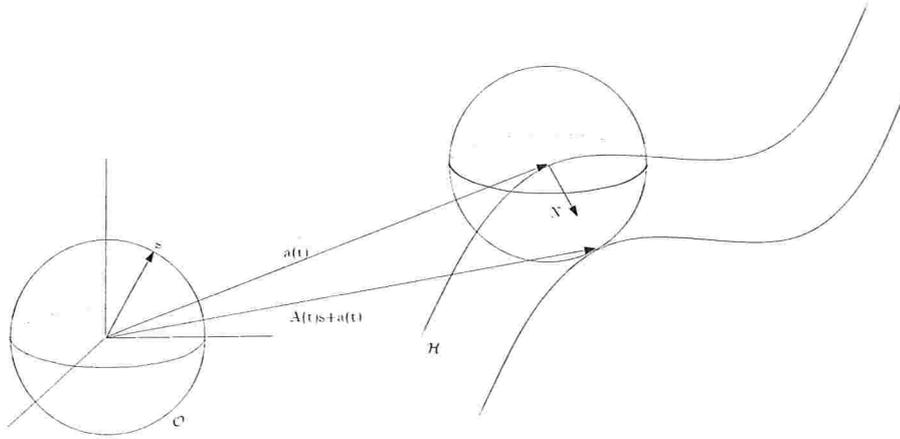
Um ponto da esfera no instante  $t$ , dado a partir de um movimento rígido de um ponto  $s \in \mathcal{O}$  é descrito por

$$c(t, s) = A(t)s + a(t),$$

em relação ao sistema de coordenadas fixado.

Por outro lado, dado  $t$ , podemos encontrar um ponto  $s = s(t)$  em  $\mathcal{O}$  tal que  $A(t)s + a(t)$  é o ponto de contato da bola com  $\mathcal{S}$ . O vetor  $A(t)s$  deve ter a mesma direção do vetor  $N(a)$ . Assim  $\frac{1}{r}A(t)s$  deve ser igual ao vetor  $N(a)$  pois  $\|A(t)s\|=r$ , ou seja,

$$\frac{1}{r}A(t)s = N(a) \Rightarrow A(t)s = rN(a) \Rightarrow s = rA^{-1}N(a).$$



### Ação de $\mathcal{E}(3)$ sobre a esfera de referência $\mathcal{O}$

Como  $A(t)s + a(t)$  é o ponto de contato da bola com  $\mathcal{S}$ ,  $a(t)$  deve ser um vetor que se move sobre  $\mathcal{H}$ . Deste modo, assumindo que  $\mathcal{H}$  seja o gráfico de uma função diferenciável  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , o vínculo holônomo de que a bola rola sobre  $\mathcal{S}$  será dado por:

$$a_3 = h(a_1, a_2). \text{ onde } a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t)). \quad (2.4)$$

Agora descreveremos o vínculo não-holônomo. A bola irá rolar sem escorregar se, e somente se, a velocidade do ponto de contato for nula, ou seja,

$$\dot{c}(t, s) = \dot{A}(t)s + \dot{a}(t) = 0. \quad (2.5)$$

Por (2.3) obtemos:

$$\dot{A}s + \dot{a} = 0 \Rightarrow \nu As + b + \nu a = 0 \Rightarrow \nu rN(a) + b + \nu a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -\nu(rN(a) + a). \quad (2.6)$$

Pelo Princípio de D'Alembert, precisamos ter

$$\delta L(a, A, b, \nu) \cdot (\bar{b}, \bar{\nu}) = 0 \quad (2.7)$$

para todo  $(\bar{b}, \bar{\nu}) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3)$  e satisfazendo (2.6).

**Proposição 2.3.** *O campo vetorial  $V$  que determina o movimento é dado por:*

$$\begin{aligned}\dot{a} &= b + \nu a \\ \dot{A} &= \nu A \\ \dot{b} &= \frac{d}{dt}[-\nu(rN(a) + a)]\end{aligned}$$

onde  $\dot{\nu}$  satisfaz

$$\frac{d}{dt}Mi(\nu) + m \left[ \frac{d}{dt}(-r\nu N(a)) + ge_3 \right] \times rN(a) = 0 \quad (2.8)$$

Aqui,  $m$  é a massa,  $M$  o momento de inércia e  $r$  o raio da esfera.  $ge_3$  denota a gravidade.

**Demonstração:** Observa-se que as três primeiras componentes do campo vetorial  $V$  são dadas pelo vínculo não-holônomo e pela identificação de  $T\mathcal{E}(3)$  com  $\mathcal{E}(3) \times c(3)$ . Para deduzir a última equação precisamos encontrar a Lagrangiana. Para isso, seja  $\rho = \rho(r)$  a densidade de massa da esfera. Sabemos que dado  $s \in \mathcal{O}$ ,  $c(t, s) = A(t)s + a(t)$  e assim a energia cinética é dada por:

$$T = \int_B \frac{\rho(R)}{2} \langle \dot{q}(t, s), \dot{q}(t, s) \rangle dV = \int_B \frac{\rho(R)}{2} (\langle \dot{A}(t)s, \dot{A}(t)s \rangle + 2\langle \dot{A}(t)s, \dot{a}(t) \rangle + \langle \dot{a}(t), \dot{a}(t) \rangle) dV,$$

onde estamos integrando na esfera.

Para simplificar a notação omitiremos o parâmetro  $t$ .

Agora, calcularemos a integral de cada produto interno separadamente.

$$\int_B \frac{\rho(R)}{2} \langle \dot{a}, \dot{a} \rangle dV = \frac{1}{2} \langle \dot{a}, \dot{a} \rangle \int_B \rho(R) dV = \frac{m}{2} \langle \dot{a}, \dot{a} \rangle;$$

$$\int_B \frac{\rho(R)}{2} \langle \dot{A}s, \dot{a} \rangle dV = \int_B \frac{\rho(R)}{2} \langle s, \dot{A}^t \dot{a} \rangle dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(R)}{2} \langle s, \dot{A}^t \dot{a} \rangle R^2 \sin \theta d\varphi d\theta dR.$$

Como  $s$  pertence à esfera, então  $s = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$ . Faça  $\dot{A}^t \dot{a} = (b_1, b_2, b_3)$ , assim:

$$\int_B \frac{\rho(R)}{2} \langle \dot{A}s, \dot{a} \rangle dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(R)}{2} R^3 (b_1 \sin^2 \theta \cos \varphi + b_2 \sin^2 \theta \sin \varphi + b_3 \cos \theta \sin \theta) d\varphi d\theta dR.$$

Agora observemos que a integral tanto de  $\cos \varphi$  quanto de  $\sin \varphi$  de 0 a  $2\pi$  em  $\varphi$  é nula.

Além disso, a integral de  $\cos \theta \sin \theta$  de 0 a  $\pi$  em  $\theta$  é nula. Assim,

$$\int_B \frac{\rho(R)}{2} \langle \dot{A}_s, \dot{a} \rangle dV = 0;$$

Considere que  $\dot{A} = (\dot{A}_{ij})$ , com  $i, j = 1, 2, 3$  e  $s = (s_1, s_2, s_3)$ . Disso,

$$\dot{A}_s = (\dot{A}_{11}s_1 + \dot{A}_{12}s_2 + \dot{A}_{13}s_3, \dot{A}_{21}s_1 + \dot{A}_{22}s_2 + \dot{A}_{23}s_3, \dot{A}_{31}s_1 + \dot{A}_{32}s_2 + \dot{A}_{33}s_3).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \dot{A}_s, \dot{A}_s \rangle &= \dot{A}_{11}^2 s_1^2 + 2\dot{A}_{11}\dot{A}_{12}s_1s_2 + 2\dot{A}_{11}\dot{A}_{13}s_1s_3 + \dot{A}_{12}^2 s_2^2 + 2\dot{A}_{12}\dot{A}_{13}s_2s_3 + \dot{A}_{13}^2 s_3^2 + \\ &+ \dot{A}_{21}^2 s_1^2 + 2\dot{A}_{21}\dot{A}_{22}s_1s_2 + 2\dot{A}_{21}\dot{A}_{23}s_1s_3 + \dot{A}_{22}^2 s_2^2 + 2\dot{A}_{22}\dot{A}_{23}s_2s_3 + \dot{A}_{23}^2 s_3^2 + \\ &+ \dot{A}_{31}^2 s_1^2 + 2\dot{A}_{31}\dot{A}_{32}s_1s_2 + 2\dot{A}_{31}\dot{A}_{33}s_1s_3 + \dot{A}_{32}^2 s_2^2 + 2\dot{A}_{32}\dot{A}_{33}s_2s_3 + \dot{A}_{33}^2 s_3^2. \end{aligned}$$

onde temos  $s_1^2 = R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$ ;  $s_2^2 = R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$ ;  $s_3^2 = R^2 \cos^2 \theta$ ;

$s_1s_2 = R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi$ ;  $s_1s_3 = R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$ ;  $s_2s_3 = R^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$ .

É simples observar que a integral de  $s_1s_2$ ,  $s_1s_3$  e  $s_2s_3$  de 0 a  $2\pi$  em  $\varphi$  é nula. Portanto integraremos apenas os termos que contém  $s_1^2$ ,  $s_2^2$  e  $s_3^2$ . Integrando separadamente temos:

$$\begin{aligned} \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(R)}{2} s_1^2 R^2 \sin \theta d\varphi d\theta dR &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(R)}{2} R^4 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\varphi d\theta dR = \\ &= \int_0^r \int_0^\pi \pi \frac{\rho(R)}{2} R^4 \sin^3 \theta d\theta dR = \frac{4\pi}{3} \int_0^r \frac{\rho(R)}{2} R^4 dR; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(R)}{2} s_2^2 R^2 \sin \theta d\varphi d\theta dR &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(R)}{2} R^4 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi d\varphi d\theta dR = \\ &= \int_0^r \int_0^\pi \pi \frac{\rho(R)}{2} R^4 \sin^3 \theta d\theta dR = \frac{4\pi}{3} \int_0^r \frac{\rho(R)}{2} R^4 dR; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(R)}{2} s_3^2 R^2 \sin \theta d\varphi d\theta dR &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(R)}{2} R^4 \cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta dR = \\ &= \int_0^r \int_0^\pi 2\pi \frac{\rho(R)}{2} R^4 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta dR = \frac{4\pi}{3} \int_0^r \frac{\rho(R)}{2} R^4 dR. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_B \frac{\rho(R)}{2} \langle \dot{A}_s, \dot{A}_s \rangle dV = \sum_{i,j=1}^3 \dot{A}_{ij}^2 \frac{4\pi}{3} \int_0^r \frac{\rho(R)}{2} R^4 dR.$$

Assim, a energia cinética é

$$T = \frac{m}{2} \langle \dot{a}, \dot{a} \rangle + \frac{M}{4} \sum_{i,j=1}^3 \dot{A}_{ij}^2.$$

onde  $M = \frac{8\pi}{3} \int_0^r \rho(R) R^4 dR$  é o momento de inércia da esfera.

Sendo  $a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ , a energia potencial é dada por  $V = mga_3$  e então a Lagrangiana é

$$L = T - V = \frac{m}{2} \langle \dot{a}, \dot{a} \rangle + \frac{M}{4} \sum_{i,j=1}^3 \dot{A}_{ij}^2 - mga_3.$$

Agora, considere a Lagrangiano  $l = L \circ \Phi^{-1} : \mathcal{E}(3) \times \mathfrak{e}(3) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Phi : T\mathcal{E}(3) \rightarrow \mathcal{E}(3) \times \mathfrak{e}(3)$  é a trivialização à direita, que neste caso é dada por  $\Phi(a, A, \dot{a}, \dot{A}) = (a, A, b, \nu)$ , com  $b = \dot{a} - \dot{A}A^{-1}a \in \mathbb{R}^3$  e  $\nu = \dot{A}A^{-1} \in \mathfrak{so}(3)$ . Além disso, podemos observar que  $\Phi^{-1}(a, A, b, \nu) = (a, A, b + \nu a, \nu A)$ .

Assim,

$$l(a, A, b, \nu) = L(\Phi^{-1}(a, A, b, \nu)) = L(a, A, b + \nu a, \nu A) = \frac{m}{2} \langle b + \nu a, b + \nu a \rangle + \frac{M}{4} \sum_{i,j=1}^3 \bar{A}_{ij}^2 - mga_3,$$

onde  $(\bar{A}_{ij}) = \nu A$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ .

Calculemos  $\nu A$ , pois assim encontraremos os  $\bar{A}_{ij}^2$ :

$$\begin{aligned} \nu A &= \begin{pmatrix} 0 & -\nu_3 & \nu_2 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\nu_3 A_{21} + \nu_2 A_{31} & -\nu_3 A_{22} + \nu_2 A_{32} & -\nu_3 A_{23} + \nu_2 A_{33} \\ \nu_3 A_{11} - \nu_1 A_{31} & \nu_3 A_{12} - \nu_1 A_{32} & \nu_3 A_{13} - \nu_1 A_{33} \\ -\nu_2 A_{11} + \nu_1 A_{21} & -\nu_2 A_{12} + \nu_1 A_{22} & -\nu_2 A_{13} + \nu_1 A_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando o fato que  $A \in SO(3)$ , temos que  $AA^t = I$  e assim  $\sum_{j=1}^3 A_{ij}^2 = 1$  e  $\sum_{j=1}^3 A_{1j}A_{2j} = \sum_{j=1}^3 A_{1j}A_{3j} = \sum_{j=1}^3 A_{2j}A_{3j} = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Disto segue que:

$$\sum_{i,j=1}^3 \bar{A}_{ij}^2 = 2\nu_1^2 + 2\nu_2^2 + 2\nu_3^2 = 2\|i(\nu)\|^2.$$

Portanto,

$$l(a, A, b, \nu) = \frac{m}{2} \langle b + \nu a, b + \nu a \rangle + \frac{M}{2} \|i(\nu)\|^2 - mga_3.$$

Agora utilizaremos a equação

$$\delta l(g, X) = \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X} - \frac{\partial l}{\partial g} D_1 R_g + \frac{\partial l}{\partial X} adX.$$

para deduzirmos a equação (2.8). Nesse caso,  $g = (a, A)$  e  $X = (b, \nu)$ .

Observando que

$$\nu a = (-\nu_3 a_2 + \nu_2 a_3, \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3, -\nu_2 a_1 + \nu_1 a_2),$$

temos, considerando  $b = (b_1, b_2, b_3)$ , que

$$b + \nu a = (b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3, b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3, b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2),$$

e assim

$$\langle b + \nu a, b + \nu a \rangle = (b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3)^2 + (b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)^2 + (b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)^2.$$

Logo,

$$\frac{\partial l}{\partial X} = \left( \frac{\partial l}{\partial b_1}, \frac{\partial l}{\partial b_2}, \frac{\partial l}{\partial b_3}, \frac{\partial l}{\partial \nu_1}, \frac{\partial l}{\partial \nu_2}, \frac{\partial l}{\partial \nu_3} \right),$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial b_1} &= m(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3) \\
\frac{\partial l}{\partial b_2} &= m(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) \\
\frac{\partial l}{\partial b_3} &= m(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2) \\
\frac{\partial l}{\partial \nu_1} &= m[-a_3(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) + a_2(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)] + M\nu_1 \\
\frac{\partial l}{\partial \nu_2} &= m[a_3(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3) - a_1(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)] + M\nu_2 \\
\frac{\partial l}{\partial \nu_3} &= m[-a_2(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3) + a_1(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)] + M\nu_3
\end{aligned}$$

Disso, segue que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial b_1}, \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial b_2}, \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial b_3}, \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \nu_1}, \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \nu_2}, \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \nu_3} \right),$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial b_1} &= m(\dot{b}_1 - \dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial b_2} &= m(\dot{b}_2 + \dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial b_3} &= m(\dot{b}_3 - \dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2) \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \nu_1} &= m[-\dot{a}_3(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) - a_3(\dot{b}_2 + \dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) + \\
&\quad + \dot{a}_2(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2) + a_2(\dot{b}_3 - \dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2)] + M\dot{\nu}_1 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \nu_2} &= m[\dot{a}_3(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3) + a_3(\dot{b}_1 - \dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) - \\
&\quad - \dot{a}_1(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2) - a_1(\dot{b}_3 - \dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2)] + M\dot{\nu}_2 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \nu_3} &= m[-\dot{a}_2(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3) - a_2(\dot{b}_1 - \dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) + \\
&\quad + \dot{a}_1(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) + a_1(\dot{b}_2 + \dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3)] + M\dot{\nu}_3
\end{aligned}$$

Também,

$$\frac{\partial l}{\partial g} = \left( \frac{\partial l}{\partial a_1}, \frac{\partial l}{\partial a_2}, \frac{\partial l}{\partial a_3}, 0, 0, 0 \right),$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial a_1} &= m[\nu_3(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) - \nu_2(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)] \\ \frac{\partial l}{\partial a_2} &= m[-\nu_3(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3) + \nu_1(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)] \\ \frac{\partial l}{\partial a_3} &= m[\nu_2(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3) - \nu_1(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) - g]\end{aligned}$$

Sabemos que, para um sistema com vínculos não holônomos,

$$\delta l(a, A, b, \nu)(\bar{b}, \bar{\nu}) = 0.$$

para todo  $(\bar{b}, \bar{\nu}) \in \mathbb{R}^3 \times so(3)$  satisfazendo o vínculo (2.6).

Para fazer esse cálculo precisamos encontrar o comutador  $[(b, \nu), (\bar{b}, \bar{\nu})]$  e  $DR_g(\bar{I})(\bar{b}, \bar{\nu})$ .

Foi visto anteriormente que  $[(b, \nu), (\bar{b}, \bar{\nu})] = (\nu \bar{b} - \bar{\nu} b, \nu \bar{\nu} - \bar{\nu} \nu)$ . Assim,

$$\nu \bar{b} = (-\nu_3 \bar{b}_2 + \nu_2 \bar{b}_3, \nu_3 \bar{b}_1 - \nu_1 \bar{b}_3, -\nu_2 \bar{b}_1 + \nu_1 \bar{b}_2).$$

com  $\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ , ou seja:

$$\nu \bar{b} - \bar{\nu} b = (-\nu_3 \bar{b}_2 + \nu_2 \bar{b}_3 + \bar{\nu}_3 b_2 - \bar{\nu}_2 b_3, \nu_3 \bar{b}_1 - \nu_1 \bar{b}_3 - \bar{\nu}_3 b_1 + \bar{\nu}_1 b_3, -\nu_2 \bar{b}_1 + \nu_1 \bar{b}_2 + \bar{\nu}_2 b_1 - \bar{\nu}_1 b_2).$$

com  $i(\bar{\nu}) = (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3)$ .

Temos também que

$$i(\nu \bar{\nu} - \bar{\nu} \nu) = (\nu_2 \bar{\nu}_3 - \bar{\nu}_2 \nu_3, \nu_3 \bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3 \nu_1, \nu_1 \bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1 \nu_2).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}D_1 R_g(\bar{b}, \bar{\nu}) &= D_1 R_g \frac{d}{dt}(\exp(t\bar{b}), \exp(t\bar{\nu})) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[R_g(\exp(t\bar{b}), \exp(t\bar{\nu}))] \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(t\bar{\nu})a + \exp(t\bar{b}), \exp(t\bar{\nu})A) \Big|_{t=0} = (\bar{b} + \bar{\nu}a, \bar{\nu}A).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X}(\bar{b}, \bar{\nu}) = m & \left[ \bar{b}_1 \dot{b}_1 + \bar{b}_1(-\dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) + \right. \\
& + \bar{b}_2 \dot{b}_2 + \bar{b}_2(\dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) + \\
& + \bar{b}_3 \dot{b}_3 + \bar{b}_3(-\dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2) - \\
& - \bar{\nu}_1 \dot{a}_3(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) - \bar{\nu}_1 a_3(\dot{b}_2 + \dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) + \\
& + \bar{\nu}_1 \dot{a}_2(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2) + \bar{\nu}_1 a_2(\dot{b}_3 - \dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2) + \\
& + \bar{\nu}_2 \dot{a}_3(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3) + \bar{\nu}_2 a_3(\dot{b}_1 - \dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) - \\
& - \bar{\nu}_2 \dot{a}_1(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2) - \bar{\nu}_2 a_1(\dot{b}_3 - \dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2) - \\
& - \bar{\nu}_3 \dot{a}_2(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3) - \bar{\nu}_3 a_2(\dot{b}_1 - \dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) + \\
& + \bar{\nu}_3 \dot{a}_1(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) + \bar{\nu}_3 a_1(\dot{b}_2 + \dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) \Big] + \\
& + M(\dot{\nu}_1 \bar{\nu}_1 + \dot{\nu}_2 \bar{\nu}_2 + \dot{\nu}_3 \bar{\nu}_3).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial X}[(b, \nu), (\bar{b}, \bar{\nu})] = m & \left[ (b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3)(-\nu_3 \bar{b}_2 + \nu_2 \bar{b}_3 + \bar{\nu}_3 b_2 - \bar{\nu}_2 b_3) + \right. \\
& + (b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)(\nu_3 \bar{b}_1 - \nu_1 \bar{b}_3 - \bar{\nu}_3 b_1 + \bar{\nu}_1 b_3) + \\
& + (b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)(-\nu_2 \bar{b}_1 + \nu_1 \bar{b}_2 + \bar{\nu}_2 b_1 - \bar{\nu}_1 b_2) - \\
& - a_3(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)(\nu_2 \bar{\nu}_3 - \bar{\nu}_2 \nu_3) + a_2(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)(\nu_2 \bar{\nu}_3 - \bar{\nu}_2 \nu_3) + \\
& + a_3(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3)(\nu_3 \bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3 \nu_1) - a_1(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)(\nu_3 \bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3 \nu_1) - \\
& - a_2(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3)(\nu_1 \bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1 \nu_2) + a_1(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)(\nu_1 \bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1 \nu_2) \Big] + \\
& + M \left[ \nu_1(\nu_2 \bar{\nu}_3 - \bar{\nu}_2 \nu_3) + \nu_2(\nu_3 \bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3 \nu_1) + \nu_3(\nu_1 \bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1 \nu_2) \right].
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial l}{\partial g}(\bar{b} + \bar{\nu} a, \bar{\nu} A) = \\
m & \left[ \nu_3(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)(\bar{b}_1 - \bar{\nu}_3 a_2 + \bar{\nu}_2 a_3) - \nu_2(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)(\bar{b}_1 - \bar{\nu}_3 a_2 + \bar{\nu}_2 a_3) - \right. \\
& - \nu_3(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3)(\bar{b}_2 + \bar{\nu}_3 a_1 - \bar{\nu}_1 a_3) + \nu_1(b_3 - \nu_2 a_1 + \nu_1 a_2)(\bar{b}_2 + \bar{\nu}_3 a_1 - \bar{\nu}_1 a_3) + \\
& + \nu_2(b_1 - \nu_3 a_2 + \nu_2 a_3)(\bar{b}_3 - \bar{\nu}_2 a_1 + \bar{\nu}_1 a_2) - \nu_1(b_2 + \nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)(\bar{b}_3 - \bar{\nu}_2 a_1 + \bar{\nu}_1 a_2) - \\
& \left. - g(\bar{b}_3 - \bar{\nu}_2 a_1 + \bar{\nu}_1 a_2) \right].
\end{aligned}$$

Por um cálculo simples, podemos observar que

$$-\frac{\partial l}{\partial g} \cdot (\bar{b} + \bar{\nu}a, \bar{\nu}A) + \frac{\partial l}{\partial X} \cdot [(b, \nu), (\bar{b}, \bar{\nu})] =$$

$$M \left[ \nu_1(\nu_2\bar{\nu}_3 - \bar{\nu}_2\nu_3) + \nu_2(\nu_3\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3\nu_1) + \nu_3(\nu_1\bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1\nu_2) \right] - mg(\bar{b}_3 - \bar{\nu}_2a_1 + \bar{\nu}_1a_2).$$

Porém,

$$M \left[ \nu_1(\nu_2\bar{\nu}_3 - \bar{\nu}_2\nu_3) + \nu_2(\nu_3\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3\nu_1) + \nu_3(\nu_1\bar{\nu}_2 - \bar{\nu}_1\nu_2) \right] = 0,$$

assim,

$$-\frac{\partial l}{\partial g} \cdot (\bar{b} + \bar{\nu}a, \bar{\nu}A) + \frac{\partial l}{\partial X} \cdot [(b, \nu), (\bar{b}, \bar{\nu})] = mg(\bar{b}_3 - \bar{\nu}_2a_1 + \bar{\nu}_1a_2).$$

Para terminar, precisamos calcular  $\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X} \cdot (\bar{b}, \bar{\nu})$ .

Utilizando o fato que  $\dot{a} = b + \nu a$  e substituindo em (2.9), podemos observar que a expressão

$$\begin{aligned} & -\bar{\nu}_1\dot{a}_3(b_2 + \nu_3a_1 - \nu_1a_3) + \bar{\nu}_1\dot{a}_2(b_3 - \nu_2a_1 + \nu_1a_2) + \\ & + \bar{\nu}_2\dot{a}_3(b_1 - \nu_3a_2 + \nu_2a_3) - \bar{\nu}_2\dot{a}_1(b_3 - \nu_2a_1 + \nu_1a_2) - \\ & - \bar{\nu}_3\dot{a}_2(b_1 - \nu_3a_2 + \nu_2a_3) + \bar{\nu}_3\dot{a}_1(b_2 + \nu_3a_1 - \nu_1a_3) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, considerando que  $(\bar{b}, \bar{\nu})$  satisfaz o vínculo (2.6), temos:

$$\bar{b} = -r\bar{\nu}N(a) - \bar{\nu}a =$$

$$\left( r(\bar{\nu}_3n_2 - \bar{\nu}_2n_3) + \bar{\nu}_3a_2 - \bar{\nu}_2a_3, r(-\bar{\nu}_3n_1 + \bar{\nu}_1n_3) - \bar{\nu}_3a_1 + \bar{\nu}_1a_3, r(\bar{\nu}_2n_1 - \bar{\nu}_1n_2) + \bar{\nu}_2a_1 - \bar{\nu}_1a_2 \right),$$

onde  $N(a) = (n_1, n_2, n_3)$ .

Agora, substituindo  $\bar{b}$  em (2.9), temos, após os cancelamentos possíveis:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X} \cdot (\bar{b}, \bar{\nu}) = \\ & = mr \left[ (\bar{\nu}_3n_2 - \bar{\nu}_2n_3)\dot{b}_1 + (\bar{\nu}_3n_2 - \bar{\nu}_2n_3)(-\dot{\nu}_3a_2 - \nu_3\dot{a}_2 + \dot{\nu}_2a_3 + \nu_2\dot{a}_3) + \right. \\ & \quad \left. (-\bar{\nu}_3n_1 + \bar{\nu}_1n_3)\dot{b}_2 + (-\bar{\nu}_3n_1 + \bar{\nu}_1n_3)(\dot{\nu}_3a_1 + \nu_3\dot{a}_1 - \dot{\nu}_1a_3 - \nu_1\dot{a}_3) + \right. \\ & \quad \left. (\bar{\nu}_2n_1 - \bar{\nu}_1n_2)\dot{b}_3 + (\bar{\nu}_2n_1 - \bar{\nu}_1n_2)(-\dot{\nu}_2a_1 - \nu_2\dot{a}_1 + \dot{\nu}_1a_2 + \nu_1\dot{a}_2) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\delta l(a, A, b, \nu)(\bar{b}, \bar{\nu}) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X} \cdot (\bar{b}, \bar{\nu}) - \frac{\partial l}{\partial g} \cdot (\bar{b} + \bar{\nu}a, \bar{\nu}A) + \frac{\partial l}{\partial X} \cdot [(b, \nu), (\bar{b}, \bar{\nu})] = \\
&= M(\dot{\nu}_1 \bar{\nu}_1 + \dot{\nu}_2 \bar{\nu}_2 + \dot{\nu}_3 \bar{\nu}_3) + mg(\bar{b}_3 - \bar{\nu}_2 a_1 + \bar{\nu}_1 a_2) + \\
&+ mr \left[ (\bar{\nu}_3 n_2 - \bar{\nu}_2 n_3) \dot{b}_1 + (\bar{\nu}_3 n_2 - \bar{\nu}_2 n_3) (-\dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) + \right. \\
&\quad (-\bar{\nu}_3 n_1 + \bar{\nu}_1 n_3) \dot{b}_2 + (-\bar{\nu}_3 n_1 + \bar{\nu}_1 n_3) (\dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) + \\
&\quad \left. (\bar{\nu}_2 n_1 - \bar{\nu}_1 n_2) \dot{b}_3 + (\bar{\nu}_2 n_1 - \bar{\nu}_1 n_2) (-\dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2) \right].
\end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
mg(\bar{b}_3 - \bar{\nu}_2 a_1 + \bar{\nu}_1 a_2) &= mg \left( r(\bar{\nu}_2 n_1 - \bar{\nu}_1 n_2) + \bar{\nu}_2 a_1 - \bar{\nu}_1 a_2 - \bar{\nu}_2 a_1 + \bar{\nu}_1 a_2 \right) = \\
&= mg \left( r(\bar{\nu}_2 n_1 - \bar{\nu}_1 n_2) \right) = mgr(-n_2, n_1, 0)(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) = mge_3 \times rN(a)(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt} \left( -r\nu N(a) \right) \times rN(a) = \frac{d}{dt} (b + \nu a) \times rN(a) = \dot{b} \times rN(a) + \frac{d}{dt} (\nu a) \times rN(a).$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
\dot{b} \times rN(a)(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) &= r(\dot{b}_2 n_3 - \dot{b}_3 n_2, \dot{b}_3 n_1 - \dot{b}_1 n_3, \dot{b}_1 n_2 - \dot{b}_2 n_1)(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) = \\
&= r \left[ \bar{\nu}_1 (\dot{b}_2 n_3 - \dot{b}_3 n_2) + \bar{\nu}_2 (\dot{b}_3 n_1 - \dot{b}_1 n_3) + \bar{\nu}_3 (\dot{b}_1 n_2 - \dot{b}_2 n_1) \right] = \\
&= r \left[ (\bar{\nu}_3 n_2 - \bar{\nu}_2 n_3) \dot{b}_1 + (-\bar{\nu}_3 n_1 + \bar{\nu}_1 n_3) \dot{b}_2 + (\bar{\nu}_2 n_1 - \bar{\nu}_1 n_2) \dot{b}_3 \right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} (\nu a) \times rN(a)(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) = \\
&= r \left( n_3 (\dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) - n_2 (-\dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2), \right. \\
&\quad \left. n_1 (-\dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2) - n_3 (-\dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3), \right. \\
&\quad \left. n_1 (\dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) - n_2 (-\dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) \right) (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) =
\end{aligned}$$

$$= r \left[ (\bar{\nu}_3 n_2 - \bar{\nu}_2 n_3)(-\dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) + (-\bar{\nu}_3 n_1 + \bar{\nu}_1 n_3)(\dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) + (\bar{\nu}_2 n_1 - \bar{\nu}_1 n_2)(-\dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2) \right].$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \left( -r\nu N(a) \right) \times rN(a)(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) &= \left( m\dot{b} \times rN(a) + m \frac{d}{dt}(\nu a) \times rN(a) \right) (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) = \\ &= mr \left[ (\bar{\nu}_3 n_2 - \bar{\nu}_2 n_3)\dot{b}_1 + (\bar{\nu}_3 n_2 - \bar{\nu}_2 n_3)(-\dot{\nu}_3 a_2 - \nu_3 \dot{a}_2 + \dot{\nu}_2 a_3 + \nu_2 \dot{a}_3) + \right. \\ &\quad \left. (-\bar{\nu}_3 n_1 + \bar{\nu}_1 n_3)\dot{b}_2 + (-\bar{\nu}_3 n_1 + \bar{\nu}_1 n_3)(\dot{\nu}_3 a_1 + \nu_3 \dot{a}_1 - \dot{\nu}_1 a_3 - \nu_1 \dot{a}_3) + \right. \\ &\quad \left. (\bar{\nu}_2 n_1 - \bar{\nu}_1 n_2)\dot{b}_3 + (\bar{\nu}_2 n_1 - \bar{\nu}_1 n_2)(-\dot{\nu}_2 a_1 - \nu_2 \dot{a}_1 + \dot{\nu}_1 a_2 + \nu_1 \dot{a}_2) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta l(a, A, b, \nu)(\bar{b}, \bar{\nu}) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial X}(\bar{b}, \bar{\nu}) - \frac{\partial l}{\partial g}(\bar{b} + \bar{\nu}a, \bar{\nu}A) + \frac{\partial l}{\partial X}[(b, \nu), (\bar{b}, \bar{\nu})] = \\ &= \left( \frac{d}{dt} Mi(\nu) + m \left[ \frac{d}{dt}(-r\nu N(a)) + ge_3 \right] \times rN(a) \right) (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) \end{aligned}$$

Mas, para o movimento com vínculo não holônomo, teremos que ter  $\delta l(a, A, b, \nu)(\bar{b}, \bar{\nu}) = 0$ , ou seja,

$$\left( \frac{d}{dt} Mi(\nu) + m \left[ \frac{d}{dt}(-r\nu N(a)) + ge_3 \right] \times rN(a) \right) (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) = 0,$$

para todo  $\bar{\nu} \in so(3)$ . Assim teremos

$$\frac{d}{dt} Mi(\nu) + m \left[ \frac{d}{dt}(-r\nu N(a)) + ge_3 \right] \times rN(a) = 0.$$

■

Observe que  $V$  é um campo tangente à variedade  $C$ , de dimensão 8 dada por:

$$C = \{(a, A, b, \nu); a_3 = h(a_1, a_2), b = -\nu(rN(a) + a)\}$$

Considere a ação à direita de  $SO(3)$  em  $\mathcal{E}(3)$ ,  $\sigma : \mathcal{E}(3) \times SO(3) \rightarrow \mathcal{E}(3)$ , onde  $\mathcal{E}(3)$  foi identificado com  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , dada por

$$\sigma_B(a, A) = (a, AB^{-1}).$$

De fato, esta aplicação é uma ação à direita pois:

1. dados  $(a, A) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3)$  e  $B_1, B_2 \in SO(3)$  temos

$$\sigma((a, A), B_1 B_2) = (a, A(B_1 B_2)^{-1}) = (a, AB_2^{-1} B_1^{-1}) \text{ e}$$

$$\sigma(\sigma((a, A), B_2), B_1) = \sigma((a, AB_2^{-1}), B_1) = (a, AB_2^{-1} B_1^{-1}).$$

logo

$$\sigma_{B_1 B_2} = \sigma_{B_1} \circ \sigma_{B_2};$$

2. Além disso.

$$\sigma((a, A), I) = (a, AI^{-1}) = (a, A).$$

Levantando a ação  $\sigma$  para uma ação de  $SO(3)$  sobre  $T\mathcal{E}(3)$ , que está identificado com  $\mathbb{R}^3 \times so(3)$ , temos a ação  $\phi : T\mathcal{E}(3) \times SO(3) \rightarrow T\mathcal{E}(3)$  dada por

$$\phi(a, A, b, \nu, B) = (a, AB^{-1}, b, \nu). \quad (2.10)$$

Para garantir que esse é realmente um levantamento, precisamos ver que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{E}(3) \times SO(3) & \xrightarrow{\phi} & T\mathcal{E}(3) \\ (\pi, I) \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{E}(3) \times SO(3) & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{E}(3) \end{array}$$

Mas,

$$\sigma((\pi, I)(a, A, b, \nu, B)) = \sigma((a, A), B) = (a, AB^{-1}) \text{ e}$$

$$\pi(\phi((a, A, b, \nu), B)) = \pi(a, AB^{-1}, b, \nu) = (a, AB^{-1}).$$

Logo,

$$\sigma \circ (\pi, I) = \pi \circ \phi$$

Podemos demonstrar o seguinte resultado:

**Lema 2.1.** *As seguintes propriedades são válidas:*

1.  $V$  é invariante sob a ação de  $SO(3)$

2.  $C$  é invariante sob a ação de  $SO(3)$

**Demonstração:** Para demonstrar 1, precisamos ver que  $V \circ \phi_B = d\phi_B \circ V$ .

Por um lado,

$$V(\phi_B(a, A, b, \nu)) = V((a, AB^{-1} \cdot b, \nu)) = \left( b + \nu a, \nu(AB^{-1}), \frac{d}{dt}[-\nu r N(a) + a], \dot{\nu} \right).$$

Por outro,

$$\begin{aligned} d\phi_B(a, A, b, \nu)V(a, A, b, \nu) &= d\phi_B(a, A, b, \nu) \left( b + \nu a, \nu(AB^{-1}), \frac{d}{dt}[-\nu r N(a) + a], \dot{\nu} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_B \left( (a, A, b, \nu) + t \left( b + \nu a, \nu(AB^{-1}), \frac{d}{dt}[-\nu r N(a) + a], \dot{\nu} \right) \right) - \phi_B(a, A, b, \nu)}{t} = \\ &= \left( b + \nu a, \nu(AB^{-1}), \frac{d}{dt}[-\nu r N(a) + a], \dot{\nu} \right). \end{aligned}$$

Para 2 basta observarmos que as condições que definem  $C$  não dependem da segunda coordenada. ■

## 2.4 Sistema $SO(3)$ -Reduzido

O fato da esfera ser dinamicamente simétrica nos permite obter um sistema com menos coordenadas e que preserve o máximo da estrutura possível. Para reduzir as coordenadas, usaremos a ação à direita de  $SO(3)$  sobre  $\mathcal{TE}(3)$  definida em (2.10).

Começaremos com a seguinte definição:

**Definição 2.1.** Seja  $k : C \rightarrow \mathbb{R}^5 \times SO(3)$  a aplicação dada por:

$$k(a_1, a_2, A, \nu) = (a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w, A^{-1}),$$

em que  $\vartheta = -r\nu N(a)$  e  $w = r\langle N(a), i(\nu) \rangle$ .

Podemos observar que sendo  $N_1 = (1, 0, H_1)$  e  $N_2 = (0, 1, H_2)$ ,

$$N(a) = \frac{N_2 \times N_1}{\|N_2 \times N_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_1, H_2, -1)$$

e assim,

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= -\frac{r}{\sqrt{1+H_1^2+H_2^2}}(-\nu_3H_2-\nu_2); \\ \vartheta_2 &= -\frac{r}{\sqrt{1+H_1^2+H_2^2}}(\nu_3H_1+\nu_1); \\ \vartheta_3 &= -\frac{r}{\sqrt{1+H_1^2+H_2^2}}(-\nu_2H_1+\nu_1H_2); \\ w &= \frac{r}{\sqrt{1+H_1^2+H_2^2}}(\nu_1H_1+\nu_2H_2-\nu_3),\end{aligned}$$

onde  $H_i = \frac{\partial h}{\partial a_i}$ .

**Observação 2.2.** Pela Proposição 2.3 e pelo vínculo (2.6),  $\dot{a} = b + \nu a = -r\nu N(a) = \vartheta$ . Disso segue que

$$\vartheta_3 = \dot{a}_3 = \frac{d}{dt}h(a_1, a_2) = H_1\dot{a}_1 + H_2\dot{a}_2 = H_1\vartheta_1 + H_2\vartheta_2.$$

**Proposição 2.4.**  $k$  é um difeomorfismo entre  $C$  e  $U \times \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , em que  $U \subset \mathbb{R}^2$  é o aberto onde  $h$  está definido.

**Demonstração:** Para mostrar que  $k$  é um difeomorfismo precisamos exibir sua inversa.

Pelas expressões acima, que fornecem  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  e  $w$ , temos:

$$\frac{\sqrt{1+H_1^2+H_2^2}}{r}\vartheta_1 = \nu_3H_2 + \nu_2 \quad (2.11)$$

$$-\frac{\sqrt{1+H_1^2+H_2^2}}{r}\vartheta_2 = \nu_3H_1 + \nu_1 \quad (2.12)$$

$$\frac{\sqrt{1+H_1^2+H_2^2}}{r}w = \nu_1H_1 + \nu_2H_2 - \nu_3. \quad (2.13)$$

Vamos resolver este sistema linear nas incógnitas  $\nu_1, \nu_2$  e  $\nu_3$ .

Multiplicando (2.11) por  $-H_2$  e somando a (2.13), teremos:

$$\frac{\sqrt{1+H_1^2+H_2^2}}{r}(-H_2\vartheta_1 + w) = -\nu_3H_2^2 + \nu_1H_1 - \nu_3. \quad (2.14)$$

Agora, multiplicando (2.12) por  $-H_1$  e somando a (2.14), ficaremos com:

$$\frac{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}{r}(-H_1\vartheta_1 + w + H_1\vartheta_2) = -\nu_3 H_1^2 - \nu_3 H_2^2 - \nu_3.$$

logo,

$$\nu_3 = \frac{1}{r\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_2\vartheta_1 - w - H_1\vartheta_2).$$

Substituindo  $\nu_3$  em (2.12) obteremos:

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}{r}\vartheta_2 &= \frac{1}{r\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_2\vartheta_1 - w - H_1\vartheta_2)H_1 + \nu_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nu_1 &= \frac{-(H_2\vartheta_1 - w - H_1\vartheta_2)H_1 - (1 + H_1^2 + H_2^2)\vartheta_2}{r\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}} = \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_1w - H_1H_2\vartheta_1 - \vartheta_2 - H_2^2\vartheta_2). \end{aligned}$$

Por fim, substituindo  $\nu_3$  em (2.11):

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}{r}\vartheta_1 &= \frac{1}{r\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_2\vartheta_1 - w - H_1\vartheta_2)H_2 + \nu_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nu_2 &= \frac{-(H_2\vartheta_1 - w - H_1\vartheta_2)H_2 + (1 + H_1^2 + H_2^2)\vartheta_1}{r\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}} = \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_2w + H_1H_2\vartheta_2 + \vartheta_1 + H_1^2\vartheta_1). \end{aligned}$$

Disso segue:

$$i(\nu) = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}} \begin{bmatrix} H_1w - H_1H_2\vartheta_1 - \vartheta_2 - H_2^2\vartheta_2 \\ H_2w + H_1H_2\vartheta_2 + \vartheta_1 + H_1^2\vartheta_1 \\ H_2\vartheta_1 - w - H_1\vartheta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

É claro que a inversa  $s : \mathbb{R}^5 \times SO(3) \rightarrow C$  de  $k$  deve ter a forma:

$$s(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w, A) = (a_1, a_2, A^{-1}, \nu),$$

onde  $\nu$  é dado por (2.15). Disso segue que  $k$  é bijetora.

Como  $k$  e  $s$  são diferenciáveis,  $k$  é um difeomorfismo. ■

Analisemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{k} & U \times \mathbb{R}^3 \times SO(3) \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \bar{C} & \xrightarrow{L} & U \times \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Podemos observar que  $p_1 \circ k$  é invariante pela ação de  $SO(3)$ , assim a aplicação  $L$  está bem definida.

Agora, como  $k$  é um difeomorfismo,  $L$  é um difeomorfismo.

Logo o espaço das órbitas  $\bar{C} = \frac{C}{SO(3)}$  é difeomorfa a  $U \times \mathbb{R}^3$ , onde  $U$  é o aberto em que  $h$  está definida. Com isso, conseguimos uma identificação entre  $\bar{C}$  e  $U \times \mathbb{R}^3$ . Assim, a partir de agora, consideraremos  $(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w)$  como coordenadas de  $\bar{C}$ , porém vale ressaltar que esse é um abuso de linguagem. Pelo Lema 2.1, sabemos que o campo vetorial  $V$  é invariante pela ação de  $SO(3)$ , assim,  $V$  induz um campo vetorial  $\bar{V}$  sobre  $\bar{C}$  que torna comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{V} & TC \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ \bar{C} & \xrightarrow{\bar{V}} & T\bar{C} \end{array}$$

Mostremos que  $\bar{V}$  dada por  $\bar{V}(\pi(p)) = d\pi(p)V(p)$  está bem definida: sejam  $\pi(p_1) = \pi(p_2) \in \bar{C}$ . Disso, existe  $B \in SO(3)$  tal que  $\phi_B(p_2) = p_1$ . Além disso, como  $V$  é invariante pela ação de  $SO(3)$ ,  $V(\phi_B(p)) = d\phi_B(p)V(p)$ , assim:

$$\begin{aligned} \bar{V}(\pi(p_1)) &= d\pi(p_1)V(p_1) = d\pi(\phi_B(p_2))V(\phi_B(p_2)) = d\pi(\phi_B(p_2))d\phi_B(p_2)V(p_2) = \\ &= d(\pi \circ \phi_B)(p_2)V(p_2) = d\pi(p_2)V(p_2) = \bar{V}(\pi(p_2)). \end{aligned}$$

As componentes desse campo são dadas no teorema a seguir:

**Teorema 2.1.** *O campo vetorial  $V$  sobre  $C$  induz um campo vetorial  $\bar{V}$  sobre  $\bar{C}$ , cujas*

componentes são:

$$\dot{a} = \vartheta \quad (2.16)$$

$$\dot{w} = \langle DN(a)\vartheta \times \vartheta, N(a) \rangle \quad (2.17)$$

$$\dot{\vartheta} + \frac{mr^2g}{M+mr^2}e_3 + \frac{Mw}{M+mr^2}N(a) \times DN(a)\vartheta \text{ é ortogonal a } T_a\mathcal{H} \quad (2.18)$$

### Demonstração:

Para que  $\bar{V}$  seja realmente o campo vetorial induzido de  $V$  basta observarmos que  $\bar{\pi} \circ V = \bar{V} \circ \pi$ .

Já vimos que  $\dot{a} = \vartheta$ .

Começaremos mostrando (2.17).

Visto que

$$\frac{d}{dt}N(a) = DN(a)\vartheta,$$

temos,

$$\|N(a)\| = 1 \Rightarrow \langle N(a), N(a) \rangle = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\langle N(a), N(a) \rangle = 0 \Rightarrow \langle DN(a)\vartheta, N(a) \rangle = 0. \quad (2.19)$$

Também,

$$\frac{d(N(a) \times \vartheta)}{dt} = DN(a)\vartheta \times \vartheta + N(a) \times \dot{\vartheta}. \quad (2.20)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle -N(a) \times \vartheta + wN(a), DN(a)\vartheta \rangle &= -\langle N(a) \times \vartheta, DN(a)\vartheta \rangle + w\langle N(a), DN(a)\vartheta \rangle = \\ &\stackrel{(2.19)}{=} -\langle N(a) \times \vartheta, DN(a)\vartheta \rangle = \left\langle \frac{d(N(a) \times \vartheta)}{dt}, N(a) \right\rangle - \frac{d}{dt} \left\langle N(a) \times \vartheta, N(a) \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{d(N(a) \times \vartheta)}{dt}, N(a) \right\rangle \stackrel{(2.20)}{=} \langle DN(a)\vartheta \times \vartheta, N(a) \rangle + \langle N(a) \times \dot{\vartheta}, N(a) \rangle = \\ &= \langle DN(a)\vartheta \times \vartheta, N(a) \rangle. \end{aligned}$$

Assim, basta que

$$\langle -N(a) \times \vartheta + wN(a), DN(a)\vartheta \rangle = \dot{w}.$$

Mas  $w = r\langle N(a), i(\nu) \rangle$ , logo  $\dot{w} = r\langle DN(a)\vartheta, i(\nu) \rangle + r\langle N(a), \frac{d}{dt}i(\nu) \rangle$ . Por (2.8), temos que

$$\frac{d}{dt}i(\nu) = -\frac{m}{\lambda I} \left[ \frac{d}{dt}(-r\nu N(a)) + ge_3 \right] \times rN(a).$$

Logo,

$$\dot{w} = r\langle DN(a)\vartheta, i(\nu) \rangle.$$

Com isso, reduzimos o problema a mostrar que

$$-N(a) \times \vartheta + wN(a) = ri(\nu). \quad (2.21)$$

Mas,

$$-N(a) \times \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -H_1 & -H_2 & 1 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \end{vmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & -N(a) \times \vartheta + wN(a) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}} \left( (-H_1H_2\vartheta_1 - H_2^2\vartheta_2 - \vartheta_2, H_1H_2\vartheta_2 + H_1^2\vartheta_1 + \vartheta_1, -H_1\vartheta_2 + H_2\vartheta_1) + \right. \\ & \quad \left. + (wH_1, wH_2, -w) \right) = ri(\nu). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{w} = \langle DN(a)\vartheta \times \vartheta, N(a) \rangle.$$

Para calcular  $\vartheta$  usaremos a expressão (2.8)

$$\frac{d}{dt}Mi(\nu) + m \left[ \frac{d}{dt}(-r\nu N(a)) + ge_3 \right] \times rN(a) = 0.$$

Fazendo o produto vetorial da expressão por  $N(a)$  e multiplicando por  $r$  teremos

$$\begin{aligned} & M \left( N(a) \times \frac{d}{dt} ri(\nu) \right) + mr^2 N(a) \times \left[ \left( \dot{\vartheta} + ge_3 \right) \times N(a) \right] = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & N(a) \times \left( mr^2 \dot{\vartheta} \times N(a) \right) = -N(a) \times \left( mr^2 ge_3 \times N(a) \right) - M \left( N(a) \times \frac{d}{dt} ri(\nu) \right) = \\ & = -N(a) \times \left( mr^2 ge_3 \times N(a) \right) - M \frac{d}{dt} \left( N(a) \times ri(\nu) \right) + M \left( DN(a) \vartheta \times ri(\nu) \right). \end{aligned}$$

Usando (2.21), vemos que

$$\frac{d}{dt} \left( N(a) \times ri(\nu) \right) = \frac{d}{dt} \left[ N(a) \times \left( -N(a) \times \vartheta + wN(a) \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[ N(a) \times \left( -N(a) \times \vartheta \right) \right].$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle N(a), \vartheta \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}} \langle (H_1, H_2, -1), (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}} (H_1 \vartheta_1 + H_2 \vartheta_2 - H_1 \vartheta_1 - H_2 \vartheta_2) = 0. \end{aligned}$$

Logo  $N(a)$  é perpendicular a  $\vartheta$ . Disso e usando a relação:

$$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c,$$

para todo vetor  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ , temos,

$$\frac{d}{dt} \left[ N(a) \times \left( -N(a) \times \vartheta \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[ -\langle N(a), \vartheta \rangle N(a) - \langle N(a), N(a) \rangle \vartheta \right] = \dot{\vartheta}.$$

Deste modo,

$$N(a) \times \left( mr^2 \dot{\vartheta} \times N(a) \right) = -N(a) \times \left( mr^2 ge_3 \times N(a) \right) - M \dot{\vartheta} + M \left( DN(a) \vartheta \times ri(\nu) \right).$$

Novamente fazemos o produto vetorial da expressão com  $N(a)$  para obtermos

$$\begin{aligned} & \left[ N(a) \times \left( mr^2 \dot{\vartheta} \times N(a) \right) \right] \times N(a) = \\ = & \left[ -N(a) \times \left( mr^2 g e_3 \times N(a) \right) \right] \times N(a) - M \dot{\vartheta} \times N(a) + M \left( DN(a) \vartheta \times ri(\nu) \right) \times N(a). \end{aligned}$$

Como  $\left( mr^2 \dot{\vartheta} \times N(a) \right)$  e  $\left( mr^2 g e_3 \times N(a) \right)$  são perpendiculares a  $N(a)$ , então

$$\left[ N(a) \times \left( mr^2 \dot{\vartheta} \times N(a) \right) \right] \times N(a) = mr^2 \dot{\vartheta} \times N(a)$$

c

$$\left[ -N(a) \times \left( mr^2 g e_3 \times N(a) \right) \right] \times N(a) = -mr^2 g e_3 \times N(a).$$

Então,

$$\begin{aligned} mr^2 \dot{\vartheta} \times N(a) &= -mr^2 g e_3 \times N(a) - M \dot{\vartheta} \times N(a) + M \left( DN(a) \vartheta \times ri(\nu) \right) \times N(a) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( mr^2 + M \right) \dot{\vartheta} \times N(a) &= -mr^2 g e_3 \times N(a) + M \left( DN(a) \vartheta \times ri(\nu) \right) \times N(a). \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} M \left( DN(a) \vartheta \times ri(\nu) \right) &= M \left[ DN(a) \vartheta \times \left( -N(a) \times \vartheta + w N(a) \right) \right] = \\ = M \left[ DN(a) \vartheta \times \left( -N(a) \times \vartheta \right) \right] &+ M w \left( DN(a) \vartheta \times N(a) \right) = M w \left( DN(a) \vartheta \times N(a) \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left( mr^2 + M \right) \dot{\vartheta} \times N(a) = -mr^2 g e_3 \times N(a) + M w \left( DN(a) \vartheta \times N(a) \right) \times N(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vartheta} \times N(a) = -\frac{mr^2g}{mr^2 + M}e_3 \times N(a) - \frac{Mw}{mr^2 + M} \left( N(a) \times DN(a)\vartheta \right) \times N(a),$$

ou seja,

$$\dot{\vartheta} + \frac{mr^2g}{M + mr^2}e_3 + \frac{Mw}{M + mr^2}N(a) \times DN(a)\vartheta \text{ é ortogonal a } T_a\mathcal{H}.$$

■

Observa-se aqui, que  $a$  denota a posição e  $\vartheta$  a velocidade do centro de massa da esfera, e  $w$  denota a velocidade de rotação em torno do eixo perpendicular a  $\mathcal{H}$ .

Para cálculos futuros, exibiremos a expressão de  $\dot{\vartheta}_1$  e  $\dot{\vartheta}_2$ . Para isso, usaremos que a expressão (2.18) é perpendicular tanto a  $(1, 0, H_1)$  quanto a  $(0, 1, H_2)$ .

Sabendo que  $N(a) = \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_1, H_2, -1)$ , temos que:

$$DN(a)\vartheta = \frac{d}{dt}N(a) = -\frac{1}{(1 + H_1^2 + H_2^2)^{\frac{3}{2}}}(H_1\dot{H}_1 + H_2\dot{H}_2)(H_1, H_2, -1) + \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(\dot{H}_1, \dot{H}_2, 0).$$

Daí,

$$\begin{aligned} N(a) \times DN(a)\vartheta &= \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_1, H_2, -1) \times -\frac{1}{(1 + H_1^2 + H_2^2)^{\frac{3}{2}}}(H_1\dot{H}_1 + H_2\dot{H}_2)(H_1, H_2, -1) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_1, H_2, -1) \times \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(\dot{H}_1, \dot{H}_2, 0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(H_1, H_2, -1) \times \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}}(\dot{H}_1, \dot{H}_2, 0) = \\ &= \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2}(\dot{H}_2, -\dot{H}_1, H_1\dot{H}_2 - H_2\dot{H}_1). \end{aligned}$$

Como visto anteriormente,  $\vartheta_3 = H_1\vartheta_1 + H_2\vartheta_2$ , assim,

$$\dot{\vartheta}_3 = \dot{H}_1\vartheta_1 + H_1\dot{\vartheta}_1 + \dot{H}_2\vartheta_2 + H_2\dot{\vartheta}_2.$$

Disso segue:

$$\left\langle (\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3) \cdot (1, 0, H_1) \right\rangle = \dot{\vartheta}_1 + \dot{H}_1 H_1 \vartheta_1 + H_1^2 \dot{\vartheta}_1 + H_1 \dot{H}_2 \vartheta_2 + H_1 H_2 \dot{\vartheta}_2 \quad (2.22)$$

$$\left\langle N(a) \times DN(a) \vartheta \cdot (1, 0, H_1) \right\rangle = \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} (\dot{H}_2 + H_1^2 \dot{H}_2 - H_1 H_2 \dot{H}_1) \quad (2.23)$$

$$\left\langle (0, 0, 1) \cdot (1, 0, H_1) \right\rangle = H_1 \quad (2.24)$$

Além disso,

$$\left\langle (\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3) \cdot (0, 1, H_2) \right\rangle = \dot{\vartheta}_2 + \dot{H}_1 H_2 \vartheta_1 + H_1 H_2 \dot{\vartheta}_1 + \dot{H}_2 H_2 \vartheta_2 + H_2^2 \dot{\vartheta}_2 \quad (2.25)$$

$$\left\langle N(a) \times DN(a) \vartheta \cdot (0, 1, H_2) \right\rangle = \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} (-\dot{H}_1 + H_1 H_2 \dot{H}_2 - H_2^2 \dot{H}_1) \quad (2.26)$$

$$\left\langle (0, 0, 1) \cdot (0, 1, H_2) \right\rangle = H_2 \quad (2.27)$$

Então.

$$\begin{aligned} & \left\langle \dot{\vartheta} + \frac{mr^2 g}{M + mr^2} e_3 + \frac{Mw}{M + mr^2} N(a) \times DN(a) \vartheta \cdot (1, 0, H_1) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \dot{\vartheta}_1 + \dot{H}_1 H_1 \vartheta_1 + H_1^2 \dot{\vartheta}_1 + H_1 \dot{H}_2 \vartheta_2 + H_1 H_2 \dot{\vartheta}_2 + \frac{mr^2 g}{M + mr^2} H_1 + \\ & + \frac{Mw}{M + mr^2} \left[ \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} (\dot{H}_2 + H_1^2 \dot{H}_2 - H_1 H_2 \dot{H}_1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

e

$$\begin{aligned} & \left\langle \dot{\vartheta} + \frac{mr^2 g}{M + mr^2} e_3 + \frac{Mw}{M + mr^2} N(a) \times DN(a) \vartheta \cdot (0, 1, H_2) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \dot{\vartheta}_2 + \dot{H}_1 H_2 \vartheta_1 + H_1 H_2 \dot{\vartheta}_1 + \dot{H}_2 H_2 \vartheta_2 + H_2^2 \dot{\vartheta}_2 + \frac{mr^2 g}{M + mr^2} H_2 + \\ & + \frac{Mw}{M + mr^2} \left[ \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} (-\dot{H}_1 + H_1 H_2 \dot{H}_2 - H_2^2 \dot{H}_1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para encontrar  $\dot{\vartheta}_1$  multiplicaremos (2.28) por  $(1 + H_2^2)$  e subtrairemos (2.29) multiplicado

por  $H_1 H_2$ . Após o cálculo teremos:

$$(1 + H_1^2 + H_2^2)\dot{\vartheta}_1 - \left( -\dot{H}_1 H_1 \vartheta_1 - H_1 \dot{H}_2 \vartheta_2 - \frac{mr^2 g}{M + mr^2} H_1 - \frac{Mw}{M + mr^2} \dot{H}_2 \right) = 0,$$

ou seja,

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} \left( -\dot{H}_1 H_1 \vartheta_1 - H_1 \dot{H}_2 \vartheta_2 - \frac{mr^2 g}{M + mr^2} H_1 - \frac{Mw}{M + mr^2} \dot{H}_2 \right). \quad (2.30)$$

Agora, para encontrar  $\dot{\vartheta}_2$ , multiplicaremos (2.29) por  $(1 + H_1^2)$  e subtrairemos (2.28) multiplicado por  $H_1 H_2$ . Fazendo os cálculos teremos:

$$(1 + H_1^2 + H_2^2)\dot{\vartheta}_2 - \left( -\dot{H}_1 H_2 \vartheta_1 - \dot{H}_2 H_2 \vartheta_2 - \frac{mr^2 g}{M + mr^2} H_2 + \frac{Mw}{M + mr^2} \dot{H}_1 \right) = 0,$$

ou seja,

$$\dot{\vartheta}_2 = \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} \left( -\dot{H}_1 H_2 \vartheta_1 - \dot{H}_2 H_2 \vartheta_2 - \frac{mr^2 g}{M + mr^2} H_2 + \frac{Mw}{M + mr^2} \dot{H}_1 \right). \quad (2.31)$$

**Observação 2.3.** Como  $H_1 = \frac{\partial}{\partial a_1} h(a_1, a_2)$  e  $H_2 = \frac{\partial}{\partial a_2} h(a_1, a_2)$ , teremos:

$$\dot{H}_1 = \frac{\partial^2}{\partial a_1^2} h(a_1, a_2) \vartheta_1 + \frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_2} h(a_1, a_2) \vartheta_2 \quad (2.32)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_2} h(a_1, a_2) \vartheta_1 + \frac{\partial^2}{\partial a_2^2} h(a_1, a_2) \vartheta_2. \quad (2.33)$$

## 2.5 Sistema $SO(3) \times S^1$ -reduzido

De agora em diante consideraremos que a superfície na qual a esfera rola é uma superfície de revolução, ou seja, que existe uma aplicação diferenciável  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$a_3 = h(a_1, a_2) = \varphi \left( \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right).$$

Para garantirmos a diferenciabilidade na origem, suporemos que  $\varphi$  é uma aplicação par e conseqüentemente  $\varphi'(0) = 0$ . Além disso, suporemos que a superfície é convexa, ou seja,  $\varphi' \geq 0$  e  $\varphi'' \geq 0$ .

Nesta seção usaremos o fato da superfície ser de revolução para encontrar uma variedade reduzida  $P$ , gerada pela simetria que a superfície terá pela ação de  $S^1$  sobre a variedade  $C$ ,  $\bar{\Psi} : S^1 \times C \rightarrow C$ , dada por:

$$\bar{\Psi}_\theta(a, A, b, \nu) = (\bar{\psi}_\theta a, \bar{\psi}_\theta A, \bar{\psi}_\theta b, \bar{\psi}_\theta \nu \bar{\psi}_\theta^{-1}),$$

onde

$$\bar{\psi}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, encontraremos o campo vetorial  $\chi$  sobre  $P$ , induzido pelo campo vetorial  $\bar{V}$  e deduziremos algumas de suas propriedades.

**Teorema 2.2.** *A ação  $\bar{\Psi}$  de  $S^1$  sobre  $C$  induz uma ação  $\Psi : S^1 \times \bar{C} \rightarrow \bar{C}$  que faz com que o seguinte diagrama comute:*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\bar{\Psi}_\theta} & C \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \frac{C}{SO(3)} & \xrightarrow{\Psi_\theta} & \frac{C}{SO(3)} \end{array}$$

**Demonstração:** Defina  $\Psi$  do seguinte modo:

$$\Psi_\theta(\pi(a, A, b, \nu)) = \pi(\bar{\Psi}_\theta(a, A, b, \nu)).$$

Para mostrarmos que  $\Psi$  está bem definida, sejam  $(a_1, A_1, b_1, \nu_1), (a_2, A_2, b_2, \nu_2) \in C$ , tal que  $\pi(a_1, A_1, b_1, \nu_1) = \pi(a_2, A_2, b_2, \nu_2) \in \bar{C}$ . Como  $(a_1, A_1, b_1, \nu_1)$  e  $(a_2, A_2, b_2, \nu_2)$  estão na mesma classe de equivalência, existe  $B \in SO(3)$  tal que  $\phi_B(a_2, A_2, b_2, \nu_2) = (a_1, A_1, b_1, \nu_1)$ , onde  $\phi$  é a ação de  $SO(3)$  sobre  $C$  definida anteriormente. Além disso, podemos observar que  $\bar{\Psi}_\theta \circ \phi_B = \phi_B \circ \bar{\Psi}_\theta$ . De fato,

$$\bar{\Psi}_\theta(\phi_B(a, A, b, \nu)) = \bar{\Psi}_\theta(a, AB^{-1}, b, \nu) = (\bar{\psi}_\theta a, \bar{\psi}_\theta(AB^{-1}), \bar{\psi}_\theta b, \bar{\psi}_\theta \nu \bar{\psi}_\theta^{-1}) =$$

$$= (\bar{\psi}_\theta a, (\bar{\psi}_\theta A)B^{-1}, \bar{\psi}_\theta b, \bar{\psi}_\theta \nu \bar{\psi}_\theta^{-1}) = \phi_B(\bar{\Psi}_\theta(a, A, b, \nu)).$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} \Psi_\theta(\pi(a_1, A_1, b_1, \nu_1)) &= \pi(\bar{\Psi}_\theta(a_1, A_1, b_1, \nu_1)) = \pi(\bar{\Psi}_\theta(\phi_B(a_2, A_2, b_2, \nu_2))) = \\ &= \pi(\phi_B(\bar{\Psi}_\theta(a_2, A_2, b_2, \nu_2))) = \pi(\bar{\Psi}_\theta(a_2, A_2, b_2, \nu_2)) = \Psi_\theta(\pi(a_2, A_2, b_2, \nu_2)). \end{aligned}$$

Logo,  $\Psi_\theta$  está bem definida. Para analisarmos sua expressão usaremos:

$$\Psi_\theta(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) = \Psi_\theta(\pi(a, A, b, \nu)) = \pi(\bar{\Psi}_\theta(a, A, b, \nu)).$$

Porém,

$$\pi(\bar{\Psi}_\theta(a, A, b, \nu)) = \pi(\bar{\psi}_\theta a, \bar{\psi}_\theta A, \bar{\psi}_\theta b, \bar{\psi}_\theta \nu \bar{\psi}_\theta^{-1}).$$

Tomemos  $\pi(\bar{\psi}_\theta a, \bar{\psi}_\theta A, \bar{\psi}_\theta b, \bar{\psi}_\theta \nu \bar{\psi}_\theta^{-1}) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{w})$ .

Como

$$\bar{\psi}_\theta a = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ h(a_1, a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta \\ -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta \\ h(a_1, a_2) \end{bmatrix},$$

então,

$$\bar{a}_1 = a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta;$$

$$\bar{a}_2 = -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta.$$

Calculemos agora  $\bar{\vartheta}_1$  e  $\bar{\vartheta}_2$ . Para isso devemos observar que  $N(\bar{a}) = \bar{\psi}_\theta N(a)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2 &= (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta)^2 + (-a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta)^2 = \\ &= a_1^2 \cos^2 \theta + 2a_1 a_2 \cos \theta \sin \theta + a_2^2 \sin^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta - 2a_1 a_2 \cos \theta \sin \theta + a_2^2 \cos^2 \theta = \\ &= a_1^2 \cos^2 \theta + a_2^2 \sin^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \cos^2 \theta = a_1^2 + a_2^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
N(\bar{a}) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'(\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2)^2}} \left( \frac{\varphi'}{\sqrt{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}} \bar{a}_1, \frac{\varphi'}{\sqrt{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}} \bar{a}_2, -1 \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'(a_1^2 + a_2^2)^2}} \left( \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta), \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} (-a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta), -1 \right) = \\
&= \bar{\psi}_\theta N(a).
\end{aligned}$$

Sabendo isso,

$$\bar{\vartheta} = -r\bar{\nu}N(\bar{a}) = -r\bar{\psi}_\theta\nu\bar{\psi}_\theta^{-1}\bar{\psi}_\theta N(a) = -r\bar{\psi}_\theta\nu N(a) = \bar{\psi}_\theta\vartheta$$

Logo,

$$\bar{\vartheta} = (\vartheta_1 \cos \theta + \vartheta_2 \sin \theta, -\vartheta_1 \sin \theta + \vartheta_2 \cos \theta, \vartheta_3).$$

Portanto,

$$\bar{\vartheta}_1 = \vartheta_1 \cos \theta + \vartheta_2 \sin \theta$$

$$\bar{\vartheta}_2 = -\vartheta_1 \sin \theta + \vartheta_2 \cos \theta.$$

Só nos falta calcular  $\bar{w}$ . Por (2.2), sabemos que  $i(A\nu A^{-1}) = Ai(\nu)$  para todo  $A \in SO(3)$ , assim, observando que  $\bar{\psi}_\theta \in SO(3)$ :

$$\bar{w} = r\langle N(\bar{a}), i(\bar{\nu}) \rangle = r\langle \bar{\psi}_\theta N(a), \bar{\psi}_\theta i(\nu) \rangle = r\langle N(a), i(\nu) \rangle = w.$$

Logo,

$$\pi(\bar{\Psi}_\theta(a, A, b, \nu)) =$$

$$= (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta, -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta, \vartheta_1 \cos \theta + \vartheta_2 \sin \theta, -\vartheta_1 \sin \theta + \vartheta_2 \cos \theta, w)$$

e portanto,

$$\Psi_\theta(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) =$$

$$(a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta, -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta, \vartheta_1 \cos \theta + \vartheta_2 \sin \theta, -\vartheta_1 \sin \theta + \vartheta_2 \cos \theta, w).$$

■

**Observação 2.4.** Não é um calculo difícil demonstrar que  $\bar{V}$  é invariante pela ação  $\Psi$ .

**Observação 2.5.** A ação  $\Psi$  não é livre. De fato, basta tomarmos  $(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) = (0, 0, 0, 0, w)$  e observamos que todo  $\theta$  fixa este ponto.

Assim, como a ação não é livre, não podemos garantir que a variedade  $\frac{\bar{C}}{S^1}$  seja uma variedade diferenciável. Então, a forma de reduzir a simetria dada por  $S^1$  é determinar um conjunto completo de polinômios invariantes pela ação  $\Psi$ , definido como segue:

**Definição 2.2.** Dada uma relação de equivalência  $\sim$  em  $\bar{C}$ , dizemos que  $\{f_i : \bar{C} \rightarrow \mathbb{R}\}$  é um conjunto completo de polinômios invariantes quando

$$(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) \sim (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{w})$$

se, e somente se,

$$f_i(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) = f_i(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{w}),$$

para todo  $i$ .

Aqui,  $(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) \sim (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{w})$  se, e somente se, existe  $\theta_0$  tal que  $\Psi_{\theta_0}(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{w})$ . Observe que isto define uma relação de equivalência.

Definamos a aplicação  $\bar{k} : \bar{C} \rightarrow \mathbb{R}^5$  por:

$$\begin{aligned} \bar{k}(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) &= \\ &= \left( \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2), a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2, a_1\vartheta_2 - a_2\vartheta_1, w, \frac{1}{2}(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) \right) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5). \end{aligned}$$

O próximo resultado nos mostra que se  $(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) \sim (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{w})$ , então  $p_i = \bar{p}_i$ , para todo  $i$ .

**Lema 2.2.**  $\bar{k}$  é invariante pela ação de  $\Psi_\theta$ .

**Demonstração:** Temos que mostrar que

$$\bar{k}(\Psi_\theta(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w)) = \bar{k}(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w)$$

Vamos usar a notação:

$$\bar{k}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{w}) = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4, \bar{p}_5).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\bar{p}_1 &= \frac{1}{2}(\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2) = \frac{1}{2}((a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta)^2 + (-a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta)^2) = \\
&= \frac{1}{2}(a_1^2 \cos^2 \theta + 2a_1 a_2 \cos \theta \sin \theta + a_2^2 \sin^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta - 2a_1 a_2 \cos \theta \sin \theta + a_2^2 \cos^2 \theta) = \\
&= \frac{1}{2}(a_1^2 \cos^2 \theta + a_2^2 \sin^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \cos^2 \theta) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) = p_1:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_2 &= \bar{a}_1 \bar{v}_1 + \bar{a}_2 \bar{v}_2 = \\
&= (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta)(v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) + (-a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta)(-v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta) = \\
&= a_1 \cos \theta v_1 \cos \theta + a_1 \cos \theta v_2 \sin \theta + a_2 \sin \theta v_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta v_2 \sin \theta + \\
&+ a_1 \sin \theta v_1 \sin \theta - a_1 \sin \theta v_2 \cos \theta - a_2 \cos \theta v_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta v_2 \cos \theta = \\
&= a_1 v_1 \sin^2 \theta + a_1 v_1 \cos^2 \theta + a_2 v_2 \sin^2 \theta + a_2 v_2 \cos^2 \theta = a_1 v_1 + a_2 v_2 = p_2:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_3 &= \bar{a}_1 \bar{v}_2 - \bar{a}_2 \bar{v}_1 = \\
&= (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta)(-v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta) - (-a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta)(v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) = \\
&= -a_1 \cos \theta v_1 \sin \theta + a_1 \cos \theta v_2 \cos \theta - a_2 \sin \theta v_1 \sin \theta + a_2 \sin \theta v_2 \cos \theta + \\
&+ a_1 \sin \theta v_1 \cos \theta + a_1 \sin \theta v_2 \sin \theta - a_2 \cos \theta v_1 \cos \theta - a_2 \cos \theta v_2 \sin \theta = \\
&= a_1 v_2 \sin^2 \theta + a_1 v_2 \cos^2 \theta - a_2 v_1 \sin^2 \theta - a_2 v_1 \cos^2 \theta = a_1 v_2 - a_2 v_1 = p_3;
\end{aligned}$$

$$\bar{p}_4 = \bar{w} = w = p_4;$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_5 &= \frac{1}{2}(\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2) = \frac{1}{2}((v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta)^2 + (-v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta)^2) = \\
&= \frac{1}{2}(v_1^2 \cos^2 \theta + 2v_1 v_2 \cos \theta \sin \theta + v_2^2 \sin^2 \theta + v_1^2 \sin^2 \theta - 2v_1 v_2 \cos \theta \sin \theta + v_2^2 \cos^2 \theta) = \\
&= \frac{1}{2}(v_1^2 \cos^2 \theta + v_2^2 \sin^2 \theta + v_1^2 \sin^2 \theta + v_2^2 \cos^2 \theta) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) = p_5.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{k}(\psi_\theta(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w)) &= \bar{k}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, w) = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4, \bar{p}_5) = \\ &= (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \bar{k}(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w).\end{aligned}$$

■

Para mostrar que se  $p_i = \bar{p}_i$ , então  $(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) \sim (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{w})$ , basta observamos que como  $a_1^2 + a_2^2 = \bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2$ , existe  $\theta_0$  tal que

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \theta_0 + a_2 \sin \theta_0 \\ -a_1 \sin \theta_0 + a_2 \cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Agora, derivando  $\bar{a}_1$  e  $\bar{a}_2$ , teremos:

$$\bar{\vartheta}_1 = \dot{\bar{a}}_1 = \dot{a}_1 \cos \theta_0 + \dot{a}_2 \sin \theta_0 = \vartheta_1 \cos \theta_0 + \vartheta_2 \sin \theta_0;$$

$$\bar{\vartheta}_2 = \dot{\bar{a}}_2 = -\dot{a}_1 \sin \theta_0 + \dot{a}_2 \cos \theta_0 = -\vartheta_1 \sin \theta_0 + \vartheta_2 \cos \theta_0.$$

Logo,

$$\Psi_{\theta_0}(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{w}).$$

Disso segue que  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  é um conjunto completo de polinômios invariantes para o espaço das órbitas da ação  $S^1$ , com a seguinte relação:

$$p_2^2 + p_3^2 - 4p_1p_5 = 0, \quad p_1 \geq 0 \text{ e } p_5 \geq 0. \quad (2.34)$$

De fato,

$$\begin{aligned}p_2^2 + p_3^2 &= (a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2)^2 + (a_1\vartheta_2 - a_2\vartheta_1)^2 = \\ &= a_1^2\vartheta_1^2 + 2a_1\vartheta_1a_2\vartheta_2 + a_2^2\vartheta_2^2 + a_1^2\vartheta_2^2 - 2a_1\vartheta_1a_2\vartheta_2 + a_2^2\vartheta_1^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) = 2p_1p_5 = 4p_1p_5.\end{aligned}$$

Portanto o espaço das órbitas reduzido  $P$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^5$ , dado por:

$$P = \{(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \in \mathbb{R}^5 / \phi(p) = 0, p_1 \geq 0 \text{ e } p_5 \geq 0\},$$

onde  $\phi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  é o polinômio dado por  $\phi(p) = p_2^2 + p_3^2 - 4p_1p_5$ . A próxima relação nos mostrará que  $P$  é  $W \times \mathbb{R}$ , onde  $W$  é um cone em  $\mathbb{R}^4$ :

$$p_2^2 + p_3^2 = 4p_1p_5 = (p_1 + p_5)^2 - (p_1 - p_5)^2. \quad (2.35)$$

Assim,  $p_2^2 + p_3^2 + (p_1 - p_5)^2 = (p_1 + p_5)^2$ , que é um cone com vértice em  $p = (0, 0, 0, p_4, 0)$ .

Observemos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{C} & \xrightarrow{\bar{V}} & T\bar{C} \\ \bar{k} \downarrow & & \downarrow d\bar{k} \\ \mathbb{R}^5 & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{R}^5 \end{array}$$

Obtemos que  $\chi(\bar{k}(c)) = d\bar{k}(c)\bar{V}(c)$ . Para mostrarmos que  $\chi$  está bem definido, usaremos o fato de  $\bar{V}$  ser invariante pela ação  $\Psi$ . Assim, supondo que  $\bar{k}(c_1) = \bar{k}(c_2)$ , temos, pelo fato de  $p_i$  ser um conjunto completo de polinômios invariantes, que existe  $\theta$  tal que  $c_1 = \Psi_\theta(c_2)$  e então:

$$\chi(\bar{k}(c_1)) = d\bar{k}(c_1)\bar{V}(c_1) = d\bar{k}(\Psi_\theta(c_2))\bar{V}(\Psi_\theta(c_2)) = d\bar{k}(c_2)\bar{V}(c_2) = \chi(\bar{k}(c_2)).$$

Disso segue o seguinte:

**Teorema 2.3.** *O campo vetorial  $\bar{V}$  sobre  $\bar{C}$  induz um campo vetorial  $\chi$  sobre  $P$  através da aplicação  $\bar{k} : \bar{C} \rightarrow P$ . Tal campo é dado por:*

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= \frac{1}{1 + (\varphi')^2} \left\{ -\frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1} + 2p_5 - p_2^2 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \right\} \\ \dot{p}_3 &= \frac{M}{\alpha r^2} p_2 p_4 \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \\ \dot{p}_4 &= -\frac{p_2 p_3}{2p_1} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \\ \dot{p}_5 &= \frac{p_2}{1 + (\varphi')^2} \left\{ \frac{1}{2p_1} \left( \frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 - \frac{\varphi' p_2^2}{\sqrt{2p_1}} \right) \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) - \frac{mg}{\alpha} \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - 2p_5 \left( \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

onde  $\alpha = \frac{M+mr^2}{r^2}$ .

**Demonstração:**

Antes de calcularmos o campo vetorial  $\chi$  precisamos encontrar algumas expressões que nos serão úteis. Observe que como estamos trabalhando com uma superfície de revolução,

$$H_i = \frac{\partial h}{\partial a_i}(a_1, a_2) = \frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \varphi \left( \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right) \right] = \frac{\varphi'(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}) 2a_i}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{\varphi'(\sqrt{2p_1}) a_i}{\sqrt{2p_1}}. \quad (2.36)$$

De agora em diante usaremos a notação

$$\varphi \left( \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right) = \varphi, \quad \varphi' \left( \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right) = \varphi', \quad \varphi'' \left( \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right) = \varphi''.$$

Disso segue:

$$\dot{H}_1 = \frac{a_1^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \vartheta_1 + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \vartheta_1 + \frac{a_1}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_2 \vartheta_2 \quad (2.37)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{a_2^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \vartheta_2 + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \vartheta_2 + \frac{a_2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_1 \vartheta_1. \quad (2.38)$$

Também,

$$N(a) = \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}} (H_1, H_2, -1) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}} \left( \frac{\varphi' a_1}{\sqrt{2p_1}}, \frac{\varphi' a_2}{\sqrt{2p_1}}, -1 \right).$$

e

$$\begin{aligned} DN(a)\vartheta = & \\ = & \left( -\frac{(\varphi')^2 \varphi'' p_2 a_1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} (1 + (\varphi')^2) 2p_1} + \frac{\varphi'' p_2 a_1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} 2p_1} + \frac{\varphi' \vartheta_1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} \sqrt{2p_1}} - \frac{\varphi' a_1 p_2}{2p_1 \sqrt{1 + (\varphi')^2} \sqrt{2p_1}}, \right. \\ & -\frac{(\varphi')^2 \varphi'' p_2 a_2}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} (1 + (\varphi')^2) 2p_1} + \frac{\varphi'' p_2 a_2}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} 2p_1} + \frac{\varphi' \vartheta_2}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} \sqrt{2p_1}} - \frac{\varphi' a_2 p_2}{2p_1 \sqrt{1 + (\varphi')^2} \sqrt{2p_1}}, \\ & \left. \frac{\varphi' \varphi'' p_2}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} (1 + (\varphi')^2) \sqrt{2p_1}} \right). \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\vartheta_3 = H_1 \vartheta_1 + H_2 \vartheta_2 = \frac{\varphi' a_1 \vartheta_1}{\sqrt{2p_1}} + \frac{\varphi' a_2 \vartheta_2}{\sqrt{2p_1}} = \frac{\varphi' p_2}{\sqrt{2p_1}}.$$

Assim, usando a expressão de  $\vartheta_3$  temos:

$$\begin{aligned}
& DN(a)\vartheta \times \vartheta = \\
& = \left( -\frac{(\varphi')^3 \varphi'' p_2^2 a_2}{\sqrt{1 + (\varphi')^2 (1 + (\varphi')^2) 2p_1}} + \frac{\varphi'' \varphi' p_2^2 a_2}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} \sqrt{2p_1} 2p_1} + \frac{(\varphi')^2 p_2 \vartheta_2}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} 2p_1} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\varphi')^2 a_2 p_2^2}{2p_1 \sqrt{1 + (\varphi')^2} 2p_1} - \frac{\varphi' \varphi'' p_2 \vartheta_2}{\sqrt{1 + (\varphi')^2 (1 + (\varphi')^2) \sqrt{2p_1}}} \right) \\
& = \left( \frac{(\varphi')^3 \varphi'' p_2^2 a_1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2 (1 + (\varphi')^2) 2p_1}} - \frac{\varphi'' \varphi' p_2^2 a_1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} \sqrt{2p_1} 2p_1} - \frac{(\varphi')^2 p_2 \vartheta_1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} 2p_1} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\varphi')^2 a_1 p_2^2}{2p_1 \sqrt{1 + (\varphi')^2} 2p_1} + \frac{\varphi' \varphi'' p_2 \vartheta_1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2 (1 + (\varphi')^2) \sqrt{2p_1}}} \right) \\
& \quad \left. - \frac{(\varphi')^2 \varphi'' p_2 p_3}{\sqrt{1 + (\varphi')^2 (1 + (\varphi')^2) 2p_1}} + \frac{\varphi'' p_2 p_3}{\sqrt{1 + (\varphi')^2} 2p_1} - \frac{\varphi' p_2 p_3}{2p_1 \sqrt{1 + (\varphi')^2} \sqrt{2p_1}} \right).
\end{aligned}$$

Agora podemos calcular o campo  $\chi$ :

$$\dot{p}_1 = a_1 \vartheta_1 + a_2 \vartheta_2 = p_2.$$

Para calcular  $\dot{p}_2$  usaremos o campo  $\bar{V}$ :

$$\dot{p}_2 = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + a_1 \dot{\vartheta}_1 + a_2 \dot{\vartheta}_2 = a_1 \dot{\vartheta}_1 + a_2 \dot{\vartheta}_2 + 2p_5.$$

Porém, usando as expressões (2.30) e (2.31) de  $\dot{\vartheta}_1$  e  $\dot{\vartheta}_2$  respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
a_1 \dot{\vartheta}_1 + a_2 \dot{\vartheta}_2 &= \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} \left( -(\dot{H}_1 \vartheta_1 + \dot{H}_2 \vartheta_2)(a_1 H_1 + a_2 H_2) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{mr^2 g}{M + mr^2} (a_1 H_1 + a_2 H_2) - \frac{Mw}{M + mr^2} (\dot{H}_2 a_1 - \dot{H}_1 a_2) \right).
\end{aligned}$$

Mas,

$$a_1 H_1 + a_2 H_2 = a_1 \frac{\varphi' a_1}{\sqrt{2p_1}} + a_2 \frac{\varphi' a_2}{\sqrt{2p_1}} = \varphi' \cdot \sqrt{2p_1},$$

$$\begin{aligned}\dot{H}_2 a_1 - \dot{H}_1 a_2 &= \frac{a_2^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_1 \vartheta_2 + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_1 \vartheta_2 + \frac{a_1^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_2 \vartheta_1 - \\ &- \frac{a_1^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_2 \vartheta_1 - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_2 \vartheta_1 - \frac{a_2^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_1 \vartheta_2 = \\ &\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} (a_1 \vartheta_2 - a_2 \vartheta_1) = \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} p_3\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{H}_1 \vartheta_1 + \dot{H}_2 \vartheta_2 &= \frac{a_1^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \vartheta_1^2 + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \vartheta_1^2 + \frac{a_1 a_2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \vartheta_1 \vartheta_2 + \\ &+ \frac{a_2^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \vartheta_2^2 + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \vartheta_2^2 + \frac{a_1 a_2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \vartheta_1 \vartheta_2 = \\ &= \frac{(a_1 \vartheta_1 + a_2 \vartheta_2)^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} 2p_5 = \frac{p_2^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} 2p_5.\end{aligned}$$

Disso segue,

$$\begin{aligned}\dot{p}_2 &= \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + a_1 \dot{\vartheta}_1 + a_2 \dot{\vartheta}_2 = \\ &= \frac{1}{1 + (\varphi')^2} \left[ -p_2^2 \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - (\varphi')^2 2p_5 - \right. \\ &\left. - \frac{mr^2 g}{M + mr^2} \varphi' \cdot \sqrt{2p_1} - \frac{M}{M + mr^2} \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} p_3 p_4 \right] + 2p_5.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{p}_2 = \frac{1}{1 + (\varphi')^2} \left\{ -\frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1} + 2p_5 - p_2^2 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \right\}.$$

Seguindo,

$$\dot{p}_3 = \vartheta_1 \vartheta_2 + a_1 \dot{\vartheta}_2 - \vartheta_1 \dot{\vartheta}_2 - a_2 \dot{\vartheta}_1 = a_1 \dot{\vartheta}_2 - a_2 \dot{\vartheta}_1.$$

Logo,

$$\dot{p}_3 = \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} \left( -\dot{H}_1 H_2 a_1 \vartheta_1 - \dot{H}_2 H_2 a_1 \vartheta_2 - \frac{mr^2 g}{M + mr^2} a_1 H_2 + \frac{Mw}{M + mr^2} a_1 \dot{H}_1 \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{1+H_1^2+H_2^2} \left( -\dot{H}_1 H_1 a_2 \vartheta_1 - H_1 \dot{H}_2 a_2 \vartheta_2 - \frac{mr^2 g}{M+mr^2} a_2 H_1 - \frac{Mw}{M+mr^2} a_2 \dot{H}_2 \right) = \\
& = \frac{1}{1+H_1^2+H_2^2} \left( -(\dot{H}_1 \vartheta_1 + \dot{H}_2 \vartheta_2)(a_1 H_2 - a_2 H_1) - \right. \\
& \left. - \frac{mr^2 g}{M+mr^2} (a_1 H_2 - a_2 H_1) + \frac{Mw}{M+mr^2} (\dot{H}_1 a_1 + \dot{H}_2 a_2) \right)
\end{aligned}$$

Mas,

$$a_1 H_2 - a_2 H_1 = \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_1 a_2 - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_2 a_1 = 0.$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{H}_1 a_1 + \dot{H}_2 a_2 &= \frac{a_1^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_1 \vartheta_1 + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_1 \vartheta_1 + \frac{a_1^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_2 \vartheta_2 + \\
& + \frac{a_2^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_2 \vartheta_2 + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_2 \vartheta_2 + \frac{a_2^2}{2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) a_1 \vartheta_1 = \\
& \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) (a_1 \vartheta_1 + a_2 \vartheta_2) + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} (a_1 \vartheta_1 + a_2 \vartheta_2) = \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) p_2 + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} p_2 = \varphi'' p_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{p}_3 = \frac{1}{1+H_1^2+H_2^2} \left( \frac{Mw}{M+mr^2} (\dot{H}_1 a_1 + \dot{H}_2 a_2) \right) = \frac{1}{1+(\varphi')^2} \frac{Mw}{M+mr^2} \varphi'' p_2.$$

Portanto,

$$\dot{p}_3 = \frac{M}{\alpha r^2 p_2 p_4} \frac{\varphi''}{1+(\varphi')^2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\dot{p}_4 = \dot{w} &= \langle DN(a)\vartheta \times \vartheta, N(a) \rangle = \\
&= -\frac{(\varphi')^4 \varphi'' p_2^2 a_2 a_1}{(1+(\varphi')^2)(1+(\varphi')^2) 2p_1 \sqrt{2p_1}} + \frac{\varphi'' (\varphi')^2 p_2^2 a_2 a_1}{(1+(\varphi')^2) 2p_1 2p_1} + \frac{(\varphi')^3 p_2 a_1 \vartheta_2}{(1+(\varphi')^2) 2p_1 \sqrt{2p_1}} - \\
& - \frac{(\varphi')^3 a_1 a_2 p_2^2}{2p_1 (1+(\varphi')^2) 2p_1 \sqrt{2p_1}} - \frac{(\varphi')^2 \varphi'' p_2 a_1 \vartheta_2}{(1+(\varphi')^2)(1+(\varphi')^2) 2p_1} + \\
& + \frac{(\varphi')^4 \varphi'' p_2^2 a_2 a_1}{(1+(\varphi')^2)(1+(\varphi')^2) 2p_1 \sqrt{2p_1}} - \frac{\varphi'' (\varphi')^2 p_2^2 a_2 a_1}{(1+(\varphi')^2) 2p_1 2p_1} - \frac{(\varphi')^3 p_2 a_2 \vartheta_1}{(1+(\varphi')^2) 2p_1 \sqrt{2p_1}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\varphi')^3 a_1 a_2 p_2^2}{2p_1(1+(\varphi')^2)2p_1\sqrt{2p_1}} + \frac{(\varphi')^2 \varphi'' p_2 a_2 \vartheta_1}{(1+(\varphi')^2)(1+(\varphi')^2)2p_1} + \\
& + \frac{(\varphi')^2 \varphi'' p_2 p_3}{(1+(\varphi')^2)(1+(\varphi')^2)2p_1} - \frac{\varphi'' p_2 p_3}{(1+(\varphi')^2)2p_1} + \frac{\varphi' p_2 p_3}{2p_1(1+(\varphi')^2)\sqrt{2p_1}} = \\
& \frac{(\varphi')^3 p_2 p_3}{(1+(\varphi')^2)2p_1\sqrt{2p_1}} - \frac{(\varphi')^2 \varphi'' p_2 p_3}{(1+(\varphi')^2)(1+(\varphi')^2)2p_1} + \\
& + \frac{(\varphi')^2 \varphi'' p_2 p_3}{(1+(\varphi')^2)(1+(\varphi')^2)2p_1} - \frac{\varphi'' p_2 p_3}{(1+(\varphi')^2)2p_1} + \frac{\varphi' p_2 p_3}{2p_1(1+(\varphi')^2)\sqrt{2p_1}} = \\
& = -\frac{\varphi'' p_2 p_3}{(1+(\varphi')^2)2p_1} + \frac{\varphi' p_2 p_3}{2p_1(1+(\varphi')^2)\sqrt{2p_1}}(1+(\varphi')^2).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{p}_4 = -\frac{p_2 p_3}{2p_1} \left( \frac{\varphi''}{1+(\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right).$$

Para calcular  $\dot{p}_5$  usaremos a expressão:

$$p_2^2 + p_3^2 = 4p_1 p_5.$$

Derivando,

$$\begin{aligned}
2p_2 \dot{p}_2 + 2p_3 \dot{p}_3 & = 4(\dot{p}_1 p_5 + p_1 \dot{p}_5) \Rightarrow p_2 \dot{p}_2 + p_3 \dot{p}_3 = 2\dot{p}_1 p_5 + 2p_1 \dot{p}_5 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \dot{p}_5 = \frac{p_2 \dot{p}_2 + p_3 \dot{p}_3 - 2p_2 p_5}{2p_1} = \\
& = \frac{p_2}{(1+(\varphi')^2)2p_1} \left\{ -\frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1} + 2p_5 - p_2^2 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \right\} + \\
& + \frac{M p_3}{\alpha r^2} p_2 p_4 \frac{\varphi''}{(1+(\varphi')^2)2p_1} - \frac{p_2 2p_5}{2p_1} = \\
& = \frac{p_2}{1+(\varphi')^2} \left\{ \frac{1}{2p_1} \frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) - \frac{mg}{\alpha} \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} + \frac{2p_5}{2p_1} - \frac{2p_5}{2p_1} (1+(\varphi')^2) - \right. \\
& \left. - p_2^2 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1} 2p_1} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{p_2}{1 + (\varphi')^2} \left\{ \frac{1}{2p_1} \left( \frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 - p_2^2 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) - \frac{mg}{\alpha} \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} + \frac{2p_5}{2p_1} - \frac{2p_5}{2p_1} - \frac{2p_5}{2p_1} (\varphi')^2 \right\}.$$

Portanto,

$$\dot{p}_5 = \frac{p_2}{1 + (\varphi')^2} \left\{ \frac{1}{2p_1} \left( \frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 - \frac{\varphi' p_2^2}{\sqrt{2p_1}} \right) \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) - \frac{mg}{\alpha} \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - 2p_5 \left( \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right)^2 \right\}.$$

■

Observe que  $P$  tem dimensão 4. Além disso, o campo vetorial  $\chi$  pode ser estendido para  $\mathbb{R}^5$  cuja extensão gera um campo regular, sendo que

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi'(2p_1)}{\sqrt{2p_1}} = \varphi''(0)$$

e

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2p_1} \left[ \varphi''(\sqrt{2p_1}) - \frac{\varphi'(2p_1)}{\sqrt{2p_1}} \right] = \frac{\varphi''''(0)}{3}.$$

Apresentaremos agora algumas propriedades do campo vetorial  $\chi$ .

**Lema 2.3.** 1. *A energia no espaço reduzido é dada por:*

$$E = \frac{M}{2r^2} p_4^2 + \alpha p_5 + \frac{\alpha (\varphi')^2}{4p_1} p_2^2 + mg\varphi$$

*e é constante, ou seja, é uma integral de movimento.*

2. *Existem duas integrais de movimento  $J_1(p_1, p_3, p_4), J_2(p_1, p_3, p_4)$ , diferenciáveis e globalmente definidas, tal que a aplicação*

$$(p_1, p_3, p_4) \rightarrow (J_1(p_1, p_3, p_4), J_2(p_1, p_3, p_4))$$

*é uma fibração do  $(p_1, p_3, p_4)$ -espaço, com fibras igual à solução do seguinte sistema obtido da expressão de  $\chi$ :*

$$\begin{aligned} \frac{dp_3}{dp_1} &= \frac{M}{\alpha r^2} \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} p_4 \\ \frac{dp_4}{dp_1} &= \frac{-1}{2p_1} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) p_3 \end{aligned} \quad (2.39)$$

**Demonstração:**

Pelos cálculos já feitos da energia potencial e energia cinética, temos:

$$E = T + V = \frac{m}{2} \langle b + \nu a, b + \nu a \rangle + \frac{M}{2} \|i(\nu)\|^2 + m g a_3.$$

Pelo vínculo (2.6), temos que  $b + \nu a = -r\nu N(a) = \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$  e assim,

$$\frac{m}{2} \langle b + \nu a, b + \nu a \rangle = \frac{m}{2} \langle (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3), (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \rangle = \frac{m}{2} (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2).$$

Porém, já foi visto que  $\vartheta_3 = \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} p_2$ . logo:

$$\frac{m}{2} \langle b + \nu a, b + \nu a \rangle = \frac{m}{2} \left( 2p_2^2 + \frac{(\varphi')^2}{2p_1} p_2^2 \right).$$

Além disso, usando a identificação dada por  $k$  e que  $H_i = \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_i$ , para  $i = 1, 2$ , temos:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{r\sqrt{1+(\varphi')^2}} \left[ \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_1 w - \frac{(\varphi')^2}{2p_1} a_1 a_2 \vartheta_1 - \vartheta_2 - \frac{(\varphi')^2}{2p_1} a_2^2 \vartheta_2 \right] = \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1+(\varphi')^2}} \left[ \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_1 w - \frac{(\varphi')^2}{2p_1} a_2 p_2 - \vartheta_2 \right]; \\ \nu_2 &= \frac{1}{r\sqrt{1+(\varphi')^2}} \left[ \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_2 w + \frac{(\varphi')^2}{2p_1} a_1 a_2 \vartheta_2 + \vartheta_1 + \frac{(\varphi')^2}{2p_1} a_1^2 \vartheta_1 \right] = \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1+(\varphi')^2}} \left[ \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_2 w + \frac{(\varphi')^2}{2p_1} a_1 p_2 + \vartheta_1 \right]; \\ \nu_3 &= \frac{1}{r\sqrt{1+(\varphi')^2}} \left[ \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_2 \vartheta_1 - w - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_1 \vartheta_2 \right] = \frac{1}{r\sqrt{1+(\varphi')^2}} \left[ -w - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} p_3 \right]. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} \|i(\nu)\|^2 &= \frac{M}{2} (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2) = \\ &= \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{r^2(1+(\varphi')^2)} \left[ \frac{(\varphi')^2}{2p_1} a_1^2 w^2 + \frac{(\varphi')^4}{4p_1^2} a_2^2 p_2^2 + \vartheta_2^2 - 2 \frac{(\varphi')^3}{\sqrt{2p_1} 2p_1} a_1 a_2 w p_2 - 2 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} a_1 \vartheta_2 w + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\frac{(\varphi')^2}{2p_1}a_2v_2p_2 + \frac{(\varphi')^2}{2p_1}a_2^2w^2 + \frac{(\varphi')^4}{4p_1^2}a_1^2p_2^2 + v_1^2 + 2\frac{(\varphi')^3}{\sqrt{2p_1}2p_1}a_1a_2wp_2 + 2\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}a_2v_1w + \\
& \left. +2\frac{(\varphi')^2}{2p_1}a_1v_1p_2 + w^2 + \frac{(\varphi')^2}{2p_1}p_3^2 + 2\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}wp_3 \right] \Big\} = \\
& = \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{r^2(1+(\varphi')^2)} \left[ (\varphi')^2w^2 + \frac{(\varphi')^4}{2p_1}p_2^2 + 2p_5 - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}2p_3w + \right. \right. \\
& \left. \left. +2\frac{(\varphi')^2}{2p_1}p_2^2 + w^2 + \frac{(\varphi')^2}{2p_1}p_3^2 + 2\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}wp_3 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Agora, usando a relação  $p_2^2 + p_3^2 = 4p_1p_5$ , a equação acima torna-se:

$$\begin{aligned}
\frac{M}{2} \|i(\nu)\|^2 &= \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{r^2(1+(\varphi')^2)} \left[ (1+(\varphi')^2)w^2 + \frac{(\varphi')^4}{2p_1}p_2^2 + 2p_5 + \right. \right. \\
& \left. \left. +2\frac{(\varphi')^2}{2p_1}p_2^2 + \frac{(\varphi')^2}{2p_1}4p_1p_5 - \frac{(\varphi')^2}{2p_1}p_2^2 \right] \right\} = \\
& = \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{r^2(1+(\varphi')^2)} \left[ (1+(\varphi')^2)w^2 + (1+(\varphi')^2)\frac{(\varphi')^2}{2p_1}p_2^2 + (1+(\varphi')^2)2p_5 \right] \right\} = \\
& = \frac{M}{2} \left[ \frac{p_4^2}{r^2} + \frac{(\varphi')^2}{2p_1r^2}p_2^2 + \frac{2p_5}{r} \right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2} \left[ 2p_5 + \frac{(\varphi')^2}{2p_1}p_2^2 \right] + \frac{M}{2} \left[ \frac{p_4^2}{r^2} + \frac{(\varphi')^2}{2p_1r^2}p_2^2 + \frac{2p_5}{r^2} \right] = \\
& = \frac{M}{2r^2}p_4^2 + p_5 \left( m + \frac{M}{r^2} \right) + \frac{(\varphi')^2}{2p_1}p_2^2 \left( \frac{m}{2} + \frac{M}{2r^2} \right) = \\
& = \frac{M}{2r^2}p_4^2 + \alpha p_5 + \alpha \frac{(\varphi')^2}{4p_1}p_2^2.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$V = m g a_3 = m g h = m g \varphi.$$

Portanto,

$$E = \frac{M}{2r^2}p_4^2 + \alpha p_5 + \alpha \frac{(\varphi')^2}{4p_1}p_2^2 + m g \varphi.$$

Derivando a energia  $E$  em relação ao tempo temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{M}{r^2}p_4\dot{p}_4 + \alpha\dot{p}_5 + \left( \frac{2\alpha\varphi'\frac{\varphi''}{\sqrt{2p_1}}p_24p_1 - \alpha(\varphi')^24p_2}{16p_1^2} \right)p_2^2 + \frac{\alpha(\varphi')^2}{4p_1}2p_2\dot{p}_2 + mg\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}p_2 = \\
&= -\frac{M}{r^2}p_4\frac{p_2p_3}{2p_1}\left(\frac{\varphi''}{1+(\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}\right) + \alpha\frac{p_2}{1+(\varphi')^2}\left\{\frac{1}{2p_1}\left(\frac{M}{\alpha r^2}p_3p_4 - \frac{\varphi'p_2^2}{\sqrt{2p_1}}\right)\left(\varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{mg}{\alpha}\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - 2p_5\left(\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}\right)^2\right\} + \alpha\left(\frac{\varphi'\varphi''p_2}{\sqrt{2p_1}2p_1} - \frac{(\varphi')^2p_2}{4p_1^2}\right)p_2^2 + \frac{\alpha(\varphi')^2}{2p_1}\frac{p_2}{1+(\varphi')^2}\left\{-\frac{M}{\alpha r^2}p_3p_4\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{mg}{\alpha}\varphi'\sqrt{2p_1} + 2p_5 - p_2^2\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}\left(\varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}\right)\right\} + mg\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}p_2 = \\
&= -\frac{M}{r^2}\frac{p_4}{(1+(\varphi')^2)}\frac{p_2p_3}{2p_1}\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}(1+(\varphi')^2) + \frac{M}{r^2}p_4\frac{p_2p_3}{2p_1}\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - \\
&\quad -\alpha\frac{p_2}{(1+(\varphi')^2)}\frac{\varphi'\varphi''p_2^2}{\sqrt{2p_1}2p_1}(1+(\varphi')^2) + \alpha p_2\frac{\varphi'\varphi''p_2^2}{\sqrt{2p_1}2p_1} + \\
&\quad +\alpha\frac{p_2}{(1+(\varphi')^2)}\frac{(\varphi')^2p_2^2}{4p_1^2}(1+(\varphi')^2) - \alpha p_2\frac{(\varphi')^2p_2^2}{4p_1^2} + \\
&\quad +\alpha\frac{p_2}{1+(\varphi')^2}\left\{-\frac{mg}{\alpha}\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - 2p_5\left(\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}\right)^2\right\} + \\
&\quad +\frac{\alpha(\varphi')^2}{2p_1}\frac{p_2}{1+(\varphi')^2}\left\{-\frac{mg}{\alpha}\varphi'\sqrt{2p_1} + 2p_5\right\} + mg\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}p_2 = \\
&= \alpha\frac{p_2}{1+(\varphi')^2}\left\{-\frac{mg}{\alpha}\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - 2p_5\left(\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}\right)^2\right\} + \\
&\quad +\frac{\alpha(\varphi')^2}{2p_1}\frac{p_2}{1+(\varphi')^2}\left\{-\frac{mg}{\alpha}\varphi'\sqrt{2p_1} + 2p_5\right\} + mg\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}p_2 = \\
&= -\alpha\frac{p_2}{(1+(\varphi')^2)}\frac{mg}{\alpha}\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}}(1+(\varphi')^2) + \alpha p_2\frac{mg}{\alpha}\frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha \frac{p_2}{1 + (\varphi')^2} 2p_5 \left( \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right)^2 + \frac{\alpha(\varphi')^2}{2p_1} \frac{p_2}{1 + (\varphi')^2} 2p_5 = \\
& = -\alpha \frac{p_2}{1 + (\varphi')^2} 2p_5 \left( \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right)^2 + \frac{\alpha(\varphi')^2}{2p_1} \frac{p_2}{1 + (\varphi')^2} 2p_5 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto  $E(t)$  é constante, o que completa a demonstração de 1.

Para demonstrarmos 2, começaremos transformando a equação diferencial (2.39) em uma equação diferencial de ordem 2:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 p_3}{dp_1^2} &= \frac{M}{\alpha r^2} \left[ \frac{d}{dp_1} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \right) p_4 + \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \frac{dp_4}{dp_1} \right] = \\
&= \frac{M}{\alpha r^2} \left\{ \frac{d}{dp_1} \left[ \ln \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \right) \right] \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} p_4 - \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \frac{1}{2p_1} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) p_3 \right\} = \\
&= \frac{d}{dp_1} \left[ \ln \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \right) \right] \frac{dp_3}{dp_1} - \frac{M}{\alpha r^2} \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \frac{1}{2p_1} p_3.
\end{aligned}$$

Como a equação diferencial é linear, temos que existem duas soluções linearmente independentes  $s_1(p_1)$  e  $s_2(p_1)$ . Assim, basta definirmos:

$$J_i(p_1, p_3, p_4) = \frac{M}{\alpha r^2} s_i(p_1) p_4 - \frac{1 + (\varphi')^2}{\varphi''} \frac{ds_i}{dp_1}(p_1) p_3 \quad (i=1,2),$$

pois então,

$$\frac{d}{dt} J_i = \frac{M}{\alpha r^2} \left( \frac{ds_i}{dp_1} p_2 p_4 + s_i \dot{p}_4 \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{1 + (\varphi')^2}{\varphi''} \right) \frac{ds_i}{dp_1} p_3 - \frac{1 + (\varphi')^2}{\varphi''} \left( \frac{d^2 s_i}{dp_1^2} p_2 p_3 + \frac{ds_i}{dp_1} \dot{p}_3 \right).$$

Observemos que,

$$\frac{d}{dp_1} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \right) = \frac{\varphi'''(1 + (\varphi')^2) - 2(\varphi'')^2 \varphi'}{\sqrt{2p_1}(1 + (\varphi')^2)^2}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1 + (\varphi')^2}{\varphi''} \right) = \frac{2(\varphi'')^2 \varphi' p_2 - \varphi'''(1 + (\varphi')^2) p_2}{\sqrt{2p_1}(\varphi'')^2}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dp_1} \left[ \ln \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \right) \right] = \frac{d}{dp_1} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \right) \frac{1 + (\varphi')^2}{\varphi''} = \frac{\varphi'''(1 + (\varphi')^2) - 2(\varphi'')^2 \varphi'}{\sqrt{2p_1}(1 + (\varphi')^2)\varphi''}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1 + (\varphi')^2}{\varphi''} \frac{d}{dp_1} \left[ \ln \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \right) \right] \frac{dp_3}{dp_1} p_2 p_3 &= \frac{\varphi'''(1 + (\varphi')^2) - 2(\varphi'')^2 \varphi'}{\sqrt{2p_1}(\varphi'')^2} \frac{dp_3}{dp_1} p_2 p_3 = \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{1 + (\varphi')^2}{\varphi''} \right) \frac{ds_i}{dp_1} p_3. \end{aligned}$$

Com isso, usando a expressão de  $\frac{d^2 s_i}{dp_1^2}$ , a derivada de  $J_i$  se transforma em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_i &= \frac{M}{\alpha r^2} \left( \frac{ds_i}{dp_1} p_2 p_4 + s_i \dot{p}_4 \right) - \\ &= -\frac{1 + (\varphi')^2}{\varphi''} \left( -\frac{M}{\alpha r^2} \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \frac{1}{2p_1} p_3^2 p_2 + \frac{ds_i}{dp_1} \dot{p}_3 \right) = \\ &= \frac{M}{\alpha r^2} \left( \frac{ds_i}{dp_1} p_2 p_4 - s_i \frac{p_2 p_3}{2p_1} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \right) - \\ &= -\frac{1 + (\varphi')^2}{\varphi''} \left( -\frac{M}{\alpha r^2} \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \frac{1}{2p_1} p_3^2 p_2 + \frac{ds_i}{dp_1} \frac{M}{\alpha r^2} p_2 p_4 \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto  $J_i = \text{constante}$ , ou seja,  $J_1$  e  $J_2$  são integrais de movimento.

Desse resultado, segue que encontramos 3 integrais de movimento do sistema. Assim, concluimos que as soluções em  $C$  são restritas a uma subvariedade de  $\dim C$  menos o número de integrais de movimento, ou seja, restrito a uma subvariedade de dimensão 5. Portanto, a afirmação na introdução de que  $C$  é coberto por toros de dimensão 3 sobre os quais o movimento é quase-periódico é um tanto quanto forte.

Assim, analisaremos o sistema  $SO(3) \times S^1$ -reduzido usando a reversibilidade, que é definido como segue:

**Definição 2.3.** *Um campo vetorial  $\chi$  em  $P$  é  $R$ -reversível se existe uma aplicação difer-*

enciável  $R : P \rightarrow P$  tal que  $R^2 = I$ , ou seja, uma involução, satisfazendo

$$R_*\chi = -\chi.$$

**Observação 2.6.**  $R_*\chi = -\chi$  significa que  $DR(p)\chi(p) = -\chi(R(p))$ , para todo  $p \in P$ . Isto quer dizer que a aplicação  $R$  leva uma órbita de  $\chi$  nela mesma, mas invertendo a parametrização no tempo.

**Exemplo 2.1.** Considere a aplicação que reverte a velocidade,  $S : T\mathcal{E}(3) \rightarrow T\mathcal{E}(3)$ , dada por:

$$S(a, A, \dot{a}, \dot{A}) = (a, A, -\dot{a}, -\dot{A}).$$

É interessante ressaltar que esta aplicação é um reversor para qualquer sistema mecânico não dissipativo, mesmo quando tem vínculos não-holônomo.

Olhemos agora para o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} T\mathcal{E}(3) & \xrightarrow{\Phi} & C & \xrightarrow{k} & \mathbb{R}^5 \times SO(3) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\bar{k}} P \\ \downarrow S & & \downarrow \hat{S} & & \downarrow & & \downarrow \bar{S} \\ T\mathcal{E}(3) & \xrightarrow{\Phi} & C & \xrightarrow{k} & \mathbb{R}^5 \times SO(3) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\bar{k}} P \end{array}$$

Podemos observar que a aplicação induzida  $\bar{S} : P \rightarrow P$  por  $S : T\mathcal{E}(3) \rightarrow T\mathcal{E}(3)$  é dado por:

$$\bar{S}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p_1, -p_2, -p_3, -p_4, p_5),$$

pois,

$$\bar{S}(\bar{k}(\pi(k(\Phi(a, A, \dot{a}, \dot{A})))))) = \bar{k}(\pi(k(\Phi(S(a, A, \dot{a}, \dot{A}))))),$$

$$\begin{aligned} \bar{S}(\bar{k}(\pi(k(\Phi(a, A, \dot{a}, \dot{A})))))) &= \bar{S}(\bar{k}(\pi(k(a, A, b, \nu)))) = \bar{S}(\bar{k}(\pi(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w, A^{-1}))) = \\ &= \bar{S}(\bar{k}(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w)) = \bar{S}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{k}(\pi(k(\Phi(S(a, A, \dot{a}, \dot{A})))))) &= \bar{k}(\pi(k(\Phi(a, A, -\dot{a}, -\dot{A})))) = \bar{k}(\pi(k(a, A, -b, -\nu))) = \\ &= \bar{k}(\pi(a_1, a_2, -\vartheta_1, -\vartheta_2, -w, A^{-1})) = \bar{k}(a_1, a_2, -\vartheta_1, -\vartheta_2, -w) = (p_1, -p_2, -p_3, -p_4, p_5). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $\chi$  é um campo  $\bar{S}$ -reversível. É claro que  $\bar{S}$  é uma involução. Pelo Teorema 2.3,  $\chi$  é dada por

$$\chi(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{p}_4, \dot{p}_5).$$

Porém, calculando  $\chi$  em  $(p_1, -p_2, -p_3, -p_4, p_5)$ , teremos:

$$\chi(p_1, -p_2, -p_3, -p_4, p_5) = (-\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{p}_4, -\dot{p}_5).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{S}_*\chi &= D\bar{S}(p)\chi(p) = \frac{d}{dt}\bar{S}(p) = (\dot{p}_1, -\dot{p}_2, -\dot{p}_3, -\dot{p}_4, \dot{p}_5) = -(-\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{p}_4, -\dot{p}_5) = \\ &= -\chi(p_1, -p_2, -p_3, -p_4, p_5) = -\chi(\bar{S}(p)). \end{aligned}$$

Portanto  $\chi$  é  $\bar{S}$ -reversível.

Além disso, podemos calcular os pontos fixos de  $\bar{S}$  como segue:

$$\begin{aligned} \bar{S}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) &\Leftrightarrow (p_1, -p_2, -p_3, -p_4, p_5) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p_2 = p_3 = p_4 = 0. \end{aligned}$$

Com isso, o conjunto dos pontos fixos de  $\bar{S}$  tem codimensão 3.

O teorema a seguir é devido a Birkhoff:

**Teorema 2.4.** *Seja  $\chi$  um campo vetorial  $R$ -reversível e seja  $\Sigma$  o conjunto dos pontos fixos de  $R$ , ou seja,  $\Sigma = \{x : R(x) = x\}$ . Se uma órbita de  $\chi$  que passa por um ponto de  $\Sigma$  intercepta  $\Sigma$  em um outro ponto, então essa órbita é periódica.*

**Demonstração:**

Seja  $x(t)$  uma curva integral do campo vetorial  $\chi$ . Considere  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  com  $t_0 < t_1$ , tais que  $x(t_0), x(t_1) \in \Sigma$  e tais que  $x(t) \notin \Sigma$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  com  $t_0 < t < t_1$ .

Como  $\chi$  é um campo  $R$ -reversível, então  $R_*\chi = -\chi$ . Disso, podemos concluir que

$$y(t) = R(x(2t_1 - t))$$

é uma solução do sistema  $\dot{y} = \chi(y)$ .

De fato,

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -DR(x(2t_1 - t)) \cdot \dot{x}(2t_1 - t) = -DR(x(2t_1 - t)) \cdot \chi(x(2t_1 - t)) = \\ &= \chi(R(x(2t_1 - t))) = \chi(y(t)).\end{aligned}$$

Podemos ver também que como  $x(t_1) \in \Sigma$ ,

$$y(t_1) = R(x(t_1)) = x(t_1).$$

Por unicidade, como  $y(t_1) = x(t_1)$ , concluímos que  $y(t) = x(t)$ . Em particular, como  $x(t_0) \in \Sigma$ .

$$x(t_0 + 2(t_1 - t_0)) = y(t_0 + 2(t_1 - t_0)) = R(x(2t_1 - t_0 - 2(t_1 - t_0))) = R(x(t_0)) = x(t_0).$$

Portanto  $x(t)$  é uma órbita periódica de  $\chi$  com período  $2(t_1 - t_0)$ . Para vermos realmente que o período não é menor do que  $2(t_1 - t_0)$ , suponha que o período seja  $\tau < 2(t_1 - t_0)$  e considere  $\bar{t} = t_1 - \frac{\tau}{2}$ . Assim,

$$x(t) = x(t + \tau) = R(x(2t_1 - t - \tau)).$$

Agora, calculando em  $\bar{t}$ , teremos:

$$x(\bar{t}) = R\left(x\left(2t_1 - t_1 + \frac{\tau}{2} - \tau\right)\right) = R\left(x\left(t_1 - \frac{\tau}{2}\right)\right) = R(x(\bar{t})),$$

logo,  $x(\bar{t}) \in \Sigma$ . Mas é fácil ver que  $t_0 < \bar{t} < t_1$ , o que é um absurdo a partir da hipótese que  $x(t) \notin \Sigma$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  com  $t_0 < t < t_1$ .

Mostramos além de tudo que  $x(t)$  tem uma reflexão  $x(t) = R(x(2t_1 - t))$ . ■

Como a superfície  $\mathcal{H}$  é de revolução, ela induz uma reflexão  $F$  que preserva a variedade vinculada  $C$ , ou seja, se  $(a, A, b, \nu) \in C$  então  $F(a, A, b, \nu) \in C$ . Tal reflexão é dada por:

$$F(a, A, b, \nu) = (K_\beta a, K_\beta A K_\beta^{-1}, K_\beta b, K_\beta \nu K_\beta^{-1}).$$

onde,

$$K_\beta = \frac{1}{1 + \beta^2} \begin{bmatrix} 1 - \beta^2 & 2\beta & 0 \\ 2\beta & \beta^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \beta^2 \end{bmatrix}.$$

Para observarmos que  $F$  deixa  $C$  invariante, considere  $\bar{a} = K_\beta a$ , assim:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} a_1 + \frac{2\beta}{1 + \beta^2} a_2 \\ \bar{a}_2 &= \frac{2\beta}{1 + \beta^2} a_1 + \frac{\beta^2 - 1}{1 + \beta^2} a_2 \\ \bar{a}_3 &= a_3 \end{aligned}$$

Primeiramente precisamos mostrar que  $\bar{a}_3 = \varphi'(\sqrt{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2})$ . Porém,

$$\begin{aligned} \bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2 &= \left[ \left( \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} a_1 + \frac{2\beta}{1 + \beta^2} a_2 \right)^2 + \left( \frac{2\beta}{1 + \beta^2} a_1 + \frac{\beta^2 - 1}{1 + \beta^2} a_2 \right)^2 \right] = \\ &= \left[ \frac{(1 - \beta^2)^2 a_1^2 + 4(1 - \beta^2)\beta a_1 a_2 + 4\beta^2 a_2^2 + 4\beta^2 a_1^2 + 4(\beta^2 - 1)\beta a_1 a_2 + (\beta^2 - 1)^2 a_2^2}{(1 + \beta^2)^2} \right] = \\ &= \left[ \frac{(1 - \beta^2)^2 a_1^2 + 4\beta^2 a_2^2 + 4\beta^2 a_1^2 + (\beta^2 - 1)^2 a_2^2}{(1 + \beta^2)^2} \right] = \left[ (a_1^2 + a_2^2) \frac{(1 - \beta^2)^2 + 4\beta^2}{(1 + \beta^2)^2} \right] = \\ &= \left[ (a_1^2 + a_2^2) \frac{1 - 2\beta^2 + \beta^4 + 4\beta^2}{(1 + \beta^2)^2} \right] = \left[ (a_1^2 + a_2^2) \frac{1 + 2\beta^2 + \beta^4}{(1 + \beta^2)^2} \right] = \\ &= \left[ (a_1^2 + a_2^2) \frac{(1 + \beta^2)^2}{(1 + \beta^2)^2} \right] = a_1^2 + a_2^2. \end{aligned}$$

Logo,  $\bar{a}_3 = a_3 = \varphi'(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}) = \varphi'(\sqrt{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2})$ .

Agora, considerando que  $b = -\nu(rN(a) + a)$ , temos:

$$b = -\nu rN(a) - \nu a \Rightarrow K_\beta b = -K_\beta \nu rN(a) - K_\beta \nu a = K_\beta \nu K_\beta^{-1} K_\beta rN(a) - K_\beta \nu K_\beta^{-1} K_\beta a.$$

Mas não é difícil observar que  $N(K_\beta a) = K_\beta N(a)$ , assim,

$$K_\beta b = K_\beta \nu K_\beta^{-1} rN(K_\beta a) - K_\beta \nu K_\beta^{-1} K_\beta a.$$

Portanto.  $F(a, A, b, \nu) \in C$ .

Para o próximo lema, consideraremos  $\hat{S} : C \rightarrow C$ , a aplicação induzida por  $S : T\mathcal{E}(3) \rightarrow T\mathcal{E}(3)$ , dada da seguinte forma:

$$\hat{S}(\Phi(a, A, \dot{a}, \dot{A})) = \Phi(S(a, A, \dot{a}, \dot{A})),$$

o que implica que

$$\hat{S}(a, A, b, \nu) = (a, A, -b, -\nu).$$

**Lema 2.4.** *A aplicação  $F \circ \hat{S} : C \rightarrow C$  induz uma aplicação  $R : P \rightarrow P$  dada por:*

$$R(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p_1, -p_2, p_3, p_4, p_5).$$

**Demonstração:**

$$F(\hat{S}(a, A, b, \nu)) = F(a, A, -b, -\nu) = (K_\beta a, K_\beta A K_\beta^{-1}, -K_\beta b, -K_\beta \nu K_\beta^{-1}).$$

Temos que,

$$\bar{k} \circ \pi \circ k \begin{bmatrix} K_\beta a \\ K_\beta A K_\beta^{-1} \\ -K_\beta b \\ -K_\beta \nu K_\beta^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} a_1 + \frac{2\beta}{1+\beta^2} a_2 \\ \frac{2\beta}{1+\beta^2} a_1 + \frac{\beta^2-1}{1+\beta^2} a_2 \\ -\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \vartheta_1 - \frac{2\beta}{1+\beta^2} \vartheta_2 \\ -\frac{2\beta}{1+\beta^2} \vartheta_1 - \frac{\beta^2-1}{1+\beta^2} \vartheta_2 \\ r \langle N(K_\beta a), -i(K_\beta \nu K_\beta^{-1}) \rangle \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{2}(\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2) \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) = p_1.$$

Portanto,

$$\bar{p}_1 = p_1;$$

$$\bar{p}_2 = \left( \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} a_1 + \frac{2\beta}{1+\beta^2} a_2 \right) \left( -\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \vartheta_1 - \frac{2\beta}{1+\beta^2} \vartheta_2 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{2\beta}{1+\beta^2} a_1 + \frac{\beta^2-1}{1+\beta^2} a_2 \right) \left( -\frac{2\beta}{1+\beta^2} \vartheta_1 - \frac{\beta^2-1}{1+\beta^2} \vartheta_2 \right) = \\
& = \frac{-(1-\beta^2)^2 a_1 \vartheta_1 - (1-\beta^2) 2\beta a_1 \vartheta_2 - (1-\beta^2) 2\beta a_2 \vartheta_1 - 4\beta^2 a_2 \vartheta_2}{(1+\beta^2)^2} + \\
& + \frac{-4\beta^2 a_1 \vartheta_1 - (\beta^2-1) 2\beta a_1 \vartheta_2 - (\beta^2-1) 2\beta a_2 \vartheta_1 - (\beta^2-1)^2 a_2 \vartheta_2}{(1+\beta^2)^2} = \\
& = \frac{-(1-\beta^2)^2 a_1 \vartheta_1 - 4\beta^2 a_2 \vartheta_2 - 4\beta^2 a_1 \vartheta_1 - (\beta^2-1)^2 a_2 \vartheta_2}{(1+\beta^2)^2} = \\
& = -(a_1 \vartheta_1 + a_2 \vartheta_2) \frac{(1-\beta^2)^2 + 4\beta^2}{(1+\beta^2)^2} = -(a_1 \vartheta_1 + a_2 \vartheta_2) = -p_2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{p}_2 = -p_2;$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_3 & = \left( \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} a_1 + \frac{2\beta}{1+\beta^2} a_2 \right) \left( -\frac{2\beta}{1+\beta^2} \vartheta_1 - \frac{\beta^2-1}{1+\beta^2} \vartheta_2 \right) - \\
& - \left( \frac{2\beta}{1+\beta^2} a_1 + \frac{\beta^2-1}{1+\beta^2} a_2 \right) \left( -\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \vartheta_1 - \frac{2\beta}{1+\beta^2} \vartheta_2 \right) = \\
& = \frac{-(1-\beta^2) 2\beta a_1 \vartheta_1 + (1-\beta^2)^2 a_1 \vartheta_2 - 4\beta^2 a_2 \vartheta_1 - (\beta^2-1) 2\beta a_2 \vartheta_2}{(1+\beta^2)^2} - \\
& - \frac{-(1-\beta^2) 2\beta a_1 \vartheta_1 - 4\beta^2 a_1 \vartheta_2 + (1-\beta^2)^2 a_2 \vartheta_1 - (\beta^2-1) 2\beta a_2 \vartheta_2}{(1+\beta^2)^2} = \\
& = \frac{(1-\beta^2)^2 a_1 \vartheta_2 - 4\beta^2 a_2 \vartheta_1 + 4\beta^2 a_1 \vartheta_2 - (1-\beta^2)^2 a_2 \vartheta_1}{(1+\beta^2)^2} = \\
& = (a_1 \vartheta_2 - a_2 \vartheta_1) \left( \frac{(1-\beta^2)^2 + 4\beta^2}{(1+\beta^2)^2} \right) = (a_1 \vartheta_2 - a_2 \vartheta_1) = p_3.
\end{aligned}$$

Então,

$$\bar{p}_3 = p_3;$$

$$\bar{p}_4 = r \langle N(K_\beta a), -i(K_\beta \nu K_\beta^{-1}) \rangle = r \langle K_\beta N(a), K_\beta i(\nu) \rangle = r \langle N(a), i(\nu) \rangle = p_4,$$

ou seja,

$$\bar{p}_4 = p_4:$$

Temso ainda que

$$\begin{aligned} \bar{p}_5 &= \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}v_1 - \frac{2\beta}{1+\beta^2}v_2 \right)^2 + \left( -\frac{2\beta}{1+\beta^2}v_1 - \frac{\beta^2-1}{1+\beta^2}v_2 \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-\beta^2)^2v_1^2 + 4(1-\beta^2)\beta v_1v_2 + 4\beta^2v_2^2 + 4\beta^2v_1^2 + 4(\beta^2-1)\beta v_1v_2 + (\beta^2-1)^2v_2^2}{(1+\beta^2)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-\beta^2)^2v_1^2 + 4\beta^2v_2^2 + 4\beta^2v_1^2 + (\beta^2-1)^2v_2^2}{(1+\beta^2)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ (v_1^2 + v_2^2) \frac{(1-\beta^2)^2 + 4\beta^2}{(1+\beta^2)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (v_1^2 + v_2^2) \frac{1-2\beta^2 + \beta^4 + 4\beta^2}{(1+\beta^2)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ (v_1^2 + v_2^2) \frac{1+2\beta^2 + \beta^4}{(1+\beta^2)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (v_1^2 + v_2^2) \frac{(1+\beta^2)^2}{(1+\beta^2)^2} \right] = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) = p_5 \end{aligned}$$

c

$$\bar{p}_5 = p_5.$$

■

A partir disso, podemos demonstrar o seguinte lema:

**Lema 2.5.** 1. O campo vetorial  $\chi$  é  $R$ -reversível.

2. O conjunto dos pontos fixos  $\Sigma$  de  $R$  em  $P$  tem codimensão 1.

**Demonstração:**

É claro que  $R$  é uma involução.

$$\begin{aligned} R(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) &\Leftrightarrow (p_1, -p_2, p_3, p_4, p_5) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (0, 2p_2, 0, 0, 0) = 0 \Leftrightarrow p_2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\Sigma$  tem codimensão 1 e o item 2 está demonstrado.

Para demonstrar o item 1, observemos que pela definição de  $\chi$ , quando o calculamos em

$$(p_1, -p_2, p_3, p_4, p_5),$$

$$\chi(p_1, -p_2, p_3, p_4, p_5) = (-\dot{p}_1, \dot{p}_2, -\dot{p}_3, -\dot{p}_4, -\dot{p}_5).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} R_*\chi &= DR(p)\chi(p) = \frac{d}{dt}(R(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)) = \frac{d}{dt}(p_1, -p_2, p_3, p_4, p_5) = \\ &= (\dot{p}_1, -\dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{p}_4, \dot{p}_5) = -\chi(p_1, -p_2, p_3, p_4, p_5) = -\chi(R(p)). \end{aligned}$$

Portanto  $\chi$  é  $R$ -reversível e 1 está demonstrado. ■

# Capítulo 3

## Resultados Principais

Neste capítulo demonstraremos o seguinte resultado, que de fato é o principal do trabalho e que descreve como as órbitas se distribuem no espaço de fase.

**Teorema 3.1.** *A variedade vinculada  $C$  é coberta por toros de dimensão no máximo três, no qual o movimento é quase-periódico. O campo vetorial sobre esses toros depende apenas de três coordenadas.*

Para demonstrar este teorema precisaremos de alguns resultados preliminares que serão apresentados nas duas próximas seções. Primeiro, demonstraremos que no sistema reduzido  $(P, \chi)$ , uma curva integral de  $\chi$  ou é periódica ou é um ponto de equilíbrio. Em seguida, apresentaremos um resultado mais geral sobre movimento quase-periódico em um fibrado principal com fibras compactas, sob a hipótese de que as soluções no espaço base são periódicas. Então, para terminar, usaremos esses dois resultados para demonstrar o resultado principal.

### 3.1 Soluções do Sistema Reduzido

O resultado que demonstraremos nessa seção é a proposição a seguir:

**Proposição 3.1.** *Uma curva integral do campo vetorial  $\chi$  sobre  $P$  é periódica ou é um ponto de equilíbrio.*

**Demonstração:**

Dividiremos a demonstração dessa proposição em três partes. Primeiramente analisaremos o comportamento das curvas integrais em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio

que não pertença a  $T = \{(0, 0, 0, p_4, 0)\}$ , que é o conjunto dos pontos singulares de  $P$ , ou seja, o vértice do cone  $W$ . Em seguida, analisaremos o comportamento dessas curvas que passam em uma vizinhança de um ponto de  $T$  e, para terminar, analisaremos órbitas que passam por pontos regulares.

Precisamos dos seguintes resultados:

**Lema 3.1.** *O conjunto  $\mathcal{R}$  dos pontos de equilíbrio de  $\chi$  está contido no conjunto  $\Sigma$  de pontos fixos do reversor  $R$ .*

**Demonstração:**

Começaremos descrevendo como é o conjunto  $\mathcal{R}$ . De acordo com o Teorema 2.3, precisamos que  $0 = \dot{p}_1 = p_2$ . Além disso,

$$\begin{aligned} 0 = \dot{p}_2 &= \frac{1}{1 + (\varphi')^2} \left\{ -\frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1} + 2p_5 - p_2^2 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{1 + (\varphi')^2} \left\{ -\frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1} + 2p_5 \right\} \Leftrightarrow -\frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1} + 2p_5 = 0. \end{aligned}$$

Porém, sendo  $p_2 = 0$ , já obteremos  $\dot{p}_3 = \dot{p}_4 = \dot{p}_5 = 0$  e portanto  $\mathcal{R}$  é uma subvariedade diferenciável de dimensão dois de  $P$ , dada pelas equações:

$$\begin{aligned} 0 &= p_2 \\ 0 &= -\frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1} + 2p_5 \end{aligned}$$

Mas pelo Lema 2.5,  $\Sigma$  é o conjunto de pontos de  $P$  tais que  $p_2 = 0$ . Assim, concluímos que  $\mathcal{R} \subset \Sigma$ . ■

**Lema 3.2.** *A linearização de  $\chi$  em torno do ponto  $(p_1^*, 0, p_3^*, p_4^*, p_5^*) \in \mathcal{R}$  tem dois autovalores nulos e dois complexos conjugados.*

**Demonstração:**

Omitiremos \* dos pontos para não carregar a notação.

Supondo que  $p_1 \neq 0$ , podemos determinar  $p_5$  da seguinte forma:

$$2p_5 = \frac{p_2^2 + p_3^2}{2p_1}.$$

Daí obtemos:

$$J = D\chi(p^*) - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ J_1 & -\lambda & J_2 & J_3 \\ 0 & J_4 & -\lambda & 0 \\ 0 & J_5 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

onde

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{1 + (\varphi')^2} \left[ -\frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \left( \frac{\varphi''}{2p_1} - \frac{\varphi'}{2p_1 \sqrt{2p_1}} \right) - \frac{mg}{\alpha} \left( \varphi'' + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) - \frac{p_3^2}{2p_1^2} \right] \\ J_2 &= \frac{-Mp_4 \varphi'}{[1 + (\varphi')^2] \alpha r^2 \sqrt{2p_1}} + \frac{1}{[1 + (\varphi')^2]} \frac{p_3}{p_1}. \\ J_3 &= \frac{-Mp_3 \varphi'}{[1 + (\varphi')^2] \alpha r^2 \sqrt{2p_1}}. \\ J_4 &= \frac{Mp_4 \varphi''}{[1 + (\varphi')^2] \alpha r^2} \\ J_5 &= -\frac{p_3}{2p_1} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right). \end{aligned}$$

O determinante da matriz  $J$  é:

$$\det(J) = -\lambda[-\lambda^3 + J_3 J_5 \lambda] - J_1 \lambda^2 = -\lambda^2(-\lambda^2 + J_3 J_5 + J_1).$$

Logo, dois dos autovalores são nulos e os outros dois são dados por:

$$\lambda^2 = J_3 J_5 + J_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{Mp_3^2 \varphi'}{[1 + (\varphi')^2] \alpha r^2 \sqrt{2p_1} 2p_1} \left( \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2} - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) + \\ &+ \frac{1}{1 + (\varphi')^2} \left[ -\frac{M}{\alpha r^2} p_3 p_4 \left( \frac{\varphi''}{2p_1} - \frac{\varphi'}{2p_1 \sqrt{2p_1}} \right) - \frac{mg}{\alpha} \left( \varphi'' + \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} \right) - \frac{p_3^2}{2p_1^2} \right]. \end{aligned}$$

Usando a propriedade (2.35), o sistema que define  $\mathcal{R}$  e o fato de que a superfície onde a

esfera rola ser convexa (e assim tanto  $\varphi' > 0$  quanto  $\varphi'' > 0$ ). concluímos que

$$\lambda^2 = -\frac{1}{[1 + (\varphi')^2]^2} \left[ \frac{mp_3^2 \varphi' \varphi''}{\alpha(2p_1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p_3^2(1 + (\varphi')^2)}{4p_1^2} \left( 1 + \frac{M}{\alpha r^2} (\varphi')^2 \right) + \frac{mg\varphi'}{\alpha\sqrt{2p_1}} \left( \frac{4mgp_1^2}{\alpha p_3^2} \varphi'' + 2(1 + (\varphi')^2) \right) \right] < 0.$$

Portanto temos dois autovalores 0 e dois complexos conjugados. Isso nos diz que o sistema linearizado tem órbitas periódicas que estão contidas em um plano de dimensão dois transversal ao conjunto  $\mathcal{R}$  e, além disso,  $\mathcal{R}$  é tangente ao auto espaço correspondente aos autovalores nulos. ■

Para demonstrarmos o próximo resultado usaremos a técnica de “blow-up”. Uma breve introdução a este tópico pode ser encontrada no Apêndice A.

**Lema 3.3.** *Para cada ponto de equilíbrio que não pertence a  $T$ , existe uma vizinhança  $U$  desse ponto tal que para todo  $p \in U$ , existem tempos  $t_0 > 0$  e  $t_1 < 0$  tal que a curva integral que passa por  $p$  pertence a  $\Sigma$  em  $t_0$  e  $t_1$ .*

**Demonstração:** Vamos escolher novas coordenadas  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  para  $P$  da seguinte maneira: tomemos  $z_3$  e  $z_4$  como uma base para o auto espaço determinado pelos autovalores nulos. Agora, escolha  $z_1$  e  $z_2$  de tal modo que as órbitas estejam no plano  $z_1 z_2$ ,  $\Sigma$  seja representada por  $z_2 = 0$ ,  $\mathcal{R}$  seja representado por  $z_1 = z_2 = 0$  e o sistema fique da forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + O\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right),$$

onde  $w = w(z_3, z_4)$ .

Para analisarmos o comportamento das soluções usaremos a técnica de “blow-up”. Para isso, considere coordenadas  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  tal que  $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\epsilon y_1, \epsilon y_2, y_3, y_4)$ , com

$|\epsilon| \ll 1$ . Daí, o sistema correspondente a  $\chi$  nessas coordenadas é:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + O(\epsilon)$$

Considere um ponto  $\tilde{y}$  fora do conjunto de pontos de equilíbrio  $\mathcal{R}$ , satisfazendo  $\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 = 1$ .

Para  $\epsilon = 0$ , temos uma rotação no plano  $y_1 y_2$ . Assim, existem instantes  $t_0 \leq 0$  e  $t_1 \geq 0$  tal que  $\tilde{y}(t_0) \in \Sigma$  e  $\tilde{y}(t_1) \in \Sigma$ , ou seja,  $\tilde{y}_2(t_0) = \tilde{y}_2(t_1) = 0$ , onde  $\tilde{y}(t)$  é a solução do sistema linear. Considere agora a aplicação  $\phi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi_2(t, y, \epsilon)$  é a segunda componente da solução do sistema. Temos que  $\phi_2(t_0, \tilde{y}, 0) = 0$ . Denotando por  $A$  o campo linear, teremos:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(t_0, \tilde{y}, 0), \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(t_0, \tilde{y}, 0), \frac{\partial}{\partial t} \phi_3(t_0, \tilde{y}, 0), \frac{\partial}{\partial t} \phi_4(t_0, \tilde{y}, 0) \right) \\ &= A(\phi_1(t_0, \tilde{y}, 0), \phi_2(t_0, \tilde{y}, 0), \phi_3(t_0, \tilde{y}, 0), \phi_4(t_0, \tilde{y}, 0)) \\ &= A(\phi_1(t_0, \tilde{y}, 0), 0, \phi_3(t_0, \tilde{y}, 0), \phi_4(t_0, \tilde{y}, 0)) = (0, \phi_1(t_0, \tilde{y}, 0), 0, 0). \end{aligned}$$

Porém,  $\phi_1(t_0, \tilde{y}, 0) \neq 0$ , caso contrário  $\phi(t_0, \tilde{y}, 0)$  seria um ponto de equilíbrio. Assim,  $\frac{\partial}{\partial t} \phi_2(t_0, \tilde{y}, 0) \neq 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existem abertos  $V \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}, W \subset \mathbb{R}$  com  $(\tilde{y}, 0) \in V$  e uma aplicação  $\bar{t} : V \rightarrow W$  tais que  $\bar{t}(\tilde{y}, 0) = t_0$  e para todo  $(y, \epsilon) \in V$  e  $t \in W$  tem-se  $\bar{t}(y, \epsilon) = t \iff \phi_2(t, y, \epsilon) = 0$ , ou seja,  $\phi(t, y, \epsilon) \in \Sigma$ .

Analogamente, existem abertos  $V' \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}, W' \subset \mathbb{R}$  com  $(\tilde{y}, 0) \in V'$  e uma aplicação  $\hat{t} : V' \rightarrow W'$  tais que  $\hat{t}(\tilde{y}, 0) = t_1$  e para todo  $(y, \epsilon) \in V'$  e  $t \in W'$  tem-se  $\hat{t}(y, \epsilon) = t \iff \phi_2(t, y, \epsilon) = 0$ , ou seja,  $\phi(t, y, \epsilon) \in \Sigma$ .

Como as órbitas são transversais a  $\mathcal{R}$ , para  $\epsilon$  suficientemente pequeno as órbitas correspondentes a este  $\epsilon$  também serão transversais a  $\mathcal{R}$ . Como o resultado vale para todo  $\epsilon > 0$  e  $\tilde{y}$  tal que  $|\tilde{y}| = 1$ , o lema está demonstrado. ■

**Corolário 3.1.** *Para cada ponto de equilíbrio que não pertença a  $T$ , existe uma vizinhança na qual todas as órbitas não triviais são periódicas.*

**Demonstração:**

Segue diretamente do Lema 3.3 e Teorema 2.4. ■

**Lema 3.4.** *Uma órbita em uma vizinhança de um ponto de  $T$  é periódica ou um ponto de equilíbrio.*

**Demonstração:** Podemos observar que os pontos de  $T$  satisfazem as equações que definem  $\mathcal{R}$  e assim  $T \subset \mathcal{R}$ . Analisaremos primeiramente os pontos da vizinhança de  $T$  que não estão próximos de  $\mathcal{R}$  e, em seguida, analisaremos os pontos da vizinhança que estão próximos de  $\mathcal{R}$ .

Como os vértices são pontos singulares de  $P$ , será conveniente ir e voltar de  $P$  para  $\bar{C}$  durante a análise.

Observemos que os pontos de  $T$  na variedade reduzida  $\bar{C} = \frac{C}{SO(3)}$  são representados por  $e = (0, 0, 0, 0, w)$ , pois um ponto em  $T$  tem  $p_1 = 0$  e  $p_5 = 0$ , que pela definição implica  $a_1 = a_2 = \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$  e  $w = p_4 \in \mathbb{R}$ . Além disso, considere o conjunto  $\tilde{\Sigma} = \{(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) : a_2 = \vartheta_1 = 0\}$ . Podemos observar que um ponto de  $\tilde{\Sigma}$  é representado em  $P$  por  $p_2 = 0$ , ou seja, um ponto de  $\Sigma$ . Portanto uma órbita em  $\mathbb{R}^5$  que intercepta  $\tilde{\Sigma}$  em dois pontos é projetada em  $P$  sobre um ponto de equilíbrio ou sobre uma órbita que intercepta  $\Sigma$  em dois pontos.

Para concluir a demonstração do Lema 3.4, usaremos o seguinte resultado:

**Lema 3.5.** *Seja  $x \in \mathbb{R}^5$  um ponto afastado de um ponto de equilíbrio relativo, ou seja, a projeção de  $x$  em  $P$  está afastado de um ponto de  $\mathcal{R}$ . Então, existem instantes  $\hat{t}_0 < 0$  e  $\hat{t}_1 > 0$  tais que  $\psi_{\theta(\hat{t}_0)}(F^{\hat{t}_0}(x)) \in \tilde{\Sigma}$  e  $\psi_{\theta(\hat{t}_1)}(F^{\hat{t}_1}(x)) \in \tilde{\Sigma}$ .*

**Demonstração:**

Começaremos linearizando o campo vetorial  $\bar{V}$ , dado no Teorema 2.1, em torno do ponto de equilíbrio  $e$  e encontraremos o fluxo linear relacionado. Para isso, precisaremos encontrar a matriz jacobiana de  $\bar{V}$  no ponto  $e = (0, 0, 0, 0, w)$ .

Tomemos  $\bar{V}(a_1, a_2, \vartheta_1, \vartheta_2, w) = (\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{V}_4, \bar{V}_5)$ . Calculemos:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \bar{V}_1 = \frac{\partial}{\partial a_2} \bar{V}_1 = \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \bar{V}_1 = \frac{\partial}{\partial w} \bar{V}_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \bar{V}_1 = 1.$$

Também,

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \bar{V}_2 = \frac{\partial}{\partial a_2} \bar{V}_2 = \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \bar{V}_2 = \frac{\partial}{\partial w} \bar{V}_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \bar{V}_2 = 1.$$

Observemos que, usando as equações (2.32) e (2.33), temos:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \dot{H}_1 = \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_1^2} h(a_1, a_2) \vartheta_1 + \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_1 \partial a_2} h(a_1, a_2) \vartheta_2 \quad (3.1)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \dot{H}_2 = \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_1 \partial a_2} h(a_1, a_2) \vartheta_1 + \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_2^2} h(a_1, a_2) \vartheta_2. \quad (3.2)$$

Além disso, considerando como anteriormente que  $h(a_1, a_2) = \varphi(\sqrt{a_1^2 + a_2^2})$ , ficaremos com  $H_i = \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} a_i$  e assim,

$$\frac{\partial}{\partial a_1} H_1 = \frac{\partial}{\partial a_1} \left[ \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} a_1 \right] = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) a_1^2 + \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} H_2 = \frac{\partial}{\partial a_2} \left[ \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} a_2 \right] = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) a_2^2 + \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} H_2 = \frac{\partial}{\partial a_2} H_1 = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) a_1 a_2.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial a_1} H_1(0, 0) = \frac{\partial}{\partial a_2} H_2(0, 0) = \varphi''(0) \quad (3.3)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial a_1} H_2(0, 0) = \frac{\partial}{\partial a_2} H_1(0, 0) = 0. \quad (3.4)$$

Assim, para  $\bar{V}_3 = \vartheta_1$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} \bar{V}_3 &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} \right] \left( -\dot{H}_1 H_1 \vartheta_1 - H_1 \dot{H}_2 \vartheta_2 - \frac{mr^2 g}{M + mr^2} H_1 - \frac{Mw}{M + mr^2} \dot{H}_2 \right) + \\ &+ \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} \left( \frac{\partial}{\partial a_i} (-\dot{H}_1 H_1) \vartheta_1 - \frac{\partial}{\partial a_i} (H_1 \dot{H}_2) \vartheta_2 - \frac{mr^2 g}{M + mr^2} \frac{\partial}{\partial a_i} H_1 - \frac{Mw}{M + mr^2} \frac{\partial}{\partial a_i} \dot{H}_2 \right). \end{aligned}$$

Usando que  $H_1(0, 0) = H_2(0, 0) = 0$ , (3.1), (3.2), (3.4) e (3.3), obteremos:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \bar{V}_3(e) = -\frac{mr^2 g}{M + mr^2} \varphi''(0); \quad \frac{\partial}{\partial a_2} \bar{V}_3(e) = 0.$$

Agora,

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \bar{V}_3 = \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} (-\dot{H}_1 H_1) \vartheta_1 - \dot{H}_1 H_1 - \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} (H_1 \dot{H}_2) \vartheta_2 - \frac{Mw}{M + mr^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \dot{H}_2 \right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \bar{V}_3 = \frac{1}{1 + H_1^2 + H_2^2} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} (-\dot{H}_1 H_1) \vartheta_1 - \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} (H_1 \dot{H}_2) \vartheta_2 - H_1 \dot{H}_2 - \frac{Mw}{M + mr^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \dot{H}_2 \right).$$

Pelo fato de  $\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \dot{H}_i = \frac{\partial}{\partial a_i} H_i$  e  $\frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \dot{H}_2 = \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \dot{H}_1 = \frac{\partial}{\partial a_1} H_2 = \frac{\partial}{\partial a_2} H_1$ , usando (3.4) e (3.3), concluimos:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \bar{V}_3(e) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \bar{V}_3(e) = -\frac{Mw}{M + mr^2} \varphi''(0).$$

Por fim,

$$\frac{\partial}{\partial w} \bar{V}_3 = -\frac{M}{M + mr^2} \dot{H}_2.$$

Porém, como  $\dot{H}_i(e) = 0$ , teremos  $\frac{\partial}{\partial w} \bar{V}_3(e) = 0$ .

Analogamente para  $\bar{V}_4 = \dot{\vartheta}_2$ , teremos:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \bar{V}_4(e) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial a_2} \bar{V}_4(e) = -\frac{mr^2 y}{M + mr^2} \varphi''(0),$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \bar{V}_4(e) = \frac{Mw}{M + mr^2} \varphi''(0); \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \bar{V}_4(e) = 0$$

e  $\frac{\partial}{\partial w} \bar{V}_4(e) = 0$ .

Nos resta fazer os cálculos para  $\bar{V}_5 = \dot{w}$ .

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \bar{V}_5 = \left\langle \frac{\partial}{\partial a_i} DN(a) \vartheta \times \vartheta, N(a) \right\rangle + \left\langle DN(a) \vartheta \times \vartheta, \frac{\partial}{\partial a_i} N(a) \right\rangle.$$

Pode-se facilmente observar que:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \bar{V}_5(e) = \frac{\partial}{\partial a_2} \bar{V}_5(e) = 0.$$

Agora,

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \bar{V}_5 = \left\langle \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (DN(a)\vartheta \times \vartheta), N(a) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} DN(a)\vartheta \times \vartheta, N(a) \right\rangle + \left\langle DN(a)\vartheta \times \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \vartheta, N(a) \right\rangle.$$

Lembrando que,

$$DN(a)\vartheta = -\frac{1}{(1 + H_1^2 + H_2^2)^{\frac{3}{2}}} (H_1 \dot{H}_1 + H_2 \dot{H}_2) (H_1, H_2, -1) + \frac{1}{\sqrt{1 + H_1^2 + H_2^2}} (\dot{H}_1, \dot{H}_2, 0),$$

obteremos, pelo fato de  $H_1$  e  $H_2$  não dependerem de  $\vartheta_i$  e  $\dot{H}_i(e) = 0$ , que:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} DN(a)\vartheta = DN(a)\vartheta = 0,$$

quando calculados em  $e$ .

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \bar{V}_5 = 0.$$

Além disso, como  $\bar{V}_5$  não depende de  $w$ ,  $\frac{\partial}{\partial w} \bar{V}_5(e) = 0$ .

Para simplificar a notação, tomaremos  $A = \frac{mr^2 g}{M + mr^2}$  e  $B = \frac{Mw}{M + mr^2}$ .

Segue que a matriz jacobiana de  $\bar{V}$  em  $e$  é dada por:

$$D\bar{V}(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -A\varphi''(0) & 0 & 0 & -Bw\varphi''(0) & 0 \\ 0 & -A\varphi''(0) & Bw\varphi''(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontraremos agora os autovalores dessa matriz. Para isso, calculemos o polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(D\bar{V}(e) - \lambda I) = -\lambda \left[ \lambda^4 + (B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 + 2A\varphi''(0)) \lambda^2 + A^2 [\varphi''(0)]^2 \right].$$

Portanto um dos autovalores é nulo e os outros devem satisfazer:

$$\lambda^4 + (B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 + 2A\varphi''(0))\lambda^2 + A^2 [\varphi''(0)]^2 = 0.$$

Considere  $z = \lambda^2$ . Assim, a expressão torna-se:

$$z^2 + (B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 + 2A\varphi''(0))z + A^2 [\varphi''(0)]^2 = 0.$$

Logo,

$$z_1 = \frac{-B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 - 2A\varphi''(0) + \sqrt{(B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 + 2A\varphi''(0))^2 - 4A^2 [\varphi''(0)]^2}}{2} =$$

$$\frac{-B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 - 2A\varphi''(0) + \sqrt{B^4 w^4 [\varphi''(0)]^4 + 4AB^2 w^2 [\varphi''(0)]^3}}{2}.$$

Como visto,  $\varphi''(0) > 0$ ,  $A > 0$  e  $B > 0$ , e assim,  $B^4 w^4 [\varphi''(0)]^4 + 4AB^2 w^2 [\varphi''(0)]^3 > 0$ .

Além disso,

$$-B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 - 2A\varphi''(0) + \sqrt{B^4 w^4 [\varphi''(0)]^4 + 4AB^2 w^2 [\varphi''(0)]^3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{B^4 w^4 [\varphi''(0)]^4 + 4AB^2 w^2 [\varphi''(0)]^3} < B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 + 2A\varphi''(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B^4 w^4 [\varphi''(0)]^4 + 4AB^2 w^2 [\varphi''(0)]^3 < B^4 w^4 [\varphi''(0)]^4 + 4AB^2 w^2 [\varphi''(0)]^3 + 4A^2 [\varphi''(0)]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < 4A^2 [\varphi''(0)]^2.$$

Portanto  $z_1 < 0$ . Tomando

$$-w_1^2 = \frac{-B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 - 2A\varphi''(0) + \sqrt{B^4 w^4 [\varphi''(0)]^4 + 4AB^2 w^2 [\varphi''(0)]^3}}{2},$$

com  $w_1 > 0$ , teremos  $z_1 = -w_1^2$ .

Também,

$$z_2 = \frac{-B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 - 2A\varphi''(0) - \sqrt{B^4 w^4 [\varphi''(0)]^4 + 4AB^2 w^2 [\varphi''(0)]^3}}{2} < 0.$$

Assim, tomando

$$-w_2^2 = \frac{-B^2 w^2 [\varphi''(0)]^2 - 2A\varphi''(0) - \sqrt{B^4 w^4 [\varphi''(0)]^4 + 4AB^2 w^2 [\varphi''(0)]^3}}{2},$$

com  $w_2 > 0$ , teremos  $z_2 = -w_2^2$ .

Portanto, os autovalores são:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = w_1 i, \quad \lambda_3 = -w_1 i, \quad \lambda_4 = w_2 i, \quad \lambda_5 = -w_2 i,$$

com  $w_1 \neq -w_2$ .

Calculemos o autovetor associado ao autovalor  $-w_1 i$ . Para isso, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} w_1 i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 i & 0 & 1 & 0 \\ -A\varphi''(0) & 0 & w_1 i & -Bw\varphi''(0) & 0 \\ 0 & -A\varphi''(0) & Bw\varphi''(0) & w_1 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0.$$

Segue:

$$x_1 w_1 i + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1 w_1 i; \quad (3.5)$$

$$x_2 w_1 i + x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = -x_2 w_1 i; \quad (3.6)$$

$$-x_1 A\varphi''(0) + x_3 w_1 i - x_4 Bw\varphi''(0) = 0; \quad (3.7)$$

$$-x_2 A\varphi''(0) + x_3 Bw\varphi''(0) + x_4 w_1 i = 0; \quad (3.8)$$

$$x_5 w_1 i = 0 \Rightarrow x_5 = 0. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.5) e (3.6) em (3.7) e (3.8) obteremos:

$$-x_1 A\varphi''(0) + x_1 w_1^2 - x_2 w_1 Bw\varphi''(0) i = 0 \quad (3.10)$$

$$-x_2 A\varphi''(0) + x_1 w_1 Bw\varphi''(0) i + x_2 w_1^2 = 0 \quad (3.11)$$

Agora, multiplicando (3.10) por  $w_1 i$  e somando com a multiplicação de (3.11) por  $Bw\varphi''(0)$ ,

teremos, após isolarmos  $x_2$ :

$$x_2 = x_1 \left[ \frac{-w_1 A \varphi''(0) + w_1^3 - w_1 B^2 w^2 (\varphi''(0))^2}{B A w (\varphi''(0))^2} \right] i.$$

Logo, tomando

$$X_j = \frac{-w_j A \varphi''(0) + w_j^3 - w_j B^2 w^2 (\varphi''(0))^2}{B A w (\varphi''(0))^2},$$

com  $j=1,2$ , obtemos o autovetor  $V_{-w_1 i}$  associado ao autovalor  $-w_1 i$ . dado por:

$$V_{-w_1 i} = (1, X_1 i, -w_1 i, X w_1, 0) = (1, 0, 0, X_1 w_1, 0) + (0, X_1, -w_1, 0, 0) i.$$

Analogamente concluímos que o autovetor  $V_{-w_2 i}$ , associado ao autovalor  $-w_2 i$ , é:

$$V_{-w_2 i} = (1, 0, 0, X_2 w_2, 0) + (0, X_2, -w_2, 0, 0) i.$$

Assim, em um sistema de coordenadas formado pelas partes reais e imaginárias dos autovetores correspondentes aos autovalores complexos, o fluxo linear é dado por:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} R_{w_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & R_{w_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Além disso, a ação  $\psi_\theta$  é da forma:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} R_\theta & 0 & 0 \\ 0 & R_{-\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x,$$

onde  $R_\theta$  denota a rotação de ângulo  $\theta$ .

Notemos que nessas coordenadas o conjunto  $\tilde{\Sigma}$  é dado por  $\hat{\Sigma} = \{x \in \mathbb{R}^5 / x_2 = x_4 = 0\}$ . Agora, dado um ponto  $x \in \mathbb{R}^5$ , projetemos este ponto no plano  $x_1 x_2$  e no plano  $x_3 x_4$ . Essas projeções fazem um ângulo  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  com os eixos  $x_1$  e  $x_3$  respectivamente, ou seja,  $x_2 = 0$  e  $x_4 = 0$ .

Observemos que  $x = (R_1 \cos \alpha_1, -R_1 \sin \alpha_1, R_2 \cos \alpha_2, -R_2 \sin \alpha_2, x_5)$ , pois a base for-

mada pelas partes reais e imaginárias dos autovetores é ortogonal em  $x_1x_2$  e  $x_3x_4$  e assim:

$$H^{\hat{t}_0}(x) = \begin{pmatrix} R_1 \cos \alpha_1 \cos w_1 \hat{t}_0 - R_1 \sin \alpha_1 \sin w_1 \hat{t}_0 \\ -R_1 \cos \alpha_1 \sin w_1 \hat{t}_0 - R_1 \sin \alpha_1 \cos w_1 \hat{t}_0 \\ R_2 \cos \alpha_2 \cos w_2 \hat{t}_0 - R_2 \sin \alpha_2 \sin w_2 \hat{t}_0 \\ -R_2 \cos \alpha_2 \sin w_2 \hat{t}_0 - R_2 \sin \alpha_2 \cos w_2 \hat{t}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\alpha_1 + w_1 \hat{t}_0) \\ -R_1 \sin(\alpha_1 + w_1 \hat{t}_0) \\ R_2 \cos(\alpha_2 + w_2 \hat{t}_0) \\ -R_2 \sin(\alpha_2 + w_2 \hat{t}_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo o ângulo que a projeção de  $x(\hat{t}_0)$  sobre o plano  $x_1x_2$  faz com  $x_2 = 0$  é igual a  $\alpha_1(\hat{t}_0) = \alpha_1 + w_1 \hat{t}_0$  e o ângulo que a projeção sobre o plano  $x_3x_4$  faz com  $x_4 = 0$  é  $\alpha_2(\hat{t}_0) = \alpha_2 + w_2 \hat{t}_0$ . Assim, tomando  $\hat{t}_0 = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{w_1 + w_2}$  temos que:

$$(w_1 + w_2)\hat{t}_0 = -(\alpha_1 + \alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 + w_1 \hat{t}_0 = -(\alpha_2 + w_2 \hat{t}_0)$$

e portanto

$$\alpha_1(\hat{t}_0) = \alpha_1 + w_1 \hat{t}_0 = -(\alpha_2 + w_2 \hat{t}_0) = -\alpha_2(\hat{t}_0).$$

Com isso temos,

$$\begin{aligned} \psi_{\theta(\hat{t}_0)}(H^{\hat{t}_0}(x)) &= \psi_{\theta(\hat{t}_0)} \begin{pmatrix} R_1 \cos(\alpha_1 + w_1 \hat{t}_0) \\ -R_1 \sin(\alpha_1 + w_1 \hat{t}_0) \\ R_2 \cos(\alpha_2 + w_2 \hat{t}_0) \\ -R_2 \sin(\alpha_2 + w_2 \hat{t}_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_{\theta(\hat{t}_0)} \begin{pmatrix} R_1 \cos(\alpha_1(\hat{t}_0)) \\ -R_1 \sin(\alpha_1(\hat{t}_0)) \\ R_2 \cos(\alpha_2(\hat{t}_0)) \\ -R_2 \sin(\alpha_2(\hat{t}_0)) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \psi_{\theta(\hat{t}_0)} \begin{pmatrix} R_1 \cos(\alpha_1(\hat{t}_0)) \\ -R_1 \sin(\alpha_1(\hat{t}_0)) \\ R_2 \cos(-\alpha_1(\hat{t}_0)) \\ -R_2 \sin(-\alpha_1(\hat{t}_0)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 [\cos(\theta(\hat{t}_0)) \cos(\alpha_1(\hat{t}_0)) - \sin(\theta(\hat{t}_0)) \sin(\alpha_1(\hat{t}_0))] \\ -R_1 [\sin(\theta(\hat{t}_0)) \cos(\alpha_1(\hat{t}_0)) + \cos(\theta(\hat{t}_0)) \sin(\alpha_1(\hat{t}_0))] \\ R_2 [\cos(-\theta(\hat{t}_0)) \cos(-\alpha_1(\hat{t}_0)) - \sin(-\theta(\hat{t}_0)) \sin(-\alpha_1(\hat{t}_0))] \\ -R_2 [\sin(-\theta(\hat{t}_0)) \cos(-\alpha_1(\hat{t}_0)) + \cos(-\theta(\hat{t}_0)) \sin(-\alpha_1(\hat{t}_0))] \\ 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} R_1[\cos(\theta(\hat{t}_0)) \cos(\alpha_1(\hat{t}_0)) - \sin(\theta(\hat{t}_0)) \sin(\alpha_1(\hat{t}_0))] \\ -R_1[\sin(\theta(\hat{t}_0)) \cos(\alpha_1(\hat{t}_0)) + \cos(\theta(\hat{t}_0)) \sin(\alpha_1(\hat{t}_0))] \\ R_2[\cos(\theta(\hat{t}_0)) \cos(\alpha_1(\hat{t}_0)) - \sin(\theta(\hat{t}_0)) \sin(\alpha_1(\hat{t}_0))] \\ R_2[\sin(\theta(\hat{t}_0)) \cos(\alpha_1(\hat{t}_0)) + \cos(\theta(\hat{t}_0)) \sin(\alpha_1(\hat{t}_0))] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\theta(\hat{t}_0) + \alpha_1(\hat{t}_0)) \\ -R_1 \sin(\theta(\hat{t}_0) + \alpha_1(\hat{t}_0)) \\ R_2 \cos(\theta(\hat{t}_0) + \alpha_1(\hat{t}_0)) \\ R_2 \sin(\theta(\hat{t}_0) + \alpha_1(\hat{t}_0)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então, se tomarmos  $\theta(\hat{t}_0) = -\alpha_1(\hat{t}_0)$  teremos

$$\psi_{\theta(i_0)}(H^{\hat{t}_0}(x)) = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ou seja,  $\psi_{\theta(i_0)}(H^{\hat{t}_0}(x)) \in \hat{\Sigma}$ .

Para o instante positivo basta tomarmos  $\hat{t}_1 = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 4\pi}{w_1 + w_2}$ , pois

$$(w_1 + w_2)\hat{t}_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2) + 4\pi \Rightarrow \alpha_1 + w_1\hat{t}_1 = -(\alpha_2 + w_2\hat{t}_1) + 4\pi \Rightarrow \alpha_2(\hat{t}_1) = -\alpha_1(\hat{t}_1) + 4\pi.$$

Pórem,  $\cos(-\alpha_1(\hat{t}_1) + 4\pi) = \cos(-\alpha_1(\hat{t}_1))$  e  $\sin(-\alpha_1(\hat{t}_1) + 4\pi) = \sin(-\alpha_1(\hat{t}_1))$ . Daí, a conclusão fica análoga ao caso de  $\hat{t}_0$ .

Além disso, como estamos observando uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $e$ , podemos ver o fluxo de  $\bar{V}$  como uma perturbação do fluxo linear. Note que para todo ponto fora dos planos  $x_1x_2(x_3 = x_4 = 0)$  e  $x_3x_4(x_1 = x_2 = 0)$ , os ângulos de projeção estão bem definidos. Assim, dado  $x \in P$  fora desses planos, pelo teorema da função implícita, existe um instante positivo  $\hat{t}_0$  para o qual o fluxo e a ação de  $S^1$  levam  $x$  para  $\hat{\Sigma}$ .

Analogamente, existe um instante negativo. ■

Observemos que para demonstrar o Lema 3.5, usamos o fato de que o ponto por onde a órbita passa está fora de  $\{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_3 = x_4 = 0\}$ , ou seja, está fora do conjunto de equilíbrios relativos. Para terminar a demonstração do Lema 3.4, analisaremos uma órbita por um ponto na vizinhança de um ponto de  $T$  e próximo de um ponto de equilíbrio de  $\chi$ . Para isso usaremos a técnica de “blow-up” no ponto  $(0, 0, 0, p_4, 0)$ . Primeiramente desloquemos  $p_4$  para zero. Agora, como na demonstração do Lema 3.3, faremos um “blow-

up" dado por  $p = ry$ , com  $|r| \ll 1$ . Ent"o, o sistema fica da seguinte forma:

$$\dot{y} = Ly + rQ(y) + O(\|r^2\|),$$

onde  $Ly$  " a proje"o em  $P$  da lineariza"o do campo  $\bar{V}$  em torno de  $e \in \mathbb{R}^5$ . Para  $r = 0$  temos "rbitas peri"odicas. Como na demonstra"o do Lema 3.3, usando o teorema da fun"o impl"cita, podemos concluir que temos movimentos peri"odicos em torno de pontos de equil"brio para  $r$  suficientemente pequeno. Segue desse fato e do Lema 3.5 a demonstra"o do Lema 3.4. ■

**Lema 3.6.** *Uma "rbita de  $\chi$  que passa por um ponto regular de  $P$  " peri"odica.*

**Demonstra"o:** Considere a energia:

$$E = \frac{M}{2r^2}p_4^2 + \alpha p_5 + \frac{\alpha(\varphi')^2}{4p_1}p_2^2 + mg\varphi.$$

J" que a superf"cie em que a esfera rola " de revolu"o e convexa, temos que  $\varphi' \geq 0$  e conseq"entemente  $\varphi \geq 0$ . Al"m disso, como  $p_5 \geq 0$ , ent"o todos os termos de  $E$  s"o positivos e o conjunto onde  $E$  " constante " compacto. De fato, considere a aplica"o

$$F(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \frac{M}{2r^2}p_4^2 + \alpha p_5 + \frac{\alpha(\varphi')^2}{4p_1}p_2^2 + mg\varphi$$

Os pontos  $p \in P$  onde  $F(p) = \text{constante} = c$  " dado por  $F^{-1}(c)$ . Como  $\{c\}$  " fechado,  $F^{-1}(c)$  " fechado. Agora, como todos os termos de  $E$  s"o positivos e  $\lim_{p_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1}} = \varphi''(0)$ , o conjunto tem que ser limitado e portanto compacto.

Suponha que estamos come"ando em um ponto regular  $p \in P$  tal que  $p_2 > 0$ . Pelo Teorema 2.4, se para um tempo finito positivo e para um tempo finito negativo termos  $p_2 = 0$ , ent"o a "rbita que passa por  $p$  " peri"odica e o resultado est" demonstrado. Suponha ent"o que  $p_2(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Faremos a demonstra"o em duas etapas, primeiro para  $t$  positivo e depois para  $t$  negativo. Note que como  $p_2(t) > 0$ , ent"o  $\dot{p}_1(t) > 0$  para todo  $t$  positivo e assim  $p_1$  " estritamente crescente. Por"m,  $F^{-1}(c)$  " compacto e assim  $p_1$  n"o pode tender para o infinito quando  $t$  tende para o infinito. Portanto existe uma seq"ncia  $\{t_n\}$  com  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  tal que  $\dot{p}_1(t_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,  $p_2(t_n) \rightarrow 0$ . Isso quer dizer que a "rbita que passa por  $p$  tende para  $\Sigma$ , por"m n"o intersepta  $\Sigma$ , ou seja,

ela não é transeversal a  $\Sigma$ . Entretanto, o campo é não transversal a  $\Sigma$  apenas nos pontos de equilíbrio e em  $T$  e portanto a órbita tem que se acumular em um desses pontos. Mas pelos dois lemas anteriores os pontos de  $T$  e de equilíbrio são rodeados por órbitas periódicas. Isso é uma contradição pois como a órbita de  $p$  tende a  $\Sigma$  mas não o cruza ela não pode ser uma órbita periódica. Logo para um  $\bar{t}$  finito,  $p_2(\bar{t}) = 0$ , ou seja, a órbita cruza  $\Sigma$ .

Para  $t$  negativo repetiremos o argumento introduzindo  $\tau = -t$ . Disso,

$$\frac{d}{d\tau}p_1(-\tau) = \dot{p}_1(-\tau)(-1) = -p_2(-\tau).$$

Suponha que  $p_2$  não se anule em nenhum  $\tau$  finito. Como  $p_2(t) > 0$ , temos que  $0 > -p_2(-\tau) = \frac{d}{d\tau}p_1(-\tau)$ , ou seja,  $p_1$  decresce monotonicamente. Mas sabemos que, por definição,  $p_1(t) \geq 0$ , logo existe uma sequência  $\tau_n$  tal que  $\dot{p}_1(-\tau_n) \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,  $p_2(-\tau) \rightarrow 0$ . Usando o mesmo argumento que no caso em que  $t$  é positivo, chegamos a uma contradição. Analogamente podemos tratar os casos nos quais começamos em um ponto  $p$  em que  $p_2 = 0$  e  $p_2 < 0$  e assim analisamos todas as possibilidades. ■

Dos Lemas 3.3, 3.4 e 3.6 segue que uma curva integral do campo vetorial  $\chi$  em  $P$  é periódica ou um ponto de equilíbrio. Assim, a Proposição 3.1 está provada. ■

## 3.2 Movimento Quase-Periódico em um Fibrado Principal

Seja  $G$  um grupo de Lie compacto e conexo que age livremente e propriamente sobre  $C$ . Consideraremos que um toro é um subgrupo compacto, conexo e abeliano de  $G$ .

**Definição 3.1.** *Um toro  $T \subset G$  é maximal se dado qualquer toro  $T'$  tal que  $T \subset T'$ , então  $T = T'$ .*

Podemos observar que todo toro maximal contido em  $G$  tem a mesma dimensão. Assim, definimos como posto de  $G$  a dimensão dos toros maximais.

**Definição 3.2.** *Um fibrado  $(C, \pi, P, F, G)$  é um  $G$ -fibrado principal se  $F = G$ , onde  $F$  é a fibra.*

Nesta seção consideraremos um  $G$ -fibrado principal com espaço total  $C$ , espaço base  $P$  e projeção  $\pi : C \rightarrow P$ . Suporemos que  $G$  é um grupo de Lie compacto e conexo tal que seu posto seja  $r$ . Além disso, suporemos que  $G$  age livremente sobre  $C$ . Seja  $V$  um campo vetorial  $G$ -invariante sobre  $C$  com fluxo  $\phi^t$ . Neste caso,  $V$  induz um campo vetorial  $\chi$  sobre  $P$ . Suporemos que o fluxo de  $\chi$  seja periódico.

**Definição 3.3.** *Seja  $X$  um campo vetorial em  $\Lambda$ . Dada uma curva integral  $\gamma$  desse campo, diremos que  $\gamma$  é quase-periódico se dado  $x$  em  $\gamma$ , para todo aberto  $U$ , com  $x \in U$ , o conjunto  $D(x, U) = \{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in U\}$  é relativamente denso em  $\mathbb{R}$ , ou seja, existe um número real  $l > 0$  tal que todo intervalo de tamanho  $l$  contém um elemento de  $D(x, U)$ .*

Estamos interessados em demonstrar o seguinte resultado:

**Proposição 3.2.** *Sob certas condições de regularidade, o movimento é quase-periódico e ocorre sobre toros de dimensão  $r + 1$  que cobrem  $C$ . O número de coordenadas dos quais o campo vetorial sobre esses toros depende é igual à dimensão de  $P$  menos 1.*

**Demonstração:**

Sejam  $y_0 \in C$  e  $x_0 = \pi(y_0) \in P$ . Considere a fibração de  $P$  pelas órbitas periódicas de  $\chi$ , isto é, o conjunto das órbitas periódicas é uma folheação para  $P$ . Seja  $S$  uma seção transversal local a esta fibração em  $x_0$ , ou seja,  $S$  é uma variedade (sem fronteira) transversal às órbitas de  $\chi$  e  $\dim S$  é igual à codimensão dessas órbitas.

Denotaremos por  $S'$  a união das órbitas da fibração que cruzam  $S$  e seja  $C' = \pi^{-1}(S')$ . Podemos notar que  $S'$  é um conjunto aberto de  $P$  e invariante sob o fluxo de  $\chi$  e assim, como  $\pi$  é uma aplicação contínua,  $\pi^{-1}(S')$  é aberto, ou seja,  $C'$  é aberto em  $C$ . Além disso, como  $S'$  é invariante pelo fluxo de  $\chi$ ,  $C'$  é invariante pelo fluxo  $\phi^t$  de  $V$  e também é invariante pela ação de  $G$ . Considere também a aplicação diferenciável  $\tau$ , onde  $\tau(x)$  é o período da órbita periódica de  $\chi$  que passa por  $x \in S'$ .

Tome agora  $\varphi^t$  como o fluxo do campo  $\chi$ . Como as órbitas de  $\chi$  são periódicas,  $\varphi^0(x) = \varphi^{\tau(x)}(x) = x$ , para todo  $x \in P$ , onde  $x = \pi(y)$ , com  $y \in C$ . Assim, como  $\pi(\phi^t(y)) = \varphi^t(x)$ ,  $\pi(\phi^0(y)) = \varphi^0(x) = x$ , com  $\phi^0(y) = y$ . Além disso,  $\pi(\phi^{\tau(x)}(y)) = \varphi^{\tau(x)}(x) = x$ . Portanto  $\phi^{\tau(x)}(y) \in \pi^{-1}(x)$ , a fibra sobre  $x$ . Agora, a fibra sobre  $x$  é dada pela órbita que passa por  $x$  e assim, pelo fato de  $\phi^{\tau(x)}(y) \in \pi^{-1}(x)$ , existe  $\mu(y) \in G$  tal que  $\phi^{\tau(x)}(y) = \mu(y) \cdot y$ .

Isto dá origem a uma aplicação diferenciável  $\mu : C' \rightarrow G$ .

**Definição 3.4.** Dado um subconjunto  $H$  de um grupo  $G$ , o centralizador de  $H$  é

$$G(H) = \{g \in G / gh = hg, \forall h \in H\}.$$

Denotaremos o centralizador do elemento  $h \in G$  por  $G_h$ .

Podemos observar que o centralizador de  $h$  na algebra de lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  é  $\mathfrak{g}_h = \text{Ker}(Ad(h) - I)$ .

De fato, se  $X \in \mathfrak{g}_h$ , então  $Ad(h)X = X$ . Tomando a ação conjugação  $\phi$ , ou seja,  $\phi_h(g) = hgh^{-1}$ , temos:

$$\exp(X) = \exp(Ad(h)X) = \phi_h(\exp(X)) = h\exp(X)h^{-1} \Leftrightarrow \exp(X).h = h.\exp(X),$$

ou seja,

$$\exp(X) \in G_h.$$

Portanto,  $\exp(\mathfrak{g}_h) \subset G_h$ .

**Definição 3.5.** Um elemento  $h \in G$  é regular se, e somente se,  $\dim G_h = \dim T$ , onde  $T$  é um toro maximal contido em  $G$ .

Para demonstrarmos o próximo lema precisamos do seguinte resultado, que pode ser encontrado em [6]:

**Proposição 3.3.** Seja  $G$  um grupo de Lie. Dado  $h \in G$ , existe um toro maximal  $T \subset G$  tal que  $h \in T$ .

**Lema 3.7.** Se  $G_h^0$  é a componente conexa do centralizador  $G_h$  que contém a identidade, então  $G_h^0$  é um toro maximal de  $G$ .

**Demonstração:** Dado  $h \in G$ , existe um toro maximal  $T$  tal que  $h \in T$ . Mas como  $T$  é abeliano,  $gh = hg$  para todo  $g \in T$ , logo  $T \subset G_h$ . Usando o fato que  $T$  é conexo concluímos que  $T \subset G_h^0$ , pois a identidade de  $G$  pertence a  $T$ . Suponha agora que  $h$  é regular. Se  $T \subsetneq G_h^0$  então  $\dim T < \dim G_h^0$ , pois  $G_h^0$  é conexo e  $T$  é compacto e conexo. Mas isso é um absurdo pois como  $h$  é regular,  $\dim G_h = \dim T$ . Portanto  $T = G_h^0 = \exp(\mathfrak{g}_h)$ , ou seja,  $G_h^0$  é um toro maximal em  $G$ . ■

$G^{reg}$  denotará o conjunto dos elementos de  $G$  que são regulares e  $C^{reg}$  será dado por todo  $y \in C'$  tal que  $\mu(y)$  é regular.

Como  $G^{reg}$  é um subconjunto aberto de  $G$ ,  $C^{reg}$  também é aberto, pois  $\mu$  é diferenciável. Além disso,  $G^{reg}$  é  $G$ -invariante e invariante pelo fluxo  $\varphi^t$ .

**Definição 3.6.** *O normalizador de um subgrupo  $H$  de um grupo  $G$  é dado por*

$$N(H) = \left\{ g \in G / gHg^{-1} = H \right\}.$$

**Definição 3.7.** *Seja  $T$  um toro maximal em  $G$  e  $N = N(T)$  o normalizador de  $T$  em  $G$ , então o grupo  $W = \frac{N}{T}$  é chamado o grupo de Weyl de  $G$ .*

Considere a ação do normalizador  $N$  sobre  $T$ ,  $\rho : N \times T \rightarrow T$ , dada por:

$$\rho(n, t) = ntn^{-1}.$$

Como  $T$  é um subgrupo abeliano, obtemos uma ação  $\psi : W \times T \rightarrow T$ , induzida da ação  $\rho$ , dada por:

$$\psi(nT, t) = ntn^{-1}.$$

Trabalharemos agora com o grupo de Weyl  $W = \frac{N(G_{\mu(y)}^0)}{G_{\mu(y)}^0}$ , com  $y \in C^{reg}$ . Para verificarmos o próximo lema precisaremos do seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [6].

**Teorema 3.2.** *Seja  $G$  um grupo de Lie compacto e conexo e  $T$  um toro maximal de  $G$ . Então  $G(T) = T$ .*

Com esse resultado podemos demonstrar:

**Lema 3.8.** *Se  $\psi(n_1G_{\mu(y)}^0, g) = \psi(n_2G_{\mu(y)}^0, g)$ , para todo  $g \in G_{\mu(y)}^0$ , então  $n_1G_{\mu(y)}^0 = n_2G_{\mu(y)}^0$ .*

**Demonstração:** Sejam  $n_1G_{\mu(y)}^0, n_2G_{\mu(y)}^0 \in W$ . Então, para todo  $g \in G_{\mu(y)}^0$ ,

$$\psi(n_1G_{\mu(y)}^0, g) = \psi(n_2G_{\mu(y)}^0, g) \Rightarrow n_1gn_1^{-1} = n_2gn_2^{-1} \Rightarrow n_2^{-1}n_1g = gn_2^{-1}n_1.$$

Logo  $n_2^{-1}n_1 \in G(G_{\mu(y)}^0)$ . Mas como  $G$  é um grupo de Lie compacto e conexo e  $G_{\mu(y)}^0$  é um toro maximal, temos pelo Teorema 3.2 que  $G(G_{\mu(y)}^0) = G_{\mu(y)}^0$  e assim  $n_2^{-1}n_1 \in G_{\mu(y)}^0$ .

Portanto  $n_1G_{\mu(y)}^0 = n_2G_{\mu(y)}^0$ . ■

É claro que  $\mu(y) \in G_{\mu(y)}$ . Mas como consequência do resultado anterior, mostraremos que  $\mu(y)$  está em  $G_{\mu(y)}^0$ .

**Lema 3.9.** *Dado  $y \in C^{reg}$ ,  $\mu(y) \in G_{\mu(y)}^0$ .*

**Demonstração:** Como  $y \in C^{reg}$ , então  $\mu(y)$  é regular e assim  $G_{\mu(y)}^0$  é um toro maximal. Além disso,  $\mu(y)G_{\mu(y)}^0 = G_{\mu(y)}^0\mu(y)$ , ou seja,  $\mu(y) \in N(G_{\mu(y)}^0)$ .

De fato, dado  $\mu(y)g_0 \in \mu(y)G_{\mu(y)}^0$ , como  $g_0 \in G_{\mu(y)}^0$ , então  $\mu(y)g_0 = g_0\mu(y) \in G_{\mu(y)}^0\mu(y)$ . Logo  $\mu(y)G_{\mu(y)}^0 \subset G_{\mu(y)}^0\mu(y)$ . Analogamente  $\mu(y)G_{\mu(y)}^0 \supset G_{\mu(y)}^0\mu(y)$  e portanto  $\mu(y) \in N(G_{\mu(y)}^0)$ . Com isso, dado  $g \in G_{\mu(y)}^0$ , fica bem definida  $\psi(\mu(y)G_{\mu(y)}^0, g) = \mu(y)g\mu(y)^{-1}$ . Se  $g \in G_{\mu(y)}^0$ , então  $g\mu(y) = \mu(y)g$  e assim

$$\psi(\mu(y)G_{\mu(y)}^0, g) = \mu(y)g\mu(y)^{-1} = g\mu(y)\mu(y)^{-1} = g = \psi(G_{\mu(y)}^0, g).$$

Pelo lema anterior, concluímos que  $\mu(y)G_{\mu(y)}^0 = G_{\mu(y)}^0$ , ou seja,  $\mu(y) \in G_{\mu(y)}^0$ . ■

Podemos observar que o toro maximal  $G_{\mu(y)}^0$  varia quando  $y$  varia. O objetivo agora é descrever uma forma de fixar toros maximais.

Para isso, usaremos o seguinte (ver [6]):

**Teorema 3.3.** *Quaisquer dois toros maximais  $T$  e  $T'$  em um grupo de Lie compacto e conexo  $G$  são conjugados, isto é, existe  $g \in G$  tal que  $T = gT'g^{-1}$ .*

Deste teorema segue o resultado:

**Lema 3.10.** *Fixado um toro maximal  $T \subset G$  com álgebra de Lie  $\xi$ , existe uma seção transversal local  $\Sigma$  para a fibração de  $C'$  pelas  $G$ -órbitas tal que para todo  $y \in \Sigma$ ,  $\mathfrak{g}_{\mu(y)} = \xi$ .*

**Demonstração:** Pelo teorema anterior,  $T$  e  $G_{\mu(y)}^0$  são conjugados, ou seja, existe  $g(y) \in G$  tal que  $G_{\mu(y)}^0 = g(y)Tg(y)^{-1}$ . Assim,  $\mathfrak{g}_{\mu(y)} = Ad(g(y))\xi$ . De fato,

$$\exp(Ad(g(y))\xi) = \phi_{g(y)}(\exp(\xi)) = g(y)\exp(\xi)g(y)^{-1} = g(y)Tg(y)^{-1} = G_{\mu(y)}^0.$$

Daí, por unicidade,  $Ad(g(y))\xi = \mathfrak{g}_{\mu(y)}$ .

Além disso, como  $N(T)t = tN(T)$  para todo  $t \in T$ , podemos dizer que  $Ad(g_y)\xi = \mathfrak{g}_{\mu(y)}$ , onde  $g_y = g(y)N(T)$ .

A aplicação  $R : C^{reg} \rightarrow \frac{G}{N(T)}$  tal que  $R(y) = g_y$  é diferenciável. Considerando o caso em que  $g(y) = e$ , teremos  $\xi = \mathfrak{g}_{\mu(y)}$ . Assim a fibra sobre  $N(T)$  é dada por  $\bar{\Sigma} = R^{-1}(N(T)) =$

$\{y \in C^{reg}/\mathfrak{g}_{\mu(y)} = \xi\}$  e  $\dim \bar{\Sigma} = \dim C - (\dim G - \dim N(T))$ . Como  $G$  age livremente,  $\dim(G\text{-órbitas}) = \dim G$  e assim,

$$\dim(G\text{-órbitas}) + \dim \bar{\Sigma} = \dim G + \dim C - \dim G + \dim N(T) = \dim C + \dim N(T) > \dim C.$$

Portanto  $\dim \bar{\Sigma} \neq \text{codim}(G\text{-órbitas})$  e assim não pode ser uma seção transversal local. Por isso, tomaremos como  $\Sigma$  uma seção transversal local para a fibração de  $\bar{\Sigma}$  pelas  $N(T)$ -órbitas. Podemos notar realmente que  $\Sigma$  é complementar a  $G$ -órbitas pois

$$\begin{aligned} \dim \Sigma + \dim(G\text{-órbitas}) &= \dim \bar{\Sigma} - \dim(N(T)\text{-órbitas}) + \dim G = \\ &= \dim C - \dim G + \dim N(T) - \dim N(T) + \dim G = \dim C. \end{aligned}$$

■

Seja  $k$  a inversa do difeomorfismo  $\pi$  restrito a  $\Sigma$  para um conjunto aberto de  $S'$ . Considere  $\tilde{\mu} = \mu \circ k$ . Podemos observar que  $\tilde{\mu} : S \rightarrow T$  é diferenciável.

Mostraremos que a imagem de  $\tilde{\mu}$  está contida em  $T$ . Para isso, observe que dado  $s \in S$ ,  $k(s) \in \Sigma \subset C^{reg}$  e assim pelo Lema 3.9,  $\mu(k(s)) \in G_{\mu(k(s))}^0$ . Além disso, pelo Lema 3.10,  $\mathfrak{g}_{\mu(k(s))} = \xi$  o que implica por unicidade de álgebra de Lie que  $G_{\mu(k(s))}^0 = T$  e portanto  $\tilde{\mu}(s) = \mu(k(s)) \in T$ .

Considere o isomorfismo  $\eta : \left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\right)^k \rightarrow T$  e a aplicação  $F : T \times \mathbb{R} \times S \rightarrow C'$  dada por  $F(h, t, s) = \phi^t(h.k(s))$ . Da aplicação  $F$ , podemos identificar pontos de  $T \times \mathbb{R} \times S$  do seguinte modo: dados  $(h_1, t_1, s_1), (h_2, t_2, s_2) \in T \times \mathbb{R} \times S$ ,  $(h_1, t_1, s_1) \sim (h_2, t_2, s_2)$  se, e somente se,  $\pi(\phi^{t_1}(h_1 k(s_1))) = \pi(\phi^{t_2}(h_2 k(s_2)))$ . Isso quer dizer que temos uma  $\mathbb{Z}$ -ação  $\Pi$  sobre  $T \times \mathbb{R} \times S$  dada por:

$$\Pi(n, (h, t, s)) = (h.\tilde{\mu}(s)^{-n}, t + n\tau(s), s)$$

Essa ação de fato define a relação de equivalência citada. Demonstraremos este fato por indução. Para  $n = 1$ , usando o fato que a  $G$ -órbita comuta com o fluxo, temos

$$\begin{aligned} \pi(\phi^{t+\tau(s)}(h.\tilde{\mu}(s)^{-1}.k(s))) &= \pi(\phi^t(\phi^{\tau(s)}(h.\tilde{\mu}(s)^{-1}.k(s)))) = \pi(\phi^t(h.\tilde{\mu}(s)^{-1}\phi^{\tau(s)}(k(s)))) = \\ &= \pi(\phi^t(h.\tilde{\mu}(s)^{-1}u(k(s))k(s))) = \pi(\phi^t(h.\tilde{\mu}(s)^{-1}\tilde{\mu}(s)k(s))) = \pi(\phi^t(h.k(s))) \end{aligned}$$

Portanto  $(h.\tilde{\mu}(s)^{-1}, t + \tau(s), s) \sim (h, t, s)$ .

Suponha que para  $k = n$ ,  $\pi(\phi^{t+n\tau(s)}(h.\tilde{\mu}(s)^{-n}.k(s))) = \pi(\phi^t(h.k(s)))$ , então para  $k = n + 1$ ,

$$\begin{aligned} \pi(\phi^{t+n\tau(s)+\tau(s)}(h.\tilde{\mu}(s)^{-n-1}.k(s))) &= \pi(\phi^{\tau(s)}(\phi^{t+n\tau(s)}(h.\tilde{\mu}(s)^{-n-1}.k(s)))) = \\ &= \pi(\phi^{\tau(s)}(\tilde{\mu}(s)^{-1}\phi^{t+n\tau(s)}(h.\tilde{\mu}(s)^{-n}.k(s)))) = \pi(\phi^{\tau(s)}(\tilde{\mu}(s)^{-1}\phi^t(h.k(s)))) = \\ &= \pi(\phi^{t+\tau(s)}(h.\tilde{\mu}(s)^{-1}.k(s))) = \pi(\phi^t(h.k(s))). \end{aligned}$$

Logo  $(h.\tilde{\mu}(s)^{-n-1}, t + (n + 1)\tau(s), s) \sim (h, t, s)$ . como queríamos.

Além disso, a ação  $H$  é livre pois

$$H(n, (h, t, s)) = (h, t, s) \Leftrightarrow (h.\tilde{\mu}(s)^{-n}, t + n\tau(s), s) = (h, t, s) \Leftrightarrow t + n\tau(s) = t \Leftrightarrow n = 0$$

e própria por  $\mathbb{Z}$  ser um conjunto discreto.

Assim, por [2].  $\frac{T \times \mathbb{R} \times S}{\mathbb{Z}}$  é uma variedade diferenciável.

**Definição 3.8.** Tomando  $N = \left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\right)^r \times \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times S$ , seja  $\Xi : \frac{T \times \mathbb{R} \times S}{\mathbb{Z}} \rightarrow N$  a aplicação dada por:

$$\Xi([(h, t, s)]) = \left( \eta^{-1}(h) + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \frac{t}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}, s \right),$$

onde  $[(h, t, s)]$  denota um elemento de  $\frac{T \times \mathbb{R} \times S}{\mathbb{Z}}$  e  $\eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r$  é um elemento da forma  $\left( a_1 \frac{t}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}, \dots, a_r \frac{t}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z} \right)$ , com  $\eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) = (a_1 \bmod \mathbb{Z}, \dots, a_r \bmod \mathbb{Z})$ .

Mostraremos agora que  $\Xi$  é um difeomorfismo. Para isso calculemos sua inversa.

Defina  $\Theta : N \rightarrow \frac{T \times \mathbb{R} \times S}{\mathbb{Z}}$  por:

$$\Theta(a \bmod \mathbb{Z}^r, b \bmod \mathbb{Z}, s) = [(\eta(a \bmod \mathbb{Z}^r - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))b \bmod \mathbb{Z}^r), b\tau(s), s)].$$

Por um cálculo simples podemos notar que  $\Theta$  é a inversa de  $\Xi$ . Também,  $\Theta$  e  $\Xi$  são diferenciáveis pois  $\eta$  é um isomorfismo. Portanto  $\Xi$  é um difeomorfismo.

Agora, demonstraremos o seguinte resultado:

**Lema 3.11.** A aplicação  $\Xi$  conjuga a  $R$ -ação  $\Delta_{\nu}$  sobre  $\frac{T \times \mathbb{R} \times S}{\mathbb{Z}}$  dada por

$$\Delta_{\nu}([(h, t, s)]) = [(h, t + t', s)].$$

com a  $R$ -ação  $\Lambda_{\nu'}$  sobre  $N$  dada por

$$\Lambda_{\nu'}(k.t \bmod \mathbb{Z}.s) = \left( k + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))\frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \left( t + \frac{t'}{\tau(s)} \right) \bmod \mathbb{Z}, s \right). \quad (3.12)$$

**Demonstração:** Temos,

$$\Xi(\Delta_{\nu'}([(h, t, s)])) = \Xi([(h, t+t'.s)]) = \left( \eta^{-1}(h) + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))\frac{(t+t')}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \frac{(t+t')}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}, s \right)$$

c

$$\begin{aligned} \Lambda_{\nu'}(\Xi([(h, t, s)])) &= \Lambda_{\nu'}\left(\eta^{-1}(h) + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))\frac{t}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \frac{t}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}, s\right) = \\ &= \left( \eta^{-1}(h) + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))\frac{t}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))\frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \left( \frac{t}{\tau(s)} + \frac{t'}{\tau(s)} \right) \bmod \mathbb{Z}, s \right) = \\ &= \left( \eta^{-1}(h) + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))\frac{(t+t')}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \frac{(t+t')}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}, s \right). \end{aligned}$$

Portanto  $\Xi \circ \Delta_{\nu'} = \Lambda_{\nu'} \circ \Xi$ . ■

Olhando para o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T \times \mathbb{R} \times S & \xrightarrow{F} & C' \\ \pi \downarrow & \nearrow \beta & \uparrow \\ \frac{T \times \mathbb{R} \times S}{\mathbb{Z}} & \xleftarrow{\Theta} & N \end{array}$$

podemos encontrar a aplicação  $\beta : \frac{T \times \mathbb{R} \times S}{\mathbb{Z}} \rightarrow C'$ , dada por

$$\beta([(h, t, s)]) = F(h, t, s).$$

A partir desse resultado, podemos definir uma aplicação  $\Psi : N \rightarrow C'$  dada por:

$$\begin{aligned} \Psi(k, t, s) &= \beta(\Theta(h, t, s)) = \beta([\eta(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t) \bmod \mathbb{Z}^r, t\tau(s), s]) = \\ &= F(\eta(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t) \bmod \mathbb{Z}^r, t\tau(s), s) = \phi^{t\tau(s)}(\eta(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t) \bmod \mathbb{Z}^r).k(s)). \end{aligned}$$

**Lema 3.12.** *A aplicação  $\Psi$  tem as seguintes propriedades:*

1.  $\Psi$  é um mergulho.
2.  $\Psi$  conjuga a  $\mathbb{R}$ -ação  $\Lambda_{\nu'}$  sobre  $N$  com o fluxo  $\phi^{t'}$  sobre  $C'$ .

**Demonstração:**

Como  $\Theta$  é um difeomorfismo, concluímos que  $\Psi$  é um mergulho e 1. está demonstrado. Agora, usando o Lema 3.11, temos:

$$\begin{aligned}
\Psi(\Lambda_{\nu'}(k, t, s)) &= \beta(\Theta(\Lambda_{\nu'}(k, t, s))) = \beta(\Delta_{\nu'}(\Theta(k, t, s))) = \\
&= \beta(\Delta_{\nu'}([\eta(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t \bmod \mathbb{Z}^r), t\tau(s), s])) = \\
&= \beta([\eta(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t \bmod \mathbb{Z}^r), t\tau(s) + t', s]) = \\
&= F(\eta(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t \bmod \mathbb{Z}^r), t\tau(s) + t', s) = \\
&\quad \phi^{t\tau(s)+t'}\left(\eta\left(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t \bmod \mathbb{Z}^r\right), k(s)\right) = \\
&= \phi^{t'}\left(\phi^{t\tau(s)}\left(\eta\left(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t \bmod \mathbb{Z}^r\right), k(s)\right)\right) = \phi^{t'}(\Psi(k, t, s)).
\end{aligned}$$

Portanto  $\Psi \circ \Lambda_{\nu'} = \phi^{t'} \circ \Psi$  e 2. está demonstrado. ■

Pelo Lema 3.12,  $N$  está mergulhado em  $C'$  e como o comportamento do fluxo  $\phi^t$  é o mesmo que a  $\mathbb{R}$ -ação sobre um toro de dimensão  $r + 1$  para cada  $s$  fixado, então o movimento em  $C'$  ocorre sobre um toro de dimensão  $r + 1$ . Nos resta saber como  $\Psi(N)$  comporta-se em  $C'$ .

Considere a ação  $A : T \times (G \times N) \rightarrow (G \times N)$  dada por:

$$A_h(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s) = (gh^{-1}, \eta^{-1}(h) + k, t \bmod \mathbb{Z}, s).$$

Esta ação comuta com a ação  $B : G \times (G \times N) \rightarrow (G \times N)$  dada por:

$$B_{\bar{g}}(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s) = (\bar{g}g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s).$$

De fato,

$$A_h(B_{\bar{g}}(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)) = A_h(\bar{g}g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s) = ((\bar{g}g)h^{-1}, \eta^{-1}(h) + k, t \bmod \mathbb{Z}, s)$$

e

$$B_{\bar{g}}(A_h(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)) = B_{\bar{g}}(gh^{-1} \cdot \eta^{-1}(h) + k, t \bmod \mathbb{Z}, s) = (\bar{g}(gh^{-1}), \eta^{-1}(h) + k, t \bmod \mathbb{Z}, s).$$

Como  $(\bar{g}g)h^{-1} = \bar{g}(gh^{-1})$ , então  $A_h \circ B_{\bar{g}} = B_{\bar{g}} \circ A_h$ .

Além disso,  $A$  comuta com a ação  $D : \mathbb{R} \times (G \times N) \rightarrow (G \times N)$  dada por:

$$D_{t'}(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s) = \left( g, k + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \left( t + \frac{t'}{\tau(s)} \right) \bmod \mathbb{Z}, s \right)$$

De fato,

$$\begin{aligned} A_h(D_{t'}(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)) &= A_h \left( g, k + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \left( t + \frac{t'}{\tau(s)} \right) \bmod \mathbb{Z}, s \right) = \\ &= (gh^{-1}, \eta^{-1}(h) + k + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \left( t + \frac{t'}{\tau(s)} \right) \bmod \mathbb{Z}, s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_{t'}(A_h(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)) &= D_{t'}(gh^{-1} \cdot \eta^{-1}(h) + k, t \bmod \mathbb{Z}, s) = \\ &= \left( gh^{-1}, \eta^{-1}(h) + k + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \left( t + \frac{t'}{\tau(s)} \right) \bmod \mathbb{Z}, s \right). \end{aligned}$$

Portanto  $A_h \circ D_{t'} = D_{t'} \circ A_h$ .

Como  $A_h$  comuta tanto com  $B_{\bar{g}}$  quanto com  $D_{t'}$ , o quociente  $M = \frac{(G \times N)}{T}$  herda uma  $G$ -ação e uma  $\mathbb{R}$ -ação que comutam. É natural que essas ações sejam  $\bar{B} : G \times M \rightarrow M$  dada por:

$$\bar{B}_{\bar{g}}([(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)]) = [(\bar{g}g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)]$$

e  $\bar{D} : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  dada por:

$$\bar{D}_{t'}([(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)]) = \left[ \left( g, k + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \left( t + \frac{t'}{\tau(s)} \right) \bmod \mathbb{Z}, s \right) \right].$$

Para observarmos que essas ações estão bem definidas, considere  $[(g_1, k_1, t_1 \bmod \mathbb{Z}, s_1)]$  e  $[(g_2, k_2, t_2 \bmod \mathbb{Z}, s_2)]$  pertencentes a  $M$ , tal que  $[(g_1, k_1, t_1 \bmod \mathbb{Z}, s_1)] = [(g_2, k_2, t_2 \bmod \mathbb{Z}, s_2)]$ ,

ou seja, que existe  $h \in T$ , tal que  $A_h(g_1, k_1, t_1 \bmod \mathbb{Z}, s_1) = (g_2, k_2, t_2 \bmod \mathbb{Z}, s_2)$ . Assim:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{\bar{g}}([(g_2, k_2, t_2 \bmod \mathbb{Z}, s_2)]) &= [(\bar{g}g_2, k_2, t_2 \bmod \mathbb{Z}, s_2)] = [B_{\bar{g}}(g_2, k_2, t_2 \bmod \mathbb{Z}, s_2)] = \\ &= [B_{\bar{g}}(A_h(g_1, k_1, t_1 \bmod \mathbb{Z}, s_1))] = [A_h(B_{\bar{g}}(g_1, k_1, t_1 \bmod \mathbb{Z}, s_1))] = \\ &= [B_{\bar{g}}(g_1, k_1, t_1 \bmod \mathbb{Z}, s_1)] = \bar{B}_{\bar{g}}([(g_1, k_1, t_1 \bmod \mathbb{Z}, s_1)]). \end{aligned}$$

Analogamente podemos mostrar que  $\bar{D}$  está bem definida.

É simples mostrar que  $\bar{B}_{\bar{g}} \circ \bar{D}_{t'} = \bar{D}_{t'} \circ \bar{B}_{\bar{g}}$ .

**Lema 3.13.** *A aplicação  $\Phi : M \rightarrow C'$ , dada por*

$$\Phi([(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)]) = j \cdot \Psi(k, t \bmod \mathbb{Z}, s)$$

é um difeomorfismo sobre uma vizinhança aberta  $G$ -invariante e fluxo invariante de  $y_0$ . Além disso,  $\Phi$  conjuga a  $G$ -ação  $\bar{B}$  sobre  $M$  com a  $G$ -ação  $\mu$  sobre  $C'$  e conjuga a  $\mathbb{R}$ -ação  $\bar{D}$  sobre  $M$  com o fluxo  $\phi$  de  $V$  sobre  $C'$ .

**Demonstração:** Como  $\Psi(N) \subset C'$ , e  $C'$  é um conjunto  $G$ -invariante, então, pelo modo como foi definido  $\Phi$ , concluímos que  $\Phi(M) \subset C'$ . Além disso,  $\Phi(M)$  é  $G$ -invariante e fluxo-invariante, assim, tome um aberto  $U \subset \Phi(M)$ ,  $G$ -invariante e fluxo-invariante tal que  $\Psi : M \rightarrow U$  seja um difeomorfismo.

Para mostrar que  $\Phi \circ \bar{B}_{\bar{g}} = \mu_{\bar{g}} \circ \Phi$ , seja  $[(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)]$ , assim:

$$\Phi(\bar{B}_{\bar{g}}([(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)])) = \Phi([\bar{g}g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s]) = \bar{g}g \cdot \Psi(k, t \bmod \mathbb{Z}, s)$$

e

$$\mu_{\bar{g}}(\Phi([(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)])) = \mu_{\bar{g}}(g \cdot \Psi(k, t \bmod \mathbb{Z}, s)) = \bar{g}g \cdot \Psi(k, t \bmod \mathbb{Z}, s).$$

Logo  $\Phi \circ \bar{B}_{\bar{g}} = \mu_{\bar{g}} \circ \Phi$ .

Agora, para mostrar que  $\Phi \circ \bar{D}_{t'} = \phi^{t'} \circ \Phi$ , calculemos:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{D}_{t'}([(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)])) &= \Phi\left(\left[\left(g, k + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \left(t + \frac{t'}{\tau(s)}\right) \bmod \mathbb{Z}, s\right)\right]\right) = \\ &= g \cdot \Psi\left(k + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \left(t + \frac{t'}{\tau(s)}\right) \bmod \mathbb{Z}, s\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g \cdot \phi^{t' + t\tau(s)} \left( \eta \left( k + \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \frac{t'}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s)) \left( t + \frac{t'}{\tau(s)} \right) \bmod \mathbb{Z}^r \right) \cdot k(s) \right) = \\
&= g \cdot \phi^{t' + t\tau(s)} (\eta(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t \bmod \mathbb{Z}^r) \cdot k(s))
\end{aligned}$$

e como o fluxo  $\phi$  comuta com a  $G$ -ação,

$$\begin{aligned}
&\phi^{t'}(\Phi([(g, k, t \bmod \mathbb{Z}, s)])) = \phi^{t'}(g \cdot \Psi(k, t \bmod \mathbb{Z}, s)) = g \phi^{t'}(\Psi(k, t \bmod \mathbb{Z}, s)) = \\
&= g \phi^{t'}(\phi^{t\tau(s)}(\eta(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t \bmod \mathbb{Z}^r) \cdot k(s))) = g \cdot \phi^{t' + t\tau(s)}(\eta(k - \eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))t \bmod \mathbb{Z}^r) \cdot k(s)).
\end{aligned}$$

Portanto  $\Phi \circ \bar{D}_{t'} = \phi^{t'} \circ \Phi$ . ■

Da  $\mathbb{R}$ -ação sobre  $N$  dada em (3.12), concluímos que o campo vetorial sobre o toro  $\left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\right)^{k+1}$  é dado por:

$$\left( \frac{\eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \frac{1}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z} \right)$$

Porém, para termos movimento quase-periódico genericamente, precisamos que a aplicação  $V : S \rightarrow \left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\right)^{k+1}$ , dada por:

$$V(s) = \left( \frac{\eta^{-1}(\tilde{\mu}(s))}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z}^r, \frac{1}{\tau(s)} \bmod \mathbb{Z} \right) \quad (3.13)$$

seja uma submersão. Observe que  $V(s)$  corresponde ao campo vetorial em  $\left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\right)^{k+1}$ .

Mas para termos submersão é necessário que a dimensão do domínio seja maior que a do contra-domínio, ou seja,  $\dim S \geq r + 1$ .

Como  $S$  é uma seção no espaço  $P$ , podemos dizer que  $\dim S = \dim P - 1$  e portanto o campo vetorial depende de  $\dim P - 1$  coordenadas. ■

### 3.3 Movimento Quase-Periódico Sobre Toros

Na Seção 3.1 vimos que uma curva integral de  $\chi$  no espaço reduzido  $P$  é periódica ou um ponto de equilíbrio. Na Seção 3.2 provamos que órbitas periódicas no espaço reduzido

$P$  dão origem a movimentos quase-periódicos sobre toros de dimensão 3 em  $C$ . Nesta seção veremos que podem existir movimentos quase-periódicos sobre toros de dimensão menor do que três.

Descreveremos as órbitas em  $C$  que correspondem a um ponto de equilíbrio de  $\chi$  em  $P$ . Dado um ponto de equilíbrio em  $P$ , o movimento sobre a variedade  $C$  está sobre a fibra  $SO(3) \times S^1$ . Segue que a esfera rola sobre uma mesma altura da superfície de revolução.

A ação do grupo  $SO(3) \times S^1$  sobre a variedade  $C$  é dada por:

$$\phi_{(B,\theta)}(a, A, b, \nu) = (r_\theta a, r_\theta A B^{-1}, r_\theta b, r_\theta \nu r_\theta^{-1}). \quad (3.14)$$

onde  $r_\theta \in SO(3)$  representa uma rotação do centro de massa da esfera de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo vertical. Considere o subgrupo a um parâmetro dado pela aplicação exponencial  $exp : so(3) \times \mathbb{R} \rightarrow SO(3) \times S^1$  dada por:

$$exp(t(\xi_1, f)) = (e^{t\xi_1}, e^{ft}), \quad (3.15)$$

onde  $\xi = (\xi_1, f) \in so(3) \times \mathbb{R}$  e  $f$  representa a frequência de rotação em torno do eixo vertical.

Lembramos que os pontos de equilíbrio relativo são aqueles que são projetados em pontos de equilíbrio em  $P$ . Usando o fato que o movimento por um equilíbrio relativo  $c \in C$  é dado por um subgrupo a um parâmetro  $\phi_{exp(t\xi)}(c)$ , podemos demonstrar o seguinte resultado:

**Proposição 3.4.** *Um ponto de equilíbrio  $p^*(f, R) \in P$  corresponde a uma rotação do centro de massa da esfera com frequência  $f$  em uma altura constante da superfície de revolução. Consideraremos a altura tal que  $a_1^2 + a_2^2 = R^2$ . A rotação  $A(t)$  da esfera é dada por:*

$$A(t) = r_{ft} e^{t\xi_1} A_0, \quad (3.16)$$

onde  $r_{ft}$  é a rotação em torno do eixo vertical com um ângulo  $e^{ft}$ , ou seja,

$$r_{ft} = \begin{pmatrix} \cos(e^{ft}) & -\sin(e^{ft}) & 0 \\ \sin(e^{ft}) & \cos(e^{ft}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e

$$i(\hat{\xi}_1) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot a_{0,1} \\ c_1 \cdot a_{0,2} \\ c_2 \end{pmatrix}$$

em que  $A_0$ ,  $a_{0,1}$  e  $a_{0,2}$  são condições iniciais tais que  $a_{0,1}^2 + a_{0,2}^2 = R^2$  e

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{mr}{Mf\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R}g - f^2 \right) \\ c_2 &= \frac{Mr\sqrt{1+\varphi'(R)^2}f^2\varphi'(R) - mgr^2\varphi'(R) + \alpha r^2f^2R + M\varphi'(R)^2f^2R}{Mr\sqrt{1+\varphi'(R)^2}f\varphi'(R)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

**Demonstração:** De acordo com a ação (3.14), um equilíbrio relativo corresponde a um movimento do centro de massa da esfera numa altura constante na superfície de revolução. Além disso, encontramos uma bijeção entre um ponto de equilíbrio  $p^*$  e a frequência e raio  $R$  do movimento através do equilíbrio relativo. Essa bijeção é dada por:

$$p_1^* = \frac{R^2}{2}, \quad p_3^* = fR^2, \quad p_4^* = \frac{f^2R\alpha r^2 - mgr^2\varphi'(R)}{fM\varphi'(R)}. \quad (3.18)$$

De fato,

$$p_1^* = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} = \frac{R^2}{2}.$$

Podemos considerar  $a_1 = R \cos \theta$  e  $a_2 = R \sin \theta$ . Com isso,  $\vartheta_1 = \dot{a}_1 = -R \sin \theta \dot{\theta}$  e  $\vartheta_2 = \dot{a}_2 = R \cos \theta \dot{\theta}$ , logo

$$p_3^* = a_1\vartheta_2 - a_2\vartheta_1 = R \cos \theta \cdot R \cos \theta \dot{\theta} + R \sin \theta R \sin \theta \dot{\theta} = R^2 \dot{\theta} = R^2 f.$$

Podemos calcular também  $p_5^* = \frac{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}{2} = \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{2} = \frac{R^2 f^2}{2}$ .

Portanto, usando o Lema 2.2 e pelo fato de  $p_1^*$  ser constante,

$$0 = \dot{p}_2^* = \frac{1}{1+(\varphi')^2} \left\{ -\frac{M}{\alpha r^2} p_3^* p_4^* \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1^*}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1^*} + 2p_5^* - (p_2^*)^2 \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1^*}} \left( \varphi'' - \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1^*}} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{1 + (\varphi')^2} \left\{ -\frac{M}{\alpha r^2} p_3^* p_4^* \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1^*}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1^*} + 2p_5^* \right\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{M}{\alpha r^2} p_3^* p_4^* \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1^*}} - \frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1^*} + 2p_5^* \Leftrightarrow \frac{M}{\alpha r^2} p_3^* p_4^* \frac{\varphi'}{\sqrt{2p_1^*}} = -\frac{mg}{\alpha} \varphi' \sqrt{2p_1^*} + 2p_5^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{M f R^2 p_4^* \varphi'}{\alpha r^2 R} = \frac{-mg \varphi' R}{\alpha} + R^2 f^2 \Leftrightarrow \frac{M f \varphi' p_4^*}{\alpha r^2} = \frac{-mg \varphi'}{\alpha} + R f^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p_4^* = \frac{f^2 R \alpha r^2 - m g r^2 \varphi'(R)}{f M \varphi'(R)}. \end{aligned}$$

Além disso, dado uma condição inicial  $c = (a_0, A_0, b_0, \nu_0)$ , temos por (3.14) e (3.15) que

$$A(t) = \pi_2(\phi_{(e^{t\xi_1}, e^{ft})}(c)) = r_{ft} A_0 e^{-t\xi_1},$$

onde  $\xi_1$  está fixada por  $c$ . Assim,

$$\dot{A}(t) = \dot{r}_{ft} A_0 e^{-t\xi_1} - r_{ft} A_0 e^{-t\xi_1} \cdot \xi_1$$

e portanto,

$$\dot{A}(0) = \dot{r}_{f0} A_0 - A_0 e^{-t\xi_1} \cdot \xi_1.$$

De  $\nu = \dot{A}A^{-1}$  temos

$$\nu_0 = \dot{A}(0)A_0^{-1} = \dot{r}_{f0} - A_0 \xi_1 A_0^{-1}.$$

Usando que  $i$  é um isomorfismo e a relação (2.2) temos:

$$i(\nu_0) = i(\dot{r}_{f0} - A_0 \xi_1 A_0^{-1}) = i(\dot{r}_{f0}) - i(A_0 \xi_1 A_0^{-1}) = i(\dot{r}_{f0}) - A_0 i(\xi_1).$$

Observemos que

$$\dot{r}_{ft} = \begin{pmatrix} -\sin(e^{ft})e^{ft} \cdot f & \cos(e^{ft})e^{ft} \cdot f & 0 \\ -\cos(e^{ft})e^{ft} \cdot f & -\sin(e^{ft})e^{ft} \cdot f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e assim,

$$\dot{r}_{f0} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} i(\nu_0) &= i(\dot{r}_{f0}) - A_0 i(\xi_1) = f e_3 - A_0 i(\xi_1) \Rightarrow A_0 i(\xi_1) = f e_3 - i(\nu_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow i(\xi_1) = A_0^{-1}(f e_3 - i(\nu_0)). \end{aligned}$$

Precisamos agora calcular  $i(\nu_0)$ . Para isso usaremos a expressão (2.15). Lembremos que  $H_i = \frac{\varphi'}{R} a_i$ . Assim,

$$\begin{aligned} i(\nu_0)_1 &= \frac{1}{r\sqrt{1+H_1^2+H_2^2}}(H_1 w - H_1 H_2 \vartheta_{0,1} - \vartheta_{0,2} - H_2^2 \vartheta_{0,2}) = \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,1} p_4^* - \frac{\varphi'(R)^2}{R^2} a_{0,1} a_{0,2} \vartheta_{0,1} - \vartheta_{0,2} - \frac{\varphi'(R)^2}{R^2} a_{0,2}^2 \vartheta_{0,2} \right) = \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,1} p_4^* - \frac{\varphi'(R)^2}{R^2} a_{0,2} (a_{0,1} \vartheta_{0,1} + a_{0,2} \vartheta_{0,2}) - \vartheta_{0,2} \right) = \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,1} p_4^* - \frac{\varphi'(R)^2}{R^2} a_{0,2} p_2^* - \vartheta_{0,2} \right) = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,1} p_4^* - \vartheta_{0,2} \right) = \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,1} p_4^* - f a_{0,1} \right) = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} p_4^* - f \right) a_{0,1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$i(\nu_0)_1 = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} p_4^* - f \right) a_{0,1}.$$

Também,

$$i(\nu_0)_2 = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} (H_2 w + H_1 H_2 \vartheta_{0,2} + \vartheta_{0,1} + H_1^2 \vartheta_{0,1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,2} p_4^* + \frac{\varphi'(R)^2}{R^2} a_{0,1} a_{0,2} \vartheta_{0,2} + \vartheta_{0,1} + \frac{\varphi'(R)^2}{R^2} a_{0,1}^2 \vartheta_{0,1} \right) = \\
&= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,2} p_4^* + \frac{\varphi'(R)^2}{R^2} a_{0,1} (a_{0,2} \vartheta_{0,2} + a_{0,1} \vartheta_{0,1}) + \vartheta_{0,1} \right) = \\
&= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,2} p_4^* + \frac{\varphi'(R)^2}{R^2} a_{0,1} p_2^* + \vartheta_{0,1} \right) = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,2} p_4^* + \vartheta_{0,1} \right) = \\
&= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,2} p_4^* - f a_{0,2} \right) = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} p_4^* - f \right) a_{0,2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$i(\nu_0)_2 = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} p_4^* - f \right) a_{0,2}.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
i(\nu_0)_3 &= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} (H_2 \vartheta_{0,1} - w - H_1 \vartheta_{0,2}) = \\
&= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,2} \vartheta_{0,1} - p_4^* - \frac{\varphi'(R)}{R} a_{0,1} \vartheta_{0,2} \right) = \\
&= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} (a_{0,2} \vartheta_{0,1} - a_{0,1} \vartheta_{0,2}) - p_4^* \right) = \\
&= \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( -\frac{\varphi'(R)}{R} p_3^* - p_4^* \right) = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( -p_4^* - \varphi'(R) f R \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$i(\nu_0)_3 = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \left( -p_4^* - \varphi'(R) f R \right).$$

Portanto,

$$i(\nu_0) = \frac{1}{r\sqrt{1+\varphi'(R)^2}} \begin{bmatrix} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} p_4^* - f \right) a_{0,1} \\ \left( \frac{\varphi'(R)}{R} p_4^* - f \right) a_{0,2} \\ -p_4^* - \varphi'(R) f R \end{bmatrix}.$$

Observemos que pela expressão encontrada para  $p_4^*$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi'(R)}{R}p_4^* - f &= \frac{\varphi'(R)}{R} \left( \frac{f^2 R \alpha r^2 - mgr^2 \varphi'(R)}{f M \varphi'(R)} \right) - \frac{R f M \varphi'(R) f}{R f M \varphi'(R)} = \\
&= \frac{\varphi'(R) f^2 R (\alpha r^2 - M) - \varphi'(R)^2 mgr^2}{R f M \varphi'(R)} = \frac{1}{M f} \left[ f^2 (\alpha r^2 - M) - \frac{\varphi'(R) mgr^2}{R} \right] = \\
&= \frac{1}{M f} \left[ f^2 \left( \frac{M + mr^2}{r^2} \right) r^2 - f^2 M - \frac{\varphi'(R) mgr^2}{R} \right] = \frac{mr^2}{M f} \left[ f^2 - \frac{\varphi'(R) g}{R} \right]
\end{aligned}$$

e assim,

$$\frac{1}{r \sqrt{1 + \varphi'(R)^2}} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} p_4^* - f \right) = \frac{1}{r \sqrt{1 + \varphi'(R)^2}} \frac{mr^2}{M f} \left[ f^2 - \frac{\varphi'(R) g}{R} \right] = -c_1.$$

Temos também,

$$\begin{aligned}
-p_4^* - \varphi'(R) f R &= -\frac{f^2 R \alpha r^2 - mgr^2 \varphi'(R)}{f M \varphi'(R)} - \frac{\varphi'(R) f R f M \varphi'(R)}{f M \varphi'(R)} = \\
&= \frac{-\alpha r^2 f^2 R - M \varphi'(R)^2 f^2 R + mgr^2 \varphi'(R)}{f M \varphi'(R)},
\end{aligned}$$

então,

$$\frac{1}{r \sqrt{1 + \varphi'(R)^2}} (-p_4^* - \varphi'(R) f R) = -c_2 + f.$$

Logo,

$$i(\nu_0) = \frac{1}{r \sqrt{1 + \varphi'(R)^2}} \begin{bmatrix} \left( \frac{\varphi'(R)}{R} p_4^* - f \right) a_{0,1} \\ \left( \frac{\varphi'(R)}{R} p_4^* - f \right) a_{0,2} \\ -p_4^* - \varphi'(R) f R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 a_{0,1} \\ -c_1 a_{0,2} \\ -c_2 + f \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$i(\xi_1) = A_0^{-1} (f e_3 - i(\nu_0)) = A_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix} - A_0^{-1} \begin{bmatrix} -c_1 a_{0,1} \\ -c_1 a_{0,2} \\ -c_2 + f \end{bmatrix} = A_0^{-1} \begin{bmatrix} c_1 a_{0,1} \\ c_1 a_{0,2} \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Porém, usando (2.2),

$$\begin{aligned} i \left( A_0^{-1} i^{-1} \left( \begin{bmatrix} c_1 a_{0,1} \\ c_1 a_{0,2} \\ c_2 \end{bmatrix} \right) A_0 \right) &= A_0^{-1} i \left( i^{-1} \left( \begin{bmatrix} c_1 a_{0,1} \\ c_1 a_{0,2} \\ c_2 \end{bmatrix} \right) \right) = \\ &= A_0^{-1} \begin{bmatrix} c_1 a_{0,1} \\ c_1 a_{0,2} \\ c_2 \end{bmatrix} = i(\xi_1). \end{aligned}$$

Agora, como  $i$  é um isomorfismo e portanto injetor, temos

$$\xi_1 = A_0^{-1} i^{-1} \left( \begin{bmatrix} c_1 a_{0,1} \\ c_1 a_{0,2} \\ c_2 \end{bmatrix} \right) A_0.$$

Para concluir, usaremos que para toda transformação linear  $A$ ,

$$Ae^{\xi}A^{-1} = e^{A\xi A^{-1}}$$

e

$$\hat{\xi}_1 = i^{-1} \left( \begin{bmatrix} c_1 \cdot a_{0,1} \\ c_1 \cdot a_{0,2} \\ c_2 \end{bmatrix} \right) = A_0 \xi_1 A_0^{-1}.$$

Assim,

$$A(t) = r_{ft} A_0 e^{-t\xi_1} = r_{ft} A_0 e^{-t\xi_1} A_0^{-1} A_0 = r_{ft} e^{-A_0 t \xi_1 A_0^{-1}} A_0 = r_{ft} e^{-t\hat{\xi}_1} A_0.$$

Portanto,

$$A(t) = r_{ft} e^{-t\hat{\xi}_1} A_0. \quad \blacksquare$$

É possível mostrar que o movimento correspondente a um ponto de equilíbrio de  $P$  dá origem a um movimento quase-periódico em um toro de dimensão 2 da variedade vinculada  $C$ .

## Conclusão

Vimos que a partir de movimento periódico no espaço base, podemos concluir que os movimentos sobre toros no espaço total de um fibrado principal são quase-periódicos. No caso particular em que o grupo é dado por  $G = SO(3) \times S^1$ , observamos que o movimento é quase-periódico sobre toros de dimensão 3, pois os toros maximais de  $SO(3)$  e  $S^1$  tem dimensão 1. Além disso, movimentos quase-periódicos podem acontecer sobre toros de dimensão 2.

Um dos problemas que fica em aberto é como esses toros cobrem a variedade vinculada  $C$ . Outro problema é calcular explicitamente a aplicação dada em (3.13),  $S \rightarrow \left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\right)^3$ .



# Apêndice A

## Técnica de “Blow-up”

Neste apêndice apresentaremos brevemente sobre a técnica de “blow-up”, teoria usada para estudar singularidades não hiperbólicas. Para isso usaremos mudança de variáveis.

Sem perda de generalidade, estudaremos o ponto singular 0 de um campo  $X \in C^\infty$ .

Considere a mudança de variável  $\phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$\phi(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Defina  $\hat{X} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  como o campo dado pelo “pull-back” de  $X$  por  $\phi$ , ou seja, dado  $v \in S^1 \times \mathbb{R}$ ,  $D\phi(v)(\hat{X}(v)) = X(\phi(v))$ .

Notemos que  $\phi$  é um difeomorfismo  $C^\infty$  sobre  $S^1 \times (0, \infty)$  mas não sobre  $\{r = 0\}$ .

Como  $\phi(\theta, 0) = (0, 0)$ , então  $\phi(S^1 \times \{0\}) = (0, 0)$  e portanto a imagem inversa de  $(0, 0)$  por  $\phi$  leva esse ponto para a esfera  $S^1 \times \{0\}$ .

Faremos agora os cálculos em  $\hat{X}$ . Para facilitar, usaremos diferentes cartas. Seja  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  e tome a carta  $K^x : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por:

$$K^x(\theta, r) = (r \cos \theta, \operatorname{tg} \theta) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

A aplicação  $\phi^x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , expressão de  $\phi$  nessas coordenadas é dada por:

$$\phi^x(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}\bar{y})$$

De fato,

$$\phi(\theta, r) = \phi^x(K^x(\theta, r)) = \phi^x(r \cos \theta, \operatorname{tg} \theta) = (r \cos \theta, r \cos \theta \operatorname{tg} \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Chamaremos  $\phi^x$  de “blow-up” na direção  $x$ . O “pull-back” de  $X$  por  $\phi^x$  será denotado por  $\hat{X}_x$ .

Para  $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  usaremos a carta  $K^y : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$K^y(\theta, r) = (\cotg \theta, r \sin \theta) = (\bar{x}, \bar{y})$$

A aplicação  $\phi^y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , expressão de  $\phi$  nessas coordenadas é dada por:

$$\phi^y(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}\bar{y}, \bar{y}).$$

De fato,

$$\phi(\theta, r) = \phi^y(K^y(\theta, r)) = \phi^y(\cotg \theta, r \sin \theta) = (\cotg \theta r \sin \theta, r \sin \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Chamaremos  $\phi^y$  de “blow-up” na direção  $y$ . O “pull-back” de  $X$  por  $\phi^y$  será denotado por  $\hat{X}_y$ .

Tomaremos o caso menos degenerado possível, ou seja, tomaremos  $\bar{X} = \frac{1}{r^k} \hat{X}$ , onde estamos considerando que  $j_k(X)(0) = 0$  e  $j_{k+1}(X)(0) \neq 0$ , onde  $j_k$  é a expansão em série até o termo  $k$ . Disso segue que  $j_k(\hat{X})(z) = 0$ , com  $j_{k+1}(\hat{X})(v) \neq 0$  onde  $v \in S^1 \times 0$ . Além disso,  $j_k(\hat{X}^x)(z) = 0$  e  $j_k(\hat{X}^y)(z) = 0$  para  $z \in \{\bar{x} = 0\}$  e  $z \in \{\bar{y} = 0\}$ , respectivamente, com  $j_{k+1}(\hat{X}^x)(z) \neq 0$  e  $j_{k+1}(\hat{X}^y)(z) \neq 0$ .

De fato, suponha que existe  $i < k$  tal que  $j_i(\hat{X})(v) = 0$ . Dado  $\bar{v}$  numa vizinhança de  $v$ , temos que para  $p$  em uma vizinhança do 0 e  $\phi(\bar{v}) = p$ ,  $D\phi(\bar{v})(\hat{X}(\bar{v})) = X(\phi(\bar{v})) = X(\phi(p))$ . Mas assim, como  $j_i(\hat{X})(v) = 0$ , então  $j_i(X)(v) = 0$ , contrariando a hipótese. Do mesmo modo concluímos que  $j_{k+1}(\hat{X})(v) \neq 0$ .

Assim  $\bar{X}$  é  $C^\infty$  sobre  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Dividir  $\hat{X}$  por  $r^k$  não altera o comportamento das órbitas ou suas direções. Apenas muda a parametrização por  $t$ .

**Exemplo 3.1.** Considere o campo vetorial  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 2xy + O_1(\|x, y\|^3) \\ \dot{y} &= y^2 - xy + O_2(\|x, y\|^3) \end{aligned}$$

Notemos que

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2xy$$

e

$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow y^2 = xy.$$

Supondo que  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , temos  $x = y$ , o que implica  $y^2 = 2y^2$  e assim  $y = 0$ , absurdo. Portanto  $y = 0$ . Mas disso segue que  $x^2 = 0$ , ou seja,  $x = 0$ . Então o único ponto singular é  $(0, 0)$ .

Agora, fazendo a mudança de coordenadas  $\phi(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  temos que  $X(\phi(\theta, r))$  é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta &= r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \cos \theta \sin \theta + O_1(r^3) \\ \dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta &= r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos \theta \sin \theta + O_2(r^3) \end{aligned}$$

A partir disso, multiplicando o primeiro termo por  $-\sin \theta$  e o segundo por  $\cos \theta$  então somando, encontramos a expressão de  $\dot{\theta}$  e multiplicando o primeiro termo por  $\cos \theta$  e o segundo por  $\sin \theta$  então somando, encontramos  $\dot{r}$ . Assim, a expressão de  $\hat{X}$  fica:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= r(-2 \cos^2 \theta \sin \theta + 3 \sin^2 \theta \cos \theta) + O_1(r^2) \\ \dot{r} &= r^2(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) + O_2(r^3) \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{X} = \frac{1}{r} \hat{X}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -2 \cos^2 \theta \sin \theta + 3 \sin^2 \theta \cos \theta + O_1(r) \\ \dot{r} &= r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) + O_2(r^2) \end{aligned}$$

Aquí, as singularidades que ocorrem para  $r = 0$  são  $(0, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$  e em  $(\theta_0, 0)$ , onde esse  $\theta_0$  satisfaz  $\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{2}{3}$ .



## Referências Bibliográficas

- [1] Abraham. R.: Marsden. J. E. Foundations of Mechanics. 2.ed. Addison-weslwey Publishing Company, Inc., 1978.
- [2] Alexandrino. M. M.: Bettiol R. G. Introduction to Lie Groups, Isometric and Adjoint Actions and Some Generalizations. Disponível em: [http://arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/0901/0901.2374v3.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0901/0901.2374v3.pdf). Acesso em: 26 de Set. de 2010.
- [3] Biscolla, L. M. C. C. O. Controlabilidade do Rolamento de Uma Esfera Sobre Uma Superfície de Revolução. Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São paulo, São Paulo, 2005.
- [4] Bloch, A. M. Nonholonomics Mechanics and Control. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 2003.
- [5] Bloch, A. M.; Krishnaprasad. P.S.; Marsden, J. E.; Ratiu. T. S. The Euler-Poincaré Equations and Double Bracket Dissipation. Communications in Mathematical Physics 175, p. 1-42.
- [6] Bröcker, T.; Dieck, T. Representations of Compact Lie Groups. Springer, 1985.
- [7] Dumortier, F; Llibre. J.; Artés, J. C. Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Springer, 2006.
- [8] Fernandes, R. L. Lições de Geometria Diferencial. Disponível em: <http://www.math.ist.utl.pt/~rfern/GD/notas.pdf>. Acesso em: 26 de Set. de 2010.
- [9] Fraleigh, J. B. A First Course in Abstract Algebra. Addison-weslwey.

- [10] Goldstein, H.; Poole C. P.; Safko, J. L. Classical Mechanics.
- [11] Hermans, J. A Symmetric Sphere Rolling on a Surface. *Nonlinearity*, vol. 8, n. 4, p. 493-515, 1995.
- [12] Neimark, J. I.; Fufaev, N. A. Dynamics of Nonholonomic Systems. American Mathematical Society, 1972.
- [13] Ramos, A. Poisson Structures for Reduced Non-holonomic Systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. vol. 37. n. 17. p. 4821-4842, 2004.
- [14] Tausk, D. V. Notes on Mathematical Physics for Mathematicians. Disponível em: <http://www.imc.usp.br/tausk/texts/MathPhysics.pdf>. Acesso em: 01 de Out. de 2010.