

SOBRE GRAFOS HAMILTONIANOS

YOSHIKO WAKABAYASHI

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE,
EM
MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR:

PROF. DR. IMRE SIMON

- SÃO PAULO, AGOSTO DE 1977 -

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Imre Simon,

*pela excelente orientação, pelas críticas e sugestões
que foram muito valiosas na elaboração deste trabalho;*

*ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq),
pelo auxílio que me foi concedido;*

aos amigos e funcionários do MAP,

*pelo apoio durante a realização deste trabalho, e em
particular, ao Professor Jorge Stolfi, pelas discussões
proveitosas;*

ao Senhor João Baptista Esteves de Oliveira, pela excelente datilografia.

São Paulo, agosto de 1977

Y.W.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAP. I - CONCEITOS BÁSICOS E NOTAÇÕES.	8
1. Grafos.	8
2. Subgrafos	12
3. Conexidade, trilhas, caminhos e circuitos	15
4. Isomorfismo e injeção admissível.	17
CAP. II - CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA UM GRAFO SER HAMILTONIANO	18
1. Introdução.	18
2. Condições do tipo 1	19
3. Condições do tipo 2	35
4. Outras condições.	46
5. Classificação das condições	60
CAP. III - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA UM GRAFO SER HAMILTONIANO	85
1. Preliminares.	85
2. As condições	88
CAP. IV - SEQÜÊNCIAS VALENCIAIS E HAMILTONIANISMO.	93
1. Introdução.	93
2. Seqüências forçosamente hamiltonianas	96
3. Seqüências forçosamente não hamiltonianas	114
4. Seqüências opcionalmente hamiltonianas.	121
5. Conclusão.	123
CAP. V - CLASSES ESPECIAIS DE GRAFOS HAMILTONIANOS	125
1. Grafos k-aresta-hamiltonianos	125
2. Grafos hamiltoniano -conexos.	129
3. Grafos k-hamiltonianos.	133
4. Grafos aleatoriamente hamiltonianos	137
BIBLIOGRAFIA	138
ÍNDICE DE SÍMBOLOS	142
ÍNDICE DE DEFINIÇÕES	143

INTRODUÇÃO

Em 1857, William Hamilton^(*) descreveu numa carta a seu amigo Graves um jogo matemático que mais tarde viria a ser lançado comercialmente.

O jogo sugerido por Hamilton consistia em um dodecaedro regular (figura 1) cujos vértices continham nomes de cidades importantes da época. O objetivo do jogo era "dar u ma volta ao redor do mundo", isto é, procurar uma rota ao longo das arestas do dodecaedro que passasse em cada cidade exatamente uma vez e terminasse na cidade de partida.

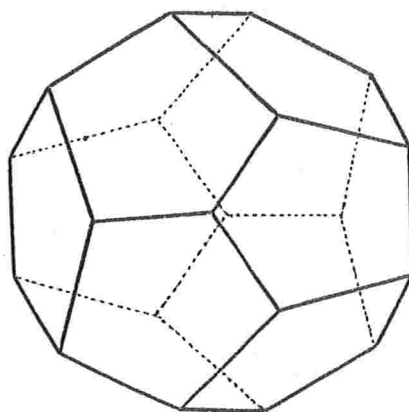


Figura 1

(*) - Sir William Rowan Hamilton (Dublin - 1805 - 1865) - famoso matemático, físico e astrônomo. Descobriu os quatêrnios. Deixou grandes contribuições à Ótica e à Dinâmica. (Veja [L]).

O dodecaedro, porém, em termos comerciais não foi um sucesso, talvez devido à dificuldade em manipulá-lo. Hamilton então, produziu uma "versão planar" do jogo (figura 2).

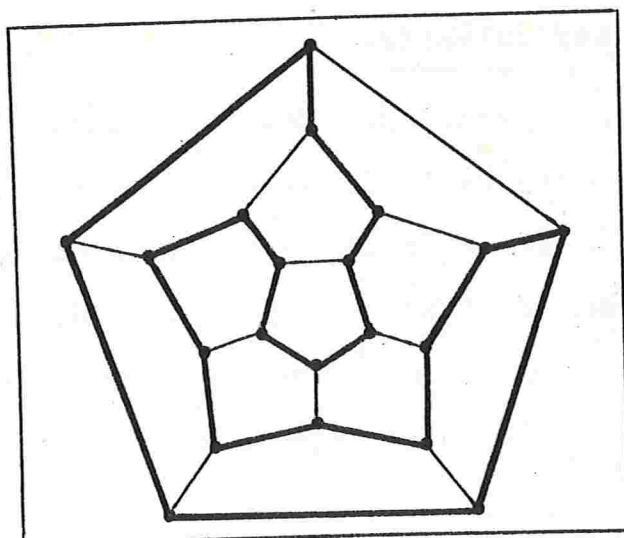


Figura 2

Em linguagem da Teoria dos Grafos, o objetivo do jogo pode ser formulado da seguinte maneira: "achar no grafo do dodecaedro um circuito contendo todos os seus vértices".

Os circuitos que contêm todos os vértices de um grafo foram por essa razão denominados *hamiltonianos*, e os grafos que possuem tais circuitos, *grafos hamiltonianos*.

O problema de caracterizar os grafos hamiltonianos mostrou-se difícil e tornou-se célebre. Trata-se de um problema clássico da Teoria dos grafos que vem desafiando os es

tudiosos do assunto. Uma maneira pitoresca de formulá-lo é a seguinte:

"n pessoas devem sentar-se à volta de uma mesa circular. Entre essas pessoas sabe-se que algumas se conhecem. Pergunta-se: é possível fazê-las sentar à mesa de forma que cada uma fique entre duas pessoas que conhece?"

É imediato que este problema é equivalente ao de verificar quando um grafo de ordem n é hamiltoniano. Basta notar que um conjunto de n pessoas pode ser representado por um grafo de n vértices (indicando as pessoas), em que dois vértices são adjacentes se e só se as pessoas correspondentes se conhecem.

Ao investigarmos o problema de "quais grafos são hamiltonianos" podemos estar em busca de respostas distintas, dependendo do ponto de vista adotado.

Do ponto de vista computacional, podemos estar interessados em um algoritmo "eficiente" que decide se um grafo contém ou não um circuito hamiltoniano. Nesse caso a resposta a este problema existe ou não dependendo da definição de "eficiente". Se por "eficiente" entendermos 'exponencial na ordem do grafo', o problema está resolvido; porém, se "eficiente" significar 'polinomial na ordem do grafo' não se

conhece e nem se sabe se existe um tal algoritmo.

Sabe-se porém, que o problema da existência de circuitos hamiltonianos em grafos está em NP, isto é, pode ser resolvido em tempo polinomial na ordem do grafo por uma Máquina de Turing não determinística. Sabe-se também que este problema é NP-Completo, isto é, todo problema em NP é polinomialmente transformável neste problema. Considerando que os problemas NP-Completos têm sido estudados há várias décadas e nenhum algoritmo polinomial foi encontrado para esses problemas, conjectura-se que não existe um algoritmo desse tipo para o caso dos circuitos hamiltonianos. Uma demonstração desta conjectura seria um avanço importante na Teoria da Complexidade Computacional. Nesta área tal problema está sendo investigado persistentemente desde 1971 (veja [AHU], [C] [HS] e [K1]).

Uma outra solução interessante seria encontrar uma "boa caracterização" de grafos não hamiltonianos. Esse tipo de solução poderia ser assim conceituado de acordo com J. Edmonds [E] (veja também [C1]):

"achar uma condição C necessária e suficiente para um grafo G ser não hamiltoniano, que seja da forma ' $\exists X:P(G,X)$ ', onde X é um conjunto de elementos de G e P(G,X) é uma propriedade que pode ser verificada em tempo polinomial na ordem do grafo."

Note que uma solução desse tipo mostraria que o problema dos grafos não hamiltonianos está em NP, o que resolveria um problema em aberto na Teoria da Complexidade Computacional e possivelmente viria revelar alguma estrutura dos grafos não hamiltonianos. Um tal resultado seria sem dúvida relevante para a Teoria dos Grafos.

Do ponto de vista desta Teoria, o interesse é por uma caracterização que dê afirmações sobre a estrutura dos grafos hamiltonianos. Neste sentido, já que o problema é não tratável, procura-se de um lado condições necessárias, e do outro, condições suficientes para que um grafo seja hamiltoniano.

A preocupação quanto à existência de um circuito que contém todos os vértices de um grafo; existiu em conexão com o problema das 4 cores. Porém, os primeiros resultados sobre condições necessárias ou suficientes para um grafo ser hamiltoniano surgiram só nas últimas 3 décadas.

Dirac, em 1952, foi um dos primeiros a obter uma condição suficiente para um grafo ser hamiltoniano. Essa condição foi baseada na idéia intuitiva de que se um grafo tem "bastante" arestas então ele deve ser hamiltoniano. Desde então, teoremas mais sofisticados e mais gerais foram sendo demonstrados e neste trabalho propusemo-nos a estudá-los e classificá-los.

No capítulo I apresentamos os conceitos básicos e notações que serão utilizados nesta dissertação.

No capítulo II examinamos várias condições suficientes para que um grafo seja hamiltoniano. Na seção 2 estudamos as condições que chamamos de tipo 1 que se caracterizam pelo fato de exigirem que o grafo tenha um número bem grande de arestas. Na seção 3 examinamos as condições que foram chamadas de tipo 2 e que se caracterizam pela exigência de uma certa partição das arestas do grafo. Essas condições, como veremos, requerem um certo número local de arestas, porém não exigem que o grafo, globalmente, tenha muitas arestas. Na seção 4 apresentamos outros tipos de condições e na seção 5 fazemos uma classificação de todas as condições apresentadas, procurando mostrar as inter-relações existentes.

No capítulo III examinamos algumas condições necessárias para que um grafo seja hamiltoniano.

No capítulo IV estudamos o problema da existência de circuitos hamiltonianos em grafos tendo como informação apenas a seqüência valencial de tais grafos. É apresentada uma caracterização das seqüências forçosamente não hamiltonianas e exibimos algumas seqüências que conseguimos provar serem forçosamente hamiltonianas ou opcionalmente hamiltonianas.

No capítulo V apresentamos algumas classes especiais

de grafos que generalizam o conceito de grafos hamiltonianos. Definimos grafos k-aresta-hamiltonianos, hamiltoniano-conexos, k-hamiltonianos e aleatoriamente hamiltonianos, e apresentamos alguns resultados com o propósito de dar uma visão global daquilo que existe sobre o assunto.

As seções dentro de cada capítulo são numeradas a partir de 1; dentro de cada seção, os resultados, quer sejam proposições, lemas, teoremas ou corolários são numerados seqüencialmente a partir de 1, porém antecidos dos respectivos número da seção. Ao referirmos a um resultado 1.3, por exemplo, fica subentendido tratar-se de um resultado da seção 1 do capítulo em questão. No caso de um resultado de outro capítulo mencionaremos explicitamente o número do capítulo seguido do número do resultado (por exemplo, II.1.3).

A expressão "sse" será usada como abreviatura de "se e somente se". Outros símbolos além daqueles definidos no capítulo I estão especificados no *Índice de símbolos* no final deste trabalho. Também aí apresentamos o *Índice de definições* onde mencionamos a página em que se encontra definido o termo especificado.

CAPÍTULO I

CONCEITOS BÁSICOS E NOTAÇÕES

1. GRAFOS

Se V é um conjunto finito, denotaremos por $V^{(2)}$ o conjunto dos pares não ordenados de elementos distintos de V , isto é, $V^{(2)} = \{\{u,v\} \subseteq V : u \neq v\}$.

Um *grafo* é um par ordenado (V,E) formado por um conjunto finito V e um subconjunto E de $V^{(2)}$. Os elementos de V são chamados *vértices* do grafo e os elementos de E , *arestas* do grafo.

Os grafos são assim chamados porque podem ser representados graficamente. Vértices distintos são representados por pontos distintos e arestas $\{u,v\}$ são representadas por segmentos que ligam os pontos correspondentes aos vértices u e v .

Se G é um grafo, denotaremos por VG o conjunto de seus vértices e por EG o conjunto de suas arestas.

EXEMPLO - A figura 3 representa um grafo G , onde:

$$VG = \{u, v, x, w, y\} \text{ e}$$

$$EG = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{u, x\}, \{v, w\}\}.$$

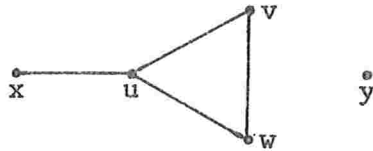


Figura 3

Se $\alpha = \{u, v\}$ é uma aresta, os vértices u e v são chamados *pontas* de α . Diz-se ainda que α *une* ou *liga* os vértices u e v e que a aresta α é *incidente* a u e v .

Duas *arestas* dizem-se *adjacentes* sse têm um vértice em comum.

Dois *vértices* são *adjacentes* em G sse são ligados por uma aresta de G . No caso em que G está subentendido dizemos apenas que os vértices são adjacentes.

Se $v \in VG$, $\Gamma(v)$ denota o conjunto dos vértices de G que são adjacentes a v . se $X \subseteq VG$, $\Gamma X = \bigcup_{x \in X} \Gamma x$ e $\Gamma^2 X = \Gamma(\Gamma X)$.

Se v é um vértice de um grafo G , a *valência* de v em G , denotada por $\text{val}_G(v)$, é o número de arestas de G incidentes a v . Quando G for subentendido, $\text{val}_G(v)$ será denotado simplesmente por $\text{val}(v)$. No grafo representado na figura 3 temos que $\text{val}(x) = 1$, $\text{val}(u) = 3$, $\text{val}(v) = \text{val}(w) = 2$ e $\text{val}(y) = 0$.

Um vértice cuja valência é zero é chamado *vértice isolado*.

A *valência mínima* entre os vértices de G é denotada por $\delta(G)$.

A *ordem* de um grafo G é a cardinalidade de seu conjunto de vértices. Os grafos de ordem 1 são chamados *triviais* e o de ordem 0 é chamado *nulo*.

G é um *grafo completo* sse $EG = VG^{(2)}$. Se G é um grafo completo de ordem n , G será denotado por K_n .

Se X e Y são conjuntos finitos disjuntos,

$$X \otimes Y = \{\{x, y\} : x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

Uma *coleção* X_1, X_2, \dots, X_m de subconjuntos de X é uma *partição* de X sse $X_i \cap X_j = \emptyset$ (se $i \neq j$) e $\bigcup_{i=1}^m X_i = X$.

Um grafo G diz-se *bipartido* sse existe uma partição de VG em subconjuntos X e Y tal que $EG \subseteq X \otimes Y$.

No caso em que $EG = X \otimes Y$, G diz-se *bipartido completo*. Neste último caso, se $|X| = m$ e $|Y| = n$, G será denotado por $K_{m,n}$.

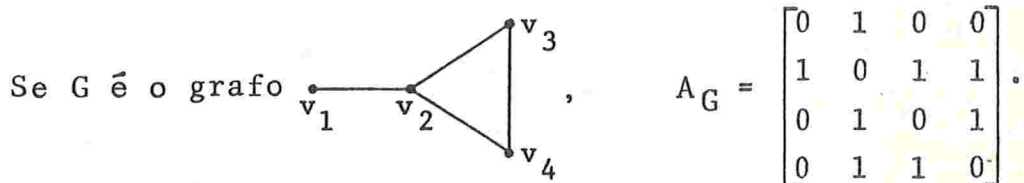
O *complemento* de um grafo G é o grafo denotado por \bar{G} tal que $V\bar{G} = VG$ e $E\bar{G} = VG^{(2)} - EG$.

Um grafo G é *k-regular* sse todos os vértices de G têm valência k .

Se G é um grafo com $VG = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, a *matriz de adjacência* de G (correspondente a essa indexação de VG) é a

$n \times n$ matriz $A_G = [a_{ij}]$ onde $a_{ij} = 1$ se $\{v_i, v_j\} \in E_G$ e $a_{ij} = 0$, caso contrário.

EXEMPLO -

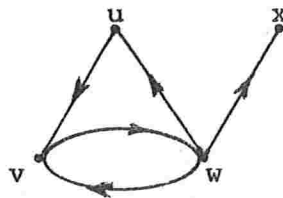


Um *grafo dirigido* D é um par ordenado (V, E) formado por um conjunto finito V de vértices e um conjunto finito E de pares ordenados de elementos distintos de V , chamados arestas.

Se $\alpha = (u, v)$ é uma aresta de D , na representação do grafo dirigido D , α é indicada por um segmento orientado de u para v unindo os pontos que representam os vértices u e v .

EXEMPLO - A figura abaixo representa um grafo dirigido D onde $V_D = \{u, v, w, x\}$ e

$$E_D = \{(u, v), (v, w), (w, v), (w, u), (w, x)\}.$$



Se D é um grafo dirigido tal que quaisquer dois vértices distintos u e v de D são ligados por exatamente uma aresta, então diz-se que D é um *torneio*.

2. SUBGRAFOS

Sejam G e H grafos. Diz-se que H é um *subgrafo* de G ($H \subseteq G$), sse $VH \subseteq VG$ e $EH \subseteq EG$. Se pelo menos uma dessas inclusões é própria, diz-se que H é um *subgrafo próprio* de G e escreve-se $H \subset G$.

Se H é um subgrafo de G diz-se também que G é um *supergrafo* de H ou que G *contém* H .

Um subgrafo H de G diz-se *espalhado* sse $VH = VG$.

Um k -*fator* de um grafo G é um subgrafo espalhado de G que é k -regular.

Seja $X \subseteq VG$. O subgrafo de G cujos vértices são aqueles em X e cujas arestas são as arestas de G com ambas as pontas em X , é chamado de *subgrafo de G induzido por X* e será denotado por $G[X]$. (Veja figuras 4 e 5).

Seja $A \subseteq EG$. O subgrafo de G que tem A por conjunto de arestas e cujos vértices são as pontas de A é chamado de *subgrafo de G induzido por A* e será denotado por $G[A]$. (Veja figuras 4 e 6).

A *remoção de um vértice* v de G resulta no subgrafo $G[VG - \{v\}]$ denotado mais simplesmente por $G \sim v$. (Veja figuras 4 e 7).

A *remoção de uma aresta* α de G resulta no subgrafo es-

palhado de G com arestas $EG - \{\alpha\}$, denotado por $G - \alpha$. (Veja figuras 4 e 8).

Se $X \subseteq VG$, $G \setminus X$ denota o subgrafo $G[VG - X]$.

Se $A \subseteq EG$, $G - A$ denota o subgrafo espalhado de G com arestas $EG - A$.

Se G e H são grafos, $G - H$ denota o subgrafo $G - EH$.

$G + \{u, v\}$ denota o grafo com vértices VG e arestas $EG \cup \{u, v\}$. (Veja figuras 4 e 9).

Se H e K são subgrafos de G , denotaremos por $H \cup K$ e $H \cap K$ os subgrafos $(VH \cup VK, EH \cup EK)$ e $(VH \cap VK, EH \cap EK)$ respectivamente. (Veja figuras 10, 11, 5 e 6).

Os subgrafos H e K dizem-se *disjuntos* se $H \cap K$ é o grafo nulo.

Se G e H são grafos, $G \Delta H$ denota o subgrafo $(G - H) \cup (H - G)$. (Veja figuras 12, 5 e 6).

Um grafo G é *maximal* (respectivamente *minimal*) relativamente a uma propriedade se G goza da propriedade e não existe nenhum supergrafo (respectivamente subgrafo) próprio de G dotado dessa mesma propriedade.

Um *clique* de um grafo G é um subgrafo completo maximal de G . (Veja figuras 13 e 4).

Os seguintes exemplos ilustram as definições anteriores.

Seja G o grafo:

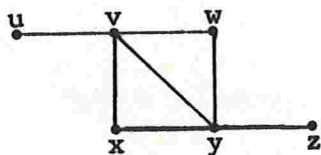


Figura 4

Se $X = \{u, v, y, z\}$,

$G[X]$:

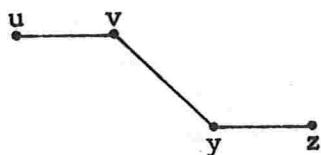


Figura 5

Se $A = \{(v, x), (v, w), (y, z)\}$,

$G[A]$:

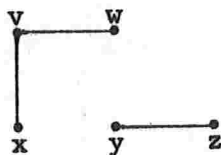


Figura 6

$G \sim x$:

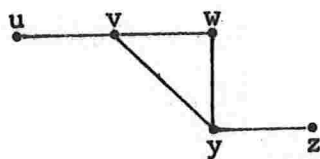


Figura 7

$G - \{v, w\}$

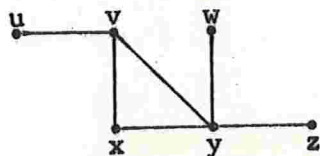


Figura 8

$G + \{u, x\}$:

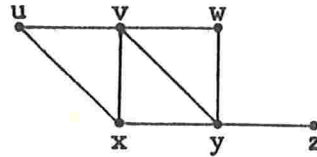


Figura 9

$G[X] \cup G[A]$:

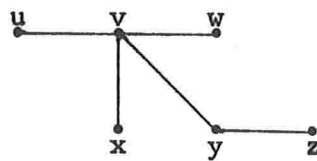


Figura 10

$G[X] \cap G[A]$:



Figura 11

$G[X] \Delta G[A]$:

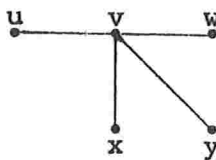
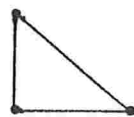


Figura 12



é um *clique* de G.

Figura 13

3. CONEXIDADE, TRILHAS, CAMINHOS E CIRCUITOS

Um grafo G é desconexo sse G contém dois subgrafos

disjuntos, não nulos, H e K tais que $G = H \cup K$. Caso contrário, G é conexo.

Um *componente* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal não nulo de G . Denotaremos por $c(G)$ o número de componentes de G .

Uma aresta α de G é uma *ponte* sse $c(G-\alpha) > c(G)$.

Um vértice v de G é um *vértice de corte* sse $c(G-\{v\}) > c(G)$.

Um grafo G é *separável* sse G tem pelo menos um vértice de corte.

Uma *trilha* T de G é uma seqüência finita $T = (v_0, \alpha_0, v_1, \alpha_1, \dots, v_k)$ com $k \geq 0$, onde os v_i 's são vértices de G e $\alpha_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ para $0 \leq i \leq k-1$ são arestas distintas de G . Se $k \geq 3$ e $v_k = v_0$ então T é uma *trilha fechada*.

Denotaremos por VT o conjunto dos vértices da trilha T e ET o conjunto das arestas de T .

Uma trilha fechada T de G tal que $VT=VG$ e $ET=EG$ é chamada *trilha de Euler*. Se G tem uma trilha de Euler então diz-se que G é *euleriano*.

Um *caminho* P de G é uma trilha onde os vértices são todos distintos. Em geral, um caminho $P = (v_0, \alpha_0, v_1, \alpha_1, \dots, v_k)$ será denotado simplesmente por $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$.

O vértice v_0 é chamado *início* de P e o vértice v_k é chamado *término* de P . Esses vértices também são chamados ex-

trêmidades de P.

O comprimento de P, denotado por $|P|$ é dado por $|P| = |VP| - 1 = |EP|$.

Se $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ e $Q = (v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ são caminhos de G e $VP \cap VQ = \{v_k\}$ então a concatenação de P e Q, denotada por $P \cdot Q$ é o caminho $(v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$.

Um caminho P de G diz-se *hamiltoniano* se $VP = VG$.

Um *circuito* C de G é uma trilha fechada em que os vértices são todos distintos excetuando o primeiro e o último.

Um circuito $C = (v_0, \alpha_0, v_1, \alpha_1, \dots, v_k)$ onde $v_k = v_0$ será denotado por $C = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$ ou por $C = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$.

O comprimento de C denotado por $|C|$ é dado por $|C| = |VC|$.

Um circuito C de G diz-se *hamiltoniano* se $VC = VG$.

Se G tem um circuito hamiltoniano então diz-se que G é um *grafo hamiltoniano*.

4. ISOMORFISMO E INJEÇÃO ADMISSÍVEL

Dois grafos G e H são *isomorfos* sse existe uma bijeção $\phi: VG \rightarrow VH$ tal que $\{u, v\} \in EG$ sse $\{\phi(u), \phi(v)\} \in EH$.

Sejam X e Y subconjuntos de VG. Uma injeção $\phi: X \rightarrow Y$ é *admissível* sse para todo $x \in X$ existe $\alpha \in EG$ tal que $\alpha = \{x, \phi(x)\}$.

CAPÍTULO II

CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA UM GRAFO SER HAMILTONIANO

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo veremos vários resultados sobre condições suficientes para que um grafo seja hamiltoniano. Na seção 2 examinaremos uma classe de condições que chamamos de tipo 1 que essencialmente só são satisfeitas por grafos com "bastante" arestas. Essas condições são também conhecidas como "descendentes de Dirac".

A apresentação que faremos aqui é a inversa da histórica, isto é, começaremos pelo resultado mais recente e deduziremos a partir daí os demais resultados, conseguindo assim, demonstrações mais simples que as originais.

Na seção 3 examinaremos a classe das condições que chamamos de tipo 2 que se baseiam na existência de uma certa partição das arestas do grafo e que para serem satisfeitas não exigem que o grafo tenha muitas arestas.

Na seção 4 apresentaremos outros tipos de condições.

O leitor poderá notar que nenhuma das condições su

ficientes que veremos garantem que o grafo do dodecaedro é hamiltoniano.

Na seção 5 faremos uma classificação de todas as condições suficientes apresentadas provando que certas condições implicam outras, ou que são independentes.

2. CONDIÇÕES DO TIPO 1

Começaremos examinando uma condição simples obtida recentemente por Bondy & Chvátal [BC] que, se satisfeita fornece uma maneira eficiente^(*) de encontrar um circuito hamiltoniano do grafo. Essa condição foi sugerida por um teorema provado por Ore em 1961 [O3].

LEMA 2.1 - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ e sejam u e v dois vértices quaisquer de G , não adjacentes, tais que $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq n$. Então G é hamiltoniano sse $G + \{u, v\}$ é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO - Se G é hamiltoniano é claro que $G + \{u, v\}$ é hamiltoniano.

Para provarmos a recíproca, suponhamos que $G + \{u, v\}$ seja hamiltoniano e G não seja. Neste caso, todo circuito hamiltoniano de $G + \{u, v\}$ contém a aresta $\{u, v\}$. Logo, existe em G um caminho hamiltoniano (v_1, v_2, \dots, v_n) com $v_1 = u$ e $v_n = v$.

(*) - polinomial na ordem do grafo.

Sejam

$$X = \{v_i : \{u, v_{i+1}\} \in E(G)\} \text{ e}$$

$$Y = \{v_i : \{v_i, v\} \in E(G)\}.$$

Então $X \cap Y = \emptyset$, pois caso contrário, $(v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{i+1}, v_1)$ seria um circuito hamiltoniano de G . (Veja figura 14).

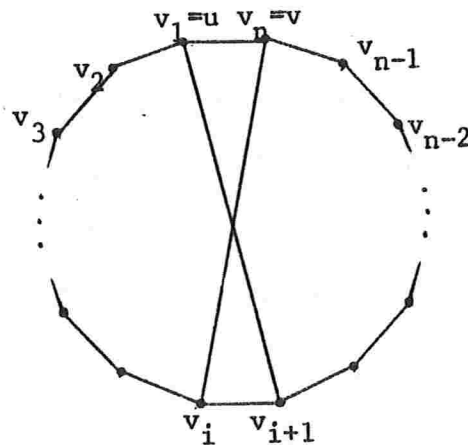


Figura 14

Por outro lado, como $v_n \notin X \cup Y$, resulta que $|X \cup Y| < n$. Portanto, $\text{val}(u) + \text{val}(v) = |X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y| < n$, o que contradiz a hipótese. ■

Este lema motivou as seguintes definições.

DEFINIÇÃO - Seja k um inteiro, $1 \leq k \leq n$. Um grafo G de ordem n diz-se k -fechado se $\text{val}(u) + \text{val}(v) < k$ para todo par u, v de vértices não adjacentes.

DEFINIÇÃO - Seja G um grafo de ordem n e seja k um inteiro,

$1 \leq k \leq n$. Chamamos de k -fecho de G a um grafo minimal k -fechado H que contém G .

Como a intersecção de grafos k -fechados é k -fechado, o k -fecho de um grafo é único. Denotaremos o k -fecho de G por $f_k(G)$.

É imediato que se u e v são vértices distintos não adjacentes em G e $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq k$ então $f_k(G) = f_k(G + \{u, v\})$.

Se chamarmos de $C(G')$ a condição: "existem vértices distintos u e v não adjacentes em G' tais que $\text{val}_{G'}(u) + \text{val}_{G'}(v) \geq k$ "; dado um grafo G , se inicialmente definirmos G' como sendo G e enquanto $C(G')$ estiver satisfeita definiremos G' como sendo $G' + \{u, v\}$, quando $C(G')$ não for mais satisfeita teremos que $G' = f_k(G)$.

Se G é um grafo de ordem n , o n -fecho de G ou $f_n(G)$ será denotado simplesmente por fecho de G ou $f(G)$. Apenas quando $k \neq n$ escreveremos explicitamente k -fecho de G ou $f_k(G)$.

A figura 15 ilustra uma construção de $f(G)$.

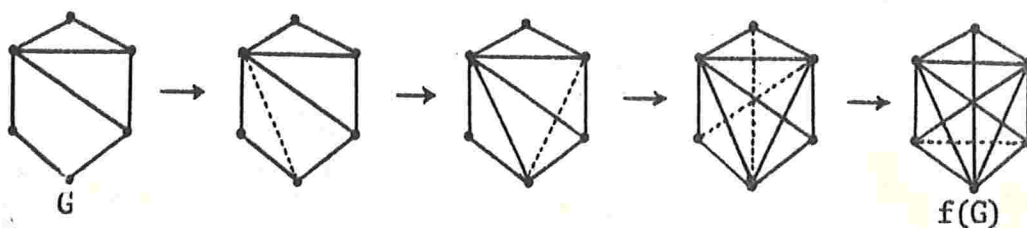


Figura 15

Observando que o lema 2.1 pode ser aplicado cada vez que uma nova aresta é acrescentada na construção do fecho de um grafo, o seguinte resultado é imediato.

TEOREMA 2.2 - Um grafo G é hamiltoniano sse $f(G)$ é hamiltoniano.

Este teorema tem várias conseqüências interessantes. Assim, partindo da simples observação de que todos os grafos completos com pelo menos 3 vértices são hamiltonianos, podemos deduzir o resultado abaixo que juntamente com os seus corolários formam a classe das condições que chamaremos de tipo 1.

TEOREMA 2.3 [TEOREMA DE BONDY-CHVÁTAL] - Se G é um grafo de ordem $n \geq 3$ e $f(G)$ é completo, então G é hamiltoniano.

Este resultado tem a vantagem de ser bastante útil do ponto de vista operacional. De fato, veremos a seguir um algoritmo que verifica se o fecho de um grafo de n vértices é completo em $O(n^4)$ passos.

Nesse algoritmo, a entrada é a matriz de adjacência $A_G = [a_{ij}]$ onde $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

O ALGORITMO DO FECHO

Passo 1 - Para $i=1,2,\dots,n$ faça $\text{val}(v_i) \leftarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}$;
faça $k \leftarrow 2$;

Passo 2 - Enquanto existir um par $\{v_i, v_j\}$ com $i \neq j$, $a_{ij} = 0$
e $\text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n$, faça:
 $a_{ij} \leftarrow k$,
 $a_{ji} \leftarrow k$,
 $\text{val}(v_i) \leftarrow \text{val}(v_i) + 1$,
 $\text{val}(v_j) \leftarrow \text{val}(v_j) + 1$,
 $k \leftarrow k + 1$;

Passo 3 - Para $i=1,2,\dots,n$ verifique se $\text{val}(v_i) = n-1$. Se is
to acontecer, $f(G)$ é completo; caso contrário $f(G)$
não é completo. Pare.

Note que ao terminarmos o algoritmo teremos uma ma
triz $[a_{ij}]$, tal que:

$a_{ij} = 1$ sse $\{v_i, v_j\} \in E(G)$,
 $a_{ij} = 0$ sse $\{v_i, v_j\} \notin E(G)$,
 $a_{ij} = k > 1$ sse $\{v_i, v_j\}$ foi a $(k-1)$ -ésima
aresta a ser acrescentada na construção do
fecho.

Essa matriz nos fornece informações sobre como o fe-

cho de G foi construído e poderá ser utilizada para se determinar eficientemente um circuito hamiltoniano de G partindo-se de um circuito hamiltoniano de $f(G)$.

Antes de apresentarmos uma maneira de se resolver esse problema vamos adotar as seguintes

DEFINIÇÕES:

• Dizemos que uma aresta $\{v_i, v_j\}$ de $f(G)$ tem peso p se após a aplicação do algoritmo do fecho, $a_{ij} = p$.

• Se $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ é um circuito de $f(G)$, então o peso de C , denotado por $\|C\|$ é o valor correspondente ao peso máximo das arestas de C .

Note que se $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ é um circuito hamiltoniano de $f(G)$ tal que $\|C\| = p > 1$ então existe um circuito hamiltoniano C' em $f(G)$ tal que $\|C'\| < p$.

De fato, supondo sem perda de generalidade que

$\{v_1, v_n\}$ seja a aresta de peso p , então

$|\{v_i : 0 < a_{1i} < p\}| + |\{v_i : 0 < a_{ni} < p\}| \geq n$
e portanto, existe v_j tal que as arestas $\{v_1, v_{j+1}\}$ e $\{v_n, v_j\}$ têm pesos menores que p . Nesse caso,

$C' = (v_1, v_2, \dots, v_j, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{j+1}, v_1)$

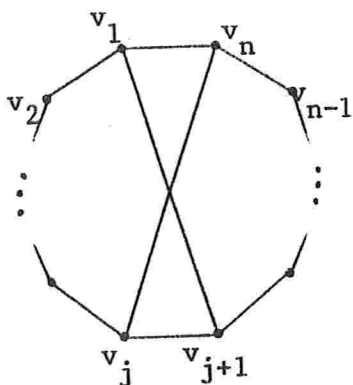


Figura 16

é tal que $|C'| = |C|$ e $\|C'\| < p$. (Figura 16).

A observação acima fornece um algoritmo para se obter um circuito hamiltoniano de peso 1 e portanto em G , partindo-se de um circuito hamiltoniano em $f(G)$.

Note que a determinação de cada novo circuito com peso menor pode ser feita em $O(n)$ passos. Como $a_{ij} \leq \binom{n}{2} \leq n^2$ (quaisquer que sejam i, j), a obtenção de um circuito em G a partir de um circuito em $f(G)$ poderá ser feita em $O(n^3)$ passos.

Veremos a seguir um resultado obtido por Las Vergnas [LV1], cuja prova original é bastante trabalhosa e que pode ser facilmente provado usando o teorema 2.3.

COROLÁRIO 2.4 [TEOREMA DE LAS VERGNAS-71] - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ e sejam os vértices v_i de G indexados arbitrariamente.

Se

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ i + j \geq n \\ \text{val}(v_i) \leq i \\ \text{val}(v_j) \leq j - 1 \\ \{v_i, v_j\} \notin E_G \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n,$$

então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Vamos provar que se a condição acima está satisfeita, o fecho de G que chamaremos de H é completo.

Suponhamos que H não seja completo. Então, existem vértices não adjacentes em H e dentre esses vértices sejam v_i e v_j tais que:

(1) j seja o maior índice possível e,

(2) i seja o maior índice sujeito à condição (1).

Como $\{v_i, v_j\} \notin EH$, temos que

$$\text{val}_H(v_i) + \text{val}_H(v_j) \leq n-1 \quad (3)$$

As condições (1) e (2) implicam que v_j deve ser adjacente em H a todos os vértices v_k com $i < k \leq n$ e $k \neq j$. Portanto,

$$\text{val}_H(v_j) \geq n-i-1 \quad (4)$$

Por outro lado, a condição (1) implica que v_i deve ser adjacente em H a todos os vértices v_k com $j < k \leq n$ e portanto,

$$\text{val}_H(v_i) \geq n-j \quad (5)$$

Usando os resultados (3), (4) e (5), segue que:

$$\text{val}_G(v_j) \leq \text{val}_H(v_j) \leq n-1 - \text{val}_H(v_i) \leq n-1-(n-j) = j-1,$$

$$\text{val}_G(v_i) \leq \text{val}_H(v_i) \leq n-1 - \text{val}_H(v_j) \leq n-1-(n-i-1) = i.$$

Além disso, $i+j \geq n$. De fato, de (4) segue que $i \geq n-1-\text{val}_H(v_j)$, de (5) temos que $j \geq n-\text{val}_H(v_i)$ e portanto,

$$\begin{aligned} i+j &\geq n-1 - \text{val}_H(v_j) + n - \text{val}_H(v_i) = 2n-1 - \\ &\quad - (\text{val}_H(v_j) + \text{val}_H(v_i)) \geq 2n-1-(n-1) = n. \end{aligned}$$

Como todas as hipóteses estão satisfeitas, resulta que $\text{val}_G(v_i) + \text{val}_G(v_j) \geq n$ e portanto, $\text{val}_H(v_i) + \text{val}_H(v_j) \geq n$, o que contradiz (3).

Logo, o fecho de G é completo e pelo teorema 2.3, G é hamiltoniano. ■

O seguinte resultado, também devido a Las Vergnas [LV2] é uma consequência imediata do Corolário anterior.

COROLÁRIO 2.5 [TEOREMA DE LAS VERGNAS-70] - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ e sejam os vértices v_i de G indexados arbitrariamente. Se

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ \text{val}(v_i) \leq i \\ \text{val}(v_j) \leq j \\ \{v_i, v_j\} \notin E(G) \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n,$$

então G é hamiltoniano.

O resultado que veremos a seguir foi obtido por Chvátal em 1971 e num certo sentido que mencionamos mais a diante (veja página 98) é o melhor possível. Provaremos que esse resultado segue como consequência do corolário 2.4. A demonstração original é diferente e pode ser encontrada em [C2].

COROLÁRIO 2.6 [TEOREMA DE CHVÁTAL] - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$, e sejam os vértices v_i de G indexados de forma que $\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$.
Se $\text{val}(v_i) \leq i < \frac{n}{2} \implies \text{val}(v_{n-i}) \geq n-i$, então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Seja G um grafo que satisfaz as condições do teorema. Vamos provar que a indexação de VG tal que

$$\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$$

satisfaz a condição exigida pelo corolário 2.4.

Suponhamos ao contrário, que existam i, j tais que

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n, \quad i+j \geq n, \quad \text{val}(v_i) \leq i, \quad \{v_i, v_j\} \notin EG \\ \text{val}(v_j) \leq j-1 \quad \text{e} \quad \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \leq n-1 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Tomemos um par i, j onde i é o menor possível satisfazendo (1). Nesse caso, $i < \frac{n}{2}$. Com efeito, se $i \geq \frac{n}{2}$, como $\text{val}(v_i) = i$ (pela minimalidade de i), temos que $\text{val}(v_i) \geq \frac{n}{2}$. Por

outro lado, como $j > i$, $\text{val}(v_j) \geq \text{val}(v_i) \geq \frac{n}{2}$ e portanto, $\text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n$, o que contradiz (1).

Sendo $i < \frac{n}{2}$ e $\text{val}(v_i) \leq i$, pela hipótese do teorema $\text{val}(v_{n-i}) \geq n-i$. Como $j \geq n-i$, $\text{val}(v_j) \geq \text{val}(v_{n-i}) \geq n-i$. Logo, $\text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq i + (n-i) = n$, o que contradiz (1).

Portanto, as hipóteses do corolário 2.4 estão satisfeitas e G é hamiltoniano. ■

Provaremos a seguir que o teorema de Chvátal é uma generalização do resultado abaixo provado por Bondy (veja [B]). Observamos que é imediato que esse resultado segue como corolário do teorema de Las Vergnas-70.

COROLÁRIO 2.7 [TEOREMA DE BONDY-70] - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$, e sejam os vértices v_i de G indexados de forma que $\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$. Se

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ \text{val}(v_i) \leq i \\ \text{val}(v_j) \leq j-1 \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n,$$

então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Seja G um grafo nas condições do teorema. Vamos provar que G satisfaz as hipóteses do teorema de Chvátal (corolário 2.6).

Suponhamos, ao contrário, que exista i , $1 \leq i < \frac{n}{2}$ tal que $\text{val}(v_i) \leq i$ e $\text{val}(v_{n-i}) < n-i$.

Seja $j = n-i$. Então, $j > \frac{n}{2} > i$ e $\text{val}(v_j) < j$.

Mas, se $1 \leq i < j \leq n$, $\text{val}(v_i) \leq i$ e $\text{val}(v_j) \leq j-1$, então pela hipótese,

$$\text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n. \quad (1)$$

Por outro lado, $\text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) = \text{val}(v_i) + \text{val}(v_{n-i}) < i + (n-i) = n$, o que contradiz (1).

Logo, as hipóteses do teorema de Chvátal estão satisfeitas e portanto, G é hamiltoniano. ■

É imediato que o teorema que acabamos de ver é uma generalização do seguinte resultado devido também a Bondy [B1].

COROLÁRIO 2.8 [TEOREMA DE BONDY-69] - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ cujos vértices v_i estão indexados de forma que $\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$. Se para todo i, j

$$\left. \begin{array}{l} i \neq j \\ \text{val}(v_i) \leq i \\ \text{val}(v_j) \leq j \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n,$$

então G é hamiltoniano.

Esse teorema é uma generalização do resultado que

veremos a seguir, obtido por Pósa em 1962. A demonstração original apresentada por Pósa [P1] é engenhosa e foi simplificada por Nash-Williams [NW1]. Faremos aqui uma demonstração usando o corolário anterior.

Vamos denotar por $V(j)$ o seguinte conjunto :

$$V(j) = \{v \in VG : \text{val}(v) \leq j\}.$$

COROLÁRIO 2.9 [TEOREMA DE PÓSA] - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$, tal que:

(1) para todo i , $1 \leq i < \frac{n-1}{2}$, $|V(i)| < i$;

(2) se n é ímpar, $|V(\frac{n-1}{2})| \leq \frac{n-1}{2}$.

Então, G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Seja G um grafo que satisfaz as hipóteses acima e suponha VG indexado de forma que $\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$.

Nesse caso, as condições (1) e (2) acima são equivalentes às condições (1)' e (2)', respectivamente, onde

(1)': $\text{val}(v_i) > i$ se $1 \leq i < \frac{n-1}{2}$,

(2)': se n é ímpar, $\text{val}(v_{\frac{n-1}{2}+1}) > \frac{n-1}{2}$.

Assim, quando n é par, a condição (1)' garante que se $\text{val}(v_i) \leq i$ então $i \geq \frac{n}{2}$. Mas se $i \geq \frac{n}{2}$, a condição (1)' também garante que $\text{val}(v_i) \geq \frac{n}{2}$. Logo, pelo corolário anterior, G é hamiltoniano.

Quando n é ímpar, a condição (1)' garante que se $\text{val}(v_i) \leq i$ então $i \geq \frac{n-1}{2}$. Mas, se $i = \frac{n-1}{2}$, pela condição (1)' $\text{val}(v_i) = \text{val}(v_{\frac{n-1}{2}}) \geq \frac{n-1}{2}$. E, pela condição (2)', se $i \geq \frac{n-1}{2} + 1$ $\text{val}(v_i) \geq \frac{n-1}{2} + 1$. Logo, pelo corolário 2.8, G é hamiltoniano. ■

O resultado que segue foi obtido por Ore em 1961 [O3].

COROLÁRIO 2.10 [TEOREMA DE ORE] - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$, tal que para quaisquer vértices u e v não adjacentes, $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq n$. Então, G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

É evidente que se G satisfaz a hipótese acima, $f(G)$ é completo e pelo teorema 2.3, G é hamiltoniano. Faremos no entanto, uma outra demonstração para mostrar que o teorema de Pósa engloba esse resultado.

Seja $V(j) = \{v \in V(G) : \text{val}(v) \leq j\}$.

Vamos mostrar que $|V(j)| < j$ para $i \leq j < \frac{n}{2}$.

Seja $i = |V(j)|$. Os i vértices de $V(j)$ induzem um subgrafo H que é completo. De fato, se H não fosse completo, existiriam vértices u e v em H , não adjacentes, tais que $\text{val}(u) + \text{val}(v) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, o que contradiz a hipótese.

Como H é completo, segue que $i \leq j + 1$. Não podemos ter

$i = j+1$ pois se isso ocorresse, cada vértice de H seria adjacente apenas aos vértices de H e se $u \in V_H$ e $v \in V_G - V_H$, então $\text{val}(u) + \text{val}(v) \leq j + (n-1-j-1) = n-2$, o que é uma contradição. Por outro lado, também não podemos ter $i = j$; pois neste caso, cada vértice $u \in V_H$ seria adjacente a no máximo um vértice de $V_G - V_H$ e como $i = j < \frac{n}{2}$, existiria um vértice $w \in V_G - V_H$ não adjacente aos vértices de H . Assim, se $u \in V_H$,

$$\text{val}(u) + \text{val}(w) \leq j + n - 1 - j = n - 1,$$

o que é uma contradição.

Portanto, $i < j$, isto é, $|V(j)| < j$ para $i \leq j < \frac{n}{2}$. Pelo corolário 2.9, G é hamiltoniano. ■

O seguinte resultado devido a Dirac [D] segue imediatamente do corolário anterior.

COROLÁRIO 2.11 [TEOREMA DE DIRAC] - Se G é um grafo de ordem $n \geq 3$ e $\text{val}(v) \geq \frac{n}{2}$ qualquer que seja $v \in V_G$, então G é hamiltoniano.

Do teorema de Ore podemos obter o seguinte resultado também devido a Ore [O1].

COROLÁRIO 2.12 - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$.

Se $|E_G| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ então G é hamiltoniano.

A demonstração desse resultado é bem simples porém preferimos demonstrar um resultado de Erdős [E1] que é mais geral.

COROLÁRIO 2.13 - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ e seja k um inteiro, $1 \leq k < \frac{n}{2}$. Se $\text{val}(v) \geq k$ para todo v em G e se

$$|EG| \geq 1 + \max_{k \leq t < \frac{n}{2}} \left\{ \binom{n-t}{2} + t^2 \right\},$$

então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

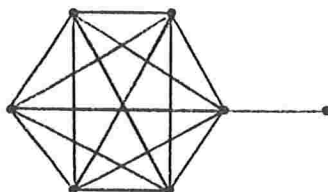
Seja G um grafo nas condições acima e suponhamos que G não seja hamiltoniano. Então, pelo corolário 2.9 existe um t , $k \leq t < \frac{n}{2}$, tal que G tem pelo menos t vértices v_1, v_2, \dots, v_t de valência menor ou igual a t .

O número de arestas não incidentes a nenhum dos vértices v_1, v_2, \dots, v_t é no máximo $\binom{n-t}{2}$. E como $\text{val}(v_i) \leq t$ para $i=1, 2, \dots, t$, o número de arestas incidentes a algum desses v_i 's é no máximo t^2 .

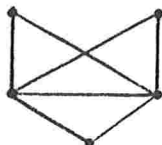
Logo $|EG| \leq \binom{n-t}{2} + t^2$ para algum $k \leq t < \frac{n}{2}$ o que é uma contradição. ■

OBSERVAÇÃO: Pode-se mostrar (veja [01]) que os grafos de ordem $n \geq 3$ com $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ arestas são os grafos da forma $K_{n-1} \cup K_1 + \{u, v\}$ onde u é um vértice de K_{n-1} e v é o vértice de K_1 .

EXEMPLO: $n = 7$



Quando $n = 5$ existe além do grafo da forma acima mencionada o seguinte grafo:

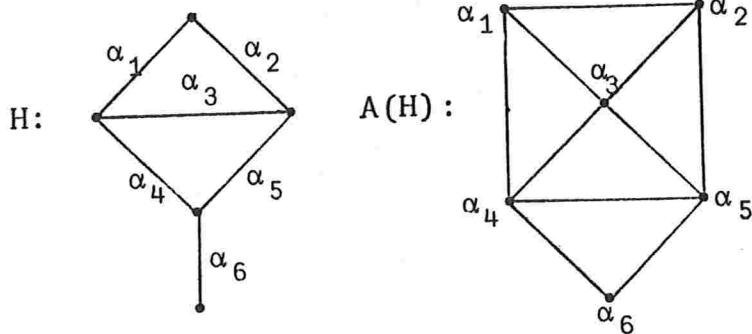


3. CONDIÇÕES DO TIPO 2

Nesta seção veremos algumas condições suficientes obtidas por Goodman e Hedetniemi [GH], que se baseiam na estrutura dos subgrafos do grafo. Esse ponto de vista é diferente daquele discutido na seção 2 e os resultados assim obtidos permitem estender o domínio das condições suficientes existentes. Para isso, vamos introduzir alguns conceitos novos que serão utilizados aqui.

DEFINIÇÃO - Seja H um grafo não nulo e seja $A(H)$ o grafo que tem EH como conjunto de vértices, sendo que α_1 e α_2 são vértices adjacentes em $A(H)$ sse α_1 e α_2 são arestas adjacentes em H . O grafo $A(H)$ é chamado *grafo aresta* de H .

EXEMPLO:



DEFINIÇÃO - G é um grafo aresta se existe um grafo H tal que $G = A(H)$.

PROPOSIÇÃO 3.1 - G é um grafo aresta sse existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos, tal que nenhum vértice pertence a mais do que dois dos subgrafos.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja G um grafo aresta, $G = A(H)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que H não tenha vértices isolados.

Todo vértice v em H dá origem a um subgrafo completo, denotado C_v , em G , que é o subgrafo induzido pelos vértices de G correspondentes às arestas de H , incidentes a v .

Cada aresta γ de G está em exatamente um desses subgrafos completos. De fato, se $\gamma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, α_1 e α_2 são arestas de H que têm uma única ponta comum, digamos v . Então, γ pertence apenas a C_v .

Se α_1 é um vértice de G , α_1 é uma aresta de H inci

dente a exatamente dois v\u00e9rtices em H. Ent\u00e3o α_1 n\u00e3o pode pertencer a mais do que dois dos subgrafos completos.

(ii) Reciprocamente, suponhamos que $C_{v_1}, C_{v_2}, \dots, C_{v_k}$ sejam os subgrafos completos que formam a parti\u00e7\u00e3o de EG e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ os v\u00e9rtices de G que est\u00e3o em apenas um desses subgrafos. O grafo H com $VH = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ e $EH = \{\{v_i, v_j\} : C_{v_i} \cap C_{v_j} \neq \emptyset\} \cup \{\{\alpha_i, v_j\} : \alpha_i \in C_{v_j}\}$ \u00e9 tal que $A(H) = G$. Logo, G \u00e9 grafo aresta. ■

OBSERVA\u00c7\u00d5ES:

(a) A cada $v \in VH$ ($\text{val}(v) \geq 2$) fica associado um subgrafo completo C_v em $A(H)$ tal que $|C_v| =$ n\u00famero de v\u00e9rtices de $C_v = \text{val}_H(v)$. No caso em que $\text{val}_H(v) = 1$, podemos associar a v um subgrafo C_v onde $C_v = K_1$, ou ent\u00e3o, se v \u00e9 adjacente a um v\u00e9rtice x tal que $\text{val}(x) \geq 2$, podemos associar a v o subgrafo completo C_x . (Veja figura 17).

(b) Se $\text{val}_H(v) \geq 2$ para todo $v \in VH$, resulta que $|C_v| \geq 2$, C_v tem pelo menos uma aresta e portanto n\u00e3o existe em $A(H)$ nenhum v\u00e9rtice pertencente a apenas um dos subgrafos completos da parti\u00e7\u00e3o. (Veja figura 18).

(c) Se todos os v\u00e9rtices de H t\u00eam val\u00eancia par ent\u00e3o todos os subgrafos completos s\u00e3o pares, isto \u00e9, t\u00eam ordem par (veja figura 18).

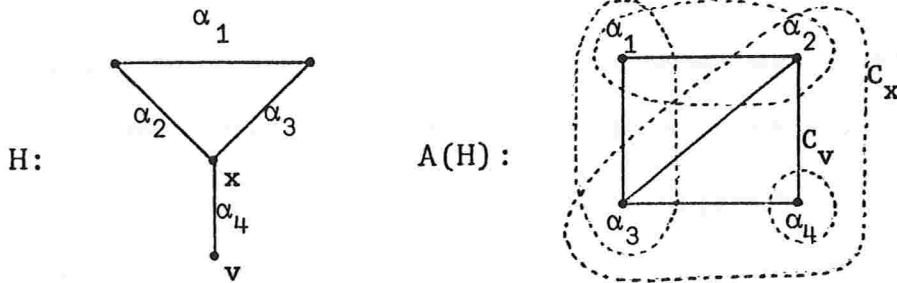


Figura 17

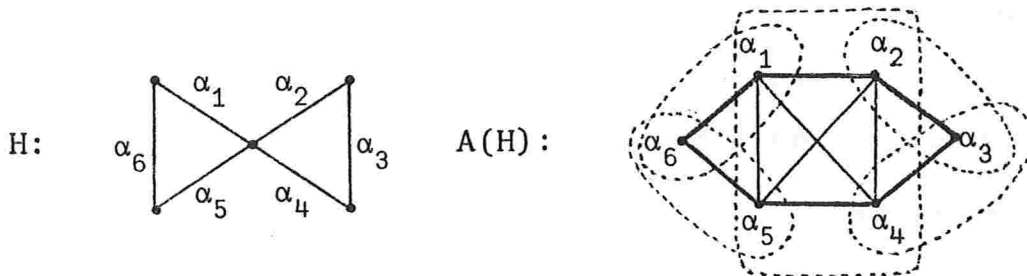


Figura 18

Na figura 18, H é um grafo euleriano e $A(H)$ é um grafo hamiltoniano. Note que a trilha de Euler do grafo H , $T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$, onde os α_i são arestas de H , corresponde um circuito hamiltoniano $C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ em $A(H)$, onde os α_i são vértices de $A(H)$. Além disso, $A(H)$ é euleriano.

Deixamos a cargo do leitor a demonstração da seguinte

PROPOSIÇÃO 3.2 - Se H é um grafo euleriano então $G = A(H)$ é hamiltoniano e euleriano.

A primeira parte dessa proposição sugere que, se pu

dermos reconhecer um grafo G como sendo grafo aresta de um grafo euleriano então poderemos concluir que G é hamiltoniano.

O resultado que segue caracteriza os grafos arestas de grafos eulerianos. A demonstração desse resultado poderá ser feita usando-se o mesmo raciocínio feito na demonstração da proposição 3.1, as observações (a), (b) e (c) mencionadas e o conhecido resultado que afirma que 'um grafo é euleriano sse todos os seus vértices têm valência par' (veja [H1]).

LEMA 3.3 - Um grafo conexo G é grafo aresta de um grafo euleriano sse existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos pares tal que cada vértice pertence a exatamente dois desses subgrafos.

TEOREMA 3.4 - Se G é um grafo conexo e existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos pares tal que cada vértice pertence a exatamente dois desses subgrafos, então G é hamiltoniano.

COROLÁRIO 3.5 - Um grafo G é hamiltoniano sse G tem um subgrafo espalhado K que é grafo aresta de um grafo euleriano.

Embora o corolário 3.5 caracterize os grafos hamiltonianos, não é muito útil. O problema de determinar se G tem um subgrafo espalhado que é grafo aresta de um grafo eu

leriano é tão difícil quanto o de determinar se G tem um circuito hamiltoniano.

Veremos a seguir um lema que será particularmente útil para testarmos se um grafo satisfaz a condição suficiente dada pelo teorema 3.4.

LEMA 3.6 - Se G é um grafo aresta e C_1, C_2, \dots, C_k são os subgrafos completos que resultam da partição das arestas de G tal que nenhum vértice pertence a mais do que dois desses subgrafos, e se K é um clique de G de ordem maior ou igual a 4, então para algum i , $1 \leq i \leq k$, $K = C_i$.

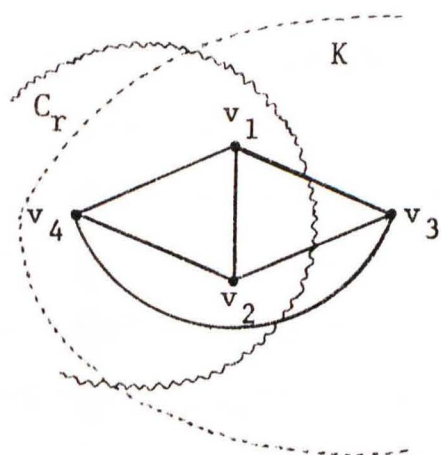
DEMONSTRAÇÃO

Seja K um clique de ordem pelo menos 4 e suponhamos que K não seja nenhum dos subgrafos C_i 's, $1 \leq i \leq k$.

Seja C_r ($1 \leq r \leq k$) um subgrafo completo que tem pelo menos uma aresta, digamos $\{v_1, v_2\}$, em comum com K , e seja v_3 um vértice de K não pertencente a C_r . (A existência de v_3 se justifica pelo fato de K ser um subgrafo completo maximal, por hipótese diferente de C_r).

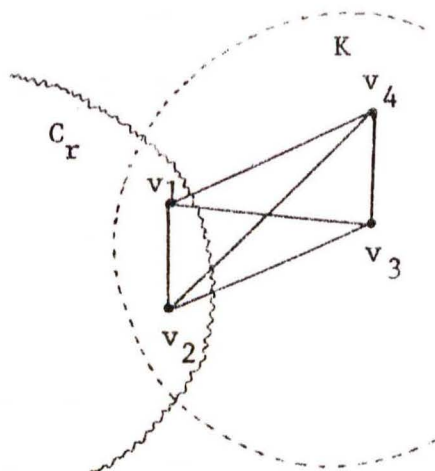
Seja v_4 um outro vértice qualquer de K , distinto de v_1, v_2 e v_3 .

Caso 1: $v_4 \in C_r$



Nesse caso, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_4\}$ e $\{v_2, v_4\}$ são arestas de C_r . Como $v_3 \notin C_r$, as arestas $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$ e $\{v_4, v_3\}$ não pertencem a C_r . Como v_3 pertence no máximo a dois subgrafos completos, pelo menos duas dessas arestas devem pertencer a um mesmo C_s ($s \neq r$). Mas se isto ocorrer, pelo menos uma das arestas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_4\}$ pertencerá a mais do que um dos subgrafos completos, o que é uma contradição.

Caso 2: $v_4 \notin C_r$



Como v_1 pertence no máximo a dois subgrafos completos, as arestas $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_1, v_4\}$ devem pertencer a um mesmo subgrafo completo, digamos C_s . Neste caso, $\{v_3, v_4\}$ também deve pertencer a C_s . Analogamente, as arestas $\{v_2, v_3\}$ e $\{v_2, v_4\}$ devem pertencer a um mesmo subgrafo completo, digamos C_t ; e conseqüentemente $\{v_3, v_4\}$ deve pertencer a C_t . Se $C_t \neq C_s$ temos uma contradição pois $\{v_3, v_4\}$ pertenceria a dois subgrafos completos distintos. Se $C_t = C_s$ também temos uma contradição pois neste caso a aresta $\{v_1, v_2\}$ pertenceria tanto a C_r quanto a C_s ($s \neq r$). ■

Vamos agora descrever um algoritmo para testar se um grafo conexo G satisfaz a condição dada pelo teorema 3.4. O algoritmo produzirá como saída a correta partição das arestas de G se a condição estiver satisfeita. Vamos supor que G não é um circuito pois neste caso claramente a condição está satisfeita.

ALGORITMO

Passo 1 - Se existe algum vértice com valência ímpar, pare.

(Pela proposição 3.2 G não é um grafo aresta de um grafo euleriano, e pelo lema 3.3 a condição do teorema não está satisfeita.)

Seja v um vértice de valência ≥ 4 e seja K um clique contendo v . Se $|VK| \geq 3$ e $|VK|$ é ímpar, pare (G não satisfaz a condição). Se $|VK|$ é par, faça uma coloração com a cor 1 das arestas de K (pelo lema 3.6, K é um dos subgrafos completos da partição).

Passo 2 - Seja u um vértice de G tal que pelo menos uma aresta incidente a u esteja colorida e pelo menos uma aresta incidente não esteja colorida.

Seja H um subgrafo de G induzido por u e pelos vértices que são adjacentes a u por uma aresta não colorida. Se H não é completo ou $|VH|$ é ímpar então a condição não está satisfeita. Pare. Caso contrário, use uma nova cor para colorir as arestas de H .

Passo 3 - Se todas as arestas estiverem coloridas, pare. Caso contrário volte para o passo 2. ■

Se todas as arestas de G puderem ser coloridas dessa maneira, então a coloração efetuada definirá a partição

correta de G e G será hamiltoniano.

Vamos agora deduzir outros resultados que foram motivados pela proposição abaixo cuja demonstração pode ser encontrada em [S1].

PROPOSIÇÃO 3.7 - Se H é hamiltoniano então $A(H)$ é hamiltoniano.

LEMA 3.8 - G é grafo aresta de um grafo hamiltoniano sse existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos tal que cada vértice de G pertence a exatamente dois desses subgrafos e G possui um circuito que tem exatamente uma aresta em cada um desses subgrafos.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja $G = A(H)$ onde H é hamiltoniano. Pela proposição 3.1 e pela observação (b) feita anteriormente, resulta que cada vértice de G pertence a exatamente dois dos subgrafos completos da partição. Seja $C = (v_1, \alpha_1, v_2, \alpha_2, \dots, v_k, \alpha_k, v_1)$ um circuito hamiltoniano de H onde os v_i 's e os α_i 's são vértices e arestas de H , respectivamente. Então $C' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_1)$ é um circuito de G onde cada aresta $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ para $1 \leq i \leq k-1$ pertence ao subgrafo completo $C_{v_{i+1}}$ de G e $\{\alpha_k, \alpha_1\} \in C_{v_1}$.

(ii) Se existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos tal que cada vértice pertence a exatamente dois

desses subgrafos, então pela proposição 3.1, G é grafo aresta. Seja $G = A(H)$ e sejam $C_{v_1}, C_{v_2}, \dots, C_{v_k}$ os subgrafos completos da partição. Como cada C_{v_i} tem pelo menos uma aresta, os vértices de H têm valência pelo menos 2 e portanto pela observação (a), a cada vértice v_i de H fica associado um subgrafo completo C_{v_i} . Além disso, cada aresta $\gamma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ em C_{v_i} está associada às duas arestas α_1 e α_2 em H , incidentes ao correspondente vértice v_i em H . Assim, o circuito em G tendo exatamente uma aresta em cada C_{v_i} , corresponde a um circuito em H que passa em cada vértice de H exatamente uma vez. Portanto, H é hamiltoniano. ■

TEOREMA 3.9 - Seja G um grafo. Se existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos tal que cada vértice pertence a exatamente dois desses subgrafos e G possui um circuito que tem exatamente uma aresta em cada um desses subgrafos, então G é hamiltoniano.

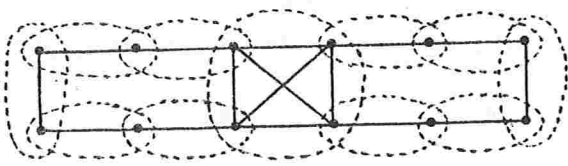
DEMONSTRAÇÃO

Segue da proposição 3.7 e do lema 3.8. ■

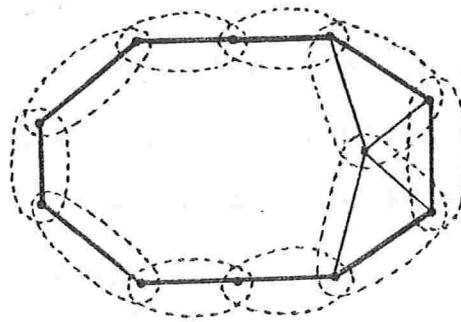
Note que o circuito mencionado no lema 3.8 e no teorema 3.9 é um circuito hamiltoniano apenas no caso em que G é ele próprio um circuito. Geralmente, o referido circuito não é hamiltoniano.

CONCLUSÃO

Os teoremas 3.4 e 3.9 vistos nesta seção não exigem que o grafo, globalmente, tenha muitas arestas. Vale a pena notar que os grafos que satisfazem a condição do teorema 3.4 são todos eulerianos, ao passo que os que satisfazem a condição do teorema 3.9 não o são necessariamente. Por exemplo, considere os grafos:



G_1



G_2

O grafo G_1 satisfaz a condição do teorema 3.4 (é euleriano) e o grafo G_2 satisfaz a condição do teorema 3.9 (não é euleriano).

4. OUTRAS CONDIÇÕES

Nesta seção veremos condições suficientes baseadas:

- (a) na relação entre conectividade e estabilidade do grafo,
- (b) em subgrafos proibidos,

(c) na existência de um conjunto de vértices com uma certa propriedade.

Começaremos examinando um resultado obtido por Chvátal e Erdős [CE] em 1972. Antes porém, vamos introduzir algumas definições e notações.

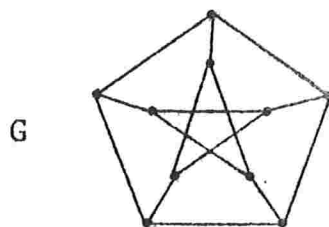
DEFINIÇÃO - A *conectividade* de um grafo G , denotada por $\kappa(G)$, é o número mínimo de vértices cuja remoção resulta em um grafo desconexo ou trivial.

DEFINIÇÃO - Um grafo G diz-se *k-conexo* se $\kappa(G) \geq k$.

DEFINIÇÃO - Se G é um grafo, um conjunto X de vértices de G diz-se *estável* sse os vértices de X são dois a dois não adjacentes.

DEFINIÇÃO - A *estabilidade* de um grafo G , denotada por $\beta(G)$, é a cardinalidade do maior conjunto estável de G .

EXEMPLO: Grafo de Petersen



$$\kappa(G) = 3$$

$$\beta(G) = 4$$

Figura 19

DEFINIÇÃO - Se $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ é um circuito de um grafo G , então dizemos que v_{i+1} é sucessor de v_i para $1 \leq i \leq k-1$ e v_1 é sucessor de v_k . Se v_j é sucessor de v_i em C também dizemos que v_i e v_j são vértices consecutivos em C ou que ocorrem consecutivamente em C .

DEFINIÇÃO - Seja u e v vértices distintos de um grafo G . Diz-se que P e Q são caminhos disjuntos que ligam u e v se P e Q são caminhos com extremidades u e v e $VP \cap VQ = \{u, v\}$.

Enunciamos a seguir uma variante do teorema de Menger que foi provada por Whitney e que será utilizada na demonstração do teorema 4.2. A demonstração desse resultado assim como referências poderão ser encontradas no livro de F. Harary [H1].

LEMA 4.1 - Um grafo G é k -conexo sse cada par de vértices distintos de G é ligado por pelo menos k caminhos dois a dois disjuntos.

TEOREMA 4.2 - Se G é um grafo de ordem $n \geq 3$ e $\kappa(G) \geq \beta(G)$ então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Não existe nenhum grafo G de ordem $n \geq 3$ tal que $\kappa(G) = 1 \geq \beta(G)$. Suponhamos então $\kappa(G) = k \geq 2$. Neste caso, pelo lema 4.1, G contém um circuito. Suponhamos que G não seja ha

miltoniano e seja C um circuito de comprimento máximo em G . Então, existe $w \in VG - VC$.

Seja H o componente de $G - C$ que contém w . Então,

$$\left. \begin{array}{l} \text{não existem vértices consecutivos em } C, \text{ ambos adja-} \\ \text{centes a algum vértice de } H. \end{array} \right\} (1)$$

De fato, se isso ocorresse teríamos um circuito de comprimento maior que $|C|$.

Como $\kappa(G) = k$, aplicando-se o lema 4.1, segue que e existem pelo menos k caminhos P_1, P_2, \dots, P_k , cada P_i ($1 \leq i \leq k$) com início w , término $x_i \in VC$ e $VP_i \cap VP_j = \{w\}$ se $i \neq j$ (figura 20).

É claro que esses x_i 's não ocorrem consecutivamente em C pois isso contraria (1). Seja então y_i o sucessor de x_i em C . Novamente pelo item (1), nenhum y_i é adjacente a w . Se não existir nenhum y_i adjacente a um y_j , teremos um conjunto estável com $k+1$ vértices (os y_i 's e w), contrariando

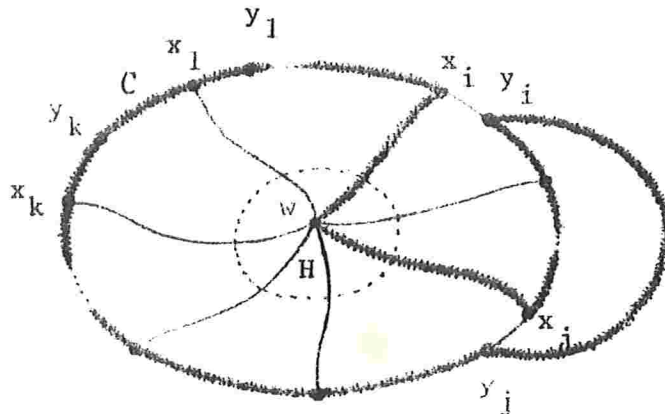


Figura 20

a hipótese $\kappa(G) = k \geq \beta(G)$. Logo, deve existir vértices y_i e y_j adjacentes. Mas se isso ocorrer, poderemos construir um circuito de comprimento maior que $|C|$ (veja figura 20), o que é uma contradição. Portanto, se $\kappa(G) \geq \beta(G)$, G é hamiltoniano. ■

OBSERVAÇÃO

Este teorema é o melhor possível no sentido de que a desigualdade não pode ser melhorada. O grafo bipartido completo $K_{k,k+1}$ tem conectividade k , estabilidade $k+1$ e não tem circuito hamiltoniano. O grafo de Petersen (figura 19) tem conectividade 3 e estabilidade 4 e é não hamiltoniano.

No caso em que $\kappa(G) = k \geq \frac{n+2}{3}$ onde n é a ordem de G , o teorema 4.2 segue como consequência do seguinte resultado provado por Nash-Williams.

TEOREMA 4.3 - Se G é um grafo de ordem $n \geq 3$ e se $\delta(G) \geq k \geq \frac{n+2}{3}$, então

- (i) G é separável ou
- (ii) $\beta(G) \geq k+1$ ou
- (iii) G é hamiltoniano.

Não faremos aqui a demonstração desse resultado que o leitor poderá encontrar em [NW2]. Esse resultado será uti

lizado mais adiante no capítulo IV.

A seguir apresentaremos duas condições baseadas em subgrafos proibidos. A primeira delas (teorema 4.4) é mencionada em [H1] e a segunda (teorema 4.5) foi obtida por Goodman & Hedetniemi [GH].

DEFINIÇÃO - Um grafo G é um θ -grafo se G é não separável, G tem dois vértices não adjacentes de valência 3 e todos os outros vértices de G têm valência 2.

EXEMPLO de θ -grafos:



DEFINIÇÃO - Se G é um grafo, um θ -subgrafo de G é um θ -grafo que é subgrafo de G .

TEOREMA 4.4 - Se G é um grafo 2-conexo e G não tem θ -subgrafo então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Seja G um grafo 2-conexo que não tem θ -subgrafo e suponhamos G não hamiltoniano.

Como G é 2-conexo, pelo lema 4.1 G tem um circuito.

Seja C um circuito de G de comprimento máximo. Como C não é hamiltoniano e G é conexo, existe $w \in V(G) - V(C)$, w adjacente a algum vértice v de C .

Seja H o componente de $G - C$ que contém w . Como G é 2-conexo, existe $x \in V(H)$ (eventualmente $x=w$), x adjacente a um vértice y de C , $y \neq v$. Além disso, como H é conexo, existe um caminho P de w a x em H (se $x=w$, $P=w$). Nesse caso, se y é adjacente a v em C temos um circuito de comprimento maior que $|C|$, o que é uma contradição. Mas se y é não adjacente a v em C , então $P \cup C + \{v, w\} + \{x, y\}$ é um θ -subgrafo de G , e temos novamente uma contradição. ■

TEOREMA 4.5 - Se G é um grafo conexo, $\delta(G) \geq 2$ e G não tem nenhum subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$ ou $K_{1,3} + \alpha$ (onde α é uma aresta), então G é hamiltoniano.

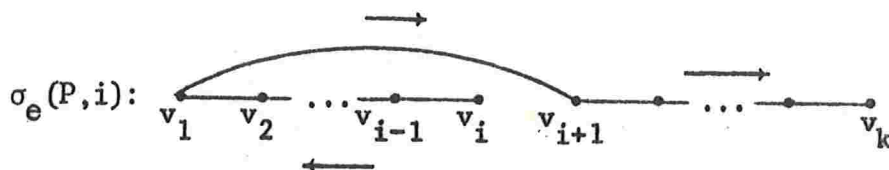
DEMONSTRAÇÃO

Seja G um grafo nas condições do teorema e suponhamos G não hamiltoniano. Como $\delta(G) \geq 2$, G tem um circuito. Seja C um circuito de G de comprimento máximo e seja $w \in V(G) - V(C)$, w adjacente a um vértice v de C . Se x e y são vértices adjacentes a v em C então w é não adjacente a x , e w é não adjacente a y , senão G teria um circuito de comprimento maior que $|C|$. Mas nesse caso, o subgrafo induzido por w, x, v e y é isomorfo a $K_{1,3}$ ou $K_{1,3} + \alpha$, o que é uma contradição. ■

O resultado que apresentaremos a seguir foi obtido por Z. Skupieñ em 1971 [S]. (A demonstração que faremos aqui difere um pouco daquela apresentada em [S]).

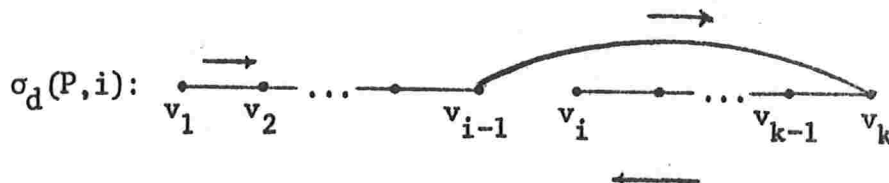
As definições, notações e condições que seguem serão utilizadas nos lemas 4.6, 4.7, 4.8 e no teorema 4.9.

DEFINIÇÃO - Seja $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ um caminho de um grafo G . Se $v_i \in VP$ e $\{v_1, v_{i+1}\} \in EG$ onde $1 \leq i \leq k-1$, então o caminho $\sigma_e(P, i) = (v_i, v_{i-1}, \dots, v_1, v_{i+1}, \dots, v_k)$ diz-se obtido por uma σ_e -transformação de P e é chamado de σ_e -transformado de P .



Note que P e $\sigma_e(P, i)$ têm o mesmo término.

DEFINIÇÃO - Seja $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ um caminho de um grafo G . Se $v_i \in VP$ e $\{v_{i-1}, v_k\} \in EG$ onde $2 \leq i \leq k$, então o caminho $\sigma_d(P, i) = (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_k, v_{k-1}, \dots, v_i)$ diz-se obtido por uma σ_d -transformação de P e é chamado de σ_d -transformado de P .



Note que P e $\sigma_d(P, i)$ têm o mesmo início.

DEFINIÇÃO - Seja P um caminho de um grafo G . Um caminho P' de G diz-se um σ -transformado de P se P' é obtido de P por uma σ_e ou σ_d -transformação de P , ou por uma sucessão de σ_e e/ou σ_d -transformações.

NOTAÇÕES:

- $V(\text{val}(x)) = \{v \in VG: \text{val}(v) \leq \text{val}(x)\}$
- Se $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ é um caminho de G ,
- $VP(e) = \{v_i: 1 \leq i \leq k-1, v_{i+1} \in \Gamma v_i\}$
- $VP(d) = \{v_j: 2 \leq j \leq k, v_{j-1} \in \Gamma v_j\}$

CONDIÇÕES: (referentes a um grafo G de ordem n)

Se $W \subset VG$, denotaremos por $S1(W)$ a seguinte condição:

$$S1(W) \begin{cases} \exists x \in W \text{ tal que } W = \phi(\Gamma x) \text{ onde } \phi \text{ é uma injeção} \\ \text{admissível de } \Gamma x \longrightarrow \Gamma^2 x, W \subseteq V(\text{val}(x)) \text{ e} \\ W \cup \Gamma W \neq VG. \end{cases}$$

Denotaremos por S a seguinte condição:

$$S \begin{cases} \exists L \subseteq VG \text{ tal que:} \\ \text{(i) } \forall W \subseteq VG, S1(W) \text{ implica que } W \cap L \neq \emptyset, \\ \text{(ii) } \forall u, v \in L, u \neq v, \text{ se } \{u, v\} \notin EG \text{ então} \\ \text{val}(u) + \text{val}(v) \geq n. \end{cases}$$

O seguinte resultado será utilizado no lema 4.6 e no capítulo IV. Trata-se de um resultado clássico cuja de-

monstração o leitor poderá encontrar em [LSSSK].

TEOREMA DE HALL - Seja G um grafo bipartido com partição X, Y . Existe uma injeção admissível de X em Y sse para todo $A \subseteq X$
 $|\Gamma A| \geq |A|$.

LEMA 4.6 - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$. Se G satisfaz a condição S então para todo $x \in VG$ existe uma injeção admissível $\phi: \Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que exista $x \in VG$ tal que não existe uma injeção admissível $\phi: \Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$. Então, pelo teorema de Hall, existe $A \subseteq \Gamma x$ tal que $|\Gamma A| < |A|$ (para aplicar o teorema de Hall, considere o grafo bipartido G' com partição

$$X = \{(y, 0) : y \in \Gamma x\} \text{ e } Y = \{(z, 1) : z \in \Gamma^2 x\} \text{ e } EG' = \{(y, 0), (\Gamma y, 1)\}, y \in \Gamma x\}.$$

Tomemos o menor subconjunto A tal que $|\Gamma A| < |A|$.

(1) $|A| \geq 2$ pois $|A| > |\Gamma A| \geq 1$ (já que $\forall A \neq \emptyset, \Gamma A \neq \emptyset$).

(2) $A \cap \Gamma A = \emptyset$. De fato, supondo que $A \cap \Gamma A \neq \emptyset$ resulta que $A - \Gamma A \subset A$ e portanto $|A - \Gamma A| < |A|$. Nesse caso, basta provarmos que $|\Gamma(A - \Gamma A)| < |A - \Gamma A|$ para obtermos uma contradição. Para isso, note que $\Gamma(A - \Gamma A) \subseteq \Gamma A - A$ e portanto,

$$|\Gamma(A - \Gamma A)| \leq |\Gamma A - A| = |\Gamma A| - |A \cap \Gamma A| < |A| - |A \cap \Gamma A| = |A - \Gamma A|.$$

(3) $\forall u, v \in A, u \neq v, \text{val}(u) + \text{val}(v) < n$. De fato,

$$\text{val}(u) + \text{val}(v) \leq |\Gamma u| + |\Gamma v| < |\Gamma A| + |A| \leq n.$$

(4) Seja $v \in A$ e $A' = A - \{v\}$. Então devemos ter $|A'| = |\Gamma A'|$ e $\Gamma A' = \Gamma A$.

(5) $\forall B \subseteq A'$, $|B| \leq |\Gamma B|$ para não contrariar a escolha de A . Pelo teorema de Hall (não considerando as arestas de $\Gamma A'$ em $\Gamma A'$), existe uma injeção admissível $\psi: A' \rightarrow \Gamma A'$.

(6) Como $|A'| = |\Gamma A'|$ podemos dizer que $\theta = \psi^{-1}$ é uma injeção admissível de $\Gamma A' \rightarrow A'$.

(7) Seja $y \in A$ tal que $\text{val}(y) = \max\{\text{val}(t) : t \in A\}$. Seja $v \in A$, $v \neq y$ e seja $A' = A - \{v\}$. Já vimos que existe uma injeção admissível $\theta: \Gamma A' \rightarrow A'$. Como $\Gamma y \subseteq \Gamma A'$, considere $\tilde{\theta}$ a restrição de θ a Γy e seja $W = \tilde{\theta}(\Gamma y)$. Note que $\tilde{\theta}$ é uma injeção admissível de $\Gamma y \rightarrow \Gamma^2 y$, $y \in W$, e pela escolha de y , $W \subseteq A$ ($\text{val}(y)$). Além disso, existe $v \in A$ tal que $v \notin W \cup \Gamma W$. Portanto, $S_1(W)$ está satisfeita. Logo, $W \cap L \neq \emptyset$, isto é, existe $w \in W$ e $w \in L$.

(8) Seja $A' = A - \{w\}$ e seja $z \in A'$ tal que

$$\text{val}(z) = \max\{\text{val}(t) : t \in A'\}.$$

Sabemos que existe uma injeção admissível $\eta: \Gamma A' \rightarrow A'$. Seja $\tilde{\eta}$ a restrição de η a Γz e seja $\tilde{W} = \tilde{\eta}(\Gamma z)$. $\tilde{\eta}$ é uma injeção admissível de $\Gamma z \rightarrow \Gamma^2 z$, $z \in \tilde{W}$, $\tilde{W} \subseteq V(\text{val}(z))$ e $\tilde{W} \cup \Gamma \tilde{W} \neq V G$ pois existe $w \in A$, $w \notin \tilde{W} \cup \Gamma \tilde{W}$. Logo, $S_1(\tilde{W})$ está satisfeita e portanto, $\tilde{W} \cap L \neq \emptyset$, isto é, existe $\tilde{w} \in \tilde{W} \cap L$, $\tilde{w} \neq w$.

(9) Como $w \in A$, $\tilde{w} \in A$, $w \neq \tilde{w}$, pelo item (3) $\text{val}(w) + \text{val}(\tilde{w}) < n$.

(10) Mas se $w \in L$, $\tilde{w} \in L$, $\{w, \tilde{w}\} \notin E G$ (pois $A \cap \Gamma A = \emptyset$), pelo item (ii) da condição S, $\text{val}(w) + \text{val}(\tilde{w}) \geq n$, o que contraria o item

(9).

LEMA 4.7 - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$. Se G satisfaz a condição S então G é conexo.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que G não seja conexo. Então, existem $X, Y \subset VG$ tais que $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cup Y = VG$, $X \cap Y = \emptyset$ e não existe nenhuma aresta ligando X e Y . Logo, se $x \in X$ e $y \in Y$,

$$\text{val}(x) + \text{val}(y) \leq |X| - 1 + |Y| - 1 = |X| + |Y| - 2 = n - 2.$$

Portanto, pelo item (ii) da condição S ,

$$X \cap L = \emptyset \text{ ou } Y \cap L = \emptyset. \quad (1)$$

Seja $x \in X$ tal que $\text{val}(x) = \max\{\text{val}(v) : v \in X\}$. Pelo lema 4.6, existe uma injeção admissível $\phi: \Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$. Seja $W = \phi(\Gamma x)$. Então $W \subset X \subseteq V$ ($\text{val}(x)$) e se $y \in Y$, $y \notin (W \cup \Gamma W)$. Portanto, $S_1(W)$ está satisfeita e pelo item (i) da condição S , $W \cap L \neq \emptyset$ e conseqüentemente, $X \cap L \neq \emptyset$.

De maneira análoga prova-se que $Y \cap L \neq \emptyset$, o que contradiz (1). Logo, G é conexo.

LEMA 4.8 - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$. Se G satisfaz S então para todo caminho P em G de comprimento máximo, $G[VP]$ é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que exista em G um caminho P de compri-

mento máximo $k-1$ ($k \leq n$) tal que $G[VP]$ não é hamiltoniano.

Note que se $\bar{P} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ é um σ -transformado de P , então:

(a) As extremidades de \bar{P} são não adjacentes, pois caso contrário, $G[VP]$ seria hamiltoniano.

(b) A soma das valências das extremidades de \bar{P} é menor que n . De fato, se $v_i \in V\bar{P}(e)$ então $v_i \notin \Gamma v_k$ pois caso contrário, $G[VP]$ seria hamiltoniano. Portanto, $\text{val}(v_k) \leq k-1 - \text{val}(v_1)$ e $\text{val}(v_1) + \text{val}(v_k) \leq k-1 < n$.

(c) Pelo item (ii) da condição S e pelos itens (a) e (b) acima, resulta que pelo menos uma das extremidades de \bar{P} não pertence a L .

(d) $v_k \notin \Gamma(V\bar{P}(e))$ senão $G[VP]$ seria hamiltoniano.

Seja $\bar{P} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ um σ_e -transformado de P (possivelmente $\bar{P}=P$) tal que $V\bar{P}(e) \subseteq V(\text{val}(v_1))$. Como $v_k \notin V\bar{P}(e)$, pelo item (d) segue que $v_k \notin V\bar{P}(e) \cup \Gamma(V\bar{P}(e))$. Por outro lado, como $|\bar{P}| = |P|$ é máximo então $\Gamma v_1 \subseteq V\bar{P}$ e é fácil ver que existe uma injeção admissível $\phi: \Gamma v_1 \rightarrow \Gamma^2 v_1$ tal que $V\bar{P}(e) = \phi(\Gamma v_1)$. Portanto, para $W = V\bar{P}(e)$, $S_1(W)$ está satisfeita e pelo item (i) da condição S, $V\bar{P}(e) \cap L \neq \emptyset$.

Seja então, $v_i \in V\bar{P}(e) \cap L$ e considere o caminho $\sigma_e(\bar{P}, i)$. Analogamente, fazendo-se σ_d -transformações em $\sigma_e(\bar{P}, i)$ podemos obter um caminho \tilde{P} cujo término pertence a L .

Notando que o início de \tilde{P} é igual ao de $\sigma_e(\bar{P}, i)$ pois através de σ_d -transformações não alteramos o início, segue que \tilde{P} é um σ -transformado de P que tem ambas as extremidades pertencentes a L . Mas isso contradiz (c). Logo, temos provado o lema. ■

TEOREMA 4.9 [TEOREMA DE SKUPIEŃ] - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$. Se G satisfaz a condição S , isto é, $\exists L \subseteq VG$ tal que:

- (i) $\forall W \subseteq VG$, $S_1(W)$ implica que $W \cap L \neq \emptyset$,
 - (ii) $\forall u, v \in L$, $u \neq v$, se $\{u, v\} \notin EG$, então $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq n$;
- então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Seja P um caminho do comprimento máximo em G . Pelo lema 4.8, $G[VP]$ é hamiltoniano. Se $G[VP] = G$ o teorema está provado. Suponhamos então $G[VP] \neq G$. Como $G[VP]$ é hamiltoniano, P está contido em um circuito C de G . Seja $C = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_k)$. Como C não é um circuito hamiltoniano de G , e G é conexo (pelo lema 4.7), existe um vértice w em G , $w \notin VC$, w adjacente a algum vértice v_i de C . Neste caso, o caminho $Q = (w, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$ tem comprimento maior que $|P|$, contrariando a escolha de P . Logo, $G[VP] = G$ e, pelo lema 4.8, G é hamiltoniano. ■

5. CLASSIFICAÇÃO DAS CONDIÇÕES

Nesta seção faremos a classificação das condições suficientes que enunciaremos a seguir e que foram estudadas nas seções anteriores. Para facilitar as referências vamos numerar as condições, todas elas referentes a um grafo G de ordem $n \geq 3$.

C1: condição de Dirac

$$\forall v \in V_G, \text{val}(v) \geq \frac{n}{2}.$$

C2: condição de Ore

$$\forall u, v \in V_G, \{u, v\} \notin E_G \implies \text{val}(u) + \text{val}(v) \geq n.$$

C3: condição de Pósa

- a) $\forall i, 1 \leq i < \frac{n-1}{2}$, o número de vértices de valência $\leq i$ é $< i$;
b) se n é ímpar, o número de vértices de valência $\leq \frac{n-1}{2}$ é $\leq \frac{n-1}{2}$.

C4: condição de Bondy-69

(supondo $\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$)

$$\left. \begin{array}{l} i \neq j \\ \text{val}(v_i) \leq i \\ \text{val}(v_j) \leq j \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n.$$

C5: condição de Bondy-70

(supondo $\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$)

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ \text{val}(v_i) \leq i \\ \text{val}(v_j) \leq j-1 \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n.$$

C6: condição de Chvátal

(supondo $\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$)

$$\text{val}(v_i) \leq i < \frac{n}{2} \implies \text{val}(v_{n-i}) \geq n-i.$$

C7: condição de Las Vergnas-70

existe uma indexação $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de VG tal que

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ \text{val}(v_i) \leq i \\ \text{val}(v_j) \leq j \\ \{v_i, v_j\} \notin EG \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n.$$

C8: condição de Las Vergnas-71

existe uma indexação $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de VG tal que

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ i+j \geq n \\ \text{val}(v_i) \leq i \\ \text{val}(v_j) \leq j-1 \\ \{v_i, v_j\} \notin EG \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n.$$

C9: condição de Bondy-Chvátal

o fecho de G é completo.

C10: condição de Skupień

existe $L \subseteq VG$ tal que

(a) $\forall W \subseteq VG$ $S1(W)$ implica que $W \cap L \neq \emptyset$,

(b) $\forall u, v \in L$, $u \neq v$, se $\{u, v\} \notin EG$ então $val(u) + val(v) \geq n$.

$S1(W)$: existe $x \in W$: $W = \phi(\Gamma x)$ onde ϕ é uma injeção admissível de $\Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$, $W \subseteq V(val(x))$ e $W \cup \Gamma W \neq VG$.

$V(val(x)) = \{v \in VG: val(v) \leq val(x)\}$.

C11:

existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos pares tal que cada vértice pertence a exatamente dois desses subgrafos.

C12:

G é conexo e existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos tal que cada vértice pertence a exatamente dois desses subgrafos e G contém um circuito tendo exatamente uma aresta em cada um desses subgrafos.

C13:

$\kappa(G) \geq \beta(G)$.

C14:

G é 2-conexo e G não tem θ -subgrafo.

C15:

G conexo, $\delta(G) \geq 2$ e G não tem subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$ ou $K_{1,3} + \alpha$.

No que segue iremos justificar o seguinte diagrama:

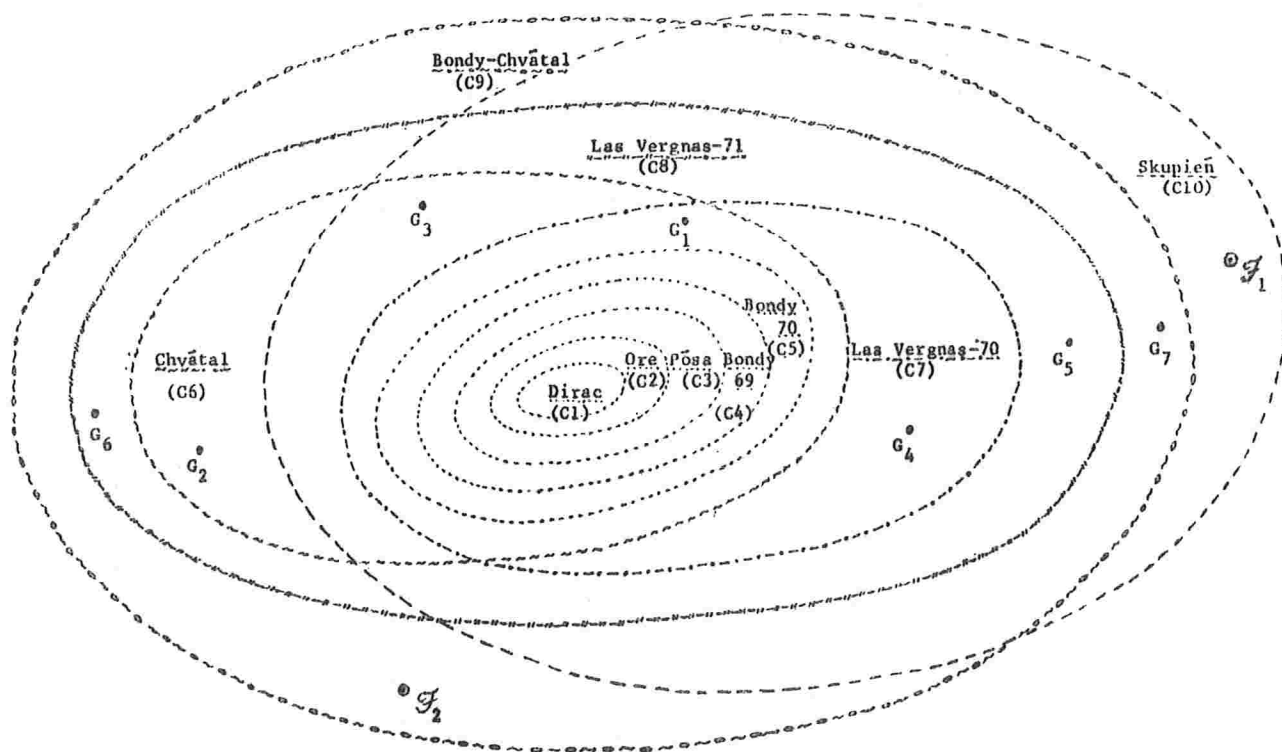


Figura 21

Note que no diagrama apresentamos todas as condições do tipo 1 (C1 a C9) e a condição de Skupieñ (C10). Isso foi feito pelo fato de a condição C7 de Las Vergnas-70, quando formulada de uma outra maneira equivalente (C7'), ter permitido concluir facilmente a relação que existe entre C7 e C10.

PROPOSIÇÃO 5.1

$$C1 \implies C2 \implies C3 \implies C4 \implies C5 \implies C7 \implies C8 \implies C9 \text{ e}$$
$$C5 \implies C6 \implies C8.$$

DEMONSTRAÇÃO

- (a) $C1 \implies C2$ - Imediato.
- (b) $C2 \implies C3$ - Veja demonstração do corolário II.2.10.
- (c) $C3 \implies C4$ - Veja demonstração do corolário II.2.9.
- (d) $C4 \implies C5$ - Imediato.
- (e) $C5 \implies C7$ - Imediato.
- (f) $C7 \implies C8$ - Imediato.
- (g) $C8 \implies C9$ - Veja demonstração do corolário II.2.4.
- (h) $C5 \implies C6$ - Veja demonstração do corolário II.2.7.
- (i) $C6 \implies C8$ - Veja demonstração do corolário II.2.6. ■

Mostraremos a seguir que a condição C7 é equivalente à seguinte condição C7'. (Veja [LV2])

C7': $\exists L \subseteq VG$ tal que

- (i) $\forall W \subset VG$, se $W \neq \emptyset$ e $\text{val}(w) \leq |W| \quad \forall w \in W$ então $W \cap L \neq \emptyset$,
(ii) $\forall u, v \in L$, $u \neq v$, se $\{u, v\} \notin EG$ então $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq n$.

PROPOSIÇÃO 5.2 - C7 é equivalente a C7'.

DEMONSTRAÇÃO -

(a) Provemos que C7 implica C7'.

Seja G um grafo que satisfaz C7. Então, existe uma indexação $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de VG tal que:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ \text{val}(v_i) \leq i \\ \text{val}(v_j) \leq j \\ \{v_i, v_j\} \notin EG \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n. \quad (1)$$

Seja $L = \{v_i : \text{val}(v_i) \leq i\}$. Vamos provar que L satisfaz os itens (i) e (ii) da condição C7'.

Seja $W \subset VG$, $W \neq \emptyset$, tal que $\text{val}(w) \leq |W|$, $\forall w \in W$.

Seja $w \in W$ o vértice de maior índice k. Então, é claro que $k \geq |W|$, donde $\text{val}(v_k) = \text{val}(w) \leq |W| \leq k$. Logo, $v_k \in L$ e portanto $v_k \in L \cap W$, o que prova o item (i).

Sejam $u, v \in L$, $u \neq v$, $\{u, v\} \notin EG$. Se $u = v_i$ e $v = v_j$, como $\text{val}(v_i) \leq i$ e $\text{val}(v_j) \leq j$, por (1) temos que

$$\text{val}(u) + \text{val}(v) = \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n.$$

(b) Provemos que C7' implica C7.

Se G satisfaz $C7'$ então existe $L \subset VG$ satisfazendo os itens (i) e (ii) da condição $C7'$. Suponhamos $L \neq VG$ (se $L = VG$ é imediato que $C7$ está satisfeita).

Seja $k = |VG - L|$. Sejam v_1, v_2, \dots, v_k os vértices de $VG - L$, indexados de forma que $val(v_1) \leq val(v_2) \leq \dots \leq val(v_k)$, e sejam $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$ os vértices de L .

Seja v_i tal que $val(v_i) \leq i$. Então $v_i \in L$, isto é, $i \geq k+1$. De fato, se $1 \leq i \leq k$, então o conjunto $W = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ é tal que $W \neq \emptyset$ e $W \cap L = \emptyset$ e, pelo item (i) existe $w \in W$ tal que $val(w) > |W| = i$. Isto é uma contradição pois $val(w) \leq val(v_i) \leq i$, $\forall w \in W$.

Assim, se $val(v_i) \leq i$, $val(v_j) \leq j$, $i \neq j$ e $\{v_i, v_j\} \notin EG$, como $v_i \in L$ e $v_j \in L$ temos por (ii) que $val(v_i) + val(v_j) \geq n$. ■

Usando o resultado anterior vamos provar a seguinte

PROPOSIÇÃO 5.3 - $C7 \implies C10$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ que satisfaz a condição $C7$. Pela proposição 5.2, G satisfaz $C7'$.

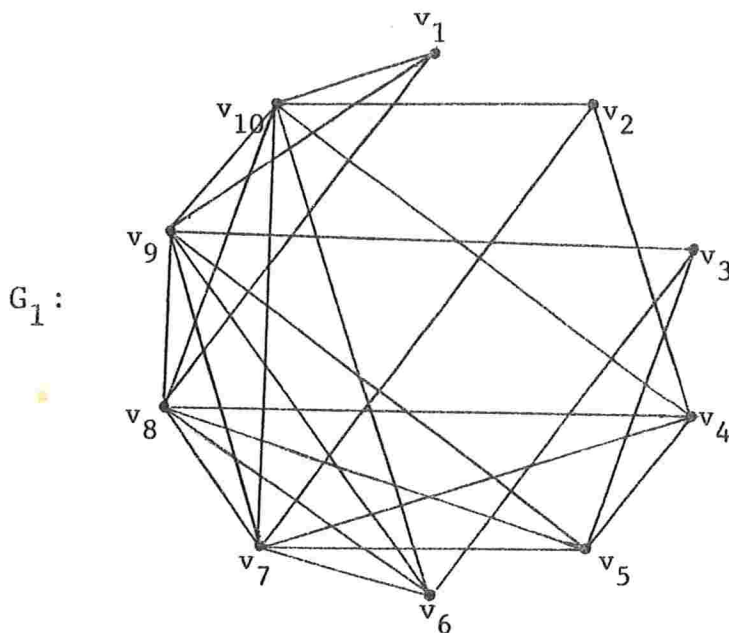
Note que para provarmos que G satisfaz $C10$ basta provarmos que $\forall W \subset VG$, $S1(W) \implies (W \neq \emptyset \text{ e } val(w) \leq |W| \forall w \in W)$.

Seja então, $W \subseteq VG$ tal que $S1(W)$ se verifica. Nesse caso, existe $x \in VG$ tal que $W = \phi(\Gamma x)$ onde ϕ é uma injeção admissível de $\Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$ e $W \subseteq V(\text{val}(x))$.

Como por hipótese G satisfaz $C7$, isto é, G é hamiltoniano, $\delta(G) \geq 2$. Então, $|W| = \text{val}(x) \neq 0$ e como $W \subseteq V(\text{val}(x))$, $\text{val}(w) \leq \text{val}(x) = |W|$, $\forall w \in W$. ■

Exibiremos a seguir alguns grafos que juntamente com os resultados anteriores justificam o diagrama da figura 21.

O grafo G_1



É imediato que

- (a) G_1 satisfaz $C6$
- (b) G_1 satisfaz $C7$
- (c) G_1 não satisfaz $C5$ ($\text{val}(v_3) \leq 3$, $\text{val}(v_6) \leq 5$ e $\text{val}(v_3) + \text{val}(v_6) < 10$). ■

O grafo G_2

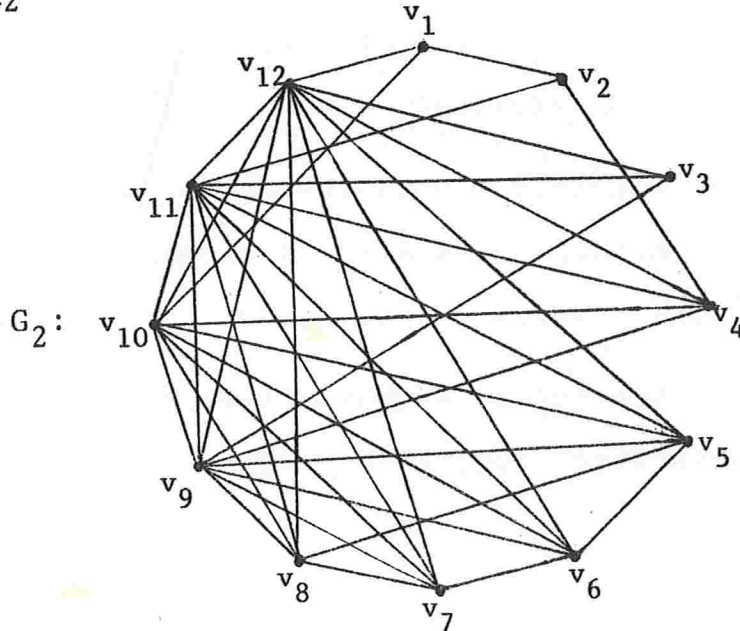


Figura 22

PROPOSIÇÃO 5.4 - Se G_2 é o grafo indicado na figura 22 então

- (a) G_2 satisfaz C_6
- (b) G_2 não satisfaz C_{10} .

DEMONSTRAÇÃO

(a) É imediato que G_2 satisfaz C_6 .

(b) Suponhamos que G_2 satisfaça C_{10} . Então $\exists L \subset V G_2$ tal

que

- (i) $\forall W \subset V G_2$, $S_1(W)$ implica que $W \cap L \neq \emptyset$,
- (ii) $\forall u, v \in L$, $u \neq v$, se $\{u, v\} \notin E G_2$ então $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq 12$.

Seja $W = \{v_1, v_2, v_3\}$. Vamos provar que $S_1(W)$ está satisfeita, isto é, vamos provar que existe $x \in V G_2$ tal que

$W = \phi(\Gamma x)$ onde ϕ é uma injeção admissível de $\Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$, $W \subseteq V(\text{val}(x))$, e existe $y \in V_G - W \cup \Gamma W$.

Tomando-se $x = v_3$, $y = v_7$, temos $\Gamma x = \{v_9, v_{11}, v_{12}\}$ e se considerarmos uma injeção ϕ tal que $\phi(v_9) = v_3$, $\phi(v_{11}) = v_2$, $\phi(v_{12}) = v_1$, ϕ é uma injeção admissível de $\Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$ e $\phi(\Gamma x) = W$. Como $W \subseteq V(\text{val}(x))$ e $y = v_7 \notin W \cup \Gamma W$, segue que $S_1(W)$ está satisfeita.

Pelo item (i), $W \cap L \neq \emptyset$. Logo,

$$v_1 \in L \text{ ou } v_2 \in L \text{ ou } v_3 \in L \quad (0)$$

caso 1: $v_1 \in L$

Nesse caso, pelo item (ii),

$$v_3 \notin L, v_4 \notin L, v_5 \notin L, v_6 \notin L, v_7 \notin L \text{ e } v_8 \notin L. \quad (1)$$

Por outro lado, $U = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ é tal que $S_1(U)$ está satisfeita. De fato, existe $x = v_5$ e existe uma injeção admissível $\phi: \Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$ ($\phi(v_6) = v_5$, $\phi(v_8) = v_7$, $\phi(v_9) = v_3$, $\phi(v_{10}) = v_4$, $\phi(v_{11}) = v_6$ e $\phi(v_{12}) = v_8$) tal que $\phi(\Gamma x) = U$; além disso, $U \subseteq V(\text{val}(x))$ e $v_1 \notin U \cup \Gamma U$. Logo, pelo item (ii), $U \cap L \neq \emptyset$, o que contradiz (1).

caso 2: $v_2 \in L$

Então, pelo item (ii),

$$v_3 \notin L, v_5 \notin L, v_6 \notin L, v_7 \notin L \text{ e } v_8 \notin L. \quad (2)$$

Já vimos que $U = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ é tal que $S1(U)$ está satisfeita. Logo, $U \cap L \neq \emptyset$ e conseqüentemente devemos ter $v_4 \in L$. Mas se $v_4 \in L$, então $v_1 \notin L$ (pelo item (ii)). Tomando-se $X = \{v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, $S1(X)$ está satisfeita; basta tomar $x = v_5$, $\phi(v_6) = v_5$, $\phi(v_8) = v_7$, $\phi(v_9) = v_6$, $\phi(v_{10}) = v_6$, $\phi(v_{11}) = v_8$, $\phi(v_{12}) = v_1$ e notar que $v_4 \notin X \cup FX$. Portanto, $X \cap L \neq \emptyset$, o que contradiz (2).

caso 3: $v_3 \in L$

Nesse caso,

$$v_1 \notin L, v_2 \notin L, v_4 \notin L, v_5 \notin L, v_6 \notin L, v_7 \notin L \text{ e } v_8 \notin L. \quad (3)$$

Tomando-se $X = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, temos que $S1(X)$ está satisfeita. De fato, basta considerar $x = v_5$, $\phi(v_6) = v_5$, $\phi(v_8) = v_7$, $\phi(v_9) = v_6$, $\phi(v_{10}) = v_4$, $\phi(v_{11}) = v_2$ e $\phi(v_{12}) = v_1$ e notar que $v_3 \notin X \cup FX$. Portanto, $X \cap L \neq \emptyset$, o que contradiz (3).

Logo, $v_1 \notin L$, $v_2 \notin L$ e $v_3 \in L$, o que contradiz (0). ■

O grafo G_3

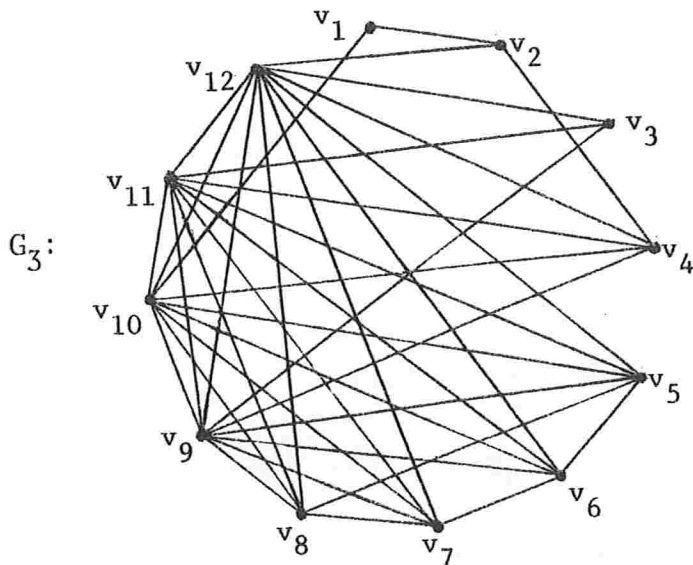


Figura 23

PROPOSIÇÃO 5.5 - Se G_3 é o grafo indicado na figura 23, então:

- (a) G_3 satisfaz C6
- (b) G_3 não satisfaz C7
- (c) G_3 satisfaz C10.

DEMONSTRAÇÃO

- (a) é imediato que G_3 satisfaz C6.
- (b) Suponha que G_3 satisfaz C7. Então, pela Proposição 5.2, G_3 satisfaz C7'; isto é, existe $L \subseteq VG_3$, tal que:
 - (i) $\forall W \subseteq VG_3$, se $W \neq \emptyset$ e $\text{val}(w) \leq |W| \quad \forall w \in W$, então $W \cap L \neq \emptyset$,
 - (ii) $\forall u, v \in L$, $u \neq v$, se $\{u, v\} \notin E G_3$ então $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq 12$.

Seja $W = \{v_1, v_2, v_3\}$. Como $\text{val}(w) \leq |W| \quad \forall w \in W$, pelo item (i), $W \cap L \neq \emptyset$, isto é,

$$v_1 \in L \text{ ou } v_2 \in L \text{ ou } v_3 \in L. \quad (1)$$

caso 1: $v_1 \in L$

Nesse caso, pelo item (ii), $v_3 \notin L$, $v_4 \notin L$, $v_5 \notin L$, $v_6 \notin L$, $v_7 \notin L$ e $v_8 \notin L$.

Se tomarmos $X = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, então $\text{val}(x) \leq |X| \quad \forall x \in X$.

Portanto, pelo item (i), $X \cap L \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

caso 2: $v_2 \in L$

Então, pelo item (ii), $v_3 \notin L$, $v_5 \notin L$, $v_6 \notin L$, $v_7 \notin L$ e $v_8 \notin L$

Além disso, $v_1 \notin L$ (pelo caso 1).

Se tomarmos $X = \{v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, $\text{val}(x) \leq |X| \forall x \in X$ e portanto, pelo item (i), $X \cap L \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

caso 3: $v_3 \in L$

Nesse caso, pelo item (ii), $v_1 \notin L$, $v_2 \notin L$, $v_4 \notin L$, $v_5 \notin L$, $v_6 \notin L$, $v_7 \notin L$ e $v_8 \notin L$. Tomando-se $X = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, temos que $\text{val}(x) \leq |X| \forall x \in X$. Logo, pelo item (i), $X \cap L \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

Logo, $v_1 \notin L$, $v_2 \notin L$ e $v_3 \in L$, o que contradiz (1). Portanto, G_3 não satisfaz C7.

(c) Vamos provar que G_3 satisfaz C10, isto é, vamos provar que existe $L \subseteq VG_3$ tal que:

- (i) $\forall W \subseteq VG_3$, $S1(W)$ implica que $W \cap L \neq \emptyset$,
- (ii) $\forall u, v \in L$, $u \neq v$, se $\{u, v\} \notin EG$ então $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq 12$.

Seja $L = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$.

É imediato que o item (ii) está satisfeito.

Os únicos conjuntos $W \subseteq VG_3$ tais que $W \cap L \neq \emptyset$ são os subconjuntos de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Como $\text{val}(v_1) = 2$, $\text{val}(v_2) = 3$, $\text{val}(v_3) = 3$ e $\text{val}(v_4) =$

= 5, é claro que se $|W| = 1$ ou $|W| = 2$ ou $|W| = 4$, $S1(W)$ não se verifica. A única possibilidade que resta é $|W| = 3$ com $W = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Suponhamos que $S1(W)$ esteja satisfeita. Então, existe $x \in W$ tal que $W = \phi(\Gamma x)$ onde ϕ é uma injeção admissível de $\Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$, $W \subseteq V(\text{val}(x))$. Nesse caso, $x \neq v_1$.

Logo, $x = v_2$ ou $x = v_3$.

caso 1: $x = v_2$

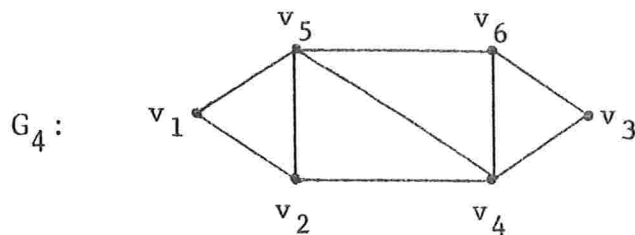
Nesse caso, $\Gamma x = \Gamma v_2 = \{v_1, v_4, v_{12}\}$. Como $v_1 \notin \Gamma^2 x$, não existe injeção admissível $\phi: \Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$ tal que $W = \phi(\Gamma x)$.

caso 2: $x = v_3$

Nesse caso, $\Gamma x = \Gamma v_3 = \{v_9, v_{11}, v_{12}\}$. Como $v_1 \notin \Gamma^2 x$, não existe injeção admissível $\phi: \Gamma x \rightarrow \Gamma^2 x$ tal que $W = \phi(\Gamma x)$.

Logo, $S1(W)$ não se verifica para nenhum subconjunto de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Qualquer outro subconjunto W de VG_3 é tal que $W \cap L \neq \emptyset$ e portanto o item (i) está satisfeito. ■

O grafo G_4



É imediato que:

(a) G_4 não satisfaz C_6

(b) G_4 satisfaz C_7 . (Considerar a indexação indicada).

O grafo G_5

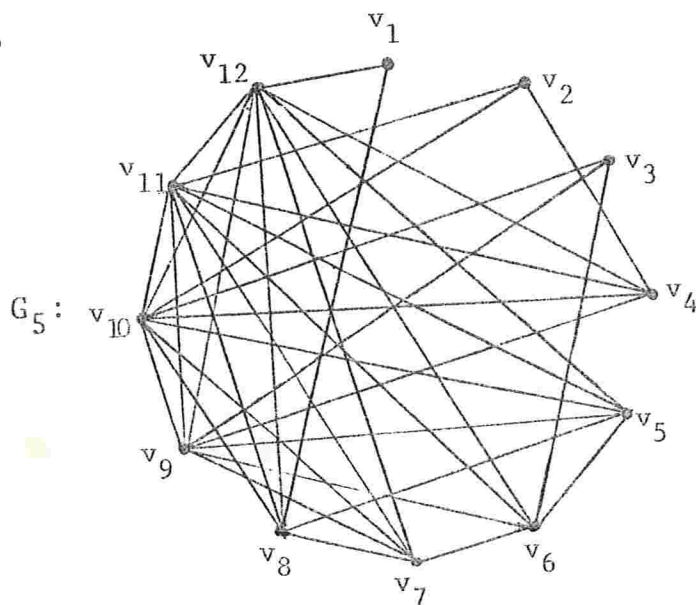


Figura 24

PROPOSIÇÃO 5.6 - Se G_5 é o grafo indicado na figura 24, então:

(a) G_5 não satisfaz C_6

(b) G_5 não satisfaz C_7

(c) G_5 satisfaz C_8

(d) G_5 satisfaz C_{10} .

DEMONSTRAÇÃO

(a) G_5 não satisfaz C_6 pois $\text{val}(v_3) = 3$ e $\text{val}(v_9) = 8$.

(b) Como C_7 e C_7' são equivalentes (proposição 5.2), vamos mostrar que G_5 não satisfaz C_7' .

Suponhamos que C7' esteja satisfeita. Então existe $L \subseteq VG_5$ tal que:

- (i) $\forall W \subseteq VG, W \neq \emptyset$ e $\text{val}(w) \leq |W| \forall w \in W$ então $W \cap L \neq \emptyset$,
- (ii) $\forall u, v \in L, u \neq v$, se $\{u, v\} \notin EG_5$ então $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq 12$.

Seja $W = \{v_1, v_2, v_3\}$. Como $\text{val}(w) \leq |W| \forall w \in W$, pelo item (i) $W \cap L \neq \emptyset$, isto é,

$$v_1 \in L \text{ ou } v_2 \in L \text{ ou } v_3 \in L. \quad (1)$$

caso 1: $v_1 \in L$

Nesse caso, pelo item (ii), $v_2 \notin L, v_3 \notin L, v_4 \notin L, v_5 \notin L, v_6 \notin L$ e $v_7 \notin L$. Tomando-se $X = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, pelo item (i), $X \cap L \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

caso 2: $v_2 \in L$

Então, $v_1 \notin L, v_3 \notin L, v_5 \notin L, v_6 \notin L, v_7 \notin L$ e $v_8 \notin L$.

Pelo item (i), se $X = \{v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ então $X \cap L \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

caso 3: $v_3 \in L$

Nesse caso, $v_1 \notin L, v_2 \notin L, v_4 \notin L, v_5 \notin L, v_7 \notin L$ e $v_8 \notin L$.

Mas, pelo item (i) se $X = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8\}$ então $X \cap L \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

Logo, $v_1 \notin L, v_2 \notin L$ e $v_3 \notin L$, contrariando (1). Logo, G_5 não satisfaz C7.

(c) Para verificar que G_5 satisfaz C8 basta considerar a indexação indicada na figura 24.

(d) Para verificar que G_5 satisfaz C10 tomar $L = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$. Pode-se verificar sem dificuldade que para subconjuntos W de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $S1(W)$ não se verifica. Assim, o item (i) da condição C10 está satisfeito e é imediato que o item (ii) também está satisfeito. ■

O grafo G_6

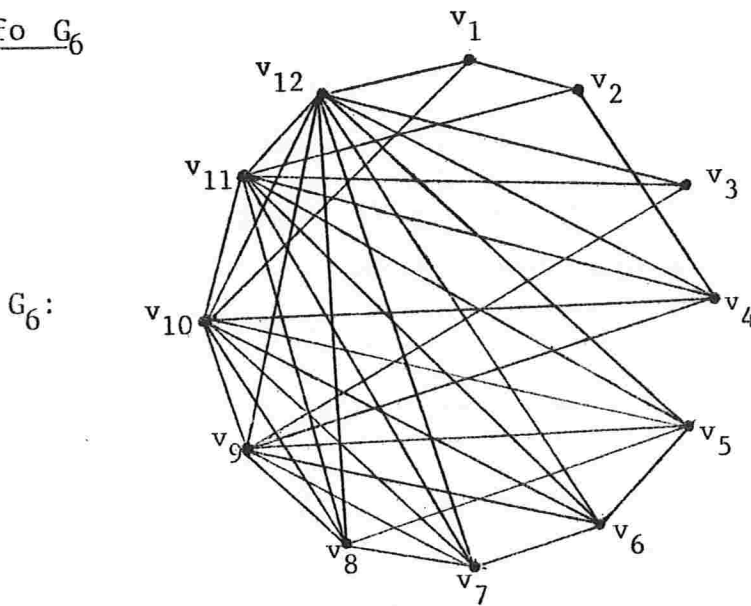


Figura 25

PROPOSIÇÃO 5.7 - Se G_6 é o grafo indicado na figura 25, então:

- (a) G_6 não satisfaz C6
- (b) G_6 satisfaz C8
- (c) G_6 não satisfaz C10.

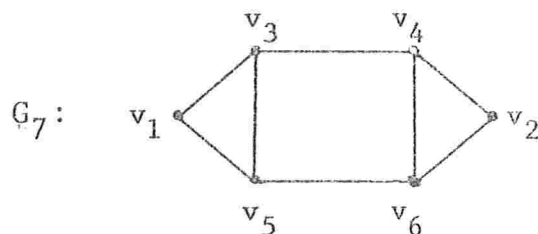
DEMONSTRAÇÃO

(a) É imediato que G_6 não satisfaz C6 ($\text{val}(v_3)=3$ e $\text{val}(v_9) = 8$).

(b) Para verificar que G_6 satisfaz C8 considerar a indexação indicada na figura 25.

(c) Note que $G_6 = G_2 - \{v_9, v_{11}\}$ onde G_2 é o grafo indicado na figura 22. A demonstração feita para mostrar que G_2 não satisfaz C10 (Proposição 5.4) serve para mostrar que G_6 não satisfaz C10 já que nessa demonstração não utilizamos o fato de $\{v_9, v_{11}\}$ ser uma aresta de G_2 . ■

O grafo G_7



É fácil verificar que:

- (a) G_7 não satisfaz C8
- (b) G_7 satisfaz C10 (tomar $L = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$)
- (c) G_7 satisfaz C9. ■

Exibiremos a seguir, duas famílias infinitas de grafos.

(1) A família \mathcal{F}_1

Chamaremos \mathcal{F}_1 a família dos grafos G de ordem $n \geq 8$, tal que $G = (G_1 \cup K_{n-4} \cup G_2) + \{\{x_1, u\}, \{y_1, v\}, \{x_2, w\}, \{y_2, z\}\}$, onde

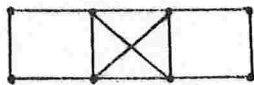
$$G_1 = K_2, \quad VG_1 = \{x_1, y_1\},$$

$$G_2 = K_2, \quad VG_2 = \{x_2, y_2\} \text{ e}$$

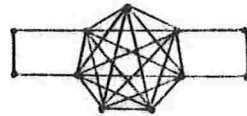
u, v, w, z são vértices distintos de K_{n-4} .

Os exemplos ilustram alguns grafos de \mathcal{F}_1 :

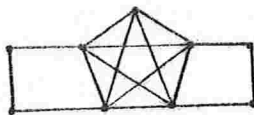
$n=8$



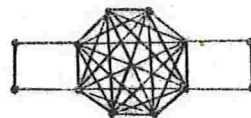
$n=11$



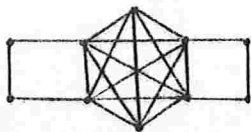
$n=9$



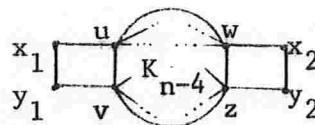
$n=12$



$n=10$



n



PROPOSIÇÃO 5.8 - Os grafos da família \mathcal{F}_1 satisfazem C10 mas não satisfazem C9.

DEMONSTRAÇÃO

É imediato que os grafos de \mathcal{F}_1 não satisfazem C9.

Para verificar que esses grafos satisfazem C10, tomar:

$$L = \{v \in VG : v \in K_{n-4}\}$$

e notar que qualquer subconjunto W de vértices não pertencentes a K_{n-4} é tal que $Sl(W)$ não se verifica. ■

(2) A família \mathcal{F}_2

Seja \mathcal{F}_2 a família dos grafos G de ordem $n \geq 7$ tal que

$$G = (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup K_{n-3}) + \{(x_1, u), \{x_1, v\}, \{x_2, v\}, \{x_2, y\}, \{x_3, y\}, \{x_3, z\}\},$$

onde

$$G_1 = K_1, \quad VG_1 = \{x_1\},$$

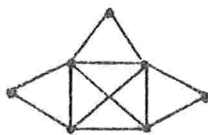
$$G_2 = K_1, \quad VG_2 = \{x_2\},$$

$$G_3 = K_1, \quad VG_3 = \{x_3\} \text{ e}$$

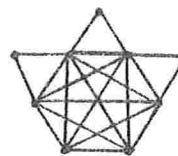
u, v, y, z são vértices distintos de K_{n-3} .

Exemplos de grafos em \mathcal{F}_2 .

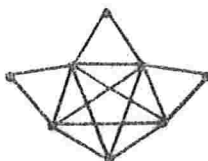
$n=7$



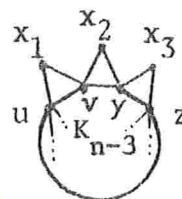
$n=9$



$n=8$



n



PROPOSIÇÃO 5.9 - Os grafos da família \mathcal{F}_2 satisfazem C9 mas não satisfazem C10.

DEMONSTRAÇÃO

É fácil ver que os grafos de \mathcal{F}_2 satisfazem C9. Para verificar que esses grafos não satisfazem C10 notar que se $G \in \mathcal{F}_2$ e G satisfaz C10, x_2 deve pertencer a L (pois se $W = \{x_1, x_2\}$ ou $W = \{x_2, x_3\}$, $S1(W)$ estará satisfeita), mas se tomarmos $W = (VK_{n-3} - \{v, y\}) \cup \{x_1, x_3\}$, $S1(W)$ estará satisfeita e não poderemos ter $W \cap L \neq \emptyset$ já que $val(w) + val(x_2) < n$, $\forall w \in W$. ■

Temos dessa forma, justificado o diagrama apresentado na figura 21.

Prosseguindo, mostraremos que a condição C15 a menos de um caso particular, é "pior" que a condição de Dirac (C1).

PROPOSIÇÃO 5.10 - Se G é um grafo de ordem $n \geq 3$ que satisfaz C15 e G não é um circuito então $val(v) \geq n-2$, $\forall v \in VG$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja G um grafo nas condições acima.

Vamos provar que $\forall u \in VG$, se $val(u) \geq 3$ então $val(u) \geq n-2$. Suponhamos $n \geq 6$ (para $n \leq 5$ o resultado imediato) e seja $u \in VG$ tal que $val(u) \geq 3$.

Suponhamos $\text{val}(u) < n-2$ e seja N o conjunto dos v\u00e9rtices n\u00e3o adjacentes a u .

Como G \u00e9 conexo, algum v\u00e9rtice de N deve ser adjacente a algum v\u00e9rtice de Γu . Seja $v \in N$, v adjacente a um v\u00e9rtice w de Γu .

Existe em Γu pelo menos um v\u00e9rtice adjacente a w , sen\u00e3o ter\u00edamos um $K_{1,3}$ ou $K_{1,3}^{+\alpha}$ induzido por u, w e dois v\u00e9rtices quaisquer de Γu .

Seja ent\u00e3o, $z \in \Gamma u$, z adjacente a w . Nesse caso, z deve ser adjacente a v sen\u00e3o u, z, w e v induziriam um subgrafo isomorfo a $K_{1,3}^{+\alpha}$.

Seja $W = \{w, z\} \subset V_G$ ent\u00e3o, $\forall y \in \Gamma u$, se $y \notin W$:

(a) — y tem que ser adjacente a algum v\u00e9rtice de W . De fato, se y n\u00e3o for adjacente a nenhum v\u00e9rtice de W , os v\u00e9rtices u, y, z, w induzir\u00e3o um subgrafo isomorfo a $K_{1,3}^{+\alpha}$.

(b) — y tem que ser adjacente a v .

Com efeito, sendo y adjacente a x onde $x=z$ ou $x=w$, se y n\u00e3o for adjacente a v , os v\u00e9rtices u, y, x e v induzir\u00e3o um subgrafo isomorfo a $K_{1,3}^{+\alpha}$.

Os itens (a) e (b) mostram que:

Todos os v\u00e9rtices de Γu s\u00e3o adjacentes a v e portanto, todos os v\u00e9rtices de Γu t\u00eam val\u00eancia pelo menos 3.

Se $v' \in N - \{v\}$, então:

- v' é não adjacente aos vértices de Γ_u pois se v' fosse adjacente a y , $y \in \Gamma_u$, os vértices u, y, v e v' induziriam um subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$ ou $K_{1,3}^{+\alpha}$;
- v' é não adjacente a v pois se v' fosse adjacente a v , os vértices v, v' e dois vértices quaisquer de Γ_u induziriam um subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$ ou $K_{1,3}^{+\alpha}$.

Mas se nenhum vértice de $N - \{v\}$ é adjacente aos vértices de $\{u\} \cup \Gamma_u \cup \{v\}$, então G é desconexo, o que é uma contradição. Portanto, se

$$\text{val}(u) \geq 3 \text{ então } \text{val}(u) \geq n-2. \quad (1)$$

Como G não é um circuito e G é hamiltoniano, existe $u \in VG$, tal que $\text{val}(u) \geq 3$ (e portanto, $\text{val}(u) \geq n-2$).

● Se $\text{val}(u) = n-2$ então existe $v \in \Gamma_u$. Pelo mesmo raciocínio feito anteriormente, resulta que v é adjacente a todos os vértices de Γ_u e que todos os vértices de Γ_u têm valência pelo menos 3. Logo, $\text{val}(v) = n-2$ e de (1) segue que todos os vértices de Γ_u têm valência pelo menos $n-2$, resultando que todos os vértices de G têm valência pelo menos $n-2$.

● Se $\text{val}(u) = n-1$ então provemos que todos os vértices de Γ_u têm valência pelo menos 3. Suponhamos que exista em Γ_u um vértice x de valência 2. Seja x adjacente a $y \in \Gamma_u$ e

sejam w e v outros v\u00e9rtices de Γ_u . Nesse caso, como x n\u00e3o \u00e9 adjacente a w e x n\u00e3o \u00e9 adjacente a v , os v\u00e9rtices u, x, w e v induzem um subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$ ou $K_{1,3}^{+\alpha}$.

Logo, todos os v\u00e9rtices de Γ_u t\u00eam val\u00eancia pelo menos 3 e portanto todos os v\u00e9rtices de G t\u00eam val\u00eancia pelo menos $n-2$. ■

Mostraremos a seguir que as condi\u00e7\u00f5es $C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}$ e C_{14} s\u00e3o duas a duas independentes.

DEFINI\u00c7\u00c3O - Condi\u00e7\u00f5es C_i e C_j s\u00e3o ditas *independentes* se h\u00e1 pelo menos um grafo que satisfaz C_i e n\u00e3o satisfaz C_j e h\u00e1 pelo menos um grafo que satisfaz C_j e n\u00e3o satisfaz C_i .

Na tabela abaixo exibimos grafos ou fam\u00edlia de grafos que satisfazem C_i e n\u00e3o satisfazem C_j onde $9 \leq i \leq 14$, $9 \leq j \leq 14$ e $i \neq j$.

Assim, na intersec\u00e7\u00e3o da linha C_i com a coluna $\sim C_j$ apresentamos um grafo ou uma fam\u00edlia de grafos que satisfazem a condi\u00e7\u00e3o C_i e n\u00e3o satisfazem a condi\u00e7\u00e3o C_j .

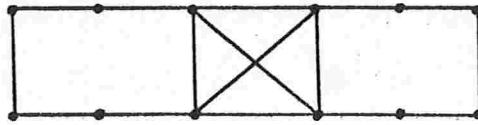
	$\sim C_9$	$\sim C_{10}$	$\sim C_{11}$	$\sim C_{12}$	$\sim C_{13}$	$\sim C_{14}$
C_9	/	\mathcal{F}_2	\mathcal{F}_2	\mathcal{F}_2	\mathcal{F}_2	\mathcal{F}_2
C_{10}	\mathcal{F}_1	/	\mathcal{F}_1^*	\mathcal{F}_1	\mathcal{F}_1	\mathcal{F}_1
C_{11}	H_1	H_1	/	H_1	H_1	H_1
C_{12}	H_2	H_2	H_2	/	H_2	H_2
C_{13}	H_3	H_3	H_3	H_3	/	H_3
C_{14}	H_4	H_4	H_4	H_4	H_4	/

\mathcal{F}_2 é a família de grafos descrita na página 79.

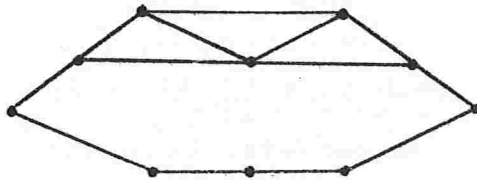
\mathcal{F}_1 é a família de grafos descrita na página 78.

$\mathcal{F}_1^* = \{G: G \in \mathcal{F}_1, |VG| \text{ é ímpar}\}.$

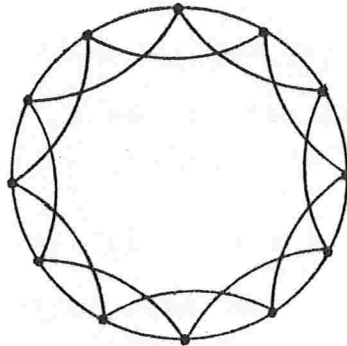
$H_1:$



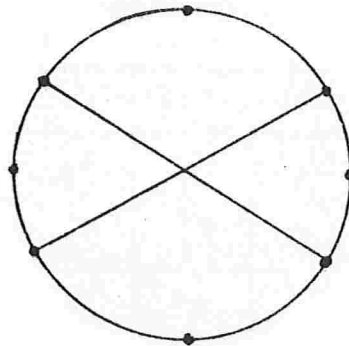
$H_2:$



$H_3:$



$H_4:$



CAPÍTULO III

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA UM GRAFO SER HAMILTONIANO

1. PRELIMINARES

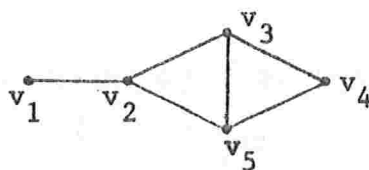
São poucos os resultados sobre condições necessárias para que um grafo seja hamiltoniano. Veremos aqui duas condições. Antes porém, vamos apresentar algumas definições e convencionar as notações que serão utilizadas neste capítulo.

DEFINIÇÃO - Seja G um grafo e seja f uma aplicação de VG nos inteiros não negativos. Um f -fator de G é um subgrafo F de G tal que $\text{val}_F(v) = f(v)$ para cada $v \in VG$.

Note que o conceito de f -fator é uma generalização do conceito de k -fator (veja definição na página 12). Um k -fator de G é um f -fator onde $f(v) = k$ para todo $v \in VG$.

EXEMPLO

Seja G o grafo



e seja a aplicação $f: VG \rightarrow \{0,1,2,\dots\}$ tal que $f(v_1) = 1$, $f(v_2) = 3$, $f(v_3) = 2$, $f(v_4) = 0$ e $f(v_5) = 2$. Nesse caso, o f -fator de G é o subgrafo $G \sim v_4$.

Se considerarmos a aplicação $f: VG \rightarrow \{0,1,2,\dots\}$ tal que $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 3$, $f(v_3) = 0$, $f(v_4) = 1$ e $f(v_5) = 0$, o grafo G não admite f -fator.

NOTAÇÃO - Se G é um grafo, $X \subset VG$ e $Y \subset VG$,

$$X \stackrel{G}{=} Y = \{\alpha \in EG: \alpha \text{ tem uma ponta em } X \text{ e outra em } Y\}.$$

O seguinte teorema obtido por Tutte [T] caracteriza os grafos que têm f -fator.

TEOREMA DE TUTTE - Um grafo G tem um f -fator sse não existe partição de VG em subconjuntos R, S, T tal que

$$\sum_{u \in S} f(u) + |T \stackrel{G}{=} T| + \sum_Q \left[\frac{\sum_{u \in VQ} f(u) + |VQ \stackrel{G}{=} T|}{2} \right] < \frac{\sum_{u \in VG} f(u)}{2},$$

onde Q percorre todos os componentes de $G[R]$.

Vamos demonstrar apenas que a condição acima é necessária para que um grafo tenha um f -fator. Depois, utilizando-se do mesmo raciocínio, vamos mostrar que uma determinada condição é necessária para que um grafo tenha um 2-fator conexo, isto é, seja hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO (que a condição é necessária)

Seja G um grafo que admite um f -fator F e suponha VG particionado em subconjuntos R, S, T tal que

$$\sum_{u \in S} f(u) + |T \overline{G} T| + \sum_Q \left\lfloor \frac{\sum_{u \in VQ} f(u) + |VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor < \frac{\sum_{u \in VG} f(u)}{2} \quad (1)$$

Podemos contar as arestas de F , da seguinte maneira:

$$|EF| = |S \overline{F} VG| + |T \overline{F} T| + \sum_Q |VQ \overline{F} VQ \cup T| \quad (2)$$

Mas,

$$|S \overline{F} VG| \leq \sum_{u \in S} f(u) \quad (3)$$

e

$$|T \overline{F} T| \leq |T \overline{G} T| \quad (4)$$

Além disso, qualquer que seja Q , componente de $G[R]$, temos que

$$|VQ \overline{F} VQ \cup T| \leq \left\lfloor \frac{\sum_{u \in VQ} f(u) + |VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor \quad (5)$$

De fato, basta notar que

$$(a) \quad |VQ \overline{F} VQ \cup T| = |VQ \overline{F} VQ| + |VQ \overline{F} T| \quad e$$

$$(b) \quad \sum_{u \in VQ} f(u) - |VQ \overline{F} T| - |VQ \overline{F} S| = 2|VQ \overline{F} VQ|.$$

De (2), (3), (4) e (5), vem

$$|EF| \leq \sum_{u \in S} f(u) + |T \overline{G} T| + \sum_Q \left[\frac{\sum_{u \in VQ} f(u) + |VQ \overline{G} T|}{2} \right].$$

Utilizando (1), segue que

$$|EF| < \frac{\sum_{u \in VG} f(u)}{2},$$

o que é um absurdo pois

$$|EF| = \frac{\sum_{u \in VG} f(u)}{2}. \quad \blacksquare$$

2. AS CONDIÇÕES

TEOREMA 2.1 - Se G é um grafo hamiltoniano então para todo subconjunto não vazio X de VG , $c(G \sim X) \leq |X|^{(*)}$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja C um circuito hamiltoniano de G . Então, para todo subconjunto não vazio X de VG , $c(C \sim X) \leq |X|$. Mas se $C \sim X$ é um subgrafo espalhado de $G \sim X$, $c(G \sim X) \leq c(C \sim X)$. Logo,

$$c(G \sim X) \leq |X|. \quad \blacksquare$$

TEOREMA 2.2 - (devido a Chvátal) - Se G é um grafo hamiltoniano

(*) Se G é um grafo, $c(G)$ denota o número de componentes de G .

niano, então não existe partição de VG em subconjuntos R,S, T tal que

$$T \neq VG \text{ e } |S| + \sum_Q \left\lfloor \frac{|VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor < c(G[T]),$$

onde Q percorre todos os componentes de G[R].

DEMONSTRAÇÃO

Seja G um grafo hamiltoniano, isto é, um grafo com um 2-fator conexo F e suponha VG particionado em subconjuntos R,S,T tal que

$$T \neq VG \text{ e } |S| + \sum_Q \left\lfloor \frac{|VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor < c(G[T]). \quad (1)$$

É claro que

$$|EF| = |S \overline{F} VG| + |T \overline{F} T| + \sum_Q |VQ \overline{F} VQ \cup T|. \quad (2)$$

Como F é um 2-fator conexo, $|T \overline{F} T| = \sum_X (|X| - 1)$ onde X percorre todos os componentes de G[T]. Logo,

$$|T \overline{F} T| = |T| - c(G[T]). \quad (3)$$

Por outro lado, (veja item (5) da página 87)

$$|VQ \overline{F} VQ \cup T| \leq \sum_Q \left\lfloor \frac{2|VQ| + |VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor, \text{ portanto}$$

$$|VQ \overline{F} VQ \cup T| \leq |R| + \sum_Q \left\lfloor \frac{|VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor. \quad (4)$$

De (2), (3) e (4) resulta que

$$|EF| \leq |S \overline{F} VG| + |T| - c(G[T]) + |R| + \sum_Q \left\lfloor \frac{|VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor. \quad (5)$$

caso 1: $S = \emptyset$

Nesse caso, $|S \overline{F} VG| = 0$ e a fórmula (5) acima se escreve:

$$|EF| \leq |T| - c(G[T]) + |R| + \sum_Q \left\lfloor \frac{|VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor$$

Utilizando (1) com $|S| = 0$, da fórmula acima segue que

$$|EF| < |T| - c(G[T]) + |R| + c(G[T]),$$

$$|EF| < |T| + |R| \quad e$$

$$|EF| < n, \quad \text{o que é um absurdo.}$$

caso 2: $S \neq \emptyset$

Como F é conexo, $|S \overline{F} VG| = |S| + 1$. Então, a fórmula (5) se escreve:

$$|EF| \leq |S| + 1 + |T| - c(G[T]) + |R| + \sum_Q \left\lfloor \frac{|VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor.$$

Dessa fórmula e de (1) segue que:

$$|EF| < 1 + |T| - c(G[T]) + |R| + c(G[T]),$$

$$|EF| < 1 + |T| + |R| \quad e$$

$$|EF| < n, \text{ o que é um absurdo.} \quad \blacksquare$$

É interessante observar que a condição dada pelo teorema 2.2, apesar de não ser uma condição suficiente para que um grafo seja hamiltoniano, quando satisfeita garante que (a) o grafo tem 2-fator e

(b) o grafo satisfaz a condição do teorema 2.1:

$$'\forall X \subset VG, X \neq \emptyset, c(G \sim X) \leq |X|'.$$

A prova de que G tem 2-fator segue aplicando-se o teorema de Tutte. Fica a cargo do leitor essa verificação. Para provar (b), note que se (b) não é satisfeito, isto é, se $\exists X \subset VG, X \neq \emptyset$ tal que $|X| < c(G \sim X)$, então se considerarmos a partição de VG em subconjuntos R, S, T com $R = \emptyset, S = X$ e $T = VG - S$, essa partição é tal que $T \neq VG$ e

$$|S| + \sum_Q \left\lfloor \frac{|VQ \cap T|}{2} \right\rfloor < c(G[T])$$

onde Q percorre os componentes de G[R].

Entretanto, note que se as condições (a) e (b) estão satisfeitas não temos necessariamente a condição do teorema 2.2. O grafo da figura 26, por exemplo, satisfaz (a) e (b) mas admite uma partição, como a indicada na figura, tal

que

$$|S| + \sum_Q \left\lfloor \frac{|VQ \overline{G} T|}{2} \right\rfloor < c(G[T])$$

(onde Q percorre todos os componentes de G[R]).

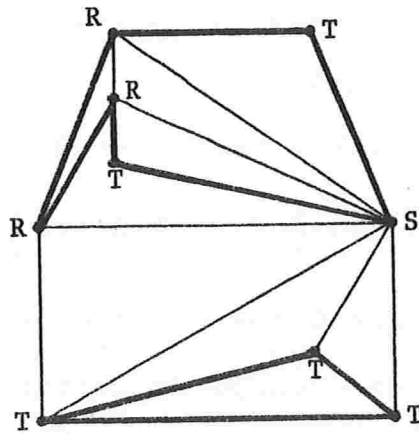


Figura 26

Bibliografia: [BM] e [C1].

CAPÍTULO IV

SEQÜÊNCIAS VALENCIAIS E HAMILTONIANISMO

1. INTRODUÇÃO

Convencionaremos aqui que a palavra *seqüência* significará seqüência finita cujos termos são números inteiros.

NOTAÇÃO

- Uma seqüência de n termos x_1, x_2, \dots, x_n será denotada por $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ quando $n \geq 1$.
- A seqüência vazia será denotada por $\langle \rangle$.
- $[x, y]$ denotará a seqüência $\langle x, x+1, x+2, \dots, y \rangle$ se $x < y$, $\langle x \rangle$ se $x = y$ e $\langle \rangle$ se $x > y$.
- $\langle x \rangle^n$ denota a seqüência de n termos iguais a x .
- $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \langle y_1, y_2, \dots, y_\ell \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_\ell \rangle$.
- Se $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ e k é um inteiro positivo, então $x-k = \langle x_1-k, x_2-k, \dots, x_n-k \rangle$.

DEFINIÇÃO - Se v_1, v_2, \dots, v_n são os vértices de um grafo G de ordem n tal que $\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$, dizemos que a *seqüência valencial* de G , denotada por sv(G) é $\langle \text{val}(v_1), \text{val}(v_2), \dots, \text{val}(v_n) \rangle$.

DEFINIÇÃO - Uma seqüência s diz-se *gráfica* se arranjando-se s em ordem não decrescente, a seqüência obtida é seqüência valencial de algum grafo.

As seqüências gráficas foram caracterizadas por Erdős e Gallai e também por Hakimi [H]. Apresentamos a seguir a caracterização obtida por Erdős e Gallai cuja demonstração pode ser encontrada em [H1].

TEOREMA DE ERDÖS-GALLAI - Uma seqüência $s = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ onde $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ é gráfica sse

- (i) $\sum_{i=1}^n s_i$ é par, e
- (ii) $\sum_{j=n-r+1}^n s_j \leq r(r-1) + \sum_{i=1}^{n-r} \min\{r, s_i\}$ para todo $1 \leq r \leq n$.

Se s é uma seqüência, denotaremos por $\mathcal{G}(s)$ o conjunto dos grafos G tais que $sv(G)$ em alguma ordem coincide com s .

Adotaremos também as seguintes definições que foram primeiramente usadas por Nash-Williams.

Uma seqüência gráfica s é:

- (1) *forçosamente hamiltoniana* sse todos os grafos de $\mathcal{G}(s)$ são hamiltonianos;
- (2) *forçosamente não hamiltoniana* sse nenhum grafo de $\mathcal{G}(s)$ é hamiltoniano;

(3) *opcionalmente hamiltoniana* sse s não é nem forçosamente hamiltoniana e nem forçosamente não hamiltoniana.

Se s é uma seqüência, denotaremos:

$S_n = \{s: s \text{ tem } n \text{ termos}\}.$

$G_n = \{s: s \in S_n \text{ e } s \text{ é gráfica}\}.$

$GH_n = \{s: s \in G_n \text{ e } s \text{ é forçosamente hamiltoniana}\}.$

$INH_n = \{s: s \in G_n \text{ e } s \text{ é forçosamente não hamiltoniana}\}.$

$OH_n = \{s: s \in G_n \text{ e } s \text{ é opcionalmente hamiltoniana}\}.$

Se $s = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ e $s^* = \langle s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^* \rangle$ são seqüências tais que $s_i \leq s_i^*$ para $i=1, 2, \dots, n$, então escreveremos $s \leq s^*$ e diremos que s^* *domina* s ou s *é dominada por* s^* .

A relação \leq mencionada define uma ordem parcial em S_n e G_n .

Se $s \in G_n$, vamos denotar por $\mathcal{D}(s)$ o conjunto das seqüências em G_n que dominam s , isto é, $\mathcal{D}(s) = \{s^*: s^* \in G_n, s \leq s^*\}.$

DEFINIÇÃO - se S é um subconjunto de G_n , S diz-se um *ideal superior* de G_n se $\mathcal{D}(s) \subseteq S$ para todo $s \in S$.

Dada uma seqüência valencial s focalizaremos nosso estudo quanto à possibilidade de garantir ou não a existência de circuitos hamiltonianos nos grafos de $\mathcal{G}(s)$.

Na seção 2 examinaremos a classe das seqüências forçosamente hamiltonianos (GH_n). Mostraremos qual o maior ideal

superior de $\mathcal{H}n$ e apresentaremos algumas seqüências que con seguimos provar serem forçosamente hamiltonianas mas que não pertencem a esse maior ideal superior.

Na seção 3 veremos uma caracterização das seqüências forçosamente não hamiltonianas e na seção 4 veremos um caso de seqüências opcionalmente hamiltonianas.

2. SEQÜÊNCIAS FORÇOSAMENTE HAMILTONIANAS

Alguns dos resultados vistos no capítulo II são re sultados que se baseiam essencialmente na seqüência valen- cial do grafo.

Considerando que G_n é um conjunto parcialmente or denado pela relação \leq , é interessante olhar tais resultados sob um outro ponto de vista, analisando-os quanto ao fato de definirem ou não, ideais em G_n .

Os seguintes resultados já demonstrados no capítu- lo II, podem ser assim reescritos:

TEOREMA DE DIRAC (veja corolário II.2.11)

Se $n \geq 3$, $\mathcal{D}(d_n) \in \mathcal{H}n$, onde

$$d_n = \left\langle \frac{n}{2} \right\rangle^n \text{ se } n \text{ é par e}$$

$$d_n = \left\langle \frac{n+1}{2} \right\rangle^n \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

TEOREMA DE PÓSA (veja corolário II.2.9)

Se $n \geq 3$, $\mathcal{O}(p_n) \subseteq \mathcal{H}_n$, onde

$$p_n = \left[2, \frac{n}{2} \right] \langle \frac{n}{2} \rangle^{\frac{n}{2}+1} \text{ se } n \text{ é par e}$$

$$p_n = \left[2, \frac{n-1}{2} \right] \langle \frac{n-1}{2} \rangle \langle \frac{n+1}{2} \rangle^{\frac{n+1}{2}} \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

TEOREMA DE BONDY-70 (veja corolário II.2.7)

$\mathcal{O}(b_{nq}) \subseteq \mathcal{H}_n$ para todo par de inteiros n, q tais que $n \geq 3$ e $1 \leq q \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, onde b_{nq} é a seqüência obtida de

$$\left[2, n-q \right] \langle n-q \rangle^{q+1},$$

trocando-se o q -ésimo termo por q .

(Note que $b_{nq} = p_n$ quando $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$).

TEOREMA DE CHVÁTAL (veja corolário II.2.6)

Se $n \geq 3$, $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{H}_n$, onde

$$\mathcal{C}_n = \{s: s = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle, s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n, \\ s_i \leq i < \frac{n}{2} \implies s_{n-i} \geq n-i\}.$$

É imediato que

$$\mathcal{O}(d_n), \mathcal{O}(p_n), \mathcal{O}(b_{n1}) \cup \mathcal{O}(b_{n2}) \cup \dots \cup \mathcal{O}(b_{n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$$


e \mathcal{C}_n são todos ideais superiores de \mathcal{G}_n que estão contidos em \mathcal{H}_n . Além disso, pela proposição II.5.1, temos que:

$$\mathcal{D}(d_n) \subseteq \mathcal{D}(p_n) \subseteq \bigcup_{1 \leq q \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mathcal{D}(b_{nq}) \subseteq \mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{H}_n, \text{ quando } n \geq 3.$$


OBSERVAÇÃO - \mathcal{H}_n não é um ideal superior de \mathcal{G}_n , qualquer que seja n .

Com efeito, no caso $n=5$ considere as seqüências:

$$s = \langle 2, 2, 2, 2, 2 \rangle, s^* = \langle 2, 2, 2, 3, 3 \rangle \text{ e } s^{**} = \langle 2, 2, 2, 4, 4 \rangle.$$

O único grafo de $\mathcal{G}(s)$ é  ;

$\mathcal{G}(s^*)$ contém dois grafos:  e  ; e

o único grafo de $\mathcal{G}(s^{**})$ é  .

Portanto, temos que $s \leq s^* \leq s^{**}$ e $s \in \mathcal{H}_5$, $s^* \in \mathcal{OH}_5$ e $s^{**} \in \mathcal{INH}_5$.

Veremos a seguir que \mathcal{C}_n é o maior ideal superior de \mathcal{G}_n contido em \mathcal{H}_n . (Este resultado mostra em que sentido mencionamos ser o teorema de Chvátal o melhor possível). Para isto, vamos provar que qualquer que seja s , $s \in \mathcal{G}_n$, $s \in \mathcal{C}_n$, s é dominada por uma seqüência $s^* \in \mathcal{H}_n$. (veja [C2]).

Seja então, $s = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ com $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$, $s \in \mathcal{C}_n$.

Nesse caso, existe i tal que $s_i \leq i < \frac{n}{2}$ e $s_{n-i} < n-i$.

A seqüência $s^* = \langle i \rangle^i \langle n-i-1 \rangle^{n-2i} \langle n-1 \rangle^i$ domina s e é fácil ver que $s^* \notin \mathcal{H}_n$.

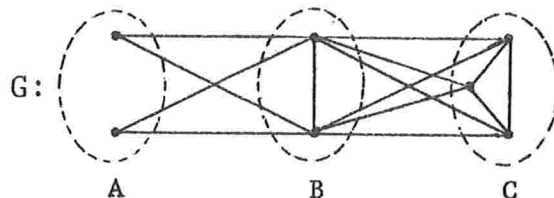
Com efeito, o único grafo de $\mathcal{G}(s^*)$ é o grafo G com $VG = A \cup B \cup C$, onde A, B, C são dois a dois disjuntos,

$$|A| = i, |B| = i, |C| = n-2i \quad \text{e} \quad EG = B^{(2)} \cup C^{(2)} \cup B \otimes C \cup B \otimes A.$$

Para verificar que G é não hamiltoniano basta aplicar a condição necessária do teorema III.2.1 com $X = B$.

EXEMPLO - $s = \langle 2, 2, 3, 3, 3, 3, 6 \rangle$, $s \in \mathcal{C}_6$ ($i=2$).

$$s^* = \langle 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6 \rangle$$



Como veremos, $\mathcal{H}_n - \mathcal{C}_n \neq \emptyset$ quando $n \geq 9$. Porém, o fato de \mathcal{C}_n ser o maior ideal superior contido em \mathcal{H}_n sugere que talvez não existam muitas seqüências em $\mathcal{H}_n - \mathcal{C}_n$. Apesar disso, o problema da caracterização das seqüências em $\mathcal{H}_n - \mathcal{C}_n$ tem-se revelado difícil e o que temos são apenas alguns resultados particulares.

Na tentativa de caracterizar as seqüências de

$\mathcal{H}_n - \mathcal{C}_n$, o teorema de Bondy-Chvátal (teorema II.2.3) que afirma que se o fecho de um grafo G é completo, então G é hamiltoniano, sugere como um primeiro passo a caracterização das seqüências cujos grafos têm forçosamente o fecho completo.

Assim, vamos adotar a seguinte

DEFINIÇÃO - Uma seqüência gráfica s é forçosamente fecho-completa se todo grafo de $\mathcal{G}(s)$ tem o fecho completo.

Denotando por \mathcal{FC}_n o conjunto das seqüências forçosamente fecho-completas, pela proposição II.5.1, $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{FC}_n$ e portanto temos a seguinte hierarquia:

$$\mathcal{D}(d_n) \subseteq \mathcal{D}(p_n) \subseteq \bigcup_{1 \leq q \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mathcal{D}(b_{nq}) \subseteq \mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{FC}_n \subseteq \mathcal{H}_n.$$

Não conseguimos caracterizar as seqüências de \mathcal{FC}_n porém obtivemos alguns resultados que mostram que $\mathcal{FC}_n - \mathcal{C}_n \neq \emptyset$ ($n \geq 9$) e é o que veremos a seguir.

Antes vamos enunciar um lema cuja verificação deixamos a cargo do leitor e que será útil para provarmos os teoremas 2.2 e 2.3.

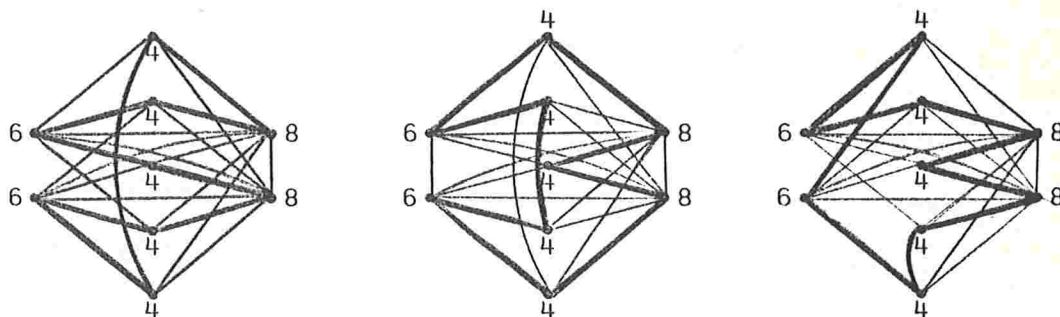
LEMA 2.1 - Seja G um grafo de ordem n e seja $k \leq n$. Se G tem pelo menos $\frac{k}{2}$ vértices de valência $\geq k - \delta(G)$ então o k -fecho de

G é completo.

TEOREMA 2.2 - Para $n \geq 9$, n ímpar, a seqüência

$$s = \langle \frac{n-1}{2} \rangle \frac{n+1}{2} \langle \frac{n+3}{2} \rangle^2 \langle n-1 \rangle \frac{n-5}{2} \in \mathcal{FC}_n - \mathcal{C}_n.$$

EXEMPLO: Alguns grafos de $\mathcal{G}(s)$ onde $s = \langle 4 \rangle^5 \langle 6 \rangle^2 \langle 8 \rangle^2$ ($n=9$)



DEMONSTRAÇÃO

A seqüência $s = \langle \frac{n-1}{2} \rangle \frac{n+1}{2} \langle \frac{n+3}{2} \rangle^2 \langle n-1 \rangle \frac{n-5}{2}$, quando n é ímpar, $n \geq 9$, é gráfica. Não nos preocuparemos em fazer a demonstração que segue sem muita dificuldade.

Como $s_{\frac{n-1}{2}} \leq \frac{n-1}{2}$ e $s_{\frac{n+1}{2}} < \frac{n+1}{2}$, resulta que $s \notin \mathcal{C}_n$.

Seja $G \in \mathcal{G}(s)$ e seja H o grafo que se obtém de G , removendo-se os $\frac{n-5}{2}$ vértices de valência $n-1$. Como

$$\text{val}_H(v) = \text{val}_G(v) - \left(\frac{n-5}{2}\right), \text{sv}(H) = \langle 2 \rangle \frac{n+1}{2} \langle 4 \rangle^2.$$

Note que para provarmos que $f(G)$ é completo, é su-

ficiente provarmos que $f_5(H)$ é completo pois

$$\text{val}_G(x) + \text{val}_G(y) \geq n \text{ sse } \text{val}_H(x) + \text{val}_H(y) \geq 5.$$

Pelo lema 2.1, para mostrarmos que $f_5(H)$ é completo basta provarmos que H tem 3 vértices de valência ≥ 3 .

Sejam

$$A = \{v \in V_H : \text{val}_H(v) = 2\} \text{ e}$$

$$B = \{v \in V_H : \text{val}_H(v) = 4\}.$$

Como $f_5(H) = f_5(H')$ onde H' é o grafo obtido de H acrescentando-se uma aresta que liga vértices não adjacentes em H cuja soma das valências é ≥ 5 e, $|B| = 2$, é suficiente provarmos que existe em H dois vértices u e v não adjacentes cuja soma das valências é ≥ 5 . Como $|A| = \frac{n+1}{2} \geq 5$, é claro que existem $u \in A$ e $v \in B$ com tal propriedade.

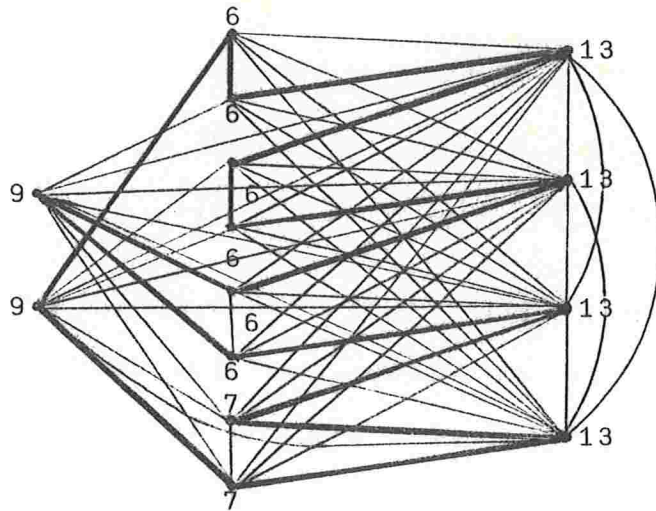
Logo, $f_5(H)$ é completo, $f(G)$ é completo e portanto, $s \in \mathcal{FC}_n$. ■

TEOREMA 2.3 - Para $n \geq 14^{(*)}$, n par, a seqüência

$$s = \langle \frac{n}{2} - 1 \rangle \langle \frac{n}{2} - 1 \rangle \langle \frac{n}{2} \rangle^2 \langle \frac{n}{2} + 2 \rangle^2 \langle n-1 \rangle \langle \frac{n}{2} - 3 \rangle \in \mathcal{FC}_{n-6n}.$$

EXEMPLO: Um grafo de $\mathcal{G}(s)$ onde $s = \langle 6 \rangle^6 \langle 7 \rangle^2 \langle 9 \rangle^2 \langle 13 \rangle^4$

(*) Para $n=10$ e $n=12$, a mesma seqüência s pertence a \mathcal{FC}_{n-6n} ; pode-se fazer uma demonstração particularizada para esses casos.



DEMONSTRAÇÃO

A seqüência $s = \langle \frac{n}{2} - 1 \rangle \frac{n}{2} - 1 \langle \frac{n}{2} \rangle^2 \langle \frac{n}{2} + 2 \rangle^2 \langle n-1 \rangle \frac{n}{2} - 3, n \geq 14,$
 n par, é gráfica. (Deixamos a cargo do leitor a verificação
deste fato).

Já que $s_{\frac{n}{2}-1} \leq \frac{n}{2} - 1$ e $s_{\frac{n}{2}+1} < \frac{n}{2} + 1, s \in \mathcal{G}_n.$

Seja $G \in \mathcal{G}(s)$ e seja H o grafo que se obtém de G re-
movendo-se os vértices de valência $n-1$. Então

$$\text{val}_H(v) = \text{val}_G(v) - (\frac{n}{2} - 3) \quad \text{e} \quad \text{sv}(H) = \langle 2 \rangle \frac{n}{2} - 1 \langle 3 \rangle^2 \langle 5 \rangle^2.$$

Como $\text{val}_G(x) + \text{val}_G(y) \geq n$ sse $\text{val}_H(x) + \text{val}_H(y) \geq 6,$
para provar que $f(G)$ é completo, basta provar que $f_6(H)$ é
completo. Para isto, pelo lema 2.1, precisamos mostrar que
 H tem 3 vértices de valência ≥ 4 .

Sejam

$$A = \{v \in V_H : \text{val}_H(v) = 2\},$$

$$B = \{v \in V_H : \text{val}_H(v) = 3\} \text{ e}$$

$$C = \{v \in V_H : \text{val}_H(v) = 5\}.$$

Como $f_6(H) = f_6(H')$ onde H' é o grafo que se obtém de H acrescentando-se uma aresta que liga vértices não adjacentes cuja soma das valências é ≥ 6 e já que $|C| \geq 2$, é suficiente provarmos que H tem 2 vértices não adjacentes cuja soma das valências é ≥ 6 .

Seja $x \in C$ e seja $W = A - \Gamma x$. Então,

$$|W| \geq \frac{n}{2} - 1 - 5 = \frac{n}{2} - 6 \geq 1$$

e portanto existe um vértice $w \in W$ não adjacente a x tal que $\text{val}(w) + \text{val}(x) \geq 6$.

Logo, $f_6(H)$ é completo, $f(G)$ é completo e $s \in \mathcal{F}O_n$.



O resultado que apresentamos a seguir é uma generalização de um resultado apresentado por Nash-Williams em [NW3]. (Nash-Williams provou que $s = \langle 2 \rangle^3 \langle 6 \rangle^6 \in \mathcal{F}H_n$.)

TEOREMA 2.4 - Para $n = (t+1)k$, $\forall t, k$, $k > t \geq 2$, se

$$s = \langle t \rangle^k \langle n-k \rangle^{n-k}, \text{ se } \mathcal{F}H_n - \mathcal{F}O_n.$$

DEMONSTRAÇÃO

Vamos provar que fixado t e k ($k > t \geq 2$), existe, a menos de isomorfismo, um único grafo $G \in \mathcal{G}(s)$ de ordem $n = (t+1)k$

Sejam

$$A = \{v \in V_G : \text{val}(v) = n - k\} \text{ e}$$

$$B = \{v \in V_G : \text{val}(v) = t\}.$$

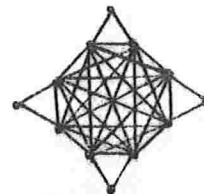
Como $|A| = n - k$, cada vértice de A deve ser adjacente a pelo menos um vértice de B . Logo, $|A \overset{(*)}{\underset{G}{\rightleftharpoons}} B| \geq n - k$.

Mas $n - k = t \cdot k$. Então temos $t \cdot k$ arestas incidentes aos vértices de B . Como $|B| = k$ e todos os vértices de B têm valência t , as $t \cdot k$ arestas de $A \overset{G}{\rightleftharpoons} B$ são as únicas arestas incidentes aos vértices de B . Então, cada vértice v em A é adjacente a exatamente um vértice de B e portanto v é adjacente a todos os outros vértices de A , o que implica que $G[A]$ é completo.

Como $n - k = tk \geq 2k > k$, G é hamiltoniano. O fecho de G não é completo pois $n - k + t = tk + t < tk + k = (t+1)k = n$ e, $2t < n$ já que $2t < (k+1)t < n$.

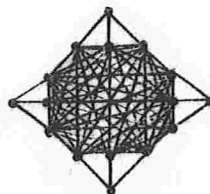
EXEMPLOS:

a) $t=2, k=4, n=12, s = \langle 2 \rangle^4 \langle 8 \rangle^8$, G :



(*) $A \overset{G}{\rightleftharpoons} B$ denota o conjunto de todas as arestas de G que têm uma ponta em A e outra em B .

b) $t=3$, $k=4$, $n=16$, $s = \langle 3 \rangle^4 \langle 12 \rangle^{12}$, G :



O seguinte resultado foi obtido por Nash-Williams e Bondy, independentemente [NW3].

TEOREMA 2.5 - Se $n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \geq 5$, $s = \langle \frac{n-1}{2} \rangle^n \in \mathcal{FH}_n - \mathcal{FC}_n$.

DEMONSTRAÇÃO

A seqüência $s = \langle \frac{n-1}{2} \rangle^n$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \geq 5$, é gráfica. (A demonstração é simples).

Seja G um grafo cuja seqüência valencial é s .

Quando $n=5$, é imediato que $s = \langle 2 \rangle^5 \in \mathcal{FH}_n$. Consideremos então $n \geq 9$. Nesse caso, como $\text{val}(v) \geq k = \frac{n-1}{2}$ e $\frac{n-1}{2} \geq \frac{n+2}{3}$, pelo teorema II.4.3, (i) G é separável, ou (ii) G tem $k+1$ vértices estáveis, ou (iii) G é hamiltoniano.

Suponhamos que ocorra o caso (i), isto é, suponhamos que G seja separável.

Nesse caso, existe $u \in V_G$ tal que $G \setminus u$ pode ser expresso como a união de dois subgrafos disjuntos, não vazios, H_1 e H_2 .

É claro que

$$\forall v \in V_{H_1}, \Gamma v \subseteq (V_{H_1} - \{v\}) \cup \{u\},$$

$$\forall w \in V H_2, \Gamma w \subseteq (V H_2 - \{w\}) \cup \{u\} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} |\Gamma v| + |\Gamma w| &= \text{val}(v) + \text{val}(w) = n-1 = |V H_1| + |V H_2| = \\ &= |(V H_1 - \{v\}) \cup \{u\}| + |(V H_2 - \{w\}) \cup \{u\}|. \end{aligned}$$

Então,

$$\Gamma v = (V H_1 - \{v\}) \cup \{u\} \text{ e}$$

$$\Gamma w = (V H_2 - \{w\}) \cup \{u\}.$$

Logo, u é adjacente a todo $v \in V H_1$ e a todo $w \in V H_2$.

Portanto, $\text{val}(u) \geq |V H_1 \cup V H_2| = n-1$, o que é uma contradição. Logo, G não é separável.

Suponhamos que ocorra o caso (ii), isto é, suponhamos que G tenha $\frac{n+1}{2}$ vértices estáveis.

Seja H um conjunto de $\frac{n+1}{2}$ vértices estáveis. Então, $\forall v \in H, \Gamma v \subseteq V G - H$ e como $|\Gamma v| = \text{val}(v) = \frac{n-1}{2} = |V G - H|$, temos que $\Gamma v = V G - H, \forall v \in H$. Mas isto implica que $H \subseteq \Gamma w, \forall w \in V G - H$ e portanto, $\text{val}(w) \geq |H| = \frac{n+1}{2}, \forall w \in V G - H$, o que é uma contradição.

Logo, temos o caso (iii), isto é, G é hamiltoniano. Portanto, $s \in \mathcal{FH}_n$ e é imediato que $s \notin \mathcal{FO}_n$. ■

Em [NW3] Nash-Williams apresenta um estudo das seqüências da forma $s = \langle q \rangle^r \langle n-q-1 \rangle^{n-r}$.

O caso em que $q = \frac{n-1}{2}$, a seqüência $s = \langle q \rangle^r \langle n-q-1 \rangle^{n-r}$ é simplesmente a seqüência $s = \langle \frac{n-1}{2} \rangle^n$ que o teorema anterior

afirma ser forçosamente hamiltoniana no caso em que é gráfica, exceto no caso trivial $n=1$ (para ser gráfica, $n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \geq 5$).

O caso em que $q \leq \frac{n}{2} - 1$, é demonstrado que $s = \langle q \rangle^r \langle n-q-1 \rangle^{n-r} \in \mathcal{GH}_n$ se $n \geq 3$, $q \geq r - \frac{r^2}{n}$, $nq + nr + r$ é par, $r \leq \frac{n}{2}$ e $q < \frac{n-r}{2}$ ou $r(n-2q-1) < q(n-2q)$.

Apresentaremos aqui um resultado que conseguimos para o caso em que $q = \frac{n}{2} - 1$, n par, $n \geq 12$, $\frac{n}{2} + 1 < r < n-2$, r par.

TEOREMA 2.6 - Se $n \geq 12$ e n é par, a seqüência

$$s = \langle \frac{n}{2} - 1 \rangle^r \langle \frac{n}{2} \rangle^{n-r} \in \mathcal{GH}_n$$

quando $\frac{n}{2} + 1 < r < n-2$, r par.

DEMONSTRAÇÃO

A seqüência s é da forma $\langle q \rangle^r \langle n-q-1 \rangle^{n-r}$ onde

$$q = \frac{n}{2} - 1.$$

É fácil ver que a condição $n \geq 12$, n par, r par, $\frac{n}{2} + 1 < r < n-2$, $q = \frac{n}{2} - 1$, implica $q \geq \frac{n+2}{3}$, $q > \frac{r}{2}$, $q \geq r - \frac{r^2}{n}$ e $(nq + nr + r)$ par. Conforme resultado provado em [NW3], tal seqüência é gráfica.

Seja G um grafo tal que $sv(G) = s$.

Como todo vértice $v \in V(G)$ tem valência $\geq k = \frac{n}{2} - 1$ e $\frac{n}{2} - 1 \geq \frac{n+2}{3}$, pelo teorema II.4.3,

(i) G é separável, ou (ii) G tem $k+1 = \frac{n}{2}$ vértices estáveis, ou (iii) G é hamiltoniano.

Suponhamos que ocorra o caso (i). Então existe um vértice $u \in V_G$ tal que $G \setminus u$ pode ser expresso como a união de dois subgrafos disjuntos, não vazios, H_1 e H_2 .

Seja v um vértice tal que $\text{val}(v) = \frac{n}{2}$. Supondo que $v \in V_{H_1}$, temos que $|V_{H_1}| \geq \frac{n}{2}$.

(a) Se $|V_{H_1}| = \frac{n}{2}$ então $|V_{H_2}| = \frac{n}{2} - 1$. Portanto, $\text{val}(w) = \frac{n}{2} - 1$ para todo $w \in V_{H_2}$ e claramente todos os $\frac{n}{2} - 1$ vértices de V_{H_2} devem ser adjacentes a u .

Por outro lado, sendo $|V_{H_1}| = \frac{n}{2}$, os $n-r$ vértices de valência $\frac{n}{2}$ em V_{H_1} devem ser adjacentes a u e portanto,

$$\text{val}(u) \geq \frac{n}{2} - 1 + n - r > \frac{n}{2} - 1 + n - (n-2) = \frac{n}{2} + 1,$$

o que é uma contradição.

(b) Se $|V_{H_1}| > \frac{n}{2}$ então $|V_{H_2}| < \frac{n}{2} - 1$. Mas se $|V_{H_2}| < \frac{n}{2} - 1$, todos os vértices de V_{H_2} devem ter valência $< \frac{n}{2} - 1$, o que é uma contradição. Portanto, G não é separável.

Suponhamos que ocorra o caso (ii), isto é, suponhamos que G tenha $\frac{n}{2}$ vértices estáveis. Seja H o conjunto desses vértices estáveis e seja $\bar{H} = V_G - H$.

caso (a): Suponhamos que todos os vértices de H tenham valência $\frac{n}{2} - 1$.

É claro que qualquer que seja $A \neq \emptyset$, $A \subset H$, $|\Gamma A| \geq |A|$ (pois $|\Gamma A| \geq \frac{n}{2} - 1$ e $|A| \leq \frac{n}{2} - 1$).

Vamos provar que $|\Gamma H| \geq |H|$.

É imediato que $\frac{n}{2} - 1 \leq |\Gamma H| \leq \frac{n}{2}$.

Se $|\Gamma H| = \frac{n}{2} - 1$, como os $\frac{n}{2}$ vértices estáveis de H têm valência $\frac{n}{2} - 1$, todos os vértices de ΓH têm valência $\frac{n}{2}$. Logo, há pelo menos $\frac{n}{2} - 1$ vértices de valência $\frac{n}{2}$, o que contradiz a hipótese de que há exatamente $n - r < \frac{n}{2} - 1$ vértices de valência $\frac{n}{2}$.

Portanto, $|\Gamma H| = \frac{n}{2}$ e $|\Gamma H| = |H|$.

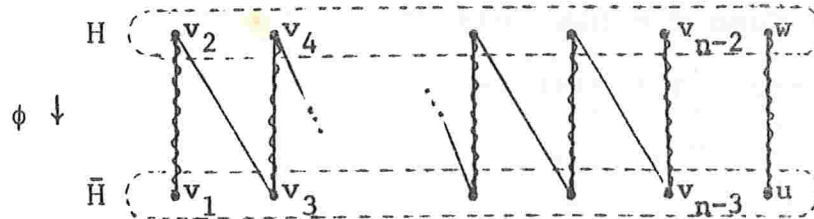
caso (b): É imediato que se existir em H algum vértice de valência $\frac{n}{2}$, também temos que $\forall A \subset H$, $A \neq \emptyset$, $|\Gamma A| \geq |A|$.

Então, quer aconteça o caso (a) ou o caso (b), temos que as hipóteses do Teorema de Hall (veja página 55) estão satisfeitas (não considerando as arestas de \bar{H} em \bar{H}) e portanto, existe uma injeção admissível de H em \bar{H} .

Vamos mostrar que existe um circuito hamiltoniano em G .

É fácil ver que se $|H| = |\bar{H}| = \frac{n}{2}$ e todos os vértices de H têm valência $\geq \frac{n}{2} - 1$ e existe uma injeção admissível ϕ de H em \bar{H} , então existe um caminho $P = (v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$, $|P| = n - 3$,

onde as arestas $\{v_i, v_{i+1}\}$, para $i=1, 3, \dots, n-3$, são tais que $\phi(v_{i+1}) = v_i$.



Sejam u e w vértices de \bar{H} e H , respectivamente, tais que $\phi(w) = u$, u e w não pertencentes a P .

caso 1: Se o vértice v_{n-2} é adjacente ao vértice u , então podemos obter $P' = (v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, u, w)$ tal que $|P'| > |P|$.

1.1 - Se w é adjacente a v_1 então temos um circuito hamiltoniano em G .

1.2 - Se w não é adjacente a v_1 , algum vértice v_i de índice i par, $i \neq 2$, deve ser adjacente a v_1 .

De fato, seja $Y = \{v_4, v_6, \dots, v_{n-2}, w\}$. Se todos os vértices de Y são não adjacentes a v_1 , como todos têm valência $\geq \frac{n}{2} - 1$, cada vértice de Y deve ser adjacente a todos os vértices de $X = \bar{H} - \{v_1\}$.

Como $\Gamma v_1 \subset X \cup \{v_2\}$ e $\Gamma v_2 \subset X \cup \{v_1\}$, $\text{val}(v_1) \geq \frac{n}{2} - 1$, $\text{val}(v_2) \geq \frac{n}{2} - 1$ e $|X| = \frac{n}{2} - 1$, é claro que necessariamente algum vértice x de X deve ser adjacente a v_1 e a v_2 . Então $\text{val}(x) = \frac{n}{2} + 1$, o que é uma contradição.

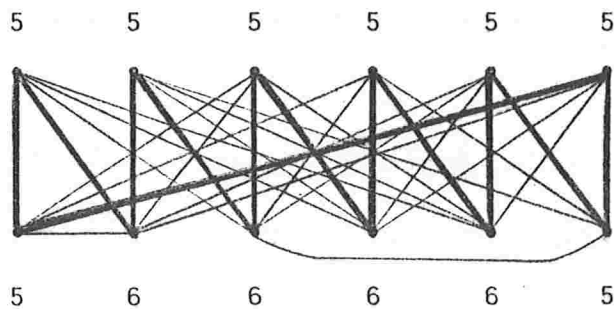
hamiltoniano C em G ,

$$C = (v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, w, u, v_s, v_{s+1}, \dots, v_{n-2}, v_1).$$

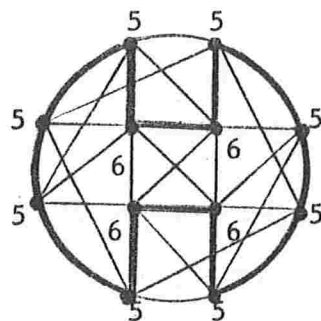
Portanto, se ocorrer o caso (ii), provamos que G é hamiltoniano. Se não ocorrer (ii), estaremos no caso (iii), isto é teremos que G é hamiltoniano.

EXEMPLO - Quando $n = 12$, $s = \langle 5 \rangle^8 \langle 6 \rangle^4$

(a) ocorre o caso (ii):



(b) não ocorre o caso (ii):



TEOREMA 2.7 - Se $n \geq 6$, a seqüência $s = \langle 2 \rangle^2 \langle n-3 \rangle^{n-2} \in \mathcal{H}_n$.

A demonstração desse resultado devido a Nash-Williams é simples e pode ser encontrada em [NW3].

3. SEQÜÊNCIAS FORÇOSAMENTE NÃO HAMILTONIANAS

Nesta seção apresentaremos um resultado que caracteriza as seqüências forçosamente não hamiltonianas. Para isso, vamos introduzir algumas definições e apresentar alguns resultados.

DEFINIÇÃO - uma seqüência s é 2-fatorável se existe $G \in \mathcal{G}(s)$ tal que G possui um 2-fator.

LEMA 3.1 - Uma seqüência gráfica s é 2-fatorável sse $s-2$ é gráfica.

A demonstração desse resultado o leitor poderá encontrar em [K2]. Esse resultado, devido a S.Kundu, juntamente com um outro obtido por A.R.Rao e S.B.Rao [RR], possibilitou a caracterização das seqüências forçosamente não hamiltonianas.

DEFINIÇÃO - Se G é um grafo e C é um circuito de G , C é um alternante de G se $VC \subseteq VG$ e $\forall v \in VC \text{ val}_{C \cap G}(v) = \text{val}_{C-G}(v)$.

LEMA 3.2 - Se C é um alternante de um grafo G então

$$sv(G \Delta C) = sv(G).$$

DEMONSTRAÇÃO

Seja $v \in VG$.

(i) Se $v \notin VC$ então $\text{val}_{G \Delta C}(v) = \text{val}_G(v)$.

(ii) Se $v \in C$ então $v \in V(C \cap G)$, $v \in V(C - G)$ e $val_{C \cap G}(v) = val_{C - G}(v)$.

Logo,

$$\begin{aligned} val_{G \Delta C}(v) &= val_{(G - C) \cup (C - G)}(v) = val_{G - C}(v) + val_{C - G}(v) = \\ &= val_G(v) - val_{C \cap G}(v) + val_{C - G}(v) = val_G(v). \end{aligned}$$

Dos itens (i) e (ii) segue que $sv(G \Delta C) = sv(G)$. ■

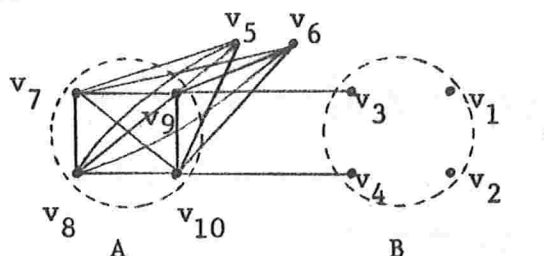
DEFINIÇÃO - Um grafo H é um *núcleo* de um grafo G se $H \subseteq G$ e existem A e B tais que $VH = A \cup B$, $|A| = |B|$,

$$(\forall u \in A) (\forall v \in V(G - \{u\} - B)) \{u, v\} \in EG \text{ e}$$

$$(\forall u \in B) (\forall v \in V(G - A)) \{u, v\} \notin EG.$$

EXEMPLO -

Se G é o grafo



o subgrafo $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}]$ é um núcleo de G .

Veremos a seguir o teorema que caracteriza as seqüências forçosamente não hamiltonianas. A demonstração que faremos é semelhante àquela apresentada por A.R.Rao e S.B. Rao em [RR] porém em linhas gerais segue uma demonstração que foi obtida independentemente por J.Stolfi [S2].

TEOREMA 3.3 - Seja $s = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ uma seqüência gráfica, não decrescente. Então $s \in \mathcal{GNH}_n$ sse $s-2$ não é gráfica ou existe $r < \frac{n}{2}$ tal que

$$\sum_{i=1}^r s_i + r(n-r-1) = \sum_{i=n-r+1}^n s_i.$$

DEMONSTRAÇÃO

(a)- (suficiência)

- se $s-2 \notin \mathcal{GN}$ e existe $G \in \mathcal{G}(s)$, G com circuito hamiltoniano C , então $G-C \in \mathcal{G}(s-2)$, o que é uma contradição.
- se existe $r < \frac{n}{2}$ tal que

$$\sum_{i=1}^r s_i + r(n-r-1) = \sum_{i=n-r+1}^n s_i, \quad (1)$$

então se $G \in \mathcal{G}(s)$, G é não hamiltoniano. De fato, considerando os vértices v_i de G indexados v_1, v_2, \dots, v_n tais que $\text{val}(v_i) = s_i$ e tomando-se

$$B = \{v_1, \dots, v_r\} \text{ e } A = \{v_{n-r+1}, \dots, v_n\}$$

então a fórmula (1) se escreve:

$$\sum_{v \in B} \text{val}(v) + |A| \cdot |V \setminus A \setminus B| + |A| \cdot (|A| - 1) = \sum_{v \in A} \text{val}(v).$$

Isto significa que toda aresta com uma ponta em B tem a outra ponta em A e como $|A| = |B| = r < \frac{n}{2}$, G não pode ter um circuito

cuito hamiltoniano.

(b)- (necessidade)

Seja $s \in \mathcal{G}_n$, $s \in \mathcal{SNH}_n$ e suponhamos que $s-2$ seja gráfica. Pelo lema 3.1, s é 2-fatorável. Dentre todos os grafos de $\mathcal{G}(s)$ tomemos um grafo G que tenha um 2-fator com o menor número possível de componentes. Seja F esse 2-fator e m o número de componentes de F . Nesse caso, $m \geq 2$ senão G seria hamiltoniano, contrariando a hipótese.

Sejam $C_1 = (u_0, u_1, \dots, u_p, u_0)$ e $C_2 = (v_0, v_1, \dots, v_q, v_0)$ componentes distintos de F e seja $H = G[VC_1 \cup VC_2]$.

Então, é fácil ver que:

$$\left| \begin{array}{l} \text{para } i=1,2,\dots,p \text{ e } j=1,2,\dots,q, \\ \{u_i, v_j\} \in EH \text{ sse } \{u_{i+1 \bmod p}, v_{j+1 \bmod q}\} \notin EH \text{ e} \\ \{u_i, v_j\} \in EH \text{ sse } \{u_{i+1 \bmod p}, v_{j-1 \bmod q}\} \notin EH \end{array} \right| \quad (2)$$

De fato, se isso não ocorresse, C_1 e C_2 poderiam ser combinados em um único componente.

É claro que existe pelo menos uma aresta $\{u_i, v_j\} \in EH$ pois, caso contrário, $C = (u_i, v_j, v_{j+1}, u_{i+1}, u_i)$ seria um alternante de G e $G' = G \Delta C$ seria um grafo de $\mathcal{G}(s)$ com um 2-fator com um número de componentes menor que m , contrariando a escolha de G .

Suponhamos então, $\{u_0, v_0\} \in EH$.

caso 1 - Se $\{u_1, v_0\} \in EH$, de (2) resulta que

- $|C_2| = q+1$ é par.

- Se $A = \{v_0, v_2, \dots, v_{q-1}\}$ e $B = \{v_1, v_3, \dots, v_q\}$ então todos os vértices de A são adjacentes a todos os vértices de VC_1 e, nenhum vértice de B é adjacente aos vértices de VC_1 .

A seguir, vamos provar que:

- (i) quaisquer dois vértices de B são não adjacentes e
- (ii) quaisquer dois vértices de A são adjacentes.

Sejam v_i e v_j dois vértices quaisquer de B ($j > i$).

Seja Q o caminho em C_1 de u_0 para u_1 ($|Q| > 1$);

S o caminho em C_2 de v_j para v_{i-1} e R o caminho em C_2 de v_{j-1} para v_i .

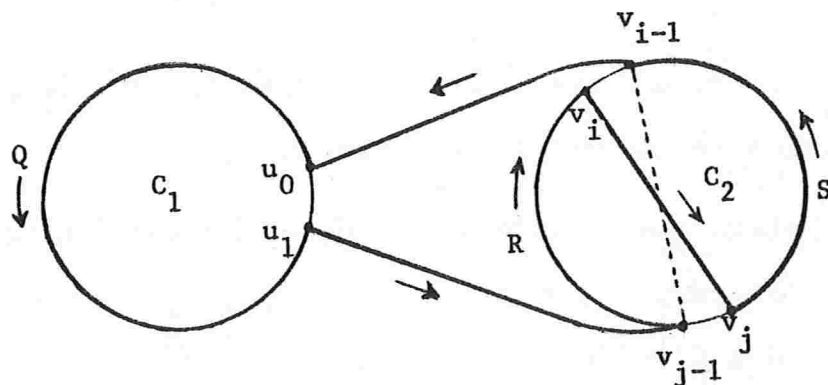


Figura 27

(i) Se v_i e v_j forem adjacentes poderemos combinar C_1 e C_2 num ú-

nico componente. De fato, basta tomar

$$Q \cdot (u_1, v_{j-1}) \cdot R \cdot (v_i, v_j) \cdot S \cdot (v_{i-1}, u_0). \text{ (veja figura 27)}$$

(ii) Sendo v_{i-1} e v_{j-1} vértices quaisquer de A; v_i e v_j são então, vértices de B que são não adjacentes pelo item anterior.

Se v_{i-1} e v_{j-1} não forem adjacentes, o circuito $C = (v_{i-1}, v_i, v_j, v_{j-1}, v_{i-1})$ será um alternante de G e se tomarmos $G' = G \Delta C$, $G' \in \mathcal{G}(s)$ (pelo lema 3.2) e em G' poderemos combinar C_1 e C_2 num único componente tomando

$$Q \cdot (u_1, v_{j-1}) \cdot R \cdot (v_i, v_j) \cdot S \cdot (v_{i-1}, u_0).$$

Portanto, provamos que se $A = \{v_0, v_2, \dots, v_{q-1}\}$ e $B = \{v_1, v_3, \dots, v_q\}$ então: $VC_2 = A \cup B$, $|A| = |B|$,

$$(\forall u \in A) (\forall v \in VG - \{u\} - B) \{u, v\} \in EH \text{ e } (\forall u \in B) (\forall v \in VG - A) \{u, v\} \notin EH.$$

Logo, $G[VC_2]$ é um núcleo de $H = G[VC_1 \cup VC_2]$.

caso 2 - Se $\{u_1, v_0\} \notin EH$, então de (2) resulta que $\{u_0, v_1\} \in EH$. Nesse caso, por um raciocínio análogo ao do caso 1, resulta que $G[VC_1]$ é um núcleo de $H = G[VC_1 \cup VC_2]$.

Portanto, para todo par de componentes C_i e C_j de F, $G[VC_i]$ ou $G[VC_j]$ é um núcleo de $G[VC_i \cup VC_j]$.

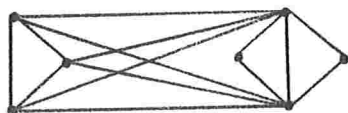
Finalmente, vamos mostrar que existe um componente C_i de F tal que $G[VC_i]$ é um núcleo de G. Para isso, considere o grafo dirigido D cujos vértices são os m componentes C_i

e claramente $VC_i = A \cup B'$ com $|A| = |B'| = r < \frac{n}{2}$ e portanto existe $r < \frac{n}{2}$ tal que $sv(G) = s = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ satisfaz a igualdade

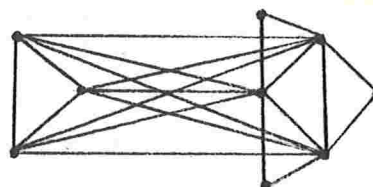
$$\sum_{i=1}^r s_i + r(n-r-1) = \sum_{i=n-r+1}^n s_i \quad \blacksquare$$

EXEMPLOS de seqüências forçosamente não hamiltonianas.

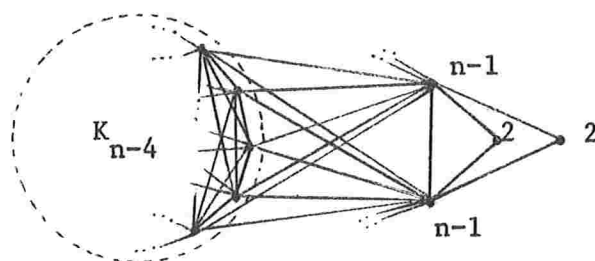
(a) $s = \langle 2 \rangle^2 \langle 4 \rangle^3 \langle 6 \rangle^2$



(b) $s = \langle 2 \rangle^3 \langle 5 \rangle^3 \langle 7 \rangle^3$



(c) $s_n = \langle 2 \rangle^2 \langle n-3 \rangle^{n-4} \langle n-1 \rangle^2 \quad (n > 4)$



4. SEQÜÊNCIAS OPCIONALMENTE HAMILTONIANAS

Apresentaremos nesta seção apenas um resultado exibindo uma seqüência opcionalmente hamiltoniana.

TEOREMA 4.1 - Se $n \geq 7$, a seqüência

$$s = \langle 2 \rangle^3 \langle n-4 \rangle^{n-7} \langle n-3 \rangle^2 \langle n-2 \rangle^2 \in \mathcal{OH}_n.$$

DEMONSTRAÇÃO

Vamos provar que a menos de isomorfismo existem apenas dois grafos em $\mathcal{G}(s)$.

Seja $G \in \mathcal{G}(s)$ e considere os vértices v_i de G indexados de forma que $\text{val}(v_1) \leq \text{val}(v_2) \leq \dots \leq \text{val}(v_n)$.

Afirmamos que:

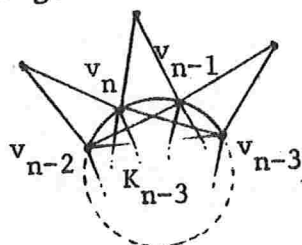
(i) existe pelo menos um vértice de valência 2 adjacente a v_n e a v_{n-1} . De fato, como $\text{val}(v_n) = \text{val}(v_{n-1}) = n-2$, cada um dos vértices v_n e v_{n-1} devem ser adjacentes a pelo menos 2 vértices de valência 2. Como há apenas 3 vértices de valência 2, pelo menos um deles deve ser adjacente a v_n e a v_{n-1} .

(ii) não pode ocorrer 3 vértices de valência 2 todos adjacentes a v_n e a v_{n-1} simultaneamente. De fato, pois se isso ocorresse v_{n-2} e v_{n-3} não poderiam ter valência $n-3$.

Restam então duas possibilidades:

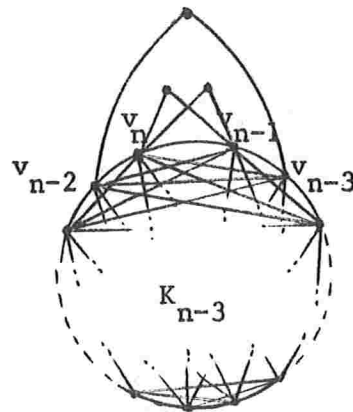
caso 1 - Existe exatamente um vértice de valência 2 adjacente a v_n e a v_{n-1} .

Neste caso, o grafo terá a seguinte estrutura:



caso 2 - Existem exatamente 2 vértices de valência 2 adjacentes a v_n e a v_{n-1} simultaneamente.

Neste caso, o grafo terá a seguinte estrutura:



No caso 1, o grafo pertence à família \mathcal{F}_2 definida no capítulo II.5 que já provamos ser uma família de grafos hamiltonianos (veja proposição II.5.9).

No caso 2, o grafo é claramente não hamiltoniano.

5. CONCLUSÃO

Em alguns casos, a seqüência valencial de um grafo determina univocamente a sua estrutura (veja teorema 2.4); entretanto, em geral, ela fornece apenas uma descrição parcial da estrutura do grafo. Algumas vezes, essa descrição é suficiente para garantir a existência ou não de um circuito ha

miltoniano no grafo (veja teoremas 3.3 e 4.1). Apenas nesses casos conseguimos algum resultado.

O problema da caracterização das seqüências forçosamente hamiltonianas, além de constituir em si um desafio, se resolvido poderá nos informar sobre como a estrutura de um grafo afeta a presença de circuitos hamiltonianos. Razão pela qual esse problema merece ser estudado.

CAPÍTULO V

CLASSES ESPECIAIS DE GRAFOS HAMILTONIANOS

Recentemente, tem-se estudado classes especiais de grafos que generalizam o conceito de grafos hamiltonianos. Entre essas classes veremos aqui a classe dos grafos k -aresta-hamiltonianos, hamiltoniano-conexos, k -hamiltonianos e aleatoriamente hamiltonianos.

Não nos preocuparemos em demonstrar os resultados que serão apresentados pois o propósito deste capítulo é dar uma visão global daquilo que existe sobre o assunto indicando as fontes que poderão ser consultadas.

1. GRAFOS K-ARESTA-HAMILTONIANOS

DEFINIÇÃO - Um grafo G é k -aresta-hamiltoniano sse para todo conjunto A de k arestas tal que os componentes de $G[A]$ são caminhos, existe um circuito hamiltoniano que contém A .

Note que os grafos k -aresta-hamiltonianos generalizam o conceito de grafos hamiltonianos no sentido de que os 0 -aresta-hamiltonianos são precisamente os hamiltonianos. Além disso, se G é k -aresta hamiltoniano ($k \geq 1$), então G é

(k-1)-aresta-hamiltoniano e portanto é hamiltoniano.

EXEMPLO - O grafo abaixo é 3-aresta-hamiltoniano mas não é 4-aresta-hamiltoniano (não existe nenhum circuito hamiltoniano que contém as arestas α , β , γ e δ).

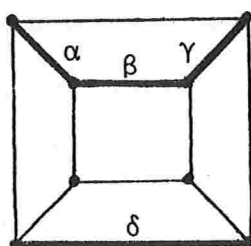


Figura 28

Da mesma forma que a definição introduzida estendeu o conceito de grafos hamiltonianos, vários resultados foram obtidos como extensão de resultados já existentes para grafos hamiltonianos.

Um dos primeiros resultados que surgiram sobre grafos k-aresta-hamiltonianos foi o seguinte teorema obtido por Pósa [P2] em 1963 que é uma extensão do teorema de Dirac (corolário II.2.11).

TEOREMA 1.1 - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ e seja k um inteiro, $0 \leq k \leq n-2$. Se $\text{val}(v) \geq \frac{n+k}{2}$ para todos os vértices v de G, então G é k-aresta-hamiltoniano.

Da mesma forma, Kronk [K] em 1969 obteve um resultado que é uma extensão do teorema de Pósa (corolário II.2.9).

Porém, nem todos os resultados foram obtidos como generalizações de resultados sobre grafos hamiltonianos. Os teoremas de Las Vergnas (corolários II.2.4 e II.2.5) que vimos como resultados sobre condições suficientes para um grafo ser hamiltoniano, constituem, na verdade, casos particulares de resultados sobre grafos k-aresta-hamiltonianos.

Assim, o resultado original provado por Las Vergnas [LV1] é o seguinte:

TEOREMA 1.2 - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ e seja k um inteiro, $0 \leq k \leq n-1$. Se existe uma indexação v_1, v_2, \dots, v_n de VG tal que:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ i+j \geq n-k \\ \text{val}(v_i) \leq i+k \\ \text{val}(v_j) \leq j+k-1 \\ \{v_i, v_j\} \notin EG \end{array} \right\} \implies \text{val}(v_i) + \text{val}(v_j) \geq n+k,$$

então G é k-aresta-hamiltoniano.

Este resultado, apesar de forte, não é útil já que a condição é muito difícil de ser testada.

O resultado mais elegante e útil que se conhece é o seguinte (veja [B]) que é uma extensão do teorema de Chvátal (corolário II.2.6).

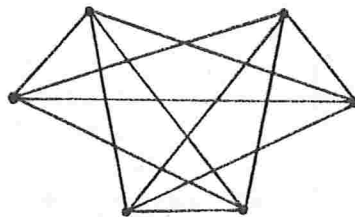
TEOREMA 1.3 - Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ com $sv(G) = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$, e seja k um inteiro, $0 \leq k \leq n-3$. Se

$$s_i \leq i+k < \frac{1}{2}(n+k) \implies s_{n-k-i} \geq n-i,$$

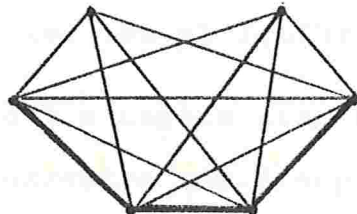
então G é k -aresta-hamiltoniano.

Este resultado é o melhor possível no sentido de que toda seqüência s tal que $s = sv(G)$ para algum G , se s não satisfaz a condição acima, s é dominada pela seqüência valencial de um grafo que não é k -aresta-hamiltoniano.

EXEMPLO - A seqüência valencial $s = \langle 4, 4, 4, 4, 4, 4 \rangle$ do grafo



não satisfaz a condição do teorema 1.3 para $k=3$. Essa seqüência é dominada pela seqüência $s^* = \langle 4, 4, 4, 5, 5, 5 \rangle$ do grafo abaixo que não é 3-aresta-hamiltoniano.



2. GRAFOS HAMILTONIANO - CONEXOS

DEFINIÇÃO - Um grafo G é *hamiltoniano-conexo* sse para cada par u, v de vértices distintos existe um caminho hamiltoniano em G com extremidades u e v .

É imediato, da definição, que todo grafo hamiltoniano-conexo de ordem $n \geq 3$ é hamiltoniano.

Note que se G é um grafo completo, G é hamiltoniano-conexo. Observando que neste caso, se G tem n vértices, G tem $\frac{1}{2}n(n-1)$ arestas, surge daí a seguinte questão: "Dado n , qual é o menor número $f(n)$ tal que todo grafo com n vértices e pelo menos $f(n)$ arestas é hamiltoniano-conexo?".

Essa questão foi formulada e respondida por Ore em 1963 [02] ao introduzir os grafos hamiltoniano-conexos. Ore provou que se $n \geq 4$, $f(n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 3$.

Temos então, o seguinte resultado:

TEOREMA 2.1 - Se G é um grafo de ordem $n \geq 4$ e $|EG| \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 3$, então G é hamiltoniano-conexo.

Esse teorema segue como consequência imediata do seguinte

TEOREMA 2.2 - Se G é um grafo de ordem $n \geq 3$ e $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq n+1$ para todo par u, v de vértices distintos, não adjacentes, então G é hamiltoniano-conexo.

Para provar esse teorema, Ore utilizou dois resultados:

(a) o corolário II.2.10, segundo o qual: "se um grafo G de ordem $n \geq 3$ é tal que $\text{val}(u) + \text{val}(v) \geq n$ para todo par u, v de vértices distintos, não adjacentes, então G é hamiltoniano".

(b) um teorema devido a Erdős e Gallai [EG] que afirma: "se um grafo G de ordem n tem um circuito hamiltoniano $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ e se dois vértices v_i e v_j não são ligados por um caminho hamiltoniano, então os vértices v_{i+1}, v_{j+1} não são adjacentes e satisfazem a condição:

$$\text{val}(v_{i+1}) + \text{val}(v_{j+1}) \leq n."$$

O valor $f(n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+3$ é o melhor possível. De fato, tomando-se o grafo completo K_n com $n \geq 4$ vértices e removendo-se todas as arestas incidentes a um vértice v com exceção de duas delas, o grafo resultante não é hamiltoniano-conexo pois os dois vértices adjacentes a v não podem ser extremidades de um caminho hamiltoniano. O número de arestas desse grafo é $\frac{1}{2}n(n-1)-(n-3) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$.

Investigando os grafos de ordem $n \geq 4$ com

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2 \text{ arestas,}$$

Ore obteve o seguinte

TEOREMA 2.3 - Se G é um grafo de ordem $n \geq 7$, $\delta(G) \geq 3$ e

$$|EG| = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2,$$

então G é hamiltoniano-conexo.

Considere uma condição C com a seguinte propriedade P : "se um grafo G satisfaz C então o grafo G' que se obtém de G acrescentando-se uma aresta também satisfaz C ".

Então, é claro que se C é uma condição suficiente para que um grafo seja 1-aresta-hamiltoniano, C também é uma condição suficiente para que um grafo seja hamiltoniano-conexo.

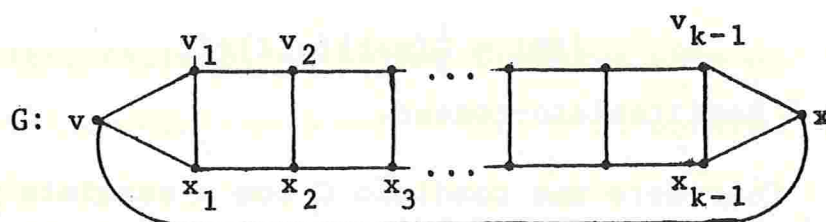
Como as condições suficientes que vimos para que um grafo seja k -aresta-hamiltoniano gozam da propriedade P mencionada, no caso $k=1$ são condições suficientes para que um grafo seja hamiltoniano-conexo.

Em 1965, Moon provou a seguinte condição necessária para um grafo ser hamiltoniano-conexo (veja [B]).

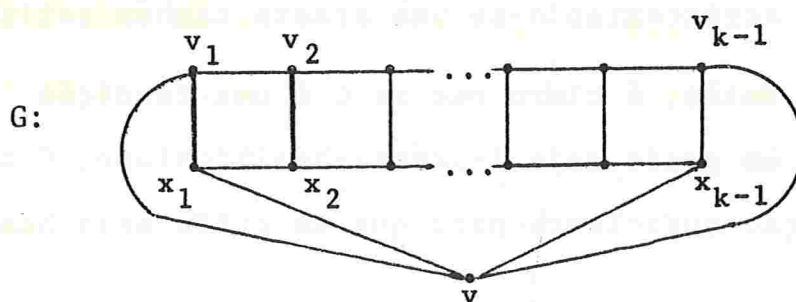
TEOREMA 2.4 - Se G é um grafo hamiltoniano-conexo de ordem $n \geq 4$ então $|EG| \geq \left\lfloor \frac{1}{2}(3n+1) \right\rfloor$.

Em [B] Berge mostra que existem grafos hamiltoniano-conexos G de ordem $n \geq 4$ com $|EG| = \left\lfloor \frac{1}{2}(3n+1) \right\rfloor$:

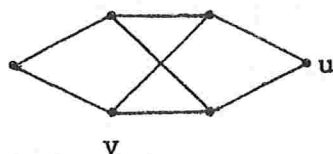
(a) quando n é par, $n = 2k$



(b) quando n é ímpar, $n = 2k - 1$



Observe que se um grafo G de ordem $n \geq 3$ é hamiltoniano-conexo então qualquer aresta de G pertence a um circuito hamiltoniano e portanto G é 1-aresta-hamiltoniano. A recíproca porém, não é verdade. O grafo abaixo mostra que nem todo grafo 1-aresta-hamiltoniano é hamiltoniano-conexo (não existe nenhum caminho hamiltoniano com extremidades u e v).



Em [CKK], Chartrand, Kapoor e Kronk introduzem uma generalização do conceito de grafos hamiltoniano-conexos, definindo grafos k -hamiltoniano-conexos da seguinte forma:

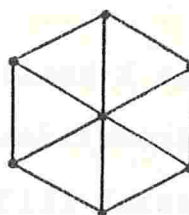
DEFINIÇÃO - Um grafo G de ordem n é k -hamiltoniano-conexo,

$1 \leq k \leq n-1$, se para quaisquer pares de vértices distintos u e v , existem caminhos de u para v com comprimentos $n-k, n-k+1, \dots, n-1$.

Anteriormente observamos que se G é 1-hamiltoniano-conexo, G é 1-aresta-hamiltoniano. Porém, não é verdade que se G é k -hamiltoniano-conexo, G é k -aresta-hamiltoniano, qual quer que seja $k \geq 2$.

Por exemplo, o grafo da figura 28 é 3-aresta-hamiltoniano (e 2-aresta-hamiltoniano) porém não é 3-hamiltoniano-conexo (e nem 2-hamiltoniano-conexo).

Por outro lado, o grafo



é 5-hamiltoniano-conexo e não é 5-aresta-hamiltoniano.

3. GRAFOS K-HAMILTONIANOS

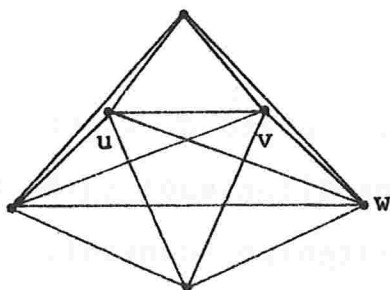
DEFINIÇÃO - Um grafo G de ordem $n \geq 3$ diz-se k -hamiltoniano, $0 \leq k \leq n-3$, se ao removermos quaisquer p vértices, $0 \leq p \leq k$ o grafo que se obtém é hamiltoniano.

De acordo com esta definição, os grafos 0-hamiltonianos são simplesmente os hamiltonianos.

EXEMPLOS:

1) É imediato que para $n \geq 3$, o grafo completo K_n é $(n-3)$ -hamiltoniano.

2) O grafo abaixo é 2-hamiltoniano mas não é 3-hamiltoniano (removendo-se os vértices u , v e w o grafo que se obtém não é hamiltoniano).



Os grafos k -hamiltonianos ($0 \leq k \leq n-3$) como acima definidos foram introduzidos por Chartrand, Kapoor e Lick [CKL]. Recentemente, Lesniak [L1] estendeu a definição de grafos k -hamiltonianos para incluir valores negativos de k satisfazendo $-n \leq k \leq -1$.

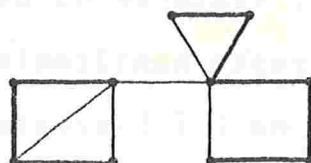
DEFINIÇÃO - Um grafo G de ordem $n \geq 3$ diz-se k -hamiltoniano, $-n \leq k \leq -1$, se existem caminhos dois a dois disjuntos

$$P_1, P_2, \dots, P_j \text{ com } j \leq -k \text{ tais que } VP_1 \cup VP_2 \cup \dots \cup VP_j = VG.$$

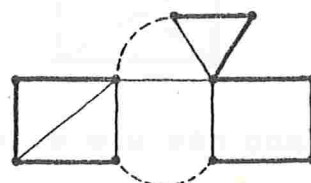
Se G é um grafo hamiltoniano, então existe um circuito C tal que $VC = VG$. No caso de grafos não hamiltonianos G de ordem $n \geq 3$, embora não exista um tal circuito, sempre e

xistem k caminhos dois a dois disjuntos P_1, P_2, \dots, P_k onde $k \leq n$, tais que $VP_1 \cup VP_2 \cup \dots \cup VP_k = VG$. Se pensarmos no menor k , em valor absoluto, tal que G é k -hamiltoniano ($-n \leq k \leq -1$), esse número k , de certa forma mede o grau de proximidade quanto à propriedade de G conter um circuito hamiltoniano.

Assim, se um grafo G é k -hamiltoniano ($-n \leq k \leq -1$) mas não é $(k+1)$ -hamiltoniano, $-k$ indica o número de "arestas que faltam" para que G tenha um circuito hamiltoniano. Exemplificando, considere o seguinte grafo G :



G é (-2) -hamiltoniano mas não é (-1) -aresta-hamiltoniano. Nesse caso, note que "faltam duas arestas" para que G tenha um circuito hamiltoniano.



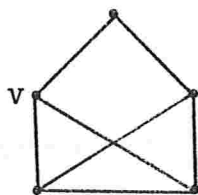
Em [CKK] Chartrand, Kapoor e Lick apresentam várias condições suficientes para um grafo ser k -hamiltoniano, quando $0 \leq k \leq n-3$. Lesniak [L1] prova que essas mesmas condições são

válidas quando k assume valores negativos $-n \leq k \leq -1$. A condição suficiente mais recente para valores não negativos de k é devido a Chvátal [C2]: se G é um grafo de ordem $n \geq 3$ com $sv(G) = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$, k é um inteiro $0 \leq k \leq n-3$ e se

$$s_i \leq i+k < \frac{1}{2}(n+k) \implies s_{n-k-i} \geq n-i,$$

então G é k -hamiltoniano." Lesniak prova que esse resultado é válido também para $-n \leq k \leq -1$.

Note que a condição acima mencionada é exatamente o teorema 1.3, isto é, trata-se de uma condição suficiente para um grafo ser k -aresta-hamiltoniano. É fácil verificar que não é verdade que se G é k -aresta-hamiltoniano então G é k -hamiltoniano qualquer que seja k . De fato, no caso $k=1$, o grafo

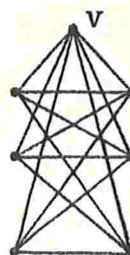
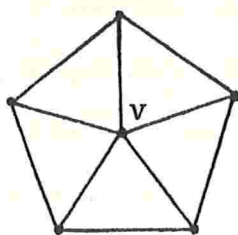


é 1-aresta-hamiltoniano mas não é 1-hamiltoniano ($G-v$ não é hamiltoniano). Quanto à validade da recíproca, porém, não conseguimos nenhuma resposta. Conjeturamos que "se G é k -hamiltoniano ($k \geq 0$) então G é k -aresta-hamiltoniano".

4. GRAFOS ALEATORIAMENTE HAMILTONIANOS

DEFINIÇÃO - Seja G um grafo de ordem n e v um vértice de G . G é aleatoriamente hamiltoniano a partir de v sse todo caminho com início v , de comprimento k , $0 \leq k \leq n-1$, pode ser estendido a um circuito hamiltoniano de G .

EXEMPLOS - Grafos aleatoriamente hamiltonianos a partir de um vértice v (indicado no grafo):



DEFINIÇÃO - G é um grafo aleatoriamente hamiltoniano sse G é aleatoriamente hamiltoniano a partir de qualquer vértice v de G .

Os grafos aleatoriamente hamiltonianos foram caracterizados por Chatrand e Kronk em [CK] como sendo ou circuitos, ou grafos completos ou grafos k -regulares bipartidos completos (a demonstração também pode ser encontrada em [BCH]).

BIBLIOGRAFIA

- [AHU] - AHO, HOPCROFT e ULLMAN, "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley, 1974.
- [B] - C. BERGE, "Graphs and Hypergraphs", North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [BL] - J.A. BONDY, Properties of graphs with constraints on degrees, *Studia Sci. Mathematicarum Hungarica*, 4 (1969), 473-475.
- [BC] - J.A. BONDY e V. CHVÁTAL, A method in graph theory, *Discrete Mathematics*, 15 (1976), 111-135.
- [BCH] - M. BEHZAD e G. CHARTRAND, "Introduction to the Theory of Graphs", Allyn and Bacon, Boston, 1971.
- [BM] - J.A. BONDY e U.S.R. MURTY, "Graph Theory with Applications", MacMillan, London, 1976.
- [C] - S.A. COOK, The complexity of theorem proving procedures, *Proc. Third ACM Symp. on Theory of Computing*, (1971), 151-158.
- [C1] - V. CHVÁTAL, New directions in hamiltonian Graph theory, "New Directions in the Theory of Graphs", Ed. F. Harary, Academic Press, 1970, 65-95.
- [C2] - V. CHVÁTAL, On Hamilton's ideals, *J. Comb. Theory (B)*, 12 (1972), 163-168.
- [CE] - V. CHVÁTAL e P. ERDÖS, A note on hamiltonian circuits, *Discrete Mathematics*, 2 (1972), 111-113.
- [CK] - G. CHARTRAND e H.V. KRONK, Randomly traceable graphs, *J. SIAM Appl. Math.*, 16 (1968), 696-700.
- [CKK] - G. CHARTRAND, S.F. KAPOOR e H.V. KRONK, A generalization of hamiltonian-connected graphs, *J. Math. Pures et Appliquées*, 48,

(1969), 109-116.

- [CKL] - G.CHARTRAND, S.F.KAPOOR e D.R.LICK, n -Hamiltonian graphs, *J. Comb. Theory (B)*, 9 (1970), 308-312.
- [D] - G.A.DIRAC, Some theorems on abstract graphs, *Proceedings of London Math. Society (3)*, V.2 (1952), 69-81.
- [E] - J.EDMONDS, Paths, trees and flowers, *Canadian Journal of Mathematics*, 17 (1965), 449-467.
- [E1] - P. ERDÖS, Remarks on a paper of Pósa, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad.Sci.*, 7 (1962), 227-228.
- [EG] - P.ERDÖS e T.GALLAI, On maximal paths and circuits of graphs, *Acta Math. Acad. Sci.Hung.*, 10 (1959), 337-356.
- [GH] - S.GOODMAN e S.HEDETNIEMI, Sufficient conditions for a graph to be hamiltonian, *J. Comb. Theory (B)*, 16 (1974), 29-34.
- [H] - S.HAKIMI, On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph, *J.SIAM Appl. Math.* 10 (1962), 496-506.
- [H1] - F.HARARY, "*Graph Theory*", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.
- [HB] - F.HARARY e L.BEINEKE, "*A seminar on Graph Theory*", Holt, Reinhart and Winston, N.York, 1967.
- [HS] - J.HARTMANIS e J.SIMON, On the structure of feasible computations, "*Advances in Computers*", V.14, ed. Morris Rubinfeld/ Marshall C. Yovits, Academic Press, 1976, 1-43.
- [K] - H.V.KRONK, Variations on a theorem of Pósa, "*The Many Facets of Graph Theory*" (G.Chartrand, S.F.Kapoor, ed.), Springer Verlag (1969), 193-197.
- [K1] - R.M.KARP, Reducibility among combinatorial problems, "*Complexity of Computer Computations*", ed. Raymond E.Miller / James W.Thatcher, Plenum, N. York, 1972, 85-103.

- [K2] - S.KUNDU, The k-factor conjecture is true, *Discrete Mathematics*, 6 (1973), 367-376.
- [L] - C.LANCZOS, William Rowan Hamilton - An appreciation, *American Scientist*, 55, 2 (1967), 129-143.
- [L1] - L.LESNIAK, On n-Hamiltonian graphs, *Discrete Mathematics*, 14, (1976), 165-169.
- [LSSSK] - C.LUCCHESI, I.SIMON, I.SIMON, J.SIMON, T.KOWALTOWSKI, "Aspectos Teóricos da Computação," Sessão Especial, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1977).
- [LV1] - M.LAS VERGNAS, Sur une propriété des arbres maximaux dans un graphe, *C.R.Acad. Sc. Paris*, 272 (1971), 1297-1300.
- [LV2] - M.LAS VERGNAS, Sur l'existence de cycles hamiltoniens dans un graphe, *C.R.Acad. Sc. Paris*, 270 (1970), A, 1361-1364.
- [NW1] - C.St.J.A.NASH-WILLIAMS, On hamiltonian circuits in finite graphs, *Proceed.Amer.Math.Soc.* 17 (1966), 466-467.
- [NW2] - C.St.J.A.NASH-WILLIAMS, Edge-disjoint hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency, "Studies in Pure Mathematics", (L.Mirsky, ed.), Academic Press, London, 1971, 157-183.
- [NW3] - C.St.J.A.NASH-WILLIAMS, Valency sequences which force graphs to have hamiltonian circuits - interim report, University of Waterloo (1972).
- [NW4] - C.St.J.A.NASH-WILLIAMS, Hamiltonian arcs and circuits, "Recent Trends in Graph Theory", Lect. Notes in Math. 186 (1971), 197-209.
- [O1] - O.ORE, Arc coverings of graphs, *Ann.Mat.Pura Appl.*, 55 (1961), 315-321.
- [O2] - O.ORE, Hamilton-connected graphs, *J.Math.Pures et Appliquées*, 42 (1963), 21-27.

- [O3] - O.ORE, Note on hamiltonian circuits, *Mathematical Notes*, 67, (1960), 55.
- [P1] - L.PÓSA, A theorem concerning Hamilton lines, *Publ.Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 7 (1962), 225-226.
- [P2] - L.PÓSA, On the circuits of finite graphs, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató. Int. Közl.*, 8 (1963), 355-361.
- [RR] - A.R.RAO e S.B.RAO, On factorable degree sequences, *J. Comb. Theory (B)*, 13 (1972), 185-191.
- [S] - S.SKUPIEŃ, Sufficient conditions for hamiltonian graphs, *Bulletin de L'académie Polonaise des Sciences*, V. XIX, 10, (1971), 901-905.
- [S1] - J.SEDLÁČEK, Some properties of interchange graphs, "Theory of Graphs and its applications", (M.Fiedler, ed.), Prague, 1964, 145-150.
- [S2] - J.STOLFI, Manuscrito não publicado - IME-USP.
- [T] - W.T.TUTTE, A short proof of the factor theorem for finite graphs, *Canad. J. Math.* 6 (1954), 347-352.

44

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

A(H)	35	c(G)	16
A _G	10	f(G), f _k (G)	21
EG	8	val(v), val _G (v)	9
\bar{G}	10	sv(G)	93
G[X]	12	s-k	93
G ₁ ∪ G ₂	13	$\langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle, \langle x \rangle^n$	93
G ₁ ∩ G ₂	13	[x, y]	93
G ₁ - G ₂	13		
G ₁ Δ G ₂	13	β(G)	47
G ~ v	12	δ(G)	10
G - α	13	κ(G)	47
G ~ X	13	Γx, ΓX	9
G - A	13		
G + α	13	<i>S</i> _n	95
Kn	10	<i>G</i> _n	95
K _{m, n}	10	<i>GH</i> _n	95
P · Q	17	<i>OH</i> _n	95
V ⁽²⁾	8	<i>INH</i> _n	95
V(j)	31	<i>IC</i> _n	100
VG	8	<i>C</i> _n	97
X \overline{G} Y	86	<i>G</i> (s)	95
X ⊗ Y	10	<i>D</i> (s)	95

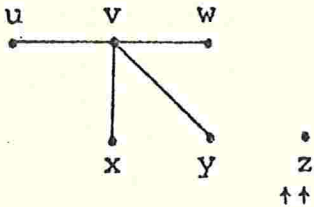
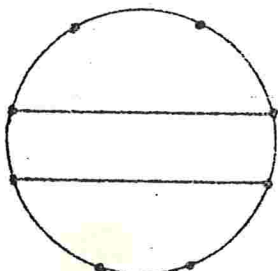
$\lfloor x \rfloor$ = maior inteiro ≤ x

c: propriamente contido

ÍNDICE DE DEFINIÇÕES

alternante	114	• k-fecho do -	21
aresta	8	- k-hamiltoniano	133
- adjacente	9	- k-regular	10
- incidente	9	- maximal	13
caminho	16	- minimal	13
• concatenação de -	17	• núcleo de -	115
- hamiltoniano	17	- nulo	10
• início de -	16	• ordem do -	10
• extremidades do -	16	- separável	16
• término de -	16	- trivial	10
- σ -transformado	53	ideal superior	95
circuito	17	independentes (condições)	83
- hamiltoniano	17	injeção admissível	17
clique	13	matriz de adjacência	10
complemento	10	núcleo	115
componente	16	partição	10
conectividade	47	ponte	16
estabilidade, estável	47	seqüência	93
fator, k-fator	12	- 2-fatorável	114
fecho	21	- dominada	95
f-fator	85	- forçosamente fecho-completa	100
grafo	8	- - hamiltoniana	93
- aleatoriamente hamiltoniano	137	- - não hamiltoniana	93
- aresta	35	- gráfica	93
- bipartido	10	- opcionalmente hamiltoniana	94
- bipartido completo	10	- valencial	93
• complemento de -	10	subgrafo	12
- completo	10	- espalhado	12
• componentes do -	16	- induzido	12
- conexo	16	- próprio	12
- desconexo	15	supergrafo	12
- dirigido	11	torneio	11
- disjunto	13	trilha	16
- euleriano	16	- de Euler	16
• fecho do -	21	- fechada	16
- hamiltoniano	17	valência	9
- hamiltoniano-conexo	129	vértice	8
- isomorfo	17	- adjacente	9
- k-aresta-hamiltoniano	125	- de corte	16
- k-conexo	47	- isolado	9
- k-fechado	20	• remoção de -	12

E R R A T A

<u>pag.</u>	<u>linha</u>	<u>leia-se</u>
15	6 ↑	
48	6 ↑	Sejam u e v ... ↑↑
49	3 ↑	Seja H o componente de G ~ VC que ... ↑↑↑↑
49	5 ↑	... adjacentes a v̄rtices de H. ↑↑↑↑↑↑↑↑
52	4 ↑	Seja H o componente de G ~ VC que ... ↑↑↑↑
52	11 ↑	subgrafo induzido isomorfo ... ↑↑↑↑↑↑↑↑
63	2 ↑	subgrafo induzido isomorfo ... ↑↑↑↑↑↑↑↑
70	5 ↑	..., $\phi(v_9) = v_3, \dots$ ↑↑
84	1 ↑	H_4 : 
		↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑
85	4 ↑	... condições necessárias ... ↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑
97	6 ↑	$\mathcal{C}_n = \{s \in \mathcal{G}_n : s = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle, \dots$ ↑↑↑↑↑↑
107	3 ↑	... + $ (VH_2 - \{w\}) \cup \{u\} $. ↑↑
110	2 ↑	... valência $\geq \frac{n}{2} - 1$... ↑↑