

**Família multiplicativa,
transformações ádicas
e a medida central de Parry**


Ricardo Ramos Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Albert Meads Fisher

São Paulo, Maio de 2011



**Família multiplicativa,
transformações ádicas
e a medida central de Parry**

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Ricardo Ramos Silva
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Albert Meads Fisher (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Fabio Armando Tal - IME-USP
- Prof. Dr. Ali Messaoudi - IBILCE-UNESP

Dedicatória

À minha querida família.

Agradecimentos

Agradeço...

A Deus, por me dar saúde e sabedoria suficiente para a realização deste trabalho e estupidéz suficiente para escolher esta vida acadêmica tão sofrida, mas gratificante.

À minha querida esposa Andreza por me fazer companhia nas intermináveis noites de estudo e compartilhar comigo o Sol nascente.

Aos meus pais Laércio e Márcia pela compreensão da minha ausência em várias reuniões familiares e eventos importantes, além do incentivo para não desistir nunca.

Às minhas irmãs Roberta e Mayara por fazerem com que minha vida tenha mais expectativas e alegrias, fazer parte da vida de vocês é um grande privilégio.

À minha sogra Edith por compreender o rápto de sua filha nos fins de semana e pela grande ajuda nos trabalhos caseiros.

Ao meu orientador Dr. Albert M. Fisher pelo aprendizado, pela excelente orientação, pela paciência e por responder meus milhares de e-mails.

À professora Dr. Helena M. Ávila de Castro pelo aprendizado, pelos sábios conselhos e pelo interesse em meus estudos.

A todos os Docentes do IME pelos excelentes cursos.

Aos meus colegas do IME Juliano, Pricila, Graciele, Tatiane, Bruno, Nazar, Gustavo, Braúlio, Valentin, Arlane, Tiago, Djalma, Humberto, Débora, André, Robson, Estela por me ajudarem, quando olhava todos sentados dentro de uma sala todos os dias e o dia todo, a maioria mais novo que eu, ficava mais forte . Em especial ao Josnei, esse é o mais maluco de todos, não sei o que seria sem ele.

Aos meus amigos Ronaldo, Vânia, Marcio, Cayo, Pixuxa, Tatiana, Fabiola, Rosalba, Marcelo, Elaine por não esquecerem de mim mesmo depois de grandes periodos de ausência.

Ao meu violão por me ajudar a sair de momentos de estresse.

Ao telefone por não tocar muito, aos meus vizinhos por não fazerem festas por dois dias consecutivos, ao meu carro por não quebrar muito, ao meu chuveiro por deixar meu banhoquentinho, tudo isto contribuiu para que meu trabalho fluisse melhor.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para realização deste trabalho meu muito obrigado.

Resumo

Introduzimos a noção de uma família Anosov, uma generalização de uma aplicação Anosov de uma variedade. Isto é uma sequência de difeomorfismos ao longo de variedades Riemannianas compactas tal que o fibrado tangente se decompõe em subespaços expansores e contratores. Desenvolvemos a teoria geral estudando sequência de aplicações a menos de isomorfismos e com respeito a uma relação de equivalência gerada por duas operações naturais: agrupamento e dispersão. Então nos concentramos em famílias lineares de Anosov no 2-toro. Estudamos com detalhes uma classe básica de exemplos, as famílias multiplicativas, e uma dispersão canônica, as famílias aditivas. Um processo de renormalização constrói uma sequência de partições de Markov que consiste de dois retângulos para uma determinada família aditiva. Isto codifica a família pelo subshift não estacionário do tipo finito determinado pela mesma sequência de matrizes. Qualquer família linear positiva de Anosov no toro tem uma dispersão que é uma família aditiva. A codificação aditiva possibilita um modelo combinatorial para a família linear, por telescopar o diagrama aditivo de Bratteli. O resultante espaço combinatorial é então determinado pela mesma sequência de matrizes não negativas, como um “edge-shift” não estacionário. Em tal espaço combinatorial definimos a transformação ádica. Provamos que para um subshift não estacionário do tipo finito, mixing topológico implica minimalidade de qualquer transformação ádica definida no espaço edge, e mostramos que se uma família de aplicações tem a condição autovetor de Perron-Frobenius então temos unicidade ergódica para a transformação ádica relacionada. Mostramos a equivalência entre a medida central de Parry, que é uma medida invariante para as ádicas, e a medida de Lebesgue. Para os modelos ádicos de rotação irracional no círculo, mostramos a relação com a renormalização dos retângulos para a família multiplicativa.

Palavras-chave: Famílias Anosov; subshift não estacionário do tipo finito; modelos ádicos de rotação irracional; medida central de Parry.

Abstract

We introduce the notion of an Anosov family, a generalization of an Anosov map of a manifold. This is a sequence of diffeomorphisms along compact Riemannian manifolds such that the tangent bundles split into expanding and contracting subspaces. We develop the general theory, studying sequences of maps up to a notion of isomorphism and with respect to an equivalence relation generated by two natural operations, gathering and dispersal. Then we concentrate on linear Anosov families on the 2-torus. We study in detail a basic class of examples, the multiplicative families, and a canonical dispersal of these, the additive families. A renormalization procedure constructs a sequence of Markov partitions consisting of two rectangles for a given additive family. This codes the family by the non-stationary subshift of finite type determined by exactly the same sequence of matrices. Any linear positive Anosov family on the torus has a dispersal which is an additive family. The additive coding yields a combinatorial model for the linear family, by telescoping the additive Bratteli diagram. The resulting combinatorial space is then determined by the same sequence of non-negative matrices, as a non-stationary edge shift. On such combinatorial space we define the adic transformation. We prove that for a nonstationary subshift of finite type, topological mixing implies the minimality of any adic transformation defined on the edge space, and show that if a mapping families has the eigenvector Perron-Frobenius condition, then the adic transformation is uniquely ergodic. We show the equivalence between central Parry measure (invariant for the adics) and Lebesgue measure. For the example of Adics models of irrational circle rotations, we show the relationship with the renormalization of the rectangles for the multiplicative families.

Keywords: Anosov families; nonstationary subshift of finite type; adic models of irrational rotation; central Parry measure.

Sumário

Introdução	2
1 Família Anosov	10
1.1 Aplicação de Anosov no toro quadrado	10
1.2 Família Anosov como Família de Aplicações	12
1.3 Hiperbolicidade	17
1.4 Dinâmica Simbólica das Famílias de Aplicações	24
1.4.1 Sequência de Partições	24
1.4.2 Partições de Markov	26
1.4.3 Subshift não estacionário	29
1.4.4 Dinâmica Simbólica para as famílias Anosov	34
1.5 Vertex-shift e Edge-shift não estacionário e o Diagrama de Bratteli . . .	36
2 Transformações Ádicas	40
2.1 O grupo de mudança finita de coordenadas	40
2.2 Diagrama ordenado de Bratteli	41
2.3 Transformações Ádicas	42
2.3.1 Minimalidade e unicidade ergódica	47
2.3.2 Mixing topológico implica minimalidade	49
2.3.3 Cadeia de Markov	50
2.3.4 Medida central de Parry	55
2.3.5 Transformações ádicas em edge-shift	61
2.3.6 Condição autovetor de Perron-Frobenius implica unicidade ergódica	66

<i>SUMÁRIO</i>	xiii
3 Família Multiplicativa	71
3.1 Sequências aditivas e rotulações canônicas	71
3.2 Família multiplicativa	74
3.3 Renormalização de caixas e construção da partição de Markov	81
3.3.1 Produzindo uma partição geradora: o método de Adler-Weiss	86
3.4 Uma extensão dos teoremas de Adler e Manning para famílias de aplicações.	88
3.4.1 Famílias aditivas e lineares	90
3.4.2 Partição de Markov e dinâmica simbólica para a família aditiva.	91
3.4.3 Gathering, componentes conexas e dinâmica simbólica.	93
4 Exemplos de Transformações Ádicas	102
4.1 Odômetro estacionário e não estacionário.	102
4.2 Ádicas induzidas: Máquina aditiva de Markov; ádicas estacionárias.	103
4.3 Modelos ádicos de rotações no círculo: ângulo irracional.	104
Bibliografia	115

CONTENIDO

1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVO	2
3. REVISÃO DE LITERATURA	3
4. METODOLOGIA	4
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	5
6. CONCLUSÃO	6
7. REFERÊNCIAS	7
8. ANEXOS	8
9. GLOSSÁRIO	9
10. ÍNDICE	10
11. APÊNDICES	11
12. BIBLIOGRAFIA	12
13. RESUMO	13
14. ABSTRACT	14
15. RESUMEN	15
16. RESUME	16
17. SUMMARY	17
18. CONCLUSÃO	18
19. REFERÊNCIAS	19
20. ANEXOS	20
21. GLOSSÁRIO	21
22. ÍNDICE	22
23. APÊNDICES	23
24. BIBLIOGRAFIA	24
25. RESUMO	25
26. ABSTRACT	26
27. RESUMEN	27
28. RESUME	28
29. SUMMARY	29
30. CONCLUSÃO	30
31. REFERÊNCIAS	31
32. ANEXOS	32
33. GLOSSÁRIO	33
34. ÍNDICE	34
35. APÊNDICES	35
36. BIBLIOGRAFIA	36
37. RESUMO	37
38. ABSTRACT	38
39. RESUMEN	39
40. RESUME	40
41. SUMMARY	41
42. CONCLUSÃO	42
43. REFERÊNCIAS	43
44. ANEXOS	44
45. GLOSSÁRIO	45
46. ÍNDICE	46
47. APÊNDICES	47
48. BIBLIOGRAFIA	48
49. RESUMO	49
50. ABSTRACT	50
51. RESUMEN	51
52. RESUME	52
53. SUMMARY	53
54. CONCLUSÃO	54
55. REFERÊNCIAS	55
56. ANEXOS	56
57. GLOSSÁRIO	57
58. ÍNDICE	58
59. APÊNDICES	59
60. BIBLIOGRAFIA	60
61. RESUMO	61
62. ABSTRACT	62
63. RESUMEN	63
64. RESUME	64
65. SUMMARY	65
66. CONCLUSÃO	66
67. REFERÊNCIAS	67
68. ANEXOS	68
69. GLOSSÁRIO	69
70. ÍNDICE	70
71. APÊNDICES	71
72. BIBLIOGRAFIA	72
73. RESUMO	73
74. ABSTRACT	74
75. RESUMEN	75
76. RESUME	76
77. SUMMARY	77
78. CONCLUSÃO	78
79. REFERÊNCIAS	79
80. ANEXOS	80
81. GLOSSÁRIO	81
82. ÍNDICE	82
83. APÊNDICES	83
84. BIBLIOGRAFIA	84
85. RESUMO	85
86. ABSTRACT	86
87. RESUMEN	87
88. RESUME	88
89. SUMMARY	89
90. CONCLUSÃO	90
91. REFERÊNCIAS	91
92. ANEXOS	92
93. GLOSSÁRIO	93
94. ÍNDICE	94
95. APÊNDICES	95
96. BIBLIOGRAFIA	96
97. RESUMO	97
98. ABSTRACT	98
99. RESUMEN	99
100. RESUME	100
101. SUMMARY	101
102. CONCLUSÃO	102
103. REFERÊNCIAS	103
104. ANEXOS	104
105. GLOSSÁRIO	105
106. ÍNDICE	106
107. APÊNDICES	107
108. BIBLIOGRAFIA	108
109. RESUMO	109
110. ABSTRACT	110
111. RESUMEN	111
112. RESUME	112
113. SUMMARY	113
114. CONCLUSÃO	114
115. REFERÊNCIAS	115
116. ANEXOS	116
117. GLOSSÁRIO	117
118. ÍNDICE	118
119. APÊNDICES	119
120. BIBLIOGRAFIA	120
121. RESUMO	121
122. ABSTRACT	122
123. RESUMEN	123
124. RESUME	124
125. SUMMARY	125
126. CONCLUSÃO	126
127. REFERÊNCIAS	127
128. ANEXOS	128
129. GLOSSÁRIO	129
130. ÍNDICE	130
131. APÊNDICES	131
132. BIBLIOGRAFIA	132
133. RESUMO	133
134. ABSTRACT	134
135. RESUMEN	135
136. RESUME	136
137. SUMMARY	137
138. CONCLUSÃO	138
139. REFERÊNCIAS	139
140. ANEXOS	140
141. GLOSSÁRIO	141
142. ÍNDICE	142
143. APÊNDICES	143
144. BIBLIOGRAFIA	144
145. RESUMO	145
146. ABSTRACT	146
147. RESUMEN	147
148. RESUME	148
149. SUMMARY	149
150. CONCLUSÃO	150
151. REFERÊNCIAS	151
152. ANEXOS	152
153. GLOSSÁRIO	153
154. ÍNDICE	154
155. APÊNDICES	155
156. BIBLIOGRAFIA	156
157. RESUMO	157
158. ABSTRACT	158
159. RESUMEN	159
160. RESUME	160
161. SUMMARY	161
162. CONCLUSÃO	162
163. REFERÊNCIAS	163
164. ANEXOS	164
165. GLOSSÁRIO	165
166. ÍNDICE	166
167. APÊNDICES	167
168. BIBLIOGRAFIA	168
169. RESUMO	169
170. ABSTRACT	170
171. RESUMEN	171
172. RESUME	172
173. SUMMARY	173
174. CONCLUSÃO	174
175. REFERÊNCIAS	175
176. ANEXOS	176
177. GLOSSÁRIO	177
178. ÍNDICE	178
179. APÊNDICES	179
180. BIBLIOGRAFIA	180
181. RESUMO	181
182. ABSTRACT	182
183. RESUMEN	183
184. RESUME	184
185. SUMMARY	185
186. CONCLUSÃO	186
187. REFERÊNCIAS	187
188. ANEXOS	188
189. GLOSSÁRIO	189
190. ÍNDICE	190
191. APÊNDICES	191
192. BIBLIOGRAFIA	192
193. RESUMO	193
194. ABSTRACT	194
195. RESUMEN	195
196. RESUME	196
197. SUMMARY	197
198. CONCLUSÃO	198
199. REFERÊNCIAS	199
200. ANEXOS	200
201. GLOSSÁRIO	201
202. ÍNDICE	202
203. APÊNDICES	203
204. BIBLIOGRAFIA	204
205. RESUMO	205
206. ABSTRACT	206
207. RESUMEN	207
208. RESUME	208
209. SUMMARY	209
210. CONCLUSÃO	210
211. REFERÊNCIAS	211
212. ANEXOS	212
213. GLOSSÁRIO	213
214. ÍNDICE	214
215. APÊNDICES	215
216. BIBLIOGRAFIA	216
217. RESUMO	217
218. ABSTRACT	218
219. RESUMEN	219
220. RESUME	220
221. SUMMARY	221
222. CONCLUSÃO	222
223. REFERÊNCIAS	223
224. ANEXOS	224
225. GLOSSÁRIO	225
226. ÍNDICE	226
227. APÊNDICES	227
228. BIBLIOGRAFIA	228
229. RESUMO	229
230. ABSTRACT	230
231. RESUMEN	231
232. RESUME	232
233. SUMMARY	233
234. CONCLUSÃO	234
235. REFERÊNCIAS	235
236. ANEXOS	236
237. GLOSSÁRIO	237
238. ÍNDICE	238
239. APÊNDICES	239
240. BIBLIOGRAFIA	240
241. RESUMO	241
242. ABSTRACT	242
243. RESUMEN	243
244. RESUME	244
245. SUMMARY	245
246. CONCLUSÃO	246
247. REFERÊNCIAS	247
248. ANEXOS	248
249. GLOSSÁRIO	249
250. ÍNDICE	250
251. APÊNDICES	251
252. BIBLIOGRAFIA	252
253. RESUMO	253
254. ABSTRACT	254
255. RESUMEN	255
256. RESUME	256
257. SUMMARY	257
258. CONCLUSÃO	258
259. REFERÊNCIAS	259
260. ANEXOS	260
261. GLOSSÁRIO	261
262. ÍNDICE	262
263. APÊNDICES	263
264. BIBLIOGRAFIA	264
265. RESUMO	265
266. ABSTRACT	266
267. RESUMEN	267
268. RESUME	268
269. SUMMARY	269
270. CONCLUSÃO	270
271. REFERÊNCIAS	271
272. ANEXOS	272
273. GLOSSÁRIO	273
274. ÍNDICE	274
275. APÊNDICES	275
276. BIBLIOGRAFIA	276
277. RESUMO	277
278. ABSTRACT	278
279. RESUMEN	279
280. RESUME	280
281. SUMMARY	281
282. CONCLUSÃO	282
283. REFERÊNCIAS	283
284. ANEXOS	284
285. GLOSSÁRIO	285
286. ÍNDICE	286
287. APÊNDICES	287
288. BIBLIOGRAFIA	288
289. RESUMO	289
290. ABSTRACT	290
291. RESUMEN	291
292. RESUME	292
293. SUMMARY	293
294. CONCLUSÃO	294
295. REFERÊNCIAS	295
296. ANEXOS	296
297. GLOSSÁRIO	297
298. ÍNDICE	298
299. APÊNDICES	299
300. BIBLIOGRAFIA	300
301. RESUMO	301
302. ABSTRACT	302
303. RESUMEN	303
304. RESUME	304
305. SUMMARY	305
306. CONCLUSÃO	306
307. REFERÊNCIAS	307
308. ANEXOS	308
309. GLOSSÁRIO	309
310. ÍNDICE	310
311. APÊNDICES	311
312. BIBLIOGRAFIA	312
313. RESUMO	313
314. ABSTRACT	314
315. RESUMEN	315
316. RESUME	316
317. SUMMARY	317
318. CONCLUSÃO	318
319. REFERÊNCIAS	319
320. ANEXOS	320
321. GLOSSÁRIO	321
322. ÍNDICE	322
323. APÊNDICES	323
324. BIBLIOGRAFIA	324
325. RESUMO	325
326. ABSTRACT	326
327. RESUMEN	327
328. RESUME	328
329. SUMMARY	329
330. CONCLUSÃO	330
331. REFERÊNCIAS	331
332. ANEXOS	332
333. GLOSSÁRIO	333
334. ÍNDICE	334
335. APÊNDICES	335
336. BIBLIOGRAFIA	336
337. RESUMO	337
338. ABSTRACT	338
339. RESUMEN	339
340. RESUME	340
341. SUMMARY	341
342. CONCLUSÃO	342
343. REFERÊNCIAS	343
344. ANEXOS	344
345. GLOSSÁRIO	345
346. ÍNDICE	346
347. APÊNDICES	347
348. BIBLIOGRAFIA	348
349. RESUMO	349
350. ABSTRACT	350
351. RESUMEN	351
352. RESUME	352
353. SUMMARY	353
354. CONCLUSÃO	354
355. REFERÊNCIAS	355
356. ANEXOS	356
357. GLOSSÁRIO	357
358. ÍNDICE	358
359. APÊNDICES	359
360. BIBLIOGRAFIA	360
361. RESUMO	361
362. ABSTRACT	362
363. RESUMEN	363
364. RESUME	364
365. SUMMARY	365
366. CONCLUSÃO	366
367. REFERÊNCIAS	367
368. ANEXOS	368
369. GLOSSÁRIO	369
370. ÍNDICE	370
371. APÊNDICES	371
372. BIBLIOGRAFIA	372
373. RESUMO	373
374. ABSTRACT	374
375. RESUMEN	375
376. RESUME	376
377. SUMMARY	377
378. CONCLUSÃO	378
379. REFERÊNCIAS	379
380. ANEXOS	380
381. GLOSSÁRIO	381
382. ÍNDICE	382
383. APÊNDICES	383
384. BIBLIOGRAFIA	384
385. RESUMO	385
386. ABSTRACT	386
387. RESUMEN	387
388. RESUME	388
389. SUMMARY	389
390. CONCLUSÃO	390
391. REFERÊNCIAS	391
392. ANEXOS	392
393. GLOSSÁRIO	393
394. ÍNDICE	394
395. APÊNDICES	395
396. BIBLIOGRAFIA	396
397. RESUMO	397
398. ABSTRACT	398
399. RESUMEN	399
400. RESUME	400
401. SUMMARY	401
402. CONCLUSÃO	402
403. REFERÊNCIAS	403
404. ANEXOS	404
405. GLOSSÁRIO	405
406. ÍNDICE	406
407. APÊNDICES	407
408. BIBLIOGRAFIA	408
409. RESUMO	409
410. ABSTRACT	410
411. RESUMEN	411
412. RESUME	412
413. SUMMARY	413
414. CONCLUSÃO	414
415. REFERÊNCIAS	415
416. ANEXOS	416
417. GLOSSÁRIO	417
418. ÍNDICE	418
419. APÊNDICES	419
420. BIBLIOGRAFIA	420
421. RESUMO	421
422. ABSTRACT	422
423. RESUMEN	423
424. RESUME	424
425. SUMMARY	425
426. CONCLUSÃO	426
427. REFERÊNCIAS	427
428. ANEXOS	428
429. GLOSSÁRIO	429
430. ÍNDICE	430
431. APÊNDICES	431
432. BIBLIOGRAFIA	432
433. RESUMO	433
434. ABSTRACT	434
435. RESUMEN	435
436. RESUME	436
437. SUMMARY	437
438. CONCLUSÃO	438
439. REFERÊNCIAS	439
440. ANEXOS	440
441. GLOSSÁRIO	441
442. ÍNDICE	442
443. APÊNDICES	443
444. BIBLIOGRAFIA	444
445. RESUMO	445
446. ABSTRACT	446
447. RESUMEN	447
448. RESUME	448
449. SUMMARY	449
450. CONCLUSÃO	450
451. REFERÊNCIAS	451
452. ANEXOS	452
453. GLOSSÁRIO	453
454. ÍNDICE	454
455. APÊNDICES	455
456. BIBLIOGRAFIA	456
457. RESUMO	457
458. ABSTRACT	458
459. RESUMEN	459
460. RESUME	460
461. SUMMARY	461
462. CONCLUSÃO	462
463. REFERÊNCIAS	463
464. ANEXOS	464
465. GLOSSÁRIO	465
466. ÍNDICE	466
467. APÊNDICES	467
468. BIBLIOGRAFIA	468
469. RESUMO	469
470. ABSTRACT	470
471. RESUMEN	471
472. RESUME	472
473. SUMMARY	473
474. CONCLUSÃO	474
475. REFERÊNCIAS	475
476. ANEXOS	476
477. GLOSSÁRIO	477
478. ÍNDICE	478
479. APÊNDICES	479
480. BIBLIOGRAFIA	480
481. RESUMO	481
482. ABSTRACT	482
483. RESUMEN	483
484. RESUME	484
485. SUMMARY	485
486. CONCLUSÃO	486
487. REFERÊNCIAS	487
488. ANEXOS	488
489. GLOSSÁRIO	489
490. ÍNDICE	490
491. APÊNDICES	491
492. BIBLIOGRAFIA	492
493. RESUMO	493
494. ABSTRACT	494
495. RESUMEN	495
496. RESUME	496
497. SUMMARY	497
498. CONCLUSÃO	498
499. REFERÊNCIAS	499
500. ANEXOS	500
501. GLOSSÁRIO	501
502. ÍNDICE	502
503. APÊNDICES	503
504. BIBLIOGRAFIA	504
505. RESUMO	505
506. ABSTRACT	506
507. RESUMEN	507
508. RESUME	508
509. SUMMARY	509
510. CONCLUSÃO	510
511. REFERÊNCIAS	511
512. ANEXOS	512
513. GLOSSÁRIO	513
514. ÍNDICE	514
515. APÊNDICES	515
516. BIBLIOGRAFIA	516
517. RESUMO	517
518. ABSTRACT	518
519. RESUMEN	519
520. RESUME	520
521. SUMMARY	521
522. CONCLUSÃO	522
523. REFERÊNCIAS	523
524. ANEXOS	524
525. GLOSSÁRIO	525
526. ÍNDICE	

Introdução

Este trabalho foi baseado principalmente nos artigos [1] e [4]. Neles A. M. Fisher e P. Arnoux desenvolvem a teoria geral para sequência de aplicações Anosov e transformações ádicas. Poré fizemos algumas adaptações, principalmente nas matrizes que fazem a conjugação da *família multiplicativa* com sua versão em autocoordenadas feito em [1]. Isto nos possibilitou acrescentar o teorema 3.4, que faz relação da sequência de partições de Markov para a família multiplicativa com a única medida invariante de probabilidade para a transformação ádica relacionada.

Quando estudamos dinâmica, usualmente consideramos as iteradas de uma única aplicação em um espaço fixo. Aqui, estamos interessados na dinâmica construída por uma sequência de aplicações, ao longo de uma sequência de espaços. Primeiro introduzimos a noção de *família Anosov*:

Definição 0.1. *Uma família de Anosov é uma sequência $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de difeomorfismos ao longo de uma sequência M_i de variedades Riemannianas compactas, com uma sequência invariante de decomposições do fibrado tangente em subespaços expansores e contratores, e com um limite uniforme superior para contração e limite uniforme inferior para expansão. Similarmente, uma família eventualmente Anosov tem uma decomposição invariante, mas agora a contração e a expansão acontece somente depois de certo número (não fixo) de iteradas.*

No capítulo 1, apresentamos alguns resultados gerais de aplicações e famílias Anosov, a fim de fornecer uma linguagem e contexto apropriado. Em seguida, introduzimos a dinâmica simbólica para famílias dando uma sequência de partições. Para o caso de famílias Anosov, temos uma sequência de partições Markov e seus correspondentes

espaços simbólicos dados por uma sequência não estacionária de matrizes com coeficientes $0 - 1$ e representados geometricamente por diagramas bi-laterais de Bratteli.

Para apresentarmos um pouco mais:

No *capítulo 3* introduzimos dois importantes exemplos: a família multiplicativa e a família aditiva; e os relacionamos usando a teoria desenvolvida no capítulo 1 e 2.

Estas duas sequências de aplicações são parte de um largo contexto abstrato, que fornece uma perspectiva mais clara sobre famílias Anosov e eventualmente Anosov. Para descrevermos um conceito geral, introduzimos a noção de **morfismo** que agrupa sequências de aplicações em categorias com respeito a certos tipos de homomorfismos.

Definição 0.2. *Uma família de aplicações é uma sequência de aplicações contínuas ao longo de uma sequência de espaços métricos compactos chamados **componentes**. Uma conjugação uniforme entre duas famílias de aplicações é dado por uma sequência equicontínua de aplicações conjugadas.*

Para uma categoria de famílias de aplicações diferenciáveis, definimos os **morfismos** sendo conjugações limitadas (que tem limites uniformes nas derivadas).

Então conjugações limitadas preservam expansão (a menos de constante).

Definição 0.3. *Tomamos por **agrupamento** de uma família de aplicações uma família que é constituída por composições parciais ao longo de uma subsequencia; uma **dispersão** é o contrário, é uma fatoração.*

Um exemplo básico de dispersão é dado por introdução de cópias extras da aplicação identidade. Para um segundo exemplo, temos que uma **família aditiva** após agrupamento é uma **família multiplicativa** e, reciprocamente, a família aditiva é uma dispersão da família multiplicativa.

Observação 0.1. *Estas duas operações são naturais para famílias de aplicações em geral, mas é preciso ter cuidado: as operações de agrupamento e dispersão não preservam a estrutura dinâmica de conjuntos estáveis e instáveis, veja proposição 1.5. No entanto, como apresentamos no Corolário 1.2 (ver também Observação 1.8), nós temos o seguinte:*

Teorema 0.1. *Dentro de uma categoria de famílias eventualmente Anosov, conjunto estáveis e instáveis são preservados pelas operações de agrupamento e dispersão.*

Uma das principais ferramentas para o estudo das famílias aditivas e multiplicativas é a extensão da noção de partições de Markov para sequência de aplicações. A representação simbólica associada será uma família de aplicações combinatóriamente definida chamada de subshift não estacionário de tempo finito (*sntf*). Este espaço resultante é uma versão bi-lateral do que Vershik e Livshits [24] chamaram de *Markov compactum*.

Começamos fixando uma família de aplicações. Esta tem (assim como para uma única aplicação) uma noção de codificação da dinâmica pelo itinerário de um ponto, mas em vez de estar sendo descrito pela órbita localizada com respeito a uma única partição, esse “nome” do ponto será agora dado por uma sequência de partições ao longo da sequência de espaços.

Nós generalizamos partições de Markov de forma natural, o novo fenômeno é que, nesta configuração, o espaço simbólico está agora definido por uma sequência de matrizes de transição com entradas 0 e 1, substituindo a matriz quadrada que define um subshift de tempo finito (*sft*). Introduzimos a dinâmica shift tomando união de todos compactos definidos pelos shifts da sequência de matrizes de transição. Este espaço é agora uma família de aplicações cujas componentes são simplesmente todos os shifts do Markov compactum original. Este espaço (o compactum juntamente com seus shifts), é um shift não estacionário de tempo finito (*sntf*).

Isto dá uma segunda família, a família de aplicações combinatorial que, assim como para o caso de uma única aplicação, fatora-se sobre a família original munido de uma partição geradora (ver proposição 1.14).

Para nosso principal exemplo, as famílias aditiva e multiplicativa, construímos explicitamente as partições de Markov. Para fazer isto, primeiro definimos uma sequência de pares de paralelogramos (caixas) dados por um procedimento algorítmico relacionado com as frações contínuas. Para a família aditiva, as coisas são mais simples:

Teorema 0.2. *Dada uma família aditiva não trivial, os pares de caixas dão uma sequência geradora de partições de Markov.*

Para as famílias multiplicativas, a partição *duas-caixas* é Markov porém não gera, mas:

Teorema 0.3. *Dada uma família multiplicativa, a sequência de partições definida pelas componentes conexas da junção de cada partição duas-caixas com o pullback da partição seguinte dá uma sequência de partições de Markov que gera.*

Ver proposição 3.4 e lema 3.4.

Teorema 0.4. *As partições componente conexa (geradora) de uma família multiplicativa são, alternativamente, dadas pelo gathering da sequência de partições duas-caixas da família aditiva correspondente.*

A seguir descreveremos o *sntf* definido pela sequência de partições de Markov. Primeiro, para uma família aditiva não trivial (teorema 3.2) temos o seguinte:

Teorema 0.5. *A família de aplicações é simbólicamente representada pelo *sntf* dado pela mesma sequência de matrizes 0–1, agora interpretadas como matrizes de transição.*

Ver lema 3.4.

A versão simbólica do gathering corresponde ao que é conhecido na teoria de diagramas de Bratteli como *telescópio* do diagrama. A teoria geral desenvolvida na seção 1.5 nos permite estender o resultado anterior para famílias multiplicativas, e também para família de aplicações definida por uma sequência de matrizes (2×2) em $SL(2, \mathbb{N})$, o semigrupo de matrizes com determinante 1 e com entradas inteiras não negativas.

A conclusão (teoremas 3.1 e 3.3) é a seguinte:

Teorema 0.6. *Dada uma família de aplicações definida por uma sequência não trivial de matrizes em $SL(2, \mathbb{N})$ agindo no 2-toro, então:*

- (i) *esta família é Anosov; e*
- (ii) *ela tem uma sequência geradora de partições de Markov que codifica a família como um *sntf* definido como um edge-shift pela mesma sequência de matrizes.*

No capítulo 2 definimos uma transformação que aplica o espaço combinatorial resultante, restrito ao caso unilateral, nele próprio. Esta transformação é uma generalização do odometro (ou máquina aditiva) de Von Neumann e Kakutani (exemplos expostos no capítulo 4). A flexibilidade e naturalidade da construção de Vershik é ilustrada pela grande variedade de sistemas dinâmicos que podem ser usados como modelo, entre eles a construção “cutting and stacking” em teoria ergódica, sistemas dinâmicos das substituições e transformações de trocas de intervalos.

Para o caso estacionário, o espaço para a transformação ádica T é um shift do tipo finito \sum_L^+ para alguma matriz L ($l \times l$) de entradas 0–1. A transformação ádica, neste caso, dá uma dinâmica transversal para a aplicação shift σ .

No entanto, o caso geral transformações ádicas é não estacionário. Substituímos a matriz L por uma sequência de matrizes $(L_i)_{i \geq 0}$; não existe nenhum problema em definir o espaço $\sum_{(L)}^{0,+}$, mas para termos uma aplicação shift, precisamos das outras componentes $\sum_{(L)}^{k,+}$, $k \geq 0$.

Neste contexto, vamos no sentido de descrever resultados gerais para as transformações ádicas. Atribuímos alfabetos \mathcal{A}_i para $i \geq 0$, com $\#\mathcal{A}_i = l_i$ e $(F_i)_{i \geq 0}$ uma sequência de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ com entradas inteiras não negativas (≥ 0), isto determina o diagrama de Bratteli com o número de arestas de um vértice em \mathcal{A}_i no nível i para um vértice em \mathcal{A}_{i+1} no nível $(i+1)$ dado pela correspondente entrada da matriz. Assumimos que as matrizes são reduzidas, isto é, nenhuma linha nem coluna identicamente nulas, e escrevemos $\sum_{(F)}^{0,+}$ para o conjunto de todos os caminhos unilaterais infinitos deste diagrama.

Para definir uma transformação ádica, precisamos acrescentar mais uma coisa a esta estrutura, uma *ordem estável* \mathcal{O} no diagrama de Bratteli no nível 0 para a sequência de matrizes (e conseqüentemente em níveis maiores também); se as arestas estão orientadas para a direita no diagrama (a direção *futuro* do *sntf*), esta ordem lineariza o conjunto de arestas que entram em cada vértice dado. A ordem \mathcal{O} então se estende-se naturalmente para uma ordem linear, dada pela ordem lexicográfica, em cada conjunto estável $W^s(x)$, que é o conjunto de todos strings de arestas que concordam com x após

alguma coordenada do $sntf(\sum_{(L)}^+, \sigma)$. Visto que qualquer y em $W^s(x)$ necessariamente está na mesma componente que x , a aplicação definida por levar um string ao seu sucessor agirá em cada componente $\sum_{(L)}^{k,+}$ de $\sum_{(L)}^+$ separadamente. A transformação ádica determinada por \mathcal{O} na k -ésima componente, $T_{\mathcal{O}} : \sum_{(L)}^{k,+} \setminus \mathcal{NS} \rightarrow \sum_{(L)}^{k,+} \setminus \mathcal{NP}$, é a restrição desta aplicação sucessor, onde \mathcal{NS} é a coleção de pontos que não tem sucessor e \mathcal{NP} são os pontos sem antecessor.

Estudamos sequências de medidas invariantes nas famílias de aplicações. Apresentamos que mixing topológico implica minimalidade das transformações ádicas, e se a sequência primitiva de matrizes tem a condição autovetor de Perron-Frobenius então a transformação ádica correspondente será unicamente ergódica.

Em particular, como a família multiplicativa tem uma única sequência de autovetores ao longo das suas componentes, garantido pela proposição 1.7. Assim temos unicidade ergódica para a transformação ádica definida pela mesma sequência de matrizes e ordem lexicográfica.

A construção desta medida invariante é iniciada na seção 2.3.4, a medida central de Parry. Lembremos que, para o caso estacionário, a medida de entropia máxima de um subshift do tipo finito tem uma fórmula simples descoberta por Shannon no contexto de teoria da informação, envolvendo autovetores de Perron-Frobenius a direita e a esquerda da matriz. Seguimos o uso padrão para chamá-la de medida de Parry. Para estender para o caso não estacionário, começamos com esta fórmula ao invés de nos preocuparmos de como definir entropia para sequência de aplicações; simplesmente substituímos autovetores por sequência de autovetores e definimos uma cadeia de Markov não estacionária que nos dá um análogo da medida de Parry. Isto também nos dá uma sequência de medidas nas componentes, invariantes no sentido de que uma está sendo levada para a próxima pela aplicação shift.

No final do capítulo 3 (teorema 3.4) apresentamos que a medida central de Parry aplicada aos cilindros do espaço shift gerado pela mesma sequência de matrizes que define a família multiplicativa (e aditiva por dispersão), coincide com a medida de Lebesgue dos intervalos correspondentes as bases das caixas na partição duas caixas

durante o processo de renormalização descrito na proposição 3.3. Isto foi feito passo a passo, porém este teorema não está incluído explicitamente nos artigos [1] e [4]. Além disso, incluímos alguns detalhes de como apresentar que o exemplo das transformações ádicas definidas pela substituição Dual e uma sequência não trivial de matrizes (no sentido de que a paridade muda infinitas vezes) fatora-se como rotações irracionais no círculo, isto tem uma relação direta com a dinâmica da família multiplicativa.

Também modificamos em [1] as matrizes que conjugam a família multiplicativa com a sua versão em autocoordenadas, alterando as aplicações da família para aplicarem em vetores linha, onde em [1] a família aplica em vetores coluna na direção futuro (para a direita). Fizemos isto para melhor adaptação à teoria das transformações ádicas descrita em [4]; pois neste, a teoria geral é desenvolvida considerando aplicações em vetores linha para a direita (ao longo da família) e em vetores colunas para a esquerda de forma que a composição das aplicações seja dado pelo produto das matrizes, sem inverter ordem (ver diagrama na página 50).

Fazendo isto, conseguimos a relação $D_i B_i A_i = B_{i+1}$, com (A_i) são as matrizes que induzem as aplicações da família multiplicativa, (D_i) são matrizes diagonais e $B_i = \begin{bmatrix} b_i & -a_i \\ d_i & c_i \end{bmatrix}$, onde as linhas de B_i dá a sequência de autovetores para a família multiplicativa (ver proposição 3.1).

No entanto, também tivemos que considerar a família aplicando em vetores coluna, isto porque gostaríamos de aplicar a medida central de Parry para a transformação ádica relacionada (teorema 3.4) e esta medida é definida a partir da sequência de autovetores coluna de entradas positivas da família (ver equação (2.6) na página 60). Escrevendo esta mesma conjugação da família multiplicativa com a versão em autocoordenadas, agora aplicando em vetores coluna, temos $B_i A_i B_{i+1}^{-1} = D_i^{-1}$. Perceba que agora a segunda coluna das matrizes (B_{i+1}^{-1}) que faz a conjugação dá uma sequência de autovetores com entradas positivas para a família. Ao percebermos isto, o teorema 3.4 fica iminente.

Agradeço a A. M. Fisher e a P. Arnoux pelas figuras 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 2.1,

2.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 4.1 e 4.2 cedidas, também pelas demonstrações da maioria das afirmações escritas neste trabalho. Agradeço também as idéias de A. M. Fisher para concluir o trabalho, tentei expô-las da melhor forma possível.

Capítulo 1

Família Anosov

Neste capítulo iremos definir *família Anosov* e alguns resultados gerais, será discutido também como podemos obter a dinâmica combinatória.

1.1 Aplicação de Anosov no toro quadrado

As *aplicações Anosov* também conhecidas como automorfismos hiperbólicos no toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, embora sejam induzidas por aplicações lineares no espaço Euclidiano, o que resulta numa dinâmica extremamente simples, quando aplicadas ao toro geram uma estrutura dinâmica extremamente rica.

Denotando por $\{(\alpha, \beta)\}$ o conjunto de pontos no plano que são equivalentes a $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, isto é, se $(x, y) \in \{(\alpha, \beta)\}$ então $(x, y) \sim (\alpha, \beta)$ no sentido que $x - \alpha$ e $y - \beta$ são inteiros e $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Consideremos também π sendo a projeção natural de \mathbb{R}^2 em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, isto é,

$$\pi(x, y) = [x, y] = \pi(x + M, y + N), \text{ onde } (M, N) \in \mathbb{Z}^2.$$

Certamente sistemas dinâmicos no toro podem ser mais eficientemente descritos no plano e depois projetados no toro.

Definição 1.1. *Suponha $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - F \begin{bmatrix} x + M \\ y + N \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, para qualquer (x, y) no plano e M, N inteiros fixos. Disto segue que $\pi \circ F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pi \circ F \begin{bmatrix} x + M \\ y + N \end{bmatrix}$*

de modo que F induz uma aplicação \widehat{F} definida pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\widehat{F}} & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \end{array}$$

Por exemplo, se F for uma aplicação linear cuja matriz que a representa é inteira (isto é, com entradas em \mathbb{Z}), então \widehat{F} está bem definida em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. \widehat{F} é um homomorfismo do toro. Se F^{-1} também tem matriz com entradas inteiras, então chamamos \widehat{F} de **automorfismo no toro**.

Definição 1.2. Seja $F(x) = Ax$, onde A é uma matriz (2×2) satisfazendo:

- (i) Todas entradas de A são inteiras;
- (ii) $\det A = \pm 1$;
- (iii) A é hiperbólico, isto é, $|\lambda| \neq 1, \forall \lambda$ autovetor de A .

A aplicação F_A , induzida por A em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, é denominada **aplicação Anosov**.

F_A é claramente diferenciável, pois sua matriz Jacobiana é simplesmente a matriz A . Mais ainda, como $\det A = \pm 1$, a inversa de A é também uma matriz inteira. Então A^{-1} também induz uma aplicação Anosov que é a aplicação inversa de F_A . Disto segue que F_A é um difeomorfismo em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

A proposição a seguir mostra que F_A é dinamicamente interessante no toro.

Proposição 1.1. O conjunto dos pontos periódicos $Per(F_A)$ de F_A é denso em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Demonstração. A idéia feita em [6] é a seguinte: Seja $p \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ com coordenadas racionais. Após encontrar um denominador comum, podemos assumir que p é da forma $[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}]$, onde α, β e k são inteiros. Pontos desta forma são claramente densos em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, visto que podemos tomar k arbitrariamente grande. Afirmamos que p é periódico com período menor ou igual a k^2 .

Para ver isto, notemos que existem exatamente k^2 pontos em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ da forma $[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}]$ com $0 \leq \alpha, \beta \leq k$. Como as imagens de tais pontos por F_A também podem ser escritos

desta forma, já que as entradas de A são inteiras, isto significa que F_A permuta estes pontos, logo existem inteiros i e j tais que $F_A^i(p) = F_A^j(p)$ com $|i - j| \leq k^2$. Aplicando F_A^{-i} a equação, temos que p é periódico de período menor ou igual a k^2 . \square

Como A é hiperbólica com $\det A = \pm 1$, os autovalores são, ambos, números reais e, enquanto um deles satisfaz $|\lambda_s| < 1$, temos o outro $|\lambda_u| > 1$ (note que esta última afirmação não seria verdadeira se os autovetores fossem complexos, já que teríamos um autovalor conjugado do outro, portanto teriam o mesmo valor em módulo).

No presente trabalho, estaremos mais interessados em uma sequência de aplicações Anosov no toro, onde não temos pontos periódicos, mas também podemos encontrar hiperbolicidade. A seguir daremos a definição de uma *família de aplicações*.

1.2 Família Anosov como Família de Aplicações

Definição 1.3. *Seja $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de espaços métricos com métricas ρ_i . Atribuímos ao espaço total a métrica $\rho(x, w) = \rho_i(x, w)$ se $x, w \in M_i$, é igual a 1 se x, w estão em espaços diferentes. Assumimos que $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ são funções contínuas. Definimos a aplicação $f : M \rightarrow M$ tal que $f(x) = f_i(x)$ se $x \in M_i$. A n -ésima composição f^n aplica M_i a M_{i+n} e é igual a $f_{i+n} \circ \dots \circ f_i$ em M_i para cada i . Chamamos o par resultante (M, f) uma **família de aplicações**, onde $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Dizemos que (M, f) é **inversível** se todas as aplicações forem homeomorfismos.*

Por simplicidade, assumimos que o diâmetro de cada espaço é menor ou igual a 2, isto assegura a igualdade triangular.

Para descrever um conceito geral, nós consideraremos sequências de aplicações como uma categoria com respeito a certos tipo de homomorfismos, esta será nossa noção de morfismo que agrupa todas as famílias de aplicações de uma categoria. Por exemplo:

Definição 1.4. *Para a categoria de **família de aplicações diferenciáveis** (famílias de aplicações - C^1 ao longo de uma sequência de variedades compactas com métricas Riemannianas) definimos as conjugações limitadas como sendo os morfismos (tendo*

limites uniformes nas derivadas).

Vamos discutir um pouco sobre seqüências de aplicações em algumas categorias, considerando conjugações diferenciáveis limitadas, topológicas e uniformes como fornecedores dos morfismos e introduzindo duas operações: *agrupamento* e *dispersão*.

A principal conclusão é que para famílias, os espaços terão uma estrutura uniforme, com os morfismos preservando esta uniformidade. Para simplificar nós trabalhamos nas categorias de espaços métricos com aplicações uniformemente contínuas. Na verdade agrupamento e dispersão não são operações bem definidas no geral, mas faz sentido na presença de hiperbolicidade.

Dada uma seqüência de conjuntos $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ para $i \in \mathbb{Z}$, a união disjunta escrita como $M = \coprod M_i$ é o coproduto na categoria de conjuntos, veja por exemplo [15]. Recordamos que isto é simplesmente a união indexada, isto é, um ponto em M é um ponto p_i em algum M_i . Por conveniência, ocultaremos este índice e escreveremos p para este ponto; então, qualquer $p \in M$ pertence a exatamente um M_i . Referimo-nos aos M_i como **componentes** de M .

Observação 1.1. *Se as componentes forem espaços topológicos, atribuímos a M uma topologia unindo esses espaços discretamente. Com isso queremos dizer que a topologia é gerada pela união de todas as topologias, de modo particular cada M_i é aberto e fechado em M (uma componente M_i pode ter mais que uma componente topológica, um exemplo é dado pelo espaço shift não-estacionário, visto mais adiante).*

Um exemplo simples de família de aplicações é quando todas as aplicações e espaços são idênticos.

Definição 1.5. *Dado um homeomorfismo f_a de um espaço métrico M_a , definimos a **família constante** (M, f) associada a f_a como sendo a seguinte família de aplicações: $M = \coprod M_i$ onde cada M_i é igual a M_a (com a mesma métrica); $F_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ é igual a f_a módulo esta identificação.*

Dizemos que a *família de aplicações* (M, f) é um *levantamento* do sistema dinâmico (M_a, f_a) . Este é um exemplo simples de uma família de aplicações; um caso particu-

larmente trivial é a *família identidade* (M, id) , isto é, a *família de aplicações constante* que é um levantamento da aplicação identidade em M . A seguir examinaremos qual deve ser o morfismo para esta coleção de objetos, a fim de incluí-lo em uma categoria. Começamos analisando a seguinte situação:

Definição 1.6. *Dadas duas famílias de aplicações (M, f) e (N, g) , com métricas d e ρ , uma **conjugação topológica** é um homeomorfismo h de M para N que conjugua f e g , isto é, tal que $h \circ f = g \circ h$; se h é uma aplicação contínua e sobrejetora mas não um homeomorfismo, dizemos que isto é uma **semi-conjugação topológica**.*

O problema com essa definição é que a categoria torna-se trivial, a menos de isomorfismos.

Proposição 1.2. *Qualquer família de aplicações inversível (M, f) é topologicamente conjugada à família identidade na componente M_0 .*

Demonstração. Seja (M_0, g) a família identidade. Definimos $h : M \rightarrow N$ por $h_0 = Id$ a identidade; para $n > 0$, $h_n = (f_{n-1} \circ \dots \circ f_0)^{-1}$; e para $n < 0$, $h_n = f_{-1} \circ \dots \circ f_n$; verificamos que h conjugua (M, f) e (N, g) . \square

Assim, até mesmo o levantamento de uma única aplicação é trivial a menos de conjugação topológica. Nossa escolha de morfismos será a seguinte, que funcionará melhor.

Definição 1.7. *Uma (semi)conjugação uniforme é uma (semi)conjugação que também é uniformemente contínua (no espaço todo) e sobrejetora; equivalentemente, a sequência $h = (h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de aplicações que faz esta conjugação é uniformemente equicontinua em M_i .*

Definição 1.8. *Seja M um espaço métrico e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo. O conjunto estável $W^s(x)$ para $x \in M$ é o conjunto $\{y \in M : \text{dist}(f^n x, f^n y) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$. O conjunto instável $W^u(x)$ é o conjunto estável de f^{-1} .*

Dada uma família (M, f) , aplicamos a definição acima para a aplicação f e temos:

Proposição 1.3. *Conjuntos estáveis e instáveis são preservados por semiconjugação uniforme; se h é uma conjugação de (M, f) para (N, g) , então para todo $x \in M$, $h(W^s(x)) \subseteq W^s(h(x))$ e $h(W^u(x)) \subseteq W^u(h(x))$. Além disto, se h é uma conjugação uniforme então $h(W^s(x)) = W^s(h(x))$ e $h(W^u(x)) = W^u(h(x))$.*

Demonstração. Imediata da equicontinuidade. \square

Corolário 1.1. *Conjuntos estáveis e instáveis são noções bem definidas na categoria de família de aplicações.*

Observação 1.2. *Da definição anterior, o conjunto instável na k -ésima componente depende somente do passado da sequência de aplicações, isto é, depende de f_i para $i < k$, enquanto o conjunto estável depende somente do futuro $i \geq k$; ver proposição 1.9.*

Definição 1.9. *Dada uma família de aplicações (M, f) , uma segunda família $(\widetilde{M}, \widetilde{f})$ é um agrupamento (agrupamento) de (M, f) se existir uma subsequência $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de inteiros estritamente crescente tal que $\widetilde{M}_i = M_{n_i}$ e $\widetilde{f}_i = f_{n_{i+1}-1} \circ \cdots \circ f_{n_i+1}$.*

Se a família $(\widetilde{M}, \widetilde{f})$ é um gathering de (M, f) , dizemos que (M, f) é uma dispersão de $(\widetilde{M}, \widetilde{f})$. Ou seja, dispersão é o processo contrário do gathering.

Definição 1.10. *Seja uma família de aplicações (M, f) . A família “shifted” (N, g) é tal que $g_i = f_{i+1}$ e $N_i = M_{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.*

Proposição 1.4. *A família “shifted” (N, g) é um gathering de (M, f) ; ela é conjugada uniformemente a (M, f) via a conjugação $h = f$ se e somente se a família $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é equicontinua.*

Demonstração. Para ambas afirmações a prova é imediata da definição. Uma segunda prova pode ser entendida pelo seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_0 & \xrightarrow{f_0} & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 \\
 \cdots \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \cdots \\
 M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4
 \end{array}$$

□

Observação 1.3. *Agora vamos discutir um problema que pode começar a usar essa idéia. Um primeiro problema é que a noção de conjuntos estáveis, o que parece ser fundamental para o estudo de família de aplicações, não é preservada através do gathering, o conjunto estável de um ponto na família “gathered” (após gathering) contém o da família original, mas pode ter aumentado estritamente.*

Um problema relacionado é mostrado fortemente na proposição seguinte. Aqui vemos que, em uma categoria de famílias de aplicações, a relação de equivalência gerada pelas operações de agrupamento e dispersão é trivial onde há apenas uma classe de equivalência. A situação pode, portanto, parecer impossível, mas, como veremos adiante, essa dificuldade será resolvida quando nós introduzimos hiperbolicidade. Na verdade, dentro das famílias Anosov o gathering é bem comportado na medida em que preserva conjuntos estáveis, veja Corolário 1.2.

Proposição 1.5. *Toda família de aplicações inversível (M, f) tem uma dispersão, que tem um gathering, que é igual à família identidade (M_0, id) .*

Demonstração. Este é um corolário da proposição 1.2; de fato, seja $\{h_i\}$ a família de aplicações que conjuga f com a família identidade; então, para $g_i = Id$ (a identidade), mas $g_i = h_{i+1} \circ f_i \circ h_i^{-1}$. A dispersão é a sequência de aplicações..., $h_0^{-1}, f_0, h_1, h_1^{-1}, f_1, h_2, h_2^{-1}, \dots$; associando isto com $(h_1 \circ f_0 \circ h_0^{-1})$ dá o gathering igual a g_i . □

Vimos acima o exemplo mais simples, a família constante, onde a métrica não muda. Mas, em geral, a dinâmica de uma família de aplicações é determinada pela interação de uma sequência de aplicações, e de métricas, ambas podem ser “variáveis”. Uma família pode ser simplesmente de um ou de outro tipo, assim, no caso em que os espaços são todos isométricos, toda a dinâmica é realizada pelas aplicações, e a situação oposta, onde cada aplicação é a identidade, toda a mudança é feita pelas métricas.

1.3 Hiperbolicidade

Agora vamos mudar para a categoria diferenciável, onde nosso primeiro interesse é uma generalização natural de difeomorfismos de Anosov.

Definição 1.11. *Uma família Anosov é uma família de aplicações (M, f) tal que:*

- (i) $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de variedades Riemanniana (isto é, variedades compactas - C^∞ com métrica Riemanniana) e as aplicações $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ são difeomorfismos de classe C^1 ;
- (ii) o fibrado tangente TM tem uma decomposição contínua $E^s \oplus E^u$ que é f -invariante; e
- (iii) existem constantes $\lambda > 1$ e $c > 0$ tal que para cada $n \geq 1$, para cada i , para todo $p \in M_i$ tem-se:

$$\| D(f_i^{-n})(v) \| \leq c^{-1} \lambda^{-n} \| v \|$$

para todo vetor $v \in E_p^u$, e

$$\| D(f_i^n)(v) \| \leq c^{-1} \lambda^{-n} \| v \|$$

para todo $v \in E_p^s$.

(Aqui $E_p = E_p^s \oplus E_p^u$ é o espaço tangente em p .)

Se pudermos tomar $c = 1$ dizemos que a família é **estritamente Anosov**.

Observação 1.4. *Uma diferença interessante entre uma família de aplicações e uma única aplicação é que para um família há sempre muitas decomposições invariantes contínuas, enquanto que por exemplo, para uma aplicação Anosov há essencialmente uma, isto por causa da densidade dos pontos periódicos como mostrado na proposição 1.1. No entanto, para famílias de aplicações, existe uma única decomposição hiperbólica: ver proposição 1.7 e observação 1.7.*

Lema 1.1. *Seja A uma aplicação linear inversível entre espaços com produto interno. Sejam c_1, c_2 os raios mínimo e máximo do elipsóide que é a imagem da bola unitária, de modo que $c_1 = \inf \left\{ \frac{\|Av\|}{\|v\|} \right\}$ e $c_2 = \sup \left\{ \frac{\|Av\|}{\|v\|} \right\}$. Então $c_2 = \|A\|$ e $c_1^{-1} = \|A^{-1}\|$.*

Definição 1.12. *A família inversa de uma família de aplicações inversível (M, f) é uma família de aplicações (N, g) com $N_i = M_{-i}$ e $g_i = (f_{-i-1})^{-1}$.*

Observação 1.5. *Esta não é uma composição inversa já que não há noção de composição das famílias, mas sim o inverso da família que é a família composta por aplicações inversas. Há, no entanto, uma dualidade, já que a família inversa da família inversa é a família original.*

Definição 1.13. *Dada uma família (M_i, f_i) de difeomorfismos em variedades Riemannianas (não necessariamente compactas), suponha que exista um conjunto invariante $\Lambda = (\Lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ para a aplicação total f em $M = \coprod M_i$, tal que TM_Λ tem uma decomposição invariante, e tal que existam, como citado anteriormente, constantes $\lambda > 1$ e $c > 0$ para todo $p \in M$. Então chamamos (M, f, Λ) de família hiperbólica.*

Observação 1.6. *Por definição, toda família Anosov é uma família hiperbólica, com $\Lambda = M$ e cada M_i é compacto.*

Exemplo 1. Um simples exemplo é a família constante (M, f) definida como o levantamento de uma aplicação Anosov f_a de uma variedade Riemanniana M_a onde todas as variedades M_i e as aplicações f_i são idênticas, cópias de M_a e f_a .

Exemplo 2. Exemplos de família Anosov não estacionária são construídas da seguinte maneira; seja $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de naturais ≥ 1 , e seja, para cada i , $M_i = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ com a métrica Riemanniana induzida do plano. Defina $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ tal que $f_i : [x \ y] \mapsto [x \ y]A_i$, onde:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n_i & 1 \end{bmatrix} \text{ para } i \text{ par,}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & n_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } i \text{ impar.}$$

Então (M, f) é uma família Anosov (ver capítulo 3). Chamamos esta particular família de aplicações de *família Multiplicativa* determinada pela sequência n_i . No capítulo 3 encontramos explicitamente os autoespaços E_i^s e E_i^u , e a sequência de autovalores.

Definição 1.14. *Uma família de aplicações é eventualmente Anosov se existir uma decomposição f -invariante, como antes, mas agora com sequências λ_i^u, λ_i^s para todo $i \in \mathbb{Z}$ definidas por*

$$\begin{aligned} \lambda_i^u &\equiv \inf\{\|D(f_i)(v)\|/\|v\| \text{ tal que } v \in E^u\}, \\ \lambda_i^s &\equiv \sup\{\|D(f_i)(v)\|/\|v\| \text{ tal que } v \in E^s\}, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, pelo lema 1.1:

$$1/\lambda_i^u = \|(D(f_i)^u)^{-1}\|, \quad \lambda_i^s = \|D(f_i)^s\|,$$

onde $D(f_i)^u, D(f_i)^s$ denota as aplicações lineares restritas a estes subespaços, com estas sequências satisfazendo, para algum (consequentemente, para todo) $k \in \mathbb{Z}$,

$$\prod_k^{k+n} \lambda_i^u \rightarrow +\infty \quad e \quad \prod_{k-n}^k (\lambda_i^u)^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty, \quad (1.1)$$

e

$$\prod_k^{k+n} \lambda_i^s \rightarrow 0 \quad e \quad \prod_{k-n}^k (\lambda_i^s)^{-1} \rightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Esta condição diz que cada vetor em E^u será eventualmente expandido em $+\infty$ e eventualmente contraído em $-\infty$. Notemos que a família inversa de uma família eventualmente Anosov é eventualmente Anosov.

Proposição 1.6. *Uma família Anosov é eventualmente Anosov. Uma família eventualmente Anosov tem um gathering que é estritamente Anosov.*

Exemplo 3. Dada uma sequência $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de inteiros positivos. Fixamos M_k (para cada k) sendo o toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ com a métrica induzida de \mathbb{R}^2 . Definimos $f_k : M_k \rightarrow M_{k+1}$ para ser a aplicação dada pela matriz A_k agindo em vetores linha, com:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

para k satisfazendo $n_i \leq k \leq n_{i+1} - 1$ se i é par,

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para k como anteriormente para i é ímpar.

Chamamos este exemplo de *família Aditiva* determinada pela sequência $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ por sua conexão com a noção de *fração continua aditiva*: expressando n_k como soma de 1's como feito aqui.

Assim (M, f) é uma família eventualmente Anosov, já que uma subsequência de seus produtos parciais é exatamente como a família do *Exemplo 2*. Então a família Multiplicativa é uma *gathering* da família Aditiva.

Proposição 1.7. *Dada uma família eventualmente Anosov (M, f) , a decomposição $E^s \oplus E^u$ do fibrado tangente TM é única.*

Demonstração. Escolha uma componente, digamos M_0 . Como a decomposição é invariante, então ela é determinada pela decomposição em M_0 . Suponha que haja uma segunda decomposição hiperbólica $\tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^u$; seja que \tilde{v}_0^s um vetor em \tilde{E}^s , com base em algum ponto p , que não está em E^s de p . Agora isso pode ser expresso como uma soma na primeira decomposição, $\tilde{v}_0^s = av_0^u + bv_0^s$ com $a \neq 0$. Aplicando as funções f_i , esse vetor se expande até $+\infty$, uma vez que tem componente instável não nula. No entanto, da parte (iii) da *definição* 1.11, o espaço estável é necessário para contrair quando o tempo vai a $+\infty$, dando uma contradição. Portanto, devemos ter $\tilde{E}^s \subset E^s$. Por argumento simétrico, $E^s \subset \tilde{E}^s$. A mesma prova aplicada à família inversa mostra

que $\tilde{E}^u = E^u$, e, portanto, a decomposição é única. \square

Observação 1.7. *Para uma família Anosov (em contraste com o caso de uma única aplicação) existem muitas decomposições invariantes: basta escolher uma decomposição no tempo 0 e transportá-la para frente e para trás nas outras componentes. A proposição mostra que para qualquer outra decomposição invariante não pode ser hiperbólica.*

Corolário 1.2. *Um agrupamento de uma família eventualmente Anosov é novamente eventualmente Anosov. Na classe de famílias eventualmente Anosov, gathering preserva a decomposição do fibrado tangente, e também preserva os conjuntos estáveis e instáveis.*

Demonstração. Suponhamos que são dadas uma família eventualmente Anosov (M, f) e uma família (N_n, g) que é um agrupamento ao longo das componentes $N_n = M_{i_n}$, por alguma subsequência estritamente crescente de inteiros i_n : $n \in \mathbb{Z}$. Esta afirmação significa que, em cada uma dessas componentes, as decomposições são as mesmas. Agora fica claro que a decomposição resultante se encaixa na definição de uma decomposição eventualmente Anosov. Assim, (N_n, g) é uma família eventualmente Anosov. Pela *proposição 1.7*, esta decomposição é única, logo as decomposições são preservadas pelo agrupamento. \square

Observação 1.8. *Disto resulta que, dada uma família eventualmente Anosov (M, f) , se uma segunda família (N, g) é uma dispersão e é eventualmente Anosov, então o conjunto estável e instável são preservados. O que deu errado na proposição 1.5 é que tivemos uma dispersão que nos tirou da categoria eventualmente Anosov. Equivalentemente, o inverso à proposição 1.6 é falso, ou seja, existem famílias de aplicações para as quais há um agrupamento que é Anosov mas que elas mesmas não são eventualmente Anosov.*

Definição 1.15. *Duas métricas Riemannianas em uma variedade são limitadamente equivalentes se a razão entre as normas, induzidas no espaço tangente, em cada ponto está limitada por constantes entre 0 e ∞ . Duas famílias de aplicações diferenciáveis*

são limitadamente conjugadas se existir uma conjugação diferenciável que induz uma equivalência limitada das métricas. Pelo lema 1.1, uma conjugação h é limitada se e somente se existe $c > 0$ tal que $\|Dh_i\| < c$ e $\|D(h_i)^{-1}\| < c$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Tome, por exemplo, $c = 1 + \sup\{c_1^{-1}; c_2\}$, onde $\frac{\|Dhv\|}{\|v\|} \in [c_1, c_2]$.

Note que ter uma conjugação limitada é equivalente a ter uma conjugação diferenciável e uniformemente Lipschitz.

Proposição 1.8. *Seja (M, f) uma família eventualmente Anosov. Seja (N, g) outra família de difeomorfismos em variedades Riemannianas (também com uma métrica Riemanniana definida), e seja $h : M \rightarrow N$ um difeomorfismo que conjugua f e g . Assuma que h é uma conjugação limitada. Então, (N, g) é uma família eventualmente Anosov. Se (M, f) é uma família Anosov, então (N, g) também o é.*

Demonstração. Suponha que existe uma constante $c > 0$ tal que $\|Dh_i^{-1}\|, \|Dh_i\| < c$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. A partir das decomposições $E^u \oplus E^s$ de TM , temos uma decomposição $\tilde{E}^u \oplus \tilde{E}^s$ de TN ; que também é invariante. Sejam as sequências $\lambda_i^u, \lambda_i^s > 0$ e $\tilde{\lambda}_i^u, \tilde{\lambda}_i^s > 0$ definidas pelas famílias (M, f) e (N, g) como na definição 1.14. Precisamos verificar a condição (1.1) para $\tilde{\lambda}_i$. Temos, pela regra da cadeia, que $\tilde{\lambda}_i^s = \|Dg^s\| \leq \|Dh\|_{f \circ h^{-1}(p)} \cdot \|Df^s\|_{h^{-1}(p)} \cdot \|Dh^{-1}\|_p \leq c^2 \lambda_i^s$. Consequentemente, para cada i , $\tilde{\lambda}_i^s \leq c^2 \lambda_i^s$ e, similarmente, $c^{-2} \lambda_i^u \leq \tilde{\lambda}_i^u$. Mas se, em vez disto, considerarmos composições parciais das aplicações, esta constante c^2 permanece a mesma. Portanto a condição (1.1) vale, logo (N, g) também é eventualmente Anosov. O caso para uma família Anosov é similar.

Assim conjugações limitadas preservam limites de expansões a menos de uma constante. Consequentemente, nós temos o seguinte:

Corolário 1.3. *Famílias Anosov e eventualmente Anosov são categorias com respeito a conjugação limitada.*

Proposição 1.9. *Seja (M, f) uma família eventualmente Anosov. Seja $E_0^s \oplus E_0^u$ a decomposição hiperbólica de TM_0 . Então E_0^u depende somente do passado, e E_0^s depende*

somente do futuro. Desta forma, se (M, \tilde{f}) é outra família eventualmente Anosov tal que $f_i = \tilde{f}_i$ para $i \leq -1$, então $E_0^u = \tilde{E}_0^u$, e similarmente para o espaço estável para $i \geq 0$.

Demonstração. É semelhante a prova de unicidade da decomposição, feita na proposição 1.7 : para obter a contradição, usamos apenas o passado da sequência. \square

Observação 1.9. Para entender melhor esta afirmação é útil pensar de duas formas complementares para definir o espaço instável de um ponto $p \in M_0$. Para a primeira forma, E_0^u é o conjunto de todos os vetores v tal que $\|Df_n(v)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow -\infty$. Isto é similar a definição de conjunto estável, mas para a aplicação inversa. A segunda forma de definir espaço instável é construtiva, mas só é fácil de afirmar para alguns exemplos específicos, por exemplo, para matrizes (2×2) não negativas; aí o espaço instável é a intersecção de todas imagens do cone positivo aplicado do tempo $n < 0$ até o tempo 0 pela aplicação derivada.

A razão desta segunda definição ser mais difícil de se afirmar no geral é que nem sempre temos uma analogia do cone positivo, que para o caso das matrizes não negativas são disjuntos de todos subespaços estáveis. Agora ambas definições concordam em dizer que o espaço instável depende apenas do passado. Assim, pode parecer que a definição de eventualmente Anosov poderia ser simplificado para exigir somente que os vetores no espaço instável se contraíam para $-\infty$, sem exigir que eles também se expandam para $+\infty$. Mas abaixo está um exemplo que mostra que para famílias eventualmente Anosov esta não é uma boa idéia.

Exemplo 4. Tomemos $A_k = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ para $k \leq -1$, $A_k = B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ para $k \geq 0$.

Se tentarmos localizar o autoespaço instável por qualquer um dos dois métodos acima (cones ou direção estável para a aplicação inversa) teremos o espaço E_0^u para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, uma vez que esta dá a sequência passado. Da mesma forma, utilizando-se a sequência futuro $B = A^{-1}$ para determinar o espaço estável, novamente temos

convergência, mas para o mesmo espaço E_0^u . Assim, para esta família, E_0^u expande em direção a $+\infty$ e a $-\infty$, enquanto E_0^s contrai em ambas direções para a matriz A . Assim, não há decomposição hiperbólica. Então, na verdade, esta família de aplicações não é eventualmente Anosov.

1.4 Dinâmica Simbólica das Famílias de Aplicações

1.4.1 Sequência de Partições

Nas próximas seções nós desenvolvemos o maquinário da dinâmica simbólica para as famílias de aplicações. Para simplificar, vamos assumir a partir de agora que as aplicações são inversíveis, já que o que faremos pode ser generalizada para as famílias não-inversíveis. Para o caso das famílias Anosov, o resultado será uma sequência de partições de Markov, que codifica a família como uma versão não-estacionária de um subshift do tipo finito, veja a *proposição* 1.14. Começamos com a definição mais geral onde as partições não são necessariamente Markov.

Definição 1.16. *Uma partição \mathcal{Q} de um espaço métrico compacto X é uma coleção $\mathcal{Q} = \{Q_i : i \in I\}$ de subconjuntos fechados de X tal que:*

- cada Q_i é o fecho de seu interior, e nenhuma parte de seus bordos é denso em X ;
- $\forall i, j \in I, i \neq j \implies \text{int}(Q_i) \cap \text{int}(Q_j) = \emptyset$;
- $\bigcup Q_i = X$

Uma partição ordenada é uma partição com um conjunto I de índices totalmente ordenado; a menos de renomeações, sempre podemos tomar, neste caso, $\mathcal{Q} = \{Q_0 \cdots Q_l\}$.

Definimos uma partição \mathcal{P} de uma família de aplicações (M, f) sendo uma sequência de partições \mathcal{P}_i , no sentido dito acima, das componentes M_i .

Dizemos que a **partição gera** para a família de aplicações se separa pontos fora do conjunto magro constituído do pullback de todas as fronteiras das partições futuras e passadas, ou seja, se para cada x, y no subconjunto G_δ que é o complemento do

conjunto magro, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x)$ e $f^n(y)$ estão em elementos diferentes da partição P_n de M_n .

Definição 1.17. A *junção* de duas partições \mathcal{R} e \mathcal{Q} de um espaço X , denotado por $\mathcal{R} \vee \mathcal{Q}$, é a partição cujos elementos consistem das intersecções de cada elemento não trivial (interior não vazio) destas partições. Se \mathcal{R} e \mathcal{Q} tem conjuntos de índices I e J , então indexamos $\mathcal{R} \vee \mathcal{Q}$ pelo subconjunto de $I \times J$ correspondendo às intersecções não triviais. Estendemos esta definição de maneira natural para um número finito de partições.

Definição 1.18. Seja (M, f) uma família de aplicações com partição \mathcal{P} , e seja $(\widetilde{M}, \widetilde{f})$ uma segunda família que é um agrupamento de (M, f) ao longo da subsequência (n_i) . Para a família agrupada definimos uma partição $\widetilde{\mathcal{P}}$ por

$$\widetilde{\mathcal{P}}_i = \mathcal{P}_{n_i} \vee f_{n_i}^{-1}(\mathcal{P}_{n_{i+1}}) \vee \cdots \vee (f_{n_{i+1}-2} \circ \cdots \circ f_{n_i})^{-1}(\mathcal{P}_{n_{i+1}-1}).$$

Chamamos $\widetilde{\mathcal{P}}$ de **partição agrupada**. Note que para isto tomamos as **junções** do tempo n_i até o tempo $n_{i+1} - 1$.

Definimos uma segunda partição $\widehat{\mathcal{P}}$ por incluir mais um único tempo, tomando a junção de n_i até o tempo n_{i+1} . Chamamos de **partição agrupada aumentada**.

Observação 1.10. Fazendo um agrupamento trivial da família com partição \mathcal{P} , isto é, agrupamento ao longo da subsequência $n_i = i$, a partição agrupada não apresenta mudanças, então $\mathcal{P} = \widetilde{\mathcal{P}}$, enquanto que para a partição agrupada aumentada $\widehat{\mathcal{P}}_i = \mathcal{P}_i \vee f_i^{-1}(\mathcal{P}_{i+1})$.

Proposição 1.10. Se a partição \mathcal{P} gera (M, f) , então as partições agrupada e agrupada aumentada $\widetilde{\mathcal{P}}$ e $\widehat{\mathcal{P}}$ geram para a família agrupada $(\widetilde{M}, \widetilde{f})$. Reciprocamente, se a partição agrupada ou agrupada aumentada geram para a família agrupada, então a partição original \mathcal{P} gera a primeira família (M, f) .

Demonstração. Imediata da definição.

Observação 1.11. *Note que a partição agrupada aumentada é um pouco menos eficiente, pois há redundância: as partições até o tempo n_i estão incluídas duas vezes cada.*

Dada uma família de aplicações com uma sequência de partições geradora, estendemos esta sequência para uma dispersão da família, tomando a partição trivial $\tilde{\mathcal{P}}_i = \{\tilde{M}_i\}$ nas novas componentes. Claramente, esta sequência gera a família dispersa.

1.4.2 Partições de Markov

Dada uma família de aplicações (inversíveis), considerando o caso de uma única transformação de que trata Bowen ([14]), escrevemos $W_\varepsilon^s(p)$, $W_\varepsilon^u(p)$ para ε -discos nas folhas estável e instável de um ponto p ; dizemos que a família tem *coordenadas canônicas* se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se x e y estão δ perto um do outro então $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ é constituído de um único ponto, neste caso nós escrevemos $[x,y]$ para este ponto.

A existência de coordenadas canônicas para as aplicações é provado em [14], a idéia é que existe ε suficientemente pequeno tal que $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x)$ é um único ponto e que esta propriedade é preservada sob pequenas perturbações. E isso passa para famílias.

A condição de $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x)$ ser unitário pode falhar para ε grande por duas razões: primeiro, uma das folhas pode curvar e interceptar a outra em um segundo tempo, para isso, precisa de espaço suficiente para virar. Em segundo lugar, mesmo se não seja curva, ela pode retornar fazendo a volta em torno da variedade. Ambas as possibilidades são eliminadas com ε suficiente pequeno.

A existência de coordenadas canônicas definidas localmente é usado por Bowen para produzir pequenos *retângulos*. Para os principais exemplos estudados no presente trabalho queremos permitir *retângulos* grandes, damos uma definição diferente que funciona para o nosso caso específico, onde a geometria é muito simples, sem muito esforço para fazer generalizações, os retângulos serão construídos de forma explícita.

Assim, supondo agora que as componentes de nossa família Anosov são o 2-toro

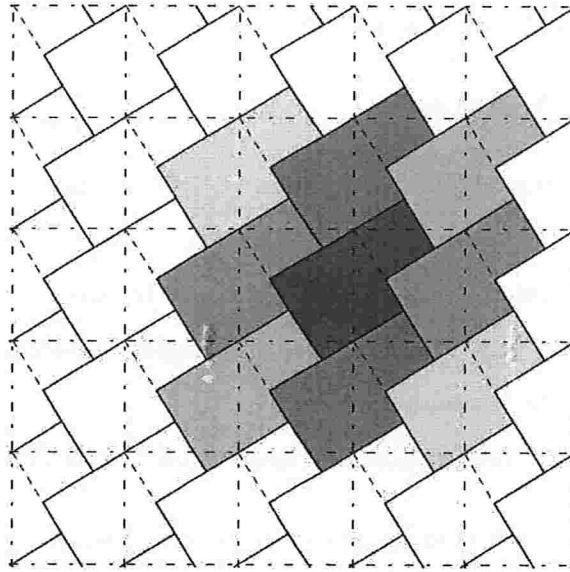


Figura 1.1: Partição de Markov geradora para a família aditiva, $\langle n \rangle = (\dots 111\dots)$, para paridade (+), ver capítulo 3. Este exemplo e figura foram extraídos de [1].

plano e que as variedades estável e instável W^s , W^u são folheações lineares, um retângulo será um paralelogramo (“preenchido”) com os lados em W^s e W^u .

Nós definimos $W^s(p, R)$ para ser a componente conexa de $W^s(p) \cap \overset{\circ}{R}$ que contém p , e similarmente para $W^u(p, R)$. Se $W^s(x, R) \cap W^u(y, R)$ consiste de um único ponto, denotamos este ponto por $[x, y]$. Coordenadas canônicas, nesse sentido, claramente existe para x, y no interior do retângulo.

A razão pela qual os pontos de fronteira foram excluídos pode ser observado na *figura 1.1*, o maior dos dois paralelogramos dá a volta o toro e assim, tomando y em sua fronteira instável e x em seu interior, o segmento instável contendo y encontra o estável contendo x em dois pontos.

Agora voltemos à situação de Bowen, que incluímos aqui para indicar o que os dois casos têm em comum e mostrar como conjuntos hiperbólicos gerais, para famílias de aplicações, podem ser tratados. Assim, dada uma família de aplicações com coordenadas canônicas no sentido de Bowen, definimos $R \subseteq M_i$ para ser um retângulo (pequeno) se:

- (i) para todo $x, y \in R$, $[x, y]$ está definido; e
- (ii) para $x, y \in R$, $[x, y] \in R$.

Para $p \in R$ definimos $W^s(p, R)$ sendo $W_\varepsilon^s(p) \cap R$ onde ε é pequeno e o diâmetro de R é menor que ε , similarmente para $W^u(p, R)$

Note que para tal R , dados dois pontos $x, y \in R$, então $W^s(x, R) \cap W^u(y, R)$ consiste de um único ponto $[x, y]$. Note que para retângulos menores não há a necessidade de excluir os pontos da fronteira.

Dizemos que um retângulo R é *próprio* se ele é o fecho de seu interior $\overset{\circ}{R}$

Definição 1.19. Para uma família de aplicações (M_i, f_i) , uma *partição de Markov* é uma sequência de partições finitas \mathcal{R}_i de M_i , isto é, recobrimentos de M_i por conjuntos fechados de interiores disjuntos, tal que cada elementos da partição é um retângulo próprio e tal que a **condição de Markov** é satisfeita: para $R_j^i \in \mathcal{R}_i$ e $R_k^{i+1} \in \mathcal{R}_{i+1}$, tal que $x \in R_j^i$ e $f_i(x) \in R_k^{i+1}$, então

$$f_i(W^u(x, R_j^i)) \supseteq W^u(f_i(x), R_k^{i+1})$$

e

$$f_i(W^s(x, R_j^i)) \subseteq W^s(f_i(x), R_k^{i+1}).$$

Note que, da definição de retângulo próprio, as fronteiras da partição são conjuntos fechados e em nenhuma parte densos, portanto, para uma partição geradora, o complemento da união de todos os pullbacks das fronteiras da partição para uma única componente é um denso G_δ . É por estes pontos que a dinâmica simbólica será definida. Dizemos que um retângulo R passa completamente através de um segundo retângulo S na direção estável (respectivamente instável) se para um ponto $x \in R$, $W^s(x, R) \supseteq W^s(x, S)$, respectivamente, $W^u(x, R) \supseteq W^u(x, S)$. Então, a condição de Markov implica o seguinte fato geométrico sobre intersecções de partição.

Lema 1.2. *Uma sequência de partições de Markov \mathcal{R}_i para uma família de aplicações inversíveis (M, f) satisfaz a propriedade geométrica de Markov: a pré-imagem na componente M_i de cada elemento R_j^{i+1} de uma partição \mathcal{R}_{i+1} pela aplicação f_i ou entra em um determinado elemento de \mathcal{R}_i ou passa completamente por ele na direção estável. Da mesma forma, os elementos de \mathcal{R}_{i-1} empurrados para a frente, para M_i , atravessa completamente na direção instável.*

Demonstração. Para o caso do toro quadrado com paralelogramos, segue imediatamente da condição de Markov. Para o caso geral, pode-se seguir a prova de ([14], Lemma 3.17).

A consequência combinatória disto (ver *proposição 1.14*) é que uma partição de Markov dá uma boa dinâmica simbólica para a família Anosov: uma família de aplicações ao longo de uma sequência de espaços métricos compactos definidos combinatorialmente, feito na seção seguinte.

1.4.3 Subshift não estacionário

Definição 1.20. *Seja $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de conjuntos finitos não vazios, chamados **alfabetos**, cujos elementos serão chamados de **símbolos**. Definimos $\#\mathcal{A}_i = l_i$ tomando $\mathcal{A}_i = \{0, 1, \dots, l_i - 1\}$. Uma **matriz de transição** é uma matriz retângular $0-1$, isto é, com entradas 0 ou 1. Dada uma sequência $(L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de matrizes de transição $(l_i) \times (l_{i+1})$, um **“string” permitido** é uma sequência (x_i) finita ou infinita, onde cada $x_i \in \mathcal{A}_i$ e tal que a $(x_i x_{i+1})$ entrada de L_i é 1. Um **“string” (permitido) finito** é chamado de **“palavra”**. Denotemos por (L) a sequência $(L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de matrizes de transição. Denotamos por $\Sigma^0 = \prod_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_i$ e definimos o subconjunto $\Sigma_{(L)}^0$ como sendo a coleção de **“strings” bi-laterais infinitos permitidos** $x = \{\dots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots\} \in \Sigma_{(L)}^0$. Dizemos que uma matriz L_i é **reduzida** se e somente se L_i não tem nenhuma linha e nenhuma coluna identicamente nula. Dizemos que a **sequência de matrizes é reduzida** se e somente se cada matriz L_i é reduzida.*

Observação 1.12. *Ao definir este espaço optamos pela convenção vetor linha. Veremos mais adiante porque esta escolha foi feita, ao invés da convenção vetor coluna*

onde teríamos matrizes $(l_{i+1}) \times (l_i)$.

Agora introduziremos a dinâmica do “shift”.

Definição 1.21. Dado $L = (L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma seqüência de matrizes, denotemos por σL para a seqüência de matrizes deslocada para a esquerda, isto é, $(\sigma L)_i = L_{i+1}$. Defina $\sum_{(L)}^k = \sum_{(\sigma^k L)}^0$ para $k \in \mathbb{Z}$. Fixamos $\sum_{(L)} = \coprod \sum_{(L)}^k$ a união disjunta. Chamamos $\sum_{(L)}^k$ a k -ésima componente $\sum_{(L)}$ que é chamado de **espaço total**. Defina σ em $\sum_{(L)}$, o “**shift**”, para ser a aplicação dada por deslocar um “string” para a esquerda, ou seja, $\sigma(x) = (\dots x_0.x_1x_2\dots)$ onde $x = (\dots x_{-1}.x_0x_1\dots)$. Chamamos o par $(\sum_{(L)}, \sigma)$ de “**subshift**” não estacionário do tipo finito (sntf) definido por $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $(L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Enfatizamos que, ao contrário do caso *estacionário*, onde todos os \mathcal{A}_i são iguais (respectivamente M_i), e temos uma única matriz de transição 0 – 1. Para o tempo 0, σ não é uma aplicação do espaço $\sum_{(L)}^0$ nele mesmo, já que as matrizes e o número de símbolos podem mudar com o tempo. Na verdade, a imagem de um ponto $x \in \sum_{(L)}^0$ está em um espaço combinatorial diferente que é dado pela seqüência de matrizes $(\sigma L) = (\dots, L_1, L_2, \dots)$, isto é o que define os espaço $\sum_{(L)}^1$. A aplicação shift $\sigma : \sum_{(L)} \rightarrow \sum_{(L)}$ no espaço total é equivalente à seqüência de aplicações ao longo destas componentes,

$$\dots \sum_{(L)}^0 \xrightarrow{\sigma} \sum_{(L)}^1 \xrightarrow{\sigma} \sum_{(L)}^2 \dots$$

Então σ^k aplica a i -ésima para $(i + k)$ -ésima componente de $\sum_{(L)}$; assim, para $x \in \sum_{(L)}^0$ com $x = (\dots x_{-1}.x_0x_1\dots) \in \prod_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_i$, o ponto $\sigma^k x$ é o string bi-infinito definido por $(\sigma^k x)_i = x_{i+k}$ em $\sum_{(L)}^k$. No entanto, (L) deve ser uma seqüência reduzida, isto garante que todo “string” finito permitido tenha continuação para direita (pois as linhas são não nulas) e para esquerda (colunas não nulas).

A seguir definimos a topologia e a métrica em $\sum_{(L)}$:

Um *cilindro* é um conjunto da forma $[x_k \dots x_m] \equiv \{w \in \sum_{(L)}^k : w_i = x_i, k \leq i \leq m\}$ para alguma seqüência finita $x_k \dots x_m$, com $k, m \in \mathbb{Z}$.

No espaço $\sum_{(L)}^k$ colocamos a topologia produto das topologias discretas sobre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i^{\mathbb{Z}}$, como os \mathcal{A}_i são finitos, então pelo teorema de Tychonof, $\sum_{(L)}^k$ é compacto. Os cilindros são conjuntos fechados e abertos (**clopen**) que geram a topologia e, conseqüentemente, a σ -álgebra de Borel \mathcal{B} de $\sum_{(L)}^0$.

Para $k \leq m$, definimos \mathcal{B}_k^m como a álgebra gerada pelos conjuntos dos cilindros finos \mathbb{C}_k^m , e denotemos por \mathcal{B}_k^∞ a σ -álgebra gerada por $\bigcup_{m \geq k} \mathbb{C}_k^m$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{-\infty}^\infty = \bigcup_{k \leq 0} \mathcal{B}_k^\infty$.

Para facilitar a manipulação dos índices da próxima definição, vamos considerar que a *coordenada presente* do ponto x em $\sum_{(L)}^l$ seja x_0 , isto é, x_0 denota da 0-ésima coordenada deste ponto que está em $\sum_{(L)}^l$ e não em $\sum_{(L)}^0$; suas *coodenadas futuras* são x_i tal que $i \geq 1$, e as *passadas* para $i \leq -1$.

Proposição 1.11. *A componente $\sum_{(L)}^l$ é metrizável; uma métrica conveniente é a métrica “word” : denotemos por $w_l(-j, k)$ o número de “strings” permitidos em $\sum_{(L)}^l$ de $-j$ até k ; isto é também o número de cilindros finos em $\sum_{(L)}^l$ da forma $[x_{-j} \cdots x_0 \cdots x_k]$. Note que, por esta definição, $w_l(0, 0) = l_l$ (o número de símbolos no alfabeto de posição 0 em $\sum_{(L)}^l$). Dados x, y na mesma componente $\sum_{(L)}^l$, definimos $d_l(x, y) = 1$ se $x_0 \neq y_0$; caso contrário, assumindo então $x_0 = y_0$, tomamos j, m os maiores inteiros não negativos tais que $x_i = y_i$ para $-j \leq i \leq m$, e fixamos*

$$d_l(x, y) = \max\{(w_l(-j, 0))^{-1}, (w_l(0, m))^{-1}\}.$$

Observação 1.13. *Para o caso **unilateral** onde temos alfabetos \mathcal{A}_i para $i \geq 0$ e, conseqüentemente, uma seqüência $(L) = (L_i)_{i \geq 0}$, definindo a componente $\sum_{(L)}^{0,+} \subseteq \prod_{(A)}^{0,+}$ que é o conjunto tal que se $x \in \sum_{(L)}^{0,+}$, então $x = (.x_0x_1\dots)$. Definimos a métrica “word” como $d(x, y) = \{(w(0, m))^{-1}\}$, onde $w(j, k)$ é o número de “strings” permitidos de j até k para $0 \leq j \leq k$. Esta discussão se estende a k -ésima componente via identificação, tomando um shift na seqüência de matrizes. Em particular, estendemos para o espaço total $\sum_{(L)}^+$ definindo em cada $\sum_{(L)}^{k,+}$ do mesmo modo, e declarando a distância entre dois pontos x, y sendo 1 sempre que estes estiverem em componentes*

diferentes. Com a topologia resultante no espaço total $\Sigma_{(L)}^+$, cada componente $\Sigma_{(L)}^{k,+}$ é um conjunto clopen (fechado e aberto), e a aplicação shift é contínua, não inversível e o número de pré-imagens por σ de um string $(.x_1x_2\dots)$, onde $x_1 = r$, é igual ao número de 1's na r -ésima coluna da matriz L_0 . Neste contexto, acrescentamos uma observação na aplicação "shift" σ . Se são dados um "string" permitido $x \in \Sigma_{(L)}^{0,+}$ e $k, m \geq 0$ com $k \leq m$, escrevemos

$$[x_k \dots x_m] = \{w \in \Sigma_{(L)}^{0,+} : w_k = x_k, \dots, w_m = x_m\},$$

chamando-o de **cilindro fino** de $\Sigma_{(L)}^{0,+}$. Então, nesta notação, para $[x_k \dots x_m] \subseteq \Sigma_{(L)}^{k,+}$ temos:

$$\sigma^{-k}([x_k \dots x_m]) = [x_k \dots x_m] \equiv [.* \dots * x_k \dots x_m] \subseteq \Sigma_{(L)}^{0,+},$$

onde $*$ indica: "nenhuma restrição no símbolo". Denotamos por \mathbb{C}_k^m a coleção de cilindros finos em $\Sigma_{(L)}^{0,+}$ com coordenadas fixas da posição k até m . Definimos \mathcal{B}_k^m como a álgebra gerada pelos conjuntos dos cilindros finos \mathbb{C}_k^m , e denotemos por \mathcal{B}_k^∞ a σ -álgebra gerada por $\bigcup_{m \geq k} \mathbb{C}_k^m$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0^\infty$.

Um **cilindro genérico** é a coleção de cilindros finos. Então, por exemplo, para alfabetos \mathcal{A}_i com ≥ 3 símbolos, $[\cdot 101] \in \mathbb{C}_0^2$. Enquanto $[.312*0]$ e $[.*2*3*]$ são cilindros genéricos que são membros de \mathbb{C}_0^4 .

Lema 1.3. Dada uma sequência de alfabetos (\mathcal{A}_i) e uma sequência de matrizes (L_i) com matrizes $0-1$ ($l_i \times l_{i+1}$). Se $\Sigma_{(L)}^0$ é não vazia, então existe uma única sequência de alfabetos $(\hat{\mathcal{A}}_i)$ com $\hat{\mathcal{A}}_i \subseteq \mathcal{A}_i$ e uma sequência reduzida (\hat{L}_i) de matrizes $0-1$ ($\hat{l}_i \times \hat{l}_{i+1}$) tal que $\Sigma_{(\hat{L})}^0 = \Sigma_{(L)}^0$.

Demonstração. As operações de redução no estágio k , dadas por remover as linhas e as colunas identicamente nulas de L_k e as letras correspondentes em (\mathcal{A}_k) e (\mathcal{A}_{k+1}) podem ser vistas como operadores, agindo em um espaço compacto, que são não-crescentes para uma ordem parcial natural vinda da inclusão, com a sequência reduzida sendo o limite. Listamos todos os elementos dos alfabetos e todos os elementos da

matriz, dando um conjunto X , e formando o espaço produto $\{0, 1\}^X$; remover ou manter um símbolo ou um elemento da matriz será codificado por esses novos símbolos (0, 1, respectivamente). Definimos um operador \mathcal{R}_k neste espaço correspondendo a remover todas as linhas identicamente nulas de L_k , as letras correspondentes de (\mathcal{A}_k) e as colunas correspondentes de L_{k-1} . Similarmente, escrevemos \mathcal{C}_k para o operador dado pela remoção de todas as colunas nulas de L_k , as letras correspondentes de (\mathcal{A}_{k+1}) e as linhas correspondentes de L_{k+1} . Dada uma lista finita $L_{-m}, L_{-m+1}, \dots, L_m$; $m \in \mathbb{N}$, aplicamos sucessivamente estes operadores $\mathcal{R}_m, \mathcal{R}_{m-1}, \dots, \mathcal{R}_{-m}$, em seguida aplicamos $\mathcal{C}_{-m}, \mathcal{C}_{-m+1}, \dots, \mathcal{C}_m$. Isto produz uma nova sequência bi-infinita $((\widehat{\mathcal{A}}), (\widehat{L}))_m$ que está reduzida nos tempos $-m, -m+1, \dots, m$ e que tem os mesmos strings bi-infinitos permitidos. Continuando, este processo converge por compacidade. Ou, por outro ponto de vista, as possibilidades em qualquer segmento de tempo finito são finitas, enquanto as operações forem consistentes, isto é, enquanto forem não-crescentes na ordem parcial quando $m \rightarrow \infty$. E por suposição, $\sum_{(L)}^0$ é não vazio, $(\widehat{\mathcal{A}}_i)$ é um alfabeto não vazio no limite, então as matrizes \widehat{L}_i existem (são pelo menos (1×1)). \square

Lema 1.4. *Para a sequência reduzida (L_i) , para cada k , a aplicação $\sigma : \sum_{(L)}^k \longrightarrow \sum_{(L)}^{k+1}$ é sobrejetora.*

Demonstração. Isto é consequência do Lema anterior. \square

Proposição 1.12. *O $\text{sntf}(\sum_{(L)}, \sigma)$ é uma família de aplicações.*

Demonstração. Imediato da *definição* 1.3: a métrica e a topologia são compatíveis; cada componente $\sum_{(L)}^k$ é um espaço métrico compacto; na verdade, cilindros são “clopen” (abertos e fechados), e se uma infinidade de alfabetos tem pelo menos dois símbolos, então $(\sum_{(L)}, \sigma)$ é topologicamente um conjunto de Cantor, e a aplicação σ é uma sequência de homeomorfismos de uma componente para a próxima. Ver lema 2.2.

Proposição 1.13. *Se duas sequências de matrizes L, L' que definem as famílias de aplicações $\Sigma_{(L)}$ e $\Sigma_{(L')}$ são reduzidas, então estas famílias de aplicações são as mesmas se e somente se as sequências L, L' são iguais.*

Demonstração. Direto do lema 1.3 ou; conhecer a sequência da matrizes é equivalente a conhecer os strings permitidos. O fato de ser reduzida implica (na verdade é equivalente a) que a sequência de dígitos de qualquer string finito permitido pode ser seguida infinitamente em ambas as direções. Por compacidade, existe um ponto em $\Sigma_{(L)}^0$, que tem o nome deste string. Assim, conhecer o espaço, ou seja, conhecer os strings infinitos permitidos, é equivalente a conhecer as sequências de matrizes. \square

Observação 1.14. *Exemplos simples mostram que a redução é necessária, as sequências constantes $L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $L'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $L''_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ definem o mesmo **sntf** com um único ponto em $\Sigma_{(L)} = \Sigma_{(L')} = \Sigma_{(L'')}$, o string $(\dots 000\dots)$; pode-se ver que uma sequência de matrizes não reduzida pode ser simplificada eliminando-se, em cada alfabeto, os símbolos que não pertencem a nenhum string bi-infinito permitido, produzindo assim uma sequência reduzida canônica de matrizes com o mesmo **sntf**.*

A principal diferença entre um **sntf** e uma família de aplicações em geral é que para um **sntf**, cada componente carrega toda a informação da dinâmica, simplesmente aplicando o “shift”, todas as outras componentes são reconstruídas.

1.4.4 Dinâmica Simbólica para as famílias Anosov

Aqui veremos que o **sntf** dá a representação simbólica de uma família Anosov, esta representação é fornecida por uma sequência de partições de Markov.

Lema 1.5. *Dada uma família inversível de aplicações (M, f) , assumamos a existência de uma sequência de partições de Markov \mathcal{R}_k . Se uma sequência finita de elementos destas partições $R_j, R_{j+1}, \dots, R_{j+m}$ com $R_i \in \mathcal{R}_i$ tem, dois a dois, intersecção não vazia pelo pullback, isto é, se $R_j \cap f_j^{-1}R_{j+1} \neq \emptyset$, então a intersecção simultânea dos pullbacks para uma única componente é não vazia:*

$$R_j \cap f_j^{-1}R_{j+1} \cap \cdots \cap f_{j+m-1}^{-m}R_{j+m} \neq \emptyset$$

Demonstração. É imediato da propriedade geométrica de Markov (lema 1.2). \square

Dada uma família inversível de aplicações e a partição de Markov geradora, seja l_k denotando o número de elementos de \mathcal{R}_k . Ordenamos cada partição, e definimos a ij -ésima entrada de uma matriz L_k ($l_k \times l_{k+1}$) sendo 1 exatamente quando $f_k^{-1}(R_j^{k+1})$ encontra R_i^k , onde R_m^l denota o m -ésimo elemento de \mathcal{R}_l . Temos o seguinte.

Proposição 1.14. *A aplicação $\pi : \sum_{(L)}^0 \rightarrow M_0$ definida por $x \mapsto \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}R_{x_i}^i$ é injetora exceto no conjunto dos pullbacks das fronteiras. Isto é uma semiconjugação topológica da família de aplicações $(\sum_{(L)}, \sigma)$ para (M, f) .*

Demonstração. A observação fundamental é que se um string finito é permitido em nosso snf, os sucessivos retângulos correspondentes tem, dois-a-dois, intersecção não vazia pelo pullback, portanto, pelo lema 1.5, existe um ponto no espaço que tem esse nome finito. Por compacidade dos retângulos e das componentes M_i , isso se estende para os strings infinitos permitidos. Então cada $\sum_{(L)}^k$ se corresponde naturalmente a M_k via aplicação projeção π_k . A união disjunta $\sum_{(L)}$ projeta-se a M via π , definida por ser igual a π_k em cada componente $\sum_{(L)}^k$. A aplicação shift σ aplica $\sum_{(L)}^k$ a $\sum_{(L)}^{k+1}$, logo isto projeta-se para $f_k : M_k \rightarrow M_{k+1}$, e a aplicação total σ em $\sum_{(L)}$ projeta-se para a aplicação total f em M , e o diagrama da Figura 1.2 comuta. π é sobrejetora. \square

Observação 1.15. *Como vimos na seção 1.3, é desejável para as famílias de aplicações terem uma semi-conjugação que não é apenas topológica, mas uniforme; para a aplicação*

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{(L)}^{-1} & \xrightarrow{\sigma} & \sum_{(L)}^0 & \xrightarrow{\sigma} & \sum_{(L)}^1 \\ \cdots \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \cdots \\ M_{-1} & \xrightarrow{f_{-1}} & M_0 & \xrightarrow{f_0} & M_1 \end{array}$$

Figura 1.2: Dinâmica Simbólica para uma família de aplicações.

de codificação π , exemplos uniformes e não uniformes ocorrem. Destacamos que, às vezes, é útil considerar a aplicação total como uma única aplicação e não como uma sequência, a partir desse ponto de vista, por exemplo, a partição de Markov para a família Anosov é uma partição de Markov no sentido usual para a aplicação total, mas com elementos enumeráveis.

1.5 Vertex-shift e Edge-shift não estacionário e o Diagrama de Bratteli

Até agora, nós definimos sntf quando é dada uma sequência de matrizes 0-1. Agora podemos generalizar estas sequências para matrizes com entradas inteiras não negativas, definindo o (“edge-shift”) onde consideramos o número de arestas que faz a transição de um vértice para o outro sendo ≥ 0 . Para o caso familiar *estacionário* consulte ([18], pag. 43). O caso estacionário será de grande ajuda para representar as transições ilustrativamente, através de um gráfico, a diferença sendo que aqui precisaremos de um gráfico infinito.

Definição 1.22. Um *diagrama de Bratteli* é um gráfico direcionado definido por uma sequência de conjuntos finitos de vértices \mathcal{V}_i e conjuntos de arestas \mathcal{E}_i indexados por $i \in \mathbb{Z}$. Cada aresta $e \in \mathcal{E}_i$ tem uma origem $s(e) \in \mathcal{V}_i$ e uma imagem $r(e) \in \mathcal{V}_{i+1}$ e é representado como uma seta com a cauda na origem e cabeça na imagem.

Definição 1.23. Dizemos que o diagrama é **não degenerado** se cada vértice tem pelo menos uma “seta” saindo dele e uma entrando.

Definição 1.24. Identificamos o conjunto de vértices \mathcal{V}_i com um alfabeto ordenado $\mathcal{A}_i = \{0, \dots, l_i - 1\}$; o diagrama de Bratteli resultante é o **diagrama de rotulação arestas**. Associamos ao diagrama uma sequência de matrizes $(F_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ($l_i \times l_{i+1}$) com entradas inteiras não negativas fixando a ml -ésima entrada de F_i sendo igual a k se e somente se existem k arestas conectando o vértice m de \mathcal{V}_i ao vértice l de \mathcal{V}_{i+1} (e sendo 0 se não existem nenhuma aresta). Dizemos que o diagrama é de **arestas simples** (“single-edge”) se e somente se existe, no máximo, uma aresta para cada “origem” e

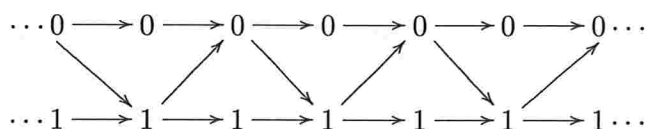


Figura 1.3: O diagrama de Bratteli de arestas simples.

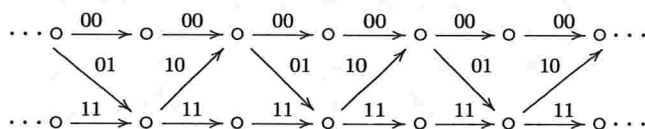


Figura 1.4: O mesmo diagrama com rotulação aditiva

para cada “imagem”, ou equivalentemente, se e somente se as matrizes F_i tem entradas 0 e 1. Também identificamos o conjunto de arestas \mathcal{E}_i com um alfabeto ordenado \mathcal{A}_i . Isto dá um **diagrama de rotulação vértices**. Definimos uma sequência de matrizes (L_i) tomando a ml -ésima entrada de L_i sendo 1 se e somente se a aresta m em \mathcal{E}_i segue a aresta l em \mathcal{E}_{i+1} , caso contrário sendo 0.

Proposição 1.15. Em cada caso acima, o diagrama determina e é determinado pela sequência de matrizes (F_i) , que tem entradas inteiras não negativas para a rotulação “edge” e que sempre tem entradas 0 – 1 para a rotulação “vertex”.

Definição 1.25. Dado um diagrama de Bratteli com rótulos vértice, isto é, onde as arestas são os alfabetos, chamamos o snrf definido pela sequência (L_i) 0 – 1 de espaço “**vertex-shift**” do diagrama. Se é um diagrama de rotulação de arestas (ou arestas simples), com os conjunto de vértices sendo os alfabetos, chamamos o snrf resultante de espaço “**edge-shift**” do diagrama.

Proposição 1.16. Dois diagramas de Bratteli não degenerados determinam o mesmo “edge-shift” se e somente se eles são iguais; o mesmo vale para diagramas de arestas simples e para o vertex-shift.

Demonstração. A prova é semelhante a da proposição 1.13. □

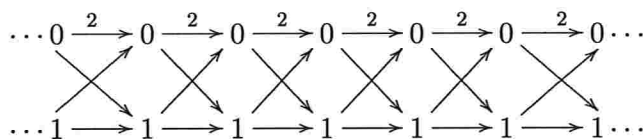


Figura 1.5: Diagrama telescópico correspondendo ao gathering ao longo dos tempos pares da figura 1.3, com número de edges indicado quando é maior que 1.

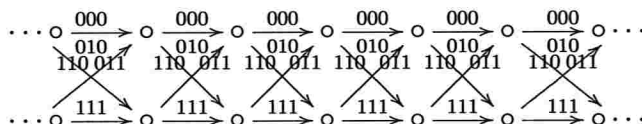


Figura 1.6: O mesmo diagrama com rotulação aditiva

Observação 1.16. Dado um diagrama de arestas simples, existe uma escolha natural para nomear estas arestas: se uma aresta (e) conecta os símbolos $s(e) = i$ e $r(e) = j$, então esta aresta é nomeada ij ; podemos ordenar este diagrama (ver seção 2.2 para “vertex-shift” e 2.3.5 para “edge-shift”). Isto está ilustrado nas Figuras 1.3 e 1.4, onde estamos exemplificando um diagrama de arestas simples correspondendo a sequência

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } i \text{ par}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } i \text{ ímpar},$$

e os vértices são listados em ordem crescente de cima para baixo. Este tipo de rotulação de arestas é chamada de **rotulação aditiva** (veja página 73) e o diagrama de Bratteli relacionado é chamado de **diagrama aditivo**.

Definição 1.26. Dada uma sequência crescente $\dots n_{-1}n_0n_1\dots$ de \mathbb{Z} , o diagrama de Bratteli **telescópico** é o diagrama definido pela sequência de matrizes dada pelas composições parciais da sequência original; reciprocamente, o diagrama **microscópico** é dado pela fatoração da sequência.

Proposição 1.17. Dada uma partição de Markov geradora \mathcal{P} da família de aplicações (M, f) , as operações de agrupamento e dispersão via inserção de aplicações identidade corresponde, respectivamente, a telescopar e microscopar o diagrama aditivo de Bratteli. Isto é, o $sntf$ para o gathering trivial aumentado da partição \mathcal{P} , que é a partição $\tilde{\mathcal{P}}$

definida por $\tilde{\mathcal{P}}_i = \mathcal{P}_i \vee \mathcal{P}_{i+1}$, é igual ao *sntf* para a rotulação aditiva do diagrama de Bratteli associado a \mathcal{P} ; e telescopando este diagrama ao longo de uma subsequência crescente n_i resulta em um diagrama de rotulação aditiva cujo *sntf* é idêntico ao da partição agrupada aumentada tomada ao longo desta subsequência.

Demonstração. A prova é imediata da definição; ver *Observação 1.10*. \square

Então, o diagrama de *arestas simples* telescopado dá um diagrama de *arestas múltiplas*, assim o número de arestas que ligam dois vértices corresponde ao número de caminhos possíveis (entre estes dois vértices) para o diagrama inicial (antes de telescopar). No capítulo 3 iremos relacionar isto com a *família multiplicativa*, que é o agrupamento da *família Aditiva*.

No próximo capítulo iremos retornar a estes diagramas considerando arestas múltiplas, nossa intenção é de aplicar estes conceitos às *transformações Ádicas* (definidas no próximo capítulo), isto será útil para mostrar que a *condição autovetor de Perron-Frobenius* implica unicidade ergódica para as transformações ádicas definidas no espaço de arestas $\sum_{(F)}^{0,+}$ onde $(F_i)_{i \geq 0}$ é uma sequência de matrizes inteiras não negativas (proposição 2.4 e corolário 2.2).

Capítulo 2

Transformações Ádicas

Para definir as transformações Ádicas iremos tomar o espaço unilateral citado na Observação 1.13, para posteriormente (capítulo 4) relacionar sua aplicação fator com rotações no círculo. Isto será feito no *Exemplo 3* do capítulo 4. No teorema 3.4 do capítulo 3 estenderemos para o caso bi-lateral de uma maneira especial, e analisaremos uma segunda aplicação fator que também dá uma rotação.

2.1 O grupo de mudança finita de coordenadas

Seja $(L_i)_{i \geq 0}$ uma sequência de matrizes com entradas 0 – 1 ($l_i \times l_{i+1}$). Considere dois “strings” finitos permitidos em $\sum_{(L)}^{0,+}$, $(.x_0x_1 \dots s)$ e $(.y_0y_1 \dots s)$, que tenham o mesmo comprimento t e terminem com a mesma letra s ; definimos uma aplicação $\gamma : \sum_{(L)}^{0,+} \rightarrow \sum_{(L)}^{0,+}$ que faz um intercâmbio entre os cilindros $[.x_0 \dots x_{t-2}s]$ e $[.y_0 \dots y_{t-2}s]$.

Então, para $w = (.x_0 \dots x_{t-2}sw_t w_{t+1} \dots)$, definimos $\gamma(w) = (.y_0 \dots y_{t-2}sw_t w_{t+1} \dots)$. Esta aplicação está bem definida já que $\gamma(w)$ é um string permitido. Similarmente, para $w = (.y_0 \dots y_{t-2}sw_t w_{t+1} \dots)$ definimos $\gamma(w) = (.x_0 \dots x_{t-2}sw_t w_{t+1} \dots)$, enquanto no resto do espaço $\sum_{(L)}^{0,+}$ (isto é, $\forall x \in \sum_{(L)}^{0,+}$ tal que $x \neq w$) tomamos γ sendo a identidade. Perceba que γ é uma *involução* ($\gamma \circ \gamma = id$). Chamamos o grupo gerado pela coleção de todas aplicações deste tipo de *grupo de mudança finita de coordenadas* de $\sum_{(L)}^{0,+}$, denotando por $\mathcal{FC}(\sum_{(L)}^{0,+})$. Note que cada elemento de \mathcal{FC} age em $\sum_{(L)}^{0,+}$ como um homeomorfismo.

2.2 Diagrama ordenado de Bratteli

O diagrama para $\sum_{(L)}^{1,+}$ é o mesmo sem a primeira coluna da esquerda (isto é, sem o nível 0 do diagrama). Dado um diagrama degenerado, e portanto uma sequência não reduzida de matrizes, podemos produzir um diagrama reduzido (não degenerado) de um modo canônico com os mesmos caminhos infinitos de setas, para fazer isto mudamos para uma sequência reduzida de matrizes (ver *Lema 1.3*).

Logo iremos definir as aplicações Ádicas, que tem as mesmas órbitas do grupo \mathcal{FC} ; conseqüentemente medidas invariantes *não atômicas* (isto é, se μ é uma medida invariante, então μ não tem átomos, ou seja, para cada A mensurável tal que $\mu(A) > 0$, existe um subconjunto $B \subset A$ tal que $\mu(A) > \mu(B) > 0$, A é um *átomo* se é mensurável com $\mu(A) > 0$ e $\forall B \subset A$ tal que $\mu(A) > \mu(B)$ tem-se $\mu(B) = 0$) de um passará a ser do outro (ver *Proposição 2.1*). Observamos que, no espaço unilateral, o diagrama de Bratteli em $\sum_{(L)}^{0,+}$ é construído a partir do tempo 0 para a direita (quando estamos na convenção vetor linha), isto é, as setas orientadas da esquerda para a direita. As transformações Ádicas definidas na próxima seção são determinadas a partir da escolha de uma ordem nas arestas do diagrama de Bratteli. Primeiro, definimos uma relação de equivalência em $\sum_{(L)}^+$ por:

$$x \sim y \iff \exists N : \forall k \geq N, x_k = y_k$$

Observe que a classe de equivalência $\langle x \rangle$ de $x \in \sum_{(L)}^{0,+}$ é o conjunto estável $W^s(x)$ de x para a aplicação shift no espaço total do *sntf*; este é o conjunto de todos y tal que $d(\sigma^m(x), \sigma^m(y)) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ (na verdade, já que este é um espaço unilateral, a distância eventualmente iguala-se a zero). Em particular, tais y também pertencem à mesma componente $\sum_{(L)}^{0,+}$ do espaço total. A seguir, colocamos uma ordem neste conjunto enumerável. Isto é feito principalmente ordenando o conjunto de arestas (“edges”), que (quando orientado na direção futuro) entra em cada símbolo; precisamente, para cada $k \geq 0$ fixo, e cada $j \in \mathcal{A}_{k+1}$, definimos $\mathcal{A}_k^j \subseteq \mathcal{A}_k$ por $\mathcal{A}_k^j = \{i \in \mathcal{A}_k : (L_k)_{ij} = 1\}$, e damos uma bijeção $\mathcal{O}_k^j : \mathcal{A}_k^j \rightarrow \{1, 2, \dots, \#\mathcal{A}_k^j\}$, chamamos \mathcal{O} de *ordem estável* no *sntf*. Isto dá uma ordem no diagrama de Bratteli.

A partir disto definimos indutivamente a \mathcal{O} -ordem lexicográfica em $W^s(x)$: para x, y no mesmo conjunto estável, seja n o maior i tal que $x_i \neq y_i$. Escrevendo $j = x_{n+1} = y_{n+1}$, dizemos que $x < y$ se e somente se $\mathcal{O}_k^j(x_n) < \mathcal{O}_k^j(y_n)$. Note que $W^s(x)$ é linearmente ordenado já que o conjunto de edges que entram em cada símbolo o é.

2.3 Transformações Ádicas

Descrevemos a seguir a transformação de Vershik; esta será a aplicação na zero-ésima componente $\sum_{(L)}^{0,+}$ definida pela ordem estável \mathcal{O} (uma definição similar serve em cada componente $\sum_{(L)}^{k,+}$).

Primeiro definimos o *sucessor* de $x \in \sum_{(L)}^{0,+}$, $suc(x)$, como sendo o menor ponto em $W^s(x)$ que é maior que x (se existir); e o *antecessor*, $ant(x)$, é o maior ponto que é menor que x .

Escrevemos \mathcal{NS} para o conjunto de pontos em $\sum_{(L)}^{0,+}$ que não tem sucessor, e \mathcal{NP} para o conjunto de pontos que não tem antecessor. Definimos então

$$T_{\mathcal{O}} : \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NS} \longrightarrow \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NP} \quad \text{por} \quad T_{\mathcal{O}}(x) = suc(x)$$

Chamamos esta aplicação de **aplicação ádica** definida por $(L_i)_{i \geq 0}$ e \mathcal{O} . Também definimos

$$T_{\mathcal{O}}^{-1} : \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NP} \longrightarrow \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NS} \quad \text{por} \quad T_{\mathcal{O}}^{-1}(x) = ant(x);$$

e $T_{\mathcal{O}}^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ sendo as iteradas de $T_{\mathcal{O}}$ e $T_{\mathcal{O}}^{-1}$, sempre que isto fizer sentido.

Definimos a ordem inversa $\tilde{\mathcal{O}}$ invertendo a ordem em cada conjunto de arestas, então $\tilde{\mathcal{O}}_k^j(i) = \#\mathcal{A}_k^j - \mathcal{O}_k^j(i) + 1$. Logo, para a ordem correspondente em $W^s(x)$, temos $x \tilde{<} y \Leftrightarrow y < x$. Assim $T_{\tilde{\mathcal{O}}} = T_{\mathcal{O}}^{-1}$, que recebe o nome de *aplicação ádica inversa*.

Um modo útil de entender a dinâmica de $T_{\mathcal{O}}$ é imaginar o conjunto estável $W^s(x)$, onde $x = (.x_0x_1\dots)$, como uma árvore infinita na direção da raiz, e que vai crescendo para cima. O nível 0 representa as folhas desta “árvore estável” de x ; os galhos são ordenados da esquerda para direita pela ordem estável (as arestas do diagrama de Bratteli passam a apontar para cima). A dinâmica da aplicação manda um string

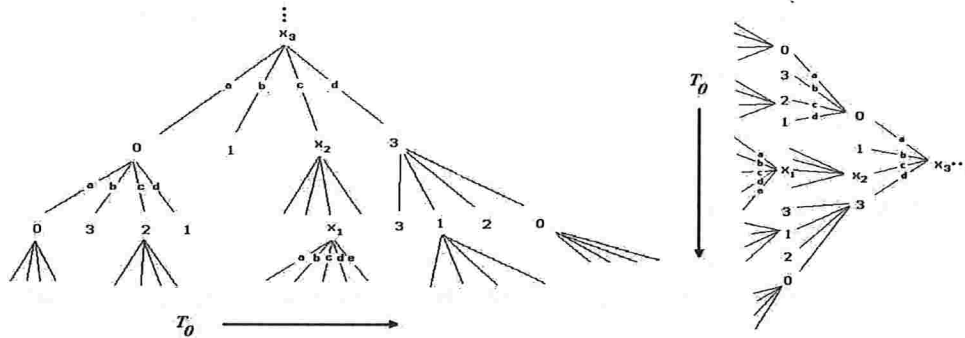


Figura 2.1: Visão geométrica de uma transformação ádica: a árvore estável para o string $(x_0 x_1 \dots)$; a ordem estável é indicada pelas letras. A transformação é aplicada da esquerda para a direita. Na segunda figura, a árvore é girada para parecer com o diagrama de Bratteli. Figura exposta em [4].

infinito para o próximo, movendo-o ao longo destas folhas da esquerda para direita). Veja a *figura 2.1* e também [7].

No uso padrão em dinâmica, uma transformação é uma função com imagem igual ao domínio. Já que este não é bem o caso para a aplicação ádica, nós fixamos $\mathcal{N} = (\bigcup_{n=1}^{+\infty} T_{\mathcal{O}}^{-n}(\mathcal{NS})) \cup (\bigcup_{n=1}^{+\infty} T_{\mathcal{O}}^n(\mathcal{NP}))$; note que a restrição de $T_{\mathcal{O}}$ em $\Sigma_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$ é uma bijeção, chamamos $T_{\mathcal{O}} : \Sigma_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N} \rightarrow \Sigma_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$ de **transformação Ádica** definida por $(L_i)_{i \geq 0}$ e \mathcal{O} .

Mesmo para a aplicação ádica (já que ela não é uma transformação) nós fazemos uma definição especial, que a órbita de um conjunto $x \in \Sigma_{(L)}^{0,+}$ é a *classe de equivalência estável* $W^s(x)$. Isto é, na verdade, a coleção de todos $T_{\mathcal{O}}^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, o qual faz sentido como declarado anteriormente; precisamente, primeiro fixamos $T_{\mathcal{O}}^0(x) = x$, $\forall x \in \Sigma_{(L)}^{0,+}$, e $T_{\mathcal{O}}^1(x) = T_{\mathcal{O}}(x)$ para $x \notin \mathcal{NS}$; como antes, escrevemos $T_{\mathcal{O}}^{-1}(x) = ant(x)$ para $x \notin \mathcal{NP}$, e definimos $T_{\mathcal{O}}^2(x)$ para $x \notin ant(\mathcal{NS})$, e assim por diante. Então $\Sigma_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$ é o conjunto dos pontos com órbitas completas, isto é, tal que $T_{\mathcal{O}}^k(x)$ está definido $\forall k \in \mathbb{Z}$. Note que, por definição, a aplicação ádica e o grupo \mathcal{FC} tem as mesmas órbitas. Também percebemos que, já que $W^s(x)$ é linearmente ordenado, a aplicação ádica não pode ter órbitas periódicas (no entanto podem haver órbitas finitas).

Restringir a aplicação ádica á transformação ádica é uma mudança relativamente insignificante, já que o conjunto \mathcal{N} , que foi jogado fora, é no máximo enumerável.

Lema 2.1. *O número de pontos em \mathcal{NS} é no máximo $\liminf_{i \rightarrow \infty} l(i)$ onde $l(i) = \#\mathcal{A}_i$; se este for ∞ , então o número de tais pontos é no máximo infinito enumerável. O mesmo vale para \mathcal{NP} . Consequentemente \mathcal{N} é enumerável.*

Demonstração. Ver [9]. □

A seguir consideremos propriedades adicionais gerais do espaço $\sum_{(L)}^{0,+}$, dado por algumas suposições naturais. Para $0 \leq k \leq n$ inteiros, escrevemos $L^{(k,n)} = L_k L_{k+1} \dots L_{n-1}$. Assim $L^{(k,k+1)} = L_k$, e $L^{(k,n)}$ tem dimensões $(l_k \times l_n)$.

Definição 2.1. *Dizemos que uma sequência $(L_i)_{i \geq 0}$ de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ 0-1 é **não trivial à direita** se para todo $k \geq 0$, existe $n > 0$ (que depende de k) tal que para cada $1 \leq i \leq l_k$, a soma dos inteiros na i -ésima linha de $L^{(k,n)}$ é ≥ 2 . Em particular, teremos $l_i \geq 2$ infinitas vezes. Também dizemos que a sequência é **não trivial a esquerda** se a soma da j -ésima coluna de $L^{(k,n)}$ é $\geq 2, \forall 1 \leq j \leq l_n$.*

Lema 2.2. *Se $(L_i)_{i \geq 0}$ é não trivial à esquerda, então todo conjunto estável $W^s(x)$ é infinito. Se $(L_i)_{i \geq 0}$ é não trivial à direita, então todo cilindro é homeomórfico ao conjunto de Cantor; o mesmo vale para $\sum_{(L)}^{0,+}$, assim, em particular, estes conjuntos não são enumeráveis.*

Demonstração. Assuma que $(L_i)_{i \geq 0}$ é não trivial à esquerda. Dado um string $x = (.x_0 x_1 \dots)$, desenhamos a classe de equivalência $W^s(x)$ como uma árvore estável, agora rodamos (ver figura 2.1), assim a raiz vai de x_0 para a direita, de acordo com o diagrama de Bratteli. O tronco central é uma sequência infinita $(x_i)_{i \geq 0}$, as ramificações acima e abaixo deste tronco seguem das arestas que entram em cada símbolo. A propriedade que queremos é que exista infinitas ramificações para a esquerda ao longo do string. Mas isto é uma consequência da não trivialidade à esquerda: conseguimos concluir se pudermos mostrar que existe uma subsequência crescente infinita m_i tal que a j -ésima coluna de $L^{(m_i, m_{i+1})}$ é $\geq 2, \forall i$, para cada $1 \leq j \leq l_{m_{i+1}}$. E a não trivialidade à esquerda implica isto, assim construímos esta subsequência indutivamente a partir do tempo $m_0 = 0$, em seguida tomando $m_1 = 0 + n$ (o mesmo n da definição 2.1), e assim

por diante. Finalmente esta ramificação infinita para a esquerda implica que $W^s(x)$ não pode ter um elemento máximo e/ou não pode ter um elemento mínimo.

Para a próxima afirmação, desenhamos uma árvore também com um tronco central e uma sequência $(x_i)_{i \geq 0}$, mas agora ramificando na direção oposta, escrevemos para cima ou para baixo escolhido arbitrariamente (aqui a ordem estável é irrelevante). A não trivialidade à direita implica que ramos se separam do tronco uma infinidade de vezes em $+\infty$. Dado um cilindro $[\cdot x_0 \dots x_n]$, seus pontos são os strings possíveis após x_n ; para cada separação do tronco após este dígito nós aplicamos parte do ramo seguinte a uma parte do conjunto de Cantor ternário usual (e manipulamos as múltiplas separações similarmente). Visto que este processo continua em todos os níveis, segue que o espaço de infinitos caminhos que começam com x_0 é homeomófico ao conjunto de Cantor. Em particular os 0-cilindros $[\cdot x_0 = a]$, para $a \in \mathcal{A}_0$, são conjuntos de Cantor, consequentemente isto também é verdade para $\sum_{(L)}^{0,+}$ que é a união finita de cilindros onde variamos o dígito inicial. \square

Definição 2.2. Dizemos que uma sequência $(L_i)_{i \geq 0}$ de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ 0-1 é *primitiva* se para todo $k \geq 0$, existe $n > k$ tal que $L^{(k,n)} \equiv L_k L_{k+1} \dots L_{n-1}$ tem todas entradas não nulas. Dizemos que a sequência de alfabetos $(\mathcal{A}_i)_{i \geq 0}$ é não trivial se $\limsup_{i \rightarrow +\infty} l_i \geq 2$.

Pelo Lema 2.2, primitividade tem as seguintes consequências no espaço combinatório:

Lema 2.3. Se $(L_i)_{i \geq 0}$ é primitiva com sequência não trivial de alfabetos, então $(L_i)_{i \geq 0}$ é não trivial à esquerda e à direita. Consequentemente todo cilindro é homeomórfico ao conjunto de Cantor, e $T_{\mathcal{O}} : \sum_{(L)}^{0,+} \mathcal{NS} \rightarrow \sum_{(L)}^{0,+} \mathcal{NP}$ e \mathcal{FC} em $\sum_{(L)}^{0,+}$ não tem órbitas finitas.

Demonstração. A prova é dada diretamente pelas definições anteriores, se $(L_i)_{i \geq 0}$ é primitiva, então, $\forall k \geq 0$, $\exists n > k$ tal que $L^{(k,n)}$ tem entradas ≥ 1 . Também como $(\mathcal{A}_i)_{i \geq 0}$ é não trivial temos $\limsup_{i \rightarrow +\infty} l_i \geq 2$. Logo, para todo $k \geq 0$, existe $n > k$ tal

que a soma de cada linha e cada coluna de $L^{(k,n)}$ é ≥ 2 , portanto $(L_i)_{i \geq 0}$ é não trivial à esquerda e à direita. Aí as consequências vem do lema 2.2 \square

Definição 2.3. Dizemos que o diagrama ordenado de Bratteli é *trivial* se $\sum_{(L)}^{0,+} = \mathcal{N}$.

Note que, pelo Lema 2.1 junto com o Lema 2.2, temos que se $(L_i)_{i \geq 0}$ é não trivial à direita, então o diagrama é não trivial, pois a não trivialidade à direita de $(L_i)_{i \geq 0}$ implica (pelo lema 2.2) que $\sum_{(L)}^{0,+}$ é homeomórfico ao conjunto de Cantor, portanto não enumerável. Mas, pelo lema 2.1, \mathcal{N} é enumerável. Logo $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N} \neq \emptyset$ e o diagrama é não trivial.

Diferente da transformação ádica, o grupo \mathcal{FC} age em todo o espaço $\sum_{(L)}^{0,+}$. Examinemos agora uma outra maneira de obter dinâmica neste espaço, estendendo a transformação ádica $T_{\mathcal{O}}$ para uma aplicação em todo o espaço $\sum_{(L)}^{0,+}$. Para isto, escolhemos alguma função $f : \mathcal{NS} \rightarrow \mathcal{NP}$, definimos $T_{\mathcal{O},f} = T_{\mathcal{O}}$ em $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NS}$ e $T_{\mathcal{O},f} = f$ em \mathcal{NS} . Chamamos $T_{\mathcal{O},f}$ de *transformação ádica estendida*.

Do Lema 2.2, temos:

Lema 2.4. Se $(L_i)_{i \geq 0}$ é não trivial à esquerda, então toda transformação ádica estendida $(\sum_{(L)}^{0,+}, T_{\mathcal{O},f})$ não tem órbitas periódicas.

Demonstração. Imediato do lema 2.2 e da definição de $T_{\mathcal{O},f}$ \square

Observação 2.1. Definição de uma extensão de aplicação é mais natural em dois casos:

- quando pode-se estender por continuidade (isto é, quando existe uma única extensão contínua);
- quando \mathcal{NS} e \mathcal{NP} são ambos conjuntos unitários, assim existe uma única escolha para f .

Neste último caso, o diagrama ordenado é conhecido na literatura como “propriamente ordenado” .

Em certos casos a transformação ádica deveria ser definida somente em uma parte do espaço. Em alguns bons casos onde podemos estendê-la continuamente para todo o espaço $\sum_{(L)}^{0,+}$ são interessantes, mas raras exceções.

Casos onde nenhuma extensão contínua seja possível vem das rotações irracionais no círculo (ver *exemplo 3* no *capítulo 4*); isto também depende muito da escolha do processo de indução, isto é, da renormalização.

O que mostraremos no *capítulo 4* é que, para a ordenação do diagrama de Bratteli dada pela indução *Rauzy*, o diagrama é propriamente ordenado, com uma única extensão possível que dá um homeomorfismo, entretanto, para a *ordem dual* do mesmo diagrama temos a existência de dois elementos máximos (mas ainda um único elemento minimal), e nenhuma extensão contínua é possível.

No estudo á teoria geral de medidas, enfatizamos especialmente o grupo \mathcal{FC} e a transformação $T_{\mathcal{O}}$ em $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NS}$, considerando extensões, sobretudo nos exemplos.

2.3.1 Minimalidade e unicidade ergódica

Definimos a ação de um grupo G , ou semigrupo S , no espaço topológico sendo minimal se toda órbita é densa, e unicamente ergódica (assumindo agora a ação Borel mensurável) se existe uma única medida de probabilidade invariante. Ver, por exemplo, [13] e [21].

Note que nesta definição não assumimos a continuidade da aplicação, nem compacidade do espaço, assim pode-se aplicar não só às ações do grupo $\mathcal{FC}(\sum_{(L)}^{0,+})$ (no espaço compacto $\sum_{(L)}^{0,+}$, por homeomorfismos) mas também ao homeomorfismo $T_{\mathcal{O}}$ do espaço, em geral, não compacto $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$ e à transformação ádica estendida $T_{\mathcal{O},f}$ em $\sum_{(L)}^{0,+}$; como veremos na *Proposição 4.1*, as aplicações estendidas $T_{\mathcal{O},f}$ podem não ser contínuas nem bijetoras.

Temos a seguinte relação:

Proposição 2.1. (i) *Uma medida invariante para a transformação ádica $T_{\mathcal{O}}$ em $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$ é invariante para \mathcal{FC} e para $T_{\mathcal{O},f}$ em $\sum_{(L)}^{0,+}$. Uma medida de probabilidade invariante não atômica para \mathcal{FC} ou para $T_{\mathcal{O},f}$ é também uma medida de probabilidade invariante*

para $T_{\mathcal{O}}$.

(ii) Se $(L_i)_{i \geq 0}$ é não trivial à esquerda, então unicidade ergódica é verdadeira (ou falsa), simultaneamente para as três ações.

(iii) Se a ação de \mathcal{FC} é minimal, então assim é também para $T_{\mathcal{O}}$ e para $T_{\mathcal{O},f}$.

Demonstração. (i) Suponha que uma medida de probabilidade μ em $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$ seja invariante para $T_{\mathcal{O}}$. Estendemos para todo $\sum_{(L)}^{0,+}$ dando a \mathcal{N} medida zero. Para mostrar que μ é invariante para o grupo \mathcal{FC} é suficiente checar nos geradores. Suponha que $\gamma \in \mathcal{FC}$ faça intercâmbio entre os cilindros $A = [.x_0 \dots x_{t-2s}]$ e $B = [.y_0 \dots y_{t-2s}]$, assim, pela ordenação total que define a transformação ádica, uma destas palavras é menor, logo existe $k \geq 0$ tal que $T_{\mathcal{O}}^k(A) = B$. Conseqüentemente $T_{\mathcal{O}}^{-k}(B \setminus \mathcal{N}) = A \setminus \mathcal{N}$ e assim γ preserva μ . Similarmente, $T_{\mathcal{O},f}$ preserva μ , uma vez que é suficiente verificar em cilindros.

Reciprocamente, se uma medida de probabilidade μ em $\sum_{(L)}^{0,+}$ é não atômica, então, visto que \mathcal{N} é enumerável (pelo lema 2.1), ele tem medida zero, logo μ restringe-se a uma medida de probabilidade em $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$. Supondo que ela seja \mathcal{FC} -invariante, queremos mostrar que $\mu(T_{\mathcal{O}}^{-k}(B \setminus \mathcal{N})) = \mu(A \setminus \mathcal{N}) = \mu(B \setminus \mathcal{N})$ para os cilindros A, B como antes, então definindo γ como acima, concluímos a afirmação. Além disso, $T_{\mathcal{O},f}$ -invariante implica $T_{\mathcal{O}}$ -invariante já que estas coincidem em $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$ e \mathcal{N} tem medida zero.

(ii) Pelo lema 2.2, não trivialidade à esquerda implica que não existe nenhuma órbita finita para qualquer uma das três ações. Portanto qualquer medida de probabilidade invariante é não atômica (pois se existisse um átomo A μ -invariante teríamos $\mu(\text{Orb}(A)) = \infty$, onde $\text{Orb}(A)$ é a órbita de A para frente por qualquer uma das três ações, o que contradiz o fato de μ ser medida de probabilidade). Mas neste caso unicidade ergódica segue de (i).

(iii) Se a ação de \mathcal{FC} é minimal, então assim também é para $T_{\mathcal{O},f}$, visto que as órbitas de $T_{\mathcal{O},f}$ são uniões de órbitas da aplicação ádica e \mathcal{FC} tem as mesmas órbitas que a aplicação ádica por definição (cada árvore estável é uma órbita). $T_{\mathcal{O}}$ é minimal por restrição. \square

2.3.2 Mixing topológico implica minimalidade

Vamos mostrar que mixing topológico implica primitividade e primitividade, por sua vez, implica a minimalidade das ádicas.

Definição 2.4. *Uma família de aplicações (M, f) é topologicamente mixing se para todo $\varepsilon > 0$, e para todo k , existe $N > 0$ tal que para todo $m > N$, para quaisquer bolas A, B em M_k e M_{k+m} de raio $> \varepsilon$, então*

$$A \cap f_k^{-1} \circ f_{k+1}^{-1} \circ \dots \circ f_{k+m-1}^{-1}(B) \neq \emptyset$$

Lema 2.5. *Um sntf $(\sum_{(L)}^{0,+}, \sigma)$ é topologicamente mixing se e somente se a sequência de matrizes é primitiva.*

Demonstração. Imediato da definição. □

O efeito que esta propriedade tem sobre as dinâmicas transversais é dado pelo:

Teorema 2.1. *(Primitividade implica minimalidade para as ádicas e para \mathcal{FC})*

Seja $(L_i)_{i \geq 0}$ uma sequência de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ 0-1, e seja \mathcal{O} uma ordem estável. Se a sequência $(L_i)_{i \geq 0}$ é primitiva com sequência não trivial de alfabetos, então todo ponto em $\sum_{(L)}^{0,+}$ tem uma órbita densa pela aplicação $T_{\mathcal{O}} : \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NS} \rightarrow \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NP}$. O mesmo vale para a transformação ádica $T_{\mathcal{O}} : \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N} \rightarrow \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$, para o grupo \mathcal{FC} de mudança finita de coordenadas e para qualquer transformação ádica estendida $T_{\mathcal{O},f}$.

Demonstração. Provaremos que \mathcal{FC} é minimal mostrando isto para a aplicação ádica $T_{\mathcal{O}} : \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NS} \rightarrow \sum_{(L)}^{0,+} \setminus \mathcal{NP}$, já que esta tem as mesmas órbitas. Dado um ponto $x = (.x_0x_1 \dots) \in \sum_{(L)}^{0,+}$ e um cilindro fino $B = [.b_0b_1 \dots b_k] \in \mathbb{C}_0^k$ para algum k , queremos mostrar que existe $n \in \mathbb{Z}$ com $T_{\mathcal{O}}^n(x) \in B$.

Uma vez que $(L_i)_{i \geq 0}$ é primitiva, existe m tal que todas as entradas de $L_k \dots L_m$ são > 0 . Assim existe um string permitido $(.b_0b_1 \dots b_k w_{k+1} \dots w_m)$ tal que $w_m = x_m$. Portanto o string infinito $w = (.b_0b_1 \dots b_k w_{k+1} \dots w_{m-1} x_m x_{m+1} \dots)$ está permitido. Os

pontos x e w são comparáveis com respeito a ordem, logo $x \leq w$ ou $w \leq x$. No primeiro caso, existe $n \geq 0$ com $T_{\mathcal{O}}^n(x) = w$, no segundo caso $n \leq 0$.

A minimalidade para a aplicação ádica estendida $T_{\mathcal{O},f}$ e para a transformação ádica $T_{\mathcal{O}}$ segue de (iii) da *proposição 2.1*. \square

Um caso onde primitividade falha mas minimalidade ainda vale para a transformação ádica é dado em [7], transformação ádica de Chacon.

2.3.3 Cadeia de Markov

Nesta seção desenvolvemos o material básico para cadeias de Markov não estacionárias tal como apresentado em [3] e [21].

Existem vários tipos de não estacionaridade, podemos ter: o tamanho do alfabeto e as matrizes de transição mudando com o tempo, e mesmo quando o alfabeto e as matrizes são fixas, a própria medida pode ser não estacionária, se ela tem um processo de Markov que não é um processo estacionário.

Dado uma sequência $(\mathcal{A}_i)_{i \geq 0}$ de alfabetos com $\#\mathcal{A}_i = l_i$, o espaço shift não estacionário todo tem como componentes $\prod_{(\mathcal{A})}^{k,+} \equiv \prod_{i=k}^{\infty} \mathcal{A}_i$ e então o snf é $\prod_{(\mathcal{A})}^+ \equiv \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{(\mathcal{A})}^{k,+}$.

Uma sequência $(F_i)_{i \geq 0}$ de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ reais não negativas age para a esquerda ao longo dos espaços de vetor coluna C_i e para a direita ao longo dos espaços de vetor linha R_i , como mostrado no diagrama a seguir, onde as direções das setas foram escolhidas de forma que a composição das aplicações seja dado pelo produto das matrizes, sem inverter ordem:

$$\begin{array}{ccccccc} R_0 & \xrightarrow{F_0} & R_1 & \xrightarrow{F_1} & R_2 & \xrightarrow{F_2} & R_3 \cdots \\ C_0 & \xleftarrow{F_0} & C_1 & \xleftarrow{F_1} & C_2 & \xleftarrow{F_2} & C_3 \cdots \end{array}$$

Assim, por exemplo, $v_0^t F_0 F_1 F_2 \in R_3$ e $F_0 F_1 F_2 v_3 \in C_0$.

Definição 2.5. Para uma sequência $(F_i)_{i \geq 0}$ de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ reais não negativas, se temos uma sequência v_i de vetores coluna não nulos e números λ_i não nulos satisfazendo

$$F_i v_{i+1} = \lambda_i v_i$$

ou vetores linha satisfazendo

$$v_i^t F_i = \lambda_i v_{i+1}^t$$

para cada $i \geq 0$, chamamos isto de *sequência de autovetores coluna* (respectivamente *linha*) com autovalores λ_i .

Escrevemos $C_i^+ \subseteq C_i$ e $R_i^+ \subseteq R_i$ para os **cones positivos**, isto é, os cones de vetores não negativos; como a matriz é positiva, estes são preservados no diagrama anterior.

Lembremos que um vetor $v \in \mathbb{R}^{l_k}$ é um *vetor de probabilidade* se cada componente v_i é ≥ 0 e se $\sum_{i=0}^{l_k-1} v_i = 1$. Usamos a norma $\|v\| \equiv \sum |v_k|$, assim o subconjunto de cones positivos C_k^+ com norma 1 é o *simplexo unitário fechado* Δ_k (os vetores coluna de probabilidade). Denotemos o *simplexo positivo* de linhas por $\Delta_i^t \subseteq R_i^+$, e as projeções:

$$Proj : (C_i^+ - \{0\}) \longrightarrow \Delta_i \text{ onde } v \mapsto v/\|v\|$$

e;

$$Proj : (R_i^+ - \{0\}) \longrightarrow \Delta_i^t \text{ onde } v^t \mapsto v^t/\|v^t\|.$$

Escrevemos 1_i para todo vetor coluna ($l_i \times 1$) cujas entradas são 1. Isto dá um modo conveniente de dizer que uma matriz P_i ($l_i \times l_{i+1}$) é uma matriz de *probabilidade* ou *estocástica*, isto é, que cada linha é um vetor de probabilidade: de modo que isto vale se e só se $P_i 1_{i+1} = 1_i$. Além disso temos:

Lema 2.6. *Uma sequência $(P_i)_{i \geq 0}$ de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ é estocástica se e somente se $(1_i)_{i \geq 0}$ é uma sequência de autovetores coluna com autovalores constantes iguais a 1, se e somente se em sua ação em vetores linha, cada matriz P_i da sequência aplica Δ_i^t em Δ_{i+1}^t .*

Demonstração. $(P_i)_{i \geq 0}$ é estocástica $\Leftrightarrow P_i 1_{i+1} = 1_i, \forall i$. Assim a primeira afirmação é imediata.

Agora, para $\pi_i^t \in \Delta_i^t$, $(\pi_i^t P_i)1_{i+1} = 1$ se e somente se $\pi_i^t P_i \in \Delta_{i+1}^t$; e $\pi_i^t(P_i 1_{i+1}) = 1$ para cada $\pi_i^t \in \Delta_i^t$ se e somente se $P_i 1_{i+1} = 1_i$, visto que Δ_i^t cai sobre o hiperplano afim ortogonal a 1_i . Assim $P_i 1_{i+1} = 1_i \Leftrightarrow \pi_i^t(P_i 1_{i+1}) = 1 = (\pi_i^t P_i)1_{i+1} \Leftrightarrow \pi_i^t P_i \in \Delta_{i+1}^t$. \square

Assim, dado uma sequência estocástica $(P_i)_{i \geq 0}$ podemos gerar uma sequência de autovetores linha normalizados com autovalores constantes iguais a 1: começando com algum $\pi_0 \in \Delta_0$, e fixando $\pi_k^t = \pi_0^t P_0 P_1 \dots P_{k-1} \in \Delta_k^t$.

Agora suponha começarmos com uma sequência de matrizes reais não negativas $(F_i)_{i \geq 0}$ que não é necessariamente estocástica. Escolhemos um vetor de probabilidade $\pi_0 \in \Delta_0$, usamos (F) para definir uma função μ_0 na coleção \mathbb{C}_0^m de todos os cilindros finos de $\prod_{(\mathcal{A})}^{0,+}$ para $m \geq 0$ como a seguir.

Para $\pi_0^t = ((\pi_0^t)_1, (\pi_0^t)_2, \dots, (\pi_0^t)_{l_0})$, fixamos

$$\mu_0([\cdot x_0]) = (\pi_0^t)_{x_0} \text{ para } m = 0; \quad (2.1)$$

$$\mu_0([\cdot x_0 \dots x_m]) = (\pi_0^t)_{x_0} (F_0)_{x_0 x_1} \dots (F_{m-1})_{x_{m-1} x_m} \text{ para } m \geq 1$$

Isto pode não definir uma medida; a condição necessário e suficiente para se obter uma medida é que estas matrizes sejam estocásticas:

Proposição 2.2. *Seja $(P_i)_{i \geq 0}$ uma sequência de matrizes estocásticas $(l_i \times l_{i+1})$:*

- (i) μ_0 definido em (2.1) para $F_i = P_i$ estende-se de forma bem definida para cilindros finos gerais de $\prod_{(\mathcal{A})}^{0,+}$ onde é finitamente aditiva, e a partir daí estende-se (de forma única) para uma medida enumeravelmente aditiva na σ -álgebra de Borel de $\prod_{(\mathcal{A})}^{0,+}$.
- (ii) Reciprocamente, se (2.1) define uma medida, então cada F_i é estocástica.
- (iii) Para algum k fixo, denotamos μ_k para a medida definida a partir da sequência $\sigma^k(P) = (P_k, P_{k+1}, \dots)$, com alguma sequência inicial de vetores de probabilidade $\pi_k^t = \pi_0^t P_0 P_1 \dots P_{k-1}$, então $(\mu_k)_{k \geq 0}$ em $\prod_{(\mathcal{A})}^{k,+}$ é uma sequência de medidas invariante para a aplicação shift no espaço shift não estacionário todo $\prod_{(\mathcal{A})}^+$, isto

é, satisfaz $\mu_{k+1} = \mu_k \circ \sigma^{-1}$ se e somente se π_k^t é uma sequência de autovetores com autovalores 1, isto é, $\pi_k^t = \pi_0^t P_0 P_1 \dots P_{k-1}$.

Demonstração. Para simplificar a prova assumimos, sem perda de generalidade, que todos os alfabetos são idênticos, iguais a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Primeiro estendemos μ_0 para um cilindro geral terminado com um determinado símbolo, por exemplo, $[.***0]$ ou $[.11*0]$, somando a contribuição de cada cilindro fino que o compõe. Isto está bem definido pois a decomposição é única. Depois verificamos que μ_0 é aditiva; mostramos, por exemplo, que $\mu_0([.11]) = \mu_0([.11*]) = \mu_0([.111] \cup [.110]) = \mu_0([.111]) + \mu_0([.110])$; aqui usa-se o fato que cada P_i é estocástico. Pois $\mu_0([.11]) = (\pi_0^t)_1(P_0)_{11}$ e $\mu_0([.111]) + \mu_0([.110]) = (\pi_0^t)_1(P_0)_{11}(P_1)_{11} + (\pi_0^t)_1(P_0)_{11}(P_1)_{10} = (\pi_0^t)_1(P_0)_{11} \cdot [(P_1)_{11} + (P_1)_{10}]$, mas $(P_1)_{11} + (P_1)_{10} = 1$, pois P_1 é estocástica, portanto $\mu_0([.111]) + \mu_0([.110]) = (\pi_0^t)_1(P_0)_{11} = \mu_0([.11])$, assim (i) \Leftrightarrow (ii).

Para provar invariância da sequência de medidas μ_k em relação ao shift, é suficiente verificar nos cilindros finos; precisamos mostrar, por exemplo, que $\mu_1([.11])$ é igual a $\mu_0(\sigma^{-1}([.11])) = \mu_0([.111] \cup [.011])$ que é igual a $\mu_0([.111]) + \mu_0([.011])$, mas isto segue da hipótese $\pi_i^t P_i = \pi_{i+1}^t$, pois $\mu_0([.111]) + \mu_0([.011]) = (\pi_0^t)_1(P_0)_{11}(P_1)_{11} + (\pi_0^t)_0(P_0)_{01}(P_1)_{11} = (\pi_1^t)_1(P_1)_{11} = \mu_1([.11])$.

Reciprocamente, se a sequência de medidas é invariante, de (2.1) temos que as componentes $(\pi_k)_i$ do vetor π_k são $\mu_k([.i])$, assim $(\pi_{k+1}^t)_i = \mu_{k+1}([.i]) = \mu_k \circ \sigma^{-1}([.i]) = \mu_k([.0i]) + \mu_k([.1i]) = (\pi_k^t)_0(P_k)_{0i} + (\pi_k^t)_1(P_k)_{1i}$ para cada i , logo $\pi_{k+1}^t = \pi_k^t P_k$. \square

Observação 2.2. Para o caso bi-lateral, qualquer medida μ_0 definida em $\prod_{(\mathcal{A})}^{0,+}$ a partir de uma sequência estocástica P_i e algum vetor inicial de probabilidade π_0^t satisfaz a **propriedade de Markov**, que os eventos passado e futuro são independentes relativo ao estado presente: tome

$A \in \mathcal{B}_{-\infty}^{-1}$, $B \in \mathcal{B}_0^0$ e $C \in \mathcal{B}_1^{+\infty}$, temos que $\mu_B(A \cap C) = \mu_B A \cdot \mu_B C$, onde $\mu_B(E) = \frac{\mu(B \cap E)}{\mu_B}$,

$\forall E \in \mathcal{B}_{-\infty}^{+\infty}$. Basta verificar para cilindros finos: Seja $A = [x_{-j} \dots x_{-1}]$, $B = [x_0]$ e $C = [x_1 \dots x_k]$,

$$\begin{aligned} \mu_B(A \cap C) &= \frac{\mu(A \cap B \cap C)}{\mu_B} = \frac{\mu[x_{-j} \dots x_k]}{\pi_{x_0}} = \frac{\pi_{x_{-j}} P_{x_{-j} x_{-j+1}} \dots P_{x_{k-1} x_k}}{\pi_{x_0}} = \\ &= \frac{\pi_{x_{-j}} P_{x_{-j} x_{-j+1}} \dots P_{x_{-1} x_0} \pi_{x_0} P_{x_0 x_1} \dots P_{x_{k-1} x_k}}{\pi_{x_0} \cdot \pi_{x_0}} = \frac{\mu(A \cap B) \cdot \mu(B \cap C)}{\mu_B \cdot \mu_B} = \mu_B A \cdot \mu_B C. \end{aligned}$$

Definição 2.6. Chamamos a medida μ_k em $\prod_{(\mathcal{A})}^{k,+}$ uma medida de Markov (não estacionária) ou *cadeia de Markov não estacionária*. Chamamos uma sequência de medidas invariantes de Markov $(\mu_i)_{i \geq 0}$ em $\prod_{(\mathcal{A})}^+$ de *shift de Markov não estacionário*.

Observação 2.3. No nosso uso, um shift de Markov não estacionário é uma família de aplicações com a aplicação shift ao longo de uma sequência de componentes invariantes $\prod_{(\mathcal{A})}^{k,+}$ com uma sequência invariante de medidas de Markov $(\mu_i)_{i \geq 0}$; reciprocamente, note que uma medida de Markov μ_0 em $\prod_{(\mathcal{A})}^{0,+}$ sempre determina uma sequência invariante de medidas de Markov. Ver também Observação 2.4. Uma vez que, neste caso, cada medida na sequência determina todas as outras posteriores, também se pode trabalhar apenas com a medida de Markov μ_0 na zero-ésima componente $\prod_{(\mathcal{A})}^{0,+}$.

Assim como no caso de uma cadeia de Markov estacionária, o significado da multiplicação de matrizes é dada pela probabilidade de transição:

Proposição 2.3. Dado uma sequência de matrizes estocásticas $(P_i)_{i \geq 0}$, vetor linha inicial de probabilidade e a correspondente cadeia de Markov não estacionária $\prod_{(\mathcal{A})}^+$, a ij -ésima entrada da matriz $P^{(k,n)} \equiv P_k P_{k+1} \dots P_{n-1}$ dá a probabilidade de transição do estado i para o estado j após um intervalo de tempo $(n - k)$, começando em k . Consequentemente, $\pi_n^t = \pi_0^t P^{(0,n)}$ dá a distribuição dos estados no tempo n , para a distribuição inicial π_0^t .

Demonstração. A probabilidade de estar no estado j no tempo $(k + 1)$ dado que estamos no estado i no tempo k é, por definição, $\mu_0([\cdot * \dots * ij]) / \mu_0([\cdot * \dots * i]) = \mu_k([\cdot ij]) / \mu_k([\cdot * i]) = \mu_k([\cdot ij]) / \mu_{k+1}([\cdot i])$ e, da definição de μ_0 , esta é a ij -ésima entrada

da matriz P_k . Para $n > 1$, a matriz produto automaticamente soma as probabilidades de todos os caminhos no espaço shift, completando a prova. \square

Observação 2.4. *Enfatizamos que, se temos uma matriz estocástica $P_{(d \times d)}$ e um vetor inicial não invariante de probabilidade π_0^t , a medida de Markov resultante em $\prod_0^\infty \{0, \dots, d-1\}$ será não estacionária, isto é, não irá definir um processo estacionário, no entanto, vista como uma componente de um espaço shift não estacionário com $\mathcal{A}_i = \{0, \dots, d-1\}$ para todo i , podemos ter uma sequência invariante de medidas μ_k nas diferentes componentes $\prod_{(\mathcal{A})}^{k,+}$ do espaço total $\prod_{(\mathcal{A})}^+$. As componentes podem ser todas canonicamente identificadas, mas agora pensamos nelas como espaços diferentes, e as medidas são invariantes mas não idênticas com respeito a esta identificação. Pode-se ter uma sequência de medidas que não são invariantes, e de fato nos deparamos com isto mais adiante, com a medida central de Parry.*

No cenário não estacionário, com alfabetos $(\mathcal{A}_i)_{i \geq 0}$, seja $(P_i)_{i \geq 0}$ uma sequência estocástica, com π_0^t sendo um elemento de Δ_0^t , e seja μ_0 em $\prod_{(\mathcal{A})}^{0,+}$ a medida de Markov com a distribuição inicial como definido em (2.1). Assim como anteriormente, a sequência de vetores linha $\pi_0^t, \pi_1^t = \pi_0^t P_0, \dots, \pi_m^t = \pi_0^t P^{(0,m)}$ é uma sequência de autovetores normalizados com autovalores 1.

2.3.4 Medida central de Parry

Voltemos a situação geral das medidas de Markov não estacionária para subshifts não estacionários do tipo finito (*sntf*); do ponto de vista da teoria de medidas, ela é apenas uma restrição ao suporte da medida de Markov em cada componente. Do ponto de vista de teoria ergódica, ela se torna bastante interessante, visto que está estudando todas as medidas de Markov com este suporte. Então, para uma matriz primitiva L fixa, Parry ([20], p.61) apresenta uma única medida invariante μ que satisfaz uma propriedade de equidistribuição forte, garantindo que ela é a única medida de entropia máxima para o *stf* (seguimos a prática de teoria ergódica padrão para chamá-la de medida de Parry, embora a fórmula tenha sido primeiro encontrada por Shannon em

teoria de códigos).

Parte da importância de μ é que existe uma segunda medida ν , equivalente a μ mas que não é, em geral, shift-invariante, porém é invariante para as mudanças de coordenadas finitas (\mathcal{FC}) e não atômicas, e conseqüentemente dá (quando normalizado) uma medida de probabilidade invariante para as transformações ádicas e transformações estendidas (por (i) da Proposição 2.1).

Para estender estas idéias para o caso não estacionário, faremos duas suposições: que a seqüência $(L_i)_{i \geq 0}$ de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ 0 – 1 deve ser reduzida e primitiva; estas propriedades garantirão que as seqüências de autovetores linha e coluna sejam estritamente positivas (necessário para a construção), como explicaremos.

Antes daremos uma outra perspectiva sobre o que significa a matriz ser reduzida.

Definição 2.7. Denotemos os vetores linha e coluna estritamente positivos de \mathbb{R}^m por $\overset{\circ}{R}^+$ e $\overset{\circ}{C}^+$. Para dimensão ≥ 2 estes são o interior dos cones positivos R^+ e C^+ ; para dimensão 1 temos $\overset{\circ}{C}^+ = (0, +\infty) \subseteq [0, +\infty) = C^+$.

Temos então:

Lema 2.7. Uma matriz real $M(m \times n)$ não tem nenhuma linha identicamente nula se, e somente se, ela aplica $\overset{\circ}{C}^+(\mathbb{R}^n)$ em $\overset{\circ}{C}^+(\mathbb{R}^m)$; e não tem nenhuma coluna identicamente nula se, e somente se, ela aplica $\overset{\circ}{R}^+(\mathbb{R}^m)$ em $\overset{\circ}{R}^+(\mathbb{R}^n)$.

Encontraremos uma seqüência estocástica $(P_i)_{i \geq 0}$ especial, que é compatível com $(L_i)_{i \geq 0}$, isto é, tem as mesmas dimensões e $(P_{ij} = 0) \Leftrightarrow (L_{ij} = 0)$. Como no caso estacionário, isto garantirá que qualquer medida de Markov com matrizes de transição (P_i) esteja suportada em todo o $sntf \sum_{(L)}^+$.

Denotemos por $\widehat{\Omega}_L$ para a coleção de todas as seqüências (\widehat{w}) de autovetores coluna estritamente positivos com autovalores 1, e $\widehat{\Omega}_L^t$ para os autovetores linha, então:

$$\widehat{\Omega}_L = \{(\widehat{w}) = (\widehat{w}_0 \widehat{w}_1 \dots) \text{ com } \widehat{w}_i = L_i \widehat{w}_{i+1}, \text{ tal que } \forall i \geq 0, \widehat{w}_i \in \overset{\circ}{C}_i^+\}$$

$$\text{e } \widehat{\Omega}_L^t = \{(\widehat{v}^t) = (\widehat{v}_0^t \widehat{v}_1^t \dots) \text{ com } \widehat{v}_i^t L_i = \widehat{v}_{i+1}^t, \text{ e } \widehat{v}_i^t \in \overset{\circ}{R}_i^+\}.$$

Lema 2.8. *Seja $(L_i)_{i \geq 0}$ uma seqüência primitiva e reduzida de matrizes $0-1$ ($l_i \times l_{i+1}$). Então os conjuntos $\widehat{\Omega}_L$ e $\widehat{\Omega}_L^t$ são não vazios. Uma seqüência em $\widehat{\Omega}_L^t$ é, a menos de multiplicação por constantes positivas, determinada pela escolha do primeiro elemento estritamente positivo \widehat{v}_0^t .*

Demonstração. Para vetores linha, nós simplesmente começamos com algum $\widehat{v}_0^t \in \overset{\circ}{R}_0^+$ e aplicamos as matrizes L_i (reduzidas e primitivas); pelo lema 2.7, as imagens são todas estritamente positivas também.

Para vetores coluna, há duas razões pela qual não podemos aplicar o argumento anterior: as matrizes L_i^{-1} podem não ser positivas, e podem não ser inversíveis. Então procedemos da seguinte maneira: Para $k, n \geq 0$, denotamos

$$C_{(k,n)}^+ = L_k L_{k+1} \dots L_{n-1} C_n^+ = L^{(k,n)} C_n^+.$$

Estes são encaixantes:

$$C_k^+ \supseteq C_{(k,k+1)}^+ \supseteq \dots$$

Temos o gráfico:

$$C_{(k,n)}^+ \xleftarrow{L_k} \dots \xleftarrow{L_{n-1}} C_n^+.$$

A intersecção $C_{(0,+\infty)}^+$ dos cones fechados encaixantes é não vazia, por compacidade; e pela primitividade, todos seus elementos não nulos são estritamente positivos. Note que para cada k , $L_k C_{(k+1,+\infty)}^+ = C_{(k,+\infty)}^+$.

Começamos com algum \widehat{w}_0 não nulo (consequentemente estritamente positivo) em $C_{(0,+\infty)}^+$; procedendo indutivamente, dado $\widehat{w}_k \in C_{(k,+\infty)}^+$ escolhemos $\widehat{w}_{k+1} \in C_{(k+1,+\infty)}^+$ (novamente estritamente positivo) tal que $L_k \widehat{w}_{k+1} = \widehat{w}_k$. Isto produz toda a coleção $\widehat{\Omega}_L$. \square

Agora, projetamos cada elemento da seqüência (\widehat{w}) para o simplexo unitário, com $w_i = \widehat{w}_i / \|\widehat{w}_i\| = Proj(\widehat{w}_i) \in \Delta_i$, e escrevemos Ω_L para a coleção de todas seqüências normalizadas (w) . Normalizamos então a seqüência de vetores linha de um jeito diferente, que depende da escolha de (\widehat{w}) : definimos $(v^t) = (v_i^t)_i$ por $v_i^t = \widehat{v}_i^t / (\widehat{v}_i^t \cdot w_i)$ para

$i \in \mathbb{N}$. Como w_i é estritamente positivo, $v_i^t w_i \neq 0$. Nossa normalização foi escolhida de modo que o produto interno de v_i^t com w_i seja 1.

Definimos números reais λ_i por $\lambda_i = \lambda_i(\widehat{w}) = \|\widehat{w}_i\|/\|\widehat{w}_{i+1}\| \geq 1$, e assim temos para cada $i \geq 0$,

$$L_i w_{i+1} = \lambda_i w_i.$$

Lema 2.9. *Seja $(\widehat{w}_i)_{i \geq 0} \in \widehat{\Omega}_L$ e $(\widehat{v}_i^t)_{i \geq 0} \in \widehat{\Omega}_L^t$ sequências de autovetores coluna e linha, e seja $(w_i)_{i \geq 0}, (v_i^t)_{i \geq 0}$ as correspondentes sequências normalizadas como definido acima. Então $(v_i^t)_{i \geq 0}$ tem os mesmos autovalores que $(w_i)_{i \geq 0}$.*

Demonstração. Definindo $\widetilde{\lambda}_i$ por $v_i^t L_i = \widetilde{\lambda}_i v_{i+1}^t$, temos $\widetilde{\lambda}_i = \lambda_i$, pois:

$$\widetilde{\lambda}_i = \widetilde{\lambda}_i(\widehat{v}_{i+1}^t w_{i+1}) = (v_i^t L_i) w_{i+1} = v_i^t (L_i w_{i+1}) = v_i^t (\lambda_i w_i) = \lambda_i. \quad \square$$

A partir de uma escolha $\widehat{w}_i, \widehat{v}_i^t$ definimos uma medida não estacionária de Parry. Primeiro definimos vetores $(\pi^t) = (\pi_i^t)_{i \geq 0}$ por $(\pi_i^t)_k = (v_i^t)_k (w_i)_k$ onde k é o índice de uma letra no i -ésimo alfabeto. Da normalização temos $v_i^t w_i = 1$, assim π_i^t é um elemento de Δ_1^t . Este é estritamente positivo já que v_i^t e w_i o são.

Agora definimos uma sequência de matrizes $(P_i)_{i \geq 0}$ por

$$P_i = \frac{1}{\lambda_i} W_i^{-1} L_i W_{i+1}, \quad (2.2)$$

onde W_i é a matriz diagonal $(l_i \times l_i)$ com entradas do vetor w_i na diagonal. Esta é uma interpretação matricial da fórmula de Parry. Para as entradas da matriz, geralmente escrevemos (para o caso estacionário):

$$P_{ij} = \frac{L_{ij} w_j}{\lambda w_i},$$

como em [2] e [20]. Denotamos por 1_i para o vetor coluna com l_i entradas todas iguais a 1, temos, análogo ao caso estacionário (aqui a notação da matriz em (2.2) é bastante

conveniente):

$$P_i 1_{i+1} = 1_i,$$

pois:

$$P_i 1_{i+1} = \frac{1}{\lambda_i} W_i^{-1} L_i W_{i+1} 1_{i+1} = \frac{1}{\lambda_i} W_i^{-1} L_i w_{i+1} = \frac{1}{\lambda_i} W_i^{-1} \lambda_i w_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i} 1_i = 1_i.$$

Logo P_i é estocástica (pelo lema 2.6). Também temos que:

$$\pi_i^t P_i = \pi_{i+1}^t,$$

pois:

$$\pi_i^t \frac{1}{\lambda_i} W_i^{-1} L_i W_{i+1} = \frac{1}{\lambda_i} v_i^t L_i W_{i+1} = \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i v_{i+1}^t W_{i+1} = v_{i+1}^t W_{i+1} = \pi_{i+1}^t.$$

Esta é a sequência de autovetores (à direita e à esquerda) com autovalores constantes iguais a 1.

Para $k, m \geq 0$ com $k < m$, fixamos $\lambda_{(w)}^{(k,m)} = \prod_{i=k}^{m-1} \lambda_i(w)$. Definimos então uma medida de probabilidade μ_k em $\sum_{(L)}^{k,+}$: a medida do cilindro é:

$$\begin{aligned} \mu_k([\cdot x_k \dots x_m]) &\equiv (\pi_k^t)_{x_k} (P_k)_{x_k x_{k+1}} \dots (P_{m-1})_{x_{m-1} x_m} = \\ &= (v_k^t)_{x_k} (w_k)_{x_k} \frac{(w_{k+1})_{x_{k+1}}}{\lambda_k(w_k)_{x_k}} \dots \frac{(w_m)_{x_m}}{\lambda_{m-1}(w_{m-1})_{x_{m-1}}} = \frac{1}{\lambda_{(w)}^{(k,m)}} (v_k^t)_{x_k} (w_m)_{x_m}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Complementamos observando que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{(w)}^{(k,m)}} (v_k^t)_{x_k} (w_m)_{x_m} &= \frac{\|\widehat{w}_{k+1}\|}{\|\widehat{w}_k\|} \frac{\|\widehat{w}_{k+2}\|}{\|\widehat{w}_{k+1}\|} \dots \frac{\|\widehat{w}_{m-1}\|}{\|\widehat{w}_{m-2}\|} \frac{\|\widehat{w}_m\|}{\|\widehat{w}_{m-1}\|} (v_k^t)_{x_k} (w_m)_{x_m} \\ &= \frac{\|\widehat{w}_m\|}{\|\widehat{w}_k\|} (v_k^t)_{x_k} (w_m)_{x_m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mas } (v_k^t)_{x_k} &= \frac{(\widehat{v}_k^t)_{x_k}}{\widehat{v}_k^t \cdot w_k}, \quad (w_m)_{x_m} = \frac{(\widehat{w}_m)_{x_m}}{\|\widehat{w}_m\|}, \quad \text{então } \frac{\|\widehat{w}_m\|}{\|\widehat{w}_k\|} (v_k^t)_{x_k} (w_m)_{x_m} = \\ &= \frac{1}{\|\widehat{w}_k\|} \frac{(\widehat{v}_k^t)_{x_k}}{\widehat{v}_k^t \cdot w_k} (\widehat{w}_m)_{x_m}. \end{aligned}$$

E como $w_k = \widehat{w}_k / \|\widehat{w}_k\|$ concluímos que:

$$\mu_k([\cdot x_k \dots x_m]) = \frac{1}{\|\widehat{w}_k\|} \frac{(\widehat{v}_k^t)_{x_k} \|\widehat{w}_k\|}{\widehat{v}_k^t \cdot w_k} (\widehat{w}_m)_{x_m} = \frac{(\widehat{v}_k^t)_{x_k}}{\widehat{v}_k^t \cdot \widehat{w}_k} (\widehat{w}_m)_{x_m}. \quad (2.4)$$

Pela *Proposição 2.2*, isto dá uma medida que é positiva nos conjuntos abertos de $\sum_{(L)}^{k,+}$, já que P_i é compatível com L_i e é estocástica. Em outras palavras, ela tem suporte completo. Chamamos esta tal medida de **medida de Parry**. Note que (2.3) dá uma forma forte de equidistribuição, já que todos os cilindros em \mathbb{C}_m^k tem quase as mesmas medidas; isto é semelhante ao caso estacionário citado em [2].

A **medida central de Parry** $\nu_k = \nu_k(w)$ em $\sum_{(L)}^{k,+}$ é então dada por:

$$\nu_k([\cdot x_k \dots x_m]) = \frac{\mu_k([\cdot x_k \dots x_m])}{(v_k)_{x_k}} = (w_k)_{x_k} (P_k)_{x_k x_{k+1}} \dots (P_{m-1})_{x_{m-1} x_m} = \frac{1}{\lambda_{(w)}^{(k,m)}} (w_m)_{x_m} \quad (2.5)$$

Em termos de sequências de autovetores normalizados (w) e não normalizados (\widehat{w}) de (L_i) , teremos então para $\lambda^{(0,m)} = \lambda_{(w)}^{(0,m)}$ e $\|\widehat{w}_0\| = 1$:

$$\nu_0([\cdot x_0 \dots x_m]) = \frac{1}{\lambda^{(0,m)}} (w_m)_{x_m} = \frac{\|\widehat{w}_1\| \|\widehat{w}_2\|}{\|\widehat{w}_0\| \|\widehat{w}_1\|} \dots \frac{\|\widehat{w}_m\|}{\|\widehat{w}_{m-1}\|} \frac{(\widehat{w}_m)_{x_m}}{\|\widehat{w}_m\|} = (\widehat{w}_m)_{x_m}. \quad (2.6)$$

Indicamos a dependência destas medidas em (\widehat{w}) e (\widehat{v}^t) (ou equivalentemente em (w) e (v^t)) escrevendo: $(\pi^t)_{w,v^t}$, $(P)_w$ e $\nu = \nu_w$. Enfatizamos que a sequência $(\widehat{v}_i^t)_{i \geq 0}$ é determinada pelo seu primeiro elemento \widehat{v}_0^t , e que os autovetores não estão necessariamente normalizados.

Observação 2.5. Para as equações (2.3) e (2.5), ambas definem sequências de medidas de Markov, embora, em geral, de (iii) da Proposição 2.2 a sequência de medidas centrais não seja shift-invariante e assim não é um shift de Markov não estacionário.

Definição 2.8. Dado uma sequência $(L_i)_{i \geq 0}$ de matrizes 0–1, dizemos que uma medida m em $\sum_{(L)}^{0,+}$ tem a **propriedade de Bowen-Marcus** se $m_t(s) = m([.x_0 \dots x_{t-1}])$ para $x_{t-1} = s \in \mathcal{A}_{t-1}$ está bem definido; isto é, a medida do cilindro fino depende somente do seu comprimento e do último dígito.

Por (2.6) qualquer medida central de Parry ν_w , para $w \in \Omega_L$ (conjunto de sequências de autovetores normalizados) tem esta propriedade.

2.3.5 Transformações ádicas em edge-shift

Como prometido no Capítulo 1, retornaremos a discutir edge-shift e o diagrama de Bratteli afim de generalizar as ádicas para estes casos. Duas razões para olharmos para diagramas de arestas múltiplas é que a notação arestas é geralmente mais compacta, visto que matrizes com dimensões menores podem ser usadas, e que os edge-shifts surgem naturalmente do vertex-shifts pela operação de telescopar do diagrama.

Começamos como antes, com uma sequência de alfabetos \mathcal{A}_k com $\#\mathcal{A}_k = l_k$ mas agora as matrizes $(F_k)_{k \geq 0}$ ($l_k \times l_{k+1}$) que definem o diagrama podem ter entradas inteiras não negativas; assim desenhamos o diagrama com vértices \mathcal{A}_k no nível k , com a ij -ésima entrada de F_k especificando o número de arestas que vai do símbolo i no nível k para o símbolo j no nível $k + 1$.

Denotamos por \mathcal{E}_k este conjunto de arestas de \mathcal{A}_k para \mathcal{A}_{k+1} , orientadas na direção futuro. Para $e_k \in \mathcal{E}_k$ denotamos por $e_k^- \in \mathcal{A}_k$ a “cauda” da seta (aresta) e $e_k^+ \in \mathcal{A}_{k+1}$ a “cabeça”. Escrevendo $\widehat{l}_k = \#\mathcal{E}_k$, formamos uma sequência $(L_k)_{k \geq 0}$ de matrizes $(\widehat{l}_k \times \widehat{l}_{k+1})$ 0–1 com $(L_k)_{ij} = 1$ se e somente se a aresta e_{k+1} de rótulo j em \mathcal{E}_{k+1} pode vir em seguida da aresta e_k de rótulo i em \mathcal{E}_k , isto é, se e somente se $e_k^+ = e_{k+1}^-$.

Como de costume, $\sum_{(L)}^{0,+}$ denota todos os caminhos de vértices permitidos no diagrama de Bratteli de $(L_k)_{k \geq 0}$, mas agora denotamos por $\sum_{(F)}^{0,+}$ a coleção de todos os caminhos de arestas permitidos no diagrama de $(F_k)_{k \geq 0}$. Note que $\sum_{(L)}^{0,+}$ e $\sum_{(F)}^{0,+}$ se

correspondem bijetivamente. Estamos prontos para discutir ordem. No diagrama de arestas múltiplas de $(F_k)_{k \geq 0}$, a ordem estável \mathcal{O} é definida exatamente como antes, e a partir daí obtemos uma ordem lexicográfica em $W^s(\mathbf{e})$ para $\mathbf{e} \in \sum_{(F)}^{0,+}$, isto é, uma ordem para uma coleção de caminhos de arestas que eventualmente coincidem. A razão disto é que dados dois caminhos de arestas $e_0 e_1 \dots e_k e_{k+1}$ e $\tilde{e}_0 \tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_k e_{k+1}$ que coincidem a partir de e_{k+1} , então as arestas que entram no símbolo $e_{k+1}^- \in \mathcal{A}_{k+1}$ são ordenadas pela ordem \mathcal{O} do diagrama. Isto significa que a ordem estável no diagrama de $(F_k)_{k \geq 0}$ induz uma ordem estável para o diagrama de $(L_k)_{k \geq 0}$. De fato, isto pode ser pensado como uma ordem nos vértices, da seguinte maneira: escrevendo $\mathcal{E}_k^j = \{e_k \in \mathcal{E}_k : e_k^+ = j\}$, esta partição define subconjuntos de \mathcal{E}_k (que é todo o \mathcal{E}_k se o diagrama é reduzido). Cada um destes subconjuntos \mathcal{E}_k^j é ordenado pela ordem de arestas \mathcal{O} ; estendemos isto para uma ordem linear em todo \mathcal{E}_k de um modo arbitrário que respeite as ordens nestes subconjuntos (disjuntos). Isto dá uma ordem nos vértices como desejado.

Note que as ordens no diagrama de $(L_k)_{k \geq 0}$ não são necessariamente deste tipo. Assim, escrevendo Ord_F, Ord_L para as coleções de todas as ordens estáveis no diagramas de $(F_k)_{k \geq 0}$ e $(L_k)_{k \geq 0}$, temos:

Lema 2.10. *Ord_F está embutido canonicamente em Ord_L , mas Ord_L , em geral, não está embutido em Ord_F . A coleção de todas transformações ádicas em $\sum_{(F)}^{0,+}$ corresponde, em geral, a um subconjunto próprio de transformações ádicas em $\sum_{(L)}^{0,+}$ dado pela ordem dos vértices (isto é, máquinas aditivas de Markov, veja exemplo 2 no capítulo 4). Similarmente, o grupo de mudanças finitas de coordenadas \mathcal{FC}_F naturalmente está embutido como um subgrupo de \mathcal{FC}_L , que é, em geral, próprio.*

Demonstração. Mostramos a afirmação para Ord_F e Ord_L , e que para as transformações ádicas segue disto. Para \mathcal{FC} o argumento é similar: podemos ter $\gamma \in \mathcal{FC}_L$ que leva um determinado cilindro de arestas $[e_0 e_1 \dots e_k e_{k+1}]$ para $[\tilde{e}_0 \tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_k e_{k+1}]$, com e_{k-1}^- fixo, mas que não muda todos os cilindros $[\hat{e}_0 \hat{e}_1 \dots \hat{e}_k \hat{e}_{k+1}]$ tal que $\hat{e}_{k+1}^- = e_{k+1}^-$, assim γ não está em \mathcal{FC}_F . (ver figura 2.2) \square

No entanto temos:

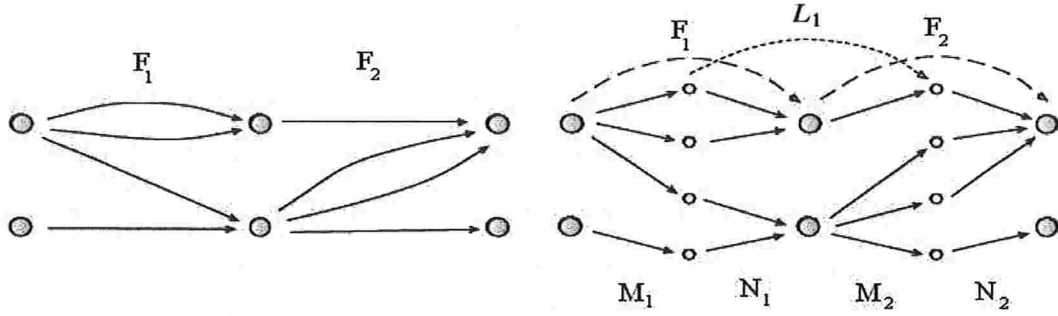


Figura 2.2: Separação de símbolos: $M_k N_k = F_k$ e $N_k M_{k+1} = L_k$. Figura exposta em [4]

Lema 2.11. *Uma medida ν em $\sum_{(F)}^{0,+} = \sum_{(L)}^{0,+}$ é invariante para \mathcal{FC}_F se, e somente se, é invariante para \mathcal{FC}_L .*

Demonstração. Daremos uma prova direta que \mathcal{FC}_L -invariante implica \mathcal{FC}_F -invariante para ν . Se temos dois cilindros $[.e_0 e_1 \dots e_k e_{k+1}]$ e $[\hat{e}_0 \hat{e}_1 \dots \hat{e}_k \hat{e}_{k+1}]$ tal que $e_{k+1}^+ = \hat{e}_{k+1}^+$, então, visto que as matrizes são reduzidas, existe alguma aresta e_{k+2} com $e_{k+2}^- = e_{k+1}^+ = \hat{e}_{k+1}^+$; os cilindros $[.e_0 e_1 \dots e_k e_{k+1} e_{k+2}]$ e $[\hat{e}_0 \hat{e}_1 \dots \hat{e}_k \hat{e}_{k+1} e_{k+2}]$ tem a mesma medida por causa da invariância \mathcal{FC}_L , e em seguida somamos as medidas de todas possibilidades para e_{k+2} : $\nu([.e_0 \dots e_{k+1}]) = \nu([.e_0 \dots e_{k+1} *]) = \sum_i \nu([.e_0 \dots e_{k+1} e_{k+2}^i]) = \sum_i \nu([\hat{e}_0 \dots \hat{e}_{k+1} e_{k+2}^i]) = \nu([\hat{e}_0 \dots \hat{e}_{k+1} *]) = \nu([\hat{e}_0 \dots \hat{e}_{k+1}])$.

Reciprocamente, assumindo que ν é \mathcal{FC}_F -invariante, suponha que seja dado $\gamma \in \mathcal{FC}_L$ com $\gamma : [.e_0 e_1 \dots e_k e_{k+1}] \mapsto [.\tilde{e}_0 \tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_k e_{k+1}]$; queremos mostrar que estes tem a mesma medida. De fato, pela \mathcal{FC}_F -invariância, $\nu([.e_0 \dots e_{k+1}]) = \nu([\hat{e}_0 \hat{e}_1 \dots \hat{e}_k \hat{e}_{k+1}])$ se $e_{k+1}^+ = \hat{e}_{k+1}^+$, logo certamente vale a igualdade se $e_{k+1} = \hat{e}_{k+1}$. \square

Discutimos apenas uma maneira de passar do diagrama de arestas múltiplas para o diagrama de arestas simples; isto é semelhante a passagem de um edge-shift para sua representação em vértices (vertex-shift) no caso estacionário (isto é, para um *stf*, ver [16] ou [18]).

Uma segunda maneira envolve fatoração das matrizes F_k , encontrando uma sequência de matrizes 0-1 ($M_0, N_0, M_1, N_1, \dots$) tais que

$$M_k N_k = F_k.$$

Pode haver muitas maneiras de se fazer isto. Uma fatoração canônica é dada pelo processo de “separação de símbolos”: coloque o conjunto de arestas \mathcal{E}_k como um novo alfabeto entre \mathcal{A}_k e \mathcal{A}_{k+1} de modo a ter alfabetos $(\mathcal{A}_0, \mathcal{E}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{E}_1, \dots)$ e conecte $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_k$ a $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_k$ com uma aresta se, e só se, a aresta \mathbf{e} estiver saindo de \mathbf{a} no diagrama original, indicando por uma matriz M_k 0 – 1, e depois criando uma aresta de \mathbf{e} para $\mathbf{b} \in \mathcal{A}_{k+1}$ se, e só se, essa aresta termina no símbolo \mathbf{b} , indicando por uma matriz N_k 0 – 1. Assim, por definição, $M_k N_k = F_k$ como declaramos.

De fato, existe uma relação entre os dois métodos, pois:

$$N_k M_{k+1} = L_k.$$

Assim, as sequências de matrizes $(F_i)_{i \geq 0}$ e $(L_i)_{i \geq 0}$ são agrupamentos da sequência $(M_i, N_i)_{i \geq 0}$, uma ao longo dos tempos pares e a outra ao longo dos tempos ímpares, cada uma dá um telescópio do diagrama todo, como dissemos no capítulo 1. Ver figura 2.2.

Lema 2.12. *Seja uma sequência $(F_i)_{i \geq 0}$ de matrizes inteiras não negativas $(l_i \times l_{i+1})$, com $(P_i)_{i \geq 0}$ um agrupamento de $(F_i)_{i \geq 0}$, então:*

(i) *$(F_i)_{i \geq 0}$ é primitiva se, e só se, $(P_i)_{i \geq 0}$ o é.*

(ii) *Se $(F_i)_{i \geq 0}$ é reduzida, então $(P_i)_{i \geq 0}$ também é, mas não vale a recíproca.*

Demonstração. (i) Dado uma sequência (n_i) com $0 = n_0 < n_1 < \dots$ que acompanha a realização do agrupamento; isto é, $P_i = F_{n_i} F_{n_i+1} \dots F_{n_{i+1}-1}$. Os produtos parciais de P_i é uma subsequência de produtos parciais de F_i , então primitividade de (F_i) implica a de (P_i) . Reciprocamente, se (P_i) é primitiva, então a partir de $k = n_i$, o produto de F_i é certamente eventualmente positivo; mas o mesmo se aplica a partir de qualquer $n_{i-1} < k < n_i$.

(ii) Se $(\widehat{F}_i)_{i \geq 0}$ é uma sequência reduzida determinada por $(F_i)_{i \geq 0}$, então seu agrupamento ao longo da subsequência dá a sequência reduzida $(\widehat{P}_i)_{i \geq 0}$ para $(P_i)_{i \geq 0}$. Assim, ser reduzida passa para o agrupamento. Que a recíproca é falsa é mostrado por um

simples exemplo de duas matrizes (3×3) , com todas entradas positivas exceto para a última linha da primeira matriz e a última coluna da segunda que são identicamente nulas; o produto é estritamente positivo. \square

Lema 2.13. *Dado uma sequência inteira não negativa $(F_i)_{i \geq 0}$ que é não trivial à esquerda ou à direita, o mesmo é verdade para a sequência $(L_i)_{i \geq 0}$ 0–1 associada com conjuntos de arestas sendo os alfabetos.*

Demonstração. Se para cada $1 \leq i \leq l_i$, a soma das entradas na i -ésima linha de $F^{(k,m)} \equiv F_k F_{k+1} \dots F_{m-1}$ é ≥ 2 , então dado uma aresta que vai de $a \in \mathcal{A}_{k-1}$ para $b \in \mathcal{A}_k$, existe pelo menos dois caminhos de arestas indo de b para \mathcal{A}_m , conseqüentemente a soma da a -ésima linha de $L^{(k-1,m)}$ é ≥ 2 . Isto implica não trivialidade à direita para $(L_i)_{i \geq 0}$.

O argumento para não trivialidade à esquerda é similar. \square

Observação 2.6. *Relembremos de (2.6) a fórmula para a única medida invariante ν para o caso de matrizes 0–1. A mesma fórmula vale para matrizes inteiras não negativas $(F_i)_{i \geq 0}$. Sendo \hat{w}_i uma sequência de autovetores coluna estritamente positivos (com autovalores iguais a 1) e normalizados de modo que $\|\hat{w}_0\| = 1$, temos que um cilindro de arestas dado por $[.e_0 \dots e_{m-1}]$ em $\sum_{(F)}^{0,+} \equiv \sum_{(L)}^{0,+}$ tem medida $\nu_{\hat{w}}([.e_0 \dots e_{m-1}]) = (\hat{w}_m)_a$ onde $a = e_{m-1}^+ \in \mathcal{A}_m$. Isto segue da aplicação (2.6) para a fatoração $F_i = M_i N_i$. Na verdade, para dois cilindros finos de arestas $[\tilde{e}_0 \dots \tilde{e}_n]$ e $[.e_0 \dots e_n]$ temos $\nu([\tilde{e}_0 \dots \tilde{e}_n]) = \nu([.e_0 \dots e_n])$ sempre que $\tilde{e}_n^+ = s = e_n^+$. E para o espaço de vértices $\sum_{(L)}^{0,+}$ temos que, para dois cilindros $[\tilde{x}_0 \dots \tilde{x}_n]$ e $[.x_0 \dots x_n]$, $\nu([\tilde{x}_0 \dots \tilde{x}_n]) = \nu([.x_0 \dots x_n])$ sempre que $\tilde{x}_n = s = x_n$. Isto é, a medida de um cilindro fino depende somente de seu comprimento e do último dígito, esta é a propriedade de Bowen-Marcus como anteriormente citado.*

2.3.6 Condição autovetor de Perron-Frobenius implica unicidade ergódica

Denotemos por $\widehat{\Omega}_F^\Delta = \{(\widehat{w}) \in \widehat{\Omega}_F : \widehat{w}_0 \in \Delta_0\}$ a sequência de autovetores coluna com autovalores 1 onde $\|\widehat{w}_0\| = 1$ e $\widehat{\Omega}_F = \{(\widehat{w}) = (\widehat{w}_0 \widehat{w}_1 \dots) : \widehat{w}_i \in \mathbb{C}_i \text{ com } \widehat{w}_i = F_i \widehat{w}_{i+1}\}$.

Então, $(\widehat{w}) \mapsto (\widehat{w})/\|\widehat{w}_0\|$ define uma projeção de $\widehat{\Omega}_F$ para $\widehat{\Omega}_F^\Delta$, normalizando a sequência de forma que seu primeiro elemento esteja em Δ_0 .

Definição 2.9. *Uma sequência $(F_i)_{i \geq 0}$ de matrizes inteiras não negativas tem a **condição autovetor de Perron-Frobenius** se existir uma única sequência normalizada de autovetores coluna estritamente positivos.*

Lema 2.14. (i) $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \{0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow C_{(0,+\infty)} = \cap_{n=0}^{+\infty} F_0 F_1 \dots F_n C_{n+1} \neq \emptyset \Leftrightarrow \widehat{\Omega}_F \neq \emptyset$.

(ii) *Todas as sequências em $\widehat{\Omega}_F^\Delta$ pode ser construída indutivamente da seguinte forma:*

(1) *Escolha \widehat{w}_0 em $\Delta_0 \cap C_{(0,+\infty)}$.*

(2) *Escolha $w_{i+1} \in C_{(i+1,+\infty)}$ para ser a pré-imagem de w_i .*

(iii) *Se $(F_i)_{i \geq 0}$ é reduzida e primitiva, então $\widehat{\Omega}_F^\Delta$ é não vazio.*

Demonstração. (i) O número de strings que começam com o símbolo i no tempo 0 e terminam com j no tempo n é igual a $e_i^t F_0 \dots F_n e_j$ onde e_i é um vetor da base canônica e e_i^t a sua transposta, assim a coleção de strings permitidos de comprimento n é não vazio se, e somente se, $F_0 F_1 \dots F_n$ tem alguma entrada não nula, se e somente se, $F_0 F_1 \dots F_n C_{n+1}$ contem algum vetor não nulo. Agora, a primeira declaração vale se, e somente se, (usando a compacidade) existe uma sequência infinita de cilindros finos encaixantes. A segunda declaração vale se, e somente se, $C_{(0,n)} \setminus \{0\} \neq \emptyset$; novamente usamos compacidade, da intersecção do cone $C_{(0,n)}$ com a esfera unitária fechada.

A prova de (ii) é clara.

A prova de (iii) é similar ao que foi feito no lema 2.8. □

Note que, no caso particular onde as matrizes são invertíveis, a sequência no item (ii) do lema é determinada pela escolha de seu primeiro elemento \widehat{w}_0 .

Denotemos por \mathcal{CM}_F a coleção de todas medidas centrais para $(F_i)_{i \geq 0}$, e similarmente para $(L_i)_{i \geq 0}$.

Proposição 2.4. (i) Para a representação vértice $\sum_{(L)}^{0,+}$ de matrizes $(L_i)_{i \geq 0}$ $0-1$, a aplicação Φ de \mathcal{CM}_L para $\widehat{\Omega}_L^\Delta$ definida por $\Phi(\nu) = (\widehat{w})$ com $(\widehat{w}_n)_s = \nu([.x_0 \dots x_n])$ onde $x_n = s$, é bijetora.

(ii) Para o espaço de arestas $\sum_{(F)}^{0,+}$ de matrizes inteiras não negativas $(F_i)_{i \geq 0}$, a aplicação Φ de \mathcal{CM}_F para $\widehat{\Omega}_F^\Delta$ definida por $\Phi(\nu) = (\widehat{w})$ com $(\widehat{w}_n)_s = \nu([.e_0 \dots e_{n-1}])$ onde $e_{n-1}^+ = s$, é bijetora.

Demonstração. Como ν é uma medida central, a fórmula em (i) dá uma sequência bem definida de vetores não negativos; já que $\nu([.s]) = (\widehat{w}_0)_s$ e $\sum_{s \in \mathcal{A}_0} \nu([.s]) = \nu(\sum_{(L)}^{0,+}) = 1$, sabemos que \widehat{w}_0 está no simplexo unitário. Afirmamos que $\widehat{w}_n = L_n \widehat{w}_{n+1}$. Como

$$[.x_0 \dots x_{n-1}i] = \cup \{ [.x_0 \dots x_{n-1}ij] : (L_n)_{ij} = 1 \}$$

e aplicando a medida nesta igualdade temos, pela aditividade, $(\widehat{w}_n)_i = \sum \{ (\widehat{w}_{n+1})_j : (L_n)_{ij} = 1 \} = (L_n \widehat{w}_{n+1})_i$. Então Φ aplica \mathcal{CM}_L em $\widehat{\Omega}_L^\Delta$; agora mostremos que Φ é injetora e sobrejetora.

Para demonstrar isto, suponha que é dado uma sequência $(\widehat{w}) = \widehat{w}_n$ de vetores em $\widehat{\Omega}_L^\Delta$. Definindo ν em cilindros finos por

$$\nu([.x_0 \dots x_n = s]) = (\widehat{w}_n)_s,$$

afirmamos que há uma única extensão para uma medida de probabilidade de Borel em $\sum_{(L)}^{0,+}$. Como antes, denotemos \mathcal{B} para a σ -álgebra de Borel e \mathcal{B}_0 para a álgebra gerada pelos cilindros finos; um elemento de \mathcal{B}_0 é uma união finita de cilindros finos. Para $A \in \mathcal{B}_0$ definimos a sua medida como sendo a soma das medidas de seus conjuntos. No entanto existem muitas maneiras de decompor A , então precisamos mostrar que todas dão o mesmo número.

Primeiro considere A sendo um cilindro fino $[.x_0 \dots x_n]$. Em seguida reescrevemos A como união de cilindros finos de comprimento k para algum $k > n$. Se $k = n + 1$, temos então $[.x_0 \dots x_{n-1}i] = \cup \{ [.x_0 \dots x_{n-1}ij] : (L_n)_{ij} = 1 \}$ e $\nu([.x_0 \dots x_{n-1}i]) = (\widehat{w}_n)_i$, enquanto

$$\sum\{\nu([\cdot x_0 \dots x_{n-1} i j]) : (L_n)_{ij} = 1\} = \sum\{(\widehat{w}_{n+1})_j : (L_n)_{ij} = 1\} = (L_n \widehat{w}_{n+1})_i = (\widehat{w}_n)_i.$$

Indutivamente, isto é verdade para qualquer $k > n$, assim concluímos o caso onde A é um cilindro fino cuja sua decomposição são cilindros de comprimentos iguais.

Agora suponha A sendo escrito de duas formas diferentes, como uma união de coleções \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 de cilindros finos, assim $A = (\cup \mathcal{S}_1) = (\cup \mathcal{S}_2)$. Afirmamos que $\sum_{B \in \mathcal{S}_1} \nu B = \sum_{B \in \mathcal{S}_2} \nu B$. Para isto tomamos k sendo o comprimento máximo dos elementos de $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$; então decompos cada $B \in \mathcal{S}_i$ como uma união de cilindros finos de comprimento k . Pelo passo anterior, a soma de suas medidas coincide com $\sum_{B \in \mathcal{S}_i} \nu B$, e como esta decomposição é única, as somas para $i = 1, 2$ são iguais. Consequentemente $\nu(A)$ não depende do modo que A é decomposto, isto é, ν está bem definido em \mathcal{B}_0 .

Segue-se que ν é aditivo em \mathcal{B}_0 : tomando A e B disjuntos em \mathcal{B}_0 , então $A \cup B$ é uma união de cilindros finos que compõem A e B , então o que fizemos demonstra justamente que $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Finalmente, como o espaço $\sum_{(L)}^{0,+}$ é compacto, existe uma única extensão da álgebra \mathcal{B}_0 para uma medida σ -aditiva em todo \mathcal{B} (ver [22], p.138), completando a prova de (i).

Agora provemos (ii). Tomando a fatoração $(M_i N_i)_{i \geq 0}$ de $(F_i)_{i \geq 0}$, temos que $MN = (MN) = (M_i N_i)_{i \geq 0} = (M_0, N_0, M_1, N_1, \dots)$ são matrizes 0-1, então denotando por $R_i^\mathcal{E}, C_i^\mathcal{E}$, respectivamente, os cones de vetores linha e coluna não negativos no espaço Euclidiano \widetilde{l}_i -dimensional, temos do diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} R_0 & \xrightarrow{F_0} & R_1 & \xrightarrow{F_1} & R_2 & \xrightarrow{F_2} & R_3 \dots \\ C_0 & \xleftarrow{F_0} & C_1 & \xleftarrow{F_1} & C_2 & \xleftarrow{F_2} & C_3 \dots \end{array}$$

o diagrama estendido:

$$\begin{array}{ccccccc} R_0 & \xrightarrow{M_0} & R_0^\mathcal{E} & \xrightarrow{N_0} & R_1 & \xrightarrow{M_1} & R_1^\mathcal{E} & \xrightarrow{N_1} & R_2 \dots \\ C_0 & \xleftarrow{M_0} & C_0^\mathcal{E} & \xleftarrow{N_0} & C_1 & \xleftarrow{M_1} & C_1^\mathcal{E} & \xleftarrow{N_1} & C_2 \dots \end{array}$$

Uma sequência de autovetores coluna $(\widehat{w}_i)_{i \geq 0}$ com autovalores iguais a 1 para a família de aplicações originalmente dada por $(F_i)_{i \geq 0}$ estende-se unicamente para uma

seqüência $(\widehat{w}_0, \widehat{w}_0^\varepsilon, \widehat{w}_1, \widehat{w}_1^\varepsilon, \dots)$ da família *dispersa* (MN) , onde $\widehat{w}_i^\varepsilon \equiv N_i \widehat{w}_{i+1}$ e $\widehat{w}_i = M_i \widehat{w}_i^\varepsilon$. Para as matrizes $L_i \equiv N_i M_{i+1}$ de entradas 0 – 1, temos que $(\widehat{w}_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$ é uma seqüência de autovetores com autovalores 1 para $(L_i)_{i \geq 0}$.

Existe uma correspondência bijetiva natural entre os strings finitos permitidos: $(e_0 \dots e_{n-1})$ e $(x_0 e_0 x_1 \dots x_{n-1} e_{n-1} x_n)$ em $\sum_{(F)}^{0,+}$ e $\sum_{MN}^{0,+}$ onde $x_0 = e_0^-$ e, para $i > 0$ $x_i = e_i^- = e_{i-1}^+$. Isto induz uma bijeção do cilindro $[e_0 \dots e_{n-1}]$ no espaço de arestas $\sum_{(F)}^{0,+}$ para o cilindro $[x_0 e_0 x_1 \dots x_{n-1} e_{n-1} x_n]$ no espaço de vértices $\sum_{MN}^{0,+}$.

Dado ν_F em $\sum_{(F)}^{0,+}$ definimos ν_{MN} em $\sum_{MN}^{0,+}$ via esta correspondência entre cilindros, fixando $\nu_{MN}([x_0 e_0 x_1 \dots x_{n-1} e_{n-1} x_n = s]) \equiv \nu_F([e_0 \dots e_{n-1} : e_{n-1}^+ = s])$. Isto dá uma bijeção de \mathcal{CM}_F para \mathcal{CM}_{MN} . Da parte (i) temos uma bijeção $\Phi_{MN} : \mathcal{CM}_{MN} \longrightarrow \widehat{\Omega}_{MN}^\Delta$. Então ν_{MN} determina uma seqüência de autovetores $(\widehat{w}_i \widehat{w}_i^\varepsilon)_{i \geq 0} \in \widehat{\Omega}_{MN}^\Delta$, que por sua vez especifica $(\widehat{w}_i)_{i \geq 0}$, uma seqüência de autovetores com autovalores 1 para $(F_i)_{i \geq 0}$, esta correspondência também é uma bijeção.

Afirmamos que $\widehat{w}_0^\varepsilon \in \Delta_0^\varepsilon$. Assim definimos uma bijeção $\Phi_F : \mathcal{CM}_F \longrightarrow \widehat{\Omega}_F^\Delta$.

Mas sabemos de (i) que, como $(\widehat{w}_i \widehat{w}_i^\varepsilon)_{i \geq 0} \in \widehat{\Omega}_{MN}^\Delta$, $\widehat{w}_0 \in \Delta_0$. A matriz M_0 é estocástica por colunas, já que cada coluna tem um único 1 como entrada e o resto é 0 (a aresta e_0 começa em um símbolo bem definido e_0^-). Então $1 = \|\widehat{w}_0\| = \|M_0 \widehat{w}_0^\varepsilon\| = \|\widehat{w}_0^\varepsilon\|$ e assim $\widehat{w}_0^\varepsilon \in \Delta_0^\varepsilon$. Isto completa a prova de (ii). \square

Note que $\widehat{\Omega}_F^\Delta$ é um subconjunto convexo e compacto de $\prod_{i \geq 0} \mathbb{R}^{l_i}$ (com a topologia produto). \mathcal{CM}_F , como usualmente, está dado pela topologia fraca* como um subconjunto de $\mathbb{C}^*(\sum_{(F)}^{0,+})$, e é convexo e compacto pelo teorema de Banach-Alaoglu. E, pelo teorema de Krein-Milman, estes conjuntos são gerados pelos seus pontos extremos (p. 66-70, [23]). Temos:

Corolário 2.1. *A aplicação $\Phi_F : \mathcal{CM}_F \longrightarrow \widehat{\Omega}_F^\Delta$ é um homeomorfismo afim, e os pontos extremos destes conjuntos convexos e compactos correspondem às medidas de probabilidade invariantes para o grupo de mudança finita de coordenadas \mathcal{FC} .*

Demonstração. É imediato da definição que \mathcal{CM}_F e $\widehat{\Omega}_F^\Delta$ são convexos e compactos, e que Φ_F é uma aplicação afim. Como a convergência fraca* de medidas é equivalente a

convergência das medidas em cada cilindro fino, esta aplicação é um homeomorfismo. Pelo *teorema* 6.11 de [21] ou *proposição* 3.4 de [13], os pontos extremos de \mathcal{CM}_F são medidas ergódicas invariantes para a ação de \mathcal{FC} , visto que este é um grupo de homeomorfismos agindo em um espaço compacto. \square

Corolário 2.2. *Se a sequência de matrizes tem a condição autovetor de Perron-Frobenius, então existe uma única medida de probabilidade invariante para \mathcal{FC} ou para qualquer transformação ádica definida em $\Sigma_{(F)}^{0,+}$.*

Demonstração. Neste caso, por definição, existe um único elemento em $\widehat{\Omega}_F^\Delta$. \square

Capítulo 3

Família Multiplicativa

Vamos restringir a atenção aos diagramas de Bratteli com dois vértices, isto é, que são dados por uma sequência de matrizes (2×2) não negativas. Este é o caso que vamos analisar neste capítulo.

3.1 Sequências aditivas e rotulações canônicas

Lembramos que $SL(2, \mathbb{Z})$ é o grupo de matrizes (2×2) com entradas inteiras e com determinante 1. Escrevemos $SL(2, \mathbb{N})$ para o subgrupo cujas entradas são todas ≥ 0 .

Lema 3.1. *$SL(2, \mathbb{N})$ é o semigrupo livre gerado pelos geradores aditivos*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Demonstração. A ação do grupo são potências destes geradores com expoentes em \mathbb{N} , queremos mostrar que para qualquer $A \in SL(2, \mathbb{N})$ se escreve como potências de P e Q . Perceba que P e Q não são inversíveis em $SL(2, \mathbb{N})$, o que justifica a indicação de semigrupo.

Notemos que a identidade $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ está incluída aqui, pois $I = P^0 = Q^0$.

Seja $A \in SL(2, \mathbb{N})$, com $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Afirmamos que se $A \neq I$, então ou a primeira coluna é \geq que a segunda, no sentido que $a \geq b$ e $c \geq d$, ou o contrário.

Se ambas condições falham, então ou $a > b$ e $c < d$ ou o contrário. Mas o contrário ($b > a$ e $d < c$) não pode ocorrer pois isto implicará que $bc > ad$ e aí $ad - bc < 0$, absurdo, pois por hipótese o determinante é 1.

Então analisemos o caso $a > b$ e $c < d$, temos: $a \geq b + 1$ e $d \geq c + 1$, pois estamos falando de números naturais. Então o determinante é: $ad - bc \geq (b + 1)(c + 1) - bc = bc + b + c + 1 - bc = b + c + 1$. Como $\det A = 1$, temos $b = c = 0$, e neste caso $A = I$, logo vale a afirmação de que $a \geq b$ e $c \geq d$ (ou o contrário).

Agora, mostremos que $A \in SL(2, \mathbb{N})$ pode ser fatorado como produto de potências não negativas de P e Q . Escrevendo $A = A_0$, se $A_0 \neq I$ então subtraímos a menor coluna da maior construindo assim A_1 . Isto é equivalente a escrever

$$A_1 = A_0 P^{-1} \quad \text{ou} \quad A_1 = A_0 Q^{-1},$$

pois, para $a \geq b$ e $c \geq d$, temos:

$$A_1 = A_0 Q^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a nova matriz $A_1 \in SL(2, \mathbb{N})$, já que a primeira coluna é \geq que a segunda e $\det A_1 = 1$.

Se A_1 tem uma coluna maior que a outra, nós continuamos o processo produzindo uma sequência A_0, A_1, \dots, A_n . Este processo termina com uma matriz A_n de determinante 1 cuja nenhuma coluna é maior que a outra. Então, como mostrado anteriormente, $A_n = I$. Aí, revertendo o processo, temos A fatorado como produto de potências não negativas de P e Q . Por exemplo, se o processo terminar em $A_2 = I$, então

$$I = A_2 = A_1 P^{-1} = A_0 Q^{-1} P^{-1} = A Q^{-1} P^{-1} \Rightarrow A = P Q.$$

Provamos um pouco mais: o argumento precedente mostra que um elemento de $SL(2, \mathbb{N})$ que não é a identidade pode ser fatorado ou como $A = A_1 P$ ou como $A = A_1 Q$, mas

não ambos. Logo, a decomposição de A em termos de P e Q é única, e isto implica que não pode haver relações não triviais no semigrupo $SL(2, \mathbb{N})$; consequentemente ele é livre. \square

Observação 3.1. *O que a prova mostrou é que existe uma única forma de chegar a uma determinada matriz positiva com determinante 1 começando com I , adicionando uma coluna a outra, e repetindo esta operação.*

Claro que gostaríamos de um teorema semelhante para o caso (3×3) , mas não há nenhuma esperança de termos uma estrutura tão simples, pois $SL^+(3, \mathbb{Z})$ não é finitamente gerado e não é livre ([19]).

Uma sequência $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que cada matriz é igual a qualquer um dos geradores aditivos P, Q é chamada de *sequência aditiva*. Chamamos o diagrama de Bratteli definido por tal sequência de *diagrama aditivo*.

Dada uma sequência (F_i) em $SL(2, \mathbb{N})$, considere o diagrama de Bratteli de rotulação arestas determinado por (F_i) ; então existem dois símbolos (0 e 1), e uma matriz com as entradas especificando o número de arestas. Em geral, para um diagrama de arestas múltiplas, não há uma maneira natural de rotular tais arestas. Entretanto, neste caso, indicamos uma maneira dada a seguir.

Corolário 3.1. *(i) Uma sequência (F_i) com $F_i \in SL(2, \mathbb{N})$ determina unicamente uma sequência aditiva (A_j) tal que $F_0 = A_n \dots A_1 A_0$, $F_1 = A_{n+k} \dots A_{n+1}$ e assim por diante, para todo F_i com $i \in \mathbb{Z}$.*

(ii) Fixando a localização do tempo 0, existe um único diagrama aditivo, o microscópio aditivo, cujo telescópio dá o diagrama de Bratteli de (F_i) . A rotulação após agrupamento para as arestas deste diagrama especifica os caminhos do microscópio aditivo.

Chamamos a rotulação canônica das arestas resultantes no diagrama de **rotulação aditiva**. (Ver figuras 1.5 e 1.6).

Então, dada uma sequência (F_i) de matrizes (2×2) com entradas inteiras não negativas, em vista do corolário 3.1, podemos associar um *sntf* de uma forma canônica, como a seguir:

Definição 3.1. *Dada uma sequência (F_i) com $F_i \in SL(2, \mathbb{N})$, definimos $\sum_{(F)}$ como sendo o *sntf* determinado pelo agrupamento do *sntf* determinado pela fatoração aditiva, com a sua partição no tempo zero e com os elementos da partição após agrupamento devidamente rotulados, e escolhendo alguma ordenação.*

3.2 Família multiplicativa

A partir de agora focaremos em uma determinada família Anosov no 2-toro, dada por uma sequência de matrizes (2×2) . Como veremos, a codificação correspondente também virá de matrizes (2×2) . O principal exemplo vem a seguir.

Definição 3.2. *Dada uma sequência $\langle n \rangle = (\dots n_{-1} n_0 n_1 \dots) \in \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{N}^*$ onde $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ e paridade $p \in \{+, -\}$, a versão no toro quadrado da família multiplicativa determinada por $\langle n \rangle$ e p é a família de aplicações $(M, f) = (M_i, f_i)$ ao longo da sequência 2-toro, como se segue:*

Consideremos primeiro o caso com paridade $(+)$. Fixamos

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n_i & 1 \end{bmatrix} \text{ para } i \text{ par, e } A_i = \begin{bmatrix} 1 & n_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } i \text{ impar.}$$

Para $i \in \mathbb{Z}$, seja $M_i = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ com a métrica Euclidiana padrão e pensando que A_i está aplicando em vetores linha.

Definimos $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ como sendo a função dada pela multiplicação à direita por A_i , isto é, para (x, y) em $M_i = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$,

$$f_i : [x \ y] \mapsto [x \ y] A_i$$

Para paridade $(-)$ trocamos A_i pela sua transposta.

Mostraremos que (M, f) é uma família Anosov, descrevendo os autoespaços expansores e contratores e os autovalores explicitamente. Mudando para autocoordenadas, daremos uma segunda versão da família multiplicativa, que é conjugada (limitadamente) à versão toro quadrado.

Usaremos a seguinte terminologia: uma matriz individual A_i , como antes, tem paridade $(+)$, $(-)$ se ela é triangular inferior (respectivamente superior), então uma sequência $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tem paridade $(+)$ exatamente quando cada uma das suas matrizes tem, ao mesmo tempo, paridade $(+)$.

A partir da sequência (A_i) definiremos uma sequência de matrizes (B_i) cujas linhas vão ser os nossos autovetores. Estas matrizes estarão em um conjunto $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{\{0,+ \}} \cup \mathcal{B}_{\{0,- \}} \subseteq SL(2, \mathbb{R})$ com $B = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & c \end{bmatrix}$ satisfazendo as condições:

- (i) $a, b, c, d \geq 0$;
- (ii) $\det B = 1$;
- (iii) para $B \in \mathcal{B}_{\{0,+ \}}$, $0 < a < 1$, $b = 1$ e $d < c$
para $B \in \mathcal{B}_{\{0,- \}}$, $0 < b < 1$, $a = 1$ e $c < d$

Dizemos que $B \in \mathcal{B}_0$ tem paridade $(+)$ ou $(-)$ quando ela está em \mathcal{B}_+ ou \mathcal{B}_- respectivamente.

Dado uma sequência de inteiros m_0, m_1, \dots com $m_i \geq 1$, usaremos a seguinte notação para a *fração contínua*:

$$[m] = [m_0 m_1 \dots] = \frac{1}{m_0 + \frac{1}{m_1 + \dots}}.$$

A correspondência $(m_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto [m]$ define uma bijeção de $\prod_0^{+\infty} \mathbb{N}^*$ no conjunto dos irracionais em $(0, 1)$ (Ver [12], p.65).

Proposição 3.1. *Dado $\langle n \rangle \in \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{N}^*$ e paridade $(+)$ ou $(-)$, então para a família de aplicações (M, f) , como definimos anteriormente, os autoespaços E_i^s e E_i^u de $M_i =$*

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ são gerados pelos vetores $v_i^s = [b_i \ -a_i]$, $v_i^u = [d_i \ c_i]$, com autovalores $(\lambda_i^{-1}) < 1$ e $(\lambda_i) > 1$, respectivamente, onde estes são definidos pela condição $a_i d_i + c_i b_i = 1$ junto com:

$$\begin{aligned} \text{para } A_i \text{ com paridade (+): } & a_i = [n_i n_{i+1} \dots], \quad b_i = 1, \quad \frac{d_i}{c_i} = [n_{i-1} n_{i-2} \dots] \\ & \text{e } \lambda_i = \frac{1}{a_i}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } A_i \text{ com paridade (-): } & b_i = [n_i n_{i+1} \dots], \quad a_i = 1, \quad \frac{c_i}{d_i} = [n_{i-1} n_{i-2} \dots] \\ & \text{e } \lambda_i = \frac{1}{b_i}. \end{aligned}$$

Demonstração. Começamos com a sequência $\langle n \rangle$ e paridade (+) ou (-), e a sequência de matrizes (A_i) associada. A partir dos números reais positivos a_i, b_i, c_i, d_i determinados da maneira como afirmamos no enunciado da proposição, definimos:

$$B_i = \begin{bmatrix} b_i & -a_i \\ d_i & c_i \end{bmatrix}.$$

Já que $a_i d_i + c_i b_i = 1$ por definição, temos $\det B = 1$. Então, a partir da sequência (A_i) ou, equivalentemente, de $\langle n \rangle \in \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{N}^*$ junto com a escolha da paridade p , definimos uma sequência de matrizes $B_i \in \mathcal{B}_0$ com paridade de B_i sendo a mesma de A_i .

Agora definimos a matriz diagonal

$$D_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i^{-1} \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que as sequências A_i, B_i, D_i estão relacionadas como a seguir:

$$D_i B_i A_i = B_{i+1} \tag{3.1}$$

Isto irá finalizar a prova, já que os vetores v_i^s, v_i^u são as linhas de B_i , e temos desta

equação que:

$$v_i^s A_i = [1 \ 0] B_i A_i = [1 \ 0] D_i^{-1} B_{i+1} = [\lambda_i^{-1} \ 0] B_{i+1} = \lambda_i^{-1} v_{i+1}^s.$$

Falta verificar a afirmação (3.1); chequemos para $i = 0$ e paridade (+). Queremos verificar $B_0 A_0 = D_0^{-1} B_1$. Temos:

$$B_0 A_0 = \begin{bmatrix} b_0 & -a_0 \\ d_0 & c_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n_0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 - n_0 a_0 & -a_0 \\ d_0 + n_0 c_0 & c_0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Para $i = 1$ a paridade muda, isto é, a paridade fica (-). Logo:

$$b_1 = [n_1 n_2 \dots] = \frac{1}{a_0} - n_0 = \frac{1 - n_0 a_0}{a_0} = \frac{b_0 - n_0 a_0}{a_0} = \frac{1}{a_0} (b_0 - n_0 a_0) = \lambda_0 (b_0 - n_0 a_0);$$

$$a_1 = 1 = \frac{1}{a_0} a_0 = \lambda_0 a_0.$$

Perceba também que o quociente dos elementos da segunda linha da matriz $B_0 A_0$ é $[n_0 n_{-1} \dots]$, pois:

$$\frac{d_0 + n_0 c_0}{c_0} = \frac{d_0}{c_0} + n_0 = [n_{-1} n_{-2} \dots] + n_0 \Rightarrow \frac{c_0}{d_0 + n_0 c_0} = [n_0 n_{-1} \dots].$$

$$\text{E como } D_0^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{\lambda_0} & \frac{-a_1}{\lambda_0} \\ \lambda_0 d_1 & \lambda_0 c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 - n_0 a_0 & -\frac{1}{\lambda_0} \\ \lambda_0 d_1 & \lambda_0 c_1 \end{bmatrix}$$

onde $\frac{\lambda_0 c_1}{\lambda_0 d_1} = \frac{c_1}{d_1} = [n_0 n_{-1} \dots]$, concluímos que $B_0 A_0 = D_0^{-1} B_1 \Rightarrow D_0 B_0 A_0 = B_1 \quad \square$

Observação 3.2. Perceba que se tomarmos aplicações em vetores coluna, teremos que as colunas de B_{i+1}^{-1} são autovetores para a família multiplicativa (M, f) . Isto é verificado observando que $B_i A_i B_{i+1}^{-1} = D_i^{-1}$ é uma diagonalização para a família.

Como $B_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{i+1} & a_{i+1} \\ -d_{i+1} & b_{i+1} \end{bmatrix}$, concluímos a afirmação tomando $w_{i+1}^u = \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{bmatrix}$ e

verificando que:

$$A_i w_{i+1}^u = A_i B_{i+1}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B_i^{-1} D_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_0 w_i^u.$$

Note que a igualdade $B_i A_i B_{i+1}^{-1} = D_i^{-1}$ é dada pela equação (3.1), logo estamos falando da mesma conjugação (verificado mais adiante), porém a aplicação é feita ao longo de vetores coluna. Assim acabamos de dar uma sequência de autovetores coluna para a família multiplicativa, a sequência (w_i^u) é dada por vetores com entradas positivas, logo apresentamos explicitamente a sequência de autovetores que trata, a menos de normalização, o lema 2.8 e, conseqüentemente, a aplicação da medida central de Parry.

Voltemos aos autovetores linha. Usaremos a diagonalização feita na proposição 3.1 para definir uma segunda família de aplicações, que expressa a família multiplicativa em autocoordenadas.

Escrevemos $N_i \equiv \mathbb{R}^2 / \Lambda_i$ onde Λ_i é a látice gerada pelas linhas de B_i^{-1} com a métrica Euclidiana de \mathbb{R}^2 , e definimos $g_i : N_i \mapsto N_{i+1}$ por:

$$g_i : [x \ y] \mapsto [x \ y] D_i^{-1}.$$

Chamamos (N, g) a versão em autocoordenadas da família multiplicativa (M, f) .

Lema 3.2. Para uma matriz em \mathcal{B}_0 , os vetores coluna tem comprimento no intervalo $(1/2, \sqrt{2})$ e o ângulo entre eles satisfaz $\sin(\theta) \geq 1/2$.

Demonstração. Consideremos paridade (+). Das condições (i), (ii) e (iii) que definem \mathcal{B}_0 , temos: $b = 1$; $ad + cb = 1 \Rightarrow ad + c = 1 \Rightarrow a, c, d \leq 1$. Conseqüentemente os vetores coluna (b, d) e $(-a, c)$ tem comprimento $\leq \sqrt{2}$.

Denotando $v = (-a, c)$ e $w = (b, d)$, sabemos que o paralelogramo gerado por v, w tem área 1 (pois $ad + cb = 1$). Então $1 = \|v\| \|w\| \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre eles. Logo, a partir do comprimento estimado acima, $\sin \theta = \frac{1}{\|v\| \|w\|} \geq \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. \square

Observação: Note que estas estimativas são bem grosseiras, mas precisamos apenas das limitações para mostrar a seguinte proposição.

Proposição 3.2. *As famílias de Anosov (M, f) e (N, g) são limitadamente conjugadas pela aplicação $\tilde{h}_i : M_i \rightarrow N_i$ definida por*

$$\tilde{h}_i : [x \ y] \mapsto [x \ y]B_i^{-1}.$$

Para (N, g) , a sequência de autovetores $u_i^s = [1 \ 0]$ e $u_i^u = [0 \ 1]$ tem os mesmos autovalores (λ_i^{-1}) e (λ_i) , respectivamente.

Demonstração. Segundo a fórmula $B_0 \mapsto D_0 B_0 A_0 = B_1$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M_0 & \xrightarrow{A_0} & M_1 & \xrightarrow{A_1} & M_2 & \xrightarrow{A_2} & M_3 \\ \uparrow B_0 & & \uparrow B_1 & & \uparrow B_2 & & \uparrow B_3 \dots \\ \dots & & & & & & \\ N_0 & \xrightarrow{D_0^{-1}} & N_1 & \xrightarrow{D_1^{-1}} & N_2 & \xrightarrow{D_2^{-1}} & N_3 \end{array}$$

para ação em vetores linha, e D_i^{-1} é a diagonalização de A_i com respeito às autobases. A conjugação das famílias é simplesmente a multiplicação à direita da matriz B_i^{-1} por vetores linha. Isto apresenta a conjugação em \mathbb{R}^2 . Perceba que:

$$v_i^s B_i^{-1} = \begin{bmatrix} b_i & -a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i & a_i \\ -d_i & b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i c_i + a_i d_i & a_i b_i - a_i b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = u_i^s.$$

Também $v_i^u B_i^{-1} = u_i^u$.

Além disso definimos $\Lambda_i \equiv$ reticulado gerado por $[1 \ 0]B_i^{-1} = [c_i \ a_i]$ e $[0 \ 1]B_i^{-1} = [-d_i \ b_i]$ (ver figura 3.1).

Continuemos para checar que N_i é levado em N_{i+1} . É suficiente mostrar que $D_i^{-1}(\Lambda_i) = \Lambda_{i+1}$. Tomando a inversa da fórmula $D_i B_i A_i = B_{i+1}$, temos: $A_i^{-1} B_i^{-1} D_i^{-1} = B_{i+1}^{-1}$ que é equivalente a

$$B_i^{-1} D_i^{-1} = A_i B_{i+1}^{-1}. \quad (3.3)$$

Mas $A_i : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ preserva a látice gerada por $\{[1 \ 0], [0 \ 1]\}$ já que $A_i \in SL(2, \mathbb{Z})$. Logo, da igualdade (3.3), temos que a látice gerada por $\{[1 \ 0]B_i^{-1}, [0 \ 1]B_i^{-1}\}$

é levada à látice gerada por $\{[1 \ 0]B_{i+1}^{-1}, [0 \ 1]B_{i+1}^{-1}\}$ por D_i^{-1} .

A afirmação sobre autovetores segue imediatamente da diagonalização. Agora mostremos que a conjugação é limitada. Pelo lema 3.2, para as elipses que são as imagens da bola unitária pelas matrizes B_i agindo em vetores coluna, há raios que as limitam por dentro e por fora. Conseqüentemente, o mesmo é verdade para as matrizes B_i^{-1} agindo em vetores linha, já que as linhas de B_i^{-1} é uma rotação de $\pi/2$ das colunas de B_i . Logo, pelo lema 1.1, a conjugação é limitada (ver definição 1.15). \square

Corolário 3.2. *A família multiplicativa (M, f) é uma família Anosov.*

Observação 3.3. *A conjugação anterior, embora limitada, não é uma isometria. De fato, para a família (M, f) a métrica em cada toro M_i é a mesma, enquanto os toros N_i , em geral, não são sequer isométricos. Para M_i , a métrica foi escolhida de modo que os vetores da base fossem ortogonais e de comprimento 1, enquanto os autovetores não são, em geral, nem ortogonais nem de comprimento 1; para (N, g) , os autovetores são escolhidos para serem ortonormais.*

Na versão toro quadrado, todas as componentes são isométricas e toda a dinâmica é realizada pelas aplicações. A versão em autocoordenadas (N, g) é um caso intermediário, as métricas também estão mudando já que os espaços-componente não são, em geral, isométricos uns aos outros.

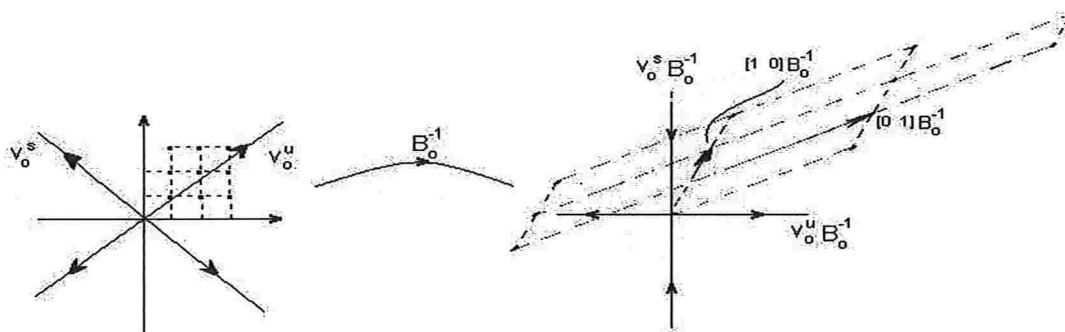


Figura 3.1: $\Lambda_i \equiv$ reticulado gerado por $[1 \ 0]B_i^{-1}$ e $[0 \ 1]B_i^{-1}$.

Observação 3.4. *Se tomarmos a família (M, f) com aplicações em vetores coluna, como mencionado na observação 3.2:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_0 & \xleftarrow{A_0} & M_1 & \xleftarrow{A_1} & M_2 & \xleftarrow{A_2} & M_3 \\
 \uparrow B_0^{-1} & & \uparrow B_1^{-1} & & \uparrow B_2^{-1} & & \uparrow B_3^{-1} \dots \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 N_0 & \xleftarrow{D_0^{-1}} & N_1 & \xleftarrow{D_1^{-1}} & N_2 & \xleftarrow{D_2^{-1}} & N_3
 \end{array}$$

temos também uma conjugação limitada. Basta perceber que o lema 3.2 vale aqui também.

3.3 Renormalização de caixas e construção da partição de Markov

Apesar da prova da proposição 3.1 parecer meramente formal e algébrica, existe uma interpretação geométrica simples por trás das fórmulas, que será exibida nesta seção.

As matrizes A_i e B_i que aparecem na fórmula principal e dão a diagonalização $D_i B_i A_i = B_{i+1}$ tem duas interpretações bem diferentes. As matrizes A_i fornecem a renormalização, assim, num conjunto de coordenadas, elas são meramente combinatorias (uma mudança de base da látice) enquanto que, em outras coordenadas, elas são aplicações hiperbólicas.

Primeiro construiremos a partição de Markov na versão toro quadrado $(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$. Como já dissemos, as linhas das matrizes B_i dão uma sequência de autovetores v_i^s, v_i^u . As aplicações A_i estão em $SL(2, \mathbb{Z})$, conseqüentemente são uma família de aplicações ao longo de uma sequência de toros quadrados $M_i = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Agora usaremos a matriz B_i para construir dois paralelogramos que serão a partição de Markov para a i -ésima componente M_i . São eles: o paralelogramo com lados gerados pelos vetores $d_i v_i^s, a_i v_i^u$ e o paralelogramo gerado por $c_i v_i^s, -b_i v_i^u$. Note que a união destes paralelogramos dão um segundo domínio fundamental para a látice \mathbb{Z}^2 agindo em \mathbb{R}^2 ; assim, eles particionam

o toro. De fato, para o paralelogramo com lados $d_i v_i^s, a_i v_i^u$ temos:

$$d_i v_i^s = (d_i b_i, -d_i a_i)$$

$$a_i v_i^u = (a_i d_i, a_i c_i),$$

com área $a_i d_i (a_i d_i + c_i b_i) = a_i d_i \cdot \det(B_i) = a_i d_i$. Para do outro paralelogramo, cálculos análogos mostram que sua área é $b_i c_i$. Logo a soma das áreas dos dois paralelogramos é $a_i d_i + b_i c_i = \det(B_i) = 1, \forall i$, e como A_i preserva a área ($\det A_i = 1$) e v_i^s e v_i^u são seus autovetores, segue o resultado.

Exemplo: Mostremos um simples exemplo com $n_i = 1, \forall i$; isto é, $\langle n \rangle = [\dots 111 \dots]$; neste caso as autodireções são ortogonais (por acaso), pois $a_i = [111 \dots] = d_i/c_i$ (isto tomando paridade (+)) e $b_i = 1$. Logo $v_i^s = (b_i, -a_i) = (1, -a_i)$ e $v_i^u = (d_i, c_i) = (a_i c_i, c_i)$, assim $v_i^s v_i^u = (1, -a_i) \cdot (a_i c_i, c_i) = 0$. Além disso, as caixas são quadrados, veja para o paralelogramo gerado por $d_i v_i^s, a_i v_i^u$: Queremos mostrar que $\|a_i v_i^u\| = \|d_i v_i^s\|$, isto é, $a_i \|v_i^u\| = d_i \|v_i^s\|$.

$$\text{Tomemos a paridade (+), então: } A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \forall i,$$

$$a_i = [111 \dots] = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = \frac{1}{1 + a_i} \Rightarrow (1 + a_i)a_i = 1 \Rightarrow a_i = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ pois } a_i > 0.$$

$$\text{Assim } \frac{d_i}{c_i} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } b_i = 1.$$

$$\text{Logo } B_i = \begin{bmatrix} b_i & -a_i \\ d_i & c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} c_i & c_i \end{bmatrix}. \text{ E como } \det B_i = 1 \text{ temos que}$$

$$c_i = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Então } v_i^s = \left(1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \text{ e } v_i^u = \left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right).$$

$$\text{Finalmente, } a_i \|v_i^u\| = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{c_i^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 c_i^2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} c_i \sqrt{1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = d_i \|v_i^s\|.$$

As caixas geradas por este exemplo estão ilustradas na figura 1.1 do capítulo 1.

Agora, sendo $u_i^s = [1 \ 0]$ e $u_i^u = [0 \ 1]$ os autovetores de (N, g) , temos que o paralelogramo gerado por $d_i v_i^s, a_i v_i^u$, em autocoordenadas, é o paralelogramo gerado por $d_i u_i^s, a_i u_i^u$, pois:

$$\begin{aligned} v_i^s B_i^{-1} &= [1 \ 0] = u_i^s \Rightarrow (d_i v_i^s) B_i^{-1} = d_i u_i^s, \\ v_i^u B_i^{-1} &= [0 \ 1] = u_i^u \Rightarrow (a_i v_i^u) B_i^{-1} = a_i u_i^u. \end{aligned}$$

Da mesma forma, o outro paralelogramo, em autocoordenadas, é gerado por $c_i u_i^s, -b_i u_i^u$.

Os paralelogramos tornam-se retângulos, visto que os autovetores u_i^s e u_i^u são ortogonais. Chamamos estes retângulos de caixas e escrevemos $\mathcal{R}_i = \{R_i^0, R_i^1\}$ para a partição resultante de $N_i \equiv \mathbb{R}^2 / \Lambda_{B_i}$.

Note que, em autocoordenadas, a látice que define o toro torna-se uma látice paralelogramo. Os vetores (c, a) e $(-d, b)$ geram esta látice; estes são exatamente os vetores $[1 \ 0] B_i^{-1}$ e $[0 \ 1] B_i^{-1}$, isto é, as linhas de B_i^{-1} .

É conveniente fazer uma rotação de 90° nas autocoordenadas no sentido anti-horário para efeito de ilustração (ver figura 3.3). Assim o vetor u_i^u fica igual a $(-1, 0)$ após rotação, enquanto u_i^s fica sendo $(0, 1)$, então o retângulo R_i^1 é a caixa da esquerda; fazendo uma mudança na orientação do eixo horizontal para adequar às coordenadas padrão, esta caixa tem como base o intervalo $[-b_i, 0]$ no eixo horizontal e como altura

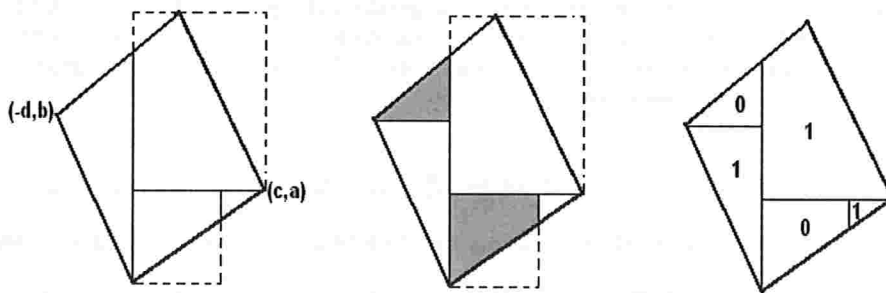


Figura 3.2: Partição do domínio fundamental, em autocoordenadas, gerado pelos vetores linha de B_i . Segunda figura com partes identificadas, e a terceira figura com uma rotulação conveniente para os elementos desta partição.

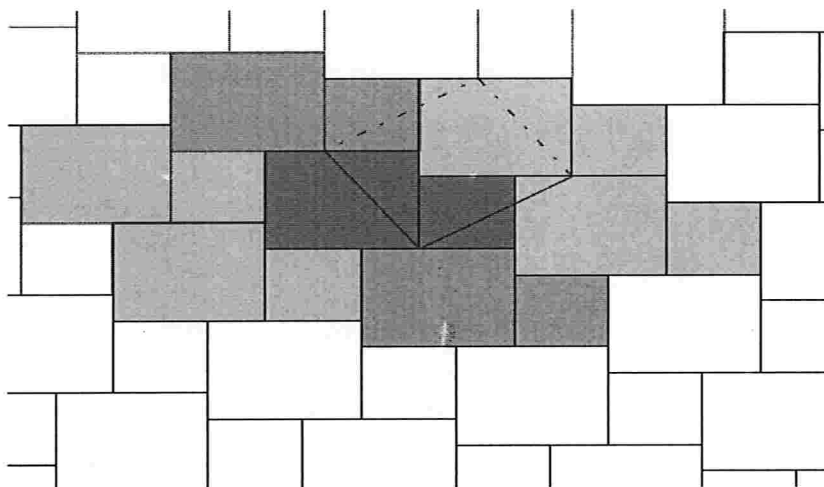


Figura 3.3: Dois domínios fundamentais para a látice, em autocoordenadas: o paralelogramo e a partição *duas-caixas* \mathcal{R}_0 . A figura foi rotacionada 90° no sentido anti-horário por conveniência. Então, nesta figura, o eixo horizontal dá a direção expansora. Figura exposta em [1] com alterações convenientes.

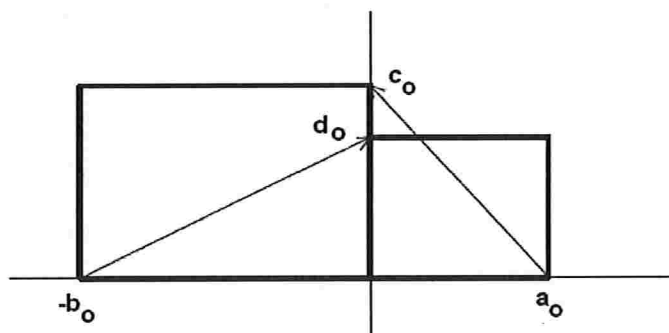


Figura 3.4: O par de caixas em autocoordenadas; para i com paridade (+): os vetores linha de B_i são as coordenadas dos vetores que geram a látice (paralelogramo). A figura foi rotacionada 90° no sentido anti-horário. Para paridade (-), esta figura fica refletida pelo eixo vertical. Em ambos casos, a caixa da esquerda é R_i^1 e a da direita é R_i^0 . Figura exposta em [1] com alterações convenientes.

o intervalo $[0, c_i]$ no eixo vertical; a caixa R_i^0 tem base $[0, a_i]$ e altura $[0, d_i]$.

Assim a fronteira da partição \mathcal{R}_i é, nas coordenadas após rotação, o seguimento $[-b_i, a_i]$ no eixo x unido com o segmento $[0, \max\{c_i, d_i\}]$ no eixo y (ver figura 3.4).

Na proposição 3.1 encontramos a fórmula $D_0 B_0 A_0 = B_1$; esta fórmula tem a

seguinte interpretação geométrica. Considere a operação:

$$B_0 \mapsto B_0 A_0 = D_0^{-1} B_1$$

Usamos a nova matriz $B_0 A_0$ para definir um novo par de caixas no mesmo toro $N_0 \equiv \mathbb{R}^2/\Lambda_{B_0}$, da mesma forma como descrito anteriormente para B_0 . Chamamos este procedimento de passar de um par de caixas para outro de **renormalização de caixas**. Este procedimento tem uma descrição algorítmica simples, como veremos a seguir.

Proposição 3.3. *Considere a família multiplicativa dada pela escolha de $\langle n \rangle$ e da paridade. Na representação em autocoordenadas (N, g) , o pullback da partição \mathcal{R}_i em N_i para o toro $N_0 \equiv \mathbb{R}^2/\Lambda_{B_0}$ dá a sequência de partições definida como anteriormente para as matrizes $B_0, B_0 A_0 = D_0^{-1} B_1, B_0 A_0 A_1 = D_0^{-1} D_1^{-1} B_2, \dots$. Equivalentemente, a sequência dos pares de caixas é dada pela renormalização de caixas: Primeiro remova tantas cópias quanto possível do menor intervalo da base, por exemplo, para a paridade (+), a caixa menor tem comprimento a_0 (em relação a base) e fica à direita, este é o menor intervalo da base; a outra caixa é maior, tem comprimento $b_0 = 1$. Depois corte a caixa maior em pedaços correspondentes ao comprimento a_0 e empilhe estes pedaços sobre a caixa menor, produzindo um segundo par de caixas (ver figura 3.5 e 3.6). Para o terceiro par, comece com a caixa da esquerda, já que a paridade foi trocada e agora esta é a caixa menor. Este procedimento também é chamado de “cutting and stacking”. A sequência de partições \mathcal{R}_i é uma sequência de partições de Markov para a família de aplicações (N, g) .*

Demonstração. Note que o número de cópias do intervalo de comprimento a_0 removido é o inteiro n_0 , onde $n_0 = \left[\frac{b_0}{a_0} \right] = \left\{ \text{parte inteira de } \frac{b_0}{a_0} \right\}$, pois $a_0 = [n_0 n_1 \dots] = \frac{1}{n_0 + \frac{1}{n_1 + \dots}}$, e $b_0 = 1$.

$$\text{Logo, } \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{\frac{1}{n_0 + \frac{1}{n_1 + \dots}}} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \dots} = \left[\frac{b_0}{a_0} \right] + \left\{ \text{parte fracionária de } \frac{b_0}{a_0} \right\}.$$

Assim $0 < \frac{b_0}{a_0} - n_0 < 1$, então, $0 < b_0 - n_0 a_0 < a_0 < 1$.

Então n_0 é o número de cópias inteiras de a_0 em b_0 . Perceba que agora a caixa da direita é a maior com comprimento da base igual a a_0 e altura $d_0 + n_0 c_0$, enquanto a caixa menor (da esquerda) tem comprimento da base $b_0 - n_0 a_0$ e altura c_0 . E comparando estes resultados na equação (3.2) vemos que a renormalização das caixas produz um novo par de caixas cujos lados têm comprimentos dados pela matriz $B_0 A_0$. \square

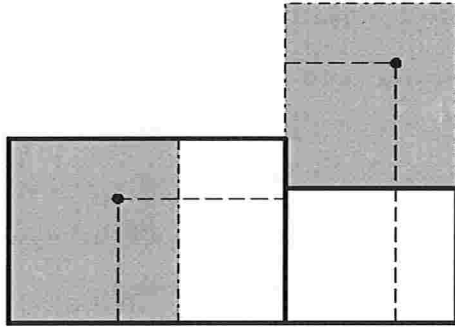


Figura 3.5: Renormalização das caixas, em autocoordenadas, apresentando dois pontos equivalentes sob a ação da lattice, após rotação de 90° das coordenadas no sentido anti-horário. Figura exposta em [1].

3.3.1 Produzindo uma partição geradora: o método de Adler-Weiss

O procedimento realizado na proposição 3.3 descreve uma sequência de partições com a propriedade geométrica de Markov. No entanto, \mathcal{R}_k não é geradora, isto é, não separa pontos. Para produzir um gerador para \mathcal{R} nós usaremos o método de Adler e Weiss [2]. Por enquanto nos focamos no *sft*. Definimos \mathcal{P}_k como sendo a partição que consiste dos fechos das componentes conexas de $\overset{\circ}{\mathcal{R}}_k \vee g_k^{-1}(\overset{\circ}{\mathcal{R}}_{k+1})$. Como antes, $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ denota a *junção* de duas partições (por $\overset{\circ}{\mathcal{R}}$ entendemos a união dos interiores dos elementos da partição \mathcal{R} .) Precisamos tomar interiores pois queremos que a nova

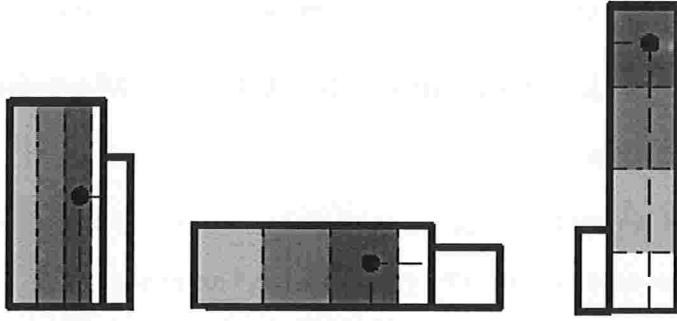


Figura 3.6: Da esquerda para a direita: a partição *duas-caixas* \mathcal{R}_0 com $b_0 = 1$, cortada para gerar a partição \mathcal{P}_0 com $n_0 + 2$ elementos, lendo da esquerda para a direita, 1000, 1100, 1110, 1111 e 0000 (veja na próxima seção), redimensionando pela matriz diagonal teremos $a_i = 1$; emplilhando para obter b_1, c_1, d_1 e uma nova partição *duas-caixas* \mathcal{R}_1 . As duas últimas figuras se sobrepõem, isto é, são iguais a menos da ação da látice, e as componentes conexas de \mathcal{R}_1 junto com \mathcal{R}_0 redimensionada dá \mathcal{P}_0 redimensionada. Figura exposta em [1].

fronteira seja a mesma que a antiga, e não tenha duas partes acidentalmente grudadas.

Chamaremos \mathcal{P}_k a *partição componente conexa* para a família multiplicativa.

Proposição 3.4. *A partição componente conexa $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma seqüência de partições de Markov geradora para a família multiplicativa (N, g) . Esta seqüência passa por conjugação ao longo de uma seqüência de partições de Markov geradora para a família multiplicativa (M, f) no toro quadrado. Para uma escolha de paridade $(-)$ ou $(+)$, a partição de qualquer componente dada varia continuamente com respeito a métrica Hausdorff e a $\langle n \rangle \in \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{N}^*$.*

Demonstração. A fronteira de \mathcal{P}_0 agora consiste de dois segmentos $[-b_0, a_0]$ e $[0, d_0 + n_0 c_0] = [0, \lambda_0 d_1]$. Assim é satisfeita a propriedade geométrica de Markov, como já visto. Agora os elementos da partição $(g_{-n})^n \mathcal{P}_n \vee \dots \vee \mathcal{P}_0 \vee \dots \vee (g_n)^{-n} \mathcal{P}_n$ são também conjuntos conexos. Consequentemente, seu diâmetro vai a zero quando $n \rightarrow \infty$, então existe no máximo um ponto em uma determinada intersecção infinita de interiores. A continuidade nas fronteiras da partição é imediata da fórmula das coordenadas das duas caixas, e isto passa ao longo das componentes conexas. \square

Na próxima seção descreveremos outra maneira de construir este gerador, que au-

tomaticamente nos leva a rótulos naturais para os elementos da partição.

3.4 Uma extensão dos teoremas de Adler e Manning para famílias de aplicações.

Lembremos que $SL(2, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{Z})$ são os grupos de matrizes (2×2) com entradas reais (respectivamente inteiras) e com determinante 1. Um elemento $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ induz um automorfismo que preserva orientação no 2-toro, já que determinante é > 0 (pensando nele como grupo fator $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ pela multiplicação a direita por vetores linha). Tal automorfismo é hiperbólico quando ele tem dois autovalores λ , λ^{-1} com $\lambda > 1$.

Em [10], Adler prova um teorema que inclui o seguinte: para qualquer automorfismo hiperbólico $A (2 \times 2)$ no toro com entradas não negativas e que preserva orientação existe uma partição de Markov que é codificada como um *vertex shift* usando exatamente a mesma matriz.

Assim, quando

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix},$$

existe uma partição geradora do toro com $p+q+r+s$ elementos, que é codificada como um “vertex-shift”, tal que exista (na convenção vetor linha) p arestas indo de 0 para ele mesmo, q arestas indo de 0 para 1 e assim por diante; isto é, o automorfismo no toro é codificado como um *sft* usando as arestas como símbolos, onde um símbolo pode suceder so outro exatamente quando a aresta correspondente pode seguir da outra no gráfico. Como descrito na seção 2.3.5.

Manning provou, independentemente, um resultado similar. Ver [17] e observação 3.6.

O teorema é notável na medida em que dá uma ligação direta entre dois usos da mesma matriz que são, aparentemente, completamente diferentes: para definir um espaço espaços vertex shift e para definir uma aplicação no toro. A existência de alguma codificação semelhante a um *snf* é conhecida há muito tempo (desde [2]), mas parece que essa codificação especial não foi observada antes, exceto em alguns casos

especiais.

Se primeiramente considerarmos, por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

então o *sft* definido pelo vertex shift é dado pela matriz 0 – 1 (5×5). Para escrevê-la, precisamos escolher uma ordem para as arestas. Fazemos a rotulação aditiva como na figura 1.6 ordenando como (110, 111, 000, 010, 011); isto corresponde a ordem geométrica da esquerda para direita nos elementos da partição, quando a direção instável é horizontal, ver também ([11], p.84). A matriz de transição (com convenção linha) é então:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é semelhante ao que fizemos na seção 2.3.5 (figura 2.2), aqui estamos sugerindo uma rotulação para estas arestas, esta rotulação é feita observando a sequência de vértices permitidos (veja figura 1.6). Isto dá uma rotulação natural nas arestas após agrupamento.

A utilidade de apresentar vertex shift determinado pela matriz A (2×2) é que esta forma é muito mais concisa. A descoberta de Adler e Manning foi que quando a partição de Markov é escolhida com cuidado, esta forma revela tudo sobre a dinâmica, visto que a aplicação tem exatamente a mesma matriz.

Na prova de Adler, a partição geradora é produzida da seguinte maneira: ele começa com uma partição \mathcal{R} não geradora consistindo de dois paralelogramos; estes definem um gráfico de arestas simples (isto é, no máximo uma aresta sai de cada vértice) onde há dois vértices correspondendo a um *sft* de dois símbolos rotulados de 0 e 1; a partição

geradora consiste das componentes conexas da junção de \mathcal{R} com $f^{-1}(\mathcal{R})$; com isto, o gráfico de arestas é dado pela substituição de cada aresta pelo número de componentes. Assim, para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix},$$

existem q componentes conexas em $f^{-1}(R_1) \cap (R_0)$ e assim por diante.

Agora iremos mostrar como a codificação Adler-Manning estende-se para sequências de matrizes. No processo, descobrimos uma nova forma de compreender o resultado de Adler. Vamos concluir o seguinte:

Teorema 3.1. *Para toda sequência não trivial $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ com $A_i \in SL(2, \mathbb{N})$, a família de aplicações determinada por esta sequência é uma família Anosov. Existe uma sequência geradora de partições de Markov que codifica a família conforme o diagrama de arestas de Bratteli com transições dada pela mesma sequência (A_i) , e tal que, além disso, as partições geradoras consistem de componentes conexas de sucessivas junções a partir de uma sequência de partições duas caixas, com o número de arestas múltiplas (entre dois vértices sucessivos) correspondendo ao número de componentes.*

Aqui “não trivial” significa não eventualmente triangular superior (ou inferior) até $+\infty$ ou $-\infty$. A idéia é a seguinte: definimos a codificação primeiramente para sequências aditivas, onde a explicação geométrica vem diretamente da renormalização das caixas e alí temos uma situação bastante transparente; em seguida mostramos que estas codificações são bem comportadas com respeito à operação agrupamento, desta forma cada componente conexa corresponde a um nome diferente ao longo da fatoração aditiva. O último passo é lembrar do lema 3.1, que toda sequência de matrizes não negativa tem uma fatoração canônica em termos de geradores aditivos, permitindo-nos aplicar o resultado anterior.

3.4.1 Famílias aditivas e lineares

Chamamos uma sequência $F_i \in SL(2, \mathbb{N})$, com $i \in \mathbb{Z}$, de *sequência linear*, com os espaços sendo o toro quadrado $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, isto é, com a métrica Euclidiana padrão vinda

do plano. Chamamos a família determinada por $(F_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de família linear.

Agora examinaremos o *Exemplo 3* da seção 1.3 em detalhes. Quando a sequência linear é tal que cada matriz F_i é igual a algum dos geradores aditivos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a chamamos de família aditiva; dizemos que estes geradores tem paridades (+) e (−), respectivamente. Dizemos que a família aditiva é não trivial se as matrizes mudam a paridade infinitas vezes na direção $+\infty$ e $-\infty$.

Toda família aditiva não trivial transforma-se, após agrupamento, numa família multiplicativa, isto é, juntando matrizes triangulares superior e inferior vizinhas de maneira óbvia, convenientemente após um shift para que a mudança de paridade ocorra entre os tempos -1 e 0 . O inverso também é válido, já que, naturalmente, a família multiplicativa fatora-se como potências dos geradores, dando uma família aditiva (não trivial).

Mais geral, pelo lema 3.1, qualquer sequência linear não negativa fatora-se unicamente como uma família aditiva, como na parte (i) do corolário 3.1.

Como uma fração contínua infinita corresponde a um número irracional (ver [12]) e, pela proposição 3.1, as autodireções são gerados por vetores cujo quociente das coordenadas é uma fração contínua infinita, temos que, excluir as famílias aditivas triviais, isto é, as sequências eventualmente constantes, corresponde exatamente a remover as direções racionais para as folheações instáveis e estáveis, que é um conjunto enumerável.

3.4.2 Partição de Markov e dinâmica simbólica para a família aditiva.

A seguir descreveremos uma sequência de partições de Markov para uma família aditiva não trivial. Aqui, teremos uma sequência geradora desde o início, sem a necessidade de tomarmos componentes conexas de junções. Esta construção irá dar uma nova forma de obter geradores para as famílias multiplicativas.

Começamos com uma sequência $\langle n \rangle = (\dots n_0 n_1 \dots) \in \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{N}^*$ e assumimos, por simplicidade, que a sequência aditiva (A_i) muda de paridade entre os tempos -1 e 0 ,

como anteriormente. A família aditiva então transforma-se em família multiplicativa após agrupamento que agora escreveremos como (\tilde{A}_i) .

Correspondendo à aplicação

$$\tilde{B}_i \mapsto \tilde{D}_i \tilde{B}_i \tilde{A}_i = \tilde{B}_{i+1},$$

que descreve algebricamente a operação de renormalização multiplicativa das caixas, agora temos a equação

$$B_k \mapsto D_k B_k A_k = B_{k+1},$$

que corresponde à renormalização sendo feita aditivamente, passo a passo, isto é, em cada estágio k removemos e empilhamos uma caixa, repetindo n_i vezes. A matriz diagonal D_k está definida de forma a renormalizar as caixas, mantendo a maior largura sempre igual a 1, tomando a entrada λ_k de D_k como o inverso da largura da caixa menor.

As partições de Markov geradoras agora estão fáceis de descrever: elas são, para cada componente M_k , exatamente o par de caixas. Vamos denotar esta sequência de partições por \mathcal{P}_k e comparar com a partição multiplicativa já definida, que agora denotaremos por $\tilde{\mathcal{P}}_k$. Temos o seguinte:

Lema 3.3. *A sequência \mathcal{P}_k gera para a família aditiva.*

Demonstração. Daremos duas provas. A primeira é direta: note que as intersecções dos interiores dos elementos da partição após pullback por aplicações apropriadas são sempre conexas, enquanto claramente as larguras (e as alturas para tempo negativo) vai para 0. Daí ela separa pontos, isto é, gera.

A segunda prova é mais abstrata: começamos com a partição geradora para a família multiplicativa dada pela proposição 3.4. Logo, pelo lema 3.4 a seguir, a partição componente conexa é igual a partição agrupada aumentada; finalmente, pela implicação (volta) da proposição 1.10, temos que a sequência de partições \mathcal{P} gera para a família aditiva. \square

Mostra-se que uma boa dinâmica simbólica resulta da rotulação das duas caixas de \mathcal{P}_k da seguinte maneira:

Teorema 3.2. *Considere a família aditiva (M, f) dada pela sequência aditiva $A = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ agindo em vetores linha, então se atribuirmos à caixa da esquerda o símbolo 1 e para a caixa da direita o símbolo 0, o shift não estacionário correspondente definido por esta codificação tem suas matrizes de transição definindo a mesma sequência de matrizes. Isto é, o $sntf$ é $\sum_{(A)}$.*

Demonstração. Vamos supor que a paridade da família aditiva dada por A_i é (+); então temos $A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pela figura 3.5 a caixa mais larga está à esquerda, e tem rótulo 1, o pullback da partição no tempo $i + 1$ satisfaz isto exatamente nas caixas renormalizadas definidas pela matriz B_{i+1} (com os pontos devidamente identificados), assim os pontos da caixa 1 no tempo i pode ou estar na caixa 0 ou na caixa 1 no tempo $i + 1$, enquanto os pontos da caixa 0 estará necessariamente na caixa 0. Logo, a matriz de transição é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, exatamente a mesma matriz. \square

3.4.3 Gathering, componentes conexas e dinâmica simbólica.

A ligação com a sequência de partições geradoras $\tilde{\mathcal{P}}_k$ de \tilde{M}_k , da família multiplicativa, é dada pelo seguinte:

Lema 3.4. *Para a família multiplicativa (\tilde{M}, \tilde{f}) , a partição componente conexa $\tilde{\mathcal{P}}_i$ é a partição agrupada aumentada da partição \mathcal{P} , tomada ao longo da sequência de tempos (n_i) . Então, $\tilde{\mathcal{P}}_i$ é igual a junção dos pullbacks à componente $\tilde{M}_i = M_{n_i}$ das $(n_i + 1)$ partições \mathcal{P}_k em duas caixas, para $n_i \leq k \leq n_{i+1}$.*

Demonstração. Isto é claro da definição; ver figura 3.6. Então, por exemplo, para $n_0 = 1$,

$$\tilde{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0 \vee (g_0)^{-1}(\mathcal{P}_1),$$

que tem três elementos. \square

Na verdade, algo semelhante acontece em casos mais gerais.

Lema 3.5. *Seja (A_k) uma família aditiva, e seja \mathcal{P}_k sua partição geradora (duas caixas). Seja (m_i) uma sequência crescente com $m_i \in \mathbb{Z}$ e defina \hat{A} como sendo a família agrupada ao longo desta subsequência. Defina $(\hat{\mathcal{P}}_i)$ como sendo a partição componente conexa da junção de \mathcal{P}_{m_i} com o pullback de $\mathcal{P}_{m_{i+1}}$ pela aplicação composição. Então, $(\hat{\mathcal{P}}_i)$ é igual a partição agrupada aumentada tomada ao longo da subsequência (m_i) da partição aditiva \mathcal{P} .*

Demonstração. Observamos que na versão autocoordenadas da família multiplicativa, as bordas das duas caixas no tempo m_i são formadas por uma união de dois segmentos nos eixos x e y , cada um deles contendo o ponto $(0,0)$ e formando um “T” na forma geométrica. Após pullback, os dois intervalos correspondentes vindo do tempo futuro m_{i+1} dão um subintervalo do intervalo instável e um segmento que contem o intervalo estável. Temos que mostrar que as componentes conexas do complemento destes quatro intervalos fechados no toro são iguais a partição dada pela junção de todos os pares de caixas de todos os tempos até m_{i+1} (inclusive m_{i+1}), o que dá a partição agrupada aumentada. Mas os dois segmentos (após pullback), respectivamente, estão contidos e contêm todos estes segmentos “pulled-back” até m_{i+1} , visto que eles estão nas folheações expansoras e contratoras. Logo, nenhuma borda nova é somada no agrupamento aumentado (ele dá exatamente a mesma linha vertical das duas caixas originais), concluindo a afirmação. \square

Observação 3.5. *Note que, para a família aditiva, a sequência de partições duas caixas já gera, sem a necessidade de tomar componentes conexas.*

Observamos que a sequência de partições aditiva é mais eficiente que a multiplicativa. Isto se vê a partir da expressão no lema 3.4; note que na definição de $(\hat{\mathcal{P}}_i)$ existe uma parte redundante, já que cada partição \mathcal{P}_k (para $k = \dots, n_0, n_0 + n_1, \dots$) é incluída duas vezes, esta é exatamente a diferença entre as partições agrupadas e as partições agrupadas aumentada de \mathcal{P} ao longo da sequência (n_i) .

O lema 3.5 mostra a relação entre o método das componentes conexas e do agrupamento aumentado ao longo da família aditiva e, conseqüentemente, a conexão com o diagrama de Bratteli telescopado. A proposição 1.17 leva-nos ao seguinte:

Teorema 3.3. *Dado $(F_i) \in SL(2, \mathbb{N})$, a família linear correspondente tem uma partição de Markov que a codifica como um diagrama de Bratteli com rótulos aditivos determinados pela mesma seqüência (F_i) .*

Isto é, a única seqüência aditiva (A_j) determinada pela seqüência (F_i) do lema 3.1 serve a dois propósitos: ela dá a única dispersão aditiva da família (F_i) e, para esta dispersão, a seqüência de partições duas caixas gera e é codificada pela seqüência (A_j) ; telescopando este diagrama de arestas simples temos um diagrama de arestas múltiplas ligados a dois símbolos com rótulos aditivos, e com o número de arestas dado pela seqüência (F_i) . Tomando as componentes conexas dos pullbacks das partições duas caixas de (F_i) temos uma partição de Markov geradora, que é o agrupamento aumentado da partição aditiva tomado ao longo da subsequência. \square

Lembremos da definição 3.1 que uma seqüência (F_i) de matrizes inteiras não negativas (2×2) determina um *sntf* chamado $\sum_{(F)}$. Escrevemos (M, f) para a família de aplicações no toro definido por (F_i) e agindo nas linhas.

Corolário 3.3. *A codificação pelo *sntf* $\sum_{(F)}$ da família linear (F_i) define uma conjugação topológica π da família de aplicações $(\sum_{(F)}, \sigma)$ para a família (M, f) .*

Exemplo: Devido a uma família linear positiva (F_i) ter uma única seqüência aditiva, os elementos da partição geradora de Markov descrita anteriormente ganha rotulação natural. Descrevemos os rótulos para o caso da família multiplicativa (veja figura 3.6). Para k par, tomando por exemplo $k = 0$ e $n_0 = 3$, como na figura, temos que os elementos da partição \mathcal{P}_0 , lendo da direita para esquerda, são rotulados da seguinte forma: a caixa menor (à direita) é rotulada 0000, e a caixa maior é cortada em pedaços rotulados 1111, 1110, 1100 e 1000, respectivamente; tomando por exemplo $n_1 = 3$, para a partição \mathcal{P}_1 , com paridade trocada, temos que a caixa menor, agora à esquerda, é

rotulada 1111, e 0, 1, 2, 3 são rotulados (da esquerda para direita) 0000, 0001, 0011 e 0111.

Observação 3.6. *Na definição de espaço shift, pode-se deixar as matrizes de transição agir em vetores colunas ou linhas (sendo esta última mais usual na teoria de cadeias de Markov); para diagramas de Bratteli, a convenção coluna é frequentemente usada. Da mesma forma, matrizes podem ser escolhidas para agir no toro pela multiplicação por vetores linha ou coluna (sendo esta última mais comum na teoria de sistemas dinâmicos). Assim é usual, em dinâmica, termos uma mistura de convenções. Normalmente isto faz pouca diferença, mas quando se toma uma sequência de matrizes, como fizemos aqui, fazer uma escolha coerente é muito importante pois, caso contrário, a ordem da multiplicação das matrizes fica invertida (como foi discutido no início da seção 2.3.3). E mesmo para uma única aplicação Anosov, a coerência é fundamental quando se quer obter uma boa codificação do tipo Adler-Manning. Sabendo disto, temos um corolário imediato: que se a convenção vetor coluna fosse usada tanto para as aplicações como para as transições, novamente teríamos a mesma matriz para ambos; enquanto que, se uma convenção mista fosse adotada, a matriz da codificação seria a transposta daquela que é dada pela aplicação.*

Teorema 3.4. *Considere a sequência de matrizes $(A_i)_{i \geq 0}$ (2×2) definida pela família multiplicativa dada pela escolha de $\langle n \rangle \in \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{N}^*$. A medida central de Parry ν_0 definida em $\prod_0^{+\infty} \{A, B\}$, onde $\{A, B\}$ é o conjunto de símbolos, coincide, a menos de multiplicação por uma constante κ , com a medida de Lebesgue dos intervalos correspondentes as bases das caixas A e B durante o processo “cutting and stacking” relacionado a renormalização (descrita na proposição 3.3).*

Demonstração. Queremos mostrar que, por exemplo, para paridade (+) e i par, a medida central de Parry de um cilindro de tamanho $j + 1$ cujo primeiro dígito é x_0 e último dígito é $x_j = B$, onde $t_i \leq j < t_{i+1}$ com $t_0 = 0$ e $t_i = \sum_{l=0}^{i-1} n_l$, $\forall i \geq 1$, corresponde ao comprimento do intervalo da base da caixa B_i (a caixa B no tempo i , que é a caixa maior já que i é par) diminuído de a_i tantas vezes quanto forem os cortes

já realizados (no máximo n_i vezes); e para um cilindro cujo último dígito é $x_j = A$ a medida central de Parry é a_i , a menos de multiplicação por uma constante κ . Depois também consideraremos i ímpar (após mudança de paridade).

Continuemos com a paridade (+). Agora $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n_0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$

Seja a sequência $(L_j)_{j \geq 0}$ de matrizes (2×2) de entradas $0 - 1$, sendo a fatoração da sequência $(A_i)_{i \geq 0}$. Isto dá a dispersão da família multiplicativa, isto é, a família aditiva.

Assim, $A_i = L_{t_i} \dots L_{t_{i+1}-1}$, $\forall i \geq 0$, onde $L_{t_i} = L_{t_{i+1}} = \dots = L_{t_{i+1}-1}$.

Consideremos duas sequências de autovetores, uma para cada família:

- para a família aditiva $(L_j)_{j \geq 0}$, seja $(\widehat{w}_j)_{j \geq 0}$ a sequência de autovetores coluna com autovalores 1, onde $\|\widehat{w}_0\| = 1$, que existe pelo lema 2.8;
- para a família multiplicativa $(A_i)_{i \geq 0}$, seja $(w_i)_{i \geq 0}$ a sequência de autovetores dada por $w_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}$, onde a_i é a fração contínua $[n_i n_{i+1} \dots]$ e $b_i = 1$ para i par e, $a_i = 1$ e $b_i = [n_i n_{i+1} \dots]$ para i ímpar. Sabemos que $(w_i)_{i \geq 0}$ é uma sequência de autovetores para a família multiplicativa desde a observação 3.2.

Como estamos aplicando em vetores colunas, temos que fazer aplicações da direita para esquerda (veja seção 2.3.3):

$$M_0 \xleftarrow{A_0} M_1 \xleftarrow{A_1} M_2 \xleftarrow{A_2} M_3 \dots,$$

onde M_i são copias do toro quadrado $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Fazemos o mesmo para a sequência $(L_j)_{j \geq 0}$.

Como $A_i w_{i+1} = \lambda_i w_i$, onde $\lambda_i = 1/a_i$ para i par e $\lambda_i = 1/b_i$ para i ímpar (lembrando que estamos tomando paridade (+)), temos:

$$A_i \frac{w_{i+1}}{\lambda_i} = w_i. \tag{3.4}$$

Então $\frac{w_{i+1}}{\lambda_i}$ é uma sequência de autovetores com autovalores 1 para a família multiplicativa.

Também, como $A_i = L_{t_i} \dots L_{t_{i+1}-1}$, $\forall i \geq 0$, temos:

$$A_i \widehat{w}_{t_{i+1}} = \widehat{w}_{t_i}, \quad (3.5)$$

ou seja, $\widehat{w}_{t_0}, \widehat{w}_{t_1}, \widehat{w}_{t_2}, \dots$ é também uma sequência de autovetores com autovalores 1 para a família multiplicativa. Já que, pela proposição 1.7, a sequência de decomposições da família multiplicativa nas direções expansoras e contratoras é única, as equações (3.4) e (3.5) nos dá as seguintes relações para estes autovetores:

$$\begin{aligned} \widehat{w}_{t_0} &= \widehat{w}_0 = \frac{w_0}{\|w_0\|}, \\ A_0 \widehat{w}_{t_1} &= \widehat{w}_0 = \frac{w_0}{\|w_0\|} \xrightarrow{(3.4)} \frac{w_1}{\lambda_0} = \|w_0\| \widehat{w}_{t_1} \Rightarrow \widehat{w}_{t_1} = \frac{w_1}{\lambda_0 \|w_0\|}, \\ A_1 \widehat{w}_{t_2} &= \widehat{w}_{t_1} = \frac{w_1}{\lambda_0 \|w_0\|} \xrightarrow{(3.4)} \frac{w_2}{\lambda_1} = \lambda_0 \|w_0\| \widehat{w}_{t_2} \Rightarrow \widehat{w}_{t_2} = \frac{w_2}{\lambda_0 \lambda_1 \|w_0\|}, \\ A_2 \widehat{w}_{t_3} &= \widehat{w}_{t_2} = \frac{w_2}{\lambda_0 \lambda_1 \|w_0\|} \xrightarrow{(3.4)} \frac{w_3}{\lambda_2} = \lambda_0 \lambda_1 \|w_0\| \widehat{w}_{t_3} \Rightarrow \widehat{w}_{t_3} = \frac{w_3}{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \|w_0\|}, \\ &\vdots \\ \widehat{w}_{t_i} &= \frac{w_i}{\prod_{l=0}^{i-1} \lambda_l \cdot \|w_0\|}. \end{aligned}$$

Então, da equação (2.6) da seção 2.3.4, temos que a medida ν_0 de um cilindro de tamanho $t_i + 1$, isto é, a medida do cilindro $[x_0 \dots x_{t_i}]$, $\forall i \geq 0$, é:

$$\frac{a_i}{\prod_{l=0}^{i-1} \lambda_l \cdot \|w_0\|} \quad \text{ou} \quad \frac{b_i}{\prod_{l=0}^{i-1} \lambda_l \cdot \|w_0\|}.$$

para $x_{t_i} = A$ e $x_{t_i} = B$, respectivamente.

Então, para concluir, basta mostrar que as entradas de \widehat{w}_j , $\forall j \geq 0$, é igual ao comprimento dos intervalos correspondente as bases das caixas durante o processo “cutting and stacking” relacionado a renormalização, a menos de multiplicação pela constante $\kappa = 1/\|w_0\|$. Tomemos $t_0 \leq j \leq t_1$, ou seja, $0 \leq j \leq n_0$. Em outras palavras, comecemos com os primeiros cortes a partir do tempo 0 e antes da troca da paridade

(primeira renormalização).

Para $j = 0$, como $w_0 = (a_0, b_0)$ e $\hat{w}_0 = \frac{w_0}{\|w_0\|}$, o resultado é imediato.

Vejamos para $j = n_0$: na demonstração da proposição 3.1, vimos que $b_1 = \lambda_0(b_0 - n_0 a_0)$ e que $a_1 = \lambda_0 a_0$. E, já que $\hat{w}_{n_0} = \frac{w_1}{\lambda_0 \|w_0\|}$ com $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ temos:

$$\hat{w}_{n_0} = \frac{1}{\|w_0\|} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 - n_0 a_0 \end{bmatrix}, \text{ cujas entradas são exatamente os comprimentos das bases}$$

das caixas após todo o processo “cutting and stacking”, antes da troca de paridade (a menos da constante $\kappa = 1/\|w_0\|$).

Agora para $1 \leq j < n_0$, ou seja, as entradas de $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_{n_0-1}$: como estamos considerando paridade (+) temos: $L_0 = L_1 = \dots = L_{n_0-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{aligned} L_{n_0-1} \hat{w}_{n_0} = \hat{w}_{n_0-1} &\implies L_{n_0-1} \frac{w_1}{\lambda_0 \|w_0\|} = \hat{w}_{n_0-1} \implies \frac{1}{\lambda_0 \|w_0\|} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\lambda_0 \|w_0\|} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 + b_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|w_0\|} \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\lambda_0} \\ \frac{a_1 + b_1}{\lambda_0} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|w_0\|} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0 + b_0 - n_0 a_0 \end{bmatrix} = \\ &\frac{1}{\|w_0\|} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 - (n_0 - 1)a_0 \end{bmatrix} = \hat{w}_{n_0-1}. \end{aligned}$$

antes do último corte na caixa B .

Continuando a aplicar $L_{n_0-2}, L_{n_0-3}, \dots, L_1$ (lembrando que estamos decrescendo os índices pois estamos aplicando em vetores colunas, ou seja, aplicando na sequência de componentes da direita para esquerda), temos:

$$\hat{w}_{n_0-2} = \frac{1}{\|w_0\|} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 - (n_0 - 2)a_0 \end{bmatrix}, \dots, \hat{w}_1 = \frac{1}{\|w_0\|} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 - a_0 \end{bmatrix}.$$

Tomando $\kappa = 1/\|w_0\|$ temos o resultado. Perceba que esta constante funciona como

uma normalização onde o intervalo correspondente a base das duas caixas juntas (uma ao lado da outra), no tempo 0, fica com comprimento 1.

Depois da mudança da paridade, os cortes começam a ser feitos na caixa A (a caixa da direita). Os cálculos são análogos. Vamos expor apenas o último passo deste segundo processo, ou seja, quando $j = t_2$, a fim de mostrar que o produto $\prod_{l=0}^{i-1} \lambda_l$ é necessário:

$$\begin{aligned} \widehat{w}_{t_2} &= \frac{w_2}{\lambda_0 \lambda_1 \|w_0\|} = \frac{1}{\lambda_0 \lambda_1 \|w_0\|} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_0 \lambda_1 \|w_0\|} \begin{bmatrix} \lambda_1(a_1 - n_1 b_1) \\ \lambda_1 b_1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\lambda_0 \lambda_1 \|w_0\|} \begin{bmatrix} \lambda_0 \lambda_1 [a_0 - n_1(b_0 - n_0 a_0)] \\ \lambda_0 \lambda_1 (b_0 - n_0 a_0) \end{bmatrix} = \frac{1}{\|w_0\|} \begin{bmatrix} a_0 - n_1(b_0 - n_0 a_0) \\ b_0 - n_0 a_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Perceba que as entradas $a_0 - n_1(b_0 - n_0 a_0)$ e $b_0 - n_0 a_0$ correspondem exatamente aos comprimentos das bases das caixas A e B após o segundo processo “cutting and stacking” cuja paridade é $(-)$. \square

Observação 3.7. *A família descrita na definição 3.2 cuja conjugação na versão autocoordenadas é feita pelas matrizes B_i descrita na proposição 3.1, onde as aplicações estão sendo feitas em vetores linha (isto é, para a direita), também tem uma relação interessante com a medida central de Parry. Neste caso, a sequência de autovetores com entradas positivas é dada por: $v_i^t = [d_i \ c_i]$, onde $\frac{d_i}{c_i} = [n_{i-1} n_{i-2} \dots]$ para i par; e $\frac{c_i}{d_i} = [n_{i-1} n_{i-2} \dots]$ para i ímpar.*

O que ocorre é que, para termos uma sequência de autovetores coluna com o objetivo de adaptarmos a definição da medida central de Parry, basta tomarmos as transpostas das matrizes. Aí temos a sequência de autovetores coluna com entradas positivas: ${}^t v_i = {}^t v_i^u = \begin{bmatrix} d_i \\ c_i \end{bmatrix}$, onde, agora, a família multiplicativa é dada pelas transpostas $\dots, A_1^t, A_0^t, A_{-1}^t, \dots$. Mas isto é apenas uma mudança na paridade, então estamos mantendo toda a dinâmica feita anteriormente.

Agora perceba que, pelo mesmo raciocínio feito na demonstração da proposição an-

terior e cálculos análogos temos que a medida central de Parry em $\prod_{-\infty}^{-1}\{A, B\}$ coincide com a medida de Lebesgue (a menos de multiplicação por uma constante κ) dos intervalos correspondentes as alturas das caixas A e B durante o processo de renormalização, já que estas tem alturas iniciais d_0 e c_0 . Então isto dá uma extensão da proposição anterior para $i < 0$.

Observação 3.8. A família multiplicativa satisfaz a propriedade de Perron-Frobenius, isto é, tomando o cone positivo no tempo futuro sentido $+\infty$ e aplicando as matrizes A_i da família (da direita para a esquerda), estes cones (encaixantes) tendem a uma sequência de autovetores para a família, esta sequência é exatamente a sequência de autovetores com entradas positivas w_i .

Capítulo 4

Exemplos de Transformações Ádicas

Vamos citar três exemplos importantes, com ênfase no exemplo da seção 4.3 que tem ligação direta com o capítulo anterior. Também discutiremos a existência ou não de extensões contínuas para estes exemplos de transformações ádicas.

4.1 Odômetro estacionário e não estacionário.

Este é o exemplo mais básico de transformações ádicas. Dados alfabetos \mathcal{A}_i com $\#\mathcal{A}_i = l_i$, seja $L_{ij} = 1, \forall i, j$. Para este caso, escrevemos $\prod_{(A)}^{k,+} \equiv \sum_{(L)}^{k,+} = \prod_{i=k}^{\infty} \mathcal{A}_i$, com $\prod_{(A)}^+ \equiv \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{(A)}^{k,+}$ designando o espaço shift não estacionário unilateral todo da sequência de alfabetos $(\mathcal{A}_i)_{i \geq 0}$.

Considerando a zero-ésima componente $\sum_{(L)}^{0,+} = \prod_{k=0}^{\infty} \{1, \dots, l_k\}$, definimos uma ordem no diagrama de Bratteli, ordenando o conjunto $\mathcal{A}_k^j = \mathcal{A}_k$ por rótulos nos símbolos, $0 < 1 < 2 < \dots < (l_k - 1)$. Então arestas que entram em cada símbolo são ordenadas de acordo com o símbolo de onde elas vêm. Chamamos este tipo especial de ordem estável de: “**ordem vertex**” (ordem dos vértices).

O diagrama de Bratteli é então adequado, já que existe um único ponto que não tem sucessor, o ponto $(.l_0 l_1 l_2 \dots)$. Se definirmos a imagem deste ponto como sendo $(.000 \dots)$, que é o único ponto sem antecessor, temos uma extensão da transformação para todo o espaço $\sum_{(L)}^{0,+}$ que é uma extensão contínua. No caso clássico onde $l_i = d$ é constante, $\sum^+ = \sum_{(L)}^{0,+}$ é o espaço shift unilateral todo (shift para esquerda), com d

símbolos, e a transformação estendida T é chamada de *Máquina aditiva de Kakutani-Von Neumann* ou *odômetro d -ádico*.

4.2 Ádicas induzidas: Máquina aditiva de Markov; ádicas estacionárias.

Quando os alfabetos, as matrizes e a ordem são todos constantes $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$, $L_i = L$, $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}$ (então L é $(d \times d)$), todas as componentes do *stf* podem ser naturalmente identificadas, dando um *stf* unilateral $\sum_{(L)}^+$, e a aplicação é denominada **transformação ádica estacionária** deste espaço.

Um exemplo simples disto é quando a ordem é uma ordem vertex, então a transformação ádica é a transformação induzida (primeiro retorno) no subconjunto do *odômetro d -ádico* consistindo dos strings permitidos, esta transformação ádica é chamada de **máquina aditiva de Markov** (estacionária).

Como um conjunto estável de um string no *stf* é um subconjunto do conjunto estável (deste mesmo string) no shift unilateral todo, então este conjunto retrata geometricamente a máquina aditiva de Markov como saltos de um “galho” para o próximo nesta sub-árvore permitida da árvore estável deste string.

Na verdade, qualquer transformação ádica pode ser recodificada como uma máquina aditiva de Markov não estacionária, tomando como um novo alfabeto os conjuntos de arestas. Cada um destes conjuntos é particionado em subconjuntos ordenados pela **ordem edge** (ordem das arestas) e nós simplesmente a estendemos de algum modo consistente para uma ordem linear no conjunto de arestas todo.

Notemos que, mesmo que o odômetro tenha ele próprio uma única extensão contínua, isto pode não ser verdade para a máquina aditiva de Markov; em todo caso, a extensão pode ser diferente daquela vinda da aplicação induzida. A codificação das arestas da *rotação ádica dual irracional* discutida a seguir exhibe esta construção.

4.3 Modelos ádicos de rotações no círculo: ângulo irracional.

Associado a uma rotação irracional $R_\theta : x \mapsto x + \theta \pmod{1}$ do círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} , descreveremos duas diferentes codificações para as transformações ádicas. Elas têm a mesma sequência $(F_i)_{i \geq 0}$ de matrizes e portanto o mesmo diagrama de Bratteli, porém tem ordens diferentes que leva a uma importante diferença entre elas: enquanto a primeira transformação tem uma única extensão para um homeomorfismo no espaço $\sum_{(F)}^{0,+}$ todo, a segunda não tem. O que ocorre é que, para a primeira, \mathcal{NS} e \mathcal{NP} são unitários, enquanto para a segunda, \mathcal{NP} tem dois elementos e portanto nenhuma extensão deste tipo é possível.

Tomemos como alfabeto $\mathcal{A}_i = \{A, B\}$ para todo $i \geq 0$; escrevendo \mathcal{A}^* para a coleção de palavras finitas com letras de \mathcal{A} , dizemos que uma *substituição* é uma aplicação de \mathcal{A} para \mathcal{A}^* . Definimos dois pares de substituições ρ_0, ρ_1 e $\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1$ a seguir:

o par de **substituições Rauzy**,

$$\begin{aligned} \rho_0(A) &= A, & \rho_1(A) &= AB \\ \rho_0(B) &= AB, & \rho_1(B) &= B \end{aligned} ;$$

o par de **substituições dual**,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0(A) &= A, & \tilde{\rho}_1(A) &= AB \\ \tilde{\rho}_0(B) &= BA, & \tilde{\rho}_1(B) &= B \end{aligned} .$$

Uma substituição estende-se por concatenação para uma aplicação de \mathcal{A}^* nele mesmo que é um homomorfismo do semigrupo livre ligado a dois geradores A, B ; a abelianização da substituição despreza a ordem das letras, logo é um homomorfismo do semigrupo abeliano livre, e portanto convenientemente especificada por uma matriz inteira não negativa (2×2) . Tomamos por convenção vetores coluna, então a entrada (i, j) da matriz F correspondente a substituição ρ será o número de i 's que ocorrem em $\rho(j)$, para $i, j \in \{A, B\}$ escrito nesta ordem. Então a matriz de ρ_0 e $\tilde{\rho}_0$ é P , e a

matriz de ρ_1 e $\tilde{\rho}_1$ é Q , onde:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora escolhemos uma sequência infinita de matrizes $(F_i)_{i \geq 0}$ tal que cada matriz é P ou Q , e para isto associamos duas sequências infinitas de substituições $(\rho_i)_{i \geq 0}$ e $(\tilde{\rho}_i)_{i \geq 0}$ com suas abelianizações.

Formando o diagrama de Bratteli para a sequência de matrizes, pensamos nas substituições como ações da direita para a esquerda no diagrama de Bratteli, isto porque tomamos a convenção vetores coluna para as matrizes. Com as arestas orientadas na direção do passado para concordar com a direção das aplicações substituição. As substituições determinam uma ordem estável para o diagrama; as arestas que saem do símbolo j são ordenadas pela ordem das letras na palavra $\rho(j)$, ver figura 4.1. Na figura da árvore estável, as substituições vão para baixo, ver figura 4.3.

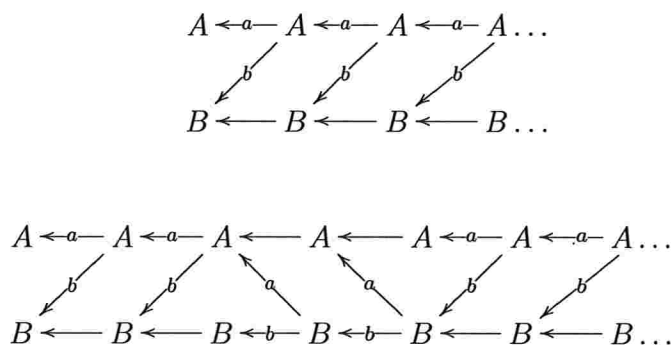


Figura 4.1: Rotações ádicas com a substituição de Rauzy: o twist Q^∞ , com ponto fixo, e uma rotação ádica irracional, com matrizes Q, Q, P, P, Q, Q, \dots . Orientamos as arestas para o passado do *snif* para concordar com as aplicações *substituição*.

Para especificar a sequência de matrizes, escolhemos uma sequência de inteiros estritamente positivos $(n_i)_{i \geq 0}$ e uma paridade $(-)$ ou $(+)$. Para paridade $(-)$, definimos $F_i = P$ para $0 \leq i \leq n_0 - 1$, $F_i = Q$ para $n_0 \leq i \leq n_0 + n_1 - 1$ e assim por diante; para paridade $(+)$ começamos com Q ; então a sequência de matrizes para as paridades $(-)$

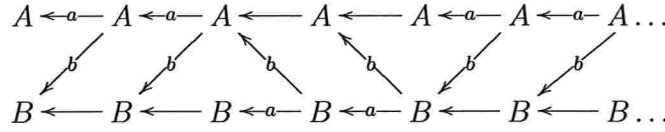


Figura 4.2: Rotações ádicas com a substituição de dual: rotação ádica irracional, com a sequência de matrizes Q, Q, P, P, Q, Q, \dots correspondendo a sequência de substituições $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_1 \dots$

e (+) são, respectivamente, $P^{n_0}Q^{n_1}P^{n_2} \dots$ e $Q^{n_0}P^{n_1}Q^{n_2} \dots$

Assim temos uma sequência $(F_i)_{i \geq 0}$ cuja paridade da cada F_i muda infinitas vezes, e duas correspondentes sequências de substituições definindo dois diagramas ordenados de Bratteli. Denotaremos por T e \tilde{T} as correspondentes transformações ádicas, e mostremos:

Proposição 4.1. *Para a ordem Rauzy, $\mathcal{NS} = \{(\bar{B})\}$ e $\mathcal{NP} = \{(\bar{A})\}$, onde $(\bar{A}) = (.AAA\dots)$. A extensão T_f definida por $f(\bar{B}) = (\bar{A})$ é um homeomorfismo. Se olharmos A, B como $0, 1$ (uma troca na codificação), T_f fica induzida pelo odômetro 2-ádico como uma máquina aditiva de Markov. Para a ordem dual, $\tilde{\mathcal{NS}}$ tem um único elemento, que é $(.A^{n_0}B^{n_1}A^{n_2} \dots)$ se a paridade for $(-)$ ou $(.B^{n_0}A^{n_1}B^{n_2} \dots)$ para paridade $(+)$. Porém $\tilde{\mathcal{NP}} = \{(\bar{A}), (\bar{B})\}$, e nenhuma extensão contínua de \tilde{T} em $\Sigma_{(F)}^{0,+}$ é possível. Pela troca dos códigos A, B para $0, 1$, e concordando com a paridade, a rotação ádica dual é realizada como uma aplicação induzida pelo odômetro para o qual não existe extensão contínua.*

Demonstração. Consideremos primeiro a ordem de Rauzy, verificamos que, de fato, existe um único elemento maximal e um único minimal. Seja $x = (x_i)_{i \geq 0} \in \Sigma_{(F)}^{0,+}$ e suponha que $x_{k-1}x_k = AB$. Existem duas setas que entram no símbolo B no tempo k (ver figura 4.1), e $BB > AB$. Assim x não é maximal em $W^s(x)$. Logo, se um string x é um elemento maximal de $W^s(x)$, ele não pode conter uma palavra $x_{k-1}x_k = AB$, qualquer que seja k . A única possibilidade (diferente de (\bar{B})), que claramente é maximal) é $x = (.BBBB\dots B\bar{A})$, onde o primeiro A ocorre, digamos, no tempo k . Já que, por suposição, P e Q ocorrem (cada um deles) infinitas vezes, para algum

$m > k$ existe um string w em $W^s(x)$ com $w_{m-1}w_m = BA$ (e $w_t = A, \forall t > m$). Mas $BA > x_{m-1}x_m = AA$, então x não é maximal. Portanto o único elemento possível em \mathcal{NS} é $(.\bar{B})$. Por argumento similar, o único string em \mathcal{NP} é $(.\bar{A})$.

Agora mostremos que a aplicação estendida com $f(.\bar{B}) = (.\bar{A})$ é contínua. Suponha $x^{(i)} \rightarrow (.\bar{B})$; definamos $m = m_i$ como sendo o lugar onde o penúltimo símbolo B ocorre (numa sequência de B 's) antes de mudar para A , então:

$x = x^{(i)} = (x_0x_1x_2 \dots x_mx_{m+1}x_{m+2}x_{m+3}x^+) = (.BBBB \dots BBACx^+)$, onde $x_{m+3} = C = A$ ou B . Dizemos que um símbolo “*separa para trás*” se há duas arestas entrando nele. Então $x_{m+2} = A$ *separa para trás*, já que $L_{m+1} = Q$ (isto porque $x_{m+2} = A$ e para termos uma mudança de $x_{m+1} = B$ para $x_{m+2} = A$ devemos ter a matriz de transição Q , já que P não faz esta mudança). Agora defina $n = n_i \leq m = m_i$ como sendo o maior inteiro tal que $L_n = P$. Afirmamos que o sucessor de x é $(.AA \dots A_nB_{n+1}B_{n+2} \dots BC_{m+3}x^+)$, onde indexamos alguns símbolos por suas posições. A razão disto é que, primeiro, $AC_{m+3} < BC_{m+3}$; mas $L_{n+1} = L_{n+2} = \dots = L_{m+1} = Q$ e assim o símbolo B_{m+1} não separa para trás. Consequentemente B deve ser mantido quando o índice decresce até $n+1$, onde $L_n = P$ permite uma transição para fazer $x_n = A$. A partir daí A não só é permitido como é sempre a menor opção. E isto prova a afirmação de sucessor.

Finalmente, como $x^{(i)} \rightarrow (.\bar{B})$ quando $m_i \rightarrow \infty$, e como a paridade muda infinitas vezes, $n_i \rightarrow \infty$ também. Isto prova que $f(x^{(i)}) \rightarrow (.\bar{A}) = f(.\bar{B})$, e a aplicação estendida é de fato contínua.

Por fim afirmamos que T_f é induzida pelo odômetro 2-ádico onde A, B são identificados com $0, 1$. Mas isto é claro para $\sum_{(F)}^{0,+} \setminus \mathcal{N}$, porque a ordem nas arestas $AC < BC$ é a ordem nos vértices. E já que o odômetro também aplica $(.\bar{B})$ em $(.\bar{A})$, esta transformação ádica estendida é uma aplicação induzida pela máquina aditiva de todo \sum^+ restrita ao subconjunto de strings permitidos $\sum_{(F)}^{0,+} \subseteq \sum^+$, como declarado.

Agora mudemos para a ordem dual. A verificação para cada um dos elementos minimais é similar ao que foi feito para o elemento minimal na ordem Rauzy (observe que $AA > AB$ para a substituição $\tilde{\rho}_0$, ver figura 4.2), concluímos que $\widetilde{\mathcal{NP}} = \{(.\bar{A}), (.\bar{B})\}$.

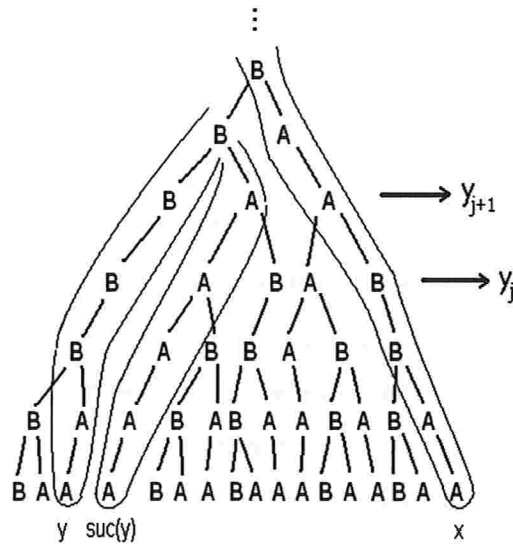


Figura 4.3: Árvore estável para a substituição dual e sequência de matrizes P, P, Q, Q, P, P, \dots . Ilustração para demonstração da proposição 4.1. Tomando $k = 1$, assim $t_k = n_0 + n_1 - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$. Logo $y_i = x_i, 0 \leq i \leq 3 = j$. Como k é ímpar, tomemos $y_A = y_3 = B$, assim $y = (.AABBB y_{j+2} \dots)$ enquanto $x = (.AABB A x_{j+2} \dots)$. Então $suc(y) = (.AAAAA y_{j+2} \dots)$.

O elemento maximal $(.x_0 x_1 \dots)$ é definido unicamente pela seguinte regra: dado x_{k+1} , tomemos $x_k \neq x_{k+1}$ sempre que for possível, isto vai coincidir com o caminho para maximizar o elemento. E, já que a paridade muda infinitas vezes, existe um único string que satisfaz isto, dado por: $(.A^{n_0} B^{n_1} A^{n_2} \dots)$ (para paridade $(-)$) ou $(.B^{n_0} A^{n_1} B^{n_2} \dots)$ (para paridade $(+)$). Assim $\widetilde{\mathcal{NS}}$ tem um único elemento, logo nenhuma extensão para um homeomorfismo é possível. De fato, não existe extensão contínua pela seguinte razão: denotemos x o elemento máximo, digamos com paridade $(-)$, então $x = (.x_0 x_1 \dots) = (.A^{n_0} B^{n_1} A^{n_2} \dots)$. Para $t_k = n_0 + n_1 + \dots + n_k - 1$, tomemos y um string com $y_i^{(k)} = x_i$ para $0 \leq i \leq t_k = j$; para k ímpar tomemos $y_{j+1}^{(k)} = y_j = B$, não necessariamente $y_{j+2} = B$, enquanto para k par tomemos $y_{j+1}^{(k)} = y_j = A$. Então o sucessor de $y^{(k)}$ para k ímpar é $(.AA \dots AA y_{j+2}^{(k)} \dots)$ enquanto que, para k par, o sucessor de $y^{(k)}$ é $(.BB \dots BB y_{j+2}^{(k)} \dots)$. Veja figura 4.3.

Consequentemente, $\widetilde{T}(y^{(2j)}) \rightarrow (.AA \dots)$ enquanto $\widetilde{T}(y^{(2j+1)}) \rightarrow (.BB \dots)$ onde

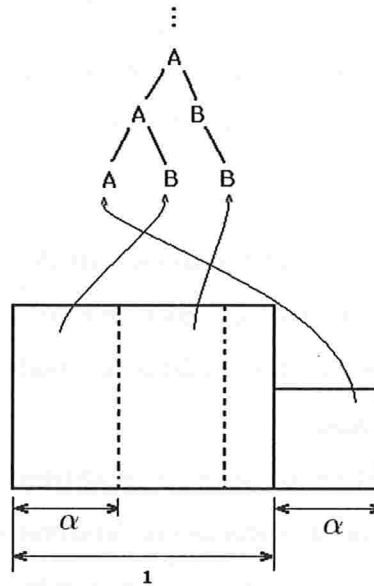


Figura 4.4: Para a substituição dual, paridade (+) e seqüência de matrizes Q, Q, P, P, \dots , tomando cilindros de tamanho 3 na árvore estável e identificando-os com a partição duas-caixas relacionando a dinâmica “cutting and stacking”. O comprimento α é a fração contínua $[n_0 n_1 \dots]$.

$y^{(j)} \rightarrow x$ quando $j \rightarrow \infty$, e assim não existe extensão contínua.

Para produzir, a partir deste exemplo, uma máquina aditiva de Markov que não tenha extensão contínua, podemos proceder de duas maneiras: primeiro, recodificando com alfabetos arestas (que teriam três símbolos) dando uma ordem vertex e assim representando a aplicação ádica homeomorficamente como uma máquina aditiva de Markov que não tem extensão contínua. \square

Dinamicamente, ambas aplicações são relacionadas a rotação no círculo R_θ .

Proposição 4.2. *A transformação ádica $(\sum_{(F)}^{0,+}, T_{\mathcal{O}})$ fatora-se naturalmente sobre a rotação $R_\theta : x \mapsto x + \theta \pmod{1}$ onde θ está definido como a seguir: denotando*

$$\alpha = [n_0 \dots n_k \dots] \equiv \frac{1}{n_0 + \frac{1}{n_1 + \dots}},$$

então, para paridade (+) temos $\theta = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \in (0, 1/2)$; enquanto para paridade (-) temos $\theta = \frac{1}{\alpha + 1} \in (1/2, 1)$. Através desta semiconjugação, a medida central de Parry ν_0 definida no espaço combinatorial $\Pi_0^{+\infty}\{A, B\}$ coincide com a medida de Lebesgue no intervalo $[0, 1]$.

Demonstração. Notando que uma rotação no círculo é uma troca entre dois intervalos, a prova segue como outros casos de troca de intervalos (como mostrado em [8]); e para a afirmação da coincidência das medidas, a rotação é isomórfica ao “cutting and stacking” daí usamos o teorema 3.4.

Para mostrar o que acontece, tomemos a substituição dual com paridade (+).

Percebamos que, neste caso, a órbita de um determinado cilindro pela transformação ádica descreve exatamente o que acontece com os intervalos que são as projeções das caixas no processo da renormalização da partição duas-caixas descrita na seção 3.3, feita passo a passo (isto é, considerando a família aditiva). Para a paridade (+) temos a caixa maior à esquerda, como na figura 3.4. Vamos identificar cada cilindro na árvore estável com a partição duas-caixas e recodificar estas caixas de 0, 1 para A, B , respectivamente, onde a caixa maior é a caixa B e a menor é A (no tempo 0). Tomemos cilindros de tamanho três para, por exemplo, a sequência de matrizes Q, Q, P, P, \dots . Perceba que, para a família multiplicativa, temos a sequência Q^2, P^2, \dots , isto é, $n_0 = 2$, $n_1 = 2, \dots$, ou seja, descreveremos 2 cortes para renormalizar as caixas como feito na proposição 3.3. Como estamos considerando cilindros de tamanho três, temos três cilindros possíveis na árvore: $[.BAA]$, $[.BBA]$ e $[.AAA]$, ver figura 4.4. Então, a dinâmica “cutting and stacking” consiste em cortarmos a caixa maior rotulada B (ver proposição 3.3). Temos que no primeiro corte na caixa B geramos um pedaço de comprimento da base igual a $a_0 = \alpha$. Aí empilhamos este pedaço sobre a caixa menor de rotulação A , depois cortamos outro pedaço da caixa B de mesmo comprimento e, novamente, empilhamos sobre a caixa A e este é o máximo de vezes que podemos retirar o comprimento α da caixa B . Ora, a indentificação ocorre de forma natural, o primeiro pedaço cortado identificamos com o cilindro $[.BAA]$, o segundo pedaço com

$[\cdot BBA]$, e a caixa menor fica identificada por $[\cdot AAA]$ já que ela permanece no mesmo lugar.

Agora, $T_{\mathcal{O}}([\cdot AAA]) = [\cdot BAA]$ e $T_{\mathcal{O}}([\cdot BAA]) = [\cdot BBA]$. Como estas três caixas (pedaços) tem comprimento da base iguais a α , normalizando o intervalo $a_0 + b_0$ que corresponde ao comprimento das caixas B e A , uma ao lado da outra, para ser 1, e sabendo que o comprimento da caixa B é $b_0 = 1$ e da caixa A é $a_0 = \alpha$, temos que a aplicação fator da transformação ádica é identificada com a rotação $R_{\theta} : x \mapsto x + \theta \pmod{1}$, onde $\theta = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$, pelo menos para as duas primeiras iteradas de $T_{\mathcal{O}}([\cdot AAA])$.

Para $T_{\mathcal{O}}^3([\cdot AAA])$, na mesma situação, não fica claro o que acontece, já que, a partir do terceiro passo na dinâmica “cutting and stacking”, a primeira renormalização já está concluída, ou seja, agora a caixa maior está à direita e começamos a cortar da direita para a esquerda. Na verdade, se seguirmos a trajetória do intervalo, digamos l , de comprimento a_0 que corresponde, inicialmente, a base da caixa A , temos que $R_{\theta}^3(l) \pmod{\alpha + 1}$ intercepta o intervalo correspondente a base da caixa B (no tempo 0) e também intercepta o intervalo correspondente a base da caixa A (ele mesmo no tempo 0). Então, para irmos mais além, vamos considerar cilindros mais finos.

Tomemos, no mesmo exemplo, cilindros de comprimento 4. Agora temos sete cilindros possíveis para a árvore, vamos nomear estes cilindros obedecendo a trajetória de $[\cdot BBBB]$ pela transformação ádica e usar a mesma nomenclatura para os intervalos correspondentes as bases de cada caixa identificada com cada um destes cilindros (ver figura 4.5). Então: $[BBBB] = a$, $[\cdot AAAB] = b$, $[\cdot BAAB] = c$, $[\cdot BBAB] = d$, $[\cdot AAAA] = e$, $[BAAA] = f$, $[\cdot BBAA] = g$. Seja m a medida de Lebesgue destes intervalos, note que $m(f) + m(c) = m(g) + m(d) = m(e) + m(b) = \alpha$ e, seguindo a dinâmica “cutting and stacking”, no terceiro passo (isto é, cortando a caixa da direita), cortamos a caixa A retirando o comprimento da base correspondente a $m(b) = m(a) = b_0 - 2a_0 = 1 - 2\alpha$. Isto nos dá: $m(a) = m(b) = m(c) = m(d) = 1 - 2\alpha$ e $m(f) = m(g) = m(e) = \alpha - (1 - 2\alpha) = 3\alpha - 1$.

Para o intervalo f sobrepor o intervalo g , ele deve se deslocar para a direita o comprimento $m(f) + m(c) = \alpha$. Naturalmente, para o intervalo c sobrepor d também

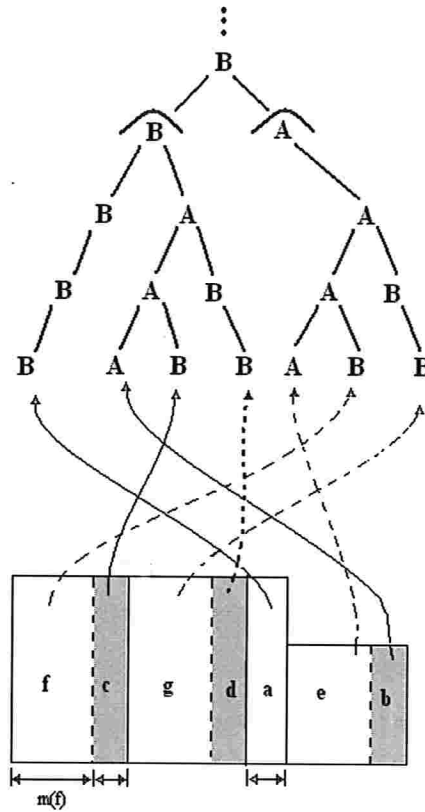


Figura 4.5: O mesmo exemplo tomando cilindros mais finos (de comprimento 4), agora considerando cortes também na caixa menor, já que a paridade é mudada a partir do tempo 3 (nível 4 na árvore estável). Daí, através de R_θ , $a \mapsto b \mapsto c \mapsto d$ e $e \mapsto f \mapsto g$.

deve-se deslocar o comprimento α .

Temos $e + \alpha \equiv f \pmod{\alpha + 1}$ e $b + \alpha \equiv c \pmod{\alpha + 1}$. Para concluirmos observemos que $a + \alpha = b$, pois $m(a) + m(e) = (1 - 2\alpha) + (3\alpha - 1) = \alpha$, assim $d + \alpha \subset e$, e $g + \alpha$ tem pontos em a e em e , a partir daí continuamos tomando cilindros mais finos. Por indução temos que a transformação ádica fatora-se sobre a rotação $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha \pmod{\alpha + 1}$ ou $R_\theta : x \mapsto x + \theta \pmod{1}$, onde $\theta = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$. \square

Observação 4.1. *Tomamos o exemplo baseado na substituição dual pois esta considera os casos: $A \rightarrow AB$ e $B \rightarrow BA$. Esta inversão na sequência das letras na imagem é*

que nos ajuda a utilizar a dinâmica descrita na proposição 3.3 que corresponde a nossa troca de paridade, isto é, realizamos a dinâmica “cutting and stacking” da esquerda para a direita e depois, do mesmo modo e após troca de paridade, da direita para esquerda . Apesar da proposição acima ser verdade também para a substituição Rauzy, a mesma demonstração não é válida. Para provarmos neste caso, a dinâmica fica um pouco diferente, fazendo cortes em um único sentido gerando um processo diferente do que foi considerado aqui.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Arnoux and A. M. Fisher, Anosov Families, renormalization and nonstationary subshifts, *Erg. Th Dyn. Syst.* **25**, 2005, 661-709.
- [2] R. L. Adler and B. Weiss, Similarity of automorphisms of the torus, *Mem. Amer. Math. Soc.* **98**, 1970, 1-43.
- [3] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information* (John Wiley and Sons, 1965, republicado em 1978 por Krieger).
- [4] A. M. Fisher, Nonstationary mixing and the unique ergodicity of Adic transformations, *stochastics and Dynamics*, a ser publicado.
- [5] S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets and B. Solomyak, Invariant measures on stationary Bratteli diagrams, *Erg. Th. Dyn. Syst.*, a ser publicado
- [6] Robert L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, *Addison-Wesley Publishing company*, 1985
- [7] S. Ferenczi, A. M. Fisher and M. Talet, Minimality and unique ergodicity for adic transformations, *J. d'Anal.*, **109**, 2009.
- [8] A. M. Fisher, Abelian differentials, interval exchanges, and adic transformation, em preparação 2010.
- [9] A. M. Fisher, Duality of measure and velocity for nonstationary solenoids, em preparação.

- [10] R. L. Adler, Symbolic dynamics and Markov partitions, *Bull. Amer. Math. Soc. (NS)*, **35**, 1998
- [11] A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, *Cambridge University Press*, 1996
- [12] N. Beskin, Fracções Contínuas, *Ed. Mir Moscovo*, 1980
- [13] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, (Princeton Univ. Press, 1981).
- [14] R. Bowen, *Equilibrium states and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* (Lecture Notes in Mathematics, 470), Springer, Berlin, 1975.
- [15] T. W. Hungerford. *Algebra*. Holt, Rinehardt and Winston, New York, 1974.
- [16] B. P. Kitchens, *Symbolic Dynamics*, (Springer, 1998)
- [17] A. Manning. A Markov partition that reflects the geometry of a hyperbolic toral automorphism. *Trans. Amer. Math. Soc.* **354**, 2002, 2865-2895.
- [18] D. Lind and B. Marcus, *Symbolic Dynamics and coding*, (Cambridge Univ. Press, 1995)
- [19] J. Rivat. Prime matrix in dimension 3, in N. Pytheas-Fogg. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics (Lecture Notes in Mathematics)*, Eds. V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel. Springer, 2002
- [20] W. Parry, Intrinsic Markov chains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **112**, 1964, 55-66.
- [21] Walters, P., An introduction to Ergodic Theory, New York, *Springer-Verlag*, 1982.
- [22] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General theory, volume VIII of Pure and Applied Mathematics*, Interscience Publishers (John Wiley and Sons), 1957

- [23] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973
- [24] A. M. Vershik and A. N. Livshits, *Adics models of ergodic transformation, spectral theory, substitutions, and related topics*, Adv. Sov. Math., **9**, 1992 , 185-204.

Índice Remissivo

- árvore estável, 42
- átomo, 41
- alfabetos, 29
- $\text{ant}(x)$, 42
- antecessor de um ponto, 42
- aplicação ádica, 42
- aplicação ádica inversa, 42
- aplicação Anosov, 11
- aplicação shift, 30
- automorfismo no toro, 11
- cadeia de Markov não estacionária, 54
- caixas, 83
- cilindro genérico, 32
- cilindro fino, 32
- classe de equivalência estável, 43
- componentes, 13
- condição autovetor de Perron-Frobenius, 66
- condição de Markov, 28
- cones positivos, 51
- conjugação limitada, 22
- conjugação topológica, 14
- conjugação uniforme, 14
- conjunto clopen, 31
- coordenadas canônicas, 26
- cutting and stacking, 85
- diagrama aditivo, 38, 73
- diagrama de arestas simples, 36
- diagrama de Bratteli, 36
- diagrama microscopado, 38
- diagrama não degenerado, 36
- diagrama propriamente ordenado, 46
- diagrama telescopado, 38
- diagrama trivial de Bratteli, 46
- diagrama de rotulação arestas, 36
- diagrama de rotulação vértices, 37
- dispersão, 3
- edge-shift, 37
- espaço total, 30
- família Aditiva, 20
- família aditiva não trivial, 91
- família Anosov, 17
- família constante, 13
- família de aplicações, 12
- família de aplicações inversível, 12

- família de aplicações topologicamente mixing, 49
- família estritamente Anosov, 17
- família eventualmente Anosov, 19
- família hiperbólica, 18
- família identidade, 14
- família inversa, 18
- família linear, 91
- família multiplicativa, 19
- família shifted, 15
- fração contínua, 75
- gathering, 15
- grupo de mudança finita de coordenadas, 40
- involução, 40
- junção, 25
- levantamento, 13
- máquina aditiva de Markov, 103
- métrica word, 31
- matriz de transição, 29
- matriz estocástica, 51
- matriz reduzida, 29
- medida central de Parry, 60
- medida de Parry, 60
- medida não atômica, 41
- odômetro d-ádico, 103
- ordem edge, 103
- ordem estável, 41
- ordem lexicográfica, 42
- ordem vertex, 102
- partição, 24
- partição agrupada, 25
- partição agrupada aumentada, 25
- partição componente conexa, 87
- partição de Markov, 28
- partição geradora, 24
- partição ordenada, 24
- propriedade de Bowen-Marcus, 61
- propriedade de Markov, 53
- propriedade geométrica de Markov, 29
- renormalização de caixas, 85
- retângulo próprio, 28
- rotulação aditiva, 38, 73
- símbolo, 29
- semi-conjugação topológica, 14
- semi-conjugação uniforme, 14
- sequência aditiva, 73
- sequência de autovetores, 51
- sequência linear, 90
- sequência não trivial à direita, 44
- sequência não trivial a esquerda, 44
- sequência primitiva, 45
- sequência reduzida, 29
- shift de Markov não estacionário, 54

- simplexo positivo, 51
- simplexo unitário fechado, 51
- sntf, 30
- string permitido, 29
- subshift estacionário, 30
- subshift não estacionário do tipo finito, 30
- subshift não estacionário unilateral, 31
- substituição, 104
- suc(x), 42
- sucessor de um ponto, 42
- transformação Ádica, 43
- transformação ádica estacionária, 103
- transformação ádica estendida, 46
- vertex-shift, 37
- vetor de probabilidade, 51