Modelo de risco não-homogêneo com prêmios e taxas variáveis no tempo

Evandro Makiyama de Melo

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Área de Concentração: **Estatística**

Orientador: **Prof. Dr. José Carlos Simon de Miranda**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2015.

Modelo de risco não-homogêneo com prêmios e taxas variáveis no tempo

Este exemplar corresponde à versão
original da dissertação elaborada por
Evandro Makiyama de Melo,
tal como submetida à Comissão
Julgadora.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. José Carlos Simon de Miranda (orientador) – IME, USP
- Prof^{a}. Dr^{a}. –
- Prof. Dr. –

Aos meus pais

Valdomiro & Yukiko

Resumo

Título: Modelo de risco não-homogêneo com prêmios e taxas variáveis no tempo

Neste trabalho estudamos um modelo de risco para a reserva de uma seguradora, mais geral do que o modelo clássico de Crámer-Lundberg, pois o estende para taxas de juros e prêmios variáveis no tempo.

Palavras–chave: modelo clássico de crámer-lundberg, processo de poisson composto, reserva de seguradoras, probabilidade da ruína, processo de risco coletivo.

Abstract

Title: A non-homogeneous risk model time-varying premium and interest rates.

In this work we study an insurance risk model which is more general than the classical Crámer-Lundberg model. This model extends it to interest rates and time-varying premium.

Keywords: classical model of crámer-lundberg, compound poisson process, insurance reserve, ruin probability, collective risk process.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. Aos meus pais e meus irmãos, Paulo e Marcelo. Aos meus amigos Alexandre Angélico, Breno Raphaldini, Daniel Y. Takahashi, Felipe L. Bhering, Filipe J. Lira, Gilberto Nascimento, Henrique Bolfarine, Rogério de A. Medeiros e Victor Ritter. A minha querida Virginia S. Gante. Aos professores e funcionários do IME-USP. E ao meu orientador José C. S. de Miranda.

Evandro Makiyama de Melo

São Paulo, fevereiro de 2015

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Preliminares

Essa dissertação é organizada em duas partes. Do capítulo 1 ao 4 fazemos uma breve revisão da área da teoria do risco e da teoria da ruína para a reserva de seguradoras, nos focando no modelo clássico de Crámer-Lundberg, almejando chegar ao capítulo 5, onde baseados em Miranda (2006), tratamos de um modelo mais geral que o modelo clássico.

Este trabalho não tem o intuito de dar um tratamento detalhado da teoria do risco ou ruína, que pode ser encontrada por exemplo em Asmussen (2000); Buhlmann (1970); Embrechts et al. (1997); Klugman et al. (2004).

1.2 Motivações e objetivos

O modelo clássico de risco coletivo em tempo contínuo mais conhecido para a reserva de uma seguradora é o modelo clássico de Crámer-Lundberg, Asmussen (2000), $\{U(t), t \geq 0\}$, descrito por:

$$U(t) = u + pt - S(t) \tag{1.1}$$

Em que:

$U(t)$ é a reserva da seguradora no instante de tempo t;

$S(t)$ são as indenizações agregadas geradas pelos sinistros ocorridos no intervalo (0,t];

p é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo;

pt é o volume de prêmios recebidos em (0,t];

$u = U(0)$ é a reserva inicial da seguradora.

Para o modelo de Crámer-Lundberg descrito em 1.1 assumimos as seguintes hipóteses:

1) $N(0,t]$ é o número de indenizações pagas pela seguradora em (0,t]. Assumimos que $N(0,t]$ é um processo de Poisson com intensidade λ.

2) $S(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i$, portanto $\{S(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson Composto.

3) $\{X_i\}_{i \geq 1}$ é uma sequência de v.a's. i.i.d.'s, independentes de $N(0,t]$ que representam as indenizações particulares geradas pelos sinistros. Supomos a existência de $\mathbb{E}(X_i)$ e $\mathbb{E}(X_i^2)$.

Na teoria do risco coletivo, ou teoria da ruína, uma das perguntas mais importantes em que estamos interessados, diz respeito à probabilidade da ruína da seguradora, ou seja, que em algum instante a reserva da seguradora venha a ser negativa condicionada ao capital inicial u com a qual a mesma inicia suas operações.

Podemos tratar a probabilidade da ruína em um horizonte finito, ou seja, que a ruína venha a ocorrer em algum instante dentro do intervalo (0,t], com t finito, ou em algum intervalo da semi-reta $(0,+\infty)$, que será denominado probabilidade da ruína em horizonte infinito. Trataremos apenas desta última nesta dissertação.

Para o intervalo $(0,+\infty)$, por exemplo, definimos:

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < +\infty | U(0) = u) = \mathbb{P}(\exists t > 0, U(t) < 0 | U(0) = u) \tag{1.2}$$

onde $T = \inf\{t > 0 | U(t) < 0\}$ é a variável aleatória que representa o instante em que a ruína ocorre dado o capital inicial u.

Um dos resultados mais célebres para o modelo descrito em 1.1, Asmussen (2000), é o:

Teorema 1.1 Seja ρ a média da quantidade de sinistros por unidade de tempo, isto é:

$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i \longrightarrow \rho \quad \text{q.c.}, \quad t \to \infty$, que existe para o modelo em 1.1.

Seja X a v.a. que representa o tamanho dos sinistros e $M_X(s)$ sua função geradora de momentos.

Então:

$$\psi(u) \sim Ce^{-\gamma u}, \quad u \to \infty \tag{1.3}$$

onde $C = \frac{1-\rho}{\lambda M_X'(\gamma)-1}$, λ é a intensidade do processo de Poisson $N(t)$, $p = 1$ e γ pode ser obtido resolvendo a seguinte equação $M_X'(\gamma) = 1 + \frac{\gamma}{\lambda}$. Na literatura de teoria da ruína, γ muitas vezes é denominado R, o coeficiente de ajuste.

Outras perguntas interessantes podem ser feitas além da probabilidade da ruína, como o valor esperado da reserva imediatamente antes da ruína, ou o total de perda esperada logo após a ruína, Embrechts et al. (1997).

Além do modelo clássico de Crámer-Lundberg, outros modelos foram propostos. A maioria deles sendo, de uma forma ou de outra, modificações do modelo clássico. Dois exemplos são:

1) Andersen (1957) estendeu o modelo clássico de Crámer-Lundberg para o caso em que $\{N_t\}_{t\geq 0}$ é um processo de renovação em geral, ao invés do processo mais restrito de Poisson.

2) Gerber & Shiu (1998); Powers (1995) trataram do caso em que há uma penalidade no caso de ruína, dado pelo valor esperado de uma taxa de desconto estocástica, referida comumente como função de Gerber-Shiu.

Desenvolvimentos recentes ainda tratam de modelos de ruína modelados por processos de difusão, como processos de Lévy, ou mais comumente o movimento Browniano.

Neste trabalho teórico nos concentramos principalmente no modelo clássico que nos forneceu base para uma generalização, encontrada em Miranda (2006), da qual provamos todos os teoremas.

Para simulações, ainda com referência ao modelo em 1.1, a literatura em probabilidade da ruína, Asmussen (2000), em geral considera distribuições diversas para o tamanho das indenizações $X_{i's}$, tanto com caudas leves quanto pesadas. Para referências computacionais e simulação indicamos: Bratley et al. (1987); Dickson et al. (1995); Ramsay (1992).

1.3 Contribuições

São contribuições deste trabalho a organização do texto, proposição e corolário do capítulo 4, e demonstrações de teoremas do capítulo 5.

1.4 Organização do trabalho

A estrutura do texto foi organizada da seguinte maneira: Neste capítulo 1 fazemos uma introdução ao tema da dissertação, organização, motivações e objetivos. No capítulo 2 listamos algumas ferramentas importantes da teoria de probabilidades e a transformada de Laplace, que utilizaremos com frequência ao longo do texto. No capítulo 3 apresentamos algumas noções básicas sobre a teoria de processos pontuais, enfocando fundamentalmente os processos de contagem, como processo de Poisson, simples e composto. No capítulo 4 apresentamos o modelo clássico de Cramér-Lundberg para a reserva em tempo contínuo de uma companhia seguradora e definimos a probabilidade da ruína e não-ruína no horizonte temporal infinito. No capítulo 5 apresentamos um modelo que estende o modelo de Crámer-Lundberg e o caracterizamos em vários teoremas.

Capítulo 2

Ferramentas básicas

Apresentamos neste capítulo algumas ferramentas da Teoria de Probabilidades e a Transformada de Laplace, que serão essenciais ao longo do texto. Não temos pretensão de dar um tratamento em qualquer sentido profundo do tema. Mesmo se tratando de conhecimento corriqueiro e bem estabelecido, facilmente encontrado na literatura pertinente em diversos livros de graduação e pós-graduação, no apêndice fornecemos mais resultados básicos da Teoria da Probabilidade. Faremos apenas algumas demonstrações neste capítulo, quando julgarmos conveniente. Boas referências para a Teoria da Probabilidade são: James (2001), em português, Durret (2010); Shiryaev (1996) em nível mais avançado.

Neste capítulo e ao longo do texto faremos as abreviações: v.a.'s para variáveis aleatórias e i.i.d.'s para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Apenas como uma breve introdução, antes de começarmos as definições, lembremos que dado um conjunto Ω e uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω, uma medida de probabilidade é uma medida positiva finita, com medida total 1 e chamamos de espaço de probabilidade à terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de eventos e as funções mensuráveis de Ω sobre $\mathbb{R}$ por $\mathbb{P}$ são chamadas de variáveis aleatórias e usualmente denotadas em letras maiúsculas como: $X, Y, Z \cdots$.

Indicaremos com a abreviatura q.c., quase certamente, se uma sequência de eventos, convergir para um dado evento, com probabilidade 1.

Passemos agora às definições.

2.1 Esperança condicional

Definição 2.1 Se X e Y são v.a.'s discretas, a função de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$ é definida por:

$$p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

para todos os valores de y tais que $p_Y(y) > 0$. Neste caso, a esperança condicional de X dado que $Y = y$ é:

$$\mathbb{E}_{(X|Y=y)} = \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$$

Definição 2.2 Se X e Y são conjuntamente contínuas com função densidade conjunta $f(x,y)$, a função densidade condicional de X dado que $Y = y$ é definida para todos os valores de y tais que $f_Y(y) > 0$ por:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

A esperança condicional de X dado que $Y = y$ é, neste caso,

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

Vamos fazer uso significativo da esperança condicional para a obtenção de alguns resultados na teoria de risco. A título de um maior esclarecimento, podemos apontar o seguinte: se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são duas σ-álgebras tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ e $\mathbb{X}$ uma v.a. $\mathcal{G}$-integrável, a esperança condicional de X dado $\mathcal{F}$, escrita como $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ é qualquer v.a. $Y, \mathcal{F}$-mensurável, tal que $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Se X e Y são duas v.a.'s $\mathcal{F}$-mensuráveis com $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ para todo $A \in \mathcal{F}$, então $X = Y$ q.s.

A probabilidade condicional sendo uma esperança, possui propriedades análogas às da esperança comum. Por exemplo:

$$\mathbb{E}(aX_1 + bX_2|Y = y) = a\mathbb{E}(X_1|Y = y) + b\mathbb{E}(X_2|Y = y),$$

$$\mathbb{E}(g(x)|Y = y) = \begin{cases} \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x|Y = y), & \text{no caso discreto,} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)dx, & \text{no caso contínuo.} \end{cases}$$

Proposição 2.3 (Princípio da substituição para a esperança condicional)

$$\mathbb{E}(\varphi(X,Y)|Y = y) = \mathbb{E}(\varphi(X,y)|Y = y)$$

Observe que da Proposição 2.3, temos o seguinte corolário:

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)|Y = y) = h(y)\mathbb{E}(g(X)|Y = y)$$

Proposição 2.4 (Propriedade fundamental)

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}(X)$$

ou seja, $\mathbb{E}(X|Y)$ é uma v.a., uma função de Y, cuja esperança é igual a $\mathbb{E}(X)$.

Demonstração. Faremos a demonstração apenas no caso contínuo, o discreto é análogo.

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}(X|Y = y)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X|Y=y) f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{(X|Y)}(x|y) dx \right) f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx \right) f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \mathbb{E}(X) \qquad \square$$

Proposição 2.5 (Propriedade fundamental para a Variância)

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var[\mathbb{E}(X|Y)]$$

Demonstração.

$$\mathbb{E}[Var(X|Y)] = \mathbb{E}_Y[Var(X|Y=y)]$$

$$= \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}(X^2|Y=y) - (\mathbb{E}(X|Y=y))^2]$$

$$= \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}(X^2|Y=y)] - \mathbb{E}_Y[(\mathbb{E}(X|Y=y))^2]$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}_Y[(\mathbb{E}(X|Y=y))^2] \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$Var[\mathbb{E}(X|Y)] = Var_Y[\mathbb{E}(X|Y=y)]$$

$$= \mathbb{E}_Y[(\mathbb{E}(X|Y=y))^2] - [\mathbb{E}_Y(\mathbb{E}(X|Y=y))]^2]$$

$$= \mathbb{E}_Y[(\mathbb{E}(X|Y=y))^2] - [\mathbb{E}(X)]^2 \tag{2.2}$$

Somando 2.1 com 2.2 vêm:

$$\mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = Var(X) \qquad \square$$

2.2 Função Geradora de Momentos e Característica

Definição 2.6 A função geradora de momentos da v.a. X é definida por:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx}\mathbb{P}(X=x), \quad \text{se} \quad X \quad \text{é discreta,} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, \quad \text{se} \quad X \quad \text{é contínua com densidade} \quad f, \end{cases}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ desde que a esperança seja finita.

Acima supomos que o domínio de $M_X(.)$ contém um intervalo em torno de $t = 0$.

A função $M_X(t)$ possui as seguintes propriedades:

(i) $M_X^{(n)}(0) = \frac{d^n M_X(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = \mathbb{E}(X^n), n \geq 1.$

(ii) Para $a{,}b \in \mathbb{R}$, $M_{aX+b}(t) = e^{tb}M_X(at)$.

(iii) A função geradora de momentos, determina unicamente a distribuição. Isso significa que se X e Y são v.a.'s tais que $M_X(t) = M_Y(t)$ para $|t| < t_0$, onde $t_0 > 0$ é uma constante, então $F_X(x) = F_Y(x)$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Se $X_1, \cdots, X_n$ são v.a.'s independentes com funções geradoras de momentos respectivas $M_{X_1}(t), \cdots, M_{X_k}(t)$ então a função geradora de momentos de $X_1 + \cdots + X_k$ é dada por:

$$M_{X_1+\cdots+X_k}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_k}(t)$$

Para uma definição mais geral de momento, podemos definir, caso exista, o momento centrado em k de ordem n da v.a. X como $\mathbb{E}((X-k)^n)$ para $k \in \mathbb{R}$ e $n = 1,2,\cdots$. Se $k = 0$, podemos escrever $\mathbb{E}(X^n)$ e denominá-lo de momento ordinário de X, ou simplesmente momento de ordem n de X. Caso $k = \mathbb{E}(X) < \infty$, então o n-ésimo momento em torno da média, se existir, se chama de n-ésimo momento central de X.

Definição 2.7 A função característica de uma v.a. X é a função $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

onde $i = \sqrt{-1}$. A principal vantagem de trabalhar com a função característica é que a mesma está definida $\forall t \in \mathbb{R}$.

A função geradora e a função característica são ferramentas muito importantes na estatística e em particular na teoria do risco. Utilizaremos a função geradora de momentos, por exemplo, para estabelecer a desigualdade de Lundberg que na Teoria da Ruína fornece um limitante superior para a probabilidade de ruína da seguradora.

A função característica possui propriedades análogas à da função geradora de momentos e a função densidade $f(x)$ pode ser obtida da função característica $\varphi_X(t)$ através da transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt$$

como pode ser visto em Rao (1973).

Definição 2.8 (Convolução)

(i) Sejam X e Y v.a.'s independentes, a valores inteiros, com funções de probabilidade p_X e p_Y, respectivamente. A convolução de p_X e p_Y é a função $p = p_X * p_Y$ definida por:

$$p(z) = \sum_x p_X(x)p_Y(z-x), z \in \mathbb{Z}$$

A função $p(z)$ é a função de probabilidade da v.a. $Z = X + Y$.

(ii) Sejam X e Y v.a.'s contínuas e independentes, com funções densidade respectivas f_X e f_Y. A convolução de f_X e f_Y é a função $f = f_X * f_Y$ definida por:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx, \quad z \in \mathbb{R}$$

Então, $Z = X + Y$ tem função densidade f.

Podemos provar que $f_X * f_Y = f_Y * f_X$. No caso da soma de três v.a.'s, digamos, $X + Y + Z$ com funções densidade dadas, respectivamente por $f_X(x), f_Y(y)$ e $f_Z(z)$ teríamos $f_{X+Y} * f_Z = (f_X * f_Y) * f_Z$ e por apresentar as propriedades associativa e comutativa, a convolução da soma de v.a.'s pode ser feita em qualquer ordem, ou seja, $f_X * f_Y * f_Z = f_X * f_Z * f_Y = \cdots f_Z * f_Y * f_X$,o que se estende naturalmente para n variáveis.

Seja então $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + \cdots + X_n$ a soma de n v.a.'s i.i.d.'s com função de distribuição acumulada $F_X(x)$. Denotando alternativamente a convolução de v.a.'s X e Y por $F_X * F_Y$ temos que a distribuição acumulada de S_n é a n-ésima convolução de $F_X(x)$, que denotaremos por F^{n*}, ou seja, $F^{0*} = 1, F^{1*} = F, F^{2*} = F * F \quad \text{e} \quad F^{(n+1)*} = F^{n*} * F$.

Se F possui densidade f, então F^{n*} tem função densidade $f^{n*} = f * f * \cdots * f(n \text{ vezes})$.

Podemos escrever então que a função densidade de S_n, f_{Sn}, é dada por:

$$f_{Sn}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \cdots f(x_{n-1}) f(s - x_1 - \cdots - x_{n-1}) dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

Detalhes em Feller (1971); Shiryaev (1996).

2.3 Transformada de Laplace

A técnica da transformada de Laplace é largamente utilizada neste trabalho para a obtenção dos resultados referentes à probabilidade de não-ruína em horizonte infinito da seguradora no capítulo 5. Para mais sobre transformada de Laplace, recomendamos Schiff (1999).

A utilidade geral da transformada de Laplace, aqui apresentada em dimensão 1, se dá pela mesma ser uma ferramenta extremamente útil como facilitadora da resolução de E.D.O's e E.D.P's em semi-retas. Onde E.D.O e E.D.P significam, respectivamente, equação diferencial ordinária e equação diferencial parcial.

Definição 2.9 Seja $f(x)$ uma função, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, integrável, $|f(x)| \leq Ce^{\beta x}$, para constantes $C, \beta > 0$ e $\forall x \in [0,\infty)$. Então, a transformada de Laplace de $f(x)$, denotada aqui como $\tilde{f}(\eta)$, é definida por:

$$\tilde{f}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta x} f(x) dx$$

Observe que no caso de $f(x)$ ser uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X não-negativa, sua transformada de Laplace corresponde ao valor esperado da variável aleatória $e^{-\eta X}$, ou ao momento $M_X(-\eta)$, pois:

$$Mx(-\eta) = \mathbb{E}(e^{-\eta X}) = \int_0^\infty e^{-\eta x} f(x) dx = \tilde{f}(\eta)$$

2.3.1 Propriedades da Transformada de Laplace

A seguir apresentamos as principais propriedades da transformada de Laplace.

(I) (Linearidade) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções satisfazendo a definição 2.9, cujas transformadas de Laplace são $\tilde{f}(\eta)$ e $\tilde{g}(\eta)$, respectivamente, e sejam ainda α e β constantes quaisquer. Então a transformada de Laplace de $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ é dada por:

$$\tilde{h}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta x}[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \tilde{f}(\eta) + \beta \tilde{g}(\eta)$$

Demonstração. Imediata da linearidade da integral. $\square$

(II) (Transformada da Derivada) Seja $f(x)$ como na definição 2.9 com transformada de Laplace dada por $\tilde{f}(\eta)$, cuja derivada em $x \in (0,\infty)$ é representada por $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$, então:

$$\tilde{f}'(\eta) = \eta \tilde{f}(\eta) - f(0), \quad \eta > \beta$$

Demonstração. Da definição de transformada de Laplace temos $\tilde{f}'(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta x} f'(x)dx$. Logo , fazendo integração por partes, obtemos:

$$\tilde{f}'(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta x} f'(x)dx = e^{-\eta x} f(x)\Big|_0^\infty + \eta \int_0^\infty e^{-\eta x} f(x)dx = \eta \tilde{f}(\eta) - f(0) \qquad \square$$

Observe que $\lim_{x\to\infty} e^{-\eta x} f(x) = 0$ pois $\beta < \eta$. E que poderíamos, com mais rigor, escrever $f(0^+)$, ao invés de $f(0)$, com $f(0^+) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

(III) (Transformada da Integral) Seja $f(x)$ como na definição 2.9 cuja transformada de Laplace é dada por $\tilde{f}(\eta)$ e $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$, então:

$$\tilde{F}(\eta) = \frac{1}{\eta}\tilde{f}(\eta)$$

.

Demonstração. $\tilde{F}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta x} F(x)dx = \int_0^\infty e^{-\eta x}\big(\int_0^x f(\xi)d\xi\big)dx$, mudando a ordem de integração entre as variáveis x e ξ, obtemos:

$$\tilde{F}(\eta) = \int_0^\infty f(\xi)\left(\int_\xi^\infty e^{-\eta x}dx\right)d\xi = \int_0^\infty f(\xi)\left(-\frac{1}{\eta}e^{-\eta x}\Big|_\xi^\infty\right)d\xi = \frac{1}{\eta}\int_0^\infty e^{-\eta\xi} f(\xi)d\xi = \frac{1}{\eta}\tilde{f}(\eta) \qquad \square$$

(IV) (Transformada da Convolução) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções como na definição 2.9 e seja $h(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$ a convolução entre f e g, então:

$$\tilde{h}(\eta) = \tilde{f}(\eta)\tilde{g}(\eta)$$

.

Demonstração. $\tilde{h}(y) = \widetilde{(f * g)}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta x}\big(\int_0^x f(x-y)g(y)dy\big)dx$, mudando a ordem de integração entre x e y, obtemos:

$$\tilde{h}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta y}\left(\int_y^\infty e^{-\eta(x-y)} f(x-y)dx\right)g(y)dy$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = x - y$ e $\omega = y$, cujo jacobiano é igual a 1, vêm :

$$\tilde{h}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta\omega} g(\omega)d\omega \int_0^\infty e^{-\eta z} f(z)dz = \tilde{f}(\eta)\tilde{g}(\eta) \qquad \square$$

Podemos generalizar a propriedade (IV) facilmente , por indução, para n funções que satisfazem a definição 2.9. Temos a seguinte propriedade:

(IV') Sejam $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ funções contínuas com transformada de Laplace dadas por $\{\tilde{f}_i(\eta)\}_{i=1}^n$. Seja $h(x) = (f_1 * ... * f_n)(x)$, então:

$$\tilde{h}(\eta) = \prod_{i=1}^n \tilde{f}_i(\eta)$$

Enunciamos abaixo dois teoremas conhecidos como o Teorema do Valor Inicial (TVI) e Teorema do

Valor Final (TVF) que serão úteis no capítulo 5.

Teorema 2.10 (Teorema do Valor Inicial) Seja $f(x)$ como na definição 2.9 e $\tilde{f}(\eta)$ sua transformada de Laplace, então:

$$\lim_{n\to\infty} \eta\tilde{f}(\eta) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

.

Teorema 2.11 (Teorema do Valor Final) Seja $f(x)$ como na definição 2.9 e $\tilde{f}(\eta)$ sua transformada de Laplace, então:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to 0} \eta\tilde{f}(\eta)$$

.

2.3.2 A transformada inversa de Laplace

Uma das maiores vantagens de se trabalhar com a transformada de Laplace reside no fato de que a transformada determina unicamente a função, ou seja, duas funções f e g diferentes que satisfazem a definição 2.9 possuem transformadas $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ diferentes.

No caso de termos $\tilde{f}(\eta)$ e quisermos $f(x)$ temos o seguinte teorema:

Teorema 2.12 (Fórmula de Inversão) Seja $\tilde{f}(\eta)$ a transformada de Laplace da função $f(x)$, então:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \tilde{f}(\eta)e^{\eta x}d\eta$$

onde a é suficientemente grande para que todas as singularidades de $\tilde{f}(\eta)$ estejam à esquerda de a.

A demonstração do teorema 2.12 se faz através de técnicas de funções de uma variável complexa e uma demonstração pode ser vista em Rao (1973).

Muitas funções tem suas transformadas tabeladas, como mostramos na tabela 2.1 abaixo.

Tabela 2.1: Transformada de Laplace.

$f(x)$	$\tilde{f}(\eta)$
$f(x)$	$\int_0^\infty e^{-\eta x} f(x)dx$
k	$\frac{k}{\eta}$
x^n	$\frac{n!}{\eta^{n+1}}$
e^{kx}	$\frac{1}{\eta-k}, \eta > k$
$e^{kx}\sin wx$	$\frac{w}{(\eta-k)^2+w^2}, \eta > k$
$e^{kx}\cos wx$	$\frac{\eta-k}{(\eta-k)^2+w^2}, \eta > k$
$e^{kx}\sinh wx$	$\frac{w}{(\eta-k)^2-w^2}, \eta > k$
$e^{kx}\cosh wx$	$\frac{\eta-k}{(\eta-k)^2-w^2}, \eta > k$
$\cos x$	$\frac{\eta}{1+\eta^2}$
$\sin x$	$\frac{1}{1+\eta^2}$
e^{-ax}	$\frac{1}{\eta+a}$
$\frac{x^{n-1}e^{kx}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(\eta-k)^n}, n \geq 1, \eta > k$
$f'(x)$	$s\mathcal{L}(f)(\eta) - f(0^+)$
$f''(x)$	$\eta^2\mathcal{L}(f)(\eta) - \eta f(0^+) - f'(0^+)$
$e^{kx}f(x)$	$F(\eta - k)$
$f(kx)$	$\frac{1}{k}F(\frac{\eta}{k})$
$\int_a^x f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{\eta}F(\eta) - \frac{1}{\eta}\int_0^a f(\tau)d\tau$
$x^n f(x)$	$(-1)^n \frac{d^n}{d\eta^n}(F(\eta))$

Capítulo 3

Noções básicas de processos pontuais

Neste capítulo faremos uma breve revisão da teoria de Processos Estocásticos, focando nos processos que nos interessarão mais de perto, como o Processo de Poisson, simples e composto. Para mais detalhes recomendamos Ross (2010); Vere-Jones & Daley (2002), sendo o segundo uma leitura mais avançada.

3.1 Processos estocásticos

Definição 3.1 Seja $\mathcal{I}$ um conjunto de índices e $n \in \mathbb{N}$. Suponha que para cada $t \in \mathcal{I}$, X_t é uma v.a. definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nestas condições dizemos que a família $\mathcal{X} = \{X_t : t \in \mathcal{I}\}$ é um processo estocástico.

Em geral e particularmente nesta dissertação, denotaremos o processo estocástico apenas por $X_t = X(t)$, subentendendo que t representa um instante de tempo pertencente a algum intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$.

Para cada $\omega \in \Omega$, a função $t \to X_t(\omega) := X(t,\omega)$ é uma trajetória do processo X_t. Dizemos também que o processo X_t e q.s. contínuo quando para quase todo $\omega \in \Omega$, as trajetórias de X_t forem contínuas.

3.2 Processos de contagem

Definição 3.2 Um processo estocástico $\{N(t),t > 0\}$ é um processo de contagem se $N(t)$ representa o número de eventos que ocorreram no intervalo de tempo $[0,t]$ e se para todo $s,t \geq 0$:

(i)$N(0) = 0$

(ii)$N(t) \in \mathbb{N}$

(iii)$N(t) \leq N(t+s)$

(iv) Se $s < t$, então $N(t) - N(s) = N(s,t]$ representa o número de eventos que ocorreram no intervalo $(s,t]$.

Definição 3.3 Um processo de contagem possui incrementos independentes se o número de eventos ocorridos em intervalos disjuntos são independentes, ou seja, se $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2$ então $N(s_1,t_1]$ é independente de $N(s_2,t_2]$.

Definição 3.4 Um processo de contagem possui incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos em um intervalo de tempo depende somente da amplitude do intervalo e não dos seus extremos. Ou seja, se $N(t)$ é um processo estacionário, então $N(t+s_2) - N(t+s_1) = N(t+s_1,t+s_2]$ possui mesma distribuição que $N(s_1,s_2]$ pois $(t+s_2) - (t+s_1) = s_2 - s_1$.

3.3 Processo de Poisson

O exemplo de processo de contagem mais utilizado em Processos Estocásticos, em particular na teoria da Ruína e base do modelo de Crámer-Lundberg, é o Processo de Poisson. Basicamente um

Processo de Poisson, $N(t)$, sobre o intervalo $[0,\infty)$ conta o número de vezes que um evento elementar ocorre no intervalo $[0,t]$. Para mais detalhes sobre o Processo de Poisson recomendamos a consulta a Karlin & Taylor (1975); Vere-Jones & Daley (2002).

Definição 3.5 (Processo de Poisson homogêneo) Um processo de contagem $\{N(t),t > 0\}$ com $N(0) = 0$ é dito ser um Processo de Poisson homogêneo com intensidade $\lambda > 0$, se satisfizer as seguintes condições:

(i)$N(0,t]$ possui incrementos independentes e estacionários.

(ii)$\mathbb{P}(N(t,t+h] \geq 1) = \lambda h + o(h)$, quando $h \to 0, \forall t > 0$ com $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

(iii)$\mathbb{P}(N(t,t+h] \geq 2) = o(h)$, quando $h \to 0, \forall t > 0$ com $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Observação 3.6 Com essas hipóteses é possível mostrar que num Processo de Poisson homogêneo, os intervalos entre dois eventos elementares consecutivos segue uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.

Sejam $T_1, T_2, ...$ v.a's i.i.d's exponenciais de taxa $\lambda > 0$, representando os intervalos de tempo entre ocorrências de eventos a partir do tempo inicial $t = 0$. T_1 é o tempo a partir de $t = 0$ até a ocorrência do primeiro evento, e para $i \geq 2, T_i$ é o tempo a partir de T_{i-1} até a ocorrência do i-ésimo evento.

$N(0,t]$ é o número de eventos ocorridos desde 0 até t, ou seja,

$$N(0,t] = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\} \tag{3.1}$$

onde $S_0 = 0$ e para $n \geq 1$, $\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ é o tempo até a ocorrência do n-ésimo evento.

A denominação do processo $N(t)$, como sendo um Processo de Poisson homogêneo, vem do seguinte teorema.

Teorema 3.7 Para todo $t > 0$ fixo, $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, ou seja,

$$\mathbb{P}(N(0,t] = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

onde λ é o parâmetro que representa o número médio de ocorrências de eventos por unidade de tempo.

Para demonstrar o Teorema 3.7 vamos precisar dos dois lemas seguintes:

Lema 3.8 Para todo $t > 0$ e $k = 1,2,\cdots$, $\{N(t) < k\} \iff \{S_k > t\}$, ou seja, os eventos acima são equivalentes.

Demonstração. Podemos argumentar da seguinte forma: $(\Rightarrow)$ Suponha que $N(0,t] < k$, ou seja, até o tempo t ainda não houve k ocorrências do evento elementar, portanto, a k-ésima ocorrência ocorrerá após o tempo t, ou seja: $T_1 + \cdots + T_{k-1} + T_k > t \Rightarrow S_k > t$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $S_k > t$, logo já decorreu um tempo maior que t para a k-ésima ocorrência. Portanto até o tempo t ocorreu menos do que k ocorrências, logo $N(0,t] < k$. $\square$

Lema 3.9 Para todo $n \geq 1$:

$$S_n \sim Gama(n,\lambda),$$

ou seja, S_n é uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade:

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0 \tag{3.2}$$

Demonstração. Seja $S_1 = T_1 \sim Exp(\lambda)$, para $n = 1$ em 3.2 temos $f_{S_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$, que é a densidade de T_1.

Agora suponha, por indução, que para $n = k$, tenhamos $f_{S_k}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad t > 0$. Como $S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$ e $T_{k+1} \sim Exp(\lambda)$, podemos fazer a convolução entre as v.a. T_{k+1} e S_k, e obtemos:

$$f_{S_{k+1}}(t) = \int_0^t f_{T_{k+1}}(x) f_{S_k}(t-x)dx$$

$$= \int_0^t (\lambda e^{-\lambda x})\lambda e^{-\lambda(t-x)} \frac{[\lambda(t-x)]^{k-1}}{(k-1)!}dx$$

$$= \frac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \int_0^t (t-x)^{k-1}dx$$

$$\text{(fazendo a substituição:} \quad y = t - x, \quad dy = -dx)$$

$$= \frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \int_0^t y^{k-1} dy$$

$$= \frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \frac{t^k}{k}$$

$$= \lambda \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

e isso termina a prova. □

Outra Demonstração. Como $T_i \sim Exp(\lambda), \quad 1 \leq i \leq n$, i.i.d.'s, temos:

$M_{T_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$, a função geradora de momentos da Gama (n,λ).

A função geradora de momentos determina a distribuição,logo, segue a afirmação do lema. □

Demonstração do Teorema 3.7 Dos lemas 3.8 e 3.9, temos que para $t > 0, \quad k = 0,1,2,\cdots$:

$$\mathbb{P}(N_t < k+1) = \mathbb{P}(S_{k+1} > t) = \int_t^\infty f_{S_{k+1}}(s) ds = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} ds$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \int_t^\infty s^k \lambda e^{-\lambda s} ds,$$

$$= \text{(fazendo integração por partes)},$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left[-e^{-\lambda s} s^k \Big|_t^\infty + k \int_t^\infty e^{-\lambda s} s^{k-1} ds \right]$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} + \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} ds$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} + \mathbb{P}(N_t < k)$$

Portanto, se fixarmos k natural e somarmos todas as igualdades obtidas com i de 0 a k, obtemos:

$$\mathbb{P}(N_t < k+1) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

E logo,

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \mathbb{P}(N_t < k+1) - \mathbb{P}(N_t < k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad \square$$

Do Teorema 3.7 obtemos o seguinte corolário:

Colorário 3.10 Se $\{N(t), t > 0\}$ é um Processo de Poisson homogêneo de intensidade $\lambda > 0$, então sua função geradora de momentos é dada por:

$$M_{N(t)}(s) = e^{\lambda t(e^s - 1)}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} M_{N(t)}(s) &= \mathbb{E}(e^{sN(t)}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^s \lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} e^{\lambda t e^s} = e^{\lambda t(e^s - 1)} \qquad \square \end{aligned}$$

Como exemplo, os três primeiros momentos de $N(t)$ são calculados abaixo. Derivamos com respeito a s e fazemos $s=0$ em seguida:

$$M'_{N(t)}(s) = \lambda t e^{s} e^{\lambda t(e^{s}-1)} \Rightarrow M'_{N(t)}(0) = \mathbb{E}[N(0,t]] = \lambda t$$

$$M''_{N(t)}(s) = \lambda t e^{s} e^{\lambda t(e^{s}-1)} + (\lambda t e^{s})^2 e^{\lambda t(e^{s}-1)} \Rightarrow M''_{N(t)}(0) = \mathbb{E}[(N(0,t])^2] = \lambda t + (\lambda t)^2$$

$$M'''_{N(t)}(s) = \lambda t e^{s} e^{\lambda t(e^{s}-1)} + 3(\lambda t e^{s})^2 e^{\lambda t(e^{s}-1)} + (\lambda t e^{s})^3 e^{\lambda t(e^{s}-1)}$$

$$\Rightarrow M'''_{N(t)}(0) = \mathbb{E}[(N(0,t])^3] = \lambda t + 3(\lambda t)^2 + (\lambda t)^3$$

No caso de $\lambda = \lambda(t)$, ou seja, a intensidade λ não for constante, mas uma função do tempo, o processo é denominado de Processo de Poisson não-homogêneo.

Para o modelo de Crámer-Lundberg é basicamente caracterizado pelo processo estocástico $\{S(t), t > 0\}$, denominado Processo de Poisson composto homogêneo, dado na definição seguinte.

Definição 3.11 Um processo estocástico $\{S(t), t > 0\}$ é denominado Processo de Poisson composto homogêneo se podemos representá-lo na forma:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i, \quad t \geq 0$$

No qual $\{N(t), t > 0\}$ é um Processo de Poisson homogêneo e $\{X_i\}_{i\geq 1}$ é uma sequência de v.a.'s i.i.d.'s.

Provaremos a seguir, duas proposições sobre o processo de Poisson Composto que nos serão úteis na caracterização do modelo clássico de risco de Crámer-Lundberg.

Proposição 3.12 Com $S(t)$ como na Definição 3.7, temos $\mathbb{E}[S(t)] = \lambda t\mu$ e $Var[S(t)] = \lambda t\mu_2$.

Onde $\mu = \mathbb{E}(X)$ e $\mu_2 = \mathbb{E}(X^2)$

Demonstração. Usando as definições e condicionando, temos:

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i | N(t) = k\right]\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i | N(t) = k\right] \mathbb{P}[N(t) = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{k} X_i] \mathbb{P}[N(t) = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{E}[X]\mathbb{P}[N(t) = k]$$

$$= \mathbb{E}[X] \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}[N(t) = k] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)]$$

$$= (\lambda t)\mathbb{E}[X] = \lambda t\mu \qquad \square$$

$$Var[S(t)] = \mathbb{E}[S^2(t)] - [\mathbb{E}S(t)]^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i\right)^2\right] - (\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)])^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i\right)^2 | N(t) = k\right]\right] - (\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)])^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i\right)^2 | N(t) = k\right] \mathbb{P}[N(t) = k] - (\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)])^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2\right] \mathbb{P}[N(t) = k] - (\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)])^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[Var\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) + \left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)\right)^2\right] \mathbb{P}[N(t) = k] - (\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)])^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[kVar[X] + k^2(\mathbb{E}[X])^2\right] \mathbb{P}[N(t) = k] - (\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)])^2$$

$$= Var[X] \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}[N(t) = k] + (\mathbb{E}[X])^2 \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}[N(t) = k] - (\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)])^2$$

$$= Var[X]\mathbb{E}[N(t)] + (\mathbb{E}[X])^2 \mathbb{E}[N^2(t)] - (\mathbb{E}[X])^2 (\mathbb{E}[N(t)])^2$$

$$= Var[X]\mathbb{E}[N(t)] + (\mathbb{E}[X])^2 Var[N(t)]$$

$$= (\lambda t)Var[X] + (\lambda t)(\mathbb{E}[X])^2 = \lambda t[Var(X) + (\mathbb{E}[X])^2] = (\lambda t)\mathbb{E}[X^2] = \lambda t \mu_2 \qquad \square$$

Sendo $Var(X) = \sigma^2$, também podemos escrever que $Var[S(t)] = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2)$.

Proposição 3.13 A função geradora de momentos de $S(t)$ é dada por:

$$M_{S(t)}(s) = e^{\lambda t(M_X(s)-1)}$$

Demonstração. Usando a definição e propriedades da função geradora de momentos além de condicionar, temos:

$$M_{S(t)}(s) = \mathbb{E}[e^{s(S(t))}] = \mathbb{E}\left[e^{s\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{s\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)}\right]|N(t) = k\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{s\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)}\right]|N(t) = k]\mathbb{P}[N(t) = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{s\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)}\right]\mathbb{P}[N(t) = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}[e^{sX_i}]\right]\mathbb{P}[N(t) = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(s)\right]\mathbb{P}[N(t) = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [M_X(s)]^k \mathbb{P}[N(t) = k]$$

$$= \mathbb{E}[M_X(s)]^{N(t)}] = \mathbb{E}[e^{N(t) log(M_X(s))}]$$

$$= M_{N(t)}[log(M_X(s))] = \text{(pelo corolário 3.10)}$$

$$= e^{\lambda t(e^{log M_X(s)} - 1)} = e^{\lambda t(M_X(s) - 1)} \qquad \square$$

Capítulo 4

O modelo clássico de Crámer-Lundberg

4.1 Introdução

O modelo clássico de risco coletivo para a evolução da reserva de uma seguradora, conhecido como modelo de Crámer-Lundberg, apareceu pela primeira vez em 1903 num artigo de Lundberg. Neste artigo, Lundberg modelou a ocorrência de indenizações que deveriam ser pagas por uma seguradora, como um processo de Poisson homogêneo.

Posteriormente, na década de 30, o grande matemático Harald Crámer retomou os trabalhos de Lundberg, os ampliou e popularizou na comunidade matemática.

4.2 Definição

Definição 4.1 O modelo clássico de risco coletivo para a reserva de uma seguradora, conhecido como Modelo de Crámer-Lundberg é um processo estocástico em tempo contínuo definido por:

$$U(t) = u + pt - S(t), \quad t \geq 0 \tag{4.1}$$

Onde,

$U(t)$: reserva da seguradora no instante t.

$S(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i$: indenizações agregadas, ou seja, o montante de pagamentos, ocorrido no intervalo (0,t].

$N(0,t]$: número de indenizações pagas em (0,t], que ocorrem de acordo com o processo de Poisson (λt), homogêneo, $\lambda > 0$ e $S(t) = 0$ para $N(0,t] = 0$.

$\{X_i\}_{i\geq 1}$: coleção de v.a.'s i.i.d.'s não-negativas com mesma distribuição $F(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x)$ e independentes de $N(t)$.

$u = U(0)$: reserva inicial da seguradora.

p: constante que representa a taxa de prêmio paga por seguro

A coleção $\{X_i\}_{i\geq 1}$ representa os valores das indenizações pagas pela seguradora na ocorrência de sinistros. Supomos que os pagamentos são recebidos continuamente à taxa $p > 0$, portanto, no intervalo (0,t] o montante recebido pela seguradora é constante e igual a pt.

Assumimos também que $\mathbb{E}(X_i) = E(X) = \mu < \infty$, que o momento de ordem k de X_i é dado por $\mu_k = \mathbb{E}({X_i}^k)$ e que a função geradora de momentos de X_i é $M_{X_i}(s) = \mathbb{E}(e^{sX_i})$.

Como o número de indenizações ocorridas no período (0,t] segue um processo de Poisson de média λt, sabemos que o tempo entre chegadas sucessivas de indenizações possui distribuição $Exp(\lambda)$.

Na próxima seção, com as hipóteses assumidas para o modelo em 4.1 estabeleceremos alguns resultados para o modelo de Crámer-Lundberg.

Observação 4.2 Usaremos indistintamente a notação $N(t) = N(0,t], t > 0$ para o número de indenizações ocorridas no intervalo $(0,t]$.

4.3 Resultados para o modelo de Crámer-Lundberg

Sendo $\{N(t), t > 0\}$ um processo de Poisson homogêneo, o processo de indenizações agregadas $S(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i$ é um processo de Poisson composto homogêneo.

Podemos então estabelecer o seguinte:

Teorema 4.3 A função de distribuição $S(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i$, onde $N(t)$ é um processo de Poisson composto de taxa $\lambda > 0$ é dada por:

$$F_S(x) = \mathbb{P}(S(t) \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k F^{k*}(x)}{k!}, \quad t \geq 0$$

onde,

$$F^{k*}(x) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \leq x\right) \quad \text{é a k-ésima convolução de} \quad F_X(x)$$

Demonstração. Usando as definições e condicionando, temos:

$$F_S(x) = \mathbb{P}[S(t) \leq x] = \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[N(t) = k].\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i \leq x | N(t) = k\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[(0,t] = k].\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i \leq x\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} F^{k*}(x) \qquad \square$$

Dos resultados obtidos no Capítulo 3 para o Processo de Poisson Composto, temos os seguintes resultados para o modelo clássico de Crámer-Lundberg.

Teorema 4.4 Seja $U(t) = u + pt - S(t)$ como na Definição 4.1., então:

$$\mathbb{E}[U(t)] = u + (p - \lambda u)t$$

$$Var[U(t)] = \lambda(\mu^2 + \sigma^2)t, \quad \forall t \geq 0$$

Demonstração. Da proposição 3.12, temos:

$$\mathbb{E}[U(t)] = \mathbb{E}[u + pt - S(t)] = u + pt - \mathbb{E}[S(t)] = u + pt - \lambda\mu t = u + (p - \lambda\mu)t \qquad \square$$

$$Var[U(t)] = Var[u + pt - S(t)] = Var[S(t)] = \lambda t\mu_2 = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2) \qquad \square$$

Teorema 4.5 Sejam $U(t)$ e $U(\tau)$ definidos como em 4.1, com $\tau > t$, então:

$$Cov[U(t),U(\tau)] = Var[U(t)] = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2)$$

Demonstração. $U(t) - \mathbb{E}[U(t)] = [u + pt - S(t)] - [u + pt - \mathbb{E}[S(t)]] = \mathbb{E}[S(t)] - S(t) = \lambda\mu t - S(t)$. Analogamente $U(\tau) - \mathbb{E}[U(\tau)] = \lambda\mu\tau - S(\tau)$.

Logo,

$$Cov[U(t), U(\tau)] = \mathbb{E}[(U(t) - \mathbb{E}[U(t)])(U(\tau) - \mathbb{E}(U(\tau))] = \mathbb{E}[(\lambda\mu t - S(t))(\lambda\mu\tau - S(\tau))]$$

$$= (\lambda\mu)^2 t\tau - \lambda\mu t\mathbb{E}[S(\tau)] - \lambda\mu\tau\mathbb{E}[S(t)] + \mathbb{E}[S(t)S(\tau)]$$

$$= (\lambda\mu)^2 t\tau - (\lambda\mu)^2 t\tau - (\lambda\mu)^2 t\tau + \mathbb{E}[S(t)S(\tau)]$$

$$= \mathbb{E}[S(t)S(\tau)] - (\lambda\mu)^2 t\tau$$

Calculando o termo acima $\mathbb{E}[S(t)S(\tau)]$, temos:

$$\mathbb{E}[S(t)S(\tau)] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N(0,\tau]} X_j\right)\right]$$

Como $\tau > t$, podemos escrever:

$$\mathbb{E}[S(t)S(\tau)] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N(0,t]} X_j + \sum_{N(0,t]+1}^{N(0,\tau]} X_j\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N(0,t]} X_j\right)\left(\sum_{j=N(0,t]+1}^{N(0,\tau]} X_j\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}[(S(t))^2] + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N(0,t]} X_j\right]\mathbb{E}\left[\sum_{j=N(0,t]+1}^{N(0,\tau]} X_j\right]$$

Pois: $\sum_{j=1}^{N(0,t]} X_j = S(t)$ e $\sum_{j=N(0,t]+1}^{N(0,\tau]} X_j = S(\tau - t)$ são independentes.

Logo,

$$\mathbb{E}[S(t)S(\tau)] = \mathbb{E}[(S(t))^2] + \mathbb{E}[S(t)]\mathbb{E}[S(\tau - t)]$$

$$= Var[S(t)] + \mathbb{E}[S(t)]^2 + \mathbb{E}[S(t)]\mathbb{E}[S(\tau - t)]$$

$$= \lambda t(\sigma^2 + \mu^2) + (\lambda\mu t)^2 + \lambda t\mu(\lambda(\tau - t)\mu)$$

$$= \lambda t(\sigma^2 + \mu^2) + (\lambda\mu t)^2 + (\lambda\mu)^2 t\tau - (\lambda\mu t)^2$$

$$= \lambda t(\sigma^2 + \mu^2) + (\lambda\mu)^2 t\tau$$

Portanto,

$$Cov[U(t),U(\tau)] = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2) + (\lambda\mu)^2 t\tau - (\lambda\mu)^2 t\tau = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2) = Var[U(t)] \qquad \square$$

Corolário 4.6 A correlação ρ entre $U(t)$ e $U(\tau), \tau > t$ é dada por:

$$\rho[U(t),U(\tau)] = \sqrt{\frac{t}{\tau}}$$

Demonstração. $\rho[U(t),U(\tau)] = \frac{Cov[U(t),U(\tau)]}{\sqrt{Var[U(t)]}\sqrt{Var[U(\tau)]}} = \frac{Var[U(t)]}{\sqrt{Var[U(t)]}\sqrt{Var[U(\tau)]}} = \sqrt{\frac{Var[U(t)]}{Var[U(\tau)]}} = \sqrt{\frac{\lambda t(\sigma^2+\mu^2)}{\lambda\tau(\sigma^2+\mu^2)}} = \sqrt{\frac{t}{\tau}} \qquad \square$

4.4 Probabilidade da Ruína

Sendo $U(t)$ a reserva da seguradora no instante t e $T = \inf\{t > 0, U(t) < 0\}$ a v.a. do instante de ocorrência da ruína eventual, se $\{t > 0, U(t) < 0\} = \emptyset$, então $T = +\infty$ e $U(t) \geq 0 \quad \forall t > 0$, ou seja, não há ruína, Asmussen (2000).

Como observado anteriormente, trataremos neste trabalho apenas da probabilidade da ruína em horizonte de tempo infinito, que definiremos a seguir.

Definição 4.7 Denotaremos por $\psi(u) = \mathbb{P}\{T < \infty | U(0) = u\} = \mathbb{P}\{\exists t > 0 : U(t) < 0, U(0) = u\}$ a probabilidade da ruína da seguradora em horizonte infinito.

Para o modelo clássico de Crámer-Lundberg definido em 4.1, temos :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \mathbb{P}[u + pt - S(t) < 0|U(0) = u] = \mathbb{P}[S(t) > u + pt|U(0) = u] \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i > u + pt|U(0) = u\right)\end{aligned}$$

Sendo $f_S(x)$ a função densidade de probabilidade das indenizações agregadas, podemos ainda escrever:

$$\psi(u) = \int_{u+pt}^{\infty} f_S(x)dx$$

Definição 4.8 Para o modelo de Crámer-Lundberg, definido em 4.1, temos que a probabilidade de não-ruína em horizonte infinito será denotada por $\phi(u)$ e dada por:

$$\phi(u) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i \leq u + pt|U(0) = u\right) = \int_{0}^{u+pt} f_S(x)dx$$

É fácil ver que a função $\phi(u)$ é crescente, ou seja, se $v > u$ então $\phi(v) > \phi(u)$. Portanto, esperamos que a probabilidade de não-ruína da seguradora seja alta para valores altos de u, e então: $\lim_{u\to\infty} \phi(u) = 1$. Assumiremos também, por hipótese, que $p > \lambda\mu$ e então $0 \leq \psi(u) < 1$, pois como mostraremos no próximo lema, que se $p < \lambda u$ então $\psi(u) = 1$, quase certamente.

Lema 4.9 Se $p < \lambda u$ para o modelo de Crámer-Lundberg, então $\psi(u) = 1$, q.c.

Demonstração. $\frac{\mathbb{E}[U(t)]}{t} = \frac{\mathbb{E}[u+pt-S(t)]}{t} = \frac{u+pt-\mathbb{E}[S(t)]}{t} = \frac{u+pt-\lambda\mu t}{t} = \frac{u}{t} + (p - \lambda\mu)$.

Portanto $\frac{\mathbb{E}U(t)}{t} \to p - \lambda\mu, \quad$ q.c. quando $\quad t \to \infty$.

Logo $\frac{\mathbb{E}U(t)}{t} < 0$ q.c. quando $t \to \infty$ e portanto $\mathbb{P}\{\exists\tau : U(\tau) < 0\} = 1$. $\square$

4.4.1 Desigualdade de Lundberg

Nesta seção provaremos a desigualdade de Lundberg, um resultado muito celebrado na teoria da ruína. Para isso estabeleceremos a definição e lema seguintes.

Definição 4.10. Seja $S(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i$ com distribuição de Poisson composta $(\lambda t, F_S(x))$, onde $F_S(.)$ é a função de distribuição da soma das indenizações agregadas. Se $M_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX})$ existir para $-\infty < s < \beta, \quad \beta > 0$, com $\lim_{s \to \beta} M_X(s) = \infty$, definimos o coeficiente de ajuste γ como sendo a menor raiz positiva da equação:

$$\lambda(M_X(\gamma) - 1) = p\gamma. \tag{4.2}$$

Onde λ, p e X são definidas como na definição 4.1

Lema 4.11 A equação 4.2 sempre possui raiz positiva.

Demonstração. Observe que $M_X(0) = \mathbb{E}(e^{0X}) = \mathbb{E}(1) = 1$. Considere a função $g(s) = ps - \lambda(M_X(s) - 1)$ e logo, $g(0) = 0$.

Por outro lado, $\frac{d}{dx} M_X(s) = M'_X(s) = \mathbb{E}(Xe^{sX})$ e então $M'_X(0) = \mathbb{E}(X) = \mu$.

Logo $g'(s) = p - \lambda u > 0$ e $g''(s) = -\lambda M''_X(s) = -\lambda \mathbb{E}[X^2 e^{sX}] < 0 \quad \forall \quad 0 < s < \beta$. A função $g(s)$, portanto, vale 0 em $s = 0$, é crescente em $s = 0$ pois $g'(0) > 0$ e possui concavidade negativa em $0 < s < \beta$.

Além do mais, como $\lim_{s\to\beta} M_X(s) = \infty$, temos que $\lim_{s\to\beta} g(s) = \lim_{s\to\beta}[ps + \lambda - \lambda M_X(s)] = -\infty$.

Assim, $\exists\gamma > 0$ tal que $g(\gamma) = 0 \Rightarrow \lambda[M_X(\gamma) - 1] = p\gamma$. $\square$

Corolário 4.12 Com as hipóteses do lema 4.11, o coeficiente de ajuste γ é solução da equação:

$$\int_0^\infty e^{\gamma x}[1 - F(x)]dx = \frac{p}{\lambda}$$

Demonstração.

$$\int_0^\infty e^{\gamma x}[1 - F(x)]dx = \int_0^\infty e^{\gamma x}\left(\int_x^\infty f(z)dz\right)dx = \int_0^\infty f(z)\left(\int_0^z e^{\gamma x}dx\right)dz$$

Após uma mudança na ordem de integração entre x e z:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(z)\left(\frac{1}{\gamma}e^{\gamma x}\Big|_0^z\right)dz &= \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty f(z)(e^{\gamma z} - 1)dz \\
&= \frac{1}{\gamma}\left[\int_0^\infty e^{\gamma z}f(z)dz - \int_0^\infty f(z)dz\right] \\
&= \frac{1}{\gamma}[M_X(\gamma) - 1] = \frac{1}{\gamma}\frac{p\gamma}{\lambda} = \frac{p}{\lambda} \qquad \square
\end{aligned}$$

Teorema 4.13(Desigualdade de Lundberg) Considere que $S(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} X_i$ tem distribuição de Poisson $(\lambda t, F_S(x))$, com $F_S(0) = \mathbb{P}(x \leq 0) = 0$. Sendo γ o coeficiente de ajuste da definição 4.10, temos:

$$\psi(u) \leq e^{-\gamma u} \tag{4.3}$$

Demonstração Seja $\psi_n(u)$ a probabilidade de ruína da seguradora antes da ocorrência da n-ésima indenização.

Vamos provar que $\psi_n(u) \leq e^{-\gamma u} \quad \forall \quad n \geq 1$. E assim, como $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(u) = \psi(u)$, estabeleceremos a desigualdade4.3.

Considere então $n = 1$ e observe que o tempo T para a ocorrência da primeira indenização segue uma distribuição $Exp(\lambda)$, portanto:

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}([U(t) < 0],[0 < T < \infty]) = \mathbb{P}([u + pt < X_1],[0 < T < \infty])$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_{u+pt}^\infty f(x)dx \right) dt \quad \text{pelo teorema da probabilidade total.} \tag{4.4}$$

Onde x é o valor de X_1 no instante t.

Sendo $\gamma > 0$ e $u + pt - x < 0$, temos que: $e^{-\gamma(u+pt-x)} > e^0 = 1$

Logo, de 4.4 vêm:

$$\psi_1(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_{u+pt}^\infty e^{-\gamma(u+pt-x)} f(x)dx \right) dt$$

$$= e^{-\gamma u} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\gamma p)t} \left(\int_0^\infty e^{\gamma x} f(x) dx \right) dt$$

$$= e^{-\gamma u} \int_0^\infty \lambda M_X(\gamma) e^{-(\lambda+\gamma p)t} dt =$$

$$= e^{-\gamma u} \int_0^\infty (\lambda + \gamma p) e^{-(\lambda+\gamma p)t} dt = e^{-\gamma u}$$

Onde usamos que $\lambda M_X(\gamma) = \lambda + \gamma p$ por 4.2 e o argumento da integral corresponde à densidade de uma v.a. $Exp(\lambda + \gamma p)$ integrada em todo domínio de sua definição, e portanto igual a 1.

Suponha, por indução, que a desigualdade $\psi_n(u) \leq e^{-\gamma u}$ é verdadeira para $n \geq 1$ inteiro positivo fixo, neste caso vamos provar que também é verdadeira para $n+1$, ou seja, $\psi_{n+1}(u) \leq e^{-\gamma u}$.

Para isso, observe que ao calcular a probabilidade de ruína da seguradora antes da $(n+1)$-ésima indenização, a seguradora pode entrar em ruína na primeira indenização, com probabilidade $\psi_1(u)$, ou caso isso não ocorra, calculamos a probabilidade da seguradora entrar em ruína antes de n indenizações após a primeira e antes da $(n+1)$-ésima.

Seja x o valor da primeira indenização ocorrida no intante t. Caso não haja ruína, o capital da seguradora após a primeira indenização é dado por $U(t) = u + pt - x$ e a probabilidade para a ruína após a primeira indenização e antes da $(n+1)$-ésima é igual a $\psi_n(u + pt - x)$. Portanto, do teorema da probabilidade total, temos:

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_{u+pt}^\infty f(x) dx \right) dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_0^{u+pt} f(x) \psi_n(u + pt - x) dx \right) dt,$$

$$\text{como} \quad \psi_n(u) \leq e^{-\gamma u} \quad \forall \quad u > 0, \quad \text{então} \quad \psi_n(u + pt - x) \leq e^{-\gamma(u+pt-x)},$$

$$\text{logo,}\quad \psi_{n+1}(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left(\int_{u+pt}^\infty f(x)e^{-\gamma(u+pt-x)}dx\right)dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left(\int_0^{u+pt} f(x)e^{-\gamma(u+pt-x)}dx\right)dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left[\int_0^{u+pt} f(x)e^{-\gamma(u+pt-x)}dx + \int_{u+pt}^\infty f(x)e^{-\gamma(u+pt-x)}dx\right]dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left[\int_0^\infty f(x)e^{-\gamma(u+pt-x)}dx\right]dt$$

$$= e^{-\gamma u}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+p\gamma)t}\left(\int_0^\infty e^{\gamma x} f(x)dx\right)dt$$

$$= e^{-\gamma u}\int_0^\infty \lambda M_X(\gamma)e^{-(\lambda+p\gamma)t}dt = e^{-\gamma u}\int_0^\infty (\lambda+p\gamma)e^{-(\lambda+p\gamma)t}dt = e^{-\gamma u} \qquad \square$$

Observe que $0 \leq \lim\limits_{u\to\infty}\psi(u) \leq \lim\limits_{u\to\infty} e^{-\gamma u} = 0$, ou seja, $\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u) = 0$.

Se a reserva inicial é muito alta, a probabilidade de ruína é muito baixa, no limite, igual a zero.

Como consequência de 4.3, $\phi(u) \geq 1 - e^{-\gamma u}$ e $\lim\limits_{u\to\infty}\phi(u) = 1$. Utilizaremos uma condição de contorno similar a esta no próximo capítulo para obter os resultados mais importantes deste trabalho.

4.4.2 Equações Diferenciais para a Probabilidade da Ruína

Nesta seção apenas enunciamos dois teoremas para o modelo clássico de Crámer-Lundberg. Estes teoremas mostram como $\psi(u)$ e $\phi(u)$ podem ser expressas em equações íntegro-diferenciais, uma abordagem comum em teoria da ruína. Podemos procurar soluções para as equações abaixo com o uso da transformada de Laplace, como faremos no próximo capítulo para um modelo mais geral que o modelo clássico.

Teorema 4.14 A probabilidade da ruína, $\psi(u), u > 0$, e da não-ruína, $\phi(u), u > 0$, em horizonte infinito, satisfazem, suas respectivas equações:

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{p}\left[\psi(u) - 1 + F_S(u) - \int_0^u \psi(u-x)f_S(x)dx\right]$$

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{p}\left[\phi(u) - \int_0^u \phi(u-x)f_S(x)dx\right]$$

Teorema 4.15 Para todo $u \geq 0, \psi(u)$ e $\phi(u)$ são dadas, respectivamente, por:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{p}\left[\int_u^{\infty}[1 - F_S(x)]dx + \int_0^u \psi(u-x)[1 - F_S(x)]dx\right]$$

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{p}\int_0^u \phi(u-x)[1 - F_S(x)]dx$$

Para referências, recomendamos Asmussen (2000); Embrechts et al. (1997); Lemos (2008).

Capítulo 5

Modelo de risco não-homogêneo com prêmios e taxas de juros variáveis no tempo

5.1 Introdução

Neste capítulo, o mais importante deste trabalho, seguindo Miranda (2006), estudamos um modelo de reserva de risco mais geral que o modelo clássico de Crámer-Lundberg. Os quatro pontos principais deste modelo são descritos a seguir:

I. Consideramos o processo de risco da reserva da seguradora descrito por um processo pontual marcado não-homogêneo, com marcas sobre a semi-reta real não-negativa. Este processo é formado por um processo de Poisson não-homogêneo que descreve os momentos de ocorrência das indenizações pagas pela seguradora.

II. O tamanho das indenizações são variáveis aleatórias não-negativas independentes, porém, sua distribuição pode depender do tempo, ou seja, do momento da ocorrência das mesmas. Consideramos também independência entre o processo de Poisson não-homogêneo e a classe das variáveis aleatórias não-negativas que modelam o tamanho das indenizações.

III. A taxa de prêmio paga pelo seguro é dependente do tempo.

IV. Assumimos o efeito de uma taxa de juros variável no tempo, agindo sobre os montantes de capital da seguradora.

5.2 Notação e definição do modelo

Nesta seção estabelecemos o modelo e a notação a ser utilizada.

O processo de Poisson não-homogêneo sobre a semi-reta real não-negativa que modela o número de ocorrências das indenizações será representado por $\mathcal{N}$.

Utilizaremos também, por simplicidade, a notação $(\mathcal{N}, X)$ para representar nosso processo de risco, onde $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é a classe das variáveis aleatórias independentes não-negativas que representam o tamanho das indenizações dependentes do tempo.

Para a definição completa do modelo serão necessárias as seguintes variáveis:

$U(t)$: reserva que a seguradora detém no instante de tempo t.

$c(t)$: prêmio pago no tempo t à seguradora.

$X(t_i)$: tamanho da i-ésima indenização, paga no tempo t_i.

$r(t)$: taxa de juros instantânea.

$N(\tau{,}t]$: número de indenizações ocorridas após o tempo τ até o tempo t.

$\lambda(t)$: taxa do processo de Poisson $\mathcal{N}$ no tempo t.

A densidade de probabilidade de $X(t)$, $f_{X(t)}(x)$, será denotada por $f_X(x{,}t)$.

Munidos das notações precedentes, estamos em condições de definir nosso modelo, o que é feito na próxima definição.

Definição 5.1 Nosso modelo de risco da reserva de uma seguradora, como uma generalização do modelo clássico de Crámer-Lundberg, é definido pela seguinte expressão:

$$U(t) = U(\tau)e^{\int_\tau^t r(t')dt'} + \int_\tau^t \left(c(x)e^{\int_x^t r(t')dt'}\right)dx - \sum_{i=1}^{N((\tau,t])} X(t_i)e^{\int_{t_i}^t r(t')dt'} \tag{5.1}$$

para todo tempo $t \geq \tau \in \mathbb{R}_+$.

A equação 5.1 modela o fato de que em qualquer tempo a seguradora recebe juros pelo montante de seu capital e paga as indenizações exatamente no momento da ocorrência dos sinistros.

Vale observar que para retornarmos ao modelo clássico de Crámer-Lundberg, devemos ter $c(t)$ constante, taxa de juros $r(t)$ igual a zero e as variáveis $X(t_i)$ devem ser i.i.d.'s e não dependentes do tempo.

A ruína da seguradora ocorrerá, se e somente se, a reserva $U(t)$ da mesma for negativa em algum instante e o tempo de sua ocorrência é dado por $inf\{t|U(t) < 0\}$.

Por conveniência algébrica trabalhamos com a probabilidade de não-ruína da seguradora, que definiremos por:

Definição 5.2 A probabilidade de não-ruína da seguradora que possui reserva u no tempo t, em horizonte infinito, é denotada por $\phi(u,t)$ e definida por:

$$\phi(u,t) = \mathbb{P}(\{\forall t' \in [t,\infty) \quad U(t') \geq 0, \quad U(t) = u\}) \tag{5.2}$$

Denotaremos a transformada de Laplace bivariada de uma função $f(u,t)$ por $\tilde{f}(\eta,\xi)$, ou ainda por $\mathcal{L}(f(u,t))$. Denotaremos ainda por $\tilde{f}^{(1)}(\eta,t)$ para a transformada de Laplace com respeito apenas à primeira variável.

Por fim, assumiremos condições razoáveis de regularidade para as funções definidas para o modelo descrito em 5.1. Todas as funções são assumidas suaves com ordem das derivadas suficientemente altas e regulares para que possamos realizar as operações usuais envolvendo derivadas e integrais,e estabelecermos os teoremas.

5.3 Primeiro resultado: equação integral para $\phi(u,t)$

Estabelecemos nesta seção uma equação integral para descrever a probabilidade de não-ruína da seguradora como uma função da reserva u, e do tempo t em que a mesma possui esta reserva.

Evidentemente a probabilidade de não-ruína dependerá das características de nosso modelo de risco, ou seja, do processo de Poisson da ocorrência de sinistros, bem como da lei que modela o tamanho dos sinistros dependente do tempo, da taxa de juros e da taxa de prêmios.

Consideramos também que a intensidade de processo de Poisson, o tamanho dos sinistros, a taxa de juros e os prêmios seguem lei determinísticas.

Com base nas definições precedentes 5.1 e 5.2, podemos estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 5.3 Seja $(\mathcal{N},X)$ um processo de risco para o modelo definido pela equação 5.1. Então, a probabilidade de não-ruína da seguradora em horizonte infinito satisfaz a equação:

$$\phi(u,t) = \int_t^{\infty} \int_0^{V(u,y)} \Big(\phi(V(u,y) - x,y) f_X(x,y) \lambda(y) e^{-\int_t^y \lambda(t')dt'}\Big) dx dy \tag{5.3}$$

onde,

$$V(u,y) = u e^{\int_t^y r(t')dt'} + \int_t^y \Big(c(t') e^{\int_{t'}^y r(t'')dt''}\Big) dt'$$

com a condição de fronteira,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{u \to \infty} \phi(u,t) = 1$$

Mais do que isso, $\phi(u,t)$ também satisfaz, para todo $h \in \mathbb{R}_+$:

$$\phi(u,t) = \int_t^{t+h} \int_0^{V(u,y)} \Big(\phi(V(u,y) - x,y) f_X(x,y) \lambda(y) e^{-\int_t^y \lambda(t')dt'}\Big) dx dy + e^{-\int_t^{t+h} \lambda(t')dt'} \phi(V(u,t+h),t+h) \tag{5.4}$$

com a mesma condição de fronteira.

Demonstração. Para estabelecer a equação 5.3 condicionamos a probabilidade de não-ruína, $\phi(u,t)$, no tempo da primeira indenização, y, e no tamanho da mesma, x, no instante y de sua ocorrência e utilizamos o teorema da probabilidade total.

Observe que $V(u,y)$ é igual ao montante de capital que a seguradora acumula no intervalo $[t,y)$, até o instante da primeira indenização.

No instante y, a primeira indenização, de intensidade x, ocorre. Para não haver ruína, devemos ter $x < V(u,y)$ e a partir do instante y, a probabilidade de não-ruína passa a ser $\phi(V(u,y) - x,y)$.

Sendo o número de indenizações um processo de Poisson não-homogêneo, a densidade de probabilidade do tempo da primeira indenização, $f_{T_1}(y)$ é dada por $(e^{-\int_t^y \lambda(t')dt'})\lambda(y)$, enquanto a densidade de probabilidade do tamanho da indenização em y é igual a $f_X(x,y)$.

Portanto a densidade de probabilidade conjunta do par (X,T_1) é dada por $f_X(x,y)\lambda(y)e^{-\int_t^y \lambda(t')dt'}$. E como $\phi(u,t|T_1 = y, X_{T_1} = x) = \phi(V(u,y) - x,y)$, integrando em todo domínio de x e y, pelo teorema da probabilidade total, estabelecemos 5.3. $\square$

Para estabelecer 5.4, tomamos um $h \geq 0$ fixo. Caso haja indenizações no intervalo $[t,t+h)$, a probabilidade de não-ruína será, como em 5.3, dada por:

$$\int_t^{t+h} \int_0^{V(u,y)} \phi(V(u,y) - x,y) f_X(x,y)\lambda(y)e^{-\int_t^y \lambda(t')dt'} dxdy$$

Caso não haja indenização no intervalo $[0,t+h)$, o que ocorrerá com probabilidade $e^{-\int_t^{t+h} \lambda(t')dt'}$, a probabilidade de não-ruína sem indenizações, neste intervalo de tempo, será dada por:

$$(e^{-\int_t^{t+h} \lambda(t')dt'})\phi(V(u,t+h),t+h)$$

Portanto a probabilidade de não-ruína $\phi(u,t)$ é dada pela soma das duas parcelas acima, e estabelecemos 5.4. $\square$

5.4 Uma equação íntegro-diferencial para $\phi(u,t)$

Nesta seção estabelecemos uma equação íntegro-diferencial para $\phi(u,t)$, que nos auxiliará na obtenção da solução geral da probabilidade de não-ruína em horizonte infinito para o modelo definido em 5.1.

Teorema 5.4 Seja $(\mathcal{N},X)$ um processo de risco que assumimos seguir o modelo descrito pela equação 5.1. Então, a probabilidade de não-ruína em horizonte infinito satisfaz a seguinte equação íntegro-diferencial:

$$[c(t)+ur(t)]\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial t}=\lambda(t)\left[\phi(u,t)-\int_0^u\phi(u-x,t)f_X(x,t)dx\right] \tag{5.5}$$

com a condição de fronteira: $\forall t\in\mathbb{R} \quad \lim_{u\to\infty}\phi(u,t)=1.$

Demonstração. Sendo ϕ uma função diferenciável, temos:

$$\phi(V(u,t+h)t+h)=\phi(u,t)+\left[\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}\frac{\partial V(u,t)}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial t}(u,t)\right]h+o(h) \tag{5.6}$$

com $\lim_{h\to\infty}\frac{o(h)}{h}=0$.Note que usamos $V(u,t)=u$.

Da equação 5.4 temos, $\forall h>0$:

$$\frac{1}{h}\left[(e^{-\int_t^{t+h}\lambda(t')dt'})\phi(V(u,t+h),t+h))-\phi(u,t)\right]=-\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_0^{V(u,y)}\phi(V(u,y)-x,y)f_X(x,y)\lambda(y)e^{-\int_t^y\lambda(t')dt'}dxdy \tag{5.7}$$

Observe que:

$$e^{-\int_t^{t+h}\lambda(t')dt'}=1-\int_t^{t+h}\lambda(t')dt'+o\left(\int_t^{t+h}\lambda(t')dt'\right)=1-\lambda(t)h+o(h),\quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0 \tag{5.8}$$

Logo, de 5.6 e 5.8 o lado esquerdo de 5.7 é dado por:

$$\frac{1}{h}\left[(1-\lambda(t)h+o(h))\left(\phi(u,t)+\left[\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}\frac{\partial V(u,t)}{\partial t}+\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial t}\right]h+o(h)\right)-\phi(u,t)\right]$$

Após simplificar a expressão acima, obtemos:

$$\left[\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}\frac{\partial V(u,t)}{\partial t}+\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial t}-\lambda(t)\phi(u,t)\right]+\frac{o(h)}{h} \tag{5.9}$$

Onde cancelamos o termo $\phi(u,t)$ e função $o(h)$ é tal que $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$.

Para obter o termo $\frac{\partial V(u,t)}{\partial t}$, fazemos:

$$\frac{\partial V(u,t)}{\partial t}=\lim_{h\to 0}\frac{V(u,t+h)-V(u,t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(ue^{\int_t^{t+h}r(t')dt'}+\int_t^{t+h}c(t')(e^{\int_{t'}^{t+h}r(t'')dt''})dt'-u\right) \tag{5.10}$$

Com $e^{\int_t^{t+h}r(t')dt'}=1+r(t)h+o(h)$ e $\int_t^{t+h}c(t')(e^{\int_{t'}^{t+h}r(t'')dt''})dt'=c(t)he^{hr(t)+o(h)}+o(h)$

Logo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(u,t)}{\partial t}&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[u(1+r(t)h)+c(t)he^{hr(t)+o(h)}-u+o(h)]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[[ur(t)+c(t)e^{hr(t)+o(h)}]h+o(h)]\\&=ur(t)+c(t),\quad\text{pois}\quad\lim_{h\to 0}hr(t)+o(h)=0\end{aligned}$$

Substituindo $\frac{\partial V(u,t)}{\partial t} = ur(t) + c(t)$ em 5.9 e fazendo $h \to 0$, obtemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[(e^{-\int_t^{t+h}\lambda(t')dt'})\phi(V(u,t+h),t+h) - \phi(u,t)\Big] = \frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}[ur(t)+c(t)] + \frac{\partial\phi(u,t)}{\partial t} - \lambda(t)\phi(u,t) \tag{5.11}$$

Procedendo analogamente para o lado direito de 5.7, temos:

$$\frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h}\int_0^{V(u,y)} \phi(V(u,y)-x,y)f_X(x,y)\lambda(y)e^{-\int_t^y \lambda(t')dt'}dxdy\right] = \int_0^{V(u,y)} \phi(V(u,t){-}x,t)f_X(x,t)\lambda(t)dx{+}\frac{o(h)}{h} \tag{5.12}$$

onde usamos $e^{-\int_t^t \lambda(t')dt'} = e^0 = 1$.

Como $V(u,t) = u$, passando ao limite quando $h \to 0$, obtemos:

$$\lambda(t)\int_0^u \phi(u-x,t)f_X(x,t)dx \tag{5.13}$$

Finalmente, tomando o limite em 5.7, e de 5.11 e 5.13 vêm:

$$[c(t)+ur(t)]\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u} + \frac{\partial\phi(u,t)}{\partial t} = \lambda(t)\left[\phi(u,t) - \int_0^u \phi(u-x,t)f_X(x,t)dx\right] \qquad \square$$

5.5 Solução geral via Transformada de Laplace

O próximo resultado será estabelecido com o uso da transformada de Laplace com respeito à primeira variável de $\phi(u,t)$ na equação 5.5. Obteremos uma equação transformada, em $\tilde{\phi}^{(1)}(\eta,t)$, da qual podemos encontrar a solução geral.

Observamos que visando não sobrecarregar a notação, utilizaremos $\tilde{\phi}^{(1)}(\eta,t) = \tilde{\phi}(\eta,t)$, ou ainda $\mathcal{L}(\phi(u,t))$ nos próximos resultados, sempre que necessário.

Teorema 5.5 Seja $(\mathcal{N}, X)$ um processo de risco que assumimos seguir o modelo descrito pela equação 5.1. Então a transformada de Laplace de $\phi(u,t)$ com respeito a u, da probabilidade de não-ruína da seguradora em horizonte infinito, é dada por:

$$\tilde{\phi}^{(1)}(\eta,t) = \frac{1}{\eta}\left[1 - \frac{\int_0^{\eta}(e^{\int_0^{\eta_1}\mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2})d\eta_1}{\int_0^{\infty}(e^{\int_0^{\eta_1}\mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2})d\eta_1}\right]e^{-\int_0^{\eta}\mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1} \tag{5.14}$$

Onde,

$$\mathcal{P}(\eta,t) = -\left[\frac{c(t)}{r(t)} - \frac{\lambda(t)}{r(t)}\left(\frac{1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)}{\eta}\right)\right]$$

e, por hipótese: $\int_0^{\infty}\mathcal{P}(\eta,t)d\eta = -\infty$ e $\int_0^{\infty}(e^{\int_0^{\eta}\mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1})d\eta < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Demonstração. Utilizando a Transformada de Laplace na equação 5.5, com relação à variável u, obtemos:

$$c(t)[\eta\tilde{\phi}(\eta,t) - \phi(0,t)] + r(t)\mathcal{L}\left(u\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}\right) + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}(u,t) = \lambda(t)[\tilde{\phi}(\eta,t) - \tilde{\phi}(\eta,t)\tilde{f}_X(\eta,t)] \tag{5.15}$$

Em 5.15 utilizamos os seguintes resultados:

(1) $\widetilde{\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}} = \eta\tilde{\phi}(\eta,t) - \phi(0,t)$

(2) A transformada da convolução de ϕ com f_X, $(\phi * f_X)(u,t) = \int_0^u \phi(u-x,t)f_X(x,t)dx$, é igual ao produto de suas transformadas, ou seja, $\tilde{\phi}(\eta,t)\tilde{f}_X(\eta,t)$.

(3) $\widetilde{\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial t}} = \frac{\partial\tilde{\phi}(u,t)}{\partial t}$, pois assumimos que podemos trocar a ordem das derivadas integrais.

Falta escrever o termo em $\mathcal{L}\left(u\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}\right)$ como função de η e $\tilde{\phi}$. Observe que para uma função genérica g que possui transformada de Laplace, temos:

$$\frac{\partial\tilde{g}(\eta,t)}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\int_0^\infty e^{-\eta u}g(u,t)du\right) = \int_0^\infty \frac{\partial(e^{-\eta u})}{\partial\eta}g(u,t)du = -\int_0^\infty ue^{-\eta u}g(u,t)du \tag{5.16}$$

Trocando $g(u,t)$ por $\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,t)$ em 5.16, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\widetilde{\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}}\right) = -\int_0^\infty e^{-\eta u}\left(u\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}\right)du = -\mathcal{L}\left(u\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}\right)$$

E portanto:

$$\mathcal{L}\left(u\frac{\partial\phi(u,t)}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\widetilde{\partial\phi(u,t)}}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta\tilde{\phi}(\eta,t) - \phi(0,t)) = -\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta\tilde{\phi}(u,t)) \tag{5.17}$$

De 5.15 e 5.17:

$$c(t)[\eta\tilde{\phi}(\eta,t) - \phi(0,t)] - r(t)\frac{\partial}{\partial\eta}[\eta\tilde{\phi}(u,t)] + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial t}(\eta\tilde{\phi}(\eta,t)) = \lambda(t)\left[\eta\tilde{\phi}(u,t)\left(\frac{1-\tilde{f}_X(\eta,t)}{\eta}\right)\right] \tag{5.18}$$

Visando simplificar a equação 5.18, fazemos $z(\eta,t) = \eta\tilde{\phi}(\eta,t)$, dividimos os dois lados por $r(t) > 0$, e através de suma simples manipulação, obtemos:

$$\frac{\partial z(\eta,t)}{\partial\eta} - \frac{1}{\eta r(t)}\frac{\partial z(\eta,t)}{\partial t} = \left[\frac{c(t)}{r(t)} - \frac{\lambda(t)}{r(t)}\left(\frac{1-\tilde{f}_X(\eta,t)}{\eta}\right)\right]z(\eta,t) - \frac{c(t)}{r(t)}\phi(0,t)$$

Com $\mathcal{P}(\eta,t) = -\left[\frac{c(t)}{r(t)} - \frac{\lambda(t)}{r(t)}\left(\frac{1-\tilde{f}_X(\eta,t)}{\eta}\right)\right]$, vêm:

$$\frac{\partial z(\eta,t)}{\partial\eta} - \frac{1}{\eta r(t)}\frac{\partial z(\eta,t)}{\partial t} = -\mathcal{P}(\eta,t)z(\eta,t) - \frac{c(t)}{r(t)}\phi(0,t) \tag{5.19}$$

A equação 5.19 é uma E.D.P. de primeira ordem e pode ser resolvida pelo método das curvas características ou método de Lagrange, o que nos fornece:

$$d\eta = -\eta r(t)dt = \frac{dz}{-\mathcal{P}(\eta,t)z(y,t) - \frac{c(t)}{r(t)}\phi(0,t)} \tag{5.20}$$

Integrando a primeira igualdade da equação 5.20 de t_0 a t, vêm:

$$\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\eta} = -\int_{t_0}^{t} r(t')dt' \Rightarrow \eta(t) = \eta_0 e^{-\int_{t_0}^{t} r(t')dt'} \tag{5.21}$$

Vamos então, resolver uma segunda igualdade da equação 5.20:

$$d\eta = \frac{dz}{-\mathcal{P}(\eta,t)z(\eta,t) - \frac{c(t)}{r(t)}\phi(0,t)} \Rightarrow \frac{dz}{d\eta} + \mathcal{P}(\eta,t)z(\eta,t) = -\frac{c(t)}{r(t)}\phi(0,t) \tag{5.22}$$

Considerando a equação 5.22 apenas com relação à variável η, temos uma E.D.O. de primeira ordem, que pode ser resolvida multiplicando a mesma pelo fator integrante, $e^{\int_0^{\eta} \mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1}$ para obter:

$$\frac{d}{d\eta}[(e^{\int_0^{\eta} \mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1})z(\eta,t)] = -\frac{c(t)}{r(t)}\phi(0,t)(e^{\int_0^{\eta} \mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1}) \tag{5.23}$$

Cabe agora observar que pelos teoremas do valor inicial e valor final para a transformada de Laplace, temos:

(TVI) $\lim_{\eta\to\infty} \eta\tilde{\phi}(\eta,t) = \lim_{\eta\to\infty} z(\eta,t) = \lim_{u\to 0} \phi(u,t) = \phi(0,t)$

(TVF) $\lim_{\eta\to 0} \eta\tilde{\phi}(\eta,t) = \lim_{\eta\to 0} z(\eta,t) = \lim_{u\to\infty} \phi(u,t) = 1$, pela condição de fronteira.

Integrando 5.23 de η a ∞, obtemos:

$$(e^{\int_0^\infty \mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1}) \lim_{\eta\to\infty} z(\eta,t) - (e^{\int_0^\eta \mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1}) z(\eta,t) = -\frac{c(t)}{r(t)}\phi(0,t)\int_\eta^\infty (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2})d\eta_1 \tag{5.24}$$

Como, por hipótese, $\int_0^\infty \mathcal{P}(\eta,t)d\eta = -\infty$, então $e^{\int_0^\infty \mathcal{P}(\eta,t)d\eta} = 0$, obtemos:

$$(e^{\int_0^\eta \mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1}) z(\eta,t) = \left(\int_\eta^\infty \left(e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}\right)d\eta_1\right)\frac{c(t)}{r(t)}\phi(0,t)$$

Logo,

$$z(\eta,t) = \left(\int_\eta^\infty \left(e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}\right)d\eta_1\right)\frac{c(t)}{r(t)}\phi(0,t)e^{-\int_0^\eta \mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1} \tag{5.25}$$

Para obtermos $\phi(0,t)$ de 5.25 tomamos o limite de $z(\eta,t)$ com $\eta \to 0$ e utilizamos o teorema do valor final e a condição de fronteira.Temos:

$$\lim_{\eta \to 0} z(\eta,t) = \lim_{u \to \infty} \phi(u,t) = 1 = \int_0^{\infty} (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}) d\eta_1 \frac{c(t)}{r(t)} \phi(0,t)$$

E então:

$$\phi(0,t) = \frac{r(t)}{c(t)} \left(\int_0^{\infty} (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}) d\eta_1 \right)^{-1} \tag{5.26}$$

Finalmente, voltando a 5.25 com o resultado de 5.26, temos:

$$z(\eta,t) = \left[\frac{\int_{\eta}^{\infty} (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}) d\eta_1}{\int_0^{\infty} (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}) d\eta_1} \right] e^{-\int_0^{\eta} \mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1}$$

Como $z(\eta,t) = \eta\tilde{\phi}(\eta,t)$ e $\int_{\eta}^{\infty} (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}) d\eta_1 = \int_0^{\infty} (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}) d\eta_1 - \int_0^{\eta} (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}) d\eta_1$, finalmente estabelecemos que $\tilde{\phi}(\eta,t) = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{\int_0^{\eta} (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}) d\eta_1}{\int_0^{\infty} (e^{\int_0^{\eta_1} \mathcal{P}(\eta_2,t)d\eta_2}) d\eta_1} \right] e^{-\int_0^{\eta} \mathcal{P}(\eta_1,t)d\eta_1}$. □

No demonstração do teorema precedente fizemos uso de algumas técnicas de equações diferenciais, ordinárias e parciais, que podem ser vistas em Figueiredo & Neves (2005); Iório (2005).

Do teorema acima, estabelecemos o seguinte corolário:

Colorário 5.6 Assumindo as hipóteses do teorema 5.5, a probabilidade de não-ruína em horizonte infinito começando com capital nulo, é dada por:

$$\phi(0,t) = \frac{r(t)}{c(t)} \left(\int_0^\infty e^{\left(-\frac{c(t)}{r(t)}\eta_1 + \frac{\lambda(t)}{r(t)} \int_0^{\eta_1} \left(\frac{1-\tilde{f}_X^{(1)}(\eta_2,t)}{\eta_2} \right) d\eta_2 \right)} d\eta_1 \right)^{-1}$$

Demonstração. Do Teorema 5.5, equação 5.26. □

5.6 O modelo limite

Nesta seção estabeleceremos um teorema e um corolário para o modelo limite do modelo descrito na definição 5.1.

Teorema 5.7 Seja $(\mathcal{N},X)$ um processo de risco que assumimos seguir a equação 5.1 onde $\lambda(t) = N(t)p(t)$ e $c(t) = N(t)\gamma(t)$, supondo $N = \inf_{t\in\mathbb{R}} N(t) \to \infty$. Então, a transformada de Laplace com respeito a u da probabilidade de não-ruína no horizonte infinito obedece:

$$\tilde{\phi}^{(1)}(\eta,t) = \frac{\phi(0,t)}{\eta - \frac{p(t)}{\gamma(t)}(1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t))}$$

onde, $\phi(0,t) = 1 - \frac{p(t)}{\gamma(t)} \lim_{\eta\to 0} \left(\frac{1-\tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)}{\eta} \right)$.

Consequentemente, passando ao domínio de u e t, através da transformada inversa de Laplace, temos:

$$\phi(u,t) = \left(1 - \frac{p(t)}{\gamma(t)} \lim_{\eta \to 0} \left(\frac{1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)}{\eta} \right) \right) \mathcal{L}_1^{-1} \left(\frac{1}{\eta - \frac{p(t)}{\gamma(t)}(1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t))} \right) \tag{5.27}$$

Onde $\mathcal{L}_1^{-1}$ é a transformada inversa de Laplace com respeito à primeira variável.

Demonstração. Reescrevendo a equação 5.5 com $\lambda(t) = N(t)p(t)$ e $c(t) = N(t)\gamma(t)$, obtemos:

$$[N(t)\gamma(t) + ur(t)] \frac{\partial \phi(u,t)}{\partial u} + \frac{\partial \phi(u,t)}{\partial t} = N(t)p(t) \left[\phi(u,t) - \int_0^u \phi(u-x,t) f_X(x,t) dx \right] \tag{5.28}$$

Dividindo 5.28 por $N(t)$, vêm:

$$\left[\gamma(t) + \frac{ur(t)}{N(t)} \right] \frac{\partial \phi(u,t)}{\partial u} + \frac{1}{N(t)} \frac{\partial \phi(u,t)}{\partial t} = p(t) \left[\phi(u,t) - \int_0^u \phi(u-x,t) f_X(x,t) dx \right] \tag{5.29}$$

Fazendo, em 5.29, $N \to \infty$ pela hipótese, obtemos a equação limite:

$$\gamma(t) \frac{\partial \phi(u,t)}{\partial u} = p(t) \left[\phi(u,t) - \int_0^u \phi(u-x,t) f_X(x,t) dx \right] \tag{5.30}$$

Aplicando a transformada de Laplace em 5.30, vêm:

$$\gamma(t)[\eta\tilde{\phi}(\eta,t) - \phi(0,t)] = p(t)[\tilde{\phi}(\eta,t) - \tilde{\phi}(\eta,t)\tilde{f_X}(\eta,t)]$$
$$\Rightarrow \quad \gamma(t)\eta\tilde{\phi}(\eta,t) - \gamma(t)\phi(0,t) = p(t)\tilde{\phi}(\eta,t)[1 - \tilde{f_X}(\eta,t)]$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{\phi}(\eta,t)(\gamma(t)\eta - p(t)[1 - \tilde{f_X}(\eta,t)]) = \gamma(t)\phi(0,t)$$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}^{(1)}(\eta,t) = \frac{\phi(0,t)}{\eta - \frac{p(t)}{\gamma(t)}[1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)]} \tag{5.31}$$

Aplicando o Teorema do valor final, temos:

$$\lim_{\eta\to 0} \eta\tilde{\phi}(\eta,t) = \lim_{u\to\infty} \phi(u,t) = \lim_{\eta\to 0} \frac{\phi(0,t)}{1 - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\left[\frac{1-\tilde{f_X}(\eta,t)}{\eta}\right]} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\phi(0,t)}{1 - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\lim_{\eta\to 0}\left[\frac{1-\tilde{f_X}(\eta,t)}{\eta}\right]} = 1$$

$$\Rightarrow \phi(0,t) = 1 - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\lim_{\eta\to 0}\left[\frac{1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)}{\eta}\right] \tag{5.32}$$

De 5.32 e 5.31, aplicando a transformada inversa de Laplace, estabelecemos 5.27. $\square$.

Sob as hipóteses do teorema 5.7, podemos extrair o seguinte corolário:

Colorário 5.8 Se $\sum_{k=2}^{\infty} u^k f_X(u,t)$ converge uniformemente e $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbb{E}[(X(t))^k] < \infty$, então:

$$\phi(u,t) = \left(1 - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\mathbb{E}(X(t))\right)\mathcal{L}_1^{-1}\left(\frac{1}{\eta - \frac{p(t)}{\gamma(t)}(1 - \tilde{f}_X(\eta,t))}\right)$$

Demonstração. Basta mostrar que:

$$\lim_{\eta\to 0}\left[\frac{1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)}{\eta}\right] = \mathbb{E}(X(t))$$

.

Para isso observe que:

$$\tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t) = \int_0^{\infty} e^{-\eta u} f_X(u,t)du = \int_0^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\eta u)^k}{k!}\right)f_X(u,t)du$$

$$= \int_0^{\infty}[f_X(u,t) - \eta u f_X(u,t)]du + \int_0^{\infty}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\eta^k u^k}{k!}\right]f_X(u,t)du$$

$$= 1 - \eta\mathbb{E}(X(t)) + \eta^2\int_0^{\infty}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\eta^{k-2}u^k}{k!}\right]f_X(u,t)du$$

As hipóteses garantem que:

$$\int_0^{\infty}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\eta^{k-2}u^k}{k!}\right]f_X(u,t)du = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\eta^{k-2}}{k!}\int_0^{\infty}u^k f_X(u,t)du = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\eta^{k-2}}{k!}\mathbb{E}(X(t))^k$$

Agora observe que $\mathbb{E}(X(t) \geq 0$ pois$X(t)$ é v.a. não-negativa. Portanto, para $\eta < 1$ temos:

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-2}}{k!} [\mathbb{E}(X(t))]^k\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|(-1)^k \eta^{k-2}|}{k!} \mathbb{E}[(X(t))^k] \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{E}[(X(t))^k] < \infty$$

Logo, como $\int_0^\infty \left[\sum_{k=2}^\infty \frac{(-1)^k \eta^{k-2} u^k}{k!}\right] f_X(u,t) du$ converge quando $\eta \to 0$, podemos escrever:

$$\frac{1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)}{\eta} = \mathbb{E}(X(t)) - \eta \int_0^\infty \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-2} u^k}{k!}\right] f_X(u,t) du$$

Passando ao limite:

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)}{\eta} = \mathbb{E}(X(t)) \tag{5.33}$$

Portanto, de 5.27 e 5.33 vêm:

$$\phi(u,t) = \left(1 - \frac{p(t)}{\gamma(t)} \mathbb{E}(X(t))\right) \mathcal{L}_1^{-1} \left(\frac{1}{\eta - \frac{p(t)}{\gamma(t)}(1 - \tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t))}\right) \qquad \square \tag{5.34}$$

No caso das indenizações serem exponenciais dependentes do tempo, podemos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 5.9 Sob as hipóteses do modelo limite estabelecido no teorema 5.7, admitindo que as indenizações são distribuídas exponencialmente e dependentes do tempo, i.e., $X \sim Exp(\alpha(t))$, com $\alpha(t) > 0, t \geq 0$. A probabilidade de não-ruína é dada pela expressão:

$$\phi(u,t) = 1 - \frac{p(t)}{\alpha(t)\gamma(t)} e^{-\left(\alpha(t) - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\right)u}$$

Demonstração. Vamos usar o corolário 5.8. Sendo $X \sim Exp(\alpha(t))$ temos $\tilde{f}_X(\eta,t) = \frac{\alpha(t)}{\eta+\alpha(t)}$. Logo:

$$\mathcal{L}_1{}^{-1}\left(\frac{1}{\eta - \frac{p(t)}{\gamma(t)}(1 - \tilde{f}_X(\eta,t))}\right) = \mathcal{L}_1{}^{-1}\left(\frac{1}{\eta - \frac{p(t)}{\gamma(t)}(\frac{\eta}{\eta+\alpha(t)})}\right)$$

$$= \mathcal{L}_1^{-1}\left(\frac{\eta + \alpha(t)}{\eta\left(\eta + \alpha(t) - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\right)}\right) = \mathcal{L}_1^{-1}\left(\frac{1}{\eta + \alpha(t) - \frac{p(t)}{\gamma(t)}}\right) + \mathcal{L}_1^{-1}\left(\frac{\alpha(t)\gamma(t)}{\alpha(t)\gamma(t) - p(t)}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta + \alpha(t) - \frac{p(t)}{\gamma(t)}}\right)\right)$$

$$= e^{-\left(\alpha(t) - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\right)u} + \frac{\alpha(t)\gamma(t)}{\alpha(t)\gamma(t) - p(t)}\left(1 - e^{-\left(\alpha(t) - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\right)u}\right) \tag{5.35}$$

Como $\mathbb{E}(X(t)) = \frac{1}{\alpha(t)}$ de 5.34 e 5.35 vêm:

$$\phi(u,t) = \left(\frac{\alpha(t)\gamma(t) - p(t)}{\alpha(t)\gamma(t)}\right) e^{-\left(\alpha(t) - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\right)u} + 1 - e^{-\left(\alpha(t) - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\right)u} = 1 - \frac{p(t)}{\alpha(t)\gamma(t)} e^{-\left(\alpha(t) - \frac{p(t)}{\gamma(t)}\right)u} \qquad \square$$

Assumimos, no teorema 5.5, a hipótese $\int_0^\infty \mathcal{P}(\eta,t)d\eta = -\infty$, que foi essencial na demonstração do teorema. Mostraremos nesta última proposição que esta hipótese é bastante geral.

Proposição 5.10 Sob as hipóteses do corolário 5.8 e supondo que $\exists \epsilon > 0$ tal que $\frac{c(t)-\lambda(t)(\mathbb{E}(X(t)))}{r(t)} > \epsilon$, temos:

$$\int_0^\infty \mathcal{P}(\eta,t)d\eta = -\infty$$

Demonstração. Do Corolário 5.8, temos:

$$\frac{1-\tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)}{\eta} = \mathbb{E}(X(t)) - \int_0^\infty \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-1} u^k}{k!}\right] f_X(u,t)dt = \mathbb{E}(X(t)) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-1}}{k!} \mathbb{E}(X(t))^k$$

Sendo $\mathcal{P}(\eta,t) = -\frac{1}{r(t)}\left[c(t) - \lambda(t)\left(\frac{1-\tilde{f}_X^{(1)}(\eta,t)}{\eta}\right)\right]$, podemos escrever:

$$\mathcal{P}(\eta,t) = -\frac{1}{r(t)}\left[c(t) - \lambda(t)\left(\mathbb{E}(X(t)) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-1} \mathbb{E}(X(t))^k}{k!}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{r(t)}[c(t) - \lambda(t)(\mathbb{E}(X(t)))] - \frac{\lambda(t)}{r(t)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-1} \mathbb{E}(X(t))^k}{k!}$$

Note que $\forall \eta > 0$, a série alternada $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-1} \mathbb{E}(X(t))^k}{k!}$ converge, pois o valor absoluto de seu termo geral $\frac{(-1)^k \eta^{k-1} \mathbb{E}[(X(t))^k]}{k!}$ tende a 0, fato este garantido pela hipótese $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{E}[(X(t))^k] < \infty$, que implica $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{\mathbb{E}[(X(t))^k]}{k!} = 0$.

Desde que $\eta > 0$, $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-1} u^k}{k!} = \frac{e^{-\eta u} - (1-\eta u)}{\eta} > 0$, logo $\int_0^\infty \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-1} u^k}{k!}\right] d\eta \geq 0$.

Portanto:

$$\int_0^\infty \mathcal{P}(\eta,t) d\eta = -\frac{1}{r(t)}[c(t) - \lambda(t)(\mathbb{E}(X(t)))] \int_0^\infty d\eta - \frac{\lambda(t)}{r(t)} \int_0^\infty \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^{k-1} u^k}{k!}\right] d\eta$$

.

Sendo $\lambda(t)$ e $r(t)$ funções positivas e pela hipótese da proposição, segue $\int_0^\infty \mathcal{P}(\eta,t) d\eta = -\infty$. $\square$

Apêndice A

Conceitos básicos de probabilidade

Segue um resumo de alguns fatos da teoria da probabilidade. Como referência recomendamos: Billingsley (1995); Grimmett & Stirzaker (2001); Ross (2008), sendo os dois primeiros mais avançados.

A.1 Variáveis aleatórias

Definição A.1 Uma v.a. X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função a valores reais definida em Ω, tal que:

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$$

.

Variáveis aleatórias que assumem valores em um conjunto finito ou infinito enumerável são chamadas discretas e as que assumem valores em um intervalo da reta real são chamadas de contínuas.

Definição A.2 A função de distribuição acumulada de uma v.a. X é uma função $F(.)$ definida por:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x), x \in \mathbb{R}$$

que possui as seguintes propriedades fundamentais:

(i) F é não-decrescente, ou seja, se $x < y$ então $F(x) \leq F(y)$

(ii) F é contínua à direita, ou seja, se $x_n \downarrow x$ então $F(x_n) \downarrow F(x)$

(iii) Se $x_n \downarrow -\infty$ então $F(x_n) \downarrow 0$, se $x_n \uparrow +\infty$ então $F(x_n) \uparrow 1$

Quando a v.a. X é contínua, que é o caso que mais nos interessa, podemos obter sua função densidade de probabilidade $f(x)$ como $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

Definição A.3 Sejam X e Y v.a.'s definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A função de distribuição acumulada conjunta do par (X, Y) é definida por:

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y), x, y \in \mathbb{R}$$

As funções de distribuição marginais de X e Y são respectivamente dadas por:

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y), x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y), y \in \mathbb{R}$$

Definição A.3.1 Sejam X e Y v.a.'s discretas em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A função de probabilidade conjunta de X e Y, $p(x,y)$, é dada por:

$$p(x,y) = P(X = x, Y = y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

As marginais de X e Y são:

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y), x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p_Y(y) = \sum_x p(x,y), y \in \mathbb{R}$$

Definição A.3.2 Sejam X e Y v.a.'s definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que X e Y são conjuntamente contínuas se existe uma função $f(x,y) \geq 0$, chamada uma função densidade de probabilidade conjunta, tal que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) du dv$$

As marginais de X e Y são:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy, x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx, y \in \mathbb{R}$$

Observamos que a extensão de distribuição conjunta para n variáveis é natural das definições e resultados anteriores, sendo que todas devem estar em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definição A.4 As v.a.'s $X_1, \cdots, X_n$ são independentes se para quaisquer conjuntos $A_i \subset \mathbb{R}$, borelianos $i = 1, \cdots, n$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Definição A.5 Sejam $X_1, \cdots, X_n$ v.a.'s com função distribuição conjunta $F(x_1, \cdots, x_n)$ e funções de distribuição marginais $F_{X_1}, \cdots, F_{X_n}$, respectivamente. Então, $X_1, \cdots, X_n$ são independentes, se e somente se:

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

para qualquer escolha de $x_1, \cdots, x_n$.

Definição A.5.1 As variáveis aleatórias discretas $X_1, \cdots, X_n$ são independentes, se e somente se:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

para qualquer escolha de $x_1, \cdots, x_n$.

Definição A.5.2 Sejam $X_1, \cdots, X_n$ v.a.'s conjuntamente contínuas com função densidade conjunta $f(x_1, \cdots, x_n)$ e funções densidade marginais $f_{X_1}, \cdots, f_{X_n}$, respectivamente. Então $X_1, \cdots, X_n$ são independentes, se e somente se:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1). \cdots .f_{X_n}(x_n)$$

para qualquer escolha de $x_1, \cdots, x_n$.

Observação A.6 Uma coleção infinita de v.a.'s é independente se toda subcoleção finita dessas v.a.'s é independente.

Observação A.7 Se $X_1, \cdots, X_n$ são v.a.'s independentes, então funções contínuas de famílias disjuntas das $X_{i's}$ são independentes.

A.2 Esperança de Variáveis aleatórias

Definição A.8 A esperança de uma v.a. X é definida por:

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum\limits_x x\mathbb{P}(X = x), & \text{se} \quad X \quad \text{é discreta,} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, & \text{se} \quad X \quad \text{é contínua com densidade} \quad f. \end{cases}$$

A esperança está bem definida apenas quando a soma ou integral está bem definida.

Assim,

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum\limits_{x \geq 0} x\mathbb{P}(X = x) - \sum\limits_{x<0} (-x)\mathbb{P}(X = x), & \text{se} \quad X \quad \text{é discreta,} \\ \\ \int_{x \geq 0} xf(x)dx - \int_{x<0} (-x)f(x)dx, & \text{se} \quad X \quad \text{é contínua com densidade} \quad f. \end{cases}$$

de modo que $\mathbb{E}(X)$ está bem definida desde que ambas as somas ou integrais não sejam $+\infty$. Em caso contrário dizemos que $\mathbb{E}(X)$ não existe.

Observe que, em particular, $\mathbb{E}(X)$ está bem definida se $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$.

Definição A.9 Dizemos que uma v.a. X é integrável se $\mathbb{E}(X)$ é finita, o que é equivalente a $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

Definição A.10 Para $n \geq 1$, o n-ésimo momento de uma v.a. X, caso exista, é $\mathbb{E}(X^n)$.

Definição A.11 A variância de uma v.a. X integrável com esperança μ é dada pelo segundo momento centrado de X, ou seja,

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$$

Proposição A.12 Se α e β são constantes, então:

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta) = \alpha\mathbb{E}(X) + \beta \quad \text{e} \quad Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

Demonstração. Basta aplicar a definição de esperança e variância. $\square$

Apesar de serem simples, não daremos a demonstração das próximas proposições, que são facilmente encontradas nos textos já apontados.

Proposição A.13 Se $\mathbb{E}(|X|^t)$ é finita para algum $t > 0$, então $\mathbb{E}(|X|^s)$ é finita para todo $0 \leq s \leq t$.

Proposição A.14

(i) Se X é uma v.a. inteira e não-negativa, então:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

(ii) Se X é uma v.a. contínua que assume valores não-negativos, então:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}(X > t)dt$$

Proposição A.15 (Critério de integrabilidade) Seja X uma v.a. qualquer. Então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geq n) \leq \mathbb{E}(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geq n).$$

Portanto, X é integrável se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geq n) < \infty$.

Proposição A.16

(i) Se X e Y têm função de probabilidade conjunta $p(x,y)$, então:

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \sum_{x} \sum_{y} \varphi(x,y)p(x,y)$$

(ii) Se X e Y têm uma função densidade conjunta $f(x,y)$, então:

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)f(x,y)dxdy$$

Proposição A.17 Se $\mathbb{P}(X \geq Y) = 1$, então: $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

Proposição A.18 $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$.

Proposição A.19 Para qualquer função g a valores reais:

$$\mathbb{E}[g(x)] = \begin{cases} \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x), \quad \text{se} \quad X \quad \text{é discreta}, \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, \quad \text{se} \quad X \quad \text{é contínua com densidade} \quad f. \end{cases}$$

Proposição A.20 Se $X_1, \cdots, X_n$ são independentes, então:

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i$$

Definição A.21 A covariância entre duas v.a.'s X e Y integráveis é dada por:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mu_X\mu_Y$$

Portanto, se X e Y são independentes a $Cov(X,Y) = 0$, mas a recíproca não é verdadeira.

Proposição A.22

$$Cov(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j X_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov(X_i, Y_j)$$

,

onde os $a_{i's}$ e $b_{j's}$ são números quaisquer.

Proposição A.23

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j)$$

Caso $X_1, \cdots, X_n$ sejam v.a.'s independentes:

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

.

Definição A.24 Sejam X e Y v.a.'s com variâncias finitas e positivas. O coeficiente de correlação entre X e Y é definido por:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$$

.

onde, $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ e $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$.

Duas propriedades importantes de $\rho(X,Y)$ são:

(i) $|\rho(X,Y)| \leq 1$

(ii) Se $\rho(X,Y) = \pm 1$, então os valores de X e Y pertencem a uma reta.

A.3 Desigualdades

Em muitos resultados da teoria do risco e da ruína, utilizamos algumas desigualdades que nos fornecem limitantes para a probabilidade de certos eventos. Segue abaixo algumas delas.

Proposição A.25 (Desigualdade de Markov) Seja $X \geq 0$ uma v.a., então, para qualquer $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

Demonstração. $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{x>\lambda\}}(x)] + \mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{x\leq\lambda\}}(x)] \geq \mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{x>\lambda\}}(x)] \geq \mathbb{E}[\lambda\mathbb{I}_{\{x>\lambda\}}(x)] = \lambda\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{x>\lambda\}}(x)] = \lambda\mathbb{P}(\{x > \lambda\})$ $\square$

Proposição A.26 (Desigualdade de Chebyschev) Seja X uma v.a. com $\mathbb{E}(X) < \infty$. Então, para qualquer $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}$$

Demonstração.

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq \lambda^2)$$

$$\leq \quad \text{(pela desigualdade de Markov)} \quad \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2)}{\lambda^2} = \frac{Var(X)}{\lambda^2} \qquad \square$$

Proposição A.27 (Limitantes de Chernoff) Para qualquer v.a. X e $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} M_X(t), \quad \forall t > 0$$

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq^{-ta} M_X(t), \quad \forall t < 0$$

Demonstração. Demonstramos apenas a primeira, a outra é análoga.

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}} = e^{-ta} M_X(t) \qquad \square$$

Proposição A.28 (Desigualdade de Jensen) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se a v.a. X é integrável, então:

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g[\mathbb{E}(X)]$$

A desigualdade de Jensen é válida se φ é convexa em um intervalo (a,b) tal que $\mathbb{P}(a < X < b) = 1$, em que se admite a possibilidade de $a = -\infty$ e $b = +\infty$.

Demonstração. Se g é convexa, ela encontra-se acima de suas retas tangentes, portanto, para todo x_0, existe a tal que $g(X) \geq g(x_0) + a(X - x_0)$ e então tomando $x_0 = \mathbb{E}(X)$ e esperança dos dois lados, vêm $\mathbb{E}[g(X)] \geq g[\mathbb{E}(X)] + a\mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)] = g[\mathbb{E}(X)]$ $\square$

Proposição A.29 (Desigualdade Cauchy-Schwarz) Se as v.a.'s X e Y têm variâncias finitas, então:

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq (\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2))^{1/2}$$

Demonstração. Faremos a demonstração no caso de X e Y serem contínuas com $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$.

Seja f a distribuição conjunta das v.a.'s X e Y, e θ uma variável real, então:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\theta x + y)^2 f(x,y)dxdy \geq 0$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx\right)\theta^2 + 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy\right)\theta + \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dy \geq 0$$

ou seja, $\mathbb{E}(X^2)\theta^2 + [2\mathbb{E}(XY)]\theta + \mathbb{E}(Y^2) \geq 0$.

Como a desigualdade acima é válida para todo $\theta \in \mathbb{R}$, devemos ter:

$$[2\mathbb{E}(XY)]^2 - 4\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \leq 0 \Leftrightarrow |\mathbb{E}(XY)| \leq (\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2))^{1/2} \qquad \square$$

A.4 Distribuições de Probabilidade

Terminamos este apêndice apresentando algumas das distribuições de probabilidade importantes.

A.4.1 Distribuições Discretas

Definição A.30 (Distribuição de Poisson) $X \sim Poisson(\lambda), \lambda > 0$, se tem função de probabilidade dada por:

$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots$

Com $\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad Var(X) = \lambda, \qquad M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

Definição A.31 (Distribuição Uniforme) $X \sim$ Uniforme discreta sobre o conjunto $\{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}$ se tem função de probabilidade dada por:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \cdots, n$$

X representa a escolha ao acaso de um elemento do conjunto $\{x_1, \cdots, x_n\}$. No caso particular em que $x_1 = 1, \cdots, x_n = n$ denotamos $X \sim$ Uniforme Discreta (n).

Para $X \sim$ Uniforme Discreta (n) temos:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad Var(X) = \frac{n^2-1}{12} \qquad M_X(t) = \frac{e^t(e^{nt}-1)}{n(e^t-1)}$$

Definição A.32 (Distribuição de Bernoulli) $X \sim Ber(p), 0 \leq p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por:

$$\mathbb{P}(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}, \quad k = 0,1$$

X é a função indicadora da ocorrência de sucesso em um experimento que tem somente dois resultados possíveis: sucesso com probabilidade p e fracasso com probabilidade $1-p$.

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad Var(X) = p(1-p) \qquad M_X(t) = pe^t + (1-p)$$

Definição A.33 (Distribuição Binomial) $X \sim Bin(n,p), n \geq 1$ inteiro e $0 \leq p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\cdots,n$$

X é o número de sucessos obtidos em n ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p em cada ensaio.

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad Var(X) = np(1-p) \qquad M_X(t) = [pe^t + (1-p)]^n$$

Definição A.34 (Distribuição Geométrica) $X \sim Geo(p), 0 < p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1,2,\cdots$$

X é o número de ensaios necessários para obter o primeiro sucesso quando se realiza uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p em cada ensaio.

A distribuição geométrica apresenta propriedade da falta de memória, que pode ser expressa como:

$$\mathbb{P}(X \geq m+n|X \geq m) = \mathbb{P}(X \geq n) \quad \text{para} \quad m,n = 1,2,\cdots$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2} \qquad M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \qquad t < -log(1-p)$$

A.4.2 Distribuições Contínuas

Definição A.35 (Distribuição Uniforme) $X \sim Unif(a,b), a, b \in \mathbb{R}, a < b$, se tem densidade dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

X representa um ponto escolhido ao acaso no intervalo (a,b)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad M_X(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$$

Definição A.36 (Distribuição Normal) $X \sim Normal(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, se tem densidade dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

A distribuição normal de parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ é conhecida como normal padrão.

$$\mathbb{E}(X) = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2 \qquad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

Definição A.37 (Distribuição Exponencial) $X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$, se tem densidade dada por:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Com a propriedade de ausência de memória,

$$\mathbb{P}(X \geq s+t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t) \quad \text{para} \quad t,s \in \mathbb{R}, \quad s,t \geq 0.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad t < \lambda$$

Definição A.38 (Distribuição Gama) $X \sim Gama(\alpha, \lambda), \alpha > 0, \lambda > 0$, se tem densidade dada por:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

onde a função gama $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por:

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$ e possui as seguintes propriedades:

(i) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0.$

(ii) $\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{para} \quad n \geq 0$ inteiro.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2} \qquad M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha, \quad \text{para} \quad t < \lambda.$$

Definição A.39 (Distribuição Lognormal) $X \sim LogNormal(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ se tem densidade dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\log x - \mu}{\sigma})^2}, \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad Var(X) = e^{2(\mu+\sigma^2)} - e^{2\mu+\sigma^2}$$

A distribuição lognormal não possui função geradora de momentos.

Definição A.40 (Distribuição de Pareto) $X \sim Pareto(k{,}\alpha), k > 0, \alpha > 0$, se tem densidade dada por:

$$f_X(x) = \frac{\alpha k^\alpha}{(k+x)^{\alpha+1}}, \quad 0 < x < \infty$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{k}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1 \qquad Var(X) = \frac{\alpha k^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \quad \alpha > 2$$

A distribuição de Pareto não possui função geradora de momentos.

A.5 Teorema da Probabilidade Total

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{B_i\}_{i\geq 1}$ uma coleção de eventos de Ω,tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ e $B_i \bigcap B_i = \emptyset \quad \forall i, j, \quad i \neq j$. Dado um evento A $\in \Omega$, então $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \bigcap B_i)$.

Referências Bibliográficas

ANDERSEN, S. E. (1957). *On the collective theory of risk in case of contagion between claims*, vol. 2. Transactions of the XVth International Congress of Actuaries. (Citado na pág. 4.)

ASMUSSEN, S. (2000). *Ruin Probabilities*. Singapore: World Scientific Publishing Co. (Citado nas págs. 1, 3, 4, 41 e 48.)

BILLINGSLEY, P. (1995). *Probability and Measure*. Wiley Interscience, 3rd ed. (Citado na pág. 73.)

BRATLEY, P., FOX, B. L. & SHARGE, L. F. (1987). *A Guide to Simulation*. New York: Springer-Verlag. (Citado na pág. 4.)

BUHLMANN, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. New York: Springer-Verlag. (Citado na pág. 1.)

DICKSON, D. C. M., REIS, A. D. E. & WATERS, H. R. (1995). Some stable algorithms in ruin theory and their applications , 153–175. (Citado na pág. 4.)

DURRET, R. (2010). *Probability: Theory and examples*. Cambridge, 4th ed. (Citado na pág. 7.)

EMBRECHTS, P., KLUPPELBERG, C. & MIKOSCH, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer. (Citado nas págs. 1, 3 e 48.)

FELLER, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2. New York: John Wiley and Sons, 3rd ed. (Citado na pág. 14.)

FIGUEIREDO, D. G. & NEVES, A. F. (2005). *Equações diferenciais aplicadas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2nd ed. (Citado na pág. 63.)

GERBER, H. U. & SHIU, E. S. W. (1998). *On the Time Value of Ruin*. North American Actuarial Journal 2:48. (Citado na pág. 4.)

GRIMMETT, G. & STIRZAKER, D. (2001). *Probability and Random Processes*. New York: Oxford University Press, Broch. (Citado na pág. 73.)

IÓRIO, V. (2005). *EDP, um Curso de graduação*. Rio de Janeiro: IMPA, 2nd ed. (Citado na pág. 63.)

JAMES, B. R. (2001). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro: Impa, 3rd ed. (Citado na pág. 7.)

KARLIN, S. & TAYLOR, H. M. (1975). *A first course in Stochastic Processes*. New York: Academic, Inc., 2nd ed. (Citado na pág. 25.)

KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H. & WILLMOT, G. E. (2004). *Loss Models from data to decisions.* John Wiley Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2nd ed. (Citado na pág. 1.)

LEMOS, S. R. R. (2008). *Probabilidade da ruína no mercado de seguros: fundamentos teóricos e alguns resultados.* Dissertação de mestrado UFPE. (Citado na pág. 48.)

MIRANDA, J. C. S. (2006). Infinite horizon non ruin probability for a non homogeneous risk process with time-varying premiuum and interest rates . (Citado nas págs. 1, 4 e 49.)

POWERS, M. R. (1995). *A Theory of risk, return and solvency*, vol. 2. Insurance: Mathematics and Economics 17. (Citado na pág. 4.)

RAMSAY, C. M. (1992). A practical algorithm for aproximating the probability of ruin , 443–461. (Citado na pág. 4.)

RAO, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*, vol. 2. New York: John Wiley, 3rd ed. (Citado nas págs. 13 e 20.)

ROSS, S. (2010). *Introduction to Probability Models.* Elsevier, 10th ed. (Citado na pág. 23.)

ROSS, S. M. (2008). *A first course in probability.* Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 8th ed. (Citado na pág. 73.)

SCHIFF, J. L. (1999). *The Laplace Transform: Theory and Applications.* New York: Springer. (Citado na pág. 15.)

SHIRYAEV, A. N. (1996). *Probability.* New York: Springer, 2nd ed. (Citado nas págs. 7 e 14.)

VERE-JONES, D. & DALEY, D. J. (2002). *An Introduction to the Theory of Point Processes, Elementary theory and methods*, vol. 1. Springer, 2nd ed. (Citado nas págs. 23 e 25.)