

CERTAS NUMERAÇÕES DE GRAFOS

MARIA LUCIA ULRICH DE OLIVEIRA BRAGA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR:

PROF. DR. IMRE SIMON

- SÃO PAULO, NOVEMBRO DE 1976 -

As minhas filhas,

Katia e Sandra

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Imre Simon, pela excelente orientação neste trabalho e pela perseverança em ter-me feito apreciar o rigor matemático.

Ao professor Tomasz Kowaltowski, que estimulou, em princípio, a minha vinda para a Matemática. A todos os demais professores e colegas que também influenciaram neste sentido.

Aos Senhores Armando Garcia Segura e João Baptista Esteves de Oliveira, pela grande colaboração na apresentação deste trabalho. A todos que, de alguma forma, colaboraram para que este trabalho fosse realizado.

São Paulo, novembro de 1976

Maria Lucia Ulrich de Oliveira Braga

Í N D I C E

CAP.1 - INTRODUÇÃO	1
CAP.2 - CONCEITOS, RESULTADOS e NOTAÇÃO	6
2.1 - Alguns Conceitos e Resultados da Teoria dos Grafos	6
2.1.1 - Grafos, Subgrafos, Isomorfismo e Homeomorfismo	6
2.1.2 - Certos Grafos	9
2.2 - Sequência de Fibonacci	12
CAP.3 - SOBRE CERTAS NUMERAÇÕES DE GRAFOS	14
3.1 - Definição do Problema	14
3.2 - Operação que Conserva Numeração	15
3.3 - Sobre α -numeração	16
3.3.1 - O Teorema da Caracterização Geométrica	17
3.3.2 - Propriedades de α -numeração	23
3.3.3 - Operações que conservam α -numeração	24
3.4 - Sobre β -numeração	31
3.4.1 - Exemplos e suas representações geométricas com vértices ordenados sobre a reta	31
3.4.2 - Propriedades da β -numeração	32
3.4.3 - Operação que conserva β -numeração	33
3.5 - Sobre σ -numeração	35
3.5.1 - Exemplo e sua representação geométrica com vértices ordenados sobre a reta	35
3.5.2 - Relação entre grafos β -numeráveis e σ -numeráveis	35

3.5.3 - Propriedades da σ -numeração	37
3.6 - Sobre σ -numeração	39
3.6.1 - Exemplo e sua representação geométrica com vértices ordenado sobre a circunferência	39
3.6.2 - Propriedade da ρ -numeração.	39
3.6.3 - O Teorema da Caracterização Geométrica.	39
CAP.4 - SOBRE NUMERAÇÕES DE CERTAS CLASSES DE GRAFOS.	52
4.1 - Sobre Numerações de Grafos Regulares de Grau 2 com componentes isomorfas.	52
4.2 - Sobre Numerações de Árvores	63
4.2.1 - É grande a classe de árvores α -numeráveis.	63
4.2.2 - Classe de árvores não α -numeráveis.	78
4.2.3 - Classes de árvores β -numeráveis	80
4.2.3.1 - A construção de Stanton-Zarnke [SZ].	80
4.2.3.2 - Mais classes de árvores β -numeráveis.	92
4.2.3.3 - A conjectura sobre β -numeração de árvores	103
4.3 - Sobre Numeração de Grupos Bipartidos Completos.	105
4.4 - Sobre Numerações de Grafos Completos.	106
CAP.5 - ALGUNS RESULTADOS EXTREMOS.	111
5.1 - Sobre Numeração Extrema	111
5.1.1 - Definição e exemplo	111
5.1.2 - Um limite para NE_G^*	112
5.2 - Sobre Limite no Número de Arestas para β -numeração.	118
APÊNDICE A - BLOCOS CÍCLICOS E CONJUNTOS DE DIFERENÇAS.	121
A.1 - Definições e Propriedades.	121
A.2 - Equivalências.	122

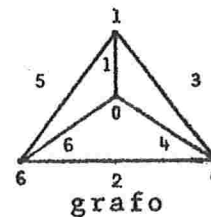
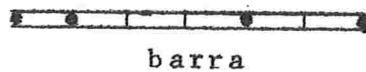
A.3 - Teorema de Singer.	126
APÊNDICE B - MAIS ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS β -NUME- RÁVEIS	134
B.1 - A Construção dos Cahit [C1].	134
B.2 - A Construção de Gabow [GA]	136
B.3 - A Construção de Golomb [G1].	141
BIBLIOGRAFIA.	142
ÍNDICE DE DEFINIÇÕES.	145

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

É clássico, em combinatória, o problema de colocar marcas numa barra reta de metal de um certo comprimento, em alguns de seus pontos inteiros, de forma que as distâncias entre as marcas sejam distintas duas a duas. Para m marcas o número de distâncias é $\binom{m}{2}$ e portanto o comprimento da barra deve ser maior ou igual a $\binom{m}{2}$; pode-se mostrar que se m é maior que 4 então o comprimento da barra deve ser maior que $\binom{m}{2}$. Este problema tem seu equivalente na teoria dos grafos que é o de associar números naturais aos m vértices de um grafo completo de forma que a cada dois vértices sejam associados números distintos e as diferenças, em valor absoluto, dos valores dos vértices sejam também distintas duas a duas; o valor de cada diferença é associado à correspondente aresta que une os dois vértices.

Para $m = 4$ temos:



Ringel, em 1963, conjecturou que um grafo completo, com $2n + 1$ vértices, pode ser decomposto em $2n + 1$ grafos árvores isomorfos a um qualquer dado grafo árvore, com n arestas.

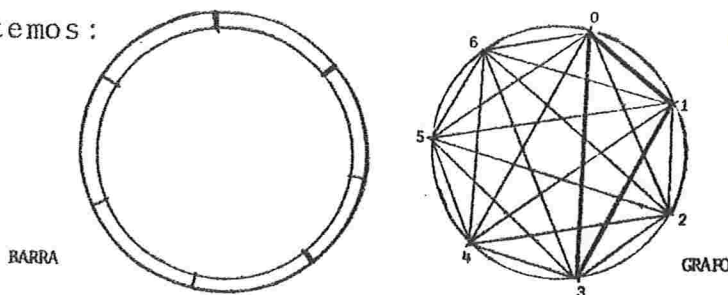
Rosa, em 1966, provou o teorema "Existe uma decomposição cíclica de um grafo completo, com $2n + 1$ vértices, em $2n + 1$ grafos isomorfos a um dado grafo G , com n arestas, se e somente se aos vértices de G pode-se associar números naturais, do conjunto de 0 a $2n$, de forma que a cada dois vértices são associados números distintos e as diferenças, módulo $2n + 1$, considerando para cada dois vértices unidos por aresta tanto a diferença positiva quanto a negativa, são distintas duas a duas."

Este teorema, de Rosa, também tem seu equivalente em combinatória, por conjuntos: Sejam o conjunto N_{2n} dos naturais de 0 a $2n$ e o conjunto C de todas as combinações de números do conjunto N_{2n} tomados dois a dois. "Um subconjunto C' , de C , com n combinações é tal que as diferenças, módulo $2n + 1$, entre os números de cada combinação de C' , considerando para cada combinação tanto a diferença positiva quanto a negativa, são distintas duas a duas se e somente se pode-se obter o conjunto C a partir de C' por somar $0, 1, 2, \dots, 2n$, módulo $2n + 1$, aos números de cada combinação de C' , sendo cada combinação de C obtida uma e somente uma vez."

Um caso particular deste teorema, de Rosa, para quan

do G é um grafo completo com m vértices e $\binom{m}{2}$ arestas, é equivalente a um conhecido teorema da combinatória, para $k=m$ e $\lambda=1$: "Um conjunto de k resíduos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ é um conjunto de diferenças com parâmetros $(v=2\binom{k}{2}+1, k, \lambda)$ se e somente se os conjuntos $\{a_1+i, a_2+i, \dots, a_k+i\}$ (somadas módulo v), $i=0, 1, 2, \dots, v-1$, formam um bloco cíclico com parâmetros $(v=2\binom{k}{2}+1, k, \lambda)$ ". Singer, em 1938, demonstrou que, sendo $\lambda=1$, se k é da forma $p^j + 1$, onde p é primo e j é natural, então existem tal conjunto de diferenças e tal bloco cíclico como enunciados no último teorema.

Este problema, no caso particular em que G é um grafo completo com m vértices, também pode ser representado por marcas numa barra circular de metal de comprimento $2\binom{m}{2} + 1$, onde as distâncias entre as marcas são distintas duas a duas. Para $m = 2^1 + 1 = 3$ temos:



$$C' = \{(01) (03) (13)\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (01) (03) (13) \\ (12) (14) (24) \\ (23) (25) (35) \\ (34) (36) (46) \\ (45) (40) (50) \\ (56) (51) (61) \\ (60) (62) (02) \end{array} \right\}$$

$$\{a_1 \quad a_2 \quad a_3\} = \{0 \quad 1 \quad 3\}$$

$$\{a_1+0 \quad a_2+0 \quad a_3+0\} = \{0 \quad 1 \quad 3\}$$

$$\{a_1+1 \quad a_2+1 \quad a_3+1\} = \{1 \quad 2 \quad 4\}$$

$$\{a_1+2 \quad a_2+2 \quad a_3+2\} = \{2 \quad 3 \quad 5\}$$

$$(\text{mod } 7) \{a_1+3 \quad a_2+3 \quad a_3+3\} = \{3 \quad 4 \quad 6\}$$

$$\{a_1+4 \quad a_2+4 \quad a_3+4\} = \{4 \quad 5 \quad 0\}$$

$$\{a_1+5 \quad a_2+5 \quad a_3+5\} = \{5 \quad 6 \quad 1\}$$

$$\{a_1+6 \quad a_2+6 \quad a_3+6\} = \{6 \quad 0 \quad 2\}$$

conjuntos

Esta numeração de um grafo G , com n arestas, relacionada à de composição cíclica de um grafo completo, com $2n + 1$ vértices, em grafos isomorfos a G é chamada ρ -numeração.

Rosa, Kotzig, Golomb, Stanton e Zarnke estudaram também, na representação de grafos, outras numerações chamadas σ, β, α , de classes mais restritas por mais propriedades, contidas umas nas outras. Também, nestas numerações, a associação de números aos vértices do grafo é distinta para cada dois vértices e a numeração das arestas, dada por diferenças, é distinta para duas arestas. A σ -numeração além das propriedades da ρ -numeração possui a propriedade de que a numeração das n arestas compreende os números naturais de 1 a n . A β -numeração possui a mais que a σ -numeração a propriedade de que a numeração dos vértices compreende números naturais do conjunto de 0 a n , sendo n o número de arestas; a conjectura de que todas as árvores são β -numeráveis foi e continua sendo muito pesquisada. A α -numeração possui a mais que a β -numeração a propriedade de que existe um número x tal que, para quaisquer dois vértices unidos por aresta, o número associado a um dos vértices é menor ou igual a x e o número associado ao outro vértice é maior que x . Rosa, Kotzig, Golomb, Stanton e Zarnke caracterizaram várias classes de grafos que possuem essas numerações. Golomb e Erdős estudaram uma extensão dessas numerações para um grafo qualquer e estabeleceram alguns resultados extremos.

Muitas das conjecturas feitas sobre estas numerações ainda continuam a espera de solução. Conseguimos resolver, aqui, somente alguns pequenos problemas; muitas das provas aqui apresentadas foram feitas por nós.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS, RESULTADOS E NOTAÇÃO

Este capítulo contém conceitos e resultados, em geral, conhecidos. Demonstrações e maiores explicações são encontradas em [HR] e [V].

2.1 - ALGUNS CONCEITOS E RESULTADOS DA TEORIA DOS GRAFOS

2.1.1 - GRAFOS, SUBGRAFOS, ISOMORFISMO, HOMEOMORFISMO

Se X é um conjunto finito, $X^{(2)}$ denota o conjunto de pares não ordenados de elementos de X , isto é, o conjunto $\{(x,y) \text{ tais que } x \neq y\}$.

Um *grafo* G é um par ordenado (VG, EG) formado por um conjunto finito VG e por um subconjunto EG de $VG^{(2)}$. Os elementos de VG são chamados *vértices* e os de EG são chamados *arestas* do grafo G . O número de elementos em VG é chamado *ordem* do grafo G . Se $VG = \emptyset$ então o grafo G é chamado *nulo*. Se (u,v) é uma aresta de G , os vértices u, v são chamados suas *pontas*; dizemos ainda que (u,v) *incide* em u e em v . Di

zemos que os vértices u, v são *adjacentes* num grafo G quando existe $(u,v) \in EG$.

Se v é um vértice de G , chamamos *grau* de v em G o número de arestas em G que incidem em v . Um grafo G é chamado *regular de grau n* se todos os seus vértices tem grau n . Um vértice de grau 1 é chamado *terminal*. Uma aresta que incide num vértice terminal é chamada *terminal*.

A figura seguinte representa o grafo $(\{u,v,w,x\}, \{(u,v), (u,w), (u,x)\})$. Neste grafo, o grau de u é 3 (u é ad-



jacente aos demais vértices), os vértices v, w, x não terminais, todas as arestas são terminais.

H é *subgrafo* de G ($H \subseteq G$) se e somente se $VH \subseteq VG$ e $EH \subseteq EG$.

Denotamos por $G \cup H$ (respectivamente $G \cap H$) o grafo *união* ($VG \cup VH, EG \cup EH$) (respectivamente *intersecção* ($VG \cap VH, EG \cap EH$)) dos grafos G, H .

Sejam G_1, G_2, \dots, G_n n grafos disjuntos, $n > 1$ e sejam $(v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^m), (v_2^1, v_2^2, \dots, v_2^m) \dots (v_k^1, v_k^2, \dots, v_k^m)$, $k \geq 1, m \geq 2$, k m -uplas de vértices, onde $v_i^j \in G_\ell$, para algum $\ell, 1 \leq \ell \leq n$, em cada m -upla não existem dois vértices de mesmo grafo G_ℓ e cada vértice pertence no máximo a uma das m -uplas. Chamamos *união* de G_1, G_2, \dots, G_n por *identificação de vértices* segundo $(v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^m), (v_2^1, v_2^2, \dots, v_2^m) \dots (v_k^1, v_k^2, \dots, v_k^m)$ ao grafo união de G_1, G_2, \dots, G_n onde os vértices $v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^m$ são um único vértice

tice, para cada i , $1 \leq i \leq k$.

Seja G um grafo e $V'G \subseteq VG$. O *subgrafo induzido por* $V'G$ é o subgrafo de $G(V'G, E'G)$, onde $(u,v) \in E'G$ se e somente se $(u,v) \in EG$ e $u,v \in V'G$.

Sejam G um grafo e $E'G \subseteq EG$. O *subgrafo diferença* $G-E'G$ é o subgrafo de $G(VG, EG-E'G)$.

Seja G um grafo e VG_I, VG_{II} uma partição de VG . O conjunto $\{(x,y) \in G \text{ tais que } x \in VG_I \text{ e } y \in VG_{II}\}$ é chamado *co-fronteira* de G induzido por VG_I, VG_{II} .

Um grafo G é *desconexo* se e somente se contem dois subgrafos não nulos H_1, H_2 tais que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ e $H_1 \cup H_2 = G$; G é *conexo* se não é desconexo. Uma *componente* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal não nulo de G .

Os grafos G, H são *isomorfos* se existe uma bijeção $h: VG \rightarrow VH$ tal que $(u,v) \in EG$ se e somente se $(h(u), h(v)) \in EH$. h é chamado *isomorfismo* entre G, H .

Sejam x, y vértices de um grafo conexo G . A sequência finita de vértices distintos dois a dois $x = u_0, u_1, \dots, u_n = y$ tais que $(u_i, u_{i+1}) \in EG$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ é chamado *caminho* de x para y e n é seu *comprimento*.

PROPOSIÇÃO 2.1.1.1 - G não nulo é um grafo conexo se e somente se existe caminho de x para y quaisquer que sejam $x, y \in VG$.

À proposição acima e a algumas das que seguem não é feita referência explícita nos próximos capítulos.

Chamamos *distância* entre dois vértices de um grafo conexo o número que é mínimo do conjunto de todos os comprimentos de caminhos entre os vértices. Denotamos por $dist(u, v)$ a distância entre os vértices u e v .

Seja $V'G$ o subconjunto de vértices terminais de G . Chamamos *base* de G o subgrafo de G induzido por $VG - V'G$.

2.1.2 - CERTOS GRAFOS

Um *circuito* é um grafo conexo regular de grau 2. O comprimento de um circuito é a sua ordem.

PROPOSIÇÃO 2.1.2.1 - Um circuito contém pelo menos três vértices. Seja u um vértice de um circuito G de comprimento n e sejam v, w os dois vértices adjacentes a u . Existe um único caminho $u = u_0, v = u_1, \dots, w = u_{n-1}$; toda aresta em G é igual ou a (u, w) ou a (u_i, u_{i+1}) para algum $i, 0 \leq i < n-1$.

Um grafo é de *Euler* se todos os seus vértices têm grau par.

PROPOSIÇÃO 2.1.2.2 - Um grafo, sem vértices de grau zero, é de Euler se e somente se é a união de circuitos $G_i, i=1, 2, \dots, n$, onde $EG_i \cap EG_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Uma *árvore* é um grafo não nulo conexo que não contém circuito como subgrafo.

PROPOSIÇÃO 2.1.2.3 - Numa árvore $G, |VG| = |EG| + 1$.

PROPOSIÇÃO 2.1.2.4 - Uma árvore, que tem pelo menos dois vértices, tem dois vértices terminais.

Um *arco* é uma árvore com no máximo dois vértices terminais. O *comprimento* de um arco é seu número de arestas. Um *arco envolvido* é uma árvore cuja base é um arco. Uma *estrela* é uma árvore onde no máximo um dos vértices é não terminial.

PROPOSIÇÃO 2.1.2.5 - Numa árvore G ,

$$n_1(VG) = \sum_{k=3}^m (k-2) \cdot n_k(VG) + 2,$$

onde m é o grau máximo dos vértices de G e $n_k(VG)$ é o número de vértices de grau k em G , $k=1,2,\dots,m$.

COROLÁRIO 2.1.2.6 - Num arco com pelo menos dois vértices os vértices terminais tem grau 2. Se u, v são os vértices terminais de um arco G existe um único caminho $u = u_0, u_1, \dots, v = u_{|EG|}$ e toda aresta em G é igual a (u_i, u_{i+1}) para algum i , $0 \leq i < |EG|$.

COROLÁRIO 2.1.2.7 - Se uma árvore tem 3 ou mais vértices então tem uma estrela de ordem 3 como subgrafo.

Chamamos *diâmetro* de uma árvore o máximo das distâncias entre cada dois de seus vértices. Chamamos *centro* de uma árvore G ao conjunto

$$\{v \in VG \text{ tais que } \max_{u \in VG} \{\text{dist}(v, u)\} \leq \max_{u \in VG} \{\text{dist}(z, u)\},$$

para todo $z \in VG$ }.

PROPOSIÇÃO 2.1.2.8 - Se o diâmetro de uma árvore é par seu centro contém exatamente um vértice. Se o diâmetro de uma árvore é ímpar seu centro contém exatamente dois vértices.

Seja G uma árvore e v um seu vértice de grau m . Os m subgrafos conexos maximais de G tais que v é terminal em cada subgrafo são chamados *ramos* de v em G .

PROPOSIÇÃO 2.1.2.9 - Sejam R_i , $i=1,2,\dots,m$ os m ramos do vértice v de uma árvore. Então

$$R_i \cap R_j = (\{v\}, \emptyset) \text{ se } i \neq j \text{ e } \bigcup_{i=1}^m R_i = G.$$

Sejam G uma árvore e $(z,w) \in EG$. Dizemos que uma árvore H pode ser obtida de G por *contração* da aresta (z,w) se existe uma função $h:VG \rightarrow VH$ tal que $h(z') = h(w')$ se e somente se $\{z',w'\} = \{z,w\}$ e $(u,v) \in EG - \{z,w\}$ se e somente se $(h(u),h(v)) \in EH$. Duas árvores G,H são *homeomorfas* se ambas podem ser obtidas de uma mesma árvore por uma sequência de contrações de arestas em que pelo menos uma das pontas é de grau 2.

Um grafo G é *bipartido* se existe partição de VG em VG_I , VG_{II} tal que EG está contido no conjunto $C = \{(x,y)$ tais que $x \in VG_I$ e $y \in VG_{II}\}$. Se $EG = C$ então G é chamado *bipartido completo*.

PROPOSIÇÃO 2.1.2.10 - Um grafo é bipartido se e somente se todo seu subgrafo que é circuito tem comprimento par.

Um grafo G é *completo* se $EG = VG^{(2)}$.

PROPOSIÇÃO 2.1.2.11 - Um grafo completo de ordem n é regular de grau $n-1$ e tem $n(n-1)/2$ arestas.

2.2 - SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ definida por $s_1 = s_2 = 1$ e $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$, $n \geq 3$, é chamada *sequência de Fibonacci*.

PROPOSIÇÃO 2.2.1 - A soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é igual a $s_{n+2} - 1$.

PROPOSIÇÃO 2.2.2 - A soma dos n primeiros termos de ordens ímpares da sequência de Fibonacci é igual a s_{2n} .

PROPOSIÇÃO 2.2.3 - A soma dos n primeiros termos de ordens pares da sequência de Fibonacci é igual a $s_{2n+1} - 1$.

PROPOSIÇÃO 2.2.4 -

$$s_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

2.3 - NOTAÇÃO

Dado um conjunto finito X , $|X|$ denota seu número de elementos.

Dado um número real x , $|x|$ denota o valor absoluto de x e $[x]$ denota o maior inteiro não superior a x .

Denotamos por \max (respectivamente, \min) máximo (respectivamente, mínimo).

Dada uma função f , denotamos por $Im(f)$ a sua imagem.

Denotamos por N o conjunto dos números naturais. Denotamos por N_m o subconjunto dos números naturais n tais que $0 \leq n \leq m$; convencionamos $N_{-1} = \emptyset$.

CAPÍTULO 3

SOBRE CERTAS NUMERAÇÕES DE GRAFOS

3.1 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Uma *numeração dos vértices* de um grafo é uma função $f_{VG}: VG \rightarrow N$. Dada uma função f_{VG} uma função $f_{EG}: EG \rightarrow N$, definida por $f_{EG}((v,u)) = |f_{VG}(v) - f_{VG}(u)|$, é uma *numeração das arestas* de G ; o par (f_{VG}, f_{EG}) é uma *numeração* de G se f_{VG} e f_{EG} são injetoras.

Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma numeração para um grafo G , com n arestas. Consideremos as seguintes propriedades:

- (i) $Im(f_{VG}) \subseteq N_n$
- (ii) $Im(f_{EG}) \subseteq N_n$
- (iii) $Im(f_{EG}) = N_n - \{0\}$
- (iv) $Im(f_{EG}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, onde $x_i = i$ ou $x_i = 2n+1-i$
- (v) existe x , $x \in N_n$, tal que, para toda aresta (v,u) ,
$$\min\{f_{VG}(u), f_{VG}(v)\} \leq x < \max\{f_{VG}(u), f_{VG}(v)\}.$$

(f_{VG}, f_{EG}) é chamada

α -numeração se verifica (i), (iii), (v)

β -numeração se verifica (i), (iii)

σ -numeração se verifica (ii), (iii)

ρ -numeração se verifica (ii), (iv).

Se existe α (respectivamente, β , σ , ρ)-numeração para um grafo G dizemos que G é α (respectivamente, β, σ, ρ)-numerável. Denotamos a classe de grafos α (respectivamente, β , σ , ρ)-numeráveis por $Cl(\alpha)$, $Cl(\beta)$, $Cl(\sigma)$, $Cl(\rho)$.

É evidente que as quatro numerações formam uma hierarquia no sentido de que $Cl(\alpha) \subseteq Cl(\beta) \subseteq Cl(\sigma) \subseteq Cl(\rho)$; mostraremos a seguir que estas inclusões são próprias.

É evidente também que x , que satisfaz a propriedade (v) numa α -numeração, é único. Chamamos x o *valor médio* desta α -numeração.

No restante deste capítulo são apresentados resultados gerais sobre essas numerações, a maior parte dos quais será utilizada nos capítulos que seguem.

3.2 - OPERAÇÃO QUE CONSERVA NUMERAÇÃO

TEOREMA 3.2.1 - Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma α (respectivamente, β, σ, ρ)-numeração para um grafo G . Então (f'_{VG}, f'_{EG}) definida por $f'_{VG}(v) = \max(\text{Im}(F_{VG})) - f_{VG}(v)$, é também uma α (respectivamente, β, σ, ρ)-numeração para G .

PROVA - Basta verificar as propriedades seguintes:

- (i) f'_{VG} é injetora; $0 \leq f'_{VG}(v) \leq \max(\text{Im}(f_{VG}))$, $\forall v \in VG$.
- (ii) $f'_{EG}(e) = f_{EG}(e)$, para todo $e \in EG$.
- (iii) $\max(\text{Im}(f_{VG})) - x - 1$ é valor médio de (f'_{VG}, f'_{EG}) , onde x é valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) .

(i) Sejam $u, v \in VG$ distintos. Se $f'_{VG}(u) = f'_{VG}(v)$ então

$$\max(\text{Im}(f_{VG})) - f_{VG}(u) = \max(\text{Im}(f_{VG})) - f_{VG}(v).$$

Então $f_{VG}(u) = f_{VG}(v)$. Então f_{VG} não é injetora.

Que $0 \leq f'_{VG}(v) \leq \max(\text{Im}(f_{VG}))$ segue imediatamente da definição.

(ii) Seja $(u, v) \in EG$. $f'_{EG}((u, v)) = |(\max(\text{Im}(f_{VG})) - f_{VG}(u)) + (\max(\text{Im}(f_{VG})) - f_{VG}(v))| = |f_{VG}(v) - f_{VG}(u)| = f_{EG}((u, v))$.

(iii) Para tod $(u, v) \in EG$, sem perda de generalidade, $f_{VG}(u) \leq u$ e $f_{VG}(v) > x$. Portanto,

$$f'_{VG}(u) = \max(\text{Im}(f_{VG})) - f_{VG}(u) > \max(\text{Im}(f_{VG})) - x - 1 \text{ e}$$

$$f'_{VG}(v) = \max(\text{Im}(f_{VG})) - f_{VG}(v) \leq \max(\text{Im}(f_{VG})) - x - 1.$$

□

3.3 - SOBRE α -NUMERAÇÃO

Resultados sobre α -numeração foram obtidos, principalmente, por Kotzig. Fora referência contrária, os resultados aqui apresentados são encontrados em [K1], para árvores e foram generalizados por nós.

3.3.1 - O TEOREMA DA CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA

Seja G um grafo bipartido com partição de seus vértices em V_{G_I} e $V_{G_{II}}$. Dadas funções $f_{\pi V_{G_I}}: V_{G_I} \rightarrow N$ e $f_{\pi V_{G_{II}}}: V_{G_{II}} \rightarrow N$, a função $f_{\pi EG}: EG \rightarrow N$ é definida por

$$f_{\pi EG}((v,u)) = f_{\pi V_{G_I}}(v) + f_{\pi V_{G_{II}}}(u) \quad (v \in V_{G_I}, u \in V_{G_{II}});$$

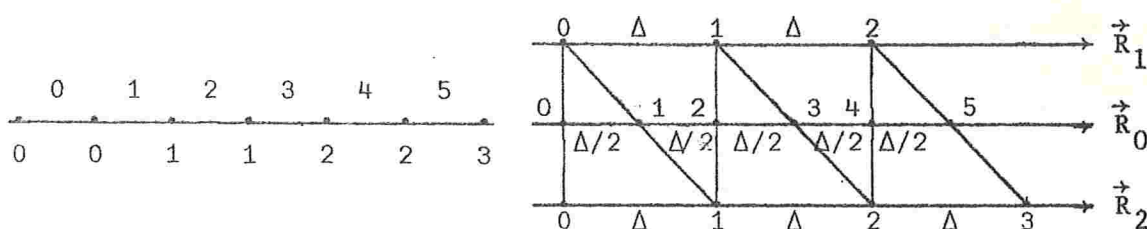
o par $(f_{\pi V_{G_I}}, f_{\pi V_{G_{II}}}; f_{\pi EG})$ é uma π -numeração de G se as funções $f_{\pi V_{G_I}}, f_{\pi V_{G_{II}}}, f_{\pi EG}$ são injetoras e

$$\max(\text{Im}(f_{\pi V_{G_I}})) + \max(\text{Im}(f_{\pi V_{G_{II}}})) = |EG| - 1.$$

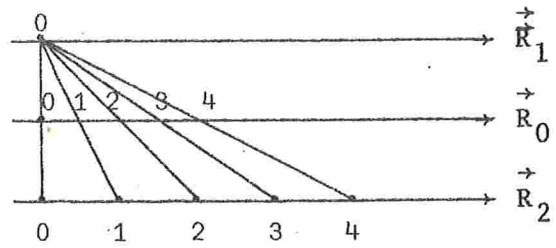
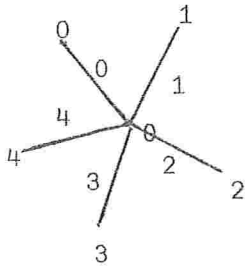
Um grafo G é π -numerável se existe π -numeração para G .

Uma π -representação de um grafo G é uma representação geométrica de uma π -numeração de G . Os exemplos 3.3.1.1, 3.3.1.2, 3.3.1.3 que seguem, são de π -representações de grafos; neles, $\vec{R}_0, \vec{R}_1, \vec{R}_2$ são retas paralelas de mesmo sentido, as distâncias entre \vec{R}_0 e \vec{R}_1 e entre \vec{R}_0 e \vec{R}_2 são iguais, os pontos sobre \vec{R}_1 e \vec{R}_2 tem equi-espaçamento Δ e os pontos sobre \vec{R}_0 tem equi-espaçamento $\Delta/2$ (esta última propriedade decorre das anteriores).

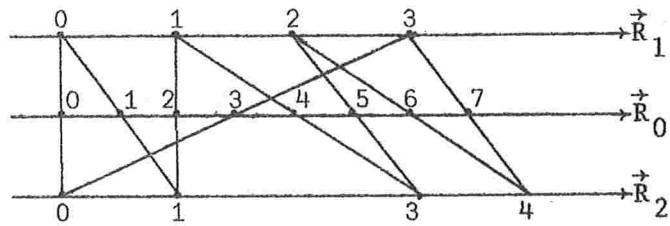
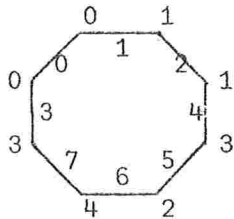
EXEMPLO 3.3.1.1



EXEMPLO 3.3.1.2

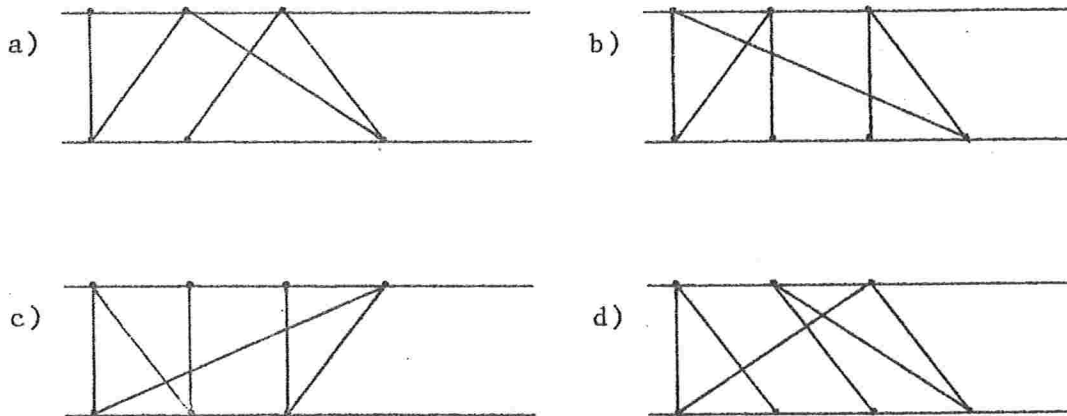


EXEMPLO 3.3.1.3



O exemplo 3.3.1.4 apresenta mais quatro π -representações do grafo do exemplo 3.3.1.1.

EXEMPLO 3.3.1.4



Como é fácil observar, c) (respectivamente, d)) é obtido de b) por permutação de \vec{R}_1 e \vec{R}_2 (respectivamente, μ

dança de sentido de \vec{R}_1 e \vec{R}_2).

LEMA 3.3.1.5 - Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma α -numeração para um grafo G , com valor médio x . Então existem (u_1, u_2) , $(v_1, v_2) \in EG$ tais que

$$f_{VG}(u_1) = x, f_{VG}(u_2) = x+1, f_{VG}(v_1) = 0, f_{VG}(v_2) = |EG|.$$

Para o lema 3.3.1.5 basta observar que

$$\{1, |EG|\} \subset \text{Im}(f_{EG}).$$

É fácil observar que uma α -numeração (f_{VG}, f_{EG}) , com valor médio x , para um grafo G induz uma partição de VG em VG_I, VG_{II} tal que $v \in VG_I$ se $f_{VG}(v) \leq x$ ou $v \in VG_{II}$ se $f_{VG}(v) > x$. Chamamos tal partição de VG *partição induzida por (f_{VG}, f_{EG})* .

TEOREMA 3.3.1.6 - Um grafo G é α -numerável se e somente se é bipartido e π -numerável.

PROVA - Vamos mostrar as implicações seguintes.

a) Se existe α -enumeração (f_{VG}, f_{EG}) para G então

a₁) G é bipartido;

e existe $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG})$ tal que

a₂) $f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}$ são injetoras em N ;

a₃) $f_{\pi EG}$ é injetora em N ;

a₄) $\max(\text{Im}(f_{\pi VG_I})) + \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) = |EG| - 1$.

b) Se G é bipartido e existe α -numeração $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG})$ para G então existe (f_{VG}, f_{EG}) tal que

b₁) f_{VG} é injetora em N ; $0 \leq f_{VG}(v) \leq |EG|$, para todo $v \in VG$; existe valor médio para (f_{VG}, f_{EG}) .

b₂) f_{EG} é injetora em N ; $1 \leq f_{EG}(e) \leq |EG|$, para todo $e \in EG$.

a₁) É fácil observar que G é bipartido com partição de seus vértices, induzida por (f_{VG}, f_{EG}) , em VG_I e VG_{II} . Considerando a partição de VG , induzida por (f_{VG}, f_{EG}) , em VG_I e VG_{II} , definimos, para todo $v \in VG$

$$f_{\pi VG_I}(v) = f_{VG}(v) \text{ se } v \in VG_I;$$

$$f_{\pi VG_{II}}(v) = |EG| - f_{VG}(v) \text{ se } v \in VG_{II}.$$

a₂) Como f_{VG} é injetora, por raciocínio análogo ao feito na parte (i) do Teorema 3.2.1, f_{VG_I} , $f_{VG_{II}}$ são injetoras.

a₃) Mostraremos que $f_{\pi EG}$ é sobrejetora em $N_{|EG|-1}$, mostrando então que $f_{\pi EG}$ é injetora em N .

Para todo $y \in N_{|EG|-1}$ existe $(u, v) \in EG$ tal que $f_{VG}(v) > f_{VG}(u)$ e $f_{EG}(u, v) = |EG| - y$. Mas se $f_{VG}(v) - f_{VG}(u) = |EG| - y$ então

$$f_{\pi VG_I}(v) + f_{\pi VG_{II}}(u) = |EG| - f_{VG}(v) + f_{VG}(u) = |EG| - |EG| + y = y.$$

a₄) Pelo Lema 3.3.1.5, $\max(\text{Im}(f_{VG_I})) = x$ e $\max(\text{Im}(f_{VG_{II}})) = |EG| - x - 1$. Então

$$\max(\text{Im}(f_{\pi VG_I})) + \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) = x + |EG| - x - 1 = |EG| - 1.$$

b) Definimos, para todo $v \in VG$,

$$f_{VG}(v) = \begin{cases} f_{\pi VG_I}(v) & \text{se } v \in VG_I \\ |EG| - f_{\pi VG_{II}}(v) & \text{se } v \in VG_{II}. \end{cases}$$

b₁) Como $\max(\text{Im}(f_{\pi VG_I})) = |EG| - \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) - 1$ então $|EG| - \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) > \max(\text{Im}(f_{\pi VG_I}))$. Então

$$\min_{v \in VG_{II}} f_{VG}(v) > \max_{v \in VG_I} f_{VG}(v).$$

E por raciocínio análogo ao feito na parte a) da prova do Teorema 3.2.1, f_{VG} é injetora. Além disso,

$$\min(\text{Im}(f_{VG})) = \min(\text{Im}(f_{\pi VG_I})) \geq 0 \text{ e}$$

$$\max(\text{Im}(f_{VG})) = \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) \leq |EG|.$$

Além disso, $\max(\text{Im}(f_{\pi VG_I}))$ é valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) .

b₂) Mostraremos que f_{EG} é sobrejetora em $N_{|EG|} - \{0\}$, mostrando então que f_{EG} é injetora e que, para todo $e \in EG$, $1 \leq f_{EG}(e) \leq |EG|$.

Como $\max(\text{Im}(f_{\pi VG_I})) + \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) = |EG| - 1$ então $\max(\text{Im}(f_{\pi EG})) \leq |EG| - 1$. Como $f_{\pi EG}$ é injetora em N então $\max(\text{Im}(f_{\pi EG})) = |EG| - 1$ e $f_{\pi EG}$ é sobrejetora em $N_{|EG|-1}$. Então, para todo $y \in N_{|EG|-1}$, existe $(u,v) \in EG$ tal que $f_{\pi VG_I}(u) + f_{\pi VG_{II}}(v) = |EG| - y$. Então

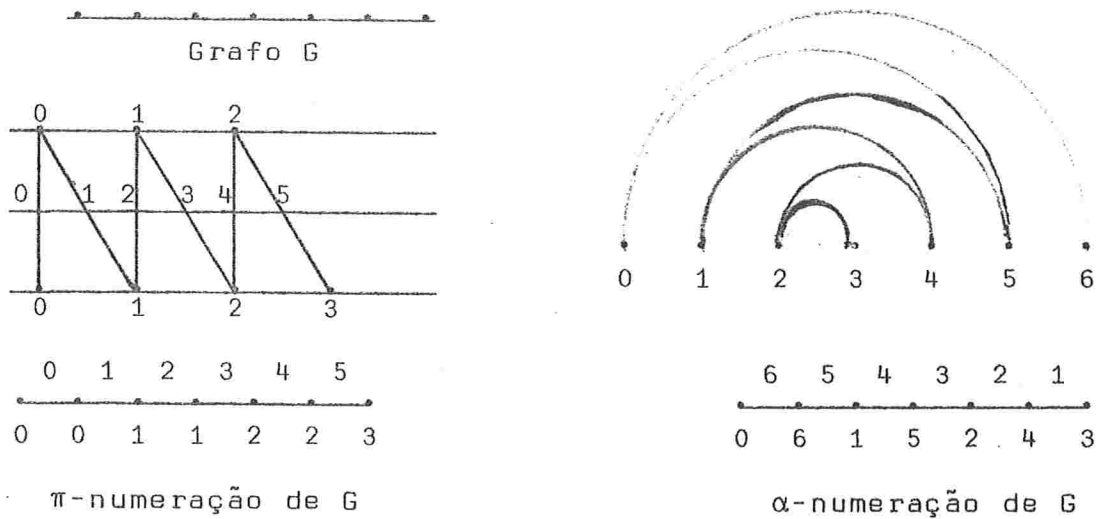
$$f_{EG}((u,v)) = |EG| - f_{\pi VG_{II}}(v) - f_{\pi VG_I}(u) = |EG| - |EG| + y = y. \quad \square$$

É fácil observar, pelo Lema 3.3.1.5 e pela simetria das definições de π -numeração e α -numeração apresentadas no teorema acima, que, numa qualquer α -numeração $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG})$,

$$\min(\text{Im}(f_{\pi VG_I})) = \min(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) = 0.$$

O exemplo seguinte ilustra a correspondência do teoram anterior.

EXEMPLO 3.3.1.7



O resultado da proposição seguinte será útil no próximo Capítulo, para árvores.

PROPOSIÇÃO 3.3.1.8 - Seja G um grafo bipartido com partição de seus vértices em VG_I e VG_{II} e com $|VG| = |EG| + 1$. Se $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG})$ é uma π -numeração de G então $\max(\text{Im}(f_{\pi VG_I})) = |VG_I| - 1$ e $\max(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) = |VG_{II}| - 1$.

PROVA - Temos que

$$\max(\text{Im}(f_{\pi VG_I})) \geq |VG_I| - 1 \text{ e } \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) \geq |VG_{II}| - 1.$$

Para mostrar que nas relações acima valem as igualdades basta observar que $|EG| = |VG| - 1$ implica

$$\max(\text{Im}(f_{\pi VG_I})) + \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{II}})) = |VG_I| + |VG_{II}| - 2. \quad \square$$

A π -numeração é usada em muitos teoremas do próximo Capítulo; a π -representação os torna mais visíveis.

3.3.2 - PROPRIEDADE DA α -NUMERAÇÃO

A proposição seguinte encontra-se em [K2]; diz sobre conexidade das arestas numeradas 1, 2, 3 e das arestas numeradas $|EG|$, $|EG|-1$, $|EG|-2$, na α -numeração de um grafo G.

PROPOSIÇÃO 3.3.2.1 - Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma α -numeração para um grafo G. Sejam as arestas $e_1, e_2, e_3, e_{|EG|}, e_{|EG|-1}, e_{|EG|-2}$ de G tais que $f_{EG}(e_i) = i, i = 1, 2, 3, |EG|, |EG|-1, |EG|-2$. Então pelo menos uma das afirmações $a_1)$ e $a_2)$ e pelo menos uma das afirmações $b_1)$ e $b_2)$ são verdadeiras.

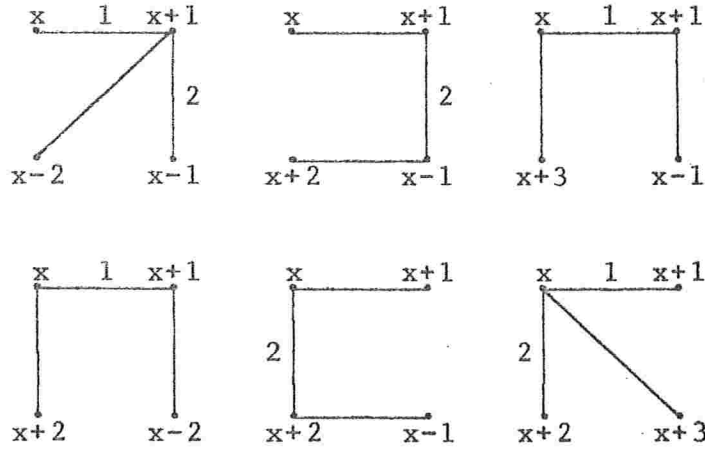
$a_1)$ e_1 é adjacente a e_2 e e_3 .

$a_2)$ e_2 é adjacente a e_1 e e_3 .

$b_1)$ $e_{|EG|}$ é adjacente a $e_{|EG|-1}$ e $e_{|EG|-2}$.

$b_2)$ $e_{|EG|-1}$ é adjacente a $e_{|EG|}$ e $e_{|EG|-2}$.

PROVA - Seja x o valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) . Por um lado, a aresta numerada 1 tem pontas numerados x e $x+1$, uma aresta numerada 2 tem pontas numerados ou $x-1$ e $x+1$ ou x e $x+2$, uma aresta numerada 3 tem pontas numeradas ou $x-2$ e $x+1$ ou $x-1$ e $x+2$ ou x e $x+3$. E então temos as únicas possibilidades.



Por outro lado, uma aresta numerada $|EG|$ tem pontas numeradas $|EG|$ e 0, uma aresta numerada $|EG| - 1$ tem pontas numeradas ou $|EG|$ e 1 ou $|EG| - 1$ e 0, uma aresta numerada $|EG| - 2$ tem pontas numeradas ou $|EG|$ e 2 ou $|EG| - 1$ e 1 ou $|EG| - 2$ e 0.

Nos dois casos o resultado se verifica. \square

3.3.3 - OPERAÇÕES QUE CONSERVAM α -NUMERAÇÃO

TEOREMA 3.3.3.1 - Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma α -numeração para um grafo bipartido G com partição de seus vértices, induzida por (f_{VG}, f_{EG}) , em VG_I e VG_{II} . Então (f'_{VG}, f'_{EG}) , definida por

$$f'_{VG}(v) = \begin{cases} \max_{u \in VG_I} f_{VG}(u) - f_{VG}(v) & \text{se } v \in VG_I \\ \max_{u \in VG_{II}} f_{VG}(u) + \max_{u \in VG_I} f_{VG}(u) + 1 - f_{VG}(v) & \text{se } v \in VG_{II} \end{cases}$$

também uma α -numeração para G.

ROVA - Basta verificar as propriedades seguintes.

- i) f'_{VG} é injetora.
- ii) f'_{EG} é injetora.
- iii) $0 \leq f'_{VG}(v) \leq \max(\text{Im}(f_{VG}))$, para todo $v \in VG$.
- iv) $1 \leq f'_{EG}(e) \leq |EG|$, para toda $e \in EG$.
- v) x , valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) , é também valor médio de (f'_{VG}, f'_{EG}) .

i) Pelo Lema 3.3.1.5 sabemos que

$$\min_{v \in VG_I} f_{VG}(v) = 0 \text{ e } \min_{v \in VG_{II}} f_{VG}(v) = \max_{v \in VG_I} f_{VG}(v) + 1$$

Então temos

$$\begin{aligned} \max_{v \in VG_I} f'_{VG}(v) &= \max_{v \in VG_I} f_{VG}(v) < \min_{v \in VG_{II}} f_{VG}(v) = \max_{v \in VG_{II}} f_{VG}(v) + \\ &+ \max_{v \in VG_I} f_{VG}(v) + 1 - \max_{v \in VG_{II}} f_{VG}(v) = \min_{v \in VG_{II}} f'_{VG}(v). \end{aligned}$$

Então, por raciocínio análogo ao feito na parte i) da prova do Teorema 3.2.1, f'_{VG} é injetora.

ii) Sejam $(u, v), (u', v') \in EG$ distintas, $u, u' \in VG_I, v, v' \in VG_{II}$

$$\text{Se } f'_{VG}(u, v) = f'_{EG}(u', v') \text{ então } \max_{z \in VG_{II}} f_{VG}(z) + \max_{z \in VG_I} f_{VG}(z) +$$

$$+ 1 - f_{VG}(v) - \max_{z \in VG_I} f_{VG}(z) + f_{VG}(u) = \max_{z \in VG_{II}} f_{VG}(z) + \max_{z \in VG_I} f_{VG}(z) +$$

$$+ 1 - f_{VG}(v') - \max_{z \in VG_I} f_{VG}(z) + f_{VG}(u'). \text{ Então}$$

$$f_{VG}(v) - f_{VG}(u) = f_{VG}(v') - f_{VG}(u').$$

Então f_{VG} não é injetora.

iii) Pelo Lema 3.3.1.5 sabemos que

$$\min_{v \in VG_{II}} f_{VG}(v) = \max_{v \in VG_I} f_{VG}(v) + 1.$$

Então o resultado é facilmente verificável.

iv) Pelo Lema 3.3.1.5 sabemos que $\max_{v \in VG_{II}} f_{VG}(v) = |EG|$ e

$$\min_{v \in VG_{II}} f_{VG}(v) = \max_{v \in VG_I} f_{VG}(v) + 1. \text{ Então temos}$$

$$\min(\text{Im}(f'_{EG})) = \min_{v \in VG_{II}} f'_{VG}(v) - \max_{v \in VG_I} f'_{VG}(v) = 1 \text{ e}$$

$$\max(\text{Im}(f'_{EG})) = \max_{v \in VG_{II}} f'_{VG}(v) - \min_{v \in VG_I} f'_{VG}(v) = |EG|.$$

v) Pelo Lema 3.3.1.5 sabemos que x , valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) , é igual a $\max_{v \in VG_I} f_{VG}(v)$ e também que $\min_{v \in VG_I} f_{VG}(v) = 0$.

Pela parte i) deste teorema sabemos que $\max_{v \in VG_I} f'_{VG}(v) <$

$$< \min_{v \in VG_{II}} f'_{VG}(v); \text{ como também } \max_{v \in VG_I} f'_{VG}(v) = \max_{v \in VG_I} f_{VG}(v),$$

x é também valor médio de (f'_{VG}, f'_{EG}) . \square

É fácil observar que a relação existente entre as α -numeração (f_{VG}, f_{EG}) e (f'_{VG}, f'_{EG}) , no Teorema 3.3.3.1, para um grafo G corresponde à relação entre duas π -representações para um mesmo grafo, uma obtida da outra por mudança de sentido de \vec{R}_1 e \vec{R}_2 (Exemplo 3.3.1.3 b) e d)). A permutação em

tre \vec{R}_1 e \vec{R}_2 (Exemplo 3.3.1.3 b) e c)) corresponde o Teorema 3.2.1.

Deixamos ao leitor a formalização dos teoremas 3.3.3.1 e 3.2.1 em termos de π -numeração; isto será útil no próximo teorema.

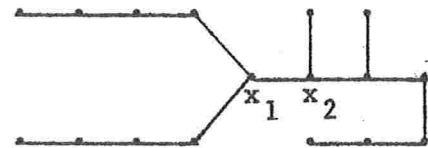
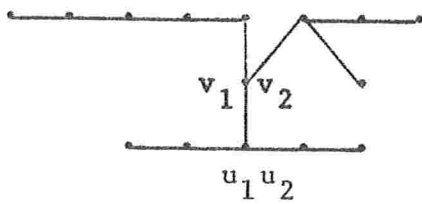
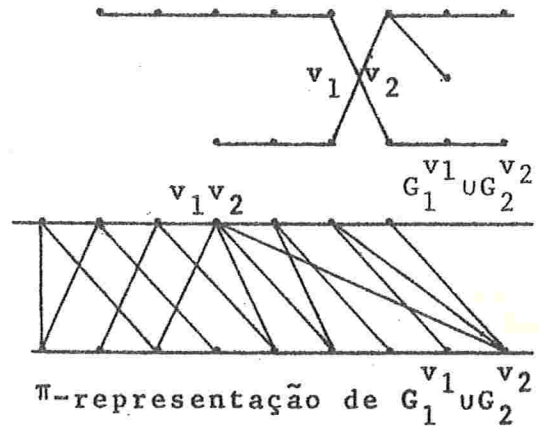
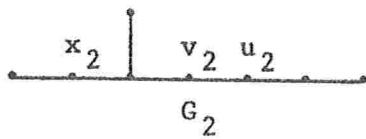
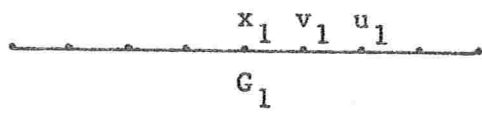
Chamamos *conjunto profundidade* de um vértice v de um grafo G ao conjunto $D_G(v) = \{f\pi VG_I(v) \text{ tais que } (f\pi VG_I, f\pi VG_{II}; f\pi_{EG}) \text{ é } \pi\text{-numeração de } G\}$.

Seja $n \in D_G(v)$ e $(f\pi VG_I, f\pi VG_{II}; f\pi_{EG})$ tal que $f\pi VG_{II}(v) = n$ (veja Teorema 3.2.1 em termos de π -numeração). Pelo teorema 3.3.3.1 em termos de π -numeração, existe π -numeração para G tal que v é numerado $\max(\text{Im}(f\pi VG_{II})) - n$; isto é $\max(\text{Im}(f\pi VG_{II})) - n$ também pertence a $D_G(v)$.

Sejam $(f\pi VG_I, f\pi VG_{II}; f\pi_{EG})$ e $v \in VG_i$ ($i=I, II$). Chamamos *profundidade positiva* (respectivamente *negativa*) de v relativa a esta π -numeração ao número $f\pi VG_i(v)$ (respectivamente, $\max(\text{Im}(f\pi VG_i)) - f\pi VG_i(v)$).

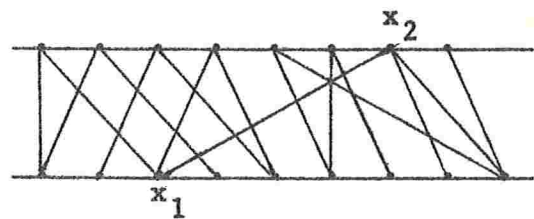
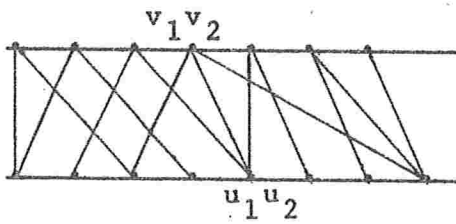
Sejam G_1, G_2 grafos disjuntos, $x_1, u_1, v_1 \in VG_1$, $x_2, u_2, v_2 \in VG_2$, $(u_1, v_1) \in EG_1$, $(u_2, v_2) \in EG_2$. Denotamos por $G_1^{u_1, v_1} \cup G_2^{u_2, v_2}$ (respectivamente, $G_1^{(u_1, v_1)} \cup G_2^{(u_2, v_2)}$) a união de G_1, G_2 por i dentificação de vértices segundo (v_1, v_2) (respectivamente, $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$). Denotamos por $G_1 \cup G_2 \cup (x_1, x_2)$ a união de G_1, G_2 e aresta (x_1, x_2) . Estes grafos assim definidos são ilustrados no próximo exemplo e utilizados no próximo teorema.

EXEMPLO 3.3.3.2



$G_1^{(u_1, v_1)} \cup G_2^{(u_2, v_2)}$

$G_1 \cup G_2 \cup (x_1, x_2)$



π -representação de $G_1^{(u_1, v_1)} \cup G_2^{(u_2, v_2)}$

π -representação de $G_1 \cup G_2 \cup (x_1, x_2)$

TEOREMA 3.3.3.3 - Sejam G_1, G_2 grafos disjuntos,

$$x_1, u_1, v_1 \in V G_1, x_2, u_2, v_2 \in V G_2 \quad (u_1, v_1) \in E G_1,$$

$(u_2, v_2) \in E G_2$ e $G_1^{v_1} \cup G_2^{v_2}, G_1^{(u_1, v_1)} \cup G_2^{(u_2, v_2)}, G_1 \cup G_2 \cup (x_1, x_2)$ como definidos anteriormente.

- a) Se $0 \in DG_1(v_1)$ e $0 \in DG_2(v_2)$ então $G_1^{v_1} \cup G_2^{v_2}$ é π -numerável.
- b) Se existem π -numerações para G_1, G_2 tais que $(v_1, u_1), (v_2, u_2)$ são numeradas zero então $G_1^{(u_1, v_1)} \cup G_2^{(u_2, v_2)}$ é π -numerável.
- c) Se $DG_1(x_1) \cap DG_2(x_2) \neq \emptyset$ então $G_1 \cup G_2 \cup (x_1, x_2)$ é π -numerável.

PROVA - Os teoremas 3.2.1, 3.3.3.1 e a π -representação (veja Exemplo 3.3.3.2) tornam evidente o teorema. Suponhamos π -numerações $(f_{\pi VG_{1I}}^1, f_{\pi VG_{1II}}^1; f_{\pi EG_1}^1), (f_{\pi VG_{2I}}^2, f_{\pi VG_{2II}}^2; f_{\pi EG_2}^2)$ com propriedades; em a), $f_{\pi VG_{1I}}^1(v_1) = \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{1I}}^1))$ e $f_{\pi VG_{2I}}^2(v_2) = 0$; em b), $f_{\pi EG_1}^1((v_1, u_1)) = \max(\text{Im}(f_{\pi EG_1}^1))$ e $f_{\pi EG_2}^2((v_2, u_2)) = 0$; em c), $\max(\text{Im}(f_{\pi VG_{1II}}^1)) - f_{\pi VG_{1II}}^1(x_1) = f_{\pi VG_{2I}}^2(x_2)$. Vamos, baseados na visão geométrica, construir π -numerações $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG})$ para G ; em a), $G = G_1^{v_1} \cup G_2^{v_2}$; em b), $G = G_1^{(u_1, v_1)} \cup G_2^{(u_2, v_2)}$; em c), $G = G_1 \cup G_2 \cup (x_1, x_2)$.

a) Façamos

$$f_{\pi VG_I}(v) = f_{\pi VG_{1I}}^1(v) \text{ se } v \in VG_{1I}$$

$$f_{\pi VG_{II}}(v) = f_{\pi VG_{1II}}^1(v) \text{ se } v \in VG_{1II}$$

$$f_{\pi VG_I}(v) = \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{1I}}^1)) + f_{\pi VG_{2I}}^2(v) \text{ se } v \in VG_{2I}$$

$$f_{\pi VG_{II}}(v) = \max(\text{Im}(f_{\pi VG_{1II}}^1)) + f_{\pi VG_{2II}}^2(v) + 1 \text{ se } v \in VG_{2II}.$$

É evidente que $f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}$ e $f_{\pi EG}$ são injetoras em N . Além disso,

$$\begin{aligned} & \max(\text{Im}(f_{\pi} \text{VG}_I)) + \max(\text{Im}(f_{\pi} \text{VG}_{II})) = \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1I})) + \\ & + \max(\text{Im}(f_{\pi}^2 \text{VG}_{2I})) + \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1II})) + \max(\text{Im}(f_{\pi}^2 \text{VG}_{2II})) + 1 = \\ & = |EG_1| - 1 + |EG_2| - 1 + 1 = |EG| - 1. \end{aligned}$$

b) Façamos

$$f_{\pi} \text{VG}_I(v) = f_{\pi}^1 \text{VG}_{1I}(v) \text{ se } v \in \text{VG}_{1I}$$

$$f_{\pi} \text{VG}_{II}(v) = f_{\pi}^1 \text{VG}_{1II}(v) \text{ se } v \in \text{VG}_{1II}$$

$$f_{\pi} \text{VG}_I(v) = \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1I})) + f_{\pi}^2 \text{VG}_{2I}(v) \text{ se } v \in \text{VG}_{2I}$$

$$f_{\pi} \text{VG}_{II}(v) = \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1II})) + f_{\pi}^2 \text{VG}_{2II}(v) \text{ se } v \in \text{VG}_{2II}.$$

É evidente que $f_{\pi} \text{VG}_I$, $f_{\pi} \text{VG}_{II}$ e $f_{\pi} \text{EG}$ são injetoras em N . Além disso

$$\begin{aligned} & \max(\text{Im}(f_{\pi} \text{VG}_I)) + \max(\text{Im}(f_{\pi} \text{VG}_{II})) = \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1I})) + \\ & + \max(\text{Im}(f_{\pi}^2 \text{VG}_{2I})) + \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1II})) + \max(\text{Im}(f_{\pi}^2 \text{VG}_{2II})) = \\ & = |EG_1| - 1 + |EG_2| - 1 = |EG| - 1. \end{aligned}$$

c) Façamos

$$f_{\pi} \text{VG}_I(v) = f_{\pi}^1 \text{VG}_{1I}(v) \text{ se } v \in \text{VG}_{1I}$$

$$f_{\pi} \text{VG}_{II}(v) = f_{\pi}^1 \text{VG}_{1II}(v) \text{ se } v \in \text{VG}_{1II}$$

$$f_{\pi} \text{VG}_I(v) = \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1I})) + f_{\pi}^2 \text{VG}_{2I}(v) + 1 \text{ se } v \in \text{VG}_{2I}$$

$$f_{\pi} \text{VG}_{II}(v) = \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1II})) + f_{\pi}^2 \text{VG}_{2II}(v) + 1 \text{ se } v \in \text{VG}_{2II}.$$

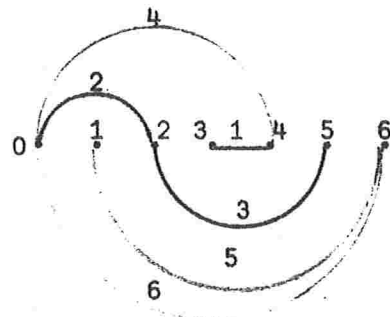
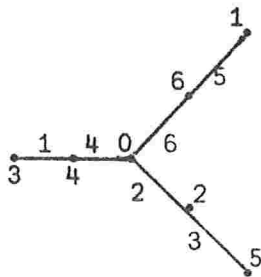
$$\begin{aligned} \text{Então } f_{\pi} \text{EG}((x_1, x_2)) &= f_{\pi} \text{VG}_{II}(x_1) + f_{\pi} \text{VG}_I(x_2) = \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1II})) + \\ &- f_{\pi}^2 \text{VG}_{2I}(x_2) + \max(\text{Im}(f_{\pi}^1 \text{VG}_{1I})) + f_{\pi}^2 \text{VG}_{2I}(x_2) + 1 = |EG_1| - 1 + 1 = |EG_1| \end{aligned}$$

e fica evidente que $f_{\pi_{VG_I}}, f_{\pi_{VG_{II}}}$ e $f_{\pi_{EG}}$ são injetoras em N .
 Além disso $\max(\text{Im}(f_{\pi_{VG_I}})) + \max(\text{Im}(f_{\pi_{VG_{II}}})) = \max(\text{Im}(f_{\pi_{VG_{I_I}}})) +$
 $+ \max(\text{Im}(f_{\pi_{VG_{II_I}}})) + 1 + \max(\text{Im}(f_{\pi_{VG_{I_{II}}}})) + \max(\text{Im}(f_{\pi_{VG_{II_{II}}}})) + 1 =$
 $= |EG_1| - 1 + |EG_2| - 1 + 2 = |EG| - 1. \quad \square$

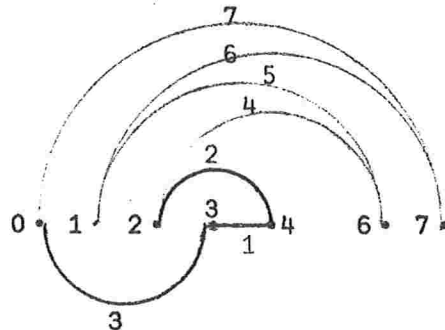
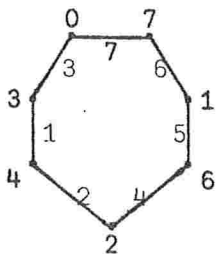
3.4 - SOBRE β -NUMERAÇÃO

3.4.1 - EXEMPLOS E SUAS REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS COM VÉRTICES ORDENADOS SOBRE A RETA

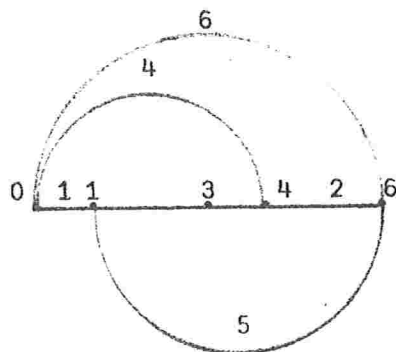
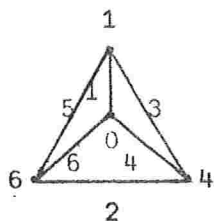
EXEMPLO 3.4.1.1



EXEMPLO 3.4.1.1



EXEMPLO 3.4.1.3



Já sabemos que os grafos dos Exemplos 3.4.1.2 e 3.4.1.3 são não α -numeráveis, pois não são bipartidos. O grafo do Exemplo 3.4.1.1 também é não α -numerável; veremos a prova disto em 4.2.2.

3.4.2 - PROPRIEDADES DA β -NUMERAÇÃO

PROPOSIÇÃO 3.4.2.1 - A classe de grafos β -numeráveis contém propriamente a classe de grafos α -numeráveis.

A observação que segue o Exemplo 3.4.1.3 prova a proposição 3.4.2.1.

A proposição seguinte encontra-se em [K2]; diz sobre conexidade das arestas numeradas $|EG|, |EG|-1, |EG|-2$, na β -numeração de um grafo; sua prova é análoga à feita para as afirmações $b_1)$ e $b_2)$ da Proposição 3.3.2.1.

PROPOSIÇÃO 3.4.2.2 - Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma β -numeração para um grafo G . Sejam as arestas

$e_{|EG|}$, $e_{|EG|-1}$, $e_{|EG|-2}$, de G , tais que $f_{EG}(e_i) = i$,
 $i = |EG|, |EG|-1, |EG|-2$. Então pelo menos uma das afirmações
 $a_1)$ e $a_2)$ é verdadeira.

$a_1)$ $e_{|EG|}$ é adjacente a $e_{|EG|-1}$ e $e_{|EG|-2}$.

$a_2)$ $e_{|EG|-1}$ é adjacente a $e_{|EG|}$ e $e_{|EG|-2}$.

A condição do teorema seguinte foi enunciada por Golomb [G1] para β -numeração. Observamos que essa condição é válida para σ -numeração; em 3.5 encontra-se a prova do teorema 3.5.3.3.

TEOREMA 3.4.2.3 - Se um grafo G é β -numerável então tem uma co-fronteira de cardinalidade

$$\lfloor (|EG|+1)/2 \rfloor.$$

3.4.3 - OPERAÇÃO QUE CONSERVA β -NUMERAÇÃO

LEMA 3.4.3.1 - Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma β -numeração para um grafo G e seja H um subgrafo de G , com $|VH|=|EH|-1$, tais que a imagem da restrição de f_{VG} ao domínio VH é

$$N_{|VH|+n}^{-N_n}, \text{ para algum } n \geq -1.$$

Então a imagem da restrição de f_{EG} ao domínio EH é $N_{|EH|} - \{0\}$.

PROVA - Se $e \in EH$ então $1 \leq f_{EG}(e) \leq |VH|+n - (n+1) = |VH| - 1 = |EH|$. Como f_{EG} é injetora a imagem da restrição de f_{EG} ao domínio EH é $N_{|EH|} - \{0\}$. \square

Sejam $G, (f_{VG}, f_{EG})$ e H enunciados no Lema 3.4.3.1.

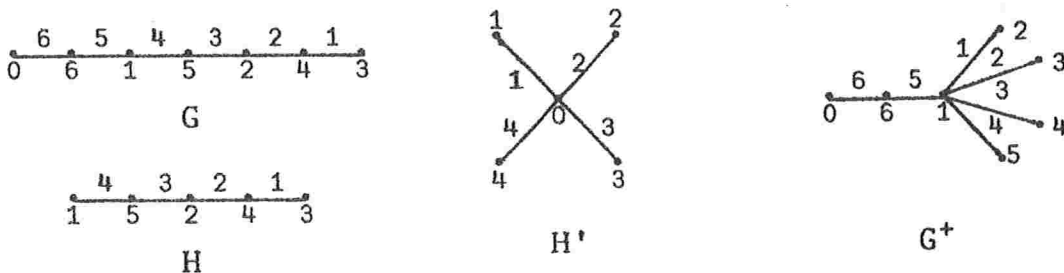
Seja $(f'_{VH'}, f'_{EH'})$ uma β -numeração para um grafo H' com

$$|VH'| = |VH| \quad \text{e} \quad |EH'| = |EH|.$$

Denotamos por G^+ a união de $G-EH, H'$ por identificação de vértices segundo $(v_i, u_i), i=0, 1, \dots, |VH|-1, v_i \in VH'$ e $u_i \in VH$ tais que $f_{VH'}(v_i) = i$ e $f_{VG}(u_i) = n+i$, onde $n = \min_{z \in EH} f_{VG}(z)$. O grafo

G^+ é ilustrado no próximo exemplo e utilizado no próximo teorema e em seu colorário.

EXEMPLO 3.4.3.2



TEOREMA 3.4.3.3 - G^+ , como definido acima, é um grafo β -numerável.

PROVA - Definimos $f'_{VG^+}(v) = f_{VG}(v)$, para todo $v \in VG^+ = VG$. É simples verificar que (f'_{VG^+}, f'_{EG^+}) é uma β -numeração para G^+ e que, em consequência, G^+ é um grafo β -numerável. \square

O Teorema 3.4.3.3 é mais geral que o encontrado em [SZ] para árvores.

COROLÁRIO 3.4.3.4 - Sejam grafos G, H, H' tais que H é subgrafo de G , $|VH| = |EH| + 1 = |VH'| = |EH'| + 1$ e H' é β -numerável. Se existe (f_{VG}, f_{EG}) , β -numerável de G ,

tal que a imagem da restrição de f_{VG} do domínio VH é

$$N_{|VH|+n} - N_n, \text{ para algum } n \geq 1,$$

então G^+ , como definido acima, é um grafo β -numerável.

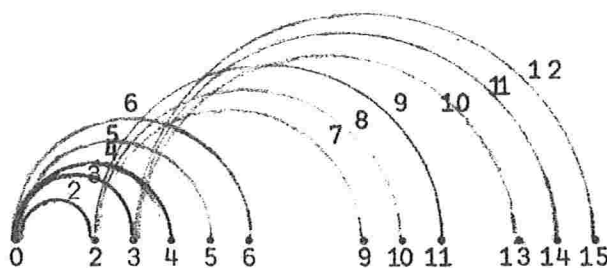
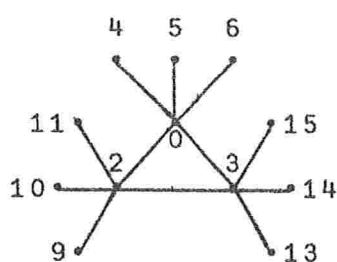
O análogo do Teorema 3.4.3.3, que se obtém substituindo β -numeração por α -numeração, não é válido em geral. A prova do Lema 4.2.1.2 apresenta um caso em que a adaptação é possível.

3.5 - SOBRE σ -NUMERAÇÃO

3.5.1 - EXEMPLO E SUA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA COM

VÉRTICES ORDENADOS SOBRE A RETA

EXEMPLO 3.5.1.1



3.5.2 - RELAÇÃO ENTRE GRAFOS β -NUMERÁVEIS E σ -NUMERÁVEIS

O teorema seguinte encontra-se em [K1]; é ilustrado pelo exemplo 3.5.1.1.

TEOREMA 3.5.2.1 - Seja G um grafo e seja G'' a sua base. Se G' é um subgrafo de G que contém G'' e que é β -numerável então G é σ -numerável.

PROVA - Sejam $(f'_{VG'}, f'_{EG'})$ uma β -numeração para G' . Se $e \in EG - EG'$ então e tem uma das pontas em G' e a outra não em G' . Se $v \in VG - VG'$ então v é terminal em G e existe $(u, v) \in EG - EG'$ com ponta u em VG' .

Seja θ uma ordem total sobre os elementos de $EG - EG'$ tal que se (u, v) e (u', v') estão em $EG - EG'$ com u e u' em VG' e se $f'_{VG'}(u) < f'_{VG'}(u')$ então $(u, v) \theta (u', v')$. Para toda $e \in EG'$ façamos $f_{EG}(e) = f'_{EG'}(e)$. Para todo $v \in VG - VG'$, façamos $f_{VG}(v) = f'_{VG'}(v)$. Para toda $e \in EG - EG'$, façamos $f_{EG}(e) = |EG'| + i$, onde $i \in \mathbb{N}_{|EG - EG'| - \{0\}}$ é a ordem de e relativa a θ (ordem de e menor que ordem de e' se $e \theta e'$). Então, para todo $v \in VG - VG'$, façamos $f_{VG}(v) = f_{EG}((u, v)) + f_{VG}(u)$, onde (u, v) é a única aresta incidente a v .

Observemos que a construção de f_{VG} implica em $f_{EG}((u, v)) = f_{VG}(v) - f_{VG}(u)$ para todo $(u, v) \in EG - EG'$.

Se $G = G'$ o teorema é evidente. Suponhamos, então, $G \neq G'$,

Basta verificar as propriedades seguintes.

- i) f_{EG} é injetora; $1 \leq f_{EG}(e) \leq |EG|$, para toda $e \in EG$.
- ii) f_{VG} é injetora; $0 \leq f_{VG}(v) \leq 2|EG|$, para todo $v \in VG$.

i) $\max_{e \in EG'} f_{EG}(e) = |EG'| < |EG'| + 1 = \min_{e \in EG - EG'} f_{EG}(e)$. E é evidente que f_{EG} é injetora.

$$\min(\text{Im}(f_{EG})) = \min_{e \in EG'} f_{EG}(e) = 1.$$

$$\max(\text{Im}(f_{EG})) = \max_{e \in EG - EG'} f_{EG}(e) = |EG'| + |EG| - |EG'| = |EG|.$$

ii) Como $(f'_{VG}, f'_{EG'})$ é β -numeração, existem, em G' , vértices numerados 0 e $|EG'|$.

$\max_{v \in VG'} f_{VG}(v) = |EG'| < |EG'| + 1 \leq \min_{v \in VG - VG'} f_{VG}(v)$. E é evidente que f_{VG} é injetora.

$$\min(\text{Im}(f_{VG})) = \min_{v \in VG'} f_{VG}(v) = 0$$

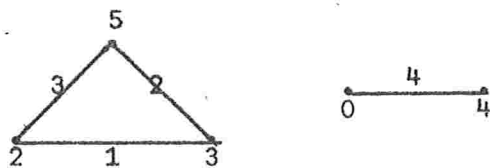
$$\begin{aligned} \max(\text{Im}(f_{VG})) &= \max_{v \in VG - VG'} f_{VG}(v) = \max_{v \in VG'} f_{VG}(v) + \\ &+ \max_{e \in EG - EG'} f_{EG}(e) = |EG'| + |EG| < 2|EG|. \quad \square \end{aligned}$$

3.5.3 - PROPRIEDADES DA σ -NUMERAÇÃO

PROPOSIÇÃO 3.5.3.1 - A classe de grafos σ -numeração contém propriamente a classe de grafos β -numeração.

O exemplo seguinte apresenta um grafo que é σ -numeração e não é β -numeração, o que prova a proposição.

EXEMPLO 3.5.3.2



O teorema seguinte enuncia a condição de Golomb [G1] para σ -numeração (veja Teorema 3.4.2.3 e observação que o antecede).

TEOREMA 3.5.3.3 - Se um grafo G é σ -numerável então tem uma co-fronteira de cardinalidade

$$\lfloor (|EG|+1)/2 \rfloor.$$

PROVA - Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma β -numeração para G . Vamos mostrar que a partição dos vértices de G em VG_I, VG_{II} , tais que $v \in VG_I$ se $f_{VG}(v)$ é par e $v \in VG_{II}$ se $f_{VG}(v)$ é ímpar, induz uma co-fronteira de G de cardinalidade $\lfloor (|EG|+1)/2 \rfloor$.

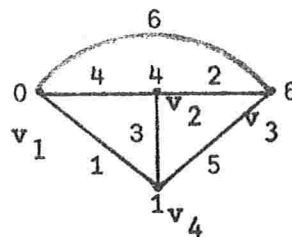
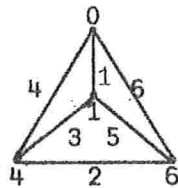
Toda $(u,v) \in EG$, com $u \in VG_I$ e $v \in VG_{II}$ ou $u \in VG_{II}$ e $v \in VG_I$, é numerada ímpar por f_{EG} e toda $(u,v) \in EG$, com $u, v \in VG_I$ ou $u, v \in VG_{II}$, é numerada par por f_{EG} . Então e como o número de arestas $(u,v) \in EG$ tais que $f_{EG}((u,v))$ é ímpar é $\lfloor (|EG|+1)/2 \rfloor$ está provado o teorema. \square

O grafo do Exemplo 3.4.1.3 é σ -numerável; então, pelo teorema acima satisfaz a condição de Golomb. Este fato é ilustrado no exemplo seguinte.

EXEMPLO 3.5.3.4

$$VG_I = \{v_1, v_2, v_3\}$$

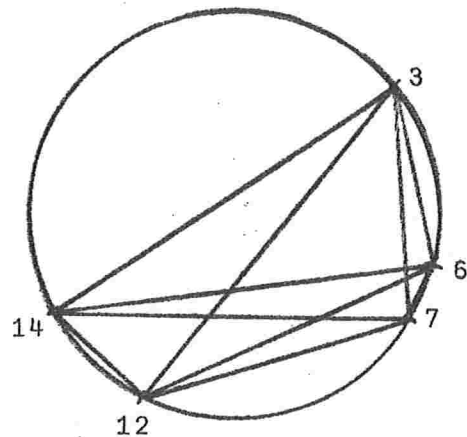
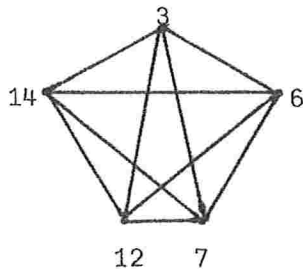
$$VG_{II} = \{v_4\}$$



3.6 - SOBRE σ -NUMERAÇÃO

3.6.1 - EXEMPLO E SUA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA COM VÉRTICES ORDENADOS SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA

EXEMPLO 3.6.1.1



É uma consequência da condição de Golomb (Teorema 3.5.3.3) que o grafo do Exemplo 3.6.1.1 não é σ -numerável.

3.6.2 - PROPRIEDADE DA ρ -NUMERAÇÃO

PROPOSIÇÃO 3.6.2.1 - A classe de grafos ρ -numeráveis contém propriamente a classe de grafos σ -numeráveis.

A observação que segue o Ex. 3.6.1.1 prova a proposição.

3.6.3 - O TEOREMA DA CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA

Sejam G um grafo e F uma família de subgrafos de G .

F é uma *decomposição de G* se F é uma partição de G quanto às suas arestas, isto é cada aresta de G pertence a um e somente um dos subgrafos de G em F e F não contém grafo com vértice de grau zero.

Seja G um grafo e sejam G', G'' subgrafos de G . Dada uma ordenação $v_0, v_1, \dots, v_{|VG|-1}$ dos vértices de G , o *isomorfismo cíclico* $h_m: VG' \rightarrow VG''$, $m \in \mathbb{N}_{|VG|}$ é o isomorfismo entre G', G'' tal que $h_m(v_i) = v_{i+m(\text{mod } |VG|)}$, para todo $v_i \in VG'$.

Seja G um grafo completo. Uma *decomposição* de G em F é chamada *cíclica* se, para alguma ordenação $v_0, v_1, \dots, v_{|VG|-1}$ dos vértices de G , para todo grafo $G' \in F$ e todo $m \in \mathbb{N}_{|VG|} - \{0\}$, o grafo G'' , isomorfo a G' pelo isomorfismo cíclico h_m , também pertence a F e $G' \neq G''$.

Nosso principal objetivo aqui é o teorema de Rosa [RO] (Teorema 3.6.3.4) que caracteriza a ρ -numeração em termos de decomposição cíclica de um grafo completo.

A comparação do resultado de Rosa com o resultado que caracteriza conjuntos de diferenças em termos de blocos cíclicos como também as proposições aqui apresentadas, que enunciam propriedades da decomposição cíclica de um grafo completo (análogas a propriedades de blocos cíclicos), foram feitos por nós.

Embora a idéia para a prova do teorema de Rosa seja muito simples, apresentamos aqui uma prova algébrica de-

talhada. Os três lemas seguintes são úteis não somente para o teorema de Rosa como também para as proposições que o seguem.

A definição de composição cíclica é mais geral do que o necessário para o teorema de Rosa e proposições que o seguem; numa decomposição cíclica dois quaisquer dos subgrafos não são necessariamente isomorfos; esta generalização maior é útil para o último teorema desta secção (Teorema 3.6.3.12).

O próximo lema diz sobre a necessidade de $|VG|$ ser ímpar, para a decomposição cíclica de grafo completo G . Nesse e nos próximos lemas todo par de números (i, j) é não ordenado.

LEMA 3.6.3.1 - Se existe decomposição cíclica de um grafo completo G então $|VG|$ é ímpar.

PROVA - Se k é par e $j = i + |VG|/2 \pmod{|VG|}$ então $(i + |VG|/2, j + |VG|/2) = (i, j) \pmod{|VG|}$. \square

Seja um grafo completo com k vértices v_0, v_1, \dots, v_{k-1} (note que podem estar assim ordenados sobre a circunferência). O comprimento da aresta $(v_i, v_j), d_{ij}$, é o número $\min\{|i-j|, k-|i-j|\}$.

O lema 3.6.3.2 caracteriza comprimento de aresta em termos de isomorfismo cíclico; o lema 3.6.3.3 caracteriza decomposição cíclica de um grafo completo em F em termos dos comprimentos das arestas dos elementos de F . Veremos, na

prova do teorema de Rosa, que numeração das arestas na ρ -numeração de um grafo e comprimentos das arestas de um grafo são conceitos próximos. Nas proposições sobre decomposição cíclica de um grafo completo não é usado o conceito de ρ -numeração, somente o de comprimento de aresta.

LEMA 3.6.2.2 - Sejam G', G'' subgrafos de G , cujos vértices são $v_0, v_1, \dots, v_{|VG|-1}$, e sejam $(v_i, v_j) \in EG'$, $(v_{i'}, v_{j'}) \in EG''$. Então os comprimentos de arestas d_{ij} , $d_{i'j'}$, são iguais se e somente se $(i, j) = (i+m, j+m) \pmod{|VG|} = (i', j')$, para algum $m \in \mathbb{N}_{|VG|}$.

PROVA

a) Sejam $(i, j) = (i+m, j+m) \pmod{|VG|} = (i', j')$, para algum $m \in \mathbb{N}_{|VG|}$ e $i < j$.

Se $j+m, i+m < |VG|$ ou $j+m, i+m \geq |VG|$ então $j' > i'$. Se $j+m \geq |VG|$ e $i+m < |VG|$ então $j' < i'$.

Também

$$|j'-i'| = \begin{cases} |j-i| & \text{se } j' > i' \\ |VG| - |j-i| & \text{se } j' < i'. \end{cases}$$

Em qualquer caso

$$\{|j'-i'|, |VG| - |j'-i'|\} = \{|j-i|, |VG| - |j-i|\} \text{ e } d_{i'j'} = d_{ij}.$$

b) Sejam $d_{ij} = d_{i'j'}$, $i < j$, $i' < j'$, $i \leq i'$.

Se $d_{ij} = j-i$ e $d_{i'j'} = j'-i'$ ou se $d_{ij} = |VG| - (j-i)$ e $d_{i'j'} = |VG| - (j'-i')$ façamos $m = i'-i$. Se $d_{ij} = j-i$ e

$d_{i',j'} = |VG| - (j' - i')$ ou se $d_{ij} = |VG| - (j - i)$ e $d_{i',j'} = j' - i'$ façamos $m = j' - i$.

Em qualquer caso

$$(i, j) = (i+m, j+m) \pmod{|VG|} = (i', j'). \quad \square$$

LEMA 3.6.3.3

- a) Se existe uma decomposição cíclica de um grafo completo G , com vértices $v_0, v_1, \dots, v_{|VG|-1}$, em F então, para todo grafo G' em F , $|EG'| \leq (|VG|-1)/2$, ou seja se $|VG| = 2n+1$ então $|EG'| \leq n$.
- b) Sejam G grafo completo com $2n+1$ vértices e G' subgrafo de G com n arestas. Existe decomposição cíclica de G numa família F que contém G' se e somente se, para alguma ordenação v_0, v_1, \dots, v_{2n} dos vértices de G , quaisquer que sejam as arestas $(v_i, v_j), (v_{i'}, v_{j'}) \in EG'$ distintas, seus comprimentos d_{ij} e $d_{i',j'}$ são também distintos.

PROVA

- a) Pelo Lema 3.6.3.1, $|VG|$ é ímpar. Pela definição de comprimento de aresta, $d_{ij} \leq (|VG|-1)/2$ para todos i, j , $0 \leq i < j \leq 2n$. Então, pelo Lema 3.6.3.2, o resultado se torna evidente.
- b) Que a condição é necessária vemos pelo Lema 3.6.3.2. Vamos mostrar, então, que a condição é também suficiente.

Consideremos F a família de subgrafos de G tal que $G'' \in F$ se e somente se existe isomorfismo cíclico entre G', G'' . Vamos mostrar que F é uma decomposição de G mostrando que

$b_1)$ para todo $(v_i, v_j) \in EG$, $(v_i, v_j) \in EG''$ para algum G'' em F ;

$b_2)$ se existe $(v_i, v_j) \in EG$ tal que $(v_i, v_j) \in EG''$ e $(v_i, v_j) \in EG'''$, $G'', G''' \in F$, então $G'' = G'''$.

$b_1)$ Por hipótese, existe aresta em G' de comprimento igual ao de (v_i, v_j) . Então, pelo Lema 3.6.3.2, o resultado se torna evidente.

$b_2)$ Sejam $(v_{i'}, v_{j'}) \in EG'$ e $m \in \mathbb{N}_{2n}$ tais que

$$(i, j) = (i' + m, j' + m) \pmod{2n+1}.$$

Vamos mostrar que não existe $m' \in \mathbb{N}_{2n}$ ($m' \neq m$) tal que $(i, j) = (i' + m', j' + m') \pmod{2n+1}$. De fato, se tal m' existe então $i' + m = j' + m' \pmod{2n+1}$ e $j' + m = i' + m' \pmod{2n+1}$ e então $i' - j' = j' - i' \pmod{2n+1}$; como $2n+1$ é ímpar a última igualdade é impossível.

Agora, para todo $G'' \in F$, se existe isomorfismo cíclico entre G'', G''' (G''' subgrafo de G) então existe isomorfismo cíclico entre G', G''' . Concluimos, então, que F é decomposição cíclica de G . \square

TEOREMA 3.6.3.4 (de Rosa) - Sejam G um grafo completo com $2n+1$ vértices e G' um grafo com

arestas. Existe decomposição cíclica de G numa família de raios isomorfos a G' se e somente se G' é ρ -numerável.

ROVA.

a) A condição é necessária.

Sejam v_0, v_1, \dots, v_{2n} os vértices de G e, sem perda de generalidade, suponhamos G' um dos grafos da decomposição (subgrafo de G). Façamos $f_{VG'}(v_i) = i$, $v_i \in VG'$ (queremos obter numeração $(f_{VG'}, f_{EG'})$). É evidente que $f_{VG'}$ é injetora, que para todo $v \in VG'$, $0 \leq f_{VG'}(v) \leq 2n$ e que, para toda $e \in EG'$, $1 \leq f_{EG'}(e) \leq 2n$. Vamos agora mostrar que $f_{EG'}$ satisfaz (iv) da definição. Sendo d_{ij} o comprimento da aresta (v_i, v_j) temos

$$f_{EG'}((v_i, v_j)) = |i-j| = \begin{cases} d_{ij} & \text{se } |i-j| \leq n \\ 2n+1-d_{ij} & \text{se } |i-j| > n. \end{cases}$$

Sejam $(v_i, v_j), (v_{i'}, v_{j'}) \in EG'$ distintas. Se $|i-j|, |i'-j'| \leq n$ ou $|i-j|, |i'-j'| > n$, pelo Lema 3.6.3.3.b), $f_{EG'}((v_i, v_j)) \neq f_{EG'}((v_{i'}, v_{j'}))$. Se $|i-j| \leq n$ e $|i'-j'| > n$ e se $f_{EG'}((v_i, v_j)) = 2n+1-f_{EG'}((v_{i'}, v_{j'}))$, ou de forma equivalente $2n+1-d_{i',j'} = 2n+1-d_{ij}$ então $d_{i',j'} = d_{ij}$ (absurdo, pelo Lema 3.6.3.3.b)).

b) A condição é suficiente

Seja $(f_{VG'}, f_{EG'})$ uma ρ -numeração para G' . Então $f_{VG'}$ é injetora e, para todo $v \in VG'$, $0 \leq f_{VG'}(v) \leq 2n$. Considere-

mos G' como subgrafo completo de G (com $2n+1$ vértices), compatível com uma ordenação dos vértices de G em v_0, v_1, \dots, v_{2n} tal que $f_{VG'}(v_i) = i$, para todo $v_i \in VG'$.

Por raciocínio análogo ao feito em a) ($f_{EG'}$ satisfaz (iv) da definição), concluímos que duas quaisquer arestas de G' tem comprimentos distintos. Então, pelo Lema 3.6.3.3, b), o resultado segue. \square

O teorema 3.6.3.4, demonstrado por Rosa em 1966, é uma generalização do conhecido teorema da combinatória para $\lambda = 1$ [HL]: "Um conjunto de k resíduos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ é um conjunto de diferença com parâmetros (v, k, λ) se e somente se os conjuntos $\{a_{1+i}, a_{2+i}, \dots, a_{k+i}\}$ (somas mod v), $i=0, 1, \dots, v-1$, formam um bloco cíclico com parâmetros (v, k, λ) ". Existe equivalência entre este teorema da combinatória para $\lambda = 1$ e o teorema 3.6.3.4 para o caso particular em que G' é um grafo completo; este caso particular é discutido em 4.4. A proposição 3.6.3.5 enuncia que o Teorema 3.6.3.4 é restrito a $\lambda = 1$. As proposições 3.6.3.6, 3.6.3.7, 3.6.3.8 e 3.6.3.9 são também generalizações da definição e de propriedades de blocos cíclicos [HL] para $\lambda = 1$. (Veja Apêndice A.)

PROPOSIÇÃO 3.6.3.5 - Seja F uma decomposição de um grafo G .

Então, para toda aresta e em G , existe um único grafo G' em F tal que $e \in EG'$.

PROPOSIÇÃO 3.6.3.6 - Se existe decomposição cíclica de um

grafo completo G numa família F de subgrafos isomorfos a G' e G' é maximal em relação à decomposição cíclica de G em grafos isomorfos então $|EG'| = n$ e $|VG| = 2n+1$, para algum n .

PROVA - Pelo Lema 3.6.3.1, $|VG| = 2n+1$ (ímpar) e, pelo Lema 3.6.3.3,a), $|EG'| \leq n$.

Suponhamos $G' \in F$ tal que $|EG'| < n$. Então existe m , $1 \leq m \leq n$, tal que m não é comprimento de qualquer aresta de G' . Como F é decomposição, existe $G'' \in F$ tal que G'' possui aresta de comprimento m . Ainda como F é decomposição, pelo Lema 3.6.3.2, concluímos que o grafo $G' \cup G''$ não possui duas arestas de mesmo comprimento.

Concluimos, então, pelo Lema 3.6.3.3,b), que existe subgrafo de G , com n arestas, união de grafos em F que contém G' e pertence a uma decomposição cíclica de G . \square

PROPOSIÇÃO 3.6.3.7 - Se F é decomposição cíclica de um grafo completo G com $2n+1$ vértices e G' , com n arestas, pertence a F então as propriedades seguintes se verificam.

- i) Se $G'' \in F$ então existe isomorfismo cíclico entre G', G'' .
- ii) $|F| = 2n+1$.

PROVA

- i) É consequência de G' possuir aresta de todo comprimento e do Lema 3.6.3.2.
- ii) Por i), cada grafo em F tem n arestas. Então basta ob

servar que G tem $(2n+1).n$ arestas.

PROPOSIÇÃO 3.6.3.8 - Seja F uma decomposição cíclica de um grafo completo G , com vértices v_0, v_1, \dots, v_{2n} , e $G' \in F$, com n arestas. Então cada vértice de G pertence a $|VG'|$ grafos em F .

PROVA - Seja v um vértice de G e seja m o número de grafos em F aos quais v pertence.

Pela Proposição 3.6.3.7, para todo grafo $G'' \in F$, existe isomorfismo cíclico entre G', G'' . Então $m \leq |VG'|$. Mas para quaisquer $m, m' \in \mathbb{N}_{|VG|-1}$ distintos os grafos isomorfos a G' por isomorfismos cíclicos $h_m, h_{m'}$ são também distintos. Então

$$m = |VG'|. \quad \square$$

PROPOSIÇÃO 3.6.3.9 - Seja F uma decomposição cíclica de um grafo completo G , com vértices $v_0, v_1, \dots, v_{|VG|-1}$, em grafos com n arestas. Então, para quaisquer grafos distintos G' e G'' em F , $|VG' \cap VG''| \geq 1$.

PROVA - Pela Proposição 3.6.3.7, existe isomorfismo cíclico h_m entre G', G'' . Além disso (Lema 3.6.3.3, b)), existe em G' aresta (v_i, v_j) , $i < j$, de comprimento d_{ij} , igual a m se $m \leq n$ ou igual a $|VG|-m$ se $m > n$.

Se $m = j - i$ então $j = i + m$ e $v_j \in G', v_j \in G''$.

Se $m = |VG| - j + i$ então $i = j + m - |VG| = j + m \pmod{|VG|}$ e $v_i \in G', v_i \in G''$.

Ringel [RI], em 1963, conjecturou que um grafo com

pleto, com $2n+1$ vértices, pode ser decomposto em $2n+1$ árvores isomorfas a uma qualquer dada árvore com n arestas. Kotzig [K1] conjecturou que tal decomposição pode ser cíclica.

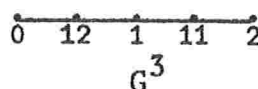
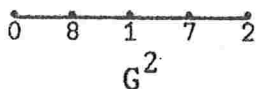
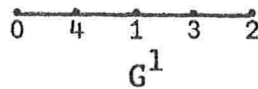
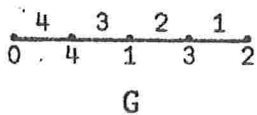
O teorema seguinte ilustra a decomposição cíclica de grafos completos com $2kn+1$ vértices, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, em grafos isomorfos α -numeráveis com n arestas.

Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma α -numeração para um grafo G e seja VG_I, VG_{II} a partição de VG induzida por (f_{VG}, f_{EG}) . Sejam G^1, G^2, \dots, G^k k grafos isomorfos a G ; $h_i = VG \rightarrow VG^i$ são isomorfismos entre $G, G^i, i=1, 2, \dots, k$. Sejam $(f_{VG^i}^i, f_{EG^i}^i)$ definidas, para todo $v \in VG$, por

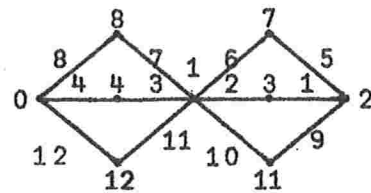
$$f_{VG^i}^i(h_i(v)) = \begin{cases} f_{VG}(v) & \text{se } v \in VG_I, \quad i=1, 2, \dots, k, \\ f_{VG}(v) + (i-1) \cdot |EG| & \text{se } v \in VG_{II}. \end{cases}$$

Denotamos por G^- a união dos grafos $G^i, i=1, 2, \dots, k$, por identificação de vértices segundo $(h_1(v), h_2(v), \dots, h_k(v))$, para todo $v \in VG_I$. Os grafos G^i e G^- são ilustrados no próximo exemplo e utilizados nos próximos lema e teorema.

EXEMPLO 3.6.3.10



$|EG| = 4 \quad k = 3$



LEMA 3.6.3.11 - G^- , como definido acima, é um grafo α -numerável.

PROVA - Seja (f'_{VG^-}, f'_{EG^-}) definida por $f'_{VG^-}(v) = f'_{VG}(v)$, para todo $v \in VG^-$. Vamos mostrar as propriedades seguintes.

- i) f'_{VG^-} é injetora; $0 \leq f'_{VG^-}(v) \leq |EG^-|$, para todo $v \in VG^-$; x , valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) é também valor médio de (f'_{VG^-}, f'_{EG^-}) .
- ii) $1 \leq f'_{EG^-}(e) \leq |EG^-|$, para toda $e \in EG^-$; f'_{EG^-} é injetora.
- i) Seja VG_I, VG_{II} a partição de VG induzida por (f_{VG}, f_{EG}) .

Seja, então, VG_I^-, VG_{II}^- a partição de VG^- tal que $v \in VG_I^-$ ($j=I, II$) se $v \in VG_j^+$ e existe $v' \in EG_j^+$ tal que $h_j(v') = v$. Temos

$$\min_{v \in VG_{II}^-} f'_{VG^-}(v) > \max_{v \in VG_I^-} f'_{VG^-}(v).$$

Seja $v, v' \in VG_I^-$ são distintos, como f_{VG} é injetora, então $f'_{VG^-}(v) \neq f'_{VG^-}(v')$. Se $v, v' \in VG_{II}^-$ são distintos, como f_{VG} é injetora em $N_{|EG|}$, então $f'_{VG^-}(v)$ e $f'_{VG^-}(v')$ ou tem módulos $|EG|$ distintos ou sua diferença é $j|EG|$ ($j \in N_{k-1} - \{0\}$) e são portanto distintos.

Além disso, para todo $v \in VG^-$, $0 \leq f'_{VG^-}(v) \leq |EG| + (k-1)|EG| = k|EG| = |EG'|$.

Além disso, é evidente que x , valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) , é também valor médio de (f'_{VG^-}, f'_{EG^-}) .

- ii) Seja $e \in EG^-$. Como f'_{VG^-} é injetora $f'_{EG^-}(e) > 0$; além disso $f'_{EG^-}(e) \leq \max(\text{Im}(f'_{VG^-})) \leq |EG^-|$.

Vamos mostrar que f'_{EG^-} é sobrejetora em $N_{|EG^-|} - \{0\}$,

mostrando assim que f'_{EG} é injetora. Para todo $n \in \mathbb{N}_{|EG|} - \{0\}$, $n = j \cdot |EG| + m$, $0 \leq j < k$, $1 \leq m \leq |EG|$. Como f_{EG} é sobrejetora em $\mathbb{N}_{|EG|} - \{0\}$, existe $(v, u) \in EG$ tal que $f_{EG}((v, u)) = m$; então $f_{VG}(v) = s_1$ e $f_{VG}(u) = s_2$, com $s_2 - s_1 = m$. Então, para $i = j+1$, $f_{VGi}^i(h_i(v)) = s_1$ e $f_{VGi}^i(h_i(u)) = s_2 + (i-1)|EG|$. Então $f'_{EG}((h_i(v), h_i(u))) = s_2 + (i-1)|EG| - s_1 = j \cdot |EG| + m = n$. \square

TEOREMA 3.6.3.12 - Se G é um grafo α -numerável com n arestas então existe uma decomposição cíclica de um grafo completo com $2kn+1$ vértices, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, numa família de grafos isomorfos a G .

O Teorema 3.6.3.12 é consequência dos Lema 3.6.3.11 e do Teorema 3.6.3.4.

CAPÍTULO 4

SOBRE NUMERAÇÕES DE CERTAS CLASSES DE GRAFOS

4-1 - SOBRE NUMERAÇÕES DE GRAFOS REGULARES DE

GRAU 2 COM COMPONENTES ISOMORFAS

Os resultados sobre numerações α e β para grafos regulares de grau 2 foram obtidos inicialmente por Rosa [R0] e desenvolvidos, para o caso de mais de uma componente, por Kotzig [K2]; os resultados, aqui apresentados, sobre numerações σ e ρ para grafos regulares de grau 2 foram obtidos por nós. Foram completamente resolvidos os casos seguintes: o número de componentes é 1 ou 2; o número de componentes é 3 e a ordem de cada componente é par (para numerações α, β, σ); a ordem de cada componente é 3 ou 5 (para numerações α, β).

Um grafo G regular de grau 2 é denotado por $G(r, s)$ se possuir r componentes de ordem s .

O lema seguinte será muito usado no restante desta secção.

LEMA 4.1.1 - Seja G um grafo de Euler.

- a) Se G é σ -numerável então $|EG| = 3 \pmod{4}$ ou $|EG| = 0 \pmod{4}$.
- b) Se G é α -numerável então $|EG| = 0 \pmod{4}$.

PROVA

- a) Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma σ -numeração para G , onde $|EG|$ é 1 ou 2 $\pmod{4}$.

Por um lado, como $\text{Im}(f_{EG}) = N_{|EG|} - \{0\}$, $\sum_{e \in EG} f_{EG}(e)$ é igual ou a $(4k+1)(4k+2)/2$ se $|EG| = 4k+1$ ou igual a $(4k+2)(4k+3)/2$ se $|EG| = 4k+2$, impar portanto.

Por outro lado (veja Proposições 2.1.2.1, 2.1.2.2), para cada circuito, com vértices u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , em G , temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-2} f_{EG}((u_i, u_{i+1})) + f_{EG}((u_{n-1}, u_0)) = \\ & = \sum_{i=0}^{n-2} |f_{VG}(u_i) - f_{VG}(u_{i+1})| + |f_{VG}(u_{n-1}) - f_{VG}(u_0)|, \end{aligned}$$

par, portanto.

- b) Se G é α -numerável (veja propriedade (v) de α -numeração e também Proposições 2.1.2.1, 2.1.2.2) então $|EG|$ é par, pois não existe em G circuito de comprimento impar. Então basta unir este resultado ao obtido em a). □

Os três próximos teoremas apresentam resultados sobre numerações de grafos $G(r,s)$, $r=1$.

TEOREMA 4.1.2 -

- a) Se um grafo $G(1,s)$ é σ -numerável então $s = 0$ ou $3 \pmod{4}$.
- b) Se $s = 0$ ou $3 \pmod{4}$ então $G(1,s)$ é β -numerável.

PROVA

- a) Decorre do Lema 4.1.1, a).
- b) Seja u_0, u_1, \dots, u_{s-1} um caminho que contém todos os vértices de G (veja Proposição 2.1.2.1).

Definimos (f_{VG}, f_{EG}) por

$$f_{VG}(u_i) = \begin{cases} i/2 & \text{se } i \text{ é par} \\ s-(i-1)/2 & \text{se } i < s/2 \text{ e ímpar} \\ s-(i+1)/2 & \text{se } i > s/2 \text{ e ímpar.} \end{cases}$$

Vamos mostrar que (f_{VG}, f_{EG}) é uma β -numeração para G , mostrando as propriedades seguintes.

- i) f_{VG} é injetora; $0 \leq f_{VG}(v) \leq |EG|$, para todo $v \in VG$.
- ii) f_{EG} é injetora; $1 \leq f_{EG}(e) \leq |EG|$, para todo $e \in EG$.
- i) $\max_{i \text{ par}} f_{VG}(u_i) \leq \min_{i \text{ ímpar}} f_{VG}(u_i)$ e $\max_{\substack{i > s/2 \\ \text{ímpar}}} f_{VG}(u_i) < \min_{\substack{i < s/2 \\ \text{ímpar}}} f_{VG}(u_i)$. E fica evidente que f_{VG} é injetora.

É também evidente que $0 \leq f_{VG}(v) \leq |EG|$.

ii) Vamos mostrar que f_{EG} é sobrejetora em $N_{|EG|} - \{0\}$.

Seja $1 \leq m \leq |EG|$. Se $m > s/2$ façamos $i = s-m$; se

$m < (s-1)/2$ façamos $i = s-m-1$. Em qualquer caso

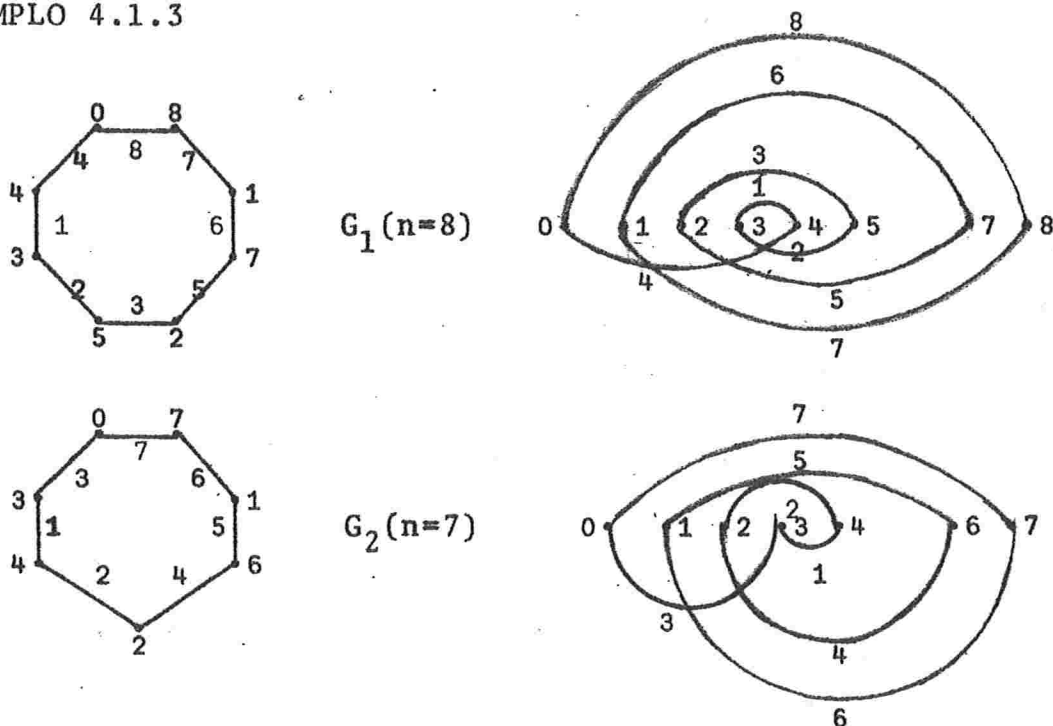
$$f_{EG}((u_i, u_{i+1})) = m.$$

Se $m = s/2$, $s = 0 \pmod{4}$, $f_{EG}((u_{s-1}, u_0)) = m$.

Se $m = (s-1)/2$, $s = 3 \pmod{4}$, $f_{EG}((u_{s-1}, u_0)) = m$. \square

O teorema acima (para β -numeração) foi enunciado por Rosa [R0]; Rosa apresentou numerações distintas para os casos $s = 0 \pmod{4}$ e $s = 3 \pmod{4}$. Construimos uma numeração única e demonstramos o teorema. O exemplo seguinte ilustra a construção do teorema acima.

EXEMPLO 4.1.3



O lema seguinte diz sobre a imagem de f_{VG} de α -numeração (f_{VG}, f_{EG}) para um grafo $G(r,s)$; é útil na prova do Teorema 4.1.11,b).

LEMA 4.1.4 - Seja (f_{VG}, f_{EG}) uma α -numeração para um grafo $G(s,r)$. Então $Im(f_{VG})$ é igual a $N_{|EG|} - y$, $y \in \{|EG|/4, 3|EG|/4\}$.

PROVA - G é bipartido (Teorema 3.3.1.6). Seja VG_I, VG_{II} a partição de VG induzida por (f_{VG}, f_{EG}) ; $|VG_I| = |VG_{II}| = |EG|/2$.

Por um lado,

$$\sum_{e \in EG} f_{EG}(e) = \sum_{i=1}^{|EG|} i = (|EG|/2)(|EG|+1).$$

Por outro lado, como cada vértice em G tem grau 2,

$$\sum_{e \in EG} f_{EG}(e) = 2 \left(\sum_{v \in VG_{II}} f_{VG}(v) - \sum_{v \in VG_I} f_{VG}(v) \right) = D.$$

Se $y = |EG|/2$ então

$$\begin{aligned} D &= 2 \left(\sum_{i=|EG|/2+1}^{|EG|} i - \sum_{i=0}^{|EG|/2-1} i \right) = \\ &= 2((|EG|/4)(3|EG|/2+1) - (|EG|/4)(|EG|/2-1)) = \\ &= (|EG|/2)(|EG|+2) - (|EG|/2)(|EG|+1) = \sum_{e \in EG} f_{EG}(e). \end{aligned}$$

Calculando, de forma análoga a feita acima, para a

hipótese $y < |EG|/2$ (respectivamente $y > |EG|/2$). Concluimos que $y = |EG|/4$ (respectivamente, $y = 3 \cdot |EG|/4$). \square

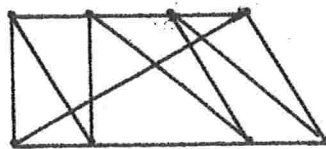
Relativamente ao lema acima, se temos uma α -numeração para G tal que $y = |EG|/4$, pela transformação do Teorema 3.2.1, chegamos a uma α -numeração para G tal que $y = 3 \cdot |EG|/4$ e vice-versa.

TEOREMA 4.1.5 - Um grafo $G(1,s)$ é α -numerável se e somente se $s \equiv 0 \pmod{4}$.

PROVA - A necessidade segue do Lema 4.1.1,b). Para a suficiência basta observar que a numeração (f_{VG}, f_{EG}) , apresentada na prova do Teorema 4.1.2,b) é também uma α -numeração para G ; é evidente que $s/2 - 1$ é valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) . \square

O exemplo seguinte apresenta uma π -representação para o grafo G_1 do exemplo 4.1.3.

EXEMPLO 4.1.6



$G_1 (n=8)$

TEOREMA 4.1.7 - Um grafo $G(1,s)$ é ρ -numerável.

PROVA - Pelo Teorema 4.1.2,b), basta mostrar que $G(1,s)$ é ρ -numerável para $s \equiv 1, 2 \pmod{4}$.

Seja u_0, u_1, \dots, u_{s-1} um caminho que contém todos os

vértices de G (veja Proposição 2.1.2.1).

Definimos (f_{VG}, f_{EG}) por

$$f_{VG}(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ i/2+1 & \text{se } i \geq 2 \text{ e par} \\ s-(i-1)/2+1 & \text{se } i < s/2 \text{ e impar} \\ s-(i-1)/2 & \text{se } i \geq s/2 \text{ e impar.} \end{cases}$$

Deixamos ao leitor verificar que (f_{VG}, f_{EG}) é ρ -numeração para $G(1,s)$, $s = 1, 2 \pmod{4}$. \square

Os dois próximos teoremas apresentam resultados sobre numerações de grafos $G(r,s)$, $r = 2$.

TEOREMA 4.1.8

- a) Se um grafo $G(2,s)$ é σ -numerável então s é par.
- b) Se s é par então $G(2,s)$ é α -numerável.

PROVA

- a) $2s = 2 \pmod{4}$ para s impar; então, pelo Lema 4.1.1,a), o resultado segue.
- b) Construções de α -numeração para grafos $G(2,s)$, com s par, encontram-se nas págs. 6-9 de [K2]; essas construções são baseadas na visão geométrica de π -numerações. \square

TEOREMA 4.1.9 - Um grafo $G(2,s)$ é ρ -numerável.

PROVA - Pelos Teorema 4.1.8,b) e Exemplo 4.1.10, basta mos-

trar que $G(2,s)$ é ρ -numerável, para $s > 3$ e ímpar.

Sejam u_0, u_1, \dots, u_{s-1} e v_0, v_1, \dots, v_{s-1} caminhos que contem todos os vértices de G (veja Proposição 2.1.2.1).

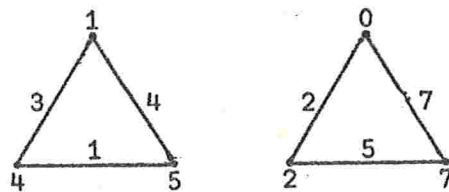
Definimos (f_{VG}, f_{EG}) por

$$f_{VG}(u_i) = \begin{cases} i/2+1 & \text{se } i \text{ par} \\ 2s-(i-1)/2 & \text{se } i \text{ ímpar;} \end{cases}$$

$$f_{VG}(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ 2s+1 & \text{se } i = 1 \\ (s+1)/2 & \text{se } i > 1 \text{ e ímpar e se } s = 1 \pmod{4} \text{ ou} \\ & s = 3 \pmod{4} \text{ e } i \leq (s+1)/2 \\ (3s-i+3)/2 & \text{se } 0 < i \leq (s+1)/2 \text{ e par} \\ (3s-i-1)/2 & \text{se } i > (s+1)/2 \text{ e par e se } s = 1 \\ & \pmod{4} \\ (3s-i+2)/2 & \text{se } i > (s+1)/2 \text{ e ímpar e se } s = 3 \\ & \pmod{4} \\ (s+i+1)/2 & \text{se } i > (s+1)/2 \text{ e par e se } s = 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Deixamos ao leitor verificar que (f_{VG}, f_{EG}) é ρ -numeração para $G(2,s), s > 3$ e ímpar. \square

EXEMPLO 4.1.10



$G(2,3)$

O nosso próximo teorema apresenta resultados sobre numeração de grafos $G(r,s)$, $r=3$.

TEOREMA 4.1.11

- a) Se um grafo $G(3,s)$ é σ -numerável então $s = 0$ ou $1 \pmod{4}$.
- b) Um grafo $G(3,s)$ é α -numerável se e somente se $s=4k$, $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.
- c) Um grafo $G(3,4)$ é β -numerável.

PROVA

a) e a necessidade, em b), de $s = 0 \pmod{4}$ para $G(3,s)$ α -numerável decorrem do Lema 4.1.1.

Construções apresentadas nas págs. 11-14 de [K2] mostrem a existência das numerações enunciadas em b) e c); as construções das α -numerações são baseadas na visão geométrica de π -numerações.

Para completar a prova de b) basta mostrar que $G(3,4)$ é não α -numerável. Suponhamos α -numeração para G . Pela Proposição 3.3.2.1, em G , existe circuito G_1 que contém arestas numeradas 1,2,3 e existe circuito G_2 que contém arestas numeradas 12,11,10; conclui-se também que a aresta numerada 4 pertence a G_1 , a aresta numerada 9 pertence a G_2 e os vértices de G_2 são nu-

merados ou $0,1,10,12$ ou $0,2,11,12$; pelo teorema 3.2.1, não perdemos generalidade em supor os vértices de G_2 numerados $0,2,11,12$. Então a aresta numerada 8 tem pontas numeradas 1,9. Como existe vértice numerado 9 não existe vértice numerado 3 (veja Lema 4.1.4); então a aresta numerada 7 tem pontas numeradas 1, 8 e a aresta numerada 6 tem pontas numeradas 4, 10. Concluimos, então, que G tem circuito com vértices numerados 1, 4, 8, 9, 10 (absurdo). \square

Até hoje não se conseguiu encontrar um grafo $G(3,s)$ β -numerável, para s ímpar. Permanece em aberto a pergunta de se tal grafo existe ou não e se existe qual o s mínimo. Pelo Teorema 4.1.11,a) sabe-se que se tal s existe então $s = 4k+1$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ enunciaremos a seguir (Teorema 4.1.12) que $s \neq 5$ e portanto $s \geq 9$.

Para completar os resultados sobre $G(3,s)$; s par, fica faltando resultado sobre ρ -numeração de grafos $G(3,4k+2)$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

O próximo teorema apresenta resultados sobre numerações de grafos $G(r,s)$, $s = 3,5$. Os comentários finais desta secção são sobre grafos $G(r,s)$, $s = 4$.

TEOREMA 4.1.12

- a₁) Se um grafo $G(r,s)$ é σ -numerável então $r \equiv 1 \pmod{4}$.
- a₂) Um grafo $G(r,3)$ é β -numerável se e somente se $r \equiv 1 \pmod{4}$.

- a₃) Um grafo $G(r,3)$ é não α -numerável para todo r .
- b₁) Se um grafo $G(r,s)$ é σ -numerável então $r=3 \pmod{4}$.
- b₂) Um grafo $G(r,5)$ é não β -numerável, para todo r .

PROVA

- a₁) Decorre do Lema 4.1.1, a).
- a₂) A suficiência decorre do Teorema 4.1.2, b).

Para a necessidade basta observar (Proposição 3.4.2.2), supondo β -numeração para G , que um dos circuitos de G é formado por arestas numeradas $|EG|$, $|EG|-1$, $|EG|-2$; como uma aresta numerada $|EG|$ tem pontas numeradas 0 , $|EG|$ e uma aresta numerada $|EG|-1$ tem pontas numeradas 0 , $|EG|-1$ ou 1 , $|EG|$ concluímos que $|EG|-2 = 1$ e portanto $3r-2 = 1$ ou $r=1$.

- a₃) Decorre de a₂) e do Lema 4.1.1, b).
- b₁) Decorre do Lema 4.1.1, a).
- b₂) Sua prova encontra-se nas pág. 17-20 de [K2] e usa as mesmas idéias da prova do Teorema 4.1.11, b) (parte que mostra que $G(3,4)$ é não α -numerável). \square

Já sabemos que se r é igual a 1 ou 2 então um $G(r,4)$ é α -numerável e que se r igual a 3 então um $G(r,4)$ é não α -numerável. Um problema mencionado por Kotzig [K2] é descobrir se existe algum número r maior que 3 tal que um grafo $G(r,4)$ é não α -numerável. Kotzig [K2] apresenta α -numera-

ções para grafos $G(r,4)$, $r = 4,5,\dots,10$. Kotzig [K2] afirma, sendo um resultado não publicado, que se um $G(r,4)$ é α -numerável então $G(4r+1,4)$ e $G(5r+1,4)$ são também α -numeráveis; Kotzig [K2] afirma também, sendo também um resultado não publicado, que o conjunto de números r tais que $G(r,4)$ é não α -numerável é finito, qualquer um desses resultados implica em que o conjunto dos números r tais que $G(r,4)$ é α -numerável é infinito.

4.2 - SOBRE NUMERAÇÕES DE ÁRVORES

Árvores formam a classe de grafos que mais tem sido examinada em suas numerações. Kotzig [K1] demonstrou que uma classe muito grande de árvores é α -numerável. Rosa [RO] apresentou uma classe infinita de árvores não α -numeráveis. Ainda permanece em aberto a conjectura de que todas as árvores são β -numeráveis; se esta conjectura é verdadeira então são verdadeiras as conjecturas de Ringel [RI] e Kotzig [K1] sobre decomposição de grafos completos em árvores, mencionadas na introdução e em 3.6.3.

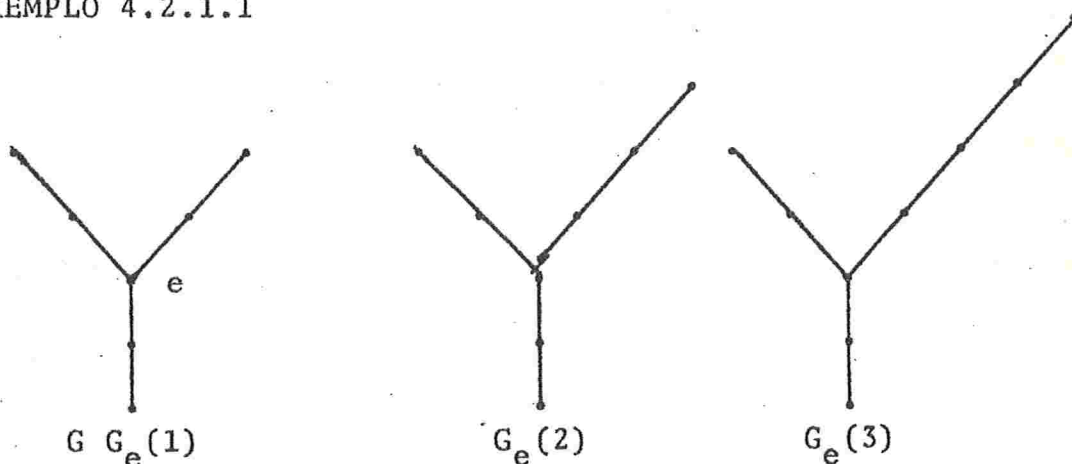
4.2.1 - É GRANDE A CLASSE DE ÁRVORES α -NUMERÁVEIS

Sejam G uma árvore e e uma aresta de G . Denotamos por $G_e(j)$ a árvore que obtemos por substituir a

aresta e em G por um arco de comprimento j , $j \geq 1$. Denotamos por $S_e(G)$ a família infinita cujos elementos são árvores $G_e(j)$, $j = 1, 2, \dots$.

O exemplo que segue ilustra a construção de $G_e(j)$.

EXEMPLO 4.2.1.1



O nosso objetivo aqui é mostrar que, dadas uma árvore G e uma sua aresta e , existe k tal que $G_e(j)$ é α -numerável para todo j maior ou igual a k . Para isto demonstraremos vários lemas; o teorema 4.2.1.16 apresenta o resultado desejado.

Seja G um arco envolvido com pelo menos três vértices. Denotamos por V^*G o subconjunto de VG tal que $v \in V^*G$ se e somente se v é terminal em G e é adjacente a um vértice de valência menor que dois da base de G . Seja $v \in V^*G$ e y adjacente a v ; definimos V^vG como $\{y\} \cup \{z \in VG \text{ tal que } z \text{ é terminal e adjacente a } y \text{ em } G\}$. Chamamos G^v o subgrafo de G induzido por $(VG - V^vG) \cup \{y\}$.

4.2.1.2 - Um arco envolvido G é α -numerável.

A - Se $|VG| < 3$ o resultado é evidente. Suponhamos então $|VG| \geq 3$. Seja V^*G o subconjunto de VG definido acima. Vamos usar indução sobre o comprimento da base de G para mostrar que para todo $v \in V^*G$ existe α -numeração para G tal que v é numerado 0.

- O comprimento da base de G é zero (G é uma estrela). Seja u o vértice da base de G . Para todo $v \in V^*G$, existe α -numeração para G tal que u é numerado $|EG|$ e v é numerado 0.

O DA INDUÇÃO - Suponhamos o resultado verdadeiro para todo arco envolvido cuja base tem comprimento menor que n , $n \geq 1$.

Seja G um arco envolvido cuja base tem comprimento n . Sejam $v \in V^*G$, y adjacente a v e G^V como definido acima.

Seja G' uma estrela com $|EG|$ arestas ($|EG| \geq 3$). Sendo u o vértice não terminal de G' , pela base, existe α -numeração para G' tal que u é numerado $|EG'|$. Então, pelo Teorema 3.3.1, existe α -numeração, $(f_{VG'}, f_{EG'})$, para G' tal que u é numerado 0. Seja G'' o subgrafo de G' induzido pelo subconjunto de VG' que contém todo u' tal que $f_{VG'}(u') < |VG^V|$.

Pela hipótese da indução, existe α -numeração para G^V .

tal que y é numerado zero. Pelo Teorema 3.4.3.3, G^+ , união dos grafos G^r-EG'' e G^V por identificação dos vértices numerados zero, é β -numerável e é fácil verificar que a β -numeração, obtida pelo Teor.3.4.3.3, é uma α -numeração (f'_{VG^+}, f'_{EG^+}) .

É fácil verificar que existe isomorfismo de G para G^+ tal que o vértice v de G é o vértice v' de G^+ tal que $f'_{VG^+}(v') = |EG^+|$ se correspondem. Então existe α -numeração para G tal que v é numerado $|EG|$. Então, pelo Teorema 3.2.1, existe α -numeração para G tal que v é numerado 0.

Rosa [RO] apresenta exemplo de arco envolvido com numeração correspondente à construção do Lema 4.2.1.2. Stanton-Zarnke [SZ] sugerem uma prova por indução como a que fizemos.

O fato de que um arco é π -numerável (Lema 4.2.1.2 e Teorema 3.3.1.6) será usado nesta seção. Entre os lemas seguintes, de 4.2.1.3 a 4.2.1.8, os lemas 4.2.1.5 e 4.2.1.8 apresentam os resultados básicos sobre profundidades dos vértices terminais de um arco.

LEMA 4.2.1.3 - Sejam G um arco e u, v seus vértices terminais. Seja a partição de VG em VG_I e VG_{II} relativa a bipartição de G e tal que $u \in VG_I$. Então

a) $|VG_I| \geq |VG_{II}|$;

b) $|EG| = |VG_I| + |VG_{II}| - 1;$

c) Se $|EG|$ é ímpar então $v \in VG_{II}$ e $|VG_{II}| = |VG_I| =$
 $= (|EG|+1)/2;$ se $|EG|$ é par então $v \in VG_I$ e $|VG_{II}| =$
 $= |VG_I| - 1 = |EG|/2.$

Para o lema 4.2.1.3 basta observar a Proposição 2.1.2.3 e o Corolário 2.1.2.6.

Dizemos que um arco G é do tipo 1 se $|EG|$ é ímpar e é do tipo 0 se $|EG|$ é par.

Sejam G um arco e u e v seus vértices terminais. Dizemos que G possui *denotação admissível* $G(i, j, k)$, $k \in \{0, 1\}$, $i \geq 0$, $j \geq 0$, se G é do tipo k e existe π -numeração para G tal que i, j são as profundidades positivas de u, v , relativas a esta π -numeração.

$G(i, j, k)$ e $G(j, i, k)$ possuem o mesmo significado, pois não distinguimos os vértices u, v .

LEMA 4.2.1.4 - Se um arco G possui denotação admissível $G(i, j, k)$ então $|EG| = k + 2(i + j).$

PROVA - Seja, como no Lema 4.2.1.3, a partição de VG em VG_I e VG_{II} relativa à bipartição de G e tal que $|VG_I| \geq |VG_{II}|$. Sejam u, v os vértices terminais de G , $u \in VG_I$ e $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG})$ uma π -numeração para G tal que

$$f_{\pi VG_I}(u) = i, f_{\pi VG_I}(v) \text{ (ou } f_{\pi VG_{II}}(v)) = j.$$

Pela definição, $f\pi_{EG}$ é sobre $N_{|EG|-1}$.

Pelas Proposição 2.1.2.3 e Teorema 3.3.1.8, $|VG_I| + |VG_{II}| = |EG| + 1$, $f\pi_{VG_I}$ é sobre $N_{|VG_I|-1}$ e $f\pi_{VG_{II}}$ é sobre $N_{|VG_{II}|-1}$.

Em decorrência, temos a igualdade

$$\sum_{n=0}^{|VG_I|+|VG_{II}|-2} n = -i - j + 2 \sum_{n=0}^{|VG_I|-1} n + 2 \sum_{n=0}^{|VG_{II}|-1} n$$

ou, de forma equivalente,

$$\binom{|VG_I|+|VG_{II}|-1}{2} = -i - j + 2 \binom{|VG_I|}{2} + 2 \binom{|VG_{II}|}{2}$$

ou

$$\begin{aligned} & (|VG_I|+|VG_{II}|-1)(|VG_I|+|VG_{II}|-2) = \\ & = -2i-2j+2(|VG_I|)^2-2|VG_I|+2(|VG_{II}|)^2-2|VG_{II}|. \end{aligned}$$

Sabemos, pelo Lema 4.2.1.3 e pela definição de $G(i,j,k)$, que $|EG| = |VG_I| + |VG_{II}| - 1$ e $k = |VG_{II}| - |VG_I| + 1$. Façamos

$$k' = 1 - k = |VG_I| - |VG_{II}|; k' = (k')^2 = (|VG_I|)^2 + (|VG_{II}|)^2 - 2|VG_I||VG_{II}|.$$

Temos então

$$(|EG|)^2 = (|VG_I|)^2 + (|VG_{II}|)^2 + 1 + 2|VG_I||VG_{II}| - 2|VG_I| - 2|VG_{II}|.$$

E portanto

$$|EG| = 2(i+j) - (|VG_I|)^2 - (|VG_{II}|)^2 + 1 + 2|VG_I||VG_{II}| = 1 - k' + 2(i+j) = k + 2(i+j). \quad \square$$

LEMA 4.2.1.5 - Sejam G um arco e u, v seus v\u00e9rtices terminais.

Seja a parti\u00e7\u00e3o de VG em VG_I e VG_{II} relativa \u00e0 biparti\u00e7\u00e3o de G e tal que $u \in VG_I$. Seja $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG})$ uma π -numera\u00e7\u00e3o para G . Ent\u00e3o, relativamente a esta π -numera\u00e7\u00e3o, a profundidade positiva de u \u00e9 igual \u00e0 profundidade negativa de v e a profundidade positiva de v \u00e9 igual \u00e0 profundidade negativa de u .

PROVA - Temos que mostrar que se $v \in VG_I$ (respectivamente, VG_{II}) ent\u00e3o $f_{\pi VG_I}(v) = |VG_I| - 1 - f_{\pi VG_I}(u)$ (respectivamente, $f_{\pi VG_I}(u) = |VG_{II}| - 1 - f_{\pi VG_{II}}(v)$ e $f_{\pi VG_{II}}(v) = |VG_I| - 1 - f_{\pi VG_I}(u)$). (Veja Teorema 3.3.1.8.)

Fa\u00e7amos $i = f_{\pi VG_I}(u)$ e $j = f_{\pi VG_I}(v)$ (ou $f_{\pi VG_{II}}(v)$):

Pelos Lema 4.2.1.3, b) e Lema 4.2.1.4 temos

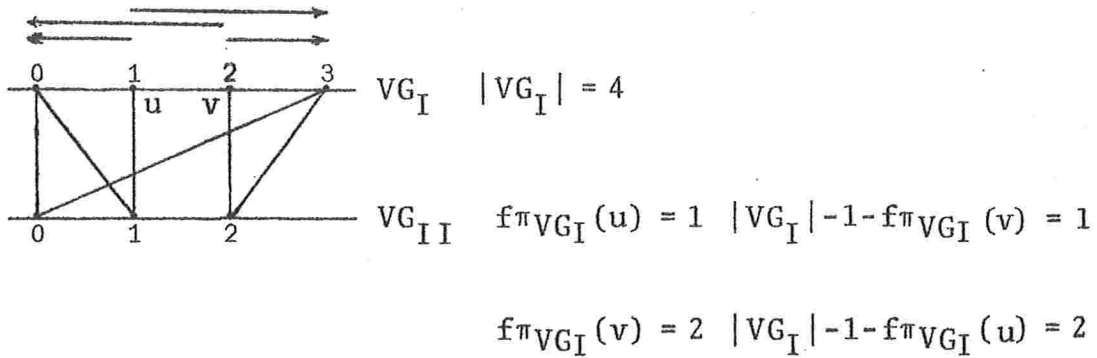
$$|VG_I| + |VG_{II}| - 1 = k + 2(i+j).$$

Juntando tamb\u00e9m o Lema 4.2.1.3, c) temos, para $|EG|$ par ou impar,

$$2|VG_I| = 2 + 2(i+j) \quad \text{ou} \quad i = |VG_I| - 1 - j. \quad \square$$

O exemplo que segue ilustra o resultado do lema anterior.

EXEMPLO 4.2.1.6



LEMA 4.2.1.7 -

- a) Para cada par de inteiros não negativos i, j e k igual a 1 ou 0, se $i \neq j$, ou $k = 1$ existe arco G que possui de notação admissível $G(i, j, k)$.
- b) Não existe arco G com denotação admissível $G(i, i, 0)$, qualquer que seja i .

PROVA -

- a) Vamos usar indução sobre a soma $i+j$.

BASE a1) Se $i \cdot j = 0$ então $i = 0$ ou $j = 0$. Sem perda de generalidade suponhamos $i = 0$. Se existe um tal G , pelo Lema 4.2.1.4, $|EG| = 2j+k$ e, pela Proposição 2.1.2.3, $|VG| = 2j+k+1$. Sendo u e v os vértices terminais de G , consideremos o caminho $u = u_0, u_1, \dots, v = u_{2j+k}$ (veja Corolário 2.1.2.6).

É fácil verificar que $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG}$, definida por

$$f_{\pi VG_I}(u_t) = t/2 \text{ se } t \text{ é par}$$

$$f_{\pi VG_{II}}(u_t) = (t-1)/2 \text{ se } t \text{ é impar}$$

é uma π -numeração e que $f_{\pi VG_I}(u) = 0$ e $f_{\pi VG_{II}}(v)$ (ou $f_{\pi VG_I}(v)$) = j .

a2) Seja $i = j$ e $k = 1$. Se existe um tal G , pelo Lema 4.2.1.4, $|EG| = 1+4i$ e, pela Proposição 2.1.2.3, $|VG| = 4i+2$. Sendo u e v os vértices terminais de G , consideremos o caminho $u = u_0, u_1, \dots, v = u_{4i+1}$ (Veja Corolário 2.1.2.6). É fácil verificar que $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}, f_{\pi EG})$ definida por

$$f_{\pi VG_I}(u_t) = \begin{cases} i-t/2 & \text{se } t \leq 2i \text{ e par} \\ 3i-t/2+1 & \text{se } t > 2i \text{ e par} \end{cases}$$

$$f_{\pi VG_{II}}(u_t) = \begin{cases} i-(t+1)/2 & \text{se } t < 2i \text{ e impar} \\ 3i-(t+1)/2+1 & \text{se } t > 2i \text{ e impar} \end{cases}$$

é uma π -numeração e que $f_{\pi VG_I}(u) = i$ e $f_{\pi VG_{II}}(v) = i = j$.

PASSO DA INDUÇÃO - Suponhamos o resultado verdadeiro para $i+j < n$, $n \geq 2$.

Consideremos, então, $i+j = n$, $i \neq 0$, $i < j$ (veja base). Pela hipótese da indução, existe arco G' com denotação admissível $G'(0, i, k)$ e existe arco G'' com denotação admissível $G''(i, j-i-1, 1)$. Sejam u', v'

vértices terminais em G' , u'', v'' vértices terminais em G'' e π -numerações tais que as profundidades positivas de u', v', u'', v'' são, respectivamente, $0, i, i, j-i-1$; então, considerando a mesma π -numeração para G' , as profundidades negativa de u' é i e positiva de v' é 0 (veja L. 4.2.1.5). Pela construção do Teorema 3.3.3.3,c), $G' \cup G'' \cup (u', u'')$ possui denotação admissível $G' \cup G'' \cup (u', u'')(i, j, k)$.

b) Concluímos que tais vértices terminais, da mesma profundidade positiva, são um único vértice. \square

LEMA 4.2.1.8 - Sejam G um arco, v um vértice terminal de G , $D_G(v)$ o conjunto-profundidade de v . Então $0 \in D_G(v)$ e $(n \in \mathbb{N} - \{0\}) \ n \in D_G(v)$ se e somente se $|EG| \geq 2n$ e $|EG| \neq 4n$.

O lema 4.2.1.8 decorre dos lemas 4.2.1.4 e 4.2.1.7.

Os lemas seguintes tem como objetivo o Lema 4.2.1.13, que é um caso particular, caso em que a aresta e é terminal, do objetivo final desta secção, o Teorema 4.2.1.16; esse lema será também útil na prova deste teorema.

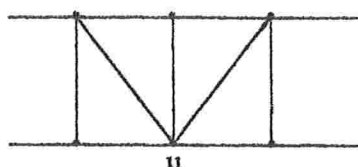
LEMA 4.2.1.9 - Sejam G um grafo $u \in VG$, $D_G(u)$ o conjunto-profundidade de u , G_1 um arco, v, w os vértices terminais de G_1 e $G^u \cup G_1^v$ o grafo união de G, G_1 por identificação de vértices segundo (u, v) . Se $0 \in D_G(u)$ ou se $(n \in \mathbb{N} - \{0\}) \ n \in D_G(u)$, $|EG_1| > 2n$ e $|EG_1| \neq 4n+1$ então existe π -numeração para o grafo $G^u \cup G_1^v$ tal que uma das arestas de G_1 é numerada

zero e w é numerado zero ou n , conforme o caso.

Para provar o Lema 4.2.1.9 basta aplicar os lemas 4.2.1.8, 4.2.1.5 e as construções do Teorema 3.3.3.3,a) e c).

O exemplo que segue ilustra a construção do lema anterior.

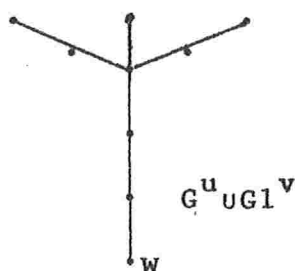
EXEMPLO 4.2.1.10



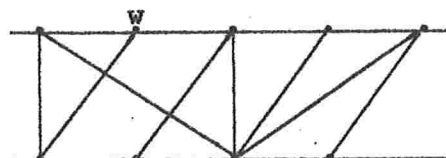
$G \quad n=1 \in D_G(u)$



$G1 \quad 2n+1=3$



$G^u \cup G1^v$



$G^u \cup G1^v \quad n=1 \in D_{G^u \cup G1^v}(w)$

LEMA 4.2.1.11 - Seja G um grafo, $e = (w,x) \in EG$, $u \in VG$, $G1$ um arco com uma única aresta (v,v') $G_e^u(j) \cup G1^v$ o grafo união de $G_e(j), G1$ por identificação de vértices segundo (u,v) . Se existe π -numeração de G tal que (w,x) é numerada 0 e u é numerado n , então, para $j = 4n-1$, o grafo $G_e^u(j) \cup G1^v$ é π -numerável.

PROVA - Suponhamos existir π -numeração $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG})$

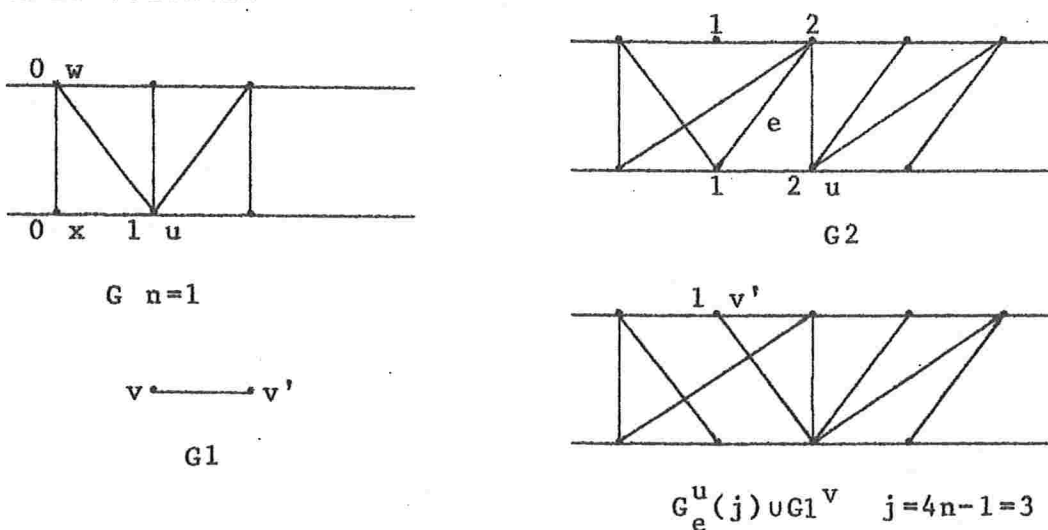
para G tal que $f_{\pi_{EG}}(w,x) = 0$ e $f_{\pi_{VG_{II}}}(u) = n$.

Pelos Lema 4.1.5, Teorema 4.1.6 e Teorema 3.3.1.6, existe π -numeração $(f_{\pi_{VG_{II}}}, f_{\pi_{VG_{III}}}; f_{\pi_{EG}})$ para G_1 , circuito de comprimento $4n$, tal que $n \notin \text{Im}(f_{\pi_{VG_{II}}})$; seja (y,z) a aresta de G_1 tal que $f_{\pi_{EG}}((y,z)) = 4n-1$ (máximo de $\text{Im}(f_{\pi_{EG}})$).

Seja $G_2 = G^{(w,x)} \cup G_1(y,z)$ a união de G, G_1 por identificação de vértices segundo $(w,y), (x,z)$. Pela construção do Teorema 3.3.3.3, b), existe π -numeração $(f_{\pi_{VG_{II}}}, f_{\pi_{VG_{III}}}; f_{\pi_{EG}})$ para G_2 tal que $f_{\pi_{EG}}(e) = 4n-1$ (chamamos e a aresta identificada em G_2), $f_{\pi_{VG_{III}}}(u) = 3n-1$ (u vértice de G tal que $f_{\pi_{VG_{II}}}(u) = n$), $n \notin \text{Im}(f_{\pi_{VG_{II}}})$. Sendo $j = 4n-1$, o grafo $G_2 - \{e\}$ é $G_e(j)$. É fácil verificar, então, que existe π -numeração para $G_e^u(j) \cup G_1^v$, tal que v' é numerado n . \square

O exemplo que segue ilustra a construção do lema anterior.

EXEMPLO 4.2.1.12



LEMA 4.2.1.13 - Seja G uma árvore e e uma sua aresta terminal. Então existe k' , $k' \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $G_e(k')$ é π -numerável.

PROVA - Vamos usar indução sobre o número de arestas de G .

BASE - Se G tem uma única aresta então G é π -numerável.

PASSO DA INDUÇÃO - Suponhamos o resultado verdadeiro para árvores com menos que n arestas, $n \geq 2$. Consideremos, então, G com n arestas. Seja $e = (u, v)$ onde u é vértice terminal e seja w um vértice terminal de G distinto de u .

Seja G_1 o subgrafo de G induzido por $VG - \{w\}$. Pela hipótese da indução existe k'' , $k'' \in \mathbb{N} - \{0\}$, tal que $G_{1e}(k'')$ é π -numerável.

Pelo Lema 4.2.1.9, existe k''' , $k''' \in \mathbb{N} - \{0\}$, tal que existe π -numeração para $G_{1e}(k''')$ tal que uma das arestas do arco de comprimento k''' que substituiu e (aresta de G_1) é numerada zero. Então, pelo Lema 4.2.1.11, existe k' , $k' \in \mathbb{N} - \{0\}$, tal que $G_e(k')$ é π -numerável.

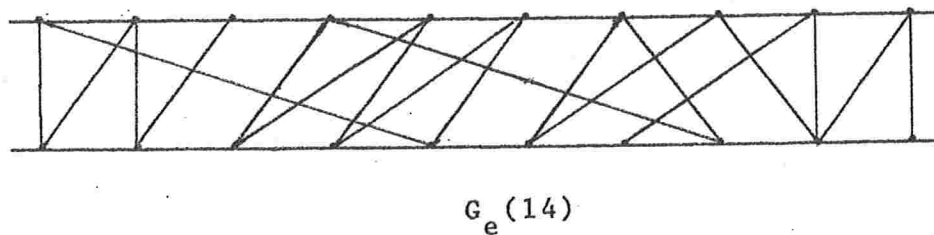
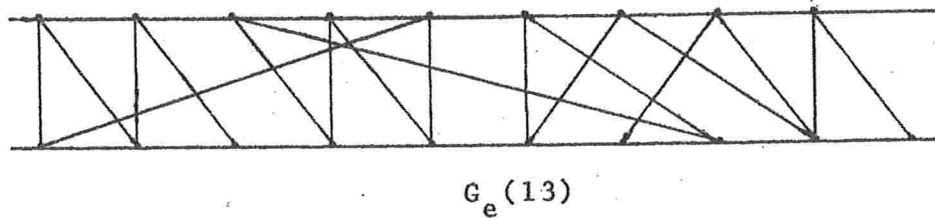
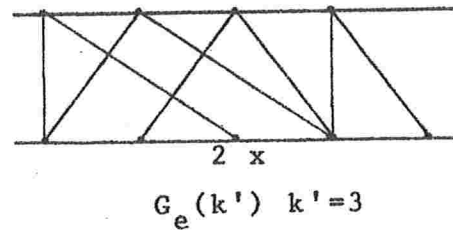
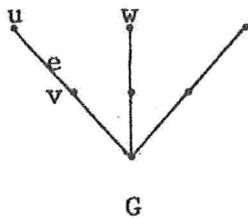
LEMA 4.2.1.14 - Seja G uma árvore e e uma sua aresta terminal. Então existe k , $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, tal que toda árvore $G_e(j)$, $j \geq k$, é π -numerável.

Para provar o Lema 4.2.1.14 basta aplicar outra vez o Lema 4.2.1.9 ao grafo $G_e(k')$ do Lema 4.2.1.13; na pior das hipóteses teremos $k = k' + 4d + 2$, onde d é o mínimo do conjun-

to-profundidade $D_{G_e(k')}(x)$, x vértice terminal em $G_e(k')$,
pertencente ao arco de comprimento k' que substituiu r .

O exemplo seguinte ilustra a construção do Lema
4.2.1.14.

EXEMPLO 4.2.1.15



TEOREMA 4.2.1.16 - Seja G uma árvore e e uma sua aresta. En-
tão existe k , $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que toda árvo-
re $G_e(j)$, $j \geq k$, é π -numerável (α -numerável).

PROVA - Sejam G_1 e G_2 os subgrafos de G tais que $G_1 \cup G_2 = G$ e
 e é aresta terminal em G_1 e em G_2 .

Por um lado existem q, j', j'' tais que q pertence aos conjuntos-profundidade $D_{G1_e(j')}(v')$ e $D_{G2_e(j'')}(v'')$, onde v, v' são, respectivamente, os vértices terminais em $G1_e(j')$, $G2_e(j'')$ pertencentes aos arcos de comprimentos j', j'' que substituíram e . De fato, basta considerar as profundidades negativas de v', v'' na construção do Lema 4.2.1.14.

Por outro lado (veja Lemas 4.2.1.5 e 4.2.1.8) para todo arco $G3$ de comprimento $p > 4q$ existe π -numeração tal que seus vértices terminais u', u'' tem profundidade q (positiva para um e negativa para outro).

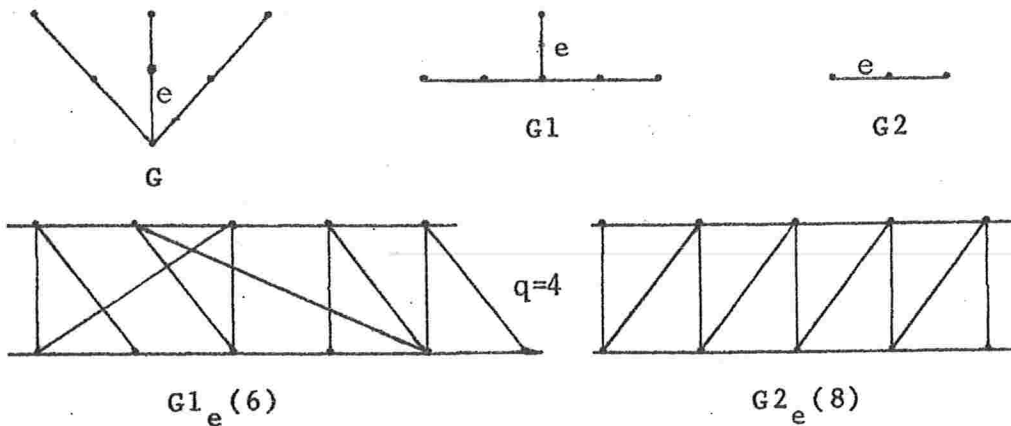
Basta, então, aplicar 2 vezes a construção do Teorema 3.3.3.3,c); o grafo resultante,

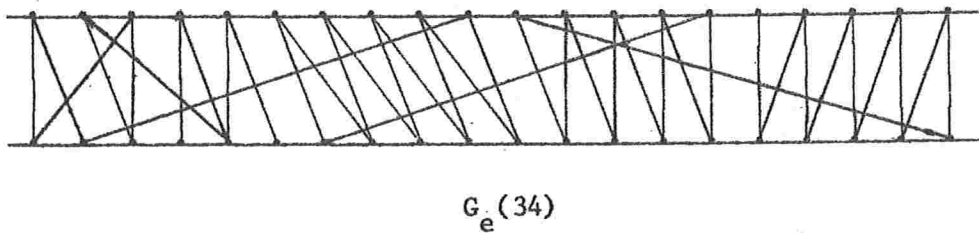
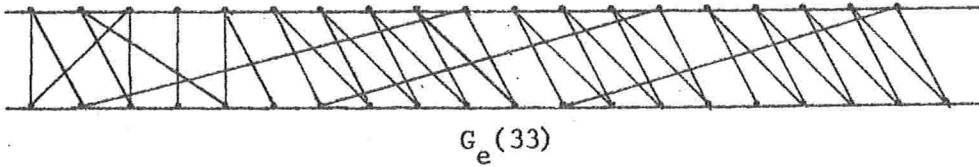
$$G1 \cup G3 \cup G2 \cup (v', u') \cup (v'', u''),$$

é $G_e(p+2+j'+j'')$ e π -numerável (α -numerável, pelo Teorema 3.3.1.6). Então $k \leq 4q+3+j'+j''$. \square

O exemplo seguinte ilustra a construção final.

EXEMPLO 4.2.1.17





A construção deste exemplo segue a construção geral; é simples encontrar k menor que 33.

COROLÁRIO 4.2.1.18 - Seja G uma árvore e e uma sua aresta. Então o conjunto de árvores em $S_e(G)$ não α -numeráveis é finito.

É interessante verificar, observando a demonstração do Teorema 4.2.1.16, que existe um número n , função do número de arestas em G , tal que $k \leq n$.

Kotzig [K1] formulou a seguinte conjectura: "Seja G uma árvore e $C(G)$ a classe de todas as árvores homeomorfas a G . Então o número de árvores em $C(G)$ não α -numeráveis é finito."

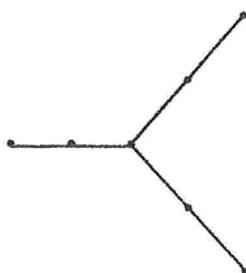
4.2.2 - CLASSE DE ÁRVORES NÃO α -NUMERÁVEIS

Denotamos por $L(2,4)$ a classe de árvores tal que

uma árvore $G \in L(2,4)$ se e somente se o diâmetro de G é 4 e a base de G não é um arco.

O grafo do Exemplo 4.2.2.1 pertence a $L(2,4)$.

EXEMPLO 4.2.2.1



O teorema seguinte foi enunciado por Rosa [RO]; sua prova foi feita por nós.

TEOREMA 4.2.2.2 - Qualquer árvore $L(2,4)$ é não α -numerável.

PROVA - Seja $G \in L(2,4)$. Vamos mostrar que G é não π -numerável (veja Teorema 3.3.1.6).

Seja VG_I, VG_{II} a partição de VG tal que VG_I contém v , centro de G (veja Proposição 2.1.28) e o conjunto de vértices de G cuja distância a v é 2 e VG_{II} é o conjunto de vértices de G cuja distância a v é 1; $VG_I - \{v\}$ é um conjunto de vértices terminais e VG_{II} contém pelo menos 3 vértices de grau não menor que 2.

Suponhamos π -numeração $(f_{\pi VG_I}, f_{\pi VG_{II}}; f_{\pi EG})$ para G ; $\text{Im}(f_{\pi EG}) = N_{|EG|-1}$. Então, para todo $u \in VG_I$ tal que

$f_{\pi_{VG_I}}(u) < f_{\pi_{VG_{II}}}(v)$ (respectivamente, $f_{\pi_{VG_I}}(u) > f_{\pi_{VG_I}}(v)$),
u é adjacente a z tal que $f_{\pi_{VG_{II}}}(z) = 0$ (respectivamente,
 $f_{\pi_{VG_{II}}}(z) = \max(\text{Im}(f_{\pi_{VG_{II}}}))$). Então não existem 3 vértices
de grau não menor que 2 em VG_{II} (absurdo).

$L(2,4)$ é a única classe de árvores α -numeráveis conhecida.

PROPOSIÇÃO 4.2.2.3 - Se uma árvore G é não α -numerável então $|VG| \geq 7$.

PROVA - De fato toda árvore não α -numerável contém o grafo do Exemplo 4.2.2.1 como subgrafo; isto decorre do Lema 4.2.1.2.

4.2.3 - CLASSES DE ÁRVORES β -NUMERÁVEIS

4.2.3.1 - A CONSTRUÇÃO DE STANTON-ZARNKE [SZ]

Stanton-Zanke definiram a construção de uma classe de árvores β -numeráveis.

Seja (f_{VU}, f_{EU}) uma β -numeração para uma árvore U. Sejam $U^{(0)}, U^{(1)}, \dots, U^{(r-1)}$ r árvores isomorfas a U. Sejam $h_i: U \rightarrow U^{(i)}$ r isomorfismos de U para $U^{(i)}$, $i=0, 1, \dots, r-1$ e seja v um dos vértices de U. Sejam $(f_{VU}^{(i,r,v)}, f_{EU}^{(i,r,v)})$ definidas, para toda $U^{(i)}$, por

$$f_{VU}^{(i,r,v)}(i)(h_i(u)) = \begin{cases} f_{VU}(u) + i|VU| & \text{se } \text{dist}(u,v) = 0 \pmod{2} \\ f_{VU}(u) + (r-i-1)|VU| & \text{se } \text{dist}(u,v) = 1 \pmod{2}, \\ & i=0,1,\dots,r-1. \end{cases}$$

É interessante verificar que se substituirmos v por v' , $v' \in VU$, na definição anterior, então, para $i=0,1,\dots,r-1$,

$$f_{VU}^{(i,r,v)}(i), f_{EU}^{(i,r,v)}(i) = \begin{cases} f_{VU}^{(i,r,v)}(i), f_{EU}^{(i,r,v)}(i) & \text{se} \\ \text{dist}(v,v') = 0 \pmod{2} \\ f_{VG}^{(r-i-1,r,v)}(r-i-1), f_{EU}^{(r-i-1,r,v)}(r-i-1) & \text{se } \text{dist}(v,v') = 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

LEMA 4.2.3.1.1 - Sejam $U, v, U^{(i)}$ e $(f_{VU}^{(i,r,v)}(i), f_{EU}^{(i,r,v)}(i))$, $i=0,1,\dots,r-1$, como definidos anteriormente.

Então as cinco afirmações seguintes são verdadeiras.

- $0 \leq f_{VU}^{(i,r,v)}(i)(h_i(u)) < |VU|$, para quaisquer $i \in \mathbb{N}_{r-1}$ e $u \in VU$.
- $f_{VU}^{(i,r,v)}(i)(h_i(u)) \neq f_{VU}^{(j,r,v)}(j)(h_j(u'))$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}_{r-1}$, $u, u' \in VU$ tais que $i \neq j$ ou $u \neq u'$.
- $1 \leq f_{EU}^{(i,r,v)}(i)((h_i(u), h_i(u')))$, para quaisquer $i \in \mathbb{N}_{r-1}$ e $(u, u') \in EU$.
- $f_{EU}^{(i,r,v)}(i)((h_i(u), h_i(u')))) \neq |VU| \cdot k$, para quaisquer $i, k \in \mathbb{N}_{r-1}$ e $(u, u') \in EU$.
- $f_{EU}^{(i,r,v)}(i)(h_i(u), h_i(u')) \neq f_{EU}^{(j,r,v)}(j)(h_j(u''), h_j(u'''))$,

para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}_{r-1}$, $(u, u'), (u'', u''') \in EU$ tais que $i \neq j$ ou $(u, u') \neq (u'', u''')$.

PROVA -

- a) Pela definição é facilmente verificável.
- b) Suponhamos $u \neq u'$. Como $f_{VU}(u) \neq f_{VU}(u')$, $f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(h_i(u)) = f_{VU}(u) \pmod{|VU|}$, $f_{VU}^{(j, r, v)}(j)(h_j(u')) = f_{VU}(u') \pmod{|VU|}$ então $f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(h_i(u)) \neq f_{VU}^{(j, r, v)}(j)(h_j(u')) \pmod{|VU|}$.
 Suponhamos $u = u'$, $i < j$. Então $f_{VU}^{(j, r, v)}(j)(h_j(u)) = f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(h_i(u)) + (j-i)|VU|$ se $\text{dist}(u, v) = 0 \pmod{2}$ ou $f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(h_i(u)) = f_{VU}^{(j, r, v)}(j)(h_j(u)) + (j-i)|VU|$ se $\text{dist}(u, v) = 1 \pmod{2}$.
- c) Decorre de a) e b).
- d) Como já vimos em b), $f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(h_i(u)) \neq f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(h_i(u')) \pmod{|VU|}$, se $u \neq u'$.
- e) O resultado segue das afirmações seguintes.
- e1) Sendo $f_{VU}(u) < f_{VU}(u')$, $u, u' \in VU$, então $f_{EU}^{(i, r, v)}(i)((h_i(u), h_i(u')))$ $\pmod{|VU|}$ é igual ou a $f_{VU}(u') - f_{VU}(u)$ ou a $|VU| - (f_{VU}(u') - f_{VU}(u))$.
 De fato, se $f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(h_i(u)) < f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(h_i(u'))$ então $f_{EU}^{(i, r, v)}(i)((h_i(u), h_i(u')))$ $= f_{VU}(u') - f_{VU}(u) \pmod{|VU|}$, se $f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(u) > f_{VU}^{(i, r, v)}(i)(u')$ então $f_{EU}^{(i, r, v)}(i)((h_i(u), h_i(u')))$ $= |VU| - (f_{VU}(u') - f_{VU}(u)) \pmod{|VU|}$.
- e2) Se $i \neq j \neq r-i-1$, então para quaisquer arestas $(u, u'), (u'', u''') \in EU$ $f_{EU}^{(j, r, v)}(j)((h_j(u), h_j(u')))$ $\neq f_{EU}^{(i, r, v)}(i)((h_i(u''), h_i(u''')))$.

De fato, $f_{EU}^{(j,r,v)}(j)((h_j(u), h_j(u'))) > f_{EU}^{(i,r,v)}(i)((h_i(u''), h_i(u'''))$,
 $h_i(u'''))$ se $j < \min\{i, r-i-1\}$ ou $j > \max\{i, r-i-1\}$,
 $f_{EU}^{(j,r,v)}(j)((h_j(u), h_j(u'))) < f_{EU}^{(i,r,v)}(i)((h_i(u''), h_i(u'''))$
se $\min\{i, r-i-1\} < j < \max\{i, r-i-1\}$.

e3) Se $i < j = r-i-1$ então para toda aresta $(u, u') \in EU$,
 $f_{EU}^{(i,r,v)}(i)((h_i(u), h_i(u'))) \neq f_{EU}^{(j,r,v)}(j)((h_j(u), h_j(u')))$.

De fato, um dos valores na última desigualdade é igual, mod $|VU|$ a $|f_{VU}(u') - f_{VU}(u)|$ e é maior que $(r-2i-1)|VU|$ e o outro é igual, mod $|VU|$, a $|VU| - |f_{VU}(u') - f_{VU}(u)|$ e é menor que $(r-2i-1)|VU|$.

De fato, supondo $\text{dist}(u, v)$ par, $\text{dist}(u', v)$ ímpar, temos as igualdades:

$$f_{EU}^{(i,r,v)}(i)((h_i(u), h_i(u'))) = f_{VU}(u') - f_{VU}(u) + (r-2i-1)|VU|$$

$$f_{EU}^{(j,r,v)}(j)((h_j(u), h_j(u'))) = f_{VU}(u) - f_{VU}(u') + (r-2i+1)|VU|.$$

Sendo $f_{VU}(u')$ maior ou menor que $f_{VU}(u)$, os valores nas igualdades acima são um deles maior que $(r-2i-1)|VU|$ e igual, mod $|VU|$, a $|f_{VU}(u') - f_{VU}(u)|$ e o outro menor que $(r-2i-1)|VU|$ e igual, mod $|VU|$, a $|VU| - |f_{VU}(u') - f_{VU}(u)|$.

e4) Se $(u, u'), (u'', u''') \in EU$, $f_{EU}((u'', u''')) = |VU| - f_{EU}((u, u'))$,
 $f_{EU}((u, u')) \neq f_{EU}((u'', u'''))$ (ou seja $(u, u') \neq (u'', u''')$)
então $f_{EU}^{(i,r,v)}(i)((h_i(u), h_i(u'))) \neq f_{EU}^{(i,r,v)}(i)((h_i(u''), h_i(u'''))$.
 $h_i(u'''))$). De fato, um dos seguintes, e4.1) ou e4.2) ocorre.

e4.1) Um dos valores na última desigualdade é maior e e o outro é menor que $k|VU|$ para algum $k \in \mathbb{N}_{r-1} - \{0\}$,

e ambos têm o mesmo módulo $|VU|$.

e4.2) Os valores na última desigualdade estão no intervalo $[k|VU|, (k+1)|VU|)$, para algum $k \in \mathbb{N}_{r-1}$ e tem módulos $|VU|$ distintos.

Para mostrar que e4.1) ou e4.2) ocorre, façamos $x=f_{VU}(u)$, $y=f_{VU}(u')$, $z=f_{VU}(u'')$, $w=f_{VU}(u''')$, $n=|VU|$. Suponhamos $y > x$, $w > z$.

Então temos uma das ocorrências seguintes.

1) Se $\text{dist}(u''', v) \neq \text{dist}(u', v) \pmod{2}$ então, para algum $k \in \mathbb{N}_{r-1}$,

$$\begin{aligned} f_{EU(i)}^{(i, r, v)}((h_i(u), h_i(u'))) &= x+kn-y \text{ e} \\ f_{EU(i)}^{(i, r, v)}((h_i(u''), h_i(u'''))) &= w+kn-z \text{ ou} \\ f_{EU(i)}^{(i, r, v)}((h_i(u), h_i(u'))) &= y+kn-x \text{ e} \\ f_{EU(i)}^{(i, r, v)}((h_i(u''), h_i(u'''))) &= z+kn-w, \end{aligned}$$

Então e4.1) ocorre.

2) Se $\text{dist}(u''', v) = \text{dist}(u', v) \pmod{2}$ então para algum $k \in \mathbb{N}_{r-1}$,

$$\begin{aligned} f_{EU(i)}^{(i, r, v)}((h_i(u), h_i(u'))) &= y+kn-x \text{ e} \\ f_{EU(i)}^{(i, r, v)}((h_i(u''), h_i(u'''))) &= w+kn-z \text{ ou} \\ f_{EU(i)}^{(i, r, v)}((h_i(u), h_i(u'))) &= x+kn-y \text{ e} \\ f_{EU(i)}^{(i, r, v)}((h_i(u''), h_i(u'''))) &= z+kn-w. \end{aligned}$$

Então e4.2) ocorre.

e₅) Se $i \neq j = r-i-1$, $(u, u'), (u'', u''') \in EU$, $f_{EU}(u'', u''') = |VU| - f_{EU}(u, u')$, então $f_{EU(j)}^{(j, r, v)}((h_j(u), h_j(u'))) \neq f_{EU(i)}^{(i, r, v)}((h_i(u''), h_i(u''')))$.

Isto decorre de e3) e e4); considerando módulo $|VU|$ e intervalo $[k|VU|, (k+1)|VU|)$, $k \in \mathbb{N}_{r-1}$, o que for igual por e4) será diferente por e3). \square

Seja (f_{VS}, f_{ES}) uma β -numeração para uma árvore S e $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Seja $(f_{VS}^{(n,m)}, f_{ES}^{(n,m)})$ definida, para S , por $f_{VS}^{(n,m)}(u) = f_{VS}(u) \cdot n + m$, $u \in VS$.

LEMA 4.2.3.1.2 - Sejam S e $(f_{VS}^{(n,m)}, f_{ES}^{(n,m)})$ como definidos anteriormente. Então

- a) $0 \leq f_{VS}^{(n,m)}(u) < |VS| \cdot n$, para todo $u \in VS$.
- b) $f_{VS}^{(n,m)}(u) \neq f_{VS}^{(n,m)}(u')$, para quaisquer $u, u' \in VS$ distintos.
- c) $1 \leq f_{ES}^{(n,m)}(e) < |VS| \cdot n$, para toda $e \in ES$.
- d) $f_{ES}^{(n,m)}(e) = 0 \pmod{n}$, para toda $e \in ES$.
- e) $f_{ES}^{(n,m)}(e) \neq f_{ES}^{(n,m)}(e')$, para quaisquer $e, e' \in ES$ distintos.

PROVA -

- a) Pela definição, é facilmente verificável.
- b) Basta verificar que, como $n > 0$, $f_{VS}^{(n,m)}$, como função de f_{VS} é injetora.
- c) Decorre de a) e b).
- d) Pela definição, é facilmente verificável.
- e) Seja $(u, u') \in ES$. Pela definição,

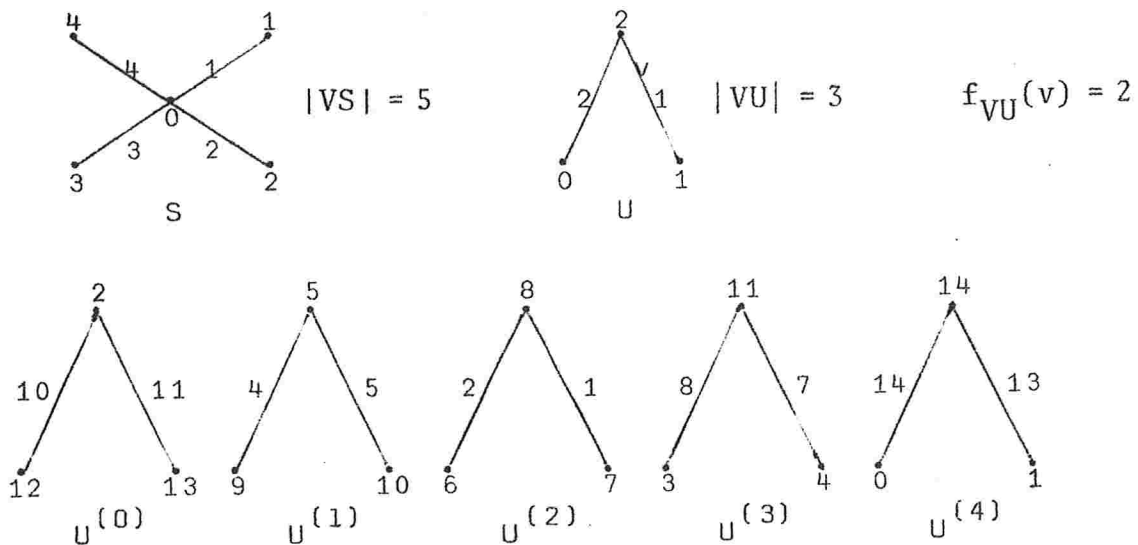
$f_{ES}^{(n,m)}((u,u')) = |f_{VS}^{(n,m)}(u) - f_{VS}^{(n,m)}(u')| = |f_{VS}(u) \cdot n + m - (f_{VS}(u') \cdot n + m)| = |f_{VS}(u) - f_{VS}(u')| \cdot n = f_{ES}((u,u')) \cdot n$. Então, e como $n > 0$, $f_{ES}^{(n,m)}$, como função de f_{ES} , é injetora. \square

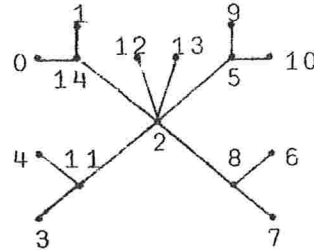
Sejam $U, v, (f_{VU}, f_{EU}), U^{(i)}$ e $(f_{VU}^{(i,r,v)}, f_{EU}^{(i,r,v)}), i = 0, 1, \dots, r-1$, como definidos no início de 4.2.3.1 com $|VU| = n$ e $f_{VU}(v) = m$. Sejam S e $(f_{VS}^{(n,m)}, f_{ES}^{(n,m)})$, como definidos antes do Lema 4.2.3.1.2, com $|VS| = r$. Denotamos por $S_u(v)$ a união dos grafos $S, U^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, r-1$, por identificação de vértices segundo as r duplas de vértices $(u, h_i(v)), u \in VS$ e $f_{VS}(u) = i$, $i = 0, 1, \dots, r-1$.

Dizemos que $S_u(v)$ é obtida por pendurar em cada vértice de S uma cópia de U , por v .

O exemplo seguinte ilustra a construção da definição anterior.

EXEMPLO 4.2.3.1.3





$S_u(v)$

TEOREMA 4.2.3.1.4 - $S_u(v)$, como definida anteriormente, é u ma árvore β -numerável.

O Teorema 4.2.3.1.4 é facilmente verificável a par tir dos Lemas 4.2.3.1.1 e 4.2.3.1.2.

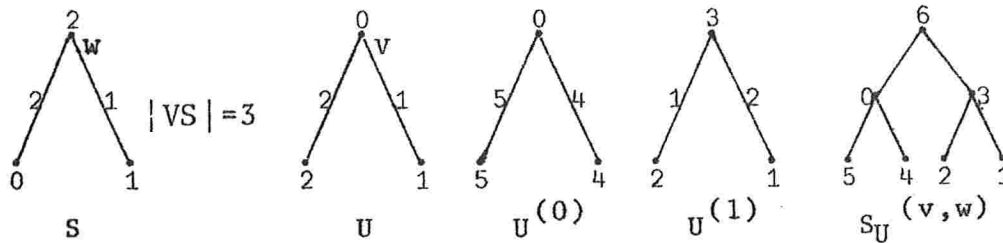
COROLÁRIO 4.2.3.1.5 - Se S e U são árvores β -numeráveis e $v \in VU$, então $S_U(v)$, como definida ante riormente, é uma árvore β -numerável.

Sejam $U, v, (f_{VU}, f_{EU}), U^{(i)}, (f_{VU}^{(i, r-1, v)}, f_{EU}^{(i, r-1, v)})$, $i=0, 1, \dots, r-2$ como definidos no início de 4.2.3.1, com $|VU|=n$ e $f_{VU}(u)=0$. Sejam S e $(f_{VS}^{(n, m)}, f_{ES}^{(n, m)})$, como definidos antes no Lema 4.2.3.1.2, com $VS = r$ e $w \in VS$ tal que $f_{VS}(w) = r-1$. Denotamos por $S_u^{(v, w)}$ a união dos grafos $S, U^{(i)}$, $i=0, 1, \dots, r-2$, obti da por identificação de vértices segundo as $r-1$ duplas de vé r tices $(u, h_i(v))$, $u \in VS$ e $f_{VS}(u) = i$, $i=0, 1, \dots, r-2$.

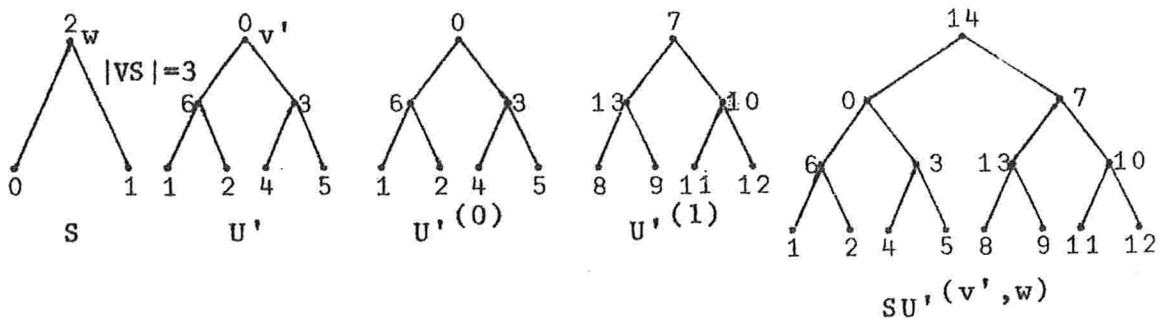
Dizemos que $S_u^{(v, w)}$ é obtida por penderar em cada vértice de S , exceto o vértice w , uma cópia de U , por v .

O exemplo seguinte ilustra uma aplicação recursiva da construção da definição anterior.

EXEMPLO 4.2.3.1.6



Neste exemplo U é isomorfo a S ; f_{VU} e f_{VS} são relacionadas, conforme o isomorfismo, como f_{VG} e f'_{VG} no Teorema 3.2.1.



Neste exemplo U' é isomorfo a $SU^{(v,w)}$; $f_{VU'}$ e $f_{VS_{U^{(v,w)}}}$ são relacionadas, conforme o isomorfismo, como f_{VG} e f'_{VG} no Teorema 3.2.1.

É evidente que o processo iterativo apresentado no Exemplo 4.2.3.1.6 pode ser realizado indefinidamente.

TEOREMA 4.2.3.1.7 - $SU^{(v,w)}$, como definida anteriormente é uma árvore β -numerável.

O Teorema 4.2.3.1.7 é facilmente verificável a partir dos lemas 4.2.3.1.1 e 4.2.3.1.2.

COROLÁRIO 4.2.3.1.8 - Sejam S e U árvores, $w \in VS$, $v \in VU$. Se existe (f_{VS}, f_{ES}) , β -numeração para S , tal que $f_{VS}(w) = |VS| - 1$ e existe (f'_{VU}, f'_{EU}) , β -numeração para U , tal que $f'_{VU}(v) = 0$ então $SU^{(v,w)}$, como definida anteriormente, é uma árvore β -numerável.

Em [SZ] encontram-se provas por absurdo para os Teoremas 4.2.3.1.4 e 4.2.3.1.7. Fizemos provas construtivas para estes teoremas.

Vamos, agora, mostrar em que condição a construção de Stanton-Zarnke conserva α -numeração. Os Teoremas 4.2.3.1.11 e 4.2.3.1.12 foram enunciados por nós.

LEMA 4.2.3.1.9 - Sejam $U, v, (f_{VU}, f_{EU}), U^{(i)}$, e $f^{(i,r,v)}_{VU}(i)$, $f^{(i,r,v)}_{EU}(i)$, $i=0,1,\dots,r-1$, como definidos no início de 4.3.2.1.

- a) Se r é par então, para toda aresta $(h_i(u), h_i(u'))$, $i \in \mathbb{N}_{r-1}$ e $(u, u') \in EU$, ou $f^{(i,r,v)}_{VU}(i)(h_i(u)) \leq (r/2) \cdot |VU| - 1$ e $f^{(i,r,v)}_{VU}(i)(h_i(u)) > (r/2) \cdot |VU| - 1$ ou $f^{(i,r,v)}_{VU}(i)(h_i(u)) > (r/2) \cdot |VU| - 1$ e $f^{(i,r,v)}_{VU}(i)(h_i(u')) \leq (r/2) \cdot |VU| - 1$.
- b) Se r é ímpar e (f_{VU}, f_{EU}) é uma α -numeração para U então, para toda aresta $(h_i(u), h_i(u'))$, $i \in \mathbb{N}_{r-1}$ e $(u, u') \in EU$, ou $f^{(i,r,v)}_{VU}(i)(h_i(u)) \leq x + ((r-1)/2) \cdot |VU|$ e $f^{(i,r,v)}_{VU}(i)(h_i(u')) > x + ((r-1)/2) \cdot |VU|$ ou $f^{(i,r,v)}_{VU}(i)(h_i(u)) > x + ((r-1)/2) \cdot |VU|$ e $f^{(i,r,v)}_{VU}(i)(h_i(u')) \leq x + ((r-1)/2) \cdot |VU|$, onde x é o valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) .

O lema 4.2.3.1.9 é facilmente verificável pela definição do início de 4.2.3.1.

LEMA 4.2.3.1.10 - Sejam $S, (f_{VG}, f_{ES}), (f_{VS}^{(n,m)}, f_{ES}^{(n,m)})$, como definidos antes do Lema 4.2.3.1.2. Se (f_{VS}, f_{ES}) é uma α -numeração para S com valor médio x então, para toda aresta $(u, u') \in S$ ou $f_{VS}^{(n,m)}(u) \leq x \cdot n + m$ e $f_{VS}^{(n,m)}(u') > x \cdot n + m$ ou $f_{VS}^{(n,m)}(u) > x \cdot n + m$ e $f_{VS}^{(n,m)}(u') \leq x \cdot n + m$.

Para provar o lema 4.2.3.1.10 basta verificar que, como $n > 0$, $f_{VS}^{(n,m)}$, como função de f_{VG} , é estritamente crescente.

TEOREMA 4.2.3.1.11 - Sejam S e U árvores e $v \in VU$. Se as condições enunciadas em a) ou as condições enunciadas em b) ou as condições enunciadas em c) se verificam então $SU^{(v)}$, como definida antes do Ex. 4.2.3.1.3, é uma árvore α -numerável.

- a) $|VS|$ é par, existe α -numeração para S com valor médio igual a $|VS|/2 - 1$, U é β -numerável.
- b) $|VS|$ é ímpar, existe α -numeração para U com valor médio não menor que m (veja definição que antecede o Exemplo 4.2.3.1.3), existe α -numeração para S com valor médio igual a $(|VS| - 1)/2$.
- c) $|VS|$ é ímpar, existe α -numeração para U com valor médio menor que m (veja definição que antecede o Exemplo 4.2.3.1.3), existe α -numeração para S com valor

médio igual a $(|VS|-1)/2-1$.

O Teorema 4.2.3.1.11 é facilmente verificável a partir dos lemas 4.2.3.1.1, 4.2.3.1.2, 4.2.3.1.9 e 4.2.3.1.10.

TEOREMA 4.2.3.1.12 - Sejam S e U árvores, $w \in VS$, $v \in VU$. Se as condições enunciadas em a) ou as condições enunciadas em b) se verificam então $SU^{(v,w)}$, como definida antes do Exemplo 4.2.3.1.6, é uma árvore α -numerável.

a) $|VS|$ é ímpar, existe α -numeração (f_{VS}, f_{ES}) para S com valor médio igual a $(|VS|-1)/2-1$ e $f_{VS}(w) = |VS|-1$, existe β -numeração (f'_{VU}, f'_{EU}) para U com $f'_{VU}(v) = 0$.

b) $|VS|$ é par, existe α -numeração (f_{VS}, f_{ES}) para S com valor médio igual a $|VS|/2-1$ e $f_{VS}(w) = |VS|-1$, existe α -numeração (f'_{VU}, f'_{EU}) para U com $f'_{VU}(v) = 0$.

O Teorema 4.2.3.1.12 é facilmente verificável a partir dos lemas 4.2.3.1.1, 4.2.3.1.2, 4.2.3.1.9 e 4.2.3.1.10.

No Apêndice B encontram-se duas construções relacionadas com esta secção. A construção dos Cahit [C1] (B1) é uma numeração para uma classe de árvores β -numeráveis que é subclasse de Stanton-Zarnke; a numeração dos Cahit é distinta da de Stanton-Zarnke para esta subclasse, assemelhando-se à construção derivada da prova do Lema 4.2.1.2. A construção de Gabow [GA] (B2) para árvores, chamadas por ele, de Fibonacci usa a construção de Stanton-Zarnke.

4.2.3.2 - MAIS CLASSES DE ÁRVORES β -NUMERÁVEIS

O enunciado do Lema 4.2.3.2.2 assim como todas as provas de lemas e teoremas desta secção foram feitos por nós. Os demais resultados desta secção foram enunciados por Rosa [RO].

Denotamos por F a classe de árvores tal que uma árvore G pertence a F se e somente se existe um vértice $v \in VG$ tal que todos os n ramos de v em G são arcos envolvidos e $n-1$ desses ramos são isomorfos.

LEMA 4.2.3.2.1 - Sejam G e G'' grafos, $v \in VG$, $v'' \in VG''$. Se existe α -numeração (f_{VG}, f_{EG}) para G tal que $f_{VG}(v) = 0$ e existe β -numeração $(f''_{VG''}, f''_{EG''})$ para G'' tal que $f''_{VG''}(v'') = 0$ então o grafo G' , união de G, G'' por identificação de vértices segundo (v, v'') , é β -numerável.

PROVA - Seja x valor médio de (f_{VG}, f_{EG}) ; pelo Teor. 3.3.3.1

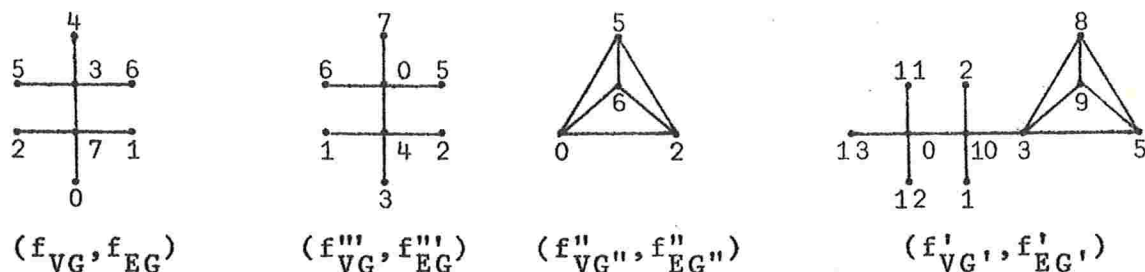
(note que $f_{VG}(v) = 0$) existe α -numeração (f'''_{VG}, f'''_{EG}) para G tal que $f'''_{VG}(v) = x$. Seja VG_I, VG_{II} a partição de VG induzida por (f'''_{VG}, f'''_{EG}) . Vamos então construir uma α -numeração $(f'_{VG'}, f'_{EG'})$ para G' .

$$f'_{VG'}(u) = \begin{cases} f'''_{VG}(u) & \text{se } u \in VG_I \\ f'''_{VG}(u) + |EG''| & \text{se } u \in VG_{II} \\ f'''_{VG}(u) = f''_{VG''}(u) + x & \text{se } u \in VG''. \end{cases}$$

É fácil verificar que $(f'_{VG'}, f'_{EG'})$ é uma β -numeração para G' . □

O exemplo seguinte ilustra a construção do Lema 4.2.3.2.1.

EXEMPLO 4.2.3.2.2



É interessante observar pela prova do Lema 4.2.3.2.1, que existe o seu análogo para α -numeração; de fato, a α -numeração resultante aqui para G é a mesma obtida pelo Teorema 3.3.3.3, a).

TEOREMA 4.2.3.2.3 - Toda árvore G em F (Definição 4.2.3.2.1) é β -numerável.

PROVA -

a) Suponhamos que todos os ramos de v em G são isomorfos.

Seja $V'G$ o subconjunto de VG tal que $y \in V'G$ se e somente se $\text{dist}(y, v)$, em G , é 1. Seja G' o subgrafo de G induzido por $\{v\} \cup V'G$; G' é uma estrela. Pela prova do Lema 4.2.1.2 e pelo Teorema 3.2.1 vemos que existe

β -numeração para G' tal que v é numerado $|VG'|-1$.

Seja G'' um dos ramos de v em G e seja u o único vértice de G'' adjacente a v . Pela prova do Lema 4.2.1.2 e pelo Teorema 3.2.1 existe α -numeração para G'' tal que v é numerado $|VG''|-1$ e u é numerado zero. Então, existe β -numeração para G''' , subgrafo de G'' induzido por $VG''-\{v\}$, tal que u é numerado zero.

Pelo Teorema 4.2.3.1.7 (construção de Stanton-Zarnke) e pelas observações feitas acima para G' e G''' temos que G é β -numerável.

- b) Seja G' o ramo de G não isomorfo aos demais ramos e seja G'' a união dos ramos isomorfos.

Por a) e pela construção do Teorema 4.2.3.1.7 existe β -numeração para G'' tal que v é numerado $|VG''|-1$. Então, pelo Teorema 3.2.1, existe β -numeração para G'' tal que v é numerado zero. Como G' é um arco envolvido (veja prova do Teorema 4.2.1.2) existe α -numeração para G' tal que v é numerado zero.

Pelo Lema 4.2.3.2.1 e pelas observações feitas acima para G' e G'' temos que G é β -numerável. \square

É interessante observar que o lema 4.2.3.2.1 é bastante geral, bem mais do que o necessário para o Teorema 4.2.3.2.3. De fato, os ramos não necessitam ser arcos envolvidos; basta que satisfaçam as condições vistas na prova do Teorema 4.2.3.2.3 para as numerações com posições especiais

para o zero.

Denotamos por U_3 (respectivamente, U_4) a classe de árvores tal que uma árvore G pertence a U_3 (respectivamente, U_4) se e somente existe um vértice $v \in VG$ tal que v tem grau 3 (respectivamente, 4) e dois dos ramos de v são arcos e o terceiro ramo é um arco envolvido (respectivamente, os quatro ramos de v são arcos).

Seja G um arco e sejam u, z os seus vértices terminais. Seja $u = u_0, u_1, \dots, z = u_{|EG|}$ (veja Corolário 2.1.2.6) o caminho único de u para z . Denotamos por $G_{i-}^{(u, z)}$ (respectivamente $G_{i+}^{(u, z)}$) o subgrafo de G induzido por $\{v_j, 0 \leq j \leq i\}$ (respectivamente, $\{v_j, i \leq j \leq |EG|\}$).

LEMA 4.2.3.2.4 - Seja G um arco e $v \in VG$.

- a) Se o comprimento de G é diferente de 4 ou v não é o centro de G , então existe α -numeração para G tal que v é numerado zero.
- b) Existe β -numeração para G tal que v é numerado zero.

PROVA

- a) Sejam $G, u, z, u = u_0, u_1, \dots, u_{|EG|-1}$ como enunciados na última definição. Sejam i tal que $v = u_i$ e $k = \lfloor |EG_{i+}^{(u, z)}| / 2 \rfloor$. Se i igual a zero ou $|EG|$ então pela prova do teorema 4.2.1.2 existe α -numeração para G com v numerado zero.

Suponhamos, então, $|EG_{i+}^{(u,z)}| \geq 1$ e sem perda de generalidade, $|EG_{i-}^{(u,z)}| \geq |EG_{i+}^{(u,z)}|$. Vamos dividir a prova em partes.

a1) $|EG_{i-}^{(u,z)}| > |EG_{i+}^{(u,z)}|$.

a1.1) $|EG_{i-}^{(u,z)}| \neq 4k+1$.

a1.2) $|EG_{i-}^{(u,z)}| = 4k+1$.

a.1.2.1) $k \neq 1$ ou $|EG_{i+}^{(u,z)}| = 2$.

a.1.2.2) $|EG_{i+}^{(u,z)}| = 3$.

a2) $|EG_{i-}^{(u,z)}| = |EG_{i+}^{(u,z)}|$.

a.2.1) $|EG_{i-}^{(u,z)}|$ é ímpar.

a.2.2) $|EG_{i-}^{(u,z)}|$ é par e maior que 2.

a2.2.1) $|EG| \neq 16$.

a2.2.2) $|EG| = 16$.

a1.1), a2.1) k pertence aos conjuntos-profundidade dos vértices u_{i-1} , em $G_{(i-1)-}^{(u,z)}$, e $u_{|EG|}$ em $G_{i+}^{(u,z)}$ (veja Lemma 4.2.1.8). Então podemos aplicar a construção do Teorema 3.3.3.3,c).

a1.2.1) Neste caso temos $|EG_{(i-2)-}^{(u,z)}|$ ímpar e não menor $|EG_{(i-1)+}^{(u,z)}|$. Podemos então aplicar o mesmo raciocínio feito para a1.1), a2.1).

a1.2.2) O Exemplo 4.2.3.2.5 mostra que existe α -numeração para este grafo com v numerado zero.

a2.2.1) Vamos apresentar uma π -numeração (veja Teorema 3.3.1.6) para $G_{(i+i/2-1)}^{(u,z)}$ tal que u_i tem profundidade negativa 1.

Consideremos a partição dos vértices de G em VG_I, VG_{II} com $u_0 \in VG_I$. Deixamos ao leitor a verificação das propriedades.

$$f_{\pi VG_I}(u_0) = 1;$$

$$f_{\pi VG_{II}}(u_j) = \begin{cases} f_{\pi VG_I}(u_{j-1})+1 & \text{se } 0 < j < i/2 \text{ ou } j > i \\ f_{\pi VG_I}(u_{j-1})-1 & \text{se } j = i/2 \\ f_{\pi VG_I}(u_{j-1})-2 & \text{se } i/2 < j < i; \end{cases}$$

(j ímpar)

$$f_{\pi VG_I}(u_j) = \begin{cases} f_{\pi VG_{II}}(u_{j-1})+2 & \text{se } 0 < j < 1/2 \text{ ou } j > i \\ f_{\pi VG_{II}}(u_{j-1}) & \text{se } j = i/2 \\ f_{\pi VG_{II}}(u_{j-1})-1 & \text{se } 1/2 < j < i \\ f_{\pi VG_{II}}(u_{j-1}) & \text{se } j = i. \end{cases}$$

(j par)

Pelo Lema 4.2.1.8, o vértice $u_{i+i/2}$, em $G_{(i+i/2)}^{(u,z)}$, tem profundidade positiva 1.

Então podemos aplicar a construção do Teorema 3.4.3.5,c) aos grafos $G_{(i+i/2-1)}^{(u,z)}$ e $G_{(i+i/2)}^{(u,z)}$ e vértices $u_{i+i/2-1}$ e $u_{i+i/2}$.

a2.2.2) O Exemplo 4.2.3.2.7 (veja Teorema 3.3.1.6) mostra que existe α -numeração para este grafo com v numerado zero.

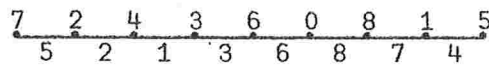
b) Existe β -numeração para o grafo do Exemplo 4.2.3.2.8

tal que seu centro é numerado zero. Então, por a), temos o resultado. \square

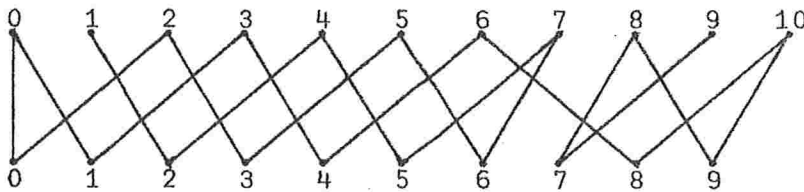
É fácil verificar que não existe α -numeração para o grafo do Exemplo 4.2.3.2.8.

O Exemplo 4.2.3.2.6 (veja Teorema 3.3.1.6) ilustra a construção de a.2.2.1) do Teorema 4.2.3.2.4.

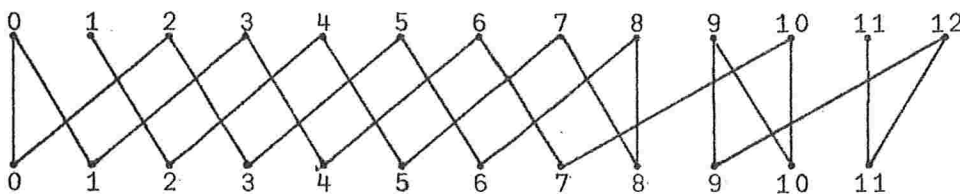
EXEMPLO 4.2.3.2.5



EXEMPLO 4.2.3.2.6

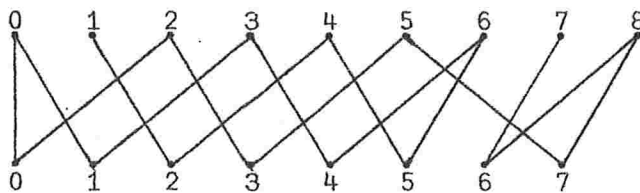


$$|EG| = 20$$



$$|EG| = 24$$

EXEMPLO 4.2.3.2.7



EXEMPLO 4.2.3.2.8



TEOREMA 4.2.3.2.9

- a) Se uma árvore G pertence a U_3 então G é β -numerável.
- b) Se uma árvore G pertence a U_4 então G é β -numerável.

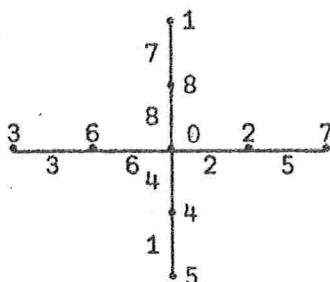
PROVA -

- a) Seja v tal que v tem grau 3 e os dois primeiros ramos de v são arcos e o terceiro ramo é um arco envolvido. Seja G' o arco, união dos dois primeiros ramos de v ; pelo Lema 4.2.3.2.4, b) existe β -numeração para G' tal que v é numerado zero. Seja G'' o arco envolvido, terceiro ramo de v ; pela prova do Lema 4.2.1.2, existe α -numeração para G'' tal que v é numerado zero. Então, pelo Lema 4.2.3.2.1, G é β -numerável.
- b) Seja v tal que v tem grau 4 e os quatro ramos de v são arcos.

O grafo do exemplo 4.2.3.10 é β -numerável. Considere então G não isomorfo ao grafo do exemplo 4.2.3.2.10. Temos então G', G'' , arcos, cada um deles união de dois dos ramos de v tais que $G' \cup G'' = (\{v\}, \emptyset)$ Então, pelo L. 4.2.3.2.4, para um dos G', G'' existe α -numeração tal que v é numerado

zero e para o outro existe β -numeração tal que v é numerado zero. Então, pelo Lema 4.2.3.2.1, G é β -numerável. \square

EXEMPLO 4.2.3.2.10



TEOREMA 4.2.3.2.11 - Seja G uma árvore e $V'G$ o subconjunto de vértices terminais de G . Se $|V'G| \leq 4$ então G é β -numerável.

PROVA - Pela Proposição 2.1.2.5, sobre vértices de valência maior que dois, temos as possibilidades seguintes.

- a) Não existe vértice de valência maior que dois.
- b) Existe um único vértice de valência maior que dois, este vértice tem valência três ou quatro.
- c) Existem dois vértices de valência maior que dois, têm valência três.

Em a) G é um arco, e pelo Lema 4.2.1.2 é α -numerável. Em b) G pertence a U_3 ou U_4 , e pelo Teorema 4.2.3.2.9, é β -numerável. Resta estudar o caso c).

Sejam u, v os vértices com valência três em G . É fácil observar que existem três subgrafos G' (arco que contem

u), G'' (arco que contem v), G''' (arco com vértices terminais u, v) em G tais que sua união é G . Vamos dividir a prova em duas partes.

c1) G' (ou G'') possui vértice terminal cuja distância a u (ou v) é distinta de dois.

c2) Cada um dos vértices terminais de G' (respectivamente, G'') tem distância dois a u (respectivamente v).

c1) Sem perda de generalidade suponhamos G' com vértice terminal cuja distância a u é distinta de dois.

Pelo Lema 4.2.3.2.4, a) e pela prova do T.3.3.1.6, existe π -numeração $(f_{VG', I}^2, f_{VG', II}^2; f_{EG'}^2)$ para G' tal que $f_{VG', I}^2(u) = 0$. Pelas provas do Lema 4.2.1.2 e Teorema 3.3.1.6, existe π -numeração $(f_{VG''', I}^1, f_{VG''', II}^1; f_{EG'''}^1)$ para G''' tal que $f_{VG''', I}^1(u) = \max(\text{Im}(f_{VG''', I}^1))$ e v é numerado zero. Então, pelas provas dos teoremas 3.3.3.3, a), 3.3.1.6 e pelo Teorema 3.2.1, existe α -numeração para G^X , união dos grafos G', G''' , tal que v é numerado zero.

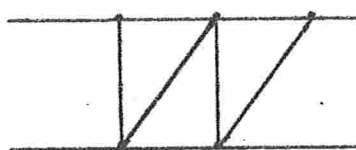
Pelo Lema 4.2.3.2.4, b) existe β -numeração para G'' tal que v é numerado zero.

Finalmente, pelos resultados obtidos para G^X , G'' e pelo Lema 4.2.3.2.1, G é β -numerável.

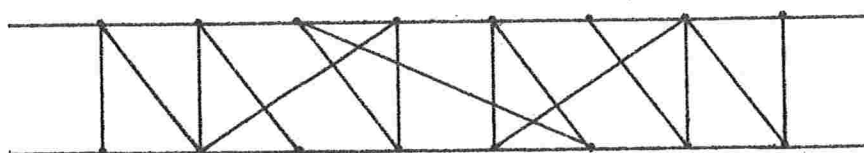
c2) Pelo Exemplo 4.2.3.2.12, vemos que existe π -numeração para G' (respectivamente, G'') tal que u (respec

tivamente, v) tem profundidade 1. (Veja T. 3.3.1.6.)
 Se G''' tem comprimento 4, 5 ou maior que 6, pelo Lema 4.2.1.8, vemos que podemos aplicar a G a construção do Teorema 3.3.3.3, c) (veja Exemplo 4.2.3.2.12).
 Se G''' tem comprimento 1, 2, 3 ou 6 o Exem. 4.2.3.2.13 mostra que G é β -numerável; como neste caso G tem menos que 16 vértices, o Teorema 4.2.3.2.14 comprova ser G β -numerável. \square

EXEMPLO 4.2.3.2.12



G', G''




$G = G' \cup G''' \cup G''$



$G''' \quad |EG'''| = 7$

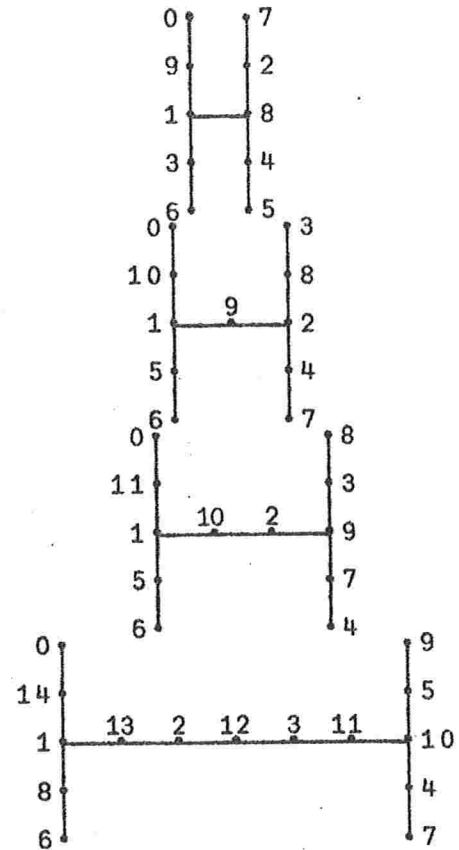
EXEMPLO 4.2.3.2.13 - (Veja G', G'' no exemplo anterior).

$|EG'''| = 1$ 

$|EG'''| = 2$ 

$|EG'''| = 3$ 

$|EG'''| = 6$ 
 G'''



$G = G' \cup G''' \cup G''$

TEOREMA 4.2.3.2.14 - Seja G uma árvore. Se $|VG| \leq 17$ então G é β -numerável.

O resultado do último teorema encontra-se em [DU]; foi obtido com ajuda de computador.

4.2.3.3 - A CONJECTURA SOBRE β -NUMERAÇÃO DE ÁRVORES

O teorema seguinte foi demonstrado pela primeira

vez por A. Lempel e encontra-se em [G1]; a sua prova aqui a presentada foi feita por nós.

TEOREMA 4.2.3.3.1 - Árvores satisfazem a condição necessária de Golomb (Teorema 3.4.2.3).

PROVA - Vamos usar indução sobre o número de arestas numa árvore G para mostrar que G tem co-fronteira da cardinalidade $\lfloor (|EG|+1)/2 \rfloor$.

BASE - Se $|EG| = 1$ o resultado é evidente.

PASSO DA INDUÇÃO - Suponhamos o resultado verdadeiro para árvores com menos que n arestas.

Consideremos então G com n arestas, $n \geq 2$. Sejam u vértice terminal em G , v vértice adjacente a u e G' o subgrafo de G induzido por $VG - \{u\}$. Pela hipótese da indução existe co-fronteira em G' , induzida por VG'_I, VG'_{II} ($v \in VG'_I$), de cardinalidade $\lfloor n/2 \rfloor$. Então existe co-fronteira em G , induzida por VG_I, VG_{II} ($VG_I = VG'_I$, $VG_{II} = VG'_{II} \cup \{u\}$ se n é ímpar e $VG_I = VG'_I \cup \{u\}$, $VG_{II} = VG'_{II}$ se n é par), de cardinalidade $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

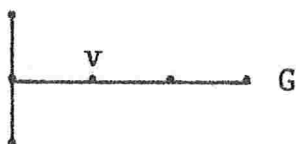
□

Existe uma conjectura muito pesquisada de que todas as árvores são β -numeráveis. Até hoje não se conseguiu um contra-exemplo nem uma demonstração para a conjectura.

Foram feitos muitos testes em computador para pesquisa de árvores β -numeráveis que possuem um vértice que não

pode ser numerado zero; podemos ver motivação para isto, por exemplo, no fato de que se obtem, de árvores β -numerável, árvore β -numerável com mais uma aresta, por identificação de vértice numerado zero. Para todas as árvores encontradas nestas condições o tal vértice é ou terminal ou centro de árvore; o exemplo que segue ilustra este fato.

EXEMPLO 4.2.3.3.2



Para esta árvore G, não existe β -numeração tal que v seja numerado zero.

Mencionamos, finalmente, que não encontramos grafo conexo σ -numerável e não β -numerável. Se tal grafo não existe então (veja Teorema 3.5.2.1) toda árvore é β -numerável.

4.3 - SOBRE NUMERAÇÃO DE GRAFOS BIPARTIDOS COMPLETOS

TEOREMA 4.3.1 - Um grafo bipartido completo G é α -numerável.

PROVA - Seja $VG_I = \{v_1, v_2, \dots, v_{|VG_I|}\}$, $VG_{II} = \{u_1, u_2, \dots, u_{|VG_{II}|}\}$ uma partição de VG induzida pela bipartição de G. Definimos a numeração (f_{VG}, f_{EG}) seguinte para G.

$$f_{VG}(v_i) = i-1, 1 \leq i \leq |VG_I|;$$

$$f_{VG}(u_i) = i|VG_I|, 1 \leq i \leq |VG_{II}|$$

É facilmente verificável que (f_{VG}, f_{EG}) é uma α -numeração para G .

4.4 - SOBRE NUMERAÇÕES DE GRAFOS COMPLETOS

TEOREMA 4.4.1 -

- a) Um grafo completo de ordem 4 é β -numerável e é não α -numerável.
- b) Um grafo completo de ordem maior que 4 é não σ -numerável.

PROVA -

- a) O Exemplo 3.4.1.3 e o comentário que o segue mostram o resultado.
- b) Seja G grafo completo de ordem maior que 4; então, $|EG| \geq 10$. Suponhamos (f_{VG}, f_{EG}) (Definição 3.1.3) uma numeração para G . Vamos mostrar primeiro que (f_{VG}, f_{EG}) não é uma β -numeração para G , mostrando que um dos números $|EG|, |EG|-1, |EG|-2, |EG|-3, |EG|-4, |EG|-5$ não pode pertencer à imagem de f_{VG} . Para que uma das arestas seja numerada $|EG|$ é preciso que $0, |EG|$ pertençam à imagem de f_{VG} . Sem perda de generalidade (veja Teorema 3.2.1), para que uma das arestas seja numerada $|EG|-1$ é preciso que 1 pertença à imagem de

f_{VG} ; até agora já temos $1, |EG|-1, |EG|$ na imagem de f_{VG} . Então, para que uma das arestas seja numerada $|EG|-2$ é fácil verificar que é preciso que $|EG|-2$ pertença à imagem de f_{VG} ; até agora já temos $1, 2, |EG|-3, |EG|-2, |EG|-1, |EG|$ na imagem de f_{EG} . Então, para que uma das arestas seja numerada $|EG|-4$ é fácil verificar que é preciso que 4 pertença à imagem de f_{VG} ; até agora já temos $1, 2, 3, 4, |EG|-6, |EG|-4, |EG|-2, |EG|-1, |EG|$ na imagem de f_{EG} . Finalmente, é fácil verificar que é impossível incluir $|EG|-5$ na imagem de f_{EG} . Para mostrar que (f_{VG}, f_{EG}) não é também uma σ -numeração para G basta observar que não é β -numeração e que G é um grafo completo. \square

O Teorema 4.4.1, b) foi demonstrado por Golomb [G1] para β -numeração; completamos a prova do teorema para σ -numeração.

Pelo teorema anterior sabemos que um grafo completo G com 10 vértices é não σ -numerável. O teorema seguinte ilustra uma aplicação do teorema de Golomb (teor. 3.5.3.3), mostrando que se e é uma aresta qualquer de G então $G-\{e\}$ é também não σ -numerável.

TEOREMA 4.4.2 - Seja G' um grafo completo com 10 vértices e e uma aresta qualquer de G' . $G = G' - \{e\}$ é não σ -numerável.

PROVA - $|EG| = 44$ e $\lfloor (|EG|+1)/2 \rfloor = 22$. Suponhamos (f_{VG}, f_{EG}) , σ -numeração para G . Então (Teorema 3.5.3.3), existe co-fronteira em G induzida por VG_I, VG_{II} , com $|VG_{II}| = 10 - |VG_I|$. Então, dependendo de estarem ambos os pontos d e e em VG_I ou VG_{II} ou de estarem uma das partes d e e em VG_I e a outra em VG_{II} , $|VG_I| \cdot |VG_{II}|$ ou $|VG_I| \cdot |VG_{II}| - 1$, é igual a 22. Mas não existe $m \in \mathbb{N}_{10}$ tal que $m(10-m)$ ou $m(10-m) - 1$ é igual a 22. \square

De acordo com o Teorema de Rosa (3.6.3.4) um grafo completo G' é ρ -numerável se e somente se existe decomposição cíclica de um grafo completo G com $2 \binom{|VG|}{2} + 1$ vértices numa família de grafos isomorfos a G' . Todas as propriedades enunciadas em 3.6.3 são, evidentemente, válidas para este caso particular. A proposição 4.4.3 (respectivamente, 4.4.4, 4.4.5) é consequência da Proposição 3.6.3.5 (respectivamente, 3.6.3.6 e 3.6.3.7, 3.6.3.9) e corresponde à restrição $\lambda = 1$ (respectivamente, propriedades) para blocos cíclicos [HL]. (Veja Apêndice A.)

PROPOSIÇÃO 4.4.3 - Seja F uma decomposição de um grafo completo G em grafos isomorfos a um grafo completo. Então, para cada dois vértices distintos $u, v \in VG$, existe um único grafo G' em F tal que $u, v \in VG'$.

PROPOSIÇÃO 4.4.4 - Se existe decomposição cíclica de um grafo completo G numa família F de subgrafos isomorfos a um grafo completo G' e G' é maximal em relação à decomposição cíclica de G em grafos isomorfos, então

$$|VG| = 2 \binom{|VG'|}{2} + 1 = |F|.$$

PROPOSIÇÃO 4.4.5 - Seja F uma decomposição cíclica de um grafo completo G , com $2n$ vértices, numa família de grafos completos com n arestas. Então, para quaisquer grafos distintos G', G'' em F , $|VG' \cap VG''| = 1$.

As provas das Proposições 4.4.3, 4.4.4 e 4.4.5 são evidentes a partir das Proposições 3.6.3.5, 3.6.3.6, 3.6.3.7 e 3.6.3.9.

As definições de conjunto de diferenças e blocos cíclicos assim como as provas das equivalências entre os conceitos decomposição de grafo completo em grafos completos e bloco cíclico com $\lambda = 1$ e também entre os conceitos ρ -numeração de grafo completo e conjunto de diferenças com $\lambda = 1$ são encontrados no Apêndice A (A1 e A2). Concluimos, então, que se G' é um grafo completo com $\binom{k}{2}$ arestas (k vértices), então o teorema de Rosa (3.6.3.4) é equivalente ao teorema da combinatória para $\lambda = 1$: "Um conjunto de k resíduos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ é um conjunto de diferenças com parametros $(v = 2\binom{k}{2} + 1, k, \lambda)$ se e somente se os conjuntos $\{a_{1+i}, a_{2+i}, \dots, a_{k+i}\} \pmod{v}$, $i = 0, 1, \dots, v-1$, formam um bloco cíclico com parametros $(v = 2\binom{k}{2} + 1, k, \lambda)$ ".

Uma classe de grafos completos ρ -numeráveis é reconhecida através do Teorema de Singer [HL] da combinatória, baseado na geometria projetiva sobre corpos finitos. A pro-

va do teorema de Singer encontra-se no Apêndice A (A3). Em [RO] encontra-se menção à existência do teorema seguinte.

TEOREMA 4.4.6 - Um grafo completo G com p^j+1 vértices, sendo p um número primo e j um número natural, é ρ -numerável.

PROVA - Pelo Teorema de Singer (veja Corolário A.3.6), para todo número p^j+1 , p primo e j natural, existe um bloco cíclico com parâmetros $(v = 2\binom{p^j+2}{2}+1, k=p^j+1, \lambda=1)$.

Pelo teorema da equivalência entre os conceitos de composição cíclica de um grafo completo em grafos completos e bloco cíclico com $\lambda = 1$ (Teorema A.2.1), existe um bloco cíclico com parâmetros $(v = 2\binom{p^j+1}{2}+1, k=p^j+1, \lambda=1)$ se e somente se existe decomposição cíclica de um grafo completo com $2\binom{p^j+1}{2}+1$ vértices em grafos isomorfos a um grafo completo com p^j+1 vértices.

Então, por esses dois teoremas e pelo teorema de Rosa (Teorema 3.6.3.4) G é ρ -numerável.

A recíproca do Teorema de Singer, no caso $\lambda = 1$, é equivalente à recíproca do Teorema 4.4.6: "Um grafo completo G é ρ -numerável somente se $|VG| = p^j+1$, p primo e j natural." tem sido muito pesquisada. Por referências encontradas em [RY] sabe-se que se tal resultado não é verdadeiro então G tem mais que 1.601 vértices. Este problema encontra-se também em [E], mencionado por Erdős.

Em [G1] encontram-se todos os grafos conexos com 5 ou menos vértices β -numeráveis e os únicos três grafos conexos com 5 vértices não σ -numeráveis (dois deles são o circuito de comprimento 5 e o grafo completo com 5 vértices); todos os grafos conexos com menos que 5 vértices são β -numeráveis. Uma classe de grafos β -numeráveis, apresentada por Golomb, encontra-se no Apêndice B (B3) deste trabalho.

CAPÍTULO 5

ALGUNS RESULTADOS EXTREMOS

5.1 - SOBRE NUMERAÇÃO EXTENDIDA

5.1.1 - DEFINIÇÃO E EXEMPLO

Uma *numeração estendida* (f_{VG}, f_{EG}) para um grafo G é uma numeração (f_{VG}, f_{EG}) para G . Denotamos aqui, por

$$NE_G \text{ o } \max(\text{Im}(f_{VG})).$$

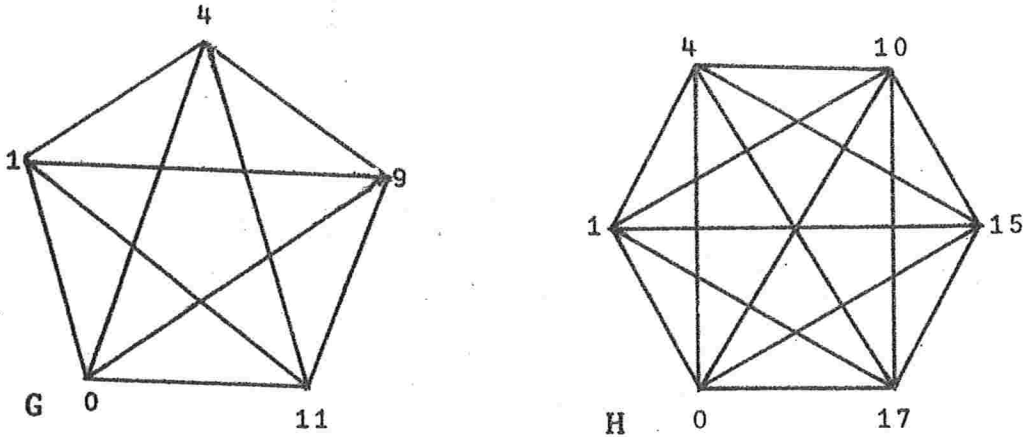
Uma *numeração estendida* (f_{VG}, f_{EG}) para um grafo G é *ótima*, se para toda numeração estendida (f'_{VG}, f'_{EG}) de G , tem-se $\max(\text{Im}(f_{VG})) \leq \max(\text{Im}(f'_{VG}))$. Denotamos por NE_G^* o $\max(\text{Im}(f_{VG}))$, onde (f_{VG}, f_{EG}) é uma numeração estendida ótima para G .

PROPOSIÇÃO 5.1.1.1 - Se (f_{VG}, f_{EG}) é uma numeração estendida ótima para G , então $\min(\text{Im}(f_{VG})) = 0$.

PROVA - Se $\min(\text{Im}(f_{VG})) = n \neq 0$ então é evidente que (f'_{VG}, f'_{EG}) ,

definida por $f'_{VG}(v) = f_{VG}(v) - n$, é uma numeração extendida para G e $\min(\text{Im}(f'_{VG})) = \min(\text{Im}(f_{VG})) - n = 0$.

EXEMPLO 5.1.1.2



Como já mostramos (Teorema 4.4.1,b), um grafo completo G com mais que 4 vértices é não β -numerável. Então a numeração para G apresentada no Exemplo 5.1.1.2 é ótima; então $NE_G^* = 11$. Segundo Golomb [G1], $NE_H^* = 17$.

5.1.2 - UM LIMITE PARA NE_G^*

O objetivo principal desta secção é o Teor.5.1.2.6 que apresenta um limite para NE_G^* , função do número de vértices de G ; para isto são definidas sequências SNE_n .

Uma sequência crescente com n números inteiros não negativos S_n é denotada por SNE_n se o conjunto de seus elementos é igual a $\text{Im}(f_{VG})$ de uma numeração extendida (f_{VG}, f_{EG}) para um grafo completo G , com n vértices. Uma sequência SNE_n

é denotada por SNE_n^* se a correspondente numeração estendida é ótima.

Seja uma sequência de n números $S_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Denotamos por $S_n^{(i,j)}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, a subsequência de $S_n, \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}$. Denotamos por SD_{n-1} a sequência derivada de S_n definida por $sd_i = s_{i+1} - s_i$, $i=1, 2, \dots, n-1$.

É evidente que uma sequência de n números $S_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ é determinada por seu primeiro elemento s_1 e por sua derivada SD_{n-1} .

A proposição seguinte caracteriza as sequências SNE_n por propriedades de somas e diferenças entre seus termos; é útil na verificação destas sequências.

PROPOSIÇÃO 5.1.2.1 - Seja uma sequência crescente de n números inteiros não negativos $S_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Então as três afirmações seguintes são equivalentes.

- a) A sequência S_n é SNE_n .
- b) $s_\ell - s_k \neq s_j - s_i$ ou seja $s_\ell - s_j \neq s_k - s_i$, ou seja, $s_i + s_\ell \neq s_j + s_k$, para quaisquer s_i, s_j, s_k, s_ℓ em S_n , $s_i < s_j \leq s_k < s_\ell$.
- c) As somas dos números de duas subsequências $SD_{n-1}^{(i,j)}$ e $SD_{n-1}^{(i',j')}$, $i \neq i'$ ou $j \neq j'$, de SD_{n-1} são distintas.

Para provar a Proposição 5.1.2.1 basta observar os

conceitos envolvidos.

Em [K3] são analisadas, por Kotzig, sequências semelhantes às aqui definidas por nós; as de Kotzig formam uma classe maior porque permitem $s_k - s_j = s_j - s_i$ (veja Proposição 5.1.2.1,b)).

Um conjunto de sequências SNE^*D_{n-1} arranjadas em forma de triângulo (como no quadro do exemplo seguinte), é chamado *triângulo de Golomb* [G1].

Pela Proposição 5.1.1.1, SNE^* são determinadas pelo quadro do exemplo seguinte.

EXEMPLO 5.1.2.2 - G é um grafo completo com n vértices.

n	$\binom{n}{2}$	TRIÂNGULO DE GOLOMB	NE_G^*
2	1	1	1
3	3	1 2	3
4	6	1 3 2	6
5	10	1 3 5 2	11
6	15	1 3 6 5 2	17

Verificar sequências SND_{n-1} é simples; basta verificar a condição c) do Teorema 5.1.2.1, como mostra o exemplo seguinte, para o caso $n = 6$. Obter ou verificar sequências SNE^*D_{n-1} já não é tão simples.

EXEMPLO 5.1.2.3

1	3	6	5	2
4	9	11	7	
	10	14	13	
	15	16		
		17		

Os dois lemas que seguem são a base do T. 5.1.2.6.

Seja $S_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ a sequência de Finobacci. Definimos as sequências, com $n-1$ termos, SF_{n-1} , $n \geq 2$ por

$$sf_k = \begin{cases} s_{2k} & \text{se } 1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor \\ s_{2(n-k)+1} & \text{se } \lfloor n/2 \rfloor < k < n. \end{cases}$$

LEMA 5.1.2.4 - Seja G um grafo completo com n vértices. Então

$$NE_G^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) - 2.$$

PROVA - Para provar o lema, basta mostrar as propriedades i), ii) da sequência SF_{n-1} .

- i) A sequência SF_{n-1} , $n \geq 2$, contém do 2º ao n° termos da sequência de Fibonacci.
- ii) A sequência SF_{n-1} é derivada de alguma sequência SNE_n (verifica c) da Proposição 5.1.2.1).

E para mostrar as propriedades i), ii) basta verificar as propriedades seguintes.

iii) O termo de valor máximo da sequência SF_{n-1} , $n \geq 2$, é

$$sf_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} = s_n.$$

iv) Se $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ maior que 1 a subsequência de SF_{n-1} , $SF_{n-1}^{(1, \lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1)}$, contém os $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ primeiros termos de ordens pares da sequência de Finobacci; $SF_{n-1}^{(1, \lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1)}$ é crescente e sua soma é menor que s_n (veja Proposição 2.2.3).

v) Se $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ menor que $n-1$ a subsequência da SF_{n-1} , $SF_{n-1}^{(\lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1, n-1)}$, contém do 2º ao $(\lfloor n/2 \rfloor)^\circ$ termos de ordens ímpares da sequência de Finobacci; $SF_{n-1}^{(\lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1, n-1)}$ é decrescente e sua soma é menor que s_n (veja Proposição 2.2.2).

vi) A sequência SF_{n-1} é subsequência da sequência de SF_n e os termos de SF_{n-1} mantêm a ordem na sequência SF_n .

Agora, o valor à direita da desigualdade do enunciado corresponde à soma dos termos da sequência SF_{n-1} (veja Proposição 2.2.1 e 2.2.4). \square

LEMA 5.1.5.2 - Seja G um grafo completo com n vértices. Então, $NE_G^* \leq n^{2-n'}$, onde n' é o menor inteiro maior ou igual a n da forma $p^j + 1$, p um número primo e j um número natural.

PROVA - Se um grafo tem p^{j+1} vértices, então é ρ -numerável.

Além disso, se G é subgrafo de um grafo G' para o qual existe numeração extendida, então existe numeração extendida para G e $NE_G^* \leq NE_{G'}^*$. \square

TEOREMA 5.1.2.6 - Seja G um grafo completo com n vértices.

Então

$$NE_G^* \leq \min \left\{ n'^2 - n', \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right] - 2 \right\},$$

onde n' é o menor inteiro, maior ou igual a n da forma p^{j+1} , p um número primo e j um número natural.

O Teorema 5.1.2.6 é consequência dos lemas 5.1.2.4, 5.1.2.5.

Em [G1] encontra-se o seguinte resultado não publicado devido a Erdős: "NE_G^* vale aproximadamente n^2 , onde G é um grafo completo com n vértices". O Teorema 5.1.2.6 foi enunciado por nós.

A pergunta seguinte foi feita por Golomb [G1]: "Para qualquer grafo G e uma sua qualquer numeração extendida ótima sempre existe aresta que é numerada NE_G^* ?". Esta pergunta está relacionada à existência ou não de um grafo σ -numerável e não β -numerável; respondemos negativamente a esta pergunta, neste trabalho, mostrando que existe tal grafo (veja Exemplo 3.5.3.2).

5.2 - SOBRE LIMITE NO NÚMERO DE ARESTAS PARA β -NUMERAÇÃO

As definições desta secção encontram-se em [G1] e [G2]; são devidas a Golomb.

Definimos $G_n = (VG_n, EG_n)$, $n \leq 2$ na forma seguinte.

G_n possui n vértices; $VG_n = VG_{nI} \cup VG_{nII}$,

$VG_{nI} = \{v_0, v_1, \dots, v_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\}$; $VG_{nII} = \{u_0, u_1, \dots, u_{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}\}$.

$$EG_n = E'G_n \cup E''G_n \cup E'''G_n$$

onde

$E'G_n$ é o conjunto de todas as arestas (v, u) , $v \in VG_{nI}$, $u \in VG_{nII}$,

$E''G_n$ é o conjunto de todas as arestas (v_0, v) , $v \in VG_{nI} - \{v_0\}$,

$E'''G_n$ é o conjunto de todas as arestas $(u, u_{\lfloor (n-2)/2 \rfloor})$, $u \in VG_{nII} - \{u_{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}\}$.

LEMA 5.2.2 - Todo grupo G_n é β -numerável.

PROVA - Definimos a numeração (f_{VG_n}, f_{EG_n}) seguinte para G_n .

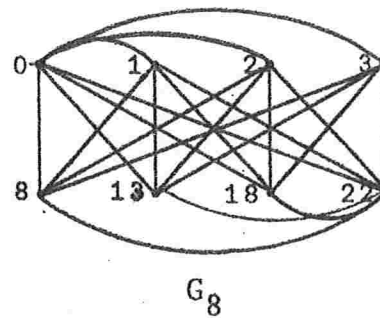
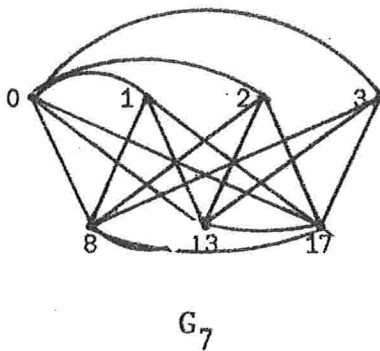
$$f_{VG_n}(v_i) = i;$$

$$f_{VG_n}(u_i) = \begin{cases} \lfloor (n+1)/2 \rfloor (i+2) + i, & 0 \leq i < \lfloor (n-2)/2 \rfloor \\ \lfloor n^2/4 \rfloor + n - 2, & i = \lfloor (n-2)/2 \rfloor. \end{cases}$$

Deixamos ao leitor verificar que (f_{VG_n}, f_{EG_n}) é uma β -numeração para G_n . \square

O exemplo que segue ilustra a construção do Lema 5.2.1.

EXEMPLO 5.2.2



Denotamos por $g(n)$ o maior número inteiro tal que todo grafo com n vértices e mais que $\binom{n}{2} - g(n)$ arestas é não β -numerável.

TEOREMA 5.2.3 - $g(n)$, como definido acima, é menor que $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

PROVA - Pelo Lema 5.2.1 G_n , com $\lfloor n^2/2 \rfloor + n - 2$ arestas, é β -numerável. Portanto,

$$g(n) \leq \binom{n}{2} - (\lfloor n^2/4 \rfloor + n - 2) \leq (n^2 - n)/2 - (n^2/4 - 1/4 + n - 2) = (n^2 - G_n + 9)/4.$$

É fácil verificar que para $n = 2, 3, 4$ $(n^2 - G_n + 9)/4 < 1$ e que para $n \geq 5$ o valor de $n^2 - G_n + 9$ é menor que $n^2 - 20$. E o resultado segue.

Em [G1] encontra-se o seguinte resultado não publi

cado devido a Erdős: " $g(n)$, como definido acima, vale cn^2 , onde c vale aproximadamente $1/4$ ". O Teorema 5.2.3 foi enunciado por nós.

APÊNDICE A

BLOCOS CÍCLICOS E CONJUNTOS DE DIFERENÇAS

A.1 - DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Um *bloco projetado* com parâmetros (b, v, k, r, λ) é uma família de b subconjuntos (chamados *blocos*), com elementos de um conjunto X de cardinalidade v , satisfazendo as propriedades seguintes.

- i) Cada bloco tem k elementos.
- ii) Cada elemento de X pertence a r blocos.
- iii) Cada subconjunto de X com 2 elementos é contido em λ blocos.

São *propriedades de um bloco projetado* com parâmetros (b, v, k, r, λ) que $bk = vr$ e $r(k-1) = \lambda(v-1)$.

Um bloco projetado é *simétrico* se $b = v$ e, em consequência, $k = r$; dizemos que um bloco projetado simétrico tem parâmetros (v, k, λ) .

Um bloco projetado simétrico é chamado *bloco cíclico* se existe permutação Ω do conjunto X (de elementos que constituem o bloco cíclico) que é cíclica e tal que Ω para o bloco cíclico (induzida por Ω para X) também é cíclica, ou seja Ω é permutação cíclica do conjunto X e do bloco cíclico tal que se $\Omega(x) = x'$, $x, x' \in X$, e $\Omega(Y) = Y'$, Y, Y' blocos, então, $x \in Y$ se e somente se $x' \in Y'$.

Um conjunto de diferenças com parâmetros (v, k, λ) é um conjunto com k elementos, subconjunto de um conjunto $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{v-1}\}$, de cardinalidade v , tal que, para cada $d \in \mathbb{N}_{v-1} - \{0\}$, existem λ pares ordenados (x_i, x_j) tais que $i - j = d \pmod{v}$.

A.2 - EQUIVALÊNCIAS

Os teoremas A.2.1 e A.2.2 mostram equivalências entre os conceitos decomposição cíclica de grafo completo em grafos completos (veja Definição 3.7.3.3) e bloco cíclico com $\lambda = 1$ e entre os conceitos ρ -numeração de grafo completo e conjunto de diferenças com $\lambda = 1$.

TEOREMA A.2.1-Existe uma decomposição cíclica de um grafo completo com $2\binom{k}{2}+1$ vértices em grafos isomorfos a um grafo completo com k vértices se e somente se existe bloco cíclico com parâmetros $(v = 2\binom{k}{2}+1, k, \lambda = 1)$.

PROVA

a) Por hipótese existe decomposição cíclica de G , completo com $2\binom{k}{2}+1$ vértices, em F (cujos elementos são grafos completos com k vértices); seja $\{u_0, u_1, \dots, u_{2\binom{k}{2}}\}$ uma ordenação conveniente dos vértices de G . Seja $g:VG \rightarrow N_{2\binom{k}{2}}$ a função tal que $g(u_i) = i, i=0,1, \dots, 2\binom{k}{2}$; é evidente que g é bijeção. Seja F' a família de todos os conjuntos, subconjuntos de VG , tais que cada um é conjunto de vértices de G , $G' \in F'$. Seja g' a função que tem por domínio F' e tal que $g'(\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\}) = \{g(u_{i_1}), g(u_{i_2}), \dots, g(u_{i_k})\} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$; sendo G a imagem de g' , é evidente que $g':F' \rightarrow G$ é bijeção (veja Proposição 4.4.5).

É fácil verificar que a família G é um bloco com parâmetros $(v = 2\binom{k}{2}+1, k, \lambda=1)$; basta verificar as propriedades seguintes.

- a1) $X = N_{2\binom{k}{2}}$ (imagem de g) tem $2\binom{k}{2}+1$ elementos; de fato, G tem $2\binom{k}{2}+1$ vértices.
- a2) G tem $2\binom{k}{2}+1$ elementos; de fato $|F| = 2\binom{k}{2}+1$ (veja Proposição 4.4.4).
- a3) Cada elemento da família G tem k elementos, de fato, cada $G' \in F$ tem k vértices.
- a4) Cada elemento $x \in X$ (veja a1)) comparece k vezes em G ; de fato, cada vértice de G pertence a exatamente k grafos em F (veja Proposição 3.6.3.8).

- a5) Cada subconjunto de X (veja a1)) com 2 elementos é contido num único elemento de G ; de fato, para cada dois vértices distintos u, v em G existe um único grafo G' em F tal que $u, v \in VG'$ (veja Proposição 4.4.3).
- a6) $\Omega: XuG \rightarrow XuG$ tal que $\Omega(x) = x+1 \pmod{2\binom{k}{2}+1}$, para todo x em X (veja a1)) e $\Omega(\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\}) = \{\Omega(i_1), \Omega(i_2), \dots, \Omega(i_k)\}$, para todo $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\}$ em G , é permutação cíclica para X e G ; de fato, h_1 (isomorfismo cíclico) é permutação cíclica dos grafos G' em F .

- b) Por hipótese existe bloco cíclico com parâmetros $(v = 2\binom{k}{2}+1, k, \lambda=1)$. Notemos que g, g' (definidas em a)) são bijeções; deixamos ao leitor a construção de F a partir de G (bloco cíclico) e a verificação das recíprocas das propriedades a1), a2), a3), a4), a5), a6). \square

TEOREMA A.2.2 - Existe ρ -numeração para um grafo completo com k vértices se e somente se existe conjunto de diferenças com parâmetros $(v = 2\binom{k}{2}+1, k, \lambda=1)$.

PROVA -

- a) Por hipótese existe ρ -numeração (f_{VG}, f_{EG}) , para um grafo completo G com k vértices, $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$, tais que $f_{VG}(u_{i_j}) = i_j$, $1 \leq j \leq k$. Pela definição da ρ -numeração (e lembremos também que G tem $\binom{k}{2}$ arestas e que se n, m, v são tais que $0 \leq n < m < v$ então $n-m = v - (m-n)$

(mod v) i_j , $1 \leq j \leq k$, é tal que $0 \leq i_j \leq 2 \binom{k}{2}$ e então o conjunto $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\}$, VG, é um conjunto de diferenças com parâmetros $(v = 2 \binom{k}{2} + 1, k, \lambda = 1)$.

- b) Por hipótese existe um conjunto das diferenças com parâmetros $(v = 2 \binom{k}{2} + 1, k, \lambda = 1)$; seja $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\}$ tal conjunto. Consideramo-lo como VG de um grafo G completo com k vértices; definimos a função $f_{VG}: VG \rightarrow N$ por $f_{VG}(u_{i_j}) = i_j$, $1 \leq j \leq k$. Pelas definições de conjunto de diferenças com $\lambda = 1$ e ρ -numeração (e lembremos também que G tem $2 \binom{k}{2}$ arestas e que se n, m, v são tais que $0 \leq n < m < v$ então $n - m = v - (m - n) \pmod{v}$ temos que (f_{VG}, f_{EG}) é uma ρ -numeração para G. \square

Nos teoremas A.2.1 e A.2.2 razão para a restrição de λ a 1 é evidente; razão para a restrição de v a $2 \binom{k}{2} + 1$ pode ser vista tanto como consequência da propriedade $k(k-1) = \lambda(v-1)$, sendo $\lambda = 1$, em A.2.1 e da definição de conjunto de diferenças sendo $\lambda = 1$, em A.2.2 como de ser decomposição em grafos completos em A.2.1 e de ser ρ -numeração de grafo completo em A.2.2. Os teoremas A.2.1 e A.2.2 foram enunciados por nós.

Uma consequência dos teoremas A.2.1, A.2.2 e Teorema 3.6.3.4 (de Rosa) é a equivalência entre blocos cíclicos com parâmetros $(v = 2 \binom{k}{2} + 1, k, \lambda = 1)$ e conjuntos de diferenças com parâmetros $(v = 2 \binom{k}{2} + 1, k, \lambda = 1)$. Na verdade esta equivalência é verdadeira para λ qualquer (veja [HL]).

A.3 - TEOREMA DE SINGER

Antes de enunciar o teorema de Singer vamos enunciar alguns resultados da Álgebra (lemas A.3.1, A.3.2, A.3.3) que são necessários para a prova deste teorema. Provas para os lemas A.3.1, A.3.2, A.3.3 são encontrados em [DE].

LEMA A.3.1 - Para todo p^j , p número primo e j número natural, existe, sob isomorfismo, um único corpo finito com p^j elementos; este corpo é denotado por $GF(p^j)$ ("Galois Field" com p^j elementos). Dado um polinômio f , qualquer de grau n irredutível sobre p^j , $GF(p^m)$, $m = jn$, pode ser representado pela classe de resíduos módulo f .

LEMA A.3.2 - Os $p^m - 1$ elementos distintos de zero de $GF(p^m)$ formam um grupo cíclico sob multiplicação; seu gerador é chamado *raiz primitiva de $GF(p^m)$* .

LEMA A.3.3 - Os subcorpos de $GF(p^m)$ são os corpos $GF(p^j)$ tais que j divide m ; para cada j , divisor de m , existe um único $GF(p^j)$, subcorpo de $GF(p^m)$; $GF(p^j)$ consiste dos elementos $z \in GF(p^m)$ tais que $z^{p^j} = z$. Se x é raiz primitiva de $GF(p^m)$ então, para todo j divisor de m , existe polinômio f , de grau m/j irredutível sobre $GF(p^j)$, tal que $f(x) = 0$.

Antes ainda de enunciar o teorema de Singer vamos definir alguns conceitos da Geometria Projetiva (recomendamos ao leitor a leitura de [BM]) e enunciar um Lema (A.3.4)

decorrente destes conceitos.

Geometria Projetiva é um capítulo sobre Espaços Vetoriais. Na Geometria Projetiva certos conceitos sobre Espaços Vetoriais são destacados e redefinidos; a redefinição de conceitos é conveniente sob aspecto formal, como por exemplo, podemos dizer "Numa Geometria Projetiva sobre corpo finito o número de pontos é igual ao número de hiperplanos.", o que é usado no teorema de Singer: um *espaço projetivo* tem dimensão n se e somente se é um espaço vetorial de dimensão $n+1$. Um ponto é um espaço projetivo de dimensão zero (ou seja espaço vetorial de dimensão um). Um hiperplano de um espaço projetivo de dimensão n é um seu subespaço projetivo de dimensão $n-1$ (ou seja um subespaço vetorial de dimensão n num espaço vetorial de dimensão $n+1$).

São *propriedades de espaços projetivos* que cada um dos seus pontos determina um seu hiperplano projetivo e dois pontos distintos determinam hiperplanos distintos e que a intersecção de dois hiperplanos projetivos é um hiperplano projetivo de dimensão menos dois que a dimensão do espaço.

LEMA A.3.4 - Seja $PG(n, GF(p^j))$ um espaço projetivo de dimensão n sobre $GF(p^j)$ (corpo finito com p^j elementos). Sendo X o conjunto de pontos de $PG(n, GF(p^j))$, a família de hiperplanos de $PG(n, GF(p^j))$ é um bloco projetado simétrico com parâmetros $((p^{j(n+1)}-1)/(p^j-1), (p^{jn}-1)/(p^j-1))$.

$$(p^{j(n-1)} - 1) / (p^j - 1).$$

PROVA - Basta verificar, usando as propriedades de espaços projetivos, as propriedades seguintes.

- i) X tem $(p^{j(n+1)} - 1) / (p^j - 1)$ elementos.
- ii) A família de hiperplanos de $PG(n, GF(p^j))$ tem $|X|$ elementos.
- iii) Cada hiperplano em $PG(n, GF(p^j))$ tem $(p^{jn} - 1) / (p^j - 1)$ elementos.
- iv) Cada elemento de X comparece em $(p^{jn} - 1) / (p^j - 1)$ hiperplanos. Este fato pode ser visto como sequência de que se num bloco projetado com parâmetros (b, v, k, r, λ) (note a regularidade do espaço), b e v são iguais (veja i) e ii)) então k e r são também iguais.
- v) Cada subconjunto de X com 2 elementos é contido em $(p^{j(n-1)} - 1) / (p^j - 1)$ hiperplanos. Este fato pode ser visto como consequência de que num bloco projetado simétrico com parâmetros (v, k, λ) (veja i) e ii) e note a regularidade de espaço) $\lambda = (k^2 - k) / (v - 1)$; de fato, por i) e ii), neste caso particular temos $v - 1 = p^j k$ e portanto $\lambda = (k - 1) / p^j$. λ é também o número de pontos na intersecção de dois hiperplanos de $PG(n, GF(p^j))$.

O teorema seguinte é devido a Singer. Para a compreensão do teorema de Singer são ainda necessários alguns resultados da Álgebra Linear e da Teoria dos Grupos.

TEOREMA A.3.5 - Seja $PG(n, GF(p^j))$ um espaço projetivo de dimensão n sobre $GF(p^j)$ (corpo finito com p^j elementos). Sendo X o conjunto dos pontos de $PG(n, GF(p^j))$, a família de hiperplanos de $PG(n, GF(p^j))$ é um bloco cíclico com parâmetros $((p^{j(n+1)} - 1)/(p^j - 1), (p^{jn} - 1)/(p^j - 1), (p^{j(n-1)} - 1)/(p^j - 1))$.

PROVA - Pelo Lema A.3.4, sabemos que tal família é um bloco projetado simétrico. Basta, então, mostrar o seguinte.

- a) Existe permutação cíclica Ω para X .
- b) Ω , permutação cíclica para X , induz permutação cíclica para a família de hiperplanos.
- a) Seja x a raiz primitiva de $GF(p^{j(n+1)})$ (veja Lema A.3.2). Pelo Lema A.3.3, existe polinômio $f(y) = y^{n+1} + c_n y^n + \dots + c_1 y + c_0$, de grau $n+1$ irredutível sobre $GF(p^j)$, tal que $f(x) = 0$. Temos então

$$(I) \quad x^{n+1} = -c_0 - c_1 x - \dots - c_n x^n$$

e portanto

$$(II) \quad x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_i \in GF(p^j), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Isto estabelece uma correspondência biunívoca entre os x^i , $0 \leq i \leq p^{j(n+1)} - 2$ e os vetores (a_0, a_1, \dots, a_n) não nulos sobre $GF(p^j)$.

Sendo $v = (p^{j(n+1)} - 1)/(p^j - 1)$, $0, 1, x^v, \dots, x^{(p^j - 2)v}$ são

as p^j soluções de $z^{p^j} = z$ e então, pelo Lema A.3.3, são o subcorpo $GF(p^j)$ de $GF(p^{j(n+1)})$. Então $x^i = x^j$ correspondem ao mesmo ponto de $PG(n, GF(p^j))$ se e somente se $i = j \pmod{v}$.

Definindo $\Omega: GF(p^{j(n+1)}) \rightarrow GF(p^{j(n+1)})$ por

$$(III) \quad \begin{aligned} \Omega(0) &= 0 \\ \Omega(x^i) &= x^{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e levando em conta a correspondência entre os x^i e os vetores e a correspondência para mesmos pontos de $PG(n, GF(p^j))$ temos que Ω é permutação de X .

b) Seja Ω como definida em a). Vamos mostrar o seguinte.

b1) A indução de Ω sobre os hiperplanos é uma permutação dos hiperplanos.

b2) A indução de Ω sobre os hiperplanos é uma permutação cíclica dos hiperplanos.

b3) Por (I), (II), (III) temos.

$$(IV) \quad \Omega((a_0, a_1, \dots, a_n)) = (-a_n c_0, a_0 - a_n c_1, \dots, a_{n-1} - a_n c_n)$$

Se u_0, u_1, \dots, u_t , $1 \leq t \leq n$, são $t+1$ vetores independentes em $PG(n, GF(p^j))$ então (observe (IV)) $\Omega(u_0), \Omega(u_1), \dots, \Omega(u_t)$ são também $t+1$ vetores independentes em $PG(n, GF(p^j))$. Além disso, para b_0, b_1, \dots, b_t em $GF(p^j)$ temos

$$\Omega(b_0u_0+b_1u_1+\dots+b_tu_t) = b_0\Omega(u_0)+b_1\Omega(u_1)+\dots+b_t\Omega(u_t).$$

Então Ω permuta subespaços de dimensão t em subespaços de dimensão t . E o resultado segue.

- b2) Seja j tal que Ω^j permuta os pontos de um hiperplano; então Ω^j é o produto de ciclos de comprimento t onde t divide k (note que $\Omega(x^i) = x^{i+1}$). Como Ω^v (v número de hiperplanos em $PG(n, GF(p^j))$) é a identidade então t também divide v . Como v e k (k número de pontos em cada hiperplano) são relativamente primos (de fato $v-p^jk=1$) e t divide ao mesmo tempo v e k , então t é igual a um. Então $j=v$. \square

Na prova do Teorema A.3.5 notamos que não parece necessária a irredutibilidade de $f(x)$, de fato só usamos a irredutibilidade de $f(x)$ para garantir c_0 diferente de zero que é necessário na parte b) para a independência dos vetores $\Omega(u_0), \Omega(u_1), \dots, \Omega(u_t)$. No entanto a irredutibilidade de $f(x)$ é necessária já que é consequência da prova; este resultado segue da observação de que os polinômios y^i , $0 \leq i \leq p^{j(n+1)}-1$ são representantes dos resíduos não nulos módulo f . Concluímos desta nossa observação que se $f(y) = y^{n-1} + c_n y^n + \dots + c_1 y + c_0$, de grau $n+1$ sobre $GF(p^j)$, é tal que $c_0 \neq 0$ e $f(x) = 0$, onde x é raiz primitiva de $GF(p^{j(n+1)})$ então f é irredutível sobre $GF(p^j)$.

O corolário seguinte é obtido do Teorema A.3.5 por

fazer $\lambda = 1$, e em consequência $n = 2$.

COROLÁRIO A.3.6 - Para todo p^j , p primo e j natural, existe bloco cíclico com parâmetros $(v = 2\binom{k}{2} + 1, k, \lambda=1)$, onde $k = p^j + 1$.

O exemplo seguinte ilustra a construção de um bloco cíclico, baseada no teorema de Singer. De fato, para tal construção é suficiente que conheçamos os necessários polinômios e raiz primitiva.

EXEMPLO A.3.7

Sabemos que $g(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$ é irredutível sobre $GF(2)$ e concluimos que x é uma raiz primitiva de $GF(2^6)$; sabemos então que os elementos de $GF(2^2)$ são $0, 1, x^{2^1}, x^{4^2}$ ou $0, 1, w, w+1$, onde $w^2 + w + 1 = 0$. E sabemos também que $f(y) = y^3 + wy^2 + wy + w$ é irredutível sobre $GF(2^2)$ e $f(x) = 0$.

Pelos dados apresentados acima podemos calcular o bloco cíclico com parâmetros $(p^{2j} + p^j + 1, p^j + 1, 1)$, para $p^j = 2^2$ (note que $n = 2$). Para isto basta determinar um dos hiperplanos (blocos) que (veja teoremas A.2.1, A.2.2 e 3.6.3.4) é um conjunto de diferenças com parâmetros $(21, 5, 1)$.

$$\text{Temos } x^i = s_i + t_i x + u_i x^2, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Para determinar um dos hiperplanos basta encontrar os x^i , $0 \leq i < 21$, tais que $u_i = 0$.

Sabemos que $u_0 = u_1 = 0$ e que $u_2 = 1$.

Pela relação $x^3 = wx^2 + wx + w$ temos

$$u_{n+3} = wu_{n+2} + wu_{n+1} + wu_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usando também a relação $w^2 = w+1$, obtemos $x^0, x^1, x^6, x^8, x^{18}$, os elementos procurados.

Representamos o hiperplano por $\{0, 1, 6, 8, 18\}$.

O conteúdo das partes A.1 e A.3 desta secção é encontrada em [HL].

APÊNDICE B

MAIS ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS β -NUMERÁVEIS

B.1 - A CONSTRUÇÃO DOS CAHIT [C1]

Vamos definir aqui uma classe de árvores que é subclasse da classe de Stanton-Zarnke.

Denotamos por G a classe de árvores tal que uma árvore G pertence a G se e somente se existe um vértice $v \in V_G$ tal que todos os ramos de v em G são arcos isomorfos.

O resultado do teorema seguinte já foi provado em 4.2.3.1 mas a β -numeração aqui apresentada é distinta daquela.

TEOREMA B.1.1 - Toda árvore G em G é β -numerável.

PRÓVA - Seja G uma árvore em G e seja v um vértice de G que tem m ramos r_1, r_2, \dots, r_m , todos arcos de comprimento n . Seja $V_G = \{v_0, v_1, \dots, v_{|E_G|}\}$ o conjunto de vértices de G ordenados segundo as regras seguintes.

a) $V_n = v$.

b) Sejam i, j tais que $i \neq n \neq j$, $0 \leq i \leq |EG|$, $v_i \in r_k$, $v_j \in r_\ell$.
Então $k < \ell$ ou $k = \ell$, k é par, $\text{dist}(v_i, v) < \text{dist}(v_j, v)$ ou
 $k = \ell$, k é ímpar, $\text{dist}(v_i, v) > \text{dist}(v_j, v)$.

Definimos a função $f_{VG}: VG \rightarrow N$ por

$$f_{VG}(v_i) = \begin{cases} i/2 & \text{se } i \text{ é par} \\ |EG| - (i-1)/2 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

É evidente que f_{VG} é injetora em $N_{|EG|}$.

Então para que (f_{VG}, f_{EG}) seja uma β -numeração para G é suficiente que f_{EG} seja injetora em $N_{|EG|} - \{0\}$. Que a imagem de f_{EG} está contida em $N_{|EG|} - \{0\}$ é evidente pela observação feita para f_{VG} . Sejam G_1, G_2, \dots, G_m os m subgrafos de G tais que $G_1 = r_1$, $G_2 = r_2$ e, para $1 \leq i \leq m$, $G_i = r_i - \{e\}$, e aresta de G_i com ponta v . É fácil verificar as propriedades seguintes.

- i) Se $i < j$ então, para quaisquer arestas $e \in G_i$, $e' \in G_j$,
 $f_{EG}(e) > f_{EG}(e')$.
- ii) Para todo i , $1 \leq i \leq m$, para duas quaisquer arestas
 e, e' de G_i , $f_{EG}(e) \neq f_{EG}(e')$.
- iii) Se $e \in \bigcup_{i=1}^m G_i$ então $f_{EG}(e) \neq nk$, $1 \leq k \leq (m-2)$.
- iv) Se e é a aresta de r_i , $3 \leq i \leq m$, que tem ponta v , então
 $f_{EG}(e) = n(i-1)/2$ se i é ímpar e $f_{EG}(e) = n(m-i)/2$
se i é par. □

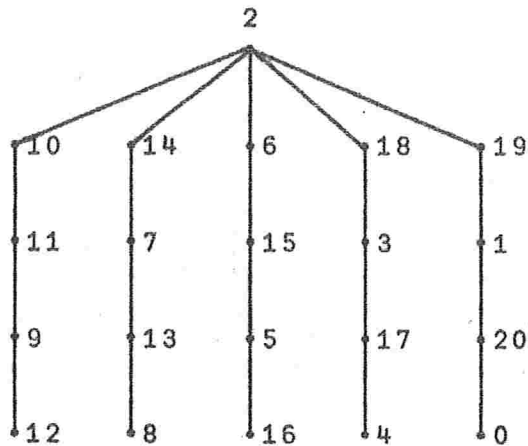
O exemplo que segue ilustra a construção do Teore-

ma B.1.1.

EXEMPLO B.1.2

$m = 5$

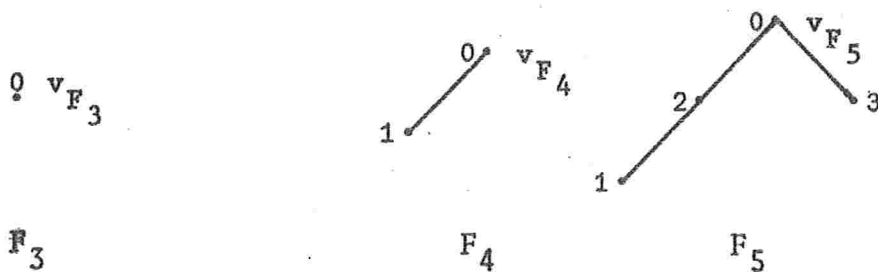
$n = 4$



B.2 - A CONSTRUÇÃO DE GABOW [GA]

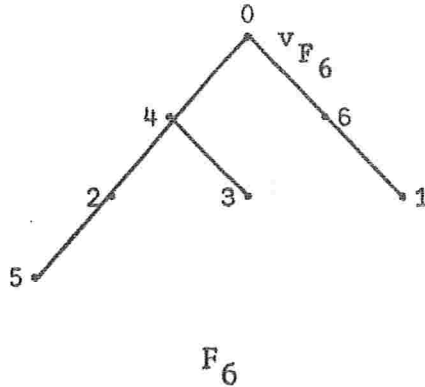
A classe de árvores aqui apresentada foi chamada por Gabow, de Fibonacci.

Denotamos por F_3, F_4, F_5 os grafos β -numeráveis seguintes, com vértices, $v_{F_3}, v_{F_4}, v_{F_5}$.



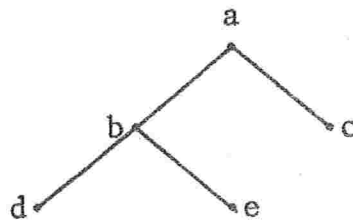
Seja G um arco com vértices, u, v, w , sendo u, w vértices terminais. Denotamos por $F_n, n \geq 6$, o grafo união dos

grafos G , F_{n-1} , F_{n-2} , por identificação de vértices segundo $(u, v_{F_{n-1}})$, $(w, v_{F_{n-2}})$; chamamos v_{F_n} o vértice v de G , na união. O grafo seguinte é F_6 .



É interessante observar que F_n tem s_{n-1} vértices, onde s_n é o n° termo da sequência de Finobacci.

É interessante observar também uma outra forma de ver F_n ; ela nos será útil no próximo teorema. Seja G o grafo seguinte.



F_n , $n \geq 6$ é o grafo união dos grafos G , F_{n-2}^1 , F_{n-2}^0 (F_{n-2}^1 , F_{n-2}^0 isomorfos a F_{n-2}), F_{n-3} , obtido por identificação de vértices segundo $(d, v_{F_{n-2}}^1)$, $(e, v_{F_{n-3}})$, $(c, v_{F_{n-2}}^0)$.

Antes ainda de enunciar o teorema desta secção vamos observar que uma alteração na construção de Stanton-Zarn

ke (veja Lema 4.2.3.1.1), quanto às $(f^{(i,r,v)}_{VG(i)}, f^{(i,r,v)}_{EG(i)})$, por substituir $|VU|$, na definição das $f^{(i,r,v)}_{VU(i)}$, por k , $k \geq |VU|$, conserva as propriedades a), b), c), d), e) do Lema 4.2.3.1.1, sendo que agora é necessário redefinir o limite superior em a), c) para menor ou igual a $k(r-1)+|EU|$.

TEOREMA B.2.1 - Existe β -numeração para F_n , $n \geq 3$, tal que v_{F_n} é numerado zero.

PROVA - Vamos usar a indução sobre n .

BASE - Se $n = 3, 4, 5$ já vimos que o resultado é verdadeiro.

PASSO DA INDUÇÃO - Suponhamos o resultado verdadeiro para todo F_k , $k < n$. Consideremos então F_n , $n \geq 6$. Pela última forma de ver F_n apresentada, consideremos o grafo G com vértices a, b, c, d, e e os grafos $F_{n-2}^1, F_{n-2}^0, F_{n-3}$ que, pela hipótese da indução, possuem β -numerações tais que, respectivamente, $v_{F_{n-2}^1}, v_{F_{n-2}^0}, v_{F_{n-3}}$ são numerados zero; $G, F_{n-2}^1, F_{n-2}^0, F_{n-3}$ são subgrafos de F_n . Vamos apresentar uma construção que, veremos, é uma β -numeração para F_n tal que v_{F_n} é numerado zero.

Definimos a função $f_{VF_n} : VF_n \rightarrow N$ por a), b), c) que seguem, onde s_i deve ser entendido como o i° termo da sequência de Fibonacci.

$$a) f_{VF_n}(a) = s_{n-2}$$

$$f_{VF_n}(b) = s_{n-2}^{-1}$$

$$f_{VF_n}(c) = 0$$

$$f_{VF_n}(d) = s_{n-1}^{-1}$$

$$f_{VF_n}(e) = s_{n-1}^{-2}.$$

b) Seja uma β -numeração para F_{n-2} tal que $u_{F_{n-2}}$ é numerado zero. Sejam os valores de f_{VF} para os vértices de F_{n-2}^1, F_{n-2}^0 definidos conforme comentário que antecede o enunciado deste teorema, para $k = s_{n-1} - 1$; $k > |VF_{n-2}|$ porque $s_{n-1} > s_{n-2}$.

c) Seja $(f''_{VF_{n-3}}, f''_{EF_{n-3}})$ uma β -numeração para F_{n-3} tal que $v_{F_{n-3}}$ é numerado zero. Seja, então, $f_{VF_n}(v) = s_{n-1} - 2 - f''_{VF_{n-3}}(v), v \in VF_{n-3}$.
(Lembre-se que $s_{n-1} > s_{n-3}$).

Então, para verificar que (f_{VF_n}, f_{F_n}) é uma β -numeração para F_n tal que v_{F_n} é numerado s_{n-2} ($\max_{v \in VF_n} f_{VF_n}(v)$) basta verificar as observações a'), b'), c') que seguem.

a') As arestas de G são numeradas $s_{n-2}, s_{n-1}^{-1}, s_{n-3}, s_{n-3}^{-1}$. (Para os vértices de G , veja a).)

b') Os vértices de F_{n-2}^1, F_{n-2}^0 são numerados pelos elementos dos conjuntos $N_{s_{n-2}-2}, \{s_{n-1}^{-1}+i, i \in N_{s_{n-2}-2}\}$; as arestas de F_{n-2}^1, F_{n-2}^0 são numeradas pelos elementos dos conjuntos $\{s_{n-1}^{-1}+i, i \in N_{s_{n-2}-2}-\{0\}\}$,

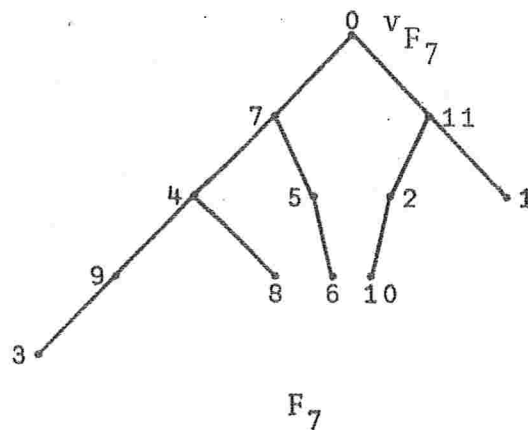
$$\{s_{n-1-1-i}, i \in N_{s_{n-2-2}-\{0\}}\}.$$

c') Os v\u00e9rtices de F_{n-3} s\u00e3o numerados pelos elementos do conjunto $N_{s_{n-1-2}} - N_{s_{n-2-1}}$; as arestas de F_{n-3} s\u00e3o numeradas pelos elementos do conjunto $N_{s_{n-3-2}} - \{0\}$ (este resultado segue da combina\u00e7\u00e3o do Teorema 3.2.1 com o efeito da soma de uma constante aos n\u00fameros dos v\u00e9rtices).

Por fim, basta aplicar o Teorema 3.2.1 \u00e0 β -numera\u00e7\u00e3o (f_{VF_n}, f_{EF_n}) , \(\square\)

O exemplo que segue ilustra a constru\u00e7\u00e3o do Teorema B.2.1.

EXEMPLO B.2.2



B.3 - A CONSTRU\u00c7\u00c3O DE GOLOMB [G1]

Denotamos por G_n , $n \geq 2$, o grafo com $n+1$ v\u00e9rtices

v_0, v_1, \dots, v_n e arestas (v_0, v_i) , $0 < i \leq n$, (v_n, v_i) , $0 < i < n$,
 (v_i, v_{i+1}) , $0 < i < n-1$.

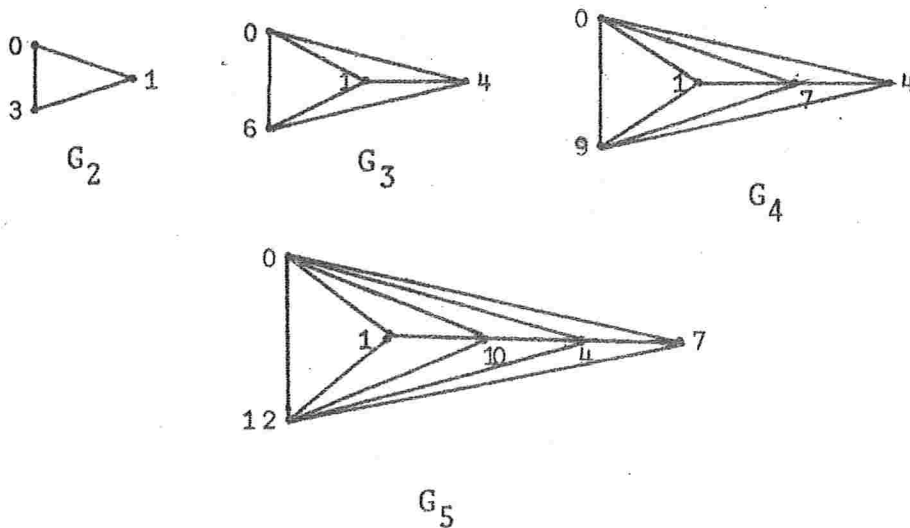
TEOREMA B.3.1 - G_n , $n \geq 2$, é β -numerável.

PROVA - Vamos definir uma β -numeração para G_n ; deixamos ao leitor a sua verificação.

$$f_{VG}(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ 3(i-1)/2+1 & \text{se } i \text{ é ímpar e diferente de } n \\ 3(n-1-i/2)+1 & \text{se } i \text{ é par e diferente de } 0 \text{ e } n \\ 3(n-1) & \text{se } i = n \end{cases} \quad \square$$

O exemplo que segue ilustra a construção do Teorema B.3.1.

EXEMPLO B.3.2



BIBLIOGRAFIA

- [BM] - G.Birkhoff e S.Mac Lane - A Survey of Modern Algebra, Macmillan Company, (1965), 275-279.
- [C1] - I.Cahit e R.Cahit - "On the Graceful numberig of spanning trees", Inf.Proc.Letters, 3,4 (março 1975), 115-118.
- [C2] - I.Cahit - "Are all complete bivary trees graceful?", American Mathematical Monthly, (1976), 35-37.
- [DE] - R.A.Dean - Elements of Abstract Algebra, John Wiley and Sons, Inc., (1966), 222-228.
- [DU] - R.A.Duke, "Can the complete graph with $2n+1$ vertices be packed with copies of an arbitrary tree having n edges?", American Mathematical Monthly, (1969), 1.128-1.130.
- [E] - P.Erdős - The Art of Counting, Selected Writings, Mit Press, (1973), 17-18.
- [G1] - S.W.Golomb - "How to number a graph", editado por R. C.Read, Graph Theory and Computing Academic Press, (1972), 23-37.
- [G2] - S.W.Golomb - "The largest graceful subgraph of the complete graph", American Mathematical Monthly, (1974), 449-501.

- [GA] - H.N.Gabow - "How to gracefully number certain symmetric trees", A.C.M.Sigact News, 7,4, (Novembro - Dezembro, 1975), 33-36.
- [GK] - R.Guy e V.Klee - "Monthly Research Problems, 1969 - 1971", American Mathematical Monthly, (1971), 1116.
- [GU] - R.Guy - "Monthly Research Problems, 1969-1973", American Mathematical Monthly, (1973), 1122.
- [HL] - M.Hall Jr. - Combinatorial Theory, Blaisdell, (1967), 100-131.
- [HR] - F.Harray - Graph Theory, Addison-Wesley, Reading Ma (1969).
- [K1] - A.Kotzig - "On certain valuations of finite graphs", Utilitas Mathematica, 4 (1973), 261-290.
- [K2] - A.Kotzig, " β -valuations of quadratic graphs with isomorphic componentes", Utilitas Mathematica, 7, (1975), 263-279.
- [K3] - A.Kotzig - "On well spread sets of integers", Centre of recherches mathématiques, (1972).
- [RI] - G.Ringel - Problema 25, Theory of Graphs and its Applications, Proc. Sympos. Smolenice 1963, Prague (1964), 162.
- [RO] - A.Rosa - "On certain valuations of the vertices of a graph", Theory of graphs, Proc. Internat.Sympos. Rome, 1966, Gordon & Breach, N.Y.(1967), 349-355.
- [RY] - H.J.Ryser - Combinatorial Mathematics, The Mathematical Association of America (1963), 141.
- [SZ] - R.G.Stanton e C.R.Zarnke - "Labelling of Balanced Trees", Congressus Numeration VIII Proc. 4th. S. E. Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton, (1973).

[V] - N.Vorobiev - Caractères de Divisibilité - Suite de Fi
bonacci, Editions de Moscow (1973), 89-119.

ÍNDICE DE DEFINIÇÕES

arco	10
- comprimento de	10
- denotação admissível $G(i,j,k)$ para	67
- envolvido	10
- árvore(s)	9
- centro de	10
- diâmetro de	10
- homeomorfias	11
- ramos de	11
bloco	
- cíclico	122
- projetado	121
- - simétrico	121
circuito	9
- comprimento de	9
conjunto	
- de diferenças	122
- $\text{Im}(f)$	13
- N	13
- N_m	13
- profundidade $D_G(v)$	27
- $S_e(G)$	64
- $X^{(2)}$	6

corpo $GF(p^j)$	126
- raiz primitiva de	126
espaço projetivo	127
estrela	10
grafo(s)	6
- aresta(s) de	6
- - comprimento de	41
- - incide em vértice	6
- - numeração de	14
- - ponta de	6
- - terminal	7
- base de	9
- bipartido	11
- - completo	11
- caminho	8
- - comprimento de	8
- co-fronteira	8
- completo	12
- componente	8
- conexo	8
- decomposição cíclica de	40
- de Euler	9
- $G_e(j)$	64
- intersecção de	7
- isomorfismo de	8
- - cíclico	40
- isomorfos	8
- nulo	6
- numeração de	14
- - α^-	15
- - - partição induzida por	19
- - - valor médio de	15
- - β^-	15
- - extendida	111
- - - ótima	111

-- π -	17
-- ρ -	15
-- σ -	15
-- numerável	15
-- α -	15
-- β -	15
-- π -	17
-- ρ -	15
-- σ -	15
-- ordem de	6
-- regular de grau n.	7
-- $G(r,s)$	52
-- união de	7
-- por identificação de	7
-- vértice(s)	6
-- adjacentes	7
-- distância entre	8
-- grau de	7
-- profundidade	27
-- -- positiva	27
-- -- negativa	27
-- terminal	7
número	
-- max.	13
-- min.	13
-- $NE*G$	111
-- $ X $	13
-- $ x $	13
-- $[x]$	13
π -representação	17
sequência	
-- derivada SD_{n-1}	113
-- de Fibonacci	12

- $S_n^{(i,j)}$113
- SNE_n	112
- SNE_n^*	113
subgrafo(s)	7
- induzido por vértices.	8
- diferença $G-E'G$	8