EFEITOS DE UMA FORÇA ESCRAVA EM UM PÊNDULO DUPLO

GREGÓRIO MARANGUAPE DA CUNHA

TESE APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR

EM

MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Leon Roque Sinay*

- SÃO PAULO, JULHO DE 1982 -

Dedico a paciência de

Adilina

Juliana

Rodrigo

e

Tiago

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Leon Roque Sinay pelo problema proposto e pela sua valiosa orientação e incentivos recebidos durante a elaboração deste trabalho.

Aos colegas e à direção do Laboratório de Computação Científica do CNPq, pela simpatia, ambiência e positividade que me dedicaram pelo espaço de tempo que precisei para concluir esta dissertação.

Ao Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares por seus constantes estímulos a mim dedicados e pelo seu idealismo junto ao Departamento de Matemática da UFCe.

Aos Profs. Drs. Waldyr Muniz Oliva, Alcileia Augusto Homem de Melo, Ângelo Barone Neto, Mario Barone Junior e Elvia Mureb Sallum, pela salutar convivência que mantivemos durante minha estada no IMEUSP e pelas atenções dispensadas à exposições de tópicos do presente trabalho.

ABSTRACT

The goal of this thesis is to develop analytic techniques for detecting effects of the turbulent boundary layer on an elastic plate immersed in a rapidly flowing fluid. Thus we study a mathematical model of a two-degree-of-freedon non conservative mechanical system subjected to a follower force λ, to a small perturbation, $\delta F(t)$, periodic in time, and to a damping force. This system is intended to be a model of the panel flutter.

The force λ being constant in the time, presents the dynamic pressure of the fluid on the plate, the small perturbation periodic, simulates the fluctuations of the turbulent boundary layer, and a damping force B representing damping action of the fluid on the plate.

To ilustrate the importance of the study of non conservative systems, we notice their presence in examples conected with the vibration of the surface of modern aircrafts emphazising the problem of the stability of equilibrium configurations.

We begin by analyzing the problem $\delta = 0$ i.e. ignoring the effects of turbulent disturbance. This gives a bifurcation problem for the equilibrium configurations $X_0(\lambda)$. We solve this problem and elucidate its mathematical structure, determinating the modes of bifurcation.

In the sequel we will consider $\delta \neq 0$ with $|\delta| << 1$. The question becomes a singular perturbation of a bifurcation. The method of matched asymptotic expansions are developed and used to analyse perturbations of bifurcations. The qualitative properties of the response enable us to conclude that there exists a smooth transition from the basic states of equilibrium to the fluttering states or bifurcated states.

0. INTRODUÇÃO

I. DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO E DA SOLUÇÃO ESTÁTICA

1.1- Introdução.....7

1.2- Determinação dos estados de equilíbrio com $\delta = 0$...15

II. TEORIA DA BIFURCAÇÃO

2.1- Introdução.....19

2.2- Bifurcação.....20

2.3- Método de Poincaré-Lidstedt.....23

2.4- Bifurcação de Hopf.....29

III. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA BIFURCAÇÃO

3.1- Introdução.....35

3.2- Solução do problema da bifurcação.....

IV. TEORIA DA PERTURBAÇÃO SINGULAR DE BIFURCAÇÃO

4.1- Introdução.....65

4.2- Soluções externas 68

4.3- Expansões internas.....76

V. SOLUÇÃO DO PROBLEMA PERTURBADO

5.1- Introdução.....104

5.2- Soluções externas.....108

5.3- Soluções internas.....11[illegible]

BIBLIOGRAFIA.....[illegible]

INTRODUÇÃO

A flexão de uma barra esbelta devido a uma carga compressiva constitui talvez um dos exemplos mais simples e de fácil verificação do fenômeno da bifurcação. Este exemplo foi analizado por Euler, Bernoulli e Lagrange.

Bifurcação, ou ramificação de soluções é um fato presente de significativa importância em muitos problemas não-lineares de estabilidade. Em estabilidade elástica, bifurcação chamada de flexão e em estabilidade hidrodinâmica, bifurcações são chamadas de transições.

O fenômeno da bifurcação para nós neste trabalho não foi um fim, mas um meio de se aproximar de um problema um pouco mais complexo, um problema com perturbação singular de bifurcação. A solução deste, acreditamos ser uma pequena contribuição para um dos ramos de pesquisa em dinâmica dos fluídos que tem sido intensamente estudado nos últimos vinte anos, a "Aeroelasticidade de Placas". Dentro desse objetivo está o caso denominado de "Panel Flutter", na literatura na língua inglesa.

Sendo mais fiel ao interêsse deste trabalho, Panel Flutter é o fenômeno causado em uma pláca elástica quando um fluído escoa sobre sua superfície a velocidades bastante elevadas.

Para simular uma situação como essa, considera-se um modelo matemático representando um sistema mecânico sujeito a uma força escrava, que segundo Bolotin [3], ela é uma força não-conservativa. Exemplos de tais sistemas mecânicos, incluem perfis de asas de avião em uma corrente de ar, escoamento de fluídos em tubos flexíveis, descargas de foguetes, etc. Para ilustrar a importância do estudo de sistemas não-conservativos, relembramos a sua presença em exemplos ligados com a vibração da superfície de modernas aeronaves, prestando especial atenção ao problema da estabilidade das configurações de equilíbrio.

Um fato experimental é de bom alvitre para elucidar mais sobre o assunto. Coloca-se uma placa de pouca espessura em um túnel de vento no qual um fluxo paralelo à superfície da placa é mantido a um número de Mach maior que um. Se a pressão P do fluído é pequena, observa-se que a placa executa uma oscilação aleatória respondendo as flutuações de pressão da Turbulenta Camada Limite (T.C.L.). Mas quando P cresce além de um valor crítico P_c, as oscilações vêm a ser quase senoidais com amplitudes relativamente grandes comparadas com a espessura da placa. Para valores de P em uma vizinhança de P_c, o movimento da placa perturba o fluxo, introduzindo flutuações de pressão que por sua vez afeta o movimento da placa. Esta realimentação da pressão da T.C.L. sobre a placa é a responsavel fundamental pela a instabilidade dinâmica "Flutter". [17]

Mesmo quando a amplitude das oscilações sostentadas resultantes devido ao "Flutter" não sejam grandes, (pode ocorrer

em alguns casos a destruição do sistema pode ocorrer devido a fadiga.

Flutter é um exemplo específico de instabilidade de sistemas mecânicos devido a ação de forças não conservativas.

Os modelos clássicos ignoravam as flutuações de pressão da T.C.L. e quaisquer outras interferências. O problema era então analizado como de Flutter puro. Devido a complexidade que um problema do gênero apresenta para sua abordagem, na maioria dos casos tem-se utilizado computação numerica [17]. Os resultados destes cálculos sugeriram que um problema de Flutter puro, podia ser caracterizado como um problema de bifurcação.

Para tratar matematicamente um problema que se supõe ser de bifurcação, um parâmetro λ de valor real ou vetorial deve ser distinguido e uma solução $X_0(\lambda)$ deve ser conhecida para todo λ. Esta solução é chamada de solução básica de equilíbrio ou estado de equilíbrio. Se em qualquer vizinhança de $\lambda = \lambda_c$ existir outra solução $X(\lambda) \neq X_0(\lambda)$ e tal que $X(\lambda) \longrightarrow X_0(\lambda)$ quando $\lambda \longrightarrow \lambda_c$, diz-se então que se tem um problema de bifurcação. O parâmetro λ será então chamado de parâmetro de bifurcação e $(X_0(\lambda_c),\lambda_c)$, ponto de bifurcação.

Para os problemas de Aeroelasticidade a que estamos nos referindo, o parâmetro λ de bifurcação simula a pressão dinâmica sobre a placa. Se se desprezassem as flutuações de pressão da T.C.L., a existência de uma bifurcação significa uma transição brusca do estado básico de equilíbrio ao estado bifurcado em $\lambda = \lambda_c$.

Essas transições bruscas não acontecem na prática [17] e [18]. Portanto há necessidade de se tentar fazer modificações dos modelos matemáticos classicos de "PANEL FLUTTER".

Várias incursões têm sido feitas no sentido de contribuir para a solução do "Panel Flutter", agora considerado como uma perturbação do Flutter puro, isto é, a T.C.L. é a perturbação. Mas estas investidas sempre foram acompanhadas de métodos numéricos [5]. Pelo tratamento numérico, torna-se difícil visualizar a estrutura matemática das soluções, como também sua dependência física e geométrica dos parâmetros do fluxo do problema.

Diante o exposto acima, tentamos neste trabalho desenvolver algumas técnicas analíticas para investigar os efeito da T.C.L. em placas elásticas quando submetidas a um escoamento de fluído sobre sua superfície.

Estudos anteriores que não consideravam os efeitos da T.C.L. estão nos trabalhos de Bolotin, Non-Conservative Problem of the Theory of Elastic Stability, G. Herrmann, Dynamics and Stability of Mechanical System with Folower Forces, H. Ziegler, Principles of Structural Stability.

O modelo matemático do nosso problema, está apresentado no CAP.I pelas equações (1.2) com ilustração na figura 1. As soluções de equilíbrio X_0, são determinadas na seção 1.2.

No capítulo II tratamos de uma maneira geral o problema da bifurcação, onde tanto o parametro λ e as soluções

procuradas estão em espaços de Banach quaisquer. Neste contexto, damos na seção 2.2, o teorema da bifurcação sem demonstração. Na seção 2.3 apresenta-se o método da perturbação de Poincaré Lindstedt, o que tem por objetivo exibir soluções aproximadas de bifurcação. Para isso fez-se conveniente considerar espaços de Banach que fossem hilbertianos. Ao final deste capítulo citamos também sem demonstração o teorema da bifurcação de Hofp cuja finalidade é investigar localmente a existência de um ramo de soluções periódicas que se bifurcam dos estados básicos de equilíbrio.

O CAP.III trata o problema proposto no CAP.I, como flutter puro, isto é, trata-o como um problema de bifurcação, desprezando portanto os efeitos da perturbação $\delta F(\tau)$ a qual simula a T.C.L. Neste capítulo, determina-se as soluções de bifurcação, exibindo a sua estrutura matemática como aplicação integral da teoria do CAP. II.

No CAP. IV desenvolve-se genericamente uma teoria com vistas a investigar analiticamente um problema perturbado modelado por um sistema não linear de duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Este capítulo se serve de modo substâncial do CAP. II para desenvolver a teoria nele apresentado, pois muitas das condições exigidas dizem respeito ao problema de bifurcação. Em síntese, o problema perturbado é o problema bifurcado com perturbação. Este capítulo é o alvo central deste trabalho porque os resultados nele contidos nos fornecem condições suficientes para deduzir propriedades analíticas do

problema apresentado no CAP. I.

Finalmente o CAP.V dá a solução do problema perturbado (1.2) como aplicação natural da teoria desenvolvida no CAP.IV. Um dos resultados analíticos a que chegamos é a de que há realmente uma transição suave do estado de equilíbrio ao estado básico bifurcado.

CAPÍTULO I

DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO E DA SOLUÇAO ESTÁTICA

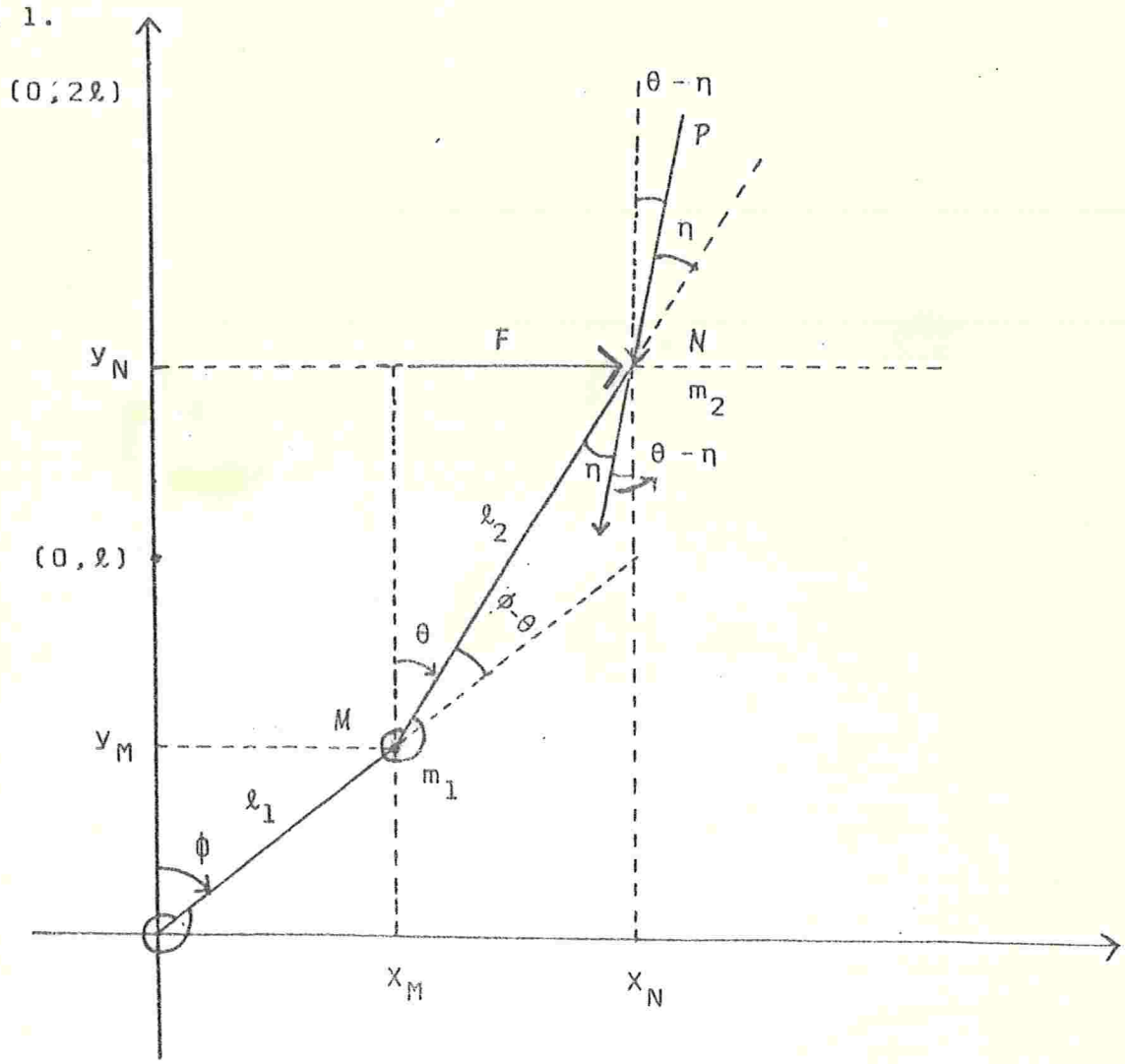
1.1- INTRODUÇÃO

Considerem o modelo mecânico holônomo com dois graus de liberdade ilustrado na figura 1. O pêndulo duplo ali representado está constituído de duas barras ℓ_1 e ℓ_2 sem peso e de igual comprimento ℓ. Estas barras contém nos pontos finais massas iguais m_1 e m_2 conforme mostra a figura. As barras estão ligadas entre si por uma mola linear torcional. O ponto inferior de ℓ_1 está fixo à origem do plano por outra mola torcional. Adicionamos a esta estrutura duas cargas agindo no ponto superior de ℓ_2. Uma, que denotamos por P, age compressivamente formando um ângulo η com a barra ℓ_2 e segue a barra ℓ_2' com este ângulo. Por isso chamamos esta força P de Força Escrava ou Força Seguidora. A outra força a qual denotamos por F, tem uma função perturbadora, age sempre horizontalmente, depende do tempo e é periódica. A força F para nós representará pequenas imperfeições do sistema, por isso a tomaremos como δF com $|\delta| << 1$.

O tempo será denotado por τ', e as posições das barras para um instante qualquer serão dadas por $\phi(\tau')$ e $\theta(\tau')$,

onde ϕ e θ são ângulos que as barras ℓ_1 e ℓ_2 formam com o eixo vertical respectivamente.

FIGURA 1.



As coordenadas generalizadas são portanto ϕ e θ. Estando o sistema representado no plano, é conveniente então ter os pontos M e N nas suas coordenadas cartesianas. Estas são dadas em função de ϕ e θ, como:

$$M = (x_M, y_M) \quad \text{onde} \quad \begin{cases} x_M = \ell \operatorname{sen} \phi \\ y_M = \ell \cos \phi \end{cases}$$

$$N = (x_N, y_N) \quad \text{onde} \quad \begin{cases} x_N = \ell(\operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen} \phi) \\ y_N = \ell(\cos \phi + \cos \phi) \end{cases}$$

Opõe-se ao movimento do sistema momentos proporcionais à variação dos ângulos entre as barras geradas pelas molas torcionais com constante de rigidez C. Em adição supõe-se também que resistem ao movimento forças de amortecimento ou atrito, proporcionais as velocidades angulares das barras. As constantes de proporcionalidade dessas forças serão denotadas por B_1 e B_2.

Derivando relativamente a τ' as coordenadas cartesianas dos pontos M e N, temos:

$$x'_M = \ell\phi' \cos \phi$$

$$y'_M = -\ell\phi' \operatorname{sen} \phi$$

$$x'_N = \ell(\phi' \cos \phi + \theta' \cos \theta)$$

$$y'_N = -\ell(\phi' \operatorname{sen} \phi + \theta' \operatorname{sen} \theta)$$

sejam U e T denotando as energias potencial e cinética respectivamente. Então:

$$U = 1/2 \cdot C \cdot \phi^2 + 1/2 \cdot C \cdot (\phi - \theta)^2$$

$$T = 1/2\ \ell^2\left[m_1\phi_{\tau'}^2 + m_2(\phi_{\tau'}^2 + \theta_{\tau'}^2 + 2\phi_{\tau'}\cdot\theta_{\tau'}\cdot\cos(\phi-\theta)\right]$$

onde $\quad (\ )_{\tau'} = \dfrac{d}{d\tau'}$

Das forças de amortecimento temos a seguinte função de dissipação:

$$D = 1/2\cdot B_1\cdot\phi_{\tau'}^2 + 1/2\cdot B_2\cdot(\phi_{\tau'} - \theta_{\tau'})^2$$

o cálculo da força generalizada Q_ϕ, é feito dando-se um incremento a ϕ, deixando θ fixado. Analogamente para o cálculo de Q_θ. Veja figuras 2 e 3. Q_ϕ e Q_θ são dadas por:

$$Q_\phi = \tilde{Q}_\phi - \frac{\partial U}{\partial\phi}$$

$$Q_\theta = \tilde{Q}_\theta - \frac{\partial U}{\partial\theta}$$

onde $\tilde{Q}_\phi$ e $\tilde{Q}_\theta$ são as forças que não derivam de potencial. Segundo Bolotin [3], a força P não deriva de potencial. Sejam $\delta\tilde{W}_\phi$ e $\delta\tilde{W}_\theta$ trabalhos infinitesimais relativamente a ϕ e θ realizados pelas forças P e F. Então:

$$\delta\tilde{W}_\phi = \left[(F_1, \frac{\partial r_1}{\partial\phi}) + (F_2, \frac{\partial r_2}{\partial\phi})\right]\delta\phi$$

FIGURA 2.

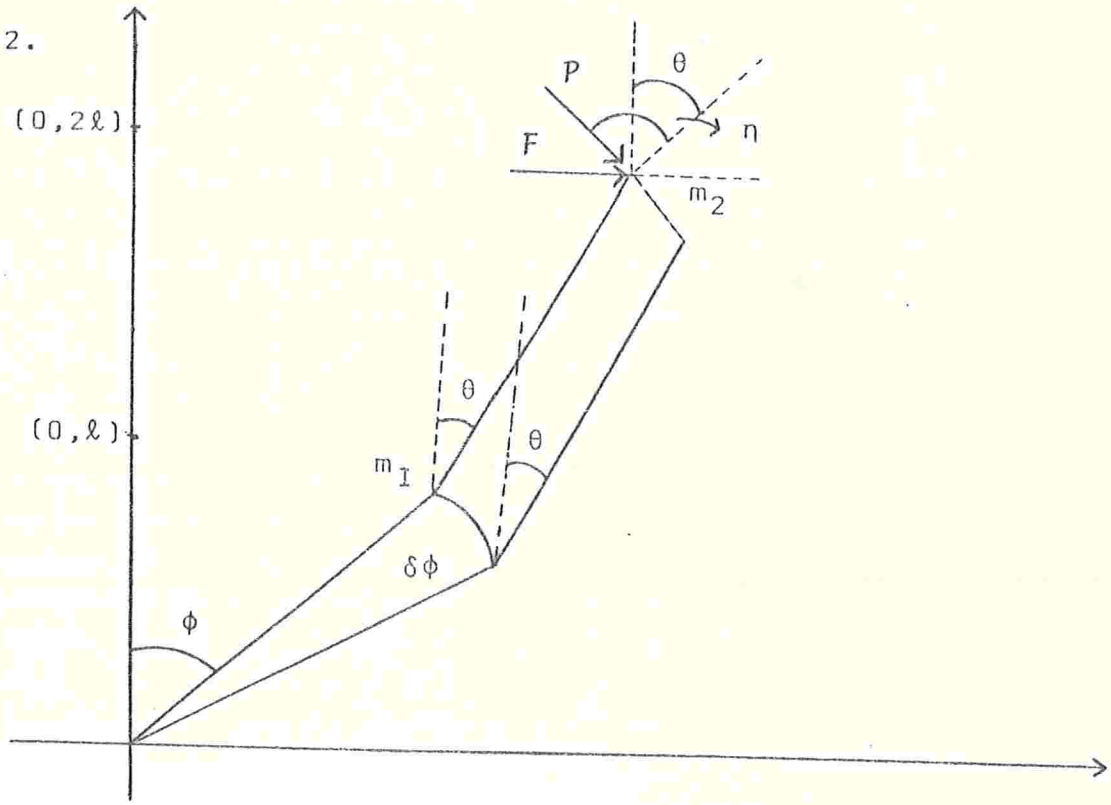
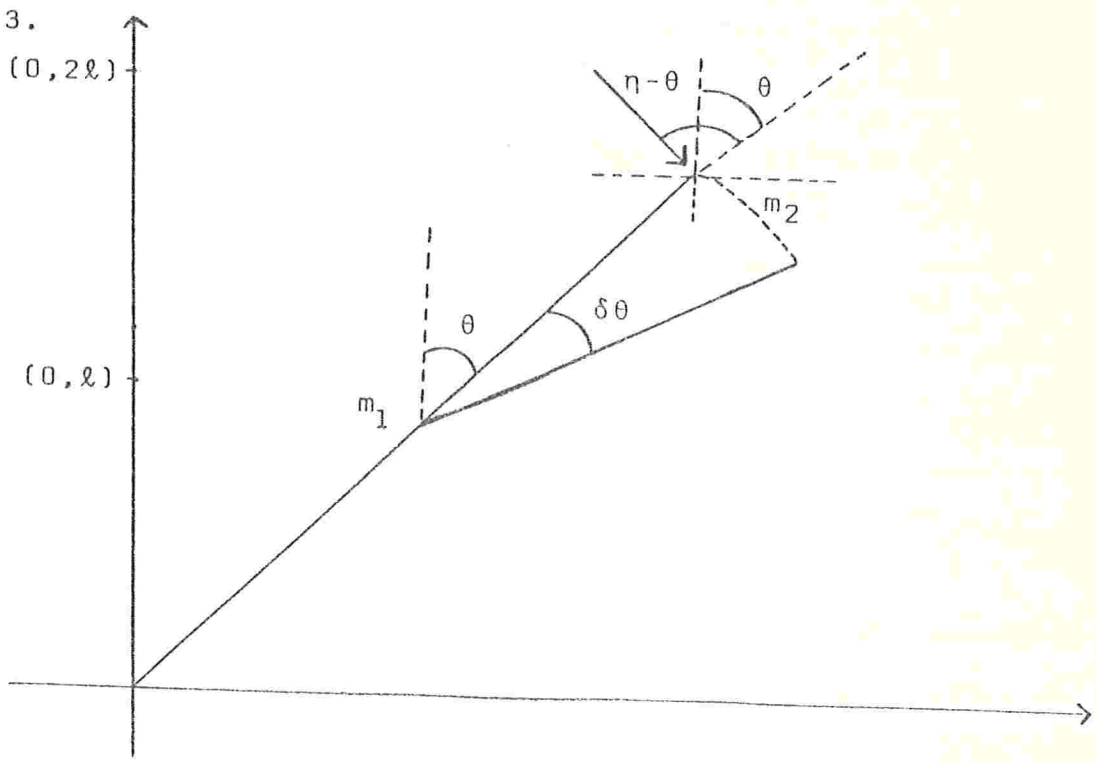


FIGURA 3.



$$\delta\tilde{W}_\theta = \left[(F_1, \frac{\partial r_1}{\partial \theta}) + (F_2, \frac{\partial r_2}{\partial \theta}) \right] \delta\theta$$

onde r_1 e r_2 são os vetores-posição das massas m_1 e m_2. F_1 e F_2 são as forças originadas de P e F agindo naquelas partículas e $(\, , \,)$ é o produto escalar usual do $\mathbb{R}^2$. Assim temos:

$$F_1 = (0,0) \quad e \quad F_2 = \delta\,(\tau)\cdot(1,0) + P(\mathrm{sen}(\eta-\theta), -\cos(\eta-\theta))$$

$$r_1 = \ell(\mathrm{sen}\phi, \cos\phi) \quad e \quad r_2 = \ell(\mathrm{sen}\phi + \mathrm{sen}\theta, \cos\phi + \cos\theta).$$

e portanto

$$\tilde{Q}_\phi = \ell\delta F\cos\phi + \ell P\mathrm{sen}\left[\eta - (\phi - \theta)\right]$$

$$\tilde{Q}_\theta = \ell\delta F\cos\theta + \ell P\mathrm{sen}\,\eta$$

sendo a força perturbadora δF sempre horizontal ela é conservativa, logo as forças não conservativas $\tilde{Q}_\phi$ e $\tilde{Q}_\theta$ são:

$$\tilde{Q}_\phi = \ell P\mathrm{sen}\left[\eta - (\phi - \theta)\right] - B_1\phi_{\tau'} - B_2(\phi_{\tau'} - \phi_{\tau'})$$

$$\tilde{Q}_\theta = \ell P\mathrm{sen}\,\eta + B_2(\phi_{\tau'} - \theta_{\tau'})$$

Portanto as forças generalizadas são:

$$Q_\phi = \{\ell P\mathrm{sen}\left[\eta - (\phi - \theta)\right] - B_1\phi_{\tau'} - B_2(\phi_{\tau'} - \theta_{\tau'})\} + (-\frac{\partial U}{\partial \phi} + \ell\delta F\cos\phi)$$

$$Q_\theta = [\ell P \operatorname{sen} \eta + B_2(\phi_{\tau'} - \theta_{\tau'})] + (-\frac{\partial U}{\partial \theta} + \ell \delta F \cos\theta)$$

substituindo nas equações de Lagrange, [4]

$$\frac{d}{d\tau'}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta_{\tau'}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = Q_\phi$$

$$\frac{d}{d\tau'}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta_{\tau'}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

obtém-se:

$$\ell^2(m_1+m_2)\phi_{\tau'\tau'} + \ell^2 \cdot m_2[\theta_{\tau'\tau'} \cdot \cos(\phi-\theta) + \theta^2_{\tau'} \cdot \operatorname{sen}(\phi-\theta)] =$$

$$= \{\ell P \cdot \operatorname{sen}[\eta - (\phi-\theta) - B_1\phi_{\tau'} - B_2(\phi_{\tau'} - \theta_{\tau'})\} - 2C\phi + C\phi + \ell\delta F(\tau)\cos\theta \qquad (1.1a)$$

$$\ell^2 m_2[\theta_{\tau'\tau'} + \phi_{\tau'\tau'} \cdot \cos(\phi-\theta) - \phi^2_{\tau'} \cdot \operatorname{sen}(\phi-\theta)] = C(\phi-\theta) +$$

$$+ \ell P \operatorname{sen}\eta + B_2(\phi_{\tau'} - \theta_{\tau'}) + \ell \cdot \delta \cdot F \cdot \cos\theta \qquad (1.1b)$$

Fazendo as seguintes substituições:

$$\tau' = \ell\sqrt{\frac{m_2}{C}} \cdot \tau \quad , \quad \phi(\ell\sqrt{\frac{m_2}{C}} \cdot \tau) = x(\tau) \quad \text{e}$$

$$\theta(\ell\sqrt{\frac{m_2}{C}} \cdot \tau) = y(\tau),$$

as equações (1.1) ficam na forma:

$$C\left[\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)\cdot x''+y''-\cos(x-y)+(y')^2\cdot \operatorname{sen}(x-y)+2x-y\right]=$$

$$=\ell P\cdot\operatorname{sen}\left[\eta+(x-y)\right]-\frac{B_1}{\ell\cdot\sqrt{\frac{m_2}{C}}}\cdot x'-\frac{B_2}{\ell\cdot\sqrt{\frac{m_2}{C}}}(x'-y')+\ell\cdot\delta\cdot F\cos x$$

$$C\left[y''+x''-\cos(x-y)-(x')^2-\operatorname{sen}(x-y)-x+y\right]-\ell.P.\operatorname{sen}\eta+$$

$$+\frac{B_2}{\ell\cdot\sqrt{\frac{m_2}{C}}}(x'-y')+\ell\cdot\delta\cdot F\cdot\cos y$$

onde $(\ )' = d/d\tau'$. Ademais se tomarmos mais as seguintes transformações

$$b_1=\frac{B_1}{\ell\cdot\sqrt{\frac{m_2}{C}}},\quad b_2=\frac{B_2}{\ell\cdot\sqrt{\frac{m_2}{C}}},\quad \lambda=\frac{\ell P}{C}$$

e usando o fato $m_1 = m_2$, temos finalmente:

$$2x''+y''\cdot\cos(x-y)+(y')^2-\operatorname{sen}(x-y)+2x-y+b_1x'+b_2(x'-y')-$$
$$-\lambda\operatorname{sen}\left[\eta+(x-y)\right]-\delta.F.\cos x=0 \qquad (1.2a)$$

$$x''\cos(x-y)+y''-(x')^2\cdot\operatorname{sen}(x-y)-x+y-b_2(x'-y')-\operatorname{sen}\eta-\delta F\cos y=0 \qquad (1.2b)$$

As equações (1.2a)-(1.2b), constituem um sistema para x e y de equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem. Representaremos este sistema simbolicamente para simplicidade de referências na forma

$$G[X,\lambda,\delta\ \eta] = 0 \tag{1.3}$$

onde

$$G : \mathbb{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

Buscaremos para (1.3) aproximações de soluções periódicas com a mesma frequência do termo forçante $\delta F(\tau)$ e com a condição inicial

$$\left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\tau = 0} = 0 \tag{1.4}$$

1.2 - DETERMINAÇÃO DOS ESTADOS DE EQUILÍBRIO COM $\delta = 0$.

Para fazer a análise linear do problema relativamente aos estados de equilíbrio, precisaremos primeiro conhecer esses estados. Faremos isto tomando o nosso sistema mecânico na sua forma natural, isto é, sem força perturbadora ou seja com $\delta = 0$. Assim as equações (1.2) ficam:

$$2x'' + y''\cos(x-y)+(y')^2.\mathrm{sen}(x-y)+2x-y+b_1.x' + b_2(x'-y')-$$

$$- \lambda \operatorname{sen}[\eta + (x - y)] = 0 \qquad (1.5a)$$

$$x'' .\cos(x-y) + y'' -(x')^2 .\operatorname{sen}(x-y)-x+y-b_2(x'-y') - \lambda \operatorname{sen} \eta = 0 \qquad (1.5b)$$

As soluções independentes do tempo (estados de equilíbrio) de (1.5a)-(1.5b), serão determinadas anulando-se os termos que tem derivada. Assim os estados de equilíbrio satisfazem o seguinte sistema:

$$2x - y - \lambda \operatorname{sen}[\eta + (x - y)] = 0 \qquad (1.6a)$$

$$-x + y - \lambda \operatorname{sen} \eta = 0 \qquad (1.6b)$$

Facilmente temos de (1.6a)-(1.6b) a solução

$$X_0(\eta,\lambda) = \begin{pmatrix} x(\eta,\lambda) \\ y(\eta,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda[\operatorname{sen} \eta + \operatorname{sen}(\eta - \lambda \operatorname{sen} \eta)] \\ \lambda[2\operatorname{sen} \eta + \operatorname{sen}(\eta - \lambda \operatorname{sen} \eta)] \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

Nos interessa somente trabalhar com $\eta \in [0, \pi/2]$ e $\lambda > 0$.

Devido à dificuldades computacionais faremos as seguintes restrições nas equações (1.5a)-(1.5b),

$$\begin{aligned} \eta &= \pi/2 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &\in (0, 0.1] \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Diante de (1.8), denotamos $b_2 = B$. As equações (1.5)

ficam então:

$$2x'' + y''\cos(x-y) + (y')^2.\mathrm{sen}(x-y) + 2x-y + B(x'-y') - \lambda\cos(x-y) = 0 \tag{1.9a}$$

$$x''.\cos(x-y) + y'' - (x')^2 . \mathrm{sen}(x-y) - x + y - B(x'-y') - \lambda = 0 \tag{1.9b}$$

As equações (1.9a)-(1. 9b), constituem um sistema autonômo e o representaremos agora por

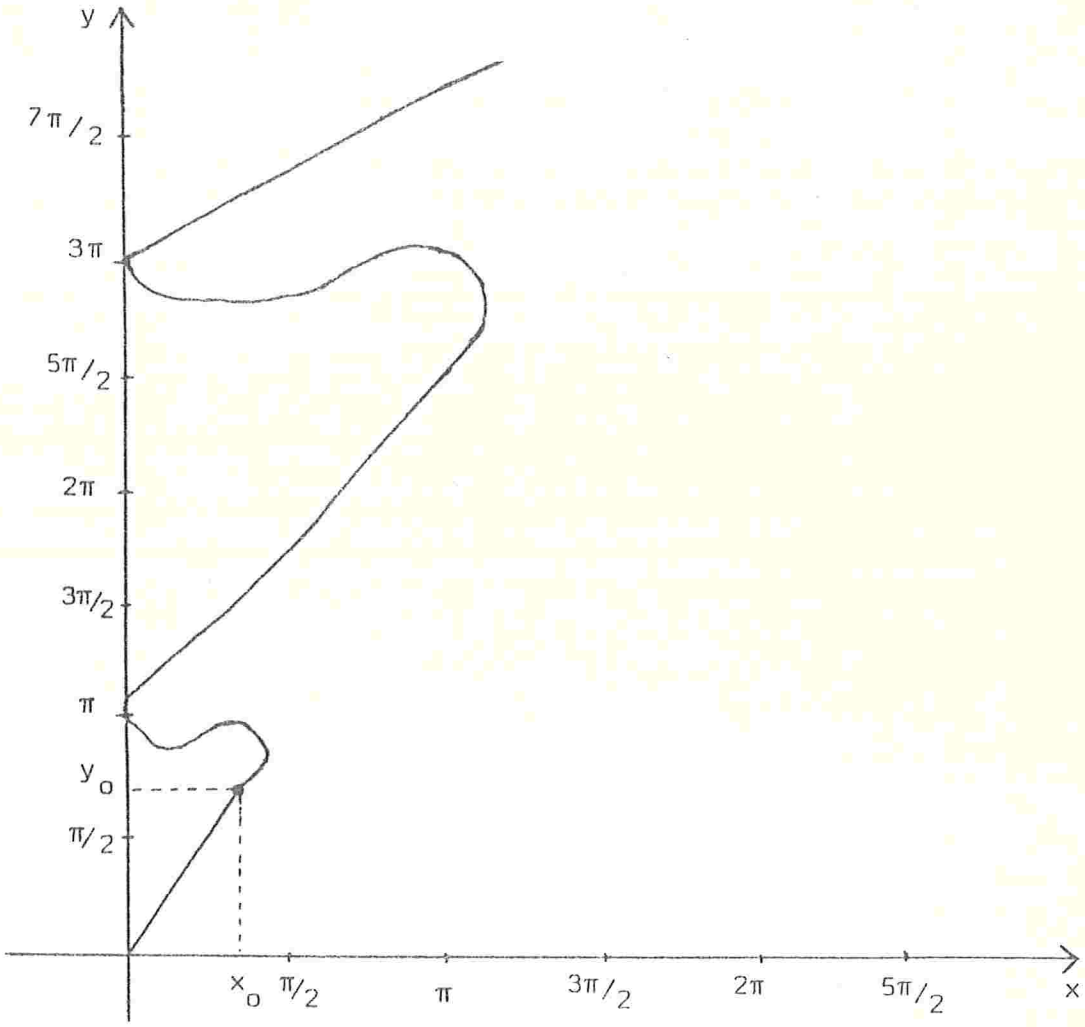
$$F[X , \lambda] = 0 \tag{1.10}$$

A solução estática X_0 se restringe diante de (1.8) em:

$$X_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda[1 + \cos(\lambda)] \\ \lambda[2 + \cos(\lambda)] \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Apresentaremos na página seguinte, o que seria a curva $X_0(\lambda)$ no plano $\mathbb{R}^2$.

FIGURA 4 .



Do interesse de se buscar soluções periódicas, e do fato que a igualdade (1.10) é verificada para todo τ , temos pelo teorema do valor médio do cálculo diferencial que é natural acrescentar ao sistema (1.10) a condição inicial

$$\left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0 \qquad (1.12)$$

CAPÍTULO II

TEORIA DA BIFURCAÇÃO

2.1- INTRODUÇÃO

Bifurcação é um termo usado em várias partes da matemática. Geralmente refere-se à mudança qualitativa nos objetos que estão sendo estudados devido a variação dos parâmetros sobre os quais eles dependem. Pode-se dizer que a teoria da bifurcação para equações diferenciais ordinárias é um estudo da ramificação de soluções das equações formalmente apresentadas por:

$$\begin{cases} F[X,\lambda] = 0 \\ g(X) = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

onde F é um operador não linear, X uma solução vetorial, λ um parametro vetorial ou escalar e g um funcional que tem por finalidade caracterizar uma solução particular de (2.1). O funcional g pode formalmente estar representando condições iniciais, de fronteira ou de periodicidade.

A motivação para o estudo da bifurcação é proveniente de vários fenômenos das ciências físicas, os quais podem ser formulados como em (2.1). Aplicações típicas da teoria da bi-

furcação estão em estabilidade elástica e hidrodinâmica. Ver [9] e [10] por exemplo como referências às aplicações

2.2 - BIFURCAÇÃO

DEFINIÇÃO -Sejam Λ, X, Y três espaços de Banach, F um operador

$$F : X \times \Lambda \longrightarrow Y$$

e $(X_0(\lambda), \lambda) \in X \times \Lambda$ uma solução da equação

$$F[X, \lambda] = 0 \tag{2.2}$$

Diremos que $(X_0(\lambda_c), \lambda_c)$ é um ponto de bifurcação para $F = 0$ com respeito a X_0 se para qualquer vizinhança de $(X_0(\lambda_c), \lambda_c)$ existe uma outra solução $X_1(\lambda)$ distinta de $X_0(\lambda)$ e tal que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_c} X_1(\lambda) = X_0(\lambda_o)$$

Na definição acima é bom notar que ela trata de não unicidade das soluções da equação (2.2) em uma vizinhança qualquer do ponto de bifurcação $(X_0(\lambda_c), \lambda_c)$. Isto é suficiente para garantir que o operador F não pode satisfazer todas as hipóteses do teorema clássico da função implícita.

Diante do exposto acima, seria bom se houvesse a dis-

posição, um resultado que garantisse a existencia de $X_1(\lambda)$ em uma vizinhança qualquer de λ_c. Isto será feito com o teorema de Crandall,M.G. [9] que apresentaremos com os nomes de "Teorema da Função Implícita Modificado" ou "Teorema da Bifurcação".

"Sejam Λ, X, Y três espaços de Banach, F um operador,

$$F : X \times \Lambda \longrightarrow Y$$

duas vezes diferenciáveis com relação as suas variáveis. Sejam $X_0(\lambda) \equiv 0 \in X$ e $\lambda_c \in \Lambda$ tais que:

H_1: $\forall \lambda$ numa vizinhança de λ_c.

$F(0, \lambda) = 0$

H_2: Existe um único, salvo multiplicado por constante, $\varphi \in X$, diferente de zero, tal que $F_X(0,\lambda_c) \cdot \varphi \cdot \mu$

H_3: Seja $T : X \times \Lambda \longrightarrow Y$, o operador definido por

$$T(\tilde{X},\mu) = F_X(0,\lambda_c) \cdot \tilde{X} + F_{X\lambda}(0,\lambda_c) \cdot \varphi \cdot \mu$$

Se existe um subespaço fechado $Z \subset X$ tal que $\forall\ Y \in Y$ existe $Z \in Z$, $\mu \in \Lambda$, únicos tais que

$$Y = T(Z, \mu)$$

então, existem um intervalo $I = (-a,a) \subset \mathbb{R}$ e funções $\lambda : I \longrightarrow \Lambda$, $X : I \longrightarrow Z$ tais que:

T_1 : $F[X(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)] = 0 \quad \forall\, \varepsilon \in I$

$X(0) = 0 \quad \lambda(0) = \lambda_c$

T_2 : $X(\varepsilon)$ e $\lambda(\varepsilon)$ são continuamente diferenciáveis

T_3 : Para cada $\varepsilon \in I$ $\varepsilon \neq 0$ fixo, $X(\varepsilon) \neq X_0(\lambda(\varepsilon))$"

Para demonstração deste teorema consultar [21] ou [9]

O teorema acima nos diz mais ainda, para $\varepsilon \in I$, $\varepsilon \neq 0$, $X(\varepsilon)$ tem a forma

$$X(\varepsilon) = \varepsilon \varphi + Z(\varepsilon) \quad \text{com} \quad Z(\varepsilon) \in Z \qquad (2.3)$$

e o parâmetro λ satisfazendo T_1

Se no teorema da bifurcação temos a hipótese de analiticidade, então X e λ obtidos serão também analíticos no parâmetro $\varepsilon \in I$. Podendo portanto serem expandidos em séries de potências de ε numa vizinhança de zero. Em um problema onde fosse natural aplicar o teorema da bifurcação, seria interessante conhecer-se os valores explícitos dos coeficientes das séries de X e de λ até uma ordem desejada. Faremos então que os

espaços X e Y sejam os mesmos, e iguais a um espaço de Hilbert H com produto interno $< , >$; e o espaço dos parâmetros Λ, igual a $\mathbb{R}^2$.

2.3 - MÉTODO DE POINCARÉ - LINDSTEDT

Descreveremos este método para o caso em que $\dim\mathrm{Ker}(\overset{o}{F}_x) = 2$ e consequentemente $\dim\mathrm{Ker}(\overset{o}{F}{}^{+}_x) = 2$, onde $\overset{o}{F}{}^{+}_x$ é operador adjunto de $\overset{o}{F}_x$ e $\overset{o}{F}_x = F_x\left[X_0(\lambda_c),\lambda_c)\right]$. Seja o problema

$$\begin{cases} F\left[X,\lambda\ \Omega\right] = 0 \\ g(X) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

com

$$F : H \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow H$$

$$g : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde H é um espaço de Hilbert real com produto interno $< , >$, F e g analíticas relativamente as suas variáveis, F não linear e g um funcional. Supomos que

$$X_0(\lambda , \Omega) \equiv 0 \tag{2.5}$$

satisfaz (2.4) $\forall$ (λ,Ω) e para um conhecido valor $(\lambda_c,w_c) \in \mathbb{R}^2$, há exceto multiplicados por constantes, dois elementos $\ell.i.$ $\varphi_1,\varphi_2 \in H$ tal que

$$\begin{cases} F_X[0, \lambda_c, w_c]\ \varphi_j = 0 \quad \|\varphi_j\| = 1, \quad j=1,2 \\ g_X(0)\ \varphi_1 = 0 \quad e \quad g_X(0) \cdot \varphi_2 \neq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Analogamente, como consequencia da hipótese (2.6), teremos ψ_1, $\psi_2 \in H$, $\psi_1, \psi_2 \neq 0$ tais que

$$F_X^+ [0, \lambda_c, w_c]\ \psi_j = 0 \quad \|\psi_j\| = 1, \quad j = 1,2 \tag{2.7}$$

Seja $\tilde{Z}$ o subespaço fechado de H definido por:

$$Z = \{Z \in H \mid \langle Z, \varphi_j \rangle = 0 \quad j = 1,2\} \tag{2.8}$$

Suponha ainda que F seja tal, que a matriz

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \langle \overset{o}{F}_{X\lambda}\ \varphi_1, \psi_1 \rangle & \langle F_{X\Omega}\ \varphi_1, \psi_1 \rangle \\ \langle F_{X\lambda}\ \varphi_1, \psi_2 \rangle & \langle F_{X\Omega}\ \varphi_1, \psi_2 \rangle \end{pmatrix}} \tag{2.9}$$

é não singular.

Com a hipótese (2.9), temos que

$$\begin{aligned} &\overset{o}{F}_{X\lambda}\ \varphi_1,\ F_{X\Omega}\ \varphi_1 \notin I(\overset{o}{F}_X) \\ &\overset{o}{F}_{X\Omega}\ \varphi_1 \notin [\overset{o}{F}_{X\lambda}\ \varphi_1] \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde $I(\overset{o}{F}_X)$, é a imagem de F_X e $[F_{X\lambda}\,\varphi_1]$ o espaço gerado por $\overset{o}{F}_{X\lambda}\,\varphi_1$. De (2.8), temos que

$$H = \tilde{Z} \oplus [\varphi_1, \varphi_2]$$

portanto

$$\text{codm}\,(\tilde{Z}) = 2. \tag{2.11}$$

De (2.6), temos que $\overset{o}{F}_X$ é injetiva em $\tilde{Z}$, então de (2.10) e (2.11), temos que

$$T : Z \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow H$$

definida por

$$T\,(Z,\lambda,\Omega) = \overset{o}{F}_X Z + \lambda \overset{o}{F}_{X\lambda}\,\varphi_1 + \Omega \overset{o}{F}_{X\Omega}\,\varphi_1 \tag{2.12}$$

é injetiva e sobre.

Com a bijetividade de T em (2.12), temos satisfeitas todas as hipóteses do teorema da bifurcação para o caso em que a $\dim\left[\text{Ker}(\overset{o}{F}_X)\right] = 2$.

De (2.3), podemos dar numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$, X, λ e Ω sob as formas:

$$X(\varepsilon) = X_1\varepsilon + \sum_{n=2}^{\infty} X_n \cdot \varepsilon^n/n! \tag{2.12a}$$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_c + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \varepsilon^n/n! \qquad (2.12b)$$

$$\Omega(\varepsilon) = w_c + \sum_{n=1}^{\infty} w_n . \varepsilon^n/n! \qquad (2.12c)$$

O método de Poincaré-Lindstedt, consiste em um processo recursivo de determinar os X_i's , λ_i's e w_i's . Diferenciando (2.4) duas vezes e usando (2.12a) - (2.12c) , obtém-se:

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_X \; X_2 + 2\lambda_1 \cdot \overset{o}{F}_{X\lambda} X_1 + 2w_1 \overset{o}{F}_{X\Omega} \; X_1 + \overset{o}{F}_{XX} \cdot X_1^2 = 0 \\ \overset{o}{g}_X \cdot X_2 + \overset{o}{g}_{XX} \; X_1^2 = 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

onde $X_i = d^{(i)}X(\varepsilon) \Big/ d\varepsilon^i \Big|_{\varepsilon=0}$

Usamos em (2.13), o fato que $F\left[0,\lambda,\Omega\right] = 0$ o que acarreta

$\overset{o}{F}_\lambda = \overset{o}{F}_{\lambda\lambda} = \overset{o}{F}_{\lambda\lambda\lambda} = \ldots\ldots = \overset{o}{F}_{\lambda\Omega} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \overset{o}{F}_\Omega = \overset{o}{F}_{\Omega\Omega} = \ldots\ldots = 0.$

De (2.3) temos que

$$X_1 = \varphi_1 \qquad (2.14)$$

então (2.13) se transforma em

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_X X_2 + 2\lambda_1 \cdot \overset{o}{F}_{X\lambda}\varphi_1 + 2w_1 \overset{o}{F}_{X\Omega}\varphi_1 + \overset{o}{F}_{XX}\varphi_1^2 = 0 \\ \overset{o}{g}_X X_2 + \overset{o}{g}_{XX}\varphi_1^2 = 0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

Aplicando as condições de solubilidade ou "Alternativa de Fredholm" em (2.15), λ_1 e w_1 são dados pelas fórmulas

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle \overset{o}{F}_{XX}\varphi_1^2 , \psi_1\rangle \quad \langle \overset{o}{F}_{X\Omega}\varphi_1 , \psi_2\rangle - \langle \overset{o}{F}_{XX}\varphi_1 , \psi_2\rangle \quad \langle \overset{o}{F}_{X\Omega}\varphi_1 , \psi_1\rangle}{\langle \overset{o}{F}_{X\lambda}\varphi_1 , \psi_1\rangle \quad \langle \overset{o}{F}_{X\Omega}\varphi_1 , \psi_2\rangle - \langle \overset{o}{F}_{X\lambda}\varphi_1 \psi_2\rangle \quad \langle \overset{o}{F}_{X\Omega}\varphi_1 , \psi_1\rangle}$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle \overset{o}{F}_{X\lambda}\varphi_1 , \psi_1\rangle \quad \langle \overset{o}{F}_{XX}\varphi_1^2 , \psi_2\rangle - \langle F_{XX}\varphi_1^2 , \psi_1\rangle \quad \langle \overset{o}{F}_{XX}\varphi_1 , \psi_2\rangle}{\langle F_{X\lambda}\varphi_1 , \psi_1\rangle \quad \langle F_{X\Omega}\varphi_1 , \psi_2\rangle - \langle F_{X\lambda}\varphi_1 , \psi_2\rangle \quad \langle F_{X\Omega}\varphi_1 , \psi_1\rangle}$$

(2-16)

A solução geral de (2.15) é da forma

$$X_2 = d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2 + \Phi \qquad (2.17)$$

onde Φ é uma solução particular de (2.15) com os valores de λ_1 e w_1, dados por (2.16) e

$$d_1 = - \langle \varphi_1 \quad \Phi \rangle$$

$$d_2 = - \frac{(\overset{o}{g}_X\Phi + \overset{o}{g}_{XX}\varphi_1)}{\overset{o}{g}_X\varphi_2} \qquad (2.18)$$

Para calcular X_3, λ_2 e w_2, diferenciamos (2.4) três vezes obtendo:

$$\overset{o}{F}_X X_3 + 3\lambda_2 \overset{o}{F}_{X\lambda} \varphi_1 + 3w_2 \overset{o}{F}_{X\Omega} \varphi_1 = - R_3 \qquad (2.19)$$

onde

$$R_3 = 3 \left[\overset{o}{F}_{XX} \varphi_1 . X_2 + \lambda_1 \left(\overset{o}{F}_{X\lambda} X_2 + \overset{o}{F}_{XX_\lambda} . \varphi_1^2 \right) + w_1 \left(\overset{o}{F}_{X\Omega} X_2 + \overset{o}{F}_{XX_\Omega} . \varphi_1^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_1^2 \overset{o}{F}_{\lambda\lambda X} \varphi_1 + w_1^2 \overset{o}{F}_{\Omega\Omega X} . \varphi_1 \right] + \overset{o}{F}_{XXX} \varphi_1^3$$

As condições de solubilidade para (2.19), nos dão:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = - \frac{1}{3} M^{-1} \begin{pmatrix} \langle R_3 , \psi_1 \rangle \\ \langle R_3 , \psi_2 \rangle \end{pmatrix} \qquad (2.20)$$

Até aqui podemos apresentar:

$$X(\varepsilon) = \varepsilon \varphi_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 . X_2 + o(\varepsilon^2) \qquad (2.21)$$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_c + \lambda_1 \varepsilon + \frac{1}{2} \lambda_2 . \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \qquad (2.22)$$

$$\Omega(\varepsilon) = w_c + w_1 \varepsilon + \frac{1}{2} w_2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \qquad (2.23)$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = -\dfrac{\langle \overset{o}{F}_{X\Omega}\varphi_1 , \psi_2\rangle \quad \langle R_3 , \psi_1\rangle - \langle \overset{o}{F}_{X\Omega}\varphi_1 , \psi_1\rangle \langle R_3 , \psi_2\rangle}{3 \det (M)} & (2.24) \\[2ex] w_2 = -\dfrac{\langle \overset{o}{F}_{X\lambda}\varphi_1 , \psi_1\rangle \quad \langle R_3 , \psi_2\rangle - \langle \overset{o}{F}_{X\lambda}\varphi_1 , \psi_2\rangle \langle R_3 , \psi_1\rangle}{3 \det (M)} & (2.25) \end{cases}$$

Este procedimento para se calcular os λ_n's, w_n's e X_n's pode ser continuado indefinidamente. Necessário seria pararmos no mínimo onde pela primeira vez se encontrasse um λ_n, $w_n \neq 0$ porque assim poderíamos exibir os modos de bifurcação. Em (2.21) paramos, supondo ter encontrado $\lambda_2 \neq 0$. Observe que a condição (2.9) é realmente relevante para o êxito do método.

Na seção (2.2) mostramos um teorema que garante a existência de bifurcação de uma maneira bastante geral, isto é, em espaços de Banach quaisquer. Na seção (2.3), aplicamos o teorema em espaços de Banach mais particulares, os espaços de Hilbert. Mas ainda não temos uma visão mais concreta dos elementos que compõe esses espaços, além daquela dada pelas propriedades que lhes são inerentes por pertencerem a um espaço de Hilbert. Como também ainda não sabemos que particularidades contém os elementos que aparecem no fenômeno da bifurcação.

2.4 - BIFURCAÇAO DE HOPF

Consideraremos agora X e Y como espaços de um tipo

especial de funções e estabeleceremos um teorema que garante a existência e unicidade de funções periódicas na bifurcação. Funções essas que serão soluções de um tipo também especial de equações diferenciais .

Para o que segue, $C^k(A,B)$ será o conjunto de funções k-vezes diferenciáveis de A em B , onde A e B são subconjuntos de espaços W e W' respectivamente.

Seja V uma vizinhança de $(0,\lambda_c)$ em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ e $f \in C^2(V, \mathbb{R}^m)$. Suponho mais ainda que $f(0,\lambda) = 0 \quad \forall \; X_0 = (0,\lambda) \in V$. Assim temos uma família de soluções no parametro λ da equação diferencial

$$\frac{dx}{d\tau} + f(X,\lambda) = 0 \qquad (2.26)$$

qual seja $\{(0,\lambda) \mid (0,\lambda) \in V\}$ e será denominada de solução trivial.

Nos interessa investigar condições que asseguram a existência de uma família de soluções periódicas não triviais (X,λ) de (2.22) em qualquer vizinhança de $(0,\lambda_c)$, para algum valor λ_c de λ. É bom notar que se soluções periódicas não triviais estão sendo investigadas, seus períodos também devem fazer parte da investigação, os quais suponhamos ser para cada órbita dado por $2\pi/_w$. w agora será um novo parâmetro a fazer parte do problema. A maneira de inserí-lo no problema é substituir τ em (2.22) por

$$t = w\tau \qquad (2.27)$$

O parâmetro w, será chamado de frequencia da solução periódica correspondente. Usando (2.27) em (2.26), temos:

$$F\left[X, \lambda, w\right] = w \frac{dX}{dt} + f(X,\lambda) = 0 \qquad (2.28)$$

Diante de (2.28) podemos reformular a questão, dizendo que se investiga a existência de soluções periódicas de período 2Π, que se bifurcam da solução trivial

$$X_o(\lambda_c, w_c) = (0, \lambda_c, w_c) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad (2.29)$$

da equação diferencial

$$F\left[X, \lambda, w\right] = 0 \qquad (2.30)$$

para algum valor $(\lambda, w) = (\lambda_c, w_c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Os subespaços de funções $X = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ e $Y = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ periódicas com periodo 2Π serão denotadas por $C_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ $C^1_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ respectivamente. As normas respectivas serão definidas assim:

$$\|X\|_{C_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)} = \|X\|_0 = \max_{t \in [0,2\Pi]} \{ |X(t)| \}$$

$$\|X\|_{C^1_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)} = \|X\|_1 = \|X\|_{C_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)} + \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)}$$

Dado que $f \in C^2(V, \mathbb{R}^m)$, então existe uma vizinhança U de $\underline{0}$ em $C^1_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ e um $r > 0$ tal que para F em (2.28) tem-se:

$$F : U \times \mathbb{R} \times (\lambda_c - r, \lambda_c + r) \longrightarrow C_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$$

$$(X, w, \lambda) \longrightarrow w \frac{dX}{dt} + f(X, \lambda)$$

é duas vezes diferenciáveis e

$$F[0, w, \lambda] = 0 \quad \forall\ (w, \lambda) \in \mathbb{R} \times (\lambda_c - r, \lambda_c + r)$$

Façamos o resumo do que vimos até agora nesta seção. Procurar soluções não triviais de (2.26) para qualquer vizinhança de $(0, \lambda_c)$ é equivalente a procurar soluções não triviais de (2.28) em qualquer vizinhança de $\tilde{\lambda}_c = (w_c, \lambda_c)$. Isto nos sugere a usar o teorema da bifurcação, mas em vez disso, usaremos o seguinte resultado conhecido como Teorema de Hopf que é uma consequência do teorema da bifurcação como indicaremos:

"Seja $V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ uma vizinhança aberta de $(0, \lambda_c)$, $f \in C^2(V, \mathbb{R}^m)$ e $f(0, \lambda) = 0 \ \forall\ (0, \lambda) \in V$. Se

H_1: $w_c i$ é um auto valor simples (algébrico) de $f_X(0, \lambda_c)$

H_2: se $\sigma(\lambda)$ é o ramo de auto valores de $f_u(0,\lambda)$ tal que $\sigma(0) = w_c i$ então

$$\frac{d}{d\lambda} \operatorname{Re} (\sigma(\lambda))\Big|_{\lambda=\lambda_c} \neq 0.$$

Então, existem números positivos δ e r' e funções diferenciáveis X, w e λ tais que

$$(X, w, \lambda) : (-r', r') \longrightarrow C^1_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

tem as seguintes propriedades

T_1: $(X(\varepsilon), w(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)$ é uma solução não trivial de (2.28) $\forall\ \varepsilon \in (-r', r')$, $\varepsilon \neq 0$

T_2: $X(0) = X_0(w_c, \lambda_c)$, $w(0) = w_c$ e $\lambda(0) = \lambda_c$

T_3: (unicidade) se (X_1, λ_1) é uma solução de (2.26) com periodo $2\Pi/w_1$ e $|w_1 - w_c| < \delta$ $|\lambda_1 - \lambda_c| < \delta$

e $|X_1 - X_0| < \delta$ $\forall\ \tau \in [0, 2\Pi/w_1]$, então

existe $\varepsilon \in [0, r')$ e $\theta \in [0, 2\Pi)$ tal que $w_1 = w(\varepsilon)$, $\lambda_1 = \lambda(\varepsilon)$ e $X_1(w_1 t) = X(\varepsilon, t + \theta)$ $\forall\ t \in [0, 2\Pi]$".

NOTA - A hipótese H_3 do teorema da bifurcação acontece exa-

tamente quando as hipóteses H_1 e H_2 deste teorema acontecem, lembrando que a F de que fala aquele teorema é por aqui dada como (2.28) [16].

Faremos no próximo capítulo uma adaptação deste teorema ao problema proposto no CAP. I, e pelo método da seção (2.3), exibiremos as soluções periódicas.

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE BIFURCAÇÃO

3.1- INTRODUÇÃO

O problema proposto no CAP. I está formulado matematicamente através de um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem. No CAP.II, a teoria da bifurcação foi apresentada para equações de primeira ordem, porém, este não será motivo que inviabilize a aplicação da teoria no problema visto que podemos ajustá-lo a um sistema de primeira ordem mediante as transformações:

$$x = u_1$$
$$y = u_2$$
$$dx/_{dt} = u_3$$
$$dy/_{dt} = u_4$$

Faremos um estudo do problema variacional relativamente ao estado de equilíbrio $X_0(\lambda)$ segundo (1.8), isto é, quando $\eta = \Pi/_2$ e $b_1 = 0$. Assim vamos estudar as equações variacionais de (1.9a)-(1.9b) relativamente aos estados de equilíbrio dados por (1.11),

$$\boxed{\begin{aligned} &2x'' + y''.\cos(\lambda) + 2\dot{x} - \dot{y} + B(\dot{x}' - \dot{y}') - \operatorname{sen}(\lambda)\,(\dot{x} - \dot{y}) = 0 && (3.1a)\\ &\dot{x}''.\cos(\lambda) + y'' - \dot{x} + \dot{y} - B(\dot{x}' - \dot{y}') = 0 && (3.1b)\end{aligned}}$$

onde $(\ )' = d/_{d\tau}$.

Buscamos soluções não triviais das equações (3.1) da forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = a_1 \,.\, e^{\sigma\tau} \\ \dot{y}(\tau) = a_2 \,.\, e^{\sigma\tau}, \end{cases} \qquad (3.2)$$

Substituindo x e y das equações (3.1) por (3.2) obtém-se um sistema algébrico linear homogêneo de equações para a_1 e a_2. Ele possui soluções não triviais se e somente se o determinante

$$\Delta \equiv \left[1 + \operatorname{sen}^2(\lambda)\right].\sigma^4 + \left[B(3 + 2.\cos(\lambda)\right].\sigma^3 + \left[4 - \lambda.\operatorname{sen}(\lambda)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\ (1 + \lambda\cos(\lambda)) + 2\cos(\lambda)\right].\sigma^2 + B\sigma + 1$$

satisfaz a equação

$$\Delta = 0 \qquad (3.3)$$

A equação (3.3) é denominada de "Equação Característica". Seja, [22]

$$\sigma(\lambda) = v(\lambda) + i\,w(\lambda) \qquad (3.4)$$

com $v(\lambda)$ e $w(\lambda)$ reais. Então (3.3) é transformada na seguinte equação

$$R(\lambda,v,w) + iQ(\lambda,v,w) = 0 \qquad (3.5)$$

onde

$$R(\lambda,v,w) = \left[1+\mathrm{sen}^2(\lambda)\right].(v^4-6v^2.\ w^2 + w^4) + \left[B(3 + 2\cos(\lambda)\right]$$

$$(3v^2w - w^3) + 2\left[4 - \mathrm{sen}(\lambda)\ (1 + \lambda.\cos(\lambda)) + \right.$$

$$\left. + 2\cos(\lambda)\right] \cdot v \cdot w + B\,w \qquad (3.6)$$

$$Q(\lambda,v,w) = \left[1+\mathrm{sen}^2(\lambda)\right]\ (4v^3w - 4vw^3) + \left[B(3 + 2\cos(\lambda))\right]$$

$$(3v^2w - w^3) + 2\left[4 - \lambda\mathrm{sen}(\lambda)\ (1 + \lambda\cos(\lambda)) + \right.$$

$$\left. + 2\cos(\lambda)\right] .\ v\ .\ w + B\,w \qquad (3.7)$$

Para que (3.5) seja verdadeira, é preciso que $R = Q = 0$. A equação (3.5) tem uma raiz real, isto é, em $v=0$ se

$$\begin{cases} R\ (\lambda,0,w) = 0 & (3.8a) \\ Q\ (\lambda,0,w) = 0\ . & (3.8b) \end{cases}$$

Temos de (3.8b) que

$$w(\lambda) = \left(1/(3 + 2\cos(\lambda)\right)^{1/2} \qquad (3.8c)$$

que inserida em (3.8a) dá

$$A(\lambda) = \left[1 + \mathrm{sen}^2(\lambda)\right] - \left[4 - \lambda\,\mathrm{sen}(\lambda)\cdot(1 + \lambda\cos(\lambda)) + \right.$$

$$\left. + 2\cdot\cos(\lambda)\right]\cdot\left[3 + 2\cdot\cos(\lambda)\right] + \left[3 + 2\cdot\cos(\lambda)\right]^2 = 0 \tag{3.9}$$

Note-se que se um valor de $\lambda = \lambda_c$ satisfaz a equação (3.9), a raiz imaginária pura $\sigma_1(\lambda_c) = i\,w(\lambda_c)$ será simples para a equação (3.3), porque se ela for de multiplicidade todas as suas raízes para $\lambda = \lambda_c$, serão imaginárias puras, isto é,

$$\begin{aligned} \sigma_1(\lambda_c) &= iw_c \\ \bar{\sigma}_1(\sigma_c) &= -iw_c \\ \sigma_2(\lambda_c) &= iw_c = \sigma_1(\lambda_c) \\ \bar{\sigma}_2(\lambda_c) &= -iw = \sigma_1(\lambda_c) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Mas (3.10) não pode acontecer, devido o coeficiente de λ^3 em (3.3) ser distinto de zero $\forall\ \lambda$.

Por computação numérica, calculamos o $\lambda = \lambda_c$, que torna (3.9) verdadeira, obtendo

$$\lambda_c = 0{,}648 \tag{3.11}$$

e o valor de w_c correspondente pela fórmula (3.8c),

$$w_c = 0.466 \tag{3.12}$$

A raiz imaginária pura e simples de (3.3) será portanto:

$$\sigma_1(\lambda_c) = 0.466 \cdot i \tag{3.13}$$

Visando a aplicação do teorema da bifurcação, verifica-se que:

$$\left.\frac{d\, R_e(\sigma_1(\lambda_c))}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_c} \neq 0 , \tag{3.14}$$

para isto, deriva-se (3.5) com respeito a λ e obtém-se

$$R_v \cdot dv/_{d\lambda} + R_w \cdot dw/_{d\lambda} = - R_\lambda \tag{3.15a}$$

$$Q_v \cdot dv/_{d\lambda} + Q_w \cdot dw/_{d\lambda} = - Q_\lambda \tag{3.15b}$$

Tem-se que no ponto $(\lambda_c, 0, w_c)$, $R_v = Q_w$ e $R_w = - Q_v$, portanto o determinante do sistema resulta

$$\tilde{\Delta} = \mathbb{R}_v \cdot Q_w - Q_v \cdot \mathbb{R}_w\Big|_{(\lambda_c, 0, w_c)} = \mathbb{R}_v^2 + Q_v^2 \tag{3.16}$$

Em particular, pode-se determinar que

$$R_v = - 2B$$

com o qual $\tilde{\Delta} \neq 0$ e assim

$$dv/_{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_c} = d(\mathbb{R}e\ \sigma_1(\lambda))\ \ d\lambda\Big|_{\lambda=c}$$

é calculada univocamente por:

$$dv/d\lambda\Big|_{\lambda=\lambda_c} = \left.\frac{Q_\lambda \cdot R_w - R_\lambda \cdot Q_w}{R_v^2 + R_w^2}\right|_{(\lambda_c,0,w_c)} \qquad (3.17)$$

Para que (3.17) seja distinto de zero, basta que o numerador o seja.

O cálculo direto nas expressões de R e Q em (3.8a) (3.8b) respectivamente, mostrou que:

$$Q_\lambda \cdot R_w - R_\lambda \cdot Q_w\Big|_{(\lambda_c,0,w_c)} = w_c^2 \cdot B \cdot S(\lambda_c,w_c) \qquad (3.18)$$

onde

$$S(\lambda_c,w_c) = 8(1 + \operatorname{sen}^2(\lambda_c)) \cdot \operatorname{sen}(\lambda_c) \cdot w_c^4 -$$

$$- \{2.\operatorname{sen}(\lambda_c)\,[4 - \lambda_c.\operatorname{sen}(\lambda_c).(1+\lambda_c\cos(\lambda_c)) + 2\cos(\lambda_c)] +$$

$$+ 2\operatorname{sen}(\lambda_c).\cos(\lambda_c)\}.w_c^2\; 2\,[(-\operatorname{sen}(\lambda_c) - \lambda\cos(\lambda_c))$$

$$(1 + \lambda_c.\cos(\lambda_c)) - \lambda_c.\operatorname{sen}(\lambda_c).\cos(\lambda_c) + \lambda_c^2.\operatorname{sen}^2\lambda_c - 2\operatorname{sen}\lambda_c\,]$$

$$= 4.918$$

Consequentemente $\left.\frac{dv}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_c} \neq 0.$ (3.19)

Usaremos o critério de Routh-Hurwtiz para tirarmos conclusões sobre a estabilidade das soluções de equilíbrio $X_0(\lambda)$. Temos que

$$\Delta_1 = B(3 + 2\cos(\lambda)) > 0 \quad \forall \lambda$$

$$\Delta_2 = B(7 + 9\cos(\lambda) - \cos^2\lambda) > 0 \quad \forall \lambda \leq \lambda_c$$

$$\Delta_3 = -B^2 \cdot A(\lambda)$$

Por cálculos diretos, temos que $A(0) = -4$. Temos também que $A(\lambda_c) = 0$, e para $\lambda \leq 1$,

$$A'(\lambda) = (1-\operatorname{sen}\lambda) + (7\lambda\operatorname{sen}\lambda.\cos\lambda - 4\lambda^2\operatorname{sen}^2\lambda \cdot \cos\lambda) + [6\lambda\operatorname{sen}\lambda - (3\lambda^2\operatorname{sen}\lambda + 2\operatorname{sen}\lambda)] + (\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda + 3\lambda\cos\lambda + 3\lambda^2\cos^2\lambda + 2\operatorname{sen}\lambda\cos^2\lambda + 2\lambda\cos^2\lambda + 2\lambda^2\cos^3\lambda + 2\lambda\operatorname{sen}\lambda \cdot \cos^2\lambda) > 0. \tag{3.20}$$

Portanto

$$\Delta_3 > 0,$$

e

$$\Delta_4 = (1 + \operatorname{sen}^2\lambda) \cdot \Delta_3 > 0$$

Assim podemos afirmar que para $\lambda < \lambda_c$, $X_0(\lambda)$ é assintoticamente estável. Para λ próximo a λ_c mas $\lambda > \lambda_c$, $X_0(\lambda)$ é instável. Para $\lambda = \lambda_c$, nada se pode dizer pela análise linear, da estabilidade ou instabilidade não linear das so

luções $X_0(\lambda)$, [7]

Os resultados apresentados por (3.14) e (3.19) constituem as hipóteses H_1 e H_2 do teorema de Hopf. Só nos resta agora para aplicar o teorema colocar o problema em espaços de funções convenientes onde desejamos encontrar soluções.

O espaço de funções adequado ao problema será a variedade linear $C^2_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$. Define-se em $C_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ o seguinte produto interno para quaisquer $f,g \in C_{2\Pi} \in (\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$:

$$< f,g > = \frac{1}{\Pi} \int_0^{2\Pi} (f(t), g(t))dt \qquad (3.21)$$

onde (,) é o produto escalar normal do $\mathbb{R}^2$.

Está-se buscando para o problema (1.10) com a condição inicial (1.12), soluções periódicas de período $2\Pi/_w$, tal como se propõe formalmente na seção 2.4. Então de modo análogo ao daquela seção, inserimos w no problema, substituindo-se em (1.10) e (1.12) τ por:

$$t = w\tau \qquad (3.22)$$

e obtém-se a seguinte transformação no problema:

$$F[X, w, \lambda] = 0 \qquad (3.23)$$

$$dy/_{dt}\Big/_{t=0} = 0 \qquad (3.24)$$

$$X(t + 2\Pi) = X(t) \quad \forall\, t \tag{3.25}$$

onde o operador não linear F está definido assim

$$F : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times (\lambda_c - r, \lambda_c + r) \longrightarrow C_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

$$(X, w, \lambda) \longrightarrow F[X, w, \lambda]$$

e $\mathcal{U}$, uma vizinhança aberta de $X_0(\lambda_c)$ em $C^2_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

NOTA - "No teorema de Hopf, $\mathcal{U}$ é uma vizinhança de $0 \in C^1_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, mas isto não é impecilho algum, bastando fazer a translação de $X \longrightarrow U = X - X_0(\lambda)$".

O pequeno parâmetro ε do método de Poincaré-Lindstedt será definido aqui por

$$< X - X_0 , X - X_0 > = \varepsilon^2 \tag{3.26}$$

para qualquer solução não trivial de (3.23)-(3.25), e o denominaremos por "amplitude de X".

Análogo a (2.6), temos:

$$F_X [X_0(\lambda_c), \lambda_c] \dot{X} = 0 \tag{3.27}$$

da qual conhecemos as soluções não triviais que satisfazem (3.23)-(3.25), as quais são:

$$\varphi_1(t) = a \begin{pmatrix} C_1(B)\cos t - C_2(B)\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \|\varphi_1\| = 1 \qquad (3.28)$$

$$\varphi_2(t) = a \begin{pmatrix} C_1(B)\operatorname{sen} t + C_2(B)\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \quad \|\varphi_2\| = 1 \qquad (3.29)$$

onde

$$a^2 = \frac{1}{C_1^2(B) + C_2^2(B) + 1} \qquad (3.30)$$

$$C_1(B) = \frac{0.182 . B}{0.217 . B^2 + 1.377} \qquad (3.31)$$

$$C_2(B) = \frac{0.217 . B^2 + 0.511}{0.217 . B^2 + 1.377} \qquad (3.32)$$

Observe aqui que o núcleo do operador $\overset{o}{F}_X$ tem dimensão dois, portanto vamos aplicar o método daquela seção (2.3) fazendo-se uma natural aplicação como veremos.

Determina-se o operador $\overset{o}{F}{}^{+}_X$, tomando-se o produto

interno

$$\left\langle \overset{o}{F}_X \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dot{y}^+ \\ \dot{y}^+ \end{pmatrix} \right\rangle$$

e integrando por partes duas vezes de 0 a 2Π utilizando o fato de que $\dot{x}(\lambda)$ e $\dot{y}(\lambda)$ são funções periódicas de período 2Π, obtém-se

$$\overset{o}{F}{}^{+}_{X} \begin{pmatrix} \dot{x}^+ \\ \dot{y}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(\dot{x}^+)'' - B(x^+)' + 2x^+ - \lambda_c . \mathrm{sen}(\lambda_c) . x^+ + \cos(\lambda_c)(\dot{y}^+)'' + B\dot{y}^+ - y^+ \\ \cos(\lambda_c) . (\dot{x}^+)'' + B(x^+)' - \dot{x}^+ + \lambda_c . \mathrm{sen}(\lambda_c) . \dot{x}^+ + (\dot{y}^+)'' - B.(y^+)' + y^+ \end{pmatrix}$$

As soluções não triviais para a equação

$$\overset{o}{F}{}^{+}_{X} \psi = 0 \qquad (3.33)$$

são

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \| \psi_1 \| = 1 \qquad (3.34)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, t \\ \mathrm{sen}\, t \end{pmatrix} \quad \| \psi_2 \| = 1 \qquad (3.35)$$

Tendo-se as hipóteses do teorema de Hopf e as bases para os núcleos de $\overset{o}{F}_X$ e $\overset{e}{F}{}^{+}_{X}$ calculadas, estamos aptos

para aplicar o método da perturbação descrita formalmente na seção 2.3 com vistas a exibir as soluções periódicas não triviais e o modo de bifurcação.

3.4 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA BIFURCAÇÃO

Mostraremos as expressões das soluções assintóticas que se bifurcam do ramo dos estados de equilíbrio $X_0(\lambda,w)$, e também as expressões assintóticas de λ e w. O teorema de Hopf sugere que essas expansões devem ser da forma:

$$X(\varepsilon,t) = X_0(\lambda_c) + X_1\varepsilon + 1/2!\, X_2.\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \qquad (3.36)$$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_c + \lambda_1.\varepsilon + 1/2!\, \lambda_2 . \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \qquad (3.37)$$

$$w(\varepsilon) = w_c + w_1.\varepsilon + 1/2!\, w_2 . \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \qquad (3.38)$$

$$|\varepsilon| << 1, \quad (\ )_n = \left.\frac{d^n}{d\varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0}$$

Queremos então que $X(\varepsilon,t)$ satisfaça (3.23)-(3.26). As condições (3.24) e (3.25) se transmitem a $X_n(0,t)$, $n = 1,2...$ por linearidade. A definição do parâmetro ε em (3,26) acarreta

$$< X_1 , X_1 > = 1 \qquad (3.39)$$

$$\langle X_1 \ , \ X_2 \rangle = 0 \tag{3.40}$$

$$4 \langle X_1 \ , \ X_3 \rangle + \langle X_1 \ , \ X_2 \rangle = 0 \tag{3.41}$$

Consideraremos o nosso operador F em (3.23) analítico nas variáveis X, w e λ, donde, pelo teorema de Hopf, X, w e λ também o serão. Assim, derivando sucessivamente com respeito a ε a equação (3.23), obteremos o seguinte sistema recursivo de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes.

$$\overset{o}{F}_X \, X_1 + \overset{o}{F}_\lambda \cdot \lambda_1 = 0 \tag{3.42}$$

$$\overset{o}{F}_X \, X_2 + 2_{\lambda 1} \cdot \overset{o}{F}_{X\lambda} X_1 + 2w_1 \cdot \overset{o}{F}_{Xw} X_1 + \overset{o}{F}_{XX} X_1^2 + \lambda_2 \overset{o}{F}_\lambda = 0 \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} &\overset{o}{F}_X X_3 + 3\lambda_1 \left[\overset{o}{F}_{XX\lambda} X_1^2 + \overset{o}{F}_{X\lambda} X_2 \right] + 3.w_1 \cdot \left[F_{XXw} . X_1^2 + \overset{o}{F}_{Xw} . X_2 \right] + \\ &+ 3.w_2 \overset{o}{F}_{Xw} . X_1 + 3.w_1^2 \overset{o}{F}_{Xww} . X_1 + 3\overset{o}{F}_{XX} X_1 . X_2 + \overset{o}{F}_{XXX} . X_1^3 + \\ &+ 3\lambda_2 . \overset{o}{F}_{X\lambda} X_1 + \lambda_3 \overset{o}{F}_\lambda = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.44}$$

onde a notação $\overset{o}{F}$ simboliza a avaliação do operador F no ponto $(X_0(\lambda_c), w_c, \lambda_c)$, $\overset{o}{F}_{XX} . X_1^2 \equiv (F_{XX} X_1)(X_1)$ e $\overset{o}{F}_{XXX} X_1^3 = \left[(F_{XXX} X_1)(X_1) \right] (X_1)$.

Na obtenção das equações acima, usamos os fatos que $\overset{o}{F}_w = \overset{o}{F}_{ww} = \overset{o}{F}_{www} \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$ e $\overset{o}{F}_{X\lambda\lambda} = 0$.

Do cálculo de λ_c em (3.12), temos que:

$$X_0(\lambda_c) = \begin{pmatrix} 1.164 \\ 1.812 \end{pmatrix} \qquad (3.45)$$

(As formas explícitas das equações (3.42)-(3.44) estão no apêndice A)

O termo não homogêneo da equação (3.42) é a constante

$$\lambda_1 \overset{o}{F}_\lambda = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\lambda_c) \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde se conclui que:

$$< \lambda_1 \cdot \overset{o}{F}_\lambda , \psi_j > = 0 \qquad j = 1,2 \qquad (3.46)$$

(3.46) implica que (3.42) possui soluções periódicas de período 2Π. Para determiná-los dissociamos o opearador $\overset{o}{F}_X$ em uma soma de um operador M e uma matriz $\tilde{M}$, onde os elementos de M são operadores diferenciais e $\tilde{M}$ constante. Assim

$$\overset{o}{F}_X = M + \tilde{M}$$

com

$$M = \begin{pmatrix} 2w_c^2 \cdot \frac{d}{dt^2} + B.w_c \frac{d}{dt} & w_c^2.\cos(\lambda_c).\frac{d}{dt^2} - B.w_c \frac{d}{dt} \\ w_c^2.\cos(\lambda_c).\frac{d^2}{dt^2} - B.w_c \frac{d}{dt} & w_c^2 \frac{d^2}{dt^2} + B.w_c \cdot \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

e

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda_c.\mathrm{sen}(\lambda_c) & -1 + \lambda_c.\mathrm{sen}(\lambda_c) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

Dado que $\det(\tilde{M}) = 1$, obtemos como solução particular de (3.42) um vetor constante $\tilde{V} = \lambda_1 V$, com V dado por:

$$V = \begin{pmatrix} -\lambda_c \mathrm{sen}(\lambda_c) + \cos(\lambda_c) + 1 \\ -\lambda_c \mathrm{sen}(\lambda_c) + \cos(\lambda_c) + 2 \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

A solução geral de (3.42) tem então a forma:

$$X_1 = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \lambda_1 V \tag{3.50}$$

onde φ_1 e φ_2 são as soluções do sistema homogêneo $\overset{o}{F}_X \dot{X} = 0$, dados por (3.28)-(3.29). Para a solução (3.50) a condição inicial sobre a derivada em (3.24), nos diz que $c_2=0$. Assim (3.50) se transforma em

$$X_1 = c_1 \phi_1 + \lambda_1 V \tag{3.51}$$

De (3.39), temos que X_1 em (3.51) é solução de (3.42) se e somente se c_1 e λ_1 satisfazem a relação:

$$c_1^2 + 2\lambda_1^2 \quad \|V\|^2 = 1 \tag{3.52}$$

Para calcular c_1 e λ_1 analisaremos as condições de solubilidade de (3.43) substituindo no termo não homogêneo desta equação X_1 pela sua expressão em (3.51). Feito isto, se obtém o seguinte sistema linear algébrico para λ_1 e w_1:

$$\boxed{\begin{aligned} & c_1 \cdot [\lambda_1 <\overset{o}{F}_{XX} \phi_1 . V + \overset{o}{F}_{X\lambda} \phi_1 , \psi_1 > + w_1 <F_{Xw} \cdot \phi_1 , \psi_1 >] = 0 && (3.53a) \\ & c_1 \cdot [\lambda_1 <F_{XX} \phi_1 . V + F_{X\lambda} \phi_1 , \psi_2 > + w_1 < F_{Xw} \phi_1 , \psi_2 >] = 0 && (3.53b) \end{aligned}}$$

Para analisar as equações (3.53), temos dois casos a considerar:

$$\begin{cases} 1^{\circ} \text{ Caso: } c_1 = 0 & (3.54) \\ 2^{\circ} \text{ Caso: } c_1 \neq 0 & (3.55) \end{cases}$$

<u>Analisemos inicialmente o caso $c_1 = 0$.</u>

Assim as equações (3.53) se transformam em identidades, portanto λ_1 e w_1 podem tomar qualquer valor. Mas por

outro lado, quando $c_1 = 0$, a solução dada em (3.51) se transforma em uma solução estática dada por:

$$X_1 = \lambda_1 V \tag{3.56}$$

Assim de (3.54), temos:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\| V \|} \tag{3.57}$$

e w_1 é um parâmetro que pode assumir qualquer valor real. Então, diante de (3.56) e (3.57), representamos (3.36)-(3.37) na forma:

$$X \pm (\varepsilon, t) = X_0(\lambda_c) \pm \frac{\sqrt{2}}{2\| V \|} V.\varepsilon + o(\varepsilon) \tag{3.58}$$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_c + \frac{\sqrt{2}}{2\| V \|} . \varepsilon + o(\varepsilon) + \tag{3.59}$$

Mostraremos a seguir que esta solução coincide com a $X_0(\lambda, w)$ dada em (1.11).

Consideremos os pontos do $\mathbb{R}^2$ como soluções estáticas, (soluções independentes do tempo). Assim o operador F fica definido em

$$F: U \times \mathbb{R} \times (\lambda_c - r, \lambda_c + r) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

onde U é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^2$ e

$$F\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w, \lambda\right] = \begin{pmatrix} 2x - y - \lambda\cos(x - y) \\ -x + y - \lambda \end{pmatrix}$$

Se o par (x,y) está sobre a curva de equilíbrio $X_0(\lambda)$ (CAP.I com $\eta = \pi/2$ e $b_1=0$), temos $F[X_0(\lambda), w, \lambda] = 0$. Em particular $F[X_0(\lambda_c), w_c, \lambda_c] = 0$. Neste ponto, $F_X[X_0(\lambda_c), w_c, \lambda_c]$ tem determinante 1. Então pelo teorema da função implícita, temos que para λ numa vizinhança de λ_c, existe um único $\bar{X}_0(\lambda)$ tal que $F[\bar{X}_0(\lambda), w, \lambda] = 0$. Como a solução dada em (3.58) pelo método da perturbação de Poincaré-Lindstedt satisfaz esta última igualdade, logo

$$X_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + \lambda\cos(\lambda) \\ 2\lambda + \lambda\cos(\lambda) \end{pmatrix}$$

é a única solução estática na vizinhança de λ_c, isto é,

$$\bar{X}_0(\lambda) \equiv X_0(\lambda).$$

<u>Análise do 2º caso.</u>

Dividem-se ambas equações (3.53) por c_1 e obtém-se

$$\lambda_1 \langle \overset{o}{F}_{XX}\varphi_1 \cdot V + \overset{o}{F}_{X\lambda}\varphi_1, \psi_1\rangle + w_1 \langle \overset{o}{F}_{Xw}\varphi_1, \psi_1\rangle = 0 \qquad (3.60a)$$

$$\lambda_1 \langle \overset{o}{F}_{XX}\varphi_1 \cdot V + \overset{o}{F}_{X\lambda}\varphi_1, \psi_2\rangle + w_1 \langle \overset{o}{F}_{Xw}\varphi_1, \psi_2\rangle = 0 \qquad (3.60b)$$

Seja

$$M = \begin{pmatrix} \langle \overset{o}{F}_{XX} \phi_1 . V + \overset{o}{F}_{X\lambda} \phi_1 , \psi_1 \rangle & \langle \overset{o}{F}_{Xw} \phi_1 , \psi_1 \rangle \\ \langle \overset{o}{F}_{XX} \phi_1 . V + \overset{o}{F}_{X\lambda} \phi_1 , \psi_2 \rangle & \langle \overset{o}{F}_{Xw} \phi_1 , \psi_2 \rangle \end{pmatrix} \qquad (3.61)$$

A expressão explícita do determinante Δ de M foi encontrada com o auxílio da linguagem REDUCE 2, como o quociente de dois polinômios no parâmetro B. A avaliação numérica de Δ permite afirmar que ele é estritamente positivo conforme a expressão abaixo indica:

$$\Delta = \frac{\sum_{j=0}^{3} A_{2_{j+1}} \quad B^{2j+2}}{(0.2176.B^2 + 1.3772)^2} \qquad (3.62)$$

onde os coeficientes $a_{2_{j+1}}$; $j = 0,1,2,3.$ estão na tabela abaixo:

	TABELA
A_1	7. 162
A_3	3. 395
A_5	0.536
A_7	0.028

sendo $\Delta > 0$ podemos então dizer que para as equações (3.60) a solução única é

$$\lambda_1 = w_1 = 0 \tag{3.63}$$

Usando (3.63) em (3.52) e (3.53), chegamos a que

$$X_1 = c_1 \cdot \varphi_1$$

$$c_1 = \pm 1$$

É irrelevante tomar ou +1 ou -1 como valor de c_1. Optemos então por $c_1 = 1$. Assim a solução de (3.42) fica definitivamente determinada por

$$X_1 = \varphi_1 \tag{3.64}$$

Vamos agora ao cálculo de X_2, solução da equação (3.43). Utilizando (3.63) e (3.64) a parte não homogênea daquela equação fica reduzida a

$$\overset{o}{F}_{XX}\, \varphi_1^2 + \lambda_2 \overset{o}{F}_{\lambda} \tag{3.65}$$

donde temos

$$< \overset{o}{F}_{XX} \varphi_1^2 + \lambda_2 \overset{o}{F}_{\lambda} , \psi_j > = 0 \qquad j = 1,2$$

Usando as seguintes identidades trigonométricas

$$\cos^2 t = 1/2 + 1/2 \,.\, \cos 2t$$

$$\text{sen}^2 t = 1/2 - 1/2 \,.\, \cos 2t$$

$$\cos t . \text{sen} t = 1/2 \,.\, \text{sen} 2t$$

podemos expressar $\overset{o}{F}_{XX} \Phi_1^2$ como a soma de dois vetores, um periódico, e o outro constante, da seguinte forma:

$$\overset{o}{F}_{XX} \Phi_1^2 = P(t) + \tilde{P}$$

onde

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_1 . \cos 2t + P_2 \text{sen} t\, 2t \\ P_3 . \cos 2t + P_4 \text{sen} 2t \end{pmatrix} \qquad (3.66)$$

e

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \end{pmatrix} = \text{cte.} \qquad (3.67)$$

Os coeficientes $P_1, P_2, P_3, P_4, \tilde{P}_1$ e $\tilde{P}_2$ são polinômios na variável B dados explicitamente por:

$$P_1 = 0.124.B^4 + 0.189.B^2 + 1.199$$

$$P_2 = 0.005.B^3 + 0.114.B$$

$$P_3 = -0.012.B^4 + 0.008.B^2 + 0.047$$

$$P_4 = 0.031.B^3 + 0.319$$

$$\tilde{P}_1 = 0.100.B^4 - 0.865.B^2 - 1.811$$
$$\tilde{P}_2 = 0.125.B^4 - 1.040.B^2 - 2.064$$

Sendo $\lambda_2 F_\lambda + \tilde{P}$ constante é natural investigar uma solução particular de (3.43), isto é, da equação

$$\overset{o}{F}_X X_2 = - P(t) - (\tilde{P} + \lambda_2 F_\lambda) \qquad (3.68)$$

sob a forma

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} Q_1 . \cos 2t + Q_2 \operatorname{sen} 2t \\ Q_3 . \cos 2t + Q_4 \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \end{pmatrix} \qquad (3.69)$$

onde o vetor $Q = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \end{pmatrix}$ é constante.

Temos as constantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, $\tilde{Q}_1$ e $\tilde{Q}_2$ a determinar. Para isto usamos o mesmo artifício quando do cálculo da solução particular $\tilde{V}$ de (3.42), isto é, tomando $\overset{o}{F}_X = M + \tilde{M}$ temos que resolver:

$$(M + \tilde{M})\ (Q(t) + \tilde{Q}) = -P(t) - (P + \lambda_2 F_\lambda) \qquad (3.70)$$

Note-se que $M(\tilde{Q}) = 0$, portanto (3.70) se transforma em duas equações do tipo:

$$(M + \tilde{M})\,(Q(t)) = -P(t) \tag{3.71}$$

$$\tilde{M}(\tilde{Q}) = -(\tilde{P} + \lambda_2 \overset{o}{F}_\lambda) \tag{3.72}$$

Da equação (3.72), tiramos $\tilde{Q}$, aplicando $\tilde{M}^{-1}$ em ambos os lados, obtém-se

$$\tilde{Q}_1 = -(\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2) + \lambda_c.\mathrm{sen}(\lambda_c).\tilde{P}_2 + \lambda_2 v_1 \tag{3.73}$$

$$\tilde{Q}_2 = -\tilde{P}_1 - 2\tilde{P}_2 + \lambda_c.\mathrm{sen}(\lambda_c).\tilde{P}_2 + \lambda_2 v_2 \tag{3.74}$$

A menos do conhecimento de λ_2, temos calculado $\tilde{Q}$. Logo que λ_2 seja calculado, apresentaremos as expressões explícitas de suas coordenadas. O cálculo de Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 é obtido resolvendo-se o seguinte sistema linear algébrico de quarta ordem:

$$\mathcal{D} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

onde a matriz $\mathcal{D} = (aij)$ $i,j = 1,2,3,4$ obtida numericamente é

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -0.132 & 0.933.B & -1.302 & -0.933.B \\ -0.933.B & -0.132 & 0.933.B & -1.302 \\ -1.694 & -0.933 & 0.129 & 0.933.B \\ 0.933 & -1.694 & -0.933.B & 0.129 \end{pmatrix},$$

o seu determinante é

$$\det(\mathcal{D}) = 7.835.B^2 + 4.948 \quad 0 \qquad (3.76)$$

Então (3.75) tem solução única e é formalmente representada por:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}$$

Com REDUCE 2, e cálculos numéricos, obtivemos expressões polinomiais para os Q_i's, $i = 1,2,3,4$, conforme apresentamos explicitamente abaixo:

$$Q_1 = \frac{-0.383.B^4 - 3.187.B^2 + 2.172}{(0.217.B^2 + 1.377)^2 \,.\, (7.835.B^2 + 4.948)}$$

$$Q_2 = \frac{-0.072.B^5 - 0.078.B^3 + 3.169}{(0.217.B^2 + 1.377)^2 \,.\, (7.835.B^2 + 4.948)}$$

$$Q_3 = \frac{-0.631.B^4 - 3.742.B^2 - 4.506}{(0.217.B^2 + 1.377)^2 . (7.535.B^2 + 4.948)}$$

$$Q_4 = \frac{-0.211.B^5 - 1.327.B^3 - 5.515}{(0.217.B^2 + (1.377)^2 . (7.835.B^2) + 4.948)}$$

A menos do valor de λ_2, tem-se determinado os Q_i's e $\tilde{Q}_i$'s. Portanto uma solução geral de (3.43) será da forma:

$$X_2 = d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2 + Q(t) + \tilde{Q} \qquad (3.78)$$

para constantes arbitrárias d_1 e d_2. Pela condição inicial (3.24), temos

$$d_2 + 2Q_4 = 0 \qquad (3.79)$$

Pela condição (3.26)

$$d_1 = 0 \qquad (3.80)$$

Então de (3.79) e (3.80), X_2 em (3.78) se resumirá em:

$$X_2 = -2Q_4 . \varphi_2 + Q(t) + \tilde{Q} \qquad (3.81)$$

Sabemos de (3.72) que $\tilde{Q} = -M^{-1}(P) - \lambda_2 V$, então a determinação completa de X_2 depende somente agora de ser conhecido o

valor de λ_2. O cálculo do mesmo é conseguido pela análise das condições de solubilidade da equação (3.44). Substituindo λ_1, w_1, X_1 e X_2 por seus respectivos valores em (3.63) (3.64) e (3.81) no termo não homogêneo de (3.44) obtém-se as seguintes condições de solubilidade para (3.44)

$$\lambda_2 \; < F_{XX}\varphi_1 \cdot V + F_{X\lambda}\varphi_1 \, , \, \psi \; > \; + \; w_2 < \overset{o}{F}_{Xw}\varphi_1 \, , \psi_1 > \; =$$

$$= \; < F_{XX}\,\varphi_1 \cdot Q \; + \; F_{XX}\varphi_1 \cdot \overline{M} \; - \; \frac{1}{3} \cdot F_{XXX}\varphi_1^3 \, , \; \psi_1 >$$

(3.82a)

$$\lambda_2 \; < \overset{o}{F}_{XX}\varphi_1 \cdot V + F_{X\lambda}\varphi_1 \, , \, \psi_2 > \; + \; w_2 < F_{Xw}\varphi_1 \, , \psi_2 > \; =$$

$$= \; < -F_{XX}\psi_1 \cdot Q \; + \; F_{XX}\varphi_1 \cdot \overline{M} \; - \; \frac{1}{3} \cdot F_{XXX} \cdot \varphi_1^3 \, , \; \psi_2 >$$

(3.82.b)

Para chegarmos as equações acima, tomamos $\overline{M} = \tilde{M}^{-1}(P)$ e usamos o fato que $<F_{XX}\varphi_1 \, , \, \varphi_2 \, , \, \psi_j > \; = \; 0 \quad j = 1,2$. Observe-se ainda que o determinante da matriz principal é Δ, que já mostramos numericamente em (3.62) ser distinto de zero. Portanto as equações (3.82) terão solução única. Com REDUCE 2 e por cálculos numéricos obtemos expressões explícitas para λ_2 e w_2 da forma:

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{j=0}^{10} L_{2j+1} \cdot B^{2j+1}}{\sum_{j=0}^{9} \beta_{2j+1} \cdot B^{2j+1}} \qquad (3.83)$$

$$W_2 = \frac{\sum_{j=0}^{10} W_{2j+1} \cdot B^{2j+1}}{\sum_{j=0}^{9} \beta_{1j+1} \cdot B^{2j+1}} \qquad (3.82)$$

Os valores numéricos dos coeficientes estão na tabela na página seguinte.

TABELA					
λ_2		w_2		β	
L_{21}	0.000	W_{21}	0.000	β_{19}	0.000
L_{19}	0.001	W_{19}	-0.001	β_{17}	0.255
L_{17}	0.107	W_{17}	-0.046	β_{15}	0.774
L_{15}	1.627	W_{15}	-0.444	β_{13}	12.447
L_{13}	22.329	W_{13}	-1.810	β_{11}	120.649
L_{11}	198.133	W_{11}	-2.663	β_9	736.931
L_9	1039.437	W_9	-1.934	β_7	2819.759
L_7	3828.319	W_7	1.115	β_5	6252,395
L_5	8903.720	W_5	70.130	β_3	6443.824
L_3	11959.440	W_3	448.500	β_1	925.980
L_1	1600.214	W_1	30.541		

Dos valores numéricos obtidos para os coeficientes , vimos que λ_2 e w_2 são sempre positivos para $B \in (0,0,1]$. Como o cálculo da expressão completa de X_2 em (3.81) depende somente de λ_2, agora já o temos calculado. Apresentamos então até ordem 2, a solução de problema da bifurcação:

$$X(\varepsilon,t) = \begin{pmatrix} 1.164 \\ 1.812 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} \cos t - C(B)\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \varepsilon +$$

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} Q_1 \cos 2t + Q_2 \operatorname{sen} 2t \\ Q_3 \cos 2t + Q_1 \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} - 2Q_4 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} \cos t + C(B).\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \right] \cdot$$

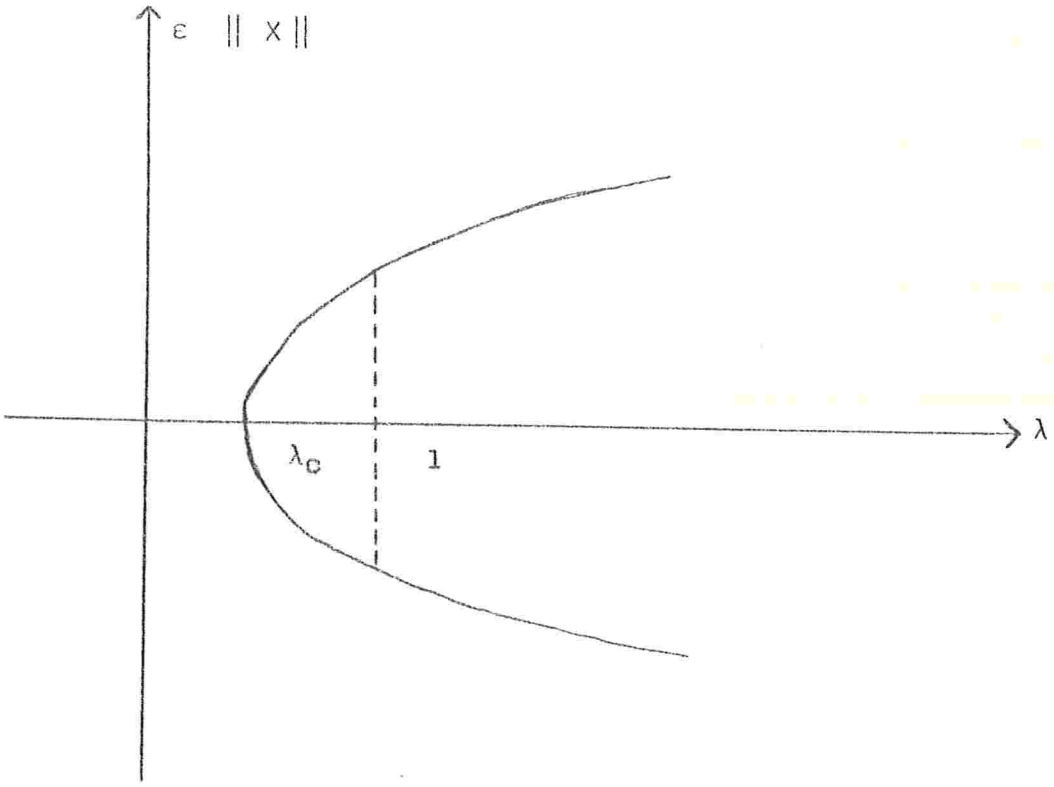
$$\cdot \ \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \qquad (3.84)$$

$$\lambda(\varepsilon) = 0.648 + \frac{1}{2} \frac{\sum_{j=0}^{10} L_{2j+1} \cdot B^{2j+1}}{\sum_{j=0}^{9} \beta_{2j+1} \cdot B^{2j+1}} \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \qquad (3.85)$$

$$w(\varepsilon) = 0.466 + \frac{1}{2} \frac{\sum_{j=0}^{10} W_{2j+1} \cdot B^{2j+1}}{\sum_{j=0}^{9} \beta_{2j+1} \cdot B^{2j+1}} \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon) \qquad (3.86)$$

Tomamos o plano $\varepsilon - \lambda$ para caracterizar a existencia de bifurcação. Esboçamos o gráfico de ε contra λ na vizinhança λ_c. Sendo o coeficiente de ε^2 positivo, temos então que o modo da bifurcação é super crítico.

FIGURA 5.



CAPÍTULO IV

TEORIA DA PERTURBAÇÃO SINGULAR DE BIFURCAÇÃO

4.1 - INTRODUÇÃO

Fazendo-se a substituição de τ por $t = \Omega\tau$ no problema proposto no CAP. I, (formulado pelas equações (1.3) - (1.4)) e aplicando as restrições (1.8), tem-se:

$$\begin{cases} G[X,\lambda,\Omega,\delta] = 0 \\ \\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=o} = 0 \end{cases}$$

Se para estas equações tomarmos $\delta = 0$, tem-se

$$\begin{cases} G[X,\lambda,\Omega,0] = F[X,\lambda,\Omega] = 0 \\ \\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=o} = 0 \end{cases}$$

que é o problema de bifurcação já tratado no CAP. III.

Pelas razões expostas na introdução dêste trabalho, deseja-se obter resultados que permitam exibir aproximações de soluções analíticas ou pelo menos criar técnicas analíticas que deduzam propriedades qualitiativas do problema formulado. Em uma análise preliminar do problema, constata-se que só existem soluções analíticas em δ para (λ,Ω) fora de uma vizinhança de (λ_c, ω_c). Para investir sôbre o problema, faz-se neste capítulo uma adaptação do "Método da Perturbação Singular de Bifurcação desenvol-

vido por B. Matkowsky e L. Reiss em[12].

Vamos supor que temos o problema geral

$$\begin{cases} G[X,\lambda,\Omega,\delta] = 0 & (4.1a) \\ g(X) = 0 & (4.2a) \end{cases}$$

onde

$$G: H \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow H$$

$$g: H \longrightarrow \mathbb{R},$$

H é um espaço de Hilbert real, G e g analíticos, G um operador não linear e g um funcional.

Assumiremos que

$$\begin{cases} G[X,\lambda,\Omega,0] = F[X,\lambda,\Omega] = 0 & (4.1b) \\ g(X) = 0 & (4.2b) \end{cases}$$

constitui um problema de bifurcação para F num ponto $(0,\lambda_c,\omega_c)$, com as seguintes características:

i) Existem exatamente dois vetores linearmente independentes $\phi_1, \phi_2 \in H$, tais que

$$\overset{o}{F}_X \phi_j = 0 \qquad ||\phi_j|| = 1, \qquad j = 1, 2$$

e $\psi_1, \psi_2 \in H$ *l.i.* tais que $\overset{o}{F}{}^{+}_X \psi = 0 \quad j = 1, 2$

ii) $\overset{o}{g}_X \phi_1 = 0$ e $\overset{o}{g}_X \phi_2 \neq 0$

iii) A matriz

$$M = \begin{pmatrix} < \overset{o}{F}_{X\lambda}\phi_1, \psi_1 > & < \overset{o}{F}_{X\Omega}\phi_1, \psi_1 > \\ < \overset{o}{F}_{X\lambda}\phi_1 \ \psi_2 > & < \overset{o}{F}_{X\Omega}\phi_1, \psi_2 > \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

é não-singular.

iv) Numa vizinhança (λ_c, ω_c) existem duas soluções: de (4.1b), (4.2b),

$$X_o(\lambda,\Omega) \equiv 0 \tag{4.4}$$

e

$$X^{(1)}(\lambda,\Omega) = \varphi_1\varepsilon + \frac{1}{2}X_2\cdot\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{4.5}$$

quando

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_c + \lambda_1\cdot\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda_2\cdot\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{4.6}$$

e

$$\Omega(\varepsilon) = \omega_c + \omega_1\cdot\varepsilon + \frac{1}{2}\omega_2\cdot\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{4.7}$$

onde $\varepsilon^2 = \langle X^{(1)}, X^{(1)} \rangle$.

Salientamos que as hipóteses que consideramos em F nos dizem que os espaços nulos de $\overset{o}{G}_X[0,\lambda_c,\omega_c,0]$ e $\overset{o+}{G}_X[0,\lambda_c,\omega_c,0]$ tem dimensão dois, enquanto que em [12] os respectivos espaços, têm dimensão um.

Por simplicidade de notação suprime-se de G e g as possíveis dependências sôbre outras variáveis, assumindo ainda satisfeitas tôdas as hipóteses que forem necessárias sôbre diferenciabilidade, limitação, etc.

Para a análise do que segue, nós definiremos como sub-ramos básicos de bifurcação qualquer um dos sub-ramos $X_o(\lambda, \Omega)$ ou $X^{(1)}(\varepsilon)$ e os denotaremos por $X_b(\lambda,\Omega)$.

A existência de bifurcação implica que as soluções de (4.1a, 2a), podem não ser analíticas em δ, assim o método de Matkowsky e Reiss consiste em determinar para o problema perturbado (4.1a, 2a) soluções analíticas em δ fora de uma vizinhança de (λ_c, ω_c), as chamadas <u>Soluções Externas</u>. E numa

vizinhança de (λ_c, ω_c), constroem-se soluções analíticas em um parâmetro μ, diferente de δ, as quais serão denominadas de Soluções Internas. Em seguida faz-se o acoplamento de cada solução interna com uma conveniente solução externa como é de costume no método de acoplamento de expanssões assintóticas. Citamos como referências de aplicações [12], [13] e [14] .

4.2 - SOLUÇÕES EXTERNAS

As soluções aproximadas que apresentaremos nesta seção serão representadas por expansões assintóticas em δ quando $\delta \longrightarrow 0$ e para (λ, Ω) fora de uma vizinhança de (λ_c, ω_c) na forma:

$$\boxed{U_b(\lambda, \Omega, \delta) = X_b(\lambda, \Omega) + \sum_{j=1}^{\infty} V_j(\lambda, \Omega)\delta^j} \qquad (4.8)$$

onde X_b é ou X_o ou $X^{(1)}$ dadas por (4.4) - (4.7).

Veremos que as expansões (4.8), não existem para $(\lambda, \Omega) = (\lambda_c, \omega_c)$.

Substituindo X em (4.1a, 2a) por (4.8) e agrupando os termos de potências iguais de δ, obtem-se a sequência recursiva de problemas lineares:

$$\begin{cases} \overset{o}{G} = 0 \\ \\ \overset{o}{g} = 0 \end{cases} \qquad (4.9)$$

$$\begin{cases} \overset{o}{G}_X U_1 = - \overset{o}{G}_\delta \equiv R_1(\lambda,\Omega) \\ \overset{o}{g}_X . U_1 = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} \overset{o}{G}_X U_2 = - \frac{1}{2} \left[(\overset{o}{G}_{XX} U_1)(U_1) + 2\overset{o}{G}_{X\delta} U_1 + \overset{o}{G}_{\delta\delta} \right] \equiv R_2(\lambda,\Omega) \\ \overset{o}{g}_X U_2 + (\overset{o}{g}_{XX}(U_1))(U_1) = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \overset{o}{G}_X U_j = R_j(\lambda,\Omega) \\ \overset{o}{g}_X U_j + r_j = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

O superíndice zero denota que o correspondente operador, está sendo avaliado em $\delta = 0$, por exemplo $\overset{o}{G}_X = G_X[X_b(\lambda,\Omega),\lambda,\Omega,0]$. O termo não homogêneo R_j em (4.12) depende de $X_b(\lambda,\Omega), U_1, U_2, \ldots, U_{j-1}$. Isto faz com que a sequência (4.10) - (4.12) constitua um sistema recursivo de equações lineares.

A equação (4.9), isto é,

$$G[X_b,\lambda,\Omega,0] = F[X_b,\lambda,\Omega] = 0 ,$$

é verificada, pois $X_b(\lambda,\Omega)$ é solução do problema de bifurcação.

Para $(\lambda,\Omega) \neq (\lambda_c,\Omega_c)$, temos que

$$\overset{o}{G}_X = F_X[X_b(\lambda,\Omega),\lambda,\Omega] \tag{4.13}$$

é um operador linear não-singular, portanto em (4.12), U_j para $j = 1,2,\ldots$ e dado por:

$$U_j(\lambda,\Omega) = (\overset{o}{G}_X)^{-1}(R_j(\lambda,\Omega)) \tag{4.14}$$

Assumiremos que o operador G também satisfaz:

$$\boxed{< \overset{o}{G}_{\delta}, \psi_1 >^2 + < \overset{o}{G}_{\delta}, \psi_2 >^2 \neq 0} \qquad (4.15)$$

Esta condição diz que a perturbação representada pelo parâmetro δ destroi a bifurcação, pois sendo ela verificada, não há qualquer ramo de solução passando em $(0, \lambda_c, \omega_c)$.

Assumiremos ainda que F satisfaz

$$< \overset{o}{F}_{XX} \varphi_1^2, \psi_j > = 0 \qquad j = 1, 2 \qquad (4.16)$$

Esta hipótese não terá influência sobre a destruição da bifurcação, mas sobre o tipo de não-linearidade da perturbação, como veremos no cálculo das expansões internas.

Em (4.12), quando (λ, Ω) tende a (λ_c, ω_c), $\overset{o}{G}_X$ tende a $\overset{o}{F}_X$ que é um operador singular. Neste caso, em (4.12), para $j = 1$ por exemplo, U_1 não existirá em (λ_c, Ω_c) devido a hipótese (4.15). A fim de determinar o comportamento de $U_1(\lambda, \Omega)$ quando (λ, Ω) se aproxima de (λ_c, ω_c), introduziremos coordenadas polares no plano λ-Ω, definindo

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_c + \rho\cos\alpha \\ \Omega = \omega_c + \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad 0 \leq \rho, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \qquad (4.17)$$

<u>Cálculo de U_b (4.8) quando $X_b = X_o$</u> :

Desenvolvendo $\overset{o}{F}_X[0, \lambda, \Omega]$ em potências de ρ para $\rho << 1$, tem-se:

$$\overset{o}{G}_X = F_X[0,\lambda,\Omega] = \overset{o}{F}_X + \rho\{\cos\alpha\cdot\overset{o}{F}_{X\lambda} + \operatorname{sen}\alpha\cdot\overset{o}{F}_{X\Omega}] + o(\rho) \quad (4.18)$$

Dado que $\overset{o}{F}_X$ é singular a condição (4.15), implica que a solução U de (4.10) não pode ser contínua em ρ, portanto investigaremos U_1 sob a forma:

$$\boxed{U_1 = \frac{1}{\rho}\, u_o + u_1 + \rho\, u_2 + o(\rho)} \quad (4.19)$$

Usando (4.18) e (4.19) em (4.10), obtem-se

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_X\, u_o = 0 \\ \overset{o}{g}_X\, u_o = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_X\, u_o + \{\cos\alpha\, \overset{o}{F}_{X\lambda}\ \operatorname{sen}\alpha\cdot\overset{o}{F}_{X'\Omega}\}u_o = -\overset{o}{G}_\delta \\ \overset{o}{g}_X\, u_1 = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

A solução de (4.20) é

$$u_o = C\,\varphi_1$$

onde C é uma constante a ser determinada. As condições de solubilidade para (4.21), nos dão:

$$C\cdot M\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} < \overset{o}{G}_\delta, \psi_1 > \\ < \overset{o}{G}_\delta, \psi_2 > \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

onde a matriz M(2x2) foi definida em (4.3). Para cada ângulo α

fixado, a constante C é a incógnita.

De (4.22), conclui-se que a solução u_o existe só para os dois valores de α definidos por

$$C \begin{pmatrix} \cos \alpha^* \\ \\ \operatorname{sen} \alpha^* \end{pmatrix} = - M^{-1} \begin{pmatrix} < \overset{o}{G}_\delta , \psi_1 > \\ \\ < \overset{o}{G}_\delta , \psi_2 > \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

isto é α^* e $\alpha^* + \Pi$. Mas observa-se que se $\overline{C}$ e $\alpha^* + \Pi$ é a outra solução, a menos de sinal $\overline{C}$ é dado por:

$$|\overline{C}| = \left| \left| M^{-1} \begin{pmatrix} < \overset{o}{G}_\delta \ \phi_1 > \\ \\ < \overset{o}{G}_\delta , \phi_2 > \end{pmatrix} \right| \right| \tag{4.24}$$

Define-se para referências futuras

$$C^+ = \overline{C}$$

(Vamos supor $\overline{C} > 0$)

$$C^- = -\overline{C}$$

Podemos então representar (4.8) para $X_b = X_o$

$$u_o^{\pm} = \left[\frac{C^{\pm}}{\rho} \cdot \varphi_1 + o(\rho^{-1}) \right] \delta + o(\delta) \tag{4.25}$$

onde

$$\rho = \sqrt{(\lambda - \lambda_c)^2 + (\Omega - \omega_c)^2} \tag{4.26}$$

(veja (4.17).

<u>Cálculo de u_b quando $X_b = X^{(1)}(\varepsilon)$:</u>

A solução básica agora é dada por (4.5) - (4.7). Neste caso, desenvolvendo os operadores $F_X[X^{(1)}(\varepsilon),\lambda,\Omega]$ e $g_X(X^{(1)}(\varepsilon))$

em potências de ε, tem-se

$$F_x[X^{(1)}(\varepsilon),\lambda,\Omega] = \overset{o}{F}_x + \varepsilon\cdot\overset{o}{F}_{xx}X_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\{\overset{o}{F}_{xxx}X_1^2 + \overset{o}{F}_{xx}X_2 + \lambda_2\overset{o}{F}_{x\lambda} + \omega_2\overset{o}{F}_{x\Omega}\} + o(\varepsilon^2) \qquad (4.27)$$

$$g_x(X^{(1)}(\varepsilon)) = \overset{o}{g}_x + \varepsilon\overset{o}{g}_{xx}X_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}[\overset{o}{g}_{xx}X_2 + \overset{o}{g}_{xxx}X_1^2] + o(\varepsilon^2) \qquad (4.28)$$

Em (4.27) tem-se utilizado o fato que (4.16) implica $\lambda_1 = \omega_1 = 0$. Pelo mesmo motivo que procuramos U_1 da forma (4.19), agora buscamos soluções de (4.10) sob a forma:

$$V = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot v_o + \frac{1}{\varepsilon}v_1 + v_2 + \cdots \qquad (4.29)$$

Usando (4.27) e (4.29) em (4.12), obtemos para $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_x v_o = 0 \\ \overset{o}{g}_x v_o = 0 \end{cases} \qquad (4.30)$$

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_x v_1 + \overset{o}{F}_{xx}\varphi_1\cdot v_o = 0 \\ \overset{o}{g}_x v_1 + \overset{o}{g}_{xx}\varphi_1\cdot v_o = 0 \end{cases} \qquad (4.31)$$

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_x v_2 + \overset{o}{F}_{xx}\varphi_1\cdot v_1 + \frac{1}{2}\{\overset{o}{F}_{xxx}\varphi_1^2 + \overset{o}{F}_{xx}X_2 + \lambda_2\overset{o}{F}_{x\lambda} + \omega_2\overset{o}{F}_{x\Omega}\}v_o = -\overset{o}{G}_\delta \\ \overset{o}{g}_x v_2 + \overset{o}{g}_{xx}\varphi_1\cdot v_1 + \frac{1}{2}[\overset{o}{g}_{xxx}\varphi_1^2 + \overset{o}{g}_{xx}X_2]v_o = 0 \end{cases} \qquad (4.32)$$

A solução de (4.30) é

$$v_o = D\,\varphi_1 \tag{4.33}$$

onde D é uma constante a ser determinada. Usando (4.33) em (4.31), tem-se que

$$v_1 = r_1\,\varphi_1 + r_2\,\varphi_2 + D\Phi \tag{4.34}$$

(Veja Φ CAP. II).

$$r_1 = -D < \Phi, \varphi_1 > = d_1 \tag{4.35}$$

$$r_2 = D\left(-\frac{\overset{o}{g}_x\Phi + \overset{o}{g}_{xx}\varphi_1^2}{\overset{o}{g}_x\,\varphi_2}\right) = D\,d_2\,. \tag{4.36}$$

Usando (4.35) e (4.36) em (4.34), temos

$$v_1 = D[\;d_1\cdot\varphi_1 + d_2\varphi_2 + \Phi\;]. \tag{4.37}$$

Usando-se as condições (4,16) e v_1 dada por (4,37) nas condições de solubilidade de (4.33), deduz-se que a solução externa U_1 existe se e somente se a constante D, os coeficientes de bifurcação λ_2 e ω_2 e os parâmetros de perturbação $<\overset{o}{G}_\delta,\psi_j>$ j=1,2, estão relacionados pela equação:

$$D\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \omega_2\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}<\overset{o}{G}_\delta,\ \psi_1>\\ <\overset{o}{G}_\delta\ \ \psi_2>\end{pmatrix} \tag{4.38}$$

Isto quer dizer que para a existência de D, precisa-se ter antes a colinearidade entre os vetores

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M^{-1} \begin{pmatrix} < \overset{o}{G}_\delta , \psi_1 > \\ < \overset{o}{G}_\delta , \psi_2 > \end{pmatrix},$$

caso isto aconteça D é dado, a menos de sinal, por:

$$|D| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \omega_2^2}} \left| \left| M^{-1} \begin{pmatrix} < \overset{o}{G}_\delta , \psi_1 > \\ < \overset{o}{G}_\delta , \psi_1 > \end{pmatrix} \right| \right| \qquad (4.39)$$

Conhecido o escalar D, podemos expressar a solução externa u_1 aproximadamente por:

$$\boxed{u_1^{\pm} = \left[\pm\varepsilon + \frac{D \cdot \delta}{\varepsilon^2} \right] \varphi_1 + O(\delta)} \qquad (4.40)$$

Caso D exista, da combinação de (4.23) com (4.38), conclui-se que

$$C \begin{pmatrix} \cos \alpha^* \\ \operatorname{sen} \alpha^* \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.41),$$

e se definirmos θ^* e r por

$$\begin{cases} \lambda_2 = r \cos \theta^* \\ \omega_2 = r \operatorname{sen} \theta^* \end{cases} \qquad r \geq 0 \qquad (4.42),$$

tem-se de (4.41) que na direção θ^*, $C = - r D$. Portanto,

$$u_1^{\pm} = \left[\pm\varepsilon + \frac{C \delta}{r' \varepsilon^2} \right] \varphi_1 + o(\delta) \qquad (4.40)$$

4.3 - EXPANSÕES INTERNAS

Determinaremos agora expansões assintóticas das soluções do problema perturbado que são analíticas numa vizinhança de (λ_c, ω_c) quando $\delta \longrightarrow 0$. Para isto, tomaremos um novo parâmetro ξ em uma transformação que tem por objetivo fazer uma mudança de escalas nas vizinhanças de (λ_c, ω_c). Isto é

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_c + \xi \cdot \mu^a \cdot \cos\alpha + o(\mu^a) & (4.43) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \xi \geq 0, \quad \alpha \in [\,0,\ 2\pi\,) \\ \Omega = \omega_c + \xi \cdot \mu^a \operatorname{sen}\alpha + o(\mu^a) & (4.44) \end{cases}$$

onde o novo pequeno parâmetro μ é definido por

$$\delta(\mu) = \mathrm{Sig}(\delta) \cdot \mu^b \qquad (4.45)$$

e a,b são inteiros constantes cujos valores serão determinados da não-linearidade do operador G.

Procuraremos agora soluções

$$X(\lambda(\mu),\ \Omega(\mu),\ \delta(\mu)) = Z(\mu) = \sum z_j \mu^j \qquad (4.46)$$

Exigiremos de início que $\delta(\mu)$ seja contínua, com $\delta(0) = 0$. Assim o ponto $(\lambda(0),\ \Omega(0)) = (\lambda_c, \omega_c)$ e $Z_o = Z(0) = X_o(\lambda_c, \omega_c, 0) = 0$ é o ponto de bifurcação de $Z(\mu)$. Coloca-se (4.43)-(4.45) em (4.1a, 2a) e igualam-se a zero, os coeficiente de cada potência μ, isto dá origem ao seguinte sistema recursivo de equações lineares para determinar sucessivamente os z_j :

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_x Z_1 = - \overset{o}{\delta}_\mu \overset{o}{G}_\delta = T_1 \\ \\ \overset{o}{g}_x Z_1 = 0 \end{cases} \tag{4.47}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_x Z_j = T_j \\ \\ \overset{o}{g}_x z_j = t_j \end{cases} \tag{4.48}$$

onde o superíndice zero significa que o operador está sendo calculado em $\mu = 0$.

Exige-se que $\overset{o}{\lambda}_\mu$ e $\overset{o}{\delta}_\mu$ sejam limitadas, consequentemente a e b são inteiros positivos. Se $b = 1$ a série (4.46) é série de potências em δ, mas isto não pode acontecer, pois já vimos na seção anterior que não há solução analítica em δ do problema perturbado quando $\delta \longrightarrow 0$ e λ está numa vizinhança de λ_c. Portanto

$$a \geq 1 \tag{4.49}$$

$$b \geq 2 \tag{4.50}$$

Consequentemente, teremos de (4.43) que

$$\overset{o}{\lambda}_\mu = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a > 1 \\ \\ \xi & \text{se} \quad a = 1 \end{cases} \tag{4.51}$$

e de (4.45) que

$$\overset{o}{\delta}_\mu = 0 \tag{4.52}$$

Usando (4.52) em (4.47), temos:

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_x Z_1 = 0 \\ \\ \overset{o}{g}_x z_1 = 0 \end{cases} \tag{4.53}$$

cuja solução é

$$Z_1 = I \cdot \varphi_1 \tag{4.54}$$

onde I é uma constante a determinar.

Resolvendo-se (4.48) para j=2, obtem-se:

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_x Z_2 = -\frac{1}{2}\left[\overset{o}{F}_{xx} Z_1^2 + 2\overset{o}{\lambda}_\mu \overset{o}{F}_{x\lambda} Z_1 + 2\overset{o}{\Omega}_\mu \overset{o}{F}_{x\Omega} \cdot Z_1 + \overset{o}{\delta}_{\mu\mu} \overset{o}{G}_\delta \right] \\ \\ \overset{o}{g}_x z_2 + \overset{o}{g}_{xx} \cdot z_1^2 = 0 \end{cases} \tag{4.55}$$

Substituindo z_1 em (4.55) por (4.54) e supondo a = 1 e b = 2 nas expressões (4.43)-(4.45) teremos então para (4.55) as seguintes condições de solubilidade:

$$I \cdot \xi \cdot M \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \\ \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix} = -2 \operatorname{Sig} \delta \begin{pmatrix} < \overset{o}{G}_\delta , \psi_1 > \\ \\ < \overset{o}{G}_\delta , \psi_2 > \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

Usamos em (4.56) a hipótese (4.16). Resulta de (4.56) que I é uma função descontínua de ξ, assim a e b devem satisfazer as desigualdades

$$a \geq 2$$

$$b \geq 3$$

consequentemente obtem-se:

$$\overset{o}{\lambda}_{\mu} = 0 \tag{4.58}$$

$$\overset{o}{\Omega}_{\mu} = 0 \tag{4.59}$$

$$\overset{o}{\delta}_{\mu\mu} = 0 \tag{4.60}$$

Diante de (4.58)-(4.60), (4.55) se resumirá em:

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_{x} Z_2 = - I^2 \overset{o}{F}_{xx} \cdot \varphi_1^2 \\ \overset{o}{g}_{x} z_2 + I^2 \overset{o}{g}_{xx} \varphi_1^2 = 0 \end{cases} \tag{4.61}$$

cuja solução é:

$$Z_2 = s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2 + I^2 \Phi \tag{4.62}$$

$$s_2 = I^2 \left(- \frac{\overset{o}{g}_{x} \Phi + \overset{o}{g}_{xx} \varphi_1^2}{\overset{o}{g}_{x} \varphi_2} \right) = I^2 \cdot d_2 \tag{4.63}$$

$$s_1 \in \mathbb{R} \tag{4.64}$$

Assim $$Z_2 = s_1 \varphi_1 + I^2 d_2 \varphi_2 + I^2 \cdot \Phi \tag{4.65}$$

Calculando (4.48) para $j = 3$, temos:

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_{x} Z_3 + 3\overset{o}{F}_{xx} Z_1 Z_2 + \overset{o}{F}_{xxx} Z_1^3 + 3\overset{o}{\lambda}_{\mu\mu} \overset{o}{F}_{x\lambda} Z_1 + 3\Omega_{\mu\mu} \cdot \overset{o}{F}_{x\Omega} Z_1 + \overset{o}{\delta}_{\mu\mu\mu} \cdot G_{\delta} = 0 \\ \overset{o}{g}_{x} Z_3 + \overset{o}{g}_{xx} Z_1 Z_2 + 2I^2 \overset{o}{g}_{xx} Z_1 \cdot Z_2 + I^2 \overset{o}{g}_{xxx} \cdot Z_1^3 = 0 \end{cases} \tag{4.66}$$

Substituindo Z_1 e Z_2 em (4.66) por suas respectivas expressões em (4.54) e (4.65) obtemos as seguintes condições de solubilidade:

$$3I \cdot M \cdot \begin{pmatrix} \overset{o}{\lambda}_{\mu\mu} \\ \\ \overset{o}{\Omega}_{\mu\mu} \end{pmatrix} = - \overset{o}{\delta}_{\mu\mu\mu} \begin{pmatrix} < \overset{o}{G}_{\delta}, \psi_1 > \\ \\ < \overset{o}{G}_{\delta}, \psi_2 > \end{pmatrix} + 3I^3 \, M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \\ \omega_2 \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

Usamos em (4.67) a equação (2.20).

Para que a constante I dependa da bifurcação e da perturbação analiticamente, podemos supor em (4.67)

$$\begin{pmatrix} \overset{o}{\lambda}_{\mu\mu} \\ \\ \overset{o}{\Omega}_{\mu\mu} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{e} \quad \overset{o}{\delta}_{\mu\mu\mu} \neq 0 \tag{4.68}$$

Neste caso os inteiros <u>a</u> e <u>b</u> são

$$a = 2 \tag{4.69}$$

$$b = 3 \tag{4.70}$$

e consequentemente:

$$\begin{pmatrix} \overset{o}{\lambda}_{\mu\mu} \\ \\ \overset{o}{\Omega}_{\mu\mu} \end{pmatrix} = 2\xi \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \\ \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

e

$$\overset{o}{\delta}_{\mu\mu\mu} = 6 \, \mathrm{Sig} \, (\delta) \tag{4.72}$$

Usando-se (4.71) e (4.72) em (4.67) obtem-se

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \\ \omega_2 \end{pmatrix} I^3 - 2\xi \cdot I \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \\ \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix} - 2 \, \mathrm{Sig}(\delta) \cdot M^{-1} \begin{pmatrix} < \overset{o}{G}_{\delta}, \psi_1 > \\ \\ < \overset{o}{G}_{\delta}, \psi_2 > \end{pmatrix} = 0 \tag{4.73}$$

Utilizando (4.23) e (4.42) em (4.73) obtem-se

$$r \cdot I^3 \cdot \cos\theta^* - 2 \cdot \xi \cdot I \cdot \cos\alpha + 2 \cdot \mathrm{Sig}(\delta) \cdot \bar{C} \cdot \cos\alpha^* = 0 \qquad (4.74a)$$

$$r \cdot I^3 \cdot \mathrm{sen}\,\theta^* - 2 \cdot \xi \cdot I \cdot \mathrm{sen}\,\alpha + 2\,\mathrm{Sig}(\delta)\,\bar{C}\,\mathrm{sen}\,\alpha^* = 0 \qquad (4.74b)$$

$\bar{C} = C^+$ ou C^- caso se tenha α^* ou $\alpha^* + \pi$

Antes de iniciar a análise das equações (4.74) definem-se algumas entidades geométricas com o objetivo de auxiliar na interpretação dos resultados e de termos um esboço gráfico para a resposta.

Considera-se o espaço cartesiano tridimensional formado pelas triplas (λ, Ω, I) onde nos eixos λ e Ω estão representados os valores

$$\lambda = \lambda_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \cos\alpha\,(\xi)$$

e

$$\Omega = \omega_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \mathrm{sen}\,\alpha\,(\xi)$$

respectivamente. No eixo I estão representados os valores $I(\xi)$, coeificiente de φ_1 na expansão (4.46). O par $(\alpha(\xi), I(\xi))$ deve satisfazer as equações (4.74).

No espaço acima definido, define-se como $P(\theta)$ o plano que contem a reta $R_c = (\lambda_c, \omega_c, I)$ e faz no sentido anti-horário o ângulo θ com o plano $(\lambda, 0, I)$. Em $\mathbb{P}(\theta)$ consideram-se os semi-planos $S\,\mathbb{P}(\theta)$ e $S\,\mathbb{P}(\theta + \pi)$ com respeito a reta R_c. Sejam $\mathbb{P}(\theta^*)$ $\mathbb{P}(\alpha^*)$, $\mathbb{P}(\alpha(\xi))$ e seus respectivos semi-planos definidos analogamente.

Da hipótese (4.16) tem-se que $\lambda_1 = \omega_1 = 0$, então de (4.42) e do CAP. III, conclui-se que a curva de bifurcação está contida em $\mathbb{P}(\theta^*)$, por isto vamos chamá-lo de o "Plano da Bifurcação". A solução externa $\mathcal{U}_o$ (relativamente $X_b \equiv 0$) está por (4.23), no plano $\mathbb{P}(\alpha^*)$ em geral distinto de $\mathbb{P}(\theta^*)$.

Diante dos elementos definidos acima, faz-se a análise das equações (4.74) em dois casos.

I) Caso em que as soluções externas relativamente a $X_b \equiv 0$ estão no plano da bifurcação, isto é, $\mathbb{P}(\alpha^*) = \mathbb{P}(\theta^*)$.

Este caso sugere estudo em duas situações, como segue:

I-a) <u>Análise no semiplano $S\,\mathbb{P}(\theta^*)$</u>

Seja então

$$(S_1): \alpha^* = \theta^*$$

Assumindo (S_1), conclui-se das expansões nas equações (4.74) e do fato que $\cos^2\alpha^* + \operatorname{sen}^2\alpha^* \neq 0$ e $I(\xi) \neq 0 \quad \forall\, \xi \geq 0$ que:

$$(S'_1): \alpha(\xi) \equiv \alpha^* \qquad \forall \quad \xi \geq 0 .$$

Com (S_1) e (S'_1), as equações (4.74) não são independentes, restringindo-se portanto a uma única equação:

$$rI^3 - 2\xi \cdot I + 2\,\mathrm{Sig}(\delta) \cdot C^+ = 0 \quad \text{com} \quad \xi \geq 0 . \tag{4.75}$$

O discriminante de (4.75) é

$$\mathcal{D}(\xi) = -\frac{8}{27r^3} \cdot \xi^3 + \frac{C^{+2}}{r^2} \tag{4.76}$$

Consequentemente, existem três raízes reais, simples se

$$\xi > \xi_0 = \frac{3r}{2} \left(\frac{C^+}{r} \right)^{2/3} \tag{4.77}$$

e uma raiz real dupla se

$$\xi = \xi_0 \tag{4.78}$$

Para

$$0 \leq \xi < \xi_0 \tag{4.79}$$

existe só uma raiz real. Os comportamentos assintóticos das três reais simples para $\xi \longrightarrow \infty$ são:

$$I_1^+ (\xi) \approx - \sqrt{\frac{2\xi}{r}} \tag{4.80}$$

$$I_2^+ (\xi) \approx \sqrt{\frac{2\xi}{r}} \tag{4.81}$$

$$I_3^+ (\xi) \approx \frac{Sig(\delta) \cdot C^+}{\xi} \tag{4.82}$$

I-b) <u>Análise no semi-plano complementar $S\,|P(\theta^* + \pi)$</u>

Seja então

$$(S_2) \quad \alpha^* = \theta^* + \pi$$

Assumindo (S_2), pelos mesmos motivos que em (I-a), obtem-se de (4.74,a-b) que

$$(S'_2) \quad \alpha(\xi) \equiv \alpha^* = \theta^* + \pi \quad \forall \quad \xi \geq 0$$

Usando (S_2) e (S'_2) em (4.74, a-b), estas se restringem em:

$$r\, I^3 + 2\xi \cdot I - 2\, \mathrm{Sig}\,(\delta) \cdot C^- = 0$$

lembrando de (4.23) que $C^- = -C^+$. A equação acima tem apenas uma raiz real para $\xi \geq 0$ e cujo comportamento assintótico para $\xi \longrightarrow \infty$ é dado por:

$$I_1^-(\xi) = \frac{\mathrm{Sig}\,(\delta) \cdot C^-}{\xi} = \frac{-\mathrm{Sig}\,(\delta) \cdot C^+}{\xi} \qquad (4.83)$$

Note-se que sendo $I(\xi) \neq 0 \;\; \forall\, \xi$, então para $\xi = \xi_0$ (4.81) e (4.82) devem se conectar, como também (4.80) e (4.83) devem fazer o mesmo para $\xi = 0$. Assim pode-se dizer que a expansão interna $\mathcal{Z}\,(\mu)$ formulada em (4.46) tem como resposta gráfica no plano $P(\theta^*)$ uma curva formada por dois ramos disjuntos $\mathcal{Z}^+$ e $\mathcal{Z}^-$ dados por:

$$\mathcal{Z}^+(\xi) = \mathcal{Z}_2^+(\xi) \cup \mathcal{Z}_3^+(\xi)$$

$$\mathcal{Z}^-(\xi) = \mathcal{Z}_1^+(\xi) \cup \mathcal{Z}_2^-(\xi)$$

onde

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_1^+(\xi) = \left(\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ -\sqrt{\dfrac{2\xi}{r}} \cdot \mu + o(\mu)\right). \\[2ex] \mathcal{Z}_2^+(\xi) = \left(\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ \sqrt{\dfrac{2\xi}{r}} \cdot \mu + o(\mu)\right) \\[2ex] \mathcal{Z}_3^+(\xi) = \left(\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ \dfrac{\mathrm{Sig}(\delta) \cdot C^+}{\xi} \cdot \mu + o(\mu)\right) \end{cases}$$

quando

$$\lambda = \lambda_c + \xi \cdot \cos\,(\theta^*) \cdot \mu^2 + o(\mu^2)$$

$$\Omega = \omega_c + \xi \cdot \mathrm{sen}\,(\theta^*) \cdot \mu^2 + o(\mu^2)$$

e

$$Z^{-}(\xi) = (\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ \frac{Sig(\delta)\cdot C^{-}}{\xi}\cdot\mu + O(\mu))$$

quando

$$\lambda(\xi) = \lambda_c - \xi\cdot\cos(\theta^*)\cdot\mu^2 + O(\mu^2)$$

$$\Omega(\xi) = \omega_c - \xi\cdot sen(\theta^*)\cdot\mu^2 + O(\mu^2)$$

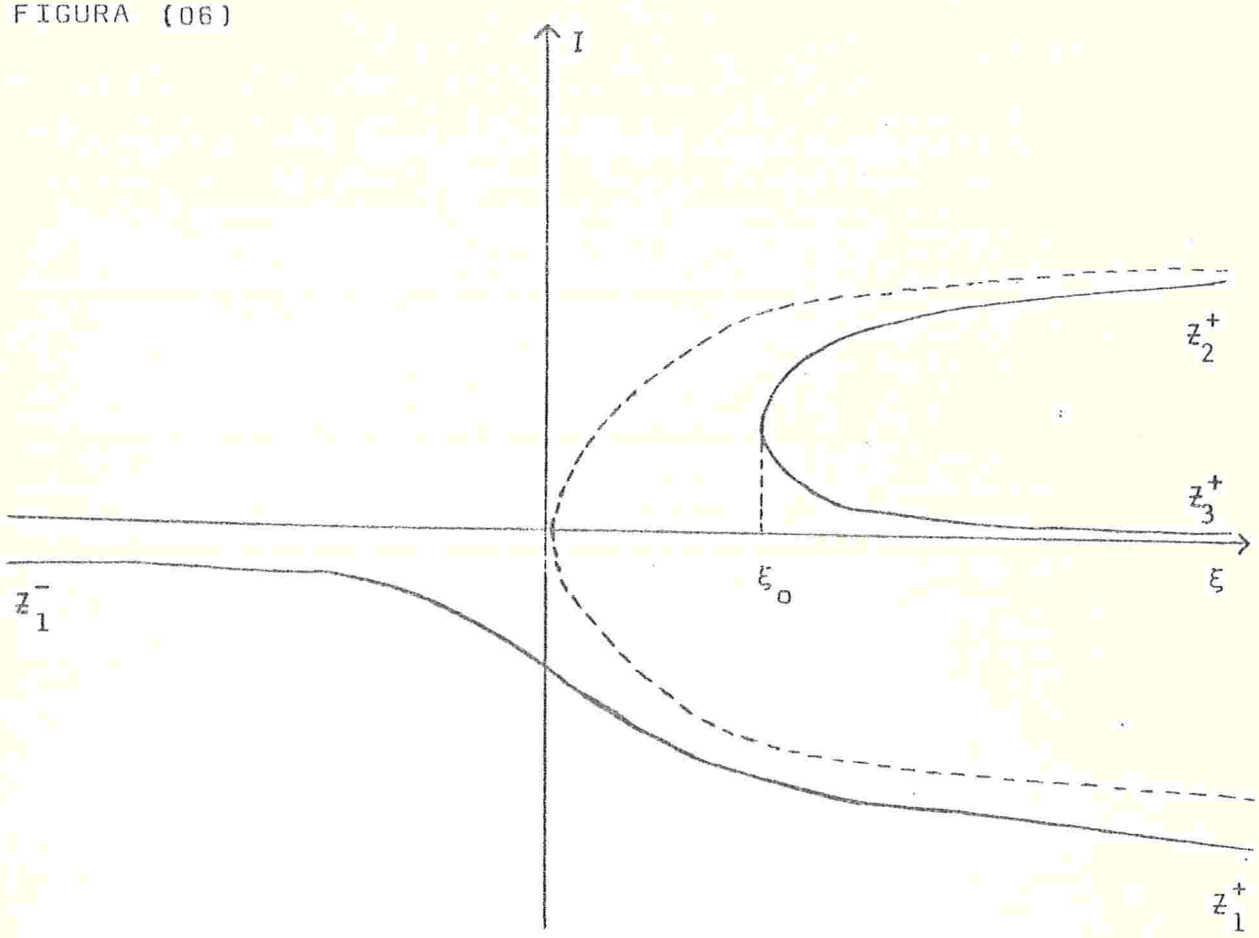
Na solução $X^{(1)}(\varepsilon)$ de bifurcação o coeficiente de ϕ_1 é ε, o qual pode ser expresso em termos das variáveis internas ξ e μ para $\xi \longrightarrow \infty$ sob a forma

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{2\xi}{r}}\cdot\mu \qquad (4.84)$$

Portanto quando $\xi \longrightarrow \infty$ (4.80) e (4.81) dizem que $Z_1^{+}(\xi)$ e $Z_2^{+}(\xi)$ se aproximam da solução $X^{(1)}(\varepsilon)$ da bifurcação. De(4.82) e (4.83) deduz-se que $Z_3^{+}(\xi) \longrightarrow 0^{+}$ e $Z_1^{-}(\xi) \longrightarrow 0^{-}$ para $\xi \longrightarrow \infty$.

Identificando-se o plano de bifurcação $\mathbb{P}(\theta^*)$ com o $\mathbb{R}^2$ com pares ordenados (ξ, I), pode-se obter o seguinte esboço gráfico para $Z(\mu)$.

FIGURA (06)



(A curva pontilhada representa a curva da bifurcação.)

O processo de acoplamento (MATCHING) das expansões externas $U_0^{\pm}$ e $U_1^{\pm}$, (se esta existir) com as internas Z, consiste em expressar os coeficientes externos em termos das variáveis internas ξ e μ para (λ,Ω) próximo de (λ_c, ω_c) segundo a mudança de escalas dada em (4.43)-(4.44). Aqui os coeficientes externos a serem considerados são os coeficientes de ϕ_1 nas expansões $U_0^{\pm}$ em (4.25) e U_1 em (4.40). Para os quais será usada a notação:

$$u_o^+ = \frac{C^+}{\rho} \cdot \delta$$

$$u_o^- = \frac{C^-}{\rho} \cdot \delta$$

para os coeficientes de $U_o^{\pm}$, e

$$u_1^+ = \left[+\varepsilon + \frac{C^-}{\varepsilon^2 \cdot r} \cdot \delta \right]$$

$$u_1^- = \left[-\varepsilon + \frac{C^-}{\varepsilon^2 \cdot r} \delta \right]$$

para os coeficiente de $U_1^{\pm}$.

Utilizando-se os fatos que

$$\rho^2 = r^2 \approx (\lambda - \lambda_c)^2 + (\Omega - \omega_c)^2 = \xi^2 \cdot \mu^4$$

$$\delta(\mu) = \text{Sig}\ (\delta) \cdot \mu^3$$

e ε dado por (4.84), segue:

$$\mu_o^+ = \frac{C^+ \cdot \text{Sig}\ (\delta)}{\xi} \cdot \mu$$

$$\mu_o^- = \frac{C^- \cdot \text{Sig}\ (\delta)}{\xi} \cdot \mu$$

$$\mu_1^+ = \left[\sqrt{\frac{2\xi}{r}} + \frac{C^- \cdot \text{Sig}\ (\delta)}{2\xi} \right] \mu$$

$$\mu_1^- = \left[-\sqrt{\frac{2\xi}{r}} + \frac{C^- \cdot \text{Sig}\ (\delta)}{2\xi} \right] \mu$$

Facilmente conclui-se de $\mu_o^{\pm}$ e $\mu_1^{\pm}$ que

$$\mathcal{U}_o^+ \text{ acopla com } \mathcal{Z}_3^+$$

$$\mathcal{U}_o^- \text{ acopla com } \mathcal{Z}_1^-$$

$$\mathcal{U}_1^+ \text{ acopla com } \mathcal{Z}_2^+$$

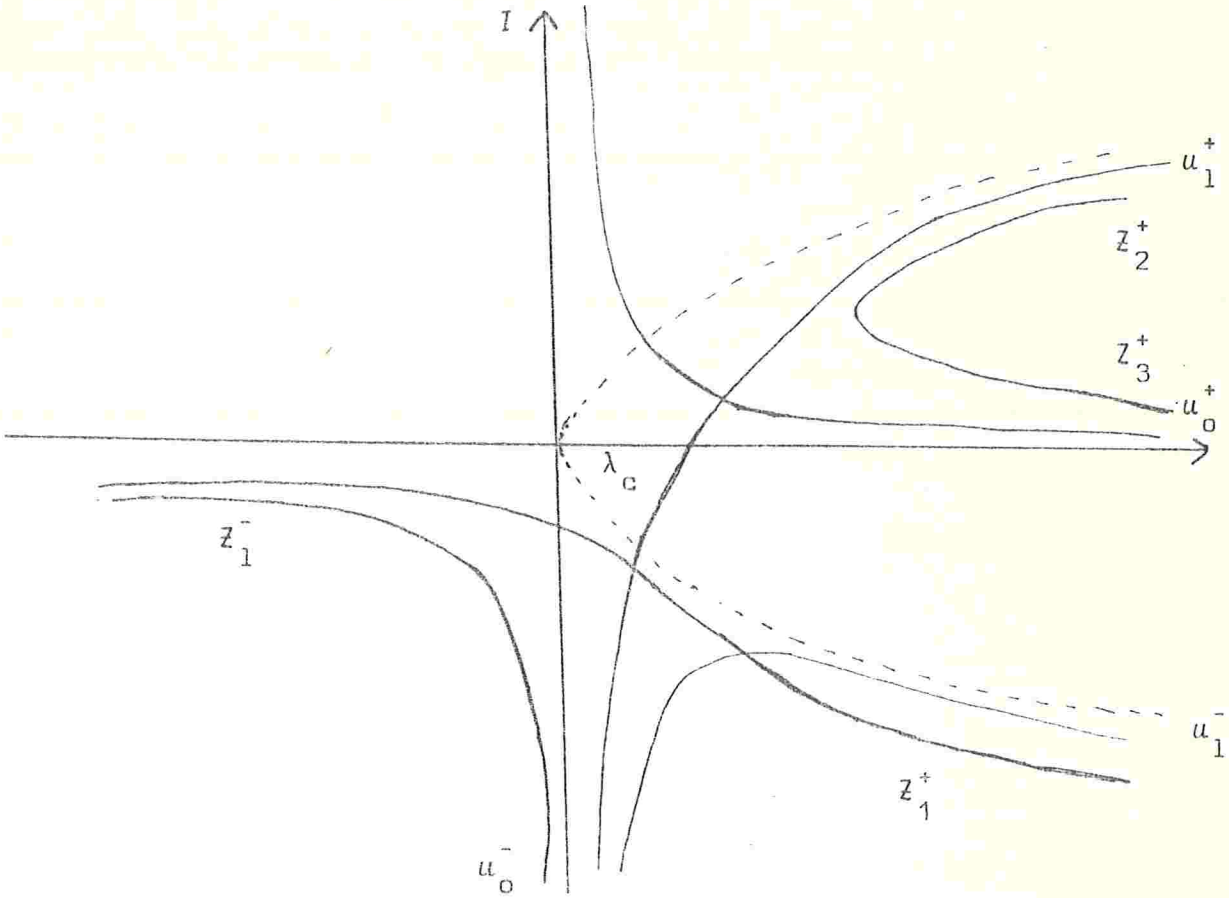
$$\mathcal{U}_2^- \text{ acopla com } \mathcal{Z}_1^+$$

Veja quadro de acoplamento com o esboço gráfico. Estamos identificando $\mathbb{P}(\theta^*)$ com $\mathbb{R}^2 = (\xi, I)$

ACOPLAMENTO DAS EXPANSÕES EXTERNAS C/ INTERNAS (δ_1): $\alpha^* = \theta^*$ $\delta > 0$		
$\xi \longrightarrow \infty$	$\alpha = \theta^*$	$\alpha = \theta^* + \pi$
$\mathcal{Z}_2$	$\mathcal{U}_1^+$	—
$\mathcal{Z}_1$	$\mathcal{U}_1^-$	$\mathcal{U}_o^-$
$\mathcal{Z}_3$	$\mathcal{U}_o^+ (c>0)$	—

FIGURA: (07)

$\mathbb{P}(\alpha) = \mathbb{P}(\theta^*) = \mathbb{P}(\alpha^*)$



(A curva pontilhada representa a bifurcação) O gráfico, quando $\delta < 0$, é o simétrico dêste.

II) Quando as soluções externas relativamente a $X_b \equiv 0$ existem fora do plano da bifurcação, isto é $\mathbb{P}(\alpha^*) \neq \mathbb{P}(\theta^*)$ ou seja

$$(S_3) \quad \alpha^* \neq \theta^*, \quad \theta^* + \pi .$$

As equações (4.74) podem ser colocadas sob a forma:

$$2\xi \cdot I \cdot \cos\alpha = r \cdot I^3 \cos\theta^* + 2\,\mathrm{Sig}(\delta) \cdot \overline{C} \cos\alpha^* \qquad (4.85a)$$

$$2\xi \cdot I \cdot \text{sen}\ \alpha = r \cdot I^3 \cdot \text{sen}\ \theta^* + 2\ \text{Sig}(\delta)\ \overline{C}\ \text{sen}\ \alpha^* \qquad (4.85b)$$

Elevando-se ao quadrado e somando-se as equações (4.85) se obtem:

$$4\xi^2 \cdot I^2 = r^2 \cdot I^6 + 4r \cdot \text{Sig}(\delta) \cdot \overline{C} \cdot \cos(\theta^* - \alpha^*) \cdot I^3 + 4\overline{C}^2 \ .$$

Desde que $I(\xi) \neq 0 \quad \forall\ \xi$, vem que

$$\xi^2 = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot I^4 + r \cdot \text{Sig}(\delta) \cdot \overline{C} \cdot \cos(\theta^* - \alpha^*) \cdot I + \frac{\overline{C}^2}{I^2} \qquad (4.86)$$

De (4.86), pode-se deduzir os comportamentos assintóticos de $I(\xi)$ para $\xi \longrightarrow \infty$, os quais são:

$$I_1(\xi) \approx -\sqrt{\frac{2\xi}{r}} \qquad (4.87)$$

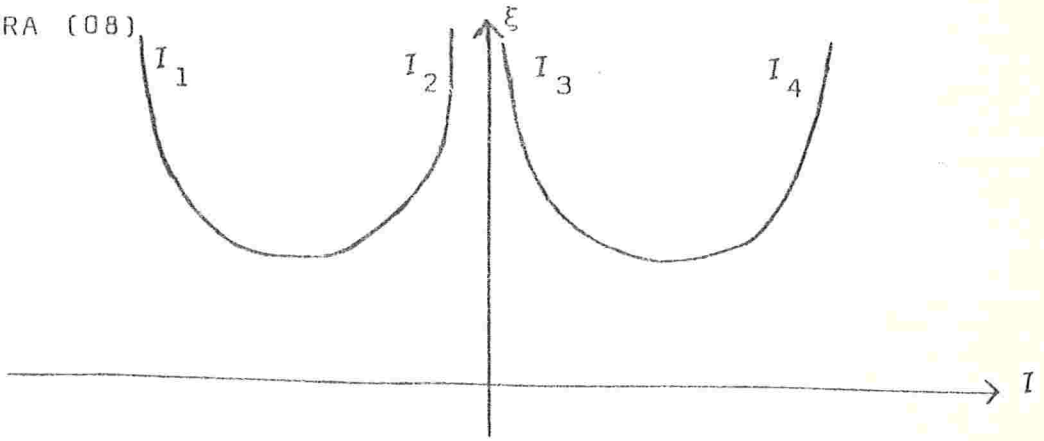
$$I_2(\xi) \approx -\frac{|\overline{C}|}{\xi} = \frac{C^-}{\xi} \qquad (4.88)$$

$$I_3(\xi) \approx \frac{|\overline{C}|}{\xi} = \frac{C^+}{\xi} \qquad (4.89)$$

$$I_4(\xi) \approx \sqrt{\frac{2\xi}{r}} \qquad (4.90)$$

A representação gráfica de $I_j(\xi)$ $j=1,2,3,4$ é aproximadamente da forma::

FIGURA (08)



Na figura, usamos o fato que $I(\xi) \neq 0 \quad \forall\ \xi$.

Para saber do comportamento assintótico do ângulo $\alpha(\xi)$ para $\xi \longrightarrow \infty$ substitui-se I nas equações (4.85) por (4.87) - (4.90). Fazendo-se as identificações

$\alpha_\infty^{(1)}$ quando se substitui I por $I_1(\xi)$

$\alpha_\infty^{(2)}$ " " " " " $I_2(\xi)$

$\alpha_\infty^{(3)}$ " " " " " $I_3(\xi)$

$\alpha_\infty^{(4)}$ " " " " " $I_4(\xi)$

obtem-se:

$$\alpha_\infty^{(1)} = \theta^* \tag{4.91}$$

$$\alpha_\infty^{(2)} = \alpha^* + \pi \tag{4.92}$$

$$\alpha_\infty^{(3)} = \alpha^* \tag{4.93}$$

$$\alpha_\infty^{(4)} = \alpha^* \tag{4.94}$$

respectivamente.

Das equações (4.85) e da suposição (S_3), deduz-se que

$$\alpha(\xi) \neq \begin{cases} \alpha^* \\ \alpha^* + \pi \\ \theta^* \\ \theta^* + \pi \end{cases} \qquad \forall \quad \xi \in [0, \infty) \tag{4.95}$$

Sendo α^* e θ^* ângulos fixados, poder-se-ia saber da variação de $\alpha(\xi)$ se se soubesse como $\alpha(\xi)$ se aproxima de α^* ou

$\alpha^* + \pi$, isto é, se por valores maiores ou valores menores. Para isso faz-se pela teoria da perturbação uma análise das equações (4.74) na vizinhança de $\xi = \infty$ tomando $\xi = \frac{1}{\varepsilon}$ com $|\varepsilon| << 1$.

Temos então (4.74a) e (4.74b) na forma:

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot \lambda_2 \cdot I^3 - 2 \cdot I \cdot \cos\alpha + 2 \cdot \varepsilon \cdot Sig(\delta) \cdot \overline{C} \cdot \cos\alpha^* = 0 & (4.96a) \\ \varepsilon \cdot \omega_2 \cdot I^3 - 2 \cdot I \cdot \operatorname{sen}\alpha + 2 \cdot \varepsilon \cdot Sig(\delta) \cdot \overline{C} \cdot \operatorname{sen}\alpha^* = 0 & (4.96b) \end{cases}$$

Temos que para $\varepsilon = 0$,

$$I_o = I(0) = 0 \quad e \qquad (4.97)$$

$$\alpha_o = \alpha(0) \qquad (4.98)$$

Vamos apresentar α e I na vizinhança do infinito por:

$$\alpha = \alpha_o + \alpha_\varepsilon \cdot \xi^{-1} + \frac{1}{2}\alpha_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \xi^{-2} + \cdots\cdots$$

$$I = I_\varepsilon \cdot \xi^{-1} + \frac{1}{2} I_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \xi^{-2} + \frac{1}{6} I_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} \cdot \xi^{-3} + \cdots\cdots$$

Derivando-se (4.98) relativamente a ε em $\varepsilon = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} (-\cos\alpha_o) \cdot I_\varepsilon + 2 \cdot Sig(\delta) \cdot \overline{C} \cdot \cos\alpha^* = 0 \\ (-\operatorname{sen}\alpha_o) \cdot I_\varepsilon + 2 \cdot Sig(\delta) \cdot \overline{C} \cdot \operatorname{sen}\alpha^* = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que

$$2\ Sig\ (\delta) \cdot \overline{C} \cdot \operatorname{sen}(\alpha_o - \alpha^*) = 0$$

o que acarreta

$$\alpha_o = \alpha^* \Longrightarrow I_\varepsilon = 2 \text{ Sig } (\delta)\cdot C^+ \tag{4.99}$$

$$\alpha_o = \alpha^* + \pi \Longrightarrow I_\varepsilon = 2 \text{ Sig } (\delta)\cdot C^- \tag{4.100}$$

Derivando-se (4.96) relativamente a ε duas vêzes em $\varepsilon = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} (2\cdot I_\varepsilon \cdot \text{sen } \alpha_o)\cdot\alpha_\varepsilon - (\cos \alpha_o)\cdot I_{\varepsilon\varepsilon} = 0 \\ -(2\cdot I_\varepsilon \cdot \cos \alpha_o)\cdot\alpha_\varepsilon - (\text{sen } \alpha_o)\cdot I_{\varepsilon\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

donde se obtém:

$$\alpha_\varepsilon = I_{\varepsilon\varepsilon} = 0 \tag{4.101}$$

Derivando-se (4.96) relativamente a ε três vêzes em $\varepsilon = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} (3I_\varepsilon \text{ sen } \alpha_o)\cdot\alpha_{\varepsilon\varepsilon} - (\cos \alpha_o)\cdot I_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} = 0 \\ (-3I_\varepsilon \cos \alpha_o)\cdot\alpha_{\varepsilon\varepsilon} - (\text{sen } \alpha_o)\cdot I_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

o que acarreta

$$\alpha_{\varepsilon\varepsilon} = I_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} = 0 \tag{4.102}$$

Derivando-se (4.9) relativamente a ε quatro vezes em $\varepsilon = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} (4\cdot I_\varepsilon \cdot \text{sen } \alpha_o)\cdot\alpha_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} - (\cos \alpha_o)\cdot I_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon} = -12\, \lambda_2 \cdot I_\varepsilon^3 \\ (-4\, I_\varepsilon \cdot \cos \alpha_o)\cdot\alpha_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} - (\text{sen } \alpha_o)\cdot I_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon} = -12\, \omega_2\, I_\varepsilon^3 \end{cases}$$

o que fornece:

$$\alpha_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o} = 3\ I_{\varepsilon}^{2}\cdot(\omega_2 \cos\alpha_o - \lambda_2\cdot \text{sen}\ \alpha_o) \tag{4.103}$$

$$I_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o} = 12\cdot I_{\varepsilon}^{3}\cdot(\lambda_2 \cos\alpha_o + \omega_2\cdot \text{sen}\ \alpha_o) \tag{4.104}$$

usando (4.42) em (4.103) e (4.104) obtem-se

$$\alpha_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o} = 3\ I_{\varepsilon}^{2}\ r\ \text{sen}\ (\theta^* - \alpha_o) \tag{4.105}$$

$$I_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o} = 12\ I_{\varepsilon}^{3}\ r\ \cos\ (\theta^* - \alpha_o) \tag{4.106}$$

De (4.107), conclui-se que $\alpha_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o} = 0$ se e somente se

$$\alpha_o = \begin{cases} \theta^* \\ \theta^* + \pi \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha^* = \begin{cases} \theta^* \\ \theta^* + \pi \end{cases}$$

o qual é uma contradição com (S_3), portanto pode-se afirmar que

$$\alpha_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o} \neq 0 \tag{4.107}$$

Sendo $\alpha_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o} \neq 0$ e $I_{\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o} \neq 0$, pode-se obter de (4.99)-(4.107) expansões para I próximo a zero e $\alpha(\xi)$ próximo de α_o em $\xi \approx \infty$, da forma:

$$I(\xi) = 2\,\mathrm{Sig}(\delta)\cdot C^{+}\cdot\xi^{-1} + 4\,\mathrm{Sig}(\delta)\cdot C^{+^{3}}\cdot r\cdot\cos(\theta^{*}-\alpha^{*})\cdot\xi^{-4}+o(\xi^{-4}) \qquad (4.108)$$

$$\alpha(\xi) = \alpha^{*} + 2\,C^{+^{2}}\,r\,\mathrm{sen}(\theta^{*} - \alpha^{*})\cdot\xi^{-3} + o(\xi^{-3}) \qquad (4.109)$$

Usamos em (4.110) e (4.111) que $\alpha_o = \alpha^*$, portanto $\overline{C} = C^+$

$$I(\xi) = 2\,\mathrm{Sig}(\delta)\cdot C^{-}\cdot\xi^{-1} + 4\,\mathrm{Sig}(\delta)\cdot C^{-3}\cdot r\cdot\cos(\theta^{*}-\alpha^{*})\cdot\xi^{-4}+o(\xi^{-4}) \qquad (4.110)$$

$$\alpha(\xi) = (\alpha + \pi) - 2\cdot C^{-2}\cdot\mathrm{sen}\,(\theta^{*} - \alpha^{*})\cdot\xi^{-3} + o(\xi^{-3}) \qquad (4.111)$$

Utilizamos em (4.112) e (4.113) que $\alpha_o = \alpha^* + \pi$ portanto $\overline{C} = C^-$

Diante das expansões (4.109) e (4.111), a análise de (II) subdivide-se em dois casos:

II-a) $\qquad \mathrm{sen}\,(\theta^{*} - \alpha^{*}) > 0$,

Isto é equivalente a ter α^* satisfazendo

$$\theta^{*} - \pi < \alpha^{*} < \theta^{*} \qquad (4.112)$$

Então se α^* for tomado satisfazendo (4.112), tem-se de (4.93) e da expansão de $\alpha(\xi)$ em (4.109) que

$$\alpha(\xi) \longrightarrow \alpha_{\infty}^{(3)} = \alpha^{*^{+}} \qquad \text{p/ } \xi \longrightarrow \infty \qquad (4.113)$$

Segue de (4.95) e (4.113) que

$$(D_1) \quad \boxed{\alpha^* < \alpha(\xi) < \theta^*} \quad \forall \quad \xi \geq 0 \qquad (4.114)$$

quando se substitui nas equações (4.85), I por $I_3(\xi)$ dado em (4.89).

Tem-se também de (4.112) e (4.92) que

$$\alpha(\xi) \longrightarrow \alpha_{\infty}^{(2)} = (\alpha^* + \pi)^- \quad p/ \ \xi \longrightarrow \infty \qquad (4.115)$$

Acarreta então de (4.115) e (4.95) que

$$(D_2) \quad \boxed{\theta^* < \alpha(\xi) < \alpha^* + \pi} \quad \forall \quad \xi \geq 0 \qquad (4.116)$$

quando se substitui nas equações (4.85) I por $I_2(\xi)$ dado em (4.88). De (4.91) e (4.87) tem-se que

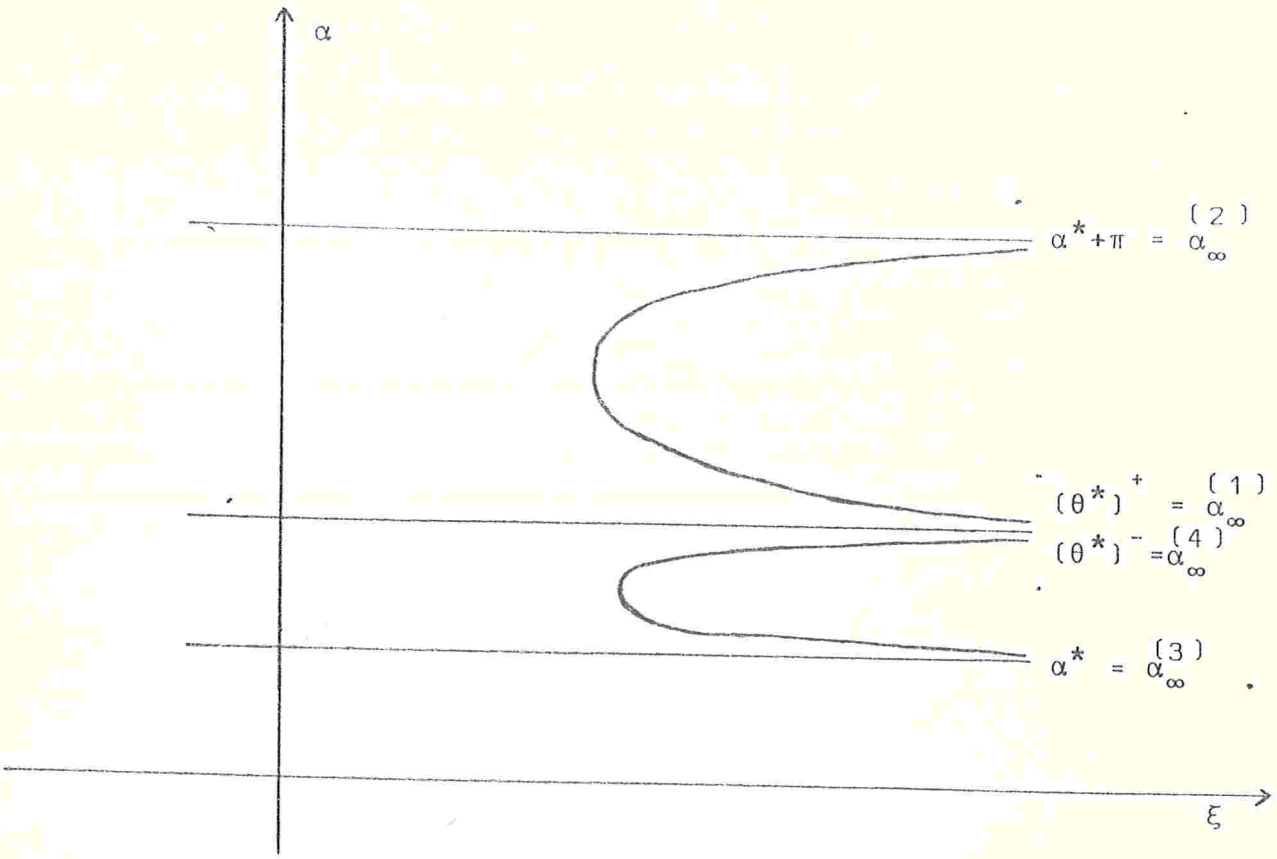
$$\alpha(\xi) \longrightarrow \alpha_{\infty}^{(1)} = \theta^{*+} \quad p/ \ \xi \longrightarrow \infty \qquad (4.117)$$

quando se substitui nas equações (4.85) I por $I_1(\xi)$ dado em (4.87), portanto $\alpha(\xi)$ satisfaz a desigualdade (D_2) em (4.116). De (4.94) e (4.90), tem-se que

$$\alpha(\xi) \longrightarrow \alpha_{\infty}^{(4)} = \theta^{*-} \quad p/ \ \xi \longrightarrow \infty \qquad (4.118)$$

quando se substitui nas equações (4.85) I por $I_4(\xi)$, portanto $\alpha(\xi)$ satisfaz a desigualdade (D_2) em (4.114). Pode-se dar em um gráfico uma aproximação da variação do ângulo $\alpha(\xi)$ neste caso (II-a).

FIGURA (09)



II) $$\text{sen}\,(\theta^* - \alpha^*) < 0$$

Isto é equivalente a ter α^* satisfazendo

$$\boxed{\theta^* < \alpha^* < \theta^* + \pi} \qquad (4.119)$$

A análise segue o mesmo raciocínio anterior, mas com os seguintes resultados:

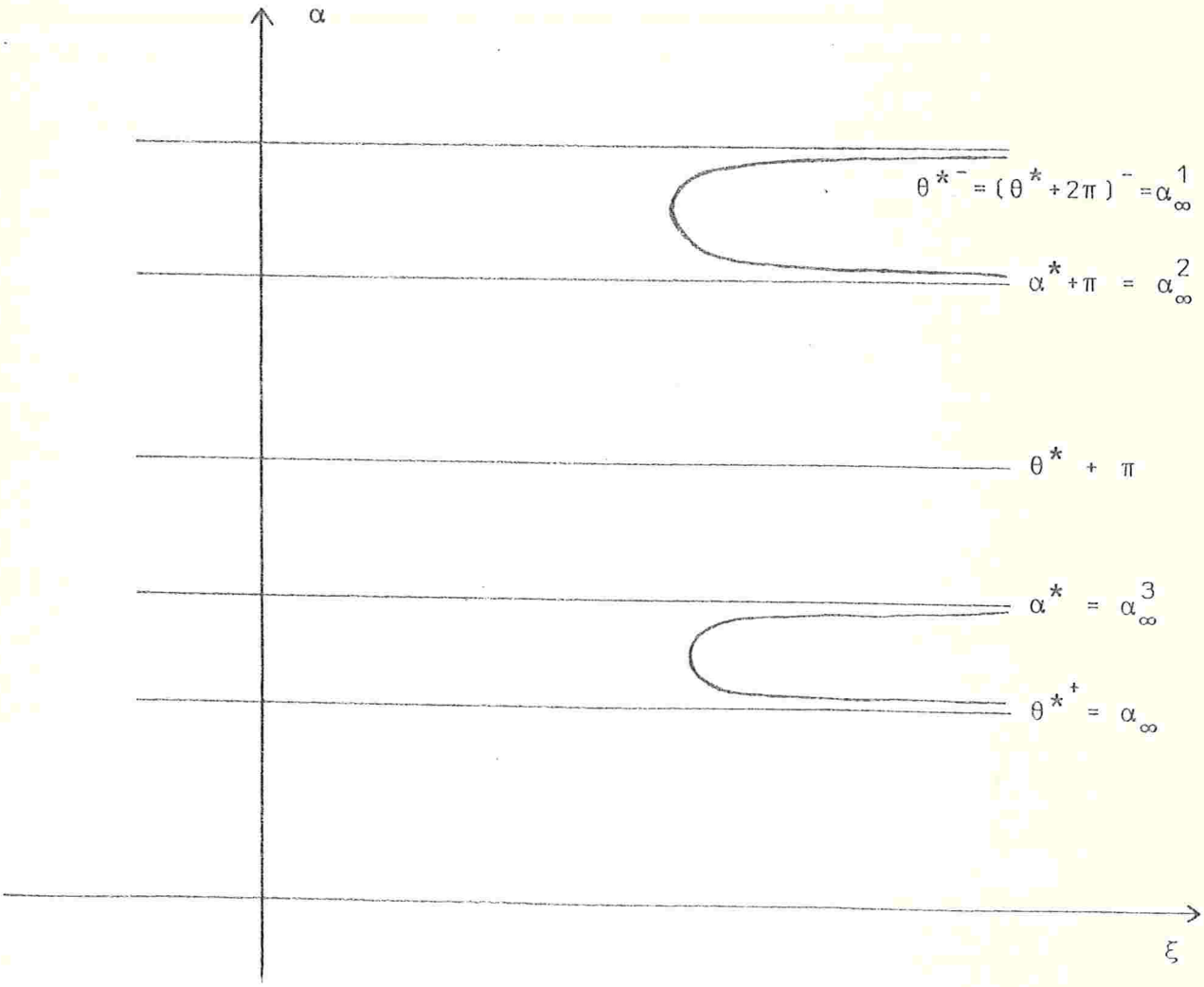
$$(D_1') \quad \boxed{\theta^* < \alpha(\xi) < \alpha^*} \qquad (4.120)$$

quando se substitui I em (4.85) por $I_4(\xi)$ ou $I_3(\xi)$ e

$$(D_2') \quad \boxed{\alpha^* + \pi < \alpha(\xi) < \theta^* + 2\pi = \theta^*} \qquad (4.121)$$

quando se substitui I em (4.85) por $I_1(\xi)$ ou $I_2(\xi)$. Veja figura (10)

FIGURA (10)



Viu-se em (4.87)-(4.90) os comportamentos assintóticos de $I(\xi)$ para $\xi \longrightarrow \infty$. Destes foi possível determinar o comportamento assintóticos para $\alpha(\xi)$ dados em (4.91)-(4.94). De (4.109) e (4.111) foi possível conforme os casos (4.112) e (4.119), determinar as variações de $\alpha(\xi)$ dados pelas desigualdades (D_1) ou (D_2) e (D_1') ou (D_2'), respectivamente. Para cada uma dessas desigualdades, correspondem exatamente dois comportamentos assintóticos de $I(\xi)$ associados convenientemente para que o $(\alpha(\xi), I_j(\xi))$ satisfaça as equações (4.74). Mas agora observe das equações (4.74), que dado um valor $\alpha(\xi)$ fixo satisfazendo D_1 ou D_2 em (I-a) ou então satisfazendo D_1' ou D_2' em (II-b), determina-se univocamente $I(\xi)$, pois o (4.74) pode ser posto como um sistema linear nas incógnitas I e I^3 da forma:

$$M^* \cdot \begin{pmatrix} I \\ I^3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \mathrm{Sig}(\delta) \cdot \overline{C} \begin{pmatrix} \cos \alpha^* \\ \mathrm{sen}\ \alpha^* \end{pmatrix}$$

onde

$$M^* = \begin{pmatrix} rI^3 \cos \theta^* - 2\xi \cdot I \cos \alpha \\ rI^3\ \mathrm{sen}\ \theta^* - 2\xi \cdot I\ \mathrm{sen}\ \alpha \end{pmatrix}$$

com $\det(M^*) = 2\xi \cdot r \cdot \mathrm{sen}(\theta^* - \alpha) \neq 0 \quad \forall\ \xi \neq 0$ e pela suposição (δ_3).

Então diferentemente do caso (I), aqui a expansão interna $Z(\mu)$ formulada em (4.46) tem como resposta gráfica uma curva no espaço (λ, Ω, I) não-plana constituída de dois ramos

disjuntos Z^+ e Z^- em cada um dos casos (II-a) ou (II-b). Êstes ramos em (II-a), são caracterizados por:

$$Z^+(\xi) = Z_3(\xi) \cup Z_4(\xi)$$

$$Z^-(\xi) = Z_1(\xi) \cup Z_4(\xi)$$

onde

$$\begin{cases} Z_3(\xi) = (\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ \sqrt{\dfrac{2\xi}{r}} \cdot \mu + o(\mu)) & (4.122a) \\ Z_4(\xi) = (\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ \dfrac{C^+}{\xi} \cdot \mu + o(\mu)) & (4.122b) \end{cases}$$

quando

$$\begin{cases} \lambda(\xi) = \lambda_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \cos\alpha(\xi) + o(\mu^2) \\ \Omega(\xi) = \omega_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha(\xi) + o(\mu^2) \end{cases} \qquad \alpha^* < \alpha(\xi) < \theta^* \quad \xi \neq 0 .$$

e

$$\begin{cases} Z_1(\xi) = (\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ -\sqrt{\dfrac{2\xi}{r}} \cdot \mu + o(\mu)) & (4.123a) \\ Z_2(\xi) = (\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ \dfrac{C^-}{\xi} \cdot \mu + o(\mu)) & (4.123b) \end{cases}$$

quando

$$\begin{cases} \lambda(\xi) = \lambda_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \cos\alpha(\xi) + o(\mu^2) \\ \Omega(\xi) = \omega_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \cos\alpha(\xi) + o(\mu^2) \end{cases} \qquad \theta^* < \alpha(\xi) < \alpha^* + \pi \quad \xi \neq 0 .$$

<u>Nota</u>. Qualquer um dos ramos Z^+ ou Z^- não intercepta a reta $\mathbb{R}_c = \mathbb{P}(\alpha^*) \cap \mathbb{P}(\theta^*)$. O número real zero não está no domínio do

parâmetro ξ para êste caso enquanto que caso (I) isso era possível. Quando $\mu \longrightarrow 0$, o ramo $Z^-(\xi)$ é o único que se aproxima do ponto $(\lambda_c, \omega_c, 0) \in R_c$

No caso (II-b) Z^+ e Z^- são caracterizados por:

$$Z^+(\xi) = Z_3(\xi) \cup Z_4(\xi)$$

$$Z^-(\xi) = Z_2(\xi) \cup Z_4(\xi)$$

onde

$$\begin{cases} Z_3(\xi) = (\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ \dfrac{C^+}{\xi} \cdot \mu + o(\mu)) \\ \\ Z_4(\lambda) = (\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ \sqrt{\dfrac{2\xi}{r}} \cdot \mu + o(\mu)) \end{cases}$$

quando

$$\begin{cases} \lambda(\xi) = \lambda_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \cos\alpha(\xi) + o(\mu^2) \\ \\ \Omega(\xi) = \omega_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \cos\alpha(\xi) + o(\mu^2) \end{cases} \qquad \theta^* < \alpha(\xi) < \alpha^*$$

e

$$\begin{cases} Z_1(\xi) = (\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ -\sqrt{\dfrac{2\xi}{r}} \cdot \mu + o(\mu)) \\ \\ Z_4(\xi) = (\lambda(\xi),\ \Omega(\xi),\ \dfrac{C^-}{\xi} \cdot \mu + o(\mu)) \end{cases}$$

quando

$$\begin{cases} \lambda(\xi) = \lambda_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \cos\alpha(\xi) + o(\mu^2) \\ \\ \Omega(\xi) = \omega_c + \xi \cdot \mu^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha(\xi) + o(\mu^2) \end{cases} \qquad (\alpha^* + \pi < \alpha(\xi) < \theta^* + 2\pi = \theta^*)$$

Aqui vale a mesma nota que no caso (II-a). Estas caracterizações ajudam a visualizar a aproximação das soluções internas em (II-a) e (II-b) com as soluções de bifurcação $X^{(1)}(\varepsilon)$ e com as soluções externas $U_0^{\pm}$, (aqui não há soluções externas $U_1^{\pm}$)

De (4.84) e (4.122a) segue que

$$\left.\begin{array}{ll} Z_3 \longrightarrow X^{(1)^+} \quad \text{quando} \quad \xi \longrightarrow \infty & \\ \text{e de (4.122b)} \qquad\qquad\qquad\qquad \delta > 0 & \\ Z_4 \longrightarrow U_0^+ \quad \text{quando} \quad \xi \longrightarrow \infty & \end{array}\right\} \qquad (4.124)$$

De (4.84) e (4.123a) segue que

$$\left.\begin{array}{ll} Z_1 \longrightarrow X^{(1)^-} \quad \text{quando} \quad \xi \longrightarrow \infty & \\ \text{e de (4.123b)} \qquad\qquad\qquad\qquad \delta > 0 & \\ Z_2 \longrightarrow U_0^- \quad \text{quando} \quad \xi \longrightarrow \infty & \end{array}\right\} \qquad (4.125)$$

Dos resultados (4.124)-(4.125) é possível representar esta aproximação num gráfico:

FIGURA (11)

$$\delta > 0 \quad e \quad Sig(C) \cdot Sig(\delta) = 1$$

A curva pontilhada é a curva de bifurcação no plano P_{θ^+}

CAPÍTULO V

SOLUÇÃO DO PROBLEMA PERTURBADO

5.1 - INTRODUÇÃO

Apresenta-se agora neste capítulo a solução do problema original proposto no CAP. I, utilizando-se a teoria desenvolvida no CAP. IV. O problema de bifurcação, do qual aquela teoria se serve para construir o método da perturbação singular de bifurcação, tem como um exemplo concreto o problema original quando nêste se faz $\delta = 0$, cuja solução foi dada no CAP. III.

O problema perturbado é formulado pelo sistema (1.2) com condição inicial (1.4) e as restrições dadas em (1.8). Para referências representaremos simbolicamente o problema perturbado por:

$$\begin{cases} G[X, \lambda, \delta] = 0 & (5.1a) \\ g(X) = \left.\dfrac{dy}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0 & (5.1b) \end{cases}$$

Recordando o que se propôs no CAP. I, buscam-se aproximações de soluções periódicas com a mesma frequência do termo forçante $\delta F(X,\tau)$, onde a F se supõe ser periódica e com período $2\pi/\Omega$. Fazendo-se a substituição de τ por $t = \Omega\tau$ nas equações (5.1) tem-se então inserido explicitamente nelas o parâmetro Ω, tornando-as na forma:

$$\begin{cases} G[X, \lambda, \Omega, \delta] = 0 & (5.2a) \\ g(X) = 0 & (5.2b) \end{cases}$$

com o qual procuramos agora aproximações de soluções periódicas de período 2π.

O problema (5.1a)-(5.1b), agora formalmente dado por (5.2a)-(5.2b) será chamado de o Problema Perturbado. Como na seção 3.2, serão investigadas soluções de (5.2a)-(5.2b) em $C^2_{2\pi}(R, \mathbb{R}^2)$ considerado como uma variedade de L^2 $[0, 2\pi]$ e êste como espaço de Hilbert real com o produto interno <, >, definido por (3.21). Sendo uma investigação local, isto é, na vizinhança de $(X_o(\lambda_c, \omega_c), \lambda_c, \omega_c, 0)$, o operador não linear G fica definido por:

$$G: V \times (\lambda_c - r \quad \lambda_c + r_r) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

$$(X, \lambda, \Omega, \delta) \longrightarrow G[X, \lambda, \Omega, \delta]$$

onde $r > 0$, V uma vizinhança aberta de $X_o(\lambda_c, \omega_c)$ em $C^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ onde $X_o(\lambda_c, \omega_c)$ é dado por (3.45).

O relacionamento entre o problema perturbado e o problema de bifurcação do CAP. III é dado por:

$$G[X, \lambda, \Omega, \delta] = F[X, \lambda, \Omega] - \delta F(t, X, \Omega) = 0$$

$$g(X) = 0$$

O problema da bifurcação é então

$$G[X, \lambda, \Omega, 0] = F[X, \lambda, \Omega] = 0 \qquad (5.3a)$$

$$g(X) = 0 \qquad (5.3b)$$

para o qual foi definida a solução X dada em (3.85), quando λ é definido por (3.80) e $\Omega = \omega(\varepsilon)$ por (3.87).

Para o problema de bifurcação (5.3a)-(5.3b) já temos determinado os seguintes fatos no CAP. III para o operador F :

i) $\exists\ \lambda_c = 0.648$ e $\exists\ \omega_c = 0.466$ tal que numa vizinhança de $(\lambda_c, \omega_c) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$X_o(\lambda,\Omega) = \begin{pmatrix} \lambda[1 + \cos(\lambda)] \\ \lambda[2 + \cos(\lambda)] \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

independe de t e satisfaz $F[X_o(\lambda,\Omega),\lambda,\Omega] = 0$

ii) Existem $\phi_1, \phi_2 \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, linearmente independentes, dadas por (3.29)-(3.30) tais que:

$$\overset{o}{F}_x \varphi_j = 0 \qquad j = 1,\ 2 \tag{5.5}$$

$$\overset{o}{g}_x \dot{\varphi}_1 = 0 \tag{5.6}$$

$$\overset{o}{g}_x \varphi_2 \neq 0 \tag{5.7}$$

iii) Existem $\psi_1, \psi_2 \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, linearmente independentes, dadas por (3-34)-(3.35) tais que:

$$\overset{o}{F}{}^{+}_x \psi_j = 0 \qquad j = 1,\ 2. \tag{5.8}$$

iv) A matriz M dada por (3.61) é tal que

$$\det(M) \neq 0 \tag{5.9}$$

segundo (3.62).

v) Por cálculos diretos, temos:

$$< \overset{o}{F}_{xx} \varphi_1^2, \psi_j > = 0 \qquad j = 1, 2. \tag{5.10}$$

Este fato é equivalente a hipótese (4.16).

vi) Existem para ε numa vizinhança de zero, uma solução não trivial de período 2π

$$X^{(1)}_{(\varepsilon)} = X_o(\lambda(\varepsilon), \Omega(\varepsilon)) + X_1 \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} X_2 \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{5.11}$$

quando

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_c + \lambda_2 \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{5.12}$$

$$\Omega(\varepsilon) = \omega_c + \omega_2 \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{5.13}$$

As expansões (5.11)-(5.13) são dadas em (3.85) - (3.87).

Para o operador G obtivemos o seguinte resultado:

vii)
$$\begin{cases} < \overset{o}{G}_\delta, \psi_1 > = 0.395 . a_1 \\ \\ < \overset{o}{G}_\delta, \psi_2 > = -0.239 . b_1 \end{cases} \tag{5.14}$$

onde a_1 e b_1 são os coeficientes de Fourier de f(t) e com $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ por hipótese. A função f(t) vem da perturbação $\delta F(t)$ onde

$$F(t) = f(t) \begin{pmatrix} \cos x \\ \\ \cos y \end{pmatrix}$$

Nota 2: Na teoria desenvolvida no CAP. IV, tinha-se como hipótese que a solução trivial do problema de bifurcação na vizinhança de (λ_c, ω_c) era $X_0(\lambda,\Omega) \equiv 0$, enquanto que no problema proposto X_0 depende de λ. Mas como na Seção 3.2, isto não será empecilho de aplicar a teoria do CAP. IV desde que podemos transformar a variável X, fazendo-se a substituição pela variável $V + X_0(\lambda,\Omega)$. Assim temos que $V_0 \equiv 0$ é agora a solução trivial de $\tilde{G}[V, \lambda, \Omega, 0] \equiv G[V + X_0, \lambda, \Omega, 0] \equiv F[V + X_0, \lambda\ \Omega] \equiv \tilde{F}[V, \lambda, \Omega]$

Com esta nota e com os resultados obtidos em (i)-(vii) temos todas as hipóteses exigidas, portanto o problema (5.2a) - (5.2b) tem solução segundo o método da perturbação singular de bifurcação, cuja resposta, qualitativamente é a mesma que obtivemos para o trato do problema geral (4.1)-(4.2).

5.2 - SOLUÇÕES EXTERNAS

As soluções externas $U_0^{\pm}$ e $U_1^{\pm}$ correspondentes a (4.25) e (4.40) do CAP. IV, são aqui neste caso concreto do problema formulado no CAP. I, apresentadas explicitamente por:

$$U_0^{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda[1 + \cos(\lambda)] \\ \lambda[2 + \cos(\lambda)] \end{pmatrix} + \left[\frac{C^{\pm}}{(\lambda_2^2+\omega_2^2)^{1/2}} \cdot \phi_1 + o(\rho^{-1}) \right] \delta + o(\delta)$$

Caso

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad e \quad M^{-1} \begin{pmatrix} < \overset{0}{G}_{\delta}, \psi_1 > \\ < \overset{0}{G}_{\delta}, \psi_2 > \end{pmatrix}$$

sejam colineares e $D = C^{-}/r$ então existe

$$U_1^{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda[1 + \cos(\lambda)] \\ \lambda[2 + \cos(\lambda)] \end{pmatrix} + \left[\pm\,\varepsilon + \frac{D \cdot S}{\varepsilon}\right] \cdot \varphi_1 + o(\delta) \qquad (5.16)$$

com

$$C^{\pm} = \pm\left[\frac{S_1^2}{\Delta^2} + \frac{S_2^2}{\Delta^2}\right]^{1/2}$$

onde

$$S_1 = (0.097.b_1.B^4 - 0.082.a_1.B^3 + 0.995.b_1.B^2 -$$

$$- 0.518.a_1.B + 2.404.b_1)/\Delta \qquad (5.17)$$

$$S_2 = (0.003.b_1.B^4 + 0.025.a_1.B^3 + 0.117.b_1.B^2 +$$

$$+ 0.155.a_1.B + 0.574.b_1)/\Delta \qquad (5.18)$$

$\Delta = \det(M)$ dado em (3.62)

$$D = \frac{C^{-}}{\sqrt{\lambda_2^2 + \omega_2^2}} \qquad (5.19)$$

Considerando-se o espaço cartesiano tridimensional (λ, Ω, I), tem-se que

$$U^{\pm} \subset \mathbb{P}(\alpha^*) = \mathbb{P}(\theta^*) \qquad (5.20)$$

sendo que $U_o^{+} \subset S\,\mathbb{P}(\alpha^*)$ e $U_o^{-} \subset S\,\mathbb{P}(\alpha^* + \pi)$, onde α^* é definido por

$$\cos\alpha^* = \frac{S_1}{(S_1^2 + S_2^2)^{1/2}} \qquad (5.21)$$

$$\text{sen}\ \alpha^* = \frac{S_2}{(S_1^2 + S_2^2)^{1/2}} \qquad (5.22)$$

A solução externa $U_1^{\pm} \subset S\ \mathbb{P}(\theta^*)$ devido a igualdade (5.19).

5.3 - SOLUÇÕES INTERNAS

Para as soluções internas z_j, tem-se duas situações análogas às que foram tratadas no CAP. IV, ficando-se com uma outra situação conforme os coeficientes de Fourier a_1 e b_1 para a função real f(t) satisfaçam ou não

$$\alpha^* = \theta^* \qquad (5.23)$$

Isto é:

I) Se $\alpha^* = \theta^*$, temos z_1, z_2, z_3 e z_4 correspondendo a (4.80)-(4.83) com comportamentos assintóticos e gráficos respostas exatamente os mesmos.

II) Se $\alpha^* \neq \theta^*$, obtem-se z_j's correspondendo a (4.87)-(4.90) também com comportamentos assintóticos e gráficos respostas iguais.

Esta conclusão simplificada é devido o problema proposto satisfazer todas as hipóteses exigidas pela teoria do CAP. IV . Portanto qualquer dito a mais será repetitivo.

B I B L I O G R A F I A

[1] JOSEPH B. KLLER and STUART ANTMAN, Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems, W.A. Benjamim Inc. New York, 1969.

[2] CODOINGTON, E.A. and LEVISON, N., Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw-Hill, New York, 1955.

[3] V. BOLOTIN, Non conservative Problems of the Theory of Elastic Stability, English translation edited by G. Herrmann, Pergamon Press, Oxford, 1963.

[4] L. LANDAU et E. LIFCHITZ, Mécanique 3e edition revue, Physique Théorique I, MIR, Moscou, 1969.

[5] L. SINAY, Nonlinear Stability of a two-degree-of-freedom nonconservative, mechanical system, Thesis, New York University, 1978.

[6] G. HERRMANN, Dynamics and Stability of Mechanical Systems with Follower Forces, Nasa, Washington D.C., 1971.

[7] J.J. STOKER, Nonlinear Vibrations in Mechanical and Eletrical Systems, Pure and Applied Mathematics II, Interscience Publishers, Inc., New York, 1950.

[8] A. KISELIOV, M. KRASNOV y G. MAKARENKO, Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, 2ª edición, Editorial Mir, Moscú, 1973.

[9] M.G. CRANDALL, "An Introduction to Constructive Aspects of Bifurcation and the Implicit Function Theorem", Applications of Bifurcation Theory, Academic Press, New York, 1977, pp. 1-35.

[10] J. KELLER, Perturbation Theory, notes on a series of six lectures presented at the Department of Mathematics, Michingan State University, East Lansing, Michigan, 1968.

[11] O'MALLEY Jr. and ROBERT E., Introduction to Singular Perturbations, Academic Press, 1974, New York.

[12] MATKOWSKY, B.J. and REISS, E.L., "Singular Perturbations of Bifurcations", SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 33, Sept. 1977, pp. 230-255.

[13] REISS, E.L., "Imperfect Bifurcation", Applications of Bifurcation Theory, Academic Press, New York, 1977, pp. 37-71.

[14] L. SINAY and EDWARD L. REISS, Perturbed Panel Flutter: A Simple Model, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Vol. 19, Nº 11, Novembro 1981, New York.

[15] L. SINAY, Matched Asymptotic Expansions of Global Harmonic Solutions of the Duffing Equation, Atas do 9º Seminário Brasileiro de Análise, 1979.

[16] M. CRANDAL and P. RABINOWITZ, the Hopf Bifurcation Theorem, MRC Technical Summary Report 1604, University of Winscosin, Madison, 1976.

[17] E. DOWELL, Aeroelasticity of Plates and Shells, Noordhoff Publishing, Leyden, 1975.

[18] MUHSTEIN, GASPERS and RIDLE, An Experimental Study of the influences of the Turbulent Boundary Layer on Panel Flutter, NASA, 1968.

[19] ABRAMOWITZ, M. and STEGAN, I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., New York, 1964.

[20] ANTHONY C. HEARN, Reduce 2, 2nd edition, University of Utah, U.S.A.

[21] L. SINAY, Teoria e Aplicações de Alguns Métodos de Perturbações, III Escola de Matemática Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.

[22] L. SINAY, "Kelvin's Destabilizing Effect os Small Damping," Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Coleção Atas da Sociedade Brasileira de Matemática, Vol. 12, pp. 21-27, 1980.