DIMENSÃO FRACIONÁRIA E CONJUNTOS DE CANTOR

Edson de Faria

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA APLICADA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR: PROF. DR. ÂNGELO BARONE NETTO

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio finceiro do CNPq.

- SÃO PAULO, Julho/1985 -

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os companheiros do IME que direta ou indiretamente colaboraram com conselhos ou sugestões para a elaboração deste trabalho.

Deixo em especial registrada minha gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Ângelo Barone Netto, pela amizade, pelos grandes conselhos, e por suas grandes idéias ...

ÍNDICE

ABSTRACT

This work is concerned with Hausdorff dimension and some of its applications.

In chapter one the general theory of Hausdorff α-dimensional measures is presented. Chapter two shows how to compute explicitly the Hausdorff dimension of some metric spaces that constitute a generalization of Cantor's middle thirds set. Finally, chapter three uses the preceeding two in showing that some extensions of a classical theorem due to H. Steinhaus and S. Piccard (regarding sums of subsets of the line) hold.

INTRODUÇÃO

O conceito de dimensão fracionária de que trata este trabalho foi essencialmente introduzido por F. Hausdorff (1919); a título de ilustração, Hausdorff mostrou que a dimensão do conjunto triádico de Cantor é log 2/ log 3. A finalidade deste texto é a aplicação dessas idéias ao estudo de certas propriedades geométricas de subconjuntos da reta, entre os quais os conjuntos do tipo Cantor.

No capítulo 1 expomos sucintamente a teoria geral das medidas α-dimensionais de Hausdorff num espaço métrico arbitrário, bem como, no caso em que o espaço é o euclidiano, suas relações com a medida de Lebesgue correspondente. Este capítulo contém bem mais do que o necessário para o desenvolvimento posterior.

O capítulo 2 tem a dupla finalidade de preparar terreno para a parte final e de ilustrar o tipo de dificuldade com que se depara quando se procura computar explicitamente a dimensão de Hausdorff de um determinado espaço métrico. O resultado central é o teorema 2.1, que generaliza aquele descoberto por Hausdorff.

Finalmente, o capítulo 3 tem como objetivo mostrar como tais idéias podem ser usadas para se "generalizar" um teorema clássico de H. Steinhaus e S. Piccard (teor. 3.1). O resultado central exposto é o teorema 3.2, cuja demonstração foi essencialmente extraída de trabalhos de A.S. Besicovitch.

CAPÍTULO 1: MEDIDAS DE HAUSDORFF E DIMENSÃO FRACIONÁRIA

A finalidade precípua deste capítulo é o estabelecimento da linguagem básica de que nos utilizaremos nos dois capítulos subseqüentes. Definiremos, aqui, medida α-dimensional de Hausdorff num espaço métrico Ω, expondo algumas de suas propriedades essenciais e culminando com o conceito de dimensão fracionária de uma parte qualquer de Ω.

Apesar de boa parte de nosso trabalho posterior residir no caso $\Omega = \mathbb{R}$, optamos pela formulação dos resultados deste capítulo para um espaço métrico arbitrário, uma vez que comparativamente nenhum esforço adicional tenha sido necessário. Ressaltamos, contudo, que nossa abordagem, sob vários outros aspectos, está longe de ser a mais geral possível. Um tratamento sistemático bem mais abrangente pode ser apreciado no livro de C.A. Rogers, citado na bibliografia.

Ao longo do texto Ω designará um espaço métrico e $\underline{d}$ a métrica que determina sua topologia. O diâmetro de uma parte $E \subset \Omega$ será denotado por $|E|$, de sorte que:

$$|E| = \sup\{d(x,y) : x,y \in E\}.$$

Por outro lado, a distância entre E_0 e E_1 (subconjuntos de Ω) será denotada por $d(E_0,E_1)$:

$$d(E_0,E_1) = \inf\{d(x_0,x_1): x_0 \in E_0, x_1 \in E_1\}$$

Dado um real positivo α, podemos definir sobre as partes de Ω uma medida exterior μ^α associada a α, como segue. Se $E \subset \Omega$, escrevamos, para cada $\delta > 0$:

$$\mu^\alpha_\delta(E) = \inf\{\sum_n |V_n|^\alpha : E \subset \bigcup_n V_n ; |V_n| \leq \delta\}$$

sendo, aqui, o ínfimo tomado sobre todas as coberturas enumeráveis de E por abertos $V_n \subset \Omega$, com diâmetro no máximo δ. Verifica-se facilmente que $\mu^\alpha_\delta(E)$ é função não-crescente de δ, logo, existe $\lim\limits_{\delta\to 0} \mu^\alpha_\delta(E)$ (eventualmente igual a $+\infty$) e podemos escrever:

$$\mu^\alpha(E) = \lim_{\delta\to 0} \mu^\alpha_\delta(E) = \sup_{\delta>0} \mu^\alpha_\delta(E). \qquad (*)$$

Resultam, imediatamente de (*) as seguintes propriedades:

(i) $\mu^\alpha(\emptyset) = 0$;

(ii) se $E \subset F$, $\mu^\alpha(E) \leq \mu^\alpha(F)$;

(iii) se $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots \subset \Omega$, $\mu^\alpha(\bigcup_n E_n) \leq \sum_n \mu^\alpha(E_n)$ (subaditividade).

Tais propriedades caracterizam μ^α como uma medida exterior, denominada medida α-dimensional de Hausdorff, para cada $\alpha > 0$.

Tal família de medidas exteriores guarda estreita conexão com a própria topologia do espaço métrico Ω. Nesse sentido a seguinte proposição é esclarecedora e desempenhará um papel fundamental ao longo do trabalho.

Proposição 1.1. Se $E_0, E_1 \subset \Omega$ são tais que $d(E_0,E_1) > 0$, então $\mu^\alpha(E_0 \cup E_1) = \mu^\alpha(E_0) + \mu^\alpha(E_1)$.

Prova. Inicialmente observemos que para todo $\delta > 0$ temos $\mu^\alpha_\delta(E_0 \cup E_1) \leq \mu^\alpha_\delta(E_0) + \mu^\alpha_\delta(E_1)$ (de fato, dadas coberturas de E_0 e E_1 por abertos de diâmetro $\leq \delta$, sua reunião é uma cobertura de $E_0 \cup E$ por abertos de diâmetro $\leq \delta$).

Vamos mostrar que se $\delta < d(E_0,E_1)$ então temos $\mu^\alpha_\delta(E_0 \cup E_1) \geq \mu^\alpha_\delta(E_0) + \mu^\alpha_\delta(E_1)$, o que estabelecerá a igualdade proposta ao fazermos $\delta \to 0$. Podemos supor $E_0, E_1 \neq \emptyset$.

Seja $\{V_n\}$ uma cobertura de $E_0 \cup E_1$ com $|V_n| \leq \delta < d(E_0,E_1)$ é evidente que para calcularmos $\mu^\alpha_\delta(E_0 \cup E_1)$ podemos nos restringir àquelas coberturas tais que $V_n \cap (E_0 \cup E_1) \neq \emptyset$, $\forall n$, e, portanto, faremos aqui tal suposição. Assim sendo, se $V_n \cap E_0 = \phi$ então $V_n \cap E_1 \neq \emptyset$ e reciprocamente, pois se $V_n \cap E_0 \neq \emptyset$ e $V_n \cap E_1 \neq \emptyset$ simultaneamente, então $|V_n| \geq d(E_0,E_1) > \delta$, absurdo. Analogamente, $V_n \cap E_0 \neq \emptyset$ se, e somente se, $V_n \cap E_1 = \emptyset$ Portanto, tal cobertura se decompõe como reunião disjunta de duas coberturas, uma de E_0 e outra de E_1, ambas por abertos de diâmetro $\leq \delta$, provando que $\mu_\delta^\alpha(E_0 \cup E_1) \geq \mu_\delta^\alpha(E_0) + \mu_\delta^\alpha(E_1)$, para todo $\delta < d(E_0, E_1)$.

Assim, temos $\mu_\delta^\alpha(E_0 \cup E_1) = \mu_\delta^\alpha(E_0) + \mu_\delta^\alpha(E_1)$ para todo $\delta < d(E_0, E_1)$ e, então, fazendo $\delta \to 0$, resulta a igualdade do enunciado.

Observemos que quando $\Omega = \mathbb{R}$ e $\alpha = 1$, $\mu^1 = \lambda^*$ (medida exterior à Lebesgue), e dado que existam partes da reta não-mensuráveis Lebesgue, μ^1 não é uma medida, neste caso. Isso nos mostra que μ^α não é σ-aditiva, em geral, sobre toda a σ-álgebra 2^Ω das partes de Ω.

Assim, um problema que se coloca naturalmente é o de encontrarmos uma sub-σ-álgebra de 2^Ω, suficientemente ampla para abarcar todos os conjuntos *interessantes* do ponto de vista topológico (ou ao menos o maior número possível deles), restrita à qual μ^α seja uma medida (isto é, seja σ-aditiva).

Para respondermos a esta questão é útil introduzirmos, neste ponto, uma definição. Diremos que $E \subset \Omega$ é μ^α-mensurável (ou apenas mensurável, quando não houver perigo de confusão) se $\forall A \subset E$, $\forall B \subset \Omega/E$,

$$\mu^\alpha(A \cup B) = \mu^\alpha(A) + \mu^\alpha(B).$$

Seja $M^{\alpha} \subset 2^{\Omega}$ a classe dos conjuntos μ^{α}-mensuráveis. As proposições seguintes se encarregam de mostrar que M^{α} é a *classe ampla* que procuramos.

Proposição 1.2. A classe M^{α} é uma σ-álgebra e μ^{α} é uma medida sobre M^{α}:

Demonstração: (i) M^{α} é uma σ-álgebra: trivialmente M^{α} é fechada por complementação; vamos provar que M^{α} é fechada por reuniões enumeráveis.

Inicialmente, se $E_0, E_1 \in M^{\alpha}$, então $E_0 \cup E_1 \in M^{\alpha}$. De fato, sejam $A \subset E_0 \cup E_1$, $B \subset \Omega/(E_0 \cup E_1)$. Escrevamos $A_0 = A \cap E_0$ e $A_1 = A/A_0$; então, como E_0 é mensurável:

$$\mu^{\alpha}(A_0 \cup (A_1 \cup B)) = \mu^{\alpha}(A_0) + \mu^{\alpha}(A_1 \cup B). \qquad (*)$$

Por outro lado, como E_1 é mensurável e temos $A_1 \subset E_1$, $B \subset \Omega/E_1$,

$$\mu^{\alpha}(A_1 \cup B) = \mu^{\alpha}(A_1) + \mu^{\alpha}(B)$$

Isto posto em (*) nos diz que:

$$\mu^{\alpha}(A \cup B) = \mu^{\alpha}(A_0) + \mu^{\alpha}(A_1) + \mu^{\alpha}(B)$$

Mas, novamente, pela mensurabilidade de E_o temos $\mu^\alpha(A_o) + \mu^\alpha(A_1) = \mu^\alpha(A_o \cup A_1) = \mu^\alpha(A)$, o que prova que $E_o \cup E_1$ é mensurável. Por indução, toda reunião finita de membros de M^α é um membro de M^α.

Sejam, agora, $E_o, E_1, \ldots, E_n, \ldots \in M^\alpha$. Para mostrarmos que $E = \bigcup_{n \geq o} E_n$ é mensurável, podemos supor $E_o \subset E \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$, pois, se isso não ocorre, substituímos cada E_n por:

$$E'_n = \bigcup_{k=o}^{n} E_k;$$

pelo que acabamos de provar, $E'_n \in M^\alpha$ para cada n, e $\bigcup_{n \geq o} E'_n = E$.

Assim sendo, sejam A, B tais que $A \subset E$, $B \subset \Omega/E$. Escrevamos $A_n = A \cap E_n$ para cada n (temos $A_o \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$). Como $A_n \subset A$, temos $\mu^\alpha(A_n) \leq \mu^\alpha(A)$, para cada n. Portanto,

$$\mu^\alpha(A) \geq \sup_n \mu^\alpha(A_n) \qquad (**).$$

Por outro lado, posto que cada E_n seja mensurável, resulta, por indução sobre n:

$$\mu^\alpha(A_n) = \mu^\alpha(A_o) + \sum_{k=1}^{n} \mu^\alpha(A_k/A_{k-1}),$$

e portanto:

$$\sup_n \mu^\alpha(A_n) = \mu^\alpha(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^\alpha(A_k/A_{k-1}),$$

quer esta última série convirja, quer não. Além disso, pela sub-aditividade de μ^α, temos:

$$\mu^\alpha(A) \leq \mu^\alpha(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^\alpha(A_k/A_{k-1}),$$

donde $\mu^\alpha(A) \leq \sup_n \mu^\alpha(A_n)$. Isto combinado com (**) estabelece a igualdade:

$$\mu^\alpha(A) = \sup_n \mu^\alpha(A_n) \qquad (***)$$

Agora, novamente pela mensurabilidade dos E_n, segue-se que:

$$\mu^\alpha(A_n) + \mu^\alpha(B) = \mu^\alpha(A_n \cup B) \leq \mu^\alpha(A \cup B),$$

ou seja:

$$\sup_n \mu^\alpha(A_n) + \mu^\alpha(B) \leq \mu^\alpha(A \cup B);$$

ou ainda, por (***): $\mu^\alpha(A) + \mu^\alpha(B) \leq \mu^\alpha(A \cup B)$. Posto que, por sub-aditividade, a desigualdade no sentido contrário seja sempre válida, concluímos que vale a igualdade e, portanto, E é mensurável.

Enfim, M^α é uma σ-álgebra, como afirmado.

(ii) μ^α é σ-aditiva sobre M^α: evidentemente resulta da própria definição de mensurabilidade que μ^α é finitamente aditiva sobre M^α.

Sejam, então, $E_o, E_1, \ldots, E_n, \ldots \in M^\alpha$ conjuntos disjuntos dois a dois e seja E sua reunião; para cada $n \geq 0$ temos:

$$\mu^\alpha(E) \geq \mu^\alpha\left(\bigcup_{k=o}^{n} E_k\right) = \sum_{k=o}^{n} \mu^\alpha(E_k).$$

Portanto, $\mu^\alpha(E) \geq \sum_{k=o}^{\infty} \mu^\alpha(E_k)$. Mas a desigualdade no sentido oposto é sempre válida, posto que μ^α seja sub-aditiva. Assim,

$$\mu^\alpha\left(\bigcup_{n=o}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=o}^{\infty} \mu^\alpha(E_n),$$

e, portanto, μ^α é uma medida quando restrita à classe M^α, como afirmado.

Proposição 1.3. Todo Boreliano de Ω é μ^α-mensurável, isto é, está em M^α.

Demonstração: De acordo com a proposição 1.2, M^α é uma σ-álgebra. Por sua vez, a classe dos Borelianos de Ω é precisamente a σ-álgebra gerada pelos fechados de Ω. Logo, é suficiente mostrarmos que todo fechado de Ω é μ^α-mensurável.

Seja, pois, $F \subset \Omega$ um fechado arbitrário e suponhamos que A, B são tais que $A \subset F$, $B \subset \Omega/F$. Escrevamos, para cada $n \geq 1$.

$$B_n = \{x \in B: d(x,F) \geq 1/n\}.$$

Então, temos $d(A,B_n) \geq 1/n$, $\forall n \geq 1$ (aqui supomos $A \neq \emptyset \neq B$, caso contrário não há o que provar, e $B_n \neq \emptyset$, $\forall n \geq 1$, o que não restringe a generalidade, pois se $B \neq \emptyset$ então $B_n \neq \emptyset$ para todo n suficientemente grande). Logo, aplicando a proposição 1.1, resulta que, para todo $n \geq 1$:

$$\mu^\alpha(A \cup B) \geq \mu^\alpha(A \cup B_n) = \mu^\alpha(A) + \mu^\alpha(B_n)$$

Ou seja: $\mu^\alpha(A \cup B) \geq \mu^\alpha(A) + \sup_n \mu^\alpha(B_n)$. (*)

Agora, se $\mu^\alpha(B) = +\infty$, então $\mu^\alpha(A \cup B) = \mu^\alpha(A) + \mu^\alpha(B)$ certamente, pois ambos os membros são iguais a $+\infty$; assim, podemos supor $\mu^\alpha(B) < +\infty$. Neste caso, tendo em conta (*), é suficiente provarmos que:

$$\mu^{\alpha}(B) \leq \sup_{n} \mu^{\alpha}(B_n) \tag{**}$$

Para tal, comecemos notando que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, pois F é fechado, e que $B_n \subset B_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Logo, por sub-aditividade:

$$\mu^{\alpha}(B) \leq \mu^{\alpha}(B_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^{\alpha}(B_{k+1}/B_k),$$

para todo $n \geq 1$. Portanto, a bem de que (**) resulte demonstrada, é suficiente mostrarmos que a série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^{\alpha}(B_{k+1}/B_k)$$

converge. Escrevendo, por simplicidade de notação, $D_k = B_{k+1}/B_k$, temos $d(D_k, D_\ell) > 0$ sempre que $|k-\ell| > 1$ (isto decorre facilmente da definição dos B_n). Logo, utilizando a proposição 1.1 repetidamente, obteremos:

$$\sum_{n=1}^{k} \mu^{\alpha}(D_{2n}) = \mu^{\alpha}\left(\bigcup_{n=1}^{k} D_{2n}\right) \leq \mu^{\alpha}(B),$$

e, de modo análogo:

$$\sum_{n=1}^{k} \mu^{\alpha}(D_{2n-1}) = \mu^{\alpha}\left(\bigcup_{n=1}^{k} D_{2n-1}\right) \leq \mu^{\alpha}(B),$$

para todo $k \geq 1$. Como $\mu^{\alpha}(B) < +\infty$ e todas as parcelas envolvidas são positivas (de sorte podermos rearranjá-las convenientemente) concluímos, somando as duas últimas desigualdades membro a membro, que a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{\alpha}(D_n)$$

converge, como queríamos. Isto prova (**), e portanto, por (*), resulta: $\mu^{\alpha}(A \cup B) \geq \mu^{\alpha}(A) + \mu^{\alpha}(B)$, de sorte que F é mensurável. A proposição está demonstrada.

Os resultados contidos nas duas proposições precedentes, embora não sejam essenciais em nosso trabalho posterior, elucidam a relação entre as medidas μ^{α} que introduzimos e a topologia do espaço métrico Ω. Muito mais importante para nossas pretensões, contudo, é o estudo do comportamento de $\mu^{\alpha}(E)$, para $E \subset \Omega$ fixo, quando permitimos que α varie no intervalo $\alpha > 0$, porque tal estudo possibilita-nos associar a E um número real não-negativo denominado dimensão de E (dimensão fracionária ou de Hausdorff), um conceito extremamente relevante neste trabalho.

O que justifica a discussão do parágrafo precedente é a proposição abaixo, a partir da qual o conceito de dimensão fracionária deve resultar óbvio.

Proposição 1.4: Se $\mu^{\alpha}(E) < +\infty$ e $\beta > \alpha$, então $\mu^{\beta}(E) = 0$.

Demonstração: Seja $\{V_n\}_{n\geq 0}$ uma cobertura de E por abertos V_n tais que $|V_n| \leq \delta$ ($\delta > 0$ qualquer). Então temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |V_n|^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} |V_n|^{\beta-\alpha}|V_n|^{\alpha} \leq \delta^{\beta-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} |V_n|^{\alpha}$$

Ou seja, $\mu_{\delta}^{\beta}(E) \leq \delta^{\beta-\alpha}\mu_{\delta}^{\alpha}(E)$ (posto que a cobertura seja arbitrária). Fazendo $\delta \to 0$ e notando que $\beta - \alpha > 0$ e que $\mu_{\delta}^{\alpha}(E) \to \mu^{\alpha}(E) < +\infty$, vemos que $\mu_{\delta}^{\beta}(E) \to 0$, donde $\mu^{\beta}(E) = 0$, como afirmado.

Como conseqüência imediata da proposição acima, vemos que se $E \subset \Omega$ é tal que $0 < \mu^{\alpha}(E) < +\infty$ para certo α e $\beta<\alpha$ então $\mu^{\beta}(E) = +\infty$. Com base nisso podemos definir a dimensão fracionária (ou de Hausdorff) de E como sendo:

$$\dim E = \sup\{\alpha > 0 : \mu^{\alpha}(E) = +\infty\}$$

(convencionamos aqui $\sup \emptyset = 0$).

Algumas propriedades da dimensão fracionária, embora óbvias, são dignas de menção. Por exemplo:

(i) se $E \subset F$, temos $\dim E \leq \dim F$;

(ii) se $d(E,F) > 0$ então $\dim (E \cup F) = \max\{\dim E, \dim F\}$,

esta última resultando das proposições 1.1 e 1.4.

Dado que tal conceito de dimensão envolva sucessivos processos de limite superpostos, é natural esperarmos que seja pouco manipulável. Por esta razão não deixa de ser notável que possamos mesmo computar explicitamente a dimensão fracionária de alguns conjuntos com estrutura topológica relativamente complexa; isto será feito no próximo capítulo.

Antes de finalizarmos este capítulo, expondo um ou dois exemplos, gostaríamos de investigar, no caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, a relação entre μ^n e λ_n^* (medida exterior à Lebesgue) com algum detalhe. Para tal precisaremos de mais um fato geral.

Proposição 1.5. Fixemos $\alpha > 0$. Para cada $E \subset \Omega$ existe um Boreliano $B \subset \Omega$, contendo E, tal que $\mu^\alpha(B) = \mu^\alpha(E)$.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$; afirmamos que existe um Boreliano $B_\varepsilon \supset E$ tal que $\mu_\varepsilon^\alpha(B_\varepsilon) = \mu_\varepsilon^\alpha(E)$.

De fato, para cada $n > 0$ existe uma cobertura de E por abertos V_k^n ($k = 0,1,\ldots$) tais que $|V_k^n| \leq \varepsilon$ e:

$$\mu_\varepsilon^\alpha(E) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |V_k^n|^\alpha < \mu_\varepsilon^\alpha(E) + 1/n \qquad (*)$$

Pondo $V_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k^n$, temos $\mu_\varepsilon^\alpha(V_n) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |V_k^n|^\alpha$; assim, como $V_n \supset E$, temos:

$$\mu_\varepsilon^\alpha(E) \leq \mu_\varepsilon^\alpha(V_n) < \mu_\varepsilon^\alpha(E) + 1/n \qquad (**)$$

para cada $n > 0$. Agora façamos $B_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$; B_ε é um Boreliano e $E \subset B_\varepsilon \subset V_n$ para cada n, donde:

$$\mu_\varepsilon^\alpha(E) \leq \mu_\varepsilon^\alpha(B_\varepsilon) \leq \mu_\varepsilon^\alpha(V_n) \qquad (***)$$

De (**) e (***) concluímos, fazendo $n \to \infty$, que $\mu_\varepsilon^\alpha(B_\varepsilon) = \mu_\varepsilon^\alpha(E)$, o que prova a afirmação feita.

Em particular, para cada $k > 0$ existe um Boreliano $B_k \supset E$ tal que $\mu_{1/k}^\alpha(B_k) = \mu_{1/k}^\alpha(E)$. Escrevendo $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, temos $E \subset B \subset B_k$, para todo $k > 0$, donde:

$$\mu_{1/k}^\alpha(E) = \mu_{1/k}^\alpha(B_k) \geq \mu_{1/k}^\alpha(B) \geq \mu_{1/k}^\alpha(E)$$

e, portanto, necessariamente $\mu_{1/k}^\alpha(E) = \mu_{1/k}^\alpha(B)$. Fazendo $k \to \infty$, obtemos $\mu^\alpha(E) = \mu^\alpha(B)$, como pretendido.

A proposição acima expressa uma propriedade de regularidade das medidas exteriores μ^α, e permite-nos estabelecer uma relação simples entre μ^n e a medida de Lebesgue quando consideramos o caso $\Omega = \mathbb{R}^n$. Mais precisamente, temos neste caso.

Proposição 1.6: Existe uma constante $k_n > 0$ tal que, para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu^n(E) = k_n \lambda_n^*(E)$ (λ_n^* denota a medida exterior à Lebesgue no $\mathbb{R}^n$).

Demonstração: Resulta diretamente das definições que o quociente $\mu^n(B)/\lambda_n^*(B)$, sendo B uma bola qualquer do $\mathbb{R}^n$, de raio positivo, independe da bola considerada. Denotemos tal quociente por k_n; mostraremos que k_n é a constante procurada, com a suposição adicional de que $k_n < +\infty$.

Observemos, inicialmente, que $\lambda_n^*(V) \leq |V|^n$ para todo $V \subset \mathbb{R}^n$, donde por sub-aditividade:

$$\lambda_n^*\left(\bigcup_{k=o}^{\infty} V_k\right) \leq \sum_{k=o}^{\infty} \lambda_n^*(V_k) \leq \sum_{k=o}^{\infty} |V_k|^n.$$

Segue-se que, para todo $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n^*(E) \leq \mu^n(E) \qquad (*)$$

(isto por sua vez implica, em particular, que $k_n \geq 1$).

Por outro lado, se $E \subset \mathbb{R}^n$ é tal que $\lambda_n^*(E) < +\infty$

então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura de E por bolas B_j $(j = 0,1,\ldots)$ tais que:

$$\lambda_n^*(E) > \sum_{j=o}^{\infty} \lambda_n^*(B_j) - \varepsilon.$$

Ou seja:

$$\lambda_n^*(E) + \varepsilon > \sum_{j=o}^{\infty} \lambda_n^*(B_j) = \sum_{j=o}^{\infty} \frac{1}{k_n} \mu^n(B_j) \geq$$

$$\geq \frac{1}{k_n} \mu^n\left(\bigcup_{j=o}^{\infty} B_j\right) \geq \frac{1}{k_n} \mu^n(E).$$

Portanto, concluímos que para todo $\varepsilon > 0$:

$$\lambda_n^*(E) + \varepsilon > k_n^{-1} \mu^n(E),$$

de modo que, para todo E com $\lambda_n^*(E) < +\infty$:

$$\lambda_n^*(E) \geq k_n^{-1} \mu^n(E) \qquad (**)$$

No caso $\lambda_n^*(E) = +\infty$ é evidente que a desigualdade (**) subsiste (qualquer que seja o valor de k_n); portanto,tal desigualdade é válida para qualquer $E \subset \mathbb{R}^n$.

Assim, (*) e (**) dizem-nos que, se considerarmos

μ^n e λ_n^* como medidas sobre a classe dos Borelianos de $\mathbb{R}^n$, tais medidas são mutuamente absolutamente contínuas. Neste caso, a medida exterior λ_n^* restrita aos Borelianos é justamente a medida de Lebesgue λ_n e, pelo teorema de Radon-Nikodym, existe uma função $f \subset L^1(\lambda_n)$ não-negativa tal que, para todo Boreliano B:

$$\lambda^n(B) = \int_B f d\lambda_n \qquad (***)$$

Em particular, se B_o é uma bola qualquer, temos:

$$\int_{B_o} f d\lambda_n = \mu^n(B_o) = k_n \lambda_n(B_o) = \int_{B_o} k_n d\lambda_n$$

Ou seja:

$$\int_{B_o} (f-k_n) d\lambda_n = 0.$$

Como B_o é arbitrária, concluímos que $f \equiv k_n$ em λ_n - quase-todo-ponto. Logo, retornando a (***):

$$\mu^n(B) = k_n \lambda_n(B),$$

para todo Boreliano B!

Agora, seja $E \subset \mathbb{R}^n$ qualquer. Pela proposição 1.5, existe um Boreliano $B \supset E$ com $\mu^n(B) = \mu^n(E)$; pelo que acabamos de provar combinado com (**), temos:

$$\mu^n(E) = \mu^n(B) = k_n\lambda_n(B) \geq k_n\lambda_n^*(E) \geq$$

$$\geq k_n k_n^{-1}\mu^n(E) = \mu^n(E)$$

Portanto, vale a igualdade $\mu^n(E) = k_n\lambda_n^*(E)$ para $E \subset \mathbb{R}^n$. A proposição está demonstrada, exceto por um pequeno detalhe : não provamos que $k_n < +\infty$!

Para tal é suficiente provarmos que $\mu^n(B) < +\infty$, sendo B uma bola qualquer do $\mathbb{R}^n$, de raio positivo. Como todo cubo de aresta positiva contém uma tal bola, provaremos que $\mu_\delta^n(K) < +\infty$, sendo $K \subset \mathbb{R}^n$ um cubo de aresta 1.

Observemos que $|K| = \sqrt{n}$. Seja dado $\delta > 0$; escolhendo um inteiro positivo k tal que $\sqrt{n}/k < \delta$, dividamos K, por hiperplanos paralelos às faces, em k^n cubos congruentes, de aresta $1/k$. Obtemos uma cobertura de K por cubos fechados de diâmetro $\sqrt{n}/k < \delta$, e, portanto:

$$\mu_\delta^n(K) \leq k^n (\sqrt{n}/k)^n = (\sqrt{n})^n$$

para todo $\delta > 0$. Logo, $\mu^n(K) \leq (\sqrt{n})^n < +\infty$, como queríamos demonstrar.

Agora, algumas observações e exemplos:

a) A análise que fizemos do caso euclidiano, nem de longe completa, permite-nos responder à importante pergunta: Qual a dimensão de Hausdorff do $\mathbb{R}^n$?

A resposta é simples corolário do que fizemos até aqui: toda bola do $\mathbb{R}^n$ tem medida finita e positiva, donde tem dimensão n (referimo-nos à medida μ^n), pela proposição 1.4. Por um lado, isto nos mostra que $\dim \mathbb{R}^n \geq n$; por outro lado, escrevendo:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=o}^{\infty} B_k,$$

sendo cada B_k uma bola, temos, para todo $\alpha > n$:

$$\mu^\alpha(\mathbb{R}^n) \leq \sum_{k=o}^{\infty} \mu^\alpha(B_k) = 0,$$

de tal sorte que $\dim \mathbb{R}^n \leq n$. Assim, $\dim \mathbb{R}^n = n$, como era de se esperar.

b) O conjunto triádico de Cantor $T \subset [0,1]$ tem dimensão fracionária $\dim T = \log 2/\log 3 \simeq 0.6309$. Este fato será demonstrado no capítulo 2.

c) Exibiremos, agora, um subconjunto da reta que é residual mas cuja dimensão de Hausdorff é zero. Um real z é um número de Liouville se z é irracional e para todo $n>0$ existem p,q inteiros, com $q > 1$, tais que:

$$|z - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}.$$

Seja $E \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos números de Liouville; da definição acima resulta:

$$E = (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)/Q$$

sendo, para cada n:

$$G_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} (\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n})$$

uma reunião de intervalos abertos. Como $G_n \supset Q$ para cada n, vemos que G_n é denso, para cada n; assim, E é residual, pelo teorema de Baire.

Dado $\alpha > 0$, vamos mostar que $\mu^{\alpha}(E) = 0$. Ora, é suficiente provarmos que o conjunto:

$$E_k = E \cap [-k,k]$$

é tal que $\mu^{\alpha}(E_k) = 0$ para cada k inteiro positivo.

A primeira coisa a se observar é que, fixado k,

$$E_k \subset \bigcap_{q=-2} \bigcup_{p=-kq}^{kq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \qquad (*)$$

para todo n positivo. Dado $\varepsilon > 0$, seja n suficientemente grande para que $2^{1-n} < \varepsilon$; então (*) nos diz que E_k é coberto por intervalos de comprimentos dados por $2/q^n \leq 2/2^n < \varepsilon$, donde:

$$\mu_{\varepsilon}^{\alpha}(E_k) \leq \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(2kq+1)2^{\alpha}}{q^{n\alpha}} \leq 3k2^{\alpha} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{n\alpha-1}}$$

Para n grande, $n\alpha > 2$, e, portanto podemos majorar a última série acima por uma integral convergente, obtendo:

$$\mu_{\varepsilon}^{\alpha}(E_k) \leq 3.k.2^{\alpha} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{n\alpha-1}} = \frac{3k2^{\alpha}}{n\alpha-2}$$

Ainda uma vez, como esta última expressão tende a zero quando $n \to \infty$, $\mu_{\varepsilon}^{\alpha}(E_k) = 0$, donde $\mu^{\alpha}(E_k) = 0$, pois ε é arbitrário.

Logo, $\mu^{\alpha}(E) = 0$, como afirmado, para todo α positivo, de sorte que $\dim E = 0$. Notemos que escrevendo:

$\mathbb{R} = E \cup (\mathbb{R}/E)$

obtemos uma decomposição da reta num conjunto de dimensão nula mais um conjunto de 1a. categoria.

d) Note-se que se $\phi: \Omega \to \Omega^*$ é uma imersão isométrica, então, dado $E \subset \Omega$ temos:

$$\mu^{\alpha}(E) = \mu^{\alpha}(\phi(E))$$

para todo α (por abuso de notação indicamos as medidas exteriores α-dimensionais nos dois espaços métricos pelo mesmo símbolo). Em particular, $\dim E = \dim \phi(E)$.

CAPÍTULO 2. CONJUNTOS DE CANTOR HOMOGÊNEOS

Nosso propósito neste capítulo é o exame, à luz dos conceitos introduzidos no capítulo anterior, de uma importante classe de espaços métricos: a dos chamados conjuntos de Cantor, que constituem importante generalização do conjunto triádico $T \subset [0,1]$. Dentre eles, estaremos interessados mais propriamente naqueles que exibam uma certa *simetria* do ponto de vista métrico, aos quais nos referiremos como conjuntos de Cantor homogêneos, ou simplesmente conjuntos homogêneos.

Já ressaltamos ao final do capítulo 1 que a dimensão de Hausdorff é uma propriedade métrica por excelência. Isto será ilustrado aqui ao calcularmos a dimensão dos conjuntos homogêneos, obtendo como *espectro* todo um continuum de valores, a despeito do fato de serem eles homeomorfos dois a dois.

Como mero corolário dos resultados aqui expostos, ficará estabelecida a solução de um problema de existência que deliberadamente não abordamos no capítulo anterior: dado $\alpha \geq 0$ real, existe um espaço métrico Ω tal que $\dim \Omega = \alpha$?

Definição 2.1: Um conjunto de Cantor é um espaço métrico compacto totalmente desconexo sem pontos isolados.

Exemplos: a) O conjunto triádico $T \subset [0,1]$, formado pelos elementos cuja expressão em base três apresenta apenas os algarismos 0 e 2, é um conjunto de Cantor no sentido da definição acima.

b) Denotemos por 2^{ω} o espaço das seqüências infinitas $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ em que cada x_i é 0 ou 1. Temos:

$$2^{\omega} = \prod_{i=o}^{\infty} X_i$$

sendo $X_i = \{0,1\}$ com a topologia discreta para cada i. Considerando em 2^{ω} a topologia produto, obtemos um espaço topológico metrizável, pois, definindo para $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em 2^{ω}:

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} |x_i - y_i|,$$

obtemos uma métrica compatível com a topologia produto. Utilizando esta métrica é fácil ver que 2^{ω} não tem pontos isolados. Por outro lado, por ser um produto de espaços compactos e totalmente desconexos, 2^{ω} também tem tais propriedades, sendo, portanto, um conjunto de Cantor.

Os espaços métricos dos dois exemplos acima são homeomorfos; isto não é algo fortuito, porquanto inevitável: ao final deste capítulo mostraremos que dois conjuntos de Cantor são sempre homeomorfos.

Vamos, agora, descrever o que entendemos por conjunto de Cantor homogêneo. Para tal introduziremos uma definição auxiliar.

Definição 2.2: Sejam Ω um espaço métrico e $\varepsilon > 0$. Uma aplicação ϕ: $\Omega \to \Omega$ chama-se uma ε-semelhança se $d(\phi(x),\phi(y)) = \varepsilon . d(x,y)$. Para x,y quaisquer em Ω.

Observemos que ϕ é sempre um homeomorfismo sobre sua imagem; quando $\varepsilon = 1$, temos uma isometria.

Proposição 2.1: Seja ϕ: $\Omega \to \Omega$ uma ε-semelhança, sendo Ω compacto(*). Então: (i) $\varepsilon \leq 1$; (ii) $\varepsilon = 1$, se,e so - mente se, $\phi(\Omega) = \Omega$.

Demonstração: (i) Se $d(x,y) = |\Omega| > 0$ então $d(\phi(x),\phi(y)) = \varepsilon d(x,y) = \varepsilon|\Omega| \leq |\Omega|$, donde $\varepsilon \leq 1$.

(ii) Suponhamos $\phi(\Omega) = \Omega$; então $\varepsilon = 1$, pois

$$|\Omega| = |\phi(\Omega)| = \varepsilon . |\Omega|.$$

Agora, se $\varepsilon = 1$ mas $\phi(\Omega) \neq \Omega$ então, tomando $x_0 \in \Omega/\phi(\Omega)$, temos:

(*) *Supomos, também que Ω contém pelo menos 2 pontos distintos.*

$$d(x_0,\phi(\Omega)) = r > 0,$$

pois $\phi(\Omega)$ é compacto. Logo, $d(x_0,\phi^k(x_0)) \geq r$, para todo $k \geq 1$. Portanto, se $m > n \geq 0$, temos:

$$d(\phi^m(x_0),\phi^n(x_0)) = d(\phi^{m-n}(x_0),x_0) = r > 0.$$

Isto nos mostra que $(\phi^n(x_0))_{n\geq 0}$ não possui nenhuma subseqüência convergente, absurdo uma vez que Ω seja compacto. Enfim, $\phi(\Omega) = \Omega$, concluindo a prova.

Suponhamos agora que Ω é um espaço métrico compacto, n um inteiro > 1 e, para cada i = 1,2,...,n, seja $\phi_i\colon \Omega \to \Omega$ uma ε_i-semelhança. Admitamos que:

$$\phi_i(\Omega) \cap \phi_j(\Omega) = \emptyset$$

para $i \neq j$. Pela proposição acima, temos $0 < \varepsilon_i < 1$ para todo i.

Escrevamos, para cada K-upla $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ de inteiros i_s satisfazendo $1 \leq i_s \leq n$,

$$E(i_1,i_2,\ldots,i_k) = \phi_{i_1}\circ\phi_{i_2}\circ\ldots\circ\phi_{i_k}(\Omega). \qquad (*)$$

Finalmente, seja $K = K(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ o conjunto:

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} E(i_1, i_2, \ldots, i_k) \right) \qquad (**)$$

Proposição 2.2: O conjunto K definido acima é um conjunto de Cantor.

Demonstração: (i) K é compacto, pois cada $E(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ é compacto, e vale:

$$E(i_1, i_2, \ldots, i_k, j) \subset E(i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

para todo j, de forma que *a sucessão é encaixante*, donde $K \neq \emptyset$.

(ii) K não tem pontos isolados: de (*) resulta que:

$$E(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \ldots \varepsilon_{i_k} |\Omega| \leq \varepsilon^k |\Omega|$$

sendo $\varepsilon = \max \varepsilon_i < 1$. Logo, $|E(i_1, i_2, \ldots, i_k)| \to 0$ quando $k \to \infty$. Assim, dados $x \in K$ e uma bola B contendo x (aberta), existem $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tais que:

$$x \in E(i_1, i_2, \ldots, i_k) \subset B;$$

mas como $E(i_1, i_2, \ldots, i_k, i) \cap E(i_1, i_2, \ldots, i_k, j) = \emptyset$ para $i \neq j$, existe $y \in E(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ tal que $y \in K$ e $y \neq x$, e, portanto, $y \in B$, e x não é ponto isolado.

(iii) K é totalmente desconexo: seja uma componente conexa de K; os conjuntos

$$E(1),\ E(2),\dots,E(n)$$

são compactos disjuntos e, portanto, dois a dois positivamente separados. Segue-se necessariamente que existe i_1 tal que $M \subset E(i_1)$; prosseguindo analagomente obtemos uma seqüência $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$ tal que, para todo k,

$$M \subset E(i_1, i_2, \dots, i_k)$$

e, portanto, M se reduz a um ponto, pois $|E(i_1, i_2, \dots, i_k)| \to 0$.

Definição 2.3: Um conjunto $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ obtido pelo procedimento descrito acima é denominado conjunto de Cantor homogêneo, ou simplesmente conjunto homogêneo.

Exemplos: (c) Pode-se concluir facilmente que o triádico de Cantor (exemplo (a)) é um conjunto homogêneo.Para tanto é suficiente que se considerem as aplicações ϕ_i: $[0,1] \to [0,1]$ $(i = 1,2)$ dadas por:

$$\phi_1(x) = \frac{1}{3}x;\ \phi_2(x) = \frac{1}{3}(x+2),$$

as quais são ε-semelhanças para $\varepsilon = 1/3$ e satisfazem:

$$\phi_1([0,1]) = [0,\tfrac{1}{3}];\ \phi_2([0,1]) = [\tfrac{2}{3},1].$$

(d) O espaço 2^ω munido da métrica definida no exemplo (b) é um conjunto homogêneo. Com efeito, as aplicações $\phi_i\colon 2^\omega \to 2^\omega$ $(i = 0,1)$ dadas por:

$$\phi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots) = (i,\ x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$$

$(i = 0,1)$ são $(\frac{1}{2})$-semelhanças. Além disso é evidente que:

$$\phi_0(2^\omega) \cup \phi_1(2^\omega) = 2^\omega,$$

de forma que o conjunto de Cantor homogêneo $K(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ determinado por ϕ_0,ϕ_1 é o próprio espaço 2^ω.

A simetria métrica exibida por um conjunto de Cantor homogêneo permite-nos calcular, não sem algum esforço, sua dimensão de Hausdorff. Isto é o que estabelece o teorema a seguir, em cuja demonstração, cumpre ressaltar, valemo-nos da mesma notação que utilizamos quando da definição de conjunto homogêneo (vejam-se (*) e (**)).

Teorema 2.1: Seja $K = k(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ um conjunto de Cantor homogêneo. Então temos $\dim K = \alpha$, sendo α a única raiz *(positiva)* da equação:

$$\varepsilon_1^\alpha + \varepsilon_2^\alpha + \ldots + \varepsilon_n^\alpha = 1.$$

Demonstração: Em virtude da observação (d) ao final do capítulo 1, podemos supor que o espaço ambiente Ω é o próprio K. Em sendo assim, se $\alpha > 0$ é a raiz da equação acima (a qual existe e é única porque $0 < \varepsilon_i < 1$), vamos provar que $0 < \mu^\alpha(K) < \infty$; disto resultará que $\dim K = \alpha$.

(i) Seja $\varepsilon = \max \varepsilon_i < 1$. Dado $\delta > 0$, seja k suficientemente grande para que $\varepsilon^k |K| \leq \delta$; então, para toda K-upla $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ com $1 \leq i_s \leq n$, temos:

$$|E(i_1, \ldots, i_k) = \varepsilon_{i_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{i_k} |K| \leq \varepsilon^k |K| \leq \delta.$$

Assim, podemos escrever:

$$\mu_\delta^\alpha(K) \leq \sum_{i_1, \ldots, i_k} (\varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_k})^\alpha |K|^\alpha = |K|^\alpha \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^\alpha\right)^k = |K|^\alpha.$$

E portanto, fazendo $\delta \to 0$, resulta:

$$\mu^\alpha(K) \leq |K|^\alpha < \infty.$$

(ii) Escrevamos:

$$d = \min_{i,j} d(E(i), E(j)) > 0.$$

Vamos mostrar que $\mu^{\alpha}(K) \geq d^{\alpha}$.

Introduziremos neste ponto uma notação auxiliar. Dada uma coleção finita Λ de partes de K, escreveremos:

$$s(\Lambda) = \sum \{|V|^{\alpha}: V \in \Lambda\}.$$

Para o cálculo de $\mu^{\alpha}(K)$ podemos nos restringir às coberturas finitas (por abertos) de K, pois este é compacto. Se Φ é uma tal cobertura, é suficiente para nossos propósitos mostrarmos que $s(\Phi) \geq d^{\alpha}$. Isto é óbvio se algum dos membros de Φ tem diâmetro $\geq d$. Suponhamos, pois, que $|V| < d$ para todo $V \subset \Phi$.

Neste caso, da definição de d resulta que Φ se escreve como uma reunião disjunta:

$$\Phi = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_i ,$$

sendo Φ_i uma cobertura de $E(i)$ para cada i. Seja:

$$\theta = \min_i (s(\Phi_i)/\varepsilon_i^{\alpha});$$

podemos supor sem perda de generalidade que tal mínimo é atin gido para $i = 1$, ou seja, que $\theta = s(\Phi_1)/\varepsilon_1^{\alpha}$. Assim sendo, temos:

$$s(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} s(\Phi_i) \geq \sum_{i=1}^{n} (\theta\varepsilon_i^{\alpha}) = \theta = \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha}} s(\Phi_1).$$

Agora, a coleção:

$$\hat{\Phi} = \{\phi_1^{-1}(V): V \in \Phi\}$$

é uma cobertura de K (pois Φ_1 é uma cobertura de E(1)), e como $|\phi_1^{-1}(V)| = \frac{1}{\varepsilon_1}|V|$ para todo $V \in \Phi_1$, temos:

$$s(\hat{\Phi}) = \frac{1}{\varepsilon_1^{\alpha}} s(\Phi_1) \leq s(\Phi)$$

Se algum dos membros de $\hat{\Phi}$ tiver diâmetro $\geq d$, teremos mostrado que $s(\Phi) \geq d^{\alpha}$. Caso contrário, o processo poderá ser repetido com $\hat{\Phi}$ em lugar de Φ, e assim por diante: após um número finito de etapas, obteremos uma cobertura Φ^* de K, tal que $s(\Phi^*) \leq s(\Phi)$, em que algum de seus membros tenha diâmetro $\geq d$, pois de uma etapa para a seguinte o ínfimo dos diâmetros positivos é multiplicado por um fator $\geq 1/\varepsilon > 1$ ($\varepsilon = \max \varepsilon_i$). Desta forma, resultará sempre $s(\Phi) \geq d^{\alpha}$, como queríamos.

Temos enfim $\mu^{\alpha}(K) \geq d^{\alpha} > 0$.

Das partes (i) e (ii) acima concluímos que $\dim K=\alpha$, como se tratava de provar.

Corolário: Dado $\alpha \geq 0$, existe um espaço métrico K_α tal que $\dim K_\alpha = \alpha$.

Demonstração: Ponhamos, dado $\alpha > 0, \lambda = 2^{1/\alpha}$. Consideremos o espaço $K_\alpha = 2^\omega$ munido da seguinte métrica:

$$d_\alpha(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} |x_n - y_n|,$$

sendo $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ membros de K_α. Nesta nova métrica as aplicações ϕ_0, ϕ_1 do exemplo (d) acima passam a ser $(1/\lambda)$--semelhanças. Pelo teorema 2.1, $\dim K_\alpha = \beta$ satisfaz a seguinte igualdade:

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^\beta + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\beta = 1,$$

ou seja, $\beta = \log 2/\log\lambda = \alpha$. Enfim, $\dim K_\alpha = \alpha$, como pretendido.

Para o caso $\alpha = 0$, há exemplos óbvios: todo espaço métrico enumerável tem dimensão zero. Ao final do capítulo 1 expusemos um exemplo não-enumerável (os números de Liouville). Existem mesmo conjuntos de Cantor (necessariamente não-homogêneos) com dimensão de Hausdorff zero.

De fato, basta tomarmos novamente $K_0 = 2^\omega$, desta vez munido da métrica:

$$d_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} |x_n - y_n|$$

(a qual é compatível com a topologia-produto). Agora as aplicações ϕ_0, ϕ_1 do exemplo (d) não são mais semelhanças, mas considerando os conjuntos $E(i_1,\ldots,i_n)$ por elas determinados, temos:

$$E(i_1,\ldots,i_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{e-1}{(n+1)!}$$

Fixemos $s > 0$ real. Dado $\delta > 0$, temos $(e-1)/(n+1)! < \delta$ para todo n suficientemente grande, de forma que:

$$\mu_\delta^s(K_0) \leq \sum_{i_1,\ldots,i_n} |E(i_1,\ldots,i_n)|^s = \frac{2^n(e-1)^s}{((n+1)!)^s}$$

Fazendo $n \to \infty$, esta última expressão vai a zero para todo $s > 0$. Como δ é arbitrário, temos $\mu^s(K_0) = 0$ para todo $s > 0$, e, portanto, $\dim K_0 = 0$.

Outra conseqüência do teorema 2.1 é que o conjunto triádico de Cantor (exemplo (c)) tem dimensão log2/log3, como afirmado no capítulo 1.

A título de complementação demonstraremos, para finalizar, que dois conjuntos de Cantor quaisquer são sempre homeomorfos, como afirmado no início do capítulo.

Teorema 2.2: Todo espaço métrico compacto totalmente desconexo sem pontos isolados é homeomorfo ao espaço-produto 2^ω.

Demonstração: Seja K espaço satisfazendo às hipóteses acima. Como K é métrico compacto, K possui base enumerável de abertos: $\{V_n : n \geq 0\}$; podemos supor, também, que $\bar{V}_n = V_n$ (isto é, cada V_n é aberto e fechado), posto que K seja totalmente desconexo.

Isto posto, seja $\phi: K \to 2^\omega$ definida como segue:

$$\phi(x) = (i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots)$$

sendo:

$$i_n = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in V_n \\ 1 \text{ se } x \notin V_n \end{cases}$$

Se $x \neq y$ então existe n tal que $x \in V_n$ e $y \notin V_n$ (os V_n's formam uma base para a topologia de K). Logo, $\phi(x) \neq \phi(y)$, de forma que ϕ é injetiva.

Afirmamos que ϕ é também contínua. De fato, seja $E(i_o,i_1,\ldots,i_n)$, para cada $(n+1)$-upla de zeros e uns, o conjunto (aberto) das seqüências de 2^ω cujos primeiros $n+1$ termos são precisamente $i_o,i_1,\ldots,i_n$ nesta ordem. Tais abertos constituem uma base para a topologia-produto em 2^ω. Basta, portanto, verificarmos que $\phi^{-1}(E(i_o,\ldots,i_n))$ é aberto em K.

Mas:

$$\phi^{-1}(E(i_o,\ldots,i_n)) = \bigcap_{s=0}^{n} W_s,$$

sendo, para cada s:

$$W_s = \begin{cases} V_s, & \text{se } i_s = 0 \\ K/V_s, & \text{se } i_s = 1 \end{cases}$$

Dado que cada W_s seja aberto, temos que $\phi^{-1}(E(i_o,\ldots,i_n))$ é aberto, de sorte que ϕ é contínua, como afirmado.

Assim, ϕ é um homeomorfismo de K sobre sua imagem $\phi(K) \subset 2^\omega$ (a qual é portanto um subconjunto fechado, não-vazio e sem pontos isolados, de 2^ω). Logo, o teorema é conse -

qüência imediata do seguinte resultado auxiliar.

Lema: Se $F \subset 2^{\omega}$ é fechado, não-vazio, sem pontos isolados, então F é homeomorfo a 2^{ω}.

Para demonstrarmos o lema acima, consideremos em 2^{ω} a métrica do exemplo (b).

Se $|F| = 1$ então $F \cap E(0) = F(0) \neq \emptyset$ e $F \cap E(1) = F(1) \neq \emptyset$, e tanto $F(0)$ quanto $F(1)$ são fechados e têm diâmetro $\leq 1/2$. Suponhamos então $|F| < 1$, e seja $n \geq 0$ tal que:

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq |F| < \frac{1}{2^n};$$

existem $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$ tais que:

$$F \subset E(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}),$$

pela própria definição da métrica utilizada. Assim sendo, há dois casos a considerar:

(i) $|F| > 1/2^{n+1}$; neste caso, escrevendo:

$$\begin{cases} F(0) = F \cap E(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, 0) \\ F(1) = F \cap E(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, 1) \end{cases}$$

temos dois fechados (não-vazios, sem pontos isolados) com diâmetros $\leq 1/2^{n+1}$.

(ii) $|F| = 1/2^{n+1}$; aqui, como F não tem pontos isolados, existe i tal que:

$$F \subset E(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i)$$

(i = 0 ou 1). Assim, teremos:

$$\begin{cases} F(0) = F \cap E(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, 0) \neq \emptyset \\ F(1) = F \cap E(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, 1) \neq \emptyset \end{cases}$$

ambos novamente fechados, sem pontos isolados e com diâmetros $\leq 1/2^{n+2}$.

Resumindo, em qualquer caso existe uma decomposição:

$$F = F(0) \cup F(1)$$

sendo F(0), F(1) fechados, não-vazios, sem pontos isolados e com a seguinte propriedade adicional: se $|F| \leq \frac{1}{2^n}$ então:

$$|F(i)| \leq \frac{1}{2^{n+1}},$$

para $i = 0,1$.

O mesmo processo pode ser repetido com cada $F(i)$ ($i = 0,1$) em lugar de F, e assim por diante: indutivamente, obteremos para cada seqüência finita $i_0, i_1, \ldots, i_n$ de zeros e uns um fechado:

$$F(i_0, i_1, \ldots, i_n) \subset F$$

não vazio, sem pontos isolados, satisfazendo:

(1) $F = \bigcup_{i_0,\ldots,i_n} F(i_0,\ldots,i_n)$, para cada n;

(2) $F(i_0,\ldots,i_n,i) \subset F(i_0,\ldots,i_n)$, para $i = 0,1$;

(3) $|F(i_0,\ldots,i_n)| \to 0$ quando $n \to \infty$, uniformemente;

(4) $F(i_0,\ldots,i_n,0) \cap F(i_0,\ldots,i_n,1) = \emptyset$

Das propriedades acima decorre que se $(i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots)$ é uma seqüência infinita (isto é, um membro de 2^ω), então a sucessão *encaixante* correspondente tem interseção unitária:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} F(i_0,\ldots,i_n) = \{x^*\}$$

de tal forma que, definindo $\phi: 2^{\omega} \to F$ por:

$$(i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots) = x^*,$$

obtemos uma aplicação contínua, injetiva e sobre F, e, portanto um homeomorfismo, dado que 2^{ω} seja compacto. Isto demonstra o lema e, com ele, o próprio teorema tem completada sua prova.

CAPÍTULO 3: TRANSLAÇÕES E PRODUTOS CARTESIANOS

Iniciaremos este último capítulo expondo um teorema devido a H. Steinhaus e S. Piccard (teorema 3.1, partes (a) e (b), respectivamente) envolvendo translações de partes da reta, para em seguida investigarmos suas eventuais ramificações mediante utilização das técnicas introduzidas nos capítulos anteriores. Seremos conduzidos de modo natural ao problema surpreendentemente não-trivial do cálculo da dimensão fracionária de um produto cartesiano $A \times B$ em função das dimensões dos fatores A,B (subconjuntos da reta).

Façamos, preliminarmente, alguns comentários sobre as notações empregadas aqui. Se $A,B \subset \mathbb{R}$ escreveremos:

$$-A = \{-a: a \in A\};$$
$$A+B = \{a+b: a \in A, b \in B\};$$
$$A-B = A + (-B);$$

além disso, escreveremos $x + A$ ao invés de $\{x\} + A$.

Freqüentemente denotaremos por I_x ou J_x um intervalo não-degenerado de centro x.

O símbolo $K(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ será reservado aos conjuntos de Cantor homogêneos obtidos, na notação do capítulo anterior, tomando-se $\Omega = [a,b]$ (um intervalo da reta) e, para $i = 1,\ldots,n$, uma ε_i-semelhança $\phi_i:[a,b] \to [a,b]$, com a convenção tácita de que o intervalo $[a,b]$ seja o menor possível, ou seja, que os extremos a,b estejam em $K(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$. Quando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = \varepsilon$, e os intervalos $E(i) = \phi_i([a,b])$ estiverem uniformemente espaçados (as distâncias entre os pares de intervalos consecutivos forem iguais), escreveremos $K(n,\varepsilon)$ ao invés de $K(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ e diremos que $K(n,\varepsilon)$ é um conjunto (de Cantor) simétrico.

Nosso ponto de partida é o teorema 3.1 abaixo. Diremos que um conjunto $A \subset R$ tem a propriedade de Baire se $A = G \Delta P$, sendo G aberto e P um conjunto de primeira categoria.

Teorema 3.1: Sejam $A,B \subset R$; os conjuntos $A+B$, $A-B$ têm interior não-vazio em cada um dos seguintes casos:

(a) A e B são mensuráveis Lebesgue e $\lambda(A) > 0$, $\lambda(B) > 0$;

(b) A e B são de segunda categoria e têm a propriedade de Baire.

Demonstração: (a) Inicialmente, mostremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x| < \varepsilon \Rightarrow (x+A) \cap A \neq \emptyset$. De fato, posto que A seja mensurável, existem um fechado F e um aberto G, com $F \subset A \subset G$, tais que, digamos, $\lambda(G) < (4/3)\lambda(F)$, isto porque $\lambda(A) > 0$. Podemos supor $\lambda(A) < \infty$ (tomando um subconjunto, se necessário); assim, existe certamente uma componente conexa I de G tal que:

$$\lambda(F \cap I) > \frac{3}{4}|I| \qquad (*)$$

Para todo x tal que $|x| < |I|/2$, $(x+I) \cup I$ é um intervalo de comprimento $< 3|I|/2$, contendo $F \cap I$ e $x + (F \cap I)$. Como $\lambda(F \cap I) = \lambda(x+(F \cap I))$ temos, por (*), que $(x+(F\cap I))\cap(F\cap I)\neq\emptyset$, donde, a fortiori,

$$(x+A) \cap A \neq \emptyset,$$

para todo x tal que $|x| < |I|/2 = \varepsilon$, como afirmado.

Suponhamos, agora, que exista $x \in R$ tal que $(x+A) \cap B$ tenha medida de Lebesgue positiva (tal conjunto é necessariamente mensurável, pois A e B o são). Escrevendo $E = (x+A) \cap B$, podemos então aplicar o resultado que acabamos de provar para E em lugar de A; concluiremos que E-E contém um intervalo não-degenerado em torno da origem, da forma $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Mas então, A-B contém o intervalo $(-x-\varepsilon, -x+\varepsilon)$.

Logo, resta provarmos que para algum x o conjunto $(x+A) \cap B$ tem medida de Lebesgue positiva. Como A,B têm medida positiva, existem, pelo teorema de densidade de Lebesgue, $a \in A$ e $b \in B$ tais que:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(A \cap I_a) &> \tfrac{1}{2}|I_a|,\\ \lambda(B \cap I_b) &> \tfrac{1}{2}|I_b|,\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

para quaisquer intervalos I_a (com centro em a) e I_b (com centro em b) suficientemente pequenos. Escolhendo I_a e I_b de forma que $|I_a| = |I_b|$ e, pondo $x = b-a$, temos $x + I_a = I_b$ e, portanto, por (**):

$$\Lambda((x + (A \cap I_a)) \cap (B \cap I_b)) > 0,$$

donde $\lambda((x + A) \cap B) > 0$, a fortiori.

Para concluirmos que a soma $A + B$ também tem interior não-vazio, basta observarmos que $A + B = A-(-B)$.

(b) Sabemos que $A = G \Delta P$ e $B = H \Delta Q$, sendo G,H abertos e P,Q conjuntos de primeira categoria; como A e B são de segunda categoria, G e H são não-vazios. Sejam, pois, $I \subset G$ e $J \subset H$ intervalos não-degenerados abertos. Note-se que I/A e J/B são de primeira categoria. Se x é tal que $(x+J) \cap I \neq \emptyset$, então esta última interseção é na verdade um intervalo I' tal que $I'/(x+B)$ e I'/A são de primeira categoria, de sorte que existe $t \in I'$ tal que $t \in x+B$ e $t \in A$, ou seja, $t = x+b$ com $b \in B$, ou ainda $x = t-b \in A-B$. Mas como I e J são não-degenerados, o conjunto dos x tais que $(x+J) \cap I \neq \emptyset$ é também um intervalo não-degenerado. Logo, $A-B$ tem interior não-vazio, o mesmo ocorrendo com $A+B$, pois $A+B = A-(-B)$.

Façamos aqui uma observação sobre as hipóteses do teorema acima, sob a forma de exemplo. Se $\lambda^*(A) > 0$, $\lambda^*(B) > 0$ mas A e B não são ambos mensuráveis, ou se A ou B não tem a propriedade de Baire (sendo porém ambos de segunda categoria), em geral nada se pode concluir sobre os interiores de $A+B$ e $A-B$. De fato, consideremos a seguinte relação de equivalência em $\mathbb{R}$: $x \sim y$ se e só se $x-y$ é racional; se V é uma parte da reta contendo exatamente um ponto de cada classe de equivalência (estamos usando aqui o axioma da escolha!), então $\mathbb{R}$ é reunião disjunta dos conjuntos $r + V$ com r racional. Segue-se que $\lambda^*(V) > 0$ e que V não é de primeira categoria. Se V fosse mensurável ou tivesse a propriedade de Baire, então, $V-V$ teria interior não-vazio, o que é absurdo, pois $(r+V) \cap V = \emptyset$ para todo r racional.

O teorema 3.1 nos dá condições suficientes sobre A,B para que $A+B$ e $A-B$ contenham intervalos. Sob hipóteses mais restritivas é ocasionalmente possível concluirmos algo sobre os tamanhos de tais intervalos. Tal é o caso, por exemplo, do resultado abaixo.

Proposição 3.1: Sejam $A,B \subset \mathbb{R}$ interseções enumeráveis de abertos densos em $\mathbb{R}$. Então $A+B = A-B = \mathbb{R}$.

Demonstração: Escrevamos $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$, $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n$, sendo $G_n, H_n \subset \mathbb{R}$ abertos densos para cada n.

Fixemos $x \in \mathbb{R}$ e observemos que:

$$(x+A) \cap B = \bigcap_{n=0}^{\infty} ((x+G_n) \cap H_n) \qquad (*)$$

Como $x+G_n$ e H_n são ambos abertos e densos para cada n, concluímos que $(x+G_n) \cap H_n$ é também aberto e denso, para cada n. Logo, pelo teorema de Baire, o segundo membro de (*) é não-vazio, donde $(x+A) \cap B \neq \emptyset$.

Assim, $x \in B-A$, e como x é arbitário, $B-A = \mathbb{R}$, e portanto $A-B = \mathbb{R}$ também. Novamente, como $A+B = A-(-B)$, é evidente que $A+B = \mathbb{R}$.

Como vimos acima, quando $A,B \subset \mathbb{R}$ não satisfazem as hipóteses do teorema 3.1, o problema de se decidir se A+B tem ou não interior vazio pode se tornar muito complexo. Mostraremos, entretanto, como aplicar o que expusemos anteriormente sobre dimensão fracionária para se obterem resultados parciais em alguns dos casos não detectados pelas hipóteses do teorema 3.1, tais como quando A e B são conjuntos de Cantor homogêneos.

Nosso plano é o seguinte: dados $A, B \subset \mathbb{R}$, seja $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x,y) = x+y$; temos:

$$\phi(A\times B) = A+B$$

Além disso, ϕ é Lipschitziana com constante de Lipschitz $\sqrt{2}$. Logo, se $E \subset \mathbb{R}^2$, temos, para todo $\alpha > 0$:

$$\mu^\alpha(\phi(E)) \leq (\sqrt{2})^\alpha \mu^\alpha(E);$$

donde, em particular, $\dim \phi(E) \leq \dim E$. No caso específico em que $E = A\times B$, obtemos:

$$\dim(A+B) \leq \dim(A\times B)$$

Assim, se $\dim(A\times B) < 1$, por exemplo, então teremos $\lambda^*(A+B) = \mu^1(A+B) = 0$, de sorte que neste caso $A+B$ terá interior vazio (note-se que na argumentação utilizamos sucessivamente a proposição 1.4, capítulo 1). Temos, pois, uma condição suficiente para que $A+B$ não contenha intervalos não-degenerados, a qual destacamos sob a forma de proposição.

Proposição 3.2: Se $A, B \subset \mathbb{R}$ são tais que $\dim(A\times B) < 1$, então $A+B$ tem interior vazio.

Um resultado como este que acabamos de enunciar só tem sentido se soubermos *calcular* $\dim(A\times B)$ ao menos para um número suficientemente grande de casos *interessantes*. O que fizemos até aqui foi simplesmente reduzir um problema relativamente difícil a outro que esperamos seja consideravelmente mais fácil!

De certa forma somos tentados a dizer que $\dim(A\times B)$ deve ser um número *pequeno* se tanto $\dim A$ quanto $\dim B$ forem números *pequenos*. Em termos mais precisos, é razoável esperarmos que:

$$\dim(A\times B) = \dim A + \dim B. \tag{*}$$

Entretanto, sem hipóteses adicionais isto é falso!

De fato, basta tomarmos $A = B = E$, sendo E o conjunto dos números de Liouville (capítulo 1, exemplo (c)). Lembremos que E é uma interseção enumerável de abertos densos na reta, donde $E + E = \mathbb{R}$, pela proposição 3.1. Pelo que foi visto acima $\dim(E\times E) \geq \dim(E+E) = 1$, enquanto $\dim E = 0$.

Mostraremos que a igualdade (*) é válida sempre que A e B sejam suficientemente regulares do ponto de vista de suas *distribuições de massa*. Mais precisamente, temos:

Teorema 3.2: Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ compactos tais que:

(a) $0 < \mu^{\alpha}(A) < \infty$, $0 < \mu^{\beta}(B) < \infty$, sendo α e β positivos fixos.

(b) Existem constantes $c, d_0, \ell > 0$ tais que:

$$\mu^{\alpha}(A \cap I) \leq c|I|^{\alpha}, \qquad \mu^{\beta}(B \cap I) \leq c|I|^{\beta}$$

para todo intervalo I com $|I| \leq \ell$, e:

$$\mu^{\beta}(B \cap I_x) \geq d_0 |I_x|^{\beta}$$

para todo $x \in B$ e todo I_x com $|I_x| \leq \ell$.

Nestas condições, $\dim (A \times B) = \dim A + \dim B$

Demonstração: Inicialmente seja Φ uma cobertura de $A \times B$ por abertos $V \subset \mathbb{R}^2$ tais que $|V| \leq \ell$. Não haverá perda de generalidade para nossos propósitos na suposição de que cada V é um retângulo: $V = I \times J$. Além disso, podemos nos restringir apenas e tão somente ao caso em que Φ é finita, pois A e B são compactos.

Se $V = I \times J \in \Phi$, temos $|I| \leq |V|$, $|J| \leq |V|$, donde, por (b):

$$|V|^{\alpha+\beta} \geq |I|^{\alpha}|J|^{\beta} \geq \frac{1}{c^2}\, \mu^{\alpha}(A\cap I)\, \mu^{\beta}(B\cap J)$$

Seja Φ_0 o conjunto dos pares de intervalos (I,J) tais que $I\times J \in \Phi$; então podemos escrever:

$$\sum_{\Phi}|V|^{\alpha+\beta} \geq \frac{1}{c^2} \sum_{\Phi_0} \mu^{\alpha}(A\cap I)\, \mu^{\beta}(B\cap J) \tag{1}$$

Por outro lado os intervalos I tais que $(I,J) \in \Phi_0$ para algum J determinam uma partição P (finita) da reta (através de seus extremos) e vale:

$$\mu^{\alpha}(A\cap I) = \sum\{\mu^{\alpha}(A\cap I^*) : I^* \in P,\ I^* \subset I\} \tag{2}$$

para cada I. Além disso, fixando $I^* \in P$ e denotando Φ^* o conjunto dos intervalos J tais que existe $I \supset I^*$ com $(I,J) \in \Phi_0$, temos claramente:

$$\sum_{\Phi^*} \mu^{\beta}(B\ J) \geq \mu^{\beta}(B) \tag{3}$$

(Φ^* é uma cobertura de B para cada I^*).

De (2) e (3) concluímos que:

$$\sum_{\Phi_0} \mu^{\alpha}(A\cap I)\mu^{\beta}(B\cap J) \geq \mu^{\beta}(B) \sum_{P} \mu^{\alpha}(A\cap I^*) \geq \mu^{\alpha}(A)\mu^{\beta}(B) \tag{4}$$

Tendo em conta (1), resulta:

$$\sum_{\Phi} |V|^{\alpha+\beta} \geq \frac{1}{c^2} \mu^{\alpha}(A)\mu^{\beta}(B) \tag{5}$$

Como Φ é arbitrária, obtemos enfim:

$$\mu^{\alpha+\beta}(A\times B) \geq \frac{1}{c^2} \mu^{\alpha}(A)\mu^{\beta}(B) \tag{6}$$

(note-se que por (a) o segundo membro de (6) é positivo).

Agora, seja dado $\varepsilon > 0$ e tomemos uma cobertura Γ de A por intervalos I tais que $|I| \leq \ell$ satisfazendo:

$$\mu^{\alpha}(A) + \varepsilon \geq \sum_{\Gamma} |I|^{\alpha} \tag{7}$$

Fixado $I \in \Gamma$, tomemos para cada $x \in B$ um intervalo J_x tal que $|J_x| = I$. Obtemos uma cobertura de B da qual podemos destacar uma subcobertura finita, digamos:

$$\{J_{x_1}, J_{x_2}, \ldots, J_{x_n}\}$$

com a propriedade de que cada $y \in \mathbb{R}$ é coberto por no máximo dois de seus membros. Segue-se, por (b), que:

$$\sum_{i=1}^{n} |J_{x_i}|^{\beta} \leq \frac{1}{d_o} \sum_{i=1}^{n} \mu^{\beta}(B \cap J_{x_i}) \leq \frac{2}{d} \mu^{\beta}(B) \tag{8}$$

Os quadrados $I \times J_{x_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ constituem uma cobertura de $I \times B$. Fazendo I percorrer Γ, obtemos uma cobertura de $A \times B$ por quadrados, a qual indicaremos por Γ^*. Se $V \in \Gamma^*$ é tal que $V = I \times J$, temos $|V| = \sqrt{2}\,|I| = \sqrt{2}\,|J|$; portanto, utilizando (7) e (8) concluímos que:

$$\sum_{\Gamma^*} |V|^{\alpha+\beta} \leq \frac{2}{d_o} (\sqrt{2})^{\alpha+\beta} \mu^{\beta}(B) \sum_{\Gamma} |I|^{\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{2}{d_o} (\sqrt{2})^{\alpha+\beta} \mu^{\beta}(B)(\mu^{\alpha}(A)+\varepsilon) \tag{9}$$

Logo, resulta:

$$\mu^{\alpha+\beta}(A \times B) \leq \frac{2}{d_o} (\sqrt{2})^{\alpha+\beta} \mu^{\alpha}(A) \mu^{\beta}(B) \tag{10}$$

(note-se que o segundo membro de (10), por (a), é finito).

Finalmente, de (6) e (10) concluímos que:

$$\dim (A \times B) = \alpha + \beta = \dim A + \dim B$$

como se tratava de provar.

Corolário: Se $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}$ são conjuntos de Cantor homogêneos então $\dim(K_0+K_1) \leq \dim K_0 + \dim K_1$.

Demonstração: Basta mostrarmos que todo conjunto de Cantor homogêneo na reta satisfaz as condições (a) e (b) do teorema.

Seja, pois, $K = K(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$. No desenrolar da prova do teorema 2.1 ficou estabelecido que:

$$d^\alpha \leq \mu^\alpha(K) \leq |K|^\alpha$$

sendo $\alpha = \dim K$ (veja-se o capítulo 2 para a definição de d e demais notações empregadas aqui). Logo, a hipótese (a) do teorema acima é satisfeita.

Tomemos agora $x \in K$ e um intervalo I_x de centro x tal que $|I_x| \leq |K|$. Seja k o menor inteiro ≥ 1 tal que existam $i_1,\ldots,i_k$ $(1 \leq i_s \leq n)$ para os quais:

$$x \in E(i_1,\ldots,i_k) \subset I_x$$

Temos então:

$$\mu^\alpha(K \cap I_x) \geq \mu^\alpha(K \cap E(i_1,\ldots,i_k)) = (\varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_k})^\alpha \mu^\alpha(K) \geq$$

$$\geq (\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_k})^{\alpha}\, d^{\alpha} \tag{1}$$

Por outro lado, apesar de $E(i_1, \ldots, i_{k-1}) \not\subset I_x$, temos:

$$|I_x| \leq 2|E(i_1, \ldots, i_{k-1})| = 2\, \varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_{k-1}} |K| \tag{2}$$

De (1) e (2) resulta que:

$$\frac{\mu^{\alpha}(K \cap I_x)}{|I_x|^{\alpha}} \geq \sigma^{\alpha} d^{\alpha} 2^{-\alpha} |K|^{-\alpha} \tag{3}$$

sendo $\sigma = \min \varepsilon_i$. Logo, $\mu^{\alpha}(K \cap I_x) \geq d_o |I_x|^{\alpha}$, sendo $d_o = \sigma^{\alpha} d^{\alpha} 2^{-\alpha} |K|^{-\alpha}$.

Um raciocínio totalmente análogo se aplica para mostrar que existe c tal que $\mu^{\alpha}(K \cap I) \leq c|I|^{\alpha}$ para todo intervalo I tal que $|I| \leq |K|$. Resumindo, K satisfaz também a hipótese (b) do teorema 3.2. O corolário está demonstrado.

Uma observação importante: a proposição 3.2, o corolário acima e os resultados vindouros foram e serão enunciados apenas para somas de conjuntos. Entretanto, os resultados análogos para diferenças são igualmente válidos, com alterações óbvias nas respectivas demonstrações.

Para finalizarmos este trabalho, vamos investigar o caso $A = B = K(n, \varepsilon)$, sendo $K(n, \varepsilon)$ um conjunto de Can -

tor simétrico. Para tal necessitamos de mais um resultado auxiliar.

Proposição 3.3: Sejam $A,B \subset \mathbb{R}$ tais que $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$, sendo A_n e B_n compactos para cada n. Então:

$$A + B = \bigcap_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n)$$

Demonstração: Temos $A_n + B_n \supset A + B$ para todo n, donde uma das inclusões é óbvia. Seja, pois, $x \in A_n + B_n$ para todo n. Então para cada n existem $a_n \in A_n$ e $b_n \in B_n$ tais que $a_n + b_n = x$. Podemos supor (tomando uma subseqüência, se necessário) que (a_n) converge para $a \in A$. A seqüência (b_n) possui uma subseqüência convergente (b_{n_k}), a qual tem como limite necessariamente um $b \in B$. Mas então $a_{n_k} + b_{n_k} \to a+b$, donde $x = a+b \in A+B$. Isto estabelece a outra inclusão, e portanto a igualdade.

Teorema 3.3: Seja $K = K(n,\varepsilon) \subset [0,1]$ um conjunto simétrico (contendo 0 e 1). Então:

(a) Se $\varepsilon < 1/2n-1$, K+K é também simétrico e:

$$\dim(K+K) = \frac{\log\,(2n-1)}{\log\,\varepsilon}$$

(b) Se $\varepsilon \geq 1/2n-1$, temos $K+K = [0,2]$ (em particular $\dim(K+K) = 1$)

Demonstração: Utilizaremos um argumento geomé-trico muito simples, combinado com a proposição acima. Mantendo a notação do capítulo 2, escrevamos para cada $m \geq 1$.

$$K_m = \bigcup_{i_1,\ldots,i_m} E(i_1,\ldots,i_m) \tag{1}$$

Temos $\bigcap_{m=0}^{\infty} K_m = K$; logo:

$$K + K = \bigcap_{m=0}^{\infty} (K_m+K_m) \tag{2}$$

(observe-se que cada K_m é reunião disjunta de n^m intervalos de comprimento ε^m).

Fixemos m, e seja S uma componente conexa (intervalo) de K_m+K_m. Se I,J são dois dos intervalos que compõem K_m tais que $I+J = S$, consideremos os conjuntos:

$$M = I \cap K_{m+1}, \quad N = J \cap K_{m+1}; \tag{3}$$

ambos são cópias homotéticas de K_1 com razão de homotetia ε^m. Logo, $M + N \subset S$ é uma cópia homotética de K_1+K_1 com a mesma razão de homotetia, e portanto a soma M+N não depende dos particulares intervalos I,J tais que $I+J = S$. Disso concluímos facilmente (por (2)) que se $K_1+K_1 = [0,2]$ então $K_m+K_m = [0,2]$ para todo m e portanto $K+K = [0,2]$; e que se $K_1+K_1 \neq [0,2]$ então $K_{m+1} + K_{m+1}$ se obtém de $K_m + K_m$ exatamente como segue: de cada componente de $K_m + K_m$ *retiram-se* intervalos abertos de modo que o remanescente seja uma cópia homotética de K_1+K_1. Em outras palavras, se $K_1+K_1 \neq [0,2]$ então $K+K$ é um conjunto de Cantor homogêneo. Agora, temos:

(i) Quando $\varepsilon \geq 1/2n-1$, $K_1+K_1 = [0,2]$ de fato, sejam $0,\lambda,\ldots,(n-1)\lambda$ os extremos esquerdos dos intervalos que compõem K_1. As somas desses extremos dois a dois fornecem-nos $0,\lambda,\ldots,(2n-2)\lambda$, os quais estão em K_1+K_1. Se $\lambda \leq 2\varepsilon$ então $K_1+K_1 = [0,2]$; logo basta verificar que isto de fato ocorre se $\varepsilon \geq 1/2n-1$, o que é imediato,posto que $\lambda = (1-\varepsilon)/(n-1)$.

(ii) Quando $\varepsilon < 1/2n-1$ o mesmo argumento de (i) mostra-nos que K_1+K_1 consiste de $2n-1$ intervalos de comprimento $2\varepsilon(<\lambda)$ uniformemente espaçados. Neste caso $K+K$ é um conjunto de Cantor, não apenas homogêneo mas também simétrico, do tipo $K(2n-1,\varepsilon)$ e portanto:

$$\dim(K+K) = \frac{\log(2n-1)}{\log \varepsilon} \tag{4}$$

Isto estabelece os casos (a) e (b) do enunciado, como queríamos.

BIBLIOGRAFIA

(1) *BEARDON, A.F.* - On the Hausdorff dimension of General Cantor Sets, Proc. Camb.Phil.Soc. 61 (1965).

(2) *BESICOVITCH, A.S.; MORAN, P.* - The Measure of Product and Cylinder Sets, J.Lond.Math. Soc. 20 (1945).

(3) *GELBAUM, B.* - Problems in Analysis, Springer-Verlag (1982).

(4) *MARSTRAND, J.M.* - Some Fundamental Geometrical Properties of Plane Sets of Fractional Dimensions, Proc.Lond.Math.Soc. 4 (1954).

(5) *OXTOBY, J.C.* - Measure and Category, Springer-Verlag (1980).

(6) *ROGERS, C.A.* - Hausdorff Measures, Cambridge University Press (1970).