

Interação Hidrodinâmica Entre Corpos Rígidos: O Caso Potencial

Francisco de Melo Viríssimo

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CPNq.

São Paulo, junho de 2014

Interação Hidrodinâmica Entre Corpos Rígidos: O Caso Potencial

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo candidato Francisco de Melo Viríssimo, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Agradecimientos

Resumo

Viríssimo, F.M. **Interação Hidrodinâmica Entre Corpos Rígidos: O Caso Potencial.** Dissertação — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Neste trabalho, discutimos o problema de interação hidrodinâmica entre corpos rígidos, com foco no caso em que o escoamento é potencial e bidimensional. Apresentamos, de maneira suficientemente auto-contida, um “cálculo” que permite obter em condições gerais o potencial de velocidade devido por um escoamento em torno de um número qualquer, porém finito, de corpos rígidos de geometria arbitrária. Como aplicação, fazemos um completo estudo quantitativo da interação hidrodinâmica entre dois cilindros estacionários e sujeitos a incidência de um escoamento uniforme.

Palavras-chave: mecânica dos fluidos bidimensional, interação hidrodinâmica, corpos rígidos, escoamento potencial, vórtices pontuais, interação entre cilindros, análise complexa, transformações conformes, função prima de Schottky-Klein.

Abstract

Viríssimo, F.M. **Hydrodynamic Interaction Between Rigid Bodies: The Potential Case.** Dissertation — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

In this monograph, we discuss the problem of hydrodynamic interaction between rigid bodies, focusing in the case when they are immersed in a potential and bidimensional flow. We present, in a self-contained approach, a calculus which provides a way to compute the potential generated by an arbitrary flow past any finite number of rigid bodies of arbitrary geometry. As an application of this theory, we do a complete quantitative study of the hydrodynamic interaction between a pair of stationary cylinders subjected to a background uniform flow.

Keywords: two-dimensional fluid mechanics, hydrodynamic interaction, rigid bodies, potential flow, point-vortex, interaction between cylinders, complex analysis, conformal mapping, Schottky-Klein prime function.

Sumário

| | |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Lista de Figuras | xi |
| 1 Introdução | 1 |
| Motivação | 1 |
| Um pouco de história: escoamentos irrotacionais | 3 |
| Estrutura do texto | 4 |
| 2 Motivação: uma nova solução para um velho problema | 7 |
| 3 Um Mínimo Sobre Teoria Geométrica das Funções | 13 |
| 3.1 Introdução | 14 |
| 3.2 Domínios canônicos e domínios circulares | 15 |
| 3.3 Grupos de Schottky | 16 |
| 3.4 A função prima de Schottky-Klein | 18 |
| A função prima de SK num domínio duplamente conexo | 21 |
| A função prima prima de SK num domínio multiplamente conexo | 21 |
| 4 Um Cálculo Para a Mecânica dos Fluidos 2D | 23 |
| 4.1 Vórtices pontuais | 23 |
| 4.2 Escoamento uniforme | 24 |
| O caso duplamente conexo | 26 |
| 4.3 Straining flows: escoamentos de ordem superior | 27 |
| 4.4 Corpos rígidos em movimento | 31 |
| O caso duplamente conexo | 35 |
| 4.5 Aplicações | 36 |
| Escoamento uniforme ao redor de dois cilindros | 36 |
| 5 Interação Hidrodinâmica Entre Dois Cilindros Estacionários | 39 |
| 5.1 Introdução | 39 |
| 5.2 Cilindros em horizontalmente alinhados | 42 |
| Ângulo de incidência <i>versus</i> forças de interação | 42 |
| Distância entre os centros <i>versus</i> forças de interação | 44 |
| Raios <i>versus</i> forças de interação | 45 |
| 5.3 Cilindros arbitrariamente posicionados | 47 |
| Stagger parameter <i>versus</i> forças de interação | 49 |
| Distância entre os centros <i>versus</i> forças de interação | 51 |
| Raios <i>versus</i> forças de interação | 52 |
| Coeficientes de arrasto e sustentação | 54 |
| 5.4 Comparação entre arrasto e sustentação | 57 |
| 5.5 Conclusões | 60 |
| Referências Bibliográficas | 63 |

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| A | Preliminares em Análise Complexa | 67 |
| | Notação | 67 |
| A.1 | Funções analíticas | 68 |
| A.2 | Equações de Cauchy-Riemann | 69 |
| A.3 | Funções harmônicas | 71 |
| A.4 | Operadores diferenciais complexos | 72 |
| A.5 | Integração complexa | 73 |
| A.6 | Séries de potências e séries de Laurent | 75 |
| | Séries de Taylor | 77 |
| | Séries de Laurent | 78 |
| A.7 | Singularidades | 79 |
| A.8 | Resíduos | 81 |
| B | Preliminares em Transformações Conformes | 83 |
| B.1 | Transformações de Möbius | 84 |
| B.2 | Domínios | 86 |
| B.3 | Funções harmônicas e problemas de valor de contorno | 87 |
| B.4 | Teorema de Riemann | 89 |
| C | Preliminares em Mecânica dos Fluidos | 91 |
| C.1 | Escoamentos bidimensionais | 91 |
| C.2 | Potencial complexo | 93 |
| C.3 | Forças em corpos rígidos | 95 |
| D | O Problema de Schwarz | 99 |
| E | Gráficos de $C_{D,2}$, $C_{L,2}$ e $C_{F,2}$ | 101 |
| E.1 | Cilindros arbitrariamente posicionados: distância entre os centros <i>versus</i> coeficientes | 101 |
| | Stagger parameter $\theta = 0$ | 101 |
| | Stagger parameter $\theta = \pi/6$ | 103 |
| | Stagger parameter $\theta = \pi/4$ | 104 |
| | Stagger parameter $\theta = \pi/3$ | 106 |
| | Stagger parameter $\theta = \pi/2$ | 107 |
| E.2 | Cilindros arbitrariamente posicionados: raios <i>versus</i> coeficientes | 109 |
| | Stagger parameter $\theta = 0$ | 109 |
| | Stagger parameter $\theta = \pi/6$ | 111 |
| | Stagger parameter $\theta = \pi/4$ | 112 |
| | Stagger parameter $\theta = \pi/3$ | 114 |
| | Stagger parameter $\theta = \pi/2$ | 115 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Artigo publicado por Biermann e Herrnstein [BJ33] | 1 |
| 1.2 | Trecho retirado de [BJ33] | 2 |
| 1.3 | Gráficos dos coeficientes de arrasto de interferência para as asas [BJ33] . | 3 |
| 2.1 | Vórtice pontual num domínio ilimitado e exterior a um corpo rígido B . | 8 |
| 2.2 | Equivalência conforme entre os problemas | 9 |
| 4.1 | Escoamento uniforme ao redor de dois cilindros | 37 |
| 5.1 | Sistema coordenado adotado para o estudo do problema | 41 |
| 5.2 | Cilindros horizontalmente alinhados | 42 |
| 5.3 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de D_1 em função χ , para diversos valores de ℓ | 43 |
| 5.4 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de L_1 em função χ , para diversos valores de ℓ | 43 |
| 5.5 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de $ \mathbf{F}_1 $ em função χ , para diversos valores de ℓ | 44 |
| 5.6 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de D_1 em função ℓ , para diversos valores de χ | 45 |
| 5.7 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de L_1 em função ℓ , para diversos valores de χ | 45 |
| 5.8 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de $ \mathbf{F}_1 $ em função ℓ , para diversos valores de χ | 46 |
| 5.9 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de D_1 em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de χ e d_b | 46 |
| 5.10 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de L_1 em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de χ e d_b | 47 |
| 5.11 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de $ \mathbf{F}_1 $ em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de χ e d_b | 47 |
| 5.12 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de D_1 em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de χ e d_b | 48 |
| 5.13 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de L_1 em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de χ e d_b | 48 |
| 5.14 | Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de $ \mathbf{F}_1 $ em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de χ e d_b | 49 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.15 Cilindros arbitrariamente posicionados | 49 |
| 5.16 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{D}_1 em função θ , para diversos valores de ℓ | 50 |
| 5.17 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{L}_1 em função θ , para diversos valores de ℓ | 50 |
| 5.18 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $ \tilde{\mathbf{F}}_1 $ em função θ , para diversos valores de ℓ | 51 |
| 5.19 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{D}_1 em função ℓ , para diversos valores de θ | 51 |
| 5.20 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{L}_1 em função ℓ , para diversos valores de θ | 52 |
| 5.21 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{D}_1 em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de θ e d_b | 52 |
| 5.22 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{L}_1 em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de θ e d_b | 53 |
| 5.23 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{D}_1 em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de θ e d_b | 53 |
| 5.24 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{L}_1 em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de θ e d_b | 54 |
| 5.25 Projeção do cilindro na direção perpendicular ao campo de forças \mathbf{F}_j | 55 |
| 5.26 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$ | 55 |
| 5.27 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$ | 56 |
| 5.28 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\chi = \pi/6$ | 56 |
| 5.29 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função θ , para diversos valores de ℓ | 57 |
| 5.30 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função θ , para diversos valores de ℓ | 57 |
| 5.31 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função θ , para diversos valores de ℓ | 58 |
| 5.32 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$ | 58 |
| 5.33 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$ | 59 |
| 5.34 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$ | 59 |
| 5.35 Comparação entre as forças de arrasto e sustentação em função de ℓ , para diversos valores de R_2 | 60 |
| 5.36 Comparação entre as forças de arrasto e sustentação em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de d_b | 60 |

| | | |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.37 | Comparação entre as forças de arrasto e sustentação em função de ℓ , em escala logarítmica, para cilindros de raio unitário | 61 |
| E.1 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = 0$ | 101 |
| E.2 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = 0$ | 102 |
| E.3 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = 0$ | 102 |
| E.4 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$ | 103 |
| E.5 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$ | 103 |
| E.6 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$ | 104 |
| E.7 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/4$ | 104 |
| E.8 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/4$ | 105 |
| E.9 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/4$ | 105 |
| E.10 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/3$ | 106 |
| E.11 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/3$ | 106 |
| E.12 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/3$ | 107 |
| E.13 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/2$ | 107 |
| E.14 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/2$ | 108 |
| E.15 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/2$ | 108 |
| E.16 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = 0$ | 109 |
| E.17 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = 0$ | 110 |
| E.18 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = 0$ | 110 |
| E.19 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$ | 111 |
| E.20 | Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$ | 111 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| E.21 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$ | 112 |
| E.22 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/4$ | 112 |
| E.23 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/4$ | 113 |
| E.24 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/4$ | 113 |
| E.25 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/3$ | 114 |
| E.26 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/3$ | 114 |
| E.27 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/3$ | 115 |
| E.28 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/2$ | 115 |
| E.29 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/2$ | 116 |
| E.30 Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/2$ | 116 |

Capítulo 1

Introdução

"The ability to model the hydrodynamical interaction between rigid bodies immersed in a fluid is important in many engineering and physics problems. (...) This is, in general, a highly non-trivial exercise and often impossible without recourse to intensive computational fluid dynamics."

D. A. Burton *et al.*, 2004 [BGT04].

Motivação

A principal motivação para esse trabalho está em uma pesquisa em andamento, na qual buscamos elucidar uma questão envolvendo o arrasto de interferência entre duas asas em tandem.

REPORT No. 468

THE INTERFERENCE BETWEEN STRUTS IN VARIOUS COMBINATIONS

By DAVID BIERMANN and WILLIAM H. HERRNSTEIN, Jr.

SUMMARY

This report presents the results of tests made in the N.A.C.A. 7- by 10-foot wind tunnel to determine the interference drag arising from various arrangements of streamline struts and round struts, or cylinders. Determinations were made of the interference drag of struts spaced side by side, struts in tandem, tandem struts encased in a single fairing, a strut intersecting a plane, and struts intersecting to form a V. Three sizes of struts were used for most of the tests.

These tests show that the interference drag arising from struts in close proximity may be of considerable magnitude, in some instances amounting to more than the drag of the struts themselves.

INTRODUCTION

With the increasing demand for higher speeds in flight, attention has been focused on all possible meth-

Many of the tests herein reported have direct applications in airplane design. Although there has been an attempt to cover the subject of strut interference in a systematic fashion, the limitations of time and equipment have necessitated curtailing the program. Further tests on interference between struts and wheels are being made in connection with a study of landing gears, and will be reported at a later date.

APPARATUS AND METHODS

The N.A.C.A. 7- by 10-foot wind tunnel in which these tests were made is completely described with its equipment in reference 1. The standard force-test model support was used throughout these tests.

The streamline strut models were made from Navy no. 1 strut-section offsets given in table I. With a few exceptions to be discussed later, the tests were made on struts of three section sizes: 1 by 3 inches, 1.75

Figura 1.1: Artigo publicado por Biermann e Herrnstein [BJ33]

Em 1933, D. Biermann e W. Herrnstein Jr. [BJ33], então pesquisadores da extinta¹ *National Advisory Committee for Aeronautics* (NACA) investigaram expe-

¹Em 1958, em meio a corrida espacial entre a União Soviética e os Estados Unidos, a NACA

rimentalmente a interação hidrodinâmica entre pares de corpos rígidos de diversas formas e em diversos arranjos. Dentre os resultados obtidos, o mais notável diz respeito as forças de interferência entre um par de asas em tandem.

STRUTS IN TANDEM

Streamline struts.—Figure 7 shows the interference drag resulting from spacing streamline struts in tandem. Since separate measurements were made on each strut, a more general picture was obtained of the flow conditions than if the struts had been combined in one unit. Several noteworthy results were obtained from these tests. First, the drag of the rear strut is increased to some extent by the presence of the front strut for all spacings tested, the magnitude being much greater for small spacings. Second, the drag of the front strut is reduced an almost equal amount by the presence of the rear strut. For spacings less than 4.5 diameters the net front-strut reaction is actually in an upstream direction. Third, considering the two struts as a unit, the drag is increased a small amount throughout the range, reaching a maximum at about 4 diameters. Fourth, the agreement of results is excellent for all sizes of struts tested.

Figura 1.2: Trecho retirado de [BJ33]

Ao analisar os gráficos obtidos, Biermann e Herrnstein observaram que a força de arrasto da asa à montante decaí a medida que a asa à jusante se aproxima (veja a figura abaixo). Apesar da constatação experimental, eles não conseguiram fornecer uma explicação teórica para o fenômeno.

Embora relatado em alguns textos escritos posteriormente (veja, por exemplo, o belíssimo tratado [Hoe65]), esse fenômeno ainda continua inexplicado [Ber08].

Diante disso, o nosso objetivo é (futuramente) prover uma explicação qualitativa e matemática para os efeitos de interação mencionados. A fim de entender tais efeitos, usaremos um modelo de interação hidrodinâmica, desenvolvido por M. S. Howe [How95] para o caso de um único corpo rígido e generalizado por C. G. Ragazzo e E. Tabak [RT07] para o caso de vários corpos rígidos. A vantagem deste modelo é que ele permite uma identificação parcial das contribuições devidas à massa adicional, fricção (*skin friction*) e estresse normal induzido pela vorticidade. O ponto é que, para usar este modelo, precisamos calcular *a priori* certas funções potenciais relacionadas a um escoamento hipotético gerado pelo movimento das asas. E foi a busca por tais funções que trouxe a tona este presente estudo.

deu lugar a *National Aeronautics and Space Administration* (NASA).

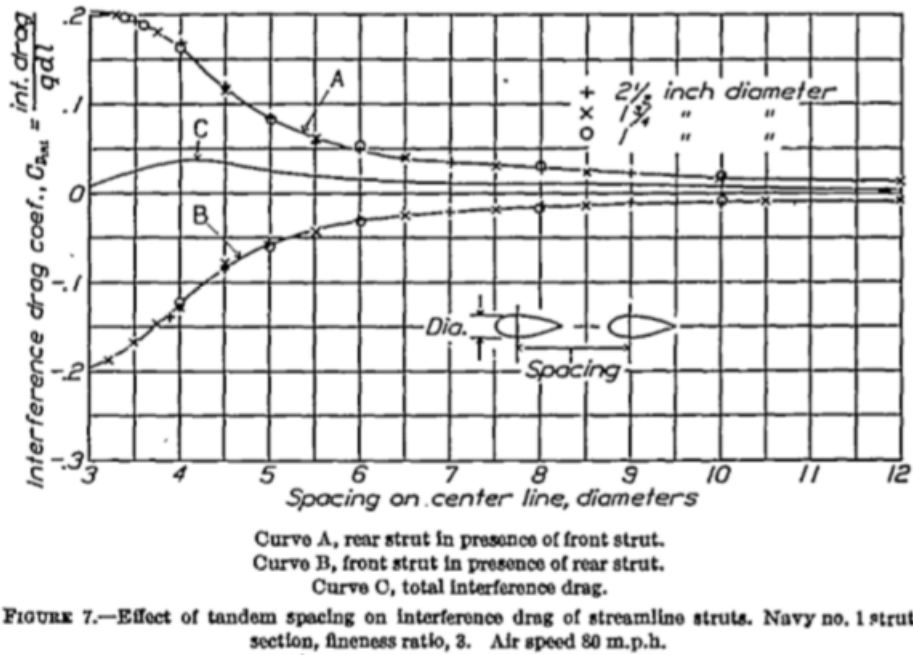


Figura 1.3: Gráficos dos coeficientes de arrasto de interferência para as asas [BJ33]

Um pouco de história: escoamentos irrotacionais

O problema de se estudar a interação hidrodinâmica entre corpos rígidos em um escoamento potencial remonta aos estudos de W. M. Hicks [Hic79] e A. G. Greenhill [Gre82], já no final no século XIX. Acredita-se que tenham sido eles os primeiros a calcular o potencial de velocidade para o escoamento bidimensional gerado pelo movimento de dois cilindros num fluido ideal, incompressível e irrotacional no plano [Cro06a]. Hicks e Greenhill valeram-se basicamente de técnicas perturbativas, especialmente do método das imagens, para construir a função potencial. Uma evidência de que eles tenham sido os primeiros a estudar esse problema está na monografia escrita por A. B. Basset [Bas61], que dedica um capítulo inteiro a este problema, mencionando apenas os autores supracitados. Posteriormente, o próprio Basset investigou esse problema [Bas87], porém no contexto tridimensional, com os cilindros substituídos por esferas. Resultados sobre o problema foram também relatados em diversos textos escritos posteriormente, como no livro “*Hydrodynamics*”, de L. M. Milne-Thomson [MT62].

Soluções mais simples para o problema dos cilindros apareceram apenas muito depois, nos trabalhos de L. H. Carpenter [Car58] e T. Yamamoto [Yam76], já fazendo uso do famoso teorema de Milne-Thomson, que é a formalização do método das imagens para o caso em que os corpos são discos circulares. Enquanto Carpenter se limitou a calcular o potencial para o problema entre dois cilindros, o trabalho de Yamamoto foi além: ele desenvolveu uma expressão analítica para o potencial devido ao escoamento gerado por um número finito qualquer de cilindros em movimento e sujeitos a um escoamento uniforme incidente. Em posse do potencial, Yamamoto fez uso da fórmula de Blasius (teorema C.3.1) e do teorema dos resíduos (teorema A.8.1) para obter expressões para as forças de interação entre dois cilindros.

Ainda, Yamamoto decompôs a força em seis parcelas, cada uma ponderada por um “coeficiente de força”, e usou essa expressão para fazer um estudo qualitativo do problema. Trabalhos posteriores sobre a interação entre dois cilindros reapareceram somente no começo do século XXI, dessa vez tratando do problema transiente. Esse é o caso dos trabalhos publicados em 2004 por Q. Wang [Wan04] e D. A. Burton *et al.* [BGT04].

Em contraste com os parágrafos acima, o estudo da interação entre corpos rígidos de diferentes geometrias é bastante escasso na literatura. Provavelmente a primeira investigação sobre o assunto é devida a M. Lagally, já em meados do século XX. Com o advento e a popularização de técnicas em análise complexa, sobretudo transformações conformes, e funções elípticas, Lagally fez uso da invariância conforme do problema (corolário B.3.1) para deduzir o potencial complexo devido ao escoamento instantaneamente gerado pelo movimento de dois corpos rígidos de geometria arbitrária. Munido desse resultado o então cientista-chefe da NACA I. E. Garrick [Gar35] apresentou de modo elegante e sucinto as técnicas que permitem a construção de transformações conformes entre um anel e a região exterior e quaisquer dois contornos no plano². Juntos, os trabalhos de Lagally e Garrick fecham a solução para o problema envolvendo dois corpos.

Motivados por aplicações em problemas *offshore*, estudos envolvendo a interação entre corpos de geometria diferentes foram retomados por A. T. Chwang e R. Sun [SC99], [Sun99]. Juntos, eles investigaram a interação entre um cilindro elíptico em rotação e um cilindro circular estacionário, valendo-se de técnicas perturbativas. Motivado pelo mesmo problema, C. G. Ragazzo [Rag03] fez uso de técnicas variacionais para otimizar resultados já existentes acerca da formulação lagrangeana do problema da interação entre corpos de geometria arbitrária. Contudo, coube a D. G. Crowdy [TCL10] investigar o problema transiente de interação entre dois corpos, em trabalho conjunto com A. A. Tchieu e A. Leonard.

E quanto ao problema de interação entre um número maior de corpos rígidos, objeto de estudo desta monografia? Estudos sistemáticos sobre este assunto apareceram apenas na última década, com os trabalhos de D. G. Crowdy *et al.* [Cro10a]. Numa série de artigos publicados a partir de 2005, Crowdy e seus colaboradores desenvolveram um maquinário capaz de calcular qualquer potencial complexo no plano envolvendo um número finito de corpos rígidos. Tais resultados serão apresentados em detalhes neste trabalho, conforme a próxima seção.

Estrutura do texto

A estrutura desta monografia é a seguinte. Começamos pelo **capítulo 2**, revisitando alguns problemas simples em mecânica dos fluidos. Fazemos isso numa abordagem diferente da tradicional, a fim de deixar marcado o raciocínio que usaremos adiante para generalizar estes mesmos resultados.

²Cabe ressaltar aqui que, embora matematicamente corretos, as séries obtidas por Garrick apresentam problemas numéricos de convergência que dificultam o seu uso na prática.

No **capítulo 3**, apresentamos o mínimo necessário sobre a teoria geométrica das funções. São os resultados aqui obtidos que nos permitirão tornar gerais os teoremas do capítulo 2.

Munidos das ideias e dos conceitos matemáticos necessários, desenvolvemos no **capítulo 4** o nosso prometido cálculo. Isto é, construímos um conjunto básico de funções potenciais, a partir do qual podemos encontrar o potencial devido a um escoamento potencial e bidimensional em condições bem gerais.

A título de ilustração, no **capítulo 5**, usamos o maquinário do capítulo anterior para fazer uma análise quantitativa da interação hidrodinâmica entre dois cilindros estacionários, sobre os quais incide um escoamento uniforme. Por completude, apresentamos no **apêndice E** a íntegra dos gráficos dos coeficientes de arrasto, sustentação e força plotados nesse estudo.

A fim de facilitar a leitura do trabalho, optamos por torná-lo auto-contido, mediante a inclusão de quatro apêndices. No **apêndice A**, apresentamos os fundamentos da análise complexa, teoria que sustenta o tratamento matemático que demos ao problema fluidomecânico em questão. No **apêndice B**, apresentamos sucintamente alguns resultados úteis sobre a teoria das transformações conformes. Em seguida, no **apêndice C**, fazemos uma breve revisão sobre a mecânica dos fluidos. Por fim, no **apêndice D**, enunciamos o problema de Schwarz, clássico em teoria do potencial e protagonista no desenvolvimento do cálculo do capítulo 4.

Capítulo 2

Motivação: uma nova solução para um velho problema

"The method of images was invented by Sir William Thomson, and has been developed by Helmholtz, Maxwell and other writers; it affords a powerful method of solving many important physical problems. We shall now give some examples."

A. B. Basset, 1888 [Bas61].

Para motivar o que segue, considere o seguinte problema. Suponha que num fluido ideal e em repouso esteja imerso um corpo rígido, estacionário e de geometria arbitrária. Denotemos por B o corpo rígido e por D_z o domínio fluido. Suponha agora que seja adicionado um vórtice pontual, de circulação unitária, em algum ponto $z_\alpha \in D_z$. Esta situação está ilustrada na figura abaixo. Denote o potencial complexo associado a esse escoamento por $g_0(z, z_\alpha)$. Com essa notação, resolver esse problema é equivalente a encontrar uma função $g_0(\cdot, z_\alpha) : D_z \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$g_0(z, z_\alpha) = -\frac{i}{2\pi} \log(z - z_\alpha) + \text{uma função localmente analítica} \quad (2.0.1a)$$

com

$$\text{Im}[g_0(z, z_\alpha)] = 0, \text{ quando } z \in \partial B \quad (2.0.1b)$$

Aqui, a condição 2.0.1a garante que $g_0(z, z_\alpha)$ possui uma singularidade logarítmica em $z = z_\alpha$, enquanto a condição 2.0.1b assegura que ∂B é uma linha de corrente e, portanto, representa um objeto impermeável.

Note que a solução do problema acima depende crucialmente da condição de fronteira imposta e, portanto, está ligada a geometria do corpo. Nessas circunstâncias, obter uma solução analítica geral para o problema torna-se uma tarefa um tanto quanto ingrata, já que a generalidade da solução deve abarcar a generalidade do contorno que delimita o corpo. Mesmo soluções particulares são, em geral, de difícil obtenção. A maioria dos métodos clássicos, como o *método das imagens* e o *teorema*

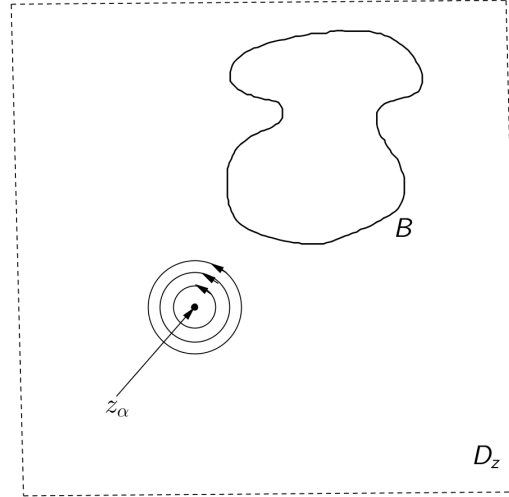


Figura 2.1: Vórtice pontual num domínio ilimitado e exterior a um corpo rígido B

de *Milne-Thomson*¹ contemplam apenas os casos em que a geometria do corpo é circular.

Para contornar essa dificuldade, vamos evocar um dos grandes teoremas da matemática: o teorema de Riemann (teorema B.4.1). Esse teorema afirma que, nas condições do nosso problema, existe uma transformação conforme z que leva o disco unitário $D_1(0)$ menos um ponto β na região exterior ao corpo rígido B , a qual denotamos por D_z . Ainda, sendo a região complementar a B ilimitada, o ponto β deve, necessariamente, ser um polo simples de z , de modo que

$$z(\zeta) = \frac{a}{\zeta - \beta} + \mathcal{O}(1)$$

ao redor desse ponto, onde a é uma constante.

A fim de usar este resultado, denotemos o domínio da transformação conforme por D_ζ . Nesse caso, pela sobrejetividade de z , existe um ponto $\alpha \in D_\zeta$ tal que $z(\alpha) = z_\alpha$. Ainda, como z é analítica em D_ζ , ela o é no ponto $\zeta = \alpha$ e, portanto, admite uma expansão em série de Taylor (teorema A.6.2) numa vizinhança de α . Assim,

$$\begin{aligned} z - z_\alpha = z(\zeta) - z(\alpha) &= z'(\alpha)(\zeta - \alpha) + \frac{z''(\alpha)}{2!}(\zeta - \alpha)^2 + \dots & (2.0.2) \\ &= (\zeta - \alpha) \left(z'(\alpha) + \frac{z''(\alpha)}{2!}(\zeta - \alpha) + \dots \right) \\ &= (\zeta - \alpha)R(\zeta, \alpha), \end{aligned}$$

onde $R(\cdot, \alpha)$ é uma função localmente analítica, donde segue que

$$\begin{aligned} \log(z - z_\alpha) &= \log(\zeta - \alpha) + \log(R(\zeta, \alpha)) & (2.0.3) \\ &= \log(\zeta - \alpha) + \text{uma função localmente analítica.} \end{aligned}$$

¹**Louis Melville Milne-Thomson** (1891-1974) foi um matemático aplicado inglês. Foi o responsável por formalizar o já conhecido método das imagens para geometrias circulares: este é o conteúdo de seu mais famoso resultado, o chamado *teorema do círculo de Milne-Thomson*. Escreveu dois importantes tratados em Mecânica dos Fluidos: o *Theoretical Hydrodynamics* [MT62] e o *Theoretical Aerodynamics*.

Denote agora $G_0(\zeta, \alpha) = g_0(z(\zeta), z(\alpha))$. Devido a igualdade 2.0.4, resolver o problema acima é equivalente a encontrar uma função $G_0(\cdot, \alpha) : D_\zeta \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$G_0(\zeta, \alpha) = -\frac{i}{2\pi} \log(\zeta - \alpha) + \text{uma função localmente analítica} \quad (2.0.4a)$$

com

$$\text{Im}[G_0(\zeta, \alpha)] = 0, \text{ quando } |\zeta| = 1 \quad (2.0.4b)$$

Em posse da função $G_0(\cdot, \alpha)$ e da transformação conforme $z(\zeta)$, obtemos a solução

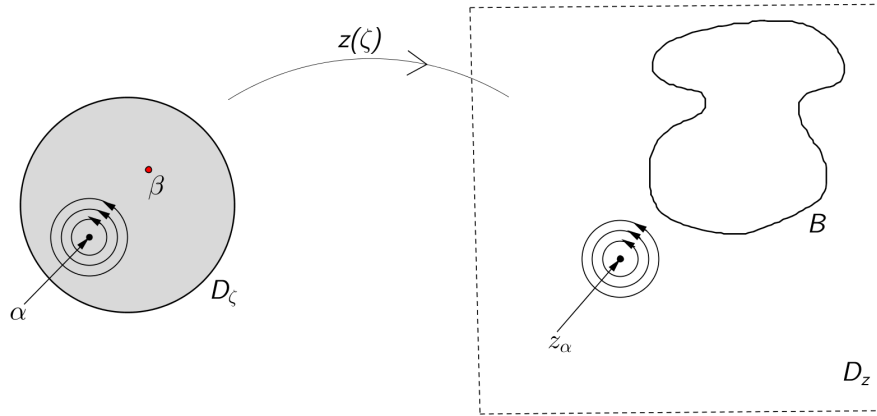


Figura 2.2: Equivalência conforme entre os problemas

$g_0(z, z_\alpha)$ procurada. Este resultado já era esperado, devido à invariância conforme dos problemas de Neumann e Dirichlet para a equação de Laplace (corolário B.3.1). Note que agora, a menos da transformação conforme, temos um problema muito mais simples para resolver. Buscamos por uma função com a mesma singularidade logarítmica, no entanto, satisfazendo a condição de fronteira no conjunto cuja geometria é circular.

Este é um problema clássico, cuja solução pode ser encontrada na maioria dos livros introdutórios em mecânica dos fluidos [MT62], [Ach90], [Cro12b], [New01]. Dentre as várias soluções existentes, uma das mais simples faz uso do supracitado método das imagens (ou equivalentemente, do teorema de Milne-Thomson). Se

$$f(\zeta, \alpha) = -\frac{i}{2\pi} \log(\zeta - \alpha),$$

então

$$G_0(\zeta, \alpha) = f(\zeta, \alpha) + \bar{f}(\zeta, 1/\bar{\alpha}) + c,$$

onde $c \in \mathbb{C}$ é uma constante a ser determinada.

Se escrevermos $c = \frac{i}{2\pi} \log(c_\alpha)$, podemos desenvolver a expressão acima de modo que

$$\begin{aligned}
 G_0(\zeta, \alpha) &= f(\zeta, \alpha) + \bar{f}(\zeta, 1/\bar{\alpha}) + c \\
 &= -\frac{i}{2\pi} \log(\zeta - \alpha) + \frac{i}{2\pi} \log(\zeta - 1/\bar{\alpha}) + \frac{i}{2\pi} \log(c_\alpha) \\
 &= -\frac{i}{2\pi} \log\left(\frac{(\zeta - \alpha)}{c_\alpha(\zeta - 1/\bar{\alpha})}\right).
 \end{aligned}$$

Da condição de impermeabilidade 2.0.4b, concluímos que $c_\alpha = |\alpha|$. Introduzindo a notação $\omega(\zeta, \alpha) = (\zeta - \alpha)$, podemos escrever

$$G_0(\zeta, \alpha) = -\frac{i}{2\pi} \log\left(\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{|\alpha|\omega(\zeta, 1/\bar{\alpha})}\right). \quad (2.0.5)$$

A função G_0 acima, embora pareça ingênua, é na verdade o cerne da teoria que apresentaremos. É a partir dela que construiremos outros potenciais para escoamentos mais complicados. Por exemplo, o potencial em D_ζ associado à presença de N vórtices pontuais de circulação arbitrária é dado por

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k G_0(\zeta, \alpha_k),$$

sendo a circulação do k -ésimo vórtice dada por Γ_k - tal afirmação é consequência do princípio da superposição de soluções para a equação de Laplace.

Observação 2.0.1. Para alterar a circulação em torno do corpo rígido, devemos introduzir um vórtice com a circulação desejada no ponto β . Note que podemos fazê-lo, uma vez que a função G_0 é regular no infinito. Assim, por exemplo, o potencial dado por

$$G_0(\zeta, \alpha) - G_0(\zeta, \beta)$$

representa, no plano físico, o potencial devido a um vórtice pontual localizado em $z(\alpha) = z_\alpha$, porém com circulação nula em torno do corpo rígido. Informalmente falando, o que fizemos aqui foi colocar um vórtice pontual no infinito, que nada mais é do que a “imagem” de β por $z(\zeta)$. Esse truque funciona simplesmente porque o infinito não é visto como um ponto material do plano físico - seu significado é *strictu sensu* matemático. Esta peculiaridade nos permitirá usar este truque sempre que quisermos alterar a circulação sobre o corpo rígido num tal escoamento potencial.

Agora, vamos incrementar um pouco mais o nosso problema. Suponha que, além do vórtice pontual, temos a presença de um escoamento uniforme U incidente. Pela proposição C.2.1, tal escoamento é equivalente a presença de um dipolo no infinito, de intensidade $\mu = -2\pi U e^{-i\chi}$. Como estamos trabalhando no domínio D_ζ , tal singularidade corresponde a presença de um dipolo no ponto β . Assim, para encontrar este potencial, devemos procurar por uma função $W_D(\zeta, \beta, \mu)$ tal que

$$W_D(\zeta, \beta, \mu) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{(\zeta - \beta)} + \text{uma função localmente analítica}, \quad (2.0.6a)$$

com

$$\text{Im}[W_D(\zeta, \beta, \mu)] = 0, \text{ quando } |\zeta| = 1. \quad (2.0.6b)$$

Como sabemos, este problema pode ser facilmente resolvido evocando-se novamente o método das imagens. De fato, se escrevermos

$$f(\zeta, \beta, \mu) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{(\zeta - \beta)},$$

então

$$\begin{aligned} W_D(\zeta, \beta, \mu) &= f(\zeta, \beta, \mu) + \bar{f}(\zeta, 1/\bar{\beta}, \mu) + \text{constante} \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{(\zeta - \beta)} + \frac{\bar{\mu}}{2\pi\bar{\beta}^2} \frac{1}{(\zeta - 1/\bar{\beta})} + \text{constante}. \end{aligned} \quad (2.0.7)$$

Contudo, há uma outra maneira de se construir este potencial. Para tanto, basta o conhecimento da já apresentada função G_0 . Este é o conteúdo do seguinte teorema:

Teorema 2.0.1 Nas condições 2.0.6a e 2.0.6b acima, temos que

$$W_D(\zeta, \beta, \mu) = i \left[\mu \frac{\partial}{\partial \alpha} - \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \right] G_0(\zeta, \alpha) \Big|_{\alpha=\beta}, \quad (2.0.8)$$

onde $G_0(\zeta, \alpha)$ é a função definida em 2.0.5 e $\mu = -2\pi U e^{-ix}$.

Demonstração. A fim de provar este teorema, escrevamos

$$\alpha = \alpha_x + i\alpha_y.$$

Derivando G_0 parametricamente com respeito a α_x e α_y , obtemos respectivamente

$$\frac{\partial G_0}{\partial \alpha_x}(\zeta, \alpha) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(\zeta - \alpha)} + \text{uma função localmente analítica}$$

e

$$\frac{\partial G_0}{\partial \alpha_y}(\zeta, \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\zeta - \alpha)} + \text{uma função localmente analítica.}$$

Ainda, como derivamos $G_0(\zeta, \alpha)$ parametricamente com respeito às variáveis reais α_x e α_y , temos que

$$\text{Im} \left[\frac{\partial G_0}{\partial \alpha_x}(\zeta, \alpha) \right] = \text{Im}[G_0(\zeta, \alpha)] = 0, \text{ quando } |\zeta| = 1$$

e

$$\text{Im} \left[\frac{\partial G_0}{\partial \alpha_y}(\zeta, \alpha) \right] = \text{Im}[G_0(\zeta, \alpha)] = 0, \text{ quando } |\zeta| = 1.$$

Se escrevermos $\mu = \mu_x + i\mu_y$, concluímos que

$$\mu_x \frac{\partial G_0}{\partial \alpha_y}(\zeta, \alpha) - \mu_y \frac{\partial G_0}{\partial \alpha_x}(\zeta, \alpha) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{(\zeta - \beta)} + \text{uma função localmente analítica}$$

e, portanto, um potencial W_D nas condições do problema é

$$i \left[\mu \frac{\partial}{\partial \alpha} - \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \right] G_0(\zeta, \alpha) \Big|_{\alpha=\beta} + \text{constante},$$

onde fizemos uso das relações entre as derivadas paramétricas (veja as equações A.4.1 e A.4.2). \square

Podemos reunir todos os resultados dessa seção num único teorema.

Teorema 2.0.2 Suponha que D_z seja um domínio exterior a um corpo rígido, estacionário de geometria arbitrária, o qual está preenchido por um fluido ideal. Suponha a existência de um escoamento uniforme, que incide com velocidade constante U e ângulo χ . Suponha ainda que existam N vórtices pontuais localizados em D_z , sendo a posição e a circulação do k -ésimo vórtice dada por z_k e Γ_k , respectivamente. Seja $z : D_\zeta \rightarrow D_z$ a transformação conforme entre o disco unitário e o domínio fluido em questão. Então, o potencial complexo $W(\zeta)$ para esse problema é dado por

$$W(\zeta) = W_D(\zeta, \beta, \mu) + \sum_{k=1}^N \Gamma_k G_0(\zeta, \alpha_k) + (\Gamma_c - \sum_{k=1}^N \Gamma_k) G_0(\zeta, \beta). \quad (2.0.10)$$

onde $z_k = z(\alpha_k)$, $z(\beta) = \infty$, Γ_c é a circulação em torno do corpo rígido em questão e $\mu = -2\pi U e^{-i\chi}$.

Este resultado fornece a solução geral para o problema enunciado, a menos da transformação conforme $z(\zeta)$, no caso em que há apenas um corpo rígido imerso no fluido. No que segue, a ideia é generalizar este procedimento para o caso onde há um número finito qualquer de corpos presentes. Primeiro, precisaremos introduzir alguns conceitos sobre teoria geométrica das funções.

Capítulo 3

Um Mínimo Sobre Teoria Geométrica das Funções

"Before we introduce it, we should explain what we mean by 'geometric function theory': we refer to an understanding of functions, mostly analytic functions of a complex variable, within some geometrical framework."

D. G. Crowdy, 2008 [Cro08b].

Começemos relembando a função 2.0.5:

$$G_0(\zeta, \alpha) = -\frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{|\alpha| \omega(\zeta, 1/\alpha)} \right),$$

onde introduzimos de maneira despretenciosa a notação

$$\omega(\zeta, \alpha) = (\zeta - \alpha). \tag{3.0.1}$$

O ponto a ser enfatizado aqui é que esta não é uma definição de toda ingênua. Nesse texto, $\omega(\zeta, \alpha)$ denotará algo muito mais geral que o simples monômio acima, a saber, a *função prima de Schottky¹-Klein²*.

A função prima de Schottky-Klein, doravante *função prima de SK*, é uma função transcendental naturalmente associada a subconjuntos do plano complexo cujos bordos são círculos. Todo o cálculo que construiremos no capítulo 4 será baseado na generalidade da definição desta função, bem como na sua associação a tais subconjuntos de \mathbb{C} . A grande coincidência aqui é que, no caso em que D_ζ é o disco unitário, como no capítulo 2 a função prima de Schottky-Klein é dada simplesmente pelo monômio acima.

Neste capítulo, apresentaremos o arcabouço teórico sobre o assunto, crucial para generalizarmos a construção de potenciais complexos para escoamentos com vários corpos rígidos presentes. As principais referências aqui são [Mar05], [Cro08b],

¹**Friedrich Hermann Schottky** (1851-1935) foi um matemático alemão. Trabalhou principalmente em teoria das funções, introduzindo importantes conceitos na área. É pai do famoso físico alemão Walter H. Schottky, conhecido por suas contribuições à teoria dos semicondutores.

²**Christian Felix Klein** (1849-1925) foi um matemático alemão. Responsável por importantes resultados em análise complexa, é principalmente conhecido por seus trabalhos em teoria dos grupos e geometria, especialmente por propor a classificação de geometrias através dos seus grupos de simetria, ideia que conecta essas duas áreas da matemática e que permanece atual ainda hoje.

[Cro10b] e [Cro12a]. Aqueles mais interessados no assunto podem ainda consultar os tratados [Bak95] e [Hej72].

3.1 Introdução

Para fazer jus ao título desse capítulo, busquemos por uma compreensão, por meios geométricos, do tipo mais simples de função a uma variável complexa. Considere, portanto, o polinômio de grau n e coeficientes complexos abaixo

$$P_n(\zeta) = \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k = a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n.$$

O ponto de partida aqui será o *teorema fundamental da álgebra*, segundo o qual podemos reescrever P_n unicamente como

$$P_n(\zeta) = a_n \prod_{k=1}^n (\zeta - \alpha_k),$$

de modo que, se o polinômio for mônico ($a_n = 1$), então

$$P_n(\zeta) = \prod_{k=1}^n (\zeta - \alpha_k). \quad (3.1.1)$$

onde $\{\alpha_k : 1 \leq k \leq n\}$ são as raízes de P_n .

Perceba que o teorema fundamental da álgebra nos oferece uma caracterização de um o polinômio em termos da *geometria* da distribuição de seus zeros. De modo que, sendo o polinômio o mais simples elemento do conjunto das funções analíticas, podemos dizer que o teorema fundamental da álgebra é o *ponto de partida* da teoria geométrica das funções.

Sendo assim, podemos a princípio prever que a função 3.0.1 também desempenha um papel primordial nessa teoria, já que podemos reescrever 3.1.1 como

$$P_n(\zeta) = \prod_{k=1}^n \omega(\zeta, \alpha_k).$$

Em resumo, todo polinômio mônico admite uma única decomposição como produto de monômios, o que sugere o termo *prima* para designar a função ω tal como definida em 3.0.1, em analogia ao teorema fundamental da aritmética. Ainda, tal decomposição depende apenas da localização dos zeros do polinômio.

Ainda, o mesmo teorema fundamental da álgebra nos garante que toda função racional

$$Q_{m,n}(\zeta) = \frac{a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_m \zeta^m}{b_0 + b_1 \zeta + \dots + b_n \zeta^n}.$$

definida no plano complexo estendido pode ser escrita como

$$Q_{m,n}(\zeta) = \frac{\prod_{k=1}^m \omega(\zeta, \alpha_k)}{\prod_{k=1}^n \omega(\zeta, \beta_k)}. \quad (3.1.2)$$

onde $\{\alpha_k : 1 \leq k \leq m\}$ são as raízes e $\{\beta_k : 1 \leq k \leq n\}$ são os polos de $Q_{m,n}$.

Funções racionais são exemplos do que chamamos de *função meromorfa*, que são aquelas cujas únicas singularidades são polos. Assim, o que fizemos até então foi

mostrar que, à esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, está associada uma função, aqui denotada por $\omega(\cdot, \cdot)$, a partir da qual podemos decompor certas funções meromorfas. Note que a nossa *função prima* $\omega(\cdot, \cdot)$ está intrinsecamente ligada a um domínio do tipo circular: de fato, um dos modelos mais conhecidos para a esfera de Riemann tem como ponto de partida o disco unitário $D_1(0)$, mas não entraremos em detalhes aqui.

Prosseguindo, uma pergunta natural a essa altura é: o que acontece com funções definidas em superfícies com mais alças do que $\hat{\mathbb{C}}$? Surpreendentemente, toda função meromorfa numa tal superfície possui uma representação muito parecida com 3.1.2 [Cro08b], [Cro10b], onde a função $\omega(\cdot, \cdot)$ é substituída pela chamada *função prima de Schottky-Klein* associada a tal superfície.

A exemplo da relação existente entre o disco unitário e a esfera de Riemann, é possível associar a qualquer domínio multiplamente conexo uma superfície compacta e simétrica chamada de *Schottky double*. Consequentemente, a função prima de Schottky-Klein associada a uma tal superfície está também associada a algum domínio multiplamente conexo do plano complexo. No caso em que o domínio é circular, a função prima possui propriedades interessantíssimas, que fazem dela um objeto de grande importância nesse contexto da teoria das funções.

Passemos agora a formalização desses conceitos.

3.2 Domínios canônicos e domínios circulares

No capítulo anterior, fizemos uso do notável teorema de Riemann (teorema B.4.1) para simplificar o problema de Neumann proposto, transportando-o para um domínio diferente do original. Em situações como essa, a exemplo do que fizemos, convém escolher domínios que simplifiquem a resolução do problema e facilitem a construção da transformação conforme. De acordo com [Neh52], tais domínios são ditos *domínios canônicos*, dentre os quais estão os chamados *domínios circulares*. É sobre tais domínios que a função prima de Schottky-Klein é definida.

Definição 3.2.1. Um *domínio circular* é um domínio $D \subseteq \mathbb{C}$ de conexidade finita tal que todas as componentes do bordo são círculos.

Nestas notas, o domínio canônico (e também circular) de conexidade $M + 1$ a ser utilizado será o disco unitário menos M discos pequenos disjuntos no interior do disco unitário. Denotaremos este conjunto por D_ζ . Nota que, se $M = 0$, então $D_\zeta = D_1(0)$, que nada mais é que o domínio canônico considerado no exemplo da seção anterior.

Definição 3.2.2. O *módulo conforme* de um domínio canônico é o conjunto de parâmetros necessários para se determinar, de maneira única, tal domínio.

Dado um domínio circular qualquer, é fácil determinar o seu módulo conforme, como afirma a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1 O módulo conforme de um domínio circular de conexidade $M + 1$, $M \in \mathbb{N}$, é dado por

$$M_{D_\zeta} = \{(\delta_k, q_k) : k = 0, 1, 2, \dots, M\}, \quad (3.2.1)$$

onde (δ_k, q_k) são, respectivamente, o centro e o raio do k -ésimo círculo.

3.3 Grupos de Schottky

Seja D_ζ um domínio circular de conexidade $M + 1$ e M_{D_ζ} seu módulo conforme, como definido em 3.2.1. Para cada círculo C_j em D_ζ , considere a transformação $\phi_j : C_j \rightarrow \mathbb{C}$

$$\phi_j(\zeta) = \bar{\zeta}. \quad (3.3.1)$$

Esta função ϕ_j é dita *transformação de conjugação* de C_j . Note que

$$\phi_j(\zeta) = \bar{\delta}_j + \frac{q_j^2}{(\zeta - \delta_j)}. \quad (3.3.2)$$

De fato, se $\zeta \in C_j$, então

$$|\zeta - \delta_j|^2 = q_j^2.$$

Assim,

$$\overline{(\zeta - \delta_j)} = \frac{q_j^2}{(\zeta - \delta_j)}$$

e, portanto,

$$\bar{\zeta} = \bar{\delta}_j + \frac{q_j^2}{(\zeta - \delta_j)}.$$

Definamos agora

$$\theta_j(\zeta) = \bar{\phi}_j(\zeta^{-1}). \quad (3.3.3)$$

Usando 3.3.2 podemos escrever

$$\theta_j(\zeta) = \delta_j + \frac{q_j^2 \zeta}{(1 - \bar{\delta}_j \zeta)}. \quad (3.3.4)$$

É fácil ver que $\theta_j(\zeta)$ é uma transformação de Möbius e, portanto é uma transformação conforme. De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned} \theta_j(\zeta) &= \delta_j + \frac{q_j^2 \zeta}{(1 - \bar{\delta}_j \zeta)} \\ &= \frac{\delta_j(1 - \bar{\delta}_j \zeta) + (q_j^2 \zeta)}{(1 - \bar{\delta}_j \zeta)} \\ &= \frac{\delta_j + (q_j^2 - |\delta_j|^2)\zeta}{(1 - \bar{\delta}_j \zeta)}, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

donde segue nossa afirmação.

Proposição 3.3.1 Se C'_j é o círculo obtido pela reflexão de C_j em C_0 , então $\theta_j(C'_j) = C_j$.

Demonstração. Considere $\tilde{\zeta} \in C'_j$. Por hipótese, temos necessariamente que

$$\tilde{\zeta} = \frac{1}{\zeta},$$

onde $\zeta \in C_j$ (inversão em C_0). Portanto,

$$\begin{aligned}\theta_j(\tilde{\zeta}) = \theta_j(1/\zeta) &= \delta_j + \frac{q_j^2}{\bar{\zeta} - \bar{\delta}_j} \\ &= \overline{\phi_j(\zeta)} = \zeta,\end{aligned}$$

ou seja, $\theta_j(\tilde{\zeta}) \in C_j$. Como $\tilde{\zeta}$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $\theta_j(C'_j) \subseteq C_j$. Como θ_j é analítica, o conjunto $\theta_j(C'_j)$ é uma curva fechada e, portanto, devemos ter $\theta_j(C'_j) = C_j$. \square

Proposição 3.3.2 Para todo ζ , temos que:

- a. $\theta_j^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\phi_j(\zeta)}$;
- b. $\theta_j^{-1}(\zeta^{-1}) = \frac{1}{\overline{\theta_j(\zeta)}}$.

Demonstração. A propriedade *a.* é consequência da seguinte conta: fazendo $u = \theta_j(\zeta)$, temos que

$$u = \delta_j + \frac{q_j^2 \zeta}{(1 - \bar{\delta}_j \zeta)}$$

se, e somente se

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{u - \delta_j}{q_j^2 + \bar{\delta}_j(u - \delta_j)} \\ &= \frac{1}{\frac{q_j^2}{(u - \delta_j)} + \bar{\delta}_j} \\ &= \frac{1}{\phi_j(u)}.\end{aligned}$$

Observando que $\zeta = \theta_j^{-1}(u) = \theta_j^{-1}(\theta_j(\zeta))$, concluímos que

$$\theta_j^{-1}(u) = \frac{1}{\phi_j(u)}.$$

Trocando u por ζ , temos a tese.

Já o ítem *b.* segue facilmente de *a.* Com efeito,

$$\theta_j^{-1}(\zeta^{-1}) = \frac{1}{\phi_j(\zeta^{-1})} = \frac{1}{\overline{\phi_j(\overline{\zeta^{-1}})}},$$

onde usamos que $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$, para toda f , na última igualdade. Da equação 3.3.3, temos que

$$\frac{1}{\overline{\phi_j(\overline{\zeta^{-1}})}} = \frac{1}{\theta_j(\bar{\zeta})}.$$

Uma vez que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, concluímos que

$$\frac{1}{\theta_j(\bar{\zeta})} = \frac{1}{\overline{\theta_j(\zeta)}},$$

o que conclui a demonstração. \square

Definição 3.3.1. Sejam D_ζ um domínio circular de conexidade $M + 1$, M_{D_ζ} seu módulo conforme e $\{\theta_j\}$ como em 3.3.4. Definimos o *grupo de Schottky clássico*³ Θ como sendo o grupo livre infinito gerado pelas composições das $2M$ transformações de Möbius $\theta_j, \theta_j^{-1}, j = 1, 2, 3, \dots, M$, incluindo a identidade. Ou seja,

$$\Theta = [Id, \theta_1, \dots, \theta_M, \theta_1^{-1}, \dots, \theta_M^{-1}]. \quad (3.3.6)$$

Notação. No decorrer do texto, faremos uso dos seguintes subgrupos do grupo de Schottky:

- ${}_i\Theta_j$ denotará o conjunto das transformações $\psi \in \Theta$ que não possuem uma potência⁴ positiva ou negativa de θ_i à esquerda e uma potência positiva ou negativa de θ_j à direita. Ou seja, $\psi \in {}_i\Theta_j$ se, e somente se

$$\psi = \theta_{m_1}^{k_1} \circ \phi \circ \theta_{m_2}^{k_2}, \quad (3.3.7)$$

com $m_1 \neq i, m_2 \neq j$ e $\phi \in \Theta$.

- Θ' denotará o grupo de Schottky menos a identidade, isto é

$$\Theta' = \Theta \setminus \{Id\}. \quad (3.3.8)$$

- Θ'' denota o grupo de Schottky menos a identidade e todas as combinações das inversas θ_j^{-1} . Ou seja, se $\phi \in \Theta''$, então $\phi^{-1} \notin \Theta''$. Por exemplo, $\theta_1 \circ \theta_2^{-1}$ pertence a Θ'' , mas $\theta_2^{-1} \circ \theta_1^{-1}$ não.

Para menção futura, iremos categorizar todas as possíveis composições das transformações θ_j em *níveis*:

Nível 0: $\{Id\}$

Nível 1: $\{\theta_j, \theta_j^{-1}, j = 1, \dots, M\}$

Nível n: Define-se recursivamente, da seguinte maneira:

é o conjunto das transformações da forma $\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n$, onde ϕ_j pertence ao nível 1, para todo j , e $\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n$ não pertence a nenhum dos n níveis anteriores.

3.4 A função prima de Schottky-Klein

Em posse dos conceitos e resultados apresentados até então, estamos em condições de introduzir o pilar da nossa teoria. Começemos pela definição mais importante desse capítulo.

³*Grupos de Schottky*, em termos gerais, são grupos de transformações construídas sobre pares de curvas de Jordan disjuntas. Tais grupos são ditos *clássicos* quando as curvas de Jordan utilizadas na construção são círculos [Mar05].

⁴Com relação a operação de composição.

Definição 3.4.1 (Função prima de Schottky-Klein). Sejam D_ζ um domínio circular de conexidade $M + 1$, M_{D_ζ} seu módulo conforme e Θ o grupo de Schottky clássico associado. Definimos a *função prima de Schottky-Klein* por

$$\omega(\zeta, \gamma) = (\zeta - \gamma)\omega'(\zeta, \gamma), \quad (3.4.1)$$

onde

$$\omega'(\zeta, \gamma) = \prod_{\theta \in \Theta''} \frac{(\theta(\zeta) - \gamma)(\theta(\gamma) - \zeta)}{(\theta(\zeta) - \zeta)(\theta(\gamma) - \gamma)}. \quad (3.4.2)$$

Note que os termos do produtório 3.4.2 são, na verdade, as razões cruzadas dos argumentos ζ , $\theta(\zeta)$, γ e $\theta(\gamma)$. Assim, podemos reescrever ω' como

$$\omega'(\zeta, \gamma) = \prod_{\theta \in \Theta''} (\zeta, \theta(\zeta), \gamma, \theta(\gamma)). \quad (3.4.3)$$

Do ponto de vista computacional, o cálculo de $\omega(., .)$ depende crucialmente da convergência do produtório 3.4.3. Embora a função prima de Schottky-Klein esteja definida para todo ζ , ainda não é sabido se o produtório acima converge para todo módulo conforme M_{D_ζ} e, mesmo quando há a convergência, ela pode ocorrer muito devagar, o que na prática inviabiliza o cálculo [Cro10b].

Quando convergente, o produtório da equação 3.4.1 define⁵ uma função analítica e univalente em todo o domínio D_ζ , a qual possui um zero simples em $\zeta = \gamma$ e em todos os outros $\theta(\gamma)$, para toda transformação $\theta \in \Theta''$.

Recentemente, D. Crowdy e J. Marshall apresentaram uma maneira de contornar o problema da convergência do produtório [CM07]. Eles desenvolveram um novo algoritmo, baseado na representação da série de Laurent da função. O algoritmo funciona escrevendo-se

$$X(\zeta, \gamma) = (\zeta - \gamma)^2 \hat{X}(\zeta, \gamma) \quad (3.4.4)$$

onde $X(\zeta, \gamma) = (\omega(\zeta, \gamma))^2$, e calculando-se os coeficientes $\{c_m^{(k)}, d_m^{(k)}\}$ num truncamento da seguinte série de Laurent para $\hat{X}(\zeta, \gamma)$:

$$\hat{X}(\zeta, \gamma) = A \left(1 + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^{(k)} q_k^m}{(\zeta - \delta_k)^m} + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m^{(k)} Q_k^m}{(\zeta - \delta'_k)^m} \right) \quad (3.4.5)$$

onde Q_k e δ'_k são, respectivamente, o centro e o raio do círculo C'_k . Observe que o cálculo acima *não depende* do grupo de Schottky clássico associado a D_ζ .

A função prima de SK satisfaz diversas relações funcionais e possui uma variedade de propriedades algébricas e analíticas (veja [Bak95]). As próximas proposições, enunciadas a título de ilustração, destacam algumas delas.

Proposição 3.4.1 A função prima de Schottky-Klein é antissimétrica em seus argumentos, ou seja,

$$\omega(\zeta, \gamma) = -\omega(\gamma, \zeta). \quad (3.4.6)$$

⁵Na prática, o cálculo da equação 3.4.1 é feito truncando-se o produtório em algum nível k finito, segundo a categorização feita no final da última seção.

Demonstração. É suficiente mostrar que $\omega'(\gamma, \zeta) = \omega'(\zeta, \gamma)$, uma vez que

$$\omega(\gamma, \zeta) = (\gamma - \zeta)\omega'(\gamma, \zeta) = -(\zeta - \gamma)\omega'(\gamma, \zeta).$$

No entanto, não é difícil ver que a igualdade vale. Da definição 3.4.2, temos que

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta, \gamma) &= \prod_{\theta \in \Theta''} \frac{(\theta(\zeta) - \gamma)(\theta(\gamma) - \zeta)}{(\theta(\zeta) - \zeta)(\theta(\gamma) - \gamma)} \\ &= \prod_{\theta \in \Theta''} \frac{(\theta(\gamma) - \zeta)(\theta(\zeta) - \gamma)}{(\theta(\gamma) - \gamma)(\theta(\zeta) - \zeta)} \\ &= \omega'(\gamma, \zeta), \end{aligned}$$

onde apenas permutamos os termos do numerador e os termos do denominador do termo geral do produto. \square

Proposição 3.4.2 Vale que

$$\frac{\omega(\theta_j(\zeta), \gamma_1)}{\omega(\theta_j(\zeta), \gamma_2)} = \beta_j(\gamma_1, \gamma_2) \frac{\omega(\zeta, \gamma_1)}{\omega(\zeta, \gamma_2)}, \quad (3.4.7)$$

onde

$$\beta_j(\gamma_1, \gamma_2) = \prod_{\theta \in \Theta_j} \frac{(\gamma_1 - \theta(B_j))(\gamma_2 - \theta(A_j))}{(\gamma_1 - \theta(A_j))(\gamma_2 - \theta(B_j))}, \quad (3.4.8)$$

sendo A_j e B_j pontos fixos da transformação θ_j , ou seja,

$$\theta_j(A_j) = A_j \text{ e } \theta_j(B_j) = B_j \quad (3.4.9)$$

com $j = 1, \dots, M$.

Demonstração. Veja o capítulo 12 de [Bak95]. \square

Observação 3.4.1. É possível mostrar (veja [CM06a], [CM05]) que as constantes A_j e B_j satisfazem

$$\frac{\theta_j(\zeta) - A_j}{\theta_j(\zeta) - B_j} = \mu_j e^{i\kappa_j} \frac{\zeta - A_j}{\zeta - B_j}, \quad (3.4.10)$$

para constantes reais μ_j, κ_j . As raízes A_j e B_j acima são ordenadas de modo que $|\mu_j| < 1$.

Proposição 3.4.3 Sejam $\{C_j, C'_j\}$ os círculos construídos na proposição 3.2. Tal distribuição satisfaz

$$\bar{\omega}(\zeta^{-1}, \gamma^{-1}) = -\frac{1}{\zeta\gamma} \omega(\zeta, \gamma), \quad (3.4.11)$$

onde $\bar{\omega}(\zeta, \gamma) = \overline{\omega(\bar{\zeta}, \bar{\gamma})}$.

Demonstração. Veja o apêndice A de [CM05]. \square

A função prima de SK num domínio duplamente conexo

Uma vez que todo domínio duplamente conexo é conformalmente equivalente ao anel $A_\rho(0)$, para algum número real $0 < \rho < 1$, segue de 3.3.4 que a única transformação de Möbius associada é dada por $\theta_1(\zeta) = \rho^2\zeta$. Portanto, o subgrupo Θ'' do grupo de Schottky clássico associado a $A_\rho(0)$ é gerado por

$$\{\theta_j(\zeta) = \rho^{2j}\zeta : j > 0\}. \quad (3.4.12)$$

Substituindo na expressão 3.4.1, é possível mostrar com um pouco de álgebra que

$$\omega(\zeta, \gamma) = -\frac{\gamma}{C^2}P(\zeta/\gamma, \rho), \quad (3.4.13)$$

onde

$$C = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \rho^{2k}) \text{ e} \quad (3.4.14)$$

$$P(\zeta, \rho) = (1 - \zeta) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \rho^{2k}\zeta)(1 - \rho^{2k}\zeta^{-1}). \quad (3.4.15)$$

É possível mostrar ainda que o produtório em 3.4.15 converge para todo $\zeta \neq 0$ e para todos os valores de ρ entre 0 e 1 e, portanto, define uma função analítica em todo o anel. Assim, P possui também uma representação em série de Laurent nesse domínio. Ela é dada [Cro10a] por

$$P(\zeta, \rho) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \rho^{n(n-1)} \zeta^n, \quad (3.4.16)$$

onde

$$A = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \rho^{2k})^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k(k-1)}}. \quad (3.4.17)$$

A função prima de SK num domínio multiplamente conexo

Baseados no algoritmo reportado nas equações 3.4.4 e 3.4.5, D. Crowdy e C. Green desenvolveram uma biblioteca em MATLAB®, que pode ser usada para calcular a função prima de SK para domínios de com qualquer conectividade. O pacote com as funções da biblioteca, bem como instruções sobre o seu uso, podem ser encontradas em [CG].

Capítulo 4

Um Cálculo Para a Mecânica dos Fluidos Bidimensional

"We refer to the framework described here as a calculus because, as in standard calculus, the introduction of just few basic special functions, together with their defining properties, provides the means to construct a rich variety of more complicated functions and solutions to more difficult problems. The same is true for the new calculus here."

D. G. Crowdy, 2010 [Cro10a].

4.1 Vórtices pontuais

Retomemos o problema que introduzimos, a título de motivação, no capítulo 2. Na ocasião, encontramos o potencial complexo do escoamento gerado por um vórtice pontual na presença de um corpo rígido de geometria arbitrária (equação 2.0.5). Suponha agora que, além do corpo rígido em questão, há outros M corpos rígidos e estacionários em D_z (ou, equivalentemente, que há M “buracos” circulares em D_ζ). O que acontece se colocarmos um vórtice pontual de circulação unitária em um ponto $\alpha \in D_\zeta$? A resposta para esta questão está no teorema abaixo e justifica toda a abordagem em teoria de funções feita no capítulo 3.

Teorema 4.1.1 (D. G. Crowdy, J. S. Marshall, 2005). O potencial para este caso é dado por

$$G_0(\zeta, \alpha) = -\frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{|\alpha| \omega(\zeta, 1/\bar{\alpha})} \right), \quad (4.1.1)$$

onde $\omega(\zeta, \alpha)$ é a função prima de Schottky-Klein associada ao domínio circular em questão. Além disso, este potencial induz uma circulação igual a -1 em C_0 e igual a 0 em C_j , $j = 1, \dots, M$.

A prova dess teorema demanda o uso de conceitos não abordados nesta monografia e portanto não sera feita aqui. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada na seção 6 de [CM05].

Como corolário, decorrem resultados semelhantes aos obtidos no capítulo 2. Com efeito, temos que o potencial associado à presença de N vórtices pontuais em D_ζ é

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k G_0(\zeta, \alpha_k), \quad (4.1.2)$$

onde α_k e Γ_k denotam, respectivamente, a posição e a circulação do k -ésimo vórtice. Para alterar a circulação em torno de C_0 , basta colocar um vórtice em $\zeta = \beta$ com a circulação desejada. Por outro lado, para alterar a circulação em C_j , devemos considerar para cada $j = 1, \dots, M$ o potencial

$$G_j(\zeta, \beta) = -\frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{|\alpha| \omega(\zeta, \theta_j(1/\alpha))} \right). \quad (4.1.3)$$

Essa função produz circulação igual a -1 em torno do j -ésimo contorno, sem alterar a circulação nos demais. Aqui, $\theta_j(\zeta)$ denota o j -ésimo elemento gerador do grupo de Schottky associado a D_ζ , tal como definido na equação 3.3.3.

Combinando os resultados acima, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.1.2 Suponha a presença de N vórtices pontuais em D_ζ , cada um com circulação igual a Γ_k , $k = 1, \dots, N$. Suponha ainda que a circulação em torno de C_j é igual a Γ_{C_j} , $j = 0, \dots, M$. Então, o potencial complexo $W(\zeta)$ para este problema é igual a

$$W(\zeta) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k (G_0(\zeta, \alpha_k) - G_0(\zeta, \beta)) - \sum_{j=0}^M \Gamma_{C_j} G_j(\zeta, \beta). \quad (4.1.4)$$

4.2 Escoamento uniforme

Suponhamos a existência de um escoamento uniforme U em D_z , com ângulo de incidência χ com respeito ao eixo x real, o qual é perturbado pela presença de $M + 1$ corpos rígidos e estacionários - aqui, o j -ésimo corpo será denotado por B_j . No espírito do capítulo 2, resolver tal problema é equivalente a encontrar um potencial complexo $w(z)$ tal que

$$w(z) \sim U e^{-i\chi} z + \mathcal{O}(1), \text{ quando } z \rightarrow \infty \quad (4.2.1a)$$

satisfazendo

$$\text{Im}[w(z)] = c_j \text{ em } \partial B_j, \text{ onde } c_j \text{ é uma constante.} \quad (4.2.1b)$$

Os valores de c_j dependem apenas da circulação em torno de cada obstáculo.

Para transportar este problema para o domínio circular associado, lembremos que uma transformação conforme entre D_z e D_ζ tem necessariamente um polo simples em algum ponto $\beta \in D_\zeta$. Portanto, no entorno deste ponto, tal transformação tem a seguinte forma

$$z(\zeta) = \frac{a}{\zeta - \beta} + \mathcal{O}(1), \quad (4.2.2)$$

onde β é a pré-imagem de $z = \infty$ e a é uma constante a ser determinada - e, que, pelo teorema de Riemann (teorema B.4.2), pode ser suposta real.

Assim, em posse da transformação conforme $z(\zeta)$, basta encontrar uma função $W_D(\zeta, \beta) = w(z(\zeta))$ tal que

$$W_D(\zeta, \beta) \sim U e^{-ix} \left(\frac{a}{\zeta - \beta} \right) + \mathcal{O}(1), \text{ quando } \zeta \rightarrow \beta \quad (4.2.3a)$$

satisfazendo

$$Im[W_D(\zeta, \beta)] = \tilde{c}_j \text{ em } C_j, \text{ onde } \tilde{c}_j \text{ é uma constante.} \quad (4.2.3b)$$

Supreendentemente, a solução para este problema é a mesma encontrada no teorema 2.0.1. Tal é o conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 4.2.1 (D. G. Crowdy, 2006). O potencial para este caso é dado por

$$W_D(\zeta, \beta) = 2\pi U ai \left[e^{ix} \frac{\partial}{\partial \alpha} - e^{-ix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] G_0(\zeta, \alpha) \Big|_{\alpha=\beta}, \quad (4.2.4)$$

onde $G_0(\zeta, \alpha)$ é a função definida em 4.1.1.

Demonstração. A prova deste teorema é uma simples extensão daquela que apresentamos no teorema 2.0.1 para o caso simplesmente conexo. Como lá, usaremos o fato que a função $G_0(\zeta, \alpha)$ possui uma singularidade logarítmica em $\zeta = \alpha$ para construir uma função com um polo simples nesse ponto.

Para este fim, considere primeiramente a função

$$\phi_1(\zeta, \alpha) = 4\pi \frac{1}{i} \frac{\partial G_0}{\partial \alpha_y}(\zeta, \alpha).$$

Note que, devido à diferenciação, $\phi_1(\zeta, \alpha)$ possui um polo simples, com resíduo unitário, em $\zeta = \alpha$. Uma vez que $Im[G_0(\zeta, \alpha)] = d_j$ em C_j , para todo j , onde \tilde{d}_j são constantes, concluímos que

$$Im[\phi_1(\zeta, \alpha)] = d_j \text{ em } C_j, \text{ para } j = 0, \dots, M.$$

onde $\{d_j \in \mathbb{C} : j = 0, \dots, M\}$ é um conjunto de constantes.

É importante observar que todas estas afirmações são válidas apenas porque derivamos $G_0(\zeta, \alpha)$ *parametricamente* com respeito à variável real α_y , e não com respeito às variáveis complexas ζ ou α . Note ainda que $\phi_1(\zeta, \alpha)$ não possui singularidade de tipo logaritmo e, portanto, está bem definida (isto é, não possui ramos). Considere agora a função

$$\phi_2(\zeta, \alpha) = 4\pi \frac{\partial G_0}{\partial \alpha_x}(\zeta, \alpha).$$

O mesmo argumento mostra que $\phi_2(\zeta, \alpha)$ está bem definida, tem um polo simples em $\zeta = \alpha$ com resíduo unitário e que

$$Im[i\phi_2(\zeta, \alpha)] = e_j \text{ em } C_j, \text{ para } j = 0, \dots, M,$$

onde $\{e_j \in \mathbb{C} : j = 0, \dots, M\}$ é um conjunto de constantes.

Agora, em posse das funções $\phi_1(\zeta, \alpha)$ e $\phi_2(\zeta, \alpha)$, considere a função

$$\Phi_\chi(\zeta, \alpha) = \cos \chi \phi_1(\zeta, \alpha) - i \sin \chi \phi_2(\zeta, \alpha)$$

Note que esta função está bem definida e tem um polo simples em $\zeta = \alpha$, uma vez que ambas $\phi_1(\zeta, \alpha)$ e $\phi_2(\zeta, \alpha)$ assim o são. Além disso, em $\zeta = \alpha$, temos que

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\zeta=\alpha}[\Phi_\chi(\zeta, \alpha)] &= \text{Res}_{\zeta=\alpha}[\cos \chi \phi_1(\zeta, \alpha) - i \sin \chi \phi_2(\zeta, \alpha)] \\ &= \text{Res}_{\zeta=\alpha}[\cos \chi \phi_1(\zeta, \alpha)] + \text{Res}_{\zeta=\alpha}[-i \sin \chi \phi_2(\zeta, \alpha)] \\ &= \cos \chi \text{Res}_{\zeta=\alpha}[\phi_1(\zeta, \alpha)] - i \sin \chi \text{Res}_{\zeta=\alpha}[\phi_2(\zeta, \alpha)] \\ &= \cos \chi - i \sin \chi = e^{-i\chi}. \end{aligned}$$

Ainda, sendo $\Phi_\chi(\zeta, \alpha)$ uma combinação linear de ϕ_1 e ϕ_2 , segue que

$$\text{Im}[\Phi_\chi(\zeta, \alpha)] = \cos \chi e_j - \sin \chi d_j \text{ em } C_j, \text{ para } j = 0, \dots, M.$$

Segue, portanto, que o potencial complexo $W_D(\zeta, \beta)$ para o escoamento uniforme de velocidade U , a qual faz um ângulo χ com o eixo real, é dado por

$$W_D(\zeta, \beta) = Ua\Phi_\chi(\zeta, \alpha)|_{\alpha=\beta},$$

uma vez que esta função tende a $Ue^{-i\chi}z$ quando $z \rightarrow \infty$.

Por fim, devido às identidades de Cauchy-Riemann (ver equações A.4.1 e A.4.2), podemos reescrever

$$W_D(\zeta, \beta) = 2\pi Uai \left[e^{i\chi} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} - e^{-i\chi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] G_0(\zeta, \alpha) \Big|_{\alpha=\beta},$$

o que completa a demonstração. \square

O caso duplamente conexo

Para o caso em que temos dois corpos rígidos presentes, podemos usar os resultados obtidos no capítulo anterior. Nesse caso, podemos escolher D_ζ como sendo igual a $A_\rho(0)$, com $0 < \rho < 1$ a ser determinado, de modo que,

$$\omega(\zeta, \alpha) = -\frac{\alpha}{C} P(\zeta/\alpha, \rho), \quad (4.2.5)$$

onde

$$C = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \rho^{2k}) \text{ e} \quad (4.2.6)$$

$$P(\zeta, \rho) = (1 - \zeta) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \rho^{2k} \zeta)(1 - \rho^{2k} \zeta^{-1}). \quad (4.2.7)$$

Nessas condições, obtemos

$$\begin{aligned}
G_0(\zeta, \alpha) &= -\frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{|\alpha|\omega(\zeta, 1/\bar{\alpha})} \right) \\
&= -\frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{|\alpha|P(\zeta/\alpha, \rho)}{P(\zeta\bar{\alpha}, \rho)} \right) \\
&= -\frac{i}{2\pi} (\log(|\alpha|) + \log(P(\zeta/\alpha, \rho)) - \log(P(\zeta\bar{\alpha}, \rho))) \\
&= -\frac{i}{2\pi} \left(1/2 \log(|\alpha|^2) + \log(P(\zeta/\alpha, \rho)) - \log(P(\zeta\bar{\alpha}, \rho)) \right)
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Derivando a expressão acima com respeito à α e $\bar{\alpha}$, observando que $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$ e substituindo o resultado em 4.2.4, chegamos a

$$W_D(\zeta, \beta) = Ua \left(e^{ix} \frac{1}{\beta} - e^{-ix} \frac{1}{\beta} \right) + Ua \left(e^{-ix} \frac{1}{\beta} K(\zeta\beta^{-1}, \rho) - e^{ix} \frac{1}{\beta} K(\zeta\bar{\beta}, \rho) \right),$$

onde introduzimos a notação

$$K(\zeta, \rho) = \zeta \frac{P_\zeta(\zeta, \rho)}{P(\zeta, \rho)}, \tag{4.2.9}$$

sendo $P_\zeta(\zeta, \rho)$ a derivada de P com respeito a ζ . Ainda, como observamos anteriormente, estamos livres para especificar o polo β (pelo teorema de Riemann). Logo, se considerarmos $\beta \in \mathbb{R}$, chegamos a

$$W_D(\zeta, \beta) = \frac{Uai}{\beta} \sin \chi + \frac{Ua}{\beta} \left(e^{-ix} K(\zeta\beta^{-1}, \rho) - e^{ix} K(\zeta\beta, \rho) \right). \tag{4.2.10}$$

Esta é a expressão para o potencial gerado por um escoamento uniforme de um fluido na presença de dois corpos rígidos de geometria arbitrária, tal como apresentada na seção 3.2 de [Cro06a].

4.3 Straining flows: escoamentos de ordem superior

É possível generalizar o procedimento anterior para obter potenciais de ordem superior a partir da função $G_0(\zeta, \alpha)$. Por exemplo, para determinar o escoamento de ordem 2, devemos procurar por uma função $s(z)$ tal que

$$s(z) \sim \Omega e^{-i\lambda} z^2 + \mathcal{O}(1), \text{ quando } z \rightarrow \infty \tag{4.3.1a}$$

satisfazendo

$$\text{Im}[s(z)] = c_j \text{ em } \partial B_j, \text{ onde } c_j \text{ é uma constante.} \tag{4.3.1b}$$

ou, equivalentemente

$$S(\zeta, \beta) \sim \Omega e^{-i\lambda} \left(\frac{a}{\zeta - \beta} \right)^2 + \mathcal{O}(1), \text{ quando } \zeta \rightarrow \beta \tag{4.3.2a}$$

satisfazendo

$$\operatorname{Im}[S(\zeta, \beta)] = \tilde{c}_j \text{ em } C_j, \text{ onde } \tilde{c}_j \text{ é uma constante,} \quad (4.3.2b)$$

onde $S(\zeta) = s(z(\zeta))$, sendo $z(\zeta)$ a transformação conforme entre D_ζ e D_z , cujo comportamento em torno do polo β é dado por 4.2.2.

Teorema 4.3.1 (D. G. Crowdy, 2010). O potencial para este caso é dado por

$$S(\zeta, \Omega) = 2\pi\Omega a^2 i \left[e^{i\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}^2} - e^{-i\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] G_0(\zeta, \alpha) \Big|_{\alpha=\beta}, \quad (4.3.3)$$

onde $G_0(\zeta, \alpha)$ é a função definida em 4.1.1.

Demonstração. A prova deste fato é uma sinopse daquela apresentada para o teorema 4.2.1. Primeiro, considere as funções

$$\phi_1(\zeta, \alpha) = \frac{\partial^2 G_0}{\partial \alpha_x^2}(\zeta, \alpha) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \alpha^2}(\zeta, \alpha) + \frac{\partial^2 G_0}{\partial \bar{\alpha}^2}(\zeta, \alpha) + 2 \frac{\partial^2 G_0}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}}(\zeta, \alpha) \right),$$

$$\phi_2(\zeta, \alpha) = \frac{\partial^2 G_0}{\partial \alpha_y^2}(\zeta, \alpha) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \alpha^2}(\zeta, \alpha) + \frac{\partial^2 G_0}{\partial \bar{\alpha}^2}(\zeta, \alpha) - 2 \frac{\partial^2 G_0}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}}(\zeta, \alpha) \right),$$

$$\psi_1(\zeta, \alpha) = -8\pi i \frac{\partial^2 G_0}{\partial \alpha_x \partial (i\alpha_y)}(\zeta, \alpha) = -2\pi i \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \alpha^2}(\zeta, \alpha) - \frac{\partial^2 G_0}{\partial \bar{\alpha}^2}(\zeta, \alpha) \right),$$

onde usamos as relações (operadores) de Cauchy-Riemann para desenvolver as expressões. Note que as funções acima satisfazem as condições de contorno do enunciado. Quanto às singularidades, note que ϕ_1 e ϕ_2 possuem uma singularidade do tipo δ de Dirac, mas que

$$\psi_2(\zeta, \alpha) = -8\pi i \frac{1}{2} (\phi_2(\zeta, \alpha) - \phi_1(\zeta, \alpha)) = -2\pi i \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \alpha^2}(\zeta, \alpha) + \frac{\partial^2 G_0}{\partial \bar{\alpha}^2}(\zeta, \alpha) \right)$$

possui um polo de ordem 2 em α , com intensidade igual a 1. Ainda, a função $\psi_1(\zeta, \alpha)$ acima partilha dessa mesma propriedade. Considere agora a função

$$\Omega(\cos \lambda \psi_1(\zeta, \alpha) - i \sin \lambda \psi_2(\zeta, \alpha)).$$

Esta função tem um polo de ordem 2 em α , cuja intensidade é igual a $\Omega e^{-i\lambda}$ e, portanto é uma solução para o problema proposto. Por fim, multiplicando a função acima por a^2 , podemos reescrevê-la como

$$S(\zeta, \Omega) = 2\pi\Omega a^2 i \left[e^{i\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}^2} - e^{-i\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] G_0(\zeta, \alpha) \Big|_{\alpha=\beta},$$

o que completa a demonstração. \square

Observação 4.3.1. É importante observar que o potencial $S(\zeta, \beta)$ poderá eventualmente conter polos de ordem menor no infinito - polo de ordem 1, nesse caso. O efeito disso é que, sobre o escoamento de ordem superior, incidirá um escoamento uniforme, igual àquele construído na seção anterior. Assim, para considerarmos apenas o efeito do polo de ordem mais alta, devemos subtrair de $S(\zeta, \beta)$ um múltiplo do potencial W_D .

Essa construção foi feita por D. Crowdy em 2010 [Cro10a], e sua técnica pode ser usada para se construir potenciais de ordem mais alta - observação feita pelo mesmo já em 2006 [Cro06a]. No entanto, este argumento não permite a construção de um potencial de ordem n arbitrária, uma vez que ela requer o cálculo explícito das expressões das derivadas paramétricas de G_0 para construir as funções auxiliares (no teorema 4.3.1 acima, tais são ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 e ψ_2). Ainda, observe que para construir um potencial de ordem n , precisaríamos calcular $n + 1$ funções auxiliares, e depois combiná-las de modo a cancelar as singularidades - combinações que variam de acordo com a ordem do potencial. No entanto, esta dificuldade pode ser contornada. Considere, portanto, o problema de se encontrar um escoamento potencial de ordem n no mesmo domínio D_z em questão. Matematicamente, buscamos por uma função w_n tal que

$$w_n(z) \sim \Omega_n e^{-i\lambda_n z^n} + \mathcal{O}(1), \text{ quando } z \rightarrow \infty \quad (4.3.5a)$$

satisfazendo

$$\text{Im}[w_n(z)] = c_j \text{ sobre } \partial B_j, \text{ onde } c_j \text{ é uma constante.} \quad (4.3.5b)$$

Como antes, os valores c_j dependem apenas da circulação em torno dos corpos rígidos.

A fim de transportar este problema para o domínio circular associado, considere z a transformação conforme que mapeia D_ζ em D_z , a qual satisfaz a relação 4.2.2.

Assim, em posse da transformação conforme $z(\zeta)$, é suficiente (equivalente, de fato) encontrar uma função $W_n(\zeta, \beta) = w(z(\zeta))$ tal que

$$W_n(\zeta, \beta) \sim \Omega_n e^{-i\lambda_n \left(\frac{a}{\zeta - \beta}\right)^n} + \mathcal{O}(1), \text{ quando } \zeta \rightarrow \beta \quad (4.3.6a)$$

satisfazendo

$$\text{Im}[W_n(\zeta, \beta)] = \tilde{c}_j \text{ sobre } C_j, \text{ onde } \tilde{c}_j \text{ é uma constante.} \quad (4.3.6b)$$

A existência de uma tal função é garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 4.3.2 O potencial complexo para este caso é dado por

$$W_n(\zeta, \beta) = 2\pi\Omega_n a^n \left[e^{i\lambda_n} \frac{\partial^n}{\partial \bar{\alpha}^n} - e^{-i\lambda_n} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \right] G_0(\zeta, \alpha) \Big|_{\alpha=\beta}, \quad (4.3.7)$$

onde $G_0(\zeta, \alpha)$ é a função definida em 4.1.1.

Demonstração. Primeiramente, escreva $\alpha = \alpha_x + i\alpha_y$. Agora, defina

$$\phi_j(\zeta, \alpha) = (-i)^j \frac{\partial^{n-j}}{\partial \alpha_x^{n-j}} \frac{\partial^j}{\partial \alpha_x^j} G_0(\zeta, \alpha)$$

$$\psi_j(\zeta, \alpha) = (i)^j \frac{\partial^{n-j}}{\partial \alpha_x^{n-j}} \frac{\partial^j}{\partial \alpha_x^j} G_0(\zeta, \alpha)$$

para $j = 0, \dots, n$. Observe que, uma vez que tomamos **derivadas paramétricas e reais** de G_0 , segue que $Im[\phi_j(\zeta, \alpha)]$ e $Im[\psi_j(\zeta, \alpha)]$ são constantes sobre cada círculo C_k . Considere agora as seguintes funções

$$\phi(\zeta, \alpha) = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell (\phi_\ell(\zeta, \alpha) + \psi_\ell(\zeta, \alpha)).$$

$$\psi(\zeta, \alpha) = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell (\phi_\ell(\zeta, \alpha) - \psi_\ell(\zeta, \alpha)).$$

onde

$$\alpha_\ell = \binom{n}{\ell} = \frac{n!}{(n-\ell)!\ell!}.$$

Das relações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_x} - i \frac{\partial}{\partial \alpha_y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_x} + i \frac{\partial}{\partial \alpha_y} \right)$$

concluimos que

$$\phi(\zeta, \alpha) = \left[\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} + \frac{\partial^n}{\partial \bar{\alpha}^n} \right] G_0(\zeta, \alpha) \text{ e } \psi(\zeta, \alpha) = \left[\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} - \frac{\partial^n}{\partial \bar{\alpha}^n} \right] G_0(\zeta, \alpha).$$

Finalmente, defina

$$W_n(\zeta, \alpha) = 2\pi\Omega_n a^n [-\psi(\zeta, \alpha) \cos \lambda_n + i\phi(\zeta, \alpha) \sin \lambda_n].$$

A função W_n acima possui todas as propriedades estabelecidas no teorema acima e pode ser reescrita como em 4.3.7, o que completa a demonstração. \square

É a primeira vez que a construção de um potencial complexo de ordem e intensidades arbitrárias para o problema em questão é explicitamente exibido. Veja ainda que $W_1(\zeta, \beta) = W_D(\zeta, \beta)$ e $W_2(\zeta, \beta) = S(\zeta, \beta)$ e, portanto, essa construção generaliza àquelas dos teoremas 4.2.1 e 4.3.1.

Além disso, este resultado possui duas consequências importantes para a mecânica dos fluidos no nosso contexto. Do ponto de vista teórico, o teorema acima nos permite obter o potencial complexo devido a *qualquer escoamento incidente*, uma vez que todo potencial no plano pode ser escrito como uma soma de polos.

Do ponto de vista prático, esse teorema viabiliza a elaboração de uma biblioteca computacional para escoamentos de ordem arbitrária, já que podemos calcular os potenciais diretamente da expressão 4.3.7.

Observação 4.3.2. O potencial $W_n(\zeta, \beta)$ (de ordem n) acima pode envolver escoamentos de ordem mais baixa ($n-1, n-2, \dots$). No entanto, estes podem ser subtraídos usando-se as funções W_j , com $j < n$, obtidas a partir do mesmo teorema.

4.4 Corpos rígidos em movimento

Até então, tratamos o problema da introdução supondo que os corpos rígidos estão em repouso, isto é, que $U_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, M$. Mas, e o que acontece no caso em que os corpos estão em movimento? Para responder a esta questão, deixaremos de lado a nossa função $G_0(\zeta, \alpha)$ e recorreremos a definição matemática do problema: buscamos por uma função ϕ tal que

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.4.1a)$$

$$\nabla \phi \cdot n = U_j \cdot n \text{ em } \partial B_j, \text{ para todo } j. \quad (4.4.1b)$$

Nossa tarefa aqui então será encontrar uma expressão geral para o potencial complexo associado ao campo de velocidades \mathbf{u} gerado por este escoamento. Para tanto, mostraremos que este problema, particular em mecânica dos fluidos, é na verdade equivalente a um famoso problema em teoria do potencial, a saber, o *problema de Schwarz*, introduzido no apêndice D.

Observação 4.4.1 (Circulação). É importante notar que, devido a multipla conexidade da região D_z , temos $M + 1$ graus de liberdade para especificar a circulação em torno de cada um dos corpos rígidos.

A fim de usar os resultados apresentados no apêndice A para resolver o problema acima, tratemos de reescrevê-lo na linguagem da análise complexa. Suponha que $\mathbf{u} = (u, v)$. No que segue, se $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ for um elemento de \mathbb{R}^2 , então a notação a será usada para denotar o elemento de \mathbb{C} análogo a \mathbf{a} , isto é, $a = a_x + ia_y$. Como apresentado na introdução, encontrar ϕ satisfazendo 4.4.1a e 4.4.1b é equivalente a determinar um potencial complexo $W(z)$ definido em D_z tal que

$$\frac{d}{dz} W(z) = u - iv.$$

No que segue, **suporemos que a circulação em torno de B_j é nula, para todo j .** Com esta hipótese, garantimos que $W(z)$ é univalente e analítica em D_z [Cro08a]. Além disso, $W(z)$ deve satisfazer as condições de contorno definidas em 4.4.1b. Tais condições podem ser reescritas da seguinte maneira: se a notação complexa para o vetor tangente unitário for $z_s = x_x + iy_s$, onde s denota o comprimento de arco, então o vetor normal complexo associado será $-iz_s$. Desta observação, segue que

$$\nabla \phi \cdot n = \operatorname{Re} \left[\frac{dW}{dz} \cdot (-iz_s) \right] \text{ em } \partial B_j, \text{ para todo } j.$$

onde usamos que $a \cdot b = \operatorname{Re}[\bar{a}b]$. De modo semelhante, podemos reescrever o lado direito de 4.4.1b seguinte maneira

$$U_j \cdot n = \operatorname{Re} \left[\bar{U}_j \cdot (-iz_s) \right] \text{ em } \partial B_j, \text{ para todo } j.$$

e, portanto,

$$\operatorname{Re} \left[\frac{dW}{dz} \cdot (-iz_s) \right] = \operatorname{Re} \left[\bar{U}_j \cdot (-iz_s) \right] \text{ em } \partial B_j, \text{ para todo } j.$$

Integrando ambos os lados equação acima com respeito a s , obtemos

$$\int \operatorname{Re} \left[\frac{dW}{dz} \cdot (-iz_s) \right] ds = \operatorname{Re} [-iW(z)] \quad (4.4.2a)$$

$$\int \operatorname{Re} \left[\bar{U}_j \cdot (-iz_s) \right] ds = \operatorname{Re} [-i\bar{U}_j z] + d_j \quad (4.4.2b)$$

onde $\{d_j : j = 0, 1, \dots, M\}$ é um conjunto de constantes - num contexto mais geral, se U_j for função do tempo (isto é, se o regime do escoamento não for o permanente), então d_j também o será, para todo j . Logo,

$$\operatorname{Re} [-iW(z)] = \operatorname{Re} [-i\bar{U}_j z] + d_j \text{ em } \partial B_j, \text{ para todo } j. \quad (4.4.3)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $d_0 = 0$. Assim, o problema pode ser reescrito como

$$\operatorname{Re} [-iW(z)] = \operatorname{Re} [-i\bar{U}_0 z] \text{ em } \partial B_0, \quad (4.4.4a)$$

$$\operatorname{Re} [-iW(z)] = \operatorname{Re} [-i\bar{U}_j z] + d_j \text{ em } \partial B_j, \quad (4.4.4b)$$

onde $j = 1, \dots, M$.

Note que o problema acima é quase igual ao problema de Schwarz, a menos do domínio D_z , que não é necessariamente circular. Pelo teorema de Riemann para domínios multiplamente conexos (teorema B.4.2), existe uma transformação conforme $z(\zeta)$ entre um domínio circular D_ζ e o plano físico D_z onde estão os $M + 1$ corpos rígidos. Aqui, suporemos que D_ζ é limitado exteriormente pelo círculo unitário $|\zeta| = 1$, o qual denotaremos por C_0 , e limitado interiormente por outros M círculos, os quais serão denotados por C_j , $j = 1, \dots, M$. Suporemos ainda que a imagem de cada C_j por $z(\zeta)$ é igual a ∂B_j . Introduzindo a notação

$$W(\zeta) = w(z(\zeta)),$$

podemos reescrever o problema acima como

$$\operatorname{Re} [-iW(\zeta)] = \operatorname{Re} [-i\bar{U}_0 z(\zeta)] \text{ em } C_0, \quad (4.4.5a)$$

$$\operatorname{Re} [-iW(\zeta)] = \operatorname{Re} [-i\bar{U}_j z(\zeta)] + d_j \text{ em } C_j, j = 1, \dots, M. \quad (4.4.5b)$$

Mas esta é exatamente a formulação do problema de Schwarz (veja equações D.0.1a e D.0.1b), onde

$$f_s(\zeta) = -iW(\zeta) \text{ e } \phi_j(\zeta) = -i\bar{U}_j z(\zeta), j = 0, 1, \dots, M.$$

Assim, pelo teorema D.0.4, temos que

$$\begin{aligned} W(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} \left[\operatorname{Re}[-i\bar{U}_0 z(\zeta')] (d \log \omega(\zeta', \zeta) + d \log \bar{\omega}(\zeta'^{-1}, \zeta^{-1})) \right] \\ &- \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \left[\operatorname{Re}[-i\bar{U}_j z(\zeta') + d_j] (d \log \omega(\zeta', \zeta) + d \log \bar{\omega}(\bar{\theta}_j(\zeta'^{-1}), \zeta^{-1})) \right], \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

que é a solução geral para o problema, a menos da transformação conforme.

Agora, escreva $\mathbf{U} = (U_0, U_1, \dots, U_M)$. Doravante, denotaremos a função potencial acima por $W_{\mathbf{U}}(\zeta)$, ao invés de $W(\zeta)$.

Constantes d_j . Para determinar $\{d_j : j = 1, \dots, M\}$, basta resolver o sistema linear

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b} \quad (4.4.7)$$

para $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_M)$, onde

$$A_{kj} = \operatorname{Im} \left[\oint \left(\frac{\omega_\zeta(\zeta, \phi_k(\alpha))}{\omega(\zeta, \phi_k(\alpha))} d\zeta - \frac{\omega_\zeta(\zeta, \bar{\alpha}^{-1})}{\omega(\zeta, \bar{\alpha}^{-1})} d\zeta \right) \right], \quad (4.4.8a)$$

$$b_k = -\operatorname{Im} \left[\sum_{j=1}^M \operatorname{Re}[-i\bar{U}_j(\zeta)] \left(\frac{\omega_\zeta(\zeta, \phi_k(\alpha))}{\omega(\zeta, \phi_k(\alpha))} d\zeta - \frac{\omega_\zeta(\zeta, \bar{\alpha}^{-1})}{\omega(\zeta, \bar{\alpha}^{-1})} d\zeta \right) \right]. \quad (4.4.8b)$$

Os detalhes podem ser encontrados no apêndice A de [Cro08a].

Conexão entre $G_0(\zeta, \alpha)$ e $W_{\mathbf{U}}(\zeta)$. Note que a função $G_0(\zeta, \alpha)$ não aparece explicitamente na expressão acima. No entanto, ela desempenha um papel crucial no desenvolvimento da expressão para $f_S(z)$ apresentada no teorema D.0.4 e, conseqüentemente, no desenvolvimento de $W_{\mathbf{U}}(\zeta)$. Para ver isso, note que

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2\pi} (d \log \omega(\zeta, \alpha) - d \log \omega(\zeta, \bar{\alpha}^{-1})) \\ &= -\frac{i}{2\pi} d (\log \omega(\zeta, \alpha) - \log \omega(\zeta, \bar{\alpha}^{-1}) - |\alpha|) \\ &= d \left[-\frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{\omega(\zeta, \alpha)}{|\alpha| \omega(\zeta, 1/\alpha)} \right) \right] = dG_0(\zeta, \alpha). \end{aligned}$$

Como sugerido por Crowdy em [Cro08a], é possível estender esse resultado, válido apenas no caso em que as circulações são nulas, para o caso geral em que a circulação em torno de cada corpo é arbitrária. Por completude, apresentaremos este resultado no seguinte teorema.

Teorema 4.4.1 (D. G. Crowdy, 2008). Sob as hipóteses 4.4.1a e 4.4.1b, suponha ainda que a circulação em torno de B_j é Γ_j , para todo j . Seja $\{(\delta_j, q_j) : j = 0, 1, \dots, M\}$ o módulo conforme de D_ζ . Então,

$$W(\zeta) = W_{\mathbf{U}}(\zeta) + W_{\Gamma}(\zeta) - \sum_{k=1}^N \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \log(\zeta - \delta_k), \quad (4.4.9)$$

onde

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{U}}(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} \left[\operatorname{Re}[-i\bar{U}_0 z(\zeta')] (d \log \omega(\zeta', \zeta) + d \log \bar{\omega}(\zeta'^{-1}, \zeta^{-1})) \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \left[\operatorname{Re}[-i\bar{U}_j z(\zeta') + d_j] (d \log \omega(\zeta', \zeta) + d \log \bar{\omega}(\bar{\theta}_j(\zeta'^{-1}), \zeta^{-1})) \right], \end{aligned}$$

com $\mathbf{U} = (U_0, \dots, U_M)$, e

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{\Gamma}}(\zeta) &= \sum_{k=1}^M \left\{ \oint_{C_0} \left[\frac{\Gamma_k}{2\pi} \log(\zeta - \delta_k) (d \log \omega(\zeta', \zeta) + d \log \bar{\omega}(\zeta'^{-1}, \zeta^{-1})) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^M \oint_{C_j} \left[\frac{\Gamma_k}{2\pi} \log(\zeta - \delta_k) (d \log \omega(\zeta', \zeta) + d \log \bar{\omega}(\bar{\theta}_j(\zeta'^{-1}), \zeta^{-1})) \right] \right\} - C, \end{aligned}$$

com $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_0, \dots, \Gamma_M)$, sendo $C \in \mathbb{C}$ uma constante.

Demonstração. Para justificar essa afirmação, considere a seguinte decomposição, sugerida por D. Crowdy em [Cro08a]:

$$W(\zeta) = \sum_{k=1}^M -\frac{\Gamma_k}{2\pi} \log(\zeta - \delta_k) + \mathcal{W}(\zeta), \quad (4.4.10)$$

onde Γ_k são as circulações prescritas em torno dos obstáculos e $\mathcal{W}(\zeta)$ é uma função univalente e analítica em D_ζ a ser determinada. Note que tal decomposição satisfaz $\oint_{\partial D_k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} = \Gamma_k$. De fato,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} &= \oint_{\partial D_k} \operatorname{Re} \left[\frac{dw}{dz} dz \right] = \operatorname{Re} \left[\oint_{\partial D_k} dw \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\oint_{\partial C_k} dW \right] = \Gamma_k \end{aligned}$$

onde usamos o teorema dos resíduos e analiticidade de $\mathcal{W}(\zeta)$.

Note agora que, da decomposição 4.4.10 acima e das condições de contorno

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[-iW(\zeta)] &= \operatorname{Re}[-i\bar{U}_0 z(\zeta)] \quad \text{em } C_0, \\ \operatorname{Re}[-iW(\zeta)] &= \operatorname{Re}[-i\bar{U}_j z(\zeta)] + d_j \quad \text{em } C_j, \quad j = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

concluimos que $\mathcal{W}(\zeta)$ deve satisfazer as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[-i\mathcal{W}(\zeta)] &= \operatorname{Re}[-i\bar{U}_0 z(\zeta)] - \sum_{k=1}^M \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \log|\zeta - \delta_k| \quad \text{em } C_0, \\ \operatorname{Re}[-i\mathcal{W}(\zeta)] &= \operatorname{Re}[-i\bar{U}_j z(\zeta)] + d_j - \sum_{k=1}^M \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \log|\zeta - \delta_k| \quad \text{em } C_j, \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Observe que as equações acima representam nada menos que o problema de Schwarz para $\mathcal{W}(\zeta)$, donde segue que

$$\begin{aligned}
W(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} \left[f_0(\zeta) (d \log \omega(\zeta', \zeta) + d \log \bar{\omega}(\zeta'^{-1}, \zeta^{-1})) \right] \\
&- \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \left[f_j(\zeta) (d \log \omega(\zeta', \zeta) + d \log \bar{\omega}(\bar{\theta}_j(\zeta'^{-1}), \zeta^{-1})) \right].
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
f_0(\zeta) &= \operatorname{Re} \left[-i\bar{U}_0 z(\zeta) \right] - \sum_{k=1}^M \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \log |\zeta - \delta_k|, \\
f_j(\zeta) &= \operatorname{Re} \left[-i\bar{U}_j z(\zeta) \right] + d_j - \sum_{k=1}^M \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \log |\zeta - \delta_k|.
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos, obtemos a tese. \square

Observe que a solução provida tanto no teorema acima, quanto no caso anterior, não é única. De fato, a unicidade dependeria do comportamento do potencial no infinito, condição que não foi considerada na solução desse problema. A liberdade que temos para determinar a constante C deixa claro esse fato. No entanto, o valor de C é em geral pouco importante, já que na maioria das aplicações trabalha-se apenas com as derivadas de $W(\zeta)$.

O caso duplamente conexo

A exemplo do que fizemos na seção anterior, comentaremos o que acontece no caso em que temos apenas dois corpos rígidos em D_z sem circulação. Lembremos que, sob essas hipóteses, o domínio D_z é equivalente a algum domínio circular D_ζ , que podemos admitir, sem perda de generalidade, com sendo o anel $A_\rho(0)$. Neste caso, o teorema acima traz a tona a chamada *formula de Villat*¹ ([CSY07], [Cro08c], [Cro08a]), velha conhecida dos especialistas em teoria do potencial. A solução para o problema nessas condições é dada por

$$W(\zeta) = I_0(\zeta) - I_1(\zeta) + I_c(\zeta) - C; \quad (4.4.13)$$

onde

$$I_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} \frac{\tilde{K}(\zeta/\zeta', \rho)}{\zeta'} \operatorname{Re}[-i\bar{U}_0 z(\zeta')] d\zeta' \quad (4.4.14a)$$

$$I_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{\tilde{K}(\zeta/\zeta', \rho)}{\zeta'} (\operatorname{Re}[-i\bar{U}_0 z(\zeta')] + d_1) d\zeta' \quad (4.4.14b)$$

$$I_c(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{1}{\zeta'} (\operatorname{Re}[-i\bar{U}_0 z(\zeta')] + d_1) d\zeta' \quad (4.4.14c)$$

com C sendo uma constante real e

$$\tilde{K}(\zeta, \rho) = 1 - 2\zeta \frac{P_\zeta(\zeta, \rho)}{P(\zeta, \rho)}, \quad (4.4.15)$$

¹**Henri René Pierre Villat** (1879-1972) foi um matemático francês. Especialista em mecânica dos fluidos ideais, foi também professor na Universidade de Paris e membro da Academia de Ciências da França.

com $P(\zeta, \rho)$ dado pela equação 4.2.7.

Este fato já havia sido elucidado por D. Crowdy, A. Surana e K-Y. Yick em [CSY07] e generaliza resultados anteriores como os obtidos por D. A. Burton *et al.* [BGT04] e Q. Wang [Wan04] para o caso em que temos apenas cilindros em movimento. A vantagem da formulação acima é que ela permite analisar o caso em que os corpos estão se movendo, situação na qual as velocidades e a transformação conforme são também função do tempo.

4.5 Aplicações

A título de ilustração, faremos nessa seção uma breve exposição de alguns problemas que podem ser investigados usando-se o cálculo acima desenvolvido. Como observado em [Cro10a], a análise de qualquer problema nesse contexto se dá em três etapas distintas.

1. **Geometria.** Primeiramente, devemos analisar a geometria do problema, a fim de determinar o módulo conforme do domínio circular D_ζ e a transformação conforme $z : D_\zeta \rightarrow D_z$.
2. **Função prima de Schottky-Klein.** Em posse do módulo conforme obtido na etapa anterior, podemos construir as funções de Möbius θ_j que geram o grupo de Schottky associado a D_ζ e, então, calcular a função prima de Schottky-Klein $\omega(., .)$. Para esta etapa, temos a disposição um programa, escrito para MATLAB®, que calcula $\omega(., .)$ facilmente, a partir do módulo conforme de D_ζ , qualquer que seja a sua conexidade. Os detalhes sobre este programa estão em [CG].
3. **Potencial complexo.** Feito isso, podemos usar as funções $G_j(\zeta, .)$, $W_n(\zeta, \beta)$ e $W(\zeta)$ para construir o potencial associado ao problema em questão.

Seguindo essa linha, alguns problemas interessantes foram estudados com o uso dessa teoria:

- **Escoamento uniforme ao redor de cilindros circulares:** [Cro06a]
- **Sustentação em um arranjo finito de aerofólios circulares:** [Cro06b]
- **Dinâmica de vórtices ao redor de ilhas costeiras:** [CM06b]
- **Dinâmica de bolhas numa célula do tipo Hele-Shaw:** [Cro09b], [Cro09a]
- **Escoamento gerado pelo movimento de misturadores:** [CSY07], [Cro08a]

Escoamento uniforme ao redor de dois cilindros

Este problema é ilustrado esquematicamente na figura abaixo. Quando os corpos rígidos imersos são circulares, a transformação conforme entre D_ζ e D_z é simplesmente uma transformação de Möbius. No caso duplamente conexo em questão, a

transformação entre o anel $A_\rho(0) = \{\rho < |\zeta| < 1\}$ e o domínio exterior à dois círculos de raios R_1 e R_2 , um deles centrado na origem e o outro centrado sobre o eixo real, cujos centros distam ℓ é dada por

$$z(\zeta) = R_1 \left(\frac{\zeta - c}{c\zeta - 1} \right) \quad (4.5.1)$$

onde

$$c = \frac{1}{2R_1\ell} (\ell^2 + R_1^2 - R_2^2 + \sqrt{(\ell^2 + R_1^2 - R_2^2)^2 - (2R_1\ell)^2}) \quad (4.5.2a)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{R_2^2 - (\ell - R_1c)^2}{(R_1 - c\ell)^2 - (R_2c)^2}}. \quad (4.5.2b)$$

Já o potencial complexo gerado por um escoamento uniforme ao redor de dois objetos rígidos e estacionários é dado pela função 4.2.10. Combinando estes resultados, obtemos o potencial procurado, a partir do qual podemos conduzir um completo estudo sobre o problema. No capítulo 5, faremos uso destes resultados para estudar a interação hidrodinâmica entre cilindros arbitrariamente posicionados com respeito a um escoamento uniforme incidente.

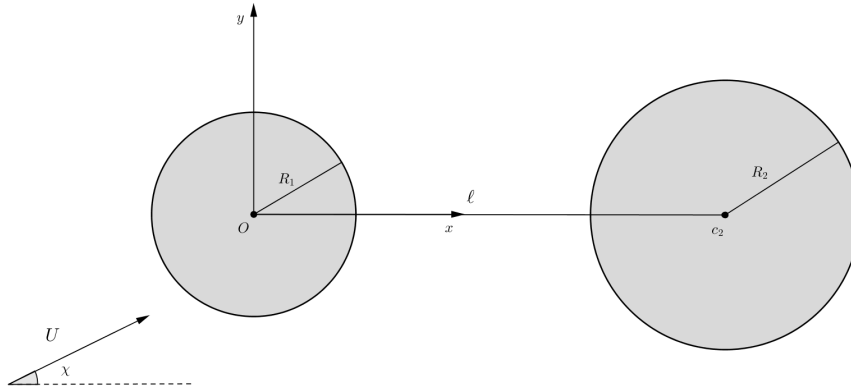


Figura 4.1: Escoamento uniforme ao redor de dois cilindros

Capítulo 5

Interação Hidrodinâmica Entre Dois Cilindros Estacionários

"The following investigation was originally undertaken to determine the time of swing of a cylindrical pendulum within another cylinder filled with fluid, whose axis is parallel to the first; but it was found that the method admitted of easy extension to the more general case. It is, of course, a problem in two dimensional motion, with circles substituted for cylinders."

W. M. Hicks, 1879 [Hic79].

5.1 Introdução

Nesse capítulo, estudaremos em detalhes a interação hidrodinâmica entre dois cilindros rígidos e estacionários, imersos em um fluido ideal e sujeitos à uma corrente uniforme deste fluido. Suporemos que o escoamento é irrotacional, ou seja, que não há vorticidade presente no fluido. Ainda, estaremos interessados apenas na interação hidrodinâmica *instantaneamente* gerada pelo escoamento; por isso, a dependência temporal será suprimida, isto é, suporemos que o escoamento é também estacionário.

Sabemos, pelo paradoxo de D'Alembert, que sob tais condições, a força total atuando sobre os cilindros é nula. Apesar disso, a força atuando em cada corpo não é nula. No caso de dois corpos, portanto, as forças tem a mesma intensidade e sentidos opostos, já que a soma vetorial destas deve cancelar-se. Estas forças provêm única e exclusivamente da interação hidrodinâmica entre os cilindros - e, por isso, são comumente chamadas de *forças de interferência* (*interference forces*, em inglês) [BJ33]. Caracterizar tais campos de forças é uma tarefa árdua e central em mecânica dos fluidos, da qual se ocupam fluidomecanicistas atuantes em diversas áreas.

Note que, neste problema, temos exatamente 9 parâmetros reais: os dois raios R_1 e R_2 , as posições $c_1 = x_1 + iy_1$ e $c_2 = x_2 + iy_2$ dos centros dos cilindros, a intensidade e o ângulo de incidência do escoamento, que denotamos respectivamente por U e χ , e a densidade fluido, a qual denotaremos por ρ . Portanto, a força sobre o j -ésimo cilindro é uma função

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(R_1, R_2, x_1, x_2, y_1, y_2, U, \chi, \rho). \quad (5.1.1)$$

Neste problema, temos dois graus de liberdade, que correspondem a posição de um dos cilindros no plano. Se fixarmos o eixo coordenado sobre o centro c_1 , isto é, se considerarmos $c_1 = 0$, podemos escrever $c_2 = \ell e^{i\theta}$, onde ℓ é a distância entre o centro dos cilindros e θ é o ângulo que o segmento $\overline{c_1c_2}$ faz com o eixo real - em outras palavras, ℓ e θ são as coordenadas polares de c_2 neste sistema coordenado. Assim, reduzimos para 7 o número de parâmetros necessários para se determinar \mathbf{F}_j . Podemos, portanto, escrever

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(R_1, R_2, \ell, \theta, U, \chi, \rho). \quad (5.1.2)$$

Ainda, podemos reescalar as variáveis de modo a tornar $U = 1$ e $\rho = 1$. Assim sendo, reduzimos para 5 o número de parâmetros reais necessários para se calcular \mathbf{F}_j , ou seja,

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(R_1, R_2, \ell, \theta, \chi). \quad (5.1.3)$$

Note que, o domínio de definição desta função é $(0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ e seu contradomínio é todo o plano complexo \mathbb{C} . Logo, \mathbf{F}_j possui duas componentes

$$\mathbf{F}_j = D_j + iL_j. \quad (5.1.4)$$

A primeira delas, denotada aqui por D_j , atua na direção horizontal do eixo coordenado; já a segunda componente, a qual denotamos por L_j , é paralela ao eixo vertical. Quando a direção de incidência do escoamento coincide com a direção do eixo coordenado horizontal, as componentes D_j e L_j são chamadas de *arrasto* (*drag*, em inglês) e *sustentação* (*lift*, em inglês), respectivamente. Das considerações feitas acima, segue que, para o caso de dois cilindros

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (5.1.5)$$

e, portanto

$$D_1 = -D_2 \text{ e } L_1 = -L_2. \quad (5.1.6)$$

Assim, como poderíamos esperar, é suficiente estudar as forças de interação em apenas um dos cilindros. Caracterizar este campo de forças é a principal tarefa deste trabalho.

O aparato teórico que construímos nos permitirá fazer um completo estudo dessas forças. Faremos isto em duas etapas: na primeira, analisaremos as forças de arrasto e sustentação em cilindros alinhados com o eixo horizontal, e sujeitos à uma corrente uniforme com ângulo incidência qualquer. Na segunda, analisaremos cilindros arbitrariamente posicionados (configuração conhecida na literatura inglesa como “*staggered*”) sujeitos à uma corrente uniforme alinhada com o eixo coordenado horizontal. É importante ressaltar que, neste último caso, as componentes D_j e L_j coincidem com as forças de arrasto e sustentação sobre o cilindro.

Todos os cálculos computacionais presentes neste trabalho foram feitos por meio do software MATLAB®.

Convenções. Aqui, trabalharemos com o sistema coordenado que reduz o número de variáveis independentes do problema, representado na figura 5.1. Referir-nos-emos ao cilindro centrado na origem como *cilindro 1*, ao passo que o outro cilindro será denominado *cilindro 2*. Assim, o índice j que acompanha as variáveis estudadas versará entre 1 e 2, de modo a relacionar os cilindros aos seus respectivos parâmetros.

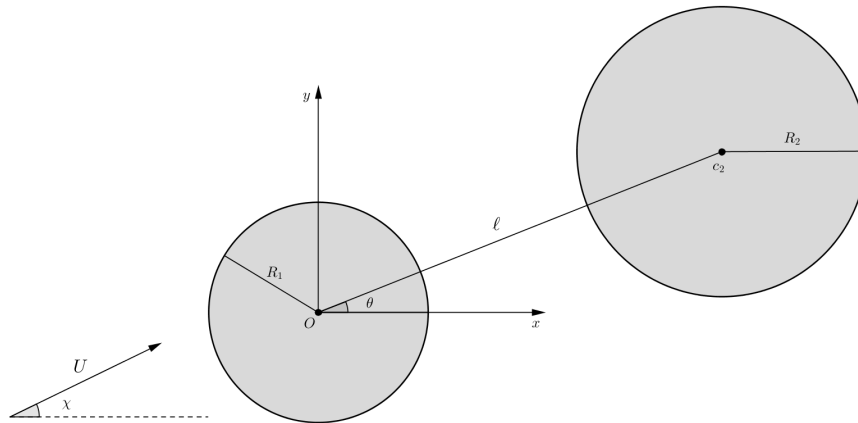


Figura 5.1: Sistema coordenado adotado para o estudo do problema

Por vezes, faremos menção a outro parâmetro presente no problema, qual seja, a *distância d_b entre os bordos dos cilindros*, definida por

$$d_b = \ell - (R_1 + R_2). \quad (5.1.7)$$

A menos de menção contrária, toda a análise será dirigida ao estudo do campo de forças \mathbf{F}_1 . Podemos fazê-lo sem perda de generalidade, devido às identidades 5.1.5 e 5.1.6 acima.

5.2 Cilindros em horizontalmente alinhados

Nesta seção, analisaremos a interação hidrodinâmica entre cilindros com os centros posicionados sobre o eixo real, conforme mostra esquematicamente a figura 5.2. Em sua famosa monografia, H. Glauert¹ [Gla47] denomina esta configuração como “*em tandem*”, quando a direção de incidência do escoamento coincide com a direção do alinhamento (isto é, quando $\chi = 0$). Esta nomenclatura, utilizada por Glauert no referido texto em 1926, tem sido largamente empregada desde então, tradição que manteremos aqui.

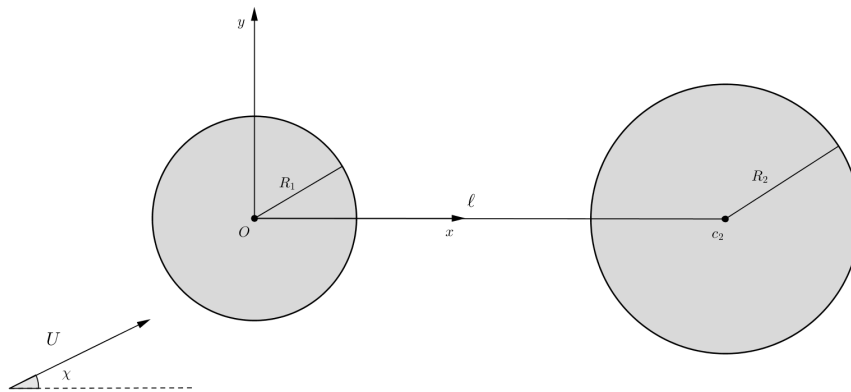


Figura 5.2: Cilindros horizontalmente alinhados

Primeiramente, analisaremos o comportamento de D_1 , L_1 e $|\mathbf{F}_1|$ com o ângulo de incidência χ . Em seguida, faremos o mesmo, desta vez variando a distância entre os centros ℓ . Ainda, investigaremos a variação das forças de interação com o raio de um dos cilindros.

Ângulo de incidência *versus* forças de interação

Uma primeira análise pode ser feita variando-se o ângulo de incidência do escoamento. Consideramos aqui cilindros de raio unitário, ou seja, $R_1 = R_2 = 1$. Os gráficos abaixo mostram as forças horizontal e vertical no cilindro à montante para diferentes valores de ℓ . Note que, para pequenos ângulos de incidência, a força horizontal é sempre negativa, enquanto que a força vertical é sempre muito pequena em comparação a horizontal. Este efeito de interferência, já observado na literatura [BJ33], [Cro06b], [Yam76], [Wan04], [BGT04], ocorre devido ao aumento da pressão na região entre os cilindros, como consequência da diminuição da magnitude da velocidade - a prova rigorosa deste fato é uma simples aplicação da *lei de Bernoulli*, que é válida sobre estas condições. A medida que o ângulo de incidência cresce, o valor de D_1 cresce, atingindo o seu pico em $\chi = \pi/2$, como mostra a figura 5.3. Já a figura 5.4 mostra que L_1 atinge seu pico em $\chi = \pi/4$. Percebe-se ainda que, quanto

¹Hermann Glauert (1892-1934) foi um cientista britânico, membro da Royal Society. Especialista em aerodinâmica, publicou inúmeros trabalhos sobre aerofólios e propulsores. Morreu tragicamente em um acidente, aos 41 anos.

a D_1 , para cada valor de ℓ , existe um valor χ (que depende de ℓ) tal que $D_1 = 0$, já que a força horizontal nasce negativa e se torna positiva à medida que o ângulo de incidência varia.

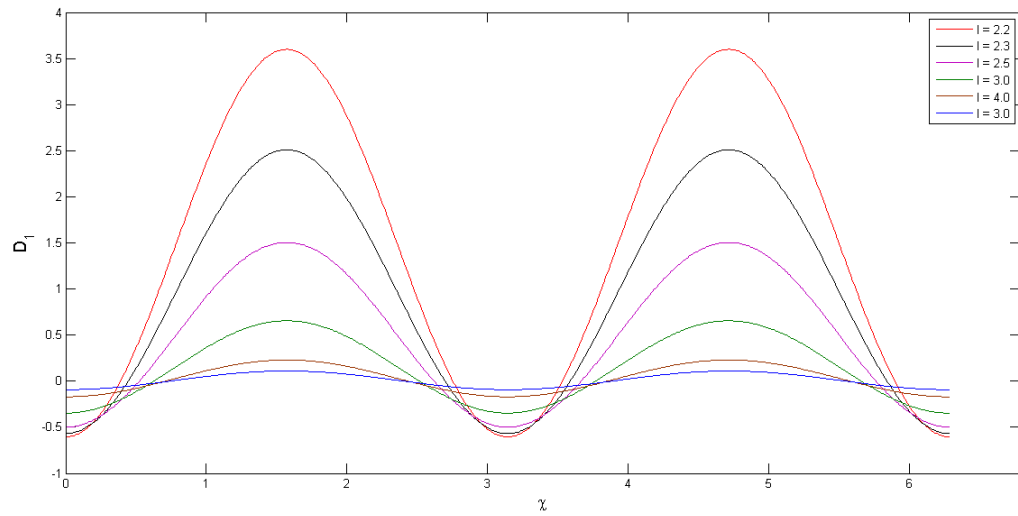


Figura 5.3: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de D_1 em função χ , para diversos valores de ℓ

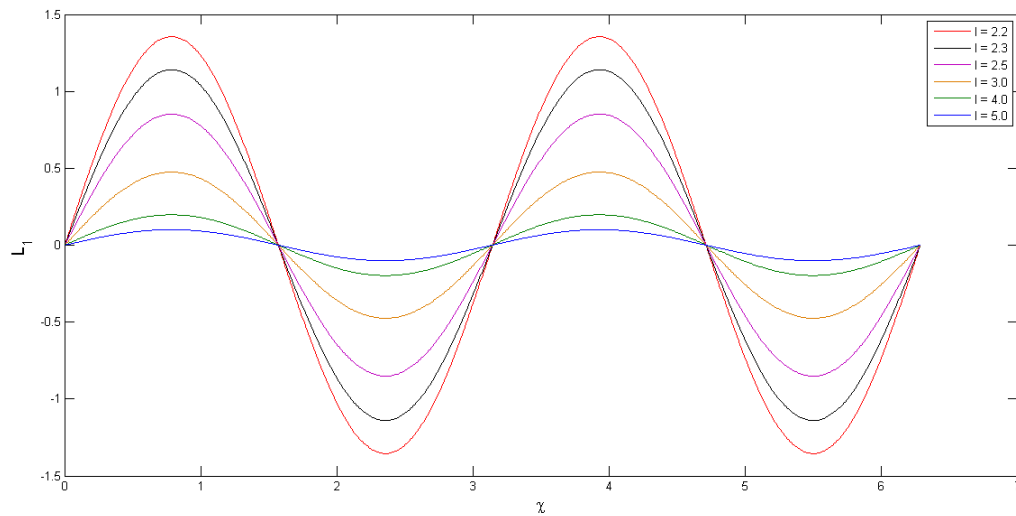


Figura 5.4: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de L_1 em função χ , para diversos valores de ℓ

Em contraste, a figura 5.5 mostra que a intensidade $|\mathbf{F}_1|$ da força resultante nunca se anula, apesar da ausência pontual de forças na direção coordenada horizontal. Esta é uma confirmação numérica da existência incondicional das forças de interação entre os cilindros nesta situação. Podemos ver ainda que ela atinge o seu máximo quando $\chi = \pi/2$ e seu mínimo quando $\chi = 0$, fato que sugere que as forças entre cilindros lado a lado prevalecem sobre as forças sobre cilindros em tandem. Este estudo comparativo será feito na seção ??.

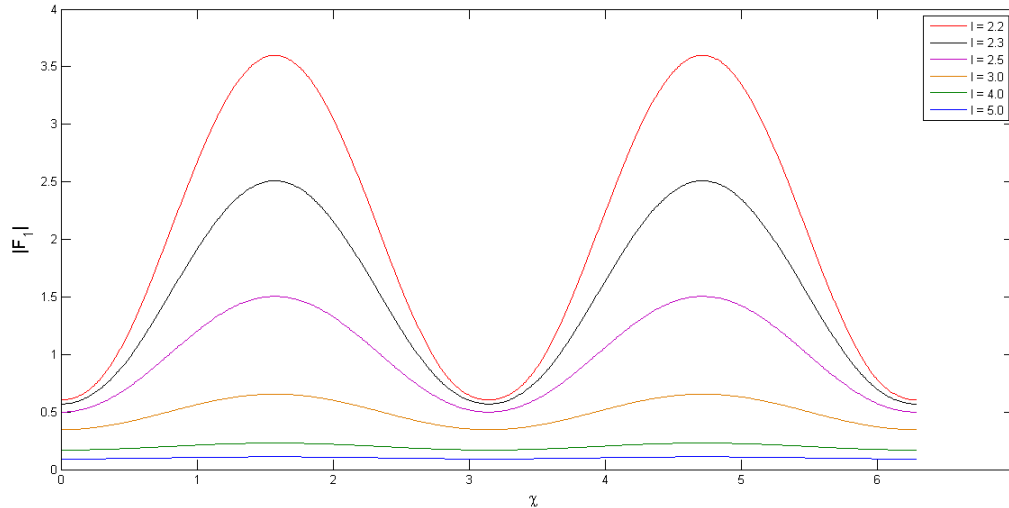


Figura 5.5: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de $|\mathbf{F}_1|$ em função χ , para diversos valores de ℓ

Distância entre os centros *versus* forças de interação

Uma outra investigação interessante pode ser feita fixando-se o ângulo de incidência e variando-se a distância entre os centros dos cilindros. O resultado está nas figuras 5.6, 5.7 e 5.8.

Para cilindros de raio unitário ($R_1 = R_2 = 1$), os gráficos da figura 5.6 mostram que a força horizontal possui comportamento hiperbólico quando $\ell \rightarrow 2$, isto é, quando $d_b \rightarrow 0$ - e, assim, $|D_1| \rightarrow \infty$. Observa-se que a direção da força horizontal também varia com o ângulo de incidência. De fato, para $\chi = 0$ a força D_1 é negativa, tendendo a afastar os cilindros. Para $\chi = \pi/6$, por sua vez, D_1 é negativo para $\ell > 2.5$ mas muda de sinal quando os cilindros se aproximam. Este efeito é particularmente importante porque ressalta o seguinte fato: a mudança do ângulo de incidência tem um impacto qualitativo na interação entre os cilindros: os cilindros que, a princípio se repelem, passam a se atrair a partir de uma certa distância e de um certo ângulo de incidência. Para $\chi = \pi/4$, $\chi = \pi/3$ e $\chi = \pi/2$, a força horizontal é sempre positiva. Já a força vertical é sempre positiva e apresenta comportamento hiperbólico para $\chi = \pi/6$, $\chi = \pi/4$ e $\chi = \pi/2$, como mostra a figura 5.7. Para $\chi = 0$ e $\chi = \pi/2$, temos que $L_1 = 0$ - um fato já esperado devido à simetria das linhas de corrente do escoamento com respeito ao eixo coordenado horizontal. Quanto à intensidade do vetor resultante \mathbf{F}_1 , nota-se que, em módulo, ele possui o mesmo comportamento hiperbólico de suas componentes, como era de se esperar. Ainda, ele atinge seu pico quando $\chi = \pi/2$, mostrando que neste caso a força horizontal é também máxima (já que $L_1 = 0$); e o seu mínimo quando $\chi = 0$, caso em que a força horizontal é mínima. Note que estes fatos vão de encontro ao que discutimos ao analisar a figura 5.5.

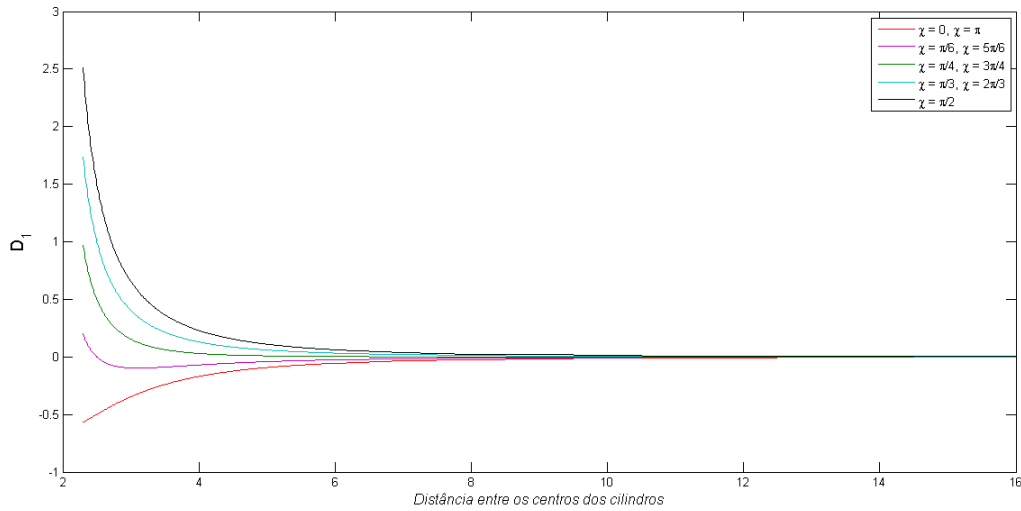


Figura 5.6: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de D_1 em função ℓ , para diversos valores de χ

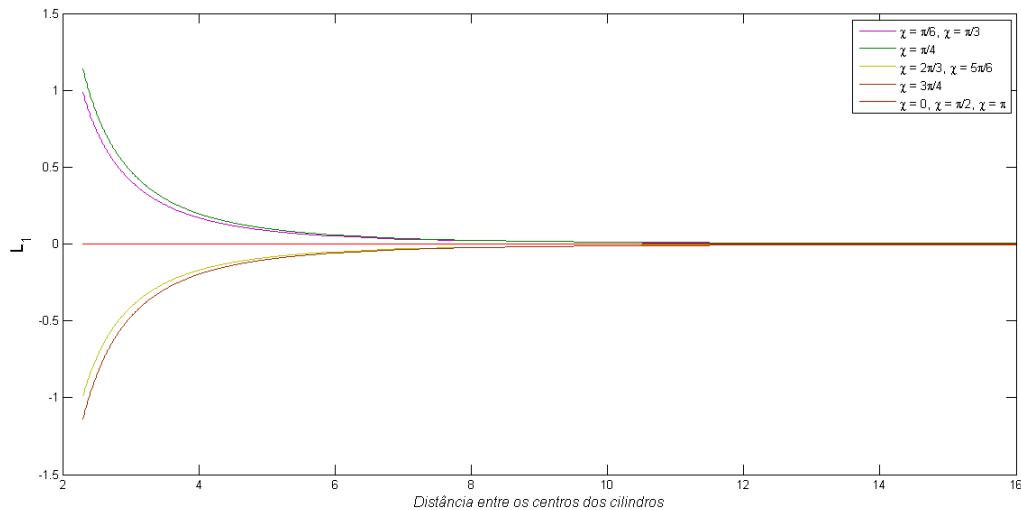


Figura 5.7: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de L_1 em função ℓ , para diversos valores de χ

Raios *versus* forças de interação

Podemos também analisar o comportamento das forças de interação enquanto variamos os raios dos cilindros, fixando-se o ângulo de incidência χ e a distância entre os bordos d_b . As figuras 5.9 e 5.11 mostram que, para diferentes valores de χ , os gráficos de D_1 e da intensidade da força resultante comportam-se como parábolas a medida que $R_1 = R_2 \rightarrow \infty$. Já figura 5.10 revela que os gráficos de L_1 comportam-se como retas de coeficiente angular positivo, exceto quando $\chi = 0$ e $\chi = \pi/2$, casos em que a força vertical é nula. O comportamento é o mesmo para todas as distâncias consideradas. Note que há uma predominância das forças horizontais sobre as forças verticais para este caso.

Observação 5.2.1. Os gráficos da força horizontal para $\chi = \pi/6$, em contraste com os mesmos gráficos da seção anterior, mostram que há uma diferença crucial entre variar a distância entre os centros mantendo os raios fixos e variar a distância entre

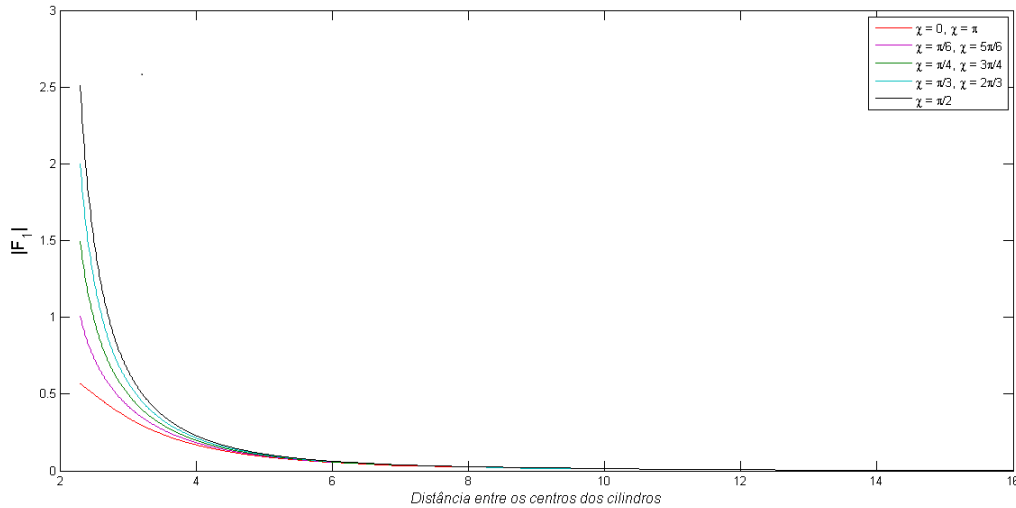


Figura 5.8: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de $|\mathbf{F}_1|$ em função ℓ , para diversos valores de χ

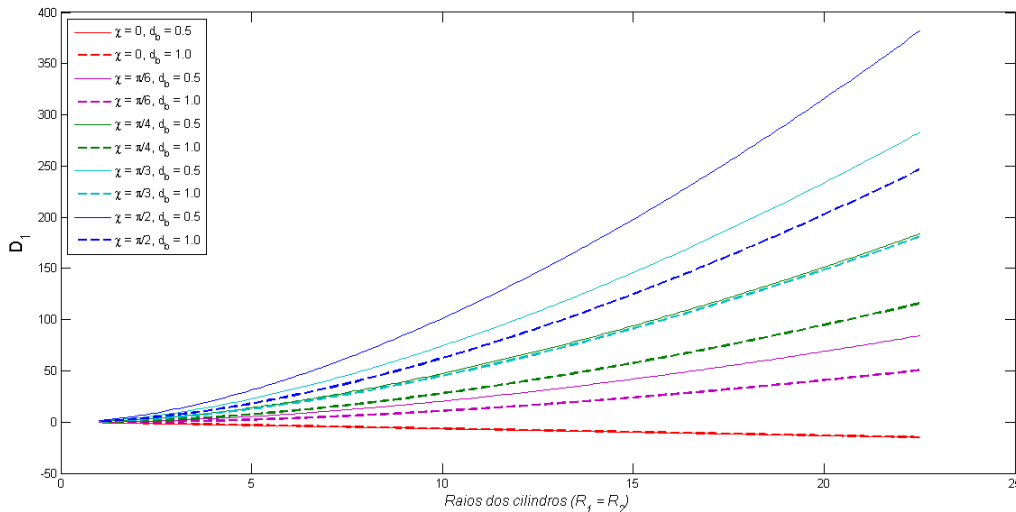


Figura 5.9: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de D_1 em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de χ e d_b

os centros variando-se também os raios e mantendo fixa a distância entre os bordos.

Podemos ainda, dentre desse mesmo problema, analisar o efeito da variação do raio de um dos cilindros, digamos, R_2 , mantendo o outro cilindro com raio unitário, ou seja, $R_1 = 1$. O resultado está nas figuras 5.12, 5.13 e 5.14 abaixo, onde repetimos o estudo para diversos valores de χ e d_b . Observamos que D_1 , L_1 e \mathbf{F}_1 são funções crescentes para pequenos valores de R_2 , porém a partir de um certo ponto, elas decrescem. A taxa de decrescimento é menor a medida que R_2 se aproxima de 1. Note que a força vertical é mais sensível a variação de R_2 .

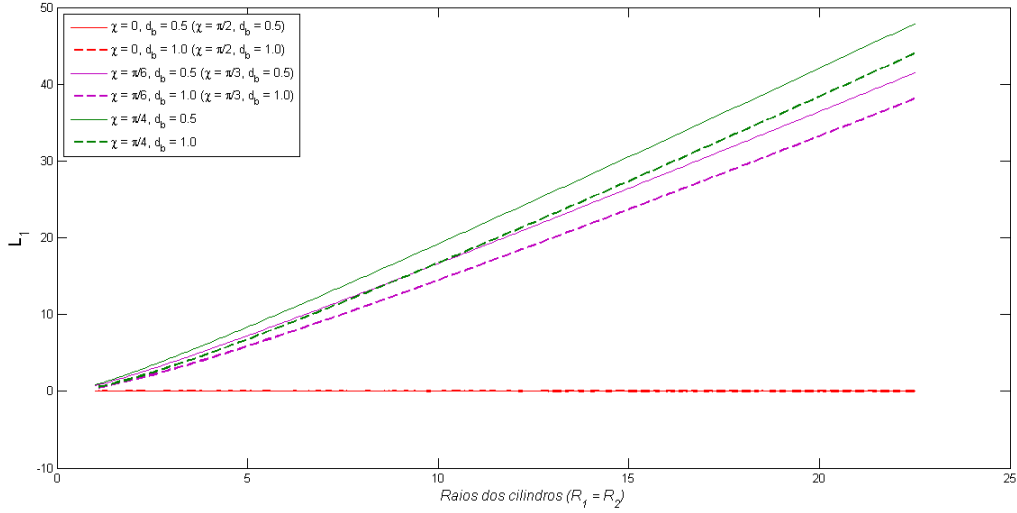


Figura 5.10: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de L_1 em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de χ e d_b

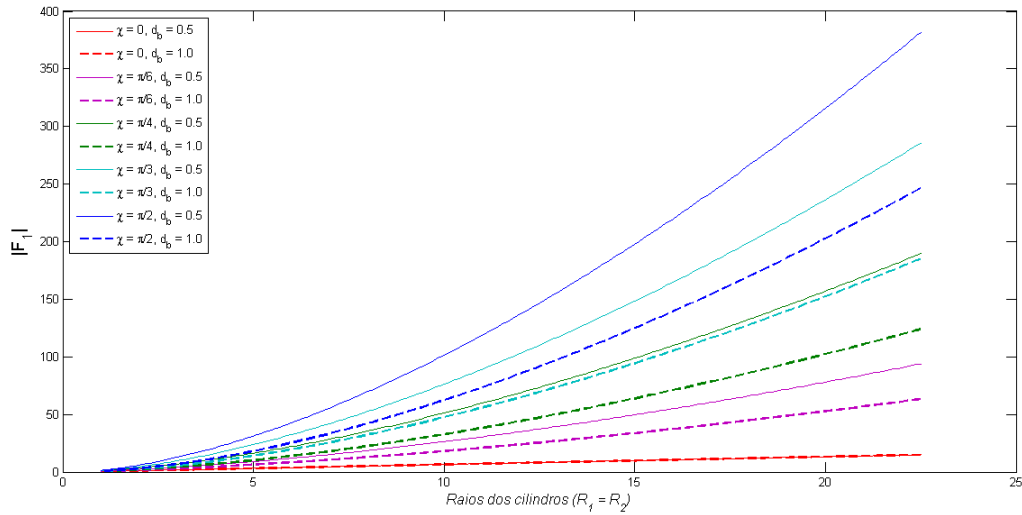


Figura 5.11: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de $|\mathbf{F}_1|$ em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de χ e d_b

5.3 Cilindros arbitrariamente posicionados

Estudaremos agora a interação hidrodinâmica entre cilindros arbitrariamente posicionados, quando expostos a uma corrente uniforme de fluido alinhada com o eixo coordenado horizontal (*i.e.*, quando $\chi = 0$), conforme mostra esquematicamente a figura 5.15. Esta configuração é conhecida na literatura como “*staggered*” [Cro06b], [Gla47]. Matematicamente, este problema é igual ao problema estudado na seção anterior, a menos de uma mudança de coordenadas. De fato, note que as componentes dos campos de força do referido problema com ângulo de incidência χ

$$\mathbf{F}_j = D_j + iL_j \quad (5.3.1)$$

e as do problema “*staggered*” com ângulo de arranjo (“*stagger parameter*”) χ , que denotaremos por

$$\tilde{\mathbf{F}}_j = \tilde{D}_j + i\tilde{L}_j \quad (5.3.2)$$

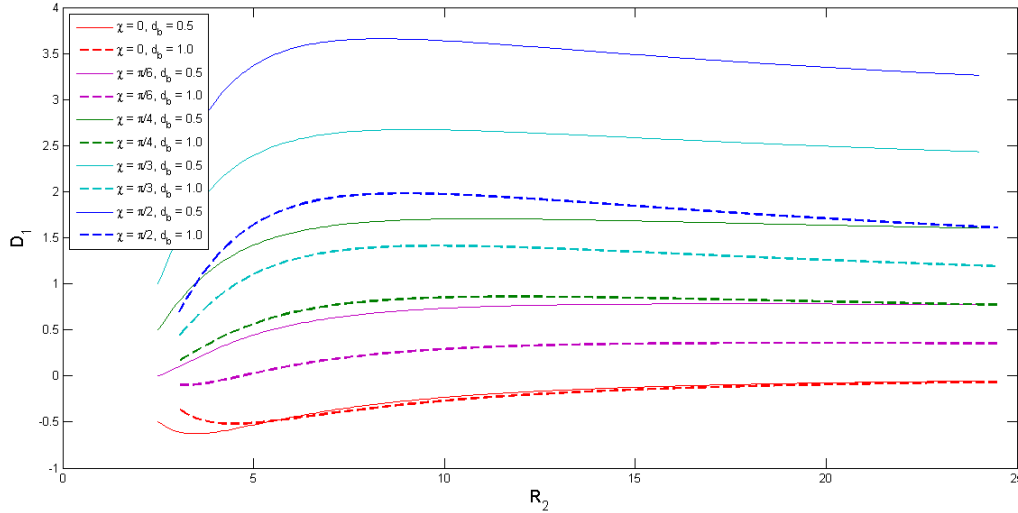


Figura 5.12: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de D_1 em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de χ e d_b

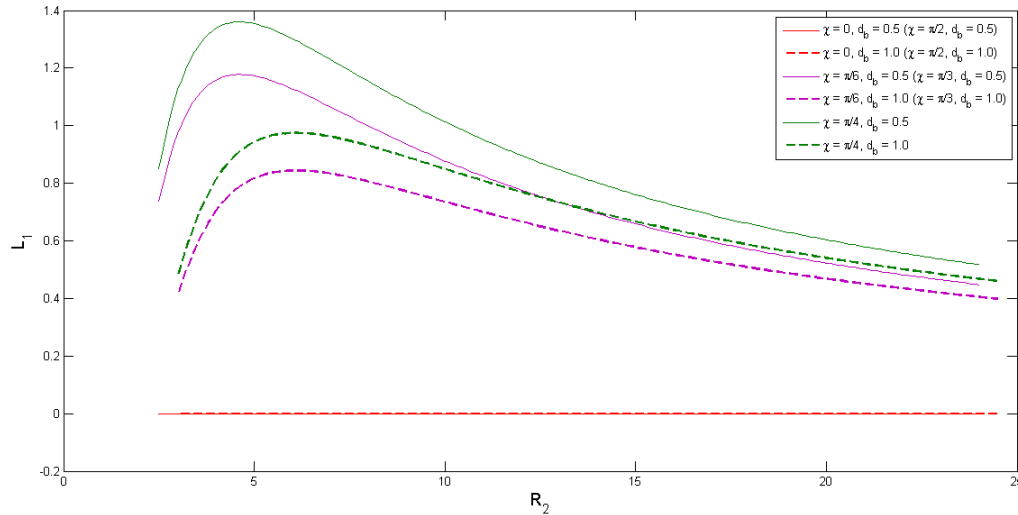


Figura 5.13: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de L_1 em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de χ e d_b

estão relacionados pela seguinte equação

$$\tilde{D}_j = D_j \cos \chi - L_j \sin \chi \text{ e } \tilde{L}_j = D_j \sin \chi + L_j \cos \chi. \quad (5.3.3)$$

Observe ainda que

$$|\mathbf{F}_j| = |\tilde{\mathbf{F}}_j| \quad (5.3.4)$$

e, portanto, é suficiente analisarmos o que acontece com as componentes de $\tilde{\mathbf{F}}_j$. Assim sendo, omitiremos a análise da intensidade da força de interação deste novo problema.

Não obstante, do ponto de vista da mecânica dos fluidos, este problema é diferente e mais interessante que da seção anterior.

No que segue, repetiremos o estudo feito na seção 5.2. A partir de agora, o ângulo de arranjo será denotado por θ , ao invés de χ , para evitar qualquer confusão com o ângulo de incidência do escoamento.

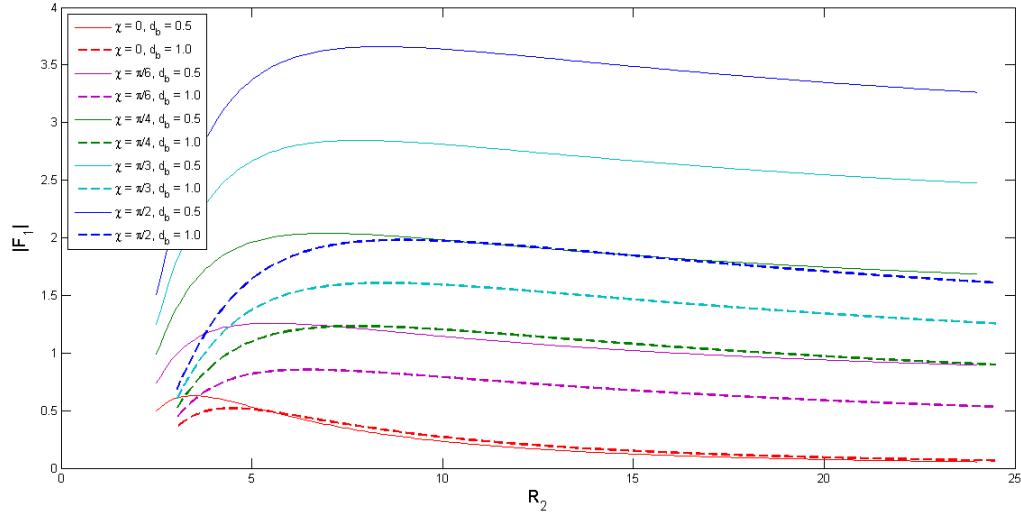


Figura 5.14: Cilindros horizontalmente alinhados: gráficos de $|\mathbf{F}_1|$ em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de χ e d_b

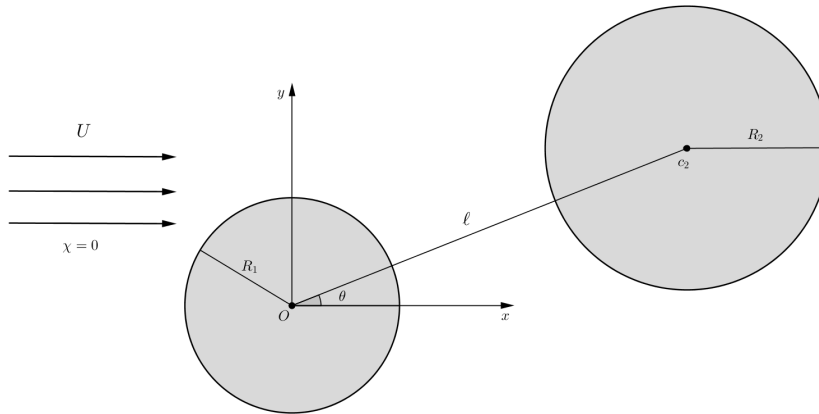


Figura 5.15: Cilindros arbitrariamente posicionados

Stagger parameter *versus* forças de interação

Os gráficos para este problema estão plotados nas figuras 5.16, 5.17 e 5.18 abaixo. Analisando-as, observamos que há um conjunto de pontos para os quais o arrasto é nulo: são os pontos $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$. Por outro lado, quando os cilindros estão suficientemente próximos, diagrama mostra que o arrasto apresenta novos zeros, o que é um fato notável, por ser pouco intuitivo. Fisicamente, ocorre que a proximidade entre os cilindros altera o fluxo das linhas de corrente, alterando também a distribuição de pressão na região entre os cilindros e, conseqüentemente, as forças entre os corpos.

Já a sustentação comporta-se de maneira bastante simples e sem surpresas. Ela tem seus zeros nos pontos em que os cilindros estão em tandem e seus picos quando estão alinhados verticalmente. Entre estes valores, o gráfico apresenta um comportamento monotônico.

Em complemento, figura 5.18 mostra que a intensidade $|\tilde{\mathbf{F}}_1|$ da força resultante têm o mesmo comportamento registrado na figura 5.5 para o caso da seção 5.2, no

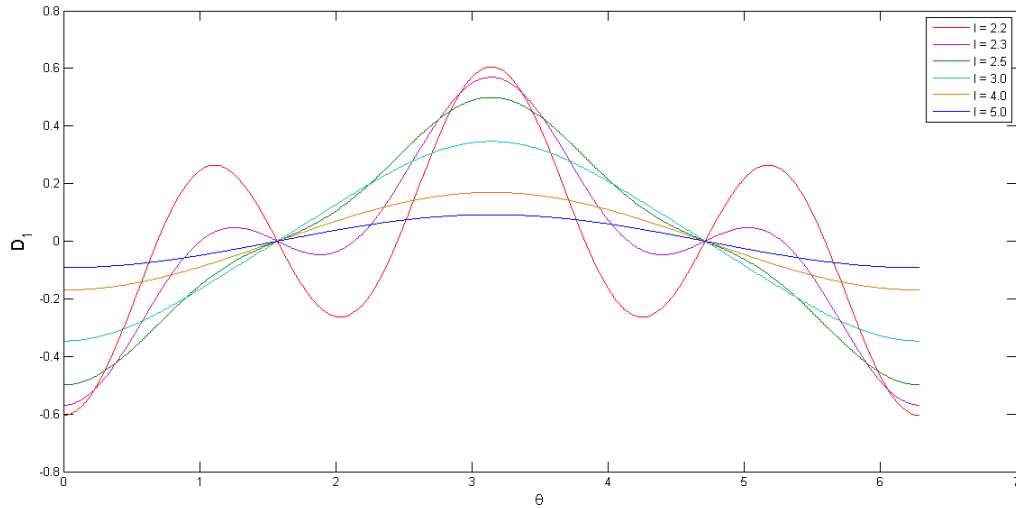


Figura 5.16: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{D}_1 em função θ , para diversos valores de l

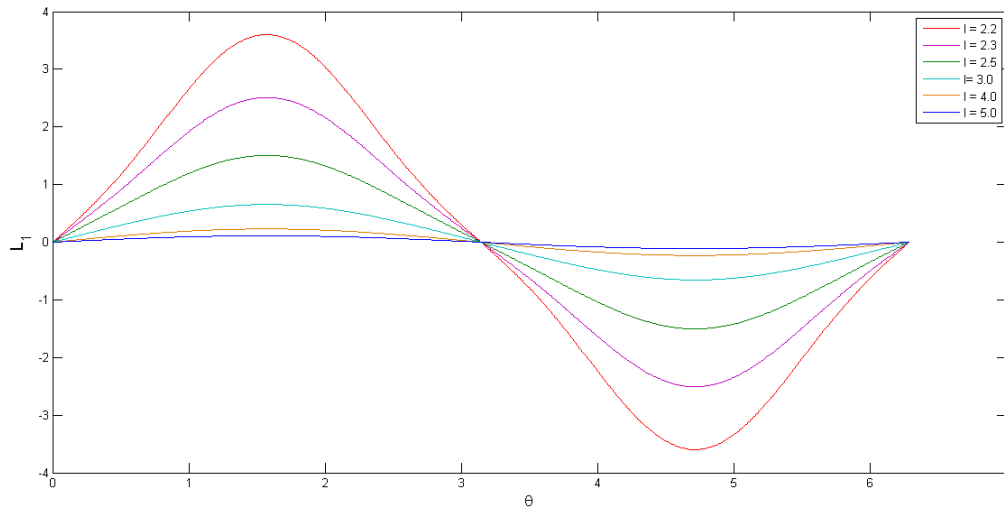


Figura 5.17: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{L}_1 em função θ , para diversos valores de l

qual mantemos os cilindros alinhados com o eixo horizontal e variamos o ângulo de incidência χ . Isto já era esperado, devido à igualdade das equações 5.3.4. Em particular, ela atesta a existência de forças de interação entre os cilindros, independente do posicionamento ou da distância entre eles.

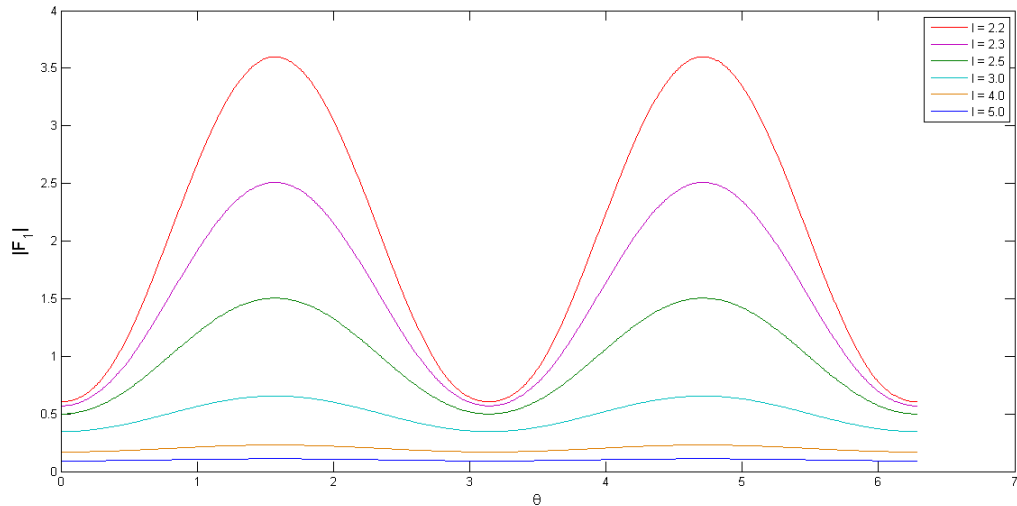


Figura 5.18: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $|\tilde{\mathbf{F}}_1|$ em função θ , para diversos valores de l

Distância entre os centros *versus* forças de interação

As figuras abaixo mostram a variação das forças com a distância entre os cilindros, para diversos valores de θ . Nota-se que, quando os cilindros estão desalinhados horizontalmente ($\theta \neq 0, \pi$) e verticalmente ($\theta \neq \pi/2, 3\pi/2$), o a força de arrasto muda de direção quando os cilindros estão suficientemente próximos. Portanto, o arrasto sempre se anula nesta configuração, para algum valor de l , resultado que estende a conclusão da seção anterior.

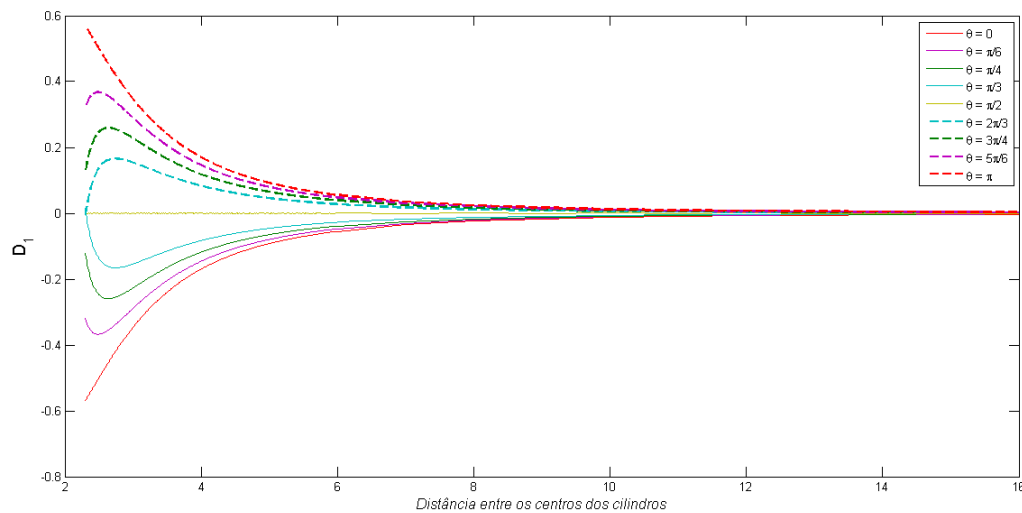


Figura 5.19: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{D}_1 em função l , para diversos valores de θ

Já a forças de sustentação atuam sempre na mesma direção, com intensidade inversamente proporcional à distância entre o centro dos cilindros, para todo θ - exceto para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, casos em que a sustentação é nula.

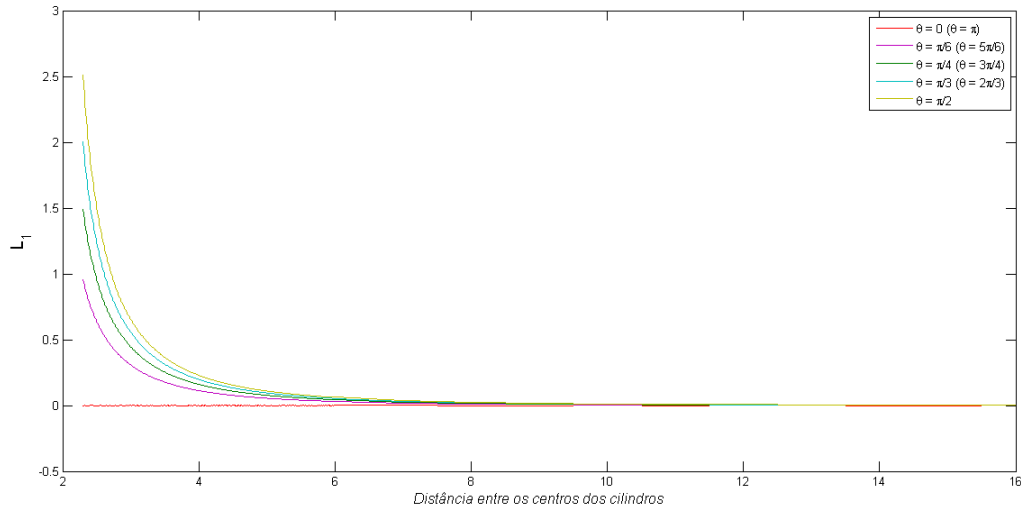


Figura 5.20: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{L}_1 em função ℓ , para diversos valores de θ

Raios *versus* forças de interação

As figuras abaixo mostram a variação das forças de interação em função do raio, para cilindros de mesmo raio, para diferentes valores de θ e d_b . Para valores pequenos de θ , observa-se um crescimento linear das forças com o aumento dos raios. Este crescimento é acentuado quando os cilindros se aproximam. A medida que θ aumenta, o crescimento vai se tornando quadrático, até o momento em que o arrasto se anula e a sustentação torna-se máxima. A intensidade da força resultante $|\tilde{\mathbf{F}}_1|$ apresenta o mesmo comportamento.

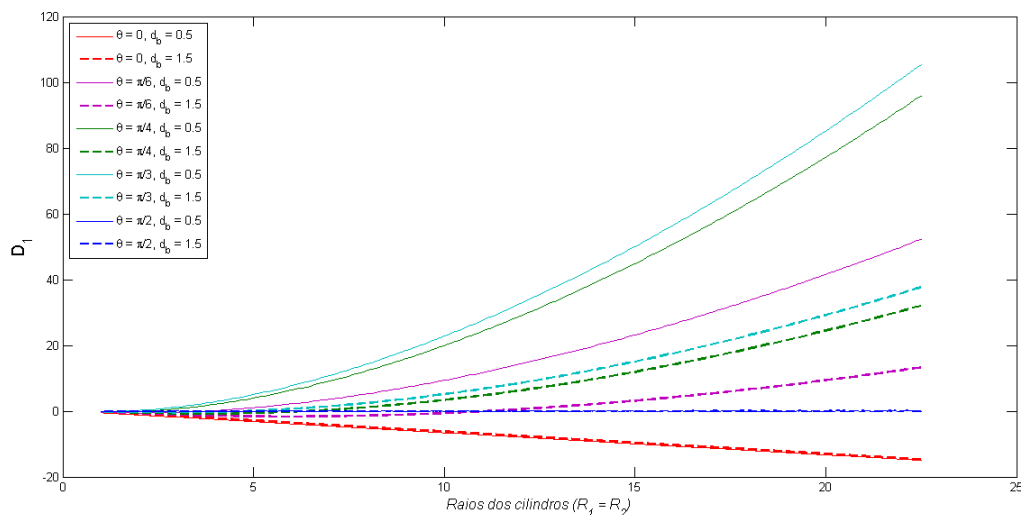


Figura 5.21: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{D}_1 em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de θ e d_b

Podemos também fixar o raio de um dos cilindros e observar o que acontece quando variamos o raio do outro cilindro. Os gráficos abaixo mostram tal comportamento quando $R_1 = 1$ e R_2 , para diferentes valores de θ . É possível notar que, com o aumento do raio R_2 , a força de arrasto, que a princípio é negativa quando os

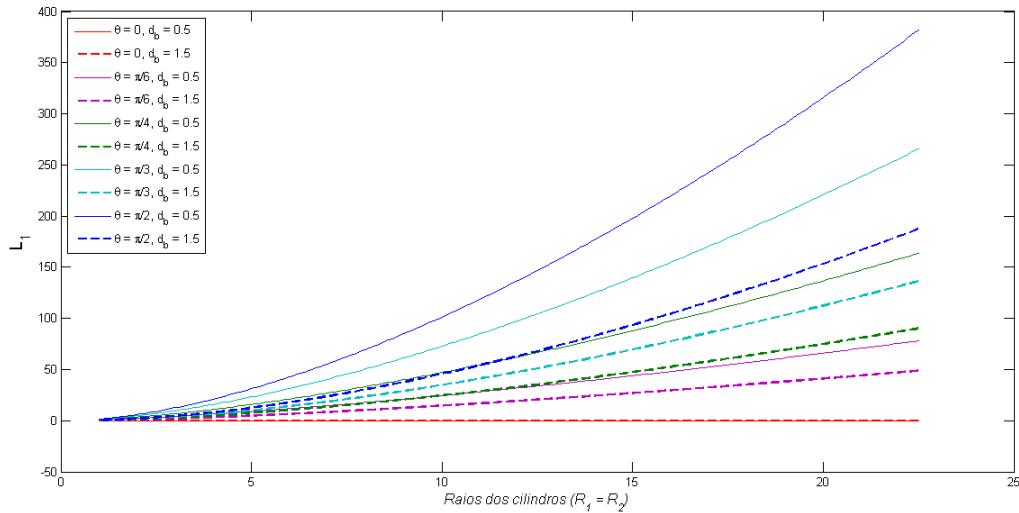


Figura 5.22: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{L}_1 em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de θ e d_b

cilindros estão suficientemente próximos, torna-se positiva - fato também observado na seção 5.2. Já a força de sustentação é sempre positiva e crescente para valores

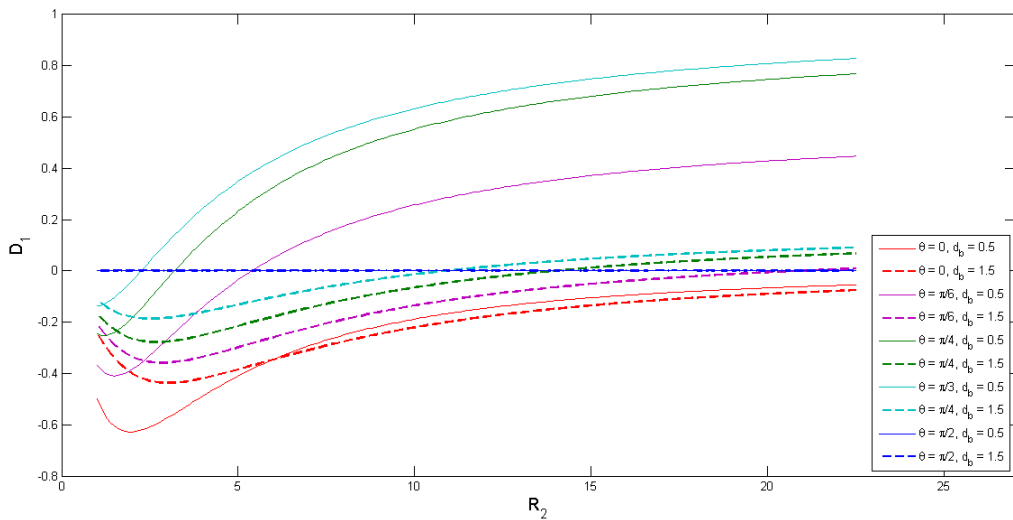


Figura 5.23: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{D}_1 em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de θ e d_b

de $R_2 < 6$. A partir daí, as forças decrescem, porém permanecendo positivas.

Já a força resultante apresenta o mesmo comportamento da força de sustentação, o que sugere uma predominância desta última no vetor $\tilde{\mathbf{F}}_1$ - esta predominância de fato ocorre, como veremos na seção 5.4.

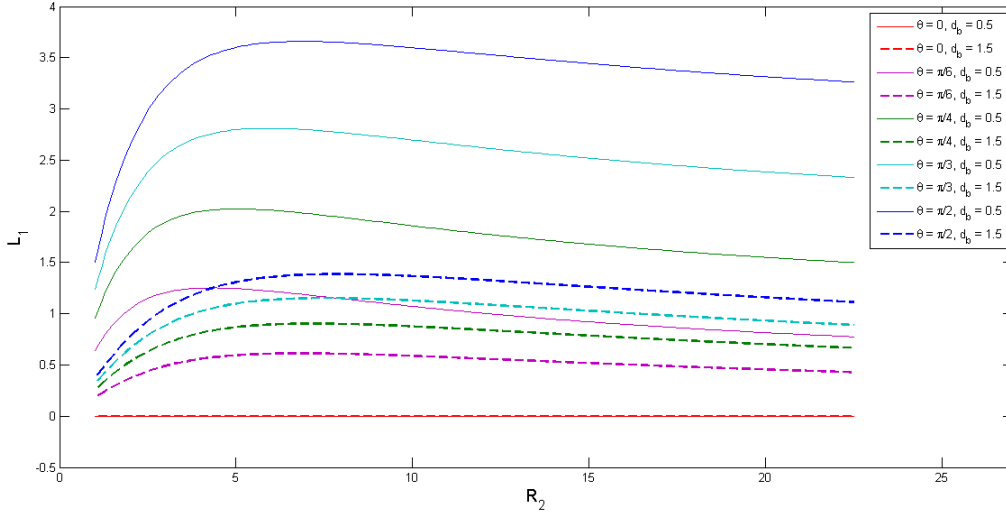


Figura 5.24: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de \tilde{L}_1 em função R_2 , onde $R_1 = 1$, para diversos valores de θ e d_b

Coefficientes de arrasto e sustentação

Todo o estudo feito até então levou em consideração o puro cômputo das forças de arrasto e sustentação. O efeito efetivo dessas forças pode ser melhor analisado por meio de dois parâmetros adimensionais relacionados ao escoamento. São estes os *coeficientes de arrasto* $C_{D,j}$ e de *sustentação* $C_{L,j}$ do j -ésimo corpo, respectivamente definidos da seguinte maneira

$$C_{D,j} = \frac{D_j}{1/2\rho U^2 A_{x,j}} \text{ e } C_{L,j} = \frac{L_j}{1/2\rho U^2 A_{y,j}} \quad (5.3.5)$$

onde $A_{x,j}$ e $A_{y,j}$ são as projeções da área do j -ésimo corpo nas direções x e y , respectivamente. No caso em questão, onde os corpos são cilindros circulares, temos que $A_{x,j} = A_{y,j} = 2R_j$, onde R_j é o raio do j -ésimo cilindro.

Podemos ainda investigar o comportamento do *coeficiente de força*, denotado por $C_{F,j}$ e definido por

$$C_{F,j} = \frac{|\mathbf{F}_j|}{1/2\rho U^2 A_{p,j}}, \quad (5.3.6)$$

onde $A_{p,j}$ é a projeção da área do j -ésimo corpo na direção perpendicular à direção de atuação da força. No nosso caso, vale que $A_{p,j} = 2R_j$, conforme mostra esquematicamente a figura 5.25. Note ainda que, para o problema dos cilindros, os coeficientes $C_{L,j}$, $C_{D,j}$ e $C_{F,j}$ estão relacionados pela seguinte equação:

$$C_{F,j} = \sqrt{(C_{D,j})^2 + (C_{L,j})^2}. \quad (5.3.7)$$

Os gráficos recém-analisados mostraram-nos que a intensidade das forças de interação está diretamente relacionada com o raio dos cilindros. Mais ainda, vimos que ela é proporcional aos raios: quanto maior for o raio, “maior” serão as forças. De modo que, quando R_j tende a zero, para algum dos cilindros, o valor das forças se torna praticamente nulo para qualquer valor $d_b > 0$. Nesse espírito, podemos também perguntar o que acontece com $C_{D,j}$, $C_{L,j}$ e $C_{F,j}$ quando, digamos, $R_j \rightarrow 0$.

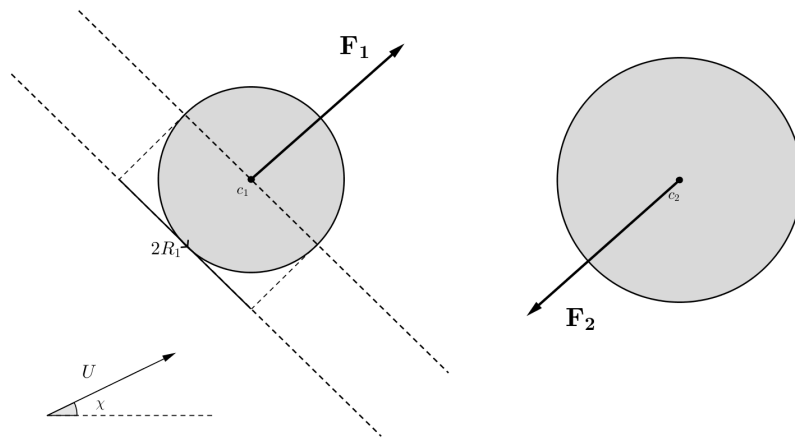


Figura 5.25: Projeção do cilindro na direção perpendicular ao campo de forças \mathbf{F}_j

As figuras 5.26, 5.27 e 5.28 dão uma ideia de como se comportam $C_{D,2}$, $C_{L,2}$ e $C_{F,2}$ quando variamos o raio R_2 . Observe que, como ocorre para as forças de interação, os coeficientes de arrasto, sustentação e força também tendem a zero quando $R_2 \rightarrow 0$.

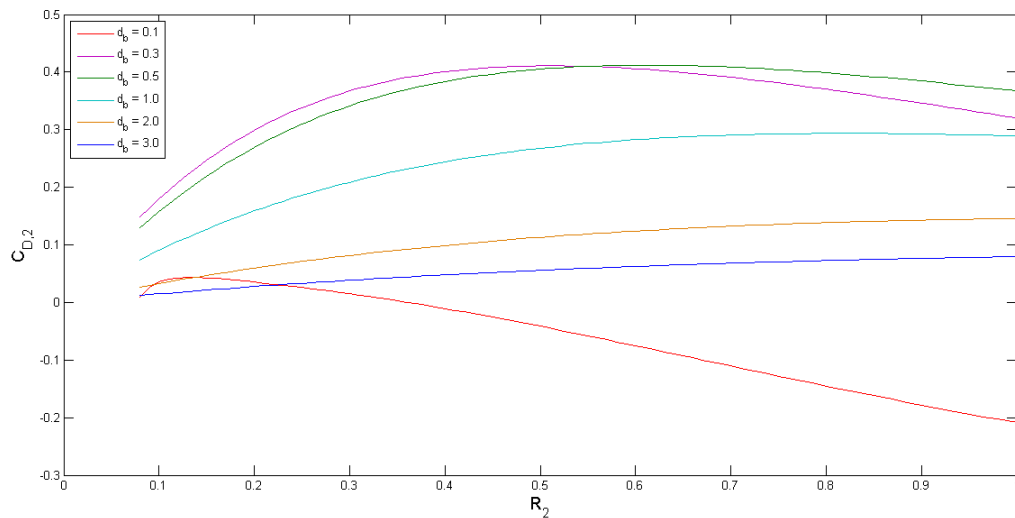


Figura 5.26: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$

As figuras abaixo trazem alguns dos gráficos dos coeficientes de arrasto e sustentação em função de θ , ℓ e R_2 . Aqui, também analisamos os coeficientes associados ao cilindro 2, que tem o seu raio variado.

Quando variamos o ângulo θ , obtemos gráficos semelhantes aos das figuras 5.16, 5.17 e 5.18, portanto com os mesmo atributos já comentados - apenas o sinal é diferente, pois estamos analisando cilindros diferentes.

Por fim, percebemos o mesmo ao analisarmos a variação de $C_{D,2}$ e $C_{L,2}$ com ℓ , para diferentes valores de R_2 e θ . Obtemos, neste caso, gráficos bastante parecidos com aqueles das figuras 5.19 e 5.20.

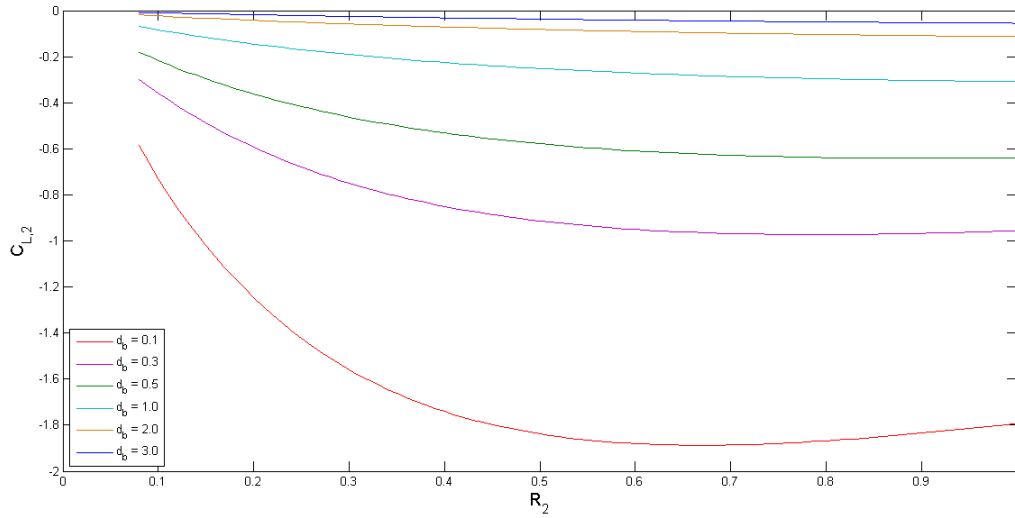


Figura 5.27: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$

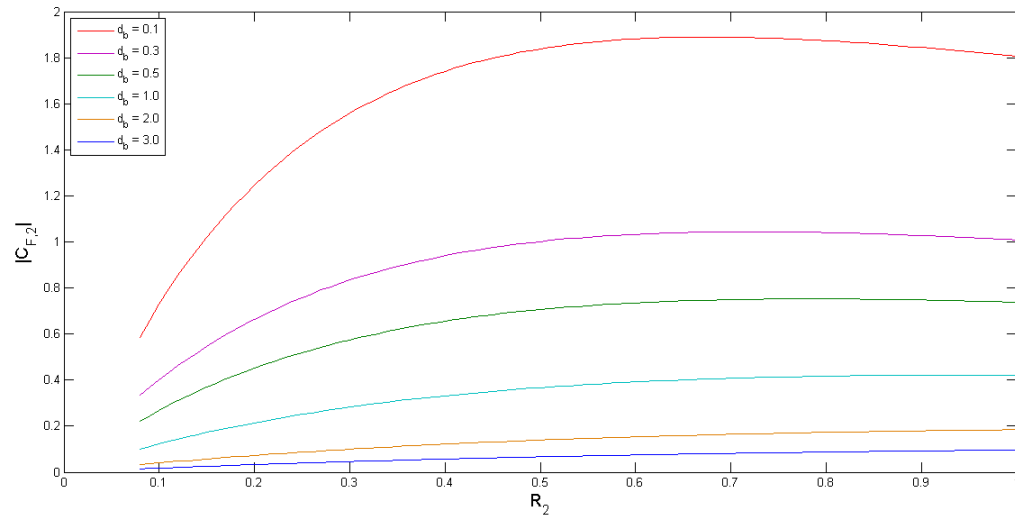


Figura 5.28: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\chi = \pi/6$

Por completude, apresentamos a íntegra desses gráficos no apêndice E.

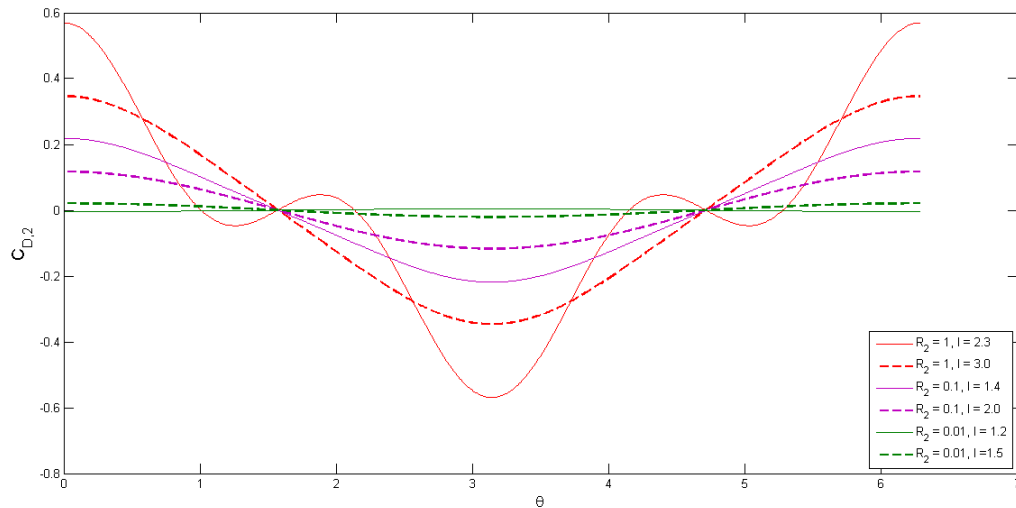


Figura 5.29: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função θ , para diversos valores de ℓ

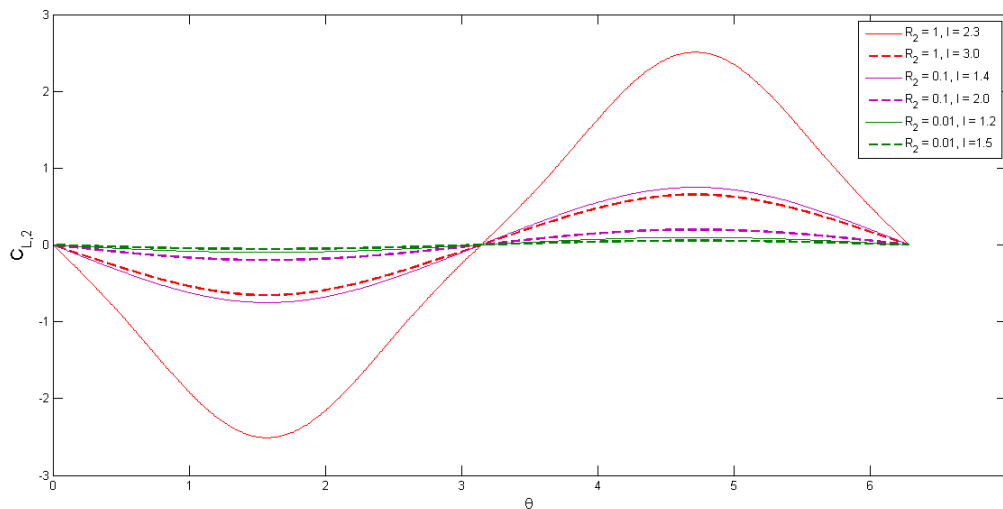


Figura 5.30: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função θ , para diversos valores de ℓ

5.4 Comparação entre arrasto e sustentação

Nesta seção, fazemos uma comparação quantitativa entre as forças de arrasto e sustentação. A figura 5.35 compara a variação do arrasto e da sustentação em função da distância entre os centros dos cilindros para alguns valores de R_2 . Observa-se que a força de sustentação para cilindros verticalmente alinhados é significativamente maior do que a força de arrasto para cilindros em tandem. Ainda, a aproximação dos cilindros torna esta diferença ainda maior. Este resultado é surpreendente, tendo em vista que não há circulação nos cilindros, e portanto, a sustentação total sobre os cilindros é nula, pelo teorema de Kutta-Joukowski (veja a observação C.3.1).

Podemos também comparar a variação entre arrasto e sustentação em função dos raios. A figura 5.36 abaixo mostra que, para cilindros de mesmo raio e com os bordos mantidos a uma distância d_b fixa, o aumento da sustentação é consideravelmente maior do que o do arrasto.

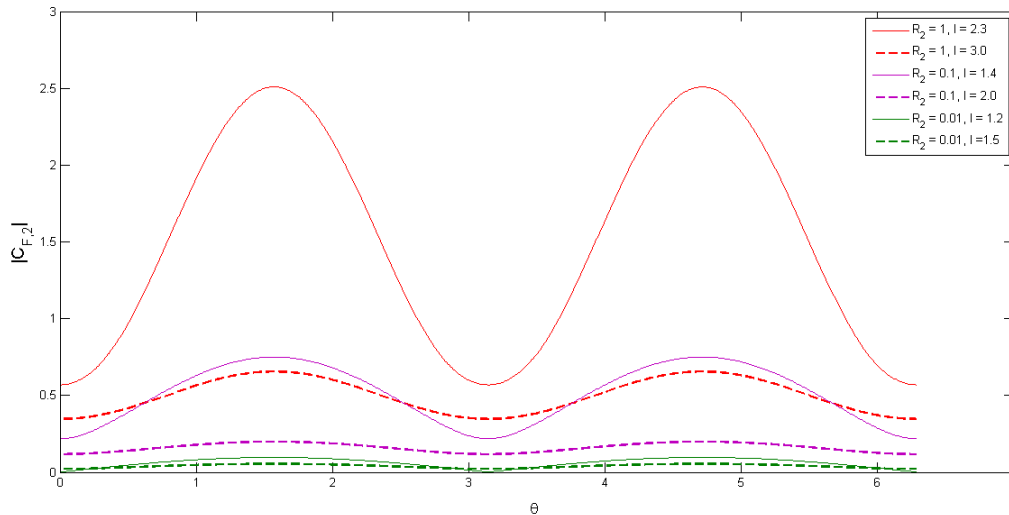


Figura 5.31: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função θ , para diversos valores de ℓ

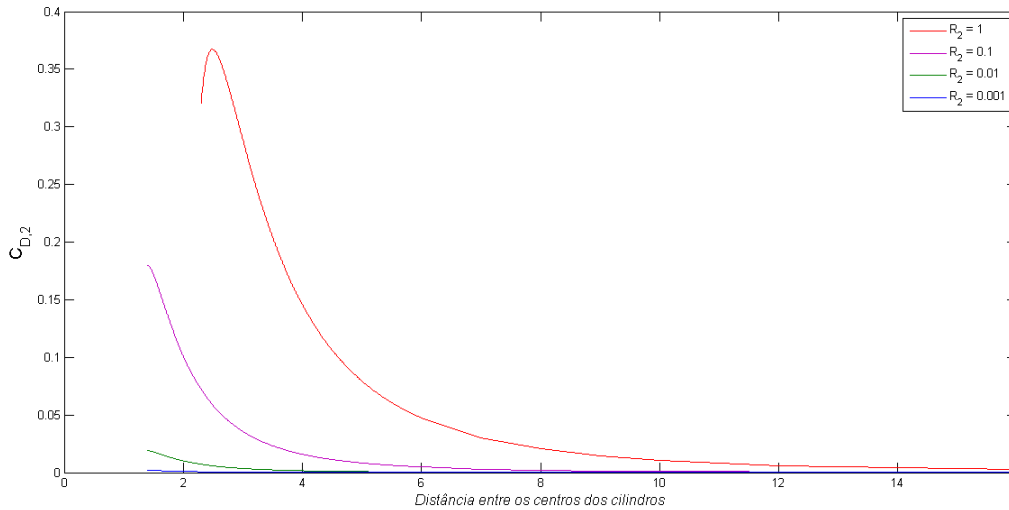


Figura 5.32: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$

Decaimento das forças de arrasto e sustentação. Uma vez que as forças de arrasto e sustentação vão a zero assintoticamente com ℓ , podemos nos perguntar como decaem essas forças com respeito a esse mesmo parâmetro. Para responder a essa pergunta, busquemos por números reais a e b tais que

$$|D_j| \approx \frac{a}{\ell^b}, \text{ quando } \ell \rightarrow \infty,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

A fim de determinar o expoente b e o coeficiente a , tomemos o logaritmo em ambos os lados, de modo que

$$\begin{aligned} \log(|D_j|) &\approx \log\left(\frac{a}{\ell^b}\right) \\ &= \log a - b \log \ell, \text{ quando } \ell \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Assim, em escala logarítmica, o gráfico de $|D_1|$ por ℓ corresponde uma reta, com coeficiente angular igual a $-b$. Os gráficos para esta situação estão na figura 5.37.

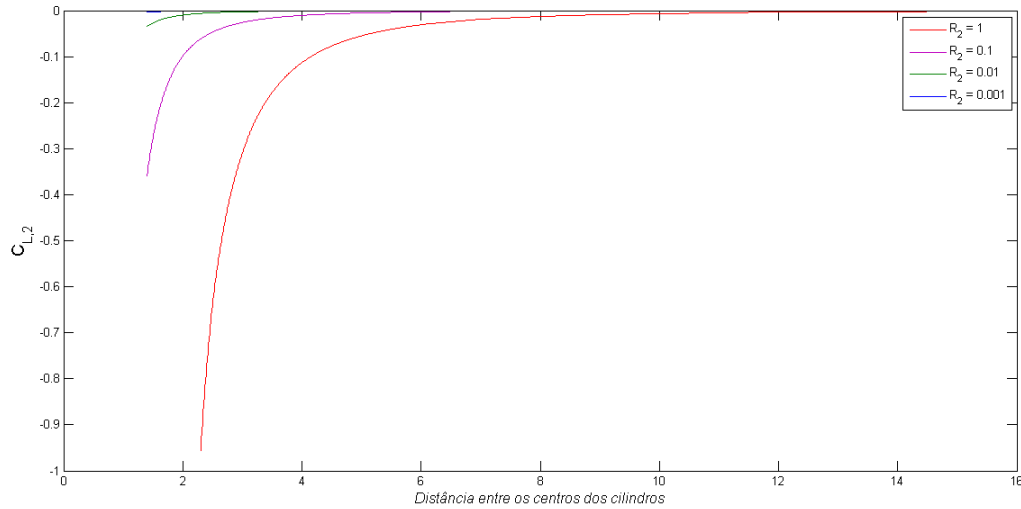


Figura 5.33: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$

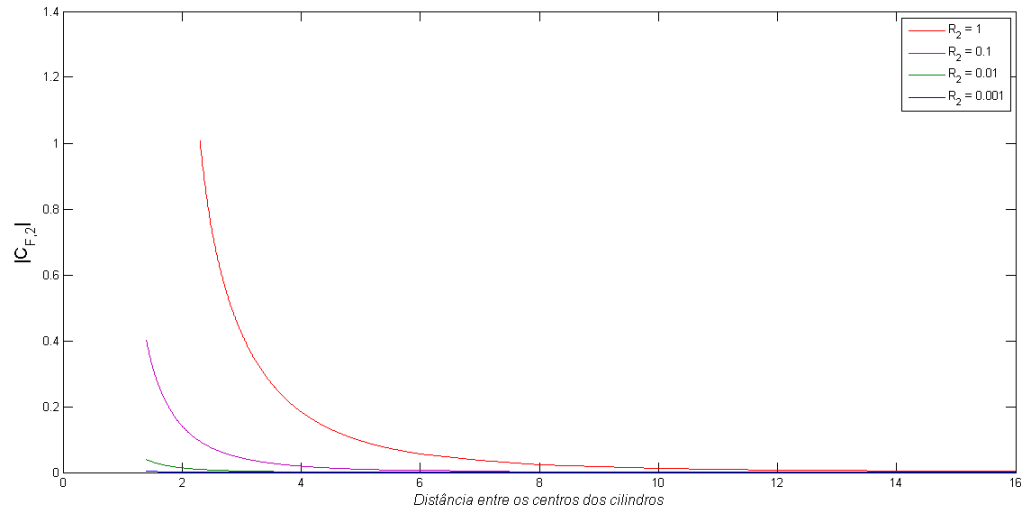


Figura 5.34: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$

Note que, de fato, os gráficos tornam-se retas a medida que a distância entre os centros aumenta. Ainda, essas retas possuem o mesmo coeficiente angular, como esperado, cujo valor é aproximadamente igual a -3 ; e o mesmo valor $a \approx e^3$. Logo,

$$|D_j| \approx \frac{e^3}{\ell^3}, \text{ quando } \ell \rightarrow \infty,$$

o mesmo valendo para a força de sustentação.

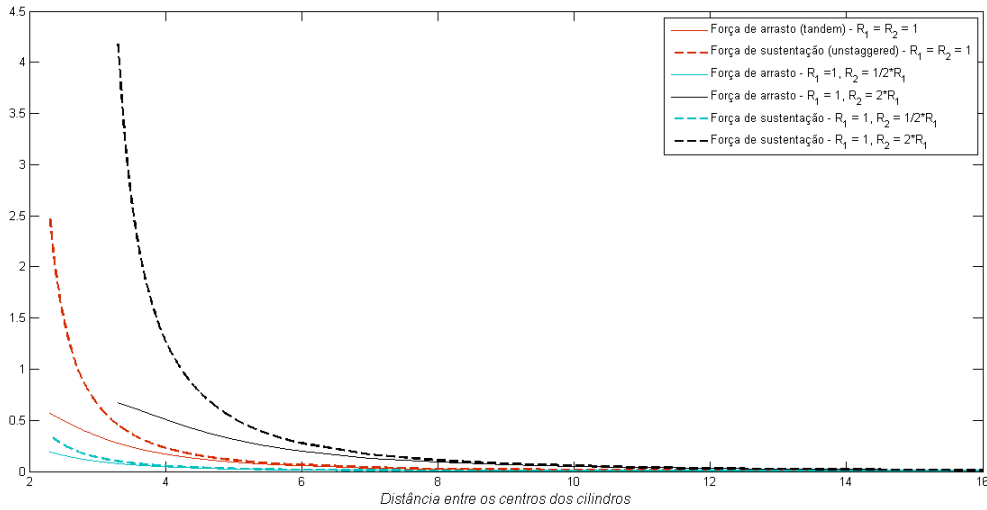


Figura 5.35: Comparação entre as forças de arrasto e sustentação em função de ℓ , para diversos valores de R_2

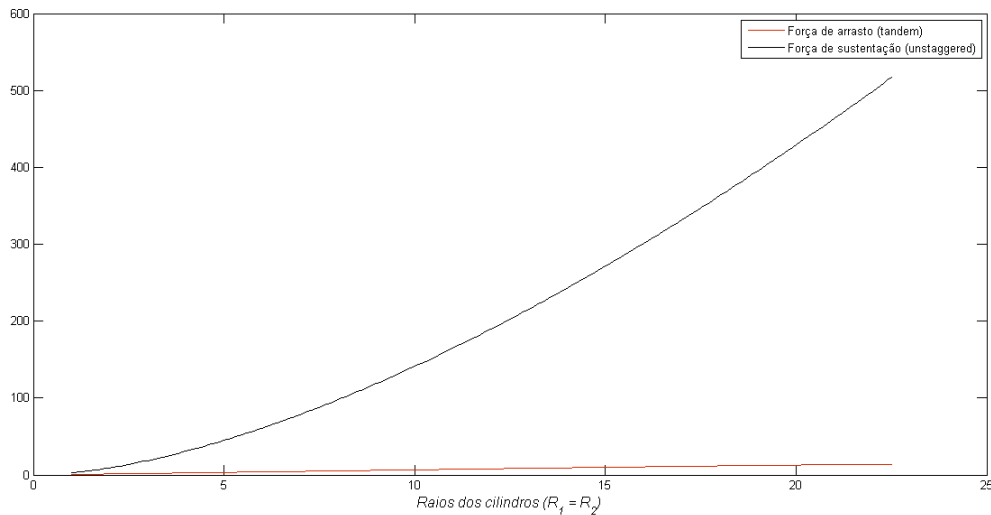


Figura 5.36: Comparação entre as forças de arrasto e sustentação em função dos raios ($R_1 = R_2$), para diversos valores de d_b

5.5 Conclusões

Nesse capítulo, fizemos um completo e detalhado estudo das forças de interação do problema apresentado na seção 5.1. À partir dos gráficos plotados, obtivemos informações qualitativas e quantitativas à respeito deste problema que contrastam com a sua aparente simplicidade. Observamos que as forças de interação variam em magnitude e direção em função da distância entre os centros dos cilindros e a posição deles com respeito ao ângulo de incidência do escoamento. Isto é, para um mesmo ângulo de incidência, as forças de interação podem ser repulsivas ou atrativas, a depender da distância entre os centros dos cilindros.

Observamos ainda uma predominância da força de sustentação em relação à força de arrasto quando os cilindros estão próximos. Constatamos, por outro lado, que ambas as forças decaem com o cubo da distância (isto é, com ordem igual a $1/\ell^3$).

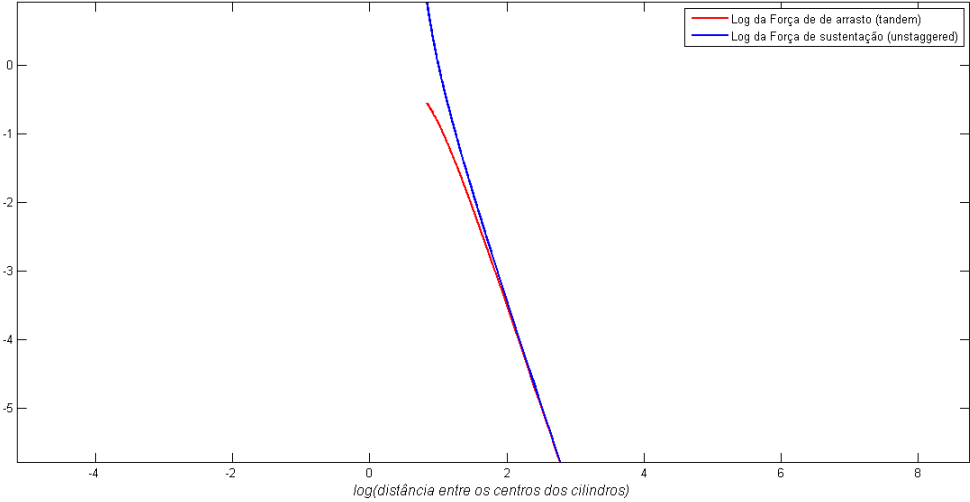


Figura 5.37: Comparação entre as forças de arrasto e sustentação em função de ℓ , em escala logarítmica, para cilindros de raio unitário

Referências Bibliográficas

- [Ach90] David J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [Ahl79] Lars Valerian Ahlfors. *Complex Analysis: an Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 1979.
- [Apo69] Tom Mike Apostol. *Calculus, Volume II*. Wiley, 2nd edition, 1969.
- [Ara10] José Augusto Penteado Aranha. Mecânica dos fluidos (notas de aula), 2010. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, Brasil.
- [Bak95] Henry Frederick Baker. *Abelian Functions: Abel's Theorem and the Allied Theory of Theta Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1995.
- [Bas87] Alfred Barnard Basset. On the motion of two spheres in a liquid, and allied problems. *Proc. London Math. Society*, 18:369, 1887.
- [Bas61] Alfred Barnard Basset. *A Treatise on Hydrodynamics, Volume 1*. Dover, 1st edition, 1961.
- [BC09] James Ward Brown and Ruel Vance Churchill. *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Companies, New York, 8th edition, 2009.
- [Ber08] Martin Berens. *Potential of Multi-Winglet Systems to Improve Aircraft Performance*. PhD thesis, Technischen Universität Berlin, Junho 2008.
- [BGT04] David Antony Burton, Jonathan Gratus, and Robin Tucker. Hydrodynamic forces on two moving discs. *Theoretical and Applied Mechanics*, 31:153–188, 2004.
- [BJ33] David Biermann and William H. Herrnstein Jr. The interference between struts in various combinations. *N.A.C.A. Technical Report*, 468:515–524, 1933.
- [BN10] Joseph Bak and Donald Joseph Newman. *Complex Analysis (Undergraduate Texts in Mathematics)*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2010.
- [Car58] Lloyd H. Carpenter. On the motion of two cylinders in an ideal fluid. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 61:83–87, 1958.

- [CG] Darren G. Crowdy and Christopher C. Green. Computation of the schottky-klein prime function (matlab codes). <http://www.ma.ic.ac.uk/~dgcrowdy/SKPrime>. Último acesso em 17/06/2014.
- [CM90] Alexandre J. Chorin and Jerrold E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1990.
- [CM05] Darren G. Crowdy and Jonathan S. Marshall. Analytical formulae for the Kirchhoff-Routh path function in multiply connected domains. *Proceedings of The Royal Society*, 461:2477–2501, 2005.
- [CM06a] Darren G. Crowdy and Jonathan S. Marshall. Conformal mappings between canonical multiply connected domains. *Computational Methods and Function Theory*, 6:59–76, 2006.
- [CM06b] Darren G. Crowdy and Jonathan S. Marshall. The motion of a point vortex through gaps in walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 551:31–48, 2006.
- [CM07] Darren G. Crowdy and Jonathan S. Marshall. Computing the Schottky-Klein prime function on the Schottky double of planar domains. *Computational Methods and Function Theory*, 7:293–308, 2007.
- [Cro06a] Darren G. Crowdy. Analytical solutions for uniform flow past multiple cylinders. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 25:459–470, 2006.
- [Cro06b] Darren G. Crowdy. Calculating the lift on a finite stack of cylindrical aerofoils. *Proceedings of The Royal Society*, 462:1387–1407, 2006.
- [Cro08a] Darren G. Crowdy. Explicit solution for the potential flow due to an assembly of stirrers in an inviscid fluid. *J. Eng. Math.*, 62(4):333–344, 2008.
- [Cro08b] Darren G. Crowdy. Geometric function theory: a modern view of a classical subject. *Nonlinearity*, 21:T205–T219, 2008.
- [Cro08c] Darren G. Crowdy. The Schwarz problem in multiply connected domains and the Schottky–Klein prime function. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 53(3):221–236, 2008.
- [Cro09a] Darren G. Crowdy. An assembly of steadily translating bubbles in a Hele-Shaw channel. *Nonlinearity*, 22:51–65, 2009.
- [Cro09b] Darren G. Crowdy. Multiple steady bubbles in a Hele-Shaw cell. *Proceedings of The Royal Society*, 465:421–435, 2009.
- [Cro10a] Darren G. Crowdy. A new calculus for two-dimensional vortex dynamics. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 24:9–24, 2010.
- [Cro10b] Darren G. Crowdy. The Schottky-Klein prime function on the Schottky double of planar domains. *Computational Methods and Function Theory*, 10:501–517, 2010.

- [Cro12a] Darren G. Crowdy. Conformal slit maps in applied mathematics. *The ANZIAM Journal*, 24:171–189, 2012.
- [Cro12b] Darren G. Crowdy. A new calculus for two-dimensional vortex dynamics (short course notes), 2012.
- [CSY07] Darren G. Crowdy, Amit Surana, and King Yung Yick. The irrotational motion generated by two planar stirrers in inviscid fluid. *Physics of Fluids*, 19:018103–1–018103–4, 2007.
- [Gae14] Rudi Gaelzer. Apostila de física matemática, 2014. IFM, Universidade Federal de Pelotas, Brasil.
- [Gar35] Isadore Edward Garrick. Potential flow about arbitrary biplane wing sections. *N.A.C.A. Technical Report*, 542:47–75, 1935.
- [Gla47] Hermann Glauert. *The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, segunda edição, 1947.
- [Gre82] A. G. Greenhill. Functional images in cartesians. *Quart. J. Pure and Appl. Math.*, 18:536–562, 1882.
- [Hej72] D. A. Hejhal. *Theta Functions, Kernel Functions, and Abelian Integrals*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1st edition, 1972.
- [Hic79] William Mitchinson Hicks. On the motion of two cylinders in a fluid. *Quart. J. Pure and Appl. Math.*, 16:113–140 and 193–219, 1879.
- [Hoe65] Sighard F. Hoerner. *Fluid Dynamic Drag*. Published by the Author, 2nd edition, 1965.
- [How95] Michael S. Howe. On the force and moment on a body in an incompressible fluid, with application to rigid bodies and bubbles at high and low Reynolds number. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 48:401, 1995.
- [Kra06] Steven George Krantz. *Geometric Function Theory: Explorations in Complex Analysis*. Birkhäuser, Boston, 1st edition, 2006.
- [Lig89] James Michael Lighthill. *An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1989.
- [Mar05] Jonathan S. Marshall. *Function theory in multiply connected domains and applications to fluid dynamics*. PhD thesis, Department of Mathematics, Imperial College London, UK, Dezembro 2005.
- [McM11] Curtis Tracy McMullen. Complex analysis (course notes), 2011. Harvard University, EUA.
- [MT62] Louis Melville Milne-Thomson. *Hydrodynamics*. Macmillan and Co., London, 4th edition, 1962.

- [Neh52] Zeev Nehari. *Conformal Mapping*. McGraw-Hill, New York, 1st edition, 1952.
- [New01] Paul Kenneth Newton. *The N-Vortex Problem: Analytical Techniques*. Springer-Verlag, New York, 1st edition, 2001.
- [Rag03] Clodoaldo Grotta Ragazzo. On the motion of solids through an ideal liquid: Approximated equations for many body systems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63:1972–1997, 2003.
- [RT07] Clodoaldo Grotta Ragazzo and Esteban Tabak. On the force and torque on systems of rigid bodies: A remark on an integral formula due to Howe. *Physics of Fluids*, 19:1–8, 2007.
- [SC99] Ren Sun and Allen T. Chwang. Interaction between rotating elliptic cylinder and fixed circular cylinder. *Journal of Engineering Mechanics*, 125:761–767, 1999.
- [Sun99] Ren Sun. *Hydrodynamic interaction between two bodies with rotation*. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Hong Kong, China, Janeiro 1999.
- [TCL10] Andrew A. Tchieu, Darren G. Crowdy, and Anthony Leonard. Fluid-structure interaction of two bodies in an inviscid fluid. *Physics of Fluids*, 22:107101–1–107101–12, 2010.
- [Tok94] Grigori Aleksandrovich Tokaev. *A History and Philosophy of Fluid Mechanics*. Dover Publications Inc., 2nd edition, 1994.
- [Wan04] Qian Xi Wang. Interaction of two circular cylinders in inviscid fluid. *Physics of Fluids*, 16:4412–4425, 2004.
- [Yam76] Tokuo Yamamoto. Hydrodynamic forces on multiple circular cylinders. *Journal of the Hydraulics Division*, 102:1093–1011, 1976.

Apêndice A

Preliminares em Análise Complexa

*"Our methods are based on the fact that any **analytic function of the complex variable** $x + iy$ satisfies the two-dimensional Laplace equation."*

J. Lighthill, 1986 [Lig89].

A teoria das funções de uma variável complexa é uma ferramenta poderosíssima em matemática, muito útil no estudo de problemas em dimensão 2 - especialmente em mecânica dos fluidos. Para referência futura, apresentaremos a seguir uma coletânea de fatos básicos sobre o assunto, essenciais para a compreensão do nosso cálculo. O leitor mais interessado nos detalhes é estimulado a consultar nossas principais fontes: [Ahl79], [BC09], [BN10], [McM11] e [Gae14]. Dentre elas, a apostila [Gae14] é aquela que mais se assemelha ao espírito dessas notas.

Notação

Começemos fixando a notação para os objetos fundamentais e recorrentes desse texto.

• **Conjuntos numéricos.** Aqui, \mathbb{N} denotará o conjunto dos *números naturais* com o zero, ou seja, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Já os símbolos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} denotarão os conjuntos dos números *inteiros*, *racionais*, *reais* e *complexos*, respectivamente.

Se \mathbb{K} for um dos conjuntos acima, então \mathbb{K}^* denotará o mesmo conjunto \mathbb{K} sem o elemento neutro. Ou seja, $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

• **Subconjuntos do plano complexo.** A menos de menção contrária, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ denotará um subconjunto aberto do plano complexo.

Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ for o domínio de uma função f a valores reais ou complexos, denotaremos por Ω^* o conjunto dos pontos de Ω em que f não se anula. Isto é, $\Omega^* = \{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}$.

O *disco aberto* de centro em $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $R > 0$ será denotado por $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Usaremos a notação $D_R(z_0)^*$ para denotar o disco aberto sem o seu centro, de modo que $D_R(z_0)^* = D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Um *anel* de raios $R_1 > R_2 > 0$ e centro em $z_0 \in \mathbb{C}$ será definido por $A_{R_1, R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z - z_0| < R_1\}$; em particular, quando $R_1 = 1$, denotaremos $R_2 = \rho < 1$ e $A_{1, \rho}(z_0) = A_\rho(z_0)$ ¹.

- **Compatificação de \mathbb{C} .** Denotaremos por $\hat{\mathbb{C}}$ a *compactificação de Alexandrov*² de \mathbb{C} , isto é, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Devido a sua interpretação geométrica, este espaço é também conhecido como *esfera de Riemann*.

- **Notação topológica.** Dado um subconjunto $B \subseteq \mathbb{C}$, denotaremos a sua *fronteira* (também chamada de *bordo*) por ∂B . Em particular, denotaremos a fronteira de $D_1(0)$, o disco unitário centrado na origem, por $S^1 = \partial D_1(0)$.

O *fecho* de um tal subconjunto B será denotado por \bar{B} . Já o *interior* será denotado por $\text{int}(B)$ ou por \mathring{B} .

- **Espaços de funções.** Denotaremos por $C^k(\Omega)$ o conjunto das funções de classe C^k definidas em Ω , isto é, aquelas que possuem k -derivadas contínuas em todos os pontos do domínio. Denotaremos ainda por $C^\infty(\Omega)$ o conjunto das *funções suaves em Ω* , que são aquelas que possuem derivadas contínuas de todas as ordens em todos os pontos de seu domínio.

A.1 Funções analíticas

Definição A.1.1. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é *diferenciável* em $z_0 \in \Omega$ se o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{A.1.1}$$

existe. Tal limite, quando existe, é chamado de *derivada de f em z_0* e denotado por $f'(z_0)$.

Dizemos que f é *diferenciável* se ela o for em todos os pontos do seu domínio.

Definição A.1.2. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é dita *analítica em $z_0 \in \Omega$* se existe um número real $\epsilon > 0$ tal que f é diferenciável em $D_\epsilon(z_0)$. Ainda, f é dita uma *função analítica* se ela for analítica em todos os pontos do seu domínio.

Frequentemente, os termos *função holomorfa* e *função regular* são usados com o mesmo significado (veja [Ahl79]). Nessas notas, o conjunto de todas as funções analíticas (ou holomorfas, ou regulares) definidas num conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ será denotado por $\mathcal{H}(\Omega)$.

Note que, do ponto de vista algébrico, esta definição é uma simples extensão do conceito de diferenciabilidade para funções reais e complexas, como apresentado. Uma consequência natural disso é que as funções analíticas herdam as mesmas

¹Não confundir $A_\rho(z_0)$ com $D_\rho(z_0)$.

²**Pavel Sergeevich Alexandrov** (1896-1982) foi um matemático russo. Seu trabalho concentra-se basicamente nos fundamentos da matemática, onde publicou cerca de 300 artigos versando entre teoria dos conjuntos e topologia. Nessa última, deu nome a importantes conceitos como *compactificação de Alexandrov* e *topologia de Alexandrov*.

propriedades das funções diferenciáveis estudadas no cálculo. Por exemplo, se f e g forem funções analíticas definidas em Ω então

$$f + g \text{ e } f \cdot g \tag{A.1.2}$$

também serão funções analíticas em Ω . Se $\Omega^* = \{z \in \Omega : g(z) \neq 0\}$, então

$$f/g \tag{A.1.3}$$

também será analítica em Ω^* . Ainda, se $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ forem funções analíticas e se $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$, então a função composta $g \circ f(z)$ também será analítica. Ainda, como consequência da *regra da cadeia* (que também é válida para funções complexas diferenciáveis), temos que

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \tag{A.1.4}$$

e assim por diante. Apesar disso, a teoria das funções analíticas é bastante diferente daquela das funções reais e complexas que são apenas diferenciáveis. Um primeiro fato básico que distingue as funções analíticas das diferenciáveis é o seguinte.

Teorema A.1.1 Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica em Ω , então $f'(z)$ também é analítica em Ω .

Demonstração. A demonstração deste teorema depende do uso da chamada *formula integral de Cauchy* e, por isso, não será apresentada aqui. Os interessados podem consultar as seções 50, 51 e 52 de [BC09]. \square

Corolário A.1.1 Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica em Ω , então $f^{(n)}(z)$ também é analítica em Ω , para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, toda função analítica é também de classe C^∞ .

Demonstração. Basta aplicar o princípio da indução finita em n . Para $n = 1$, temos que $f^{(1)}(z) = f'(z)$ é analítica, pelo teorema anterior. Suponha que o resultado valha para $n = k$, ou seja, que $f^{(k)}$ é analítica, para algum número natural $k > 1$. Denotando $g = f^{(k)}$ e observe que, sendo g analítica, o teorema anterior nos diz que $g'(z) = (f^{(k)})' = f^{(k+1)}$ também é analítica, donde segue a tese. \square

Consequentemente, $\mathcal{H}(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$, embora a inclusão contrária não valha. Veremos na seção 6 uma condição suficiente (e também necessária) para que uma função suave seja também analítica.

A.2 Equações de Cauchy-Riemann

Outro tópico diretamente relacionado aos fundamentos das funções complexas diz respeito às equações de Cauchy³-Riemann⁴. Primeiramente, note que para toda $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, podemos escrever

³**Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) foi um matemático francês, com trabalhos marcantes em diversas áreas tais como análise, equações diferenciais parciais e álgebra.

⁴**Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866) foi um matemático alemão. Apesar de sua morte prematura, deu contribuições cruciais para a matemática, especialmente em análise e geometria diferencial. Seus trabalhos em geometria deram início à *geometria Riemanniana*, extensamente estudada até hoje, da qual Albert Einstein se valeu no desenvolvimento de sua teoria da relatividade geral.

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad (\text{A.2.1})$$

com $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. As funções u e v são simplesmente as partes *real* e *imaginária* de f , respectivamente. Por simplicidade, omitiremos sempre que possível a variável z e escreveremos apenas $f = u + iv$. Observe que, sob o isomorfismo $I : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$I(z) = I(x + iy) = (x, y), \quad (\text{A.2.2})$$

podemos identificar toda função definida em \mathbb{C} com uma função definida em \mathbb{R}^2 , e vice-versa.

Feitas essas observações, podemos introduzir as equações de *Cauchy-Riemann* (CR) se

$$\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial y} v \quad (\text{A.2.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u = -\frac{\partial}{\partial x} v \quad (\text{A.2.4})$$

para todo $z = x + iy \in \Omega$.

As equações de Cauchy-Riemann constituem um dos mais importantes sistemas de equações diferenciais parciais (EDPs) que aparecem nas matemáticas pura e aplicada. Veremos em breve que as equações de CR têm uma forte relação com outra notável EDP: a equação de Laplace. Sua relação com as funções analíticas também é estreita, como atesta o seguinte teorema.

Teorema A.2.1 $f = u + iv$ é analítica se, e somente se, ela satisfaz as equações de Cauchy-Riemann e u, v são de classe C^1 como funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} .

Demonstração. Primeiro, notemos que, se $f = u + iv$ é analítica, então vale que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) = \frac{\partial}{\partial x} u + i \frac{\partial}{\partial x} v \text{ e} \\ f'(z) &= \frac{\partial}{\partial(iy)} f(x + iy) = -i \frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial y} v. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x} u + i \frac{\partial}{\partial x} v = -i \frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial y} v$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial y} v \text{ e } \frac{\partial}{\partial x} v = -\frac{\partial}{\partial y} u.$$

Portanto, f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Para provar a volta, suponha que u, v sejam funções de classe C^1 e que satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann. Então, para todo (x, y) vale que

$$\begin{aligned} u(x + h, y + k) - u(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} u h + \left(\frac{\partial}{\partial y} u \right) k + R_1 \\ v(x + h, y + k) - v(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} v h + \left(\frac{\partial}{\partial y} v \right) k + R_2, \end{aligned}$$

onde R_1 e R_2 são funções tais que

$$\frac{R_1}{h+ik}, \frac{R_2}{h+ik} \rightarrow 0 \text{ quando } h+ik \rightarrow 0.$$

Com a notação $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, obtemos das equações de Cauchy-Riemann que

$$f(z+h+ik) - f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial x}v \right) (h+ik) + R_1 + iR_2.$$

Dividindo ambos os lados por $h+ik$, obtemos

$$\frac{f(z+h+ik) - f(z)}{(h+ik)} = \left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial x}v \right) + \frac{R_1 + iR_2}{(h+ik)}.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{(h+ik)} &= \lim_{h+ik \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial x}v \right) + \frac{R_1 + iR_2}{(h+ik)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial x}v \end{aligned}$$

e, portanto, f é analítica. □

A.3 Funções harmônicas

Definição A.3.1. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ é dita *harmônica* se ela satisfaz a equação de Laplace⁵ em Ω , *i.e.*, se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f = 0 \text{ em } \Omega. \tag{A.3.1}$$

Sob a identificação $z = x + iy \rightarrow (x, y)$, vamos nos referir frequentemente a uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo harmônica.

O operador diferencial parcial linear (ODPL)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{A.3.2}$$

é chamado de *laplaciano*. Com esta notação, podemos reescrever a equação de Laplace como

$$\Delta f = 0. \tag{A.3.3}$$

Agora, seja $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$. Uma vez que $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ (teorema A.1.1), segue do teorema A.2.1 que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Como podemos escrever

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial}{\partial x}u + i \frac{\partial}{\partial x}v \\ f'(z) &= -i \frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial y}v \end{aligned}$$

⁵**Pierre Simon Marquis de Laplace** (1749-1827) foi cientista francês, com trabalhos profundos em matemática, física e astronomia. A equação de Laplace, embora envolva o seu nome, já era conhecida por seus antecessores, dentre eles Lagrange e Legendre.

segue, substituindo as relações acima em (A.2.3) e (A.2.4), que

$$\Delta u = 0 \text{ e } \Delta v = 0.$$

Ou seja, se f é analítica em Ω , então u e v são harmônicas em Ω . É possível mostrar que a recíproca deste resultado é verdadeira. Em geral, vale que

Teorema A.3.1 Uma função $f = u + iv$ é analítica em Ω se, e somente se, u e v são harmônicas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em Ω .

Uma demonstração completa deste fato pode ser encontrada em [BC09] e [Ahl79]. Note que este teorema fornece um maquinário para a construção de funções analíticas: dada u harmônica, basta encontrar v tal que ambas satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann. Funções harmônicas u e v satisfazendo esta condição são comumente chamadas de *funções harmônicas conjugadas*.

A.4 Operadores diferenciais complexos

Os seguintes operadores diferenciais serão muito úteis no cálculo que desenvolveremos. É possível demonstrar que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\text{A.4.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (\text{A.4.2})$$

Um cálculo direto mostra que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (\text{A.4.3})$$

Considere agora a equação

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0. \quad (\text{A.4.4})$$

Escrevendo $f = u + iv$, obtemos de (A.4.2) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} u - \frac{\partial}{\partial y} v \right) + i \left(\frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} v \right) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, portanto, a equação (A.4.4) nada mais é que a forma complexa das equações de Cauchy-Riemann. Por esta razão, o operador diferencial (A.4.2) é chamado de *operador de Cauchy-Riemann*.

Reunindo as informações acima, temos a seguinte proposição.

Proposição A.4.1 Vale que:

- a. Se f é analítica, então $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$;
- b. f é harmônica se, e somente se $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} f = 0$.

A.5 Integração complexa

Definição A.5.1 (Curvas em \mathbb{C}). Uma *curva*⁶ (ou *caminho*) em \mathbb{C} é uma função contínua $z : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, onde I é um intervalo não degenerado. A imagem γ de uma curva é dita uma *trajetória* em \mathbb{C} .

Por vezes, a função z acima é chamada de *parametrização* de γ . Em coordenadas, escrevemos $z(t) = x(t) + iy(t)$. Ainda, em complemento à definição, dizemos que uma curva z é

- *simples* (ou de *Jordan*⁷) se z for injetora, isto é, se $z(t_1) \neq z(t_2)$ sempre que $t_1 \neq t_2$;
- *fechada* se $I = [a, b]$ e $z(a) = z(b)$;
- *simples e fechada* se a única auto intersecção ocorrer nos extremos do intervalo, isto é, se $z(t)$ for simples no interior de I e fechada;
- *diferenciável* se $z(t)$ for uma aplicação diferenciável;
- *diferenciável por partes* se existir uma partição $t_0 = a < \dots < t_n = b$ de I tal que $z|_{(t_{j-1}, t_j)}$ é diferenciável, para todo $j = 1, \dots, n$.

Aqui, estaremos interessados principalmente em curvas *regulares*, que são aquelas diferenciáveis e com derivada não nula.

Definição A.5.2 (Integrais sobre curvas). Seja $z = z(t)$ uma curva diferenciável por partes, com $t \in [a, b]$, e denotemos a sua imagem por γ . Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função complexa tal que $\gamma \subseteq \Omega$ e $f|_\gamma$ é contínua, então definimos a *integral de f em γ* por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \tag{A.5.1}$$

A integral de uma função sobre uma curva é comumente chamada de *integral de linha*. Quando a curva é fechada, é comum o uso da notação

$$\oint_\gamma f(z)dz. \tag{A.5.2}$$

Outro conceito inerente à curva é o de *orientação*. Por convenção, dizemos que uma curva possui *orientação positiva* quando ela percorre a sua trajetória no sentido *anti-horário*. Caso contrário, dizemos que sua orientação é *negativa*. Usamos as notações

$$\oint_\gamma f(z)dz \text{ e } \oint_\gamma^- f(z)dz \tag{A.5.3}$$

⁶Aqui, é importante ressaltar a diferença entre uma curva e a sua trajetória. Em geral, a trajetória de uma curva admite infinitas parametrizações. Por exemplo, as funções $z_1(t) = (\cos t, \sin t)$ e $z_2(t) = (\sin t, \cos t)$, com $t \in [-\pi, \pi]$, são ambas parametrizações para o círculo unitário S^1 .

⁷**Marie Ennemond Camille Jordan** (1838-1922) foi um matemático francês. Conhecido a sua época pelo gosto por notações excêntricas, deu diversas contribuições em áreas fundamentais da matemática como topologia, análise, álgebra linear e teoria de grupos. Alguns resultados clássicos que carregam o seu nome são o teorema da curva de Jordan e a forma canônica de Jordan.

para indicar que as parametrizações usadas no cálculo percorrem γ nos sentidos horário e anti-horário, respectivamente.

Observamos que, se $z'(t)$ não é contínua em todo o seu domínio, o intervalo de integração deve ser subdividido da maneira óbvia, a fim de garantir a validade da expressão A.5.1. Ainda, é possível demonstrar que

- a. Se $t(\tau)$, $\tau \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ é uma reparametrização, então

$$\int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(z(\tau))z'(\tau)d\tau. \quad (\text{A.5.4})$$

- b. Se $-\gamma$ representa a curva γ parametrizada no sentido contrário, então⁸

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz. \quad (\text{A.5.5})$$

- c. Se $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz. \quad (\text{A.5.6})$$

Em complemento, uma variedade de propriedades básicas (e avançadas) sobre integrais de linha podem ser encontradas na maioria dos livros introdutórios sobre análise complexa. Veja por exemplo [BN10], [Ahl79] e [BC09].

Um dos principais resultados envolvendo integração complexa é o teorema de Cauchy-Goursat⁹, apresentado a seguir em sua forma mais geral.

Teorema A.5.1 (Teorema de Cauchy-Goursat, 1825-1900). Se f é analítica em Ω , então

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

para toda curva fechada $\gamma \subseteq \Omega$ que delimita apenas pontos contidos em Ω .

Demonstração. Uma demonstração completa deste fato foge ao escopo deste texto e pode ser encontrada nas seções 46 e 47 de [BC09]. Uma outra maneira de prová-lo é a partir do *teorema de Green*¹⁰, como feito na seção 2.6 de [Gae14]. \square

No que segue, cometeremos o seguinte abuso de notação: o símbolo γ denotará não apenas a imagem de uma curva mas também a própria curva. Assim, referir-nos-emos a curva γ e não mais a curva z de imagem γ . Desse modo, quando falarmos em *a curva* γ estaremos pensando numa região $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ que admite uma parametrização $z : I \rightarrow \gamma$.

⁸Ou ainda, quando γ é fechada, temos que $\oint_{-\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz = - \oint_{\gamma} f(z)dz$.

⁹**Édouard Jean-Baptiste Goursat** (1838-1936) foi um matemático francês, conhecido à sua época por seus famosos textos em análise matemática. Este teorema foi primeiro provado por Cauchy em 1825, supondo que f' fosse contínua no interior de γ . O resultado, na versão apresentada, é devido a Goursat (1900) e mostra que a hipótese feita por Cauchy sobre f' pode ser removida (veja [BC09]).

¹⁰**George Green** (1793-1841) foi um físico-matemático britânico. Inteiramente autodidata, foi um dos grandes cientistas do século XIX, com trabalhos importantes em matemática e física. Dentre eles, destaca-se o livro “*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*”, publicado em 1828, no qual surgiram conceitos como *função potencial* e *função de Green*, além de uma versão preliminar do famoso teorema que leva o seu nome.

Definição A.5.3. Uma região $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é *simplesmente conexa* se toda curva $\gamma \subseteq \Omega$ simples e fechada delimita apenas pontos contidos em Ω .

Uma região que não é simplesmente conexa é dita *multiplamente conexa*.

Uma vez que toda curva num domínio simplesmente conexo pode ser deformada continuamente num ponto, segue de imediato o seguinte resultado.

Corolário A.5.1 Se f é analítica numa região simplesmente conexa Ω , então

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

para toda curva fechada $\gamma \subseteq \Omega$.

A.6 Séries de potências e séries de Laurent

O desenvolvimento de séries é uma ferramenta de extrema importância em matemática, sobretudo em análise complexa e suas aplicações. Há uma variedade de técnicas baseadas nesta maneira de representar funções e números complexos. À seguir, apresentaremos alguns conceitos básicos sobre o assunto, que serão úteis nas próximas seções destas notas.

Definição A.6.1. Uma *série de potências* é uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (\text{A.6.1})$$

onde z é a variável complexa, $z_0 \in \mathbb{C}$ é o *centro* da série de potências e $a_n \in \mathbb{C}$ são os coeficientes, para todo $n \in \mathbb{N}$.

O exemplo mais simples, e também mais importante, de uma série de potências é talvez (veja [Ahl79]) a *série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

comumente introduzida no ensino médio. Uma vez que

$$\sum_{n=0}^k z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z},$$

concluimos que, se $|z| < 1$, então $|z|^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e, portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k z^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Por outro lado, se $|z| \geq 1$, então a soma diverge.

Como consequência das considerações acima, se $z \in D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, podemos definir a função

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Note que $f(z)$ é uma função complexa univalente (*i.e.*, sem ramos) e analítica, uma vez que ela é dada pelo quociente de polinômios que não se anulam no domínio de convergência.

Embora surpreendente, este fato não é exclusividade da série geométrica e de suas variações. Com efeito, o próximo teorema fornece critérios para que uma série de potências defina uma função analítica em seu domínio de convergência.

Teorema A.6.1 Para toda série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

existe um número $R \in \mathbb{R}^+$ tal que

- a. a série converge absolutamente para cada $z \in D_R(z_0)$; se $\rho < R$, então a convergência é uniforme em $\overline{D_\rho}(z_0)$;
- b. se $|z - z_0| > R$, então os termos da série são ilimitados e, portanto, a série é divergente;
- c. em $D_R(z_0)$, a série acima define uma função analítica. Suas derivadas podem ser obtidas diferenciando-se a série termo a termo, sendo que *a.* e *b.* continuam válidas para a derivada da série.

Demonstração. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [Ahl79], seção 2.4, páginas 38-40. \square

Nas condições do teorema A.6.1, podemos provar o seguinte (veja a seção 67 de [BC09]).

- **Integração termo a termo.** Se $\gamma \subseteq D_R(z_0)$ e g é uma função contínua em γ , então

$$\oint_{\gamma} g(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\oint_{\gamma} g(z)(z - z_0)^n dz \right). \quad (\text{A.6.2})$$

Em particular, se $g \equiv 1$, temos

$$\oint_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz \right); \quad (\text{A.6.3})$$

logo, a série pode ser integrada termo a termo.

- **Derivação termo a termo.** Para todo $z \in D_R(z_0)$, vale que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{d}{dz} (z - z_0)^n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.6.4})$$

- **Produto termo a termo.** Suponha que as séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

converjam em $D_R(z_0)$. Uma vez que tais somas definem funções analíticas - digamos, f e g , respectivamente - no domínio de convergência, segue da equação A.1.2 que

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n \right)$$

é analítica em $D_R(z_0)$. Ainda, podemos desenvolver o produto acima termo a termo e escrever

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k (z - z_0)^n (z - z_0)^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_n b_{n-k} (z - z_0)^n \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(z - z_0) + \dots \end{aligned} \tag{A.6.5}$$

- **Quociente de séries de potências.** Caso $g \neq 0$, podemos fazer o mesmo para a função f/g . Para este cálculo, basta escrever

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

e calcular os coeficientes a_n derivando a função f/g no ponto z_0 .

No que segue, estudaremos duas classes de séries de potências¹¹: as séries de Taylor¹² as séries de Laurent¹³.

Séries de Taylor

As séries de Taylor, familiares dos cursos básicos de cálculo diferencial, aparecem também no estudo de funções complexas. O próximo teorema, que é uma espécie de recíproca do teorema A.6.1, nos garante que toda função complexa possui uma representação em série em torno de seus pontos regulares (*i.e.*, dos pontos em que a função é analítica).

¹¹Observamos que, no espírito da nossa definição de série de potências, as séries de Laurent não o são. Retomaremos essa discussão adiante.

¹²**Brook Taylor** (1685-1731) foi um matemático inglês. As séries de Taylor apareceram primeiramente nos trabalhos do escocês James Gregory (1638-1675). No entanto, foi Taylor o responsável por introduzir formalmente o conceito das séries que levam o seu nome.

¹³**Pierre Alphonse Laurent** (1813-1854) foi um matemático francês. Teve nas séries de Laurent sua principal contribuição para a matemática. Concebido originalmente num trabalho de 1843, este resultado tornou-se público apenas após a sua morte, em 1854. Dá nome também aos *polinômios de Laurent*.

Teorema A.6.2 (Taylor, 1712). Seja f uma função analítica em $D_{R_0}(z_0)$. Então, f possui a seguinte representação em série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (\text{A.6.6})$$

onde

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}, \text{ para todo } n = 0, 1, \dots \quad (\text{A.6.7})$$

Esta é exatamente a representação em *série de Taylor* da função f em torno do ponto z_0 . Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [BC09], seção 58, págs. 190-2.

No teorema acima, quando $z_0 = 0$, a série de Taylor é chamada de *série de Maclaurin*¹⁴.

Teorema A.6.3 (Unicidade da série de Taylor). Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n$$

converge para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, para todo $z \in D_R(z_0)$, então $a_n = \tilde{a}_n$, para todo n e, portanto, ela é exatamente a série de Taylor de f em torno de z_0 .

Demonstração. A prova deste fato pode ser encontrada em [BC09], seção 66, páginas 217-8. \square

Séries de Laurent

Tudo o que vimos até então tratou da representação em séries de potências em torno de pontos regulares de uma função complexa f . Mas, e no caso em que z_0 não é um ponto regular de f ? Mais geralmente, o que acontece se f é uma função analítica definida em, por exemplo, num domínio duplamente conexo, como um anel de centro z_0 ? Nestes casos, é possível representar a função de uma maneira especial, como potências positivas e negativas de $(z - z_0)$. Em geral, temos o seguinte teorema.

Teorema A.6.4 (Laurent, 1843). Suponha que f seja uma função analítica em um domínio anular $A_{R_1, R_2}(z_0)$. Então, em cada ponto do domínio, f pode ser escrita como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (\text{A.6.8})$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.6.9})$$

e γ é uma curva simples contida em $A_{R_1, R_2}(z_0)$ e orientada positivamente.

Tal representação é chamada *série de Laurent de f centrada em z_0* .

Demonstração. [BC09], seção 61, págs. 199-202. \square

¹⁴Colin Maclaurin (1698-1746) foi um matemático escocês.

O leitor atento provavelmente percebeu que a expressão acima, embora envolva potências de $(z - z_0)$, não é uma série de potências *strictu sensu* - de fato, tal denominação é um abuso, visto que séries de potências, como definimos, envolvem apenas potências positivas de $(z - z_0)$. No entanto, esse abuso é de fácil justificativa (veja [Ahl79], seção 1.3, páginas 184-6). Note que, nas condições do teorema, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \end{aligned} \tag{A.6.10}$$

onde $b_n = a_{-n}$, para $n = 1, 2, \dots$. Portanto, $f(z)$ é a soma de duas séries de potências - a primeira, da variável $1/(z - z_0)$ e a segunda da variável $(z - z_0)$.

Teorema A.6.5 (Unicidade da série de Laurent). Se a série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tilde{b}_n}{(z - z_0)^n},$$

onde $\tilde{b}_n = \tilde{a}_n$, converge para $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, para todo $A_{R_1, R_2}(z_0)$, então $\tilde{a}_n = a_n$, para todo n e, portanto, ela é exatamente a série de Laurent de $f(z)$ em torno de z_0 .

Demonstração. A prova deste fato pode ser encontrada em [BC09], seção 66, págs. 218-9. □

A.7 Singularidades

A principal referência aqui é o capítulo 6 de [BC09].

Definição A.7.1. Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Um ponto $z_0 \in \Omega$ é uma *singularidade* (ou *ponto singular*) de f se ela deixa de ser analítica em z_0 .

Um ponto que não é singular é dito um *ponto regular*. Portanto, z_0 é regular se, e somente se, f é analítica em z_0 .

Vimos no teorema de Cauchy-Goursat (teorema A.5.1) que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

se f é analítica no interior de γ . No entanto, se esta condição falha para algum ponto, a integral não é necessariamente igual a zero. De fato, considere o seguinte campo de vetores¹⁵

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

¹⁵Exemplo retirado de R. Bianconi, “O Rotacional”, 1º semestre de 2008.

Este campo de vetores aparece em mecânica dos fluidos e descreve o escoamento em regime permanente gerado pelo movimento de um bastão no sentido anti-horário. Note que a \mathbf{F} está associado uma função f analítica em \mathbb{C}^* dada por

$$f(x + iy) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

No entanto, para toda curva simples e fechada γ que envolve a origem, como por exemplo $z(t) = \cos t + i \sin t$, temos que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi \neq 0.$$

Isso acontece porque, de alguma maneira, a integral “enxerga” a singularidade envolvida pela curva. Veremos a seguir que há um número específico, chamado de *resíduo*, o qual está relacionado tanto com o valor da integral quanto com as singularidades de f no interior de γ .

As singularidades podem ser classificadas em isoladas e não isoladas. Dentro da classe de singulares isoladas, há três subclasses que serão de interesse no presente estudo.

Definição A.7.2 (Singularidade isolada). Um ponto singular z_0 é chamado de *singularidade isolada* se f é analítica em $D_{\epsilon}(z_0)^* = \{0 < |z - z_0| < \epsilon\}$, para algum $\epsilon > 0$.

Por exemplo, o ponto $z = 1$ é uma singularidade isolada para a função $f(z) = 1/(1-z)$. Já a função

$$f(z) = \frac{3z}{(z-2)(z-i)}$$

é analítica em todo o plano complexo, exceto nos pontos $z = 2$ e $z = i$, que são singularidades isoladas de f .

Observação A.7.1 (Fato). É fácil ver que, se f possui apenas um número finito de singularidades, então elas devem ser isoladas.

Três tipos de singularidades isoladas.

Se f possui uma singularidade isolada em $z = z_0$, então, pelo teorema A.6.4, podemos escrever

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

em $D_{\epsilon}(z_0)$, para algum $\epsilon > 0$. A porção

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \tag{A.7.1}$$

é chamada de *parte principal de f em z_0* . Note que a série de Laurent coincide com a série de Taylor quando a parte principal é nula. A partir dessa parcela singular, classificamos as singularidades isoladas em três tipos.

- a. **Polos.** Se $b_m \neq 0$ e $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0$ em A.7.1, então dizemos que z_0 é um *polo de ordem m de f* . Note que, neste caso, f pode ser escrita como

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (\text{A.7.2})$$

Se $m = 1$, então dizemos que z_0 é um *polo simples*.

- b. **Singularidade essencial.** Se $b_m \neq 0$ para todo $m = 1, 2, \dots$, então z_0 é dita uma *singularidade essencial de f* .

- c. **Singularidade removível.** Se $b_m = 0$ para todo $m = 1, 2, \dots$, então chamamos z_0 de *singularidade removível de f* . Esta terminologia é usada devido ao fato que, neste caso, a singularidade em z_0 é apenas aparente, visto que é possível *removê-la* definindo

$$f(z) = a_0, \text{ se } z = z_0. \quad (\text{A.7.3})$$

Daí, como $b_n = 0$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (\text{A.7.4})$$

Singularidade no infinito.

Dizemos que uma função f possui uma *singularidade em $z = \infty$* , também dita *singularidade no infinito*, se a função

$$g(w) = f(1/w) \quad (\text{A.7.5})$$

possuir uma singularidade em $w = 0$.

Por exemplo, a função linear $f(z) = az$, onde $a \in \mathbb{C}^*$, possui um polo simples no infinito, uma vez que $f(1/w) = a/w$ possui um polo simples em $z = 0$. Embora elementar, este exemplo oferece uma caracterização para escoamentos uniformes e irrotacionais de um fluido ideal no plano - um fato que será devidamente destacado na subseção 1.3.

A.8 Resíduos

Lembremos que, quando z_0 é uma singularidade isolada, existe $\epsilon > 0$ tal que f é analítica em $D_\epsilon(z_0)^*$. Ainda, é possível escrever

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

onde $\gamma \subseteq D_\epsilon(z_0)^*$ é uma curva em torno de z_0 . Note que, quando $n = -1$, temos

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad (\text{A.8.1})$$

e, portanto,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (\text{A.8.2})$$

Definição A.8.1. O número complexo a_{-1} acima é chamado de *resíduo de f em z_0* .

Usualmente, denotamos o resíduo de f em z_0 por $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$. Observe que a relação A.8.2 acima oferece uma maneira muito rápida de se calcular a integral $\oint_{\gamma} f(z) dz$, a partir do resíduo do integrando.

Há diversas técnicas para se calcular o resíduo de uma função. A seção 2.9.3 da apostila [Gae14] sintetiza os principais truques usados nessa situação. Já a seção 5 do capítulo 3 de [Ahl79] aborda o mesmo problema, porém com um viés teórico. Ainda, o livro [BC09] possui dois capítulos inteiramente dedicados ao assunto: os capítulos 6 (teoria) e 7 (aplicações).

É possível estender o resultado da equação A.8.2 para o caso em que a curva de integração possui um número qualquer (finito) de singularidades em seu interior. Este é o conteúdo do famoso *teorema do resíduo de Cauchy*, apresentado a seguir, com o qual encerramos esta seção.

Teorema A.8.1 (Teorema do resíduo de Cauchy). Seja γ uma curva simples e fechada, descrita no sentido positivo (anti-horário). Se uma função f é analítica dentro e sobre γ , exceto por um número finito pontos singulares z_1, \dots, z_n dentro de γ , então

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (\text{A.8.3})$$

Demonstração. Para a demonstração deste fato, veja [BC09], seção 70, página 235. \square

Apêndice B

Preliminares em Transformações Conformes

"A real function of a real variable can easily be visualized by means of a graph. (...) This simple yet far-reaching idea which at one stroke, as it were, gives a geometrical meaning to all concepts and results of real analysis and which is the starting point of analytic geometry can, to a certain degree, be extended to the case of complex-valued functions of complex variable."

Z. Nehari, 1951 [Neh52].

Neste apêndice, estudaremos uma classe especial de funções analíticas, as chamadas *transformações conformes*. Elas surgem naturalmente na caracterização geométrica das funções analíticas em \mathbb{C} .

Para motivar o que segue, seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ uma função não constante. No espírito do parágrafo anterior, vamos tentar entender geometricamente o comportamento de f ao redor de um ponto z_0 em Ω . Notemos que, pelo teorema A.6.2, existe $n \geq 1$ tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ pois, do contrário, $f \equiv a_0$. Assim, é possível mostrar [Neh52] que, se α for o ângulo formado por duas curvas diferenciáveis γ_1 e γ_2 no ponto z_0 , então o ângulo β formado pela imagem dessas curvas no ponto $f(z_0)$ será

$$\beta = m\alpha. \tag{B.0.1}$$

Em particular, se $f'(z_0) \neq 0$, então $\alpha = \beta$. Como as curvas foram escolhidas arbitrariamente, concluímos que, se $f'(z_0) \neq 0$, a transformação f *preserva ângulos* em z_0 . Mais ainda, da continuidade de f' , segue que existe $\epsilon > 0$ tal que $f' \neq 0$ em $D_\epsilon(z_0)$, o que estende a propriedade a uma vizinhança do ponto z_0 .

Uma consequência disso é que, se D for um subconjunto fechado de $D_\epsilon(z_0)$ cujo bordo é formado por uma união de curvas regulares, então a imagem de $f(D)$ será uma região com a mesma forma geométrica. Em outras palavras, toda região suficientemente pequena no entorno de um ponto regular é mapeada em outra região *conforme* a essa, sem distorções. Portanto, se f for regular em todos os pontos do seu domínio, esse resultado se aplica a todos os subconjuntos de Ω , o que nos sugere a seguinte definição.

Definição B.0.2 (Transformação conforme). Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é uma *transformação conforme* se ela preserva ângulos.

O próximo teorema fornece algumas caracterizações alternativas à definição acima para as transformações conformes.

Teorema B.0.2 Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. São equivalentes:

- a. f é conforme;
- b. f é analítica e injetora;
- c. f é analítica e $f'(z) \neq 0$, para todo $z \in \Omega$.

Demonstração. Uma demonstração desse fato pode ser encontrada na seção 13.1 de [BN10]. \square

Teorema B.0.3 Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função analítica e injetora, então a função inversa $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega$ existe e é analítica. Consequentemente, toda transformação conforme é inversível, e sua inversa também é uma transformação conforme. Mais ainda, para todo $z \in \Omega$ vale que

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}. \quad (\text{B.0.2})$$

Um primeiro exemplo de transformação conforme é dado por funções da forma

$$T(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0. \quad (\text{B.0.3})$$

Uma transformação tal como acima é dita uma *transformação linear*. Note que T pode ser escrita como

$$T(z) = T_3 \circ T_2 \circ T_1(z), \quad (\text{B.0.4})$$

onde $T_1(z) = |a|z$ (dilatação), $T_2(z) = e^{i\theta}z$, onde $\theta = \arg(a)$ (rotação), $T_3(z) = z + b$ (translação). Ou seja, T é uma composição de isometrias do plano, que naturalmente preservam forma.

A próxima seção será dedicada ao estudo de outra classe de transformações conformes: as *transformações de Möbius*.

B.1 Transformações de Möbius

Definição B.1.1 (Transformações de Möbius). A *transformação bilinear* da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{onde } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \text{ e } ad - bc \neq 0 \quad (\text{B.1.1})$$

é chamada de *transformação de Möbius*¹.

¹**August Ferdinand Möbius** (1790-1868) foi um matemático e astrônomo alemão. Conhecido pela descoberta da superfície que leva o seu nome, a *faixa de Möbius*, foi também um dos grandes desenvolvedores da geometria projetiva no século XIX. Trabalhou também em teoria dos números, inspirando a criação de conceitos como a *transformada de Möbius*, a *função de Möbius* $\mu(n)$ e a *fórmula de inversão de Möbius*

Aqui, a condição $ad - bc \neq 0$ assegura que T está bem definida e é não constante e que T' não se anula em seu domínio.

Note que T é analítica, uma vez que é dada pelo quociente de polinômios. Ainda, é possível mostrar que T mapeia $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ em $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ e que T é injetora sobre a sua imagem. Assim, definindo $T(-d/c) = \infty$ e $T(\infty) = a/c$, podemos dizer que $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é uma transformação conforme.

Observação B.1.1. O conjunto de todas as transformações de Möbius, munido da operação de composição, forma um grupo. Denotaremos tal grupo por $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$.

A transformação de Möbius mais importante é a *inversão no círculo unitário*

$$T(z) = \frac{1}{z} \quad (\text{B.1.2})$$

É um simples exercício geométrico ver que esta transformação mapeia o interior do disco unitário em seu exterior, e que mantém o bordo invariante. Algumas consequências não triviais da transformação acima estão reunidas no seguinte teorema, que não demonstraremos.

Teorema B.1.1 A transformação de Möbius dada por B.1.2 mapeia retas e círculos em retas e círculos. Consequentemente, toda $T \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ também mapeia retas e círculos em retas e círculos.

Demonstração. Ver páginas 178-190 de [BN10]. □

No que segue, caracterizaremos as transformações de Möbius. Começemos pelo seguinte teorema de existência e unicidade.

Lema B.1.1 A única transformação de Möbius T tal que $T(z_1) = \infty$, $T(z_2) = 0$ e $T(z_3) = 1$ é dada por

$$T(z) = \left(\frac{z - z_2}{z - z_1} \right) \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right). \quad (\text{B.1.3})$$

Demonstração. A existência está garantida pela expressão acima, pois um cálculo direto mostra que $T(z_1) = \infty$, $T(z_2) = 0$ e $T(z_3) = 1$. Por outro lado, se S é outra transformação nessas condições, então $T \circ S^{-1}$ é uma transformação bilinear que fixa três pontos e, portanto, $T \circ S^{-1} = Id$. Logo, $T \equiv S$, donde segue a tese. □

É possível mostrar algo mais geral: transformações de Möbius podem ser unicamente determinadas especificando-se três pontos no domínio e três na imagem. Para demonstrar este resultado, convém usar a seguinte notação.

Definição B.1.2. A *razão cruzada* de $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ é definida por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \right) \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right). \quad (\text{B.1.4})$$

Consequentemente, se T é a transformação do lema B.1.1, então $(z_1, z_2, z_3, z_4) = T(z_4)$.

Proposição B.1.1 A razão cruzada é invariante por transformações de Möbius.

Demonstração. Sejam S uma transformação bilinear e $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Seja T a única transformação bilinear tal que $T(z_1) = \infty$, $T(z_2) = 0$ e $T(z_3) = 1$. Note que, a transformação bilinear $T \circ S^{-1}$ mapeia os pontos $S(z_1)$, $S(z_2)$ e $S(z_3)$ em ∞ , 0 e 1 , respectivamente. Assim, pelo teorema anterior, temos que

$$T \circ S^{-1}(S(z)) = (S(z_1), S(z_2), S(z_3), S(z)).$$

Ainda, pelo mesmo teorema, decorre que

$$T(z) = (z_1, z_2, z_3, z).$$

Assim, $(z_1, z_2, z_3, z) = (S(z_1), S(z_2), S(z_3), S(z))$ para todo z , e portanto,

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (S(z_1), S(z_2), S(z_3), S(z_4)).$$

□

O próximo teorema é a prometida generalização do lema B.1.1, cuja demonstração omitiremos.

Teorema B.1.2 A única transformação de Möbius $T(z) = w$ tal que $T(z_1) = w_1$, $T(z_2) = w_2$ e $T(z_3) = w_3$ é dada implicitamente por

$$\left(\frac{w - w_2}{w - w_1} \right) \left(\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \right) = \left(\frac{z - z_2}{z - z_1} \right) \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right). \quad (\text{B.1.5})$$

Demonstração. Veja a seção 13.2 de [BN10].

□

B.2 Domínios

Definição B.2.1. Um subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é chamado de *domínio* se Ω for aberto e conexo.

Definição B.2.2. Seja Ω um domínio. Dizemos que Ω é *n-conexo* (ou que possui *conexidade n*) se o seu complementar $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ possui n exatamente componentes conexas.

Em outras palavras, um domínio Ω é *n-conexo* se ele possui n “buracos”.

Definição B.2.3. Sejam Ω_1 e Ω_2 dois domínios em \mathbb{C} . Dizemos que Ω_1 e Ω_2 são *conformalmente equivalentes* se existe uma transformação conforme $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ sobrejetora.

A existência de domínios equivalentes é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema B.2.1 Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é uma transformação conforme e $D \subseteq \Omega$ é um domínio, então $f(D)$ também é um domínio.

Demonstração. Veja a seção 1 do capítulo 5 de [Neh52].

□

Observação B.2.1. Um fato topológico básico é que a conexidade de um domínio é preservada por qualquer função contínua e injetora e, conseqüentemente, por transformações conformes (veja [Neh52]).

Segue do teorema B.2.1 e da observação B.2.1 que, se D for um domínio de conexidade n e f for uma transformação conforme, então $f(D)$ também será um domínio de mesma conexidade n .

B.3 Funções harmônicas e problemas de valor de contorno

Dedicaremos esta seção ao estudo de dois resultados que serão de grande importância para o cálculo desenvolvido no capítulo 4. O primeiro deles atesta que dadas uma função harmônica e uma transformação conforme, então a função composta também é harmônica. Em outras palavras, as soluções da equação de Laplace (ver equação A.3.1) são invariantes por transformações conformes. Já o segundo resultado diz respeito aos problemas de valor de contorno de *Neumann*² e *Dirichlet*³. Mostraremos que tais problemas são também invariantes por transformações conformes.

Teorema B.3.1 Seja $f : D_z \rightarrow D_w$ uma transformação conforme. Se $h(u, v)$ é uma função harmônica definida em D_w , então a função

$$H(x, y) = h(f(z)) = h(u(x, y), v(x, y)) \quad (\text{B.3.1})$$

é harmônica em D_z .

Demonstração. Há duas situações a considerar, dependendo da conexidade do domínio D_w .

Caso simplesmente conexo. Suponha que D_w é simplesmente conexo. Seja g uma função harmônica conjugada a h (que existe, pois o domínio é simplesmente conexo). Pelo teorema A.3.1, a função

$$\Phi(w = u + iv) = h(u, v) + ig(u, v)$$

é analítica em D_w . Assim, $\Phi(f(z))$ é também analítica em D_z e portanto, a parte real de $\Phi(f(z))$,

$$\text{Re}[\Phi(f(z))] = \text{Re}[h(f(z)) + ig(f(z))] = h(f(z))$$

é harmônica em D_z .

Caso multiplamente conexo. Seja $w_0 \in D_w$ um ponto qualquer. Como h é harmônica em D_w , existe $\epsilon > 0$ tal que $D_\epsilon(z_0) \subseteq D_w$. Restringindo a função h a $D_\epsilon(z_0)$, que é um subconjunto simplesmente conexo, segue do caso anterior que $h(f(z))$ é harmônica em $f(D_\epsilon(z_0))$. Como o ponto z_0 foi escolhido arbitrariamente, segue que $h(f(z))$ é harmônica em $f(D_w) = D_z$. \square

²**Carl Gottfried Neumann** (1832-1925) foi um matemático alemão. Nascido na ilustre cidade de Königsberg, deu contribuições importantes em análise, sobretudo à *teoria das funções integrais*, da qual é tido como um dos criadores. Fundou, em parceria com também matemático Alfred Clebsch, o jornal *Mathematische Annalen*.

³**Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859) foi um matemático alemão. Foi um dos grandes matemáticos puros do século XIX, tido como o criador da *teoria analítica dos números* e um dos responsáveis por formalizar o conceito de função.

Teorema B.3.2 Sejam $f : D_z \rightarrow D_w$ uma transformação e $\gamma \subseteq D_z$ uma curva suave. Suponha que f seja conforme sobre γ e denote $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$. Se h é diferenciável e satisfaz a *condição de Dirichlet*

$$h = h_0 \quad (\text{B.3.2})$$

ou a *condição de Neumann*

$$\frac{d}{dn}h = 0 \quad (\text{B.3.3})$$

sobre $\tilde{\gamma}$, onde h_0 é uma constante real e \mathbf{n} é um vetor unitário e normal à $\tilde{\gamma}$, então a função

$$H(x, y) = h(f(z)) = h(u(x, y), v(x, y)) \quad (\text{B.3.4})$$

satisfaz, respectivamente, as condições

$$H = h_0 \text{ ou } \frac{d}{dN}H = 0 \quad (\text{B.3.5})$$

sobre γ , onde \mathbf{N} é um vetor unitário e normal à γ .

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes.

Problema de Dirichlet. Uma vez $h(u, v) = h_0$ sobre $\tilde{\gamma}$ e que $\gamma = f^{-1}(\tilde{\gamma})$, segue que $h(f(z)) = h_0$ sobre γ .

Problema de Neumann. Suponha agora que $\frac{d}{dn}h = 0$ em $\tilde{\gamma}$. Suponha ainda que $\nabla h \neq 0$. Da relação

$$\frac{d}{dn}h = \nabla h \cdot \mathbf{n},$$

concluimos que ∇h e \mathbf{n} são ortogonais em $\tilde{\gamma}$, ou seja, que ∇h é tangente a $\tilde{\gamma}$. Por outro lado, ∇h é ortogonal às curvas de nível $h = c$ nos pontos de $\tilde{\gamma}$. Note agora que f^{-1} transforma a curva de nível $h = c$ na curva de nível $H = c$. Uma vez que f é conforme em $\tilde{\gamma}$, concluimos que $H = c$ e γ são ortogonais nos pontos de intersecção, donde segue que ∇H é tangente a γ . Consequentemente, $\nabla h \cdot \mathbf{N} = 0$ e, finalmente, como $\frac{d}{dN}H = \nabla H \cdot \mathbf{N}$, concluimos que $\frac{d}{dN}H = 0$.

Por fim, se $\nabla h = 0$, a tese segue do seguinte resultado (veja a seção 106 de [BC09]):

$$|\nabla H| = |\nabla h||f'|.$$

□

Juntos, os teoremas B.3.1 e B.3.2 acima implicam no seguinte resultado.

Corolário B.3.1 Os problemas de Dirichlet

$$\Delta h = 0, \quad h = h_0 \quad (\text{B.3.6})$$

e de Neumann

$$\Delta h = 0, \quad \frac{d}{dn}h = 0 \quad (\text{B.3.7})$$

são invariantes por transformações conformes.

B.4 Teorema de Riemann

Nesta seção, falaremos um mínimo sobre o teorema de Riemann e suas extensões. Considerado por muitos uma das mais importantes realizações da matemática no século XIX [Cro10a], é através dele que o cálculo do capítulo 4 será expresso. Os resultados aqui discutidos são avançados e de difícil justificativa, de modo que demonstrá-los está fora dos objetivos dessas notas.

O “*Riemann mapping theorem*”, como é referido na literatura inglesa, apareceu pela primeira vez na tese de doutoramento de Riemann, em 1951. Em sua versão original, ele atesta que toda região simplesmente conexa do plano cujo bordo é suave por partes é conformalmente equivalente ao disco unitário. A prova de Riemann, que se valeu do *princípio de Dirichlet*, estava errada e foi corrigida apenas mais tarde. Os primeiros trabalhos envolvendo regiões simplesmente conexas menos restritivas apareceram já no século XX. A versão atual do teorema é seguinte.

Teorema B.4.1 (Teorema de Riemann). Se $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ é uma região simplesmente conexa e com mais de um ponto no bordo, então existe uma transformação $f : \Omega \rightarrow D_1(0)$ conforme e sobrejetora. Além disso, esta transformação é única se fixarmos um ponto $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) > 0$.

A demonstração deste fato pode ser encontrada em livros clássicos sobre o assunto, como [BN10], [Kra06] e [Neh52]. Uma outra demonstração é proposta como exercício no livro do Rudin. Tal demonstração é devida à P. Koebe⁴ e é conduzida por meio de aproximações sucessivas. Coube ao próprio Koebe propor uma generalização para este resultado, no âmbito das superfícies de Riemann, o famoso *teorema de uniformização de Koebe* [McM11], [Kra06].

O próximo teorema é uma extensão direta do teorema de Riemann, tal como enunciado no início da seção, para domínios de conexidade múltipla.

Teorema B.4.2 Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um domínio n -conexo, $n \geq 2$, e assumamos toda componente conexa de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ possui mais do que um ponto. Então, existe uma transformação conforme $z : \Omega \rightarrow A$, onde A é o anel $A_{R_1, R_2}(0)$ com $n - 2$ arcos concêntricos (contidos em círculos $|\zeta| = r_1, \dots, |\zeta| = r_{n-2}$) removidos.

A demonstração desse teorema é extensa, cheia de detalhes e faz uso de diversos conceitos e resultados não abordados nessas notas, e portanto será omitida. O leitor mais interessado pode consultar o capítulo 4 de [Kra06] - a prova do teorema está dividida entre as seções 4.2, 4.3 e 4.4.

O domínio A do teorema acima é um exemplo do que chamamos de *domínio canônico*⁵ - um domínio que pode ser completamente determinado especificando-se apenas alguns parâmetros (ou *módulo*). Listas de tais domínios podem ser encontradas nos principais textos sobre o assunto. Por exemplo, o domínio A aparece na lista dos 5 principais domínios canônicos feita por Zeev Nehari em seu clássico livro

⁴Paul Koebe (1882-1945) foi um matemático alemão. Trabalhou exclusivamente na área da análise complexa, onde obteve importantes resultados sobre a uniformização das superfícies de Riemann.

⁵Este conceito será introduzido na seção 3 dessas notas.

“*Conformal Mapping*” (veja a seção 1 do capítulo 7 de [Neh52]). Recentemente, os matemáticos ingleses D. Crowdy e J. Marshall incorporaram a esta lista os chamados domínios circulares (àqueles cuja fronteira é composta por círculos). Os detalhes da construção de Crowdy e Marshall estão em [CM06a]. Munidos deste resultado, podemos enunciar a seguinte variante do teorema de Riemann, com a qual finalizamos este apêndice.

Corolário B.4.1 (Teorema de Riemann para domínios multiplamente conexos). Nas hipóteses do teorema acima, existe uma transformação conforme $f : \Omega \rightarrow D_\zeta$, onde D_ζ é o disco $D_1(0)$ com $n - 1$ discos removidos.

Apêndice C

Preliminares em Mecânica dos Fluidos

"To tell the whole story of the role of fluids in the growth of physical sciences, we ought to go back to the dim ages of the emergence of organized life, to the times before our cave-dwelling ancestry began to wonder why water ran downhill. But this we cannot do in a book of this size and purpose."

G. A. Tokaty, 1971 [Tok94].

Neste apêndice, apresentaremos brevemente alguns conceitos em mecânica dos fluidos, necessários para a compreensão do problema que estudaremos nesta monografia.

C.1 Escoamentos bidimensionais

Um dos modelos mais conhecidos para a mecânica dos fluidos incompressíveis é dado pelas famosas **equações de Navier¹-Stokes²**

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f} \quad (\text{C.1.1})$$

acopladas à condição de incompressibilidade

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} u_j(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{C.1.2})$$

e à condição inicial

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (\text{C.1.3})$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_n(\mathbf{x}, t)) \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) e $p(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, os campos de velocidade e de pressão do escoamento, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ é o campo devido às forças externas que atuam sobre o fluido (por exemplo, forças gravitacionais), $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ é um campo incompressível de classe C^∞ e ν é a *viscosidade cinemática* do fluido.

¹Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) foi um físico e engenheiro francês.

²Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) foi um matemático irlandês.

Embora de difícil tratamento, estas equações representam exatamente a segunda lei de Newton aplicada a um elemento infinitesimal de fluido. Para uma derivação completa dessas equações, recomendamos a leitura do capítulo 1 de [Ara10].

Aqui, sempre que possível, omitiremos as variáveis \mathbf{x} e t . Por vezes, referir-nos-emos ao campo de velocidades \mathbf{u} como sendo “o escoamento \mathbf{u} ” e vice-versa.

Nessas notas, estaremos interessados em **escoamentos bidimensionais**, que são aqueles cujo campo de velocidades pode ser escrito em função de apenas duas variáveis espaciais - caso em que $n = 2$. Esta hipótese representa uma simplificação muito útil, como veremos a seguir. Suporemos ainda que o nosso escoamento é *incompressível* e *irrotacional*, o que significa dizer que o campo de velocidades associado ao escoamento satisfaz cada uma das seguintes definições.

Definição C.1.1. Dizemos que um campo de vetores $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ é *incompressível* se

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \nabla \cdot \mathbf{X} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} X_j = 0. \quad (\text{C.1.4})$$

Definição C.1.2. Dizemos que um campo de vetores $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$, com $n = 2, 3$, é *irrotacional* se

$$\operatorname{rot} \mathbf{X} = \nabla \wedge \mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.1.5})$$

A um escoamento fluido, caracterizado por seu campo de velocidades \mathbf{u} , está naturalmente associado um outro campo de vetores dado por

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}, \quad (\text{C.1.6})$$

chamado de *vorticidade* do escoamento \mathbf{u} . Quando $n = 3$, temos

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial}{\partial y} u_3 - \frac{\partial}{\partial z} u_2, \frac{\partial}{\partial z} u_1 - \frac{\partial}{\partial x} u_3, \frac{\partial}{\partial x} u_2 - \frac{\partial}{\partial y} u_1 \right). \quad (\text{C.1.7})$$

Se $n = 2$, temos

$$\boldsymbol{\omega} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} u_2 - \frac{\partial}{\partial y} u_1 \right). \quad (\text{C.1.8})$$

Note que, neste caso, a vorticidade é sempre paralela ao eixo z e, portanto, pode ser tratada (com um certo abuso) como uma quantidade escalar

$$\omega = \frac{\partial}{\partial x} u_2 - \frac{\partial}{\partial y} u_1. \quad (\text{C.1.9})$$

Por fim, trabalharemos sob a hipótese de que o escoamento é *ideal*, o que significa dizer que a viscosidade cinemática ν do fluido em questão é desprezível, a ponto de considerarmos $\nu \equiv 0$.

Uma grandeza escalar diretamente associada à vorticidade é a *circulação*, abaixo definida.

Definição C.1.3 (Circulação). Sejam $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ o campo de velocidades associado a um escoamento no plano ($n = 2$) ou no espaço ($n = 3$) e γ uma curva simples e fechada contida no fluido. A *circulação de \mathbf{u} em torno de γ* é definida como sendo

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{C.1.10})$$

Note que, pelo teorema de Stokes [Apo69], [Lig89], [Ara10], temos

$$\oint_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{C.1.11})$$

onde S é uma superfície aberta tal que $\partial S = \gamma$. Portanto, a circulação em torno de uma curva mede o fluxo de vorticidade através de uma superfície limitada por esta curva. Note ainda que, se $\Gamma = 0$ para toda curva γ contida no fluido, então $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. A recíproca será verdadeira apenas se o domínio fluido for simplesmente conexo, caso em que o escoamento é potencial (este conceito será discutido na próxima seção).

Sob estas condições, é possível deduzir uma série de teoremas clássicos, estabelecidos já no século XIX por grandes nomes das ciências matemáticas. Dois desses resultados, devidos à Lagrange³, Cauchy e Lorde Kelvin⁴, elucidam a questão da circulação em escoamentos ideais e incompressíveis.

Teorema C.1.1 (Teorema da circulação de Kelvin). Seja \mathbf{u} um escoamento ideal e incompressível sobre o qual atuam apenas forças conservativas. Se γ é uma curva que se move com o fluido e $\Gamma(t)$ é a circulação em torno dessa curva, então

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = 0. \quad (\text{C.1.12})$$

Em outras palavras, “a circulação em torno de uma curva fechada que se move com o fluido é constante”.

Este fato é enunciado, discutido e demonstrado na seção 5.1 de [Lig89]. A partir deste teorema, caracteriza-se facilmente os escoamentos irrotacionais e incompressíveis em um fluido ideal - tal é o conteúdo do *teorema de Lagrange*, abaixo enunciado.

Corolário C.1.1 (Teorema de Lagrange). Seja $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ um escoamento nas condições do teorema da circulação de Kelvin. Nessas hipóteses, se $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ em t_0 , então $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ para todo t . Em outras palavras, “se o escoamento for irrotacional num instante inicial, ele será irrotacional sempre”.

Este teorema foi rigorosamente enunciado e provado por Cauchy, embora Lagrange tenha sido o primeiro a investigá-lo. Uma demonstração completa pode ser encontrada na seção 5.3 de [Lig89]. Ainda, do teorema de Lagrange, decorre o seguinte resultado.

Corolário C.1.2 Nas hipóteses do teorema de Lagrange, se $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \equiv \mathbf{0}$, então $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{0}$, para todo t . Em outras palavras, “todo escoamento que parte do repouso é irrotacional”.

C.2 Potencial complexo

Nos tradicionais cursos de cálculo integral e diferencial [Apo69] lecionados na graduação, ensina-se que todo campo de vetores \mathbf{X} irrotacional num domínio simplesmente

³Giuseppe Lodovico Lagrangia (1736-1813), conhecido como Joseph-Louis Lagrange, foi um matemático e astrônomo italiano.

⁴William Thomson (1824-1907), conhecido como Lorde Kelvin, foi um matemático e engenheiro irlandês.

conexo do plano ou do espaço admite uma *função potencial*, isto é, uma função ϕ_X tal que

$$\mathbf{X} = \nabla\phi_X. \quad (\text{C.2.1})$$

Conseqüentemente, no contexto da mecânica dos fluidos ideais e incompressíveis, se \mathbf{u} for um escoamento incompressível, irrotacional e ideal, concluímos que existe uma função potencial ϕ satisfazendo a equação de Laplace, isto é

$$\Delta\phi = 0, \quad (\text{C.2.2})$$

e portanto ϕ é uma função harmônica em seu domínio. Pela observação seguinte ao teorema A.3.1, existe uma função harmônica conjugada, que denotaremos por ψ , satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann. Ainda, pelo mesmo teorema A.3.1, a função

$$W = \phi + i\psi \quad (\text{C.2.3})$$

é uma função analítica.

Logo, as hipóteses feitas, somadas ao fato de o escoamento ser bidimensional, permite-nos obter uma conexão bastante natural com a teoria das funções complexas analíticas apresentada na subseção 1.1. Por exemplo, se $\mathbf{u} = \nabla\phi = (u, v)$, segue da equação A.4.1 que a função W acima satisfaz

$$\frac{dW}{dz} = u - iv \quad (\text{C.2.4})$$

e, por esta razão, é chamada de *potencial complexo* associado ao escoamento \mathbf{u} . Nessas notas, construiremos uma ferramenta que nos permitirá calcular uma grande variedade de potenciais para escoamentos irrotacionais arbitrários em torno de múltiplos corpos rígidos.

A função ϕ , como já sabemos, é chamada de potencial, uma vez que satisfaz a equação C.2.1. Já a função ψ não satisfaz necessariamente a mesma condição, mas possui propriedades muito interessantes. É possível mostrar que ela é constante ao longo das linhas de corrente e que, seu valor num dado ponto é igual ao fluxo entre este ponto e a origem do sistema coordenado. Por esta razão, dizemos que ψ é a *função corrente* (ou *fluxo*) associada ao escoamento \mathbf{u} . Uma discussão introdutória, mas suficientemente completa, sobre a função corrente pode ser encontrada em [Lig89] e [MT62].

Introduziremos agora alguns tipos de potenciais complexos básicos [Cro12b], que serão de interesse adiante.

Vórtices pontuais. Como trabalhamos sob a hipótese de que o fluido é ideal, toda e qualquer vorticidade presente nos escoamentos estão relacionadas a vórtices pontuais. O escoamento gerado pela presença de um *vórtice pontual*, de circulação $\Gamma \in \mathbb{R}$, localizado num ponto z_0 no plano complexo deve ter um potencial complexo da forma

$$W(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0) + \text{uma função localmente analítica.} \quad (\text{C.2.5})$$

A singularidade logarítmica aqui é devido a presença do vórtice do ponto z_0 .

Dipolos. O potencial associado a um *dipolo* de intensidade μ localizado em z_0 é da forma

$$W(z) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{(z - z_0)} + \text{uma função localmente analítica.} \quad (\text{C.2.6})$$

Note que W possui um polo simples em z_0 . Esta singularidade reflete a presença do dipolo ali localizado.

Escoamento Uniforme. O potencial complexo associado a um *escoamento uniforme* U , que incide com inclinação χ com respeito ao eixo real positivo é dado por

$$W(z) = Ue^{-i\chi}z. \quad (\text{C.2.7})$$

Note que W corresponde a um polo simples no infinito, conforme estabelecido no final da subseção 1 (veja a equação A.7.5). Um fato útil é o seguinte

Proposição C.2.1 (Fato). O potencial para o escoamento uniforme acima é equivalente ao escoamento gerado por um dipolo de intensidade $\mu = -2\pi Ue^{-i\chi}$ situado em $z = \infty$.

C.3 Forças em corpos rígidos

Quando temos corpos rígidos imersos em um fluido em movimento, podemos perguntar qual é a influência do escoamento incidente na mecânica desses corpos. A fim de responder a essa questão, percebe-se que a força sobre um corpo rígido B é igual a força exercida sobre ∂B pelo campo de pressão p gerado pelo escoamento. Portanto, podemos calculá-la integrando p sobre ∂B , isto é

$$\mathbf{F} = - \int_{\partial B} p \mathbf{n} ds. \quad (\text{C.3.1})$$

Num escoamento potencial e bidimensional, a abordagem via funções analíticas da seção anterior nos permite obter uma expressão bastante conveniente para o cálculo das forças [CM90].

Teorema C.3.1 (Fórmula de Blasius⁵). Seja W o potencial associado a um escoamento incompressível e irrotacional no plano, no qual estão imersos M corpos rígidos. Então,

$$\mathbf{F}_j = F_x - iF_y = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\partial B_j} \left(\frac{d}{dz} W(z) \right)^2 dz, \quad (\text{C.3.2})$$

onde B_j é o j -ésimo corpo rígido.

⁵Paul Richard Heinrich Blasius (1883–1970) foi um físico alemão.

Demonstração. Primeiro, observe que, se a forma diferencial $dz = dx + idy$ denota um deslocamento infinitesimal na direção tangente ao bordo ∂B_j do j -ésimo corpo rígido, então $-idz = dy - idx$ representa um deslocamento infinitesimal na direção normal. Logo, $\mathbf{n}ds = -idz$. Assim, substituindo em (C.3.2), obtemos

$$\mathbf{F} = - \int_{\partial B_j} p \mathbf{n} ds = i \int_{\partial B} p dz.$$

Da equação de Bernoulli, sabemos que

$$p = -\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + C = -\frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) + C,$$

onde C é uma constante. Substituindo na equação acima, obtemos

$$\mathbf{F} = -\frac{i\rho}{2} \int_{\partial B_j} (u^2 + v^2) dz + i \int_{\partial B} C dz = -\frac{i\rho}{2} \int_{\partial B_j} (u^2 + v^2) dz, \quad (\text{C.3.3})$$

Por outro lado, note que

$$\left(\frac{d}{dz} W \right)^2 dz = (u - iv)^2 dz = (u^2 + v^2) d\bar{z},$$

onde usamos que $udy = vdx$ sobre ∂B_j - relação que decorre da condição de ortogonalidade entre $\mathbf{u} = u - iv$ e $\mathbf{n} = dy - idx$. Finalmente,

$$\overline{\left(\frac{d}{dz} W \right)^2 dz} = \overline{(u - iv)^2 dz} = \overline{(u^2 + v^2) d\bar{z}} = (u^2 + v^2) dz. \quad (\text{C.3.4})$$

Substituindo-se (C.3.4) na expressão (C.3.3), obtemos a tese. \square

O cálculo desta integral pode ser feito computacionalmente ou através do teorema dos resíduos (teorema A.8.1) apresentado no apêndice A. Podemos refinar o resultado acima para o caso dos escoamentos ditos *uniformes*.

Teorema C.3.2 (Kutta-Joukowski). Seja W o potencial complexo devido a um escoamento incompressível exterior a um corpo rígido B . Suponha que o campo de velocidades tenda a um campo uniforme $\mathbf{u} = (U, V)$ no infinito. Então, a força exercida sobre B é dada por

$$\mathbf{F} = -\rho \Gamma \|\mathbf{u}\| \mathbf{n}, \quad (\text{C.3.5})$$

onde Γ é a circulação em torno de B e \mathbf{n} é um vetor unitário e ortogonal a \mathbf{u} .

Demonstração. Sendo dW/dz uma função analítica definida na região exterior a B , ela admite uma expansão em série de Laurent

$$\frac{d}{dz} W = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (\text{C.3.6})$$

válida no exterior de qualquer disco centrado na origem e contendo B . Devemos calcular a integral de

$$\left(\frac{d}{dz} W \right)^2 = a_0^2 + \frac{2a_0 a_1}{z} + \dots \quad (\text{C.3.7})$$

Pelo teorema dos resíduos, o valor de tal integral é $2\pi i 2a_0 a_1$. Como

$$\frac{d}{dz} W \longrightarrow U - iV \text{ quando } z \longrightarrow \infty \quad (\text{C.3.8})$$

concluimos que $a_0 = U - iV$. Por outro lado, o mesmo teorema do resíduo e a relação (C.3.6) implicam que

$$\oint_C \left(\frac{d}{dz} W \right) dz = 2\pi i a_1 \quad (\text{C.3.9})$$

e

$$\oint_C \left(\frac{d}{dz} W \right) dz = \Gamma. \quad (\text{C.3.10})$$

donde segue que

$$a_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}. \quad (\text{C.3.11})$$

Portanto,

$$2\pi i 2a_0 a_1 = 2(U - iV)\Gamma. \quad (\text{C.3.12})$$

A partir do Blasius e das relação (C.3.12) acima, obtemos o resultado desejado. \square

Observe que, como consequência do resultado acima, um corpo rígido sujeito a um escoamento uniforme não experimenta forças na direção de incidência do escoamento. A força resultante atua apenas na direção perpendicular e é proporcional à circulação Γ . Portanto, para corpos sem circulação vale a o seguinte.

Corolário C.3.1 (Paradoxo de d'Alembert⁶). Nas condições do teorema de Kutta-Joukowski, temos que se $\Gamma = 0$, então

$$\mathbf{F} = 0. \quad (\text{C.3.13})$$

Este fato contradiz não só a nossa intuição, mas também a realidade. Ele decorre exclusivamente do fato de termos ignorado a viscosidade, presente nos fluidos reais, o que mostra as limitações impostas por esta hipótese.

Observação C.3.1 (Teorema de Kutta⁷-Joukowski⁸ para vários corpos rígidos). Para menção futura, observamos que quando temos infinitos corpos rígidos idênticos, distribuídos periodicamente e alinhados na direção vertical, em relação à incidência do escoamento uniforme [Cro06b], [Ach90], o teorema de Kutta-Joukowski permanece válido, no sentido de que ele force o valor das forças na direção vertical. Contudo, neste caso, verifica-se ainda que os corpos também experimentam forças na direção do escoamento incidente, ao contrário do que estabelecemos no teorema C.3.2.

Para o caso em que temos um número finito de corpos rígidos, no entanto, o teorema de Kutta-Joukowski permanece válido tal como estabelecido: de fato, temos que a força sobre todo o sistema é dada por

$$\mathbf{F} = -\rho \Gamma_T \|\mathbf{u}\| \mathbf{n}, \quad (\text{C.3.14})$$

onde Γ_T é a soma das circulações dos corpos rígidos.

Por fim, para o cálculo do momento, podemos deduzir (com argumentos similares àqueles usados no teorema de Blasius) o seguinte resultado.

⁶Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) foi um cientista francês.

⁷Martin Wilhelm Kutta (1867-1944) foi um matemático alemão.

⁸Nikolay Yegorovich Zhukovsky (1867-1944), conhecido na literatura ocidental por Nicolai Joukowski, foi um cientista russo.

Teorema C.3.3 Seja W o potencial associado a um escoamento incompressível e irrotacional no plano, no qual estão imersos M corpos rígidos. Então,

$$M_i = Re \left[-\frac{\rho}{2} \oint_{\partial B_i} \left(\frac{d}{dz} W(z) \right)^2 z dz \right], \quad (\text{C.3.15})$$

onde B_i é o i -ésimo corpo rígido.

Apêndice D

O Problema de Schwarz

"A closely related problem is the Schwarz problem which is, in essence, the Dirichlet problem in a multiply connected domain. In his case, the real part of an analytic function $f(z)$ is specified on the boundary of the domain D and it is required to determine $f(z)$ everywhere inside D ."

D. G. Crowdy, 2008 [Cro08c].

Introduziremos aqui o *problema de Schwarz*¹ (mais conhecido por sua nomenclatura em inglês, *the modified Schwarz problem*), clássico em teoria do potencial e que será muito útil no capítulo 4 destas notas. De fato, mostraremos no referido capítulo que este corresponde a formulação de um complicado problema em mecânica dos fluidos.

De acordo com Crowdy [Cro08a], [Cro08c], o enunciado mais comum do problema de Schwarz é

"encontrar uma função univalente e analítica $f_S(z)$ em algum domínio D , dadas informações sobre sua parte real no bordo do domínio".

Matematicamente, resolver o problema de Schwarz é equivalente a encontrar $f_S(z)$ univalente e analítica em $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re}[f_S(z)] = \phi_0 \text{ em } C_0 \tag{D.0.1a}$$

$$\operatorname{Re}[f_S(z)] = \phi_j + d_j \text{ em } C_j, \text{ para } j = 1, \dots, M, \tag{D.0.1b}$$

onde $\{\phi_j : j = 0, 1, \dots, M\}$ são funções à valores reais dadas e $\{d_j : j = 1, \dots, M\}$ é um conjunto de constantes que devem ser convenientemente escolhidas a fim de garantir a existência de uma tal $f_S(z)$.

Em [Cro08c], D. Crowdy resolveu completamente este problema para domínios de tipo circular² (aqueles cuja fronteira é formada por círculos), exibindo uma formula integral explícita para $f_S(z)$, a qual depende apenas do *módulo conforme* (conjunto

¹**Karl Hermann Amandus Schwarz** (1843-1921) foi um matemático alemão.

²Este conceito será devidamente abordado no capítulo 3.

de parâmetros que caracteriza um domínio) do domínio em questão. Em resumo, foi provado o seguinte teorema.

Teorema D.0.4 Suponha que o domínio D seja circular. Então, a solução geral do problema de Schwarz estabelecido em D.0.1a e D.0.1b é

$$\begin{aligned} f_S(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \phi_0(d \log \omega(z', z) + d \log \bar{\omega}(z'^{-1}, z^{-1})) \\ &\quad - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_j} (\phi_j + d_j)(d \log \omega(z', z) + d \log \bar{\omega}(\theta_j(z'^{-1}), z^{-1})) + iC, \end{aligned}$$

onde C é uma constante real e $\omega(z, \cdot)$ é a função prima de Schottky-Klein associada ao domínio circular D .

Demonstrar este fato é uma tarefa sutil e foge ao escopo deste texto. Uma demonstração completa pode ser encontrada tanto em [Cro08c] como no apêndice A de [Cro08a] (antes, contudo, recomendamos a leitura do capítulo 3 desta monografia). Observamos desde já o aparecimento da função prima de Schottky-Klein, denotada por $\omega(\cdot, \cdot)$, carro-chefe da nossa teoria, e que será introduzida a seu tempo, no mesmo capítulo 3.

Apêndice E

Gráficos de $C_{D,2}$, $C_{L,2}$ e $C_{F,2}$

E.1 Cilindros arbitrariamente posicionados: distância entre os centros *versus* coeficientes

Stagger parameter $\theta = 0$

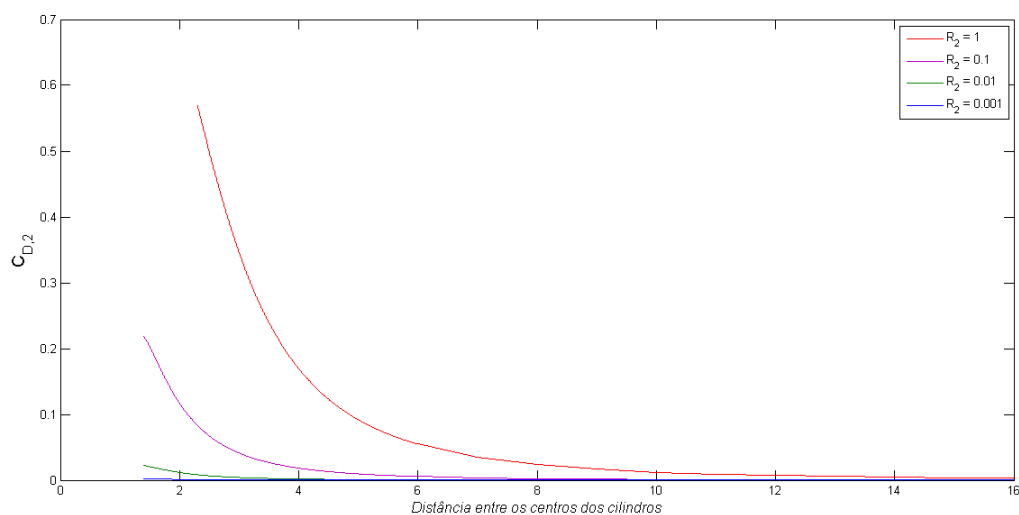


Figura E.1: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = 0$

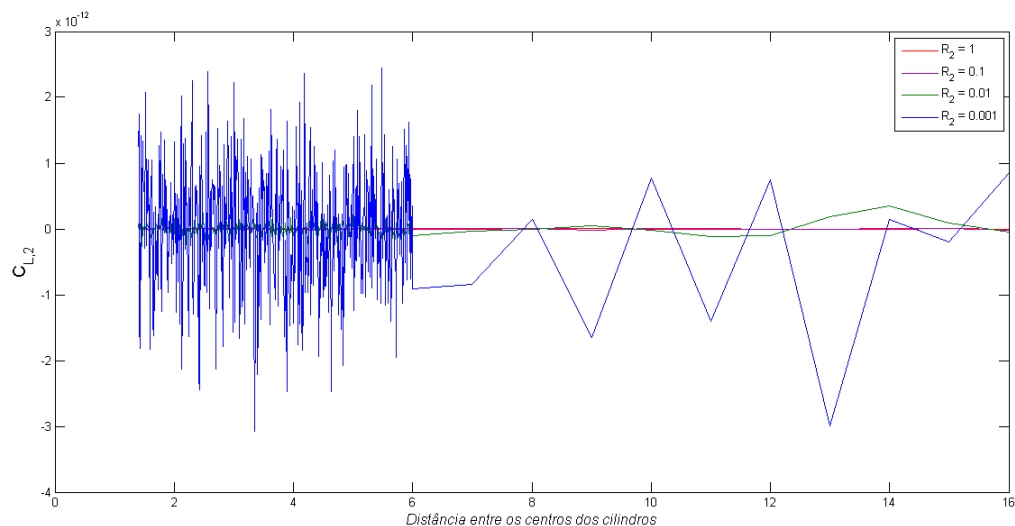


Figura E.2: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = 0$

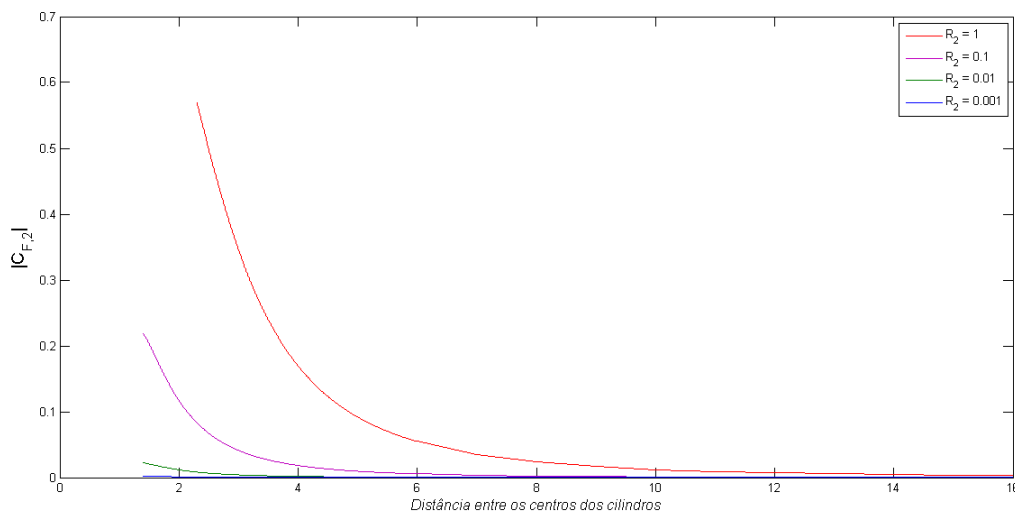


Figura E.3: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = 0$

Stagger parameter $\theta = \pi/6$

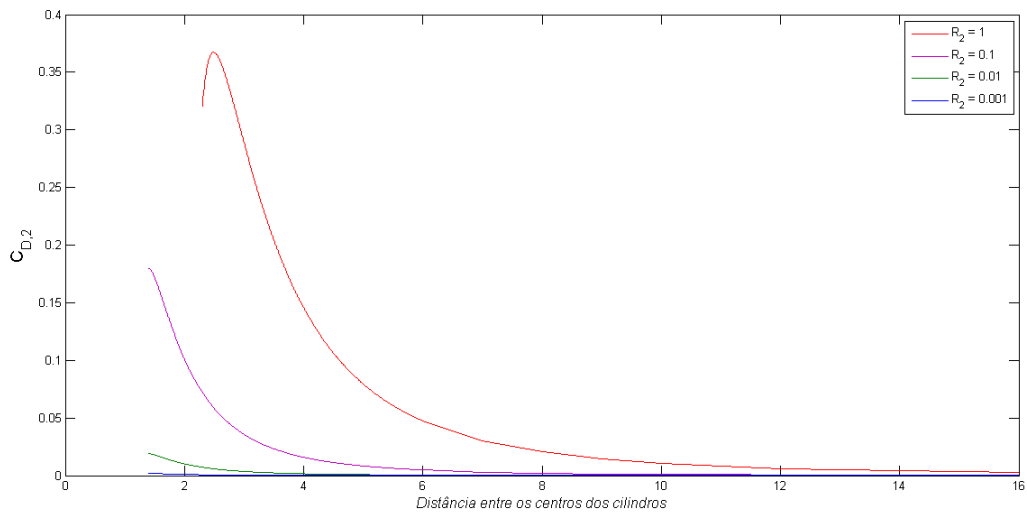


Figura E.4: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$

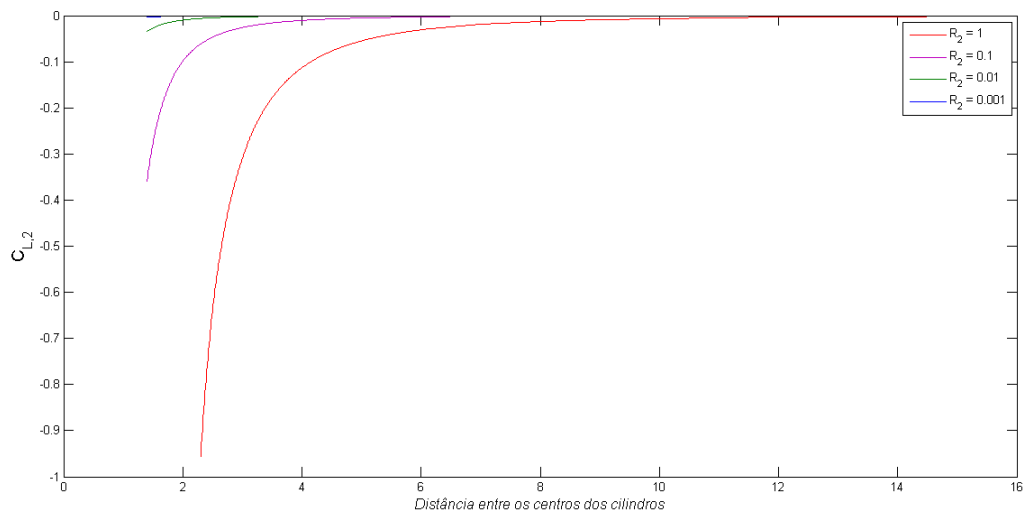


Figura E.5: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$

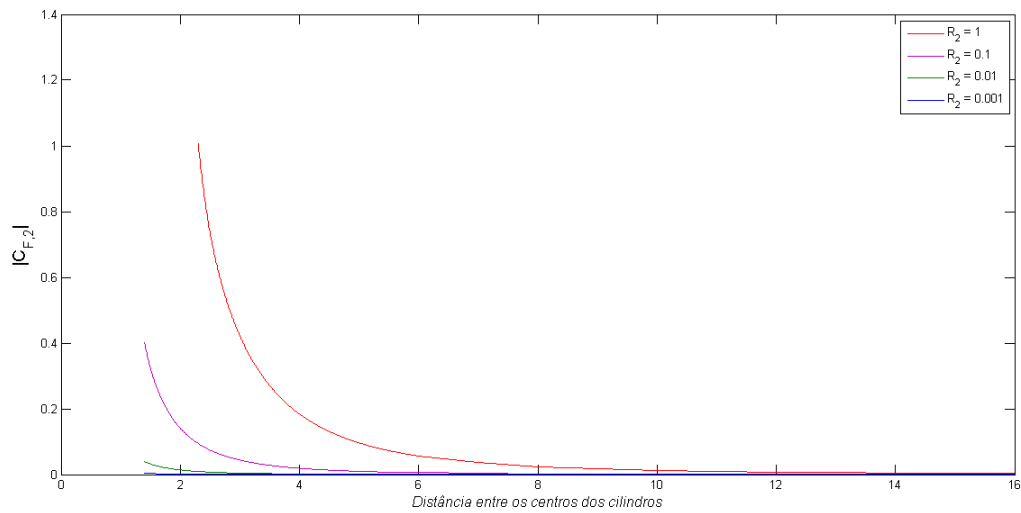


Figura E.6: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/6$

Stagger parameter $\theta = \pi/4$

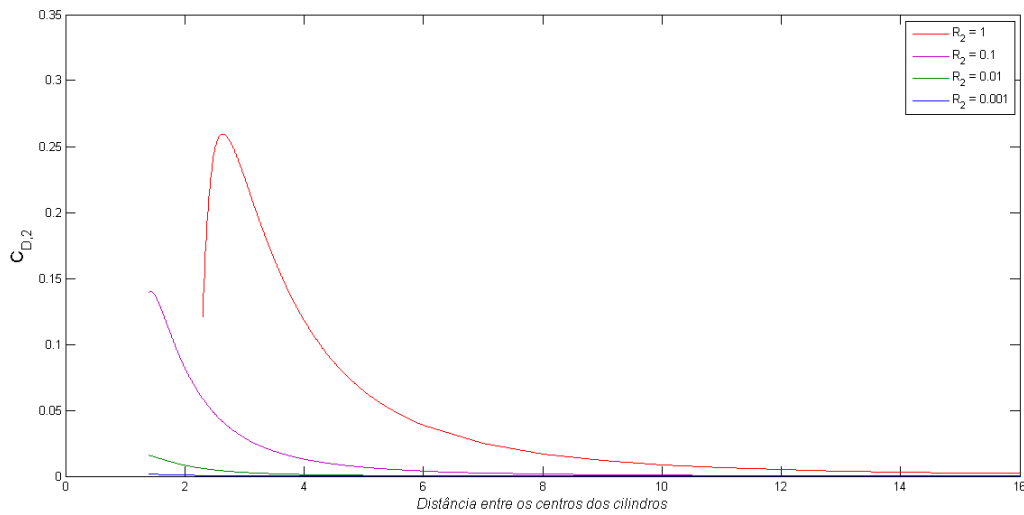


Figura E.7: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/4$

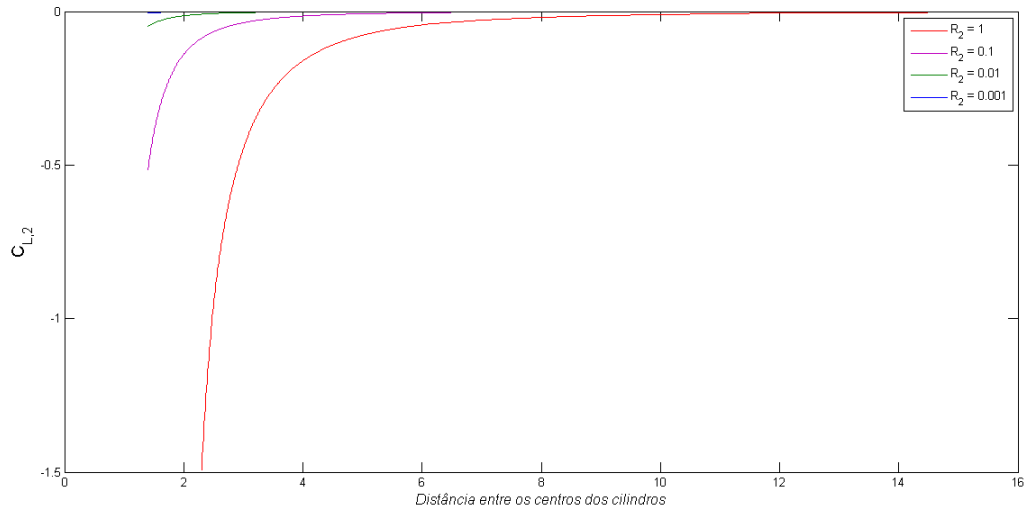


Figura E.8: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/4$

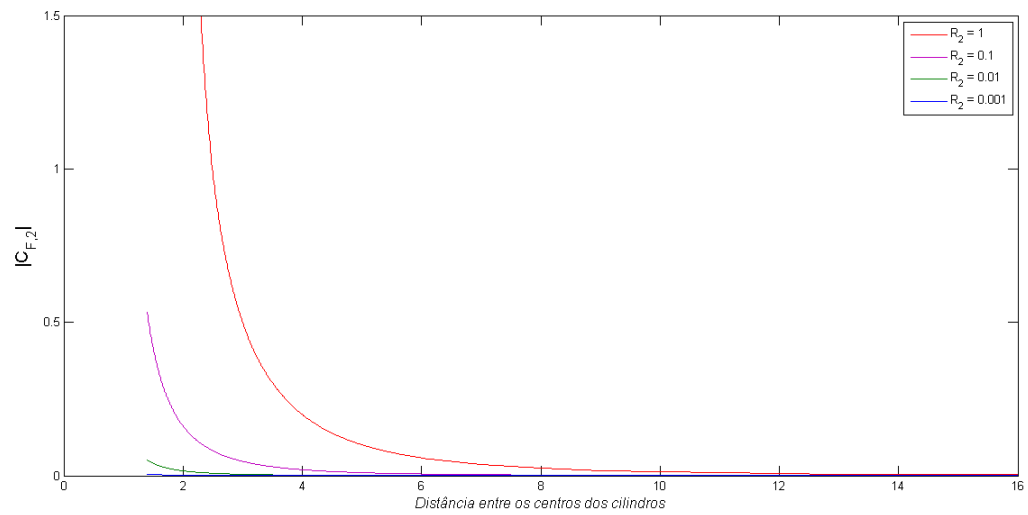


Figura E.9: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/4$

Stagger parameter $\theta = \pi/3$

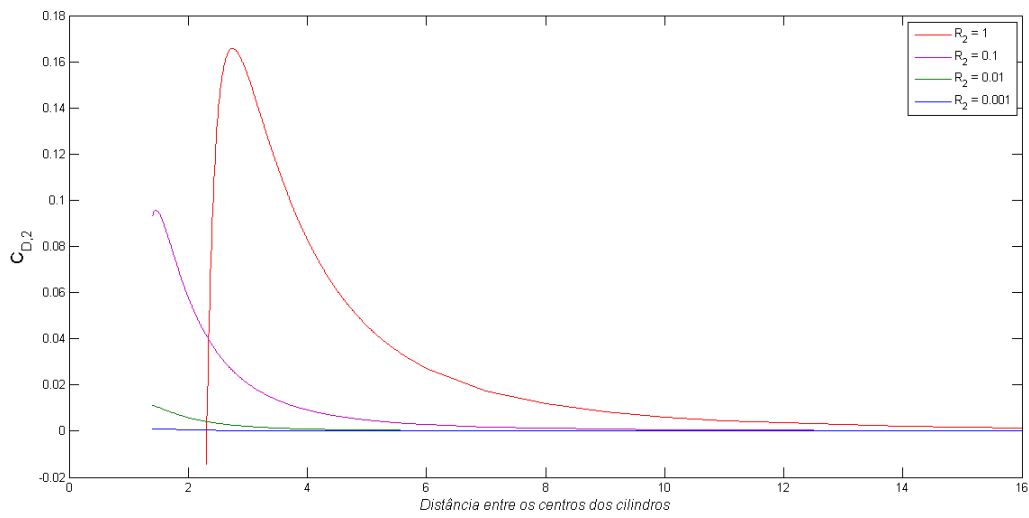


Figura E.10: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/3$

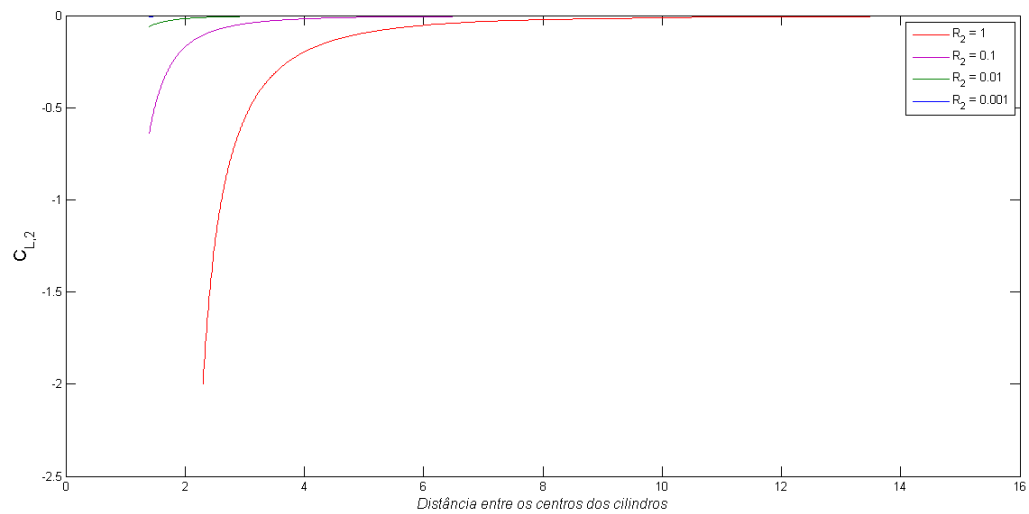


Figura E.11: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/3$

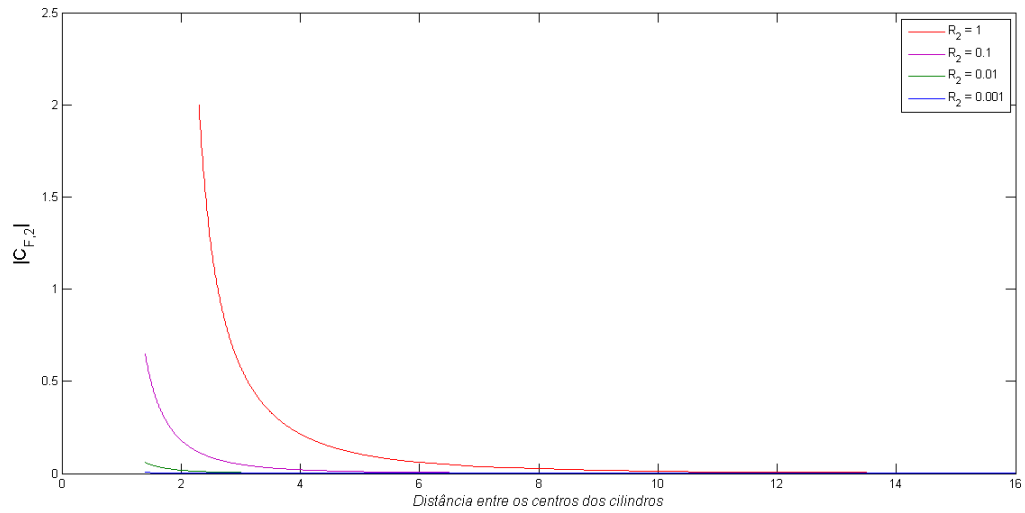


Figura E.12: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/3$

Stagger parameter $\theta = \pi/2$

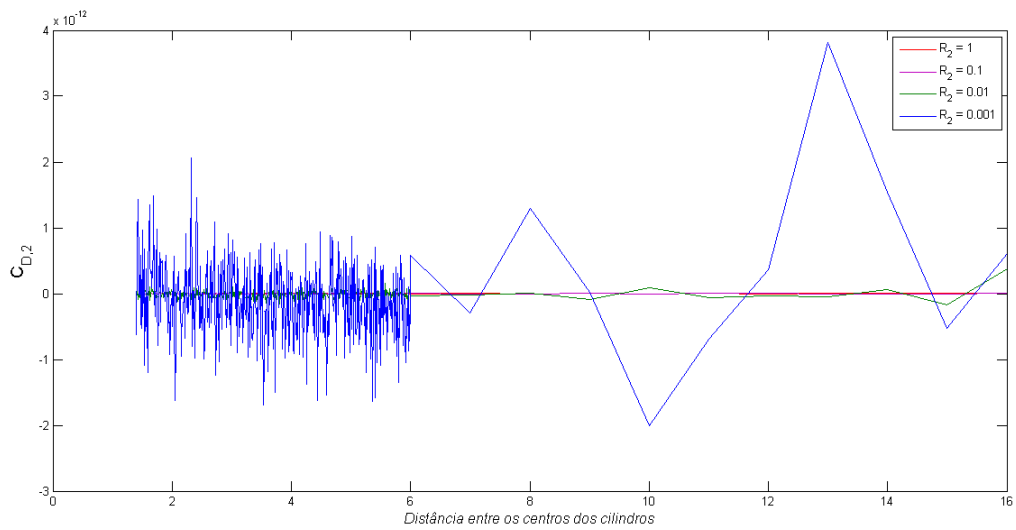


Figura E.13: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/2$

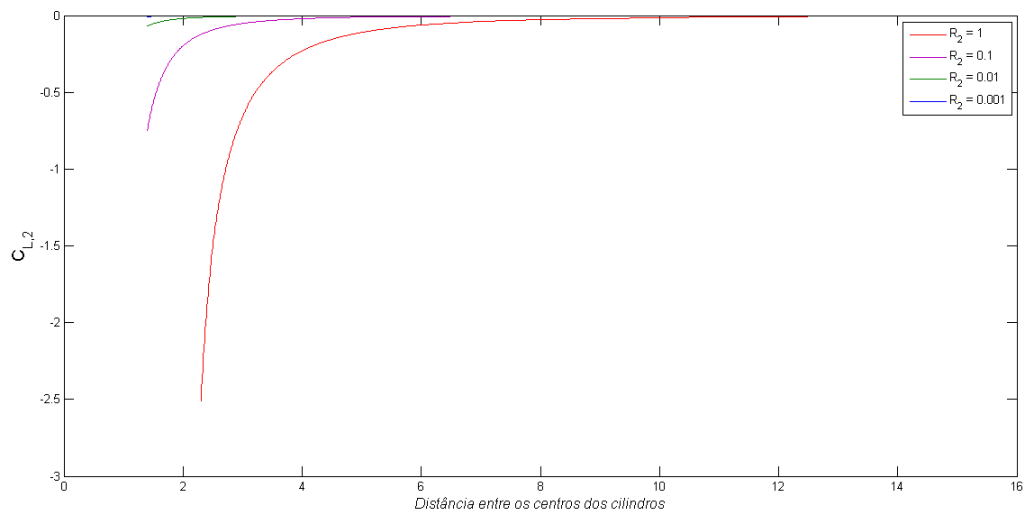


Figura E.14: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/2$

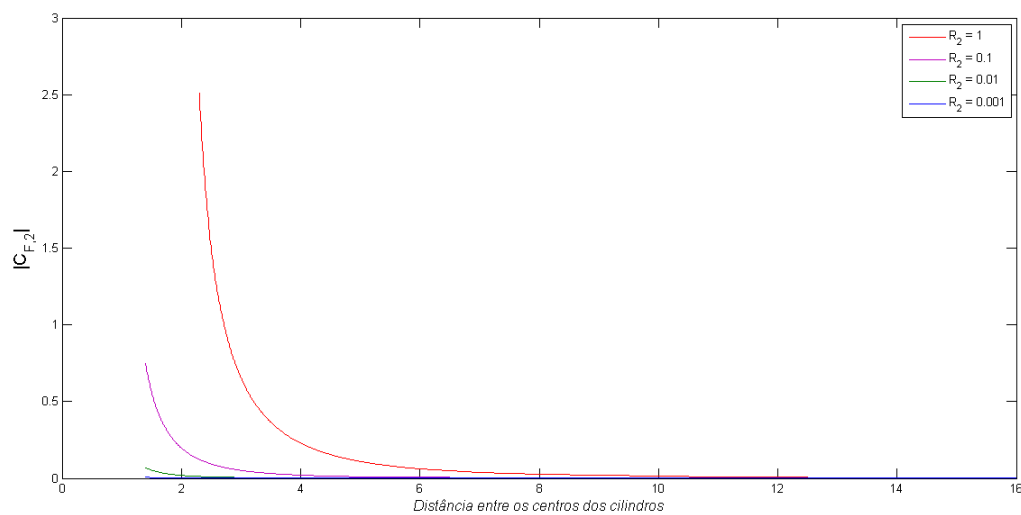


Figura E.15: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de ℓ , para diversos valores de R_2 , quando $\theta = \pi/2$

E.2 Cilindros arbitrariamente posicionados: raios *versus* coeficientes

Stagger parameter $\theta = 0$

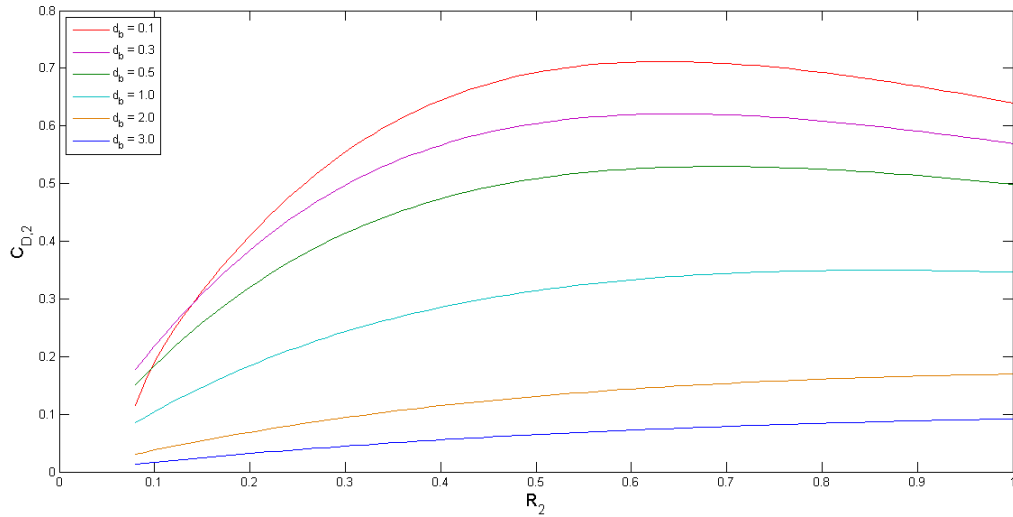


Figura E.16: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = 0$

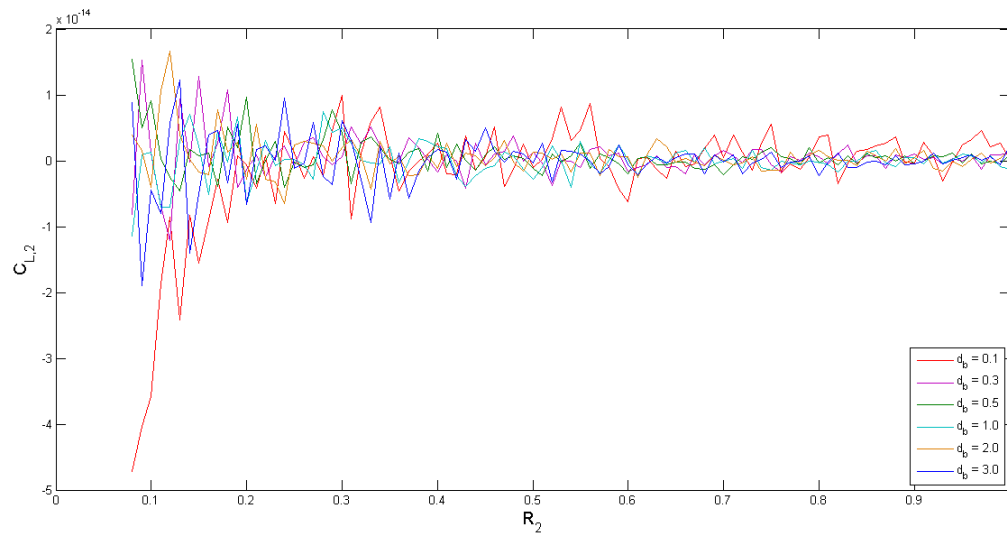


Figura E.17: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = 0$

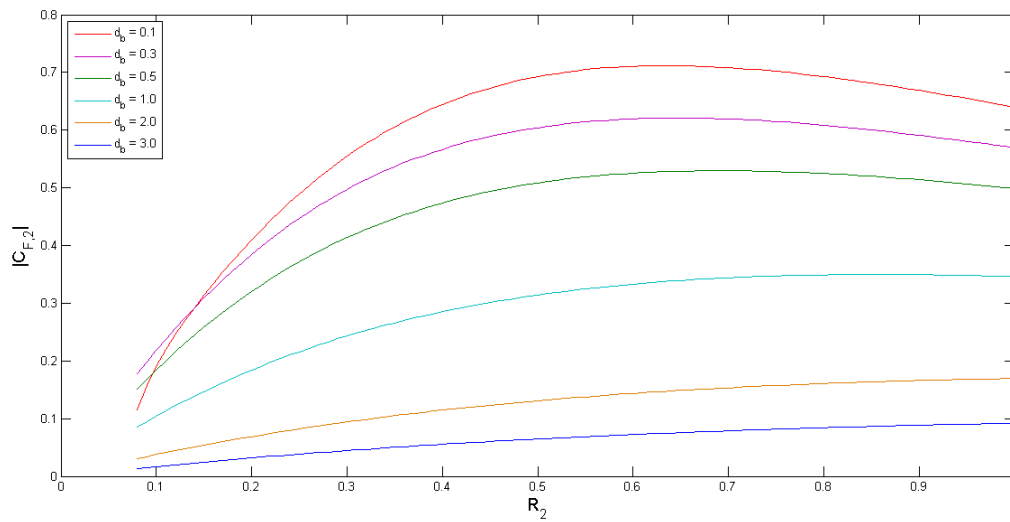


Figura E.18: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = 0$

Stagger parameter $\theta = \pi/6$

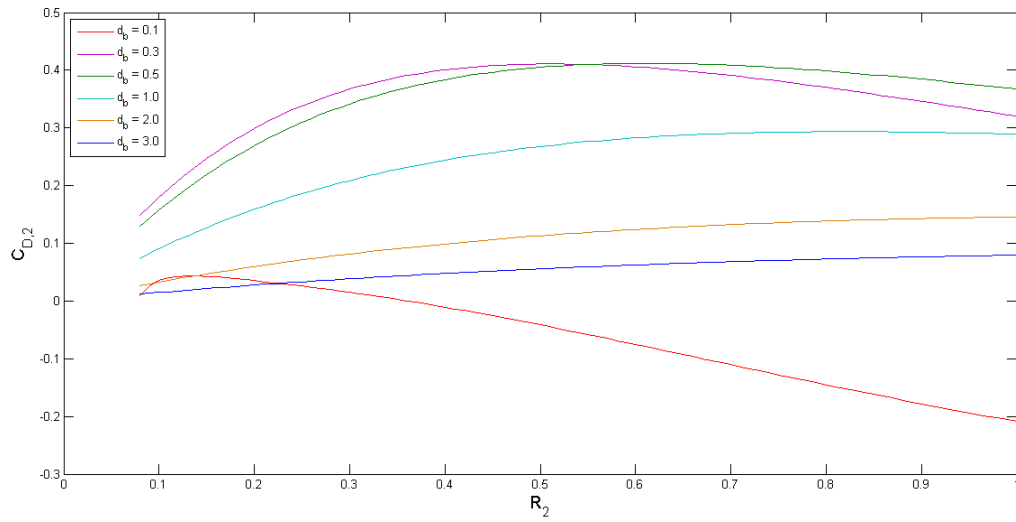


Figura E.19: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$

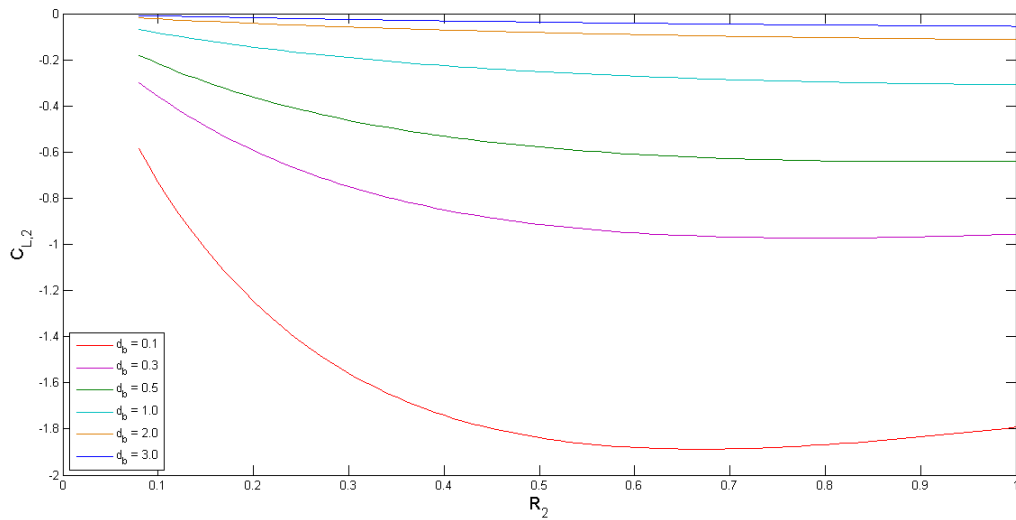


Figura E.20: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$

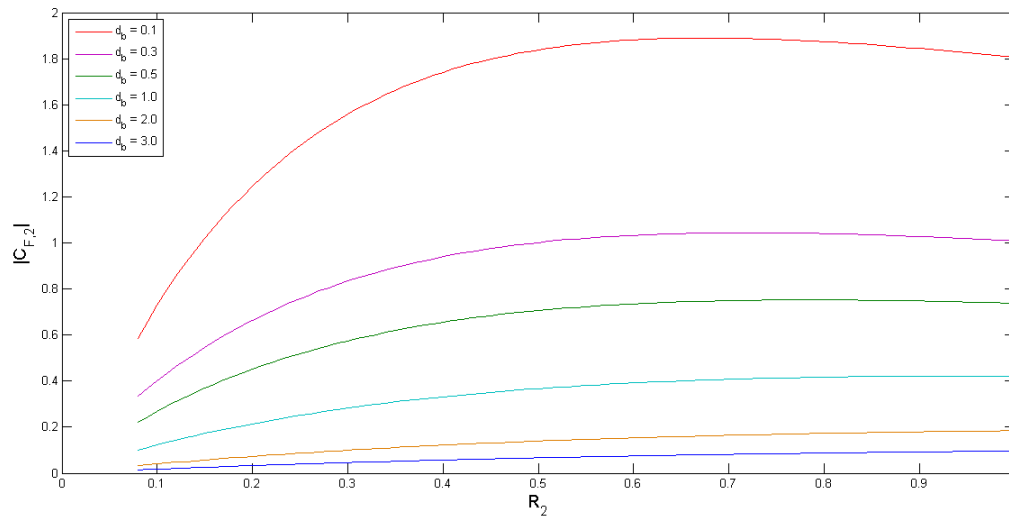


Figura E.21: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/6$

Stagger parameter $\theta = \pi/4$

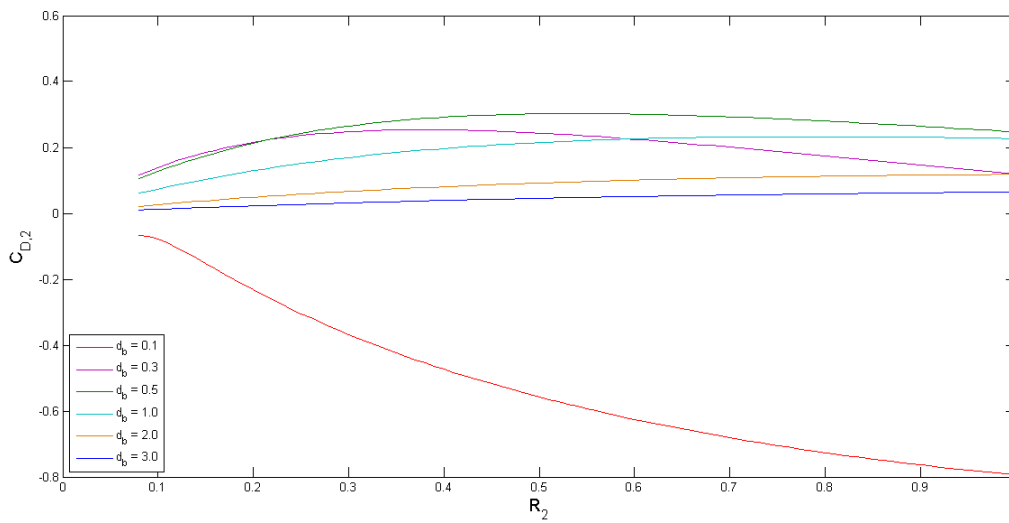


Figura E.22: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/4$

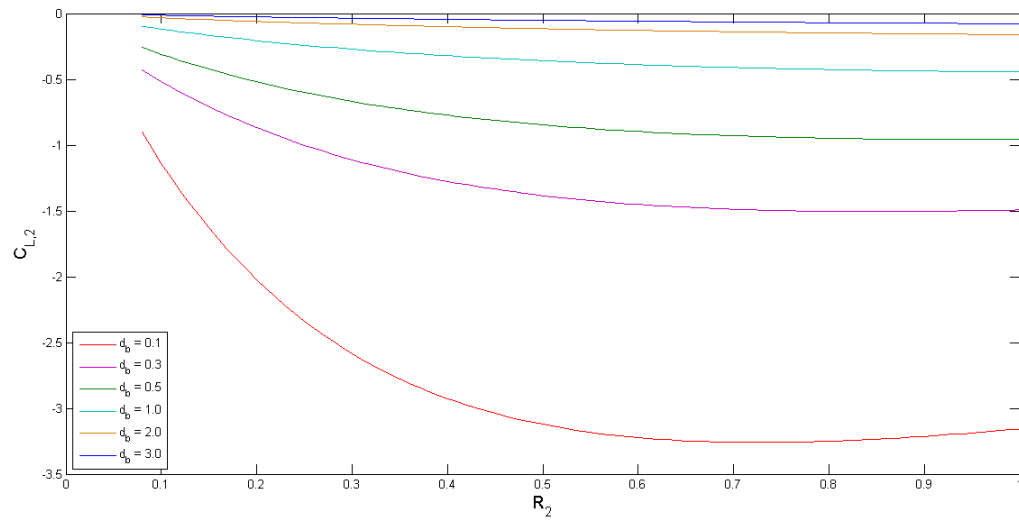


Figura E.23: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/4$

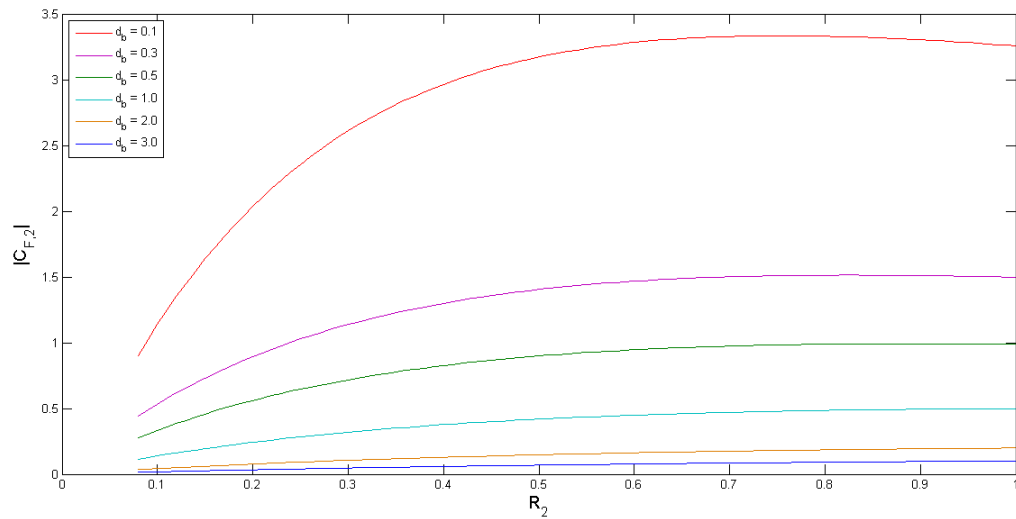


Figura E.24: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/4$

Stagger parameter $\theta = \pi/3$

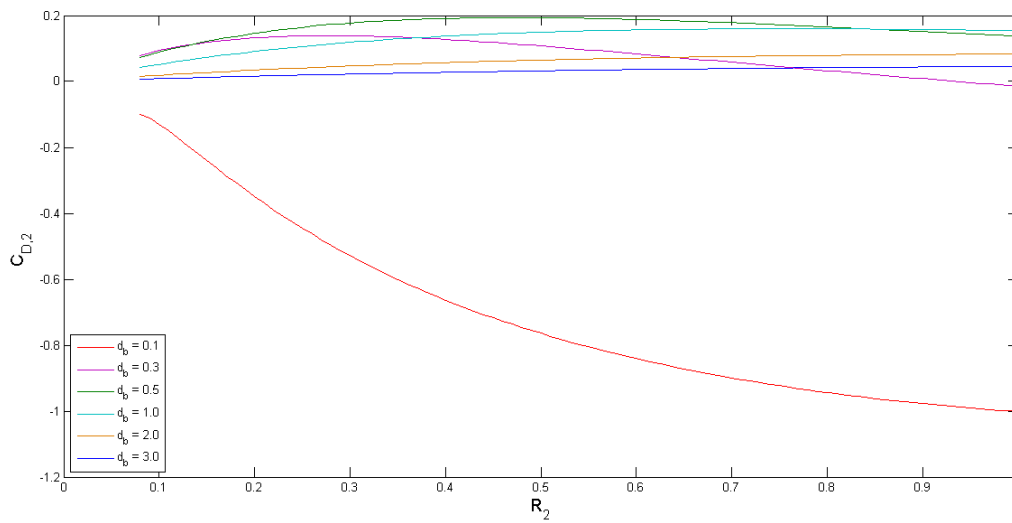


Figura E.25: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/3$

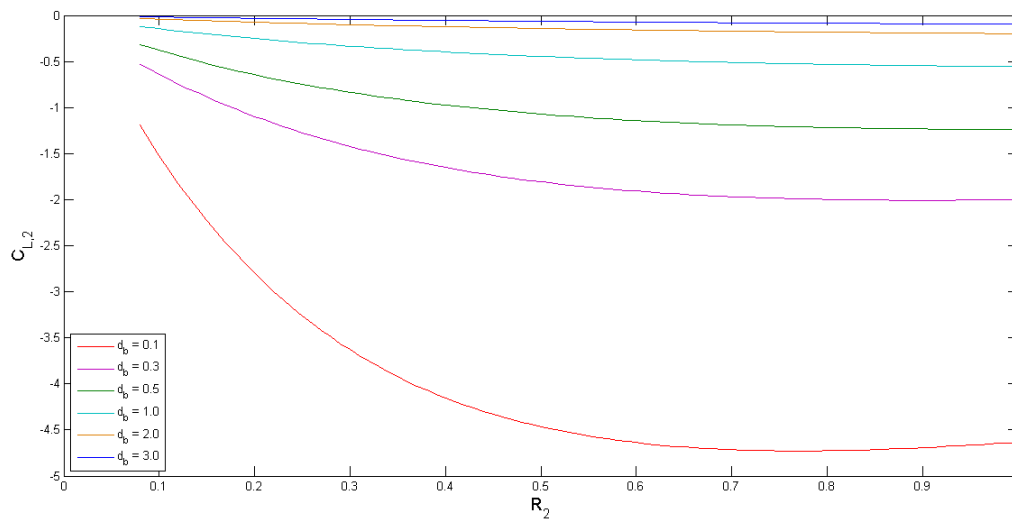


Figura E.26: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/3$

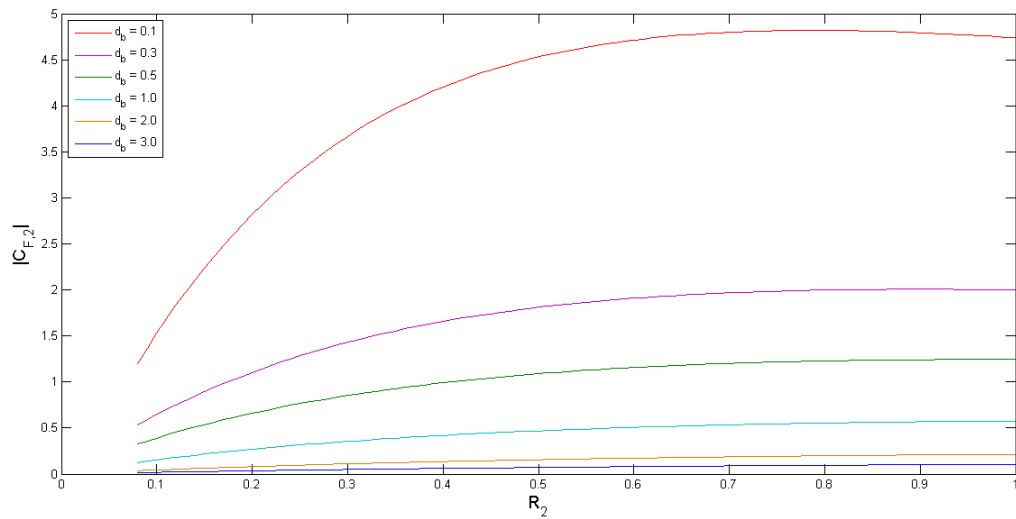


Figura E.27: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/3$

Stagger parameter $\theta = \pi/2$

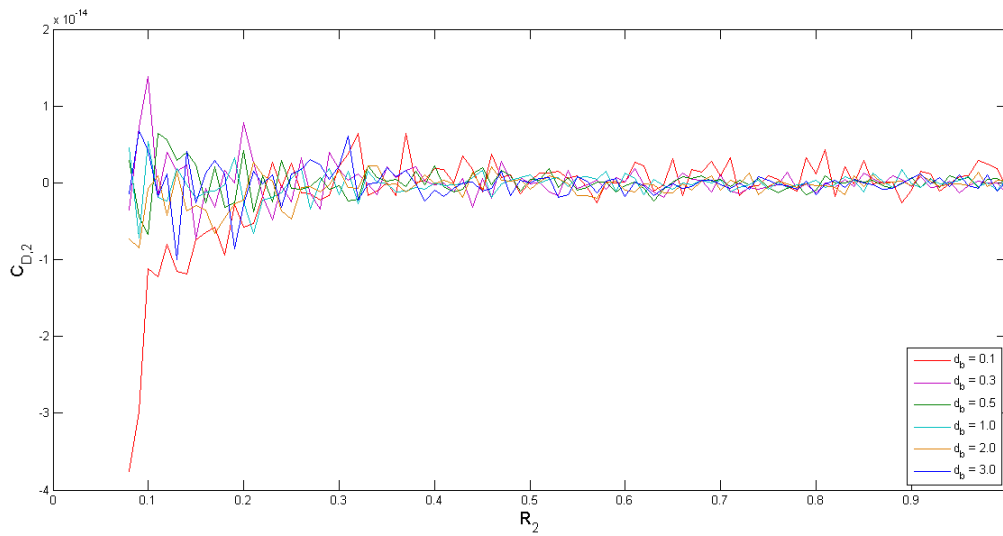


Figura E.28: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{D,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/2$

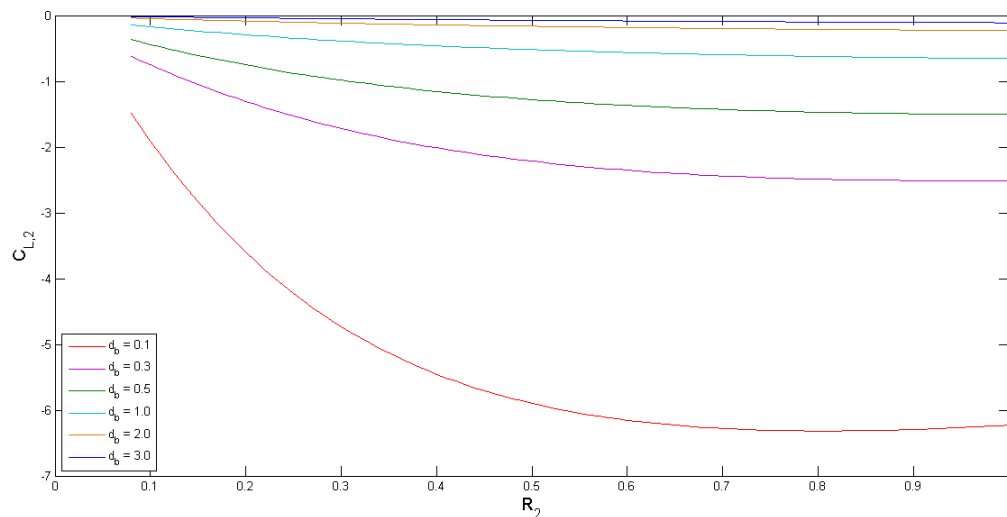


Figura E.29: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{L,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/2$

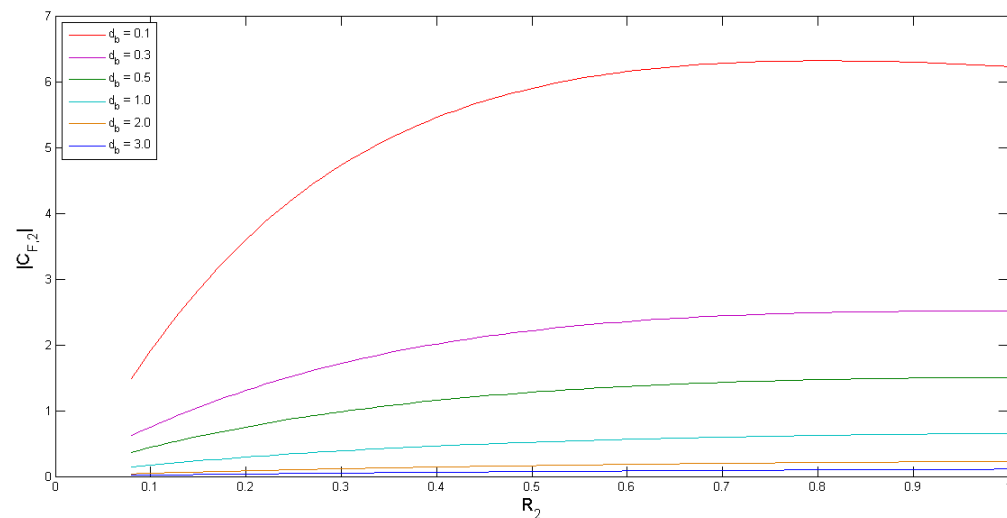


Figura E.30: Cilindros arbitrariamente posicionados: gráficos de $C_{F,2}$ em função de R_2 , para diversos valores de d_b , quando $\theta = \pi/2$