PALAVRAS INFINITAS SEM REPETIÇÕES

WAGNER TUNIS MARTINS

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR: PROF. DR. IMRE SIMON

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq, FINEP e IBM do Brasil.

SÃO PAULO, MAIO DE 1980

À Elígia,
Patrícia
e
Mariana

ÍNDICE

PRÓLOGO

A existência de palavras infinitas formadas por um número finito de símbolos e que não contém segmentos consecutivos idênticos é um fato estabelecido no início do século. Em 1906, A. Thue [T1] construiu palavras infinitas livres de quadrados sobre um alfabeto com três letras e palavras infinitas livres de cubos sobre um alfabeto com duas letras. Aparentemente, este trabalho de Thue permaneceu desconhecido por muito tempo pois, desde então foram feitas, independentemente, muitas outras construções de palavras infinitas com essas propriedades ou propriedades semelhantes. Nesse período também foram formulados diversos problemas correlatos. Nem todos foram resolvidos.

Apesar de algumas dessas palavras infinitas terem sido aplicadas em soluções de outros tipos de problemas como, por exemplo, o Problema de Burnside (ver [H] e [NA]),os estudos que levaram à construção da maioria delas foram motivados pelo próprio problema em si.

A principal técnica de construção de palavras infinitas livres de repetições é a que utiliza iteradas aplicações, a um mesmo símbolo, de um morfismo livre de repetições.

Este trabalho contém diversas construções de palavras infinitas livres de repetições, sendo que apenas duas delas não utilizam morfismos. Contém ainda problemas correlatos, como o de constuir palavras infinitas irredutíveis de fator t e palavras infinitas livres de repetições fracas. Ele é composto de três capítulos e um apêndice, que podem ser resumidos da seguinte forma:

O *Capítulo 1* é constituído de uma série de conceitos e resultados básicos que são utilizados nos dois capítulos seguintes. São apresentadas definições de alguns conceitos bem conhecidos, tais como: monóides, morfismos, alfabetos, palavras, etc.; alguns conceitos não tão conhecidos, como o de palavras infinitas e, também, conceitos novos, como o de fragmentos determinados por uma fatoração. Este capítulo faz com que este texto fique auto-contido, sendo possível a sua compreensão sem que se recorra a outras fontes.

No *Capítulo 2* aparecem algumas construções de palavras infinitas livres de quadrados sobre um alfabeto com três letras. Ele contém também uma caracterização (devida a Berstel [Be2]) de morfismos livres de quadrados e, ainda, uma caracterização de morfismos livre de k-ésimas potências, $k \geq 2$, no caso em que esses morfismos são k-uniformes. Não se conhece uma caracterização geral de morfismos livres de k-ésimas potencias.

É apresentado ainda um resumo do trabalho de Thue [T2] sobre palavras k-irredutíveis e um estudo de palavras irredutíveis de fator t, onde aparecem as construções de uma palavra infinita irredutível de fator $t = 1/3$ (devida a Dejean [Dj]) sobre um alfabeto com três letras e de uma palavra infinita irredutível de fator $t = 1$, sobre um alfabeto com quatro letras.

O *Capítulo 3* se refere unicamente a palavras infinitas livres de repetições fracas. Sobre esse assunto existe um número bem menor de estudos do que no caso do capítulo anterior. São apresentadas as três construções, conhecidas, de palavras infinitas livres de repetições fracas de ordem k, que são:

— $k = 2$, sobre um alfabeto com 25 letras (Evdokmov [Ev]);
— $k = 2$, sobre um alfabeto com 5 letras (Pleasants [P]) e
— $k = 5$, sobre um alfabeto com 2 letras (Justin [J]).

Vêm a seguir, dois resultados novos que são as construções de palavras infinitas livres de cubos fracos sobre um alfabeto com quatro letras e de palavras infinitas livres de repetições fracas de ordem 4 sobre um alfabeto com três letras.

O *Apêndice* se refere ao trabalho de Dekking [Dk], que só foi publicado em fins de 1979, época em que este trabalho já estava praticamente concluído. Alí são apresentadas as construções de palavras infinitas livres de repetições fracas de ordem 3 sobre um alfabeto com três letras e de ordem 4 sobre um alfabeto com duas letras.

Ao final vem a *Bibliografia* onde encontram-se, além das fontes dos principais resultados apresentados no texto,

referências a muitos artigos relacionados com o assunto — palavras infinitas livres de repetições — e cuja discussão não cabia ser feita no presente trabalho.

Quero agora deixar os meus agradecimentos às pessoas que contribuiram para a realização deste trabalho.

Ao Professor Imre Simon, pelo apoio e estímulo e pela dedicada orientação, que vêm desde o começo da minha pós-graduação no MAP.

À minha esposa, Eligia, pela paciência com que me acompanhou e me incentivou durante todo esse tempo e ainda, pela decisiva contribuição na revisão final do texto.

Aos amigos do MAP (professores e funcionários) pelo apoio que deles recebi durante a elaboração deste trabalho e em particular ao Anselmo, amigo desde a época em que comecei este trabalho e que passou muitas horas ouvindo minhas histórias sobre as *"abacas"*.

Ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira pelo paciente e esmerado trabalho de datilografia.

São Paulo, maio de 1980

W.T.M.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS BÁSICOS

1 - MONÓIDES LIVRES

Um *monóide* consiste de um conjunto M munido de uma operação binária associativa e que contém um elemento identidade $1 \in M$. Este elemento 1 também é chamado unidade de M. Usando a notação multiplicativa para a operação definida em M temos

$$(m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3)$$

e

$$1 m_1 = m_1 1 = m_1,$$

para todo $m_1, m_2, m_3 \in M$.

Se A e B são subconjuntos de um monóide M, definimos o produto AB de A por B da seguinte maneira:

$$AB = \{ab \in M \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Indutivamente também definimos $A^0 = 1$ e $A^{n+1} = A^n A$.

Um subconjunto T de um monóide M é um *submonóide* de M se $1 \in T$ e $T^2 \subset T$.

Se A é um subconjunto de um monóide M, o conjunto

$$A^* = 1 \cup A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n \cup \ldots$$

é chamado a *estrela* de A e é o menor submonóide de M que contém A.

Dado um conjunto não vazio Σ, definimos Σ^*, o *monóide livre* gerado por Σ, como o conjunto de todas as seqüências finitas

$$u = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \qquad n \geq 0,$$

de elementos de Σ. O inteiro n é o *comprimento* de u e é denotado por $|u|$.

Se $v = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ também é um elemento de Σ^*, o produto uv de u por v é definido por concatenação

$$uv = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$$

e temos $|uv| = |u| + |v|$.

É fácil ver que esse produto é associativo, logo Σ^* é um monóide tendo como unidade a seqüência vazia $1 = (\ )$.

Para todo $\sigma \in \Sigma$ vamos escrever σ ao invés de (σ) para denotar as seqüências de comprimento 1 de Σ^*. Do mesmo modo as seqüências $u = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $n \geq 1$, serão escritas $u = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$.

Devido a esta notação os elementos de Σ^* são chamados *palavras*, os elementos de Σ são chamados *letras* e Σ é chamado *alfabeto*.

O conjunto de todas as palavras não vazias de Σ^* é

$\Sigma^+ = \Sigma^* \backslash 1$, chamado *semigrupo livre* gerado por Σ.

Neste trabalho, Σ sempre indicará um alfabeto finito. Nos casos em que houver necessidade de se explicitar que a cardinalidade de Σ é um certo número n, escreveremos Σ_n ao invés de Σ.

Uma palavra $v \in \Sigma^*$ é um *segmento* de $w \in \Sigma^*$ se $w = fvg$ para f e $g \in \Sigma^*$. Se $f = 1$ então $w = vg$ e dizemos que v é um *segmento inicial* de w. Se $g = 1$ então $w = fv$ e dizemos que v é um *segmento final* de w.

Se $v \in \Sigma^*$ é um segmento de $w \in \Sigma^*$ tal que $w = fvg$ e se $fg \neq 1$, dizemos que v é um *segmento próprio* de w. Se $w = vg$, $g \neq 1$, dizemos que v é um *segmento inicial próprio* de w e se $w = fv$, $f \neq 1$, dizemos que v é um *segmento final próprio* de w. Chamamos *quasepotência* de w a todo segmento de w da forma fgf com $f \neq 1$.

Dado um subconjunto X de Σ^*, definimos *prefixo* de X (notação: $pref(X)$) como o conjunto dos segmentos iniciais das palavras em X e *sufixo* de X (notação: $suf(X)$) como o conjunto dos segmentos finais das palavras em X. Definimos ainda *prefixo próprio* de X (notação: $pref^-(X)$) como o conjunto dos segmentos iniciais próprios das palavras em X e *sufixo próprio* de X (notação: $suf^-(X)$) como o conjunto dos segmentos finais próprios das palavras em X.

Se $X \subseteq \Sigma^*$ é um conjunto tal que nenhuma palavra de X é segmento inicial próprio de outra palavra de X, isto é, $X \cap pref^-(X) = \emptyset$, dizemos que X é um *prefixo*. Se nenhuma palavra de X é segmento final próprio de outra palavra de X, isto é,

$X \cap suf^{-}(X) = \emptyset$ então X é um *sufixo*. Se X é um prefixo e um sufixo dizemos que X é um *biprefixo*. No caso de X ser um prefixo, um sufixo ou um biprefixo, é fácil verificar que X é um *código*, isto é, toda palavra de X* tem uma única fatoração em elementos de X.

Também verifica-se facilmente que se X é um biprefixo e se $w \in \Sigma^*$ tem uma fatoração $w = up$ com $u \in X^*$ e $p \in pref(X)$ então u e p são únicos. Do mesmo modo, se $w = sv$ com $s \in suf(X)$ e $v \in X^*$ então s e v também são únicos. Disto segue que se $X \subseteq \Sigma^*$ é um biprefixo e se $w = x_1 x_2 \ldots x_k$, $x_i \in X$, tem uma fatoração $w = uv$ onde u e $v \in \Sigma^*$, então u e v são da forma

$$u = u'e, \; u' \in X^*, \; e \in pref^{-}(X)$$

$$v = dv', \; v' \in X^*, \; d \in suf^{-}(X),$$

onde $ed \in 1 \cup X$ e u', v', e, d são únicos nestas condições. Os segmentos e e d são chamados, respectivamente, *fragmento esquerdo* e *fragmento direito* determinados pela fatoração uv em w.

Se $X \subseteq \Sigma^*$ é um biprefixo e se $w = x_1 x_2 \ldots x_n$, $x_i \in X$, tem uma fatoração $w = w_0 w_1 w_2 \ldots w_k w_{k+1}$ com $w_i \in \Sigma^*$, seja F a seqüência dos pares $(e_i, d_i) \in pref^{-}(X) \times suf^{-}(X)$, $0 \le i \le k$, tais que e_i e d_i são, respectivamente, os fragmentos esquerdo e direito determinados pela fatoração $u_i v_i$ em w, onde $u_i = w_0 w_1 \ldots w_i$ e $v_i = w_{i+1} \ldots w_{k+2}$. A seqüência F é chamada *seqüência dos fragmentos* determinados pela fatoração $w_0 w_1 \ldots w_{k+1}$ em w. Eventualmente podemos nos referir apenas à seqüência E dos fragmentos esquerdos ou à seqüência D dos fragmentos direitos determinados pela fatoração $w_0w_1\ldots w_{k+1}$ em w.

Dados dois números inteiros não negativos p e q vamos denotar por (p,q) o seu máximo divisor comum.

PROPOSIÇÃO 1 - Seja $X\subseteq\Sigma^*$ com $|x| = t > 1$ para todo $x\in X$. Se $w\in X^*$ tem uma fatoração $w = w_0w_1w_2\ldots w_{k+1}$, onde $w_i\in\Sigma^*$ e $|w_1| = |w_2| = \ldots = |w_k| = s \geq 1$ então os elementos da seqüência $E = \{e_i\}_{0\leq i\leq k}$, dos fragmentos esquerdos determinados pela fatoração $w_0w_1 \ldots w_{k+1}$ em w, satisfazem o seguinte:

a) $|e_i| \equiv (|e_{i-1}| + s)(mod\ t)$, $\qquad 1 \leq i \leq k$;

b) para todo $0 \leq i,j \leq k$,

$$|e_i| = |e_j| \text{ se e somente se } i \equiv j\left(mod\ \frac{t}{(t,s)}\right).$$

DEMONSTRAÇÃO - De $|x| = t$ para todo $x\in X$ segue que X é um biprefixo, logo podemos considerar, para todo $1 \leq i \leq k$, u_i e $v_i\in\Sigma^*$ tais que $w = u_iv_i$ onde $u_i = w_0w_1\ldots w_i$ e $v_i = w_{i+1}\ldots w_{k+1}$ e ainda $u_i = u_i'e_i$ onde $u_i'\in X^*$ e e_i é o fragmento esquerdo determinado pela fatoração u_iv_i em w. Nestas condições temos

$$u_i'e_i = w_0w_1\ldots w_i = u_{i-1}'e_{i-1}w_i$$

donde segue que $|u_i'| + |e_i| = |u_{i-1}'| + |e_{i-1}| + |w_i|$.

Como u_{i-1}' e $u_i'\in X^*$, $|x| = t$ para todo $x\in X$ e $|w_i| = s$, temos

$$|e_i| = |e_{i-1}| + s + qt \text{ para algum } q\in\mathbb{Z},$$

logo

$$|e_i| \equiv (|e_{i-1}| + s)(mod\ t), \qquad 1 \leq i \leq k.$$

Disto segue facilmente que

$$|\epsilon_i| = |e_j| \text{ sse } |e_0| + is \equiv (|e_0| + js)(mod\ t)$$
$$\text{sse } is \equiv js(mod\ t)$$
$$\text{sse } i \equiv j(mod\ \frac{t}{(t,s)}). \qquad \square$$

2 - MORFISMOS

Dados dois conjuntos A e B e uma função f: A $\longrightarrow$ B, vamos denotar por af a imagem do elemento $a \in$ A por f. Se X é um subconjunto de A vamos denotar por Xf o subconjunto de B formado pelas imagens dos elementos de X por f. Se f: A $\longrightarrow$ B e g: B $\longrightarrow$ C são funções, a sua composição fg: A $\longrightarrow$ C é definida por $a(fg) = (af)g$ para todo $a \in$ A, sendo desnecessário o uso de parênteses.

Se M e M' são monóides, um *morfismo* ϕ: M $\longrightarrow$ M' é uma função de M em M' tal que

(i) $(m_1 m_2)\phi = m_1\phi(m_2\phi)$ para todo $m_1, m_2 \in$ M;

(ii) $1\phi = 1$.

Para sermos mais precisos, a fórmula (ii) deveria ser escrita $1\phi = 1'$ onde 1 seria a unidade de M e 1' a de M'. No entanto vamos representar, em geral, a unidade de qualquer monóide por 1, a menos que isso possa criar confusão. O morfismo ϕ será um *monomorfismo*, *epimorfismo* ou *isomorfismo*, conforme ele seja uma função injetora, sobrejetora ou bijetora.

Vamos representar por 1_M o morfismo identidade de M em M. Se ϕ: M $\longrightarrow$ M' e ϕ': M' $\longrightarrow$ M'' são morfismos, a sua composição $\phi\phi'$: M $\longrightarrow$ M'' também o é.

Se ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é um morfismo tal que $\sigma\phi \neq \tau\phi$ para todo $\sigma,\tau \in \Sigma$, $\sigma \neq \tau$ e se $\Sigma\phi$ é um biprefixo, então é fácil verificar que ϕ é um monomorfismo.

PROPOSIÇÃO 2 - Toda função ϕ: $\Sigma \longrightarrow M$, onde M é um monóide, admite uma única extensão a um morfismo ϕ^*: $\Sigma^* \longrightarrow M$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja a função ϕ^*: $\Sigma^* \longrightarrow M$ definida da seguinte forma:

$$1\phi^* = 1$$

$$(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)\phi^* = (\sigma_1\phi)(\sigma_2\phi)\ldots(\sigma_n\phi)\,,\ n \geq 1,\ \sigma_i \in \Sigma.$$

É evidente que ϕ^* é um morfismo e que é uma extensão de ϕ a Σ^*. Vamos mostrar que ele é único.

Se o morfismo ϕ': $\Sigma^* \longrightarrow M$ também é uma extensão de ϕ a Σ^* temos

$$1\phi' = 1 = 1\phi^*$$

e, qualquer que seja a palavra $w = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n \in \Sigma^*$, $n \geq 1$,

$$w\phi' = (\sigma_1\phi')(\sigma_2\phi')\ldots(\sigma_n\phi') = (\sigma_1\phi)(\sigma_2\phi)\ldots(\sigma_n\phi) = w\phi^*,$$

logo $\phi = \phi'$. □

Em geral a extensão ϕ^* também será representada por ϕ.

Segue desta Proposição que para definirmos um morfismo ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow M$ basta especificarmos o valor de $\sigma\phi$ para todo $\sigma \in \Sigma$.

Um morfismo ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, onde $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ é um conjunto ordenado, é um morfismo *simétrico* se comuta com a permutação cíclica $\pi_n = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ sobre Σ. Neste caso, para definirmos o morfismo ϕ basta que especifiquemos qual é a ordem em Σ e o valor de $\sigma\phi$ para algum $\sigma \in \Sigma$ pois para todo $\tau \in \Sigma$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\tau = \sigma\pi_n^i$ logo $\tau\phi = \sigma\pi_n^i\phi = \sigma\phi\pi_n^i$.

Um morfismo ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é um morfismo *próprio* se $\sigma\phi \neq 1$ para todo $\sigma \in \Sigma$ e é *prolongável* em σ, $\sigma \in \Sigma$, se $\sigma\phi = \sigma u, u \in \Sigma^+$.

Em todo este texto, ϕ sempre representará um morfismo de Σ^* em Γ^*, Σ e Γ alfabetos finitos, tal que $\sigma\phi \neq \tau\phi$ para todo $\alpha, \tau \in \Sigma$, $\sigma \neq \tau$.

PROPOSIÇÃO 3 - Sejam $X \subseteq \Sigma^*$ um biprefixo, m um inteiro positivo e θ: $\Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ um morfismo tal que $x\theta = 0$ para todo $x \in X$, onde $\mathbb{Z}_m$ é o grupo aditivo dos inteiros módulo m. Se $w \in X^*$ tem uma fatoração $w = w_0 w_1 \ldots w_{k+1}$, $k \geq 1$, com $w_i \in \Sigma^*$ e $w_1\theta = w_2\theta = \ldots = w_k\theta = h \in \mathbb{Z}_m$, então os elementos da sequência $E = \{e_i\}_{0 \leq i \leq k}$ dos fragmentos esquerdos determinados pela fatoração $w_0 w_1 \ldots w_{k+1}$ em w satisfazem o seguinte:

a) $e_i\theta \equiv (e_{i-1}+h) (mod\ m)$, $\quad 1 \leq i \leq k$;

b) para todo $0 \leq i, j \leq k$,

$$e_i\theta = e_j\theta \text{ se e somente se } i \equiv j \left(mod\ \frac{m}{(m,h)}\right).$$

DEMONSTRAÇÃO - Para todo $1 \leq i \leq k$, sejam u_i e $v_i \in \Sigma^*$ tais que $w = u_i v_i$, $u_i = w_0 w_1 \ldots w_i$, $v_i = w_{i+1} \ldots w_{k+1}$ e ainda $u_i = u_i' e_i$ onde

$u_i' \in X^*$ e e_i é o fragmento esquerdo determinado pela fatoração $u_i v_i$ em w.

É fácil ver que nestas condições

$$u_i' e_i = u_{i-1}' e_{i-1} w_i .$$

Aplicando θ temos

$$u_i'\theta + e_i\theta \equiv (u_{i-1}'\theta + e_{i-1}\theta + w_i\theta)(mod\ m)$$

e como $u_i', u_{i-1}' \in X^*$, $x\theta = 0$ para todo $x \in X$ e $w_i\theta = h$, temos $e_i\theta \equiv$ $\equiv (e_{i-1}\theta + h)(mod\ m)$.

Daí segue que $e_i\theta \equiv (e_0\theta + ih)(mod\ m)$ e, para todo $0 \le$ $\le i, j \le k$,

$$\begin{aligned} e_i\theta = e_j\theta &\text{ sse } e_0\theta + ih \equiv (e_0\theta + jh)(mod\ m) \\ &\text{ sse } ih \equiv jh(mod\ m) \\ &\text{ sse } i \equiv j\left(mod\ \frac{m}{(m,h)}\right). \end{aligned}$$ □

3 - PALAVRAS INFINITAS

Sendo Σ um alfabeto finito e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, consideremos $\Sigma^{\mathbb{N}}$ como o conjunto de todas as funções $\underline{\underline{x}}: \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma$.

Um elemento $\underline{\underline{x}}$ de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ nada mais é do que uma seqüência

$$0\underline{\underline{x}},\ 1\underline{\underline{x}},\ 2\underline{\underline{x}},\ \ldots,\ n\underline{\underline{x}},\ \ldots$$

de elementos de Σ indexados por $\mathbb{N}$. Omitindo as vírgulas escreveremos esta seqüência como

$$(0\underline{\underline{x}})(1\underline{\underline{x}})(2\underline{\underline{x}}) \ \ldots \ (n\underline{\underline{x}}) \ \ldots$$

ou, quando for mais conveniente, como

$$x_0 x_1 x_2 \ldots x_n \ldots .$$

Por isto os elementos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ serão chamados *palavras infinitas*.

Dado $n \in \mathbb{N}$ nós denotaremos por $\underline{\underline{x}}^{[n]}$ o elemento de Σ^*

$$\underline{\underline{x}}^{[n]} = x_0 x_1 \ldots x_{n-1},$$

chamado *segmento inicial* de comprimento n de $\underline{\underline{x}}$. Se $n = 0$ então $\underline{\underline{x}}^{[0]} = 1$.

Dada uma seqüência

$$w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$$

de elementos de Σ^* tal que w_i é segmento inicial próprio de w_{i+1} para todo $i \geq 0$, existe uma única palavra infinita $\underline{\underline{x}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\underline{\underline{x}}^{[k]} = w_n$, $k = |w_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso nós escrevemos. $\underline{\underline{x}} = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$. Em particular, $\underline{\underline{x}} = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{\underline{x}}^{[n]}$.

Dado um morfismo $\phi\colon \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$, Σ e Γ alfabetos finitos, podemos obter a função $\phi^{\mathbb{N}}\colon \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow \Gamma^{\mathbb{N}}$, chamada *prolongamento* de ϕ, estabelecendo para todo $\underline{\underline{x}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $\underline{\underline{x}}\phi^{\mathbb{N}} = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{\underline{x}}^{[n]}\phi$. Em geral vamos representar o prolongamento $\phi^{\mathbb{N}}$ simplesmente por ϕ.

Seja $\phi\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ um morfismo próprio e prolongável em algum $\sigma \in \Sigma$, isto é, $\sigma\phi = \sigma u$, $u \in \Sigma^+$. Para todo $n \geq 0$ seja $w_n =$

$= \sigma\phi^n$, onde $\phi^0 = 1_{\Sigma^*}$. Então

$$w_{n+1} = \sigma\phi^{n+1} = \sigma\phi\phi^n = (\sigma u)\phi^n = (\sigma\phi^n)(u\phi^n) = w_n(u\phi^n),$$

isto é, w_n é segmento inicial próprio de w_{n+1} para todo $n \geq 0$. Com isso podemos considerar a palavra infinita

$$\underline{\underline{x}} = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \sigma\phi^n$$

obtida por iteração de ϕ em σ. Denotaremos $\underline{\underline{x}} = \sigma\phi^\omega$.

Com base no *Lema da infinitude* de König: "Toda árvore orientada infinita na qual todo vértice tem índice finito contém um caminho infinito a partir da raiz", formulamos o seguinte:

PROPOSIÇÃO 4 - Se X é um subconjunto infinito de Σ^* então existe uma palavra infinita $\underline{\underline{x}}\in\Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\underline{\underline{x}}^{[n]}\in pref(X)$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO - Como Σ é finito e X infinito, existe $\sigma_0\in\Sigma$ tal que o conjunto

$$X_{\sigma_0} = \{x\in X \mid x=\sigma_0 v,\ v\in\Sigma^*\}$$

é infinito. Denotemos $\sigma_0 = x^{(1)}$.

Seja $n \geq 1$ e suponhamos que já obtivemos $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\in\Sigma^*$ tais que para todo $1 \leq i \leq n$, $|x^{(i)}| = i$, $x^{(i)} = x^{(i-1)}\sigma_{i-1}$ onde $\sigma_{i-1}\in\Sigma$ e o conjunto $X_{x^{(i)}} = \{x\in X \mid x=x^{(i)}v,\ v\in\Sigma^*\}$ é infinito. Então existe uma letra $\sigma_n\in\Sigma$ tal que o conjunto $X_{x^{(n+1)}}$ é infinito, onde $x^{(n+1)} = x^{(n)}\sigma_n$. Desta forma podemos construir uma seqüência infinita $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}, \dots$ de elementos de Σ^* onde, para todo $i \geq 1$, $|x^{(i)}| = i$, $x^{(i+1)} = x^{(i)}\sigma_i$ e $x^{(i)} \in pref(X)$.

Para concluirmos a demonstração basta considerar a palavra infinita $\underline{\underline{x}} \in \Sigma^*$ tal que $\underline{\underline{x}}^{[n]} = x^{(n)}$, para todo $n \geq 1$. □

Se $\alpha: \Sigma^* \longrightarrow M$ é um morfismo de monóides e se $u, v \in \Sigma^*$ são tais que $u\alpha = v\alpha$, dizemos que u e v são *equivalentes módulo* α. De um modo geral, toda palavra infinita de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ contém como segmento um grande número de palavras de Σ^* equivalentes módulo α. Dizemos que uma palavra w de Σ^* contém uma *k-ésima potência módulo* α, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, se w contém k segmentos consecutivos não vazios equivalentes módulo α, isto é, $w = fw_1w_2\dots w_kg$ onde $w_i \neq$ $\neq 1$ e $w_1\alpha = w_2\alpha = \dots = w_k\alpha$. Neste caso dizemos que $w_1w_2\dots w_k$ é uma k-ésima potência módulo α de w. Dizemos que w é palavra livre de k-ésimas potências módulo α se w não contém tais potências.

Uma palavra infinita $\underline{\underline{x}}$ de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ é livre de k-ésimas potências módulo α se $\underline{\underline{x}}^{[n]}$ é livre de k-ésimas potências módulo α para todo $n \geq 0$. Segue da Proposição 4 que existe uma palavra infinita em $\Sigma^{\mathbb{N}}$ livre de k-ésimas potências módulo α se e somente se existem palavras arbitrariamente compridas de Σ^* livres de k-ésimas potências módulo α.

Um morfismo $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é livre de k-ésimas potências módulo α se ele não as cria, isto é, se $w \in \Sigma^*$ é livre de k-ésimas potências módulo α então $w\phi$ também é.

É fácil ver que se $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é um morfismo livre de k-ésimas potências e prolongável em algum $\sigma \in \Sigma$ então a palavra infinita $\underline{\underline{x}} = \sigma\phi^{\omega}$ obtida por iteração de ϕ em σ é livre de k-ésimas potências módulo α. Neste trabalho vamos utilizar diversas vezes esse processo para construir palavras infinitas livres de k-ésimas potências módulo α, para certos valores de $k \geq 2$ e alguns particulares morfismos α.

- $\boxed{1}$ -

CAPÍTULO 2

POTÊNCIAS EM PALAVRAS INFINITAS

1 - PALAVRAS INFINITAS LIVRES DE k-ÉSIMAS POTÊNCIAS

Uma palavra w de Σ^* contém uma *k-ésima potência*, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, se contém k segmentos não vazios consecutivos idênticos. Isto equivale a dizer que w contém uma k-ésima potência módulo 1_{Σ^*}, onde 1_{Σ^*} é o morfismo identidade de Σ^* em Σ^*. As $2^{\underline{as}}$-potências, isto é, as palavras da forma $v^2 = vv$, $v \in \Sigma^+$, são chamadas *quadrados* e as $3^{\underline{as}}$-potências são chamados *cubos*. Por exemplo a palavra $w = abcabcababab$ contém os quadrados $abcabc = (abc)^2$, $bcabca = (bca)^2$, $cabcab = (cab)^2$ e $abab = (ab)^2$ e contém o cubo $ababab = (ab)^3$.

As palavras que não contém k-ésimas potências são ditas livres de k-ésimas potências. É nesse tipo de palavras que estamos interessados.

As únicas palavras livres de quadrados sobre o alfabeto com duas letras $\Sigma = \{a, b\}$ são a, b, ab, ba, aba e bab. Para alfabetos com três ou mais letras a situação se modifica bastante pois para todo $k \geq 2$ existem palavras infinitas livres de k-ésimas potências sobre esses alfabetos. Isto também se verifica para alfabetos com duas letras, só que com $k \geq 3$.

A primeira descrição de palavras infinitas livres de quadrados foi feita por A. Thue [T1] em 1906. Daí para cá diversos autores as tem descoberto ou redescoberto. O próprio Thue [T2] em 1912, Arshon [A] em 1937, Morse e Hedlund [MH] em 1944, Hawkins e Mientka [HM] em 1956, Leech [L] em 1957, Braunholtz [Br] em 1963, Dean [De] em 1965, Pleasants [P] em 1970, Dejean [Dj] em 1972 e Shyr [S] e Istrail [I] em 1977.

Dizemos que um morfismo $\phi\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é livre de k-ésimas potências se ele não produz, isto é, a imagem por ϕ de toda palavra livre de k-ésimas potências também é livre k-ésimas potências.

Como o conceito de k-ésima potência é equivalente ao de k-ésima potência módulo 1_{Σ^*}, se ϕ é um morfismo livre de k-ésimas potências e prolongável em algum $\sigma \in \Sigma$ então a palavra infinita obtida por iteração de ϕ em σ também é livre de k-ésimas potências. Grande parte das construções de palavras infinitas livres de quadrados citadas a pouco é feita usando morfismos, embora alguns autores não usem explicitamente este nome.

Vamos apresentar duas dessas construções, a primeira utilizando um morfismo e a segunda não.

EXEMPLO 1 - Seja $\phi\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b,c\}$, o morfismo definido por

$$a\phi = abcab$$

$$b\phi = acabcb$$

$$c\phi = acbcacb.$$

A palavra infinita $\underline{\underline{x}} = a\phi^{\omega} = abcabacabcbacbcacb\ldots$ obtida por iteração de ϕ em a é livre de quadrados. De fato, em 1912 Thue [T2] demonstrou que o morfismo ϕ satisfaz certas condições que ele já havia demonstrado serem suficientes para um morfismo ser livre de quadrados (ver sec. 3). Posteriormente, em 1970, Pleasants [P] apresentou uma outra demonstração de que este morfismo é livre de quadrados. Vamos apresentar agora uma terceira demonstração.

Para todo $\sigma,\tau \in \Sigma$, verifica-se facilmente que $\sigma\phi$ não é segmento inicial próprio ou segmento final próprio de $\tau\phi$, logo $\Sigma\phi$ é um biprefixo. Outros fatos de comprovação imediata são:

1) Para todo $\sigma \in \Sigma$, $\sigma\phi$ não contém a palavra ba como segmento;

2) Para todo $\sigma \in \Sigma$, $\sigma\phi$ é livre de quadrados.

Seja $w = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$, $\sigma_i \in \Sigma$, $n \geq 2$, uma palavra tal que $w\phi$ contém um quadrado e suponhamos que w é minimal nestas condições, isto é, a imagem por ϕ de todo segmento próprio de w é livre de quadrados. Se w_1w_2, $w_1 = w_2 \in \Sigma^+$, é um quadrado de $w\phi$ então $w\phi = fw_1w_2g$ onde $f \in pref^-(\sigma_1\phi)$ e $g \in suf^-(\sigma_n\phi)$. Seja $F = \{(e_i, d_i)\}_{0 \leq i \leq 2}$ a seqüência dos fragmentos determinados pela fatoração fw_1w_2g em $w\phi$. Então $f = e_0$ e $g = d_2$.

Se w_1 é um segmento de $\sigma_1\phi$ então w_1 é um segmento final de $\sigma_1\phi$ pois em caso contrário w_2 e, consequentemente, w_1 e $\sigma_1\phi$, conteriam ba como segmento. Com isso w_2 é um segmento inicial de $\sigma_2\phi$ e temos $w_1 = w_2 = av'b$, $v' \in \Sigma^*$. É fácil ver que se $\sigma_1 \neq \sigma_2$ não existem $w_1 = w_2$ nestas condições. Portanto $\sigma_1 = \sigma_2$ e w contém um quadrado.

De modo análogo podemos demonstrar que se w_2 é um segmento de $\sigma_n\phi$ então w contém um quadrado.

Suponhamos que w_1 não seja segmento de $\sigma_1\phi$ e que w_2 não seja segmento de $\sigma_n\phi$. Então existem $v_1, v_2 \in \Sigma^*$ tais que $w = x_0 v_1 x_1 v_2 x_2$, $x_i \in 1 \cup \Sigma$, $x_i\phi = e_i d_i$ e $w_1 = d_0(v_1\phi)e_i$ e $w_2 = d_1(v_2\phi)e_2$.

Se $d_0 \neq d_1$ então $|d_0| \neq |d_1|$. Suponhamos que $|d_0| < |d_1|$.

Se tivéssemos $d_0 = 1$ então $\sigma_1\phi$ seria segmento inicial de w_1 e como d_1 é segmento inicial de $w_2 = w_1$, d_1 seria um segmento inicial próprio de $\sigma_1\phi$ pois, é fácil ver, $\sigma_1\phi$ não pode ser segmento de d_1. No entanto isto não é possível porque nesse caso $d_1 a$ e, consequentemente, ba, seriam segmentos de $\sigma_1\phi$. Portanto $d_0 \neq 1$, com o que $d_1 a$ e, portanto ba, é segmento de d_0. Contradição. De maneira análoga podemos demonstrar que não podemos ter $|d_0| > |d_1|$.

Portanto $d_0 = d_1$.

Como $\Sigma\phi$ é um biprefixo segue que $v_1 = v_2$ e $e_1 = e_2$.

Se $x_1 = 1$ então w contém o quadrado $v_1 v_2$.

Se $x_1 \neq 1$ então $e_1 = e_2 \neq 1 \neq d_1 = d_0$ e $x_0 \neq 1 \neq x_2$.

Não podemos ter $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ porque como $x_i\phi = e_i d_i$ e $e_1 = e_2$ e $d_0 = d_1$, é fácil ver que $|e_1| \leq 2$ e $|d_1| \leq 2$, o que é impossível pois $|e_1| + |d_1| = |x_1\phi| \geq 5$.

Portanto $x_0 = x_1$ ou $x_1 = x_2$ e w contém um quadrado que é ou $x_0v_1x_1v_2$ ou $v_1x_1v_2x_2$.

Desta forma demonstramos que se $w\phi$ contém um quadrado então w também contém, donde concluimos que ϕ é um morfismo livre de quadrados.

EXEMPLO 2 - A construção da palavra infinita livre de quadrados que vamos apresentar agora não utiliza morfismos e é devida a Braunholtz [Br].

Seja a palavra infinita

$$\underline{\underline{x}} = 0110100110010110\ldots$$

de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, $\Sigma = \{0,1\}$, construída da seguinte forma:

"Para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0$ ou $x_n = 1$ conforme o número de ocorrências do número 1 na representação binária do número n seja par ou impar, respectivamente".

As seguintes propriedades da palavra infinita $\underline{\underline{x}}$ são facilmente verificáveis:

P1) $x_{2i} = x_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$;

P2) $x_{2i+1} \equiv (x_i + 1) (mod\ 2)$;

P3) $x_{2i} + x_{2i+1} = 1$.

Vamos mostrar que $\underline{\underline{x}}$ não contém nenhum segmento da forma wwa, onde $w \in \Sigma^+$, $a \in \Sigma$ e a é segmento inicial de w. Conforme veremos na sec. 3, isto significa que $\underline{\underline{x}}$ é 0-irredutível, o que também foi demonstrado por A. Thue [T2].

Se $\underline{\underline{x}}$ contém wwa, $|w| = n \geq 1$, então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$wwa = x_i x_{i+1} \dots x_{i+n-1} x_{i+n} \dots x_{i+2n-1} x_{i+2n},$$

onde

$$w = x_i \dots x_{i+n-1} = x_{i+n} \dots x_{i+2n-1} \text{ e } x_i = x_{i+n} = x_{i+2n} = a.$$

Suponhamos que n seja ímpar.

Se w contém um segmento $\sigma\sigma$, $\sigma \in \Sigma$, seja $k \in \mathbb{N}$, $i \leq k < i+n-1$, tal que $x_k = x_{k+1} = \sigma$. Segue que $x_{k+n} = x_{k+n+1} = \sigma$. De n ser ímpar segue que k ou $k+n$ é par logo temos uma contradição com P3). Portanto se n é ímpar então

$$w = (\sigma\tau)^t \sigma, \ \sigma, \tau \in \Sigma, \ \sigma \neq \tau, \ n = 2t+1.$$

Desta forma $a = \sigma$ e $x_{i+n-1} = x_{i+n} = x_{i+2n-1} = x_{i+2n} = a$. Como $i+n-1$ ou $i+2n-1$ é par, pois n é ímpar, temos uma nova contradição em P3). Portanto n não pode ser ímpar.

Suponhamos agora que n seja par.

Se i é par então $i = 2r$, $r \in \mathbb{N}$ 'e como

$$x_i = x_{i+n}, \ x_{i+2} = x_{i+n+2}, \ x_{i+4} = x_{i+2n+4}, \dots, x_{i+n} = x_{i+2n},$$

de P1) nós temos

$$x_r = x_{r+n/2}, \ x_{r+1} = x_{r+n/2+1}, \dots, x_{r+n/2-1} = x_{r+n-1},$$

$x_{r+n/2} = x_{r+n}$, isto é, o segmento

$$x_r x_{r+1} \dots x_{r+n} \text{ de } \underline{\underline{x}}$$

é da forma $w'w'a'$ onde $w'\in\Sigma^+$, $a'\in\Sigma$ e a' é segmento inicial de w', $|w'| = n/2$.

No caso em que i é ímpar então $i = 2r+1$, $r\in\mathbb{N}$ e, de modo análogo, podemos verificar que o segmento $x_{r+1}x_{r+2}\ldots x_{r+n+1}$ de $\underline{\underline{x}}$ é da forma $w'w'a'$, $w'\in\Sigma^+$, $a'\in\Sigma$, a' segmento inicial de w' e $|w'| = n/2$.

Portanto $\underline{\underline{x}}$ não contém um segmento da forma wwa com $|w| = n$, n par, pois se isto ocorresse poderíamos determinar em $\underline{\underline{x}}$ um segmento $w'w'a'$ com $|w'| = n/2$. Isso poderia se repetir até obtermos em $\underline{\underline{x}}$ um segmento $w''w''a''$ tal que $|w''|$ fosse um número ímpar, o que já vimos ser impossível.

Enumeremos com os números naturais as ocorrências da letra 0 em $\underline{\underline{x}}$, contando-as da esquerda para a direita.

Consideremos agora a palavra infinita $\underline{\underline{y}}\in\Sigma_3^{\mathbb{N}}$, $\Sigma_3 = \{0,1,2\}$, onde para todo $i\in\mathbb{N}$, y_i é igual ao número de ocorrências da letra 1 em $\underline{\underline{x}}$ entre 0_i e 0_{i+1}, onde 0_i indica a $(i+1)$-ésima ocorrência da letra 0 em $\underline{\underline{x}}$, contando da esquerda para a direita. Então $\underline{\underline{y}} = 210201210\ldots$ e como $\underline{\underline{x}}$ não contém 000 ou 111 como segmento, $\underline{\underline{y}}$ de fato pertence a $\Sigma_3^{\mathbb{N}}$.

É fácil ver que se $\underline{\underline{y}}$ tem um quadrado então $\underline{\underline{x}}$ contém um segmento da forma wwa, $w\in\Sigma^+$, $a\in\Sigma$ e a é segmento inicial de w. Portanto $\underline{\underline{y}}$ é livre de quadrados.

Nas secções 3 e 4 deste capítulo e na secção 2 do capítulo 3 aparecem outras construções de palavras infinitas livres de quadrados, todas elas utilizando morfismos livres de quadrados. Das diversas construções citadas a pouco vamos destacar ainda mais duas, que não utilizam morfismos.

EXEMPLO 3 (construção devida a Arshon [A]) - Seja $\Sigma = \{a,b,c\}$ e sejam δ e γ as aplicações de Σ em Σ^* definidas por

$$a\delta = abc \qquad a\gamma = cba$$

$$b\delta = bca \qquad b\gamma = acb$$

$$c\delta = cab \qquad c\gamma = bac$$

Estas aplicações podem ser estendidas a Σ^* da seguinte forma:

$1\delta = 1\gamma = 1$

$(\sigma w)\delta = (\sigma\delta)(w\gamma)$ e $(\sigma w)\gamma = (\sigma\gamma)(w\delta)$, para todo $\sigma\in\Sigma$ e $w\in\Sigma^*$.

Desta forma pode-se construir a palavra infinita

$$\underline{\underline{x}} = abcacbcabcbacabacb\ldots$$

livre de quadrados, obtida por iteração de δ em a.

Em [Be1], Berstel demonstrou que esta palavra infinita não pode ser obtida por meio de iteração de um morfismo.

Novikov e Adjan [NA] utilizam esta palavra infinita $\underline{\underline{x}}$ na construção de um grupo periódico infinito, finitamente gerado, no qual a ordem de todos os elementos é limitada, o que resolve o conhecido problema de Burnside.

EXEMPLO 4 (construção devida a Istrail [I]) - A palavra infinita livre de quadrados obtida por Istrail é $\underline{\underline{x}} = abcacbabcbac\ldots$, obtida por iteração do morfismo $\phi\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b,c\}$, em a, onde ϕ está definido por

$$a\phi = abc$$

$$b\phi = ac$$

$$c\phi = b.$$

O interessante desta construção é que o morfismo ϕ não é livre de quadrados pois $(aba)\phi = abcacabc$ contém o quadrado $acac$.

2 - MORFISMOS LIVRES DE k-ÉSIMAS POTÊNCIAS

Se X é um subconjunto não vazio de Σ^* e w é uma palavra de Σ^*, dizemos que w tem uma *interpretação* em X se $w = sx_1x_2\ldots x_np$, onde $n \geq 0$, $s \in suf^-(X)$, $p \in pref^-(X)$ e $x_i \in X$, para todo i.

Se w contém uma k-ésima potência, $k \geq 2$, então $w = fw_1w_2\ldots w_kg$ onde $f, g \in \Sigma^*$, $w_i \in \Sigma^+$ e $w_1 = w_2 = \ldots = w_k$. Se, para todo $1 \leq i \leq k$, $w_i = d_{i-1}v_ie_i$, onde $e_j \in pref^-(X)$, $d_j \in suf^-(X)$, $e_jd_j = x_j \in 1 \cup X$, $v_i \in X^*$ e

$$w = x_0v_1x_1v_2x_2\ldots v_kx_k$$

dizemos que $d_{i-1}v_ie_i$ é uma interpretação de w_i em w. Se as interpretações de $w_1, w_2, \ldots, w_k$ em w são todas idênticas, isto é, $d_{i-1} = d_{j-1}$, $v_i = v_j$ e $e_i = e_j$, para todo i, j, dizemos que $w_1w_2\ldots w_k$ é uma k-ésima potência *uniforme* de w. Se pelo menos duas dessas interpretações são distintas, dizemos que $w_1w_2\ldots w_k$ é uma k-ésima potência *mista* de w.

Um morfismo ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é dito um morfismo *k-uniforme* se todas as k-ésimas potências que ocorrem em elementos de $\Sigma^*\phi$ são uniformes.

Para que um morfismo próprio ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ seja livre de k-ésimas potências, $k \geq 2$, é necessário que $\Sigma\phi$ seja um biprefixo. De fato, se $\Sigma\phi$ não é biprefixo então existem σ e $\tau \in \Sigma$, $\sigma \neq \tau$, tais que $\sigma\phi$ é segmento inicial próprio de $\tau\phi$ ou $\sigma\phi$ é segmento final próprio de $\tau\phi$. No primeiro caso a imagem por ϕ da palavra livre de k-ésimas potências $\sigma^{k-1}\tau$ contém a k-ésima potência $(\sigma\phi)^k$. No segundo caso $(\tau\sigma^{k-1})\phi$ contém $(\sigma\phi)^k$.

Podemos considerar os seguintes valores associados a um morfismo próprio ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$:

$$M_\phi = \max\{|\sigma\phi|,\ \sigma\in\Sigma\};$$

$$m_\phi = \min\{|\sigma\phi|,\ \sigma\in\Sigma\};$$

$$N_\phi = \frac{M_\phi}{m_\phi}.$$

O número N_ϕ é tal que se $w\phi$ é segmento de $u\phi$, $w,u\in\Sigma^*$, então $|w| \leq \lfloor |u| N_\phi \rfloor$ onde, para todo $t\in\mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor$ denota o maior número inteiro menor ou igual a t.

Em toda esta secção ϕ denotará um morfismo próprio de Σ^* em Σ^*.

LEMA 1 - Seja $w\in\Sigma^*$ uma palavra livre de k-ésimas potências, $k \geq 2$, tal que $w\phi$ contém uma k-ésima potência $w_1w_2\ldots w_k$. Suponhamos que w seja minimal nestas condições, isto é, a imagem por ϕ

de todo segmento próprio de w seja livre de k-ésimas potências. Se $|w| \geq (k+2)N_\phi$ e se $\Sigma\phi$ é um biprefixo então, para todo $1 \leq i \leq k$, w_i tem uma interpretação $d_{i-1}(v_i\phi)e_i$ em $w\phi$, onde $w = x_0v_1x_1 \ldots v_kx_k$, $v_i \in \Sigma^*$, $x_j \in 1 \cup \Sigma$ e $e_jd_j = x_j\phi$.

DEMONSTRAÇÃO - Para demonstrar este lema basta mostrar que $|w_i| \geq M_\phi$ para todo i.

Como w é minimal existem f e $g \in \Sigma^*$, $f \in pref^-(\Sigma\phi)$ e $g \in suf^-(\Sigma\phi)$, tais que $w\phi = fw_1w_2 \ldots w_kg$. Deste modo,

$$|w\phi| = |f| + |w_1 \ldots w_k| + |g| = |f| + |g| + k|w_i|,$$

logo

$$|w\phi| \leq 2M_\phi + k|w_i|.$$

Por outro lado, é fácil ver que $|w\phi| \geq |w| \cdot m_\phi$, logo

$$2M_\phi + k|w_i| \geq [(k+2)N_\phi] \cdot m_\phi = (k+2)M_\phi$$

donde concluimos que $|w_i| \geq M_\phi$. □

Vamos agora estabelecer uma caracterização dos morfismos k-uniformes que são livres de k-ésimas potências.

PROPOSIÇÃO 1 - Se ϕ é k-uniforme, $k \geq 2$, então ϕ é livre de k-ésimas potências se e somente se qualquer que seja a palavra w de Σ^* com $|w| < (k+2)N_\phi$ se w é livre de k-ésimas potências então $w\phi$ também é.

DEMONSTRAÇÃO - É fácil ver que a condição é necessária. Vamos mostrar que é suficiente. Para isso suponhamo-na verdadeira. Nesse caso, como $N_\phi \geq 1$ ela vale para toda palavra de comprimento menor ou igual a $k+1$ e portanto para toda palavra de comprimento 2. Isto implica que $\Sigma\phi$ é um biprefixo e que ϕ é um monomorfismo.

Seja $w \in \Sigma^*$ uma palavra livre de k-ésimas potências com $|w| \geq (k+2)N_\phi$ e tal que $w\phi$ contém uma k-ésima potência $w_1 w_2 \ldots w_k$. Suponhamos que w é minimal nestas condições. Desta forma ϕ e w satisfazem as condições do Lema 1 e temos

$$w = x_0 v_1 x_1 v_2 x_2 \ldots v_k x_k$$

onde $x_j \in 1 \cup \Sigma$, $v_i \in \Sigma^*$ e $w_i = d_{i-1}(v_i\phi)e_i$ onde $e_j d_j = x_j\phi$, $e_j \in pref^-(\Sigma\phi)$ e $d_j \in suf^-(\Sigma\phi)$.

Como ϕ é um monomorfismo e é k-uniforme, existem $d, e, v \in \Sigma^*$ tais que $d_i = d$, $0 \leq i \leq k-1$, $e_j = e$ e $v_j = v$, $1 \leq j \leq k$.

Se $x \in 1 \cup \Sigma$ é tal que $x\phi = ed$ então

$$w = x_0 vxvx \ldots vx_k = x_0(vx)^{k-1} vx_k.$$

Se $x = 1$ então $w = x_0 v^k x_k$ contém uma k-ésima potência, contra a hipótese. Portanto $x \in \Sigma$.

Consideremos agora a palavra $u = x_0 x^{k-1} x_k$. Como $|u| = k+1$ e $u\phi = e_0 deded \ldots eded_k = e_0(ed)^k ed_k$, então u contém uma k-ésima potência. Isto implica que $x = x_0$ ou $x = x_k$, o que é impossível pois em qualquer destes dois casos w conteria uma k-ésima potência: $(xv)^k$ no primeiro caso e $(vx)^k$ no segundo.

Portanto, qualquer que seja a palavra $w \in \Sigma^*$, se w é livre de k-ésimas potências então $w\phi$ também é, logo ϕ é livre de k-ésimas potências. $\square$

É decidível, algoritmicamente, se um morfismo $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é k-uniforme ou não, para um $k \geq 2$, fixo. Isto pode ser feito da seguinte maneira:

Inicialmente consideramos o conjunto $B = suf^-(\Sigma\phi) \times pref^-(\Sigma\phi)$ dos pares ordenados (s,p) $s \in suf^-(\Sigma\phi)$ e $p \in pref^-(\Sigma\phi)$, e o conjunto H de todas as k-uplas $h = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$, $b_i \in B$, tais que, para todo $1 \leq i \leq k$, $b_i = (s_i, p_i)$ e $p_j s_{j+1} \in 1 \cup \Sigma\phi$, $1 \leq j \leq k-1$, e duas componentes b_i e b_j, $i \neq j$, são diferentes. Obviamente H é um conjunto finito.

Para todo $h \in H$ construímos o conjunto

$$X_h = [s_1(\Sigma^*\phi)p_1] \cap [s_2(\Sigma^*\phi)p_2] \cap \ldots \cap [s_k(\Sigma^*\phi)p_k].$$

Afirmamos que o morfismo ϕ é k-uniforme se e somente se $X_h = \emptyset$ para todo $h \in H$.

De fato $X_h \neq \emptyset$ para algum $h \in H$ se e somente se existe $w \in \Sigma^*$ tal que

$$w = s_1(v_1\phi)p_1 = s_2(v_2\phi)p_2 = \ldots = s_k(v_k\phi)p_k,$$

onde $(s_i, p_i) \neq (s_j, p_j)$ para algum $i \neq j$ e, se p_0 e $s_{k+1} \in \Sigma^*$ são tais que $p_0 s_1$ e $p_k s_k \in 1 \cup \Sigma\phi$, então

$$p_0 s_1(v_1\phi)p_1 s_2(v_2\phi)p_3 \ldots s_k(v_k\phi)p_k s_{k+1} \in \Sigma^*\phi,$$

o que ocorre se e somente se ϕ não é k-uniforme.

É fácil ver que X_h é uma linguagem regular para todo $h \in H$ logo existe um algoritmo para decidir se $X_h = \emptyset$ (ver Eilenberg [Ei], sec. II-4).

Como o algoritmo descrito acima é bastante ineficiente, para cada morfismo que estudamos podemos tentar verificar diretamente se ele é k-uniforme ou não, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 - Seja o morfismo $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b,c,d\}$, definido por

$$a\phi = acad$$

$$b\phi = abad$$

$$c\phi = abcd$$

$$d\phi = acbd.$$

Vamos mostrar que ϕ é 2-uniforme.

Como $|\sigma\phi| = 4$ para todo $\sigma \in \Sigma$, $\Sigma\phi$ é um biprefixo.

Se $v \in \Sigma^*$ é tal que $v\phi = fw_1w_2g$ onde $w_1 = w_2$, $f \in pref^-(\Sigma\phi)$ e $g \in suf^-(\Sigma\phi)$, seja $F = \{(e_i, d_i)\}_{0 \le i \le 2}$ a seqüência dos fragmentos determinados pela fatoração fw_1w_2g em $v\phi$. A Proposição 1.1.1 nos garante que $|e_i| \equiv (|e_{i-1}| + c)(mod\ 4)$, $i = 1,2$, onde $c \equiv |w_i|(mod\ 4)$, $0 \le c \le 3$.

Vamos mostrar que devemos ter $c = 0$. Para isso vamos estudar as possibilidades para $|e_0|$ e $|e_1|$. Indiquemos por *caso* (i,j) o caso em que $|e_0| = i$ e $|e_1| = j$, $0 \le i \ne j \le 3$.

Se $|e_0| = 0$ então w_1 começa pela letra a, logo não podemos ter $|e_1| = 1$ ou $|e_1| = 3$. Estão excluídos, portanto, os casos $(0,1)$ e $(0,3)$. Analogamente podemos excluir os casos $(1,0)$ e $(3,0)$. Se $|e_1| = 2$ então $|w_i| \ge 2$ e ad é segmento inicial de w_i, $i=1,2$. No entanto isto não é possível pois d só ocorre em $\sigma\phi$ como segmento final. Portanto está excluído o caso $(0,2)$ e, analogamente, o caso $(2,0)$.

Se $|e_0|=3$ então w_1 começa pela letra d, com o que também estão excluídos os casos $(3,1)$ e $(3,2)$. Analogamente podemos excluir os casos $(1,3)$ e $(2,3)$.

Restam os casos $(1,2)$ e $(2,1)$.

Se $|e_0|=1$ e $|e_1|=2$ então $|w_i|\geq 2$, $i=1,2$, pois para todo $\sigma \in \Sigma$, $\sigma\phi$ não contém quadrado. Neste caso existe $\sigma\in\Sigma$ tal que σd é segmento inicial de w_2 logo d é um segmento não final de e_0, o que é um absurdo. Portanto o caso $(1,2)$ não pode ocorrer. De modo análogo excluímos o caso $(2,1)$.

Portanto devemos ter $c=0$ e $|e_0| = |e_1| = |e_2|$. Com isso temos $e_0=e_1$ e como $|d_0| = |d_1| = |d_2|$ temos $d_1=d_2$ e $v_1\phi = v_2\phi$.

Portanto ϕ é 2-uniforme.

No entanto ϕ não é livre de quadrados pois $(abc)\phi = acadabadabcd$ contém o quadrado $adabadab$. Como abc é segmento de $c\phi$, não podemos obter uma palavra infinita livre de quadrados utilizando este morfismo.

É fácil ver que toda palavra de comprimento dois de Σ^*, que é livre de quadrados, tem sua imagem por ϕ também livre de quadrados. Deste modo o limite $(k+2)N_\phi$ utilizado na Proposição 1 é o menor possível pois este morfismo ϕ satisfaria as condições dessa Proposição se o limite $(k+2)N_\phi = 4$ fosse diminuido para 3.

Vejamos agora um exemplo de um morfismo livre de k-ésimas potências, $k \geq 3$:

EXEMPLO 6 - Seja ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b\}$, o morfismo definido por

$$a\phi = aab$$

$$b\phi = abb$$

e seja $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$.

É fácil ver que $\Sigma\phi$ é um biprefixo, logo ϕ é um monomorfismo.

Seja $v \in \Sigma^*$ uma palavra tal que

$$v\phi = fw_1w_2 \ldots w_kg, \text{ onde } w_1 = w_2 = \ldots = w_k \in \Sigma^+,$$

$f \in pref^-(\Sigma\phi)$ e $g \in suf^-(\Sigma\phi)$. Seja ainda $F = \{(e_i, d_i)\}_{0 \leq i \leq k}$ a seqüência dos fragmentos determinados pela fatoração $fw_1w_2 \ldots w_kg$ em $v\phi$. A Proposição 1.1.1 nos garante que $|e_i| \equiv (|e_{i-1}|+c)(mod\ 3)$, $1 \leq i \leq k$, onde $0 \leq c \leq 2$, $c \equiv |w_i|(mod\ 3)$.

É fácil ver que não podemos ter $c \neq 0$ pois se isso ocorresse existiriam $0 \leq i \neq j < k$ tais que $|e_i| = 0$ e $|e_j| = 2$. Com isso teríamos $w_i = ay_i$ e $w_j = by_j$, $y_i, y_j \in \Sigma^*$ o que é impossível.

Portanto $|e_i| = |e_j|$, para todo $0 \leq i, j \leq k$, o que nos garante, como vimos no Exemplo 5, que ϕ é k-uniforme para todo $k \geq 3$.

Para mostrarmos que ϕ é livre de k-ésimas potências para um $k \geq 3$, fixo, utilizando a Proposição 1 bastaria mostrar que se $w \in \Sigma^*$ é livre de k-ésimas potências e $|w| < k+2$ então $w\phi$ também é livre de k-ésimas potências. O que vamos fazer, no entanto, é mostrar de forma direta que ϕ é livre de k-ésimas potências, para todo $k \geq 3$.

Se $|e_i| = 0$ para todo i, então $|d_i| = 0$ e $w_i \in \Sigma^*\phi$ para todo i, com o que w contém uma k-ésima potência.

Se $|e_i| = 1$ para todo i, então $w_i = w_i'a$, $w_i' \in \Sigma^*$, logo $aw_i' = aw_j'$ para todo i,j.

Como $aw_1'aw_2'\ldots aw_k'$ é segmento de $v\phi$ e $aw_i' \in \Sigma^*\phi$ podemos constatar que v contém uma k-ésima potência.

Se $|e_i| = 2$ para todo i, então $w_i = bw_i'$, $w_i' \in \Sigma^*$, e como no caso anterior podemos verificar que v contém uma k-ésima potência.

Com isso fica demonstrado que ϕ é um morfismo livre de k-ésimas potências para todo $k \geq 3$.

Usando este mesmo tipo de raciocínio podemos demonstrar que para todo $k \geq 3$ o morfismo

$$\phi_k : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*, \ \Sigma = \{a,b\},$$

definido por

$$a\phi_k = a^{k-1}b$$

$$b\phi_k = ab^{k-1},$$

é livre de k-ésimas potências. Em particular $\phi_3 = \phi$.

É óbvio que ϕ_k não é livre de $(k-1)$-ésimas potências.

O teorema que vamos apresentar agora foi formulado por Berstel [Be2] e dá uma caracterização dos morfismos livres de quadrados.

TEOREMA 1 - Um morfismo $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é livre de quadrados se e somente se é próprio e $w\phi$ é livre de quadrados qualquer que seja a palavra livre de quadrados w com $|w| \leq 2 + \lfloor 2N_\phi \rfloor$.

Para demonstrar esse teorema precisamos do seguinte resultado, que também foi formulado por Berstel:

LEMA 2 - Se $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é um morfismo próprio tal que $(\sigma\tau)\phi$ é livre de quadrados para todo $\sigma,\tau \in \Sigma$, $\sigma \neq \tau$, e se $w \in \Sigma^*$ é uma palavra minimal tal que é livre de quadrados e $w\phi$ tem um quadrado, e se $|w| > 2 + \lfloor 2N_\phi \rfloor$ então $w = x_0 v x_1 v x_2$ com $x_i \in \Sigma$, $x_0 \neq x_1 \neq x_2$, $v \in \Sigma^+$, $x_0\phi = e_0 d$, $x_1\phi = ed$, $x_2\phi = ed_2$, $e \neq 1 \neq d$.

Antes de demonstrar este lema vamos apresentar a demonstração do Teorema 1.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1 - O caso *"somente se"* é trivial. Vamos demonstrar apenas o caso *"se"*.

Suponhamos que $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ seja um morfismo próprio tal que se $w \in \Sigma^*$ é uma palavra livre de quadrados e $|w| \leq 2 + \lfloor 2N_\phi \rfloor$ então $w\phi$ também é livre de quadrados. Em particular $(\sigma\tau)\phi$ é livre de quadrados, para todo $\sigma,\tau \in \Sigma$, $\sigma \neq \tau$.

Vamos supor que exista uma palavra w de Σ^*, $|w| > 2 + \lfloor 2N_\phi \rfloor$, tal que w seja livre de quadrados e $w\phi$ contém um quadrado. Suponhamos ainda w minimal nestas condições.

Deste modo, pelo Lema 2, existem $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ em Σ e v

em Σ^+ tais que $w = w_0 v x_1 v x_2$, $x_0\phi = e_0 d$, $x_1\phi = ed$, $x_2\phi = ed_2$, $e \neq 1 \neq$ $\neq d$.

A palavra $u = x_0 x_1 x_2$ é livre de quadrados, $|u| = 3 \leq$ $\leq 2 + \lfloor 2N_\phi \rfloor$ e $u\phi = e_0 deded_2$ contém o quadrado $dede$, o que é uma contradição com a nossa hipótese.

Portanto para toda palavra w de Σ^*, se w é livre de quadrados então $w\phi$ também é. Segue que ϕ é livre de quadrados. □

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2 - Seja ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ um morfismo próprio tal que $(\sigma\tau)\phi$ seja livre de quadrados para todo $\sigma,\tau \in \Sigma$, $\sigma \neq \tau$. Nestas condições $\Sigma\phi$ é um biprefixo.

Suponhamos que $w \in \Sigma^*$, com $|w| > 2 + \lfloor 2N_\phi \rfloor$, seja uma palavra livre de quadrados tal que $w\phi$ contém um quadrado $w_1 w_2$ e suponhamos que w seja minimal nestas condições.

De $|w|$ ser um número inteiro segue que $|w| > 2 + 2N_\phi$ logo

$$2|w_i| \geq (|w|-2)\cdot m_\phi > 2N_\phi m_\phi = 2M_\phi, \text{ isto é, } |w_i| > M_\phi.$$

Portanto $w = x_0 v_1 x_1 v_2 x_2$, $x_j \in 1 \cup \Sigma$, $v_i \in \Sigma^*$,

$$w_i = d_{i-1}(v_i\phi)e_i \quad \text{e} \quad e_j d_j = x_j\phi.$$

Vamos mostrar inicialmente que $v_1 \neq 1 \neq v_2$. Suponhamos que $v_1 = 1$. Isto implica que $w_1 = d_0 e_1$.

Como $3 + |v_2| \geq |w| > 2 + \lfloor 2N_\phi \rfloor$ e $N_\phi \geq 1$ temos $|v_2| > N_\phi$. Segue que $v_2\phi$ não é segmento de d_0 nem é segmento de e_1. Seja $v_2 = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$, $n \geq 2$, $\sigma_i \in \Sigma$, e seja $0 \leq i \leq n$ tal que $d_0 = d_1(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_i)\phi p$

onde $p \in pref^{-}(\sigma_{i+1}\phi)$. Como $\Sigma\phi$ é biprefixo, p não é a palavra vazia. Seja $s \in \Sigma^{+}$ tal que $ps = \sigma_{i+1}\phi$. Então $e_1 = s(\sigma_{i+2}\ldots\sigma_n)\phi e_2$.

Nestas condições $x_0 = \sigma_{i+1} = x_1$ pois

$$(x_0\sigma_{i+1})\phi = e_0 d_0 ps = e_0 d_1(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_i)\phi pps$$

contém um quadrado pp e

$$(\sigma_{i+1}x_1)\phi = pse_1 d_1 = pss(\sigma_{i+2}\ldots\sigma_n)\phi e_2 d_1$$

contém um quadrado ss.

Como $v_1 = 1$, v contém o quadrado $x_0 x_1$, contra a hipótese. Portanto não podemos ter $v_1 = 1$.

De modo análogo podemos demonstrar que $v_2 \neq 1$.

Se $d_0 = d_1$ então, como $\Sigma\phi$ é um biprefixo, temos $v_1 = v_2$ e $e_1 = e_2$. Como w não tem quadrado, temos $d_0 = d_1 \neq 1$ e $e_1 = e_2 \neq 1$, pois em caso contrário teríamos $x_1 = 1$ e $w = x_0 v_1 v_2 x_2$. Portanto, para concluir a demonstração basta mostrar que não podemos ter $d_0 \neq d_1$.

Suponhamos que $d_0 \neq d_1$. Então $|d_0| \neq |d_1|$ e vamos supor $|d_0| > |d_1|$.

Se $|d_0| \geq |d_1(v_2\phi)|$ então $|e_2| \geq |(v_1\phi)e_1|$. Desta forma temos

$$2M_\phi > |d_0| + |e_2| \geq |d_1(v_2\phi)| + |(v_1\phi)e_1| = |e_1 d_1| + |(v_1 v_2)\phi|$$

logo $2M_\phi > m_\phi + |v_1 v_2| m_\phi$.

Segue que

$$2N_\phi = \frac{2M_\phi}{m_\phi} > 1 + |v_1v_2|$$

e como $1 + |v_1v_2| \in \mathbb{N}$ temos $\lfloor 2N_\phi \rfloor \geq 1 + |v_1v_2|$ o que é equivalente a $2 + \lfloor 2N_\phi \rfloor \geq 3 + |v_1v_2| \geq |w|$, que é uma contradição com a nossa hipótese.

Portanto temos $|d_1| < |d_0| < |d_1(v_2\phi)|$.

Seja $v_2 = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$, $n \geq 1$, $\sigma_i \in \Sigma$ e seja $0 \leq i < n$, tal que $d_0 = d_1(\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_i)\phi p$, $p \in pref^-(\sigma_{i+1}\phi)$. Como $\Sigma\phi$ é biprefixo, p não é a palavra vazia. Seja $s \in \Sigma^+$ tal que $ps = \sigma_{i+1}\phi$. Então

$$(v_1\phi)e_1 = s(\sigma_{i+2} \ldots \sigma_n)\phi e_2.$$

Nestas condições $(x_0\sigma_{i+1})\phi = e_0d_0ps$ contém um quadrado pp, portanto $x_0 = \sigma_{i+1}$. Isto implica que

$$(x_0v_1x_1)\phi = (\sigma_{i+1}v_1x_1)\phi = ps(v_1\phi)e_1d_1 = pss(\sigma_{i+2} \ldots \sigma_n)\phi e_2d_1$$

tem um quadrado ss. Contradição com a hipótese de que w é minimal.

Portanto não podemos ter $|d_0| > |d_1|$.

De modo análogo podemos demonstrar que não podemos ter $|d_0| < |d_1|$. □

3 - PALAVRAS k-IRREDUTÍVEIS

Como Σ^n é finito para cada $n \in \mathbb{N}$, toda palavra suficientemente comprida de Σ^* contém mais de uma ocorrência de um mesmo elemento de Σ^n. Nas palavras livres de quadrados, quaisquer duas ocorrências de um mesmo elemento $f \in \Sigma^+$ são separadas entre si por um segmento $g \neq 1$. Portanto existem palavras arbitrariamente compridas de Σ^* tais que toda quasepotência fgf tem $|g| > 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vamos determinar o maior inteiro L_n tal que existem palavras infinitas de $\Sigma_n^{\mathbb{N}}$ nas quais toda quasepotência fgf tem $|g| \geq L_n$.

Uma palavra w de Σ^* é dita *0-redutível* se contém um segmento da forma $\sigma u \sigma u \sigma$ com $\sigma \in \Sigma$ e $u \in \Sigma^*$, e é dita *k-redutível*, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, se contém uma quasepotência fgf com $|g| < k$. Se w não é k-redutível, isto é, não contém quasepotência fgf com $|g| < k$ então dizemos que w é *k-irredutível*. É fácil ver que se w é k-redutível então w é n-redutível para todo $n \geq k$ e que se w é k-irredutível então w é n-irredutível para todo $0 \leq n \leq k$.

Vejamos alguns exemplos:

ababa é 0-redutível logo é k-redutível para todo $k \geq 0$;

abab é 0-irredutível e k-redutível para todo $k \geq 1$;

abcdab é k-irredutível para todo $0 \leq k \leq 2$ e n-redutível para todo $n \geq 3$.

Se w é uma palavra de Σ_n^*, $n \geq 2$, com $|w| \geq n+2$ então w é $(n-1)$-redutível. De fato, se existem duas ocorrências de uma mesma letra σ de Σ_n em um segmento de comprimento n de w então w contém uma quasepotência $\sigma g \sigma$ com $|g| < n-1$. Se isto não ocorre e se $w = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \sigma_{n+1} \sigma_{n+2}$, $\sigma_i \in \Sigma_n$, então cada uma das palavras $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$, $\sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_{n+1}$ e $\sigma_3 \sigma_4 \ldots \sigma_{n+2}$, de comprimento n, é formada pelas n letras de Σ_n. Segue que $\sigma_1 = \sigma_{n+1}$ e $\sigma_2 = \sigma_{n+2}$, donde concluímos que w contém a quasepotência $(\sigma_1\sigma_2)g(\sigma_{n+1}\sigma_{n+2})$ com $|g| < n-1$.

Dizemos que uma palavra infinita $\underline{\underline{x}}$ de $\Sigma_n^{\mathbb{N}}$ é k-irredutível se $\underline{\underline{x}}^{[n]}$ é k-irredutível para todo $n \in \mathbb{N}$. Do que foi mostrado acima segue que se $\underline{\underline{x}}$ é uma palavra infinita k-irredutível de $\Sigma_n^{\mathbb{N}}$, $n \geq 2$, então $k \leq n-2$. Portanto $L_n \leq n-2$.

Se $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é um morfismo que leva palavras k-irredutíveis em palavras k-irredutíveis dizemos que ele é k-irredutível. Se ϕ também é prolongável em $\sigma \in \Sigma$ então a palavra infinita $\underline{\underline{x}} = \sigma\phi^{\omega}$ obtida por iteração de ϕ em σ é k-irredutível.

Este conceito de palavras k-irredutíveis é devido a A. Thue e aparece em um artigo [T2] de 1912 que é inteiramente voltado para o estudo dessas palavras. Neste artigo, Thue demonstra que existem palavras infinitas $(n-2)$-irredutíveis em $\Sigma_n^{\mathbb{N}}$ para todo $n \geq 2$, donde segue que $L_n = n-2$ para todo $n \geq 2$. A demonstração é feita separadamente para os casos em que $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ ou $n \geq 5$. Aqui vamos apenas reproduzir em linhas gerais as idéias básicas utilizadas por Thue na solução de cada um desses casos:

CASO $n = 2$ - Para resolver esse caso Thue demonstra que o morfismo $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b\}$, definido por $a\phi = ab$ e $b\phi = ba$ é 0-irredutível. Daí segue que a palavra infinita

$$\underline{\underline{x}} = a\phi^{\omega} = abbabaabbaababbaba\ldots$$

obtida por iteração de ϕ em a é 0-irredutível.

Como toda palavra 0-irredutível também é livre de cubos; pois, se uma palavra w contém um cubo fff, $f \neq 1$, então w contém um segmento $\sigma u \sigma u \sigma$ onde $f = \sigma u$, $\sigma \in \Sigma$ e $u \in \Sigma^*$, logo w é 0-redutível; a palavra infinita $\underline{\underline{x}}$ descrita acima é livre de cubos. Isto foi redescoberto posteriormente por Arshon [A] em 1937, por Morse e Hedlund [MH] em 1944 e por Braunholtz [Br] em 1963 (ver Exemplo 1.2).

CASO $n = 3$ - Dizer que uma palavra é 1-irredutível é o mesmo que dizer que ela é livre de quadrados. Portanto já conhecemos vários exemplos e até uma caracterização de morfismos 1-irredutíveis.

No seu trabalho, Thue demonstra que as seguintes condições são suficientes para que um morfismo ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ seja 1-irredutível (ou livre de quadrados):

1) Para todo $\sigma, \tau \in \Sigma$, $\sigma \neq \tau$, $\sigma\phi$ não é segmento de $\tau\phi$;

2) Para todo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Sigma$, $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\phi$ é livre de quadrados.

Thue mostra que o morfismo apresentado no Exemplo 1.1 satisfaz estas duas condições. Ele mostra ainda como construir uma palavra infinita de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, livre de quadrados e que não contém nenhum segmento igual a aca ou bcb.

CASO $n = 4$ - Para resolver este caso Thue demonstra que se $\underline{\underline{x}}$ é uma palavra infinita livre de quadrados de $\Sigma_3^{\mathbb{N}}$, $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$, e que não contém nenhum segmento igual a aca ou bcb e se ϕ: $\Sigma_3^* \longrightarrow \Sigma_4^*$, $\Sigma_4 = \{a, b, c, d\}$, é o morfismo definido por

$$a\phi = abcadacbad$$

$$b\phi = abcadbacbdbcabdbacbd$$

$$c\phi = abcadbacbdbcabdcabcdbcabdbacbd$$

então a palavra infinita $\underline{y} = \underline{\underline{x}}\phi$ é 2-irredutível.

CASO $n \geq 5$ - Vejamos inicialmente o caso em que n é par. Seja $n = 2h$, $h \geq 3$ e seja $\Sigma_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2h}\}$.

Consideremos a palavra de comprimento $n+1$ de Σ_n^*, $A_0 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_{2h-1}\sigma_1\sigma_{2h}$.

Dada a permutação

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_3\sigma_5\ldots\sigma_{2h-3}\sigma_{2h-1} \\ \sigma_3\sigma_5\sigma_7\ldots\sigma_{2h-1}\sigma_1 \end{pmatrix}$$

sejam as palavras $A_{i+1} = A_i\pi_1$.

Verifica-se que a palavra $P = A_0A_1\ldots A_{h-1}$ é $(n-2)$-irredutível.

Dada a permutação

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_5\ldots\sigma_{2h-3}\sigma_{2h-1} \\ \sigma_2\sigma_3\sigma_5\sigma_7\ldots\sigma_{2h-1}\sigma_1 \end{pmatrix}$$

sejam as palavras $B_{i+1} = A_i\pi_2$.

Verifica-se que a palavra $Q = A_0B_1B_2\ldots B_h$ é $(n-2)$-irredutível.

Sejam ainda as palavras C_i obtidas de A_i permutando-se as letras σ_1 e σ_2.

A palavra $R = C_0C_1\ldots C_{h-1}$ é $(n-2)$-irredutível.

Feitas essas construções, pode-se mostrar que se $\underline{\underline{x}}$ é uma palavra infinita livre de quadrados sobre um alfabeto com três letras $\Sigma = \{p,q,r\}$ e se $\phi\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma_n^*$ é o morfismo definido por $p\phi = P$, $q\phi = Q$ e $r\phi = R$, então $\underline{\underline{x}}\phi$ é $(n-2)$-irredutível.

Retirando-se a letra σ_{2h} de $\underline{\underline{x}}\phi$ obtém-se uma palavra infinita $(m-2)$-irredutível sobre um alfabeto com $m = 2h-1$ letras.

4 - PALAVRAS IRREDUTÍVEIS DE FATOR t

Uma palavra w de Σ^* é irredutível de fator t, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, se toda quasepotência fgf de w é tal que $|g| \geq t|f|$. Se w contém uma quasepotência fgf com $|g| < t|f|$ dizemos que w é *redutível de fator* t. Este conceito é devido a F. Dejean [Dj] que propôs o seguinte problema extremo: "determinar, para um dado natural n, o maior número real T_n para o qual existe uma palavra infinita sobre Σ_n, irredutível de fator T_n".

É fácil ver que $T_2 = 0$ e que $T_n \leq n-2$ para todo $n \geq 3$. Para verificar que $T_2 = 0$ basta lembrar que toda palavra de comprimento maior ou igual a quatro sobre um alfabeto com duas letras tem um quadrado. Para verificar que $T_n \leq n-2$ para todo $n \geq 3$, basta lembrar que na secção anterior demonstramos que $L_n \leq n-2$, isto é, toda palavra suficientemente comprida de Σ_n contém como segmento uma quasepotência fgf com $|g| \leq n-2$. Como $|f| \geq 1$, temos $|g| \leq (n-2)|f|$.

Um morfismo ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é irredutível de fator t se leva palavras irredutíveis de fator t em palavras irredutíveis de fator t.

Seja ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ um morfismo e c uma palavra de Σ^* tal que c é um segmento de algum elemento de $\Sigma^*\phi$. Se existe uma única palavra w_1 de Σ^* tal que $w_1\phi = x_1cx_2$, com $x_1 \in pref^-(\Sigma\phi)$ e $x_2 \in suf^-(\Sigma\phi)$, então dizemos que c é um *segmento característico* de ϕ e que w_1 contém o segmento característico c.

Seja ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ um morfismo simétrico tal que para todo $\sigma \in \Sigma$ existe $u \in \Sigma^+$ tal que $\sigma\phi = \sigma u \sigma$. Se ϕ é irredutível de de fator $t \geq 0$ então $t \leq 1$ pois, se $\sigma\phi = \sigma u \sigma = \sigma\tau u'\sigma$ onde $\tau \in \Sigma$ e $\tau u' = u$ então $\tau \neq \sigma$. Se $\tau\phi = \tau v \tau$, $v \in \Sigma^+$, então $(\tau\sigma)\phi = \tau v \tau \sigma \tau u'\sigma$ contém a quasepotência $\tau\sigma\tau$ que é irredutível de fator 1, logo $t \leq 1$.

Em toda essa secção ϕ denotará um morfismo simétrico de Σ^* em Σ^* tal que para todo $\sigma \in \Sigma$ existe $u \in \Sigma^*$ tal que $\sigma\phi = \sigma u \sigma$.

LEMA 3 - Se u é um segmento de $w\phi$, $w \in \Sigma^*$, que contém um segmento característico de ϕ, então u também é um segmento característico de ϕ.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam f e $g \in \Sigma^*$ tais que $w\phi = fug$ e sejam $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$|f| = q_1 m + r_1, \quad |g| = q_2 m + r_2, \quad 0 \leq r_i \leq m = |\sigma\phi|, \quad i=1,2.$$

A palavra w_1 obtida retirando de w o segmento inicial de comprimento q_1 e o segmento final de comprimento q_2 é tal que $w_1\phi = x_1uy_1$, $|x_1| = r_1$ e $|y_1| = r_2$. Vamos mostrar que w_1 é única nestas condições.

Seja w_2 uma palavra de Σ^* tal que $w_2\phi = x_2uy_2$, $0 \leq |x_2|$, $|y_2| < m$.

Suponhamos que c seja um segmento característico de ϕ que ocorre em u e que v seja a palavra de Σ^* tal que $v\phi = xcy$, $x \in pref^-(\Sigma\phi)$ e $y \in suf^-(\Sigma\phi)$.

Se $f', g' \in \Sigma^*$ são tais que $u = f'cg'$ temos $w_1\phi = x_1f'cg'y_1$, $w_2\phi = x_2f'cg'y_2$ e, como para todo $\sigma \in \Sigma$, $|\sigma\phi| = m > 0$, temos

$$|x_1f'| \equiv |x|(mod\ m) \quad \text{e} \quad |x_2f'| \equiv |x|(mod\ m).$$

Segue que $|x_1| = |x_2|$ pois $0 \leq |x_i| < m$, $i = 1, 2$. De modo análogo podemos verificar que $|y_1| = |y_2|$, logo $|w_1| = |w_2|$.

Sejam τ_1 e $\tau_2 \in \Sigma$ tais que τ_1 é segmento inicial de w_1 e τ_2 é segmento inicial de w_2. Então $\tau_i\phi = x_ix_i'$, $i = 1, 2$, onde x_1' e x_2' são segmentos iniciais próprios de u e $|x_1'| = |x_2'|$, logo $x_1' = x_2'$.

Como ϕ é simétrico, é fácil ver que dois elementos distintos de $\Sigma\phi$ não podem ter um mesmo segmento inicial próprio ou um mesmo segmento final próprio, logo $\tau_1 = \tau_2$ e $x_1 = x_2$. Analogamente podemos verificar que $y_1 = y_2$.

Portanto $w_1\phi = x_1uy_1 = x_2uy_2 = w_2\phi$, donde podemos concluir que $w_1 = w_2$. $\square$

Se existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma\phi$ não é um segmento característico de ϕ então ϕ não é um morfismo livre de quadrados. De fato, se $\sigma\phi$ não é um segmento característico de ϕ então $\sigma\phi = d_0 e_1$, $d_0, e_1 \in \Sigma^+$ e existem $e_0, d_1 \in \Sigma^+$ tais que $e_0 d_0 = \sigma_0\phi$ e $e_1 d_1 = \sigma_1\phi$, $\sigma_0, \sigma_1 \in \Sigma$.

Se $\sigma \neq \sigma_0$ ou $\sigma \neq \sigma_1$ então ϕ não é livre de quadrados pois $(\sigma_0\sigma)\phi = e_0 d_0 d_0 e_1$ e $(\sigma\sigma_1)\phi = d_0 e_1 e_1 d_1$.

Se $\sigma_0 = \sigma = \sigma_1$ então $|e_0| = |e_1|$ e $|d_0| = |d_1|$.

Se $|d_0| = |e_0|$, como $\sigma\phi = e_0 d_0 = d_0 e_1$ temos $\sigma\phi = d_0 d_0$.

Se $|d_0| > |e_0|$, então $d_0 = e_0 x$, $x \in \Sigma^+$, logo $\sigma\phi = d_0 d_0 = e_0 e_0 x$.

Se $|d_0| < |e_0|$, então $|d_1| < |e_1|$ e $e_1 = y d_1$, $y \in \Sigma^+$, logo $\sigma\phi = e_1 d_1 = y d_1 d_1$.

Portanto, para que ϕ seja um morfismo irredutível de fato $t > 0$ é necessário que $\sigma\phi$ seja segmento característico de ϕ, para todo $\sigma \in \Sigma$. Se ϕ é um morfismo nestas condições então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq 2m-2$, $m = |\sigma\phi|$, tal que para toda palavra $w \in \Sigma^*$ que é segmento de algum elemento de $\Sigma^*\phi$, se $|w| > n_0$ então w é um segmento característico de ϕ.

PROPOSIÇÃO 2 - Seja ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ um morfismo simétrico tal que para todo $\sigma \in \Sigma$, $\sigma\phi$ é segmento característico de ϕ e existe $u \in \Sigma^+$ tal que $\sigma\phi = \sigma u \sigma$. Nestas condições ϕ é irredutível de fator t, $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$, se e somente se $w\phi$ é irredutível de fator t, qualquer que seja a palavra w de Σ^* irredutível de fator t com $|w| \leq \left\lfloor \frac{(2+t)n_0}{m} \right\rfloor + 2$.

DEMONSTRAÇÃO - É evidente que a condição é necessária. Vamos mostrar que ela é suficiente.

Seja $w \in \Sigma^*$ uma palavra irredutível de fator t com $|w| > \left\lfloor \frac{(2+t)n_0}{m} \right\rfloor + 2$ e seja uvu uma quase potência de w_ϕ.

Se u contém um segmento característico c de ϕ então, pelo Lema 3, existe uma única palavra u_1 de Σ^* tal que $u_1\phi \doteq xuy$, $0 \leq |x|, |y| < m$. Deste modo existe $v_1 \in \Sigma^*$ tal que $u_1v_1u_1$ é segmento de w e $(u_1v_1u_1)\phi = xuvuy$. Como w é irredutível de fator t, temos $|v_1| \geq t|u_1|$ e como $v = y(v_1\phi)x$ e $u_1\phi = xuy$ temos $|v| \geq |v_1|m$ e $|u| \leq |u_1|m$. Daí segue que $\frac{|v|}{|u|} \geq \frac{|v_1|}{|u_1|} \geq t$, isto é, $|v| \geq t|u|$.

Se u não contém um segmento característico então $|u| \leq n_0$.

Se tivéssemos $|v| < t|u|$ então teríamos $|uvu| = 2|u| + |v| < (2+t)n_0$ e existiria um segmento w_1 de w com $|w_1| \leq \left\lfloor \frac{(2+t)n_0}{m} \right\rfloor + 2$ tal que uvu seria um segmento de $w_1\phi$, o que seria uma contradição com a hipótese.

Portanto ϕ é irredutível de fator t. □

Devido à simetria dos elementos de $\Sigma\phi$, se $\sigma\phi$ é segmento característico de ϕ para algum $\sigma \in \Sigma$ então $\sigma\phi$ é segmento característico de ϕ para todo $\sigma \in \Sigma$.

Para verificar se $\sigma\phi = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m$, $\sigma, \sigma_i \in \Sigma$, é segmento característico de ϕ basta fazer o seguinte:

Para $i = 1, 2, 3, \ldots, m-1$, consideramos u_i e $v_i \in \Sigma^+$ tais que $\sigma\phi = u_iv_i$, $u_i = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_i$ e $v_i = \sigma_{i+1}\ldots\sigma_m$. Verificamos então se

u_i é segmento final de $\sigma_i\phi$ e v_i é segmento inicial de $\sigma_{i+1}\phi$. Se isto não ocorre para nenhum valor de i então $\sigma\phi$ é segmento característico de ϕ.

EXEMPLO 7 - Seja ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b,c\}$, o morfismo simétrico definido por $a\phi = abcacbcabcbacbcacba$. F. Dejean [Dj] definiu este morfismo e demonstrou que ele é irredutível de fator $1/3$. Vamos demonstrar este fato mostrando que ϕ satisfaz as condições da Proposição 2.

Ao invés de procurarmos mostrar que $\sigma\phi$ é segmento característico de ϕ, para todo $\sigma \in \Sigma$, com o que teríamos $n_0 \leq 36 = 2 \times 19 - 2$, vamos determinar segmentos característicos de ϕ que são segmentos próprios de $\sigma\phi$, com que teremos uma delimitação menor para n_0.

Afirmamos que as palavras $c_1 = abcacbc$, $c_2 = cabcbac$ e $c_3 = cbcacba$ são segmentos característicos de ϕ. De fato, estas palavras são segmentos de $a\phi$ e não são segmentos de $b\phi$ ou de $c\phi$. Podemos ainda verificar facilmente que não podemos ter $c_i = f_1f_2$, $i = 1,2,3$, onde $f_1, f_2 \in \Sigma^+$, $f_1 \in suf(\sigma\phi)$ e $f_2 \in pref(\tau\phi)$, $\sigma, \tau \in \Sigma$.

Correspondentemente aos segmentos c_1, c_2 e c_3 de $a\phi$, os segmentos $c_1' = bcabaca$, $c_2' = abcacba$ e $c_3' = acabacb$ de $b\phi$ e os segmentos $c_1'' = cabcbab$, $c_2'' = bcabacb$ e $c_3'' = babcbac$ de $c\phi$ também são segmentos característicos de ϕ.

Deste modo temos $n_0 \leq 12$ e para mostrarmos que ϕ é irredutível de fator $1/3$, precisamos mostrar que a imagem por

ϕ de cada palavra irredutível de fator $1/3$ de Σ^*, de comprimento menor ou igual a $3 = \left\lfloor\frac{(2+1/3)12}{19}\right\rfloor + 2$, também é irredutível de fator $1/3$.

Como toda palavra irredutível de fator $1/3$ de Σ^*, de comprimento menor que três é segmento de alguma palavra de comprimento três irredutível de fator $1/3$, basta verificar que as imagens por ϕ destas últimas palavras são irredutíveis de fator $1/3$.

As palavras de comprimento três de Σ^* que são irredutíveis de fator $1/3$ são:

$$\begin{array}{cccc} aba & abc & aca & acb \\ bcb & bca & bab & bac \\ cac & cab & cbc & cba. \end{array}$$

Como ϕ é simétrico, das doze palavras acima, basta verificar que as imagens por ϕ das quatro primeiras, isto é, das que começam pela letra a, são irredutíveis de fator $1/3$. Esta verificação pode ser feita à mão ou com a ajuda do computador.

Desta forma a palavra infinita

$$a\phi^{\omega} = abcacbcabcbacbcacbabcabacabc\ldots$$

obtida por iteração de ϕ em a é irredutível de fator $1/3$, logo $T_3 \geq 1/3$.

M. Bodard (ver [Dj]) verificou que toda palavra de Σ^* de comprimento maior ou igual a 39 contém uma quasepotência fgf com $|g| \leq 1/3|f|$. Isto implica que $T_3 \leq 1/3$.

Portanto $T_3 = 1/3$ é o maior número real tal que existe uma palavra infinita de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, $\Sigma = \{a,b,c\}$, irredutível de fator $1/3$.

EXEMPLO 8 - O mesmo M. Bodard também verificou que toda palavra de comprimento maior ou igual a 122 sobre um alfabeto com quatro letras contém uma quasepotência fgf com $|g| \leq 3/2|f|$. Isto implica que $T_4 \leq 3/2$.

Seja $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b,c,d\}$, o morfismo simétrico definido por $a\phi = abcbdcdbcba$. Vamos mostrar que ϕ é irredutível de fator $t = 1$.

Como no exemplo anterior, as palavras $c_1 = abcb$, $c_2 = bdcdb$ e $c_3 = bcba$ (segmentos de $a\phi$) são segmentos característicos de ϕ e, correspondentemente, $c_1' = bcdc$, $c_2' = cadac$ e $c_3' = cdcb$ (segmentos de $b\phi$), $c_1'' = cdad$, $c_2'' = dbabd$ e $c_3'' = dadc$ (segmentos de $c\phi$) e $c_1''' = daba$, $c_2''' = acbca$ e $c_3''' = abad$ (segmentos de $d\phi$) também são segmentos característicos de ϕ.

Deste modo temos $n_0 \leq 7$ e, para verificarmos que ϕ é irredutível de fator $t = 1$, precisamos mostrar que a imagem por ϕ de toda palavra irredutível de fator $t = 1$, de comprimento menor ou igual a $3 = \left\lfloor \frac{(2+1)7}{11} \right\rfloor + 2$, é irredutível de fator $t = 1$.

Como no exemplo anterior, basta fazer esta verificação para as palavras de comprimento três que são irredutíveis de fator 1 e começam pela letra a, que são

$$aba \quad abc \quad abd \quad aca \quad acb \quad acd \quad ada \quad adb \quad adc.$$

Deste modo a palavra infinita

$$a\phi^{\omega} = abcbdcdbcbabcdcadacdcbcdadba\ldots$$

obtida por iteração de ϕ em a é irredutível de fator $t = 1$. Portanto $1 \leq T_4 \leq 3/2$.

M. Bodard construiu ainda palavras de Σ^* de comprimento maior que 5000, irredutíveis de fator $t = 3/2$ e palavras com mais de 5000 letras sobre Σ_n, $n = 5, 6, 7$, irredutíveis de fator $t = n-2$. Isto leva a pensar que $T_4 = 3/2$ e $T_n = n-2$, $n \geq 5$.

CAPÍTULO 3

REPETIÇÕES FRACAS EM PALAVRAS INFINITAS

1 - INTRODUÇÃO

Uma palavra w de Σ^* contém uma *repetição fraca de ordem k*, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, se contém k segmentos não vazios consecutivos $w_1, w_2, \ldots, w_k$, tais que para todo $1 \leq i, j \leq k$, as letras de w_i podem ser rearranjadas de modo a se obter w_j. Neste caso o segmento $w_1 w_2 \ldots w_k$ é uma repetição fraca de ordem k de w. Se k é igual a dois o segmento $w_1 w_2$ é dito um quadrado fraco e se $k = 3$ o segmento $w_1 w_2 w_3$ é dito um cubo fraco de w. Por exemplo, a palavra *bacacbbca* de Σ^*, $\Sigma = \{a, b, c\}$, contém os quadrados fracos *bb*, (*ac*)(*ac*), (*cb*)(*bc*), (*bac*)(*acb*) e (*acb*)(*bca*) e contém o cubo fraco (*bac*)(*acb*)(*bca*).

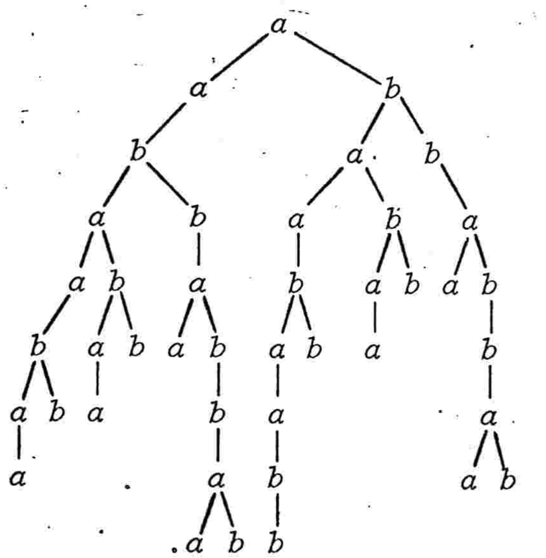
Se $\Sigma_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ é um conjunto ordenado e se $\psi_n \colon \Sigma_n^* \longrightarrow \mathbb{N}^n$ é o morfismo definido por

$$v\psi_n = (|v|_{\sigma_1}, |v|_{\sigma_2}, \ldots, |v|_{\sigma_n}), \text{ para todo } v \in \Sigma_n^*,$$

então $w_1 w_2 \ldots w_k$ é uma repetição fraca de ordem k de uma palavra de Σ_n^* se e somente se w_i e w_j são equivalentes módulo ψ_n, para todo $1 \leq i, j \leq k$. Portanto uma palavra w de Σ_n^* é livre de repetições fracas de ordem k se e somente se é livre de k-ésimas potências módulo ψ_n. O morfismo ψ_n é conhecido como *"função de Parikh"* e será utilizado frequentemente neste capítulo.

P. Erdös [Er] verificou que se $n = 2$ ou $n = 3$, toda palavra de Σ_n^* de comprimento maior ou igual a 2^n contém um quadrado fraco e conjecturou, em 1961, que existem palavras infinitas livres de quadrados fracos sobre um alfabeto com quatro letras. Neste capítulo estudaremos alguns problemas relacionados com essa conjectura.

Na árvore a seguir aparecem todas as palavras de Σ^*, $\Sigma = \{a,b\}$, que começam pela letra a e que são livres de cubos fracos



No caso das palavras de Σ^* que são livres de cubos fracos e começam pela letra b, podemos construir uma arvore idêntica a esta. Portanto se $w \in \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b\}$, e w é livre de cubos fracos então $|w| \leq 9$.

Dizemos que um morfismo ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é livre de repetições fracas de ordem k, $k \geq 2$, se para toda palavra w de Σ^*, se w é livre de repetições fracas de ordem k então $w\phi$ também é. Com isso, para construirmos uma palavra infinita livre de repetições fracas de ordem k é suficiente que construamos um morfismo de Σ^* em Σ^* que seja livre de repetições fracas de ordem k e prolongável em algum $\sigma \in \Sigma$.

2 - PALAVRAS INFINITAS LIVRES DE QUADRADOS FRACOS

A primeira construção de palavras infinitas livres de quadrados fracos data de 1968 e é devida a Evdokmov [Ev]. Esta construção é feita usando um alfabeto com vinte e cinco letras e é obtida por iteração em a_1 do morfismo simétrico ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{25}\}$, definido por

$$a_1\phi = a_1a_2a_3a_4a_5a_1a_3a_2a_3a_5a_2a_4a_5a_4a_1a_5a_4a_3a_2a_1.$$

TEOREMA 1 - Existe uma palavra infinita livre de quadrados fracos sobre um alfabeto com cinco letras.

DEMONSTRAÇÃO - Esta construção data de 1970 e é devida a Pleasants [P].

Seja ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b,c,d,e\}$, o morfismo simétrico definido por

$$a\phi = bacaeacadaeadab.$$

Vamos mostrar que ϕ é um morfismo livre de quadrados fracos. Para isso vamos mostrar, inicialmente, que a imagem por ϕ de toda palavra de comprimento no máximo dois, livre de quadrados fracos, também é livre de quadrados fracos.

É fácil verificar que a palavra $u = bcecdedb$ é livre de quadrados fracos. Como $a\phi = bacaeacadaecdab$ é obtida acrescentando uma letra a entre cada duas letras de u, $a\phi$ também é livre de quadrados fracos. Como ϕ é um morfismo simétrico segue que $\sigma\phi$ é livre de quadrados fracos, para todo $\sigma \in \Sigma$.

Suponhamos que existam $\sigma, \tau \in \Sigma$, $\sigma \neq \tau$, tais que $(\sigma\tau)\phi$ contém um quadrado fraco $w_1 w_2$, isto é, $w_1\psi_5 = w_2\psi_5$, onde ψ_5 é a função de Parikh. Já vimos que $w_1 w_2$ não pode ser segmento de $\sigma\phi$ ou $\tau\phi$.

Se w_1 é segmento final de $\sigma\phi$ então w_2 é segmento inicial de $\tau\phi$ e, como $\tau\phi$ contém apenas duas ocorrências da letra σ, temos $|w_2|_\sigma \leq 2$, e portanto $|w_1| = |w_2| \leq 5$. Neste caso temos $|w_1|_\tau \leq 1$ o que implica $|w_1| = |w_2| \leq 3$. É fácil verificar que isto não pode ocorrer, isto é, segmentos iniciais e finais de comprimento no máximo três de elementos distintos de $\Sigma\phi$ não são equivalentes módulo ψ_5. Portanto w_1 não é segmento final de $\sigma\phi$.

Suponhamos que w_1 seja um segmento não final de $\sigma\phi$. Podemos supor ainda, sem perda de generalidade, que $\sigma = a$. Neste caso $|w_2|_b \geq 1$ pois a letra b que é segmento final de $\sigma\phi$ é segmento de w_2. Isto implica que w_1 deve ser segmento inicial de $a\phi$ pois, para que tenhamos $|w_1|_b = 1$ é necessário que w_1 contenha a letra b que é segmento inicial de $\sigma\phi$. Sejam $x, y \in \Sigma^+$ tais que $x \in suf^-(a\phi)$, $y \in pref^-(\tau\phi)$ e $xy = w_2$. Como $a\phi$ contém apenas duas ocorrências da letra τ, temos $|w_i|_\tau \le 2$, $i=1,2$, com o que $|y| \le 5$ e $|w_1w_2| \le 20$.

Se $|w_1w_2| = 20$ então $|w_1|_a = 5$ pois $w_1 = bacaeacada$, $|x|_a = 2$ pois $x = eadab$ e $|y|_a \le 2$, que é impossível.

Se $|w_1w_2| = 18$ então $|w_1|_c = 2$ e $|x|_c = 0$. Portanto devemos ter $|y|_c = 2$, o que é impossível visto que $|y| = 3$.

Se $|w_1w_2| = 16$ então $|w_1|_d = 0$ e $|x|_d = 0$, o que também é impossível.

É evidente que não podemos ter $|w_1w_2| \le 15$ ou $|w_1w_2|$ igual a um número ímpar. Portanto w_1 não pode ser um segmento não final de $\sigma\phi$.

Se w_1 não é segmento de $\sigma\phi$ então w_2 é segmento não inicial de $\tau\phi$ e podemos verificar, de forma análoga à feita acima, que isto é impossível.

Portanto, para todo $\sigma,\tau \in \Sigma$, se $\sigma \ne \tau$ então $(\sigma\tau)\phi$ é livre de quadrados fracos.

Sejam $u,v \in \Sigma^*$ tais que $v\phi = fug$, $f,g \in \Sigma^*$, e, se (e_0,d_0) e (e_1,d_1) são os fragmentos determinados pela fatoração fug em $v\phi$, $e_id_i = x_i\phi$, $x_i \in 1\cup\Sigma$, $i = 0,1$, então $u = d_0(v'\phi)e_1$, $v' \in \Sigma^*$. Para todo $\sigma \in \Sigma$ as seguintes relações podem ser verificadas:

$$|u|_\sigma = |d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma + 2|v'| + 5|v'|_\sigma,$$

$$\frac{2}{15}|u| = 2|v'| + \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|),$$

$$|v'|_\sigma \le |x_0v'x_1|_\sigma \le |v'|_\sigma + 2.$$

Vamos demonstrar agora que para todo $\sigma \in \Sigma$, valem:

(1) $|u|_\sigma \leq \frac{2}{15}|u| + 5|x_0 v' x_1|_\sigma + \frac{32}{15}$

(2) $|u|_\sigma \geq \frac{2}{15}|u| + 5|v'|_\sigma - \frac{32}{15}$.

Para demonstrarmos (1) consideremos três casos:

(1.1) $|x_0 v' x_1|_\sigma = |v'|_\sigma$

Neste caso $x_0 \neq \sigma \neq x_1$, logo $|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \leq 4$. Vamos mostrar inicialmente que $|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \leq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) + \frac{32}{15}$.

Se $|d_0| + |e_1| < 7$ então

$$|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \leq 2 < \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) + \frac{32}{15}.$$

Se $7 \leq |d_0| + |e_1| < 14$ então

$$|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \leq \frac{46}{15} \leq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) + \frac{32}{15}.$$

Se $|d_0| + |e_1| \geq 14$ então

$$|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma = 4 \leq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) + \frac{32}{15}.$$

Com isso,

$$|u|_\sigma = |d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma + 2|v'| + 5|v'|_\sigma \leq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) + $$
$$+ \frac{32}{15} + 2|v'| + 5|v'|_\sigma = \frac{2}{15}|u| + 5|x_0 v' x_1|_\sigma + \frac{32}{15}.$$

(1.2) $|x_0 v' x_1|_\sigma = |v'|_\sigma + 1$

Vamos mostrar que $|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \leq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) + \frac{32}{15} + 5$.

Se $|d_0| + |e_1| \leq 14$ então

$$|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \leq 7 < \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) + \frac{32}{15} + 5.$$

Se $|d_0| + |e_1| > 14$ então

$$|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \leq 9 < \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) + \frac{32}{15} + 5.$$

Com isso,

$$|u|_\sigma = |d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma + 2|v'| + 5|v'|_\sigma \leq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) +$$
$$+ \frac{32}{15} + 5 + 2|v'| + 5|v'|_\sigma = \frac{2}{15}|u| + 5|x_0v'x_1|_\sigma + \frac{32}{15}.$$

(1.3) $|x_0v'x_1|_\sigma + |v'|_\sigma + 2$

Como no caso anterior, basta verificarmos que sendo $|d_0| + |e_1| \leq 25$ ou sendo $|d_0| + |e_1| > 25$, temos $|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \leq$ $\leq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) + \frac{32}{15} + 10$, com o que,

$$|u|_\sigma = |d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma + 2|v'| + 5|v'|_\sigma \leq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) +$$
$$+ \frac{32}{15} + 10 + 2|v'| + 5|v'|_\sigma$$

logo, $|u|_\sigma \leq \frac{2}{15}|u| + 5|x_0v'x_1|_\sigma + \frac{32}{15}$.

Portanto vale (1).

Para demonstrar (2) vamos começar mostrando que

$$|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \geq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) - \frac{32}{15}.$$

Se $|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \leq 1$ então $|d_0| + |e_1| \leq 9$ e temos

$$|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma \geq - \frac{14}{15} \geq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) - \frac{32}{15}.$$

Se $|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma > 1$, como $|d_0| + |e_1| \leq 28$, temos

$$|d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma > \frac{24}{15} \geq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) - \frac{32}{15}.$$

Com isso temos

$$|u|_\sigma = |d_0|_\sigma + |e_1|_\sigma + 2|v'| + 5|v'|_\sigma \geq \frac{2}{15}(|d_0|+|e_1|) +$$

$$+ 2|v'| + 5|v'|_\sigma - \frac{32}{15} = \frac{2}{15}|u| + 5|v'|_\sigma - \frac{32}{15},$$

e vale (2).

Suponhamos que exista $w \in \Sigma^*$ tal que w seja livre de quadrados fracos e $w\phi = fw_1w_2g$ onde w_1w_2 é um quadrado fraco. Evidentemente $|w| \geq 3$.

Seja $F = \{(e_i, d_i)\}_{0 \leq i \leq 2}$ a seqüência dos fragmentos determinados pela fatoração fw_1w_2g em $w\phi$. Como a imagem por ϕ de todo segmento de w de comprimento menor ou igual a dois é livre de quadrados fracos, temos $w = f'x_0w_1'x_1w_2'x_2g'$ onde $f', w_1', w_2', g' \in \Sigma^*$, $x_i \in 1 \cup \Sigma$ e $x_i\phi = e_id_i$, $i = 0, 1, 2$.

Consideremos v_1 e $v_2 \in \Sigma^*$ obtidos respectivamente de w_1' e w_2' da seguinte maneira: se uma letra $\sigma \in \Sigma$ ocorre simultaneamente em w_1' e w_2' então retiramos esta letra tanto de w_1' quanto de w_2'. Repetindo esse processo para todas as letras de Σ, tanto quanto seja possível, de w_1' obtemos v_1 e de w_2' obtemos v_2. Deste modo, para todo $\sigma \in \Sigma$, se $|v_1|_\sigma \neq 0$ então $|v_2|_\sigma = 0$ e vice-versa. Seja $w' = f'x_0v_1x_1v_2x_2g'$, não necessariamente livre de quadrados fracos.

Da construção de v_1 e v_2 a partir de w_1' e w_2' segue que para todo $y_1, z_1, y_2, z_2 \in \Sigma$,

$$(y_1v_1z_1)\psi_5 = (y_2v_2z_2)\psi_5 \text{ se e somente se } (y_1w_1'z_1)\psi_5 = (y_2w_2'z_2)\psi_5. \quad \text{(I)}$$

Sejam $u_1 = d_0(v_1\phi)e_1$ e $u_2 = d_1(v_2\phi)e_2$.

Para todo $\sigma \in \Sigma$ temos

$$|u_2|_\sigma \geq \frac{2}{15}|u_2| + 5|v_2|_\sigma - \frac{32}{15}$$

e

$$|u_1|_\sigma \leq \frac{2}{15}|u_1| + 5|x_0 v_1 x_1|_\sigma + \frac{32}{15}.$$

Como $d_0(w_1'\phi)e_1 = w_1$, $d_1(w_2'\phi)e_2 = w_2$ e $w_1\psi_5 = w_2\psi_5$, temos $u_1\psi_5 = u_2\psi_5$. Logo $|u_1|_\sigma = |u_2|_\sigma$ para todo $\sigma \in \Sigma$ e, das desigualdades acima, podemos obter $|x_0 v_1 x_1|_\sigma \geq |v_2|_\sigma$.

Reescrevendo essas desigualdades para u_1 e u_2 ao invés de u_2 e u_1, nesta ordem, podemos obter $|x_1 v_2 x_2|_\sigma \geq |v_1|_\sigma$, para todo $\sigma \in \Sigma$.

Portanto se $\sigma \in \Sigma$ ocorre em v_1 então σ não ocorre em v_2 e temos $|x_1 x_2|_\sigma \geq |v_2|_\sigma$. Isto implica que $|v_1|_\sigma \leq 2$ e que se $|v_1|_\sigma = 1$ então $\sigma = x_1$ ou $\sigma = x_2$ e se $|v_1|_\sigma = 2$ então $x_0 = \sigma = x_1$. Segue daí que $|v_1| \leq 2$. De modo análogo, se σ ocorre em v_2 então σ não ocorre em v_1 e temos $|x_0 x_1|_\sigma \geq |v_2|_\sigma$. Isto implica que $|v_2|_\sigma \leq 2$ e se $|v_2|_\sigma = 1$ então $\sigma = x_0$, ou $\sigma = x_1$ e se $|v_2|_\sigma = 2$ então $x_0 = \sigma = x_1$. Segue daí que $|v_2| \leq 2$.

Vamos estudar todas as possibilidades para $|v_1|$ e $|v_2|$. Denotemos por *Caso*(i,j) o caso onde $|v_1| = i$ e $|v_2| = j$, $0 \leq i,j \leq 2$.

CASO $(0,0)$ - Neste caso $w = f'x_0 w_1' x_1 w_2' x_2 g'$, $w_1'\psi_5 = w_2'\phi_5$ e $w' = f'x_0 x_1 x_2 g'$. Como w é livre de quadrados fracos, devemos ter $x_1 \neq 1$ e $x_0 \neq x_1 \neq x_2$. Por outro lado, como $u_1 u_2$ é um quadrado fraco, $u_1 u_2$ não pode ser segmento de $(x_0 x_1)\phi$ ou de $(x_1 x_2)\phi$

e devemos ter $x_0 \neq 1 \neq x_2$. Como ϕ é um morfismo simétrico podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 = a$.

Se $x_0 \neq x_2$ então $(x_1 x_2)\phi$ contém apenas quatro ocorrências da letra x_0. Portanto u_2 e, consequentemente, u_1 contém no máximo quatro ocorrências da letra x_0 donde concluímos que $|d_0| \leq 9$. Pensando no número de ocorrências da letra x_2 em u_1 e u_2 podemos concluir, de modo análogo, que $|e_2| \leq 9$.

Se $x_0 = x_2$, seja $x = x_0 = x_2$ e vamos mostrar que neste caso também podemos considerar $|d_0| \leq 9$ e $|e_2| \leq 9$. Se $|d_0| + |e_2| > 15$ então existe $y \in \Sigma^+$ com $|y| = |d_0| + |e_2| - 15$ tal que $x\phi = e_0 d_0 = e_0 y d_2 = e_2 d_2$. Com isso temos $u_1 = y d_2 e_1$ e $u_2 = d_1 e_0 y$. Considerando $u_1' = d_2 e_1$ e $u_2' = d_1 e_2$ vemos que $u_1' u_2'$ também é um quadrado fraco de $w'\phi$ e $|d_2| + |e_0| \leq 15$. Se $|d_2| \leq 10$ então $|e_0| \leq 5$ e $|e_0|_x \leq 2$. Deste modo $|u_1'|_x \geq 5$ e $|u_2'|_x \leq 4$, o que é um absurdo. Portanto $|d_2| \leq 9$. De modo análogo podemos demonstrar que $|e_0| \leq 9$.

Com isso podemos considerar que se $u_1 u_2$ é um quadrado fraco de $(x_0 x_1 x_2)\phi$ onde $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ são elementos de Σ, $u_1 = d_0 e_1$, $u_2 = d_1 e_2$ e $x_i\phi = e_i d_i$, então $|d_0| \leq 9$ e $|e_2| \leq 9$.

Se $|e_1|_a \geq 4$ então $|e_1|_c = 2$ e $|d_1|_c = 0$ logo devemos ter $|e_2|_c \geq 2$. Como $|e_2| \leq 9$ então $x_2 = a$ ou $x_2 = c$. Por hipótese $x_2 \neq x_1 = a$, logo $x_2 = c$. De $|e_1|_a \geq 4$ temos $|d_1|_a \leq 3$ logo $|e_2|_a \geq 1$, com o que temos $e_2 = dcecbceca$ e $|e_2|_a = 1$, $|d_1|_a = 3$, $|e_1|_a = 4$ e $|d_0|_a = 0$. Desta forma temos $e_1 = bacaeaca(d)$ e $d_1 = (d)acadab$ onde a letra d entre parênteses ocorre em e_1 ou em d_1. Disto concluímos que devemos ter $|d_0|_a = 0$, $|d_0|_b = 1$, $|d_0|_c = 2$ e $|d_0|_e = 2$, o que verifica-se facilmente ser impossível.

Se $|e_1|_a < 4$ então $|d_1|_a \geq 4$ e $|d_1|_d = 2$, logo devemos ter $|d_0|_d \geq 2$. Como $|d_0| \leq 9$ e $x_0 \neq a$ temos $x_0 = d$. De maneira análoga à anterior podemos demonstrar que isto também é impossível.

Portanto o *Caso*$(0,0)$ não pode ocorrer.

CASO $(1,0)$ - Neste caso temos $|u_1| \geq 15$ logo $x_1 \neq 1 \neq x_2$. Seja $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma = v_1$. Se $x_1 = \sigma$ então $w' = f'x_0v_1x_1v_2x_2g' = f'x_0\sigma\sigma x_2g'$ e temos $v_1\psi_5 = (x_1v_2)\psi_5$. De (I) segue que $w_1'\psi_5 = (x_1w_2')\psi_5$, o que é impossível porque nesse caso w conteria o quadrado fraco $w_1'(x_1w_2')$. Portanto devemos ter $x_1 \neq \sigma = v_1$ e, consequentemente, $x_2 = \sigma$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 = a$.

Se $x_0 = a = x_1$ então $x_0v_1 = a\sigma$ e $x_1v_2x_2 = a\sigma$ logo, por (I), $(x_0w_1')\psi_5 = (x_1w_2'x_2)\psi_5$ donde concluimos que w contém um quadrado fraco, o que é uma contradição com a hipótese. Portanto, $x_0 \neq a$.

Como $u_1\psi_5 = (d_0e_2d_2e_1)\psi_5 = (d_0d_2e_1)\psi_5 + e_2\psi_5$ e $u_2\psi_5 = (d_1e_2)\psi_5 = d_1\psi_5 + e_2\psi_5$ temos $(d_0d_2e_1)\psi_5 = d_1\psi_5$. Sejam u_1' e $u_2' \in \Sigma^*$, $u_1' = d_0d_2e_1$ e $u_2' = d_1$.

Como $x_1 = a$ e $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ temos $|d_0|_a \leq 2$ e $|d_2|_a \leq 2$. Por outro lado temos $|e_1|_a + |d_1|_a = 7$ e $|u_1'|_a = |d_0|_a + |d_2|_a + |e_1|_a = |d_1|_a = |u_2'|_a$, donde podemos concluir que $4 \leq |d_1|_a \leq 5$.

Se $|d_1|_a = 5$ então $|e_1|_a = 2$, $|d_0|a + |d_2|_a = 3$, $10 \leq |d_1| \leq 11$ e $4 \leq |e_1| \leq 5$. Como $\sigma \neq a \neq x_0$ temos $|d_0|_a \leq 2$ e $|d_2|_a \leq 2$. Se $|d_0|_a = 2$ então $|d_0| \geq 7$ e temos $|d_0| + |d_2| + |e_1| \geq 11 + |d_2| > 11 \geq |d_1|$, o que é absurdo. De modo análogo, podemos verificar que não podemos ter $|d_2|_a = 2$, o que implica que $|d_1|_a = 4$.

Para que não tenhamos $|u_1'|_c > |u_2'|_c$ devemos ter $|d_1|_c \geq |e_1|_c$ logo $d_1 = cadaeadab$ e $e_1 = bacaea$. Com isso temos $|d_0| + |d_2| = 3$ e $|d_0 d_2|_a = 1, |d_0 d_2|_a = 2$ o que verifica-se facilmente ser impossível.

Concluímos então que o *Caso*$(1,0)$ não pode ocorrer.

CASO $(0,1)$ - Este caso pode ser tratado como a anterior.

CASO $(1,1)$ - Aqui existem quatro possibilidades a serem consideradas:

(i) $x_1 = 1$

Neste caso, como v_1 e $v_2 \in \Sigma$, devemos ter $v_1 = x_2$ e $v_2 = x_0$. Com isso $(x_0 v_1)\psi_5 = (v_2 x_2)\psi_5$ e, por (I), $(x_0 w_1')\psi_5 = (w_2' x_2)\psi_5$. Deste modo w contém o quadrado fraco $x_0 w_1' w_2' x_2$. Contradição.

(ii) $x_1 = v_1$

Neste caso v_2 deve ser diferente de x_1 logo $v_2 = x_0$. Com isso $(x_0 v_1)\psi_5 = (x_1 v_2)\psi_5$ e, por (I), w contém o quadrado fraco $x_0 w_1' x_1 w_2'$. Contradição.

(iii) $x_1 = v_2$

Este caso pode ser tratado como o anterior.

(iv) $v_1 \neq x_1 \neq v_2$, $x_1 \neq 1$

Neste caso devemos ter $v_1 = x_2$ e $v_2 = x_0$, com o que $x_0 \neq x_1 \neq x_2$. Como $x_i \phi = e_i d_i$ temos

$$u_1 = d_0(v_1\phi)e_1 = d_0(x_2\phi)e_1 = d_0e_2d_2e_1$$

e

$$u_2 = d_1(v_2\phi)e_2 = d_1(x_0\phi)e_2 = d_1e_0d_0e_2.$$

De $u_1\psi_5 = u_2\psi_5$ temos $(d_2e_1)\psi_5 = (d_1e_0)\psi_5$. Como $d_2e_1d_1e_0$ é segmento de $(x_2x_1x_0)\phi$ e $x_0 \neq x_1 \neq x_2$, temos uma contradição com o *Caso*$(0,0)$, já resolvido acima.

Portanto o *Caso*$(1,1)$ não pode ocorrer.

CASOS $(2,0)$ e $(0,2)$ - Se $|v_i| = 2$, $i = 1$ ou $i = 2$ e $|v_j| = 0$, $j = 0$ ou $j = 2$, e $i \neq j$, então $|u_i| \geq 30$ e $|u_j| \leq 28$, o que é impossível.

CASO $(2,1)$ - De $|v_1| = 2$ temos $x_1, x_2 \in \Sigma$ e $v_1\psi_5 = (x_1x_2)\psi_5$. Se $v_2 = \sigma \in \Sigma$ então $\sigma \neq x_1$ pois x_1 ocorre em v_1, logo $v_2 = \sigma = x_0$. Deste modo $(x_0v_1)\psi_5 = (x_1v_2x_2)\psi_5$ e, por (I), w contém o quadrado fraco $(x_0w_1')(x_1w_2'x_2)$. Contradição.

CASO $(1,2)$ - Este caso pode ser tratado como o anterior.

CASO $(2,2)$ - De $|v_i| = 2$, $i = 1,2$, segue que $x_0, x_1, x_2 \in \Sigma$ e que $(x_0x_1)\psi_5 = v_2\psi_5$ e $(x_1x_2)\psi_5 = v_1\psi_5$. Mas isto não é possível porque senão teríamos $|v_1|_{x_1} = 1 = |v_2|_{x_1}$. Portanto este caso não pode ocorrer.

Com isso fica demonstrado que se $w \in \Sigma^*$ é livre de quadrados fracos então $w\phi$ também é, o que nos garante que ϕ é um morfismo livre de quadrados fracos. Desta forma o subconjunto $X = \{a\phi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Σ^* é infinito e todos os seus elementos são livre de quadrados fracos. Da Proposição 1.3.4 segue que existem palavras infinitas de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ livres de quadrados fracos, o que encerra a demonstração. □

Para construirmos uma palavra infinita livre de quadrados fracos por meio da iteração de um morfismo de Σ^* em Σ^* em uma letra de Σ, basta considerarmos o morfismo simétrico α: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ definido por $a\alpha = e\phi = aebedebecedecea$.

Este morfismo α é livre de quadrados fracos e é prolongável em σ, para todo $\sigma \in \Sigma$. Deste modo a palavra infinita $\sigma\alpha^{\omega} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, obtida por iteração de α em σ é livre de quadrados fracos, para todo $\sigma \in \Sigma$.

3 - MORFISMOS LIVRES DE REPETIÇÕES FRACAS

Vamos estabelecer algumas condições suficientes para que um morfismo ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ tal que $|\sigma\phi| = t > 1$ para todo $\sigma \in \Sigma$, seja livre de repetições fracas de ordem k, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$.

PROPOSIÇÃO 1 - Seja ϕ: $\Sigma_n^* \longrightarrow \Sigma_n^*$ um morfismo tal que $|\sigma\phi| = t > 1$ para todo $\sigma \in \Sigma_n$. Para que ϕ seja livre de repetições fracas de ordem k, $k \geq 2$, é suficiente que verifique:

(i) o conjunto $\Sigma_n \phi\psi_n \subseteq \mathbb{N}^n$ é linearmente independente em Q;

(ii) para toda palavra w de Σ_n^*, se $w\phi = fw_1 w_2 \ldots w_k g$, onde $w_1 w_2 \ldots w_k$ é uma repetição fraca de ordem k, isto é, $w_1\psi_n = w_2\psi_n = \ldots = w_k\psi_n$, então ou todos os fragmentos esquerdos ou todos os fragmentos direitos determinados pela fatoração $fw_1w_2...w_kg$ em $w\phi$ são equivalentes módulo ψ_n.

DEMONSTRAÇÃO - Vamos mostrar inicialmente que se u e v são palavras de Σ_n^* tais que $u\phi\psi_n = v\phi\psi_n$ então $u\psi_n = v\psi_n$. Sendo $\Sigma = \{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\}$, de $u\phi\psi_n = v\phi\psi_n$ temos

$$|u|_{\sigma_1}(\sigma_1\phi\psi_n) + |u|_{\sigma_2}(\sigma_2\phi\psi_n) + ... + |u|_{\sigma_n}(\sigma_n\phi\psi_n) =$$

$$= |v|_{\sigma_1}(\sigma_1\phi\psi_n) + ... + |v|_{\sigma_n}(\sigma_n\phi\psi_n).$$

Sejam $c_1,c_2,...,c_n \in \mathbb{Z}$ tais que $c_i = |u|_{\sigma_i} - |v|_{\sigma_i}$. Então

$$c_1(\sigma_1\phi\psi_n) + c_2(\sigma_2\phi\psi_n) + ... + c_n(\sigma_n\phi\psi_n) = 0.$$

Como $\Sigma_n\phi\psi_n = \{\sigma_1\phi\psi_n,...,\sigma_n\phi\psi_n\}$ é linearmente independente em Q temos $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. Logo $|u|_{\sigma_i} = |v|_{\sigma_i}$ para todo i, isto é, $u\psi_n = v\psi_n$.

Desta forma, se $w \in \Sigma_n^*$ é tal que $w\phi$ contém uma repetição fraca de ordem k, $w_1w_2...w_k$, com $w_i = v_i\phi$, $v_i \in \Sigma^*$, então w contém a repetição fraca de ordem k, $v_1v_2...v_k$. (II)

Seja w uma palavra de Σ_n^* tal que $w\phi = fw_1w_2...w_kg$ onde $w_1w_2...w_k$ é uma repetição fraca de ordem k. Seja $s \in \mathbb{Z}$, $s > 0$, tal que $|w_i| = s$ para todo i, e seja $F = \{(e_i,d_i)\}_{0 \le i \le k}$ a seqüência dos fragmentos determinados pela fatoração $fw_1w_2...w_kg$ em $w\phi$.

Se $s < t$ então $(t,s) = 1$ e, da Proposição 1.1.1, temos $|e_i| = |e_j|$ se e somente se $i \equiv j\ (mod\ t)$. Segue que para todo $0 \le i < k$, $|e_i| \ne |e_{i+1}|$ e, consequentemente, $|d_i| \ne |d_{i+1}|$. Contradição com a hipótese (ii) pois se $u\psi_n = v\psi_n$ então $|u| = |v|$.

Portanto $s \ge t$ e, para todo $1 \le i \le k$, d_{i-1} é segmento inicial e e_i é segmento final de w_i e, como $e_j d_j \in 1 \cup \Sigma_n\phi$ para todo j, existem $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \Sigma_n\phi$ tais que $w_i = d_{i-1}v_i e_i$. Então $w\phi = f'e_0 d_0 v_1 e_1 d_1 v_2 e_2 d_2 \ldots e_{k-1} d_{k-1} v_k e_k d_k g'$ onde $f'e_0 = f$ e $d_k g' = g$.

Se $e_i\psi_n = e_j\psi_n$ para todo $0 \le i, j \le k$, então para todo $1 \le i \le k$,

$$\begin{aligned} w_i\psi_n &= (d_{i-1}v_i e_i)\psi_n = d_{i-1}\psi_n + v_i\psi_n + e_i\psi_n \\ &= d_{i-1}\psi_n + v_i\psi_n + e_{i-1}\psi_n \\ &= (e_{i-1}d_{i-1}v_i)\psi_n. \end{aligned}$$

Deste modo $w\phi$ contém uma repetição fraca de ordem k, $w_1' w_2' \ldots w_k'$, onde $w_i' = e_{i-1}d_{i-1}v_i \in \Sigma^*\phi$ para todo i.

De (II) temos que w contém uma repetição fraca de ordem k.

O caso em que $d_i\psi_n = d_j\psi_n$, para todo $0 \le i, j \le k$, é análogo.

Portanto ϕ é livre de repetições fracas de ordem k.

□

Nós formulamos esta Proposição com o intuito de simplificar as demonstrações que aparecem nas secções 4, 5 e 6 a seguir, onde são obtidas algumas palavras infinitas livres de repetições fracas.

Vejamos agora um Lema que também será utilizado nessas demonstrações.

LEMA 1 - Se M é um monóide comutativo e se $\theta: \Sigma_n^* \longrightarrow M$ é um morfismo então, para todo $u, v \in \Sigma_n^*$, se $u\psi_n = v\psi_n$ então $u\theta = v\theta$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $u\psi_n = v\psi_n$ então as letras de u podem ser rearranjadas de modo a se obter v. Isto significa que se $u = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_m$ e $v = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_m$, $\sigma_i, \tau_i \in \Sigma_n$, existe uma permutação ρ definida sobre o conjunto ordenado $\{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $\sigma_{1\rho}\sigma_{2\rho} \ldots \sigma_{m\rho} = v$.

Portanto

$$u\theta = \sigma_1\theta + \sigma_2\theta + \ldots + \sigma_m\theta = \sigma_{1\rho}\theta + \sigma_{2\rho}\theta + \ldots + \sigma_{m\rho}\theta = v\theta. \quad \square$$

4 - PALAVRAS INFINITAS LIVRES DE REPETIÇÕES FRACAS DE ORDEM CINCO SOBRE UM ALFABETO COM DUAS LETRAS

TEOREMA 2 - Existe uma palavra infinita livre de repetições fracas de ordem cinco sobre um alfabeto com duas letras.

DEMONSTRAÇÃO - Seja o morfismo $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b\}$, definido por $a\phi = aaaab$ e $b\phi = abbbb$.

A definição deste morfismo e a demonstração de que ele é livre de repetições fracas de ordem cinco é devida a J. Justin [J1].

O morfismo ϕ satisfaz a condição (i) da Proposição 3.1 pois como

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 15 \neq 0$$

o conjunto $\Sigma\phi\psi_2 = \{(4,1),(1,4)\}$ é linearmente independente em Q.

Vamos mostrar agora que ϕ satisfaz as condições (ii) da Proposição 3.1.

Seja w uma palavra de Σ^* tal que $w\phi = fw_1w_2w_3w_4w_5g$ onde $w_1w_2\dots w_5$ é uma repetição fraca de ordem cinco e seja $\{(e_i,d_i)\}_{0\leq i\leq 5}$ a seqüência dos fragmentos determinados pela fatoração $fw_1w_2\dots w_5g$ em $w\phi$.

Se $s = |w_i|$ e $r\in\mathbb{Z}$, $0 \leq r < 5$, são tais que $s \equiv r(mod\ 5)$ e se $|e_i| = c_i$, $0 \leq i \leq 5$, então a Proposição 1.1.1 nos garante que $c_{i+1} \equiv (c_i+r)(mod\ 5)$, $0 \leq i \leq 4$.

Vamos mostrar que $r = 0$. Para isso suponhamos que $r \neq 0$. Neste caso temos $(5,r) = 1$ e

$$c_i = c_j \text{ se e somente se } i \equiv j(mod\ 5),$$

logo $\{c_0,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\} = \{0,1,2,3,4\}$ e $c_0 = c_5$.

Consideremos agora o morfismo $\theta\colon \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}_3$, onde $\mathbb{Z}_3$ é o grupo aditivo dos inteiros módulo 6, definido por $a\theta = 1$ e $b\theta = 2$. É fácil ver que $a\phi\theta = 0 = b\phi\theta$. Do Lema 3.1 segue que existe $h\in\mathbb{Z}_3$ tal que $w_i\theta = h$, para todo $1 \leq i \leq 5$, e pela Proposição 1.2.3 temos $e_{i+1}\theta \equiv (e_i\theta+h)(mod\ 3)$, para todo $0 \leq i \leq 4$.

Para cada índice i, $0 \leq i \leq 5$, temos as seguintes possibilidades para $c_i = |e_i|$ e $e_i\theta$:

c_i	$e_i\theta$
0	0
1	1
2	0 ou 2
3	0 ou 2
4	1

Tabela 1

Se tivéssemos $r = 1$ existiriam $0 \le i,j \le 4$, tais que $c_i = 0$, $c_{i+1} = 1$, $c_j = 4$ e $c_{j+1} = 0$. Com isso teríamos

$$h \equiv (e_{i+1}\theta - e_i\theta)(mod\ 3) \equiv (1-0)(mod\ 3) \equiv 1(mod\ 3)$$

e

$$h \equiv (e_{j+1}\theta - e_j\theta)(mod\ 3) \equiv (0-1)(mod\ 3) \equiv 2(mod\ 3)$$

o que obviamente não é possível.

Da mesma forma, se tivéssemos $r = 2$ existiriam i,j, $0 \le i,j \le 4$, tais que $c_i = 4$, $c_{i+1} = 1$, $c_j = 1$ e $c_{j+1} = 3$. Com isso teríamos

$$h \equiv (e_{i+1}\theta - e_i\theta)(mod\ 3) \equiv (1-1)(mod\ 3) \equiv 0(mod\ 3)$$

e

$$h \equiv (e_{j+1}\theta - e_j\theta)(mod\ 3) \equiv \begin{cases} (0-1)(mod\ 3) \equiv 2(mod\ 3) \\ \text{ou} \\ (2-1)(mod\ 3) \equiv 1(mod\ 3), \end{cases}$$

o que também não é possível.

De forma análoga podemos demonstrar que $r \neq 3$ e $r \neq 4$.

Portanto $r=0$ e como $s=|w_i|>0$ e $s\equiv r(mod\ 5)$ temos $s=q\cdot 5$ onde $q\in\mathbb{Z}$, $q\geq 1$.

Como $c_{i+1}\equiv(c_i+r)(mod\ 5)$, existe $c\in\mathbb{Z}$, $0\leq c<5$, tal que $c_i=c$, $0\leq i\leq 5$.

– Se $c=0$ então $e_i=1$, para todo i, logo $e_i\psi_2=e_j\psi_2=$ $=(0,0)$, para todo $0\leq i,j\leq 5$.

– Se $c=1$ então $e_i=a$, para todo i, logo $e_i\psi_2=e_j\psi_2=$ $=(1,0)$, para todo $0\leq i,j\leq 5$.

– Se $c=2$ e se existem $0\leq i\neq j\leq 5$ tais que $e_i\neq e_j$ então, da definição de ϕ, temos $\{e_i,e_j\}=\{aa,ab\}$, logo $\{e_i\theta,e_j\theta\}=$ $=\{0,2\}$. Isto implica que $h\neq 0$, pois se tivéssemos $h=0$ teríamos $e_i\theta=e_j\theta$. Da Proposição 1.2.3 segue que $\{e_i\theta\}_{0\leq i\leq 5}=$ $=\mathbb{Z}_3$ logo existe $0\leq l\leq 5$ tal que $e_l\theta=1$, o que contradiz a Tabela 1. Portanto se $c=2$ então $e_i=e_j$ e, consequentemente, $e_i\psi_2=e_j\psi_2$, para todo $0\leq i,j\leq 5$.

– De modo análogo podemos demonstrar que se $c=3$ então $e_i=e_j$, para todo $0\leq i,j\leq 5$.

– Se $c=4$ então $d_i=b$, para todo i, logo $d_i\psi_2=d_j\psi_2=$ $=(0,1)$, para todo $0\leq i,j\leq 5$.

Com isso fica demonstrado que o morfismo ϕ satisfaz as condições da Proposição 3.1 e a palavra infinita de $\Sigma^{\mathbb{N}}$

$$a\phi^{\omega}=aaaabaaaabaaaabaaaababbb\ldots$$

obtida por iteração de ϕ em a é livre de repetições fracas de ordem cinco. $\square$

5 - PALAVRAS INFINITAS LIVRES DE REPETIÇÕES FRACAS DE ORDEM QUATRO SOBRE UM ALFABETO COM TRÊS LETRAS

TEOREMA 3 - Existe uma palavra infinita livre de repetições fracas de ordem quatro sobre um alfabeto com três letras.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o morfismo $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b,c\}$, definido por

$$a\phi = bbbaa$$

$$b\phi = bbcca$$

$$c\phi = bcaaa,$$

e vamos mostrar que ele satisfaz as condições da Proposição 3.1. Esta demonstração segue a mesma linha da apresentada na secção anterior.

(i) Para mostrarmos que o conjunto

$$\Sigma\phi\psi_2 = \{(2,3,0),(1,2,2),(3,1,1)\}$$

é linearmente independente em Q basta verificarmos que

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 15 \neq 0.$$

(ii) Seja w uma palavra de Σ^* tal que $w\phi = fw_1w_2w_3w_4g$ onde $w_1w_2w_3w_4$ é uma repetição fraca de ordem quatro e seja $\{(e_i,d_i)\}_{0\le i\le 4}$ a seqüência dos fragmentos determinados pela fatoração $fw_1w_2w_3w_4g$ em $w\phi$.

Se $s = |w_i|$ e se $r \in \mathbb{Z}$, $0 \le r < 5$ é tal que $s \equiv r (mod\ 5)$

segue, da Proposição 1.1.1, que

$$c_{i+1} \equiv (c_i+r)(mod\ 5),\ 0 \le i \le 3,\ \text{onde}\ c_j = |e_j|,\ 0 \le j \le 4.$$

Vamos mostrar que $r = 0$. Para isso suponhamos $r \neq 0$. Neste caso temos $(5,r) = 1$ e

$$c_i = c_j \text{ se e somente se } i \equiv j(mod\ 5),\ 0 \le i,j \le 4,$$

logo $\{c_0,c_1,c_2,c_3,c_4\} = \{0,1,2,3,4\}$.

Consideremos agora o morfismo $\theta\colon \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}_3$, onde $\mathbb{Z}_3$ é o grupo aditivo dos inteiros módulo 3, definido por $a\theta = 0$, $b\theta = 1$ e $c\theta = 2$.

É fácil ver que $\sigma\phi\theta = 0$, para todo $\sigma \in \Sigma$. Do Lema 3.1 segue que existe $h \in \mathbb{Z}_3$ tal que $w_i\theta = h$, $1 \le i \le 4$, e, da Proposição 1.2.3 segue que $e_{i+1}\theta \equiv (e_i\theta+h)(mod\ 3)$, $0 \le i \le 3$.

Para cada índice i, $0 \le i \le 4$, temos as seguintes possibilidades para $c_i = |e_i|$ e $e_i\theta$:

c_i	$e_i\theta$
0	0
1	1
2	0 ou 2
3	0 ou 1
4	0

Tabela 2

— Se $r = 1$, vamos supor que se $c_i = 4$ então $i < 4$. Isto implica que c_{i+1} existe é igual a zero, logo, $h = 0$ pois

$$h \equiv (e_{i+1}\theta - e_i\theta)(mod\ 3) \equiv (0-0)(mod\ 3).$$

No entanto isto não é possível porque nesse caso, para todo $0 \leq j \leq 4$, teríamos $c_j \neq 1$, o que é uma contradição.

Portanto, se $r = 1$ e se $c_i = 4$ então $i = 4$. Com isso temos $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$ e $c_4 = 4$ e ainda

$$h \equiv (e_i\theta - e_0\theta)(mod\ 3) \equiv (1-0)(mod\ 3) \equiv 1(mod\ 3)$$

e

$$h \equiv (e_4\theta - e_3\theta)(mod\ 3) \equiv \begin{cases} (0-0)(mod\ 3) \equiv 0(mod\ 3) \\ \text{ou} \\ (0-1)(mod\ 3) \equiv 2(mod\ 3), \end{cases}$$

o que é absurdo. Logo, $r \neq 1$.

- Se $r = 2$, vamos supor que se $c_i = 4$ então $i < 4$. Deste modo existe $c_{i+1} = 1$ e $h = 1$ pois

$$h \equiv (e_{i+1}\theta - e_i\theta)(mod\ 3) \equiv (1-0)(mod\ 3).$$

Na verdade, nesse caso devemos ter $i = 3$ pois se tivéssemos $i < 3$ então existiria c_{i+2} e teríamos $c_{i+2} = 3$. Com isso $e_{i+2}\theta = 2$ pois

$$e_{i+2}\theta \equiv (e_{i+1}\theta + h)(mod\ 3) \equiv (1+1)(mod\ 3),$$

o que contradiz a Tabela 2.

Portanto, se $c_i = 4$ implicar $i < 4$ então $c_3 = 4$, $c_2 = 2$ e $c_1 = 0$. Mas nesse caso temos $e_2\theta = 1$ pois

$$e_2\theta \equiv (e_1\theta+h)(mod\ 3) \equiv (0+1)(mod\ 3),$$

o que é uma contradição com a Tabela 2. A conclusão a que chegamos é que se $r=2$ e se $c_i=4$ então $i=4$. Então temos $c_0=1$, $c_1=3$, $c_2=0$, $c_3=2$ e $c_4=4$.

Vamos determinar o valor de h:

$$e_1\theta \equiv (e_0\theta+h)(mod\ 3) \equiv (1+h)(mod\ 3)$$

e

$$e_2\theta \equiv (e_1\theta+h)(mod\ 3).$$

Como $e_2\theta=0$ pois $c_2=0$ temos

$$0 \equiv (1+h+h)(mod\ 3), \text{ logo } h=1.$$

No entanto isto implica que $e_1\theta=2$, o que é uma contradição com a Tabela 2. Portanto $r\neq 2$.

— Se $r=3$ vamos supor que se $c_i=1$ em $i<4$. Deste modo existe $c_{i+1}=4$ e $h=2$ pois

$$h \equiv (e_{i+1}\theta-e_i\theta)(mod\ 3) \equiv (0-1)(mod\ 3).$$

Na verdade, nesse caso, devemos ter $i=0$ pois se tivéssemos $i>0$ existiria c_{i-1} e teríamos $c_{i-1}=3$. Com isso teríamos $e_{i-1}\theta=2$ pois

$$e_{i-1}\theta \equiv (e_i\theta+h)(mod\ 3) \equiv (1-2)(mod\ 3),$$

o que seria uma contradição com a Tabela 2.

Portanto, se $r=3$ e se $c_i=1$ implicar $i<4$ teremos

$c_0 = 1$, $c_1 = 4$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ e $c_4 = 3$. Como $h = 2$ teremos $e_2\theta = 1$ pois

$$e_2\theta \equiv (e_3\theta - h)(mod\ 3) \equiv (0-2)(mod\ 3),$$

o que é uma contradição com a Tabela 2. Concluimos então que se $r = 3$ e $c_i = 1$ então $i = 4$, logo $c_0 = 4$, $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = 3$ e $c_4 = 1$. É fácil ver que nessas condições existirão $0 \leq i \neq j \leq 4$ tais que $e_i\theta \neq e_j\theta$, logo, $h \neq 0$ e $\{e_i\theta\}_{0 \leq i \leq 4} = \{0,1,2\}$. Da Tabela 2 temos que $e_i\theta = 2$ se e somente se $c_i = 2$, logo, $e_1\theta = 2$. Calculando h nessas condições temos

$$h \equiv (e_1\theta - e_0\theta)(mod\ 3) \equiv (2-0)(mod\ 3) \equiv 2(mod\ 3)$$

e

$$h \equiv (e_2\theta - e_1\theta)(mod\ 3) \equiv (0-2)(mod\ 3) \equiv 1(mod\ 3),$$

o que é um absurdo. Portanto $r \neq 3$.

- Se $r = 4$, vamos supor que se $c_i = 0$ então $i < 4$. Então existe c_{i+1}, $c_{i+1} = 4$ e $h = 0$ pois

$$h \equiv (e_{i+1}\theta - e_i\theta)(mod\ 3) \equiv (0-0)(mod\ 3).$$

No entanto isso não é possível pois $\{c_i\}_{0 \leq i \leq 4} = \{0,1,2,3,4\}$ e portanto existem $0 \leq i \neq j \leq 4$ tais que $e_i\theta \neq e_j\theta$.

Portanto, se $r = 4$ e se $c_i = 0$ então $i = 4$. Isto implica que $c_0 = 4$, $c_1 = 3$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$ e $c_4 = 0$ e que $h = 2$ pois $h \equiv (e_4\theta - e_3\theta)(mod\ 3) \equiv (0-1)(mod\ 3)$. Assim, $e_1\theta = 2$ pois

$$e_1\theta \equiv (e_0\theta+h)(mod\ 3) \equiv (0+2)(mod\ 3),$$

o que é uma contradição com a Tabela 2. Portanto $r \neq 4$.

Mostramos com isso que $r = 0$. Como $s = |w_i| > 0$ e $s \equiv r$ $(mod\ 5)$ temos $s = q5$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$.

Como $c_{i+1} \equiv (c_i+r)(mod\ 5)$, $0 \leq i \leq 3$, existe $c \in \mathbb{Z}$, $0 \leq c < 5$, tal que $c_i = c$, $0 \leq i \leq 4$.

- Se $c = 0$ então $e_i = 1$, para todo i, e $e_i\psi_3 = e_j\psi_3 = (0,0,0)$, para todo $0 \leq i,j \leq 4$.

- Se $c = 1$ então $e_i = b$, para todo i, e $e_i\psi_3 = e_j\psi_3 = (0,1,0)$, para todo $0 \leq i,j \leq 4$.

- Se $c = 2$ e se existem $0 \leq i \neq j \leq 4$ tais que $e_i \neq e_j$ então $\{e_i,e_j\} = \{bb,bc\}$ e $\{e_i\theta,e_j\theta\} = \{0,2\}$. Isto implica que $h \neq 0$ e, pela Proposição 1.2.3, $\{e_i\theta\}_{0 \leq i \leq 4} = \{0,1,2\}$. Então existe l, $0 \leq l \leq 4$, tal que $e_l\theta = 1$, o que é uma contradição com a Tabela 2. Portanto, se $c = 2$ temos $e_i = e_j$ e, consequentemente, $e_i\psi_3 = e_j\psi_3$, para todo $0 \leq i,j \leq 4$.

- Se $c = 3$ e se existem $0 \leq i \neq j \leq 4$ tais que $d_i \neq d_j$ então $\{d_i,d_j\} = \{aa,ca\}$ e $\{d_i\theta,d_j\theta\} = \{0,2\}$. Como $e_l\theta + d_l\theta \equiv 0$ $(mod\ 3)$, para todo $0 \leq l \leq 4$, temos $\{e_i\theta,e_j\theta\} = \{0,1\}$, logo, $h \neq 0$. Da Proposição 1.2.3 segue que existe $0 \leq l \leq 4$ tal que $e_l\theta = 2$, o que contradiz a Tabela 2. Portanto se $c = 3$ temos $d_i = d_j$ e, consequentemente, $d_i\psi_3 = d_j\psi_3$, para todo $0 \leq i,j \leq 4$.

- Se $c = 4$ então $d_i = a$, para todo i, logo, $d_i\psi_3 = d_j\psi_3 = (1,0,0)$, para todo $0 \leq i,j \leq 4$.

Isto demonstra que o morfismo ϕ satisfaz as condições da Proposição 3.1. Assim, a palavra infinita

$$b\phi^{\omega} = bbccabbccabcaaabcaaabbbaa...$$

de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, obtida por iteração de ϕ em b é livre de repetições fracas de ordem quatro. □

6 - PALAVRAS INFINITAS LIVRES DE CUBOS FRACOS SOBRE UM ALFABETO COM QUATRO LETRAS

TEOREMA 4 - Existe uma palavra infinita livre de cubos fracos sobre um alfabeto com quatro letras.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $\phi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b,c,d\}$, o morfismo definido por

$$a\phi = baada$$

$$b\phi = babca$$

$$c\phi = bdbda$$

$$d\phi = bdcca.$$

Como nos dois últimos casos, vamos demonstrar que ϕ satisfaz as condições da Proposição 3.1.

(i) Para mostrarmos que o conjunto

$$\Sigma\phi\psi_4 = \{(3,1,0,1),(2,2,1,0),(1,2,0,2),(1,1,2,1)\}$$

é linearmente independente sobre Q, basta verificarmos que

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -20 \neq 0.$$

(ii) Seja w uma palavra de Σ tal que $w\phi = fw_1w_2w_3g$, onde $w_1w_2w_3$ é um cubo fraco, seja $\{(e_i,d_i)\}_{0\leq i\leq 3}$ a seqüência dos fragmentos determinados pela fatoração $fw_1w_2w_3g$ em $w\phi$ e sejam $c_i = |e_i|$ e $s = |w_i|$, para todo i, e $r\in\mathbb{Z}$, $0 \leq r < 5$, tal que $s \equiv r(mod\ 5)$. Da Proposição 1.1.1 segue que $c_{i+1} \equiv (c_i+r)(mod\ 5)$, $0 \leq i \leq 2$.

Vamos mostrar que $r = 0$.

Consideremos o morfismo θ: $\Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, onde $\mathbb{Z}_4$ é o grupo aditivo dos inteiros módulo 4, definido por $a\theta = 0$, $b\theta = 1$, $c\theta = 2$ e $d\theta = 3$.

É fácil verificar que $\sigma\phi\theta = 0$, para todo $\sigma\in\Sigma$, e que para cada índice i, $0 \leq i \leq 3$, temos as seguintes possibilidades para $c_i = |e_i|$ e $e_i\theta$:

c_i	$e_i\theta$
0	0
1	1
2	0 ou 1
3	1 ou 2
4	0

Tabela 3

Do Lema 3.1 segue que existe $h \in \mathbb{Z}_4$ tal que $h = w_i\theta$, para todo i, e, da Proposição 1.2.3 segue que

$$e_{i+1}\theta \equiv (e_i\theta + h)(mod\ 4),\ 0 \le i \le 2,$$

e que para todo $0 \le i,j \le 3$, $e_i\theta = e_j\theta$ se e somente se

$$i \equiv j(mod\ \frac{4}{(4,h)}).$$

Portanto $\{e_i\theta\}_{0 \le i \le 3} \subseteq \{0,1,2,3\}$ e temos o seguinte:

- Se $h = 1$ ou $h = 3$ então $\{e_i\theta\}_{0 \le i \le 3} = \{0,1,2,3\}$, mas da Tabela 3 vemos que $e_i\theta \ne 3$, para todo i, logo não podemos ter $h = 1$ ou $h = 3$.

- Se $h = 2$ então $e_i\theta = e_j\theta$ se e somente se $i \equiv j(mod\ 2)$, isto é, $e_0\theta = e_2\theta$ e $e_1\theta = e_3\theta$.

  Então temos $\{e_i\theta\}_{0 \le i \le 3} = \{0,2\}$ ou $\{e_i\theta\}_{0 \le i \le 3} = \{1,3\}$. Como $e_i\theta \ne 3$, para todo i, temos $\{e_i\theta\}_{0 \le i \le 3} = \{0,2\}$. Isto implica que existem $0 \le i \ne j \le 3$ tais que $\{i,j\} = \{0,2\}$ ou $\{i,j\} = \{1,3\}$ e $e_i\theta = e_j\theta = 2$. Nesse caso vemos, pela Tabela 3, que $c_i = c_j = 3$. Da Proposição 1.1.1 temos

$$i \equiv j(mod\ \frac{5}{(5,s)})$$

  e como $0 \le i \ne j \le 3$ temos $(5,s) = 5$, logo, $s \equiv 0(mod\ 5)$ e $r = 0$. Assim, temos $c_i = c_j$ e, portanto, $e_i\theta = e_j\theta$, para todo $0 \le i,j \le 3$, o que é uma contradição com a hipótese de que $h = 2$.

  Portanto devemos ter $h = 0$. Neste caso, $e_i\theta = e_j\theta$, para todo $0 \le i,j \le 3$, e podemos verificar pela Tabela 3 que o conjunto $\{c_i\}_{0\le i\le 3}$ tem no máximo três elementos distintos. Assim, existem $0 \le i \ne j \le 3$ tais que $c_i = c_j$. Como no caso anterior, segue da Proposição 1.1.1 que $r = 0$.

Como $c_{i+1} \equiv (c_i + r)(mod\ 5)$, $0 \le i \le 2$, existe $c \in \mathbb{Z}$, $0 \le c < 5$, tal que $c_i = c$, $0 \le i \le 3$.

- Se $c = 0$ então $e_i = 1$, para todo i, e $e_i\psi_4 = e_j\psi_4 = (0,0,0,0)$, para todo $0 \le i, j \le 3$.

- Se $c = 1$ então $e_i = b$, para todo i, e $e_i\psi_4 = e_j\psi_4 = (0,1,0,0)$, para todo $0 \le i, j \le 3$.

- Se $c = 2$ e se existem $0 \le i \ne j \le 3$ tais que $e_i \ne e_j$ então $\{e_i, e_j\} = \{ba, bd\}$. Segue que $e_i\theta \ne e_j\theta$, o que é um absurdo pois sabemos que $h = 0$. Portanto devemos ter $e_i = e_j$ e, consequentemente, $e_i\psi_4 = e_j\psi_4$, para todo $0 \le i, j \le 3$.

- Se $c = 3$ e se existem $0 \le i \ne j \le 3$ tais que $d_i \ne d_j$ então $\{d_i, d_j\} = \{ca, da\}$. Segue que $d_i\theta \ne d_j\theta$ e como $(e_l\theta + d_l\theta) \equiv 0(mod\ 4)$, para todo $0 \le l \le 3$, temos $e_i\theta \ne e_j\theta$, o que é um absurdo pois $h = 0$. Portanto devemos ter $d_i = d_j$ e, consequentemente, $d_i\psi_4 = d_j\psi_4$, para todo $0 \le i, j \le 3$.

- Se $c = 4$ então $d_i = a$, para todo i, e $d_i\psi_4 = d_j\psi_4 = (1,0,0,0)$, para todo $0 \le i, j \le 3$.

Com isso fica demonstrado que o morfismo ϕ satisfaz as condições da Proposição 3.1, logo, a palavra infinita

$$b\phi^{\omega} = babcabaadababcabdbdabaada\ldots$$

de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, obtida por iteração de ϕ em b é livre de cubos fracos. □

7 - PROBLEMA EM ABERTO

Após as demonstrações feitas nesse capítulo, restam sem resposta as seguintes perguntas:

Existem ou não palavras infinitas:

1) livres de repetições fracas de ordem quatro sobre um alfabeto com duas letras?
2) livres de cubos fracos sobre um alfabeto com três letras?
3) livres de quadrados fracos sobre um alfabeto com quatro letras?

As duas primeiras perguntas tem SIM como resposta e foram respondidas por Dekking [Dk] em 1979. Como só tomamos conhecimento desses resultados de Dekking após o término da redação deste trabalho, descrevemo-os em um Apêndice.

A terceira pergunta, a qual Erdös conjecturou também ter resposta afirmativa, ainda continua sem ser respondida. Caso essa conjectura não seja verdadeira, será bastante difícil provar pois já foram construídas palavras de comprimento 7500 sobre um alfabeto com quatro letras e livres de quadrados fracos (ver [J2]).

APÊNDICE

Vamos descrever aqui as construções de palavras infinitas livres de repetições fracas de ordem quatro sobre um alfabeto com duas letras e de palavras infinitas livres de cubos fracos sobre um alfabeto com três letras, feitas por Dekking em 1979. Estas construções utilizam morfismos, tais como as apresentadas no Capítulo 3. O resultado fundamental para demonstrar que os morfismos utilizados são livres de repetições fracas é o Lema abaixo, que é bastante semelhante à Proposição 3.3.1.

Para a formulação do Lema precisamos da seguinte definição: Seja G um grupo abeliano finito e $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Um subconjunto A de G é *livre de progressões de ordem k* se, para todo $a \in A$,

$$a + ig \in A, \ 1 \leq i \leq k-1, \quad g \in G,$$

implicar $g = 0$.

LEMA - Sejam os morfismos $\phi\colon \Sigma_n^* \longrightarrow \Sigma_n^*$ e $\theta\colon \Sigma_n^* \longrightarrow G$, onde G é um grupo abeliano finito e seja $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. O morfismo ϕ é livre de repetições fracas de ordem k se:

(i) o conjunto $\Sigma_n \phi \psi_n$ é linearmente independente em $\mathbb{Q}$;

(ii) para todo $\sigma \in \Sigma$, $\sigma\phi\theta = 0$;

(iii) o conjunto $A = \{g \in G \mid g = e\theta,\ e \in pref(\Sigma\phi)\}$ é livre de progressões de ordem $k+1$;

(iv) para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $e_1, e_2, \ldots, e_m \in pref(\Sigma\phi)$, tais que $e_i \neq 1$, $e_i d_i = x_i\phi$ onde $d_i \in suf(\Sigma\phi)$ e $x_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq m$, se $e_1\theta = e_2\theta = \ldots = e_m\theta$ então $e_1 = e_2 = \ldots = e_m$ ou $d_1 = d_2 = \ldots = d_m$.

DEMONSTRAÇÃO - Vamos mostrar inicialmente que para todo $\sigma \in \Sigma_n$, se $\sigma\phi = ed$, $e, d \in \Sigma_n^+$, então $e\theta \neq 0$. Se tivéssemos $e\theta = 0$ então, como $\sigma\phi\theta = 0$, teríamos $d\theta = 0$. Assim, como podemos escrever $\sigma\phi = e'd'$ onde $d' = 1$, teríamos $e\theta = 0 = e'\theta$, $e \neq e'$ e $d \neq d'$, que contradiz (iv).

Disto segue que $\Sigma_n\phi$ é um biprefixo.

Seja w uma palavra de Σ_n^* tal que $w\phi = fw_1w_2\ldots w_kg$ onde $w_1w_2\ldots w_k$ é uma repetição fraca de ordem k de $w\phi$. Seja ainda $F = \{(e_i; d_i)\}_{0 \leq i \leq k}$ a seqüência dos fragmentos determinados pela fatoração $fw_1w_2\ldots w_kg$ em $w\phi$. Da Proposição 1.2.3 e de (iii) segue que $e_0\theta = e_1\theta = \ldots = e_k\theta$.

Se $e_i = 1$, para algum i, então $e_j\theta = 0$ e, consequentemente, $e_j = 1$, para todo j.

Se $e_i \neq 1$, para todo i, então (iv) implica que $e_0 = e_1 = \ldots = e_k$ ou $d_0 = d_1 = \ldots = d_k$.

A partir daí pode-se mostrar facilmente (ver parte final da demonstração da Proposição 3.3.1) que w contém uma repetição fraca de ordem k, o que encerra a demonstração. □

Vejamos agora as construções de palavras infinitas livres de repetições fracas feitas por Dekking:

TEOREMA 1 - Existe uma palavra infinita livre de repetições fracas de ordem quatro sobre um alfabeto com duas letras.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $\phi\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b\}$, o morfismo definido por

$$a\phi = abb$$

$$b\phi = aaab.$$

Como

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -5 \neq 0,$$

o conjunto $\Sigma\phi\psi_2 = \{(1,2),(3,1)\}$ é linearmente independente em Q e vale (i).

Seja $\theta\colon \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}_5$, onde $\mathbb{Z}_5$ é o grupo aditivo dos inteiros módulo 5, o morfismo definido por $a\theta = 1$ e $b\theta = 2$.

É fácil ver que $a\phi\theta = 0 = b\phi\theta$, logo vale (ii).

É fácil ver também que os únicos elementos não vazios e distintos, de $pref(\Sigma\phi)$, que são equivalentes módulo θ são

$$ab \text{ e } aaa \quad (ab\theta = 3 = aaa\theta)$$

e

$$abb \text{ e } aaab \quad (abb\theta = 0 = aaab\theta).$$

No primeiro caso os segmentos finais correspondentes às duas palavras são iguais a b e no segundo caso são iguais a 1. Logo vale (iv).

A verificação de que o conjunto

$$A = \{g \in \mathbb{Z}_5 \mid g = e\theta,\ e \in pref(\Sigma\phi)\} = \{0,1,2,3\}$$

é livre de progressões de ordem 5 também é imediata.

Deste modo ϕ é livre de repetições fracas de ordem quatro, o que também ocorre com a palavra infinita $a\phi^{\omega}$ obtida por iteração de ϕ em a. □

TEOREMA 2 - Existe uma palavra infinita livre de cubos fracos sobre um alfabeto com três letras.

DEMONSTRAÇÃO - Seja ϕ: $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, $\Sigma = \{a,b,c\}$, o morfismo definido por

$$a\phi = aabc$$

$$b\phi = bbc$$

$$c\phi = acc,$$

e seja θ: $\Sigma^* \longrightarrow \mathbb{Z}_7$, onde $\mathbb{Z}_7$ é o grupo aditivo dos inteiros módulo 7, o morfismo definido por $a\theta = 1$, $b\theta = 2$ e $c\theta = 3$. De modo análogo ao Teorema 1 pode-se demonstrar que ϕ é livre de cubos fracos, logo a palavra infinita $a\phi^{\omega}$ obtida por iteração de ϕ em a é livre de cubos fracos. □

Os morfismos ϕ utilizados nas demonstrações dos Teoremas 1 e 2 não satisfazem as condições da Proposição 3.3.1 e os morfismos ϕ utilizados nas demonstrações dos Teoremas 1,2, 3 e 4 do Capítulo 3, não satisfazem as condições do Lema acima.

- □ -

BIBLIOGRAFIA

[A] - ARSHON,S.E., Demonstration de l'existence de suites asymétriques infinies, *Mat. Sb.*, 44 (1937), 769-777.

[Be1] - BERSTEL,J., Mots sans carré et morphismes itérés, *Prepublications Laboratoire d'Informatique Théorique et Programmation*, nº 78-42.

[Be2] - BERSTEL,J., Sur les mots sans carré definis par un morphisme, *Institute de Programmation, Université Paris VI et Laboratoire d'Informatique Théorique et Programmation*, LA248 du CNRS.

[Br] - BRAUNHOLTZ,C.H., An infinite sequence of 3 symbols with no adjacent repeats, *American Math. Monthly*, 70 (1963), 675-676.

[De] - DEAN,R., A sequence without repeats on x,x^{-1},y,y^{-1}, *American Math. Monthly*, 72 (1965), 383-385.

[Dj] - DEJEAN,F., Sur un théorème de Thue, *J.Combinatorial Theory*, (A), 13 (1972), 90-99.

[Dk] - DEKKING,F.M., Strongly non-repetitive sequences and progression-free sets, *J. Combinatorial Theory*, (A) 27 (1979), 181-185.

[Ei] - EILENBERG,S., *Automata, Languages and Machines*, Vol. A, Academic Press, New York, 1974.

[Er] - ERDÖS,P., Some unsolved problems, *Publ. Math.Inst.Hungarian Acad. Sci.*,Seire A, 6 (1961), 221-254.

[Ev] - EVDOKMOV,A.A., Strongly asymmetric sequences generated by a finite number of symbols, *Soviet Math. Dokl.*, vol.9 (1968), nº 2, 536-539.

[H] - HEDLUND,G.A., Remarks on the work of Axel Thue on sequences, *Nordisk Mat. Tidskr*, 15 (1967), 148-150.

[HM] - HAWKINS,D. & MIENTKA,W.E., On sequences which contain no repetitions, *Math. Students*, 24 (1956), 185-187.

[I] - ISTRAIL,S., On irreductible languages and nonrational numbers, *Bull. Soc. Math. Roumanie*, 21 (1977), 301-308.

[J1] - JUSTIN,J., Characterization of the repetitive commutative semi-groups, *Journal of Algebra*, 21 (1972), 87-90.

[J2] - JUSTIN,J., Généralisation du Théorème de Van der Waerden sur les semi-groupes répétitifs, *Journal of Combinatorial Theory*, (A), 12 (1962), 357-367.

[L] - LEECH,J., A problem on strings of beads, *Math. Gazette* 41 (1957), 277-278.

[M] - MARTINS,W.T., Palavras infinitas sem repetições, *Atas da Escola de Computação*, IME-USP, a aparecer.

[MH] - MORSE,M. & HEDLUND,G.A., Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semigroups, *Duke Math.J.* 11 (1944), 1-7.

[NA] - NOVIKOV,P.S. & ADJAN,S.I., Infinite periodic groups I,II,III,*Math USSR Izu* 2 (1968), 209-236, 241-279 e 665-685.

[P] - PLEASANTS,P.A., Non-repetitive sequences, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 68 (1970), 267-274.

[S] - SHYR,H.J., A strongly primitive word of arbitrary leugth an its applications, *Intern. J. Comp. Math.*, (A) 6 (1977), 165-170.

[T1] - THUE,A., Über unendliche Zeichenreichen, *Norske Vid. Selsk. Skr. I. Mat.-Nat. Kl.*, Christiania, 1906, Nr. 7, 1-22.

[T2] - THUE,A., Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenrelhen, *Vidensk. Skr. I. Mat.-Naturv. Kl.*, 1912, Nr. 1, 1-67.

JB