

TÓPICOS SOBRE MÉTODOS  
DE COLOCAÇÃO

ANTÔNIO ELIAS FABRIS

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM

MATEMÁTICA APLICADA

ÁREA: ANÁLISE NUMÉRICA

ORIENTADOR: PROF.DR. IVAN DE QUEIROZ BARROS

- SÃO PAULO, DEZEMBRO DE 1985 -

Aos meus pais,  
Alcides  
e  
Maria

## ÍNDICE

	Pág.
AGRADECIMENTOS	
INTRODUÇÃO .....	i
CAPÍTULO 1 - MÉTODOS DE COLOCAÇÃO E MÉTODOS DO TIPO RK	
§1.1 Introdução.....	1
§1.2 Descrição de um Método Tipo RK. Comutatividade do Diagrama de Discretização. Exemplo.	2
§1.3 Condições para a Equivalência entre um Método de Colocação e o Método tipo RK. Exemplo.	6
§1.4 Reformulação das Condições para a Equivalência entre um Método de Colocação por "Splines" Naturais e o Método Tipo RK.....	10
§1.5 Equivalência entre um Método de Colocação por "Splines" Naturais Cúbicos e o Método Tipo RK.....	13
§1.6 Equivalência entre um Método de Colocação por "Splines" Naturais Quínticos e o Método Tipo RK.....	20
CAPÍTULO 2 - MÉTODOS DE COLOCAÇÃO PARA PROBLEMAS A VALORES DE CONTORNO.....	30
§2.1 Introdução.....	30
§2.2 Descrição de um Modelo Abstrato. Consistência. Estabilidade. Convergência.....	31
§2.3 Aplicação ao Problema de Equações Diferenciais Ordinárias com Valores de Contorno...	37
CAPÍTULO 3 - COLOCAÇÃO GAUSSIANA	
§3.1 Introdução.....	52

CAPÍTULO 4 - A DESIGUALDADE DO HIPERCÍRCULO E O MÉTODO DE COLOCAÇÃO DE SCHUMAKER.	
§4.1	Introdução..... 76
§4.2	Desigualdade do Hipercírculo Generalizada.. 77
§4.3	Aplicação ao Problema de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias..... 80
§4.4	O Método de Colocação de Schumaker..... 94
ANEXO A	..... 96
ANEXO B - UMA ILUSTRAÇÃO COMPUTACIONAL.....	110

## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Francisco Baptista Burgos, o amigo de todas as horas.

Aos Profs. Jair Minoru Abe e Luis Jean Lauand, pelo espontâneo e constante incentivo.

À Sra. Luzia do Carmo Namiki, pelo eficiente e esmerado trabalho de datilografia.

E ao Prof. Dr. Ivan de Queiroz Barros, os nossos agradecimentos especiais. Foi ele quem sugeriu o tema desta dissertação e graças à sua supervisão e paciente orientação foi possível a realização do presente trabalho.

São Paulo, dezembro de 1985.

O autor

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por finalidade apresentar alguns aspectos dos métodos de colocação por "splines" polinomiais para a resolução aproximada de equações diferenciais ordinárias.

O Capítulo 1 originou-se do artigo de R. Weiss, denominado "Implicit Runge-Kutta and Collocation Methods" (Weiss [1974]). Neste artigo, o autor estabelece a equivalência entre um método de colocação por "splines" polinomiais e um método de Runge-Kutta para a resolução aproximada de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem com valores de contorno.

Restringindo-nos a um sistema de equações diferenciais com valores iniciais e seguindo idéia sugerida, pelo orientador, enunciamos e demonstramos o teorema 1.3.2, que exhibe três condições para a realização da equivalência entre um método de colocação por funções pertencentes a um espaço vetorial  $S$  e um método de Runge-Kutta.

O resultado de Weiss [1974], que corresponde a escolher  $S$  como sendo o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a  $m$ , resulta, no caso de condições iniciais, como caso particular.

Nos últimos parágrafos deste capítulo, aplicamos o teorema 1.3.2 para obtermos resultados análogos em novas situações, adotando como espaço  $S$  os espaços dos "splines" naturais cúbicos ou quínticos.

O Capítulo 2 está baseado no artigo de R.D.Russell e L.F.Shampine chamado "A Collocation Method for Boundary Value Problems" (Russell-Shampine [1972]) e na primeira parte do artigo "Collocation at Gaussian Points" de C. de Boor e B.Swartz (De Boor-Swartz [1973]). No primeiro artigo, seus autores obtêm uma aproximação por "splines" polinomiais e delimitação do erro com relação à solução exata de uma equação diferencial linear com valores de contorno utilizando pontos de colocação de Lobatto. O resultado obtido em Russell-Shampine [1972] é generalizado em De Boor-Swartz [1973] para os pontos de colocação de Radau e de Gauss. Em 1978, I.Q. Barros estudou o problema da obtenção de uma aproximação e delimitação do erro com relação exata de uma particular equação do tipo  $Ay=f$ , onde  $A$  é uma aplicação linear entre espaços normados, através de um processo discreto abstrato (Barros [1982]) utilizando os modelos de discretização de Stetter [1971]. Como aplicação desse estudo I.Q. Barros reobteve os resultados de R.D. Russell e L.F. Shampine.

Neste capítulo apresentamos o teorema 2.2.1 que estende o estudo feito em Barros [1982] para uma particular sequência de equações  $A_n y=f$ . Como aplicação deste teorema reobtivemos os resultados de C. de Boor e B.Swartz no caso linear. Tal enfoque permitiu-nos evidenciar a necessidade das hipóteses admitidas e as idéias básicas da demonstração do resultado obtido em De Boor-Swartz [1973].

O Capítulo 3 está baseado na 2ª parte do artigo "Collocation at Gaussian Points" (de Boor, Swartz [1973]). Nesta

parte, C. de Boor e B. Swartz mostram que a escolha dos pontos de colocação como sendo os zeros do polinômio de Legendre relativo a cada subintervalo e a imposição de que a solução exata da equação diferencial linear seja suficientemente diferenciável acarreta alta ordem de convergência da solução aproximada do método de colocação por "splines" polinomiais para a solução exata da equação diferencial.

No teorema 3.3 apresentamos o resultado acima mencionado. Acreditamos que com a redação dada por nós ao enunciado e à demonstração do teorema 3.3, teremos conseguido uma melhora sensível em termos de clareza. A demonstração foi abreviada pela utilização do teorema 2.2.1 no capítulo dois. Procuramos em cada etapa da demonstração justificar a introdução das hipóteses. Atenção especial foi dada aos detalhes da demonstração que se relacionam com as funções de Green e diferenças divididas.

No capítulo 4 apresentamos no teorema 4.1 uma generalização da desigualdade do hipercírculo sugerida pelo orientador. A demonstração apresentada é uma adaptação da demonstração encontrada em Golomb-Weinberger [1959]. Aplicando este teorema para o estudo da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias com valores iniciais utilizando condições de colocação, reencontramos o método proposto e estudado por L.L. Schumaker no artigo intitulado "Optimal Spline Solutions of Systems for Ordinary Differential Equations" (Schumaker [1982]).

No Anexo A, recolhemos subsídios que julgamos oportunos para melhor compreensão da temática exposta na dissertação.



No Anexo B, desenvolvemos, a modo de exemplo, dois programas computacionais como ilustração dos capítulos 2 e 3. Nesses programas utilizamos a sub-rotina BSDX e seus procedimentos auxiliares BSMCD, LBISEC e INTERV elaborados por Salvetti [1983].

## CAPÍTULO 1

### § 1.1 - INTRODUÇÃO

O resultado central deste capítulo é o teorema 1.3.2.

Tivemos necessidade de uma proposição da álgebra linear enunciada no lema 1.4.4. Por se tratar de um argumento importante no desenvolvimento do capítulo, fizemos sua demonstração que incluímos no anexo.

Além da redação do capítulo, os conteúdos dos parágrafos 1.4, 1.5 e 1.6 foram por nós desenvolvidos.

§1.2 - DESCRIÇÃO DE UM MÉTODO TIPO RK. COMUTATIVIDADE DO DIAGRAMA DE DISCRETIZAÇÃO. EXEMPLO.

Consideremos o problema a valores iniciais

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  e  $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \cap \text{Lip}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

Dados  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{m-1} < 1$ , seja  $X \subset C^1([0, 1], \mathbb{R})$  subespaço de dimensão  $m$  tal que exista uma matriz real  $A = [a_{ij}]$  satisfazendo

$$(1.2.2) \quad \begin{cases} \int_0^{\theta_i} f(\theta) d\theta = \sum_{j=1}^m a_{ij} f(\theta_j), & i=1, 2, \dots, m, \\ \forall f \in X. \end{cases}$$

Observemos que a matriz  $A = [a_{ij}]$  existe se a condição abaixo for verificada.

Condição  $C_1$ : "As formas lineares  $U_j \in X^*$  definidas por  $U_j f = f(\theta_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , são linearmente independentes".

Seja o método de discretização<sup>(\*)</sup> (correspondente a um único passo de um método do tipo RK) representado pelo diagrama

---

(\*) Para maiores detalhes sobre métodos de discretização vide A.1 no anexo.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{F} & E^0 \\
 \Delta_m \downarrow & & \downarrow \Delta_m^0 \\
 E_m & \xrightarrow{F_m} & E_m^0
 \end{array}$$

onde  $E = C^2([a, b], \mathbb{R}^d)$ ,  $E^0 = \mathbb{R}^d \times C^1([a, b], \mathbb{R}^d)$ ,

$$Fy = \begin{bmatrix} y(a) - y_0 \\ y' - foy \end{bmatrix},$$

$G_m = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ ,  $x_i = a + \theta_i(b-a)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,

$E_m = E_m^0 = (G_m, \mathbb{R}^d)$ ,

$$(F_m \eta)(x_i) = \begin{cases} \eta(a) - y_0, & i = 0 \\ \frac{\eta(x_i) - \eta(a)}{b-a} - \sum_{j=1}^m a_{ij} f(\eta(x_j)), & i=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

$(\Delta_m y)(x_i) = y(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,

$\Delta_m^0 \begin{pmatrix} d_0 \\ d \end{pmatrix} (a) = d_0$ ,  $\Delta_m^0 \begin{pmatrix} d_0 \\ d \end{pmatrix} (x_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} d(x_j)$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Definamos  $T: C^1([a, b], \mathbb{R}^d) \longrightarrow C^1([0, 1], \mathbb{R}^d)$  por  $(Tv)(\theta) = v(a + \theta(b-a))$  e  $D: C^2([a, b], \mathbb{R}^d) \longrightarrow C^1([a, b], \mathbb{R}^d)$  por  $Dv = v'$ .

PROPOSIÇÃO 1.2.1: Seja  $S \subseteq E$  tal que  $TD(S) = X^d$ . Então, para todo

$s \in S$ , o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{F} & E^O \\
 \Delta_m \downarrow & & \downarrow \Delta_m^O \\
 E_m & \xrightarrow{F_m} & E_m^O
 \end{array}$$

é comutativo.

PROVA: Devemos provar que se  $s \in S$ , então  $F_m \Delta_m s = \Delta_m^O F s$ .

Caso 1:  $i = 0$ .

$$(F_m \Delta_m s)(a) = (\Delta_m s)(a) - y_0 = s(a) - y_0 \quad e$$

$$(\Delta_m^O F s)(a) = s(a) - y_0.$$

Caso 2:  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$(F_m \Delta_m s)(x_i) - (\Delta_m^O F s)(x_i) =$$

$$= \frac{(\Delta_m s)(x_i) - (\Delta_m s)(a)}{b-a} - \sum_{j=1}^m a_{ij} f(\Delta_m s(x_j)) -$$

$$- \sum_{j=1}^m a_{ij} [s'(x_j) - f(s(x_j))] =$$

$$= \frac{s(x_i) - s(a)}{b-a} - \sum_{j=1}^m a_{ij} f(s(x_j)) + \sum_{j=1}^m a_{ij} f(s(x_j)) - \sum_{j=1}^m a_{ij} s'(x_j) =$$

$$= \frac{s(x_i) - s(a)}{b-a} - \sum_{j=1}^m a_{ij} s'(x_j).$$

Precisamos provar que  $s(x_i) = s(a) + (b-a) \sum_{j=1}^m a_{ij} s'(x_j)$ .

Como  $s(x_i) = s(a) + \int_a^{x_i} s'(x) dx$ , basta verificar que

$$\int_a^{x_i} s'(x) dx = (b-a) \sum_{j=1}^m a_{ij} s'(x_j). \quad (1)$$

Seja  $x = a + \theta(b-a)$ . Teremos:

$$\begin{aligned} \int_a^{x_i} s'(x) dx &= (b-a) \int_0^{\theta_i} s'(a + \theta(b-a)) d\theta = \\ &= (b-a) \int_0^{\theta_i} (\text{TDS})(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Como  $\text{TDS} \in X^d$ , decorre que

$$\int_0^{\theta_i} (\text{TDS})(\theta) d\theta = \sum_{j=1}^m a_{ij} (\text{TDS})(\theta_j) \quad \text{e, em consequência,}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{x_i} s'(x) dx &= (b-a) \int_0^{\theta_i} s'(a + \theta(b-a)) d\theta = \\ &= (b-a) \sum_{j=1}^m a_{ij} s'(a + \theta_j(b-a)) = \\ &= (b-a) \sum_{j=1}^m a_{ij} s'(x_j). \end{aligned}$$

Portanto, (1) está verificada.

EXEMPLO 1.2.2: Seja  $S = P_{m+1}([a,b], \mathbb{R}^d)$ . Então,

$$TD(S) = P_m([0,1], \mathbb{R}^d) \equiv (P_m([0,1], \mathbb{R}))^d = X^d.$$

Para  $X = P_m([0,1], \mathbb{R})$ , a condição  $C_1$  é satisfeita, visto que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_m \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta_1^{m-1} & \theta_2^{m-1} & \dots & \theta_m^{m-1} \end{bmatrix} \neq 0$$

e, por conseguinte,  $U_j \in X^*$  definidas por  $U_j f = f(\theta_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , são linearmente independentes.

### §1.3 - CONDIÇÕES PARA A EQUIVALÊNCIA ENTRE UM MÉTODO DE COLOCA E O MÉTODO TIPO RK. EXEMPLO.

DEFINIÇÃO 1.3.1: Seja o problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) , & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Seja  $V$  um subespaço de  $E$  de dimensão  $m+1$ . O método de obtenção de uma solução aproximada do problema acima que consiste em determinar  $v \in V$  tal que  $v(a) = y_0$  e  $v'(x_i) = f(v(x_i))$ ,  $1 \leq i \leq m$ , é cha

mado método de colocação relativo aos pontos  $x_0=a, x_1, \dots, x_m=b$ .

Investigaremos, agora, a equivalência entre os métodos de colocação e métodos de discretização correspondente a um único passo de um método RK. Esta investigação nos levará, de modo natural, a obter condições para que tal equivalência se realize.

Seja  $S \subseteq E$ ,  $TD(S) = X^d$  e admitamos que valha a condição  $C_1$ . Seja  $v \in S$  solução aproximada do problema (1.2.1) pelo método de colocação relativamente aos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_m$ . Pela proposição 1.2.1,

$$F_m \Delta_m v = \Delta_m^0 F v.$$

Mas,

$$\Delta_m^0 F v(a) = v(a) - y_0 = 0 \quad e$$

$$\Delta_m^0 F v(x_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} (v'(x_i) - f(v(x_i))) = 0.$$

Logo,  $\zeta = \Delta_m v$  é solução do método de discretização correspondente a um único passo de um método do tipo RK.

Seja, agora,  $\zeta$  a solução do método de discretização correspondente a um único passo de um método do tipo RK e suponhamos a validade da condição abaixo.

Condição  $C_2$ : "Existe  $\nabla_m: E_m \longrightarrow S$  tal que  $\Delta_m \nabla_m = \text{id}$ ".

Então,

$$\Delta_m^0 F \nabla_m \zeta = F_m \Delta_m \nabla_m \zeta = F_m \zeta = 0.$$



Resulta, daí, que

$$(\nabla_m \zeta)(a) - y_0 = 0 \quad e$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} [(\nabla_m \zeta)'(x_i) - f((\nabla_m \zeta)(x_i))] = 0 \quad ,$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Portanto, se a condição  $\det[a_{ij}] \neq 0$  for satisfeita,  $v = \nabla_m \zeta$  é solução do método de colocação relativamente aos pontos  $x_0 = a, x_1, \dots, x_m$ . Em presença da condição  $C_1$ , a condição:

Condição  $C_3$ : "As formas lineares  $I_i \in X^*$  definidas por  $I_i f = \int_0^{\theta_i} f(\theta) d\theta$ ,  $1 \leq i \leq m$ , são linearmente independentes",

implica em  $\det[a_{ij}] \neq 0$ , pois a matriz  $[a_{ij}]$  será uma matriz de mudança de base.

Podemos resumir os resultados acima como se segue.

TEOREMA 1.3.2: Com as definições já feitas e admitindo-se a condição  $C_1$ , temos:

(i) Se  $s \in S$  é solução do método de colocação relativamente aos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_m$  então  $\Delta_m s$  é solução do método de discretização correspondente a um único passo do método do tipo RK cuja matriz  $A$  satisfaz (1.2.2).

(ii) Admitindo-se, também, as condições  $C_2$  e  $C_3$ , temos: se  $\zeta \in E_m$  é solução do método de discretização correspondente a um único passo do método do tipo RK cuja matriz  $A$  sa-

tisfaz (1.2.2), então  $s = \nabla_m \zeta$  é solução do método de colocação relativamente aos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_m$ .

OBSERVAÇÃO 1.3.3: Sabemos que, se  $(b-a) < 1/L_f \|A\|_\infty$ , onde  $L_f$  é a constante de Lipschitz de  $f$  e  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ , então o método de discretização correspondente a um único passo do método tipo RK tem solução única (Vide Barros [1978], proposição 4.3). Neste caso, concluímos pelo teorema 1.3.2(i), (ii) que o método de colocação também admite solução e esta solução é única.

EXEMPLO 1.3.4: Para  $S = P_{m+1}([a, b], \mathbb{R}^d)$  já verificamos a condição  $C_1$ . Verifiquemos  $C_2$  e  $C_3$ .

Define-se  $\nabla_m : E_m \longrightarrow S$  como segue:  $(\nabla_m \eta)^j$  é o polinômio interpolador de Lagrange de grau  $m$  tal que  $(\nabla_m \eta)^j(x_i) = \eta^j(x_i)$ , onde  $0 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq d$ .

Por construção,  $\Delta_m \nabla_m = \text{id}$ , provando, pois, a condição  $C_2$ .

Verifiquemos  $C_3$ , admitindo  $\theta_1 > 0$ . Seja  $\{p_k\}$  a base de  $X$  onde  $p_k(\theta) = \theta^k$ ,  $0 \leq k \leq m-1$ . Logo

$$\det [I_i p_k] = \det \left[ \int_0^{\theta} \theta^k d\theta \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{bmatrix} \theta_{1/1} & \theta_{1^2/2} & \dots & \theta_{1^m/m} \\ \theta_{2/1} & \theta_{2^2/2} & \dots & \theta_{2^m/m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta_{m/1} & \theta_{m^2/2} & \dots & \theta_{m^m/m} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_m}{m!} \det \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \dots & \theta_1^{m-1} \\ 1 & \theta_2 & \dots & \theta_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \theta_m & \dots & \theta_m^{m-1} \end{bmatrix} \neq 0.
\end{aligned}$$

§1.4 - REFORMULAÇÃO DAS CONDIÇÕES PARA A EQUIVALÊNCIA ENTRE UM MÉTODO DE COLOCAÇÃO POR "SPLINES" NATURAIS E O MÉTODO TIPO RK.

Vamos estudar um exemplo em que no lugar de colocação por polinômios usaremos colocação por 'splines'.

DEFINIÇÃO 1.4.1: O espaço

$$\begin{aligned}
&S_{k,m-1} \quad (a=x_0 < x_1 < \dots < x_m = b) = \\
&= \left\{ s: \begin{array}{l} s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in P_k([x_{i-1}, x_i], \mathbb{R}), \quad 1 \leq i \leq m, \\ e \quad s^{(j)}(x_i^-) = s^{(j)}(x_i^+), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq j \leq k-2 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

é chamado espaço dos "splines" de ordem  $k$  com nós simples  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

DEFINIÇÃO 1.4.2:  $NS_{2k, m-1} = \{s \in S_{2k, m-1} (a=x_0 < x_1 < \dots < x_m = b) : s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0, j=k, k+1, \dots, 2k-2\}$  é o espaço dos "splines" naturais de ordem  $2k$  com nós simples  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

LEMA 1.4.3:  $\dim S_{k, m-1} (a=x_0 < x_1 < \dots < x_m = b) = k+m-1$ .

PROVA: Vide Schumaker [1981], teorema 4.4.

LEMA 1.4.4: Seja  $S$  um espaço vetorial de dimensão  $m+n$  e  $T_i: X \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m, R_j: S \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n$ , formas lineares independentes entre si. Então:

$$(a) \dim \text{Ker}(R_1, R_2, \dots, R_n) = m$$

$$(b) T_1, T_2, \dots, T_m \text{ restritas a } \text{Ker}(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

são linearmente independentes.

PROVA: Vide proposição A.2 no anexo.

OBSERVAÇÃO 1.4.5:  $NS_{2k, m-1} \subset S_{2k, m-1} \subset C^{2k-2}([a, b], \mathbb{R})$ .

Passemos, agora, ao estudo do exemplo. Seja

$$S = NS_{2k, m-1}^d, \quad k \geq 2.$$

Como  $X^d = \text{TD}(S)$ , tem-se

$$X = \{f \in S_{2k-1, m-1} (0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 1) :$$

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0, \quad j = k-1, k, \dots, 2k-3\}.$$

Observemos que  $X \subset S_{2k, m-1} (0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 1) \subset C^{2k-3}([0, 1], \mathbb{R})$ .

Analisemos as condições  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .

Condição  $C_1$ : Pelo lema 1.4.3,

$$\dim S_{2k-1, m-1} (0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 1) = 2k+m-2.$$

Sejam  $U_i$ ,  $L_j$ ,  $R_j$  formas lineares sobre  $S_{2k-1, m-1} (0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 1)$  assim definidas:

$$U_i f = f(\theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$L_j f = f^{(j)}(0), \quad j = k-1, k, \dots, 2k-3 \quad \text{e}$$

$$R_j f = f^{(j)}(1), \quad j = k-1, k, \dots, 2k-3.$$

Como  $X = \text{Ker}(L_{k-1}, L_k, \dots, L_{2k-3}, R_{k-1}, R_k, \dots, R_{2k-3})$ , teremos, pelo lema 1.4.4, que se as formas lineares  $U_i$ ,  $L_j$ ,  $R_j$  forem linearmente independentes entre si então  $\dim X = 2k+m-2 - (2k-2) = m$  e  $U_1, U_2, \dots, U_m$  restritas a  $X$  são linearmente independentes.

Portanto, a condição  $C_1$  estará satisfeita se a matriz  $M_1$  do tipo  $(2k+m-2) \times (2k+m-2)$ , obtida calculando-se as formas lineares  $U_i$ ,  $L_j$ ,  $R_j$  nos elementos de uma base de  $S_{2k, m-1} (0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 1)$ , tiver determinante diferente de zero.

Condição  $C_3$ : Sejam  $I_i$  as formas lineares definidas

por  $I_i f = \int_0^{\theta_i} f(\theta) d\theta$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Por um argumento similar ao da condição  $C_1$ , a condição  $C_3$  será satisfeita se a matriz  $M_3$ , do tipo  $(2k+m-2) \times (2k+m-2)$ , obtida calculando-se as formas lineares  $I_i, L_j, R_j$  nos elementos de uma base de  $S_{2k-1, m-1}^{(0=\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m=1)}$ , tiver determinante diferente de zero.

Condição  $C_2$ : Definamos  $\nabla_m: E_m \longrightarrow S$  assim:  $\nabla_m \eta$  é o "spline" natural de ordem  $2k$  com nós simples  $x_1, x_2, \dots, x_m$  tal que  $(\nabla_m \eta)(x_i) = \eta(x_i)$ .  $\nabla_m$  está bem definida em virtude do

Teorema: Dados  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}^d$ , existe um único  $s \in NS_{2k, m-1}^d$  tal que  $s(x_i) = \alpha_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ .

Prova: Vide Schumaker [1981].

Da definição de  $\nabla_m$ , resulta a condição  $C_2$ , ou seja,  $\Delta_m \nabla_m = \text{id}$ .

### §1.5 - EQUIVALÊNCIA ENTRE UM MÉTODO DE COLOCAÇÃO POR "SPLINES" NATURAIS CÚBICOS E O MÉTODO TIPO RK.

Em presença do exposto no parágrafo anterior, mostraremos a validade das condições  $C_1$  e  $C_3$  para  $S = NS_{4, m-1}^d$  e  $\theta_i = i/m$ ,  $1 \leq i \leq m$ , isto é, para pontos de colocação equiespaçados. Recordemos que

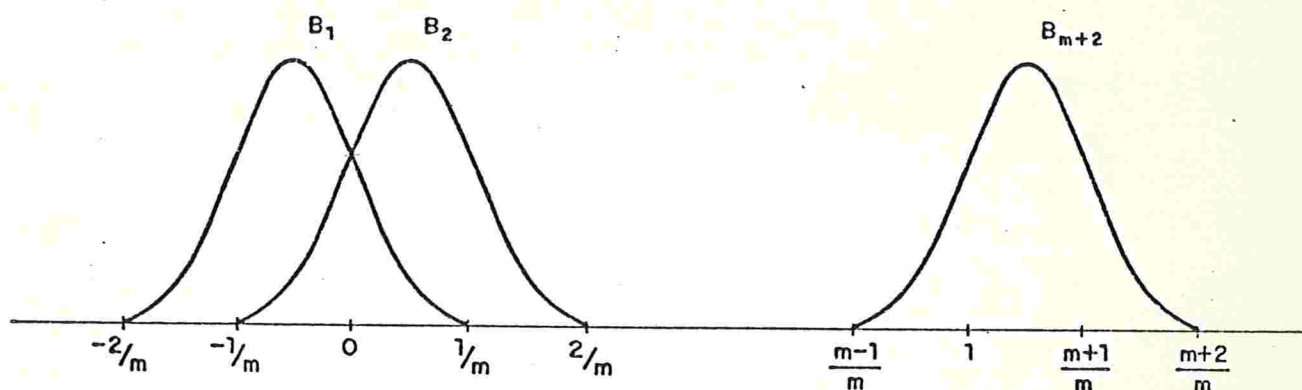
$$X = \{f \in S_{3, m-1}^{(0=\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m=1)} : f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0, \quad j=k-1, k, \dots, 2k-3\}$$

Seja  $\{B_i\}$  uma base de  $S_{3,m-1}$  ( $0=\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m=1$ ) constituída pelos B-splines<sup>(\*)</sup> dados por

$$B_i(\theta) = -\frac{3}{m} (\theta-y)_+^2 \left[ \frac{i-3}{m}, \frac{i-2}{m}, \frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \right],$$

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad 1 \leq i \leq m+2,$$

$$\text{onde } (\theta-y)_+^2 = \begin{cases} 0 & , \quad \theta < y \\ (\theta-y)^2 & , \quad \theta \geq y \end{cases}$$



Calculemos  $(\theta-y)_+^2 \left[ \frac{i-3}{m}, \frac{i-2}{m}, \frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \right]$  através da tabela 1, de diferenças divididas, que se segue, na qual fazemos  $f(i) = (\theta - i/m)_+^2$ .

(\*) Para maiores detalhes sobre B-splines vide Schumaker [1981], capítulo 4. A notação  $f[t_1, \dots, t_{r+1}]$  significa diferenças divididas de ordem  $r$ , da função  $f$  relativa aos pontos  $t_1, \dots, t_{r+1}$ .

TABELA 1

$\frac{i-3}{m} f(i-3)$		
	$m[f(i-2)-f(i-3)]$	
$\frac{i-2}{m} f(i-2)$	$\frac{m^2}{2} [f(i-1)-2f(i-2)+f(i-3)]$	
	$m[f(i-1)-f(i-2)]$	$\frac{m^3}{6} [f(i)-3f(i-1)+3f(i-2)-f(i-3)]$
$\frac{i-1}{m} f(i-1)$	$\frac{m^2}{2} [f(i)-2f(i-1)+f(i-2)]$	
	$m[f(i)-f(i-1)]$	
$\frac{i}{m} f(i)$		

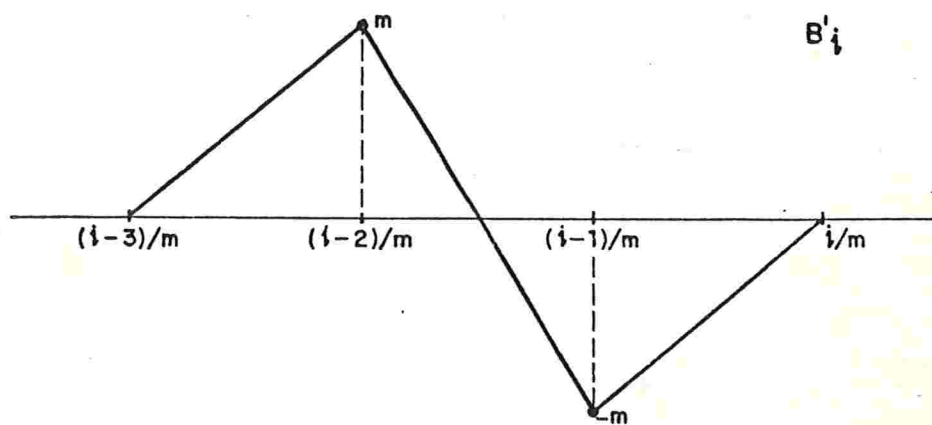
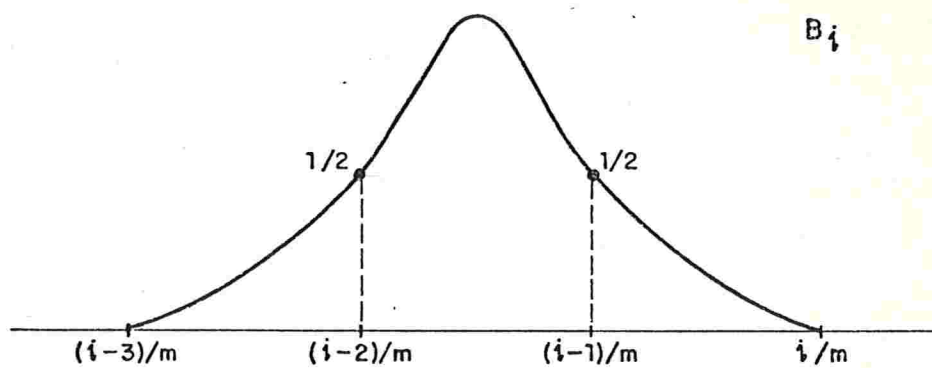
Logo,  $B_i(\theta) = -\frac{m^2}{2} \left[ (\theta - i/m)_+^2 - 3(\theta - (i-1)/m)_+^2 + 3(\theta - (i-2)/m)_+^2 - (\theta - (i-3)/m)_+^2 \right]$ . Por conseguinte,

$$B_i(\theta) = \begin{cases} 0 & , \quad \theta < (i-3)/m \\ \frac{m^2}{2} [\theta - (i-3)/m]^2 & , \quad (i-3)/m \leq \theta \leq (i-2)/m \\ \frac{m^2}{2} [-2\theta^2 + 2\theta(2i-3)/m - (2i^2 - 6i + 3)/m^2] & , \quad (i-2)/m \leq \theta \leq (i-1)/m \\ \frac{m^2}{2} (\theta - i/m)^2 & , \quad (i-1)/m \leq \theta \leq i/m \\ 0 & , \quad \theta > i/m \end{cases}$$

e



$$B'_i(\theta) = \begin{cases} 0 & , \quad \theta < (i-3)/m \\ \frac{m^2}{2} [\theta - (i-3)/m] & , \quad (i-3)/m \leq \theta \leq (i-2)/m \\ -2m^2\theta + (2i-3)m & , \quad (i-2)/m \leq \theta \leq (i-1)/m \\ m^2 (\theta - i/m) & , \quad (i-1)/m \leq \theta \leq i/m \\ 0 & , \quad \theta > i/m \end{cases}$$



A condição  $C_1$  é satisfeita, pois

$$\det M_1 = \det \begin{pmatrix} L_1 B_1 & L_1 B_2 & \dots & L_1 B_{m+2} \\ U_1 B_1 & U_1 B_2 & \dots & U_1 B_{m+2} \\ U_2 B_1 & U_2 B_2 & \dots & U_2 B_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m B_1 & U_m B_2 & \dots & U_m B_{m+2} \\ R_1 B_1 & R_1 B_2 & \dots & R_1 B_{m+2} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -m & m & & & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & & & \\ & & & 1/2 & 1/2 & & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & 1/2 & 1/2 \\ & & & & & & & & -m & m \end{pmatrix} =$$

$$= -m^2 (1/2)^{m-1} \neq 0.$$

Provemos a condição  $C_3$ . Efetuando os cálculos obtivemos:

$$\int_{\frac{i-3}{m}}^{\frac{i-2}{m}} B_i(\theta) d\theta = \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{1}{m}} B_i(\theta) d\theta = 1/6m \quad e$$

$$\int_{\frac{i-2}{m}}^{\frac{i-1}{m}} B_i(\theta) d\theta = 4/6m \quad .$$

$$\det M_3 = \det \begin{pmatrix} L_1 B_1 & L_1 B_2 & \dots & L_1 B_{m+2} \\ I_1 B_1 & I_1 B_2 & \dots & I_1 B_{m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_m B_1 & I_m B_2 & \dots & I_m B_{m+2} \\ R_1 B_1 & R_1 B_2 & \dots & R_1 B_{m+2} \end{pmatrix} =$$



Como na matriz anterior  $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+2} |a_{ij}|$ ,  $1 \leq i \leq m+2$ ,

tem-se, pelo teorema dos círculos de Gerschgorin (vide, p.e., Varga [1962], capítulo 1.4), que os seus autovalores são diferentes de zero e então  $\det M_3 \neq 0$ , provando, pois, a condição  $C_3$ .

### §1.6 - EQUIVALÊNCIA ENTRE UM MÉTODO DE COLOCAÇÃO POR "SPLINES" NATURAIS QUÍNTICOS E O MÉTODO TIPO RK.

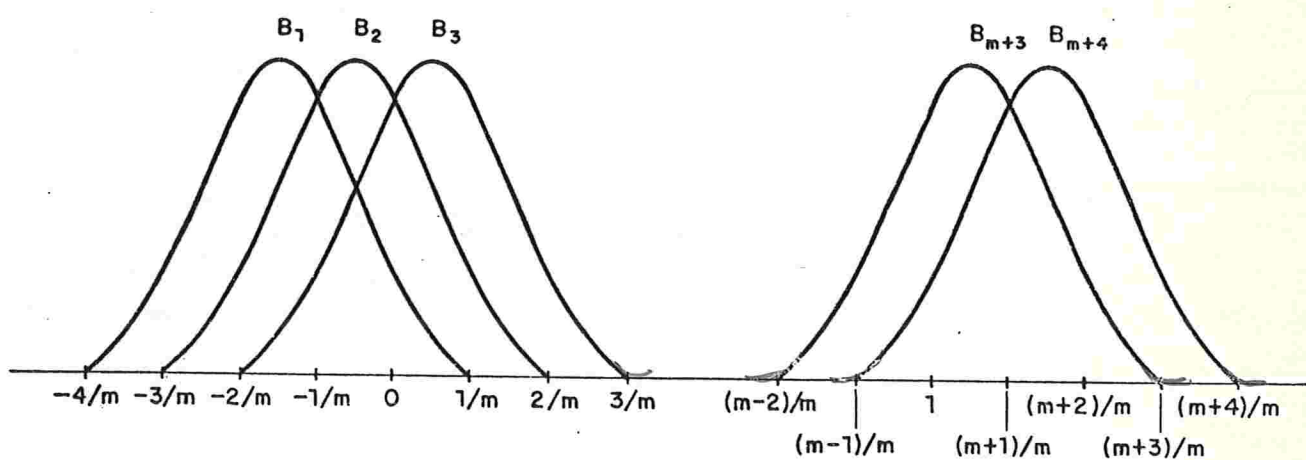
Provaremos, agora, as condições  $C_1$  e  $C_3$  para  $S = NS_{6,m-1}^d$  e  $\theta_i = i/m$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Neste caso,

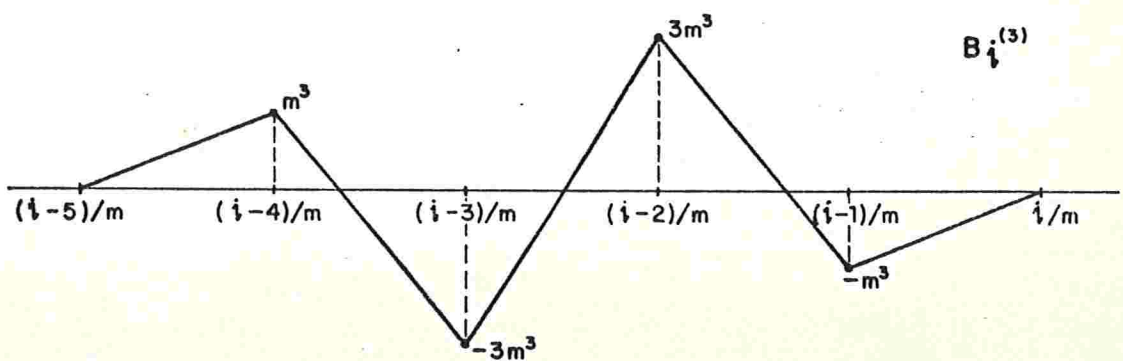
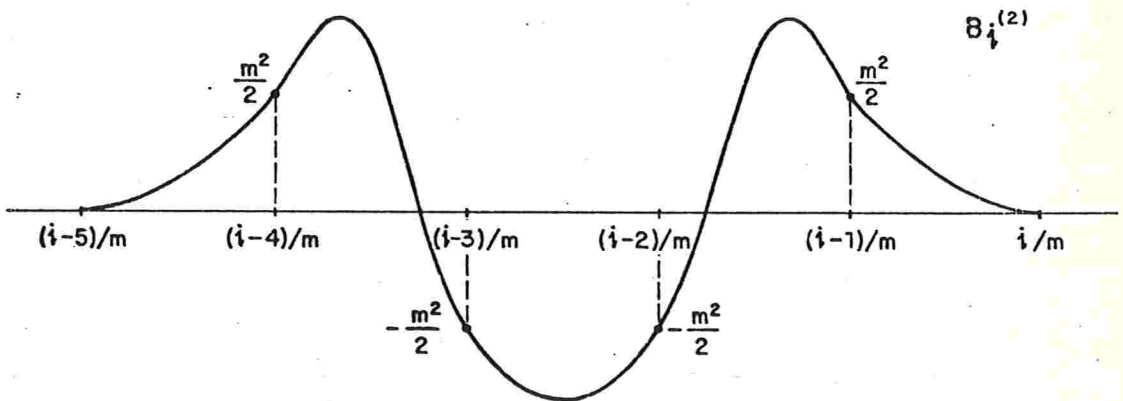
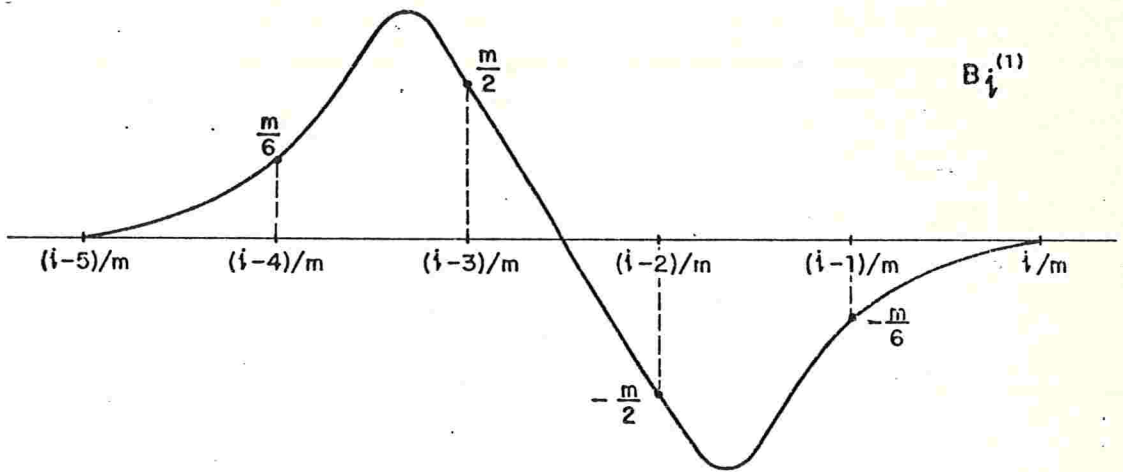
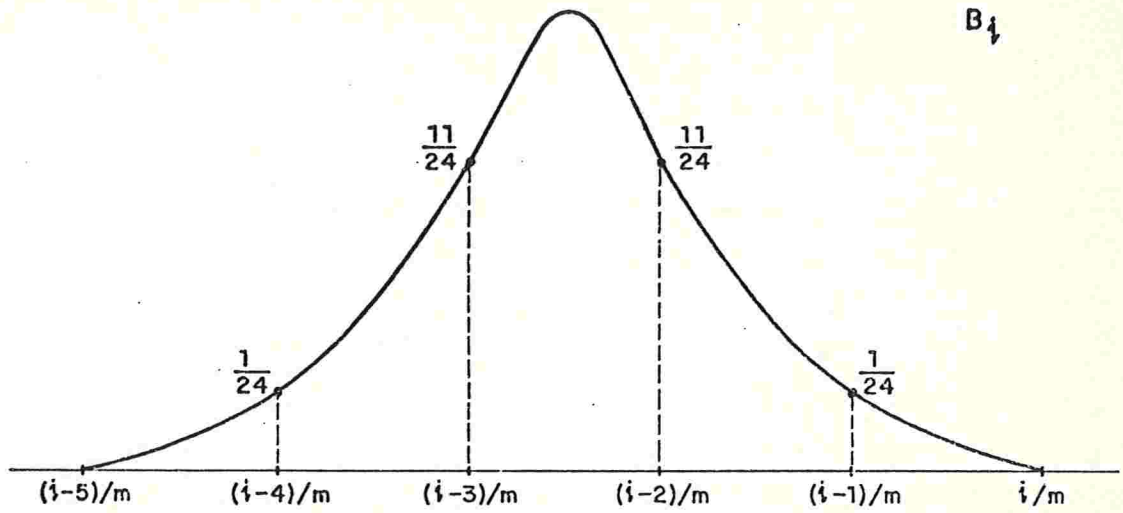
$$X = \{f \in S_{5,m-1}(0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 1) : f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0, \\ j = k-1, k, \dots, 2k\}.$$

Efetuada cálculos análogos aos do parágrafo anterior, obtivemos uma base  $\{B_i\}$  para  $S_{5,m-1}(0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 1)$ , onde

$$B_i(\theta) = \begin{cases} 0 & , \quad \theta \leq (i-5)/m \\ \frac{m^4}{24} [\theta - (i-5)/m]^4 = q_1(\theta) & , \quad (i-5)/m < \theta \leq (i-4)/m \\ -\frac{5m^4}{24} [\theta - (i-4)/m]^4 + q_1(\theta) = q_2(\theta) & , \quad (i-4)/m < \theta \leq (i-3)/m \\ \frac{10m^4}{24} [\theta - (i-3)/m]^4 + q_2(\theta) = q_3(\theta) & , \quad (i-3)/m < \theta \leq (i-2)/m \\ -\frac{10m^4}{24} [\theta - (i-2)/m]^4 + q_3(\theta) = q_4(\theta) & , \quad (i-2)/m < \theta \leq (i-1)/m \\ \frac{5m^4}{24} [\theta - (i-1)/m]^4 + q_4(\theta) & , \quad (i-1)/m < \theta \leq i/m \\ 0 & , \quad \theta > i/m \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m+4 .$$





Provemos a condição  $C_1$ .

$$\det M_1 = \det \begin{pmatrix} L_2 B_1 & L_2 B_2 & \dots & L_2 B_{m+4} \\ L_3 B_1 & L_3 B_2 & \dots & L_3 B_{m+4} \\ U_1 B_1 & U_1 B_2 & \dots & U_1 B_{m+4} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_m B_1 & U_m B_2 & \dots & U_m B_{m+4} \\ R_2 B_1 & R_2 B_2 & \dots & R_2 B_{m+4} \\ R_3 B_1 & R_3 B_2 & \dots & R_3 B_{m+4} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} m^2/2 & -m^2/2 & -m^2/2 & m^2/2 \\ -m^3 & 3m^3 & -3m^3 & m^3 \\ 1/24 & 11/24 & 11/24 & 1/24 \\ & 1/24 & 11/24 & 11/24 & 1/24 \\ & & \dots & & \\ & & & 1/24 & 11/24 & 11/24 & 1/24 \\ & & & m^2/2 & -m^2/2 & -m^2/2 & m^2/2 \\ & & & -m^3 & 3m^3 & -3m^3 & m^3 \end{pmatrix} =$$



$$= \frac{m^{10}}{2(24)^m} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 3 & -3 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & 11 & 11 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 11 & 11 & 1 & & & & & \\ & & & & & \dots & & & & & \\ & & & & & & & 1 & 11 & 11 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & & & & & & -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Façamos, consecutivamente, as seguintes operações sobre as linhas e colunas da última matriz acima:

(a) Substituimos a coluna  $j+1$  pela coluna  $j+1$  subtraída da coluna  $j$ , para  $j$  sucessivamente igual a  $1, 2, \dots, m+3$ .

(b) Substituimos a linha 2 pela linha 2 subtraída da última linha multiplicada por  $(-1)^{m+4}$ .

(c) Substituimos a linha 2 pela soma da linha 2 com a linha 1.

(d) Substituimos a linha  $m+2$  pela linha  $m+2$  subtraída da linha  $m+3$ .

(e) Substituimos a linha 2 pela linha 2 subtraída da

linha  $m+3$  multiplicada por  $(-1)^{m+3}$ .

(f) Aplicamos o teorema de Laplace, consecutivamente, às colunas  $1, m+4, m+3$ .

(g) Dividimos a linha 1 por 4 e multiplicamos a linha 2 por  $2/5$ .

Daí:

$$\det M_1 = \frac{40m^{10}}{(24)^m} \det \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & 2(-1)^4 & 2(-1)^5 & 2(-1)^6 \dots 2(-1)^m & 3(-1)^{m+1}/2 & (-1)^{m+2}/2 \\ 2/5 & 4 & 2/5 & & & & \\ & 1 & 10 & 1 & & & \\ & & 1 & 10 & 1 & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} :$$

Como  $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m+1} |a_{ij}|$ ,  $1 \leq j \leq m+1$ , tem-se  $\det M_1 \neq 0$ , provando, pois, a condição  $C_1$ .

Provemos a condição  $C_3$ . Efetuando os cálculos, obtemos:

$$\int_{(i-5)/m}^{(i-4)/m} B_i(\theta) d\theta = \int_{(i-1)/m}^{i/m} B_i(\theta) d\theta = 1/120m,$$

$$\int_{(i-4)/m}^{(i-3)/m} B_i(\theta) d\theta = \int_{(i-2)/m}^{(i-1)/m} B_i(\theta) d\theta = 26/120m \quad ,$$

$$\int_{(i-3)/m}^{(i-2)/m} B_i(\theta) d\theta = 66/120m \quad , \quad 1 \leq i \leq m+4.$$

Então;

$$\det M_3 = \det \begin{pmatrix} L_2 B_1 & L_2 B_2 & \dots & L_2 B_{m+4} \\ L_3 B_1 & L_3 B_2 & \dots & L_3 B_{m+4} \\ I_1 B_1 & I_1 B_2 & \dots & I_1 B_{m+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_m B_1 & I_m B_2 & \dots & I_m B_{m+4} \\ R_3 B_1 & R_3 B_2 & \dots & R_3 B_{m+4} \\ R_2 B_1 & R_2 B_2 & \dots & R_2 B_{m+4} \end{pmatrix} =$$



Façamos, consecutivamente, as seguintes operações sobre as linhas e colunas da última matriz:

(a) Substituímos a linha  $j$  pela linha  $j$  subtraída da linha  $j-1$ , para  $j$  sucessivamente igual a  $m+2, m+1, \dots, 4$ .

(b) Dividimos a linha 1 e a linha  $m+4$  por  $m^2/2$ ; dividimos a linha 2 e a linha  $m+3$  por  $m^3$ ; dividimos a linha  $j$  por  $1/120m$ ,  $j=3, 4, \dots, m+2$ .

(c) Substituímos: a linha 2 pela soma da linha 2 com a linha 1; a linha 3 pela subtração da linha 3 pela linha 1; a coluna 3 pela soma da coluna 3 com a coluna 2 multiplicada por 2; a coluna 4 pela coluna 4 subtraída da coluna 2; a linha  $m+3$  pela linha  $m+3$  subtraída da linha  $m+4$ ; a linha  $m+2$  pela linha  $m+2$  subtraída da linha  $m+4$ ; a coluna  $m+2$  pela soma da coluna  $m+2$  com a coluna  $m+3$  multiplicada por 2; a coluna  $m+1$  pela coluna  $m+1$  subtraída da coluna  $m+3$ .

(d) Aplicamos o teorema de Laplace à linha 2 e à linha  $m+3$ .

Logo,

$$\det M_3 = \frac{-m^{10}}{(120)^m} \det$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 121 & -2 & 1 & & & \\ 28 & 65 & 26 & 1 & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\ & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & \dots\dots\dots \\ & & & & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & 26 & 65 & 28 \\ & & & & & & & & & 1 & -2 & 121 \end{array} \right) .$$

Como  $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}|$ ,  $1 \leq j \leq m+1$ , conclui-se que

$\det M_3 \neq 0$ ; provando, por conseguinte, a condição  $C_3$ .

Observamos que a repetição dos algoritmos de colocação e do tipo RK, aplicados aos exemplos estudados neste capítulo, dão métodos de passo progressivo equivalentes.

## C A P Í T U L O 2

§2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos o teorema 2.2.1 para uma particular seqüência de equações  $A_n y = f$ .

Como aplicação deste teorema reobtivemos os resultados de De Boor-Swartz [1973] no caso linear.

§2.2 - DESCRIÇÃO DE UM MODELO ABSTRATO. CONSISTÊNCIA. ESTABILIDADE. CONVERGÊNCIA.

Sejam  $E, E^0$  espaços normados e aplicações  $A, A_0, B$  de  $E$  em  $E^0$  satisfazendo as seguintes condições:

Condição  $C_1$ : " $A$  é linear contínua bijetora com  $A^{-1}$  contínua";

Condição  $C_2$ : " $A_0$  e  $B$  são lineares contínuas com  $A = A_0 + B$ ".

Para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ , seja  $Q_n^0$ , subespaço não nulo de  $E^0$ , e façamos  $Q_n = A_0^{-1}(Q_n^0)$ . Exigimos que:

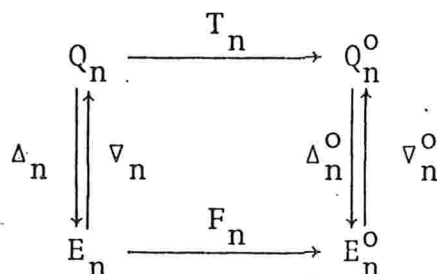
Condição  $C_3$ : " $A(Q_n) = Q_n^0$ ".

Dada  $f \in \bigcap_n Q_n^0$  consideremos o problema original  $\mathcal{P} = (Q_n, Q_n^0, T_n)$ , onde  $T_n: Q_n \rightarrow Q_n^0$  é definida por  $T_n y = A_n y - f$ ,  $\forall y \in Q_n$ , e  $A_n = A|_{Q_n}$ .

Observação: Devido às condições  $C_1$  e  $C_3$  temos que  $A_n$  é invertível. Então, o problema original  $\mathcal{P}$  tem solução única, isto é, existe uma única  $z_n \in Q_n$  tal que  $T_n z_n = 0$ . Além disso, em virtude da definição de  $T_n$ ,  $z_n = A_n^{-1} f$ . Ponha-se  $z = A^{-1} f$ ; como  $f \in \bigcap_n Q_n^0$ , resulta, pela condição  $C_3$ , que  $A_n^{-1} f = A^{-1} f$  e, portanto,  $z_n = z \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .



Seja, agora, o método de discretização aplicável a  $\mathcal{P}$ , representado pelo diagrama



onde:

$E_n$  e  $E_n^0$  são, respectivamente, subespaços de  $Q_n$  e de  $Q_n^0$ ,

$\Delta_n$  é um operador linear,

$\Delta_n^0$  é um projetor linear contínuo sobre  $E_n^0$ ,

$\nabla_n$  e  $\nabla_n^0$  são os operadores inclusão e

$$F_n = \Delta_n^0 T_n \nabla_n$$

satisfazendo as seguintes condições:

Condição C<sub>4</sub>: " $A_0(E_n) \subset E_n^0$ ".

Condição C<sub>5</sub>: "(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla_n^0 \Delta_n^0 B_n - B_n\|_{L(Q_n, Q_n^0)} = 0$ ,

$$\text{onde } B_n = B|_{Q_n},$$

(ii) Existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $\|\Delta_n^0\| \leq c$ ,

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ".

Condição C<sub>6</sub>: " $\|\nabla_n \Delta_n z - z\|_{Q_n} = o(n^{-p})$ ,

onde  $z$  é a solução de  $\mathcal{P}$ ".

PROPOSIÇÃO 2.2.1: Existe  $n_0$  tal que se  $n \geq n_0$ , então  $\mathcal{D} = (E_n, E_n^0, F_n)$  é estável e, neste caso,  $\mathcal{D}$  admite solução única  $(z_n)$ . Além disso,  $\mathcal{M} = (E_n, E_n^0, \Delta_n, \Delta_n^0, \phi_n)$  é consistente de ordem  $p$  na solução  $z$  de  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{M}$  é convergente de ordem  $p$ , isto é,  $\|z - z_n\|_{Q_n} = O(n^{-p})$ .

PROVA:

(a) Estabilidade de  $\mathcal{D} = (E_n, E_n^0, F_n)$ .

Ponha-se  $A_{o,n} = A_o|_{Q_n}$ . Pela condição  $C_2$ ,  $A_n = A_{o,n} + B_n$ .

De  $F_n \eta = \Delta_n^0 T_n \nabla_n \eta$ , segue-se, para todo  $\eta \in E_n$ , que

$$\begin{aligned} F_n \eta &= \Delta_n^0 (A_n \nabla_n \eta - f) = \\ &= \Delta_n^0 (A_{o,n} \nabla_n \eta + B_n \nabla_n \eta - f) = \\ &= \Delta_n^0 A_{o,n} \nabla_n \eta + \Delta_n^0 B_n \nabla_n \eta - \Delta_n^0 f. \end{aligned}$$

Como  $\nabla_n \eta \in E_n$  e  $A_{o,n}(E_n) = A_o(E_n) \subset E_n^0$  (condição  $C_4$ ), tem-se  $A_{o,n} \nabla_n \eta \in E_n^0$ ; em consequência

$$\Delta_n^0 A_{o,n} \nabla_n \eta = A_{o,n} \nabla_n \eta,$$

pois  $\Delta_n^0$  é projetor sobre  $E_n^0$ . Logo:

$$F_n \eta = A_{o,n} \nabla_n \eta + \Delta_n^0 B_n \nabla_n \eta - \Delta_n^0 f, \quad \forall \eta \in E_n.$$

Estendamos  $F_n: E_n \longrightarrow Q_n^0$  a  $F_n: Q_n \longrightarrow Q_n^0$

definindo

$$\bar{F}_n y = A_{o,n} y + \Delta_n^o B_n y - \Delta_n^o f, \quad \forall y \in Q_n.$$

Agora, decompos  $\bar{F}_n$  em  $\bar{F}_n = \hat{F}_n + G_n$ , onde:

$$\hat{F}_n y = (A_{o,n} + B_n) y = A_n y;$$

$$G_n y = (\Delta_n^o B_n - B_n) y - \Delta_n^o f.$$

Temos que  $(Q_n, Q_n^o, \hat{F}_n)$  é estável com constante  $\hat{S} = \|A^{-1}\|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , pois:  $A^{-1}$  é contínua (condição  $C_1$ ) e por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|_{Q_n} &= \|y_1 - y_2\|_E = \|A^{-1} A y_1 - A^{-1} A y_2\|_E \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|A y_1 - A y_2\|_{E^o} = \\ &= \|A^{-1}\| \|A_n y_1 - A_n y_2\|_{Q_n^o} = \\ &= \hat{S} \|\hat{F}_n y_1 - \hat{F}_n y_2\|_{Q_n^o} \end{aligned}$$

para quaisquer  $y_1, y_2 \in Q_n$ .

Existe  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $G_n: Q_n \longrightarrow Q_n^o$  é lipschitziana com constante  $L$  tal que  $L\hat{S} < 1$ . Isto resulta de

$$\begin{aligned} \|G_n y_1 - G_n y_2\|_{Q_n^o} &= \|(\Delta_n^o B_n - B_n)(y_1 - y_2)\|_{Q_n^o} \leq \\ &\leq \|\Delta_n^o B_n - B_n\| \|y_1 - y_2\|_{Q_n} \end{aligned}$$

e de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n^0 B_n - B_n\|_{L(Q_n, Q_n^0)} = 0$  (condição  $C_5(i)$ ).

Portanto, para  $n \geq n_0$ , concluímos, pela proposição A.4 (vide anexo, pág.102), que  $(Q_n, Q_n^0, \bar{F}_n)$  é estável com constante  $S = (1-L\hat{S})/\hat{S}$ , isto é,

$$\|y_1 - y_2\|_{Q_n} \leq S \|\bar{F}_n y_1 - \bar{F}_n y_2\|_{Q_n^0}, \quad \forall y_1, \forall y_2 \in Q_n, \\ n \geq n_0.$$

Finalmente, mostraremos que para  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{D} = (E_n, E_n^0, F_n)$  é estável com constante  $S$ . Para isso, tomemos  $\eta_1, \eta_2 \in E_n$ . Fazendo  $y_1 = \nabla_n \eta_1$  e  $y_2 = \nabla_n \eta_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|\eta_1 - \eta_2\|_{E_n} &= \|\nabla_n \eta_1 - \nabla_n \eta_2\|_{Q_n} \leq \\ &\leq S \|\bar{F}_n \nabla_n \eta_1 - \bar{F}_n \nabla_n \eta_2\|_{Q_n^0} = \\ &= S \|F_n \eta_1 - F_n \eta_2\|_{E_n^0}. \end{aligned}$$

(b) Existência e unicidade de solução de  $(E_n, E_n^0, F_n)$ .

Se  $n \geq n_0$  então existe solução única  $(z_n)$  de  $\mathcal{D} = (E_n, E_n^0, F_n)$ . Isto segue da proposição A.3 (vide anexo, pág. 102), pois  $\mathcal{D}$  é estável com constante  $S$  e  $F_n = \Delta_n^0 T_n \nabla_n$  é contínua.

(c) Consistência .

$$\begin{aligned}
 \|F_n \Delta_n z\|_{E_n^0} &= \|\Delta_n^0 T_n \nabla_n \Delta_n z\|_{E_n^0} = \|\Delta_n^0 T_n \Delta_n z\|_{E_n^0} = \\
 &= \|\Delta_n^0 A_n \Delta_n z - \Delta_n^0 f\|_{E_n^0} = \\
 &= \|\Delta_n^0 A_n \Delta_n z - \Delta_n^0 A_n z\|_{E_n^0} = \\
 &= \|\Delta_n^0 A_n (\Delta_n z - z)\|_{E_n^0} \leq \\
 &\leq \|\Delta_n^0\| \|A_n (\Delta_n z - z)\|_{Q_n^0} \leq \\
 &\leq \|\Delta_n^0\| \|A_n\| \|\Delta_n z - z\|_{Q_n} .
 \end{aligned}$$

Como  $\|\Delta_n^0\| \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (Condição  $C_5(ii)$ ) e  $\|A_n\|_{L(Q_n, Q_n^0)} \leq \|A\|_{L(E, E^0)}$ , tem-se

$$\|F_n \Delta_n z\|_{E_n^0} \leq c \|A\| \|\Delta_n z - z\|_{Q_n} = o(n^{-p}),$$

ou seja,  $\mathcal{M}$  é consistente de ordem  $p$  na solução  $z$  de  $\mathcal{P}$ .

(d) Convergência .

Temos que

$$\|z - \zeta_n\|_{Q_n} \leq \|z - \Delta_n z\|_{Q_n} + \|\Delta_n z - \zeta_n\|_{Q_n} \leq$$

$$\leq \|z - \Delta_n z\|_{Q_n} + S \|F_n \Delta_n z\|_{E_n^0}.$$

Em virtude da condição  $C_6$ ,  $\|z - \Delta_n z\|_{Q_n} = O(n^{-p})$ . Além disso,  $\|F_n \Delta_n z\|_{E_n^0} = O(n^{-p})$ . Portanto,  $\|z - \zeta_n\|_{Q_n} = O(n^{-p})$ , isto é  $\eta$  é convergente de ordem  $p$ .

### § 2.3 - APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM VALORES DE CONTORNO.

Utilizaremos os resultados do parágrafo anterior para estabelecer um método de colocação por "splines" para a equação diferencial linear

$$(2.3.1) \quad y^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b,$$

$$a_k, f \in C^q([a, b], \mathbb{R}), \quad q \geq 1,$$

sujeita às condições de contorno

$$(2.3.2) \quad \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)] = 0,$$

$$\alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

que vamos supor linearmente independentes em  $C^m([a, b], \mathbb{R})$ .

Problema Original.

No que se segue, utilizaremos os seguintes espaços:

$L_\infty([a,b], \mathbb{R}) = \{g: g \text{ é uma função a valores reais mensurável em } [a,b] \text{ e } \sup_{a \leq t \leq b} \text{ess}|g(t)| < \infty\}$  e  $W_\infty^m([a,b], \mathbb{R}) = \{y \in C^{m-1}([a,b], \mathbb{R}) : y^{(m-1)} \text{ é absolutamente contínua em } [a,b] \text{ e } y^{(m)} \in L_\infty([a,b], \mathbb{R})\}$ .

Sejam

$$E = \{y \in W_\infty^m([a,b], \mathbb{R}) : \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_j k y^{(k)}(a) + \beta_j k y^{(k)}(b)] = 0, j=1,2,\dots,m\}$$

e  $E^0 = L_\infty([a,b], \mathbb{R})$  munidos, respectivamente, das normas

$$\|y\|_E = \max_{0 \leq j \leq m} \|y^{(j)}\|_\infty \quad \text{e} \quad \|g\|_{E^0} = \|g\|_\infty, \quad \text{onde}$$

$$\|g\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} \text{ess}|g(t)|.$$

Notemos que  $E$  e  $E^0$  com as normas acima definidas são espaços de Banach.

$$\text{Definimos } A: E \longrightarrow E^0 \quad \text{por } Ay = y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y^{(k)}.$$

Escrevemos  $A = A_0 + B$  onde  $A_0 y = y^{(m)}$  e  $By = \sum_{k=0}^{m-1} a_k y^{(k)}$ . É evidente que  $A$ ,  $A_0$  e  $B$  são lineares. A continuidade de  $A$ ,  $A_0$  e  $B$  segue, respectivamente, de

$$\|Ay\|_{E^0} \leq \|y^{(m)}\|_\infty + \sum_{k=0}^{m-1} \|a_k\|_\infty \|y^{(k)}\|_\infty \leq$$

$$\leq \left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} \|a_k\|_\infty\right) \|y\|_E,$$

$$\|A_0 y\|_{E^0} = \|y^{(m)}\|_{\infty} \leq \|y\|_E \quad e$$

$$B = A - A_0.$$

Vamos admitir que  $A$  e  $A_0$  são invertíveis (isto é: que o problema (2.3.1), (2.3.2) e o problema  $y^{(m)} = f$  sujeito às condições (2.3.2) possuem solução única em  $E$  para toda  $f \in E_0$ ). Do Teorema da Aplicação Aberta de Banach decorre que  $A^{-1}$  e  $A_0^{-1}$  são contínuas.

Logo,  $A$ ,  $A_0$  e  $B$  satisfazem as condições  $C_1$  e  $C_2$ .

Seja a sequência de malhas  $(\pi_n)$  tal que

$$\pi_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

e suponhamos que existam  $c_1, c_2 > 0$  tais que  $c_2/n \leq h_i \leq c_1/n$ , onde  $h_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Seja  $Q_n^0$  subespaço de  $E^0 = L_{\infty}([a, b], \mathbb{R})$  definido por

$$Q_n^0 = \{g \in L_{\infty}([a, b], \mathbb{R}) : g|_{(t_{i-1}, t_i)} \text{ é contínua em}$$

$$(t_{i-1}, t_i), \lim_{t \rightarrow t_{i-1}^+} g(t) \text{ e } \lim_{t \rightarrow t_i^-} g(t) \text{ existem e são}$$

$$\text{finitos, } i = 1, 2, \dots, n\}$$

com a norma induzida por  $E^0$ .

Façamos  $Q_n = A_0^{-1}(Q_n^0)$ , isto é,



$Q_n = \{y \in C^{m-1}([a, b], \mathbb{R}) : y^{(m)}|_{(t_{i-1}, t_i)} \text{ é contínua em}$

$(t_{i-1}, t_i), \lim_{t \rightarrow t_{i-1}^+} y^{(m)}(t) \text{ e } \lim_{t \rightarrow t_i^-} y^{(m)}(t) \text{ existem e}$

são finitos,  $1 \leq i \leq n, \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)] = 0, 1 \leq j \leq m\}$ .

Provemos a condição  $C_3$  ( $A(Q_n) = Q_n^0$ ), ou equivalentemente, provemos que  $A_n^{-1}(Q_n^0) = A^{-1}(Q_n^0)$ . Se  $y \in A_n^{-1}(Q_n^0)$  então  $y \in E$  e  $y^{(m)} = g$  para alguma  $g \in Q_n^0$ , ou seja,  $y \in E$  e  $y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y^{(k)} = g + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y^{(k)}$ . Como  $g + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y^{(k)} \in Q_n^0$ , tem-se que  $y \in A^{-1}(Q_n^0)$ . De modo análogo, prova-se que se  $y \in A^{-1}(Q_n^0)$ , então  $y \in A_n^{-1}(Q_n^0)$ .

Definimos  $T_n: Q_n \longrightarrow Q_n^0$  como segue:  $T_n y = A_n y - f$ , onde  $A_n = A|_{Q_n}$ .

Portanto, fica definido, nas condições da proposição 2.1.1, o problema original  $\mathcal{P} = (Q_n, Q_n^0, T_n)$ .

### Processo Discreto.

Designemos por  $E_n^0$  o conjunto dos "splines" formado por polinômios de grau menor ou igual a  $d$  em cada sub-intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , seccionalmente contínuos em  $[a, b]$ , com a norma induzida por  $Q_n^0$ . Segundo a notação de Schumaker [1981],  $E_n^0 = S(P_{d+1}, M, D)$ , onde  $D = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$  e  $M = (d+1, d+1, \dots, d+1)$ . Temos que  $\dim E_m^0 = d+1 + (n-1)(d+1) = n(d+1)$  (vide Schumaker [1981], teorema 4.4).

Definiremos  $\Delta_n^0: Q_n^0 \longrightarrow E_n^0$ . Para isso, tomemos

uma divisão de  $[0,1]$  dada por

$$0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_d \leq 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_d < 1.$$

Fixado  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , considere a seguinte subdivisão de  $[t_{i-1}, t_i]$ :

$$(2.3.3) \quad t_{i-1,j} = t_{i-1} + \theta_j(t_i - t_{i-1}), \quad \text{onde } 0 \leq j \leq d.$$

Obtemos assim o conjunto

$$U_n = \{t_{i-1,j} : 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq d\}$$

com  $n(d+1)$  pontos. Definimos, então,  $\Delta_n^0$  como segue:  $\Delta_n^0 g$  é o "spline" de  $S(P_{d+1}, M, D)$  que interpola  $g$  nos pontos de  $U_n$ . É claro que  $\Delta_n^0$  está bem definido, pois em cada subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  a interpolação é efetuada em  $d+1$  pontos por um polinômio de grau menor ou igual a  $d$ .

Provemos a condição  $C_5$ . É evidente que  $\Delta_n^0$  é projetor linear sobre  $E_n^0$ . Mostremos que é contínuo e que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\|\Delta_n^0\| \leq c$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Antes, porém, observemos que se  $\ell_j^i$ ,  $0 \leq j \leq d$ , são os polinômios de Lagrange relativos aos pontos  $t_{i-1,0}, t_{i-1,1}, \dots, t_{i-1,d}$  e  $L_j$  são os polinômios de Lagrange relativos aos pontos  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d$  então, de (3.2.3), concluímos que

$$\ell_j^i(t) = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^d \frac{t - t_{i-1,r}}{t_{i-1,j} - t_{i-1,r}} = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^d \frac{\theta - \theta_r}{\theta_j - \theta_r} = L_j(\theta) \quad ,$$

onde  $\theta = (t - t_{i-1}) / (t_i - t_{i-1})$ .

Temos que

$$\begin{aligned} \|\Delta_n^0 g\|_{E_n^0} &= \|\Delta_n^0 g\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^0 g(t)| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left| \sum_{j=0}^d \varrho_j^i(t) g(t_{i-1, j}) \right|. \end{aligned}$$

$$\text{De } \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left| \sum_{j=0}^d \varrho_j^i(t) g(t_{i-1, j}) \right| = \max_{0 \leq \theta \leq 1} \left| \sum_{j=0}^d L_j(\theta) g(t_{i-1, j}) \right| \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq \theta \leq 1} \sum_{j=0}^d |L_j(\theta)| |g(t_{i-1, j})| \leq \left( \max_{0 \leq \theta \leq 1} \sum_{j=0}^d |L_j(\theta)| \right) \|g\|_\infty =$$

$$= c \|g\|_\infty, \text{ onde } c = \max_{0 \leq \theta \leq 1} \sum_{j=0}^d |L_j(\theta)|, \text{ segue-se}$$

$\|\Delta_n^0 g\|_\infty \leq c \|g\|_\infty$ . Logo,  $\Delta_n^0$  é contínuo e  $\|\Delta_n^0\| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Mostremos, agora, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n^0 B_n - B_n\|_{L(Q_n, Q_n^0)} = 0$ . Inicialmente, estimemos  $\max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^0 g(t) - g(t)|$  para

$g \in C^1([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^0 g(t) - g(t)| &= \\ &= \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left| \sum_{j=0}^d \varrho_j^i(t) g(t_{i-1, j}) - g(t) \right| = \end{aligned}$$

$$= \max_{[t_{i-1}, t_i]} \left| \sum_{j=0}^d L_j(\theta) g(t_{i-1} + \theta_j(t_i - t_{i-1})) - g(t_{i-1} + \theta(t_i - t_{i-1})) \right|.$$

Como  $\sum_{j=0}^d L_j(\theta) = 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , temos:

$$\begin{aligned} & \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^0 g(t) - g(t)| = \\ &= \max_{0 \leq \theta \leq 1} \left| \sum_{j=0}^d L_j(\theta) [g(t_{i-1} + \theta_j(t_i - t_{i-1})) - g(t_{i-1} + \theta(t_i - t_{i-1}))] \right|. \end{aligned}$$

Do Teorema do Valor Médio segue-se que

$$\begin{aligned} & \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^0 g(t) - g(t)| \leq \\ & \leq \max_{0 \leq \theta \leq 1} \sum_{j=0}^d |L_j(\theta)| |\theta_j - \theta| (t_i - t_{i-1}) \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |g'(t)|. \end{aligned}$$

Como  $|\theta_j - \theta| \leq 1$  e  $h_i \leq c_1/n$ ,  $0 \leq j \leq d$  e  $1 \leq i \leq n$ , tem-se

$$(2.3.4) \quad \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^0 g(t) - g(t)| \leq c c_1 n^{-1} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |g'(t)|$$

e obtivemos assim uma estimativa para  $\max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^0 g(t) - g(t)|$  quando  $g \in C^1([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R})$ .

Seja  $y \in Q_n$ . Façamos  $g = B_n y|_{[t_{i-1}, t_i]}$   
 $(B_n y|_{[t_{i-1}, t_i]}) \in C^1([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R})$ . Daí,

$$\begin{aligned}
& \max_{[t_{i-1}, t_i]} |\Delta_n^0 B_n y(t) - B_n y(t)| \leq c c_1 n^{-1} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |(B_n y)'(t)| = \\
& = c c_1 n^{-1} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left| \sum_{k=0}^{m-1} (a'_k(t) y^{(k)}(t) + a_k(t) y^{(k+1)}(t)) \right| \leq \\
& \leq c c_1 n^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} (\|a'_k\|_\infty + \|a_k\|_\infty) \|y\|_{Q_n}.
\end{aligned}$$

$$\text{De } \|\Delta_n^0 B_n y - B_n y\|_{Q_n^0} = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^0 B_n y(t) - B_n y(t)|$$

vem

$$\|\Delta_n^0 B_n y - B_n y\|_{Q_n^0} \leq c c_1 n^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} (\|a'_k\|_\infty + \|a_k\|_\infty) \|y\|_{Q_n},$$

donde se conclui que

$$\|\Delta_n^0 B_n - B_n\|_{L(Q_n, Q_n^0)} \leq c c_1 n^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} (\|a'_k\|_\infty + \|a_k\|_\infty). \text{ Logo,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n^0 B_n - B_n\|_{L(Q_n, Q_n^0)} = 0 \text{ e a condi\c{c}o\~{e}o } C_5 \text{ est\~{a} satisfeita.}$$

Para definirmos o subespa\c{c}o  $E_n$ , ponha-se  $A_{o,n} = A_o|_{Q_n}$ .

Como  $Q_n = A_o^{-1}(Q_n^0)$  e  $A_o^{-1}$  \c{e} cont\~{i}nua resulta que  $A_{o,n}$  \c{e} invert\~{i}vel com inversa cont\~{i}nua. Definamos

$$E_n = A_{o,n}^{-1}(E_n^0) = \{s \in Q_n : s^{(m)} \in E_n^0\}. \text{ Note-se que a condi\c{c}o\~{e}o } C_4$$

$(A_o(E_n) \subset E_n^0)$  fica satisfeita. Seja

$$X = \{s \in S(P_{m+d+1}, M, D) : \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} s^{(k)}(a) + \beta_{jk} s^{(k)}(b)] = 0, \\ j=1, 2, \dots, m\},$$

onde  $M = (d+1, d+1, \dots, d+1)$  e  $D = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ .

Pelas hipóteses admitidas,

$$y^{(m)} = 0 \quad \text{e}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)] = 0, \quad 1 \leq j \leq m,$$

implica em  $y=0$ . Então, necessariamente, as formas lineares  $V_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) definidas por

$$V_j y = \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)]$$

são linearmente independentes em  $P_m$  e, portanto linearmente independentes em  $S(P_{m+d+1}, M, D)$ , visto que  $P_m \subset S(P_{m+d+1}, M, D)$ . Logo,

$$\dim X = m+d+1 + (n-1)(d+1) - m = n(d+1)$$

Como  $A_{0,n}: E_n \longrightarrow E_n^0$  é isomorfismo de espaços vetoriais tem-se  $\dim E_n = \dim E_n^0 = n(d+1)$ . É claro que  $X \subset E_n$ . Como  $\dim X = \dim E_n$  e  $X \subset E_n$  então  $E_n = X$ , isto é,

$$E_n = \{s \in S(P_{m+d+1}, M, D) : \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} s^{(k)}(a) + \beta_{jk} s^{(k)}(b)] = 0, \\ j=1, 2, \dots, m\}.$$

Definiremos a aplicação linear  $\Delta_n: Q_n \longrightarrow E_n$  por  $\Delta_n = A_{o,n}^{-1} \Delta_n^o A_{o,n}$ .

Verifiquemos a condição  $C_6$  ( $\|\Delta_n z - z\|_{Q_n} = O(n^{-p})$ ), onde  $z$  é a solução do problema original  $\mathcal{P}$ . Temos

$$\begin{aligned} \|\Delta_n z - z\|_{Q_n} &= \|A_{o,n}^{-1} \Delta_n^o A_{o,n} z - A_{o,n}^{-1} A_{o,n} z\|_{Q_n} \leq \\ &\leq \|A_{o,n}^{-1}\| \|\Delta_n^o A_{o,n} z - A_{o,n} z\|_{Q_n^o} \cdot \\ &\leq \|A_{o,n}^{-1}\| \|\Delta_n^o z^{(m)} - z^{(m)}\|_{Q_n^o} \end{aligned}$$

Caso 1:  $q = 1$ .

Então  $z^{(m)} \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ . Substituindo  $g$  por  $z^{(m)}$  em (2.3.4), obtemos

$$\max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^o z^{(m)}(t) - z^{(m)}(t)| \leq cc_1 n^{-1} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |z^{(m+1)}(t)|,$$

donde concluimos que

$$\|\Delta_n^o z^{(m)}(t) - z^{(m)}(t)\|_{Q_n^o} \leq cc_1 n^{-1} \|z^{(m+1)}\|_{\infty}.$$

Portanto,  $\|\Delta_n z - z\|_{Q_n} = O(n^{-1})$ , ou seja, a condição  $C_6$  vale com  $p=1$ .

Caso 2:  $2 \leq q \leq d+1$ .

Neste caso,  $z^{(m)} \in C^q([a, b], \mathbb{R})$ ,  $2 \leq q \leq d+1$ . Fixado  $i$ ,

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , seja  $p_{ot}$  o polinômio de grau menor ou igual a  $d$ , aproximante ótimo de  $z^{(m)}$  no intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  relativamente à norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

Temos que

$$\begin{aligned}
 & \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^o z^{(m)}(t) - z^{(m)}(t)| = \\
 & = \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left| \sum_{j=0}^d \ell_j^i(t) z^{(m)}(t_{i-1, j}) - z^{(m)}(t) \right| \leq \\
 & \leq \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left\{ \left| \sum_{j=0}^d \ell_j^i(t) z^{(m)}(t_{i-1, j}) - p_{ot}(t) \right| + |p_{ot}(t) - z^{(m)}(t)| \right\} \leq \\
 & \leq \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left| \sum_{j=0}^d \ell_j^i(t) z^{(m)}(t_{i-1, j}) - p_{ot}(t) \right| + \\
 & \quad + \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |p_{ot}(t) - z^{(m)}(t)| = \\
 & = \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \left| \sum_{j=0}^d \ell_j^i(t) [z^{(m)}(t_{i-1, j}) - p_{ot}(t_{i-1, j})] \right| + \\
 & \quad + \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |p_{ot}(t) - z^{(m)}(t)| =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \max_{0 \leq \theta \leq 1} \left| \sum_{j=0}^d L_j(\theta) [z^{(m)}(t_{i-1,j}) - p_{ot}(t_{i-1,j})] \right| + \\
&\quad + \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |p_{ot}(t) - z^{(m)}(t)| \leq \\
&\leq \max_{0 \leq \theta \leq 1} \sum_{j=0}^d |L_j(\theta)| |z^{(m)}(t_{i-1,j}) - p_{ot}(t_{i-1,j})| + \\
&\quad + \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |p_{ot}(t) - z^{(m)}(t)| \leq \\
&\leq \left( \max_{0 \leq \theta \leq 1} \sum_{j=0}^d |L_j(\theta)| \right) \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |z^{(m)}(t) - p_{ot}(t)| + \\
&\quad + \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |p_{ot}(t) - z^{(m)}(t)| = \\
&= (c+1) \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |p_{ot}(t) - z^{(m)}(t)|.
\end{aligned}$$

Mas, em virtude do teorema de Jackson (vide Davis - Rabinowitz [1967], pág. 123),

$$\begin{aligned}
&\max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^o z^{(m)}(t) - z^{(m)}(t)| \leq \\
&\leq (c+1) \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |p_{ot}(t) - z^{(m)}(t)| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (c+1) \frac{6^q (q-1)^{q-1} q}{(q-1)! d^q} h_i^q \|z^{(m+q)}\|_\infty = \\ &= (c+1) K(q, d) h_i^q \|z^{(m+q)}\|_\infty, \end{aligned}$$

onde  $K(q, d) = \frac{6^q (q-1)^{q-1} q}{(q-1)! d^q}$ .

Logo,

$$\begin{aligned} &\|\Delta_n^0 z^{(m)} - z^{(m)}\|_{Q_n^0} = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |\Delta_n^0 z^{(m)}(t) - z^{(m)}(t)| \leq \\ &\leq (c+1) K(q, d) (c_1 n^{-1})^q \|z^{(m+q)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Portanto,  $\|\Delta_n z - z\|_{Q_n} = O(n^{-q})$ , isto é, a condição  $C_6$  está satisfeita com  $p=q$ .

Observação:  $(z_n)$  é solução do processo discreto  $(E_n, E_n^0, F_n)$  se, e somente se, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n \in S(P_{m+d+1}, M, D)$  é solução aproximada do problema (2.3.1), (2.3.2) pelo método de colocação relativamente aos pontos  $t_{i-1, j}$ ,  $0 \leq j \leq d$ ,  $1 \leq i \leq n$ . De fato, pois

$$E_n = \{s \in S(P_{m+d+1}, M, D) :$$

$$: \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} s^{(k)}(a) + \beta_{jk} s^{(k)}(b)] = 0, j=1, 2, \dots, m\}$$

$$e \quad F_n s = \Delta_n^0 T_n \nabla_n s = \Delta_n^0 T_n s = \Delta_n^0 (s^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k s^{(k)}).$$

### Resumo e Conclusão.

Resumindo o que foi feito, consideramos a equação diferencial linear

$$(2.3.1) \quad y^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b,$$

$$a_k, f \in C^q([a, b], \mathbb{R}) \quad (q \geq 1)$$

sujeita às condições de contorno

$$(2.3.2) \quad \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)] = 0,$$

$$\alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k \leq m-1$$

que supomos linearmente independentes em  $C^m([a, b], \mathbb{R})$ .

Admitimos que as aplicações  $A: E \longrightarrow E^0$  e  $A_0: E \longrightarrow E^0$ , definidas respectivamente por  $Ay = y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y^{(k)}$  e  $A_0 y = y^{(m)}$  são invertíveis.

Tomamos uma sequência de malhas  $(\pi_n)$  tal que  $\pi_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_2/n \leq t_i - t_{i-1} \leq c_1/n$  e uma divisão de  $[0, 1]$  dada por

$$0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_d \leq 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_d < 1.$$

Fixando  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , subdividimos o intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  por  $t_{i-1, j} = t_{i-1} + \theta_j(t_i - t_{i-1})$ ,  $0 \leq j \leq d$ .

Para  $1 \leq i \leq d+1$ , todas as hipóteses da proposição 2.2.1 foram verificadas com  $p=q$ . Concluimos, pois, que: para  $n$  suficientemente grande existe um único  $\zeta_n \in S(P_{m+d+1}, M, D)$  que é solução aproximada do problema (2.3.1), (2.3.2) pelo método de colocação relativamente aos pontos (de colocação)  $t_{i-1, j}$ , onde  $0 \leq j \leq d$  e  $1 \leq i \leq n$ , isto é,  $\zeta_n$  é um "spline" de classe  $C^{m-1}$  que em cada sub-intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $m+d$  tal que

$$\zeta_n^{(m)}(t_{i-1, j}) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t_{i-1, j}) \zeta_n^{(k)}(t_{i-1, j}) = f(t_{i-1, j}),$$

$$1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq d,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} \zeta^{(k)}(a) + \beta_{jk} \zeta^{(k)}(b)] = 0, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Além disso,  $\max_{0 \leq j \leq m} \|z^{(j)} - \zeta_n^{(j)}\|_\infty = O(n^{-p})$  onde  $z$  é a solução

do problema (2.3.1), (2.3.2).

Observação: Tomando-se  $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_d = 1$  e  $M = (d, d, \dots, d)$  em  $E_n^0 = S(P_{d+1}, M, D)$  obtemos idênticos resultados como no resumo que acabamos de fazer. Obtemos a mais que  $\zeta_n$  são de classe  $C^m$ .

## C A P Í T U L O 3

§3.1 - INTRODUÇÃO

O resultado central deste capítulo é o teorema 3.3. Este teorema corresponde ao teorema 4.1 de De Boor-Swartz [1973]. Contudo devemos ressaltar algumas diferenças entre os dois enunciados:

a) C. de Boor e B. Swartz admitem que os coeficientes  $a_k$ , da equação diferencial, têm classe de diferenciabilidade  $C^{n+d+1}$  com  $n \leq d+1$ . No teorema 3.3, admitimos como hipótese  $a_k \in C^q$ , onde  $q \geq \max\{d+1, m-1\}$ .

b) No enunciado de C. de Boor e B. Swartz é de responsabilidade de quem quer aplicar o teorema a verificação, em cada caso, da limitação

$$\|D^j G_k(s, \cdot)\| \leq \text{const}, \quad k=0,1,\dots,m-1, \quad j=0,1,\dots,n$$

sobre as derivadas da função de Green  $G$ . No enunciado do teorema 3.3 não aparece nenhuma referência às funções de Green.

c) Para simplificar algumas passagens impusemos a restrição que a seqüência de malhas  $(\pi_n)$  seja regular, isto é,  $c_2/n \leq h_i \leq c_1/n$ .

O resultado expresso pelo lema 3.2 foi utilizado por C. de Boor e B. Swartz na demonstração do teorema 4.1 acima referido, e também por nós na demonstração do teorema 3.3. Não tendo encontrado referência a ele, explicitamos seu enunciado e fizemos sua demonstração.

Com a hipótese de regularidade da seqüência de malhas  $(\pi_n)$  simplificamos o enunciado do lema 3.1 (que corresponde ao lema 4.1 em De Boor-Swartz [1973]).

Consideremos a equação diferencial linear

$$(3.1) \quad y^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t) \quad , \quad a \leq t \leq b \quad ,$$

$$a_k, f \in C^q([a, b], \mathbb{R}) \quad (q \geq 1)$$

sujeita às condições de contorno

$$(3.2) \quad \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)] = 0 \quad , \quad \alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbb{R} \quad ,$$

$$1 \leq j \leq m \quad ,$$

que vamos supor linearmente independentes em  $C^m([a, b], \mathbb{R})$ .

Enumeremos os principais elementos e hipóteses do parágrafo 2.3 que serão utilizados neste capítulo:

- 1)  $z$  é a solução única do problema (3.1), (3.2).
- 2)  $\zeta_n$  é a solução aproximada do problema (3.1), (3.2) pelo método de colocação relativamente aos pontos

$$t_{i-1, j} = t_{i-1} + \theta_j (t_i - t_{i-1}) \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad 0 \leq j \leq d$$

onde  $0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_d < 1$ . (Relembremos que  $\zeta_n$  é um "spline" de classe  $C^{m-1}$  que em cada sub-intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $m+d$ ).

- 3) Definimos  $A: E \longrightarrow E^0$  por

$$Ay = y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y^{(k)} \quad ,$$

onde

$$E = \{y \in W_{\infty}^m([a, b], \mathbb{R}) : \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)] = 0, \\ j = 1, 2, \dots, m\},$$

$$E^0 = L_{\infty}([a, b], \mathbb{R}),$$

$$\|f\|_{E^0} = \|f\|_{\infty} = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| \text{ e}$$

$$\|y\|_E = \max_{0 \leq j \leq m} \|y^{(j)}\|_{\infty}$$

(a aplicação  $A: E \longrightarrow E^0$  foi admitida invertível).

$$4) \pi_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$h_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ e}$$

$$c_2/n \leq h_i \leq c_1/n.$$

LEMA 3.1: Seja  $q \geq d+1$ . Então, existe  $K > 0$  tal que

$$\|z^{(j)} - \zeta_n^{(j)}\|_{\infty} \leq K$$

para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $j = 0, 1, \dots, m+q$ .

PROVA: Inicialmente, observemos que todas as constantes  $K_q$  que serão introduzidas dependem somente do problema (3.1), (3.2), das constantes  $c_1$  e  $c_2$  de regularidade da seqüência de malhas  $(\pi_n)$  e de  $d$ .

Dividiremos a prova em três casos.

Caso 1:  $0 \leq j \leq m$ .



Como  $a_k, f \in C^{d+1}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $0 \leq k \leq m-1$ , tem-se, em virtude do resultado obtido no parágrafo 2.3, que

$$\max_{0 \leq j \leq m} \|z^{(j)} - \zeta_n^{(j)}\| = O(n^{-(d+1)}),$$

isto é, existe  $M > 0^{(*)}$  tal que

$$\max_{0 \leq j \leq m} \|z^{(j)} - \zeta_n^{(j)}\|_{\infty} \leq M/n^{d+1}.$$

Pela definição de  $(\pi_n)$ , existem  $c_1, c_2 > 0$  tais que  $c_2/n \leq h_i \leq c_1/n$ . É, então, evidente que

$$\frac{1}{n^{d+1}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{d+1} \leq \left(\frac{h_i}{c_2}\right)^{d+1} \leq \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{d+1}.$$

Portanto,

$$\|z^{(j)} - \zeta_n^{(j)}\|_{\infty} \leq M \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{d+1}$$

para  $j = 0, 1, \dots, m$ .

Caso 2:  $m+1 \leq j \leq m+d$ .

Seja  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Seja  $Z_{\tau}$  o polinômio de Taylor (de grau  $m+d$ ) de  $Z$  no ponto  $t_{i-1}$ .

Pela desigualdade triangular,

$$(3.1.1) \quad |z^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)| \leq |z_{\tau}^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)| + |z^{(j)}(t) - z_{\tau}^{(j)}(t)|.$$

---

(\*) A constante  $M$  depende do problema (3.1), (3.2), das constantes  $c_1, c_2$  e de  $d$ .

Estimemos  $|z_{\tau}^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)|$  em  $[t_{i-1}, t_i]$ .

Temos, por sucessivas aplicações da desigualdade de Markov<sup>(\*)</sup>, que

$$|z_{\tau}^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)| \leq \left(\frac{2(d+1)^2}{h_i}\right)^{j-m} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |z_{\tau}^{(m)}(t) - \zeta_n^{(m)}(t)|$$

para  $j=m+1, m+2, \dots, m+d$ . Pela desigualdade triangular,

$$|z_{\tau}^{(m)}(t) - \zeta_n^{(m)}(t)| \leq |z^{(m)}(t) - \zeta_n^{(m)}(t)| + |z_{\tau}^{(m)}(t) - z^{(m)}(t)|.$$

Por um argumento análogo ao do caso 1, obtemos

$$|z_{\tau}^{(m)}(t) - \zeta_n^{(m)}(t)| \leq M \left(\frac{h_i}{c_2}\right)^{d+1}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Da fórmula de Taylor vem

$$|z_{\tau}^{(m)}(t) - z_{\tau}^{(m)}(t)| \leq \max_{a \leq \tau \leq b} |z_{\tau}^{(m+d+1)}(\tau)| \frac{(t-t_{i-1})^{d+1}}{(d+1)!} \leq K_1 h_i^{d+1},$$

onde

$$K_1 = \frac{1}{(d+1)!} \max_{a \leq \tau \leq b} |z_{\tau}^{(m+d+1)}(\tau)|.$$

Então,

$$\begin{aligned} |z_{\tau}^{(m)}(t) - \zeta_n^{(m)}(t)| &\leq |z^{(m)}(t) - \zeta_n^{(m)}(t)| + |z_{\tau}^{(m)}(t) - z^{(m)}(t)| \leq M \left(\frac{h_i}{c_1}\right)^{d+1} + K_1 h_i^{d+1} = \\ &= K_2 h_i^{d+1}, \end{aligned}$$

---

(\*)  $|z_{\tau}^{(m+1)}(t) - \zeta_n^{(m+1)}(t)| \leq \frac{2(d+1)^2}{h_i} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |z_{\tau}^{(m)}(t) - \zeta_n^{(m)}(t)|$

para  $j=m+1$ . Veja, por exemplo, Timan[1963], pp. 218-236.

onde

$$K_2 = M/c_1^{d+1} + K_1 .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |z_{\tau}^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)| &\leq \left(\frac{2(d+1)^2}{h_i}\right)^{j-m} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |z_{\tau}^{(m)}(t) - \zeta_n^{(m)}(t)| \leq \\ &\leq (2(d+1)^2)^{j-m} \left(\frac{1}{h_i}\right)^{j-m} K_2 h_i^{d+1} \leq K_2 (2(d+1)^2)^d h_i^{d+m-j+1} \leq \\ &\leq K_2 (2(d+1)^2)^d c_1^{d+m-j+1} \leq K_2 (2(d+1)^2)^d \max\{c_1^d, c_1\} = K_3 , \end{aligned}$$

donde resulta a seguinte estimativa para  $|z_{\tau}^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)|$  em  $[t_{i-1}, t_i]$  :

$$(3.1.2) \quad |z^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)| \leq K_3 .$$

Estimemos  $|z^{(j)}(t) - z_{\tau}^{(j)}(t)|$  em  $[t_{i-1}, t_i]$ . Em virtude da fórmula de Taylor,

$$\begin{aligned} |z^{(j)}(t) - z_{\tau}^{(j)}(t)| &= |z_{\tau}^{(m+d+1)}(\tau_j) \frac{(t-t_{i-1})^{m+d+1-j}}{(m+d+1-j)!}| \leq \\ &\leq \max_{a \leq \tau \leq b} |z_{\tau}^{(m+d+1)}(\tau)| \frac{h_i^{m+d+1-j}}{(m+d+1-j)!} \leq \\ &\leq \max_{a \leq \tau \leq b} |z_{\tau}^{(m+d+1)}(\tau)| \frac{c_1^{m+d+1-j}}{(m+d+1)!} . \end{aligned}$$

Então,

$$(3.1.3) \quad |z^{(j)}(t) - z_{\tau}^{(j)}(t)| \leq K_4, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

onde

$$K_4 = \max_{a \leq \tau \leq b} |z_{\tau}^{(m+d+1)}(\tau)| \frac{\max\{c_1^d, c_1\}}{(m+d+1)!}$$

De (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3) resulta que

$$|z^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)| \leq |z_{\tau}^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)| + |z^{(j)}(t) - z_{\tau}^{(j)}(t)| \leq K_3 + K_4 = K_5$$

para  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ . Como  $K_5$  independe de  $i$ , tem-se

$$\|z^{(j)} - \zeta_n^{(j)}\|_{\infty} = \sup_{a \leq t \leq b} |z^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)| \leq K_5$$

para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $j = m+1, m+2, \dots, m+d$ .

Caso 3:  $m+d+1 \leq j \leq m+q$

Como  $\zeta_n$  restrito a  $[t_{i-1}, t_i]$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $m+d$ , resulta que  $\zeta_n^{(j)}(t) = 0$  para todo  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ . Então,

$$|z^{(j)}(t) - \zeta_n^{(j)}(t)| = |z^{(j)}(t)| \leq \max_{m+d+1 \leq j \leq m+q} \|z^{(j)}\|_{\infty} = K_6, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i,$$

visto que  $z \in C^{m+q}([a, b], \mathbb{R})$ .

Portanto,

$$\|z^{(j)} - \zeta_n^{(j)}\|_{\infty} \leq K_6,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $j = m+d+1, m+d+2, \dots, m+q$ .

O lema está provado tomando-se  $K = \max\{M(c_1/c_2)^{d+1}, K_5, K_6\}$ .

LEMA 3.2: Seja  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(\theta) = r[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d, \theta]$ , onde  $r \in C^q([0,1], \mathbb{R})$ ,  $q \geq 1$ ,  $0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_d < 1$ . Então,  $g \in C^{q-1}([0,1], \mathbb{R})$  e  $D^q g$  é seccionalmente contínua em  $[0,1]$ .

Além disso,

$$(3.2.1) \quad D^\ell g(\theta) = \ell! r[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta, \theta, \dots, \theta}_{\ell+1}],$$

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad 0 \leq \ell \leq q-1.$$

Quando  $\ell = q$ , (3.2.1) é válida para todo  $\theta \in [0,1]$ , exceto para  $\theta = \theta_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, d$ .

PROVA: Pela definição de diferenças divididas (vide Schumaker [1981], cap. 2.7) segue-se que  $g$  restrita a cada sub-intervalo  $[0, \theta_0)$ ,  $(\theta_0, \theta_1)$ ,  $\dots$ ,  $(\theta_d, 1]$  tem classe de diferenciabilidade  $q$ .

Seja  $\theta \in [0,1]$ ,  $\theta \neq \theta_j$ ,  $0 \leq j \leq d$ . Provemos (3.2.1) por indução sobre  $\ell$ . Para  $\ell = 0$ , (3.2.1) é evidentemente verdadeira. Suponhamos a validade de (3.2.1) para  $\ell = j$ ,  $1 \leq j \leq q-1$ , e provemos para  $\ell = j+1$ . Da hipótese de indução segue-se que

$$\frac{D^{(j)} g(\theta+\epsilon) - D^{(j)} g(\theta)}{\epsilon} =$$

$$= \frac{j!}{\epsilon} (r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+1}] - r[\theta_0, \dots, \theta_d, \theta, \dots, \theta]).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 & \frac{D^{(j)}g(\theta+\epsilon) - D^{(j)}g(\theta)}{\epsilon} = \\
 & = \frac{j!}{\epsilon} \sum_{s=1}^{j+1} (r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+2-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta}_{s-1}] - \\
 & \quad r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+1-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta}_s]) = \\
 & = \frac{j!}{\epsilon} \sum_{s=1}^{j+1} (r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+1-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta, \theta+\epsilon}_{s-1}] - \\
 & \quad r[\theta, \theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+1-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta}_{s-1}]) .
 \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 & r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+1-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta, \theta+\epsilon}_{s-1}] - r[\theta, \theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+1-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta}_{s-1}] = \\
 & = \epsilon r[\theta, \theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+1-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta, \theta+\epsilon}_{s-1}] ,
 \end{aligned}$$

$1 \leq s \leq j+1$  (vide teorema A.5, no anexo) .

Então,

$$\begin{aligned}
 & \frac{D^j g(\theta+\epsilon) - D^j g(\theta)}{\epsilon} = \\
 & = j! \sum_{s=1}^{j+1} r[\theta, \theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+1-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta, \theta+\epsilon}_{s-1}] = \\
 & = j! \sum_{s=1}^{j+1} r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta+\epsilon, \dots, \theta+\epsilon}_{j+2-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta}_s] .
 \end{aligned}$$

Em virtude do teorema A.2,

$$D^{j+1}g(\theta) = j! \sum_{s=1}^{j+1} r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta, \dots, \theta}_{j+2-s}, \underbrace{\theta, \dots, \theta}_s] .$$

Logo,

$$\begin{aligned} D^{j+1}g(\theta) &= j! \sum_{s=1}^{j+1} r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta, \dots, \theta}_{j+2}] = \\ &= (j+1)! r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta, \dots, \theta}_{j+2}] , \end{aligned}$$

provando, portanto, (3.2.1).

Para mostrar que  $g \in C^{q-1}([0,1], \mathbb{R})$  basta verificar que

$$\begin{aligned} D^\ell g(\theta_j) &= \ell! r[\theta_0, \dots, \theta_d, \underbrace{\theta_j, \dots, \theta_j}_{\ell+1}] , \\ &0 \leq j \leq d , \quad 0 \leq \ell \leq q-1 . \end{aligned}$$

Mas isto prova-se, novamente, por indução sobre  $\ell$ .

No teorema seguinte usaremos a notação  $h(\Pi_n)$  para denotar  $\max_{1 \leq i \leq n} h_i$ .

**TEOREMA 3.3:** Sejam  $t_{i-1,j}$ ,  $0 \leq j \leq d$ , os zeros do polinômio de Legendre de grau  $d+1$  no intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , e suponhamos  $q \geq \max\{m-1, d+1\}$ . Então, existem  $K_1, K_2 > 0$  tais que:

$$(3.3.1) \quad \max_{1 \leq i \leq n} |z^{(k)}(t_i) - \zeta_n^{(k)}(t_i)| \leq K_1 h(\pi_n)^p$$

$$0 \leq k \leq m-1, \quad p = \min\{2(d+1), q\},$$

$$(3.3.2) \quad \|z^{(k)} - \zeta_n^{(k)}\|_\infty \leq K_2 h(\pi_n)^{\min\{p, m-k+d+1\}}$$

$$0 \leq k \leq m, \quad p = \min\{2(d+1), q\}.$$

PROVA: Seja  $G_0(s, t)$  a função de Green relativa ao problema  $Ay=0$ ,  $y \in E$ . Pelo parágrafo 2.3, tem-se que  $\zeta_n \in E$ . É, além disso, evidente que  $y = \zeta_n$  é a solução do problema a valores de contorno  $Ay = A\zeta_n$ . Portanto,

$$\zeta_n(s) = \int_a^b G_0(s, t) A\zeta_n(t) dt, \quad \forall s \in [a, b].$$

Por um argumento similar,

$$z(s) = \int_a^b G_0(s, t) Az(t) dt, \quad \forall s \in [a, b].$$

Logo,

$$z(s) - \zeta_n(s) = \int_a^b G_0(s, t) [Az(t) - A\zeta_n(t)] dt.$$

Derivando em relação a  $s$ , tem-se

$$z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s) = \int_a^b G_k(s, t) [Az(t) - A\zeta_n(t)] dt,$$



onde  $G_k(s, t) = \frac{\partial^k}{s^k} G_0(s, t)$  ,  $0 \leq k \leq m-1$  (\*). É claro que

$$z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} G_k(s, t) [Az(t) - A\zeta_n(t)] dt .$$

Fixemos  $k$ ,  $0 \leq k \leq m-1$  , e estimemos

$$E_i(s) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} G_k(s, t) [Az(t) - A\zeta_n(t)] dt ,$$

$$s \in [a, b] , \quad 1 \leq i \leq n .$$

Seja  $r_i$  a função definida por

$$(3.3.3) \quad r_i(t) = Az(t) - A\zeta_n(t) , \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] .$$

Temos que  $r_i \in C^q([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R})$  , pois  $\zeta_n|_{[t_{i-1}, t_i]}$  é um polinômio e  $z \in C^{m+q}([a, b], \mathbb{R})$ . Além disso, como  $\zeta_n$  é solução aproximada do problema (3.1), (3.2) pelo método de colocação relativamente aos pontos  $t_{i-1, j}$ , tem-se que  $r_i(t_{i-1, j}) = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq d$ . Consequentemente, pela fórmula de Newton para diferenças divididas,

$$(3.3.4) \quad r_i(t) = r_i[t_{i-1, 0}, t_{i-1, 1}, \dots, t_{i-1, d}] \prod_{j=0}^d (t - t_{i-1, j}) ,$$

$$\forall t \in [t_{i-1}, t_i] .$$

---

(\*) No caso  $k=m-1$ , como  $\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} G_0(s, t)$  não é definida para  $s=t$ , decomponemos o intervalo de integração em dois para o cálculo da derivada.

De (3.3.3) e (3.3.4) vem

$$E_i(s) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} G_k(s,t) r_i[t_{i-1,0}, t_{i-1,1}, \dots, t_{i-1,d}, t] \prod_{j=0}^d (t-t_{i-1,j}) dt =$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} v_s(t) \prod_{j=0}^d (t-t_{i-1,j}) dt$$

onde

$$v_s(t) = G_k(s,t) r_i[t_{i-1,0}, t_{i-1,1}, \dots, t_{i-1,d}, t]$$

para quase todo<sup>(\*)</sup>  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Investiguemos a classe de diferenciabilidade de  $v_s$ .

Como  $r_i \in C^q([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R})$  temos, de acordo com o lema 3.2, que:

1) a função  $g$  definida por

$$g(t) = r[t_{i-1,0}, t_{i-1,1}, \dots, t_{i-1,d}, t], \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i],$$

é tal que

$g \in C^{q-1}([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R})$  e tem derivada de ordem  $q$  seccionalmente contínua em  $[t_{i-1}, t_i]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

---

(\*) Quando  $k=m-1$ ,  $G_k(s,t)$  não é definida para  $s=t$ .  
Quando  $k < m-1$ , isto não ocorre.

Pela proposição A.7 (vide anexo, pág. 103) temos que:

2) (i) Se  $s \notin (t_{i-1}, t_i)$  então  $G_k(s, \cdot) \in C^q([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R})$  para  $i=1, 2, \dots, n$ .

(ii) Se  $s \in (t_{i-1}, t_i)$  então  $G_k(s, \cdot) \in C^{m-k-2}([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R})$  e tem derivada de ordem  $m-k-1$  seccionalmente contínua em  $[t_{i-1}, t_i]$  para  $i=1, 2, \dots, n$ .

Estimemos agora  $E_i(s)$ ,  $s \in [a, b]$ . Façamos

$$\bar{q} = \begin{cases} q & , & \text{se } s \notin (t_{i-1}, t_i) \\ m-k-1 & , & \text{se } s \in (t_{i-1}, t_i) . \end{cases}$$

É, então, evidente que  $v_s \in C^{\bar{q}-1}([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R})$  e tem derivada de ordem  $\bar{q}$ , seccionalmente contínua em  $[t_{i-1}, t_i]$ . Então, podemos usar o desenvolvimento de Taylor

$$v_s(t) = \sum_{j=0}^{\mu-1} v_s^{(j)}(t_{i-1}) \frac{(t-t_{i-1})^j}{j!} + \frac{1}{(\mu-1)!} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-y)_+^{\mu-1} v_s^{(\mu)}(y) dy$$

para  $\underline{\mu} \leq \bar{q}$  e  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ , de acordo com a proposição A.8 cujas hipóteses encontram-se satisfeitas.

Portanto,

$$(3.3.3) \quad E_i(s) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} v_s(t) \prod_{j=0}^{\mu-1} (t-t_{i-1}, j) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ \sum_{j=0}^{\mu-1} v_s^{(j)}(t_{i-1}) \frac{(t-t_{i-1}, j)^j}{j!} + \frac{1}{(\mu-1)!} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-y)_+^{\mu-1} v_s^{(\mu)}(y) dy \right] \cdot \prod_{j=0}^{\mu-1} (t-t_{i-1}, j) dt$$

Observação: como  $\prod_{j=0}^d (t-t_{i-1,j})$  é polinômio de Legendre de grau  $d+1$  em  $[t_{i-1}, t_i]$ , é, portanto, ortogonal aos polinômios de grau menor do que  $d+1$  relativamente ao produto escalar definido por

$$(f|g) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)g(t)dt, \quad f, g \in C([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R}).$$

Então, impondo-se  $\mu \leq d+1$  teremos em (3.3.3):

$$E_i(s) = \frac{1}{(\mu-1)!} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-y)_+^{\mu-1} v_s^{(\mu)}(y) dy \right] \cdot \prod_{j=0}^d (t-t_{i-1,j}) dt.$$

Demonstraremos em detalhe na pág. 71 que existe  $K_3 > 0$  tal que  $\|v_s^{(\mu)}\|_\infty \leq K_3$  para todo  $s \in [a, b]$ . Para isto, imporemos

$$\mu \leq q - d - 1$$

e utilizaremos o lema 3.1.

Então, de  $\|v_s^{(\mu)}\|_\infty \leq K_3$  segue-se que

$$\begin{aligned} |E_i(s)| &\leq \frac{K_3}{(\mu-1)!} h_i^{\mu-1+d+1+2} \leq \\ &\leq \frac{K_3}{(\mu-1)!} h(\Pi_n)^{\mu+d+1} h_i. \end{aligned}$$

Logo,

$$(3.3.4) \quad |E_i(s)| \leq K_4 h(\Pi_n)^{\mu+d+1} h_i,$$

onde

$$K_4 = K_3 / (\mu - 1)!$$

A modo de resumo, observemos que para estimar  $|E_i(s)|$  fizemos as seguintes restrições para  $\mu$  :

$$\mu \leq \bar{q} = \begin{cases} q & , & \text{se } s \notin (t_{i-1}, t_i) \\ m-k-1 & , & \text{se } s \in (t_{i-1}, t_i) \end{cases} ,$$

$$\mu \leq d+1 \quad \text{e}$$

$$\mu \leq q-d-1 \quad .$$

Se  $s \notin (t_{i-1}, t_i)$ , o máximo valor para  $\mu$  é

$$\mu = \min\{q, d+1, q-d-1\} = \min\{d+1, q-d-1\} ;$$

e de (3.3.4) vem

$$\begin{aligned} |E_i(s)| &\leq K_4 h(\pi_n)^{\mu+d+1} h_i = \\ &= K_4 h(\pi_n)^{\min\{2(d+1), q\}} h_i . \end{aligned}$$

Portanto,

$$(3.3.5) \quad |E_i(s)| \leq K_4 h(\pi_n)^p h_i \quad , \quad \begin{array}{l} s \notin (t_{i-1}, t_i) \\ p = \min\{2(d+1), q\} . \end{array}$$

Se  $s \in (t_{i-1}, t_i)$  o máximo valor para  $\mu$  é

$$\begin{aligned}
\mu &= \min\{m-k-1, d+1, q-d-1\} = \\
&= \min\{m-k-1, \min\{2(d+1), q\}-d-1\} = \\
&= \min\{m-k-1, p-d-1\} .
\end{aligned}$$

Em virtude de (3.3.4) temos que

$$(3.3.6) \quad |E_i(s)| \leq K_4 h(\Pi_n)^{\mu+d+1} h_i = K_4 h(\Pi_n)^{\min\{m-k-1+(d+1), p\}} h_i ,$$

$$s \in (t_{i-1}, t_i) .$$

Estamos agora em condições de verificar as duas desigualdades que aparecem no enunciado do teorema.

Provemos a primeira. Sejam  $s \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  e  $k=0, 1, \dots, m-1$ .

Temos que

$$|z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s)| \leq \sum_{i=1}^n |E_i(s)| .$$

De (3.3.5) resulta que

$$|z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s)| \leq \sum_{i=1}^n K_4 h(\Pi_n)^p h_i .$$

Portanto,

$$|z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s)| \leq K_1 h(\Pi_n)^p ,$$

onde

$$K_1 = K_4 (b-a) .$$

Provemos a segunda. Seja  $s \in (t_{j-1}, t_j)$  para  $j=1, 2, \dots, n$ . É óbvio que

$$|z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s)| \leq \sum_{i \neq j} |E_i(s)| + |E_j(s)| .$$

Então, de (3.3.5) e (3.3.6) vem

$$\begin{aligned} |z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s)| &\leq \sum_{i \neq j} K_4 h(\Pi_n)^{p-d} h_i + K_4 h(\Pi_n)^{\min\{m-k-1+(d+1), p\}} h_i \leq \\ &\leq K_4 (b-a) h(\Pi_n)^p + K_4 h(\Pi_n)^{\min\{m-k+(d+1), p+1\}} \end{aligned}$$

Se  $p+1 \leq m-k+d+1$ , então

$$|z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s)| \leq 2(b-a) K_4 h(\Pi_n)^{\min\{p, m-k+d+1\}} .$$

Se  $p+1 > m-k+d+1$ , então

$$\begin{aligned} |z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s)| &\leq K_4 \max\{2, (b-a)^{p-d+1}\} h(\Pi_n)^{\min\{p, m-k+d+1\}} = \\ &= K_5 h(\Pi_n)^{\min\{p, m-k+d+1\}} . \end{aligned}$$

Então, para  $s \in (t_{j-1}, t_j)$  e  $k=0, 1, \dots, m-1$ , temos que

$$|z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s)| \leq K_6 h(\Pi_n)^{\min\{p, m-k+d+1\}} ,$$

onde

$$K_6 = \max\{2(b-a)K_4, K_5\} .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|z^{(k)} - \zeta_n^{(k)}\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} \max_{|t_{j-1} - 1 \leq t_j|} |z^{(k)}(s) - \zeta_n^{(k)}(s)| \leq \\ &\leq K_6 h(\Pi_n)^{\min\{p, m-k+d+1\}}, \\ &k=0, 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

provando (3.3.2) exceto para  $k=m$ .

Quando  $k=m$  temos, pelo resultado obtido no parágrafo 2.3, que

$$\|z^{(m)} - \zeta_n^{(m)}\|_\infty \leq M h(\Pi_n)^{d+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|z^{(k)} - \zeta_n^{(k)}\|_\infty &\leq K_2 h(\Pi_n)^{\min\{p, m-k+d+1\}}, \\ &k=0, 1, \dots, m, \end{aligned}$$

onde

$$K_2 = \max\{K_6, M\},$$

provando, pois, (3.3.2).

#### DETALHE DA DEMONSTRAÇÃO

Deveremos mostrar que existe  $K_3 > 0$  tal que  $\|v_s^{(\mu)}\|_\infty \leq K_3$  para todo  $s \in [a, b]$ .

Recordemos que



$$v_s(t) = G_k(s,t) r_i [t_{i-1,0}, t_{i-1,1}, \dots, t_{i-1,d}, t] = G_k(s,t) g(t),$$

$$\forall t \in [t_{i-1}, t_i],$$

onde  $1 \leq k \leq m-1$  e  $1 \leq i \leq n$ .

Pela regra de Leibniz.,

$$(3.3.7) \quad v_s^{(\mu)}(t) = \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} (D^{\mu-j} G_k(s, \cdot))(t) (D^j g)(t)$$

para quase todo  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Utilizando-se a hipótese  $q \geq m-1$  e a desigualdade

$$\mu \leq \bar{q} = \begin{cases} q & , \quad \text{se } s \notin (t_{i-1}, t_i) \\ m-k-1 & , \quad \text{se } s \in (t_{i-1}, t_i) \end{cases}$$

resulta, pelo teorema A.6 (vide anexo, pág. 103), que

$$(3.3.8) \quad \|D^{\mu-j} G_k(s, \cdot)\|_{\infty} \leq K_7, \quad j=0, 1, \dots, \mu,$$

$$\forall s \in [a, b].$$

Pelo lema 3.3 ,

$$(D^j g)(t) = j! r_i [t_{i-1,0}, \dots, t_{i-1,d}, \underbrace{t, t, \dots, t}_{j+1}],$$

$$j=0, 1, \dots, \mu.$$

Utilizando-se a restrição  $q \geq d+1+\mu$ , é claro que

$$r_i \in C^q([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R}) \subset C^{d+1+\mu}([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R}) \subset$$

$$\subset C^{d+1+j}([t_{i-1}, t_i], \mathbb{R}),$$

$$j=0, 1, \dots, \mu.$$

Logo, de acordo com o teorema A.5, existe  $\theta_{jt} \in [t_{i-1}, t_i]$  tal que

$$(D^j g)(t) = \frac{j!}{(d+1+j)!} (D^{d+1+j} r_i)(\theta_{jt}),$$

$$j=0, 1, \dots, \mu.$$

Temos que

$$\begin{aligned} D^{d+1+j} r_i &= D^{d+1+j} A(z-\zeta_n) = \\ &= D^{d+1+j} [D^m(z-\zeta_n) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k D^k(z-\zeta_n)] = \\ &= D^{m+d+1+j}(z-\zeta_n) + \sum_{k=0}^{m-1} D^{d+1+j} [a_k D^k(z-\zeta_n)]. \end{aligned}$$

Pela regra de Leibniz,

$$D^{d+1+j} r_i = D^{m+d+1+j}(z-\zeta_n) + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{w=0}^{d+1+j} \binom{d+1+j}{w} (D^{d+1+j-w} a_k) \cdot (D^{k+w}(z-\zeta_n)),$$

$$j=0, 1, \dots, \mu.$$

Como  $a_k \in C^q([a, b], \mathbb{R})$  e  $q \geq d+1+\mu$ , segue-se que

$$|D^{d+1+j} r_i(t)| \leq K_8 \max_{0 \leq \ell \leq m+d+1+\mu} |D^\ell(z-\zeta_n)(t)|$$

onde

$$K_8 = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{w=0}^{d+1+\mu} (d+1+\mu)! \|D^{d+1+\mu-w} a_k\|_{\infty}.$$

Utilizando o lema 3.1, deduzimos que

$$|D^{d+1+j} r_i(t)| \leq K_8 K, \quad j=0,1,\dots,\mu.$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} |(D^j g)(t)| &= \left| \frac{j!}{(d+1+j)!} (D^{d+1+j} r_i)(\theta_j t) \right| \leq \\ &\leq \frac{j!}{(d+1+j)!} K_{\theta} K \\ & \quad j=0,1,\dots,\mu. \end{aligned}$$

Como  $K_8$  e  $K$  independem de  $i$ , segue-se que

$$(3.3.9) \quad \|D^j g\|_{\infty} \leq \frac{j!}{(d+1+j)!} K_8 K, \quad j=0,1,\dots,\mu.$$

De (3.3.7), (3.3.8) e (3.3.9) resulta que

$$\begin{aligned} |v_s^{(\mu)}(t)| &= \left| \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} (D^{\mu-j} G_k(s, \cdot))(t) (D^j g)(t) \right| \leq \\ &\leq K_7 K_8 K \sum_{j=0}^{\mu} \frac{j!}{(d+1+j)!} \end{aligned}$$

para quase todo  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  e  $i=1,2,\dots,n$ .

Portanto,

$$\|v_s^{(\mu)}\|_{\infty} \leq K_3$$

onde

$$K_3 = K_7 K_8 \sum_{j=0}^{\mu} \frac{j!}{(d+1+j)!} .$$

## C A P Í T U L O 4

§4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos o teorema 4.1 que é uma generalização da desigualdade do hipercírculo. A demonstração apresentada é uma adaptação da demonstração encontrada em Golumb-Weinberger [1959]. Aplicando este teorema para o estudo da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias com valores iniciais utilizando condições de colocação, reencontramos o método proposto e estudado em Schumaker [1982].

Sentimos a necessidade, durante a redação, das proposições A.9 e A.10 que enunciamos e provamos no anexo.

§4.2 - DESIGUALDADE DO HIPERCÍRCULO GENERALIZADA

Neste capítulo, denotaremos por  $H$  um espaço de Hilbert de dimensão não finita.

TEOREMA 4.2.1: Sejam

$L, L_1, \dots, L_N: H \longrightarrow \mathbb{R}^d$  aplicações lineares contínuas,

$$a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d, \quad a \neq 0,$$

$$V_a = \{f \in H: L_i f = a_i, \quad i=1, 2, \dots, N\},$$

$$V = V_0 \quad \text{e}$$

$$W = \{f \in V: Lf = 0\}.$$

- (i) Seja  $f \in V_a$  e  $f_0$  a projeção ortogonal de  $f$  sobre  $V^\perp$ . Então  $f_0 \in V_a$  e

$$\|Lf - Lf_0\| \leq \|L\|_V \left( \|f\|^2 - \|f_0\|^2 \right)^{1/2}.$$

- (ii) Seja  $W^\perp$  o subespaço de  $V$  ortogonal a  $W$ . Seja  $\dim W^\perp = m$  e  $g_1, g_2, \dots, g_m$  uma base ortonormal de  $W^\perp$ . Então,

$$\|L\|_V = \sup_{\|\lambda\|_2 \leq 1} \|K\lambda\|_{\mathbb{R}^d},$$

onde  $K$  é a matriz  $d \times m$  definida por  $K_{ij} = (Lg_j)^i$ .

PROVA:

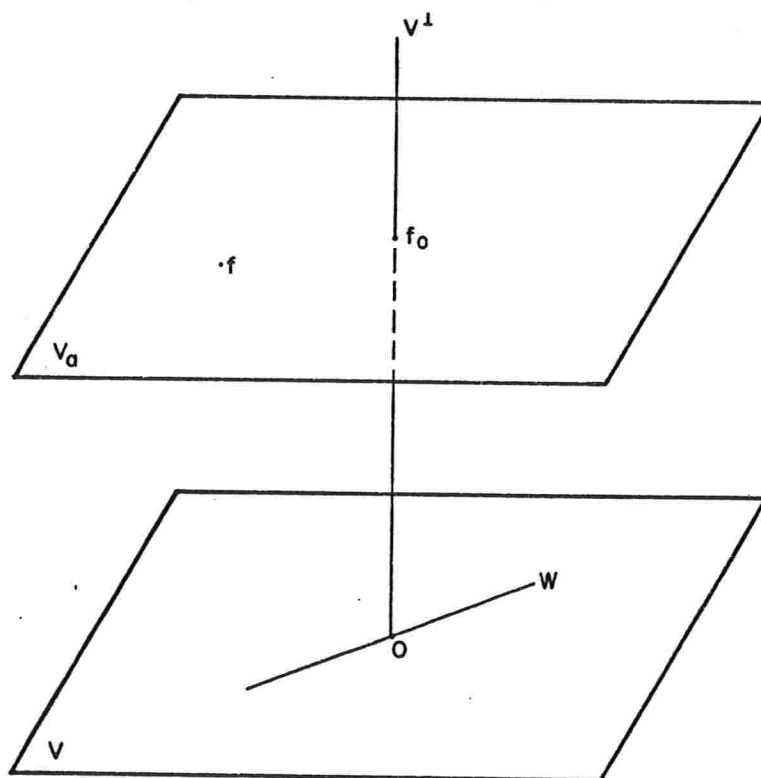
- (i) A projeção ortogonal de  $f$  sobre  $V^\perp$  é o único elemento  $f_0 \in V^\perp$  tal que  $f - f_0 \perp V^\perp$ . Então,  $f - f_0 \in V$  e, consequentemente,

$$L_i(f - f_0) = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq N,$$

ou seja,

$$L_i f = L_i f_0 = a_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq N$$

e, portanto,  $f_0 \in V_a$ .



É evidente que  $L$  restrita a  $V$  é contínua. Designemos por  $\|L\|_V$  a norma de  $L$  restrita a  $V$ . Então,

$$\|Lf - Lf_0\| = \|L(f - f_0)\| \leq \|L\|_V \|f - f_0\|.$$

Mas, em virtude do teorema de Pitágoras,

$$\|f - f_0\|^2 = \|f\|^2 - \|f_0\|^2,$$

de modo que

$$\|Lf - Lf_0\| \leq \|L\|_V (\|f\|^2 - \|f_0\|^2)^{1/2}.$$

(ii)  $m$  é o número de formas lineares, dentre as componentes de  $L$  restrita a  $V$ , que são linearmente independentes (vide proposição A.9 no anexo). Daí:  $0 \leq m \leq d$ .

Se  $m=0$ , então  $L=0$  e, por conseguinte,  $\|L\|_V = 0$ .

Seja  $1 \leq m \leq d$ . Dada  $g \in V$ , existem  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  e  $\bar{g} \in W$  tais que

$$g = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m + \bar{g}.$$

Então,

$$Lg = \sum_{i=1}^m \lambda_i Lg_i \quad \text{e} \quad \|g\|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 + \|\bar{g}\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|L\|_V &= \sup_{\|g\| \leq 1} \|Lg\|_{\mathbb{R}^d} = \\ &= \sup_{\substack{\|g\| \leq 1 \\ g \in W^\perp}} \|Lg\|_{\mathbb{R}^d} = \\ &= \sup_{\|\lambda\|_2 \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i Lg_i \right\|_{\mathbb{R}^d} = \end{aligned}$$



$$= \sup_{\|\lambda\|_2 \leq 1} \|K\lambda\|_{\mathbb{R}^d}.$$

OBSERVAÇÕES 4.2.2:

(i) Se  $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^d} = \| \cdot \|_2$ , então  $\|L\|_V = \|K\|_2$ .

(ii) Seja  $L_i^j$  a  $j$ -ésima componente de  $L_i$ , onde  $1 \leq i \leq N$  e  $1 \leq j \leq d$ . Se  $L_i^j$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq j \leq d$ , forem linearmente independentes, então  $V_a \neq \emptyset$  e  $\dim V^1 = Nd$ . (Vide, respectivamente, proposições A.10 e A.9, no anexo).

§4.3 - APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Neste parágrafo, usaremos as seguintes notações:

$$SC([a,b], \mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R}^d) : f \text{ é seccionalmente contínua}\},$$

$$SC^0([a,b], \mathbb{R}^d) = SC([a,b], \mathbb{R}^d),$$

$$SC^m([a,b], \mathbb{R}^d) = \{f \in C^{m-1}([a,b], \mathbb{R}) : f^{(m)} \text{ é seccionalmente contínua}\},$$

$$m \geq 1,$$

$$P_m = \{p(x) : p(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, x \in \mathbb{R}\},$$

e  $P_m^d = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_d) : p_i \in P_m, i=1, 2, \dots, d\}.$

As duas últimas notações estão como em Schumaker [1981].

OBSERVAÇÃO 4.3.1: Se  $f \in SC^m([a,b], \mathbb{R}^d)$ , então  $f^{(j)} \in SC^{m-j}([a,b], \mathbb{R}^d)$  para  $0 \leq j \leq m$ .

Seja  $E = SC^m([0,1], \mathbb{R}^d)$ , onde  $m \geq 2$ , e  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = 1$ .  
Sejam as aplicações lineares

$$L_0, L_1, \dots, L_N: E \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

definidas por

$$L_0 f = f(0),$$

$$L_i f = f'(t_i) - A(t_i)f(t_i),$$

onde  $1 \leq i \leq N$ , e  $A$  é uma matriz  $d \times d$  cujos elementos são funções contínuas em  $[0,1]$ .

Seja, também, a forma bilinear simétrica positiva em  $E \times E$ , definida por

$$(f|g)_E = \sum_{i=0}^N (L_i f | L_i g) + \int_0^1 (f^{(m)}(t) | g^{(m)}(t)) dt,$$

onde  $(|)$  é o produto escalar habitual do  $\mathbb{R}^d$ .

PROPOSIÇÃO 4.3.2: Existe  $\epsilon = \epsilon(A)$  tal que se  $\max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}| < \epsilon$ , então  $(f|f)_E = 0$  implica  $f=0$ .

PROVA: Provemos, inicialmente, que

$$(4.3.1) \quad (f|f)_E=0 \iff (f \in P_m^d \text{ e } L_i f=0) ,$$

onde  $0 \leq i \leq N$ .

É evidente que se,  $f \in P_m^d$  e  $L_i f=0$  para  $0 \leq i \leq N$ , então  $(f|f)_E=0$ . Por outro lado, se  $f \in E$  é tal que

$$(f|f)_E = \sum_{i=0}^N \|L_i f\|^2 + \int_0^1 \|(D^m f)(t)\|^2 dt = 0,$$

então

$$L_i f = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 \|f^{(m)}(t)\|^2 dt = 0,$$

onde  $0 \leq i \leq N$ . Temos que  $f^{(m)}$  é seccionalmente contínua em  $[0,1]$ , isto é, existem  $0=x_0 < x_1 < \dots < x_k=1$ , tais que

$$D^m f \Big|_{(x_{i-1}, x_i)} \in C((x_{i-1}, x_i), \mathbb{R}^d) \quad \text{e}$$

os limites laterais  $(D^m f)(x_i^-)$  e  $(D^m f)(x_i^+)$  existem e são finitos ( $1 \leq i \leq k$ ).

Temos, também,

$$0 = \int_0^1 \|f^{(m)}(t)\|^2 dt = \sum_{i=0}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|f^{(m)}(t)\|^2 dt.$$

Logo,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|f^{(m)}(t)\|^2 dt = 0$$

para  $1 \leq i \leq k$ . Então,  $f^{(m)}(x) = 0$  para todo  $x \in (x_{i-1}, x_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Consequentemente,

$$f|_{(x_{i-1}, x_i)} = p_i$$

onde  $p_i(x) = a_0^i + a_1^i x + \dots + a_{m-1}^i x^{m-1}$ ,  $a_j^i \in \mathbb{R}^d$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ .

Como  $f \in C^{m-1}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ , tem-se

$$f^{(\ell)}(x_{i-}) = f^{(\ell)}(x_{i+}) \quad (0 \leq \ell \leq m-1),$$

donde resulta

$$a_j^{i+1} = a_j^i \quad (0 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq k-1).$$

Portanto,  $f \in P_m^d$ , provando, pois, (4.3.1).

Provemos, agora, a proposição. Admitamos, por contradição, que para  $\varepsilon = 1/\nu$ , onde  $\nu \in \mathbb{N}$ , existem  $t_0^\nu, t_1^\nu, \dots, t_N^\nu$  tais que

$$0 = t_0^\nu < t_1^\nu < \dots < t_N^\nu = 1,$$

$$\max_{1 \leq i \leq N_\nu} |t_i^\nu - t_{i-1}^\nu| < 1/\nu,$$

e  $p^\nu \in SC^m([0, 1], \mathbb{R}^d)$  satisfazendo

$$(p^\nu|p^\nu)_E = 0 \quad \text{e} \quad p^\nu \neq 0.$$

De (4.3.1) resulta que  $p^\nu \in P_m^d$ .

Podemos supor a seqüência  $(p^\nu)$  normalizada por

$$\|p^\nu\| = \|p^\nu\|_{P_m^d} = \max_{0 \leq t \leq 1} \max_{1 \leq j \leq d} |p_j^\nu(t)| = 1.$$

A esfera unitária segundo a norma  $\|\cdot\|_{P_m^d}$  é compacta, pois  $P_m^d$  é de dimensão finita. Assim, existe uma subsequência de  $(p^\nu)$  que, também, denotaremos por  $(p^\nu)$  tal que

$$\|p^\nu - p\| \longrightarrow 0, \quad \text{com} \quad \|p\| = 1.$$

Além disso,

$$\|\dot{p}^\nu - \dot{p}\| \longrightarrow 0$$

pois a aplicação linear  $D: p \in P_m^d \longrightarrow \dot{p} \in P_{m-1}^d$  é contínua por ser  $P_m^d$  de dimensão finita.

Provemos que

$$\dot{p}(t) = A(t)p(t) \quad \text{para todo } t \in [0, 1],$$

$$\text{e} \quad p(0) = 0.$$

Como  $(p^\nu|p^\nu)_E = 0$  tem-se

$$L_i p^\nu = 0,$$

onde  $0 \leq i \leq N_\nu$ , ou seja,

$$\dot{p}^\nu(t_i^\nu) = A(t_i^\nu)p^\nu(t_i^\nu) \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq N_\nu$$

$$p^\nu(0) = 0.$$

Dado  $t \in [0, 1]$ , existe  $(t_{j_\nu}^\nu)$  tal que

$$t_{j_\nu}^\nu \longrightarrow t \quad \text{e} \quad \dot{p}^\nu(t_{j_\nu}^\nu) = A(t_{j_\nu}^\nu)p(t_{j_\nu}^\nu).$$

Temos que

$$p^\nu(t_{j_\nu}^\nu) \longrightarrow p(t).$$

Isto decorre da desigualdade

$$\begin{aligned} \|p(t) - p^\nu(t_{j_\nu}^\nu)\|_{\mathbb{R}^d} &\leq \|p(t) - p(t_{j_\nu}^\nu)\|_{\mathbb{R}^d} + \\ &\quad \|p^\nu(t_{j_\nu}^\nu) - p(t_{j_\nu}^\nu)\|_{\mathbb{R}^d}, \end{aligned}$$

de  $p$  ser contínua em  $t$  e de  $\|p^\nu - p\| \longrightarrow 0$ .

Por um argumento similar,

$$\dot{p}^\nu(t_{j_\nu}^\nu) \longrightarrow \dot{p}(t).$$

Logo,

$$\dot{p}(t) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \dot{p}^\nu(t_{j_\nu}^\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} A(t_{j_\nu}^\nu)p^\nu(t_{j_\nu}^\nu) = A(t)p(t)$$

$$\text{e} \quad p(0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} p^\nu(0) = 0$$

donde decorre que  $p=0$ , e temos a contradição desejada, pois  $\|p\| = 1$ . □

COROLÁRIO 4.3.3: Se  $\max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}| < \varepsilon$  para  $\varepsilon$  suficientemen-

te pequeno, então  $(\cdot | \cdot)_E$  é um produto escalar e  $E$  é um espaço pré-hilbertiano.

OBSERVAÇÃO 4.3.4: No que se segue, admitiremos que os pontos  $t_0, t_1, \dots, t_N$  satisfazem, também, a condição acima.

COMPLETADO DE  $E = SC^m([0,1], \mathbb{R}^d)$

Seja  $H = \hat{E}$  o completado de  $E$ , relativamente ao produto escalar  $(\cdot | \cdot)_E$ . O produto escalar em  $H$  será indicado doravante por  $(\cdot | \cdot)_H$ .

PROPOSIÇÃO 4.3.5:

- (i) As aplicações lineares  $L_i: E \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $i=0,1,\dots,N$ , são contínuas.
- (ii) As componentes  $L_i^j$ ,  $i=1,\dots,N$ ,  $j=1,2,\dots,d$ , são linearmente independentes.

PROVA:

- (i) A continuidade de  $L_i$ ,  $0 \leq i \leq N$ , segue de

$$\begin{aligned} \|L_i f\|_{\mathbb{R}^d}^2 &\leq \sum_{i=0}^N \|L_i f\|_{\mathbb{R}^d}^2 + \int_0^1 \|f^{(m)}(t)\|_{\mathbb{R}^d}^2 dt = \\ &= (f|f)_E = \|f\|_E^2. \end{aligned}$$

- (ii) Sejam  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq N$  e  $1 \leq j \leq d$ , tais que  $\sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^d \alpha_{ij} L_i^j = 0$ .

Devido à fórmula de interpolação de Hermite, existem polinômios  $p_{k\ell} \in P_{2N+1}^d$ ,  $0 \leq k \leq N$ ,  $1 \leq \ell \leq d$ , tais que

$$p_{k\ell}(0) = \delta_{k0} e_\ell ,$$

$$p_{k\ell}(t_i) = 0 \quad , \quad i=0,1,\dots,N ,$$

$$p'_{k\ell}(t_i) = \delta_{ki} e_\ell ,$$

onde  $\{e_1, \dots, e_d\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^d$ .

Então,

$$L_0 p_{k\ell} = p_{k\ell}(0) = \delta_{k0} e_\ell$$

e  $L_i p_{k\ell} = p'_{k\ell}(t_i) - A(t_i) p_{k\ell}(t_i) = p'_{k\ell}(t_i) = \delta_{ki} e_\ell$ , de modo que

$$0 = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^d \alpha_{ij} L_i^j p_{k\ell} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^d \alpha_{ij} \delta_{ki} \delta_{j\ell} = \delta_{k\ell} ,$$

provando, pois, que  $L_i^j$  ( $0 \leq i \leq N$  e  $1 \leq j \leq d$ ) são linearmente independentes.

OBSERVAÇÃO 4.3.6: As aplicações lineares contínuas  $L_i: E \rightarrow \mathbb{R}^d$  se estendem por continuidade a  $H$ .

Usando a notação do teorema 4.2.1, sejam

$$V_a = \{f \in H: L_i f = a_i, \quad 0 \leq i \leq N\} \quad \text{e} \quad V = V_0 .$$



OBSERVAÇÃO 4.3.7: Em virtude da proposição 4.3.5 (ii) e da observação 4.2.2 (ii) tem-se que

$$V_a \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \dim V^\perp = (N+1)d.$$

DETERMINAÇÃO DE  $V^\perp$ .

Vamos investigar como caracterizar os elementos  $s$  de  $V^\perp$ .

Para isso começaremos com os elementos de  $V^\perp$  que estão em  $E$ .

Tomemos  $s \in V^\perp \cap E$ . Então,  $(s|g)_E = 0$  para toda  $g \in V \cap E$ , isto é,

$$\int_0^1 (s^{(m)}(t) | g^{(m)}(t)) dt = 0, \quad \forall g \in V \cap E,$$

ou ainda,

$$(4.3.2) \quad \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s^{(m)}(t) | g^{(m)}(t)) dt = 0, \quad \forall g \in V \cap E.$$

Para mostrarmos que  $s|_{[t_{i-1}, t_i]} \in P_{2m}^d$ , fixemos  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , e escolhamos uma aplicação  $g \in V \cap E$  tal que  $\text{suporte}(g) = [t_{i-1}, t_i]$ ,  $g \in C^\infty((t_{i-1}, t_i), \mathbb{R}^d)$  e  $g^{(j)}(t_{i-1}) = g^{(j)}(t_i) = 0$  para  $0 \leq j \leq m-1$ . De (4.3.2) obtemos

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (s^{(m)}(t) | g^{(m)}(t)) dt = 0.$$

Logo, em virtude corolário A.12,

$$s^{(m)} \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \in P_m^d.$$

Portanto,

$$s \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \in P_{2m}^d.$$

Integrando o primeiro membro de (4.3.2) repetidas vezes por partes, resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \left[ (s^{(2m-1-j)}(t_{i-}) | g^{(j)}(t_i)) - \right. \right. \\ \left. \left. (s^{(2m-1-j)}(t_{i-1}+) | g^{(j)}(t_{i-1})) \right] + \right. \\ \left. (-1)^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s^{(2m)}(t) | g(t)) dt \right\} = 0. \end{aligned}$$

Como  $s \Big|_{[t_{i-1}, t_i]} \in P_{2m}^d$  ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \left[ (s^{(2m-1-j)}(t_{i-}) | g^{(j)}(t_i)) - \right. \\ \left. -(s^{(2m-1-j)}(t_{i-1}+) | g^{(j)}(t_{i-1})) \right] = 0, \quad \forall g \in V \cap E \end{aligned}$$

donde resulta que

$$(4.3.3) \quad \sum_{j=0}^{m-1} (s^{(2m-1-j)}(0) | g^{(j)}(0)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (\text{salto } (s^{(2m-1-j)})(t_i) | g^{(j)}(t_i)) -$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (s^{(2m-1-j)}(1) | g^{(j)}(1)) = 0, \quad \forall g \in V \cap E,$$

onde

$$\text{salto}(s^{(2m-1-j)})(t_i) = s^{(2m-1-j)}(t_{i+}) - s^{(2m-1-j)}(t_{i-}),$$

$i=1, 2, \dots, N-1.$

Utilizando (4.3.3), mostraremos que  $s^{(2m-1-k)}(0) = 0$  para  $1 \leq k \leq m-1$ . Para isso, fixemos  $\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq d$ , e escolhamos  $g_{k\ell} \in V \cap E$  tal que

$$g_{k\ell}^{(k)}(0) = e_{\ell},$$

$$g_{k\ell}^{(j)}(0) = 0, \quad j \neq k, \quad 1 \leq j \leq m-1,$$

$$\text{suporte}(g_{k\ell}) = [0, \varepsilon], \quad 0 < \varepsilon < t_1.$$

Fazendo  $\ell$  sucessivamente igual a  $1, 2, \dots, d$ , concluimos, pois, que  $s^{(2m-1-k)}(0) = 0$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ .

Por um argumento similar, podemos concluir que

$$\text{salto}(s^{(2m-1-k)})(t_i) = 0, \quad 2 \leq k \leq m-1, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

$$\underline{s^{(2m-1-k)}(1) = 0, \quad 2 \leq k \leq m-1}$$

Então, (4.3.3) se reduz a

$$\begin{aligned} & (s^{(2m-1)}(0) | g(0)) + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^1 (-1)^j (\text{salto}(s^{2m-1-j})(t_i) | g^{(j)}(t_i)) - \\ & - \sum_{j=0}^1 (-1)^j (s^{(2m-1-j)}(1) | g^{(j)}(1)) = 0, \end{aligned}$$

para toda  $g \in V \cap E$ .

Lembrando que  $g(0)=0$  e  $g'(t_i)=A(t_i)g(t_i)$ , para toda  $g \in V$ , ficamos com

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{N-1} (\text{salto}(s^{(2m-1)} - A^T s^{(2m-2)})(t_i) | g(t_i)) + \\ & + (\text{salto}(s^{(2m-1)} - A^T s^{(2m-2)})(1) | g(1)) = 0, \end{aligned}$$

para toda  $g \in V \cap E$ .

Então, podemos concluir que

$$\underline{\text{salto}(s^{(2m-1)} - A^T s^{(2m-2)})(t_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1} \quad e$$

$$\underline{\text{salto}(s^{(2m-1)} - A^T s^{(2m-2)})(1) = 0}.$$

Mostremos, finalmente, que  $\underline{s \in C^{2m-3}([0,1], \mathbb{R}^d)}$ .

De fato:  $s \in E \subset C^{m-1}([0,1], \mathbb{R}^d)$ ,

$$\text{salto}(s^{(2m-k-1)})(t_i) = 0, \quad 2 \leq k \leq m-1, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

e  $s$  restrito a  $[t_{i-1}, t_i]$  é um polinômio.

Resumindo, tomamos  $s \in V^1 \cap E$  e mostramos que  $s$  pertence ao espaço dos splines polinomiais de grau menor ou igual a  $2m-1$ , de classe  $C^{2m-3}([0,1], \mathbb{R}^d)$ , com nós  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < 1$  tais que:

$$s^{(m)}(0) = s^{(m+1)}(0) = \dots = s^{(2m-2)}(0) = 0$$

$$s^{(m)}(1) = s^{(m+1)}(1) = \dots = s^{(2m-3)}(1) = 0$$

$$\text{salto}(s^{(2m-1)} - A^T s^{(2m-2)})(t_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

$$s^{(2m-1)}(1) - A^T(1) s^{(2m-2)}(1) = 0.$$

Designemos tal espaço por  $\mathcal{S}$ . Então, acabamos de mostrar que  $V^1 \cap E \subset \mathcal{S}$ .

Por outro lado, se  $s \in \mathcal{S}$ , integrando repetidas vezes por partes, obtêm-se

$$(s|g)_E = \int_0^1 (s^{(m)}(t) | g^{(m)}(t)) dt = 0$$

para toda  $g \in V \cap E$ , isto é,  $s \in V^1 \cap E$ .

Logo,  $\mathcal{S} \subset V^\perp \cap E$ .

Então,  $\mathcal{S} \subset V^\perp$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{S} &\geq \dim S(P_{2m}^d, M, D) - (2m-3+N)d = \\ &= (2m+2(N-1))d - (2m-3+N)d = \\ &= (N+1)d = \\ &= \dim V^\perp. \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{S} = V^\perp$ .

Podemos resumir os resultados anteriores como se segue.

PROPOSIÇÃO 4.3.8:  $V^\perp = \mathcal{S}$ , onde

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \{ s \in S(P_{2m}^d, M, D) : \\ s^{(m)}(0) = s^{(m+1)}(0) = \dots = s^{(2m-2)}(0) = 0, \\ s^{(m)}(1) = s^{(m+1)}(1) = \dots = s^{(2m-3)}(1) = 0, \\ \text{salto}(s^{(2m-1)} - A^\top s^{(2m-2)})(t_i) = 0, 1 \leq i \leq N-1, \\ s^{(2m-1)}(1) - A^\top(1)s^{(2m-2)}(1) = 0 \}, \end{aligned}$$

$$D = (t_1, t_2, \dots, t_{N-1}) \quad \text{e} \quad M = (2, 2, \dots, 2)^{(*)}.$$

---

(\*) De acordo com Schumaker [1981], a notação  $S(P_{2m}^d, M, D)$ , onde  $D = (t_1, t_2, \dots, t_{N-1})$  e  $M = (2, 2, \dots, 2)$ , significa o espaço dos splines polinomiais de grau menor ou igual a  $2m-1$ , de classe  $C^{2m-3}([0,1], \mathbb{R}^d)$ , com nós  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < 1$ .

#### §4.4 - O MÉTODO DE COLOCAÇÃO DE SCHUMAKER

No parágrafo 4.2 foi demonstrado o teorema 4.2.1 do hipercírculo generalizado. O que foi feito no parágrafo 4.3 teve como objetivo determinar os elementos necessários para a aplicação do teorema 4.2.1 na obtenção de informações sobre a solução do problema

$$(4.4.1) \quad \begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + r(t) , & 0 \leq t \leq 1 , \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

onde  $A$  é uma matriz  $d \times d$  cujos elementos são funções contínuas e  $r \in C([0,1], \mathbb{R}^d)$ .

Nesse parágrafo, escolhemos um espaço de Hilbert  $H$  conveniente e de modo que a solução  $y$  do problema (4.4.1) a ele pertença. Foram escolhidas as seguintes aplicações lineares  $L_i: H \longrightarrow \mathbb{R}^d$  definidas por:

$$L_0 f = f(0) \quad , \quad i = 0 ,$$

$$L_i f = f'(t_i) - A(t_i)f(t_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N .$$

Com o produto escalar adotado em  $H$ , as aplicações  $L_i$  resultaram contínuas. Além disso, mostramos que as componentes  $L_i^j$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $j=1, 2, \dots, d$  são linearmente independentes.

Não conhecemos a solução exata  $y$  do problema (4.4.1), mas sabemos calcular o valor de  $L_i$  sobre a solução, pois  $L_i y = y'(t_i) - A(t_i)y(t_i) = r(t_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, N$  e  $L_0 y = y(0) = 0$ .

Como as hipóteses do teorema 4.2.1 foram satisfeitas, podemos, através do mesmo, obter informações, sobre a solução, expressas pela desigualdade

$$\|Lf - Lf_0\| \leq \|L\|_V (\|f\|^2 - \|f_0\|^2)^{1/2}.$$

Observemos, de acordo com o teorema 4.2.1, que  $f_0$  pode ser caracterizado de duas maneiras equivalentes:

$$1^a) \quad f_0 \in V_a \quad e \quad f_0 \in V^1 \quad e$$

$$2^a) \quad f_0 \in V_a \quad = \quad \|f_0\|_H = \inf_{f \in V_a} \|f\|_H.$$

No parágrafo 4.3 verificamos que  $V^1$  é o espaço dos "splines"  $\mathcal{S}$ . A primeira formulação diz que existe e é único o "spline"  $s \in \mathcal{S}$  que satisfaz as condições de colocação  $s \in V_a$ , isto é,

$$s'(t_i) = A(t_i)s(t_i) + r(t_i), \quad i=1,2,\dots,N,$$

$$s(0) = 0.$$

A segunda formulação diz que a solução do problema de colocação é ótima no sentido de minimizar a norma  $\|\cdot\|_H$  entre todos os elementos de  $H$  que satisfazem as condições de colocação.

#### OBSERVAÇÃO FINAL

O problema de colocação acima referido, cuja solução  $f_0$  como mostramos existe e é única, é o problema de colocação proposto e estudado em Schumaker [1982].



## ANEXO A

A.1 - MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO - CONSISTÊNCIA - ESTABILIDADE - CONVERGÊNCIA<sup>(\*)</sup>.

A.1.1. O esquema abstrato que exporemos neste resumo é extremamente geral.

Aplica-se em particular aos métodos de passo progressivo para solução numérica de EDO com condições iniciais, aos métodos de colocação para problemas de contorno, aos métodos de diferenças finitas para equações de derivadas parciais, ao método de elementos finitos, etc...

A.1.2. DEFINIÇÃO: Sejam  $E, E^0$  espaços normados e  $F: E \rightarrow E^0$ . Chamaremos problema original a tripla  $\mathcal{P} = (E, E^0, F)$ .

Diremos que  $z \in E$  é uma solução do problema original  $\mathcal{P}$  se  $Fz=0$ .

A.1.3. OBSERVAÇÃO: Admitiremos daqui por diante a existência e unicidade da solução de  $\mathcal{P}$ .

A.1.4. DEFINIÇÃO: Um processo discreto é uma seqüência  $\mathcal{D}$  de triplas  $\mathcal{D} = (E_n, E_n^0, F_n)$  onde  $E_n$  e  $E_n^0$ ,  $n=1, 2, \dots$  são espaços normados de dimensão finita, com  $\dim E_n = \dim E_n^0$ , e onde  $F_n$  é uma aplicação  $F_n: E_n \rightarrow E_n^0$ .

Dizemos que  $(\zeta_n)$  onde  $\zeta_n \in E_n$  é uma solução de  $\mathcal{D}$  se  $F_n \zeta_n = 0$ ,  $\forall n$ .

(\*) Transcrição do parágrafo 10 de Barros [1985].

A.1.5. DEFINIÇÃO: Seja  $\mathcal{A}$  uma classe de aplicação de  $E$  em  $E^0$ .

Seja  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{(E, E^0, F) : F \in \mathcal{A}\}$ .

Um método de discretização aplicável aos  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  é uma seqüência de quintuplas

$$\mathcal{M} = (E_n, E_n^0, \Delta_n, \Delta_n^0, \psi_n)$$

onde  $E_n, E_n^0$  são espaços normados de dimensão finita e de dimensões iguais,  $\Delta_n, \Delta_n^0$  são aplicações lineares  $\Delta_n: E \rightarrow E_n$ ,  $\Delta_n^0: E^0 \rightarrow E_n^0$ , e  $\psi_n$  é uma aplicação que leva  $F \in \mathcal{A}$  em uma aplicação  $F_n = \psi_n(F): E_n \rightarrow E_n^0$ .

A.1.6. OBSERVAÇÕES:

- (1) Um método de discretização  $\mathcal{M} = (E_n, E_n^0, \Delta_n, \Delta_n^0, \psi_n)$  aplicável a  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ , define uma aplicação de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  no conjunto dos processos discretos definida por:

$$\mathcal{M}: (E, E^0, F) \rightarrow (E_n, E_n^0, \psi_n(F))$$

ou  $\mathcal{M}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{P})$ .

- (2) Conforme a situação particular em estudo poderá haver interesse em impor restrições adicionais ao conceito de Método de Discretização.

A.1.7. DEFINIÇÃO: Um método de discretização  $\mathcal{M}$  aplicável ao problema original  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  é dito consistente com  $\mathcal{P}$  em  $y \in E$  se

$$\|\psi_n(F)\Delta_n y - \Delta_n^0 Fy\|_{E_n^0} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

É dito consistente com  $\mathcal{P}$  em  $y \in E$  de ordem  $p$  se:

$$\|\psi_n(F)\Delta_n y - \Delta_n^0 Fy\|_{E_n^0} = o(n^{-p}).$$

A.1.8. OBSERVAÇÕES:

- (1) Se  $y$  não for mencionado, ficará subentendido consistência na solução  $z \in E$ .

Como  $Fz=0$ , a consistência de ordem  $p$  significará

$$\|\psi_n(F)\Delta_n z\| = o(n^{-p}).$$

- (2) Consistência em  $y$  significa a comutatividade assintótica do diagrama para  $n \rightarrow \infty$ .

$$\begin{array}{ccc} y \in E & \xrightarrow{F} & E^0 \\ \Delta_n \downarrow & & \downarrow \Delta_n^0 \\ E_n & \xrightarrow{\psi_n(F)} & E_n^0 \end{array}$$

A.1.9. DEFINIÇÃO: O processo discreto  $\mathcal{D} = (E_n, E_n^0, F_n)$  será ditto estável se existe  $S > 0$  tal que

$$\|\bar{\eta} - \tilde{\eta}\|_{E_n} \leq S \|F_n \bar{\eta} - F_n \tilde{\eta}\|_{E_n^0}$$

para  $\forall \bar{\eta}, \tilde{\eta} \in E_n, \forall n$ .

A constante  $S$  é dita constante de estabilidade.

A.1.10. OBSERVAÇÕES:

- (1) A constante  $S$  independe de  $n$ ,  $\bar{n}$  e  $\tilde{n}$ .
- (2) A estabilidade implica que perturbações limitadas e pequenas no segundo membro de  $F_n \eta = \delta$  significam perturbações pequenas em  $\eta$ , limitadas independentemente de  $n$ .
- (3) Se existem  $F_n^{-1}$ , a definição A.1.9. diz que as  $F_n^{-1}$  são lipschitzianas uniformemente em relação a  $n$ .
- (4) Existem outras definições mais fracas de estabilidade de  $\mathcal{D}$ . A definição A.1.9. será suficiente para nossos propósitos.

A.1.11. DEFINIÇÃO: Seja  $\mathcal{M}$  um método de discretização aplicável a  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_A$  e  $z$  solução de  $\mathcal{P}$ .

Então  $(\ell_n)$  onde  $\ell_n = \psi_n(F) \Delta_n z$  é chamada erro local discretização.

Suponhamos que o processo discreto  $\mathcal{D} = \mathcal{M}(\mathcal{P})$  admita solução única  $(\zeta_n)$ .

Então

$$\varepsilon_n = \zeta_n - \Delta_n z$$

é chamado erro global de discretização.

A.1.12. DEFINIÇÃO: Seja  $\mathcal{M}$  método de discretização aplicável a  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_A$  e suponhamos que  $\mathcal{D} = \mathcal{M}(\mathcal{P})$  admita solu-

ção única  $(\zeta_n)$ .

Dizemos que  $\mathcal{M}$  é convergente se:

$$\|\varepsilon_n\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

e convergente de ordem p se

$$\|\varepsilon_n\| = O(n^{-p})$$

A.1.13. TEOREMA: Seja  $\mathcal{M}$  método de discretização aplicável a  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_A$  tal que  $\mathcal{D} = \mathcal{M}(\mathcal{P})$  admita solução única.

Se

$H_1$ :  $\mathcal{M}$  é consistente [de ordem p]

$H_2$ :  $\mathcal{D} = \mathcal{M}(\mathcal{P})$  é estável,

então  $\mathcal{M}$  é convergente [de ordem p].

Prova

Por  $H_2$  temos:

$$\|\varepsilon_n\| = \|\zeta_n - \Delta_n z\| \leq S \|F_n(\zeta_n) - F_n \Delta_n z\| = S \|F_n \Delta_n z\|.$$

Por  $H_1$   $\|F_n \Delta_n z\| \rightarrow 0$  [ $= O(n^{-p})$ ].

Portanto  $\|\varepsilon_n\| \rightarrow 0$  [ $= O(n^{-p})$ ].

A.1.14. OBSERVAÇÃO: Consistência de ordem p significa que existe constante M tal que  $\|F_n \Delta_n z\| \leq M n^{-p}$ .

Portanto temos uma delimitação do erro global:

$$\|\zeta_n - \Delta_n z\| \leq SM n^{-p}.$$

A.2 - PROPOSIÇÃO: Seja  $S$  um espaço vetorial de dimensão  $m+n$  e  $T_i: S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $R_j: S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , formas linearmente independentes entre si.

Então:

$$(a) \dim \text{Ker}(R_1, R_2, \dots, R_n) = m$$

$$(b) T_1, T_2, \dots, T_m \text{ restritas a } \text{Ker}(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

são linearmente independentes.

Prova: (a) Definamos a aplicação  $R: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  assim:

$$Rs = (R_1s, R_2s, \dots, R_ns)$$

para todo  $s \in S$ .

Como  $\dim S < \infty$ , tem-se

$$\dim \text{Ker}(R_1, R_2, \dots, R_n) = \dim S - \dim \text{Im}R.$$

Logo,

$$\dim \text{Ker}(R_1, R_2, \dots, R_n) = m+n - \dim \text{Im}R.$$

Mas  $\dim \text{Im}R = n$ , visto que  $R_1, R_2, \dots, R_n$  são linearmente independentes.

$$\text{Então, } \dim \text{Ker}(R_1, R_2, \dots, R_n) = m+n-n = m.$$

(b) Seja  $W = \text{Ker}(R_1, R_2, \dots, R_n)$ . Pela parte (a), deduzimos que  $\dim W^* = m$ . Então, para provar (b), basta verificar que  $(T_j|_W)_{j=1}^m$  gera  $W^*$ .

Dado  $T \in W^*$ , existe  $\hat{T} \in S^*$  tal que  $T = \hat{T}|_W$ . Além disso, existem  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$  tais que

$$\hat{T} = \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_n R_n + \beta_1 T_1 + \dots + \beta_m T_m.$$

Logo,

$$T = \beta_1 T_1|_W + \dots + \beta_m T_m|_W,$$

provando, pois, que  $(T_j|_W)_{j=1}^m$  gera  $W^*$ .

A.3 - PROPOSIÇÃO: Seja  $\mathcal{D} = (E_n, E_n^0, F_n)$  um processo discreto estável onde as  $F_n$  são contínuas. Então, existe e é única a solução  $(z_n)$  do processo discreto.

Prova: Vide Barros [1978], proposição 2.2.

A.4 - PROPOSIÇÃO: Sejam  $\mathcal{D} = (E_n, E_n^0, \hat{F}_n)$  e  $\bar{\mathcal{D}} = (E_n, E_n^0, \bar{F}_n)$ , onde  $\bar{F}_n = \hat{F}_n + G_n$ . Se

(i)  $\mathcal{D}$  é estável com constante  $\hat{S}$ ,

(ii)  $G_n$  são lipschitzianas com constante  $L$  tal que  $L\hat{S} < 1$ ,

então  $\bar{\mathcal{D}}$  é estável com constante  $S = \frac{\hat{S}}{1-L\hat{S}}$ .

Prova: Vide Barros [1978], proposição 2.9.

A.5 - TEOREMA: Sejam  $t_1, t_2, \dots, t_{d+1}$  pontos quaisquer, com  $t_1 \neq t_{d+1}$  e  $f$  uma função suficientemente diferenciável; en

tão

$$f[t_1, t_2, \dots, t_{d+1}] = \frac{f[t_2, t_3, \dots, t_{d+1}] - f[t_1, t_2, \dots, t_d]}{t_{d+1} - t_d} .$$

Se  $t_1 = t_2 = \dots = t_{d+1}$ , então

$$f[t_1, t_2, \dots, t_{d+1}] = \frac{D^d f(t_1)}{d!} .$$

Em geral, se  $f \in C^d([a, b], \mathbb{R})$ , onde  $a = \min_{1 \leq i \leq d+1} t_i$  e  $b = \max_{1 \leq i \leq d+1} t_i$ , então

$$f[t_1, t_2, \dots, t_{d+1}] = \frac{D^d f(\theta)}{d!} ,$$

para algum  $a \leq \theta \leq b$ .

Prova: Vide Schumaker [1981], teorema 2.5.1

**A.6 - TEOREMA:** Seja  $(t_{1,\varepsilon}, \dots, t_{d,\varepsilon})$  uma seqüência de pontos com  $t_{i,\varepsilon} \rightarrow t_i$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , onde  $1 \leq i \leq d$ . Então, para toda  $f$  suficientemente diferenciável,

$$f[t_{1,\varepsilon}, \dots, t_{d,\varepsilon}] \rightarrow f[t_1, \dots, t_d] .$$

**A.7 - TEOREMA:** Seja  $Ly = p_0 y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \dots + p_m y$ ,  $p_j \in C^q([a, b], \mathbb{R})$ ,  $j=0, 1, \dots, m$ ,  $p_0(s) \neq 0$ ,  $\forall s \in [a, b]$ .

Seja  $\psi_1, \dots, \psi_m$  base de soluções da equação homogênea  $Lu = 0$ . Então  $\psi_j \in C^{m+q}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ .

Consideremos as condições:



$$V_i y = \sum_{j=1}^{m-1} [\alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \beta_{ij} y^{(j)}(b)] = 0, \quad \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R},$$

$$i=1, 2, \dots, m,$$

onde as formas lineares  $V_i: C^m([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  são linearmente independentes.

$$\text{Seja } y = \sum_{j=1}^m c_j \psi_j \quad \text{solução do problema}$$

$$\Pi: \quad Ly = 0, \quad V_i y = 0, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Se  $\det(V_i \psi_j) \neq 0$  (unicidade de solução do problema  $Ly=f, Vy=0$ ), então existe e é única  $G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

Fixado  $t \in [a, b]$ ,

i)  $G(\cdot, t)$  é de classe  $C^m$  em  $[a, t]$ , de classe  $C^m$  em  $[t, b]$  e de classe  $C^{m-2}$  em  $[a, b]$ ,

$$\text{ii) } \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} G(t+0, t) - \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} G(t-0, t) = \frac{1}{p_0(t)},$$

$$\text{iii) } LG(\cdot, t) = 0 \quad \text{em } [a, t],$$

$$LG(\cdot, t) = 0 \quad \text{em } (t, b] \quad \text{e}$$

$$\text{iv) } VG(\cdot, t) = 0 \quad (\text{condições de contorno}).$$

Além disso, a função  $G$  que é chamada função de Green de  $(L, V)$  possui as propriedades:

v)  $\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial s^k \partial t^\ell} G$  é contínua no triângulo inferior  $(s \geq t)$  e no triângulo superior  $(s \leq t)$  para  $0 \leq k \leq m+q$ ,  $0 \leq \ell \leq q$ .

Se, também,  $0 \leq k+\ell \leq m-2$ , então  $\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial s^k \partial t^\ell} G$  é contínua em  $[a,b] \times [a,b]$ .

vi)  $y: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$y(s) = \int_a^b G(s,t) f(t) dt$$

é a solução de  $Ly=f$ ,  $Vy=0$ .

Prova: Vide, por exemplo, Coddington - Levinson [1955] pág.188.

A.8 - PROPOSIÇÃO (Desenvolvimento de Taylor): Seja  $f \in C^{m-1}([a,b], \mathbb{R})$  tal que  $f^{(m)}$  é seccionalmente contínua em  $[a,b]$ .

Então,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \int_a^b \frac{(x-y)_+^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(y) dy$$

para todo  $x \in [a,b]$ , onde

$$(x-y)_+^{m-1} = \begin{cases} (x-y)^{m-1} & \text{se } x \geq y \\ 0 & \text{se } x < y \end{cases}$$

A.9 - PROPOSIÇÃO: Seja  $E$  um espaço pré-hilbertiano de dimensão não finita. Sejam  $L: E \rightarrow \mathbb{R}^d$  forma linear contínua e  $W = \{f \in E : Lf = 0\}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

(a)  $m$  é o número de componentes de  $L$  que são linearmente independentes.

(b)  $\dim W^\perp = m$ .

Prova: (a)  $\Rightarrow$  (b). Observemos que se  $m=0$ , então  $W=E$  e  $W^\perp = \{0\}$ ; logo,  $\dim W^\perp = 0$ .

Sejam  $L_{j_i}$ , onde  $1 \leq i \leq m$ , as  $m$  componentes de  $L$  que são linearmente independentes. Inicialmente, mostraremos que  $\dim W^\perp \geq m$ . Como  $L_{j_i}$  é linear contínua, em virtude do teorema Riesz, existe  $f_{j_i} \in E$  tal que  $L_{j_i} = (\cdot, f_{j_i})$  para  $1 \leq i \leq m$ .

Temos que  $f_{j_i} \in W^\perp$  para  $1 \leq i \leq m$ , pois dado  $f \in W$ ,

$$(f | f_{j_i}) = L_{j_i} f = 0.$$

Além disso,  $f_{j_i}$ , onde  $1 \leq i \leq m$ , são linearmente independentes, pois, para quaisquer  $f \in E$  e  $\alpha_{j_i} \in \mathbb{R}$

$$(f | \sum_{i=1}^m \alpha_{j_i} f_{j_i}) = \sum_{i=1}^m \alpha_{j_i} (f | f_{j_i}) = \sum_{i=1}^m \alpha_{j_i} L_{j_i} f$$

e  $L_{j_i}$  são linearmente independentes. Portanto,  $\dim W^\perp \geq m$ .

Se mostrarmos que a aplicação  $T: W^\perp \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $Tf = (L_{j_1} f, L_{j_2} f, \dots, L_{j_m} f)$  é linear e injetora, teremos

que  $\dim W^\perp \leq m$ , provando, pois, (a)  $\Rightarrow$  (b). É evidente que  $T$  é linear. Para provar que  $T$  é injetora, tomemos  $f \in W^\perp$  tal que  $Tf = (L_{j_1} f, L_{j_2} f, \dots, L_{j_m} f) = 0$ . Então,  $Lf = 0$ , visto que  $L_{j_i}$  são linearmente independentes e  $L_{j_i} f = 0$ , onde  $1 \leq i \leq m$ . Logo,  $f \in W^\perp \cap W$ , donde se conclui que  $f = 0$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a). Seja  $k$  o número de componentes de  $L$  que são linearmente independentes. De (a)  $\Rightarrow$  (b), vem  $\dim W^\perp = k$ . Mas, por hipótese,  $\dim W^\perp = m$ . Logo,  $k = m$ , isto é,  $m$  é o número de componentes de  $L$  que são linearmente independentes.

A.10 - PROPOSIÇÃO: Sejam  $H$  um espaço de Hilbert de dimensão maior ou igual a  $n$  e  $L_i: H \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $1 \leq i \leq n$ , formas lineares contínuas. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a)  $V_a = \{f \in H: L_i f = a_i, 1 \leq i \leq n\} \neq \emptyset$  para todo  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ .

(b)  $\{L_i\}_{i=1}^n$  é linearmente independente.

Prova: (a)  $\Rightarrow$  (b). Admitamos, por contradição, que  $L_i$  são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade, podemos escrever

$$L_1 = \beta_2 L_2 + \beta_3 L_3 + \dots + \beta_n L_n.$$

Seja  $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$  tal que  $\bar{a}_1 \neq \beta_2 \bar{a}_2 + \beta_3 \bar{a}_3 + \dots + \beta_n \bar{a}_n$ . Então,  $V_{\bar{a}} = \emptyset$ , o que constitui uma contradição.

(b) (a). Pelo teorema de Riesz, existem  $v_i$  tais  $L_i = (\cdot | v_i)$  para  $1 \leq i \leq n$ . Então,  $v_i$  são linearmente independentes, visto que  $L_i$  são linearmente independentes, onde  $1 \leq i \leq n$ . Seja  $H_n$  o espaço gerado pelos  $v_i$ , onde  $1 \leq i \leq n$ . Novamente, pelo teorema de Riesz,  $L_i|_{H_n}$  são linearmente independentes. Seja  $T_i = L_i|_{H_n}$ . Dado  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , existe um único  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tal que

$$\sum_{j=1}^n x_j T_i v_j = a_i$$

para  $1 \leq i \leq n$ , porquanto  $\det[T_i v_j] \neq 0$ . Seja

$$f = \sum_{j=1}^n x_j v_j$$

Temos que  $f \in E_n \subset E$  e

$$L_i f = T_i f = T_i \left( \sum_{j=1}^n x_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j T_i v_j = a_i$$

para  $1 \leq i \leq n$ . Então,  $V_a \neq \emptyset$ , para todo  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ .

#### A.11 - LEMA GENERALIZADO DO CÁLCULO DAS VARIÁÇÕES

$$\text{Se } \int_a^b M(x) \zeta(x) dx = 0$$

e as condições

$$\int_a^b \zeta(x) \phi_i(x) dx = 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

estão satisfeitas (onde  $\phi_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , são funções dadas), então

$$M(x) = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(x) \quad \text{q.s.} \quad .$$

Prova: Vide Akhiezer [1962], pág. 198.

A.12 - COROLÁRIO: Se  $M \in \text{MSC}([a,b], \mathbb{R})$  e

$$\int_a^b M(x) \eta^{(n)}(x) dx = 0$$

para toda  $\eta \in \text{ESC}^n([a,b], \mathbb{R})$  tal que

$$\eta^{(j)}(a) = \eta^{(j)}(b) = 0 \quad j=0,1,\dots,n-1,$$

então, existem constantes  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  tais que

$$M(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}, \quad \forall x \in [a,b].$$

## ANEXO B

UMA ILUSTRAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste anexo apresentamos dois programas (preparados para o microcomputador I-7900) para a solução numérica da equação diferencial:

$$(B.1) \quad \begin{cases} A_2(t)y''(t) + A_1(t)y'(t) + A_0(t)y(t) = F(t) , & A \leq t \leq B \\ C_{11}y(A) + C_{12}y'(A) = D_1 \\ C_{21}y(B) + C_{22}y'(B) = D_2 \end{cases}$$

pelo método de colocação por "splines" polinomiais, segundo a abordagem feita no capítulo 2 (vide Resumo e Conclusão à pág. 50) e no capítulo 3.

A limitação da ordem da equação à 2.<sup>a</sup> ordem, feita acima, não é essencial.

Os programas estão escritos na linguagem Fortran-80, específica para microcomputadores.

No primeiro programa (denominado SP3) os pontos de colocação escolhidos foram os pontos da malha  $\pi_N$ , ou seja,  $t_i \in [A, B]$  tais que

$$A = t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{N+1} = B .$$

A solução aproximada do problema (B.1), determinada por SP3, é um "spline" de classe  $C^2$  que em cada subintervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  é um polinômio de grau 3.

No segundo programa (SP5) os pontos de colocação  $s_{jk}$  são tais que

$$s_{jk} = t_k^{u_j} (t_{k+1} - t_k) \quad , \quad \begin{array}{l} 1 \leq k \leq N \quad , \\ 1 \leq j \leq 4 \quad , \end{array}$$

onde  $0 \leq u_1 < u_2 < u_3 \leq u_4 \leq 1$  e  $A = t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = B$ . A solução aproximada do problema (B.1), determinada por SP5 é um "spline" de classe  $C^2$  que em cada subintervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  é um polinômio de grau 5.

Nos dois programas utilizamos a sub-rotina BSDX (e seus procedimentos auxiliares BSMCD, INTERV e LBISEC) de Salvetti [1983], que avalia as derivadas de um "spline" polinomial num ponto  $x$ ,  $x \in [A, B]$ , através de sua expansão numa base de B-splines. A sub-rotina TRIAG empregada para a resolução do sistema linear consiste no método de eliminação de Gauss com pivotamento.

Para o exemplo-teste<sup>(\*)</sup>:

$$(B.2) \quad \begin{cases} y''(t) - 4y(t) = 4 \cosh t \quad , & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(\*) Vide Russell-Shampine [1972], pág. 21, ou De Boor-Swartz [1973], pág. 602.



cuja solução exata é  $y(t) = \cosh(2t-1) - \cosh(1)$ , apresentamos, a seguir, as codificações de SP3 e SP5 (com suas sub-rotinas) e as respectivas tabelas de resultados.

Adotamos para as tabelas as seguintes notações:

$$a) \quad e_N^j = \max_{t \in \pi_N} |D^j(z - \zeta_N)(t)| \quad (\text{seguimos a De Boor - Swartz [1973]}) ,$$

$$b) \quad ME-N = M \times 10^{-N} , \text{ assim, por exemplo, abreviaremos por } 8.84E-3 \text{ a expressão } 8,84 \times 10^{-3} \text{ e}$$

c) DIM = dimensão do espaço no qual a aproximação  $\zeta_N$  para  $z$  foi determinada.

Para SP3 e SP5 tomamos

$$t_i = i/N \quad i=1,2,\dots,N .$$

Para SP5 fizemos duas escolhas para  $u_j$  :

$$(i) \quad u_1=0, \quad u_2=1/3, \quad u_3=2/3, \quad u_4=1,$$

$$(ii) \quad u_1 = 0,06943184\dots$$

$$u_2 = 0,33000947\dots$$

$$u_3 = 0,66990522\dots$$

$$u_4 = 0,93056815\dots$$

(zeros no intervalo  $[0,1]$  do polinômio de Legendre de grau 4) .

```

C      ***** SP3 - SPLINES POLIN.CUBICOS DE CLASSE C2 *****
C      *****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****
REAL*8 A,B,C11,C12,C21,C22,D1,D2,S,P,Q1,TI,M,SP,CONST
INTEGER L,K,N1,N2,N3,N4,I,J,N,NK
REAL*8 T(16),A0(16),A1(16),A2(16),Y(22),V(18),C(18),EMAX(3),
1      B0(18,16),B1(18,16),B2(18,16),M(18,19),E(3,16),DX(5)
2      ,CD(4,18)
C
DATA T,A0,A1,A2,Y,V,C,EMAX/125*0.000000000/,
1      B0,B1,B2,M,E,DX,CD/1331*0.000000000/,
2      S,P,Q1,TI,M/5*0.000000000/,
3      I,J,K,L,N1,N2,N3,N4,NK/9*0/
C      ***** LEITURA DE DADOS *****
C      *****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****
CALL OPEN(3,'DADOS SPL',0)
READ(3,400)N,A,B,C11,C12,D1,C21,C22,D2
400  FORMAT(I3,2F6.2,2(/,3F6.2))
WRITE(2,401)N,A,B,C11,C12,D1,C21,C22,D2
401  FORMAT(1X,'N =',I3,2X,'A =',F6.2,2X,'B =',F6.2,/,
1      1X,'C11 =',F6.2,2X,'C12 =',F6.2,2X,'D1 =',F6.2,/,
2      1X,'C21 =',F6.2,2X,'C22 =',F6.2,2X,'D2 =',F6.2)
C
N1=N+1
N2=N+2
N3=N+3
N4=N+4
C      ***** CONST=4*COSH(1)=6.172322539 *****
C      *****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****
CONST=DBLE(6.172322539)
C
DO 10 I=1,N1
READ(3,500)T(I)
500  FORMAT(F11.4)
TI=T(I)
C      ***** M = MATRIZ COLOCACAO E CONDIC.DE CONTORNO *****
C      *****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****
M(I+1,N+4)=CONST
A0(I)=DBLE(-4.0)
A1(I)=DBLE(0.0)
A2(I)=DBLE(1.0)
10 CONTINUE
C
ENDFILE 3
C
M(1,N+4)=D1
M(N+3,N+4)=D2
C      ***** PARTICAO EXTENDIDA *****
C      *****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****
Y(1)=-0.6
Y(2)=-0.4
Y(3)=-0.2
Y(4)=0.0
Y(N+4)=1.0
Y(N+5)=1.2
Y(N+6)=1.4

```

```

Y(N+7)=1.6
DO 30 L=2,N
  Y(L+3)=T(L)
30 CONTINUE
DO 60 K=1,N3
  DO 50 L=1,N3
    IF(.NOT.(L.NE.K)) GO TO 40
    V(L)=0
    GO TO 50
40    V(L)=1
50 CONTINUE
CALL BSMCD(4,N+3,Y,V,CD)
DO 60 I=1,N1
  TI=T(I)
  CALL BSDX(4,N+3,Y,V,TI,DX,CD)
  B0(K,I)=DX(1)
  B1(K,I)=DX(2)
  B2(K,I)=DX(3)
60 CONTINUE
DO 70 K=1,3
  M(1,K)=C11*B0(K,1)+C12*B1(K,1)
  NK=N+K
  M(N+3,NK)=C21*B0(NK,N+1)+C22*B1(NK,N+1)
70 CONTINUE
DO 80 K=4,N3
  M(1,K)=0
  M(N+3,K-3)=0
80 CONTINUE
DO 130 I=1,N1
  K=1
90  IF(.NOT.((K-I).LE.(-1))) GO TO 100
    M(I+1,K)=0
    K=K+1
    GO TO 90
100 IF(.NOT.((K-I).GT.2)) GO TO 110
    M(I+1,K)=0
    GO TO 120
110 M(I+1,K)=A2(I)*B2(K,I)+A1(I)*B1(K,I)+A0(I)*B0(K,I)
120 K=K+1
    IF(.NOT.(K.GT.N3)) GO TO 100
130 CONTINUE
C ***** RESOLUCAO DO SISTEMA LINEAR *****
C *****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****
CALL TRIAG(N+3,M,C)
CALL BSMCD(4,N+3,Y,C,CD)
DO 150 I=1,N1
  TI=T(I)
  CALL BSDX(4,N+3,Y,C,TI,DX,CD)
C ***** SOLUCAO EXATA E SUAS DERIVADAS *****
C *****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****:*****
  SP=DEXP(DBLE(1.0)-(2.0)*TI)+DEXP((2.0)*TI-DBLE(1.0))
  S=- (DEXP(DBLE(1.0))+DEXP(DBLE(-1.0)))
  S=(S+SP)/2.
  P=DEXP((2.0)*TI-(1.0))-DEXP((1.0)-(2.0)*TI)
  Q1=(DEXP((2.0)*TI)-(1.0))+DEXP((1.0)-((2.0)*TI))*(2.0)

```

```

C ***** CALCULO DO ERRO NOS PONTOS T(I) *****
C *****
E(1,I)=DABS(S-DX(1))
E(2,I)=DABS(P-DX(2))
E(3,I)=DABS(Q1-DX(3))
150 CONTINUE
C ***** CALCULO DO ERRO MAXIMO *****
C *****
DO 160 K=1,3
  EMAX(K)=E(K,1)
  DO 160 I=2,N1
    IF(.NOT.(EMAX(K).LT.E(K,I))) GO TO 160
  EMAX(K)=E(K,I)
160 CONTINUE
WRITE(2,6000)((E(K,I),K=1,3),I=1,6)
6000 FORMAT(3(1X,E15.3))
WRITE(2,190)(EMAX(K),K=1,3)
190 FORMAT(1X,E15.3)
200 FORMAT(F6.2)
STOP
END

```

```

C      ***** SP5 - SPLINES POLIN. QUINTICOS DE CLASSE C2 *****
C      *****
REAL*8 A,B,C11,C12,D1,C21,C22,D2,SI,PS,P,Q,R,TI
C
C
C      INTEGER N,IJ,JI,H,CFBLO,HJK,DESH,DIM,DIM1,DIM2,DIM6,DIMI,
1      DESU,LFBLO
C
C
C      REAL*8 Y(28),S(22),A0(21),A1(21),A2(21),V(22),B0(22,22),
1      B1(22,22),B2(22,22),M(22,23),C(22),ESI(3,21),ESIMAX(3),U(4),
2      T(6),DX(5),CD(6,22),ETI(3,6),ETIMAX(3)
C
C
C      DATA Y,S,A0,A1,A2,V/135*0.000000000/,
1      B0,B1,B2,M,ESI/2021*0.000000000/,
2      C,ESIMAX/25*0.000000000/,
3      U,T/10*0.000000000/,
4      DX,CD/137*0.000000000/,
5      ETI,ETIMAX/21*0.000000000000/,
6      PS,SI,P,Q,R,TI/6*0.000000000000000000/
C      ***** LEITURA DE DADOS *****
C      *****
CALL OPEN(3,'DADOS HER',0)
READ(3,400) N,A,B,C11,C12,D1,C21,C22,D2
400  FORMAT(I3,2F6.2,2(/,3F6.2))
WRITE(2,401) N,A,B,C11,C12,D1,C21,C22,D2
401  FORMAT(1X,'N=',I3,2X,'A=',F6.2,2X,'B=',F6.2,/,
1      1X,'C11=',F6.2,2X,'C12=',F6.2,2X,'D1=',F6.2,/,
2      1X,'C21=',F6.2,2X,'C22=',F6.2,2X,'D2=',F6.2)
C
C      N1=N+1
C
C      DO 10 J=1,4
READ(3,450)U(J)
450  FORMAT(F15.8)
WRITE(2,460)J,U(J)
460  FORMAT(1X,'U (',I3,') =',F15.8)
10  CONTINUE
C
C      DO 15 I=1,N1
READ(3,470)T(I)
470  FORMAT(F15.8)
WRITE(2,480)I,T(I)
480  FORMAT(1X,'T (',I3,') =',F15.8)
15  CONTINUE
C
C      ENDFILE 3
C      ***** PARTICAO EXTENDIDA *****
C      *****
IF((U(1).EQ.DBLE(0.0)).AND.(U(4).EQ.DBLE(1.0))) GOTO 40
DIM=4*N+2
H=4
Y(1)=DBLE(-1.0)
Y(2)=DBLE(-1.0)

```

```

                Y(DIM+5)=DBLE(2.0)
                Y(DIM+6)=DBLE(2.0)
                DO 30 I=1,N1
                  DO 20 J=1,4
                    IJ=4*I-2+J
                    Y(IJ)=T(I)
20              CONTINUE
30              CONTINUE
                GOTO 70
40              DIM=3*N+3
                H=3
                Y(1)=DBLE(-1.0)
                Y(2)=DBLE(-1.0)
                Y(3)=DBLE(-1.0)
                Y(DIM+4)=DBLE(2.0)
                Y(DIM+5)=DBLE(2.0)
                Y(DIM+6)=DBLE(2.0)
                DO 60 I=1,N1
                  DO 50 J=1,3
                    JI=3*I+J
                    Y(JI)=T(I)
50              CONTINUE
60              CONTINUE
C
70              DIM1=DIM-1
                DIM2=DIM-2
                DIM6=DIM+6
                WRITE(2,490) DIM,H
490              FORMAT(1X,'DIM =',I2,3X,'H=',I1)
C              ***** S(HJK) = PONTOS DE COLOCACAO *****
C              *****
S(1)=A
S(DIM)=B
DO 90 K=1,N
  DO 80 J=1,H
    HJK=H*(K-1)+J+1
    S(HJK)=T(K)+U(J)*(T(K+1)-T(K))
    M(HJK,DIM+1)=6.172322539
    A0(HJK)=-4.0
    A1(HJK)=0.0
    A2(HJK)=1.0
80      CONTINUE
90      CONTINUE
M(1,DIM+1)=D1
M(DIM,DIM+1)=D2
C
IF(H.NE.3) GOTO 100
S(DIM-1)=B
M(DIM-1,DIM+1)=6.172322539
A0(1)=-4.0
A1(1)=0.0
A2(1)=1.0
A0(DIM-1)=-4.0
A1(DIM-1)=0.0
A2(DIM-1)=1.0

```

```

C
C
100 DO 160 K=1,DIM
      DO 120 L=1,DIM
        IF(.NOT.(L.NE.K)) GOTO 110
          V(L)=0
          GOTO 120
110      V(L)=1
120      CONTINUE
          CALL BSMCD(6,DIM,Y,V,CD)
      DO 140 I=1,DIM
        SI=S(I)
        CALL BSDX(6,DIM,Y,V,SI,DX,CD)
          B0(K,I)=DX(1)
          B1(K,I)=DX(2)
          B2(K,I)=DX(3)
140      CONTINUE
160 CONTINUE
C *****
C ***** CONSTRUCAO DA MATRIZ M DE COLOCACAO *****
C *****
DO 190 K=1,N
  DESV=H*(K-1)+2
  LFBLO=DESV+H-1
  DO 180 J=DESV,LFBLO
    DESH=1+(K-1)*H
    CFBLO=6+(K-1)*H
    DO 170 I=DESH,CFBLO
      M(J,I)=A2(J)*B2(I,J)+A1(J)*B1(I,J)+A0(J)*B0(I,J)
170      CONTINUE
180      CONTINUE
190 CONTINUE
C
C
  IF(H.NE.3) GOTO 210
    DO 200 I=DIM2,DIM
      M(DIM-1,I)=A2(DIM-1)*B2(I,DIM-1)+
1      A1(DIM-1)*B1(I,DIM-1)+A0(DIM-1)*B0(I,DIM-1)
200      CONTINUE
C *****
C ***** CONDICAOES DE CONTORNO *****
C *****
210 DO 220 I=1,3
      M(1,I)=C11*B0(I,1)+C12*B1(I,1)
      DIMI=DIM+I-3
      M(DIM,DIMI)=C21*B0(DIMI,DIM)+C22*B1(DIMI,DIM)
220 CONTINUE
C ***** RESOLUCAO DO SISTEMA LINEAR *****
C *****
CALL TRIAG(DIM,M,C)
CALL BSMCD(6,DIM,Y,C,CD)
  DO 230 I=2,DIM2
    SI=S(I)
    CALL BSDX(6,DIM,Y,C,SI,DX,CD)
C ***** SOLUCAO EXATA E SUAS DERIVADAS *****

```

```

C *****
PS=DEXP(DBLE(1.)-DBLE(2.)*SI)+DEXP(DBLE(2.)*SI-DBLE(1.))
P=-(DEXP(DBLE(1.))+DEXP(DBLE(-1.)))
P=(PS+P)/DBLE(2.)
Q=DEXP(DBLE(2.)*SI-DBLE(1.))-DEXP(DBLE(1.)-DBLE(2.)*SI)
R=DBLE(2.)*(DEXP((DBLE(2.)*SI)-DBLE(1.))+DEXP(DBLE(1.)-
1 DBLE(2.)*SI))
C *****      CALCULO DO ERRO NOS PONTOS S(HJK)      *****
C *****
      ESI(1,I)=DABS(P-DX(1))
      ESI(2,I)=DABS(Q-DX(2))
      ESI(3,I)=DABS(R-DX(3))
230  CONTINUE
C
C
      DO 250 K=1,3
          ESIMAX(K)=ESI(K,2)
          DO 240 I=3,DIM2
              IF(ESIMAX(K).GE.ESI(K,I)) GOTO 240
              ESIMAX(K)=ESI(K,I)
240  CONTINUE
250  CONTINUE
C *****      CALCULO DO ERRO NOS PONTOS T(I)      *****
C *****
      DO 254 I=1,N1
          TI=T(I)
          CALL BSDX(6,DIM,Y,C,TI,DX,CD)
          PS=DEXP(DBLE(1.)-DBLE(2.)*TI)+DEXP(DBLE(2.)*TI-DBLE(1.))
          P=-(DEXP(DBLE(1.))+DEXP(DBLE(-1.)))
          P=(PS+P)/DBLE(2.)
          Q=DEXP(DBLE(2.)*TI-DBLE(1.))-DEXP(DBLE(1.)-DBLE(2.)*TI)
          R=DBLE(2.)*(DEXP((DBLE(2.)*TI)-DBLE(1.))+DEXP(DBLE(1.)-
1 DBLE(2.)*SI))
          ETI(1,I)=DABS(P-DX(1))
          ETI(2,I)=DABS(Q-DX(2))
          ETI(3,I)=DABS(R-DX(3))
254  CONTINUE
C
C
      DO 256 K=1,3
          ETIMAX(K)=ETI(K,1)
          DO 256 I=2,N1
              IF(ETIMAX(K).GE.ETI(K,I)) GOTO 256
              ETIMAX(K)=ETI(K,I)
256  CONTINUE
C
      WRITE(2,320)((ESI(K,I),K=1,3),I=1,DIM1)
      WRITE(2,340)(ESIMAX(K),K=1,3)
      WRITE(2,320)((ETI(K,I),K=1,3),I=1,N1)
      WRITE(2,340)(ETIMAX(K),K=1,3)
320  FORMAT(3(1X,E15.3))
340  FORMAT(1X,E15.3)
      STOP
      END

```



```

C ***** SUBROTINA BSDX *****
SUBROUTINE BSDX(M,N,Y,C,X,DX,CD)
REAL*8 X,Y(22),C(18),DX(5),CD(4,18),Q(6)
INTEGER I,J,K,M1,MJ,KJ,KM,V1,V2,IJ,MK,IK,IM
REAL*8 DENOM,A1,A2
IF(.NOT.(X.EQ.Y(N+1))) GO TO 10
GO TO 20
10 K=INTERV(1,N+M,(M+N)/2,X,Y)
20 CONTINUE
DX(M)=CD(M,K)
IF(.NOT.(M.GT.1)) GO TO 100
M1=M-1
DO 30 J=1,M1
Q(J)=0
30 CONTINUE
Q(M)=(DBLE(1.))/(Y(K+1)-Y(K))
Q(M+1)=0
DO 90 J=2,M1
MJ=M-J+1
DO 60 I=MJ,M
V1=I+K-M+J
V2=I+K-M
DENOM=Y(V1)-Y(V2)
A1=(X-Y(V2))/DENOM
A2=1-A1
Q(I)=A1*Q(I)+A2*Q(I+1)
60 CONTINUE
DX(MJ)=0
KJ=K+1-J
DO 70 I=KJ,K
MK=M-K+I
IJ=I+J
DX(MJ)=DX(MJ)+CD(MJ,I)*(Y(IJ)-Y(I))*Q(MK)
70 CONTINUE
90 CONTINUE
DX(1)=0
DO 93 I=1,M
IM=I+K-M
IK=I+K
Q(I)=(X-Y(IM))*Q(I)+(Y(IK)-X)*Q(I+1)
93 CONTINUE
KM=K+1-M
DO 95 I=KM,K
MI=M-K+I
DX(1)=DX(1)+C(I)*Q(MI)
95 CONTINUE
100 RETURN
END

```

```
C ***** SUBROTINA BSMCD *****  
SUBROUTINE BSMCD(M,N,Y,C,CD)  
REAL*8 Y(22),C(18),CD(4,18)  
INTEGER I,J,MJ,NJ,NI  
REAL DENOM  
DO 10 I=1,N  
  CD(1,I)=C(I)  
10 CONTINUE  
IF(.NOT.(M.GE.2)) GO TO 60  
DO 50 J=2,M  
  MJ=M-J+1  
  DO 50 I=J,N  
    NI=N+J-I  
    NJ=N+J-I+MJ  
    DENOM=Y(NJ)-Y(NI)  
    IF(.NOT.(DENOM.EQ.0)) GO TO 30  
    CD(J,NI)=0  
  GO TO 50  
30  CD(J,NI)=CD(J-1,NI)-CD(J-1,NI-1)  
    CD(J,NJ)=CD(J,NI)*MJ/DENOM  
50 CONTINUE  
60 RETURN  
END
```

```
C ***** FUNCAO INTERV *****
  INTEGER FUNCTION INTERV(P,Q,LX,X,Y)
  INTEGER P,Q,T,LX
  REAL*8 X,Y(22)
C
  IF(.NOT.(X.GE.Y(LX))) GO TO 30
  IF(.NOT.(X.LT.Y(LX+1))) GO TO 10
    L=LX
    GO TO 50
10 IF(.NOT.(X.LT.Y(LX+2))) GO TO 20
    L=LX+1
    GO TO 50
20 T=LX+2
  L=LBISEC(T,Q,X,Y)
  GO TO 50
30 IF(.NOT.(X.GE.Y(LX-1))) GO TO 40
    L=LX-1
    GO TO 50
40 T=LX-1
  L=LBISEC(P,T,X,Y)
50 INTERV=L
  RETURN
  END
```

```
C ***** FUNCAO LBISEC *****
C
C   INTEGER FUNCTION LBISEC(P,Q,X,Y)
C
C   INTEGER P,Q,L,U,MID
C   REAL*8 X,Y(22)
C
C   L=P
C   U=Q
C
10  IF((U-L).LE.1)GOTO 30
    MID=(L+U)/2
    IF(X.GE.Y(MID)) GOTO 20
    U=MID
    GOTO 10
20  L=MID
    GOTO 10
30  IF(Y(L).NE.Y(L+1))GOTO 40
    L=L+1
    GOTO 30
40  LBISEC=L
    RETURN
    END
```

```

C***** SUBROTINA TRIAG *****
C
C      SUBROUTINE TRIAG(N,M,C)
C
C      REAL*8 M(18,19),C(18)
C      INTEGER N
C
C      INTEGER I,J,K,G,NP1,NM1
C      REAL*8 P,S,MAX,D
C
C      NP1=N+1
C      NM1=N-1
C
C      DO 60 J=1,NM1
C          MAX=DABS(M(J,J))
C          G=J
C          JAUX=J+1
C          DO 10 I=JAUX,N
C              IF(MAX.GE.DABS(M(I,J))) GOTO 10
C              MAX=DABS(M(I,J))
C              G=I
10      CONTINUE
C
C          IF(G.EQ.J) GOTO 30
C          DO 20 I=J,NP1
C              P=M(G,I)
C              M(G,I)=M(J,I)
C              M(J,I)=P
20      CONTINUE
C
C          DO 50 I=JAUX,N
C              D=M(I,J)
C              DO 40 K=J,NP1
C                  M(I,K)=M(I,K)-M(J,K)/M(J,J)*D
40      CONTINUE
50      CONTINUE
60      CONTINUE
C
C      C(N)=M(N,NP1)/M(N,N)
C
C      I=NM1
70      IF(I.LT.1) GOTO 100
C          S=0.
C          J=N
80      IF(J.LT.(I+1)) GOTO 90
C          S=S+M(I,J)*C(J)
C          J=J-1
C          GOTO 80
90      C(I)=(M(I,NP1)-S)/M(I,I)
C          I=I-1
C          GOTO 70
100     CONTINUE
C      RETURN
C      END

```

TABELA 1 - SP3

Erros relacionados com o problema (B.2) .

N	DIM	$e_N^0$	$e_N^1$	$e_N^2$
3	6	1.36E-2	6.99E-2	5.45E-2
4	7	8.15E-3	3.83E-2	3.26E-2
5	8	5.00E-3	2.44E-2	2.00E-2
6	9	3.45E-3	1.99E-2	1.38E-2
7	10	2.52E-3	1.34E-2	1.01E-2
8	11	2.00E-3	9.51E-3	7.99E-3
9	12	1.56E-3	7.52E-3	6.24E-3
10	13	1.27E-3	6.08E-3	5.10E-3
11	14	1.05E-3	5.04E-3	4.19E-3
12	15	8.84E-4	4.23E-3	3.53E-3
13	16	7.49E-4	3.60E-3	3.00E-3
14	17	6.49E-4	3.11E-3	2.59E-3
15	18	5.62E-4	2.71E-3	2.25E-3

TABELA 2 - SP5

Erros relacionados com o problema (B.2) .

	N	DIM	$e_N^0$	$e_N^1$	$e_N^2$
	2	9	6.34E-5	2.86E-4	2.54E-4
(i)	3	12	1.09E-5	5.59E-5	4.38E-5
	4	15	3.72E-6	1.76E-5	1.51E-5
	5	18	1.45E-6	7.12E-6	6.07E-6
	2	10	2.40E-9	9.86E-8	2.86E-3
(ii)	3	14	1.69E-8	8.64E-7	6.06E-4
	4	18	2.19E-8	9.55E-8	2.00E-4
	5	22	2.20E-8	9.88E-8	8.42E-5

## BIBLIOGRAFIA

- AKHIEZER, N.I. 1962. *The calculus of variations*. New York, Blaisdell. 247p.
- BARROS, I.Q. 1978. *Discretização: métodos de passo progressivo para equações diferenciais ordinárias com condições iniciais*. São Paulo, IME-USP. v.3 (RT-MAP-7808).
- BARROS, I.Q. 1982. *Interpolação ótima*. São Paulo, s.c.p. /Trabalho apres. no Seminário de Análise Numérica, IME-USP, 1982/.
- BARROS, I.Q. 1985. *Equações diferenciais ordinárias, métodos analíticos e métodos numéricos*. São Paulo, s.c.p. (Notas de Curso)
- DE BOOR, C. & SWARTZ, B. 1973. Collocation at Gaussian points. *SIAM Journal on numerical analysis*, 10(4):582-606.
- CODDINGTON, E.A. & LEVINSON, N. 1955. *Theory of ordinary differential equations*. New York, McGraw-Hill. 429p.
- DAVIS, P.J. & RABINOWITZ, P. 1967. *Numerical integration*. Waltham, Blaisdell. 230p.
- GOLOMB, M. & WEINBERGER, H.F. 1959. Optimal approximation and error bounds. IN: LANGER, R.E. ed. *On numerical approximations: proceedings*. Madison, University of Wisconsin Press. p.117-90.
- RUSSEL, R.D. & SHAMPINE, L.F. 1972. A collocation method for boundary value problems. *Numerische Mathematik*, 19(1): 1-28.

- SALVETTI, D.D. 1984. *Procedimentos para cálculos com splines*  
São Paulo, IME-USP. 54p. (RT-MAP-8401-A)
- SCHUMAKER, L.L. 1981. *Spline functions: basic theory*.  
New York, John Wiley.
- SCHUMAKER, L.L. 1982. Optimal spline solutions of systems  
of ordinary differential equations. IN: ESCOLA LATINO AME  
RICANA DE MATEMATICA, 1., São Paulo, 1981. *Proceedings*.  
Berlin, Springer, p.272-83. (Lecture Notes in Mathematics,  
957)
- STETTER, H.J. 1971. *Analysis of discretization methods  
for ordinary differential equations*. Berlin, Springer.  
388p.
- TIMAN, A.F. 1963. *Theory of approximation of functions of  
a real variable*. New York, Macmillan. 631p.
- VARGA, R.S. 1962. *Matrix iterative analysis*. Englewood  
Cliffs, Prentice-Hall. 322p.
- WEISS, R. 1974. The application of implicit Runge-Kutta  
and collocation methods of boundary -value problems.  
*Mathematics of Computation*, 28(126):449-64.