

**Distribuições lagrangianas e conexões
em geometria simplética generalizada**

Sandra María Zapata Yepes

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Frank Michael Forger

São Paulo, junho de 2011

Distribuições lagrangianas e conexões em geometria simplética generalizada

Esta tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Sandra Maria Zapata Yepes em 29/04/2011. O original encontra-se disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Frank Michael Forger (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Glaucio Terra - IME-USP
- Prof. Dr. Henrique Bursztyn - IMPA
- Prof. Dr. Pedro Paulo de Magalhães Rios - ICMC-USP
- Prof. Dr. Caio Jose Colletti Negreiros - UNICAMP

A minha filha Luana e a meu esposo Cristian

Agradecimentos

Ao professor meu orientador Prof. Dr. Frank Michael Forger, pelo apoio, por sua paciência e confiança que nunca faltaram nesses anos todos.

Ao meu incondicional companheiro Cristian, por toda a força e presença, pelo amor, compreensão, por tudo e um pouco mais..., pela minha vida.

Ao meus pais, pelo grande amor e carinho apesar de estarem tão longe, por estar presentes em todos os momentos que os procurei.

Aos meus irmãos, amigos muito especiais.

À tia Lucidia, pelo carinho e o apoio no momento que mais precisei.

Aos meus amigos, Paula, Pablo e Luisa, minha família aqui em Sampa.

À tia Na por estar sempre presente.

A todo o grupo de seminários, companheiros e amigos por todos esses anos de ótima matemática, pela valiosa ajuda elucidando dúvidas durante o desenvolvimento deste trabalho e pelos bons momentos compartilhados.

A meu amigo, Oswaldo pelo carinho e apoio.

A todos meus amigos do IME, pela companhia e maravilhosas bobagens ditas quando a gente se encontra, em particular no inesquecível café.

A todos os professores do IME, com os quais tive o prazer de ter assistido aulas.

Agradeço a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram na elaboração deste trabalho.

Resumo

Esta tese aborda dois tópicos. O primeiro deles compreende uma série de resultados sobre a geometria de variedades simpléticas munidas de uma folheação lagrangiana: a construção da conexão de Bott, a classificação das conexões sem torção compatíveis com as estruturas dadas (a saber, a forma simplética e a folheação lagrangiana) e, por último, uma versão mais geral do teorema da vizinhança tubular de Weinstein para variedades simpléticas munidas de uma folheação lagrangiana (simples). Na sua versão local, este teorema afirma que a estrutura de uma tal variedade em torno de uma subvariedade lagrangiana complementar à folheação é a mesma de um fibrado cotangente em torno da seção zero. No entanto, a afirmação pode ser generalizada para subvariedades complementares à folheação que não são lagrangianas, e o teorema também admite uma versão global, mediante hipóteses adicionais sobre a natureza topológica e geométrica das folhas. Na sua maioria, estes resultados não são novos, mas aqui eles são formulados e demonstrados de uma maneira mais natural e transparente do que na literatura existente. Isso abre o caminho para estender todos eles do contexto da geometria simplética para o da geometria multissimplética e polissimplética, o que constitui o tema do segundo tópico. Espera-se que tal extensão terá importantes aplicações, tendo em vista que a geometria multissimplética e polissimplética é o âmbito natural para a abordagem hamiltoniana covariante à teoria clássica de campos – da mesma forma que a geometria simplética proporciona uma base matemática para a formulação hamiltoniana da mecânica clássica.

Palavras-chave: Geometria diferencial, Geometria simplética, Folheações lagrangianas, Conexão de Bott, Geometria multissimplética, Geometria polissimplética.

Abstract

This thesis deals with two topics. The first of them is a series of results on the geometry of symplectic manifolds carrying a lagrangian foliation: the construction of the Bott connection, the classification of torsion-free connections compatible with the given structures (namely, the symplectic form and the lagrangian foliation) and, finally, a more general version of Weinstein's tubular neighborhood theorem for symplectic manifolds carrying a (simple) lagrangian foliation. In its local version, this theorem states that the structure of such a manifold in a neighborhood of a lagrangian submanifold complementary to the foliation is the same as that of a cotangent bundle in a neighborhood of the zero section. However, the statement can be generalized to submanifolds complementary to the foliation that are not lagrangian, and the theorem also admits a global version, depending on additional hypotheses on the topological and geometrical nature of the leaves. Most of these results are not new, but here they are formulated and proved in a more natural and transparent way than that found in the existing literature. This opens the way to extend all of them from the context of symplectic geometry to that of multisymplectic and polysymplectic geometry, which is the subject of the second topic. Such an extension is expected to have important applications, in view of the fact that multisymplectic and polysymplectic geometry is the natural arena for the covariant hamiltonian approach to classical field theory – just as symplectic geometry provides a mathematical basis for the hamiltonian formulation of classical mechanics.

Keywords: Differential geometry, Symplectic geometry, Lagrangian foliations, Bott connection, Multisymplectic geometry, Polysymplectic Geometry.

Conteúdo

Introdução	ix
1 Distribuições Lagrangianas e Conexão de Bott	1
1.1 Distribuições e folheações lagrangianas	1
1.2 Conexões parciais	4
1.3 A conexão de Bott: caso involutivo	6
1.4 A conexão de Bott: caso não involutivo	9
2 Conexões Simpléticas	13
2.1 Construção de conexões simpléticas	13
2.2 A conexão bilagrangiana	17
2.3 Conexões simpléticas preservando uma distribuição lagrangiana	18
3 Conexões Polilagrangianas e Multilagrangianas	23
3.1 Conexões polilagrangianas e polissimpléticas	23
3.1.1 Fibrados polilagrangianos e polissimpléticos	23
3.1.2 A conexão de Bott polilagrangiana: caso involutivo	27
3.1.3 A conexão de Bott polilagrangiana: caso não involutivo	28
3.1.4 Conexões polilagrangianas	30
3.2 Conexões multilagrangianas e multissimpléticas	34

3.2.1	Fibrados multilagrangianos e multissimpléticos	34
3.2.2	A conexão de Bott multilagrangiana: caso involutivo	36
3.2.3	A conexão de Bott multilagrangiana: caso não involutivo	37
3.2.4	Conexões multilagrangianas	40
4	Teoremas de Estrutura	43
4.1	Folhações simples por variedades afins planas	45
4.2	Variedades simpléticas com folheação lagrangiana simples	54
4.3	Estrutura de fibrados polilagrangianos e multilagrangianos	57
A	Fórmulas auxiliares	61
B	Variedades e aplicações afins	63
	Bibliografia	64

Introdução

Nos últimos anos tem-se desenvolvido um novo ramo da geometria diferencial chamado de geometria multissimplética e/ou polissimplética, da qual se espera que seja tão adequada para a formulação hamiltoniana covariante da teoria dos campos quanto a geometria simplética é para a mecânica clássica. Um dos progressos mais significativos foi encontrar uma nova definição da noção de uma estrutura multissimplética e/ou polissimplética que, ao contrário das anteriores, abrange a situação encontrada nas aplicações à física e ainda admite uma extensão natural chamada de estrutura multilagrangiana e/ou polilagrangiana, respectivamente. Em todos estes casos, é possível provar um teorema de Darboux [12].

Um dos elementos essenciais na geometria diferencial é o conceito de conexão. Na geometria simplética, ao contrário da geometria riemanniana ou mesmo pseudo-riemanniana, temos existência mas não temos unicidade de conexões compatíveis com a estrutura geométrica subjacente e sem torção. Daí surge a questão qual delas seria “a melhor” no sentido físico, por exemplo, no contexto de quantização por deformação.

Quantização no sentido tradicional é uma correspondência entre funções sobre um espaço de fase e operadores em algum espaço de Hilbert, em termos de um parâmetro (usualmente a constante de Planck \hbar). Na quantização por deformação, propõe-se [2] substituir operadores em espaços de Hilbert por funções no espaço de fase, mais exatamente, por séries formais de potências no parâmetro \hbar cujos coeficientes são funções no espaço de fase, e transferir o produto (não comutativo) de operadores para um produto entre tais séries, chamado o produto estrela. O termo de grau zero deste produto se reduz ao produto usual (comutativo) de funções, enquanto que o termo de grau um do comutador correspondente proporciona o colchete de Poisson de funções. Porém, para também fixar todos os termos de grau superior, precisa-se de informação adicional, e fazer isso de tal modo que o produto estrela seja associativo corresponde a resolver o famoso problema

da “ordenação dos fatores” no processo de quantização. A existência de uma solução - ou seja, a existência de produtos estrela - foi demonstrada em uma série de trabalhos, sob hipóteses cada vez mais gerais, usando métodos (co)homológicos: primeiro para fibrados cotangentes [5], variedades simpléticas exatas [6] e variedades simpléticas [7] por De Wilde & Lecomte e posteriormente para variedades de Poisson por Kontsevich [24]. Paralelamente, Fedosov desenvolveu, no âmbito da geometria simplética, uma construção explícita de um produto estrela específico a partir de uma conexão simplética sem torção [11]. Este resultado fundamental mostra que, do ponto de vista de quantização por deformação, a ambiguidade no processo de quantização envolve a escolha de uma conexão simplética sem torção (i.e., um transporte paralelo no espaço de fase preservando a forma simplética e sem torção). Assim, a questão de construir conexões simpléticas sem torção, possivelmente com propriedades adicionais adequadas, adquire um importante significado físico.

Na literatura, existem diferentes métodos para provar existência de conexões simpléticas sem torção. Para reduzir o grau de falta de unicidade, algumas abordagens exigem a preservação de certas estruturas adicionais, tais como, por exemplo, distribuições lagrangianas. Entre vários outros, podemos destacar os seguintes três métodos de construir conexões simpléticas:

- Dada uma conexão linear sem torção, esta é modificada pela adição de um tensor apropriado para dar uma conexão simplética sem torção: uma prova detalhada pode ser encontrada, por exemplo, em [3], Seção 2.1.
- Dadas duas distribuições lagrangianas transversais (não necessariamente involutivas), existe uma única conexão simplética que preserva as duas, chamada a *conexão bilagrangiana* e explicitamente construída em [20, 21]: ela tem torção zero se (e somente se) as duas distribuições são involutivas.
- Aplicando o teorema de Darboux e um argumento de partição da unidade, é possível construir conexões simpléticas sem torção que preservam uma distribuição lagrangiana involutiva dada.

Como a noção de distribuição lagrangiana, adequadamente generalizada, tem um papel central também na geometria polissimplética e multissimplética, somos naturalmente levados à seguinte pergunta preliminar: *Qual é a relação entre conexões compatíveis e distribuições lagrangianas na geometria simplética?*

O objetivo inicial deste trabalho é analisar essa relação, que também estudaremos no âmbito da geometria de variedades pseudo-riemannianas com tensor métrico de assinatura zero, para fins de comparação. Como veremos, no caso simplético, a questão admite uma resposta completa e de fácil interpretação geométrica (Teorema 2.2). Além disso, nossa abordagem permite uma extensão natural ao contexto de fibrados polilagrangianos

e multilagrangianos, o que nos permite obter, como primeiro resultado principal deste trabalho, uma caracterização completa de conexões polilagrangianas e multilagrangianas sem torção (Teoremas 3.1 e 3.2). Em todos os casos, o conceito da *conexão de Bott* cumpre um papel decisivo, já que implica que as folhas das distribuições lagrangianas involutivas pertinentes são variedades afins planas. Este fato, por sua vez, nos permite reproduzir um conhecido teorema da geometria simplética [27, 30] afirmando que, essencialmente, variedades simpléticas com folheação lagrangiana são fibrados cotangentes (Teorema 4.2), porém com uma demonstração nova que, além de ser mais transparente, permite, como segundo resultado principal deste trabalho, sua generalização imediata ao contexto de fibrados polilagrangianos e multilagrangianos, afirmando que, essencialmente, estes fibrados são fibrados de formas (Teoremas 4.3 e 4.4).

Distribuições Lagrangianas e Conexão de Bott

Neste capítulo apresentamos o conceito da conexão de Bott associada a uma distribuição lagrangiana, involutiva ou não, tanto no âmbito da geometria pseudo-riemanniana (com tensor métrico de assinatura zero) como no da geometria simplética. No primeiro caso, obtemos um resultado sobre quando a conexão de Bott pode ser obtida por restrição da conexão de Levi-Civita, enquanto que no segundo caso, chegamos a um resultado conhecido sobre quando a conexão de Bott tem torção zero.

1.1 Distribuições e folheações lagrangianas

Nesta seção introduzimos rapidamente alguns conceitos básicos de álgebra linear que precisamos para o desenvolvimento da tese.

Definição 1.1 *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e V^* seu dual. Dado um subespaço L de V , o seu **aniquilador** é o subespaço L^\perp de V^* que consiste de todas as formas lineares sobre V que se anulam sobre L , isto é,*

$$L^\perp = \{ v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in L \} .$$

Suponha agora que V é munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada g de assinatura zero ou de uma forma bilinear antissimétrica não-degenerada ω (o que implica, em ambos os casos, que a dimensão de V deve ser par, digamos, $\dim V = 2n$), e considere o “isomorfismo musical” [1, p. 166]

$$g^\flat : V \longrightarrow V^* \quad \text{ou} \quad \omega^\flat : V \longrightarrow V^* \quad (1.1)$$

induzido por g ou ω , com inverso

$$g^\sharp : V^* \longrightarrow V \quad \text{ou} \quad \omega^\sharp : V^* \longrightarrow V \quad (1.2)$$

Então dado um subespaço L de V , dizemos que:

- L é isotrópico se $g^\flat(L) \subset L^\perp$ ou $\omega^\flat(L) \subset L^\perp$;
- L é coisotrópico se $g^\flat(L) \supset L^\perp$ ou $\omega^\flat(L) \supset L^\perp$;
- L é lagrangiano se é isotrópico e coisotrópico, i.e., se $g^\flat(L) = L^\perp$ ou $\omega^\flat(L) = L^\perp$.

Observe também que, no caso simétrico, subespaços lagrangianos existem se e somente se g tiver assinatura zero.

A mesma terminologia é usada quando substituímos espaços vetoriais por fibrados vetoriais e aplicações lineares por homomorfismos estritos de fibrados vetoriais (sobre uma variedade base fixa).

Sejam agora M uma variedade de dimensão $2n$ munida de uma métrica pseudo-riemanniana g de assinatura zero ou de uma forma quase-simplética ω (i.e., uma 2-forma não-degenerada mas não necessariamente fechada)¹ e L uma distribuição involutiva sobre M que é lagrangiana com respeito a g ou a ω . Então os “isomorfismos musicais” (1.1) e (1.2) tornam-se isomorfismos estritos de fibrados vetoriais sobre M

$$g^\flat : TM \longrightarrow T^*M \quad \text{com inverso} \quad g^\sharp : T^*M \longrightarrow TM \quad (1.3)$$

ou

$$\omega^\flat : TM \longrightarrow T^*M \quad \text{com inverso} \quad \omega^\sharp : T^*M \longrightarrow TM \quad (1.4)$$

Observe que se L é lagrangiana, $\dim L = n$, os isomorfismos musicais anteriores induzem, por restrição, isomorfismos musicais

$$g^\flat : L \longrightarrow L^\perp \quad \text{com inverso} \quad g^\sharp : L^\perp \longrightarrow L \quad (1.5)$$

ou

$$\omega^\flat : L \longrightarrow L^\perp \quad \text{com inverso} \quad \omega^\sharp : L^\perp \longrightarrow L. \quad (1.6)$$

Nesta situação, adota-se a seguinte terminologia:

¹De modo geral, usa-se o prefixo “quase” para indicar que a forma diferencial sob consideração pode não ser fechada.

- Uma distribuição L sobre M , i.e., um subfibrado vetorial L de TM , é dita **isotrópica/coisotrópica/lagrangiana** se para todo $x \in M$, L_x é um subespaço isotrópico/coisotrópico/lagrangiano de T_xM .
- Uma subvariedade N de M é **isotrópica/coisotrópica/lagrangiana** se para todo $x \in N$, T_xN é um subespaço isotrópico/coisotrópico/lagrangiano de T_xM .
- Uma folheação \mathcal{F} de M é **isotrópica/coisotrópica/lagrangiana** se cada folha de \mathcal{F} é uma subvariedade isotrópica/coisotrópica/lagrangiana de M .

A seguir, daremos alguns exemplos de folheações e subvariedades lagrangianas de um fibrado cotangente. Se X é uma variedade de dimensão finita qualquer, seu fibrado cotangente T^*X vem munido de uma 1-forma $\theta_X \in \Omega^1(T^*X)$, chamada a *1-forma canônica*, que pode ser caracterizada pela seguinte propriedade: para qualquer 1-forma α sobre X , vale

$$\alpha^*(\theta_X) = \alpha$$

(o que faz sentido pois α é uma seção $\alpha : X \rightarrow T^*X$). A 2-forma $\omega_X = -d\theta_X$ é a forma simplética natural sobre T^*X .

Exemplo 1.1 As fibras da projeção $T^*X \rightarrow X$, ou seja, os espaços cotangentes T_x^*X , $x \in X$, são as folhas de uma folheação lagrangiana de T^*X .

Exemplo 1.2 A imagem da 1-forma trivial (que é a seção $0 : X \rightarrow T^*X$) é uma subvariedade lagrangiana de T^*X .

Este segundo exemplo admite duas generalizações, em direções diferentes:

Exemplo 1.3 A imagem de uma 1-forma α sobre X (que é uma seção $\alpha : X \rightarrow T^*X$) é uma subvariedade lagrangiana de T^*X se e somente se α for fechada, $d\alpha = 0$.

Exemplo 1.4 Seja S uma subvariedade de X . Então o fibrado conormal N^*S de S , que é exatamente o aniquilador de TS em $T^*X|_S$, é uma subvariedade lagrangiana de T^*X .

O último exemplo também tem uma intersecção com o primeiro, pois se a subvariedade S for reduzida a um único ponto x de X , seu fibrado conormal nada mais é do que o espaço cotangente T_x^*X em x (a condição de aniquilação se torna vazia).

1.2 Conexões parciais

Nesta seção apresentamos a bem conhecida definição de conexão linear parcial e introduzimos sua curvatura e sua torção.

Definição 1.2 *Sejam M uma variedade, V um fibrado vetorial sobre M e L uma distribuição sobre M . Uma conexão linear parcial em V ao longo de L é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear*

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(L) \times \Gamma(V) &\longrightarrow \Gamma(V) \\ (X, s) &\longmapsto \nabla_X s \end{aligned}$$

que é $\mathfrak{F}(M)$ -linear em X e satisfaz a regra de Leibniz

$$\begin{aligned} \nabla_X(fs) &= f\nabla_X s + (X \cdot f)s \\ \text{para } X \in \Gamma(L), f \in \mathfrak{F}(M), s \in \Gamma(V). \end{aligned}$$

De fato, quando $L = TM$ obtemos a definição usual de conexão linear “total” onde o espaço $\Gamma(L)$ de campos vetoriais sobre M ao longo de L é substituído pela álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ de todos os campos vetoriais sobre M .

Notemos que, se L é involutiva, a definição usual de curvatura e, no caso especial quando $V = L$, de torção se estende quase que literalmente a conexões lineares parciais:

Definição 1.3 *Sejam M uma variedade, V um fibrado vetorial sobre M , $\text{End}(V)$ o fibrado vetorial sobre M das transformações lineares em V , L uma distribuição involutiva sobre M e ∇ uma conexão linear parcial em V ao longo de L . A curvatura de ∇ é a seção F do fibrado vetorial $\wedge^2 L^* \otimes \text{End}(V)$ sobre M definida por*

$$\begin{aligned} F(X, Y)s &= \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s \\ \text{para } X, Y \in \Gamma(L), s \in \Gamma(V). \end{aligned}$$

Dizemos que ∇ é plana se $F = 0$.

Definição 1.4 *Sejam M uma variedade, L uma distribuição involutiva sobre M e ∇ uma conexão linear parcial em L ao longo de L . A torção de ∇ é a seção T do fibrado vetorial $\wedge^2 L^* \otimes L$ sobre M definida por*

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ \text{para } X, Y \in \Gamma(L). \end{aligned}$$

Estas definições podem ser generalizadas ao caso não involutivo mediante a escolha de uma distribuição L' sobre M complementar a L , isto é,

$$L \oplus L' = TM . \quad (1.7)$$

Então denotando por pr_L a projeção sobre L ao longo de L' e por $\text{pr}_{L'}$ a projeção sobre L' ao longo de L , definimos primeiro a curvatura de L , que mede o quanto L deixa de ser involutiva, como a 2-forma R sobre M a valores em L' definida por

$$R(X, Y) = \text{pr}_{L'}[X, Y] \quad \text{para } X, Y \in \Gamma(L) . \quad (1.8)$$

Então temos

$$F(X, Y)(s) = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{\text{pr}_L[X, Y]} s \quad \text{para } X, Y \in \Gamma(L), s \in \Gamma(V) , \quad (1.9)$$

e no caso especial quando $V = L$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \text{pr}_L[X, Y] \quad \text{para } X, Y \in \Gamma(L) . \quad (1.10)$$

É fácil verificar que todas as expressões anteriores são $\mathfrak{F}(M)$ -lineares em X e Y , enquanto que

$$\begin{aligned} F(X, Y)(fs) &= f F(X, Y)(s) + (R(X, Y) \cdot f) s \\ &\text{para } X, Y \in \Gamma(L), f \in \mathfrak{F}(M), s \in \Gamma(V) . \end{aligned} \quad (1.11)$$

Isto significa que, no caso não involutivo, a curvatura de ∇ deixa de ser um tensor, tornando-se um operador diferencial de primeira ordem em V cujo símbolo é a curvatura de L (vezes a identidade sobre V): mais precisamente, a equação (1.11) diz que para quaisquer dois campos vetoriais X e Y sobre M ao longo de L , $F(X, Y)$ é um operador diferencial de primeira ordem em V cujo símbolo é $R(X, Y)$ (vezes a identidade sobre V).

Notemos, de passagem, que as operações usuais sobre conexões lineares, tais como o dual, a soma direta, o produto tensorial e as suas diversas combinações (veja, por exemplo, [15, Sect. 7.12, pp. 320-323]) se estendem naturalmente a conexões lineares parciais, desde que todas estejam definidas ao longo da mesma distribuição L .

Obviamente, conexões lineares parciais podem ser obtidas de uma conexão linear total por restrição, restringindo a definição da derivada covariante de uma seção ao longo de campos vetoriais gerais sobre M a campos vetoriais sobre M ao longo de um subfibrado vetorial L de TM . Reciprocamente, podemos-nos perguntar se uma conexão linear parcial dada admite uma extensão a uma total e como classificar todas as extensões possíveis.

Um exemplo de uma conexão linear parcial que não é obviamente a restrição de uma conexão linear total é a conexão de Bott associada a uma distribuição involutiva L sobre uma variedade M , que nós passamos a discutir nas próximas duas seções. Outro exemplo é o seguinte:

Exemplo 1.5 Seja P um fibrado sobre uma variedade base M de dimensão n , com projeção $\pi : P \rightarrow M$, e seja \hat{T} um fibrado vetorial auxiliar de posto \hat{n} sobre a mesma variedade base M . Denote por $T\pi : TP \rightarrow TM$ a aplicação tangente à projeção, por $VP = \ker(T\pi)$ o fibrado vertical e por $\pi^*\hat{T}$ o pull-back de \hat{T} a P (via π). Então a derivada exterior para formas diferenciais em variedades a valores vetoriais, restrita a 0-formas e aplicada às fibras P_m de P ($m \in M$), constitui uma conexão linear parcial plana em $\pi^*\hat{T}$ ao longo de VP , chamada de **conexão parcial linear trivial** em $\pi^*\hat{T}$. No caso em que o próprio fibrado P já é um fibrado vetorial sobre M , podemos escolher $\hat{T} = P$ e usar o isomorfismo canônico $\pi^*P \cong VP$ para concluir que a conexão parcial linear trivial assim obtida, além de ser plana, também tem torção zero.

Note que para essa construção funcionar, é essencial que o fibrado vetorial sobre P em questão (o $\pi^*\hat{T}$) possa ser obtido por pull-back de um fibrado vetorial sobre M (o \hat{T}), pois só assim se garante que a restrição de qualquer seção dele a qualquer fibra P_m de P seja simplesmente uma função sobre P_m a valores em um espaço vetorial fixo (o \hat{T}_m), para a qual o operador d comum é bem definido e constitui uma derivada nas direções verticais. Também é claro que, neste exemplo, podemos substituir o fibrado vertical VP por qualquer subfibrado vetorial involutivo L de VP .

1.3 A conexão de Bott: caso involutivo

Nesta seção apresentamos a definição da conexão de Bott, primeiro para distribuições involutivas gerais (veja [31], por exemplo) e depois para distribuições involutivas lagrangianas na geometria pseudo-riemanniana e na geometria simplética. O caso não involutivo será investigado na próxima seção.

Definição 1.5 *Sejam M uma variedade, L uma distribuição involutiva sobre M e L^\perp o seu aniquilador. A **conexão de Bott em L^\perp** é a conexão linear parcial em L^\perp ao longo de L definida por*

$$\nabla_X^B \alpha = \mathbb{L}_X \alpha \quad \text{para } X \in \Gamma(L), \alpha \in \Gamma(L^\perp), \quad (1.12)$$

onde \mathbb{L}_X denota a derivada de Lie (de 1-formas) ao longo de X , ou mais explicitamente,

$$\begin{aligned} (\nabla_X^B \alpha)(Z) &= X \cdot \alpha(Z) - \alpha([X, Z]) \\ \text{para } X \in \Gamma(L), \alpha \in \Gamma(L^\perp), Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Para provar que a conexão de Bott em L^\perp é realmente uma conexão linear parcial ao longo de L , suponhamos que X é um campo vetorial sobre M ao longo de L e notemos que:

- a) para qualquer seção α de L^\perp e qualquer campo vetorial Z sobre M ao longo de L , a expressão na equação (1.13) é zero porque L é involutiva, o que significa que a derivada de Lie ao longo de X mapeia seções α de L^\perp em seções $\mathbb{L}_X\alpha$ de L^\perp ;
- b) para qualquer função f sobre M , qualquer seção α de L^\perp e qualquer campo vetorial Z sobre M (não necessariamente ao longo de L), temos

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}_{fX}\alpha)(Z) &= (fX) \cdot \alpha(Z) - \alpha([fX, Z]) \\ &= f(X \cdot \alpha(Z)) - f\alpha([X, Z]) + (Z \cdot f)\alpha(X) \\ &= f(\mathbb{L}_X\alpha)(Z) + (Z \cdot f)\alpha(X), \end{aligned}$$

onde o último termo é zero porque $\alpha(X) = 0$, o que significa que $\nabla_X^B\alpha$ é $\mathfrak{F}(M)$ -linear em X .

Pela definição do colchete do Lie de campos vetoriais, a conexão de Bott é *plana*, isto é, a curvatura é zero, dado que $[\mathbb{L}_X, \mathbb{L}_Y] = \mathbb{L}_{[X, Y]}$.

No caso de uma variedade pseudo-riemanniana (com tensor métrico de assinatura zero) ou de uma variedade quase-simplética, e supondo que a distribuição L seja lagrangiana, podemos usar os isomorfismos musicais (1.5)-(1.6) e transferir a conexão de Bott de L^\perp para L , obtendo uma conexão linear parcial em L ao longo de L que, por abuso de linguagem, será simplesmente chamada a *conexão de Bott em L* :

Definição 1.6 *Sejam M uma variedade munida de uma métrica pseudo-riemanniana g de assinatura zero ou de uma forma quase-simplética ω (i.e., uma 2-forma não-degenerada) e L uma distribuição lagrangiana involutiva sobre M . A conexão de Bott em L é a conexão linear parcial ∇^B em L ao longo de L definida por*

$$g(\nabla_X^B Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) - g(Y, [X, Z]) \quad \text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z \in \mathfrak{X}(M) \quad (1.14)$$

no caso pseudo-riemanniano, e similarmente pela fórmula

$$\omega(\nabla_X^B Y, Z) = X \cdot \omega(Y, Z) - \omega(Y, [X, Z]) \quad \text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z \in \mathfrak{X}(M) \quad (1.15)$$

no caso quase-simplético.

Esta conexão de Bott tem uma interpretação bastante intuitiva: é nada mais do que uma família canônica de conexões lineares ordinárias nas folhas da folheação gerada por L . Além disso, como a conexão de Bott em L^\perp é plana, a conexão de Bott em L também é. Mas podemos, para essa última, perguntar ainda qual é a sua torção. Se ela for zero, podemos concluir que as folhas da folheação gerada por L são variedades afins planas. Referente a esta questão, temos as seguintes respostas bem simples:

Teorema 1.1 *Sejam M uma variedade munida de uma métrica pseudo-riemanniana g de assinatura zero e L uma distribuição lagrangiana involutiva sobre M . Então a conexão de Levi-Civita ∇ induzida por g preserva L , no sentido de que $\nabla_X Y \in \Gamma(L)$ para $X, Y \in \Gamma(L)$, e portanto induz uma conexão linear parcial em L ao longo de L que coincide com a conexão de Bott ∇^B em L , se e somente se esta tiver torção zero. Mais geralmente, se ela tiver torção T^B , vale*

$$\nabla_X^B Y - \nabla_X Y = \frac{1}{2} T^B(X, Y) \quad \text{para } X, Y \in \Gamma(L). \quad (1.16)$$

Demonstração: Sabemos que a conexão de Levi-Civita ∇ induzida pela métrica g é unicamente determinada pela seguinte fórmula:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]), \quad (1.17)$$

válida para quaisquer três campos vetoriais X, Y, Z sobre M . Suponhamos que X e Y sejam ao longo de L . Então se Z também é ao longo de L , vemos que a expressão (1.17) se anula pois L é involutiva e isotrópica, e portanto $\nabla_X Y$ é ao longo de L , enquanto que para Z geral, só o terceiro termo do lado direito da equação (1.17) se anula. Neste caso dividimos (1.17) por 2, agrupamos os termos com ajuda da equação (1.14) e usamos a definição do tensor de torção para obter a equação (1.16):

$$\begin{aligned} g(T^B(X, Y), Z) &= g(\nabla_X^B Y - \nabla_Y^B X - [X, Y], Z) \\ &= X \cdot g(Y, Z) - g(Y, [X, Z]) - Y \cdot g(X, Z) + g(X, [Y, Z]) - g([X, Y], Z). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2 *Sejam M uma variedade munida de uma forma quase-simplética ω e L uma distribuição lagrangiana involutiva sobre M . Então se a forma ω for simplética, ou seja, fechada, a conexão de Bott ∇^B em L tem torção zero. Mais geralmente, se ela tiver torção T^B , vale*

$$d\omega(X, Y, Z) = \omega(T^B(X, Y), Z) \quad \text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.18)$$

Demonstração: Conforme a fórmula de Cartan para a derivada exterior de ω , temos

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X \cdot \omega(Y, Z) - Y \cdot \omega(X, Z) + Z \cdot \omega(X, Y) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X), \end{aligned}$$

para quaisquer três campos vetoriais X, Y, Z sobre M . Suponhamos que X e Y sejam ao longo de L . Então, como antes, o terceiro termo do lado direito dessa equação se anula,

pois L é isotrópica, e podemos agrupar os termos com a ajuda da equação (1.15) e usar a definição do tensor de torção para obter a equação (1.18):

$$\begin{aligned}\omega(T^B(X, Y), Z) &= \omega(\nabla_X^B Y - \nabla_Y^B X - [X, Y], Z) \\ &= X \cdot \omega(Y, Z) - \omega(Y, [X, Z]) - Y \cdot \omega(X, Z) + \omega(X, [Y, Z]) - \omega([X, Y], Z).\end{aligned}$$

□

Este resultado é conhecido faz tempo: veja por exemplo, [30, Teorema 7.7]. A única diferença é que nós propomos usar o termo “conexão de Bott” de uma forma mais abrangente e sistemática.

1.4 A conexão de Bott: caso não involutivo

É interessante notar que a construção da conexão de Bott para distribuições lagrangianas pode ser estendida ao caso não involutivo, mas então ela depende da escolha de uma distribuição lagrangiana complementar. Como não usaremos este fato no resto da tese, vamos nos restringir a apresentar essa construção no caso simplético. Como pré-requisito, precisamos da seguinte afirmação de existência.

Proposição 1.1 *Sejam M uma variedade munida de uma forma quase-simplética ω e L uma distribuição lagrangiana sobre M . Então existe uma distribuição lagrangiana L' sobre M que é complementar a L .*

A prova desta afirmação segue combinando um argumento de partição da unidade com a seguinte observação: o conjunto de todos os subespaços lagrangianos de um espaço vetorial simplético que são complementares a algum subespaço lagrangiano fixo é um espaço afin, de modo que podemos formar combinações convexas de tais subespaços.

Proposição 1.2 *Sejam V um espaço vetorial munido de uma forma simplética ω e L um subespaço lagrangiano de V fixo. Então o conjunto de todos os subespaços lagrangianos L' de V complementares a L está em correspondência biunívoca com o conjunto de todas as aplicações lineares P de V em L cuja restrição a L é a identidade e que são infinitesimalmente conformemente simpléticas, isto é, que satisfazem*

$$\omega(Pv_1, v_2) + \omega(v_1, Pv_2) = \omega(v_1, v_2) \quad \text{para } v_1, v_2 \in V. \quad (1.19)$$

Demonstração: A relação entre P e L' é simplesmente que P é o projetor sobre L ao longo de L' : é fácil verificar que este projetor satisfaz a equação (1.19), e reciprocamente,

é evidente que uma aplicação linear P de V em L cuja restrição a L é a identidade é o projetor sobre L ao longo de algum subespaço L' de V complementar a L , e também que se P satisfaz a equação (1.19), então $L' = \ker P$ é lagrangiano. \square

A afirmação da Proposição 1.2 é idêntica à da Proposição 2.2 de [18, Chap. 4, Sect. 2], mas a prova foi simplificada: em particular, não é preciso usar o teorema infinitesimal do valor próprio simplético. Outro truque, aparentemente inofensivo, é que substituímos o projetor usado na Proposição 2.2 de [18, Chap. 4, Sect. 2] pelo projetor complementar, o que permite perceber com mais facilidade que o conjunto em questão é realmente um espaço afim: este fato é essencial porque caso contrário, o argumento de partição da unidade na prova da Proposição 1.1 falharia.² Além disso, facilita ver que este método de prova também funciona no caso polissimplético e multissimplético.

Voltando ao problema de construir a conexão de Bott no caso não involutivo, suponhamos que M é uma variedade munida de uma forma quase-simplética ω e L é uma distribuição lagrangiana sobre M . Escolhendo uma segunda distribuição lagrangiana L' sobre M complementar a L , temos a decomposição direta do fibrado tangente,

$$L \oplus L' = TM ,$$

e a correspondente decomposição direta do fibrado cotangente,

$$L^\perp \oplus L'^\perp = T^*M ,$$

onde o aniquilador L^\perp de L pode ser identificado com o dual L'^* de L' e o aniquilador L'^\perp de L' com o dual L^* de L . Como antes, denotamos por pr_L a projeção sobre L ao longo de L' e por $\text{pr}_{L'}$ a projeção sobre L' ao longo de L , e similarmente por pr_{L^\perp} a projeção sobre L^\perp ao longo de L'^\perp (que é a transposta de $\text{pr}_{L'}$) e por $\text{pr}_{L'^\perp}$ a projeção sobre L'^\perp ao longo de L^\perp (que é a transposta de pr_L). Com esta notação, a conexão de Bott ∇^B em L^\perp ao longo de L é simplesmente definida aplicando a projeção pr_{L^\perp} à derivada de Lie de 1-formas, i.e.,

$$\nabla_X^B \alpha = \text{pr}_{L^\perp}(\mathbb{L}_X \alpha) \quad \text{para } X \in \Gamma(L), \alpha \in \Gamma(L^\perp) , \quad (1.20)$$

ou mais explicitamente,

$$\begin{aligned} (\nabla_X^B \alpha)(Z) &= X \cdot \alpha(Z) - \alpha([X, \text{pr}_{L'}(Z)]) \\ \text{para } X \in \Gamma(L), \alpha \in \Gamma(L^\perp), Z \in \mathfrak{X}(M) . \end{aligned} \quad (1.21)$$

²Note que para uma transformação linear P sobre um espaço vetorial V , a condição de ser um projetor é uma equação quadrática, a saber $P^2 = P$; enquanto que a de ser um projetor sobre um subespaço dado L é uma condição afim, como discutido acima.

A mesma análise como antes, só com Z substituído por $\text{pr}_{L'}(Z)$, mostra que essa fórmula proporciona uma conexão linear parcial em L^\perp ao longo de L . Usando o isomorfismo musical (1.4) (que aplica L isomorficamente sobre L^\perp e L' isomorficamente sobre L'^\perp pois ambos L e L' são lagrangianos), essa pode ser transferida para uma conexão linear parcial em L ao longo de L que, por abuso de linguagem, será chamada a *conexão de Bott em L (com respeito a L')*. Explicitamente, é determinada pela fórmula

$$\begin{aligned} \omega(\nabla_X^B Y, Z) &= X \cdot \omega(Y, Z) - \omega(Y, [X, \text{pr}_{L'}(Z)]) \\ &\text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z \in \mathfrak{X}(M), \end{aligned} \quad (1.22)$$

que substitui a equação (1.15) no caso não involutivo. Finalmente, é fácil verificar que definindo a torção de ∇^B como na equação (1.10) e substituindo a equação (1.18) pela fórmula

$$d\omega(X, Y, \text{pr}_{L'}(Z)) = \omega(T^B(X, Y), Z) \quad \text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.23)$$

o Teorema 1.2 permanece válido. Em particular, se ω é fechada, ∇^B tem torção zero.

Conexões Simpléticas

Considerando uma variedade M munida de uma forma simplética ω e uma distribuição involutiva L sobre M , podemos perguntar: Quando existem conexões sem torção que preservam ω e L , e qual é o conjunto de tais conexões? Para obter uma resposta, vamos explicar primeiro alguns fatos conhecidos sobre conexões simpléticas.

2.1 Construção de conexões simpléticas

Para fixar a terminologia, daremos primeiro uma definição explícita do conceito de uma conexão simplética. Depois, provaremos o teorema padrão sobre existência de conexões simpléticas sem torção, porém com uma generalização: mostraremos como construir tais conexões a partir de uma conexão linear qualquer, enquanto que a demonstração encontrada na literatura parte de uma conexão que já está sem torção.

Definição 2.1 *Seja M uma variedade munida de uma forma quase simplética ω . Uma conexão linear ∇ sobre M é chamada uma **conexão simplética** se preserva ω , i.e., satisfaz $\nabla\omega = 0$, ou mais explicitamente,*

$$X \cdot \omega(Y, Z) = \omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(Y, \nabla_X Z) \quad \text{para } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.1)$$

Em particular, nós não aderimos à convenção adotada por alguns autores que incorporam a condição de torção nula na definição de conexão simplética.

Com respeito à questão da existência de conexões simpléticas sem torção, começamos pela seguinte proposição, que é elementar e bem conhecida.

Proposição 2.1 *Seja M uma variedade munida de uma forma quase simplética ω . Então, se existe uma conexão simplética ∇ sem torção sobre M , ω é fechada. Mais geralmente, o tensor de torção T da conexão simplética ∇ sobre M é relacionado à derivada exterior de ω pela fórmula*

$$d\omega(X, Y, Z) = \omega(T(X, Y), Z) + \omega(T(Y, Z), X) + \omega(T(Z, X), Y) \quad (2.2)$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração: Esta proposição é um caso especial do Lema 6 no Apêndice A. \square

Reciprocamente, é bem conhecido que em variedades simpléticas, existem conexões simpléticas sem torção [2, 29]. A prova tradicional, que pode ser encontrada em [3], por exemplo, baseia-se na modificação de uma conexão linear sem torção dada, adicionando um campo tensorial apropriado, mas o método pode ser facilmente generalizado para começar com uma conexão qualquer:

Proposição 2.2 *Seja M uma variedade munida de uma forma simplética ω . Então sempre existem conexões simpléticas sem torção sobre M . Explicitamente, dada uma conexão linear ∇^0 sobre M qualquer com torção T^0 , a fórmula*

$$\begin{aligned} \omega(\nabla_X Y, Z) &= \omega(\nabla_X^0 Y, Z) + \frac{1}{3}(\nabla_X^0 \omega)(Y, Z) + \frac{1}{3}(\nabla_Y^0 \omega)(X, Z) \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega(T^0(X, Y), Z) + \frac{1}{6}\omega(T^0(Z, X), Y) + \frac{1}{6}\omega(T^0(Z, Y), X) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \omega(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{6}\omega(\nabla_X^0 Y, Z) + \frac{1}{6}\omega(\nabla_Y^0 X, Z) + \frac{1}{6}\omega(\nabla_Z^0 X, Y) + \frac{1}{6}\omega(\nabla_Z^0 Y, X) \\ &\quad + \frac{1}{6}\omega(\nabla_X^0 Z, Y) + \frac{1}{6}\omega(\nabla_Y^0 Z, X) + \frac{1}{3}X \cdot \omega(Y, Z) + \frac{1}{3}Y \cdot \omega(X, Z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega([X, Y], Z) - \frac{1}{6}\omega([Z, X], Y) - \frac{1}{6}\omega([Z, Y], X) \end{aligned} \quad (2.4)$$

define uma conexão simplética ∇ sobre M sem torção.

Demonstração: Lembrando que o tensor de torção T^0 de ∇^0 e a derivada covariante $\nabla^0 \omega$ de ω com respeito a ∇^0 são definidas por

$$T^0(X, Y) = \nabla_X^0 Y - \nabla_Y^0 X - [X, Y], \quad (2.5)$$

e por

$$(\nabla_X^0 \omega)(Y, Z) = X \cdot \omega(Y, Z) - \omega(\nabla_X^0 Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X^0 Z), \quad (2.6)$$

respectivamente, procedemos em dois passos. Primeiro, construímos uma nova conexão linear ∇' sobre M da seguinte forma

$$\nabla'_X Y = \nabla_X^0 Y - \frac{1}{2}T^0(X, Y). \quad (2.7)$$

Obviamente, ∇' tem torção nula:

$$\begin{aligned} T'(X, Y) &= \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X^0 Y - \frac{1}{2} T^0(X, Y) - \nabla_Y^0 X + \frac{1}{2} T^0(Y, X) - [X, Y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segundo, passamos de ∇' para ∇ usando o método padrão para construir conexões simpléticas sem torção partindo de uma conexão sem torção dada (como feito na Sect. 2.1 de [3]), a saber

$$\nabla_X Y = \nabla'_X Y + \frac{1}{3} N'(X, Y) + \frac{1}{3} N'(Y, X), \quad (2.8)$$

onde N' é o tensor definido por

$$\begin{aligned} \omega(N'(X, Y), Z) &= (\nabla'_X \omega)(Y, Z) \\ &= X \cdot \omega(Y, Z) - \omega(\nabla'_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla'_X Z) \\ &= X \cdot \omega(Y, Z) - \omega(\nabla_X^0 Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X^0 Z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega(T^0(X, Y), Z) + \frac{1}{2} \omega(Y, T^0(X, Z)) \\ &= (\nabla_X^0 \omega)(Y, Z) + \frac{1}{2} \omega(T^0(X, Y), Z) + \frac{1}{2} \omega(Y, T^0(X, Z)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Combinando as fórmulas (2.7), (2.8) e (2.9), obtemos a equação (2.3), e após um pequeno cálculo usando as fórmulas (2.5) e (2.6), obtemos a equação (2.4). \square

Obviamente, quando ∇^0 é simplética e tem torção nula, então $\nabla = \nabla^0$. Notemos também que se ∇^0 tem torção nula mas não é simplética, então a equação (2.4) implica

$$\begin{aligned} \omega(\nabla_X Y, Z) &= \frac{2}{3} \omega(\nabla_X^0 Y, Z) - \frac{1}{3} \omega(\nabla_Y^0 X, Z) + \frac{1}{3} \omega(\nabla_X^0 Z, Y) + \frac{1}{6} \omega(\nabla_Y^0 Z, X) \\ &\quad + \frac{1}{3} X \cdot \omega(Y, Z) + \frac{1}{3} Y \cdot \omega(X, Z). \end{aligned} \quad (2.10)$$

enquanto que se ∇^0 é simplética mas tem torção não nula, então a equação (2.4) implica

$$\begin{aligned} \omega(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} \omega(\nabla_X^0 Y, Z) + \frac{1}{2} \omega(\nabla_Y^0 X, Z) + \frac{1}{6} \omega(\nabla_Z^0 X, Y) + \frac{1}{6} \omega(\nabla_Z^0 Y, X) \\ &\quad - \frac{1}{6} \omega(\nabla_X^0 Z, Y) - \frac{1}{6} \omega(\nabla_Y^0 Z, X) \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega([X, Y], Z) - \frac{1}{6} \omega([Z, X], Y) - \frac{1}{6} \omega([Z, Y], X). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Notemos as semelhanças, mas também as diferenças, entre essas fórmulas para variedades simpléticas e a equação (1.17) que define a conexão de Levi-Civita para variedades pseudo-riemannianas. Em ambos os casos, a existência de conexões compatíveis com a estrutura geométrica dada e sem torção é garantida, mas ao contrário do caso pseudo-riemanniano, no caso simplético elas estão longe de ser únicas. De fato, o grau de não-unicidade pode ser caracterizado com exatidão:

Proposição 2.3 *Seja M uma variedade munida de uma forma simplética ω . Então as conexões simpléticas sem torção sobre M formam um espaço afim cujo espaço vetorial de diferenças pode ser identificado com o espaço dos campos tensoriais ω_S totalmente simétricos de posto 3 sobre M . Explicitamente, dadas duas conexões simpléticas ∇^1 e ∇^2 sobre M sem torção, vale*

$$\begin{aligned} \omega_S(X, Y, Z) &= \omega(\nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z) \\ &\text{para } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Demonstração: Veja, por exemplo [2, 29] e, para um argumento completamente explícito, [3]. \square

A falta de unicidade de conexões simpléticas sem torção desempenha um papel importante em física matemática, pois encontra-se no coração do famoso problema de ordenação de fatores da mecânica quântica. A saber, foi provado por Fedosov que, no âmbito do método de quantização por deformação, é sempre possível encontrar uma solução deste problema, como série formal de potências na constante de Planck, e que a sua construção envolve o uso de uma conexão simplética sem torção no espaço de fase clássico [11]. Este importante resultado tem levado alguns autores a se referir a variedades simpléticas munidas de uma conexão simplética sem torção como *variedades de Fedosov* [14]. Surge assim a questão se a ambiguidade inerente no processo de quantização pode ser removida ou pelo menos reduzida exigindo-se a presença de estruturas geométricas adicionais covariantemente constantes. Existem vários candidatos naturais para tais estruturas geométricas adicionais, entre as quais podemos mencionar estruturas complexas (\rightarrow variedades de Kähler) e G -estruturas (\rightarrow G -espaços hamiltonianos); uma discussão abrangente do assunto encontra-se em [3]. A seguir, estudaremos um tipo específico de tal estrutura geométrica adicional, amplamente utilizada na quantização geométrica [31], a saber, uma distribuição lagrangiana fixa ou, ainda, duas distribuições lagrangianas transversais fixas.³

³Mais geralmente, o que se usa na quantização geométrica são subfibrados vetoriais lagrangianos do fibrado tangente complexificado, chamado de polarizações, mas neste trabalho vamos nos restringir a polarizações reais, por motivo de simplicidade.

2.2 A conexão bilagrangiana

A questão de como construir conexões simpléticas sem torção que preservam distribuições lagrangianas dadas foi investigada por Heß [20, 21]. O teorema principal de Heß a respeito da questão aparece em [20] e é provado em detalhe em [21]:

Teorema 2.1 *Sejam M uma variedade munida de uma forma quase simplética ω e L_1 e L_2 distribuições lagrangianas complementares sobre M , i.e.,*

$$L_1 \oplus L_2 = TM . \quad (2.13)$$

*Então existe uma única conexão simplética ∇ sobre M , que é chamada a **conexão bilagrangiana** associada a ω , L_1 e L_2 , preservando as duas distribuições e com tensor de torção T diagonal por blocos, i.e., tal que*

$$\nabla_X X_1 \in \Gamma(L_1) \quad \text{para } X \in \mathfrak{X}(M), X_1 \in \Gamma(L_1) , \quad (2.14)$$

$$\nabla_X X_2 \in \Gamma(L_2) \quad \text{para } X \in \mathfrak{X}(M), X_2 \in \Gamma(L_2) , \quad (2.15)$$

e

$$T(X_1, X_2) = 0 \quad \text{para } X_1 \in \Gamma(L_1), X_2 \in \Gamma(L_2) . \quad (2.16)$$

Ela tem torção nula se e somente se ω é fechada e L_1 e L_2 são involutivas.

A construção explícita da conexão bilagrangiana é muito simples. Escrevendo pr_1 para a projeção de TM sobre L_1 com núcleo L_2 e pr_2 para a projeção de TM sobre L_2 com núcleo L_1 , temos

$$\text{pr}_1 + \text{pr}_2 = \text{id}_{TM} , \quad (2.17)$$

e então a conexão bilagrangiana é definida por

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} Y_1 &= \text{pr}_1(\omega^\sharp(\mathbb{L}_{X_1}(\omega^\flat(Y_1)))) \quad , \quad \nabla_{X_2} Y_1 = \text{pr}_1[X_2, Y_1] \\ \nabla_{X_2} Y_2 &= \text{pr}_2(\omega^\sharp(\mathbb{L}_{X_2}(\omega^\flat(Y_2)))) \quad , \quad \nabla_{X_1} Y_2 = \text{pr}_2[X_1, Y_2] \end{aligned} \quad (2.18)$$

para $X_1, Y_1 \in \Gamma(L_1)$, $X_2, Y_2 \in \Gamma(L_2)$,

e seu tensor de torção T satisfaz a equação (2.16) junto com

$$\begin{aligned} T(X_1, Y_1) &= -\text{pr}_2[X_1, Y_1] \quad , \quad T(X_2, Y_2) = -\text{pr}_1[X_2, Y_2] \\ &\text{para } X_1, Y_1 \in \Gamma(L_1), X_2, Y_2 \in \Gamma(L_2) . \end{aligned} \quad (2.19)$$

A demonstração do teorema consiste em usar a equação (2.18) como definição e verificar por cálculos explícitos (e um tanto longos) que ela define uma conexão linear com todas as propriedades requeridas.

Uma outra maneira de provar este resultado, pelo menos no caso em que L_1 e L_2 são involutivas e ω é fechada, é através da geometria pseudo-riemanniana, pois neste caso a conexão bilagrangiana ∇ tem torção nula e é idêntica com a conexão de Levi-Civita associada a uma métrica pseudo-riemanniana g de assinatura zero que pode ser construída naturalmente em termos de ω junto com L_1 e L_2 [9, 10], pondo

$$g(X, Y) = \omega((\text{pr}_1 - \text{pr}_2)X, Y) .$$

Em termos de referenciais locais de M compatíveis com a decomposição direta (2.13), isso simplesmente significa que se neste referencial a matriz de ω é da forma

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

então a matriz de g é da forma

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Além disso, neste caso a restrição de ∇ para cada um dos L_i coincide com a conexão de Bott de L_i .

2.3 Conexões simpléticas preservando uma distribuição lagrangiana

Para que possamos, no próximo capítulo, generalizar a construção de conexões simpléticas (sem torção) para conexões que preservam estruturas polissimpléticas e/ou multi-simpléticas, ainda temos que tratar o caso de conexões simpléticas (sem torção) que preservam *uma* distribuição lagrangiana (involutiva) L sobre M , em vez de duas distribuições lagrangianas (involutivas) transversais. Assim, coloca-se uma pergunta que, embora seja de interesse próprio no contexto da geometria simplética tradicional, tem recebido pouca atenção na literatura, a saber: quando existem conexões simpléticas (sem torção) ∇ sobre M que preservam L , e se existem, qual é o conjunto de todas elas?

Como primeiro passo nesta direção, notemos a seguinte extensão da Proposição 2.1.

Proposição 2.4 *Sejam M uma variedade munida de uma forma quase simplética ω e L uma distribuição lagrangiana sobre M . Então se existe uma conexão simplética ∇ sem torção sobre M que preserva L , ω é fechada e L é involutiva. Neste caso, a restrição da conexão ∇ a L coincide com a conexão de Bott ∇^B em L .*

Observação 2.1 A última afirmação é válida sob restrições mais amenas sobre o tensor de torção T de ∇ : basta que $T(X, Y)$ seja ao longo de L quando pelo menos um de seus argumentos for ao longo de L .

Demonstração: A primeira afirmação já foi provada na Proposição 2.1. A segunda segue diretamente do Lema 5 no Apêndice A. Para provar a terceira, suponha que ∇ é uma conexão simplética sobre M preservando L com tensor de torção T tal que $T(X, Y)$ é ao longo de L quando X ou Y é ao longo de L . Devido à não-degenerescência de ω , precisamos provar que, para $X, Y \in \Gamma(L)$ e $Z \in \mathfrak{X}(M)$, vale

$$\omega(\nabla_X^B Y, Z) = \omega(\nabla_X Y, Z) .$$

Comparando as expressões nas equações (1.15) e (2.1), vemos que isso decorre da fórmula

$$\omega(Y, [X, Z]) = \omega(Y, \nabla_X Z) ,$$

que segue da definição do tensor de torção T de ∇ , uma vez que L é isotrópico e estável sob ∇ e assim as expressões $\omega(Y, \nabla_Z X)$ e $\omega(Y, T(X, Z))$ se anulam. \square

O teorema central desta seção afirma que a condição dada na proposição anterior não só é necessária como também é suficiente para garantir existência de conexões simpléticas sem torção preservando uma distribuição lagrangiana dada, e que, mais uma vez, o grau de não-unicidade de tais conexões pode ser caracterizado com exatidão:

Teorema 2.2 *Sejam M uma variedade munida de uma forma simplética ω e L uma distribuição lagrangiana involutiva sobre M . Então sempre existem conexões simpléticas sem torção sobre M que preservam L . Mais especificamente, as conexões simpléticas sem torção sobre M que preservam L formam um espaço afim cujo espaço vetorial de diferenças pode ser identificado, da mesma maneira que antes (veja a equação (2.12)), com o espaço dos campos tensoriais ω_S totalmente simétricos de posto 3 sobre M que se anulam assim que inserimos ao menos dois campos vetoriais ao longo de L .*

Demonstração: Para mostrar a existência, aplicamos o teorema de Darboux para garantir que localmente, i.e., sobre uma vizinhança aberta suficientemente pequena de cada ponto de M , existe uma conexão simplética plana sem torção que preserva L , pois podemos simplesmente tomar a conexão trivial, com símbolos de Christoffel identicamente nulos, nessas coordenadas. (Aqui usamos uma versão do teorema de Darboux que garante, em uma vizinhança aberta suficientemente pequena de cada ponto de M , a existência de um sistema de coordenadas canônicas (q^i, p_i) tal que, além de ω tomar a forma padrão $dq^i \wedge dp_i$, L é gerada pelos campos vetoriais $\partial/\partial p_i$; uma prova detalhada pode ser encontrada, por exemplo, em [28, Teorema 1.1]. Usando um recobrimento localmente finito

$(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M por tais vizinhanças abertas com tais coordenadas canônicas, denotando a correspondente família de conexões lineares locais por $(\nabla_\alpha)_{\alpha \in A}$ e escolhendo uma partição da unidade $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$ subordinada ao referido recobrimento, podemos definir

$$\nabla = \sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha \nabla_\alpha .$$

Então é claro que ∇ é uma conexão linear sobre M que preserva ω e L e tem torção nula, uma vez que cada ∇_α é uma conexão linear sobre U_α com as mesmas propriedades, tendo em vista que as condições de preservar uma forma diferencial dada, de preservar um subfibrado vetorial dado do fibrado tangente e de ter torção nula são todas propriedades locais e afins (i.e., comportam-se naturalmente sob restrição a subconjuntos abertos e sob formação de combinações convexas de conexões).⁴ Quanto à questão da (falta de) unicidade, fixemos alguma conexão simplética ∇ sem torção sobre M que preserva L e, dada uma conexão linear ∇' qualquer sobre M , introduzimos dois campos tensoriais sobre M , S que é de tipo $(1, 2)$ e ω_S que é de tipo $(0, 3)$, tais que

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y) ,$$

e

$$\omega_S(X, Y, Z) = \omega(S(X, Y), Z) ,$$

sendo que S e ω_S contêm exatamente a mesma informação, já que ω é não-degenerada. Então é claro (a) que ∇' tem torção nula se e somente se S é simétrico, ou equivalentemente, ω_S é simétrico nos seus primeiros dois argumentos, (b) que ∇' é simplética se e somente se S satisfaz a identidade

$$\omega(S(X, Y), Z) + \omega(Y, S(X, Z)) = 0 ,$$

ou equivalentemente, ω_S é simétrico nos seus últimos dois argumentos, e (c) que ∇' preserva L se e somente se $S(X, Y)$ é ao longo de L quando X ou Y é ao longo de L , ou equivalentemente, ω_S é zero quando pelo menos dois dos seus argumentos são ao longo de L . \square

Resumindo, podemos observar que, neste capítulo, empregamos nada menos do que três métodos diferentes para construir conexões simpléticas sem torção:

⁴Note que essa observação *não* vale para a curvatura, pois a condição de ser plana, embora ainda local, não é afim. Portanto, apesar de cada uma das conexões lineares ∇_α ser plana, isso não vale para ∇ . O que dá para afirmar é apenas que a curvatura de ∇ é zero quando avaliada sobre dois campos ao longo de L , uma vez que a restrição de ∇ a L coincide com a conexão de Bott, que é plana.

- a) o primeiro método, utilizado na demonstração da Proposição 2.2, baseia-se na modificação de uma conexão linear dada, pela adição de um campo tensorial escolhido apropriadamente;
- b) o segundo método, utilizado na construção da conexão bilagrangiana apresentada no Teorema 2.1 e devida a Heß, procede por construção direta a partir das propriedades desejadas, como na construção da conexão de Levi-Civita;
- c) o terceiro método, utilizado na demonstração do Teorema 2.2, baseia-se na colagem de conexões lineares locais com as propriedades desejadas, usando partições da unidade.

Para o nosso propósito, que é generalizar a construção de conexões simpléticas (sem torção) para conexões que preservam estruturas polissimpléticas e/ou multissimpléticas, os primeiros dois métodos não são adequados, sendo que o primeiro leva a conexões que podem deixar de preservar a distribuição lagrangiana, o que é insuficiente, enquanto que o segundo leva a conexões que preservam duas distribuições lagrangianas transversais, o que é demais. Outro problema com a segunda construção é que essa conexão bilagrangiana tem torção nula apenas quando as duas distribuições são involutivas. Ocorre que, em muitas situações de interesse, estamos lidando com apenas uma distribuição lagrangiana involutiva L . É verdade que essa sempre admite uma distribuição lagrangiana complementar L' ; porém, nada garante que essa também seja involutiva, e por outro lado nada requer que essa também seja preservada sob a conexão simplética sem torção que procuramos construir. Um exemplo típico é dado por fibrados cotangentes, que admitem uma folheação lagrangiana natural (dada pela estrutura de fibrado vetorial sobre a variedade base), mas não admitem nenhuma folheação lagrangiana natural – e talvez nenhuma folheação lagrangiana mesmo – que seja transversal a ela: o que admitem são apenas sub-variedades lagrangianas transversais a ela, tais como a seção zero ou, mais geralmente, a imagem de qualquer 1-forma fechada. É para lidar com este tipo de situação, a qual também prevalece na geometria polissimplética e multissimplética, que o método de colagem usando partições da unidade parece ser o único que funciona a contento.

Conexões Polilagrangianas e Multilagrangianas

A nossa próxima meta nesta tese será estender a análise do capítulo anterior do contexto simplético ao âmbito da geometria polissimplética/multissimplética e, mais geralmente, da geometria polilagrangiana/multilagrangiana. Isso exige, antes de mais nada, uma breve introdução aos conceitos básicos de estruturas polilagrangianas e multilagrangianas em fibrados, conforme definidas em trabalho recente [12].

3.1 Conexões polilagrangianas e polissimpléticas

3.1.1 Fibrados polilagrangianos e polissimpléticos

Seja P um fibrado sobre uma variedade M de dimensão n , com projeção $\pi : P \rightarrow M$, e seja \hat{T} um fibrado vetorial auxiliar de posto \hat{n} sobre a mesma variedade base M . Denotaremos por $T\pi : TP \rightarrow TM$ a aplicação tangente à projeção, por $VP = \ker(T\pi)$ o fibrado vertical e por $\pi^*\hat{T}$ o pull-back de \hat{T} a P (via π). Um *campo vetorial vertical* sobre P é uma seção de VP , enquanto que uma *r -forma vertical* sobre P é uma seção da r -ésima potência exterior do fibrado dual V^*P de VP e, mais geralmente, um *campo tensorial vertical* (totalmente covariante) de posto r sobre P é uma seção da r -ésima potência tensorial do fibrado dual V^*P de VP . De modo análogo, uma *r -forma vertical sobre P a valores em \hat{T}* e, mais geralmente, um *campo tensorial vertical* (totalmente covariante) de posto r sobre P a valores em \hat{T} – ou mais precisamente, no pull-back $\pi^*(\hat{T})$ de \hat{T} a P – é uma seção do produto tensorial dessa potência exterior / tensorial com $\pi^*(\hat{T})$. A seguir,

denotaremos por $\mathfrak{X}_V(P)$ a álgebra de Lie dos campos vetoriais verticais sobre P e por $\Omega_V^r(P; \pi^*\hat{T})$ o espaço das r -formas verticais sobre P a valores em $\pi^*\hat{T}$.⁵

Usando que VP é involutivo, podemos desenvolver um cálculo de Cartan para formas verticais sobre P que é estritamente análogo ao cálculo de Cartan para formas diferenciais (a valores vetoriais). Em particular, existem as noções de *derivada exterior vertical*

$$\begin{aligned} d_V : \Omega_V^r(P; \pi^*\hat{T}) &\longrightarrow \Omega_V^{r+1}(P; \pi^*\hat{T}) \\ \alpha &\longmapsto d_V \alpha \end{aligned}, \quad (3.1)$$

e de *derivada de Lie vertical* ao longo de um campo vetorial vertical X ,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_X : \Omega_V^r(P; \pi^*\hat{T}) &\longrightarrow \Omega_V^r(P; \pi^*\hat{T}) \\ \alpha &\longmapsto \mathbb{L}_X \alpha \end{aligned}, \quad (3.2)$$

ambas naturalmente definidas pelas mesmas bem conhecidas fórmulas explícitas,

$$\begin{aligned} (d_V \alpha)(X_0, \dots, X_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i X_i \cdot (\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r) \end{aligned}, \quad (3.3)$$

onde $X_0, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}_V(P)$, e

$$(\mathbb{L}_X \alpha)(X_1, \dots, X_r) = X \cdot (\alpha(X_1, \dots, X_r)) - \sum_{i=1}^r \alpha(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r), \quad (3.4)$$

onde $X, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}_V(P)$. Aqui e a seguir, o símbolo \cdot representa a derivada direcional de seções de $\pi^*(\hat{T})$ ao longo de campos vetoriais verticais, o que faz sentido pois sob restrição a cada fibra, um campo vetorial vertical se reduz a um campo vetorial comum sobre a fibra, enquanto que uma seção de um fibrado vetorial obtido como o pull-back de um fibrado vetorial sobre M se reduz a uma função sobre a fibra a valores em um espaço vetorial fixo, a saber, a fibra do fibrado vetorial original sobre M no correspondente ponto da base.

⁵Notemos que os termos “forma vertical” e “campo tensorial vertical” (totalmente covariante) configuram um certo abuso de linguagem porque na verdade se trata de classes de equivalência de formas comuns e de campos tensoriais comuns (totalmente covariantes), sendo que formas ou campos comuns são equivalentes quando diferem por uma forma ou um campo que é horizontal, ou seja, que se anula quando se insere, em qualquer um dos argumentos, um vetor vertical.

Definição 3.1 *Um fibrado quase polilagrangiano é um fibrado P sobre uma variedade base M de dimensão n munido de uma $(k+1)$ -forma vertical $\hat{\omega} \in \Omega_V^{k+1}(P; \pi^*(\hat{T}))$ de posto constante no espaço total P tomando valores em um fibrado vetorial auxiliar \hat{T} de posto \hat{n} sobre a mesma variedade base M (ou, mais exatamente, no seu pull-back $\pi^*(\hat{T})$ para P), chamada a **forma quase polilagrangiana** e dita de **posto N** , com a propriedade de que existe uma distribuição L de codimensão N no fibrado vertical VP , chamada a **distribuição polilagrangiana**, tal que o homomorfismo musical*

$$\hat{\omega}^\flat : VP \longrightarrow \wedge^k V^*P \otimes \pi^*(\hat{T}), \quad (3.5)$$

dado pela contração de $\hat{\omega}$ em seu primeiro argumento, quando restrito a L , induz um isomorfismo de fibrados vetoriais sobre P ,

$$L / \ker \hat{\omega} \xrightarrow{\cong} \wedge^k L^\perp \otimes \pi^*(\hat{T}), \quad (3.6)$$

onde L^\perp é o aniquilador de L em V^*P .⁶ O adjetivo “quase” é omitido se $\hat{\omega}$ for verticalmente fechada, isto é. se

$$d_V \hat{\omega} = 0. \quad (3.7)$$

Quando $k = 1$, dizemos que P é um **fibrado (quase) poli-préssimplético** e $\hat{\omega}$ uma **forma (quase) poli-préssimplética** sobre P e, quando $\hat{\omega}$ for não-degenerada, i.e., $\ker \hat{\omega} = \{0\}$, que P é um **fibrado (quase) polissimplético** e $\hat{\omega}$ uma **forma (quase) polissimplética** sobre P . Finalmente, quando M se reduzir a um ponto, falamos de uma **variedade (quase) polilagrangiana** ou **variedade (quase) poli-préssimplética** ou **variedade (quase) polissimplética**, respectivamente.

Assim, a propriedade característica de um fibrado polilagrangiano P , digamos com forma polilagrangiana $\hat{\omega}$ não-degenerada, para simplificar, é a existência de um subfibrado vetorial L muito especial (e tipicamente único) do fibrado vertical VP que, além de ser lagrangiano (e em particular, isotrópico), tem a propriedade muito mais forte de que o homomorfismo musical (3.5) mapeia L sobre $\wedge^k L^\perp \otimes \pi^*(\hat{T})$.

Uma afirmação importante provada em [12, Teorema 9] é que, assim que $\hat{n} > 2$, a distribuição polilagrangiana L , além de unicamente determinada, é necessariamente involutiva.

Para concluir, apresentamos o que pode ser considerado o “modelo padrão” de um fibrado polilagrangiano:

⁶ O uso do artigo definido se justifica pelo fato de que, como é provado em [12], o subfibrado L de VP , se existir, é unicamente determinado por $\hat{\omega}$, exceto quando $\hat{n} = 1$ e ainda $k = 1$, com $\dim L = \dim \ker \hat{\omega} + N$ (ou seja, quando $\hat{\omega}$ corresponde a uma família de formas préssimpléticas nas fibras) ou $k = N$, com $\dim L = \dim \ker \hat{\omega} + 1$ (ou seja, quando $\hat{\omega}$ corresponde a uma família de formas de volume nas fibras).

Exemplo 3.1 Seja E um fibrado qualquer sobre uma variedade base M de dimensão n , com projeção $\pi_E : E \rightarrow M$, e seja \hat{T} um fibrado vetorial auxiliar de posto \hat{n} sobre a mesma variedade base M . Considere o fibrado

$$P = \bigwedge^k V^*E \otimes \pi_E^*(\hat{T}) \quad (3.8)$$

das k -formas verticais sobre E a valores no pull-back de \hat{T} para E , com projeções $\pi^k : P \rightarrow E$ e $\pi = \pi_E \circ \pi^k : P \rightarrow M$. Utilizando a aplicação tangente $T\pi^k : TP \rightarrow TE$ à primeira e a sua restrição $V\pi^k : VP \rightarrow VE$ aos fibrados verticais referentes às respectivas projeções sobre M , definimos a k -forma canônica sobre P , que é uma k -forma vertical $\hat{\theta}$ sobre P a valores em $\pi^*(\hat{T})$, por

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_\alpha(v_1, \dots, v_k) &= \alpha(V_\alpha \pi^k \cdot v_1, \dots, V_\alpha \pi^k \cdot v_k) \\ &\text{para } \alpha \in P \text{ e } v_1, \dots, v_k \in V_\alpha P. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Então $\hat{\omega} = -d_V \hat{\theta}$ é polilagraugiana, com distribuição polilagraugiana $L = \ker(T\pi^k)$ (o fibrado vertical referente à projeção sobre E), contida em $VP = \ker(T\pi)$ (o fibrado vertical referente à projeção sobre M).

Quando $k = 1$, temos o “modelo padrão” de um fibrado polissimplético. Em particular, quando ainda vale $n = 0$ e $\hat{n} = 1$ (com o entendimento de que a variedade base M é reduzida a um único ponto e o fibrado vetorial auxiliar \hat{T} ao corpo \mathbb{R}), recuperamos o fibrado cotaugente de uma variedade qualquer como “modelo padrão” de uma variedade simplética. Por outro lado, quando \hat{T} for o fibrado $\bigwedge^{n-1} T^*M$ das $(n-1)$ -formas sobre M , podemos identificar P com o dual torcido $\vec{J}^{\otimes}E$ do fibrado $\vec{J}E$ de jatos linearizados de E (que é o fibrado vetorial de diferenças do fibrado afim JE de jatos de E), pois

$$\vec{J}E \cong \pi_E^*(T^*M) \otimes VE,$$

implicando

$$\vec{J}^*E \cong V^*E \otimes \pi_E^*(TM)$$

para o dual comum \vec{J}^*E e

$$\vec{J}^{\otimes}E \cong V^*E \otimes \pi_E^*(TM) \otimes \pi_E^*(\bigwedge^n T^*M)$$

para o dual torcido $\vec{J}^{\otimes}E = \vec{J}^*E \otimes \pi_E^*(\bigwedge^n T^*M)$, de modo que obtemos um isomorfismo canônico de fibrados vetoriais sobre E ,

$$\vec{J}^{\otimes}E \cong V^*E \otimes \pi_E^*(\bigwedge^{n-1} T^*M). \quad (3.10)$$

Este fibrado desempenha um papel importante no formalismo hamiltoniano covariante para a teoria clássica dos campos [4, 13, 16, 17].

3.1.2 A conexão de Bott polilagrangiana: caso involutivo

Como outra aplicação do isomorfismo (3.6), além das já discutidas em [12], provamos que ele viabiliza a construção de uma versão polilagrangiana da conexão de Bott que é completamente análoga à do caso simplético. A ideia é a seguinte: começando com a conexão de Bott em L^\perp , como definida nas equações (1.12) e (1.13) (com $\mathfrak{X}(M)$ substituído por $\mathfrak{X}_V(P)$, $\Omega^1(M)$ substituído por $\Omega_V^1(P)$ e a derivada de Lie comum substituída pela derivada de Lie vertical introduzida no início desta seção), formamos o produto tensorial de sua k -ésima potência exterior com a conexão linear parcial trivial em $\pi^*(\hat{T})$ ao longo de L , construída no Exemplo 1.5, para obter uma conexão linear parcial ∇^B em $\wedge^k L^\perp \otimes \pi^*(\hat{T})$ ao longo de L , que chamaremos a **conexão de Bott em $\wedge^k L^\perp \otimes \pi^*(\hat{T})$** : explicitamente, ela é dada pela restrição da derivada de Lie (vertical) de k -formas (verticais):

$$(\nabla_X^B \alpha)(Z_1, \dots, Z_k) = X \cdot (\alpha(Z_1, \dots, Z_k)) - \sum_{i=1}^k \alpha(Z_1, \dots, [X, Z_i], \dots, Z_k) \quad (3.11)$$

para $X \in \Gamma(L)$, $\alpha \in \Gamma(\wedge^k L^\perp \otimes \pi^*(\hat{T}))$, $Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}_V(P)$.

Agora, usando o isomorfismo musical (3.6) (e supondo $\hat{\omega}$ não-degenerada), podemos transferir essa conexão de Bott para L . O resultado é o seguinte:

Definição 3.2 *Seja P um fibrado quase polilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase polilagrangiana $\hat{\omega}$ não-degenerada e distribuição polilagrangiana involutiva L . A **conexão de Bott polilagrangiana** é a conexão linear parcial ∇^B em L ao longo de L definida por*

$$\begin{aligned} & \hat{\omega}(\nabla_X^B Y, Z_1, \dots, Z_k) \\ &= X \cdot (\hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, Z_k)) - \sum_{i=1}^k \hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, [X, Z_i], \dots, Z_k) \quad (3.12) \\ & \text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}_V(P). \end{aligned}$$

Quando P é polissimplético, dizemos que ∇^B é a **conexão de Bott polissimplética**.

Como no caso simplético, a conexão de Bott polilagrangiana é plana, e para sua torção vale o seguinte análogo do Teorema 1.2:

Proposição 3.1 *Seja P um fibrado quase polilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase polilagrangiana $\hat{\omega}$ não-degenerada e distribuição polilagrangiana involutiva L . Então se a forma $\hat{\omega}$ for polilagrangiana, ou seja, verticalmente fechada, a conexão*

de Bott polilagrangiana ∇^B tem torção zero. Mais geralmente, se ela tiver torção T^B , vale

$$d_V \hat{\omega}(X, Y, Z_1, \dots, Z_k) = \hat{\omega}(T^B(X, Y), Z_1, \dots, Z_k) \quad (3.13)$$

para $X, Y \in \Gamma(L)$, $Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}_V(P)$.

Em particular, esta proposição implica que num fibrado polilagrangiano, as folhas da folheação polilagrangiana são variedades afins planas.

Demonstração: Todas as afirmações da proposição seguem da fórmula (3.13), que pode ser verificada por um simples cálculo, usando o fato de que $\hat{\omega}(X, Y, \dots) = 0$ quando $X, Y \in \Gamma(L)$ porque L é isotrópico para acrescentar alguns termos que se anulam mas servem para completar a expressão na equação (3.3):

$$\begin{aligned} & \hat{\omega}(\nabla_X^B Y - \nabla_Y^B X - [X, Y], Z_1, \dots, Z_k) \\ &= X \cdot (\hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, Z_k)) - Y \cdot (\hat{\omega}(X, Z_1, \dots, Z_k)) \\ & \quad - \sum_{i=1}^k (-1)^i Z_i \cdot (\hat{\omega}(X, Y, Z_1, \dots, \hat{Z}_i, \dots, Z_k)) \\ & \quad - \hat{\omega}([X, Y], Z_1, \dots, Z_k) \\ & \quad - \sum_{i=1}^k (-1)^i \hat{\omega}([X, Z_i], Y, Z_1, \dots, \hat{Z}_i, \dots, Z_k) \\ & \quad + \sum_{i=1}^k (-1)^i \hat{\omega}([Y, Z_i], X, Z_1, \dots, \hat{Z}_i, \dots, Z_k) \\ & \quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \hat{\omega}([Z_i, Z_j], X, Y, Z_1, \dots, \hat{Z}_i, \dots, \hat{Z}_j, \dots, Z_k) \\ &= d_V \hat{\omega}(X, Y, Z_1, \dots, Z_k). \end{aligned}$$

□

3.1.3 A conexão de Bott polilagrangiana: caso não involutivo

A construção da conexão de Bott polilagrangiana pode ser estendida ao caso não involutivo, ainda que este fato seja de interesse restrito, uma vez que sabemos que tal situação

só pode ocorrer quando $\hat{n} \leq 2$ [12, Teorema 9]. Como no caso simplético, a construção depende da escolha de uma distribuição complementar adequada; mais exatamente, será uma distribuição k -lagrangiana. O primeiro fato a ser verificado é que tal distribuição existe.

Proposição 3.2 *Seja P um fibrado quase polilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase polilagrangiana $\hat{\omega}$ e distribuição polilagrangiana L . Então existe uma distribuição k -lagrangiana L' sobre P que é complementar a L , i.e., que satisfaz*

$$L \oplus L' = VP. \quad (3.14)$$

A prova desta afirmação segue combinando um argumento de partição da unidade com a seguinte observação: o conjunto de todos os subespaços k -lagrangianos de um espaço vetorial polilagrangiano que são complementares ao subespaço polilagrangiano é um espaço afim, de modo que podemos formar combinações convexas de tais subespaços.

Proposição 3.3 *Seja V um espaço vetorial munido de uma forma polilagrangiana $\hat{\omega}$ com subespaço polilagrangiano L . Então o conjunto de todos os subespaços k -lagrangianos L' de V complementares a L está em correspondência biunívoca com o conjunto de todas as aplicações lineares P de V em L cuja restrição a L é a identidade e que são infinitesimalmente conformemente polilagrangianos, isto é, que satisfazem*

$$\sum_{i=0}^k \hat{\omega}(v_0, \dots, P v_i, \dots, v_k) = \hat{\omega}(v_0, \dots, v_k) \quad \text{para } v_0, \dots, v_k \in V. \quad (3.15)$$

Demonstração: A existência de subespaços L' de V com as propriedades enunciadas foi provada em [12, Teorema 2], por construção explícita, e a relação entre P e L' é a mesma da Proposição 1.2: P é o projetor, em W , sobre L ao longo de L' , ou seja, $L' = \ker P$. Assim, a equação (3.15) é trivialmente satisfeita quando pelo menos dois argumentos pertencem a L (neste caso, ambos os lados se anulam, porque L é isotrópico) e também quando um argumento pertence a L enquanto que todos os outros pertencem a L' (neste caso, ela se reduz a uma identidade trivial), de modo que sua validade no caso em que todos os argumentos pertencem a L' é equivalente à condição de L' ser k -isotrópico. \square

Voltando ao problema de construir a conexão de Bott polilagrangiana no caso não involutivo, suponhamos então que P é um fibrado quase polilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase polilagrangiana $\hat{\omega}$ e distribuição polilagrangiana L . Escolhendo uma distribuição complementar L' como na Proposição 3.2, temos a decomposição direta do fibrado vertical VP como na equação (3.14),

$$L \oplus L' = VP,$$

e a correspondente decomposição direta do fibrado dual V^*P :

$$L^\perp \in L'^\perp = V^*P.$$

Usando a mesma notação para as respectivas projeções como no caso simplético (veja a Seção 1.4), podemos novamente começar com a conexão de Bott em L^\perp , agora como definida nas equações (1.20) e (1.21) (com $\mathfrak{X}(M)$ substituído por $\mathfrak{X}_V(P)$, $\Omega^1(M)$ substituído por $\Omega_V^1(P)$ e a derivada de Lie comum substituída pela derivada de Lie vertical introduzida no início desta seção), formando o produto tensorial de sua k -ésima potência exterior com a conexão linear parcial trivial em $\pi^*(\hat{T})$ ao longo de L para obter uma conexão linear parcial ∇^B em $\wedge^k L^\perp \otimes \pi^*(\hat{T})$ ao longo de L , que chamaremos a **conexão de Bott em $\wedge^k L^\perp \otimes \pi^*(\hat{T})$** (com respeito a L'): explicitamente,

$$\begin{aligned} (\nabla_X^B \alpha)(Z_1, \dots, Z_k) &= X \cdot (\alpha(Z_1, \dots, Z_k)) - \sum_{i=1}^k \alpha(Z_1, \dots, [X, \text{pr}_{L'}(Z_i)], \dots, Z_k) \\ &\text{para } X \in \Gamma(L), \alpha \in \Gamma(\wedge^k L^\perp \otimes \pi^*(\hat{T})), Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}_V(P). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Finalmente, usando o isomorfismo musical (3.6) (e supondo $\hat{\omega}$ não-degenerada), transferimos essa conexão de Bott para L , obtendo uma conexão linear parcial ∇^B em L ao longo de L que, por abuso de linguagem, será simplesmente chamada a *conexão de Bott polilagrangiana em L (com respeito a L')*. Explicitamente, ela é determinada pela fórmula

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(\nabla_X^B Y, Z_1, \dots, Z_k) &= X \cdot (\hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, Z_k)) - \sum_{i=1}^k \hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, [X, \text{pr}_{L'}(Z_i)], \dots, Z_k) \\ &\text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}_V(P), \end{aligned} \quad (3.17)$$

que substitui a equação (3.12) no caso não involutivo. Finalmente, é fácil verificar que definindo a torção de ∇^B como na equação (1.10) e substituindo a equação (3.13) pela fórmula

$$\begin{aligned} d_V \hat{\omega}(X, Y, \text{pr}_{L'}(Z_1), \dots, \text{pr}_{L'}(Z_k)) &= \hat{\omega}(T^B(X, Y), Z_1, \dots, Z_k) \\ &\text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}_V(P), \end{aligned} \quad (3.18)$$

a Proposição 3.1 permanece válida. Em particular, se $\hat{\omega}$ é verticalmente fechada, ∇^B tem torção zero.

3.1.4 Conexões polilagrangianas

Por analogia com o caso simplético, a definição do conceito de conexão polilagrangiana é mais ou menos óbvia – a menos de um detalhe: não podemos esperar obter mais do que uma conexão linear parcial no (e ao longo do) fibrado vertical.

Definição 3.3 *Seja P um fibrado quase polilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase polilagrangiana $\hat{\omega}$ e distribuição polilagrangiana L . Uma conexão linear parcial ∇ em VP ao longo de VP é chamada uma **conexão polilagrangiana** se preserva L e $\hat{\omega}$, no sentido de que $\nabla\hat{\omega} = 0$, i.e.,*

$$X \cdot (\hat{\omega}(X_0, \dots, X_k)) = \sum_{i=0}^k \hat{\omega}(X_0, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_k) \quad (3.19)$$

para $X, X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}_V(P)$.

Quando P é (quase) poli-(pré-)simplético, dizemos que ∇ é uma **conexão poli-(pré-)simplética**.

Observação 3.1 Quando a distribuição polilagrangiana L é unicamente determinada pela forma quase polilagrangiana $\hat{\omega}$ (o que ocorre exceto em alguns casos especiais⁷), uma conexão linear parcial ∇ que preserva $\hat{\omega}$ também preserva L (pois o transporte paralelo correspondente ao longo de curvas verticais leva subespaços isotrópicos em subespaços isotrópicos, preservando a dimensão); portanto, nestes casos, a condição de que L seja preservada é automática e poderia ter sido omitida.

Como no caso simplético, a existência de conexões polilagrangianas sem torção impõe algumas condições de integrabilidade.

Proposição 3.4 *Seja P um fibrado quase polilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase polilagrangiana $\hat{\omega}$ e distribuição polilagrangiana L . Então se existe uma conexão polilagrangiana ∇ sem torção sobre P , $\hat{\omega}$ é verticalmente fechada e L é involutiva. Mais geralmente, o tensor de torção T de uma conexão polilagrangiana ∇ sobre P é relacionado à derivada exterior vertical de $\hat{\omega}$ pela fórmula*

$$d_V \hat{\omega}(X_0, \dots, X_k) = - \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \hat{\omega}(T(X_i, X_j), X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \quad (3.20)$$

para $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}_V(P)$.

Finalmente, se $\hat{\omega}$ for não-degenerada, a restrição de qualquer conexão polilagrangiana ∇ sem torção a L coincide com a conexão de Bott polilagrangiana ∇^B .

Observação 3.2 Como no caso simplético, a última afirmação é válida sob hipóteses menos restritivas sobre o tensor de torção T de ∇ : basta que $T(X, Y)$ seja ao longo de L quando pelo menos um de seus argumentos for ao longo de L .

⁷Veja a nota de rodapé anterior.

Demonstração: As primeiras duas afirmações seguem diretamente do Lema 6 e do Lema 5 no Apêndice. Para a terceira, suponha que $\hat{\omega}$ é não-degenerada e que ∇ é uma conexão polilagrangiana sobre P com tensor de torção T tal que $T(X, Y)$ é ao longo de L quando X ou Y é ao longo de L . Devido à não-degenerescência de $\hat{\omega}$, precisamos provar que, para $X, Y \in \Gamma(L)$ e $Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}_V(P)$, vale

$$\hat{\omega}(\nabla_X^B Y, Z_1, \dots, Z_k) = \hat{\omega}(\nabla_X Y, Z_1, \dots, Z_k) .$$

Comparando as expressões nas equações (3.12) e (3.19), vimos que isso decorre do fato de que, para $1 \leq i \leq k$, vale

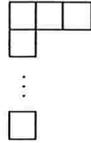
$$\hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, [X, Z_i], \dots, Z_k) = \hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, \nabla_X Z_i, \dots, Z_k) ,$$

que segue da definição do tensor de torção T de ∇ , uma vez que L é isotrópico e estável sob ∇ e assim as expressões $\hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, \nabla_{Z_i} X, \dots, Z_k)$ e $\hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, T(X, Z_i), \dots, Z_k)$ se anulam. \square

Reciprocamente, essas condições de integrabilidade também são suficientes:

Teorema 3.1 *Seja P um fibrado polilagrangiano sobre uma variedade base M com forma polilagrangiana $\hat{\omega}$ e distribuição polilagrangiana involutiva L . Então sempre existem conexões polilagrangianas ∇ sem torção sobre P . Mais especificamente, as conexões polilagrangianas sem torção sobre P formam um espaço afim cujo espaço vetorial de diferenças, no caso de $\hat{\omega}$ ser não-degenerada, pode ser identificado com o espaço dos campos tensoriais verticais de posto $k+2$ sobre P tomando valores no fibrado vetorial $\pi^*(\hat{T})$ que*

- (a) *têm simetria conforme a representação irredutível do grupo de permutações S_{k+2} dada pelo seguinte diagrama de Young (com k quadradinhos na primeira coluna):*



- (b) *se anulam assim que inserimos ao menos dois campos vetoriais ao longo de L .*

Demonstração: Para mostrar a existência, aplicamos o teorema de Darboux polilagrangiano [12, Teorema 10] para garantir que localmente, i.e., sobre uma vizinhança aberta suficientemente pequena de cada ponto de P , existe uma conexão polilagrangiana plana sem torção, pois podemos simplesmente tomar a conexão parcial trivial em VP ao longo de VP , com símbolos de Christoffel identicamente nulos, nessas coordenadas.

Usando um recobrimento localmente finito $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de P por tais vizinhanças abertas com tais coordenadas de Darboux, denotando a correspondente família de conexões lineares parciais locais por $(\nabla_\alpha)_{\alpha \in A}$ e escolhendo uma partição da unidade $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$ subordinada ao referido recobrimento, podemos definir

$$\nabla = \sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha \nabla_\alpha .$$

Então é claro que ∇ é uma conexão linear parcial em VP ao longo de VP que preserva $\hat{\omega}$ e L e tem torção nula, uma vez que cada ∇_α é uma conexão linear parcial em $VP|_{U_\alpha}$ ao longo de $VP|_{U_\alpha}$ com as mesmas propriedades, tendo em vista que as condições de preservar uma forma diferencial dada, de preservar um subfibrado vetorial dado do fibrado vertical e de ter torção nula são todas propriedades locais e afins (i.e., comportam-se naturalmente sob restrição a subconjuntos abertos e sob formação de combinações convexas de conexões lineares parciais).⁸ Para analisar a (falta de) unicidade, fixemos alguma conexão polilagrangiana sem torção sobre P e, dada uma conexão linear parcial ∇' em VP ao longo de VP qualquer, introduzimos dois campos tensoriais verticais (totalmente covariantes) sobre P , S que é de posto 2 e toma valores em VP e $\hat{\omega}_S$ que é de posto $k+2$ e toma valores em $\pi^*(\hat{T})$, tais que

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y) ,$$

e

$$\hat{\omega}_S(X, Y, Z_1, \dots, Z_k) = \hat{\omega}(S(X, Y), Z_1, \dots, Z_k) ,$$

sendo que S e $\hat{\omega}_S$ contêm exatamente a mesma informação, já que $\hat{\omega}$ é não-degenerada; obviamente, $\hat{\omega}_S$ é totalmente antissimétrico em seus últimos k argumentos. Então é claro (a) que ∇' tem torção nula se e somente se S é simétrico, ou equivalentemente, $\hat{\omega}_S$ é simétrico em seus primeiros dois argumentos, (b) que ∇' preserva $\hat{\omega}$ se e somente se S satisfaz a identidade

$$\hat{\omega}(S(X, Y), Z_1, \dots, Z_k) + \sum_{i=1}^k \hat{\omega}(Y, Z_1, \dots, Z_{i-1}, S(X, Z_i), Z_{i+1}, \dots, Z_k) = 0 ,$$

ou equivalentemente, $\hat{\omega}_S$ satisfaz a identidade cíclica

$$\hat{\omega}_S(X, Y, Z_1, \dots, Z_k) - \sum_{i=1}^k \hat{\omega}_S(X, Z_i, Z_1, \dots, Z_{i-1}, Y, Z_{i+1}, \dots, Z_k) = 0 ,$$

e (c) que ∇' preserva L se e somente se $S(X, Y)$ é ao longo de L quando X ou Y é ao longo de L , ou equivalentemente, $\hat{\omega}_S$ é zero quando pelo menos dois de seus argumentos são

⁸Novamente, o mesmo não vale para a curvatura.

ao longo de L . Finalmente, é bem conhecido que, junto com simetria nos primeiros dois argumentos e antissimetria nos últimos k argumentos, a identidade cíclica acima identifica o tensor $\hat{\omega}_S$ como pertencendo à representação irredutível do grupo de permutações S_{k+2} dado pelo diagrama de Young especificado acima [19, p. 249]. \square

3.2 Conexões multilagrangianas e multissimpléticas

3.2.1 Fibrados multilagrangianos e multissimpléticos

Seja P um fibrado sobre uma variedade M de dimensão n , com projeção $\pi : P \rightarrow M$. Como na seção anterior, denotaremos por $T\pi : TP \rightarrow TM$ a aplicação tangente à projeção e por $VP = \ker(T\pi)$ o fibrado vertical. Como antes, dizemos que um campo vetorial sobre P é *vertical* se for uma seção de VP , e dizemos que uma r -forma α sobre P é *horizontal* se sua contração $i_X\alpha$ com qualquer campo vetorial vertical X se anular. Mais geralmente, dizemos que uma r -forma α sobre P é $(r-s)$ -*horizontal*, onde $0 \leq s \leq r$, se sua contração com mais de s campos vetoriais verticais se anular. Note que para $s = r$ essa condição é vazia, enquanto que para $s = 0$ obtemos as r -formas horizontais usuais. Obviamente, as r -formas $(r-s)$ -horizontais são as seções de um fibrado vetorial sobre P chamado o fibrado das r -formas $(s-r)$ -horizontais sobre P e denotado aqui por $\bigwedge_s^r T^*P$, e o espaço de todas essas seções será denotado por $\Omega_s^r(P)$.

Definição 3.4 *Um fibrado quase multilagrangiano é um fibrado P sobre uma variedade base M de dimensão n munido de uma $(k+1)$ -forma $(k+1-r)$ -horizontal $\omega \in \Omega_r^{k+1}(P)$ de posto constante no espaço total P , onde $1 \leq r \leq k+1$ e $k+1-r \leq n$, chamada a **forma quase multilagrangiana** e dita de **posto N** e **grau de horizontalidade $(k+1-r)$** , com a propriedade de que existe uma distribuição L de codimensão N no fibrado vertical VP , chamada a **distribuição multilagrangiana**, tal que o homomorfismo musical*

$$\omega^\flat : TP \longrightarrow \bigwedge_r^k T^*P, \quad (3.21)$$

ou sua restrição ao fibrado vertical

$$\omega^\flat : VP \longrightarrow \bigwedge_{r-1}^k T^*P, \quad (3.22)$$

ambos dados pela contração de ω em seu primeiro argumento, quando restritos a L , induzem um isomorfismo de fibrados vetoriais sobre P ,

$$L / \ker \omega \xrightarrow{\cong} \bigwedge_{r-1}^k L^\perp \equiv \bigwedge^k L^\perp \cap \bigwedge_{r-1}^k T^*P. \quad (3.23)$$

onde L^\perp é o aniquilador de L em T^*P .⁹ O adjetivo “quase” é omitido se ω for fechada, isto é, se

$$d\omega = 0. \quad (3.24)$$

Quando $k = n$ e $r = 2$, dizemos que P é um **fibrado (quase) multi-préssimplético** e ω uma **forma (quase) multi-préssimplética** sobre P e, quando ω for não-degenerada, i.e., $\ker \omega = \{0\}$, que P é um **fibrado (quase) multissimplético** e ω uma **forma (quase) multissimplética** sobre P . Finalmente, quando M se reduzir a um ponto, falamos de uma **variedade (quase) multilagrangiana**.

Novamente, a propriedade característica de um fibrado multilagrangiano P , digamos com forma multilagrangiana ω não-degenerada, para simplificar, é a existência de um subfibrado vetorial L muito especial (e tipicamente único) do fibrado vertical VP que, além de ser lagrangiano (e em particular, isotrópico), tem a propriedade muito mais forte de que o homomorfismo musical (3.22) mapeia L sobre $\bigwedge_{r-1}^k L^\perp \equiv \bigwedge^k L^\perp \cap \bigwedge_{r-1}^k T^*P$.

Uma afirmação importante provada em [12, Teorema 9] é que, assim que $\binom{n}{k+1-r} > 2$, a distribuição multilagrangiana L , além de unicamente determinada, é necessariamente involutiva.

Para concluir, apresentamos o que pode ser considerado o “modelo padrão” de um fibrado multilagrangiano:

Exemplo 3.2 Seja E um fibrado qualquer sobre uma variedade base M de dimensão n , com projeção $\pi_E : E \rightarrow M$. Considere o fibrado

$$P = \bigwedge_{r-1}^k T^*E \quad (3.25)$$

das k -formas $(k+1-r)$ -horizontais sobre E , onde $1 \leq r \leq k+1$ e $k+1-r \leq n$, com projeções $\pi_{r-1}^k : P \rightarrow E$ e $\pi = \pi_E \circ \pi_{r-1}^k : P \rightarrow M$. Utilizando a aplicação tangente $T\pi_{r-1}^k : TP \rightarrow TE$ à primeira, definimos a k -forma **canônica** sobre P , que é uma k -forma $(k+1-r)$ -horizontal θ sobre P , por

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(v_1, \dots, v_k) &= \alpha(T_\alpha \pi_{r-1}^k \cdot v_1, \dots, T_\alpha \pi_{r-1}^k \cdot v_k) \\ &\text{para } \alpha \in P \text{ e } v_1, \dots, v_k \in T_\alpha P. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Então $\omega = -d\theta$ é multilagrangiana, com distribuição multilagrangiana $L = \ker(T\pi_{r-1}^k)$ (o fibrado vertical referente à projeção sobre E), contida em $VP = \ker(T\pi)$ (o fibrado vertical referente à projeção sobre M).

⁹O uso do artigo definido se justifica pelo fato de que, como é provado em [12], o subfibrado L de VP , se existir, é unicamente determinado por ω , exceto quando $k = r-1$ ou $k = r-1+n$ e ainda $r = 2$, com $\dim L = \dim \ker \hat{\omega} + N$ (ou seja, quando $\hat{\omega}$ corresponde a uma família de formas préssimpléticas nas fibras) ou $r = N+1$, com $\dim L = \dim \ker \hat{\omega} + 1$ (ou seja, quando $\hat{\omega}$ corresponde a uma família de formas de volume nas fibras), onde $\hat{\omega}$ denota o símbolo de ω .

Quando $k = n$ e $r = 2$, temos o “modelo padrão” de um fibrado multissimplético. Neste caso, como é explicitamente demonstrado em vários trabalhos sobre o formalismo multi-simplético [4, 16, 17], podemos identificar P com o dual torcido $J^{\otimes}E$ do fibrado JE de jatos de E , ou seja, temos um isomorfismo canônico de fibrados vetoriais sobre E ,

$$J^{\otimes}E \cong \bigwedge_1^n T^*E . \quad (3.27)$$

Este fibrado desempenha um papel importante no formalismo hamiltoniano covariante para a teoria clássica dos campos [4, 13, 16, 17].

3.2.2 A conexão de Bott multilagrangiana: caso involutivo

Como outra aplicação do isomorfismo (3.23), além das já discutidas em [12], provamos que ele viabiliza a construção de uma versão multilagrangiana da conexão de Bott que é completamente análoga às do caso simplético e do caso polilagrangiano. A ideia é a mesma que antes: começando com a conexão de Bott em L^\perp , como definida nas equações (1.12) e (1.13) (com M substituído por P), formamos sua k -ésima potência exterior para obter uma conexão linear parcial ∇^B em $\bigwedge^k L^\perp$ ao longo de L , que chamaremos a **conexão de Bott em $\bigwedge^k L^\perp$** : explicitamente, ela é dada pela restrição da derivada de Lie de k -formas:

$$(\nabla_X^B \alpha)(Z_1, \dots, Z_k) = X \cdot (\alpha(Z_1, \dots, Z_k)) - \sum_{i=1}^k \alpha(Z_1, \dots, [X, Z_i], \dots, Z_k) \quad (3.28)$$

para $X \in \Gamma(L)$, $\alpha \in \Gamma(\bigwedge^k L^\perp)$, $Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}(P)$.

Notemos que ∇^B preserva o grau de horizontalidade de formas (sendo que a expressão na equação (3.28) se anula se pelo menos r dos k campos vetoriais Y_1, \dots, Y_k são verticais, uma vez que $L \subset VP$ e VP é involutivo) e portanto, por restrição, induz uma **conexão de Bott em $\bigwedge_{r-1}^k L^\perp \equiv \bigwedge^k L^\perp \cap \bigwedge_{r-1}^k T^*P$** . Agora, usando o isomorfismo musical (3.23) (e supondo ω não-degenerada), podemos transferir essa conexão de Bott para L . O resultado é o seguinte:

Definição 3.5 *Seja P um fibrado quase multilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase multilagrangiana ω não-degenerada e distribuição multilagrangiana involutiva L . A **conexão de Bott multilagrangiana** é a conexão linear parcial ∇^B em L ao longo de L definida por*

$$\begin{aligned} & \omega(\nabla_X^B Y, Z_1, \dots, Z_k) \\ &= X \cdot (\omega(Y, Z_1, \dots, Z_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(Y, Z_1, \dots, [X, Z_i], \dots, Z_k) \quad (3.29) \\ & \text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}(P) . \end{aligned}$$

Quando P é multissimplético, dizemos que ∇^B é a *conexão de Bott multissimplética*.

Como no caso simplético, a conexão de Bott multilagrangiana é plana, e para sua torção vale o seguinte análogo do Teorema 1.2:

Proposição 3.5 *Seja P um fibrado quase multilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase multilagrangiana ω não-degenerada e distribuição multilagrangiana involutiva L . Então se a forma ω for multilagrangiana, ou seja, fechada, a conexão de Bott multilagrangiana ∇^B tem torção zero. Mais geralmente, se ela tiver torção T^B , vale*

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z_1, \dots, Z_k) &= \omega(T^B(X, Y), Z_1, \dots, Z_k) \\ \text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}(P). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Demonstração: A prova é praticamente idêntica à prova da Proposição 3.1 e portanto não será repetida. \square

3.2.3 A conexão de Bott multilagrangiana: caso não involutivo

A construção da conexão de Bott multilagrangiana pode ser estendida ao caso não involutivo, ainda que este fato seja de interesse restrito, uma vez que sabemos que tal situação só pode ocorrer quando $\binom{n}{k+1-r} \leq 2$ [12, Teorema 9]. Como no caso simplético, a construção depende da escolha de uma distribuição complementar adequada; mais exatamente, será uma distribuição k -lagrangiana. O primeiro fato a ser verificado é que tal distribuição existe.

Proposição 3.6 *Seja P um fibrado quase multilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase multilagrangiana ω e distribuição multilagrangiana L . Então existe uma distribuição k -lagrangiana L' sobre P que é complementar a L em TP e cuja intersecção com o fibrado vertical é uma distribuição $(r-1)$ -lagrangiana complementar a L em VP :*

$$L \oplus L' = TP \quad , \quad L \oplus (L' \cap VP) = VP. \quad (3.31)$$

A prova desta afirmação segue combinando um argumento de partição da unidade com a seguinte observação: dado um espaço vetorial munido de uma forma multilagrangiana, em relação a um subespaço vertical dado, o conjunto de todos os seus subespaços k -lagrangianos complementares ao subespaço multilagrangiano, e cuja intersecção com o subespaço vertical é um subespaço $(r-1)$ -lagrangiano complementar ao subespaço multilagrangiano, é um espaço afim, de modo que podemos formar combinações convexas de tais subespaços:

Proposição 3.7 *Seja W um espaço vetorial de dimensão finita munido de uma forma multilagrangiana ω em relação a um subespaço vertical V de W dado, com subespaço multilagrangiano L (contido em V). Então o conjunto de todos os subespaços k -lagrangianos L' complementares a L em W , e cuja intersecção com V é um subespaço $(r - 1)$ -lagrangiano complementar a L em V , está em correspondência biunívoca com o conjunto de todas as aplicações lineares P de W em L cuja restrição a L é a identidade e que são infinitesimalmente conformemente multilagrangianos, isto é, que satisfazem*

$$\sum_{i=0}^k \omega(w_0, \dots, P v_i, \dots, w_k) = \omega(w_0, \dots, w_k) \quad \text{para } w_0, \dots, w_k \in W. \quad (3.32)$$

Demonstração: A existência de subespaços L' de W com as propriedades enunciadas foi provada em [12, Teorema 5], por construção explícita, e a relação entre P e L' é a mesma da Proposição 1.2: P é o projetor, em W , sobre L ao longo de L' , ou seja, $L' = \ker P$. Devido ao fato de que $L \subset V$, isso ainda implica que a sua restrição $P|_V$ ao subespaço vertical V é o projetor, em V , sobre L ao longo de $L' \cap V$, ou seja, $L' \cap V = \ker P|_V$. Assim, a equação (3.32) é trivialmente satisfeita quando pelo menos dois argumentos pertencem a L (neste caso, ambos os lados se anulam, porque L é isotrópico) e também quando um argumento pertence a L enquanto que todos os outros pertencem a L' (neste caso, ela se reduz a uma identidade trivial), e finalmente sua validade no caso em que todos os argumentos pertencem a L' é equivalente à condição de L' ser k -isotrópico. Além disso, a mesma equação (3.32) implica

$$\sum_{i=0}^{r-1} \omega(v_0, \dots, P v_i, \dots, v_{r-1}, w_r, \dots, w_k) = \omega(w_0, \dots, w_k)$$

para $v_0, \dots, v_{r-1} \in V, w_r, \dots, w_k \in W$,

onde usamos que

$$\omega(v_0, \dots, v_{r-1}, w_r, \dots, P w_i, \dots, w_k) = 0$$

para $r \leq i \leq k, v_0, \dots, v_{r-1} \in V, w_r, \dots, w_k \in W$,

porque P projeta em $L \subset V$ e V é r -isotrópico, concluímos que sua validade no caso em que os primeiros r argumentos pertencem a $L' \cap V$ é equivalente à condição de $L' \cap V$ ser $(r - 1)$ -isotrópico. \square

Voltando ao problema de construir a conexão de Bott multilagrangiana no caso não involutivo, suponhamos então que P é um fibrado quase multilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase multilagrangiana ω e distribuição multilagrangiana L .

Escolhendo uma distribuição complementar L' como na Proposição 3.6, temos a decomposição direta do fibrado tangente TP como na equação (3.31),

$$L \oplus L' = TP ,$$

e a correspondente decomposição direta do fibrado dual T^*P ,

$$L^\perp \oplus L'^\perp = T^*P .$$

Usando a mesma notação para as respectivas projeções como no caso simplético (veja a Seção 1.4), podemos novamente começar com a conexão de Bott em L^\perp , agora como definida nas equações (1.20) e (1.21) (com M substituído por P), formando sua k -ésima potência exterior para obter uma conexão linear parcial ∇^B em $\bigwedge^k L^\perp$ ao longo de L , que chamaremos a **conexão de Bott em $\bigwedge^k L^\perp$** (com respeito a L'): explicitamente,

$$\begin{aligned} (\nabla_X^B \alpha)(Z_1, \dots, Z_k) &= X \cdot (\alpha(Z_1, \dots, Z_k)) - \sum_{i=1}^k \alpha(Z_1, \dots, [X, \text{pr}_{L'}(Z_i)], \dots, Z_k) \\ &\text{para } X \in \Gamma(L), \alpha \in \Gamma(\bigwedge^k L^\perp), Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}(P) . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Como antes, ∇^B preserva o grau de horizontalidade de formas (sendo que a expressão na equação (3.33) se anula se pelo menos r dos k campos vetoriais Y_1, \dots, Y_k são verticais, uma vez que $L \subset VP$ e VP é involutivo) e portanto, por restrição, induz uma **conexão de Bott em $\bigwedge_{r-1}^k L^\perp \equiv \bigwedge^k L^\perp \cap \bigwedge_{r-1}^k T^*P$** (com respeito a L'). Finalmente, usando o isomorfismo musical (3.23) (e supondo ω não-degenerada), transferimos essa conexão de Bott para L , obtendo uma conexão linear parcial ∇^B em L ao longo de L que, por abuso de linguagem, será simplesmente chamada a *conexão de Bott multilagrangiana* em L (com respeito a L'). Explicitamente, ela é determinada pela fórmula

$$\begin{aligned} \omega(\nabla_X^B Y, Z_1, \dots, Z_k) &= X \cdot (\omega(Y, Z_1, \dots, Z_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(Y, Z_1, \dots, [X, \text{pr}_{L'}(Z_i)], \dots, Z_k) \\ &\text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}(P) , \end{aligned} \quad (3.34)$$

que substitui a equação (3.29) no caso não-involutivo. Finalmente, é fácil verificar que definindo a torção de ∇^B como na equação (1.10) e substituindo a equação (3.30) pela fórmula

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, \text{pr}_{L'}(Z_1), \dots, \text{pr}_{L'}(Z_k)) &= \omega(T^B(X, Y), Z_1, \dots, Z_k) \\ &\text{para } X, Y \in \Gamma(L), Z_1, \dots, Z_k \in \mathfrak{X}(P) , \end{aligned} \quad (3.35)$$

a Proposição 3.5 permanece válida. Em particular, se ω é fechada, ∇^B tem torção zero.

3.2.4 Conexões multilagrangianas

Novamente, a definição do conceito de conexão multilagrangiana é óbvia, sendo que, neste caso, estamos lidando com conexões totais e não apenas parciais.

Definição 3.6 *Seja P um fibrado quase multilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase multilagrangiana ω e distribuição multilagrangiana L . Uma conexão linear ∇ sobre P é chamada uma **conexão multilagrangiana** se preserva L , VP e ω , no sentido de que $\nabla\omega = 0$, i.e.,*

$$X \cdot (\omega(X_0, \dots, X_k)) = \sum_{i=0}^k \omega(X_0, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_k) \quad (3.36)$$

para $X, X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(P)$.

Quando P é (quase) multi-(pré-)simplético, dizemos que ∇ é uma **conexão multi-(pré-)simplética**.

Observação 3.3 Vale o análogo da Observação 3.1.

Como no caso simplético, a existência de conexões multilagrangianas sem torção impõe algumas condições de integrabilidade.

Proposição 3.8 *Seja P um fibrado quase multilagrangiano sobre uma variedade base M com forma quase multilagrangiana ω e distribuição multilagrangiana L . Então se existe uma conexão multilagrangiana ∇ sem torção sobre P , ω é fechada e L é involutiva. Mais geralmente, o tensor de torção T de uma conexão multilagrangiana ∇ sobre P é relacionado à derivada exterior de ω pela fórmula*

$$d\omega(X_0, \dots, X_k) = - \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega(T(X_i, X_j), X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \quad (3.37)$$

para $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(P)$.

Finalmente, se ω for não-degenerada, a restrição de qualquer conexão multilagrangiana ∇ sem torção a L coincide com a conexão de Bott multilagrangiana ∇^B .

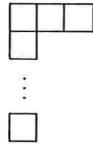
Observação 3.4 Vale o análogo da Observação 3.2.

Demonstração: Análoga à da Proposição 3.4. □

Reciprocamente, essas condições de integrabilidade também são suficientes:

Teorema 3.2 *Seja P um fibrado multilagrangiano sobre uma variedade base M com forma multilagrangiana ω e distribuição multilagrangiana involutiva L . Então sempre existem conexões multilagrangianas ∇ sem torção sobre P . Mais especificamente, as conexões multilagrangianas sem torção sobre P formam um espaço afim cujo espaço vetorial de diferenças, no caso de ω ser não-degenerada, pode ser identificado com o espaço dos campos tensoriais de posto $k + 2$ sobre P que*

- (a) *têm simetria conforme a representação irredutível do grupo de permutações S_{k+2} dada pelo seguinte diagrama de Young (com k quadradinhos na primeira coluna):*



- (b) *se anulam assim que inserimos ao menos $r + 1$ campos vetoriais verticais ou ao menos dois campos vetoriais ao longo de L .*

Demonstração: Análoga à do Teorema 3.1. □

Teoremas de Estrutura

Como já vimos nos exemplos do capítulo anterior, o “modelo padrão” de um fibrado polilagrangiano e de um fibrado multilagrangiano é um certo fibrado de formas de algum outro fibrado. Assim, coloca-se naturalmente a questão até que grau essas classes de exemplos são típicas.

Começamos, como antes, pelo estudo da resposta à pergunta análoga no âmbito da geometria simplética, que é a seguinte: Quais variedades simpléticas são fibrados cotangentes? Como a palavra “são” significa apenas igualdade a menos de isomorfismo – neste caso, a menos de um difeomorfismo simplético, também chamado de simplectomorfismo – temos que formular a resposta em termos de noções que são invariantes sob tais transformações, para que ela não fique camuflada. Há duas condições obviamente necessárias: qualquer variedade simplética deste tipo deve ser exata ($\omega = -d\theta$) e deve admitir uma folheação lagrangiana. Notemos que qualquer uma destas condições já exclui a grande maioria de órbitas coadjuntas de grupos de Lie, tais como a esfera S^2 ou, mais geralmente, todas as órbitas (co)adjuntas de grupos de Lie compactos semisimples, que também são variedades de Kähler.

Além de admitir uma folheação lagrangiana, uma variedade simplética P simplectomorfa a um fibrado cotangente T^*Q também admite subvariedades complementares à referida folheação, que podem ser lagrangianas ou não: as folhas correspondem aos espaços cotangentes e as subvariedades complementares correspondem a gráficos de 1-formas,⁹

⁹Ressalta-se que essas subvariedades complementares são isoladas, i.e., não as vemos como vindo em famílias que formariam uma segunda folheação complementar à primeira. Enfatizamos também que, durante todo este trabalho, utilizamos a expressão “complementar” num sentido mais restrito do que o termo “transversal”: diremos que duas subvariedades são complementares se em cada ponto de sua intersecção, o espaço tangente à variedade ambiente for a soma *direta* dos espaços tangentes às duas subvariedades; assim, uma subvariedade complementar a um folheação corresponde a o que na literatura costuma ser chamado de seção transversal de uma folheação.

sendo que o gráfico de uma 1-forma é uma subvariedade lagrangiana se e somente se essa 1-forma for fechada. Reciprocamente, para qualquer variedade simplética P , com forma simplética ω , que admite uma foliação lagrangiana \mathcal{F} que é simples, i.e., tal que suas folhas são as componentes conexas dos conjuntos de nível de uma submersão sobrejetora de P em alguma outra variedade, e qualquer subvariedade Q de P complementar a \mathcal{F} ,¹⁰ o teorema da vizinhança tubular de Weinstein [30] afirma que se Q for lagrangiana, então existe uma vizinhança tubular de Q em P que é symplectomorfa a uma vizinhança convexa da seção zero do fibrado cotangente T^*Q de Q . Este resultado é facilmente generalizado ao caso em que Q não é lagrangiana: basta substituir a forma simplética padrão $-d\theta$ de T^*Q pela forma simplética $-d\theta + \tau^*\omega_Q$ onde τ é a projeção canônica de T^*Q sobre Q e ω_Q é a restrição de ω a Q ; veja [8]. Uma versão global deste resultado foi dada por Thompson [27], sob a hipótese de que as folhas de \mathcal{F} sejam simplesmente conexas e geodesicamente completas: neste caso, a variedade P é um fibrado afim sobre P/\mathcal{F} cujo fibrado vetorial de diferenças é o fibrado cotangente $T^*(P/\mathcal{F})$ de P/\mathcal{F} , e portanto existem subvariedades Q de P complementares a \mathcal{F} com $Q \cong P/\mathcal{F}$, i.e., que encontram cada folha em exatamente um ponto.¹¹ Ademais, quando escolhemos uma delas, obtemos um symplectomorfismo global entre P e T^*Q que leva ω em $-d\theta$ ou, mais geralmente, em $-d\theta + \tau^*\omega_Q$, como antes. O problema com a abordagem de [27] é que ela não é intrínseca, pois a identificação de P como fibrado afim sobre P/\mathcal{F} , e até o significado da hipótese de completude geodésica das folhas, depende da escolha de ingredientes adicionais (uma métrica auxiliar, no caso, ou melhor, a conexão de Levi-Civita por ela induzida), o que confere à construção um certo grau de artificialidade.

A seguir, apresentaremos demonstrações mais transparentes destes teoremas, que diferem das originais pelo uso sistemático de dois ingredientes naturais cuja importância parece ter sido subestimada no passado. São estes: (a) a conexão de Bott introduzida anteriormente, sendo que é a ela que se refere a hipótese de completude geodésica das folhas, e (b) o conceito de campo de Euler – um campo vetorial que pode ser definido, de forma canônica, no espaço total de qualquer fibrado vetorial e que, em um fibrado cotangente, tem a notável propriedade de que sua contração com a forma simplética ω dá a forma canônica θ cuja derivada exterior é a própria ω (a menos de sinais, que são uma questão de convenção). O nosso interesse principal nesta sistematização e simplificação é que ela permite a generalização de todos estes teoremas ao âmbito polilagrangiano e multilagrangiano, sem esforço adicional algum.

¹⁰Note que a condição de que Q seja complementar a \mathcal{F} não impede que a intersecção de Q com alguma folha de \mathcal{F} possa ser vazia, nem garante que ela se reduza a um único ponto quando não vazia; implica apenas que tal intersecção deve ser discreta e portanto, no máximo, enumerável.

¹¹Isso decorre ao fato de que qualquer fibrado afim sempre admite seções globais – o que pode facilmente ser provado usando partições da unidade.

4.1 Folheações simples por variedades afins planas

Inicialmente, suponha que P é uma variedade qualquer. Pelo teorema de Frobenius, sabemos que uma folheação \mathcal{F} de P corresponde biunivocamente a uma distribuição involutiva L em P , sendo que para $p \in P$,

$$L_p = T_p \mathcal{F}_p, \quad (4.1)$$

onde \mathcal{F}_p é a folha que passa por p . A seguir consideraremos apenas folheações simples, que são caracterizadas em termos de sua relação de equivalência $\mathcal{F} \subset P \times P$ (definida pela regra óbvia de que $(p_1, p_2) \in \mathcal{F}$ se e somente se p_1 e p_2 pertencem à mesma folha) através do seguinte

Teorema 4.1 (Critério de Godement) [26] *Sejam P uma variedade diferenciável e R uma relação de equivalência em P . Então as seguintes condições são equivalentes.*

- R é uma subvariedade fechada e mergulhada de $P \times P$ tal que $\text{pr}_1|_R : R \rightarrow P$ e $\text{pr}_2|_R : R \rightarrow P$ são submersões sobrejetoras.
- O quociente P/R possui uma única estrutura de variedade diferenciável tal que a projeção canônica π de P sobre P/R é uma submersão sobrejetora.

Uma folheação \mathcal{F} de P é chamada **simples** se a sua relação de equivalência satisfaz as condições do critério de Godement [25], ou seja, se as suas folhas são as componentes conexas dos conjuntos de nível de uma submersão sobrejetora $\pi : P \rightarrow \bar{P}$, de modo que para $p \in P$ com $\pi(p) = \bar{p} \in \bar{P}$, vale

$$\mathcal{F}_p = \text{componente conexa de } \pi^{-1}(\bar{p}) \text{ contendo } p. \quad (4.2)$$

Em particular, as fibras de um fibrado constituem uma folheação simples. Também é óbvio que as folhas de uma folheação simples são subvariedades fechadas e mergulhadas (e não apenas imersas). Finalmente, o critério de Godement implica que, dada uma submersão sobrejetora $\pi : P \rightarrow \bar{P}$ qualquer, podemos sempre decompor a projeção π na composição de duas projeções,

$$P \rightarrow P/\mathcal{F} \rightarrow \bar{P}, \quad (4.3)$$

onde a primeira é uma submersão sobrejetora com fibras conexas e a segunda é um difeomorfismo local.

Dada uma submersão sobrejetora $\pi : P \rightarrow \bar{P}$ qualquer, temos dois tipos de campos vetoriais especiais sobre a variedade P : os verticais e, mais geralmente, os projetáveis:

Definição 4.1 *Sejam P e \bar{P} variedades e $\pi : P \rightarrow \bar{P}$ uma submersão sobrejetora. Dizemos que um campo vetorial X sobre P é **vertical** (em relação a π) se para qualquer $p \in P$, vale $T_p\pi \cdot X(p) = 0$, e que é **projetável** (em relação a π) se para quaisquer $p_1, p_2 \in P$ com $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, vale $T_{p_1}\pi \cdot X(p_1) = T_{p_2}\pi \cdot X(p_2)$.*

Se X for um campo projetável sobre P , então é claro que para qualquer $\bar{p} \in \bar{P}$, existe um único vetor $\bar{X}(\bar{p}) \in T_{\bar{p}}\bar{P}$ tal que $T_p\pi \cdot X(p) = \bar{X}(\bar{p})$ para todo $p \in P$ com $\pi(p) = \bar{p}$, e usando cartas locais de P e \bar{P} em que a submersão π é representada por uma projeção, verifica-se que X sendo suave, \bar{X} também é. Assim, podemos caracterizar um campo projetável como um campo vetorial X sobre P que admite um “push-forward” para um (único) campo vetorial \bar{X} sobre \bar{P} via π , com o qual será então π -relacionado,¹² e um campo vertical como um campo projetável cujo “push-forward” é zero. Isso implica imediatamente que, na álgebra de Lie $\mathfrak{X}(P)$ dos campos vetoriais sobre P , os campos projetáveis formam uma subálgebra de $\text{Lic } \mathfrak{X}_P(P)$ e os campos verticais formam um ideal $\mathfrak{X}_V(P)$ dentro dessa subálgebra de Lie, isto é

$$Y, Z \text{ projetáveis} \implies [Y, Z] \text{ projetável} , \quad (4.4)$$

$$X \text{ vertical, } Y \text{ projetável} \implies [X, Y] \text{ vertical} . \quad (4.5)$$

Finalmente, temos

Lema 1 *Sejam P e \bar{P} variedades e $\pi : P \rightarrow \bar{P}$ uma submersão sobrejetora. Então todo campo vetorial \bar{X} sobre \bar{P} é “push-forward” de algum campo projetável X sobre P via π .*

Demonstração: Usando cartas locais de P e \bar{P} em que a submersão π é representada por uma projeção, podemos afirmar que todo ponto p de P possui alguma vizinhança aberta U_p em que podemos construir um campo vetorial X_p que projeta sobre $\bar{X}|_{\pi(U_p)}$. Escolhendo um refinamento $(U_i)_{i \in I}$ localmente finito do recobrimento $(U_p)_{p \in P}$ de P e uma partição de unidade $(\chi_i)_{i \in I}$ a ele subordinada, podemos definir um campo vetorial X sobre P pondo

$$X = \sum_{i \in I} \chi_i X_{p(i)}$$

e verificar que ele projeta sobre \bar{X} . □

¹²Lembramos que dada uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ qualquer entre variedades M e N quaisquer, campos vetoriais X sobre M e Y sobre N são chamados f -relacionados se para todo ponto m de M , vale $T_m f \cdot X(m) = Y(f(m))$. Um teorema importante, que usaremos constantemente, afirma que se X_1 sobre M e Y_1 sobre N são f -relacionados e X_2 sobre M e Y_2 sobre N também são f -relacionados, então os seus colchetes de Lie, $[X_1, X_2]$ sobre M e $[Y_1, Y_2]$ sobre N , são f -relacionados.

Assim, obtemos a seguinte seqüência exata de álgebras de Lie:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{X}_V(P) \longrightarrow \mathfrak{X}_P(P) \longrightarrow \mathfrak{X}(\bar{P}) \longrightarrow 0. \quad (4.6)$$

Para uso posterior, notamos ainda o seguinte corolário do Lema 1:

Lema 2 *Sejam P e \bar{P} variedades e $\pi : P \longrightarrow \bar{P}$ uma submersão sobrejetora. Então para todo vetor $u \in T_p P$ tangente a P em algum ponto p de P , existe um campo projetável X sobre P tal que $X(p) = u$.*

A seguir, estudaremos variedades P com uma folheação simples \mathcal{F} cujas folhas são variedades afins planas. Isto significa que a distribuição involutiva L tangente a \mathcal{F} , conforme a equação (4.1), vem munida de uma conexão linear parcial ∇ com curvatura e torção zero. Neste caso, podemos definir outros dois tipos de campos especiais sobre P (ambos verticais) que desempenham um papel importante: os campos covariantemente constantes e os campos de Euler.

Definição 4.2 *Seja P uma variedade munida de uma folheação simples \mathcal{F} com distribuição involutiva tangente L (veja a equação (4.1)), e seja ∇ uma conexão linear parcial em L ao longo de L com torção e curvatura zero. Dizemos que um campo vetorial X tangente a \mathcal{F} é **covariantemente constante** ao longo das folhas de \mathcal{F} , ou simplesmente, **covariantemente constante**, se para qualquer campo vetorial Z tangente a \mathcal{F} , vale*

$$\nabla_Z X = 0. \quad (4.7)$$

*Dizemos, ainda, que um campo vetorial Σ tangente a \mathcal{F} é um **campo de Euler** se para qualquer campo vetorial Z tangente a \mathcal{F} , vale*

$$\nabla_Z \Sigma = Z. \quad (4.8)$$

A situação padrão onde estes tipos de campos podem ser definidos de forma natural é sobre o espaço total de um fibrado vetorial: neste caso, há um campo de Euler preferido, a saber, aquele que se anula em cima da seção zero.

Exemplo 4.1 *Seja E o espaço total de um fibrado vetorial sobre uma variedade base Q , com projeção $\pi : E \longrightarrow Q$, e seja L o seu fibrado vertical VE , que pode ser identificado com o pull-back π^*E do próprio E , de Q para E , via π . (De fato, para $e \in E$ e $q = \pi(e) \in Q$, temos $L_e = V_e E = E_q$.) Munindo L da conexão parcial linear trivial ∇ (ao longo do próprio L) introduzida no Exemplo 1.5, vimos que os campos vetoriais covariantemente constantes sobre E correspondem exatamente às seções de L constantes ao longo das fibras de E , e cada seção de E sobre Q , como subvariedade de E dada pela seção zero,*

admite uma única extensão a uma seção de L sobre E que é constante ao longo das fibras de E . Além disso, existe um único campo de Euler Σ sobre E que se anula sobre Q , como subvariedade de E dada pela seção zero. Estas afirmações evidenciam-se quando introduzimos coordenadas locais adaptadas (q^i, v^a) de E , induzidas por coordenadas locais q^i de Q ; uma trivialização local de E e uma base da fibra típica de E , que proporcionam uma base de seções locais e_a de E ; a extensão de e_a a uma seção local de L corresponde ao campo vetorial local covariantemente constante $\partial/\partial v^a$ sobre E . Expandindo campos vetoriais verticais sobre E nesta base, temos

$$Z = Z^a \frac{\partial}{\partial v^a}, \quad X = X^a \frac{\partial}{\partial v^a} \implies \nabla_Z X = Z^b \frac{\partial X^a}{\partial v^b} \frac{\partial}{\partial v^a}$$

de modo que X será covariantemente constante se e somente se as funções coeficiente X^a independem das variáveis v^b . Note que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \left(X^b \frac{\partial Y^a}{\partial v^b} - Y^b \frac{\partial X^a}{\partial v^b} \right) \frac{\partial}{\partial v^a} = [X, Y]$$

(∇ tem torção zero) e

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \left(X^b \frac{\partial}{\partial v^b} \left(Y^c \frac{\partial Z^a}{\partial v^c} \right) - Y^c \frac{\partial}{\partial v^c} \left(X^b \frac{\partial Z^a}{\partial v^b} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v^a} \\ &= \left(X^b \frac{\partial Y^c}{\partial v^b} \frac{\partial Z^a}{\partial v^c} - Y^c \frac{\partial X^b}{\partial v^c} \frac{\partial Z^a}{\partial v^b} \right) \frac{\partial}{\partial v^a} \\ &= \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

(∇ tem curvatura zero). Além disso, a solução da equação (4.8) que se anula quando $v = 0$ é

$$\Sigma = v^a \frac{\partial}{\partial v^a}.$$

As curvas integrais deste campo vetorial são as retas radiais.

Note que a mesma construção funciona para fibrados afins – se bem que neste caso, perdemos a unicidade do campo de Euler, já que não há mais a noção de seção zero. De modo geral, a Definição 4.2 implica diretamente que a soma de um campo covariantemente constante e de um campo de Euler é um campo de Euler, e reciprocamente, a diferença entre dois campos de Euler é um campo covariantemente constante; assim, os campos de Euler formam um espaço afim cujo espaço vetorial de diferenças é o espaço dos campos covariantemente constantes. Também é claro que ambos – campos covariantemente constantes assim como campos de Euler – são unicamente determinados por

seus valores em um único ponto de cada folha, e usando sistemas de coordenadas locais adaptadas à submersão sobrejetora $P \rightarrow P/\mathcal{F}$ nas quais os símbolos de Christoffel da conexão ∇ se anulam identicamente, podemos provar que ambos sempre existem pelo menos localmente.

Completando o “menu” dos ingredientes, suponha agora que Q é uma subvariedade de P complementar às folhas de \mathcal{F} , i.e., para todo ponto q de Q , vale

$$T_q P = T_q Q \oplus T_q \mathcal{F}_q = T_q Q \oplus L_q . \quad (4.9)$$

Note que essa condição de complementaridade não implica necessariamente que Q deve intersectar todas as folhas. Porém, considerando mais uma vez a submersão sobrejetora $\pi : P \rightarrow P/\mathcal{F}$, ela permite concluir que cada ponto de Q possui uma vizinhança aberta em P cuja intersecção com Q constitui uma seção local de π e, portanto, que $\pi(Q)$ é aberto em P/\mathcal{F} . Além disso, ela também permite concluir que a inclusão de Q em P , seguida da projeção π , como aplicação

$$Q \rightarrow P/\mathcal{F} \quad (4.10)$$

é um difeomorfismo local sobre sua imagem, que é uma subvariedade aberta de P/\mathcal{F} . Assim, substituindo P por sua subvariedade aberta $\pi^{-1}(\pi(Q))$ e \mathcal{F} por sua restrição a essa subvariedade, podemos supor sem perda de generalidade que Q intersecta todas as folhas, ou seja, que a aplicação (4.10) é sobrejetora.

Posto isso, queremos mostrar como construir, a partir do fluxo geodésico radial emanando de Q associado à conexão ∇ , um difeomorfismo local canônico, denotado por \exp_Q e devidamente chamado de **exponencial**, entre o fibrado vetorial $L|_Q$ e a variedade P . Mais exatamente, se para $q \in Q$ e $u_q \in L_q$, a geodésica em \mathcal{F}_q com posição inicial q e velocidade inicial u_q é denotada por $F(\cdot; u_q)$, então a aplicação

$$\exp_Q : \text{Dom}(\exp_Q) \rightarrow P \quad (4.11)$$

é definida por

$$\text{Dom}(\exp_Q) = \bigcup_{q \in Q} \{u_q \in L_q \mid F(1; u_q) \text{ existe}\} \quad (4.12)$$

com

$$\exp_Q(u_q) = F(1; u_q) \quad (4.13)$$

e assim já podemos eliminar o símbolo F para o fluxo geodésico (que é pouco expressivo), pois a geodésica em \mathcal{F}_q com posição inicial q e velocidade inicial u_q é $s \mapsto \exp_Q(su_q)$:

$$\exp_Q(su_q) \Big|_{s=0} = q \quad , \quad \frac{d}{ds} \exp_Q(su_q) \Big|_{s=0} = u_q \quad (4.14)$$

$$\frac{D}{ds} \frac{d}{ds} \exp_Q(su_q) = 0 \quad (4.15)$$

Obviamente, o domínio $\text{Dom}(\exp_Q)$ da exponencial é uma vizinhança tubular de Q em $L|_Q$; e pelo teorema de dependência de soluções de equações diferenciais das condições iniciais e de parâmetros, a aplicação \exp_Q é diferenciável (i.e., suave) e induz a identidade sobre Q .

Lema 3 *Nas hipóteses enunciadas anteriormente, a exponencial (4.11) é um difeomorfismo local sobre sua imagem, que é uma subvariedade aberta de P .*

Demonstração: Como $L|_Q$ e P têm a mesma dimensão, basta provar que para todo vetor u_q no domínio da exponencial, a aplicação tangente

$$T_{u_q} \exp_Q : T_{u_q}(L|_Q) \longrightarrow T_{\exp_Q(u_q)} P$$

é injetora. Quando u_q for o vetor zero, isto é óbvio, pois para todo $q \in Q$, temos decomposições diretas naturais dos espaços tangentes a $L|_Q$ e a P em q em “parte vertical” e “parte horizontal”,

$$T_q(L|_Q) = L_q \oplus T_q Q \quad , \quad T_q P = L_q \oplus T_q Q$$

em relação às quais a aplicação tangente

$$T_q \exp_Q : T_q(L|_Q) \longrightarrow T_q P$$

é simplesmente a identidade. Consideramos então o caso geral onde $u_q \in L_q$ é um vetor qualquer no domínio de \exp_Q e $v_{u_q} \in T_{u_q}(L|_Q)$ é um vetor tangente ao espaço total do fibrado vetorial $L|_Q$ sobre Q . Suponha que $T_{u_q} \exp_Q \cdot v_{u_q} = 0$. Então aplicando o funtor tangente ao diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} L|_Q & \xrightarrow{\exp_Q} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \longrightarrow & P/\mathcal{F} \end{array}$$

onde a flecha horizontal inferior é o difeomorfismo local (4.10), concluímos que v_{u_q} deve ser vertical e, como $V_{u_q}(L|_Q) \cong L_q$, pode ser identificado com um vetor $v_q \in L_q$; mais explicitamente, $v_{u_q} \in V_{u_q}(L|_Q)$ é o vetor tangente

$$v_{u_q} = \left. \frac{d}{dt} (u_q + tv_q) \right|_{t=0} ,$$

e portanto $T_{u_q} \exp_Q \cdot v_{u_q}$ é o vetor tangente

$$T_{u_q} \exp_Q \cdot v_{u_q} = \left. \frac{d}{dt} \exp_Q(u_q + tv_q) \right|_{t=0}.$$

Isso mostra que $T_{u_q} \exp_Q \cdot v_{u_q}$ é o valor, em $s = 1$, de um campo de Jacobi ao longo da geodésica $s \mapsto \exp_Q(su_q)$, definido como a variação da seguinte família a um parâmetro, t , de geodésicas, cada uma com parâmetro afim s :

$$(s, t) \mapsto \exp_Q(s(u_q + tv_q)).$$

Explicitamente, o valor deste campo de Jacobi no ponto $\exp_Q(su_q)$ é

$$\left. \frac{d}{dt} \exp_Q(s(u_q + tv_q)) \right|_{t=0},$$

mostrando que se $T_{u_q} \exp_Q \cdot v_{u_q} = 0$, ele deve se anular em $s = 0$ e em $s = 1$, ou seja, q e $p = \exp_Q(u_q)$ seriam pontos conjugados ao longo da geodésica $s \mapsto \exp_Q(su_q)$, conforme mostra a Figura 4.1.

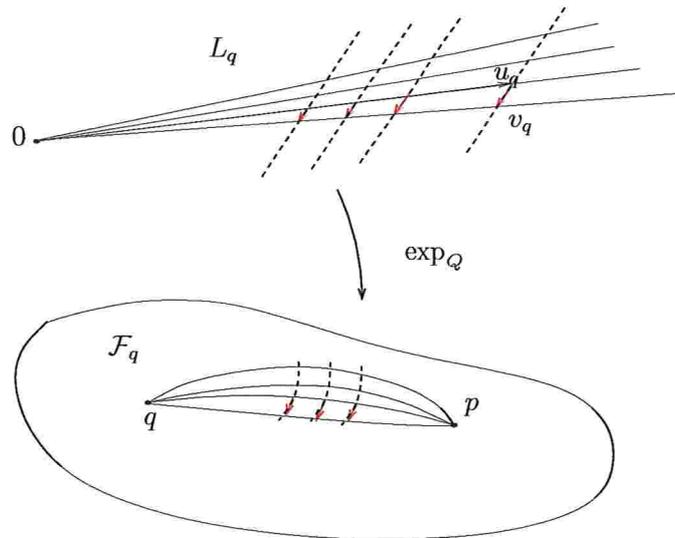


Figura 4.1: Zeros da derivada da exponencial e campos de Jacobi

Mas a condição de que a conexão ∇ tenha torção e curvatura zero exclui a existência de pontos conjugados ao longo de qualquer geodésica, pois a equação diferencial para

um campo de Jacobi, escrita em componentes relativas a um referencial autoparalelo ao longo de tal geodésica, se reduz a uma equação do tipo $d^2X^i/ds^2 = 0$, cujas soluções têm exatamente um zero - nem mais, nem menos. \square

Em particular, segue que a exponencial (4.11) providencia um difeomorfismo

$$\exp_Q : U_0 \longrightarrow U \quad (4.16)$$

de uma vizinhança convexa U_0 de Q no fibrado vetorial $L|_Q$ sobre uma vizinhança tubular U de Q em P .¹³ Por construção, este difeomorfismo é afim, pois a conexão linear parcial ∇ em L ao longo de L da qual partimos coincide com a conexão linear parcial ∇ em L ao longo de L que construímos nos Exemplos 1.5 e 4.1, identificando L com o fibrado vertical VE e o pull-back π^*E da sua restrição $E = L|_Q$ a Q .

Na hipótese de completude geodésica, podemos provar uma afirmação ainda mais forte:

Lema 4 *Nas hipóteses enunciadas anteriormente, e se P for geodesicamente completa em relação a ∇ , a exponencial (4.11) define um recobrimento*

$$\exp_Q : L|_Q \longrightarrow P \quad (4.17)$$

que para cada ponto q de Q induz um recobrimento universal

$$\exp_q : L_q \longrightarrow \mathcal{F}_q \quad (4.18)$$

da folha \mathcal{F}_q pela fibra L_q . Em particular, se todas as folhas \mathcal{F}_q forem simplesmente conexas, a exponencial estabelece um difeomorfismo afim global entre $L|_Q$ e P .

Demonstração: Pela hipótese de completude geodésica, a exponencial \exp_Q tem por domínio o fibrado vetorial $L|_Q$ inteiro; além disso, a hipótese de que a conexão ∇ tenha torção e curvatura zero implica que, para todo ponto q de Q , sua restrição \exp_q à fibra L_q é uma aplicação afim do espaço vetorial L_q , munido da conexão linear trivial, na folha \mathcal{F}_q , munida da conexão linear $\nabla_q = \nabla|_{\mathcal{F}_q}$. (Para uma afirmação muito mais geral, veja, por exemplo, [23, Chapter 6, Theorem 7.1, p. 257].) Portanto, o lema é consequência de um teorema geral, enunciado em maiores detalhes e provado no Apêndice B, segundo o qual toda aplicação afim de uma variedade afim conexa, simplesmente conexa e geodesicamente completa M em uma variedade afim conexa M' , se for um difeomorfismo local, já é um recobrimento; em particular, ele é automaticamente sobrejetor (e M' é automaticamente geodesicamente completa). \square

¹³Uma vizinhança da seção zero de um fibrado vetorial é chamada convexa se a sua intersecção com cada fibra for uma vizinhança convexa da origem nessa fibra.

Uma outra ferramenta da qual precisaremos a seguir diz respeito a formas diferenciais em variedades com folheação:

Proposição 4.1 *Seja P uma variedade munida de uma folheação simples \mathcal{F} com distribuição involutiva tangente L (veja a equação (4.1)), cujas folhas são os conjuntos de nível de uma submersão sobrejetora $\pi : P \rightarrow Q$ ($Q = P/\mathcal{F}$), e seja α uma k -forma sobre P . Então α é o pull-back de uma k -forma α_Q fechada sobre a variedade quociente Q pela projeção π , $\alpha = \pi^* \alpha_Q$, se e somente se, para todo campo vetorial X ao longo de \mathcal{F} , $X \in \Gamma(L)$, vale $i_X \alpha = 0$ (condição de horizontalidade) e $\mathbb{L}_X \alpha = 0$ (condição de constância ao longo das folhas).*

Demonstração: Primeiro, observamos que para α ser o pull-back de uma k -forma α_Q sobre a variedade quociente Q , devemos ter

$$\begin{aligned} \alpha(p)(u_1, \dots, u_k) &= \alpha_Q(\pi(p))(T_p \pi \cdot u_1, \dots, T_p \pi \cdot u_k) \\ \text{para } p \in P, u_1, \dots, u_k \in T_p P \end{aligned} \quad (4.19)$$

Então é claro que se qualquer um dos vetores u_1, \dots, u_k pertencer a L_p , essa expressão se anula; assim, para todo $X \in \Gamma(L)$, vale $i_X \alpha = 0$ e portanto também

$$\mathbb{L}_X \alpha = (di_X + i_X d) \pi^* \alpha_Q = i_X \pi^*(d\alpha_Q) = 0.$$

Reciprocamente, é claro que se quisermos usar a equação (4.19) para definir α_Q em termos de α , precisamos garantir (i) que, para $p \in P$ fixo, a expressão do lado esquerdo desta equação não depende dos representantes $u_i \in T_p P$ dos vetores $T_p \pi \cdot u_i \in T_{\pi(p)} Q$, o que é garantido pela condição de horizontalidade $i_X \alpha = 0$ para $X \in \Gamma(L)$, e (ii) que a expressão do lado esquerdo desta equação também não depende do representante $p \in P$ do ponto $\pi(p) \in Q$: isso segue da condição de constância ao longo das folhas $\mathbb{L}_X \alpha = 0$ para $X \in \Gamma(L)$, da seguinte maneira: Sejam p e p' dois pontos de P tais que $\pi(p) = \pi(p')$: isso significa que pertencem à mesma folha F , e portanto existe uma curva γ inteiramente contida na folha F com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = p'$; em particular, vale $\dot{\gamma}(s) \in L_{\gamma(s)}$ para $0 \leq s \leq 1$, e podemos ainda supor que $\dot{\gamma}(s) > 0$ para $0 \leq s \leq 1$. Usando uma partição $(s_\alpha)_{\alpha=1, \dots, r}$ do intervalo $[0, 1]$ ($0 = s_0 < s_1 < \dots < s_r < s_{r+1} = 1$) e uma família finita $(U_\alpha)_{\alpha=0, \dots, r}$ de domínios U_α de cartas de P em que π é representada pela projeção sobre algum subespaço, em conjunto com alguma função corte de suporte compacto sobre P que vale 1 em uma vizinhança aberta da imagem da curva γ , torna-se evidente que podemos encontrar um campo vetorial X sobre P ao longo de \mathcal{F} , $X \in \Gamma(L)$, que estende $\dot{\gamma}$, i.e., tal que $\dot{\gamma}(s) = X(\gamma(s))$ para $0 \leq s \leq 1$. Mas isso significa que γ é curva integral de X e, mais do que isso, que perto de $p = \gamma(0)$, o fluxo F_X de X é definido pelo menos até $s = 1$, de modo que existem uma vizinhança aberta U_0 de $p = \gamma(0)$ e uma vizinhança aberta U_1 de

$p' = \gamma(1)$ tais que o fluxo por tempo 1 estabelece um difeomorfismo $F_X(1, \cdot) : U_0 \rightarrow U_1$ que preserva as folhas de \mathcal{F} , já que X é tangente a \mathcal{F} , ou seja, temos $\pi|_{U_1} = F_X(1, \cdot) \circ \pi|_{U_0}$. Agora, $\mathbb{L}_X \alpha = 0$ implica $F_X(1, \cdot)^*(\alpha|_{U_1}) = \alpha|_{U_0}$, de modo que usando $p' = F_X(1, p)$ e pondo $u'_i = T_p F_X(1, \cdot) \cdot u_i$ ($1 \leq i \leq k$), obtemos $T_{p'} \pi \cdot u'_i = T_p \pi \cdot u_i$ ($1 \leq i \leq k$) e

$$\begin{aligned} \alpha_{p'}(u'_1, \dots, u'_k) &= \alpha_{F_X(1, p)}(T_p F_X(1, \cdot) \cdot u_1, \dots, T_p F_X(1, \cdot) \cdot u_k) \\ &= (F_X(1, \cdot)^*(\alpha|_{U_1}))_p(u_1, \dots, u_k) \\ &= \alpha_p(u_1, \dots, u_k). \end{aligned}$$

□

4.2 Variedades simpléticas com folheação lagrangiana simples

Nesta seção, passamos a considerar o caso em que P é uma variedade simplética, com forma simplética ω , munida de uma **folheação lagrangiana simples**. Dizemos que uma folheação \mathcal{F} de P , com distribuição involutiva tangente L (veja a equação (4.1)), é lagrangiana se para qualquer ponto p de P , L_p é subespaço lagrangiano de $T_p P$, em relação a ω_p . Folheações lagrangianas podem existir ou não, e elas podem ser simples ou não: um exemplo clássico de uma variedade simplética que não admite nenhuma folheação lagrangiana é a esfera S^2 (“no-hair theorem”), enquanto que um exemplo clássico de uma folheação lagrangiana que é regular mas não simples é o fluxo irracional no toro \mathbb{T}^2 (em ambos os casos, a forma simplética é a forma padrão de volume). No caso de uma folheação lagrangiana simples, o critério de Godement nos informa que o quociente P/\mathcal{F} admite uma única estrutura de variedade tal que a projeção canônica de P sobre P/\mathcal{F} é uma submersão. A seguir, denotaremos P/\mathcal{F} por Q e a projeção canônica de P sobre Q por π . Note que Q é uma variedade quociente de P , mas nada garante “a priori” que ela possa ser realizada como subvariedade de P ; assim, a existência de um mergulho de Q em P como subvariedade fechada constitui uma condição adicional que deve ser imposta separadamente ou então deduzida de outras hipóteses adicionais.¹⁴ De qualquer modo, a hipótese de que a folheação \mathcal{F} seja lagrangiana providencia uma conexão linear parcial

¹⁴Em geral, pode haver obstruções topológicas à existência de um mergulho de Q em P . Tais obstruções devem ser de natureza global, uma vez que o teorema da submersão (ou da fatia local) afirma que localmente, tal mergulho sempre existe. Como exemplo de um conjunto de condições adicionais que garante sua existência global, mencionamos as hipóteses do terceiro item do Teorema 4.2 logo abaixo, de que as folhas sejam geodesicamente completas em relação à conexão de Bott e simplesmente conexas, pois essas garantem que P é um fibrado afim sobre Q , e fibrados afins sempre admitem seções globais.

canônica em L ao longo de L com torção e curvatura zero, a saber, a conexão de Bott ∇^B introduzida anteriormente: isso implica que as folhas de \mathcal{F} são variedades afins planas e constitui o ingrediente crucial na demonstração do seguinte

Teorema 4.2 *Seja P uma variedade simplética, com forma simplética ω , munida de uma distribuição lagrangiana involutiva L . Suponha que a folheação correspondente \mathcal{F} seja simples, com folhas que são os conjuntos de nível de uma submersão sobrejetora $\pi : P \rightarrow Q$, e suponha ainda que a variedade quociente $Q = P/\mathcal{F}$ possa ser realizada como subvariedade fechada e mergulhada de P . Nestas condições, considere o isomorfismo musical $\omega^\sharp : L|_Q^\perp \rightarrow L|_Q$ (veja a equação (1.6)), em conjunto com o isomorfismo $L|_Q^\perp \cong T^*Q$ (que decorre da decomposição direta (4.9)), e combinado com a exponencial \exp_Q definida como na Seção 4.1. Então vale o seguinte:*

- *A composição destes isomorfismos proporciona um difeomorfismo $\phi : V \rightarrow U$ de uma vizinhança tubular U de Q em P com uma vizinhança convexa V da seção zero do fibrado cotangente T^*Q de Q .*
- *Se as folhas de \mathcal{F} forem geodesicamente completas em relação à conexão de Bott, a composição destes isomorfismos proporciona um recobrimento de P pelo fibrado cotangente de Q , $\phi : T^*Q \rightarrow P$.*
- *Se as folhas de \mathcal{F} forem geodesicamente completas em relação à conexão de Bott e simplesmente conexas, a composição destes isomorfismos proporciona um difeomorfismo de P com o fibrado cotangente de Q , $\phi : T^*Q \rightarrow P$.*

Ademais, ϕ preserva fibras, mapcando T_q^*Q sobre \mathcal{F}_q (ou $V \cap T_q^*Q$ sobre $U \cap \mathcal{F}_q$, no primeiro caso), e definindo

$$\theta = -i_\Sigma \phi^* \omega, \quad (4.20)$$

temos que $\phi^* \omega + d\theta$ é o pull-back de uma 2-forma fechada ω_Q sobre Q pela projeção τ de T^*Q sobre Q :

$$\phi^* \omega + d\theta = \tau^* \omega_Q. \quad (4.21)$$

Finalmente, a classe de cohomologia $[\omega_Q] \in H^2(Q)$ de ω_Q não depende do mergulho empregado e assim constitui uma invariante da folheação \mathcal{F} .

Observação 4.1 A última afirmação garante que ϕ é “quase” um symplectomorfismo: $\phi^* \omega$ difere da forma simplética padrão do fibrado cotangente apenas pelo pull-back de uma 2-forma fechada na base. Se Q for subvariedade lagrangiana de P , então $\omega_Q = 0$ e ϕ será symplectomorfismo. Neste caso especial, a primeira afirmação do teorema acima, que (no que diz respeito à estrutura de P ao longo das folhas da folheação \mathcal{F}) é de natureza local,

é conhecida como o teorema da vizinhança tubular simplética de Weinstein, estabelecido em [30]. A terceira afirmação foi provada em [27]. Aqui, além de também estabelecer a segunda afirmação, damos uma demonstração mais direta de todas, evitando o uso de ingredientes adicionais e artificiais (tais como a métrica riemanniana auxiliar empregada em [27]), o que nos permitirá uma extensão direta do teorema ao caso polilagrangiano e multilagrangiano.

Demonstração: Tendo em vista os Lemas 3 e 4, só falta provar a parte final, contida nas equações (4.20) e (4.21). Para simplificar a apresentação, consideramos os casos da primeira e da terceira afirmação, onde ϕ é um difeomorfismo e portanto pode ser usado para identificar V com U e T^*Q com P , respectivamente. (O caso da segunda afirmação, onde ϕ é apenas um difeomorfismo local, pode ser tratado de maneira análoga, levando em conta que neste caso, o campo de Euler Σ pode deixar de ser definido globalmente sobre P , mas ele pode ser substituído por uma família de campos de Euler definidos localmente sobre P , o que leva a uma família de fórmulas locais do tipo das equações (4.20) e (4.21) sobre P .) Sendo assim, suprimimos a referência ao pull-back por ϕ . O argumento será baseado na Proposição 4.1, conforme a qual basta mostrar que para todo campo vetorial vertical X , vale $i_X(\omega + d\theta) = 0$ (condição de horizontalidade) e $\mathbb{L}_X(\omega + d\theta) = 0$ (condição de constância ao longo das folhas). Como ω é fechada, a segunda destas condições segue diretamente da primeira:

$$\mathbb{L}_X(\omega + d\theta) = (di_X + i_X d)(\omega + d\theta) = d(i_X(\omega + d\theta)) = 0 .$$

Para provar a primeira, devemos mostrar que para todo campo vetorial X ao longo de \mathcal{F} e todo campo vetorial Y , vale $(\omega + d\theta)(X, Y) = 0$, sendo que devido ao Lema 2, podemos supor, sem perda de generalidade, que Y seja projetável. Usando as definições da conexão de Bott e do campo de Euler, temos

$$\omega(X, Y) = \omega(\nabla_X^B \Sigma, Y) = X \cdot \omega(\Sigma, Y) - \omega(\Sigma, [X, Y]) .$$

Como X é vertical e Y é projetável, $[X, Y]$ também é vertical (veja a equação (4.5)) e como L é lagrangiano, o segundo termo se anula, de modo que obtemos

$$\omega(X, Y) = X \cdot \omega(\Sigma, Y) .$$

Usando a definição de θ , equação (4.20), em conjunto com o fato de que essa implica que θ se anula sobre campos vetoriais verticais, vem

$$\begin{aligned} (\omega + d\theta)(X, Y) &= \omega(X, Y) + X \cdot \theta(Y) - Y \cdot \theta(X) - \theta([X, Y]) \\ &= X \cdot \omega(\Sigma, Y) + X \cdot \theta(Y) - Y \cdot \theta(X) - \theta([X, Y]) \\ &= -X \cdot \theta(Y) + X \cdot \theta(Y) - Y \cdot \theta(X) - \theta([X, Y]) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Finalmente, temos que abordar a questão da unicidade, ou melhor, do grau de falta de unicidade, da decomposição (4.21), gerada pelo fato de que existem diferentes campos de Euler, correspondendo a diferentes escolhas do mergulho da variedade quociente P/\mathcal{F} em P . Sejam então Σ_1 e Σ_2 dois campos de Euler, e definamos $\theta_1 = -i_{\Sigma_1}\omega$ e $\theta_2 = -i_{\Sigma_2}\omega$. Então para todo campo vetorial vertical X , vale

$$i_X(\theta_1 - \theta_2) = \omega(X, \Sigma_2 - \Sigma_1) = 0$$

pois L é lagrangiano, e, para todo campo vetorial projetável Y ,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_X(\theta_1 - \theta_2)(Y) &= X \cdot ((\theta_1 - \theta_2)(Y)) - (\theta_1 - \theta_2)([X, Y]) \\ &= X \cdot \omega(\Sigma_2 - \Sigma_1, Y) - \omega(\Sigma_2 - \Sigma_1, [X, Y]) \\ &= \omega(\nabla_X^B(\Sigma_2 - \Sigma_1), Y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde usamos a definição da conexão de Bott e o fato de que $\Sigma_2 - \Sigma_1$ é covariantemente constante. Conforme a Proposição 4.1, segue que existe uma 1-forma θ_Q sobre Q tal que $\theta_1 - \theta_2 = \pi^*\theta_Q$, implicando

$$\omega + d\theta_1 = \pi^*\omega_Q^{(1)}, \quad \omega + d\theta_2 = \pi^*\omega_Q^{(2)},$$

com

$$\theta_1 - \theta_2 = \pi^*\theta_Q, \quad \omega_Q^{(1)} - \omega_Q^{(2)} = d\theta_Q.$$

Em particular, a classe de cohomologia de ω_Q independe da escolha do mergulho. \square

4.3 Estrutura de fibrados polilagrangianos e multilagrangianos

De forma análoga ao caso simplético, podemos agora formular o nosso teorema principal sobre a estrutura de fibrados polilagrangianos e multilagrangianos, na medida em que estes admitem uma folheação lagrangiana simples canônica. O ingrediente adicional em relação ao caso simplético provém do fato de que a variedade P agora é o espaço total de um fibrado sobre uma variedade base M , cuja projeção denotaremos por $\pi : P \rightarrow M$, como sempre, e que a distribuição em questão é vertical. Grosso modo, isso implica que a subvariedade de P representando o espaço quociente P/\mathcal{F} , que agora denotaremos por E , deve ser o espaço total de um fibrado sobre M , cuja projeção denotaremos por $\pi_E : E \rightarrow M$, como nos Exemplos 3.1 e 3.2. Assim, a condição de que E seja uma subvariedade de P

complementar as folhas de \mathcal{F} e, ao mesmo tempo, às fibras da projeção π , nos leva a substituir a equação (4.9) pela condição de que, para todo ponto e de E , vale

$$T_e P = T_e E \oplus L_e \quad \text{e} \quad V_e P = V_e E \oplus L_e, \quad (4.22)$$

onde $V_e P$ denota o espaço vertical em relação à projeção π e $V_e E$ denota o espaço vertical em relação à projeção π_E .

No caso polilagrangiano, temos

Teorema 4.3 *Seja P um fibrado polilagrangiano sobre uma variedade base M com projeção $\pi : P \rightarrow M$, forma polilagrangiana $\hat{\omega}$ não-degenerada e distribuição polilagrangiana involutiva L . Suponha que a folheação correspondente \mathcal{F} seja simples, com folhas que são os conjuntos de nível de uma submersão sobrejetora $\pi_P : P \rightarrow E$, de modo que π induz uma submersão sobrejetora $\pi_E : E \rightarrow M$ tal que $\pi = \pi_E \circ \pi_P$, e suponha ainda que a variedade quociente $E = P/\mathcal{F}$ (a) possa ser realizada como subvariedade fechada e mergulhada de P e (b) seja espaço total de um fibrado sobre M em relação a π_E . Nestas condições, considere o isomorfismo musical $\omega^\sharp : \bigwedge^k L|_E^\perp \otimes \pi_E^*(\hat{T}) \rightarrow L|_E$ (veja a equação (3.6)), em conjunto com o isomorfismo $L|_E^\perp \cong V^*E$ (que decorre da decomposição direta (4.22)), e combinado com a exponencial \exp_E definida como na Seção 4.1. Então vale o seguinte:*

- A composição destes isomorfismos proporciona um difeomorfismo $\phi : V \rightarrow U$ de uma vizinhança tubular U de E em P com uma vizinhança convexa V da seção zero do fibrado vetorial modelo $\bigwedge^k V^*E \otimes \pi_E^*(\hat{T})$ do Exemplo 3.1.
- Se as folhas de \mathcal{F} forem geodesicamente completas em relação à conexão de Bott, a composição destes isomorfismos proporciona um recobrimento de P pelo fibrado vetorial modelo, $\phi : \bigwedge^k V^*E \otimes \pi_E^*(\hat{T}) \rightarrow P$.
- Se as folhas de \mathcal{F} forem geodesicamente completas em relação à conexão de Bott e simplesmente conexas, a composição destes isomorfismos proporciona um difeomorfismo de P com o fibrado vetorial modelo, $\phi : \bigwedge^k V^*E \otimes \pi_E^*(\hat{T}) \rightarrow P$.

Ademais, ϕ preserva fibras, mapeando $\bigwedge^k V_e^*E \otimes \hat{T}_{\pi_E(e)}$ sobre \mathcal{F}_e (ou $V \cap \bigwedge^k V_e^*E \otimes \hat{T}_{\pi_E(e)}$ sobre $U \cap \mathcal{F}_e$, no primeiro caso), e definindo

$$\hat{\theta} = -i_\Sigma \phi^* \hat{\omega}, \quad (4.23)$$

temos que $\phi^* \hat{\omega} + d_V \hat{\theta}$ é o pull-back de uma k -forma verticalmente fechada $\hat{\omega}_E$ sobre E pela projeção π^k de $\bigwedge^k V^*E \otimes \pi^*(\hat{T})$ sobre E :

$$\phi^* \hat{\omega} + d_V \hat{\theta} = (\pi^k)^* \hat{\omega}_E. \quad (4.24)$$

Finalmente, a classe de cohomologia $[\hat{\omega}_E] \in H^k(E)$ de $\hat{\omega}_E$ não depende do mergulho empregado e assim constitui uma invariante da folheação \mathcal{F} .

Demonstração: A prova é completamente análoga à prova do Teorema 4.2 para variedades simpléticas, sendo que os cálculos para verificar a fórmula (4.23) são executados com um campo vetorial X ao longo de \mathcal{F} e k campos vetoriais projetáveis Y_1, \dots, Y_k , todos verticais em relação à projeção sobre M . \square

Passando ao caso multilagrangiano, temos

Teorema 4.4 *Seja P um fibrado multilagrangiano sobre uma variedade base M , com projeção $\pi : P \rightarrow M$, forma multilagrangiana ω não-degenerada e distribuição multilagrangiana involutiva L . Suponha que a folheação correspondente \mathcal{F} seja simples, com folhas que são os conjuntos de nível de uma submersão sobrejetora $\pi_P : P \rightarrow E$, de modo que π induz uma submersão sobrejetora $\pi_E : E \rightarrow M$ tal que $\pi = \pi_E \circ \pi_P$, e suponha ainda que a variedade quociente $E = P/\mathcal{F}$ (a) possa ser realizada como subvariedade fechada e mergulhada de P e (b) seja espaço total de um fibrado sobre M em relação a π_E . Nestas condições, considere o isomorfismo musical $\omega^\sharp : \bigwedge_{r-1}^k L|_E^\perp \rightarrow L|_E$ (veja a equação (3.23)), em conjunto com o isomorfismo $L|_E^\perp \cong T^*E$ (que decorre da decomposição direta (4.22)), e combinado com a exponencial \exp_E definida como na Seção 4.1. Então vale o seguinte:*

- A composição destes isomorfismos proporciona um difeomorfismo $\phi : V \rightarrow U$ de uma vizinhança tubular U de E em P com uma vizinhança convexa V da seção zero do fibrado vetorial modelo $\bigwedge_{r-1}^k T^*E$ do Exemplo 3.2.
- Se as folhas de \mathcal{F} forem geodesicamente completas em relação à conexão de Bott, a composição destes isomorfismos proporciona um recobrimento de P pelo fibrado vetorial modelo, $\phi : \bigwedge_{r-1}^k T^*E \rightarrow P$.
- Se as folhas de \mathcal{F} forem geodesicamente completas em relação à conexão de Bott e simplesmente conexas, a composição destes isomorfismos proporciona um difeomorfismo de P com o fibrado vetorial modelo, $\phi : \bigwedge_{r-1}^k T^*E \rightarrow P$.

Ademais, ϕ preserva fibras, mapeando $\bigwedge_{r-1}^k T_e^*E$ sobre \mathcal{F}_e (ou $V \cap \bigwedge_{r-1}^k T_e^*E$ sobre $U \cap \mathcal{F}_e$, no primeiro caso), e definindo

$$\theta = -i_\Sigma \phi^* \omega, \quad (4.25)$$

temos que $\phi^* \omega + d\theta$ é o pull-back de uma k -forma fechada ω_E sobre E pela projeção π_{r-1}^k de $\bigwedge_{r-1}^k T^*E$ sobre E :

$$\phi^* \omega + d\theta = (\pi_{r-1}^k)^* \omega_E. \quad (4.26)$$

Finalmente, a classe de cohomologia $[\omega_E] \in H^k(E)$ de ω_E não depende do mergulho empregado e assim constitui uma invariante da folheação \mathcal{F} .

Demonstração: A prova é praticamente idêntica à do Teorema 4.3, eliminando-se apenas a condição de verticalidade dos campos vetoriais projetáveis em relação à projeção sobre M . □

Fórmulas auxiliares

Nesta tese usamos repetidamente os seguintes dois fatos elementares.

Lema 5 *Sejam M uma variedade e L uma distribuição sobre M . Então se existe uma conexão linear sem torção ∇ sobre M preservando L , L é involutiva.*

Demonstração: O resultado segue diretamente da definição do tensor de torção de ∇ ,

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

pois esta implica que se ∇ é sem torção e preserva L , então quando dois campos vetoriais X e Y são ao longo de L , segue que seu colchete de Lie $[X, Y]$ é outro campo vetorial ao longo de L . \square

Lema 6 *Sejam M uma variedade e ∇ uma conexão linear sobre M com tensor de torção T . Então para qualquer forma diferencial α de grau r e $r + 1$ campos vetoriais X_0, \dots, X_r sobre M , temos*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^r (-1)^i (\nabla_{X_i} \alpha)(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &= d\alpha(X_0, \dots, X_r) + \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \alpha(T(X_i, X_j), X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r). \end{aligned} \tag{A.1}$$

De modo semelhante, seja P um fibrado sobre uma variedade M , com fibrado vertical VP , e seja ∇ uma conexão linear parcial em VP ao longo de VP com tensor de torção T . Então para qualquer forma diferencial vertical α de grau r e $r+1$ campos vetoriais verticais

X_0, \dots, X_r sobre P , temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^r (-1)^i (\nabla_{X_i} \alpha)(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &= d_V \alpha(X_0, \dots, X_r) + \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \alpha(T(X_i, X_j), X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Demonstração: Ambos os resultados seguem do seguinte cálculo elementar:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^r (-1)^i (\nabla_{X_i} \alpha)(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &\quad - \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^i \alpha(X_0, \dots, \nabla_{X_i} X_j, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &\quad - \sum_{i=0}^r \sum_{j=i+1}^r (-1)^i \alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \nabla_{X_i} X_j, \dots, X_r) \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i, X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r) \\ &= d\alpha(X_0, \dots, X_r) \quad \text{ou} \quad d_V \alpha(X_0, \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r) \end{aligned}$$

□

Variedades e aplicações afins

Recordamos alguns conceitos e fatos sobre variedades afins e aplicações afins entre elas, seguindo [23].

Definição B.1 *Uma variedade afim é uma variedade diferenciável munida de uma conexão linear ∇ . Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow M'$ entre variedades afins é chamada uma **aplicação afim** se sua aplicação tangente $Tf : TM \rightarrow TM'$ preserva o transporte paralelo, i.e., para qualquer curva γ em M com curva imagem $\gamma' = f \circ \gamma$ em M' , o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow{T_x f} & T_{f(x)} M' \\ U_{\gamma}^{\nabla(x,y)} \downarrow & & \downarrow U_{\gamma'}^{\nabla'(f(x),f(y))} \\ T_y M & \xrightarrow{T_y f} & T_{f(y)} M' \end{array}$$

(onde $x = \gamma(0)$, $y = \gamma(1)$, digamos, e portanto $f(x) = \gamma'(0)$, $f(y) = \gamma'(1)$) comuta.

Obviamente, uma aplicação afim mapea geodésicas em geodésicas e portanto comuta com a aplicação exponencial, no sentido de que

$$f(\exp_x(u)) = \exp_{f(x)}(T_x f \cdot u) \quad \text{para } x \in M, u \in \text{Dom}(\exp_x) \subset T_x M$$

(veja [23, Chapter 6, Proposition 1.1, p. 225]).

Uma propriedade importante de variedades riemannianas que se estende a variedades afins é a existência de bolas geodésicas convexas em torno de cada ponto. Primeiro, dizemos que uma vizinhança aberta U_x de um ponto x em uma variedade afim M é uma **vizinhança normal** de x se existe uma vizinhança aberta U_x^0 da origem em $T_x M$ contida no domínio $\text{Dom}(\exp_x)$ da exponencial \exp_x tal que esta estabelece um difeomorfismo

$\exp_x : U_x^0 \rightarrow U_x$. Segundo, definimos uma **bola geodésica** em torno de um ponto x de M como sendo uma vizinhança normal B_x de x obtida como imagem inversa de uma bola aberta em $T_x M$ em torno da origem, de raio ρ , digamos, com ρ suficientemente pequeno, em relação a algum produto escalar em $T_x M$, que pode ser escolhido de forma arbitrária. Prova-se [23, Chapter 3, Theorem 8.7, p. 149] que bolas geodésicas B_x de raio ρ suficientemente pequeno tem duas propriedades adicionais de grande utilidade: (a) B_x é geodesicamente convexa (i.e., quaisquer dois pontos de B_x podem ser conectados por uma geodésica inteiramente contida em B_x) e (b) B_x é uma vizinhança normal não apenas de x mas de qualquer um dos seus pontos. A seguir, qualquer tal bola será chamada de **bola geodésica convexa**.

Teorema B.1 *Sejam M e M' variedades afins conexas e f uma aplicação afim de M em M' . Suponha que M é simplesmente conexa e geodesicamente completa e que f é um difeomorfismo local. Então f é um recobrimento (em particular, é sobrejetora), realizando M como recobrimento universal de M' , e M' é geodesicamente completa.*

Observação B.1 A “versão riemanniana” deste teorema (onde se supõe que M e M' são variedades riemannianas e que f é uma isometria) é bem conhecida em geometria riemanniana e pode ser encontrada em muitos livros texto, mas as demonstrações dadas costumam fazer uso do teorema de Hopf-Rinow e portanto não se estendem à presente situação, na qual não dispomos de métricas (no sentido topológico). Uma abordagem alternativa encontra-se em [22, Chapter 10, Theorem 18, p. 167], e a demonstração apresentada a seguir é uma adaptação desta ao caso afim.

Demonstração: Começamos por mostrar que f é sobrejetora. Considerando que M' é conexa e f é um difeomorfismo local, de modo que sua imagem $f(M)$ é necessariamente uma subvariedade aberta de M' , basta mostra que ela também é fechada. Seja então $x' \in M'$ um ponto no fecho de $f(M)$ e seja B' uma bola geodésica convexa em M' em torno de x' . Então existem um ponto $y' \in B' \cap f(M)$ e um vetor tangente $u' \in T_{y'} M'$ tal que $\exp_{y'}(u') = x'$ (tal vetor u' existe devido à condição de que B' seja vizinhança normal de y'). Escolha $y \in M$ tal que $f(y) = y'$ e, usando que f é difeomorfismo local, $u \in T_y M$ tal que $T_y f \cdot u = u'$. Defina $x = \exp_y(u)$. Então vale $f(x) = x'$. O argumento mostra também que M' é geodesicamente completa. Finalmente, para mostrar que f é recobrimento, note que a imagem inversa $f^{-1}(x')$ de um ponto $x' \in M'$ sob o difeomorfismo local f é um subconjunto discreto de M e que sempre podemos escolher um produto escalar em $T_x M$ e, para todo $x \in f^{-1}(x')$, um produto escalar em $T_x M$ tal que $T_x f : T_x M \rightarrow T_{x'} M'$ é isométrica: então a imagem inversa, sob f , de uma bola geodésica convexa em torno de x' , de raio suficientemente pequeno, será a união disjunta, parametrizada por $x \in f^{-1}(x')$, das bolas geodésicas convexas em torno de x , do mesmo raio. \square

Bibliografía

- [1] R. Abraham & J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd edition, Benjamin-Cummings, Reading 1978.
- [2] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz & D. Sternheimer, *Quantum Mechanics as a Deformation of Classical Mechanics*, Lett. Math. Phys. **1** (1977) 521-530; *Deformation Theory and Quantization*, Part I, Ann. Phys. **111** (1978) 61-110.
- [3] P. Bieliavsky, M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley & L. Schwachhofer, *Symplectic Connections*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **3** (2006) 375-420.
- [4] J.F. Cariñena, M. Crampin & L.A. Ibort: *On the Multisymplectic Formalism for First Order Field Theories*, Diff. Geom. App. **1** (1991) 345-374.
- [5] M. De Wilde & P.B.A. Lecomte, *Star-Products on Cotangent Bundle*, Lett. Math. Phys. **7** (1983) 235-241.
- [6] M. De Wilde & P.B.A. Lecomte, *Existence of Star-Products on Exact Symplectic Manifolds*, Ann. Inst. Four. **35** (1985) 117-143.
- [7] M. De Wilde & P.B.A. Lecomte, *Existence of Star-Products and of Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of Arbitrary Symplectic Manifolds*, Lett. Math. Phys. **7** (1983) 487-496.
- [8] J. Dittmann & G. Rudolph, *Canonical Realizations of Lie Algebras Associated with Foliated Coadjoint Orbits*, Ann. Inst. Henri Poincaré **43** (1985) 251-267.
- [9] F. Etayo & R. Santamaria, *The Canonical Connection of a Bi-Lagrangian Manifold*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 981-987.

-
- [10] F. Etayo, R. Santamaria & U.R. Trías, *The Geometry of a Bi-Lagrangian Manifold*, *Diff. Geom. Appl.* **24** (2006) 33-59.
- [11] B.V. Fedosov, *A Simple Geometric Construction of Deformation Quantization*, *J. Diff. Geom.* **40** (1994) 213-238.
- [12] M. Forger & L. Gomes, *Multisymplectic and Polysymplectic Structures on Fiber Bundles*, arXiv:0708.1586.
- [13] M. Forger & S. Romero, *Covariant Poisson Brackets in Geometric Field Theory*, *Commun. Math. Phys.* **256** (2005) 375-410.
- [14] I. Gelfand, V. Retakh & M. Shubin, *Fedosov Manifolds*, *Adv. Math.* **136** (1998) 104-140.
- [15] W.H. Greub, S. Halperin & R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol. 2, Academic Press, New York 1973.
- [16] M.J. Gotay, *A Multisymplectic Framework for Classical Field Theory and the Calculus of Variations I. Covariant Hamiltonian Formalism*, in: M. Francaviglia (ed.), *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years After Lagrange*, North Holland, Amsterdam 1991, pp. 203-235.
- [17] M.J. Gotay, J. Isenberg, J.E. Marsden & R. Montgomery, *Momentum Maps and Classical Relativistic Fields. Part I: Covariant Field Theory*, arXiv:physics/9801019.
- [18] V. Guillemin & S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, *Mathematical Surveys* **14**, American Mathematical Society, Providence 1977.
- [19] M. Hamermesh, *Group Theory*, Addison-Wesley, Reading 1962.
- [20] H. Heß, *Connections on Symplectic Manifolds and Geometric Quantization*, in: *Differential Geometric Methods in Theoretical Physics (Proceedings of the Conferences held at Aix-en-Provence, France, and Salamanca, Spain, 1979)*, pp. 153-166, eds: P.L. García, A. Pérez-Rendón & J.M. Souriau, *Lecture Notes in Mathematics* **836**, Springer, Berlin 1980.
- [21] H. Heß, *Symplectic Connections in Geometric Quantization and Factor Orderings*, PhD Thesis, Freie Universität Berlin, Berlin 1981.
- [22] N.J. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, Nostrand, Toronto 1965.
- [23] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Interscience, New York 1963.

-
- [24] M. Kontsevich, *Operads and Motives in Deformation Quantization*, Lett. Math. Phys. **48** (1999) 35-72.
- [25] I. Moerdijk & M. Mrčun, *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- [26] J. P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Springer 1992.
- [27] G. Thompson, *Symplectic Manifolds with Lagrangian Fibration*, Lett. Math. Phys. **12** (1986) 241-248.
- [28] I. Vaisman, *Basics of Lagrangian Foliations*, Publicacions Matemàtiques **33** (1989) 559-575.
- [29] J. Vey, *Cochet de Poisson sur une Variété Symplectique*, Comment. Math. Helv. **50** (1975) 421-454.
- [30] A. Weinstein, *Symplectic Manifolds and Their Lagrangian Submanifolds*, Adv. Math. **6** (1971) 329-346.
- [31] N. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Oxford University Press, Oxford 1991.