Uma abordagem sobre soluções assintóticas de sistemas autônomos tipo-gradiente em variedades

Inocêncio Ferreira Jaime Zimba

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática Aplicada-MAP
Orientador: Prof[a]. Dr[a]. Sônia Regina Leite Garcia

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do INAGBE/Angola

São Paulo, Novembro de 2015

Agradecimentos

Começo por agradecer a Deus todo poderoso pela guarda nessa vida em peregrinos. Aos meus pais Samuel Estevão e Várzea Suzana Jaime, que nunca mediram esforços para garantirem a realização dos meus anseios dando amor, carinho e atenção. Aos meus irmãos, Eufrásio, Alfredo, Eulália, Liseth, Osvaldo, Reginalda, Beatriz, Ricardo e Chamante pelo apoio moral e incentivo incondicional constante ao longo dessa caminhada. À minha esposa Eva Guilherme dos Santos Marcos pelo encorajamento e desafio em encarar minha ausência para que esse objectivo fosse realizado, cuidando dos nossos filhos sem a minha companhia.

Agradeço à minha orientadora Sônia Regina Leite Garcia pela paciência, disponibilidade constante, rigor e atenção incondicional em minha adaptação no Instituto e amadurecimento das falhas, me possibilitando, durante toda a formação, um melhor aprendizado para a conclusão do Mestrado.

Agradeço igualmente aos Professores do IME: Paulo Domingos Cordaro, Daniel Victor Tausk, Frank Michael Forger, Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves, pela preocupação e atenção prestada ao longo de suas aulas para a minha aprendizagem.

Agradeço de um modo especial à colega Daniela Passos Maia Moura, pelo apoio moral constante e partilha de sua sabedoria ao longo da formação.

Agraço aos meus amigos, Bleid, Brito, Nelão, Daca, Guenge, Mbuta, Joaquim, Marcos, Américo, Aniceto, Milton, Ntinani e Estevão pelo encorajamento ao longo dessa formação e aos colegas Valdir, Salvador, André, Zaidan, Marcela, Marcelo, Gerard, Max, Bruna, Belmiro e Anderson pela partilha de conhecimento para o meu melhoramento.

Agradeço de um modo particular ao ISCED- UIGE/Angola, pela aposta na formação que culmina com este trabalho.

Resumo

ZIMBA, I. F. J. **Uma abordagem sobre soluções assintóticas de sistemas autônomos tipo-gradiente em variedades.** 2015. 75 f. Dissertation(Master) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

No presente trabalho apresentamos três resultados sobre Sistemas Tipo-Gradiente, estabelecidos por Tomáš Bárta, Ralph Chill e Eva Fašangová[1] em 2012. No primeiro teorema provamos, que todo sistema autônomo $\dot{u} + F(u) = 0$, tipo-gradiente em variedades diferenciáveis de dimensão finita M é um sistema gradiente num conjunto $\tilde{M} \subset M$ sem pontos de equilíbrio do campo, numa métrica riemanniana apropriada (teorema 2.3.1), uma generalização com abordagem diferente do mesmo resultado dado por Robert. I. McLachlan, G.R.W. Quispel e Nicolas Robidoux[2] em 1998 no $\mathbb{R}^n$. No segundo teorema, a desigualdade gradiente modificada de Kurdyka-Łojasiewics-Simon é utilizada para a obtenção de um resultado de convergência assintótica das soluções de equações diferenciais ordinárias tipo-gradientes, sem a necessidade da hipótese de uma condição angular adicional (quando fora do contexto do teorema 1), uma generalização do resultado apresentado por Chill, Haraux e Jendoubi[3] para estudar o comportamento futuro das soluções globais limitadas no futuro, da equação diferencial tipo-gradiente não linear, $\dot{u} + F(u) = 0$, com F apenas contínua e com a hipótese adicional de que F e a derivada da respectiva função de Lyapunov $\mathcal{E}'$, satisfaçam uma condição angular e tal teorema é aplicado para provar a convergência assintótica de soluções limitadas no futuro de equações diferencias ordinárias de segunda ordem amortecidas.

Palavras-chave: Sistema tipo-gradiente, Desigualdade gradiente modificada de Kurdyka-Lojasiewicz-Simon, Soluções assintóticas e Equações diferencias ordinárias de segunda ordem amortecidas.

[1] Bárta et al. (2012)
[2] McLachlan et al. (1998)
[3] Chill et al. (2009)

Abstract

ZIMBA, I. F. J. **An apprroach on assymptotic solutions of gradient-like autonomous systems in manifolds.** 2015. 75 f. Dissertation (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

In this work we represent three main theorems given by Tomáš Bárta, Ralph Chill and Eva Fašangová[4] in 2012. In the first theorem we proved that, every autonomous gradient-like system, $\dot{u} + F(u) = 0$, in a finite dimensional manifold M is a gradient system on an open subset of non-equilibrium points of the field for an appropriate riemannian metric (theorem 2.3.1), a knew formulation of the same result given since 1998 by Robert. I. McLachlan, G.R.W. Quispel and Nicolas Robidoux, in $\mathbb{R}^n$. In the second theorem we used the Kurdyka-Łojasiewics-Simon adapted gradient inequality to obtain a new asymptotic result for gradient-like ordinary differential equations without an additional angle condition hypotheses (when out of the context given in theorem 2.3.1), a generalization of the result given by Chill, Haraux and Jendoubi, to study convergence to equilibrium of global end bounded solutions of the nonlinear ordinary differential equations $\dot{u}(t) + F(u) = 0$, where F is a continuous functions such that F and the derivative of the respective strict Lyapunov function ε', satisfy an angle condition, and we applied the third theorem to prove convergence result for a damped second order ordinary differential equations.

Keywords: Gradient like system, Kurdyka-Lojasiewicz-Simon modified gradient inequality, Convergence to equilibrium and Damped second order ordinary differential equation.

[4] Bárta et al. (2012)

Sumário

Introdução

Desde 12 de outubro de 1892 - "data da publicação da tese de Doutorado de Alexandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) com o título: **O problema geral da estabilidade de movimento** " Parks (1992) - estudar a convergência assintótica das soluções da equação diferencial autônoma $\dot{u} + F(u) = 0$ para um ponto de equilíbrio u_0, onde F é um campo de vetores C^1 definido numa variedade M de dimensão finita, tornou-se uma tarefa fácil, desde que se consiga encontrar uma função auxiliar ε positiva definida com mínimo em u_0 de classe C^1 que seja decrescente ao longo das trajetórias da mesma, sem a necessidade de conhecer as soluções da equação explicitamente (segundo método ou método direto de Lyapunov). Uma tal função ficou conhecida na literatura como uma função de Lyapunov (para o equilíbrio u_0). Se, além disso, a derivada da função ε ao longo das soluções, excepto em u_0, for estritamente decrescente então as trajetórias da equação cruzam as superfícies de nível $\varepsilon = (c)$ apontando para dentro da região que contém u_0, e consequentemente tendem ao ponto u_0 quando $t \to \infty$. Uma função com com essas propriedades ficou conhecida como função de Lyapunov estrita (para o equilíbrio u_0). Mais tarde o princípio de invariância de La Salle - resultado provado em 1960 por La Salle - possibilitou estudar o comportamento assintótico das soluções de tais equações, utilizando uma função de Lyapunov (não necessariamente estrita). Esses dois resultados possibilitam estimar a bacia de atração dos ponto de equilíbrio assintoticamente estáveis da equação diferencial.

Robert. I. McLachlan, G.R.W. Quispel e Nicolas Robidoux "mostraram que se existe uma função de Lyapunov Morse $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^{r+1} - isto é, uma função de Lyapunov que possui todos os pontos críticos não degenerados- para a equação diferencial $\dot{u} + f(u) = 0, \quad f \in C^r(\mathbb{R}^n)$, então para todo $u \in \tilde{M} = \{x \,|\, \nabla\varepsilon(x) \neq 0\}$ existe uma matriz limitada $L(u)$ de classe C^r tal que a equação diferencial pode ser reescrita na forma $\dot{u} = -L(u)\nabla\varepsilon(u)$ onde $L(u)$ é uma matriz semi-definida negativa se ε for uma função de Lyapunov e definida negativa se ε for uma função de Lyapunov estrita" (McLachlan et al. (1998) e McLachlan et al. (1999)). Nesse contexto, o termo "função de Lyapunov estrita" é utilizado para função auxiliar que decresce ao longo das trajetórias não singulares. Esse resultado se torna valioso, uma vez que dentre as classes de equações diferenciais ordinárias autônomas, os sistemas gradiente definidos numa variedade riemanniana (M, g),

$$\dot{u} = -\nabla_g\varepsilon(u) \tag{1}$$

representam o exemplo padrão de sistemas dissipativos que admitem uma função de Lyapunov estrita (no sentido de que é função auxiliar cuja derivada ao longo das trajetórias não singulares é estritamente negativa) - que é a própria função ε. O princípio de invariância de La Salle garante que, se uma solução u de tal sistema está contido num compacto B, então o conjunto ω-limite é não vazio, compacto, conexo e consiste somente de pontos de equilíbrio, e se o conjunto de pontos de equilíbrio for discreto, então o conjunto ω-limite é um ponto de equilíbrio. Porém, isso não vale se o conjunto de pontos de equilíbrio não for discreto : Palis e De Melo mostraram que existem sistemas gradientes em que o conjunto ω-limite de uma das soluções é um círculo formado de pontos de equilíbrio (Palis and De Melo (2012)), ou seja, que a convergência para um ponto de equilíbrio nem sempre ocorre. Para que a convergência ocorra são necessárias hipóteses adicionais.

Definição 0.0.0.1. *Dizemos que uma função ε satisfaz a desigualdade gradiente de Łojasiewicz, numa vizinhança V de um ponto de equilíbrio $\bar{\varphi}$, se existe $\theta_\varphi \in]0,\ \frac{1}{2}]$ tal que*

$$|\varepsilon(v) - \varepsilon(\varphi)|^{1-\theta_\varphi} \leq \|\nabla\varepsilon(v)\|, \qquad \forall v \in V;$$

dizemos que satisfaz a desigualdade gradiente de Łojasiewicz-Simon se existe $C > 0$, tal que

$$|\varepsilon(v) - \varepsilon(\varphi)|^{1-\theta_\varphi} \leq C\|\varepsilon'(v)\|, \qquad \forall v \in V; \tag{2}$$

e dizemos que satisfaz a desigualdade gradiente de Kurdyka-Łojasiewicz-Simon se existe uma função contínua, crescente e côncava $\Theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ com $1/\Theta \in L^1_{loc}([0, \infty))$ e $\Theta(s) > 0$ para $s > 0$, tal que

$$\Theta(|\varepsilon(v) - \varepsilon(\varphi)|) \leq \|\varepsilon'(v)\|_g, \qquad \forall v \in V. \tag{3}$$

A primeira desigualdade foi utilizada em "1965 por Łojasiewicz para obter a convergência de soluções limitadas do sistema gradiente $\dot{u} = -\nabla\varepsilon(u)$ a um ponto de equilíbrio $\tilde{\varphi} \in \Gamma = \{u \in \mathbb{R}^n,\ \nabla\varepsilon(u) = 0\}$, desde que ε seja analítica. Mostrou ainda que toda função analítica real definida num espaço de dimensão finita satisfaz essa desigualdade em todo pondo do seu domínio" (Chergui (2008)). Logo depois a mesma desigualdade foi utilizada por Haraux e Jendoubi para mostrar o comportamento assintótico de soluções globais e limitadas do problema de segunda ordem " $\ddot{u} + g(\dot{u}) = \nabla E(u)$ " (Haraux and Jendoubi (1998)) e mais tarde Chergui "a utilizou para analisar o comportamento assintótico de soluções globais e limitadas do problema de segunda ordem $\ddot{u}(t) + \|\dot{u}(t)\|\dot{u}(t) + \nabla E(u(t)) = 0$" (Chergui (2008)).

A segunda desigualdade foi utilizada por vários pesquisadores para estudar o comportamento futuro ($t \geq 0$) das soluções limitadas da equação diferencial tipo-gradiente não linear $\dot{u} + F(u) = 0$, com F apenas contínua e com a hipótese adicional de que F e a derivada da respectiva função de Lyapunov ε', satisfaçam uma condição angular. Nessa direção, dentre outros destacam-se os resultados encontrados em Absil et al. (2005), Lageman (2007) e Chill et al. (2009).

Por fim, a terceira foi utilizada por Kurdyka "para provar que as trajetórias do sistema gradiente, têm comprimento finito para ε de classe C^1" (Kurdyka (1998), teorema 2) e posteriormente aplicados nos trabalhos de Bolte et al. (2007) e Bolte et al. (2010) para o mesmo fim.

Nesta dissertação fazemos uma abordagem didática do artigo de Bárta et al. (2012), introduzindo exemplos e noções preliminares que sustentam essa teoria de modo a facilitar a compreensão dos resultados nele expostos e proporcionar suas aplicações em estudos em que este assunto possa ser útil.

Organizção do Trabalho

No Capítulo 1 nos debruçamos sobre conceitos básicos sobre variedades diferenciáveis de dimensão finita. Mais concretamente, definimos variedades diferenciáveis de dimensão finita, aplicação diferenciável entre variedades, Partição da unidade, espaço tangente num ponto da variedade, diferencial de uma aplicação definida numa variedade, fibrados tangente e cotangente, e terminamos com a noção de campo de vetores numa variedade.

No Capítulo 2 estudamos a equação diferencial autônoma (não linear, em geral) $\dot{u} + F(u) = 0$, onde F é um campo de vetores definido numa variedade M de dimensão finita, visando apresentar os principais resultados do artigo Bárta et al. (2012). Introduzimos os conceitos principais sobre variedades riemannianas, sobre equações diferenciais em variedades, apresentamos o conceito de sistema tipo-gradiente conforme encontra-se em (Conley apud Lageman (2007)). Apresentamos e provamos um resultado que afirma que toda equação dessa forma com uma função de lyapunov estrita ε é um sistema gradiente num conjunto $\tilde{M} \subset M$ sem pontos de equilíbrio de F, cujo potencial é própria função de Lyapunov ε, numa métrica riemanniana apropriada (Teorema 2.3.1). Esse resultado é uma extensão dos trabalhos de Robert. I. McLachlan, G.R.W. Quispel e Nicolas Robidoux McLachlan et al. (1998) e McLachlan et al. (1999) no $\mathbb{R}^n$ e aqui o abordamos em variedades, mas de forma diferente. Apresentamos também uma condição suficiente e necessária para equivalência entre as métricas envolvidas no Teorema 2.3.1 com base em uma condição angular (CA) - que é automaticamente satisfeita para sistemas gradientes - e outra condição de comparabilidade (C) entre ε' e F (Teorema 2.3.2), e por essa razão, utilizamos a desigualdade gradiente modificada de Kurdyka-Łojasiewics-Simon definida em Bárta et al. (2012):

$$\Theta(|\varepsilon(v) - \varepsilon(\varphi)|) \leq \left\langle \varepsilon'(v), \frac{F(v)}{||F(v)||_g} \right\rangle \tag{4}$$

numa vizinhança de um determinado ponto de equilíbrio φ, onde Θ é tal como na desigualdade de Kurdyka-Łojasiewics-Simon (3) e com ela apresentamos um resultado sobre a convergência de soluções limitadas no futuro para um ponto de equilíbrio (Teorema 2.3.3). Como aplicação do Teorema 2.3.3, fizemos a interpretação do resultado de convergência dado por Chergui (2008) (teorema 2.3.4) e terminamos com algumas observações sobre os resultados. Acrescentamos, no decorrer do Capítulo 2, diversos exemplos ilustrativos para facilitar o entendimento do conteúdo.

Capítulo 1

Preliminares sobre Variedades Diferenciáveis

Este capítulo tem como objectivo, apresentar uma abordagem resumida dos resultados que servem de base para a compreensão do principal assunto do trabalho desenvolvido no capítulo 2. Definimos variedade diferenciável de dimensão finita, aplicações diferenciáveis entre variedades, Partição da unidade, planos tangente e cotangente numa variedade, diferencial de uma aplicação definida numa variedade, fibrados tangente e cotangente e terminamos com a noção de campo de vetores em variedades. Alguns resultados admitidos sem prova podem ser encontrados nos livros de Tu (2011), Lee (2013) e Lima (1973).

1.1 Variedades Diferenciáveis

Uma variedade diferenciável de classe C^∞ é um espaço topológico Hausdorff, localmente euclideano (isto é, localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para algum n), com uma estrutura diferenciável herdada do $\mathbb{R}^n$. Nesta seção formalizamos essa noção, começando por introduzir a definição de espaço topológico, Hausdorff e algumas propriedades que levam à definição de variedade diferenciável.

Seja X um conjunto não vazio. Uma topologia em X é uma coleção $\mathfrak{I}$ de subconjuntos não vazios de X, denominados abertos da topologia, tal que:

1. $\emptyset$ e X pertencem a $\mathfrak{I}$.

2. Se $U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{I}$ então $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathfrak{I}$.

3. Dada uma família arbitrária $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ com $U_\lambda \in \mathfrak{I}$ tem-se $\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda \in \mathfrak{I}$.

Entre as topologias num conjunto X, destacamos a **topologia caótica** (notação $\mathfrak{I}_c$), aquela que possui o menor número de abertos, dada por $\mathfrak{I}_c = \{\emptyset, X\}$ que por sua vez, está contida em qualquer topologia de X e a **topologia discreta** (notação $\mathfrak{I}_d$), aquela em que $\mathfrak{I}_d$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X. Essa topologia é a que possui o maior número de abertos e contém qualquer outra topologia de X, nela "todo ponto de X é um aberto", isto é, todo subconjunto unitário de X é aberto. Chama-se espaço topológico ao par $(X, \mathfrak{I})$, que denotamos apenas por X quando não houver perigo de confusão. Uma vizinhança aberta de um ponto $p \in X$ é qualquer aberto U de X tal que $p \in U$. Um subconjunto $F \subset X$ é fechado, se é complementar de um aberto U de X, isto é, se $F = X \backslash U$, onde U é aberto.

Um espaço topológico X diz-se metrizável se nele é possível definir uma métrica d tal que os abertos definidos por d coincidem com os abertos da topologia em X.

Dado um subconjunto A do espaço topológico X, uma cobertura aberta de A em X é uma coleção $\{U_\lambda\}$ de abertos de X tal que $A \subset \bigcup_\lambda U_\lambda$. Uma subcobertura de uma cobertura é uma sub-coleção cuja união ainda contém A. O subconjunto A é compacto em X se toda cobertura aberta de A em X possui sub-cobertura finita.

Seja $(X, \mathfrak{I})$ um espaço topológico e $N \subset X$ um subconjunto de X. A coleção de subconjuntos $\mathfrak{I}_N$ definida por $\mathfrak{I}_N = \{N \cap U \mid U \in \mathfrak{I}\}$ é uma topologia em N, pois satisfaz as condições 1, 2 e 3 da definição de topologia. Com efeito, usando as leis de D'Morgan temos:

✓ $\emptyset \cap N = \emptyset \in \mathfrak{I}_N \quad e \quad X \cap N = N \in \mathfrak{I}_N$.

✓ $\bigcup_{\lambda \in L} (U_\lambda \cap N) = (\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda) \cap N = V \cap N \in \mathfrak{I}$ onde $V = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$,

✓ $\bigcap_{\lambda=1}^n (U_\lambda \cap N) = (\bigcap_{\lambda=1}^n U_\lambda) \cap N = W \cap N \in \mathfrak{I}_N$ onde $W = \bigcap_{\lambda=1}^n U_\lambda$,

o que mostra que $\mathfrak{I}_N$ é uma topologia em N, chamada topologia induzida por $\mathfrak{I}$ em N.

Um espaço topológico X é desconexo se é união disjunta de dois de seus subconjuntos abertos não vazios, e é conexo se não for desconexo. Um subconjunto A de X é desconexo se o for como subespaço topológico.

Uma coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos abertos de X é uma base de abertos para a topologia de X se:

a) X se escreve como reunião dos elementos de $\mathfrak{B}$.

b) Dados dois quaisquer conjuntos abertos B_1 e B_2 com $p \in B_1 \cap B_2$, existe um conjunto $B \in \mathfrak{B}$ tal que $p \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Dados dois espaços topológicos $(X, \mathfrak{I}_X)$ e $(Y, \mathfrak{I}_Y)$, Definimos a topologia produto em $X \times Y$, como sendo a topologia cuja a base de abertos é a coleção

$$\mathfrak{B} = \{U \times V : U \in \mathfrak{I}_X \ \ e \ \ V \in \mathfrak{I}_Y\}$$

Tal que:

1) Se $X \in \mathfrak{I}_X$, $Y \in \mathfrak{I}_Y$, tem-se $X \times Y \in \mathfrak{B}$.

2) E se $U_1 \times V_1$, $U_2 \times V_2 \in \mathfrak{B}$ então $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) := (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathfrak{B}$

produto ao espaço $(X \times Y, \mathfrak{I}_{X \times Y})$ uma base para o produto cartesiano $X \times Y$, é uma coleção $\mathfrak{B}$ de abertos do produto cartesiano $X \times Y$ da forma $U \times V$, onde U é um aberto de X e V é um aberto de Y tal que se $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$ estão em $\mathfrak{B}$, então .

Um espaço topológico $(X, \mathfrak{I})$ diz-se Hausdorff, se dados dois pontos distintos quaisquer em X, existem dois abertos disjuntos U e V, cada um contendo um deles. Isto é, se dados $x, y \in X$ existem abertos $U, V \in \mathfrak{I}$, com $x \in U$ e $y \in V$ tais que $U \cap V = \emptyset$.

Um espaço topológico satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade se possui uma base enumerável de abertos.

Dados dois espaços topológicos X e Y, dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é continua, se a imagem inversa de qualquer aberto V de Y é um aberto de X. Mais Precisamente, f é contínua se $f^{-1}(V)$ é aberto em X, para todo V aberto de Y. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, se é contínua e bijetora com inversa contínua.

Um sistema de coordenadas locais num espaço topológico M é um homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, onde U é aberto de M e $\varphi(U)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.0.2. *Um espaço topológico é localmente euclideano de dimensão n (ou localmente $\mathbb{R}^n$) se, para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança aberta U de p em M e um sistema de coordenadas $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Ao par $(U, \varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n)$, que será abreviado por $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ (usando x^i para designar as funções coordenadas φ^i de φ), denomina-se carta em M no ponto p, U denomina-se vizinhança (aberta) coordenada de p e φ denomina-se sistema de coordenadas em U. Um espaço topológico que é Hausdorff, satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade e é localmente euclideano de dimensão n, chama-se* ***Variedade topológica de dimensão*** *n.*

Ao longo do texto usamos a nomenclatura **sistema de coordenadas (ou carta) sobre** $p \in U$ quando $\varphi(p) = 0$ e caso contrário, dizemos **sistema de coordenadas, ou cartas, em (ou em torno de)** p, e toda variedade topológica considerada será uma Variedade topológica de dimensão n

Definição 1.1.0.3. *Duas cartas $(U, \varphi : U \longrightarrow \varphi(U))$ e $(V, \psi : V \longrightarrow \psi(V))$ numa variedade topológica M são C^∞-compatíveis, se suas funções de transição (isto é, funções de transição entre as cartas) $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ e $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$ são difeomorfismos de classe C^∞ (isto é, cada uma é bijectora de classe C^∞ com inversa de classe C^∞ como funções definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$). Essa definição é análoga para o caso correspondente de compatibilidade em classe C^k com $0 \leq k < \infty$, observando que no caso $k = 0$, tais funções de transição são apenas Homeomorfismos no $\mathbb{R}^n$.*

Observação 1. *Usaremos a convenção de que a função vazia (aquela cujo domínio é $\emptyset$) é um difeomorfismo de classe C^∞. Assim, se $U \cap V = \emptyset$ consideramos automaticamente que as cartas na* *definição 1.1.0.3 são C^∞-compatíveis. Uma vez que $\psi\circ\varphi^{-1}$ é um difeomorfismo e $(\psi\circ\varphi^{-1})^{-1} = \varphi\circ\psi^{-1}$ é suficiente considerar apenas uma das funções de transição na definição de compatibilidade de cartas.*

Apesar da relação de compatibilidade de classe C^∞ da definição 1.1.0.3 ser uma relação reflexiva e simétrica, ela não é transitiva. Com efeito, suponha que a carta (U_1, φ_1) é C^∞-compatível com a carta (U_2, φ_2) e essa C^∞-compatível com a carta (U_3, φ_3). Observemos que a compatibilidade de classe C^∞ da função de transição $\varphi_3\circ\varphi_1^{-1} = \varphi_3\circ\varphi_2^{-1}\circ\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ só é garantida em $\varphi_1(U_1\cap U_2\cap U_3)$. Porém, não se sabe nada sobre a definição de $\varphi_3\circ\varphi_1^{-1}$ em $\varphi_1(U_1\cap U_3 - U_1\cap U_2\cap U_3)$. Portanto nada se pode concluir sobre Compatibilidade de classe C^∞ das cartas (U_1, φ_1) e (U_3, φ_3).

Definição 1.1.0.4. *Um atlas de classe C^∞ numa Variedade Topológica M é uma coleção $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ de cartas C^∞-compatíveis tal que $M = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$.*

Lema 1.1.1 (Tu (2011), lema 5.8, página 51.)**.** *Seja $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ um atlas de classe C^∞ numa variedade topológica M. Se duas cartas (V, ϕ) e (W, ψ) são ambas compatíveis com o atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ então elas são C^∞-compatível entre si.*

Um atlas $\mathcal{A}$ de classe C^∞ numa variedade topológica M chama-se maximal, se dado qualquer outro atlas $\mathcal{B}$ de classe C^∞ em M que o contém, tem-se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Isto é, se $\mathcal{A}$ não está propriamente contido em nenhum atlas de classe C^∞ em M. Assim, pelo lema 1.1.1, qualquer carta C^∞-compatível com alguma carta de um atlas maximal $\mathcal{A}$ pertence ao atlas. Por esta razão um atlas maximal é também denominado atlas completo.

Definição 1.1.0.5. *Uma estrutura diferenciável de classe C^∞ (ou simplesmente estrutura C^∞) numa Variedade topológica M é um atlas maximal de classe C^∞ em M.*

Proposição 1.1.1 (Lee (2013), proposição 1.17, página 13)**.** *seja M uma variedade topológica.*

a) Todo atlas $\mathcal{A}$ de classe C^∞ em M está contido num único atlas maximal C^∞, chamado estrutura diferenciável determinada por $\mathcal{A}$.

b) Dois atlas C^∞ em M determinam a mesma estrutura C^∞, se e somente se a união deles é um atlas C^∞.

Definição 1.1.0.6. *Uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n é um par $(M, \mathcal{A})$ onde M é uma variedade topológica de dimensão n e $\mathcal{A}$ é uma estrutura diferenciável de classe C^∞.*

Nas seções seguintes usamos o termo **Variedade diferenciável** para significar variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n, que será simplesmente denotada por M (ou por M^n caso seja necessária a distinção). Usamos também o termo **estrutura diferenciável** para significar estrutura diferenciável de classe C^∞. Dizemos que uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{A})$ é compacta (respectivamente conexa) se o espaço topológico M é compacto (respectivamente conexo).

1.2 Aplicações Diferenciáveis entre Variedades

Empregaremos, em geral, o termo função para aplicações cujo contradomínio ou co-domínio é $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 1$ e reservamos o termo aplicação para aquelas definidas entre variedades mais gerais. Denotamos por $C^\infty(M, p)$ o conjunto das funções C^∞ definidas numa vizinhança de p em M à valores reais.

Definição 1.2.0.7. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis (cujos expoentes denotam suas dimensões). Dizemos que uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é de classe C^∞ no ponto $p \in M$, se existem cartas (U, φ) em M^m e (V, ψ) em N^n com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tal que a função $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$, representante de f com relação as cartas (U, φ) e (V, ψ), é de classe C^∞ em p. Dizemos que f é de classe C^∞ em M se o for em todo o ponto $p \in M$.*

Analogamente, define-se aplicação de classe C^k num ponto p, e aplicação de classe C^k em M.

Essa definição independe da escolha das cartas, isto é, dadas quaisquer outras cartas (U_1, φ_1) no atlas maximal de M^m e (V_1, ψ_1) no atlas maximal de N^n com $p \in U_1$ e $f(U_1) \subset V_1$ tem-se $p \in U \cap U_1$ e

$$f_{\varphi_1\psi_1}|_{\varphi_1(U\cap U_1)} = (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1}) : \varphi_1(U \cap U_1) \longrightarrow \psi_1(V \cap V_1)$$

que é de classe C^∞.

Observemos que quando $N = \mathbb{R}^n$, o sistema de coordenada $\psi : V \to \psi(V)$ pode ser substituída pela função identidade $Id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e a representante de f é dada simplesmente por $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Já no caso em que $M = \mathbb{R}^m$ pode-se substituir o sistema de coordenadas $\varphi : U \to \varphi(U)$ pela função identidade $Id : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e a representante de f é dada por $\psi \circ f|_U : U \longrightarrow \psi(V)$.

Sejam M^m, N^n e Q^r variedades diferenciáveis. A composta de duas aplicações $f : M \longrightarrow N$ e $h : N \longrightarrow Q$, ambas diferenciáveis de classe C^∞, é uma aplicação diferenciável de classe C^∞.

Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é chamada de difeomorfismo se ela for bijetora, diferenciável e com inversa $f^{-1} : N \longrightarrow M$ diferenciável. Dizemos que uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo local se dado $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M com $f(U)$ aberto de N tal que $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ é um difeomorfismo. Caso f e f^{-1} sejam de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$, dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k.

Sejam $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta em M no ponto p, Id a função identidade em $\mathbb{R}^n$ e $Id_{\varphi(U)}$ a identidade em $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. As funções dadas pelas composições

$$Id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = Id|_{\varphi(U)} : \varphi(U) \longrightarrow \varphi(U) \ \ e \ \ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ Id_{\varphi(U)}{}^{-1} = Id|_{\varphi(U)} : \varphi(U) \longrightarrow \varphi(U)$$

são de classe C^∞. O que resulta pela definição de diferenciabilidade que φ e φ^{-1} são de classe C^∞, portanto φ é um difeomorfismo de classe C^∞.

Proposição 1.2.1 (Tu (2011), Proposição 6.11, Pág. 63). *Seja U um subconjunto aberto de uma variedade M. Se $F : U \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe $C^\propto$ sobre sua imagem, então (U, F) é um sistema de coordenadas no atlas de M.*

1.3 Partição da Unidade

Definição 1.3.0.8. *O suporte de uma função de classe C^∞, $f : M \to \mathbb{R}$ é o complementar do maior aberto de M na qual f se anula identicamente. Isto é:*

$$suppf = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

Definição 1.3.0.9. *Uma partição da unidade C^∞ numa variedade M é uma coleção de funções $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que*

(i) a coleção de suportes $\{supp\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é localmente finita,

b) $\sum \psi_\alpha(p) = 1$ para todo o $p \in M$.

Dada uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M, dizemos que uma partição da unidade $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é subordinada a cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se $supp\psi_\alpha \subset U_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.

Teorema 1.3.1 (Existência de uma partição da unidade). *Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de uma variedade M.*

(i) Então existe uma partição da unidade $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ de classe C^∞ com suporte compacto (isto é, com $supp\psi_k$ compacto, para todo k), tal que para cada k, $supp\psi_k \subset U_\alpha$ para algum $\alpha \in A$.

(ii) Se não exigirmos suporte compacto, então existe uma partição de unidade C^∞ $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ de classe C^∞ subordinada a $\{U_\alpha\}$.

O teorema anterior permite mostrar o seguinte resultado:

Proposição 1.3.1. *[Extensão C^∞ de uma função (Tu, Proposição 13.3 pag. 130)] Suponha que f é uma função de classe C^∞ definida numa vizinhança U de q em M. Então existe uma função $\tilde{f}$ em M, de classe C^∞, tal que $f = \tilde{f}$ numa vizinhança de q.*

1.4 Espaço Tangente e Diferencial de uma Aplicação

Queremos definir diferencial de funções definidas em variedades diferenciáveis, e pretendemos, tal como no $\mathbb{R}^n$, que a diferencial de uma função num ponto da variedade seja uma aplicação linear, para tal, é necessário que seja definida num espaço vetorial (o espaço tangente).

1.4.1 Espaço Tangente

Definição 1.4.1.1. *Definimos o espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ num ponto $p \in \mathbb{R}^n$ como sendo o espaço vetorial*

$$T_p\mathbb{R}^n = \{(p, v_p) : v_p \in \mathbb{R}^n \}$$

com a adição e multiplicação por escalar definidas por

$$(p, u_p) + (p, v_p) := (p, u_p + v_p) \quad e \quad c(p, v_p) := (p, cv_p).$$

Usaremos a notação v_p para representar o vetor (p, v_p) quando o ponto p não precisar estar explícito, e apenas v se enfatizarmos que é vetor tangente em p.

Com a notação simplificada acima, escreveremos, muitas vezes,

$$u_p + v_p \quad e \quad cv_p$$

em vez de

$$(p, u_p) + (p, v_p) \quad e \quad c(p, v_p).$$

Isto justifica escrever $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Com essa noção, o espaço tangente a uma superfície $S^m \subset \mathbb{R}^n$ num ponto $p \in S$ é definido como o subespaço $T_pS \subset T_p\mathbb{R}^n$ de todos os vetores $v \in T_p\mathbb{R}^n$ que são vetores velocidades em p de curvas parametrizadas C^1 contidas na superfície S que passam por p. Todavia, se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ definida num aberto $U \subset R^n$ contendo p, e v um vetor tangente a $\mathbb{R}^n$ em p, a derivada direcional de f em p na direção de v é definida por

$$D_v\Big|_p f = \frac{d}{dt}f(p + tv_p)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} v^i_p \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} v^i_p \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f.$$

Portanto,

$$D_v\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} v^i_p \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

Seja $p \in \mathbb{R}$ fixado. Denotemos por $C^\infty(\mathbb{R}^n, p)$ o conjunto das funções definidas em vizinhanças de p. Dizemos que duas funções $f : U \to \mathbb{R}$ e $g : V \to \mathbb{R}$ são equivalentes (notação $f \sim g$) em $C^\infty(\mathbb{R}^n, p)$ se existe uma vizinhança W de p com $W \subset U \cap V$, tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in W$. Um germe de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, p)$, é a classe de equivalência de f pela relação $(\sim)$. Isto é, o conjunto $[f] = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, p) : f \sim g\}$. O conjunto de todos os germes C^∞ no ponto p é o conjunto $C^\infty_p(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n, p)/\!\sim\; = \{[f]; f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, p)\}$. O conjunto dos germes $C^\infty_p(\mathbb{R}^n)$ é um anel com as operações de adição e multiplicação de funções e um espaço vetorial real com a multiplicação por um número real, definidas por:

$[f] + [g] = [f + g]$ para todo $[f], [g] \in C^k_p(\mathbb{R}^n)$,

$[f].[g] = [f.g]$ para todo $[f], [g] \in C^k_p(\mathbb{R}^n)$,

$\lambda[f] = [\lambda f]$ para todo $[f] \in C^k_p(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Logo, $C^k_p(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Como a interseção infinita de vizinhanças de p em $\mathbb{R}^n$ se reduz ao ponto p só faz sentido falar do valor de $[f] \in C^k_p(\mathbb{R}^n)$ em p (que definimos por $[f](p) := f(p)$) deixando de fazer sentido o valor de $[f] \in C^k_p(\mathbb{R}^n)$ num ponto $q \neq p$

Dado um vetor tangente v num ponto p do $\mathbb{R}^n$, a derivada direcional em p na direção de v permite definir uma aplicação $D_v\Big|_p : C^\infty_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow R$ que é $\mathbb{R}$-linear e satisfaz a regra de Leibniz

$$D_v\Big|_p([f] \cdot [g]) = \left(D_v\Big|_p[f]\right) \cdot g(p) + f(p) \cdot \left(D_v\Big|_p[g]\right) \tag{1.1}$$

Uma derivação linear é qualquer aplicação linear $D : C^\infty_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow R$ que satisfaz a regra de Leibniz (1.1). Denotamos o conjunto de todas as derivações lineares num ponto p do $\mathbb{R}^n$ por $D_p\mathbb{R}^n$, que é um espaço vetorial real com a adição de derivações e multiplicação de derivações por um número real.

A derivação linear do germe de uma função constante é igual a zero. Com efeito, dada uma derivação linear D num ponto p temos

$$D[c] = cD[1] = cD[1.1] = c(D[1].1 + 1.D[1]) = 2cD[1] = 2D[c] \Longrightarrow D[c] = 0.$$

Proposição 1.4.1 (Tu (2011), Teorema 2.2, Página 13.). *A aplicação $H : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow D_p\mathbb{R}^n$ definida por*

$v_p \mapsto D_{v_p}\Big|_p = \sum_{i=1}^n v^i_p \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ *é um isomorfismo entre espaços vetoriais.*

Com esse resultado, os vetores tangentes num ponto p de $\mathbb{R}^n$, são vistos como derivações lineares em p. Por ser um isomorfismo, H leva a base canônica $(e_1, \ldots, e_n)$ de $T_p\mathbb{R}^n$ em $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right)$, que por sua vez é base de $T_p\mathbb{R}^n$ quando olhado como o espaço das derivações, pois $\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p = D_{e_i}\Big|_p$.

Passamos essa abordagem para variedades diferenciáveis.

Seja M uma variedade diferenciável. Como no caso de $\mathbb{R}^n$, podemos definir germes de funções C^∞ num ponto p de M.

Denotamos por $C^\infty_p(M)$ o conjunto dos germes de funções C^∞ em p. Uma derivação linear num ponto $p \in M$ é qualquer aplicação linear $\ell : C^\infty_p(M) \longrightarrow R$ que satisfaz a regra de Leibniz 1.1. Chamamos de espaço tangente M no ponto p, ao conjunto das derivações lineares em p, denotado por T_pM. Isto é,

$$T_pM = \{\ell : \ \ell \text{ é uma derivação linear em p} \in M\}. \tag{1.2}$$

Com a adição usual e multiplicação por um número real, T_pM é um espaço vetorial real. Observe que dada uma vizinhança aberta U de $p \in M$, tem-se $C^\infty_p(U) = C^\infty_p(M)$ (devido à proposição 1.3.1), logo $T_pU = T_pM$.

Definição 1.4.1.2. *Um covetor num ponto p de uma variedade diferenciável M, é um funcional* *linear $\omega_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$. O espaço cotangente de M em p é o espaço T^*_pM dual de T_pM. Isto é*

$$T^*_pM = (T_pM)^* = \{\omega_p : \ \omega_p \text{ é um covetor em } p\}. \tag{1.3}$$

1.4.2 Diferencial de uma Aplicação entre variedades

Seja $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação C^∞ entre variedades diferenciáveis. A diferencial de F em $p \in M$ é a aplicação linear $d_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ definida por

$$\Big(d_pF(X_p)\Big)[f] := X_p(f \circ F), \text{ para todo } X_p \in T_pM \ \ e \ \ [f] \in C^\infty_{F(p)}(N).$$

Lema 1.4.1. *[Algumas Propriedades da Diferencial num ponto]*
Sejam $F : M \longrightarrow N, \ G : N \longrightarrow Q$ aplicações de classe C^∞ e $p \in M$. Tem-se:

1. *(regra da cadeia): $d_p(G \circ F) = d_{F(p)}G \circ d_pF : T_pM \longrightarrow T_{G\circ F(p)}Q$.*
2. *(diferencial da identidade): $d_p(Id_M) = Id_{T_pM} : T_pM \longrightarrow T_pM$.*
3. *se $F : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo então $d_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ é um isomorfismo.*

Dada uma carta $(U, \varphi) = (U, x^1, \ \dots \ , x^n)$ numa variedade diferenciável M^n em p, fazendo um abuso, pode-se denotar por $(x^1, \dots, x^n)$ as coordenadas padrão de $\mathbb{R}^n$ e por $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a projeção na i-ésima coordenada, e a i-ésima função coordenada da carta passa as ser dada por $x^i = x^i \circ \varphi$. Dada uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞, definimos a i-ésima derivada parcial de f no ponto p como sendo a i-ésima derivada parcial da representante de f no ponto $\varphi(p)$. Isto é

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \ \circ \ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)). \tag{1.4}$$

Observação 2.

a) *Tomando $f = x^j$ tem-se $\frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(x^j \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) := \delta^j_i$.*

b) *Da expressão (1.4), tem-se $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = \left(d_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)})\right) f$.*

Portanto o vetor derivada parcial em M é uma derivação linear em p dada por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p := d_{\varphi(p)}\varphi^{-1} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}. \tag{1.5}$$

O espaço tangente a uma variedade M^n tem dimensão n. Com efeito, dada uma carta (U, φ) numa variedade diferenciável M^n em p, como $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ é um difeomorfismo C^∞, sua diferencial $d_p\varphi : T_pU \longrightarrow T_{\varphi(p)}\varphi(U)$ é um isomorfismo. Por outro lado, U é aberto de M e $\varphi(U)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, logo $T_pU = T_pM$ e $T_{\varphi(p)}\varphi(U) = T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$, resulta que $d_p\varphi : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ é isomorfismo e leva o conjunto $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$ de T_pM na base $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\varphi(p)}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{\varphi(p)}\right\}$ de $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. Portanto, $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$ é uma base de T_pM.

Sejam $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação C^∞ entre variedades de dimensão n, $(U,\varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ uma carta em M no ponto p e $(V,\psi) = (V, y^1, \ldots, y^n)$ uma carta em N no ponto $F(p)$. A diferencial $d_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ com respeito as bases $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right\}$ de T_pM e $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{F(p)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_{F(p)}\right\}$ de $T_{F(p)}N$ é dada por

$$d_pF\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \sum_{k=1}^n a_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

onde $\left[\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\right] = \left[a_i^j(p)\right]$ é a matriz jacobiana de F no ponto p (isto é, a matriz que representa d_pF nas respectivas bases) e $F^j = y^j \circ F$ é a j-ésima função coordenada de F. Ao determinante $det\left[\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\right]$, denomina-se o jacobiano de F, também representado por $\frac{\partial(F^1,\ldots,F^n)}{\partial(x^1,\ldots,x^n)}$.

Dadas duas cartas $(U,\varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ e $(W,\psi) = (W, y^1, \ldots, y^n)$ numa variedade M^n no ponto p, em cada ponto $q \in U \cap W$ temos $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_q\}_{i=1}^n$ e $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\big|_q\}_{j=1}^n$ bases de T_qM, logo existe uma matriz $\left[b_i^j(q)\right]$, chamada matriz de mudança de base definida em $U \cap W$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q = \sum_{k=1}^n b_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_q. \tag{1.7}$$

Para um sistema de coordenadas $(U, x^1, \cdots, x^n)$ de M em p, consideremos $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como a função projeção na i-ésima coordenada. Para cada $p \in M$ a diferencial d_px^i da i-ésima função componente
$x^i : U \to \mathbb{R}$ (onde $x^i = x^i \circ \varphi$, $1 \le i \le n$) em p é o funcional linear tal que aplicado num vetor da base $\{\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p\}_{j\in I}$ tem-se

$$d_px^i(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p) = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p(x^i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

ou seja, $\{d_px^i, \cdots, d_px^n\}$ é a base dual de $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_p\right\}$. Destarte, toda 1-forma $\omega \in U$ é uma combinação linear

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx^i \quad com \;\; a_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{1.8}$$

Teorema 1.4.1 (Teorema da função inversa em variedades (Tu (2011)))**.** *Seja M^n uma variedade diferenciável, p um ponto em M e $f : W \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^∞ definida numa vizinhança W de p. Suponha que relativo a algum sistema de coordenada $(U,\varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ em p, tem-se $det\left[\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\right] \neq 0$. Então existe um vizinhança V de p na qual f é um difeomorfismo sobre sua imagem. Além disso, (V, f) é um sistema se coordenada na estrutura diferenciável de M.*

Sejam M e N variedades, ambas de dimensão n. Uma aplicação $F : M \to N$ é localmente inversível se para todo ponto $p \in M$ existem vizinhanças abertas V_p de p e $W_{f(p)}$ de $f(p)$ tais que a induzida $F|_{V_p} : V_p \to W_{F(p)}$ é inversível. Resulta do teorema 1.4.1 que uma aplicação $F : M \to N$ de classe C^∞ é localmente inversível se para todo $p \in M$ a diferencial $d_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ é um isomorfismo, e nesse caso, se $G : W_{f(p)} \to V_p$ é a inversa local de F (isto é, é a inversa de $f|_{V_p} : V_p \to W_{F(p)}$), então G é de classe C^∞ e para cada $q \in V_p$ tem-se $d_{F(q)}G = (d_qF)^{-1}$.

Um subconjunto S de uma variedade diferenciável M de dimensão n é uma subvariedade regular de dimensão k se para todo $p \in S$ existe uma carta $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ em p no atlas de M tal que $U \cap S$ é definida pelo anulamento das últimas $n-k$ funções coordenadas de φ. Neste caso a carta (U, φ) de M denomina-se carta adaptada relativa a S e em $U \cap S$ tem-se $\varphi = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$. Logo, $(U \cap S, \varphi_s) = (U \cap S, x^1, \ldots, x^k)$ é uma carta de S em p e $n-k$ é a codimensão de S.

Proposição 1.4.2 (Tu (2011), Proposição 9.8, Pag 93)**.** *Seja S uma subvariedade regular de M e $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ uma coleção de cartas compatíveis adaptadas de M que cobre S. Então $\{(U \cap S, \varphi_S)\}$ é um atlas para S. Mais precisamente, uma subvariedade regular é em sí uma variedade diferenciável tal que se M tem dimensão n e S é localmente definida pelo anulamento das últimas $n-k$ coordenadas, então $\dim S = k$.*

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável numa variedade M e $(U, x^1, \ldots, x^n)$ uma carta de M em p. O ponto p é dito um ponto regular de f se $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \neq 0$ para algum i e é dito um ponto crítico de f se $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Como é usual, para $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(c)$ denotará o conjunto de nível c de f, isto é, o subconjunto de M definido por $f^{-1}(\{c\}) = \{p \in M \ : \ f(p) = c\}$. Em particular, o conjunto de nível $Z(f) = f^{-1}(0)$ é o conjunto de zeros de f. Um valor $c \in \mathbb{R}$ diz-se um valor regular de f se todos os pontos de $f^{-1}(c)$ são regulares, e se c for um valor regular de f, seu conjunto de nível $f^{-1}(c)$ é dito um conjunto de nível regular.

Seja $c = 0$ um valor regular de $f : M \to \mathbb{R}$ e $p \in S = f^{-1}(c)$. Como p é um ponto regular, usando a carta $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de M em p temos $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \neq 0$ para algum i. Supomos sem perda de generalidade que $\frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \neq 0$ e seja $F : U \to \mathbb{R}^n$ a função definida por $F(p) = \left(x^1(p), \ldots, x^{n-1}(p),\ f\left(x^1(p), \ldots, x^n(p)\right)\right)$, cuja a matriz jacobiana é

$$J(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x^2}(p) & \ldots\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}$$

e cujo Jacobiano é $det(J(F)) = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \neq 0$. Pelo teorema da função inversa existe uma vizinhança U_p de p na qual $(U_p, x^1, \ldots, x^{n-1}, f)$ é uma carta de M em p. Relativa a essa carta, o conjunto $U_p \cap S$ é definido pondo $f = 0$. Logo, $(U_p, x^1, \ldots, x^{n-1}, f)$ é uma carta adaptada relativa a S. Portanto S é uma subvariedade de M de dimensão $n-1$.

Definição 1.4.2.1. *Uma curva regular numa variedade diferenciável M^n é uma função $u : I \longrightarrow M$ de classe C^∞, onde I é um intervalo aberto.*

Dado $t_0 \in I$, o vetor velocidade da curva u em t_0 é definido por

$$\dot{u}(t_0) = d_{t_0} u \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \right) \in T_{u(t_0)} M$$

.
No caso em que $M = \mathbb{R}$, denotamos a derivada de u em t_0 por $u'(t_0)$.

Dado um sistema de coordenadas $(U, x^1, \ \ldots, \ x^n)$ em torno de uma curva u definida em I, representamos a curva u em termos de suas funções coordenadas por $u^i(t) = x^i(u(t))$, isto é, $u(t) = (u^1(t), \ \ldots, \ u^n(t))$. Sua derivada é dada por

$$\dot{u}(t) = \sum_{i=1}^{n} u^{i\prime}(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{u(t)} \in T_{u(t)}M \tag{1.9}$$

onde $\dot{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u}^1(t) \\ . \\ . \\ . \\ \dot{u}^n(t) \end{bmatrix}$ na base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{u(t)}\}_{i=1}^{n}$.

Proposição 1.4.3 (Tu (2011), Proposição 8.16, página 94)**.** *Para qualquer ponto p de uma variedade M e qualquer vetor $X_p \in T_pM$, existem $\epsilon > 0$ e uma curva regular $u : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ tal que $u(0) = p$ e $\dot{u}(0) = X_p$.*

Seja $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação C^∞ entre variedades, $p \in M$ e $X_p \in T_pM$. Se u é uma curva regular em M tal que $u(0) = p$ e $\dot{u}(0) = X_p$, a diferencial de F em p aplicada em X_p é dada por $d_pF(X_p) = d_pF(\dot{u}(0)) = d_{u(0)}F \cdot d_0u\left(\frac{d}{dt}\big|_0\right) = d_0(F \circ u)\left(\frac{d}{dt}\big|_0\right) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(F \circ u)$. Portanto

$$d_pF(X_p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(F \circ u).$$

1.5 Fibrados Tangente e Cotangente

Sabemos que em cada ponto p de uma variedade diferenciável M, existe um único espaço vetorial tangente a M em p,T_pM, cujos vetores são denotados por v ou por (p, v) para explicitar o ponto $p \in M$ no qual v é tangente. Ressaltamos que se $p, q \in M$ e $q \neq p$ então T_pM e T_qM são disjuntos, como deixa claro a notação em que usa o ponto de tangência.

Chamamos respectivamente de fibrado tangente (TM) e fibrado cotagente (T^*M) de M aos conjuntos

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM, \qquad T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M \tag{1.10}$$

munidos de uma projeção natural (que não depende da escolha da carta nem do atlas) $\pi : TM \longrightarrow M$ definida por $\pi(v) = p$ se $v \in T_pM$, e $\pi^* : T^*M \longrightarrow M$ definida por $\pi(\omega) = p$ se $\omega \in T_p^*M$. Os conjuntos $\pi^{-1}(p) = T_pM$ e $(\pi^*)^{-1}(p) = T_p^*M$ são chamados respectivamente de fibras em p.

Proposição 1.5.1 (ver Lee (2013), Prop 3.18 Pag 66)**.** *Seja $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ um atlas C^∞ para M.*

Então $\{(TU_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *e* $\{(T^*U_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *são atlas* C^∞ *para* TM *e* T^*M *respectivamente, onde* $\tilde{\varphi}$ *denota a bijeção definida por* $\tilde{\varphi}(v) = (\varphi(p), c^1(v), \ldots, c^n(v)) = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, c^1, \ldots, c^n)(v)$ *para* $\tilde{x}^i = x^i \circ \pi$ *e* $v \in TU$, *cuja inversa é a função*

$$\left(\varphi(p), c^1(v), \ldots, c^n(v)\right) \mapsto \left(\pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)), d_{\varphi(p)}\varphi^{-1} \textstyle\sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\right) = \left(p, \textstyle\sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right).$$

Em particular, os fibrados TM *e* T^*M *são variedades diferenciáveis de dimensão* $2n$, *nas quais as projeções com respeito a suas estruturas são aplicações diferenciáveis.*

1.6 Campo de Vetores

Um campo de vetores C^∞ de um fibrado tangente TM, com projeção natural $\pi : TM \longrightarrow M$, é uma aplicação $X : M \longrightarrow TM$ de classe C^∞ que associa, a cada ponto $p \in M$, um vetor tangente $X_p \in T_pM$ tal que $\pi \circ X = Id_M$ (onde Id_M é a função identidade em M), de modo que se $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ é uma carta de M em p, tem-se

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

para p variando em U, e $a^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funções em U. Observemos que para essa carta, $(TU, \tilde{\varphi}) = (TU, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, c^1, \ldots, c^n)$ é uma carta em TM onde $\tilde{x}^i = x^i \circ \pi$ e c^i são funções definidos em TU por $v = \sum_{i=1}^n c^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, $X_p \in T_pM$. Então, tomando-se $v = X_p$ tem-se:

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{i=1}^n c^i(X_p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \ p \in U,$$

donde resulta que $a^i = c^i \circ X$ como função em U. Portanto, se X é um campo de vetores C^∞ e $(U, x^1, \ldots, x^n)$ é qualquer carta em M, os coeficientes a^i de $X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ relativos à base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ são C^∞. Denotamos por $\mathfrak{X}^r(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^r.

Um campo de vetores X numa variedade M dá origem a uma aplicação linear na álgebra $C^\infty(M)$ das funções de classe C^∞ em M. Assim, para $f \in C^\infty(M)$, Xf é a função definida por

$$(Xf)(p) = X_p f, \quad p \in M.$$

Proposição 1.6.1 (Tu (2011) prop. 14.1 pag. 136)**.** *Um campo de vetores* X *em* M *é de classe* C^∞ *se e somente se para toda função* f *em* M, *a função* Xf *é* C^∞ *em* M.

Uma curva integral de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ passando por $p \in M$ é uma curva $u : (a, b) \to M$ de classe C^{r+1} definida num intervalo (a, b) contendo 0 tal que $u(0) = p$ e $\dot{u}(t) = X_{u(t)}$ para todo $t \in (a, b)$. Escrevemos $u_t(p)$ para mostrar a dependência da curva u no ponto p. A imagem de uma curva integral num ponto $p \in M$ chama-se órbita ou trajetória de X passando por p e é denotada por $O(p)$. Um ponto p chama-se singular do campo X se $X(p) = 0$ e nesse caso, $\{p\}$ é uma órbita de X, chamada estacionária. Se $X(p) \neq 0$, o ponto p é dito um ponto regular do campo X, e $O(p)$ é uma órbita regular. Uma órbita diz-se periódica se existe $T > 0$ tal que $u(T) = u(0)$. Dizemos que uma curva integral é maximal, se o seu domínio não pode ser estendido para outro intervalo maior.

Um campo de covetores (ou uma 1-forma diferencial) em M é uma função ω que associa cada ponto p de M um covetor ω_p em p. A diferencial de uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é a 1-forma df em M tal que para cada $p \in M$ e $X_p \in T_pM$ tem-se

$$(df)_p(X_p) = X_p f, \tag{1.11}$$

Como $T_{f(p)}\mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$ (a saber, $c \frac{d}{dt}\big|_{f(p)} \longleftrightarrow c$), resulta que $d_pf = (df)_p$. Um ponto $p \in M$ chama-se ponto crítico de uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, se sua diferencial se anula em p.

A expressão local de df é dada por:

$$df = \sum_{i=1}^{n} a_i dx^i \quad \text{onde} \quad a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{1.12}$$

Capítulo 2

Sistemas Tipo-Gradiente

Neste capítulo, estudamos a equação diferencial autônoma de primeira ordem

$$\dot{u} + F(u) = 0 \tag{2.1}$$

onde F é um campo de vetores continuamente diferenciável definido uma variedade M, como exposto no Capítulo I.

Assim sendo, pretendemos apresentar neste capítulo alguns resultados do artigo com o título "Every ordinary differential equation with a strict Lyapunov function is a gradient system, de Tomáš Bárta, Ralph Chill e Eva Fašangová (Bárta et al. (2012)), a saber:

- mostrar que todo sistema da forma (2.1) com uma função de Lyapunov estrita, pode ser escrito como um sistema gradiente num subconjunto de M onde o campo F não se anula,

- analisar o comportamento assintótico de suas soluções globais limitadas,

- aplicar o resultado anterior à equação de segunda ordem

$$\ddot{u} + G(u,\, \dot{u}) + \nabla E(u) = 0, \tag{2.2}$$

onde $E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são duas funções de classe C^2, com algumas condições de amortecimento adicionais para a função G.

Em nossa abordagem, acrescentaremos definições e resultados mais clássicos presentes na literatura sobre variedades riemannianas e equações diferenciais, bem como incluiremos exemplos e comentários que permitam uma melhor compreensão do artigo Bárta et al. (2012), de forma enriquecer o texto e torná-lo mais completo.

2.1 Variedades Riemannianas

Uma métrica riemanniana numa variedade diferenciável M é uma correspondência g que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno (isto é, uma forma bilinear simétrica positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente em M. Mais especificamente, é uma função tal que para cada $p \in M$ associa um funcional bilinear $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$. Desse modo, para cada $p \in M$ tem-se um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_{g(p)}$ em T_pM, que para todo $X, Y \in T_pM$ é dado por $\langle X, Y\rangle_{g(p)} = g_p(X, Y)$. Usualmente, escrevemos simplesmente $\langle\ ,\ \rangle_g$ e $\langle X, Y\rangle_g = g_p(X, Y)$, quando não houver perigo de confusão.

Dado um sistema de coordenadas locais $(U, x^1, \cdots, x^n)$ de M em p e dados os vetores tangentes em p, $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ e $Y = \sum_{i=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$,tem-se

$$g_p(X,Y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i Y^j := g_{ij}(p) X^i Y^j \quad \text{onde} \quad g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right\rangle_g .$$

Uma variedade diferenciável munida de uma métrica riemanniana g chama-se variedade riemanniana e denotamos por (M, g)

A norma de um vetor tangente $X \in T_pM$ na métrica g é definida por

$$\|X\|_g = \sqrt{\langle X, X\rangle_g}.$$

O ângulo entre dois vetores tangentes não nulos $X, Y \in T_pM$ é o único $\theta \in [0, \pi]$ que satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle_g}{\|X\|_g \|Y\|_g}.$$

Dois vectores tangentes $X, Y \in T_pM$ são ditos ortogonais se $\langle X, Y\rangle_g = 0$.

Note que, para não sobrecarregar a notação, omitimos o ponto p nas notações acima, por não haver perigo de confusão.

Uma curva $u : [a,b] \to M$ em M é C^1 por partes se for contínua e existir uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ de $[a,b]$ tal que $u|_{[t_j-1, t_j]}$ é de classe C^1.

O comprimento de uma curva C^1 por partes $u : [a,b] \to M$ é definido por

$$L_g(u) = \int_a^b \|\dot{u}(t)\|_g dt.$$

Note que se $u : [a,b] \to M$ é uma curva regular C^1 por partes e $a \leq c \leq b$, temos

$$\int_a^b \|\dot{u}(t)\|_g dt = \int_a^c \|\dot{u}(t)\|_g dt + \int_c^b \|\dot{u}(t)\|_g dt \Rightarrow L_g(u) = L_g(u|_{[a,c]}) + L_g(u|_{[c,b]}).$$

Dada uma função continuamente diferenciável $\varepsilon : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ num aberto U de uma variedade riemanniana (M, g) denotamos por ε' a sua derivada $d\varepsilon$, que em cada ponto de M é um funcional linear (ou seja, é um campo de covetores em M). Denotamos a diferencial de ε em u aplicado num vetor tangente $X \in T_uM$ por $\langle \varepsilon'(u), X\rangle$. Note que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto escalar entre elementos de T_u^*M e T_uM que não depende da métrica g.

Dados um campo de covetores ω e campos de vetores X e Y definidos em $U \subset M$, é usual escrever $\langle \omega, X\rangle$ e $\langle X, Y\rangle_g$ para denotar as funções que a cada ponto $u \in U$ associam, respectivamente, $\langle\omega(p)\,,\,X(p)\rangle$ e $\langle X(p)\,,\,Y(p)\rangle_g$. Com essas notações, o gradiente de ε com respeito à métrica g é definido como o campo de vetores tangentes univocamente determinado (segundo o teorema de representação de Riez) $\nabla_g\varepsilon : U \longrightarrow TM$, associado ao campo de covetores ε', definido pela propriedade:

$$\langle \varepsilon'\,,\,X\rangle = \left\langle \nabla_g\varepsilon\,,\,X\right\rangle_g, \text{ para todo campo de vetores tangentes X definido em U.} \tag{2.3}$$

Se $(U, x^1, \;\cdots\;, x^n)$, é uma carta de M em p, o campo de vetores $\nabla_g\varepsilon$ em função dessas coordenadas locais é dado por

$$\nabla_g\varepsilon = g^{ij}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \text{ onde } g^{ij}g_{ij} = \delta^i_j.$$

A proposição a seguir, cuja a demostração pode ser vista no livro Lee (2013) pag. 284, garante que toda variedade diferenciável admite uma métrica riemanniana.

Proposição 2.1.1 (Existência da métrica riemanniana)**.** *Toda variedade diferenciável M admite uma Métrica Riemanniana.*

Ao longo do texto designaremos a métrica riemanniana euclideana por g_e e as demais métricas simplesmente por g.

2.2 Equações Diferenciais em Variedades e Estabilidade de Lyapunov

Nesta secção damos alguns resultados importantes já conhecidos na teoria das equações diferenciais ordinárias para o estudo qualitativo da equação (2.1).

Uma curva diferenciável $u : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é solução da equação (2.1), se for uma curva integral de F conforme definido na secção 1.6 do capítulo anterior. Chamamos de problema de valor inicial ao problema em que fixamos uma condição inicial $u(t_0) = u_0$ para a equação (2.1), e nesse caso, toda solução de (2.1) satizfaz a equação integral $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t F(u(s))ds$.

Os resultados clássicos como: Teorema de existência e unicidades de soluções, extensão de soluções máximas, teorema de La Salle, propriedades do ω-limite e dos sistemas gradientes serão todos enunciados no $\mathbb{R}^n$ sem demonstração, e podemos adaptar os resultados que só dependerem de propriedades locais ao caso de variedades diferenciáveis devido a seguinte observação:

Observação 3. *Dada uma carta local (U, ψ) de M em p, já foi exposto no capítulo 1 que o sistema de coordenadas $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo C^∞. Se F é um campo de vetores continuamente diferenciável em U então, a função $G : \psi(U) \to \mathbb{R}^n$ definida por $G(q) = d_p\psi \circ F \circ \psi^{-1}(q)$ para $q = \psi(p)$, é um campo C^∞ em $\psi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Assim, a carta $(\psi(U), \psi^{-1})$ leva todas a propriedades topológicas da equação (2.1) do $\mathbb{R}^n$ para M. Por exemplo, $u : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é solução* *da equação (2.1) se e somente se* $\psi \circ u : (-\epsilon, \epsilon) \to \psi(U)$ *é solução da equação* $\dot{u} + G(u) = 0$ *no* $\mathbb{R}^n$.

Uma vez que F é continuamente diferenciável, fica garantido pelo resultado abaixo, cuja a prova pode ser vista no livro de Hirsch et al. (2004) teorema 17.2 Pag 385, a unicidade de solução do problema de valor inicial para (2.1).

Proposição 2.2.1. *(Teorema de Existência e Unicidade) Considere o problema de valor inicial*

$$\dot{u} + F(u) = 0, \qquad u(0) = u_0$$

onde $u_0 \in M$. *Suponha que* $F : M \to TM$ *é um campo de classe* C^1. *Então existe* $a > 0$ *e uma única solução* $u : (-a, a) \to M$ *da equação diferencial que satisfaz a condição inicial* $u(0) = u_0$.

Essa proposição mostra que dada uma condição inicial u_0 no instante $t_0 = 0$ para (2.1), existe uma única solução u de (2.1) que passa por u_0 no instante $t_0 = 0$, definida num pequeno intervalo contendo $t_0 = 0$. Neste caso, quaisquer duas soluções passando por u_0 coincidem na intersecção de seus domínios, permitindo definir solução máxima passando por u_0 como a solução definida no maior intervalo possível.

A proposição a seguir, cuja prova pode ser vista em (Sotomayor (1979) Teorema 3 Pag. 17), garante que se uma solução u de (2.1) definida num intervalo com um dos extremos finito não puder ser estendida para um intervalo de tempo maior, então o gráfico dessa solução sai fora de qualquer conjunto compacto quando tomamos instantes próximos a tal extremo do intervalo.

Proposição 2.2.2. *(Teorema de Extensão) Seja* $F : U \to TM$ *um campo de vetores* C^1 *definido num aberto* U *de* M. *Se* $u : I = (\omega_-, \omega_+) \to U$ *é uma solução máxima da equação* $\dot{u} + F(u) = 0$ *com* $\omega_+ < \infty$ *(respectivamente* $-\infty < \omega_-$ *), então o gráfico de* u, $\{(t, u(t)) \mid t \in I\}$, *tende a* ∂U *quando* $t \to \omega_+$ *(respectivamente* $t \to \omega_-$*). Isto é, para todo compacto* $K \subseteq U$ *existe uma vizinhança* V *de* ω_+ *(respectivamente de* ω_-*) tal que* $(t, u(t)) \notin K$ *para todo* $t \in V \cap I$.

Uma solução u de (2.1) é usualmente chamada global se seu intervalo de definição é a reta toda. Porém, ao longo desse texto, utilizamos a nomenclatura global para nos referirmos a soluções que estão definidas para todo t não negativo, sem exigências sobre $t < 0$.

Algumas funções auxiliares para o estudo do comportamento das soluções de equações diferenciais ordinárias ficaram conhecidas na literatura como funções de Lyapunov. A definição clássica de função de Lyapunov pode ser apresentada na seguinte forma:

Definição 2.2.0.2 (Função de Lyapunov para estabilidade de um ponto de equilíbrio)**.** *Seja* u_0 *um ponto de equilíbrio do sistema (2.1). Uma função* $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *definida numa vizinhança aberta de* u_0 *é uma "função de Lyapunov para Estabilidade" se* $\varepsilon(u_0) = 0$, $\varepsilon(u) > 0$ *se* $u \neq u_0$, *e* $\dot{\varepsilon}(u) := -\langle \varepsilon'(u), F(u) \rangle \leq 0$ *em* V. *Ela é uma "função de Lyapunov para Estabilidade Assintótica" se* $\varepsilon(u_0) = 0, \varepsilon(u) > 0$ *para* $u \neq u_0$, *e* $\dot{\varepsilon}(u) := -\langle \varepsilon'(u), F(u) \rangle < 0$ *em* $V \setminus \{u_0\}$.

Uma definição mais abrangente de função de Lyapunov, e que será utilizada neste trabalho, é apresentada abaixo.

Definição 2.2.0.3. *Uma função diferenciável $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ é uma "função de Lyapunov" para o sistema (2.1) se existe um conjunto $S \subset M$ de pontos de equilíbrio de (2.1) satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $\varepsilon(u_0) = 0 \ \ \forall u_0 \in S \quad e \ \ \varepsilon(u) > 0 \quad se \quad u \notin S.$

(ii) $\dot{\varepsilon}(u) := -\langle \varepsilon'(u),\ F(u)\rangle \leq 0 \quad para\ \ todo\ \ u \in M.$

A função ε é "função de Lyapunov estrita" se satisfaz

(iii) $\dot{\varepsilon}(u) := -\langle \varepsilon'(u),\ F(u)\rangle < 0 \quad para\ \ todo\ \ u \in M \ \ tal\ que \ \ F(u) \neq 0.$

Notemos que segundo na definição acima, uma função pode ser uma "função de Lyapunov estrita" para (2.1) sem ser uma "função de Lyapunov". Esse enfraquecimento será compensado nos resultados expostos no trabalho exigindo-se que algumas outras desigualdades sejam satisfeitas.

Dada uma solução $u : I \longrightarrow M$ de (2.1), tem-se

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon(u(t))) = \langle \varepsilon'(u(t)),\ \dot{u}(t)\rangle = \langle \varepsilon'(u(t)),\ -F(u(t))\rangle = -\langle \varepsilon'(u(t)),\ F(u(t))\rangle = \dot{\varepsilon}(u(t)).$$

Assim, no caso (ii) tem-se

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon(u(t))) = \dot{\varepsilon}(u(t)) \leq 0,\ \text{para todo } t \in I,$$

e no caso (iii) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varepsilon(u(t))) &= \dot{\varepsilon}(u(t)) < 0,\ \text{para todo } t \in I \text{ tal que } F(u(t)) \neq 0,\\
\frac{d}{dt}(\varepsilon(u(t))) &= \dot{\varepsilon}(u(t)) = 0,\ \text{sempre que } F(u(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Isto é, toda função de Lyapunov (respectivamente de Lyapunov estrita) é decrescente (respectivamente estritamente decrescente) ao longo das soluções regulares de (2.1), e se for constante ao longo de alguma solução, então essa solução deve ser um ponto de equilíbrio (solução constante).

Uma generalização da definição 2.2.0.2 é dada a seguir:

Definição 2.2.0.4 (Função de Lyapunov estrita para a Estabilidade Assintótica de um conjunto de pontos de equilíbrio)**.** *Dizemos que uma função continuamente diferenciável $\varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov estrita para a "Estabilidade Assintótica" de um conjunto de pontos de equilíbrio S de (2.1) se $\varepsilon(u_0) = 0$, $\forall u_0 \in S$, e $\varepsilon(u) > 0$ se $u \notin S$, e tal que*

$$\langle \varepsilon'(u),\ \ F(u)\rangle > 0,\ \textit{sempre que}\ \ u \in M\ \ e\ \ F(u) \neq 0. \tag{2.4}$$

Observe que ε, ser função de Lyapunov para a "Estabilidade da equação diferencial quer dizer ser função de Lyapunov para a " Estabilidade " de um conjunto, finito ou infinito, de pontos de equilíbrio do campo nas quais ε se anula, e que ela é sempre positiva fora desse conjunto, e é decrescente ao longo de todas as soluções regulares da equação. Note que podem existir outros pontos de equilíbrio em que ε é maior zero (como pode ser visto no exemplo 2 na seção posterior). Porém, quando o conjunto S é unitário, a definição da função de Lyapunov estrita para a "Estabilidade Assintótica " coincide com a definição 2.2.0.2. Nesse caso, ε tem mínimo estrito nesse único ponto de equilíbrio e $\dot{\varepsilon} < 0$ fora desse ponto de equilíbrio e prova-se a estabilidade assintótica sem exigir outras desigualdades.

Note que muitas vezes (como será utilizado no texto) o termo " função de Lyapunov estrita" para a equação (2.1) é utilizado para funções que satisfazem apenas a condição

$$\langle \varepsilon'(u), \quad F(u) \rangle > 0, \text{ sempre que } \ u \in M \ \text{ e } \ F(u) \neq 0,$$

mesmo sem a presença da hipótese adicional sobre ε.

Dizemos que um ponto de equilíbrio u_0 (ou solução estacionária) de (2.1) é estável no sentido de Lyapunov, se para toda vizinhança U de u_0 existe uma vizinhança $V \subset U$ tal que, toda solução $u(t)$ de (2.1) com $u(0) \in V$ está definida e contida em U para todo $t \geq 0$. Se além disso, $lim_{t\to\infty} u(t) = u_0$, diminuindo V se necessário, então u_0 é assintoticamente estável. Chamamos bacia de atração de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável u_0 de (2.1) ao conjunto de todas as condições iniciais cujas soluções tendem a u_0 no futuro. Denotando por u_x a solução de (2.1) que no instante 0 passa por x, a bacia de atração é o conjunto

$$B(u_0) = \{ x \in M \ : \ u_x(t) \to u_0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty \}.$$

As funções de Lyapunov nos permitem quer determinar a estabilidade de pontos de equilíbrio, quer estimar a bacia de atração dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, mesmo em alguns casos em que a função não for de Lyapunov estrita.

Ao longo deste texto usamos alguns resultados sobre teoria da estabilidade de Lyapunov que podem ser encontrados em Hirsch et al. (2004). Este é o caso de (a) proposição 2.2.3, que proporciona a análise dos pontos de equilíbrio de uma equação do tipo 2.1 e pode ser encontrada na página 194, e (b) a proposição 2.2.4, uma ferramentas muito útil no estudo do comportamento assintótico, que pode ser encontrada na página 202. Ambos os resultados permitem estudar soluções assintóticas, sem a necessidade de conhecer explicitamente as soluções do sistema em questão, utilizando apenas uma função de Lyapunov. Nos enunciados apresentados abaixo, adaptamos a redação para varidades.

Proposição 2.2.3 (Estabilidade de Lyapunov)**.** *Se a equação diferencial (2.1) possui uma função* *de Lyapunov para um ponto de equilíbrio u_0, então u_0 é um ponto de equilíbrio estável. Se a função de Lyapunov for estrita, então o ponto de equilíbrio u_0 é assintoticamente estável.*

Um conjunto não vazio P é invariante se para todo o ponto $x \in P$, $u_x(t)$ está definido e contido em P para todo $t \in \mathbb{R}$. Dizemos que P é positivamente invariante se $u_x(t)$ está definido e contido em P para todo $t \geq 0$.

Proposição 2.2.4 (Princípio de invariância de La Salle)**.** *Seja u_0 um ponto de equilíbrio do sistema (2.1) e $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para u_0 definida numa vizinhança aberta U de u_0 em M. Suponha que $P \subset U$ é uma vizinhança compacta e positivamente invariante de u_0, totalmente coberta por uma carta (U, ψ), na qual não existe nenhuma solução u com imagem em $P - \{u_0\}$ tal que ε é constante ao longo de u. Então u_0 é assintoticamente estável e P está contido na bacia de atração de u_0.*

2.3 Sistemas Tipo-Gradiente

Definição 2.3.0.5. *Chama-se sistema tipo-gradiente "a toda equação diferencial com uma função de Lyapunov estrita que é estritamente decrescente ao longo das soluções não constantes" (Conley apud Lageman (2007)).*

Também encontra-se em (Chill et al. (2009)) a observação:

"Dessa definição e com a proposição 2.2.4, observa-se que se u é uma solução de um sistema tipo-gradiente com a imagem $u(s)$ contida num compacto para s suficientemente grande (isto é; no futuro), o conjunto

$$\omega(u) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{u(s); s \geq t\}}$$

consiste somente de pontos de equilíbrio".

Note que podem ser vários e não apenas um único ponto, veremos isso mais adiante no exemplo 2.

A equação diferencial (2.1) é um sistema gradiente numa variedade riemanniana (M, g) se existe uma função continuamente diferenciável $\varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla_g \varepsilon$. O teorema a seguir, um dos resultados principais de (Bárta et al. (2012)), mostra que se a equação diferencial (2.1) admite uma função de Lyapunov estrita, então ela pode ser escrita como um sistema gradiente num aberto da variedade M onde o campo F não se anula, a menos da mudança da métrica riemanniana escolhida. Nesse caso, F representa o gradiente da respectiva função de Lyapunov estrita.

Teorema 2.3.1. *Seja M uma variedade diferenciável, F um campo de vetores continuamente diferenciável em M e $\varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov estrita para (2.1), continuamente diferenciável. Então existe uma métrica riemanniana $\tilde{g}$ no conjunto aberto $\tilde{M} = \{u \in M : F(u) \neq 0\} \subseteq M$ tal que $\nabla_{\tilde{g}} \varepsilon = F$. Em particular, a equação (2.1) é um sistema gradiente na variedade $(\tilde{M}, \tilde{g})$.*

Demonstração. Seja $\tilde{M} = \{u \in M$ tal que $F(u) \neq \vec{O}\} \subseteq M$. Como F é um campo contínuo em M, o subconjunto $\tilde{M}$ é aberto em M (e portanto uma subvariedade diferenciável com a estrutura diferenciável induzida de M). Como ε é uma função de Lyapunov, para todo $u \in \tilde{M}$, tem-se $\varepsilon'(u) \neq 0$ é um funcional linear (ou seja, $\varepsilon'(u) \in T_u^*M$) e, pelo teorema do Núcleo e da Imagem para uma transformação linear entre espaços vetoriais, tem-se $Dim\,(Ker\,\varepsilon'_u) = n-1$. Logo, usando carta ao redor de u segue que existe uma vizinhança U de u em $\tilde{M}$ tal que para cada $w \in \tilde{M}$, existe uma base de $T_w\tilde{M}$ formada de n vetores $\{v_1(w), \ldots, v_n(w)\}$ que dependem continuamente de w na vizinhança aberta U de u em $\tilde{M}$ tal que $n-1$ vetores dessa base geram $Ker\,\varepsilon'(w)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $Ker\varepsilon'(w) = [\,v_1(w), \ldots, v_{n-1}(w)\,]$. Usando o facto de que $\langle \varepsilon'(w), F(w)\rangle > 0$ tem-se $F(w) \notin Ker\,\varepsilon'(w)$, e portanto $\{v_1(w), \ldots, v_{n-1}(w), F(w\}$ é um conjunto linearmente independente. Assim, para cada $u \in \tilde{M}$ existe uma vizinhança W de u na qual o espaço tangente a $\tilde{M}$ em $w \in W$ é uma soma direta entre seus subespaços próprios $Ker\,\varepsilon'(w)$ e $[F(w)]$ (o espaço gerado por $F(w)$), isto é, $T_w\tilde{M} = Ker\,\varepsilon'(w) \oplus [F(w)]$. Como u em $\tilde{M}$ foi tomado arbitrariamente, tem-se.

$$T\tilde{M} = Ker\,\varepsilon' \oplus [F]. \tag{2.5}$$

Essa decomposição é contínua no sentido de que a projeção em $Ker\,\varepsilon'$ ao longo de $[F]$ é um operador contínuo. Portanto, para todo campo de vetores continuo X em $\tilde{M}$, os campos de vetores $X_0 := X - \frac{\langle\varepsilon', X\rangle}{\langle\varepsilon', F\rangle}F$ e $X_1 = \frac{\langle\varepsilon', X\rangle}{\langle\varepsilon', F\rangle}F$ estão bem definidos e são contínuos, com $X_0(u) \in Ker\,\varepsilon'(u)$ e $X_1(u) \in [F(u)]$, para cada $u \in \tilde{M}$, pois, omitindo o argumento u para simplificar tem-se,

$$\langle\varepsilon'\ ,\ X_0\rangle = \langle\varepsilon'\ ,\ X - \frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}F\rangle = \langle\varepsilon'\ ,\ X\rangle - \frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}\langle\varepsilon'\ ,\ F\rangle = 0.$$

Pela proposição 2.1.1, escolhemos uma métrica riemanniana g em M e com ela definimos uma nova métrica em $\tilde{M}$ por

$$\begin{aligned}\langle Y,\ X\rangle_{\tilde{g}} &:= \left\langle Y - \frac{\langle\varepsilon',\ Y\rangle}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}F,\ X - \frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}F\right\rangle_g + \frac{1}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}\langle\varepsilon',\ Y\rangle\langle\varepsilon',\ X\rangle \\ &= \langle Y_0,\ X_0\rangle_g + \frac{1}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}\langle\varepsilon',\ Y_1\rangle\langle\varepsilon',\ X_1\rangle.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Observe que $\tilde{g}$ está bem definida em $\tilde{M}$ uma vez que $\langle\varepsilon',\ F\rangle > 0$. Por outro lado, como as funções $g, F, X, Y, \varepsilon', \langle\varepsilon',\ Z\rangle$ para $Z \in \{X,\ Y,\ F,\}$ são todas funções contínuas, resulta que $\tilde{g}$ o é também.

Vamos verificar que $\tilde{g}$ define uma métrica em $\tilde{M}$, ou seja, que em cada ponto, $\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle_{\tilde{g}}$ é bilinear, simétrica, positiva definida, e só se anula no vetor nulo. Com efeito, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e os campos de vetores $X,\ Y,\ Z \in \tilde{M}$ tem-se

1) $\langle X,\ Z\rangle_{\tilde{g}} = \left\langle X - \frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}F,\ \ Z - \frac{\langle\varepsilon',\ Z\rangle}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}F\right\rangle_g + \frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle\langle\varepsilon',\ Z\rangle}{\langle\varepsilon',\ F\rangle} = \langle Z,\ X\rangle_{\tilde{g}}$ (Comutatividade de $\tilde{g}$)

$$\begin{aligned}
2)\ \langle \alpha X+\beta Y, Z\rangle_{\tilde g} &= \left\langle \alpha X+\beta Y-\frac{\langle \varepsilon', \alpha X+\beta Y\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F, Z-\frac{\langle \varepsilon', Z\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F\right\rangle_g+\frac{\langle \varepsilon', \alpha X+\beta Y\rangle\langle \varepsilon', Z\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}\\
&= \left\langle \alpha X+\beta Y-\frac{\langle \varepsilon', \alpha X\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F-\frac{\langle \varepsilon', \beta Y\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F, Z-\frac{\langle \varepsilon', Z\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F\right\rangle_g+\frac{\langle \varepsilon', \alpha X\rangle\langle \varepsilon', Z\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}\\
&+ \frac{\langle \varepsilon', \beta Y\rangle\langle \varepsilon', Z\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}\\
&= \left\langle \alpha X-\frac{\langle \varepsilon', \alpha X\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F,\ Z-\frac{\langle \varepsilon', Z\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F\right\rangle_g+\frac{\langle \varepsilon', \alpha X\rangle\langle \varepsilon', Z\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}\\
&+ \left\langle \beta Y-\frac{\langle \varepsilon', \beta Y\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F,\ Z-\frac{\langle \varepsilon', Z\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F\right\rangle_g+\frac{\langle \varepsilon', \beta Y\rangle\langle \varepsilon', Z\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}\\
&= \alpha\langle X, Z\rangle_{\tilde g}+\beta\langle Y, Z\rangle_{\tilde g}\ \text{(Bilinearidade de } \tilde g)
\end{aligned}$$

$$3)\ \|X\|_{\tilde g}^2=\|X-\frac{\langle \varepsilon', X\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F\|_g^2+\frac{\langle \varepsilon', X\rangle^2}{\langle \varepsilon', F\rangle}\geq 0$$

e

$$\|X\|_{\tilde g}^2=0\Leftrightarrow \|X-\frac{\langle \varepsilon', X\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F\|_g^2+\frac{\langle \varepsilon', X\rangle^2}{\langle \varepsilon', F\rangle}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\langle \varepsilon', X\rangle^2}{\langle \varepsilon', F\rangle} & =0\\ e & \\ \|X-\frac{\langle \varepsilon', X\rangle}{\langle \varepsilon', F\rangle}F\|_g^2 & =0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle \varepsilon', X\rangle & =0\\ e & \\ \|X\|_g & =0\end{cases}$$

resulta que $X=0$. Portanto, uma métrica riemanniana.

Tomemos $Y=F$ em (2.6), então usando o facto de que em cada ponto a componente de F na base do *Ker* ε' é nula, isto é, $Y_0=F_0=\vec{O}$, temos para todo campo de vetores X em $\tilde M$

$$\begin{aligned}
\langle F, X\rangle_{\tilde g}=\frac{1}{\langle \varepsilon', F\rangle}\langle \varepsilon', F\rangle\langle \varepsilon', X\rangle &= \langle \varepsilon', X\rangle\\
&= \langle \nabla_{\tilde g}\varepsilon, X\rangle_{\tilde g}\ \text{(pela definição de } \nabla_{\tilde g}\varepsilon \text{ e de } \tilde g)\\
&\Longrightarrow \langle F-\nabla_{\tilde g}\varepsilon, X\rangle_{\tilde g}=0.
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo campo em $\tilde M$ e $\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle_{\tilde g}$ é não degenerado, fica provado que $F=\nabla_{\tilde g}\varepsilon$ em $\tilde M$. □

Exemplo 1. *Consideremos a equação diferencial* $\dot u+F(u)=0$ *onde* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *e* $\varepsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *são dadas por* $F(u_1,u_2):=(u_1,2u_2)$ *e* $\varepsilon(u_1,u_2):=\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)$ *com a métrica euclideana* g_e *usual em* $\mathbb{R}^2$. *Como a origem é o único ponto de equilíbrio de* F, *então* $\tilde M=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. *O gradiente de*

ε em $\mathbb{R}^2$ é dado por

$$\nabla\varepsilon(u) = \nabla_{g_e}\varepsilon(u) = u_1\frac{\partial}{\partial u_1}(u) + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}(u) = (u_1, u_2) \ \text{onde} \ \frac{\partial}{\partial u_1}(u) = (1,0) \ \text{e} \ \frac{\partial}{\partial u_2}(u) = (0,1)$$

e em $\tilde{M}$, temos

$$\langle\varepsilon'(u), F(u)\rangle = \langle\nabla\varepsilon(u), F(u)\rangle_{g_e} = \langle(u_1, u_2), (u_1, 2u_2)\rangle_{g_e} = u_1^2 + 2u_2^2 > 0,$$

logo, ε é uma função de Lyapunov estrita do sistema $\dot{u} + F(u) = 0$ em $\tilde{M}$.
Com a métrica euclideana g_e de $\mathbb{R}^2$ definimos, tal como na demonstração do teorema 2.3.1, a nova métrica $\tilde{g}$ e escrevermos o gradiente de ε segundo essa métrica para verificarmos diretamente que é igual a F. De uma forma mais resumida a fórmula de $\tilde{g}$ é dada por

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle_{\tilde{g}(u)} &= \left\langle X - \frac{\left\langle\nabla_{g_e(u)}\varepsilon(u),\, X\right\rangle_{g_e(u)}}{\left\langle\nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, F(u)\right\rangle_{g_e(u)}}F(u),\, Y - \frac{\left\langle\nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, Y\right\rangle_{g_e(u)}}{\left\langle\nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, F(u)\right\rangle_{g_e(u)}}F(u)\right\rangle_{g_e(u)} + \\ &+ \frac{\left\langle\nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, X\right\rangle_{g_e(u)}\left\langle\nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, Y\right\rangle_{g_e(u)}}{\left\langle\nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, F(u)\right\rangle_{g_e(u)}}\end{aligned}$$

Calculamos a matriz que represente $\tilde{g}$ na base canônica como se segue

- $$\begin{aligned}\tilde{g}_{11}(u) = \langle\, (1,0)\, ,\, (1,0)\,\rangle_{\tilde{g}(u)} &= \|(1,0) - \frac{\langle\,(u_1,u_2)\,,\,(1,0)\,\rangle_{g_e(u)}}{\langle\,(u_1,\,u_2)\,,\,(u_1,\,2u_2)\,\rangle_{g_e(u)}}(u_1,\,2u_2)\|^2_{g_e(u)} + \\ &+ \frac{\langle(u_1,\,u_2),\,(1,0)\rangle^2_{g_e(u)}}{\langle(u_1,\,u_2),\,(u_1,\,2u_2)\rangle_{g_e(u)}} \\ &= \frac{1}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2}\|(u_1^2+2u_2^2, 0) - (u_1^2,\, 2u_1u_2)\|^2_{g_e(u)} + \frac{u_1^2}{u_1^2+2u_2^2} \\ &= \frac{u_1^4 + 6u_1^2u_2^2 + 4u_2^2}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\tilde{g}_{22}(u) = \langle\, (0,1)\, ,\, (0,1)\,\rangle_{\tilde{g}(u)} &= \|(0,1) - \frac{\langle\,(u_1,u_2)\,,\,(0,1)\,\rangle_{g_e(u)}}{\langle\,(u_1,\,u_2)\,,\,(u_1,\,2u_2)\,\rangle_{g_e(u)}}(u_1,\,2u_2)\|^2_{g_e(u)} + \\ &+ \frac{\langle(u_1,\,u_2),\,(0,1)\rangle^2_{g_e(u)}}{\langle(u_1,\,u_2),\,(u_1,\,2u_2)\rangle_{g_e(u)}} \\ &= \frac{1}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2}\|(0\,,\,u_1^2+2u_2^2) - (u_1u_2,\, 2u_2^2)\|^2_{g_e(u)} + \frac{u_2^2}{u_1^2+2u_2^2} \\ &= \frac{u_1^4 + 2u_1^2u_2^2 + 2u_2^2}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2}\end{aligned}$$

$$\bullet\ \tilde{g}_{12}(u) = \langle\, (1,0)\,,\,(0,1)\,\rangle_{\tilde{g}(u)} \;=\; \frac{\Big\langle\, (2u_2^2, -2u_1u_2)\,,\,(-u_1u_2\,,\,u_1^2)\,\Big\rangle_{\tilde{g}(u)}}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2} + \frac{u_1u_2}{u_1^2+2u_2^2}$$

$$= -\frac{u_1^3u_2}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2} = \tilde{g}_{21}(u)$$

Obtivemos a matriz de $\tilde{g}$ na base canônica $\tilde{G} = \begin{pmatrix} \frac{u_1^4+6u_1^2u_2^2+4u_2^2}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)} & -\frac{u_1u_2}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2} \\ -\frac{u_1u_2}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2} & \frac{u_1^4+2u_1^2u_2^2+2u_2^2}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2} \end{pmatrix}$

cujo determinante é:

$$
\begin{aligned}
Det\,\tilde{G} &= \frac{\left(u_1^4+6u_1^2u_2^2+4u_2^2\right)\left(u_1^4+2u_1^2u_2^2+2u_2^2\right) - u_1^6u_2^2}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^4} \\
&= \frac{\left[\left(u_1^2+2u^2\right)^2+2u_1^2u_2^2\right]\left[\left(u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2\right)-u_1^2u_2^2\right]-u_1^6u_2^2}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^4} \\
&= \frac{\left(u_1^2+2u^2\right)^2\left(u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2\right)+u_1^2u_2^2\left(2u_1^4+4u_1^2u_2^2+4u_2^2-\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2-u_1^4\right)}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^4} \\
&= \frac{\left(u_1^2+2u^2\right)^2\left(u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2\right)+u_1^2u_2^2\left(2u_1^4+4u_1^2u_2^2+4u_2^2-u_1^4-4u_1^2u_2^2-4u_2^4-u_1^4\right)}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^4} \\
&= \frac{\left(u_1^2+2u^2\right)^2\left(u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2\right)}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^4} = \frac{\left(u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2\right)}{\left(u_1^2+2u_2^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

A inversa de $\tilde{G}$ é a matriz

$$G = \tilde{G}^{-1} = \frac{1}{u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2}\begin{pmatrix} u_1^4+2u_1^2u_2^2+2u_2^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_1^4+6u_1^2u_2^2+4u_2^2 \end{pmatrix}$$

A expressão do gradiente de ε segundo a métrica $\tilde{g}$ é dada pela expressão matricial

$$\nabla_{\tilde{g}}\varepsilon(u) = \tilde{G}^{-1}\nabla_{g_e}\varepsilon(u) \;\; \textit{onde} \;\; \nabla_{g_e}\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Portanto temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tilde g}\varepsilon(u) &= \frac{1}{u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2}\begin{pmatrix} u_1^4+2u_1^2u_2^2+2u_2^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_1^4+6u_1^2u_2^2+4u_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2}\begin{pmatrix} u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2 \\ 2u_2\left(u_1^4+3u_1^2u_2^2+2u_2^2\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_2\end{pmatrix} = F(u)
\end{aligned}$$

e fica provado que $\nabla_{\tilde g}\varepsilon(u) = F(u)$ em $\tilde M$.
Notemos que se tomarmos a métrica riemanniana g_1 definida por $\langle X, Y\rangle_{g_1} = X_1Y_1 + \frac{1}{2}X_2Y_2$ onde $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$ em $\tilde M$, temos

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, G_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}, \text{ e portanto } \nabla_{g_1}\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_2\end{pmatrix} = F(u).$$

Observação 4.

1) *Do exemplo 1, observa-se que a métrica riemanniana $\hat g$, na qual se tem a igualdade $F = \nabla_{\hat g}\varepsilon$ não é única. O produto interno $\langle Y, X\rangle_{\tilde g}$ é univocamente determinado pelas funções F e ε se já tivermos fixado uma métrica g em M e se um dos vectores X ou Y é múltiplo de F; Isto deve-se devido a necessidade de querermos que $F = \nabla_{\hat g}\varepsilon$. Portanto, a definição de $\tilde g$ em $Ker\,\varepsilon' \times Ker\,\varepsilon'$ tem uma livre escolha.*

2) *O teorema 2.3.1 diz que o sistema (2.1) é um sistema gradiente em $(\tilde M, \tilde g)$. O facto de $\tilde M$ ser um subconjunto de M e $\tilde g$ uma nova métrica levanta uma pergunta fundamental:*

Pergunta 1: *Podemos escolher a métrica $\tilde g$ de forma que seja estendida continuamente a todo M, levando a equação diferencial (2.1) num sistema gradiente em M?*

Para responder a essa pergunta, consideremos o exemplo 1 e vamos mostrar que nem sempre a métrica $\tilde g$ se estende a todo o $\mathbb{R}^2$. Com efeito, dados $X, Y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle X, Y\rangle_{\tilde g(u)} &= \left\langle X - \frac{\left\langle \nabla_{g_e(u)}\varepsilon(u),\, X\right\rangle_{g_e(u)}}{\left\langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, F(u)\right\rangle_{g_e(u)}}F(u),\; Y - \frac{\left\langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, Y\right\rangle_{g_e(u)}}{\left\langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, F(u)\right\rangle_{g_e(u)}}F(u)\right\rangle_{g_e(u)} + \\
&+ \frac{\left\langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, X\right\rangle_{g_e(u)}\left\langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, Y\right\rangle_{g_e(u)}}{\left\langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u),\, F(u)\right\rangle_{g_e(u)}}
\end{aligned}$$

tomando $X = (1, 0)$ e $Y = (0, 1)$, temos

$$\left\langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u),\ X\right\rangle = \langle (u_1,u_2),\ (1,0)\rangle = u_1 \ \text{ e } \ \left\langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u),\ Y\right\rangle = \langle (u_1,u_2),\ (0,1)\rangle = u_2$$

$$\begin{aligned}
\langle X,Y\rangle_{\tilde g} &= \left\langle (1,0)-\frac{u_1(u_1,2u_2)}{u_1^2+2u_2^2},\ (0,1)-\frac{u_2(u_1,2u_2)}{u_1^2+2u_2^2}\right\rangle_{g_e} + \frac{u_1u_2}{u_1^2+2u_2^2}\\
&= \left\langle \frac{(2u_2^2,-2u_1u_2)}{u_1^2+2u_2^2}, \frac{(-u_1u_2,u_1^2)}{u_1^2+2u_2^2}\right\rangle_{g_e} + \frac{u_1u_2}{u_1^2+2u_2^2}\\
&= \frac{-u_2u_1^3}{(u_1^2+2u_2^2)^2}
\end{aligned}$$

Observemos que $\lim_{h\to 0}\langle X,Y\rangle_{\tilde g(0,h)} = 0$ e $\lim_{h\to 0}\langle X,Y\rangle_{\tilde g(h,h)} = -\frac{1}{9}$.
Portanto, $\tilde g$ não tem uma extensão contínua à origem.

Definindo a métrica $\tilde g$ usando a métrica g_1, para $X=(1,0)$ e $Y=(0,1)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle X,Y\rangle_{\tilde g} &= \left\langle \frac{(2u_2^2,-2u_1u_2)}{u_1^2+2u_2^2}, \frac{(-u_1u_2,u_1^2)}{u_1^2+2u_2^2}\right\rangle_{g_1} + \frac{u_1u_2}{u_1^2+2u_2^2}\\
&= \frac{-2u_1u_2^3-u_1^3u_2}{(u_1^2+2u_2^2)^2} + \frac{u_1u_2}{u_1^2+2u_2^2}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo $\tilde g$ se estende continuamente à origem quando definida a partir de g_1. Pois nesse caso, $\tilde g$ e g_1 são localmente equivalentes em M, como será provado no decorrer do texto.

Com esse exemplo concluímos que, nem sempre a métrica riemanniana $\tilde g$ tem uma extensão contínua a todo M, mas verificaremos no final dessa secção por meio do exemplo anterior que, se tal extensão existe como no caso das métricas g_1 e $\tilde g$ então, elas são localmente equivalentes em $\tilde M$ (ou mesmo em M). Porém elas podem ser equivalentes em $\tilde M$ e não existir extensão em M, como no caso das métricas g e $\tilde g$ no exemplo 1 acima.

A seguir, damos uma condição necessária e suficiente para que as duas métricas g e $\tilde g$ sejam equivalentes em $\tilde M$, em termos de uma condição angular (CA) utilizada em algumas obras como Absil et al. (2005), Lageman (2007) e Chill et al. (2009), relacionada ao estudo de estabilidade de sistemas tipo-gradiente, e de uma condição de comparabilidade (C).

Definição 2.3.0.6. *Duas métricas g_1 e g_2 numa variedade diferenciável M são ditas equivalentes, se existem constantes $C_1>0$, $C_2>0$ tais que, para todo campo de vetores tangentes X, vale a desigualdade*

$$C_1\|X\|_{g_1} \le \|X\|_{g_2} \le C_2\|X\|_{g_1} \ \text{em } M. \tag{2.7}$$

Observe que se duas métricas riemanniana são equivalentes, então as respectivas distâncias induzidas por elas também são equivalentes. Em particular, os completamentos de $(M,\ g_1)$ e de $(M,\ g_2)$ são os mesmos, os conjuntos limitados em ambos são os mesmos e os campos limitados em ambos são os mesmos.

Dada uma variedade riemanniana (M, g), consideramos em de T^*_uM a norma associada à norma de T_uM, que denotaremos também por $\|\ \|_g$, definida, para $w \in T^*_uM$, por

$$\|w\|_g := \sup_{\|X\|_g \leq 1} \langle w,\ X\rangle.$$

Definição 2.3.0.7. *Numa variedade riemanniana (M, g), dizemos que ε' e F satisfazem a condição angular (CA) se existe alguma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\langle \varepsilon',\ F\rangle \geq \alpha\, \|\varepsilon'\|_g \|F\|_g \ \ em\ \ \tilde{M} \tag{CA}$$

e dizemos que satisfazem a condição de comparabilidade se existem constantes $\tilde{C}_1 > 0$, $\tilde{C}_2 > 0$ tais que

$$\tilde{C}_1 \|\varepsilon'\|_g \leq \|F\|_g \leq \tilde{C}_2 \|\varepsilon'\|_g \ em\ \tilde{M}. \tag{C}$$

Observe que se ε' e F satisfazem simultaneamente a condição angular (CA) e a condição de comparabilidade (C), temos

$$\begin{cases} \langle \varepsilon',\ F\rangle & \geq \alpha\, \|\varepsilon'\|_g \|F\|_g \geq \alpha \tilde{C}_1 \|\varepsilon'\|_g^2 \\ \langle \varepsilon',\ F\rangle & \geq \alpha\, \|\varepsilon'\|_g \|F\|_g \geq \frac{\alpha}{\tilde{C}_2} \|F\|_g^2 \end{cases} \quad \text{e assim, } \langle \varepsilon',\ F\rangle \geq min\left\{\frac{\alpha \tilde{C}_1}{2},\ \frac{\alpha}{2\tilde{C}_2}\right\}\left(\|\varepsilon'\|_g^2 + \|F\|_g^2\right).$$

Portanto, se ε' e F satisfazem simultaneamente as condições angular (CA) e de comparabilidade (C), então existe $\beta > 0$ tal que

$$\langle \varepsilon',\ F\rangle \geq \beta \left(\|\varepsilon'\|_g^2 + \|F\|_g^2\right), \ \ \text{em}\ \ \tilde{M}. \tag{CA + C}$$

Reciprocamente, se existe $\beta > 0$ tal que (CA+C) é satisfeita, então ε' e F satisfazem a condição angular (CA), pois

$$\langle \varepsilon',\ F\rangle \geq \beta \left(\|\varepsilon'\|_g^2 + \|F\|_g^2\right) \geq \beta\, \|\varepsilon'\|_g \|F\|_g, \ \ \text{em}\ \ \tilde{M}.$$

Observação 5. *Satisfazer a condição angular (CA) quer dizer que F e ε' não podem ser "ortogonais", e mais que isso, significa que o "ângulo entre eles" não pode sequer se aproximar de um "ângulo reto" na região de interesse. Por essa razão, todo sistema gradiente satisfaz a condição angular, porque nesse caso ε' é "paralelo" a F.*

Teorema 2.3.2. *As métricas g e $\tilde{g}$ são equivalentes em $\tilde{M}$ se e somente se ε' e F satisfazem as condições (CA) e (C).*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que g e $\tilde{g}$ são equivalentes. Então existem constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tais que, para todo campo de vetores tangentes X tem-se

$$C_1\|X\|_g \leq \|X\|_{\tilde{g}} \leq C_2\|X\|_g \text{ em } \tilde{M}. \tag{2.8}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon'\|_{\tilde{g}} = \sup_{\|X\|_{\tilde{g}}\leq 1} \langle \varepsilon', X\rangle \quad &\geq \quad \sup_{C_2\|X\|_g\leq 1} \langle \varepsilon', X\rangle \text{ (segunda desigualdade de (2.8))}\\
&= \quad \sup_{\|Y\|_g\leq 1} \langle \varepsilon', \frac{1}{C_2}Y\rangle \text{ (tomando } Y = C_2X)\\
&\geq \quad \frac{1}{C_2}\|\varepsilon'\|_g \text{ em } \tilde{M}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Lembrando que em $\tilde{M}$ tem-se $F = \nabla_{\tilde{g}}\varepsilon$, e que $\|\nabla_{\tilde{g}}\varepsilon\|_{\tilde{g}} = \|\varepsilon'\|_{\tilde{g}}$, e utilizando a desigualdade (2.9) e a primeira desigualdade de (2.8), segue que

$$\langle \varepsilon', F\rangle = \langle \nabla_{\tilde{g}}\varepsilon, F\rangle_{\tilde{g}} = \|\nabla_{\tilde{g}}\varepsilon\|_{\tilde{g}}\|F\|_{\tilde{g}} = \|\varepsilon'\|_{\tilde{g}}\|F\|_{\tilde{g}} \geq \frac{C_1}{C_2}\|\varepsilon'\|_g\|F\|_g.$$

Isto mostra que ε' e F satisfazem a condição angular (CA) com $\alpha = \frac{C_1}{C_2}$.

Vamos mostrar a seguir que a condição de comparabilidade (C) é satisfeita. Com efeito, em $\tilde{M}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon'\|_{\tilde{g}} = \sup_{\|X\|_{\tilde{g}}\leq 1} \langle \varepsilon', X\rangle \quad &\leq \quad \sup_{C_1\|X\|_g\leq 1} \langle \varepsilon', X\rangle \text{ (primeira desigualdade de (2.8))}\\
&= \quad \sup_{\|Y\|_g\leq 1} \left\langle \varepsilon', \frac{1}{C_1}Y\right\rangle \text{ (tomando } Y = C_1X)\\
&\leq \quad \frac{1}{C_2}\|\varepsilon'\|_g \text{ em } \tilde{M}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Usando a desigualdade (2.8) para F e invertendo os coeficientes resulta

$$\frac{1}{C_2}\|F\|_{\tilde{g}} \leq \|F\|_g \leq \frac{1}{C_1}\|F\|_{\tilde{g}} \text{ em } \tilde{M}. \tag{2.11}$$

Lembrando novamente que $F = \nabla_{\tilde{g}}\varepsilon$ e portanto que $\|F\|_{\tilde{g}} = \|\nabla_{\tilde{g}}\varepsilon\|_{\tilde{g}} = \|\varepsilon'\|_{\tilde{g}}$, e utilizando as desigualdades (2.9) e (2.10) em (2.11) vem

$$\frac{1}{C_2^2}\|\varepsilon'\|_g \leq \frac{1}{C_2}\|\varepsilon'\|_{\tilde{g}} \leq \|F\|_g \leq \frac{1}{C_1}\|\varepsilon'\|_{\tilde{g}} \leq \frac{1}{C_1^2}\|\varepsilon'\|_g \text{ em } \tilde{M}.$$

que é a condição de comparabilidade (C) de ε' e F em $\tilde{M}$.

$\Leftarrow$) Suponha agora que ε' e F satisfazem as condições angular (CA) e de comparabilidade

(C) em $\tilde{M}$. Seja X um campo de vetores tangente em $\tilde{M}$, que pela decomposição (2.5) é dado por $X := X_0 + \frac{\langle\varepsilon', X\rangle}{\langle\varepsilon', F\rangle}F$, onde $X_0 \in Ker\,\varepsilon'$ e $X_1 = \frac{\langle\varepsilon', X\rangle}{\langle\varepsilon', F\rangle}F \in [F]$.

Então, pela condição angular para ε' e F segue a condição angular para ε' e X_1:

$$\langle\varepsilon',\ X_1\rangle^2 = \frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle^2}{\langle\varepsilon',\ F\rangle^2}\langle\varepsilon',\ F\rangle^2 \geq \frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle^2}{\langle\varepsilon',\ F\rangle^2}\alpha^2\,\|\varepsilon'\|_g^2\|F\|_g^2 = \alpha^2\,\|\varepsilon'\|_g^2\|X_1\|_g^2. \tag{CA^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|X\|_{\tilde{g}}^2 &= \|X_0\|_g^2 + \frac{1}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}\langle\varepsilon',\ X_1\rangle^2 \text{ (pela definição de } \tilde{g}) \\
&\geq \|X_0\|_g^2 + \frac{\alpha^2\|\varepsilon'\|_g^2\|X_1\|_g^2}{\langle\varepsilon',\ F\rangle} \text{ (condição angular (CA}^2)) \\
&\geq \|X_0\|_g^2 + \frac{\alpha^2\|\varepsilon'\|_g^2\|X_1\|_g^2}{\|\varepsilon'\|_g\,\|F\|_g} \text{ ((}\langle\varepsilon',\ F\rangle > 0 \text{ e definição de } \|\varepsilon'\|_g) \\
&\geq \|X_0\|_g^2 + \frac{\alpha^2\|\varepsilon'\|_g^2\|X_1\|_g^2}{\tilde{C}_2\|\varepsilon'\|_g\,\|\varepsilon'\|_g} \text{ (2ª desigualdade da condição (C) para } F) \\
&= \|X_0\|_g^2 + C\|X_1\|_g^2 \text{ (tomando } C = \frac{\alpha^2}{\tilde{C}_2} \text{)} \\
&\geq K(\|X_0\|_g^2 + \|X_1\|_g^2) \text{ (tomando } K = min\{1,\ C\} \text{)} \\
&\geq \frac{K}{2}(\|X_0 + X_1\|_g^2) \text{ (pela desigualdade triangular e } 2\|X_0\|_g\|X_1\|_g \leq (\|X_0\|_g^2 + \|X_1\|_g^2) \\
&\geq \frac{K}{2}\|X\|_g^2 \text{ (decomposição de } X).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|X\|_{\tilde{g}}^2 &= \|X_0\|_g^2 + \frac{1}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}\langle\varepsilon',\ X_1\rangle^2 \text{ (pela definição de } \tilde{g}) \\
&= \|X - X_1\|_g^2 + \frac{1}{\langle\varepsilon',\ F\rangle}\langle\varepsilon',\ X_1\rangle^2 \text{ (decomposição de } X) \\
&\leq 2\|X\|_g^2 + 2\|X_1\|_g^2 + \frac{\langle\varepsilon',\ X_1\rangle^2}{\langle\varepsilon',\ F\rangle} \text{ (desigualdade triangular e } 2\|X_0\|_g\|X_1\|_g \leq \|X_0\|_g^2 + \|X_1\|_g^2) \\
&= 2\|X\|_g^2 + 2\frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle^2}{\langle\varepsilon',\ F\rangle^2}\|F\|_g^2 + \frac{\langle\varepsilon',\ X - X_0\rangle^2}{\langle\varepsilon',\ F\rangle} \text{ (definição de } X_1) \\
&= 2\|X\|_g^2 + 2\frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle^2}{\langle\varepsilon',\ F\rangle^2}\|F\|_g^2 + \frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle^2}{\langle\varepsilon',\ F\rangle} \text{ (} X_0 \in Ker\varepsilon') \\
&\leq 2\|X\|_g^2 + 2\frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle^2}{\alpha^2\|\varepsilon'\|_g^2\|F\|_g^2}\|F\|_g^2 + \frac{\langle\varepsilon',\ X\rangle^2}{\alpha\|\varepsilon'\|_g\|F\|_g} \text{ (Condição angular (CA))} \\
&\leq 2\|X\|_g^2 + 2\frac{\|\varepsilon'\|_g^2\|X\|_g^2}{\alpha^2\|\varepsilon'\|_g^2\|F\|_g^2}\|F\|_g^2 + \frac{\|\varepsilon'\|_g^2\|X\|_g^2}{\alpha\|\varepsilon'\|_g\|F\|_g} \text{ (definição de } \|\varepsilon'\|_g) \\
&\leq 2\|X\|_g^2 + \frac{2}{\alpha^2}\|X\|_g^2 + \frac{\|\varepsilon'\|_g^2\|X\|_g^2}{\alpha\tilde{C}_1\|\varepsilon'\|_g\|\varepsilon'\|_g} \text{ (primeira desigualdade de comparabilidade (C))} \\
&\leq \left(2 + \frac{2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha\tilde{C}_1}\right)\|X\|_g^2.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Portanto, (2.12) e (2.13,) mostram que g e $\tilde{g}$ são equivalentes. □

Esse teorema se torna fundamental quando, na condições do teorema 2.3.1, queremos analisar o comportamento assintótico das soluções globais da equação (2.1), o que será feito no teorema 2.3.3 na próxima seção.

2.3.1 Estabilidade Assintótica

Nesta seção analisamos o comportamento assintótico das soluções globais da equação (2.1) independentemente dos resultados obtidos no teorema 2.3.1. Passamos por algumas definições e observações fundamentais.

Definição 2.3.1.1. *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana conexa e $p, q \in M$.Então existe curva C^1 por partes $u : [t_0, t_1] \to M$ tal que $p = u(t_0),\ q = u(t_1)$. A distância riemanniana entre p e q é definida como sendo o ínfimo de todos os comprimentos $L_g(u)$ de curvas C^1 por partes u ligando p a q.*
Assim, se

$$\mathcal{U} = \{u : [t_0, t_1] \to M \mid t_0 \leq t_1,\ e\ u\ é\ curva\ C^1\ por\ partes\ ligando\ p\ a\ q\},$$

$$d_g(u(t_0),\ u(t)) := \inf_{\mathcal{U}} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{u}(s)\|_g ds \right\}.$$

Seja $(M,\ g)$ uma variedade riemanniana e suponha que o problema de valor inicial

$$\dot{u} + F(u) = 0,\ \ u(0) = u_0$$

tem a propriedade de unicidade de solução para cada u_0. Dada uma solução $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M$ do problema de valor inicial, chamamos de conjunto ω-limite de u ao conjunto de todos os pontos de acumulação

$$\omega(u) = \{q \in M : \ \text{existe}\ (t_n) \nearrow \infty \quad \text{e} \quad u(t_n) \to q,\ \text{quando}\ n \to \infty\}$$

e chamamos de conjunto α-limite ao conjunto de todos os pontos de acumulação

$$\alpha(u) = \{q \in M : \ \text{existe}\ (t_n) \searrow -\infty \quad \text{e} \quad u(t_n) \to q,\ \text{quando}\ n \to \infty\}$$

Os conjuntos α-limite e ω-limite de u têm as propriedades dadas na proposição abaixo, e sua prova é essencialmente igual à do caso em que $M = \mathbb{R}^n$, que pode ver vista em (Sotomayor (1979), teorema 3, pag. 245).

Proposição 2.3.1. *Sejam $F : U \to TU$ um campo de vetores de classe C^1 definido num aberto de M e $\gamma^+(p) = \{u_p(t) : t \geq 0\}$ (respectivamente $\gamma^-(p) = \{u_p(t) : t \leq 0\}$) a semi-órbita positiva* *(respectivamente a semi-orbita negativa) do campo F pelo ponto p. Se $\gamma^+(p)$ (respectivamente $\gamma^-(p)$) está contido num compacto $K \subset U$, então:*

(i) $\omega(p) \neq \emptyset$ *(respectivamente,* $\alpha(p) \neq \emptyset$*)* .

(ii) $\omega(p)$ *(respectivamente,* $\alpha(p)$*) é compacto.*

(iii) $\omega(p)$*, (respectivamente,* $\alpha(p)$*) é invariante por F. Isto é, se* $q \in \omega(p)$ *(respectivamente,* $q \in \alpha(p)$*), então a curva integral de F que passa em q está contida em* $\omega(p)$ *(respectivamente, em* $\alpha(p)$*).*

(iv) $\omega(p)$ *(respectivamente,* $\alpha(p)$*) é conexo.*

A proposição a seguir mostra que se um sistema gradiente tem somente pontos de equilíbrio isolados, toda órbita futura (respectivamente, passada) do mesmo, no futuro (respectivamente, passado), ou sai de qualquer compacto da variedade ou tende para um ponto de equilíbrio. Nessas condições, $\omega(p)$ (respectivamente, $\alpha(p)$) ou é vazio ou se reduz a um ponto de equilíbrio.

Proposição 2.3.2 (Propriedades dos Sistemas Gradiente)**.** *Para todo sistema* $\dot{u} = -\nabla_g \varepsilon(u)$ *onde* $\varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função de classe* C^1*, tem-se:*

1. *ε é estritamente decrescente ao longo das soluções (curvas integrais) regulares do sistema.*
2. *O sistema não possui órbitas periódicas.*
3. *Se o sistema possui somente pontos de equilíbrio (singularidades) isolados, então dado $p \in M$, o conjunto $\omega(p)$ (respectivamente $\alpha(p)$) é vazio ou se reduz a um ponto de equilíbrio.*
4. *Se b é um valor regular de ε, então o campo de vetores é perpendicular ao conjunto de nível $\varepsilon^{-1}(b)$.*
5. *Os pontos críticos de ε são os pontos de equilíbrio do sistema.*
6. *Se um ponto crítico é um mínimo isolado de ε, então esse ponto é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

Observe que o item 3 da proposição anterior só é válido devido à hipótese presente no item garantindo que o conjunto de pontos de equilíbrio do sistema é discreto, que é essencialmente fundamental pois existem sistemas gradientes com ponto p cujo conjunto ω-limite é um conjunto infinito de pontos de equilíbrio, mesmo no caso em que a função de Lyapunov em questão é analítica. Para vermos isso, consideremos o seguinte

Exemplo 2 (dado por Lageman (2007) no $\mathbb{R}^2$)**.** *Consideremos o campo de vetores*

$$F(u) = (u_1^2 + u_2^2 - 1)^2 \left((u_1^2 + u_2^2 - 1)u_1 - u_2 \ , \ (u_1^2 + u_2^2 - 1)u_2 + u_1\right)$$

Observemos que os pontos do círculo unitário e a origem são os únicos pontos de equilíbrio do sistema e a função

$$\varepsilon(u_1, u_2) = (u_1^2 + u_2^2 - 1)^2$$

é a função de Lyapunov estrita do sistema para o círculo unitário $S^1 = \left\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 = 1\right\}$, *pois*

$$\langle \varepsilon'(u),\ F(u)\rangle = 4(u_1^2 + u_2^2 - 1)^4(u_1^2 + u_2^2) > 0;\ \ \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\{(0,\ 0)\} \cup S^1\right\}.$$

Escrevendo em coordenadas polares pondo $\begin{cases} u_1 & = rcos\theta \\ \\ u_1 & = rsen\theta \end{cases}$ *temos*

$$\begin{cases} \dot{r}cos\theta - \dot{\theta}rsen\theta = -r(r^2-1)^3cos\theta + r(r^2-1)^2sen\theta \\ \\ \dot{r}sen\theta + \dot{\theta}rcos\theta = -r(r^2-1)^3sen\theta - r(r^2-1)^2cos\theta \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por cosθ, *a segunda por sen*θ *e somando e depois multiplicando a primeira equação por sen*θ, *a segunda por cos*θ *e subtraindo, obtemos o sistema equivalente:*

$$\begin{cases} \dot{r} & = -r(r^2-1)^3 \\ \dot{\varphi} & = -(r^2-1)^2 \end{cases}$$

cujo o comportamento assintótico das soluções é dado na figura abaixo

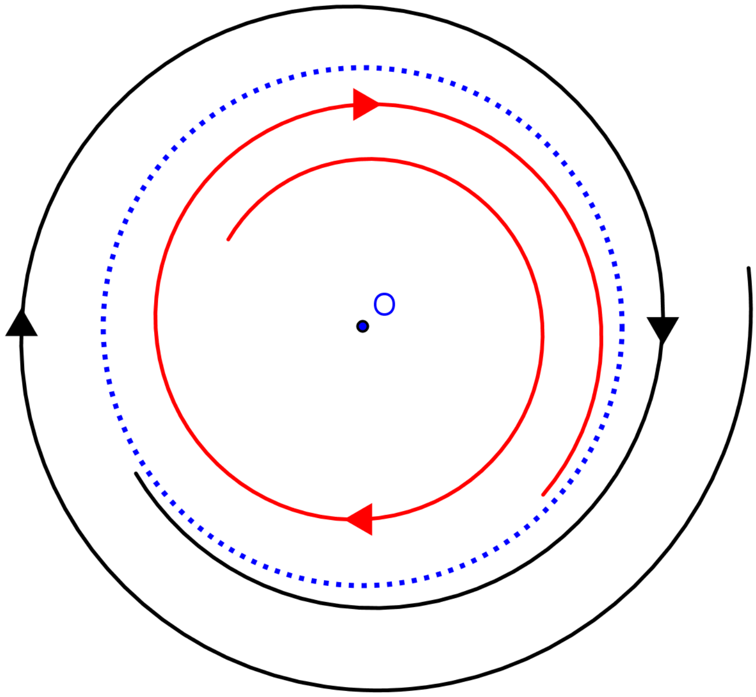

Fig1:Comportamento do campo Ex.2

Observemos que $\dot{\varphi} < 0$ *para todo* $r \neq 1$ *o que mostra neste caso, que as trajetórias do sistema têm percorrem todas no sentido horário e* $\dot{\varphi}$ *apenas se anula em* $r = 1$.

- *Para* $r \in \{0, 1\}$ *tem-se* $\dot{r} = 0$, *isto é, a origem e os pontos do círculo unitário são equilíbrios.*
- *Para* $0 < r < 1$ *tem-se* $\dot{r} > 1$, *logo as soluções cujas condições iniciais encontram-se no interior do círculo unitário tendem para o círculo no futuro.*
- *Para* $r > 1$ *tem-se* $\dot{r} < 1$, *isto é, as soluções cujas condições iniciais encontram-se fora do circulo unitário tendem para o círculo no futuro. Neste caso, percebe-se que o círculo unitário é o único atrator do sistema e portanto, como todas as órbitas têm* ω*-limite não vazio (por serem limitadas no futuro), o* ω*-limite de todos os pontos regulares é o círculo unitário, formado de pontos de equilíbrio. E a origem é o* α*-limite de toda órbita no interior do disco unitário e portanto* $(0, 0)$ *é um repulsor. Observe que, pelo teorema 2.3.1, o sistema é gradiente na métrica* $\tilde{g}$ *em*

$\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\{(0,\ 0)\} \cup S^1\right\}$. *Porém, o conjunto ω-limite de cada ponto regular é o círculo unitário todo.*

Esse exemplo nos motiva a fazer a seguinte pergunta: Quando é que as soluções limitadas de um sistema tipo-gradiente convergem para um ponto de equilíbrio? Equivalentemente, quando é que o conjunto ω-limite das soluções de um sistema tipo-gradiente limitadas no futuro consiste em um único ponto de equilíbrio?

A resposta dessa pergunta para sistemas gradientes clássicos, isto é, sistemas da forma $\dot{u} = -\nabla_g \varepsilon(u)$, foi dada em 1965 por Łojasiewicz, para ε analítica, conforme exposto na introdução. No caso tratado neste trabalho, já que as desigualdades dadas na introdução apenas envolvem uma única métrica riemanniana - a métrica inicial da variedade ambiente onde o campo está definido - torna-se necessário utilizar uma dessas desigualdades de formas a garantir um resultado análogo de convergência assintótica das soluções de (2.1) limitadas no futuro, quando se estiver no contexto do teorema 2.3.1, envolvendo a equivalência das duas métricas conforme garante o teorema 2.3.2. Para tal feito, passamos a definir a desigualdade gradiente modificada de Kurdyka-Łojasiewicz-Simon.

Dizemos que uma função ε satisfaz a desigualdade gradiente de Kurdyka-Łojasiewicz modificada, numa vizinhança V de um ponto de equilíbrio $\bar{\varphi}$ se existe uma função $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ côncava, crescente, com $1/\Theta \in L^1_{loc}([0,\ \infty))$ e $\Theta(s) > 0,\ \forall s > 0$, e tal que

$$\Theta(|\varepsilon(v) - \varepsilon(\bar{\varphi})|) \leq \left\langle \varepsilon'(v),\ \frac{F(v)}{||F(v)||_g} \right\rangle, \forall v \in V. \tag{2.14}$$

A definição abaixo será fundamental para a prova do Teorema 2.3.4 a seguir.

Definição 2.3.1.2. *Uma função mensurável $f : [0,\ \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável se para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < b$ tem-se f integrável em $[a, b]$, e para todo $b > 0$, tem-se*

$$\int_0^b |f(x)|dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^b |f(x)|dx < \infty.$$

Denotamos por $L^1_{loc}[0,\ \infty)$ o espaço das funções localmente integráveis em $[0,\ \infty)$.

Observe que se $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ for contínua em $(0, \infty)$, a primeira condição da definição de função localmente integrável está automaticamente satisfeita, restando apenas verificar a segunda. Esse será o caso que usaremos diversas vezes neste capítulo.

O próximo teorema é uma versão mais geral de teoremas já apresentados em muitas obras que falam sobre convergência de órbitas de sistemas tipo-gradiente a um ponto de equilíbrio e, por sua vez, se aplica independentemente do resultado do teorema 2.3.1, (que exige a comparação das métricas). Esse teorema mostra que uma solução global u da equação (2.1) limitada no futuro converge para um ponto de equilíbrio q mesmo que exista um conjunto de pontos de equilíbrio aderente a q, com as mínimas hipóteses para a F, mostrando assim um enfraquecimento nas hipóteses dos teoremas conhecidos até então, que exigam - além das desigualdades gradientes quer de

Łojasiewicz ou de Łojasiewicz-Simon, - analiticidade da função F em alguns casos, e noutros a condição angular.

Esse teorema, enunciado a seguir, garante que se o ω-limite de u não for vazio, então u converge para um ponto singular, desde que a função de Lyapunov estrita satisfaça a desigualdade gradiente modificada de Kurdyka-Łojasiewicz-Simon (2.14).

Teorema 2.3.3. *Sejam F um campo de vetores tangentes contínuo numa variedade riemanniana (M, g), $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M$ uma solução global para a equação (2.1) e $\varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e de Lyapunov estrita para (2.1). Suponha que existam uma função $\Theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ contínua, com $\Theta(s) > 0$ para $s > 0$, e tal que $1/\Theta \in L^1_{loc}([0, \infty))$, um ponto $\bar{\varphi} \in \omega(u)$ e uma vizinhança $U \subseteq M$ de $\bar{\varphi}$ tais que, para cada $v \in U \cap \tilde{M}$,*

$$\Theta(|\varepsilon(v) - \varepsilon(\bar{\varphi})|) \leq \left\langle \varepsilon'(v), \frac{F(v)}{\|F(v)\|_g} \right\rangle.$$

Então o comprimento da curva u é finito em (M, g) e, em particular, $\lim_{t\to\infty} u(t) = \bar{\varphi}$ em (M, g).

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varepsilon(\bar{\varphi}) = 0$ (caso contrário, tomamos a função $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon(\bar{\varphi})$ de modo a termos $\varepsilon(\bar{\varphi}) = 0$). Uma vez que ε é uma função de Lyapunov estrita, a função $\varepsilon(u(\cdot))$ é decrescente e se $\varepsilon(u(\cdot))$ é constante então u é constante. Como $\bar{\varphi} \in \omega$-limite de u, existe uma sequência crescente $t_n \to \infty$ tal que $u(t_n) \to \bar{\varphi}$, e como ε é contínua, $\varepsilon(u(t_n)) \to \varepsilon(\bar{\varphi})$. Da continuidade e monotonicidade de $\varepsilon \circ u$ resulta que $\varepsilon(u(t)) \to \varepsilon(\bar{\varphi}) = 0$ quando $t \to \infty$.

Se $\varepsilon(u(t_0)) = 0$ para algum $t_0 \geq 0$ então, pelo facto de $\varepsilon(u(\cdot))$ ser decrescente, tem-se $\varepsilon(u(t)) = 0$ para todo $t \geq t_0$, e como a função ε é uma função de Lyapunov estrita, então u é uma função constante para todo $t \geq t_0$ logo, $\lim_{t\to\infty} u(t) = \bar{\varphi}$.

Suponha que $\varepsilon(u(t)) > 0$ para $t \geq 0$. Pela unicidade de soluções de (2.1), resulta que $u(t) \in \tilde{M}$ para todo $t \geq 0$. Seja $\delta > 0$ tal que a bola fechada $\bar{B}(\bar{\varphi}, \delta)$, com respeito a distância d_g induzida por g, esteja contida em U. Seja

$$\Phi(t) := \int_0^t \frac{1}{\Theta(s)} ds,$$

e tomamos $t_0 \geq 0$ suficientemente grande tal que

$$d_g(u(t_0), \bar{\varphi}) \leq \tfrac{\delta}{3} \quad \text{e} \qquad \Phi\left(\varepsilon(u(t_0))\right) < \tfrac{\delta}{3}. \tag{2.15}$$

Seja $t_1 := \inf\{t \geq t_0 : d_g(u(t), \bar{\varphi}) = \delta\}$. Então $t_1 > t_0$, (pois, por u ser contínua, $u^{-1}(S_\delta(\bar{\varphi}))$ é fechado em $[t_0, \infty)$ e $t_0 \notin u^{-1}(S_\delta(\bar{\varphi}))$ já que $u(t_0) \in \bar{B}_{\frac{\delta}{3}}(\bar{\varphi})$). Logo, para todo $t \in [t_0,\, t_1)$ vem

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\Phi\,(\varepsilon(u(t))) &= \Phi'\,(\varepsilon(u(t)))\left(-\frac{d}{dt}\varepsilon(u(t))\right) \text{ (pela regra da cadeia)}\\
&= \frac{1}{\Theta(\varepsilon(u(t))} \langle \varepsilon'(u(t)),\ F(u(t))\rangle \text{ (definição de } -\frac{d}{dt}\varepsilon(u(t))\text{)}\\
&\geq \frac{\|F(u)\|_g}{\Theta(\varepsilon(u(t)))}\Theta(\,|\varepsilon(u(t)) - \varepsilon(\bar{\varphi})|\,) \text{ (por (2.14), pois } u(t) \in U \cap \tilde{M}, \forall t \in [t_0, t_1))\\
&\geq \|F(u)\|_g \quad \text{(pois, } \varepsilon(\bar{\varphi}) = 0 \ e\ \varepsilon(u(t)) > 0)\\
&= \|\dot{u}(t)\|_g \quad \text{(pois } u \text{ é solução de (2.1))}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Para todo $t \in [t_0,\, t_1)$ vem

$$\begin{aligned}
d_g(u(t),\, \bar{\varphi}) &\leq d_g(u(t),\, u(t_0)) + d_g(u(t_0),\, \bar{\varphi}) \text{ (desigualdade triangular)}\\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|\dot{u}(s)\|_g ds + d_g(u(t_0),\, \bar{\varphi}) \text{ (definição de } d_g(p,q))\\
&\leq -\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\{\Phi\,(\varepsilon(u(s)))\}ds + d_g(u(t_0),\, \bar{\varphi}) \text{ (por (2.16))}\\
&\leq \Phi\,(\varepsilon(u(t_0))) + d_g(u(t_0),\, \bar{\varphi}) \text{ (teorema fundamental do cálculo)}\\
&\leq \frac{2\delta}{3} \text{ (usando as relações (2.15))}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Seja $(t_0^n) \nearrow \infty$ tal que $d_g(u(t_0^n),\, \bar{\varphi}) \leq \frac{\delta}{3}$ ou seja $d_g(u(t_0^n),\, \bar{\varphi}) \longrightarrow 0$. De modo análogo à definição anterior de t_1, podemos definir uma sequência (t_1^n) onde $t_1^n = \inf\{t^n \geq t_0^n : d_g(u(t^n),\, \bar{\varphi}) = \delta\}$.

Suponha agora que que $t_1^n \neq +\infty$ para algum n. Pela definição de t_1^n e pela continuidade de u tem-se $d_g(u(t_1^n),\, \bar{\varphi}) = \delta$, mas da desigualdade (2.17) vem $d_g(u(t_1^n),\, \bar{\varphi}) \leq \frac{2\delta}{3}$, o que leva a uma contradição. Logo, $t_1^n = +\infty$ para todo n. Assim, pela estimativa (2.16) e do fato de $\dot{u}$ ser contínua, tem-se $\|\dot{u}\|_g \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Isso mostra que o comprimento da curva u é finito em $(M,\ g)$ (uma vez que $L_g(u) = \int_0^\infty \|\dot{u}(s)\|_g ds$).

Dados $t_1,\ t_2 \geq t_0$ tem-se, pela desigualdade triangular,

$$d_g(u(t_3),\, u(t_2)) \leq d_g(u(t_3),\, \bar{\varphi}) + d_g(u(t_2),\, \bar{\varphi}) \leq \frac{4\delta}{3}.$$

Da arbitrariedade de δ segue do critério de de Cauchy para limite de funções que $\lim_{t\to\infty} u(t)$ existe, e do fato de $\bar{\varphi} \in \omega(u)$, tem-se $\lim_{t\to\infty} u(t) = \bar{\varphi}$. □

Aplicando o Teorema 2.3.3 com $\Theta(s) = \frac{1}{C}s^{1-\theta}$ para $\theta \in (0,\ 1)$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1. *Sejam M, F e ε tal como no teorema 2.3.3. Seja $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M$ uma solução global para (2.1). Se existem $\bar{\varphi} \in \omega(u)$, $\theta \in (0,\ 1)$, $C \geq 0$ e uma vizinhança $U \subseteq M$ de $\bar{\varphi}$ tal que para todo $v \in U$*

$$|\varepsilon(v) - \varepsilon(\bar{\varphi})|^{1-\theta} \leq C \left\langle \varepsilon'(v),\ \frac{F(v)}{\|F(v)\|_g} \right\rangle, \tag{2.18}$$

então u tem comprimento finito em $(M,\ g)$ e $\lim_{t\to\infty} u(t) = \bar{\varphi}$ em $(M,\ \bar{\varphi})$.

Notemos que a desigualdade gradiente de Łojasiewicz-Simon (2) e a de Kurdyka-Łojasiewicz-Simon (3) apresentadas na Introdução deste trabalho envolvem apenas a função ε, enquanto que a desigualdade modificada de Kurdyka-Łojasiewicz-Simon (2.14) e a desigualdade modificada de Łojasiewicz-Simon (2.18) envolvem também o campo F. De fato, a norma da derivada ε' (que aparece no lado direito de (2) e de (3)) são substituídas pela derivada direcional na direção normalizada de F.

Podemos escrever as duas desigualdades modificadas (2.14) e (2.18) com uma cara mais geométrica: para isso, observemos que da equação (2.14) obtemos, para $\varepsilon(v) > \varepsilon(\bar{\varphi})$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon'(v),\ \frac{F(v)}{\|F(v)\|_g} \right\rangle &\geq \Theta\left(|\varepsilon(v) - \varepsilon(\bar{\varphi})|\right) \\
\left\langle \frac{\varepsilon'(v)}{\Theta\left(|\varepsilon(v) - \varepsilon(\bar{\varphi})|\right)},\ \frac{F(v)}{\|F(v)\|_g} \right\rangle &\geq 1 \\
\left\langle \left(\Theta\left(|\varepsilon(v) - \varepsilon(\bar{\varphi})|\right)\right)',\ \frac{F(v)}{\|F(v)\|_g} \right\rangle &\geq 1 \text{ (pois } \varepsilon(v) > \varepsilon(\bar{\varphi})).
\end{aligned}$$

Analogamente, para a equação (2.18) temos

$$\begin{aligned}
C\left\langle \varepsilon'(v),\ \frac{F(v)}{\|F(v)\|_g} \right\rangle &\geq |\varepsilon(v) - \varepsilon(\bar{\varphi})|^{1-\theta} \\
\left\langle \frac{\varepsilon'(v)}{|\varepsilon(v) - \varepsilon(\bar{\varphi})|^{1-\theta}},\ \frac{F(v)}{\|F(v)\|_g} \right\rangle &\geq \frac{1}{C} \\
\left\langle \left(|\varepsilon(v) - \varepsilon(\bar{\varphi})|^{\theta}\right)',\ \frac{F(v)}{\|F(v)\|_g} \right\rangle &\geq \frac{1}{C},
\end{aligned}$$

ambas as desigualdades valendo numa vizinhança de $\bar{\varphi}$.

Observação 6. *Uma observação importante consiste no seguinte: Se $\tilde{g}$ é a métrica construída no Teorema 2.3.1, então a desigualdade modificada de Kurdyka-Łojasiewicz-Simon (2.14) em $\tilde{M}$ se* *transforma na seguinte desigualdade:*

$$
\begin{aligned}
\Theta\left(|\varepsilon(v)-\varepsilon(\bar{\varphi})|\right) &\leq \left\langle \varepsilon'(v),\ \frac{F(v)}{||F(v)||_g} \right\rangle \\
&\leq \left\langle \nabla_{\tilde{g}}\varepsilon,\ \frac{\nabla_{\tilde{g}}\varepsilon}{||F(v)||_g} \right\rangle \\
&\leq \frac{||\nabla_{\tilde{g}}\varepsilon(v)||_{\tilde{g}}\ ||\nabla_{\tilde{g}}\varepsilon(v)||_{\tilde{g}}}{||F(v)||_g} \\
&\leq ||\varepsilon'(v)||_{\tilde{g}} \frac{||F(v)||_{\tilde{g}}}{||F(v)||_g}
\end{aligned}
$$

na qual a norma de ε' com respeito a nova métrica $\tilde{g}$ e a relação entre as duas métricas aparece. Daí, se as duas métricas g e $\tilde{g}$ forem equivalentes, então as desigualdade (2.14) se reduz a à desigualdade de Kurdyka-Łojasiewicz-Simon (3).

Portanto, os resultados existentes na literatura que garantem convergência são semelhantes ao teorema 2.3.3, utilizando a desigualdade gradiente de Łojasiewicz-Simon (2) e a condição angular (AC) como ocorre em (Absil et al. (2005), teorema 2.2), (Lageman (2007), teorema 1- que estendeu até ao caso de equações diferenciais em dimensões infinita) e (Chill et al. (2009), teorema 1). Esses resultados (no caso de equações diferenciais em dimensão finita) podem ser vistos como consequências do teorema 2.3.3 ou do seu corolário 1, porque a desigualdade de Łojasiewicz-Simon (2) e a condição angular (CA) implicam a desigualdade modificada de Łojasiewicz-Simon (2.18).

Existem situações em que a desigualdade modificada de Łojasiewicz (2.18) é satisfeita mas a condição angular (CA) não. Consideremos o seguinte exemplo elementar:

Exemplo 3. *Dado $\alpha \geq 0$ consideremos o campo de vetores*

$$F(u_1, u_2) = (||u||_{g_e}^{\alpha} u_1 - u_2, u_1 + ||u||_{g_e}^{\alpha} u_2),$$

e a função de Lyapunov estrita

$$\varepsilon(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2),$$

ambas definidas no disco unitário aberto $M \subset \mathbb{R}^2$ munido da métrica euclideana g_e.
Notemos que $(0,0)$ é o único ponto em que F se anula.

Dado $u = (u_1, u_2) \in M$ temos

- $\nabla_{g_e}\varepsilon(u) = (u_1, u_2) \Longrightarrow ||\nabla_{g_e}\varepsilon(u)||_{g_e} = ||u||_{g_e} = ||\varepsilon'(u)||_{g_e} < 1.$

- $\langle \varepsilon'(u),\ F(u)\rangle = \langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u),\ F(u)\rangle_{g_e} = \langle (u_1, u_2),\ (||u||_{g_e}^{\alpha} u_1 - u_2, u_1 + ||u||_{g_e}^{\alpha} u_2)\rangle_{g_e} = ||u||_{g_e}^{\alpha+2}$

$$\Rightarrow \langle \varepsilon'(u),\ F(u)\rangle > 0 \ \ \forall u \neq 0.$$

- $\|F(u)\| = \|u\|_{g_e}\sqrt{1+\|u\|_{g_e}^{2\alpha}}$.

Observemos que para $\alpha = 0$,

$$\frac{\|u\|_{g_e}^{\alpha+2}}{\|u\|_{g_e}^{2}\sqrt{1+\|u\|_{g_e}^{2\alpha}}} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, tomando qualquer constante $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$, F e ε satisfazem a condição angular

$$\langle \varepsilon'(u),\ F(u)\rangle \geq \beta\|\varepsilon'(u)\|_{g_e}\,\|F(u)\|.$$

Para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|u\|_{g_e}^{\alpha+2}}{\|u\|_{g_e}^{2}\sqrt{1+\|u\|_{g_e}^{2\alpha}}} = \lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|u\|_{g_e}^{\alpha}}{\sqrt{1+\|u\|_{g_e}^{2\alpha}}} = 0.$$

Logo, para cada $\alpha > 0$, a condição angular (AC) não é verificada em nenhuma vizinhança da origem.

Porém, para u próximo da origem e $\theta = \frac{1}{2}$ observe que

$$\frac{|\varepsilon(u)-\varepsilon(0)|^{\frac{1}{2}}}{\|\varepsilon'(u)\|_{g_e}} = \frac{\|u\|_{g_e}}{\sqrt{2}\|u\|_{g_e}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Portanto para $C \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ a desigualdade de Łojasiewicz-Simon (2) é satisfeita.

Por outro lado, a desigualdade modificada de Łojasiewicz-Simon para a função ε é verificada para todo $\alpha \geq 0$. Com efeito, se $0 \leq \alpha < 1$ e $0 < \theta \leq \frac{1-\alpha}{2}$ temos:

$$\langle \varepsilon'(u),\ \frac{F(u)}{\|F(u)\|_{g_e}}\rangle = \frac{\|u\|_{g_e}^{\alpha+2}}{\|u\|_{g_e}\sqrt{1+\|u\|_{g_e}^{2\alpha}}} = \frac{\|u\|_{g_e}^{\alpha+1}}{\sqrt{1+\|u\|_{g_e}^{2\alpha}}} \geq \frac{\|u\|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\|u\|}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|^{2(1-\theta)} \geq \frac{1}{4}\varepsilon^{1-\theta}.$$

2.3.2 Aplicação ao Problema de Segunda Ordem

Nesta seção, estudaremos o problema de segunda ordem dado pela equação diferencial ordinária

$$\ddot{u} + G(u,\ \dot{u}) + \nabla E(u) = 0, \tag{2.19}$$

onde $E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são duas funções de classe C^2, e supomos que o segundo termo dessa equação representa um amortecimento no sentido de que, para todo $u,\ v \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle G(u,\ v),\ v\rangle &\geq g(\|v\|)\,\|v\|^2, \\ \|G(u,\ v)\| &\leq cg(\|v\|)\,\|v\|, \\ \|\nabla G(u,\ v)\| &\leq cg(\|v\|), \end{aligned} \tag{2.20}$$

em que $c \geq 0$ é uma constante e $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua, côncava e crescente tal que $g(s) > 0$ para $s > 0$.

Ao longo desta seção, $\|\cdot\|$ representa a norma Euclideana.

A primeira desigualdade em (2.20) é uma estimativa do amortecimento na direção da velocidade v. Transformando a equação de segunda ordem (2.19) num problema de primeira ordem, o teorema 2.3.4 a seguir garante a convergência de soluções globais limitadas de (2.19) sob certas hipóteses. Para tal resultado, precisamos de alguns resultados preparatórios.

Os três lemas a seguir são fundamentais para a prova do teorema 2.3.4 apresentado mais adiante, que é uma aplicação do teorema 2.3.3 ao problema (2.19).

Lema 2.3.1. *Seja $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função contínua, côncava e crescente. Então:*

(a) Para todo $u,\ v \geq 0$ tem-se $h(u+v) \leq h(u) + h(v)$.

(b) Para todo $C > 0$ e todo $u \geq 0$ tem-se $h(Cu) \leq max\{C,\ 1\}h(u)$.

(c) g é uniformemente contínua.

Demonstração.

(a) Dados $x,\ y \in \mathbb{R}_+$ como h é côncava, para todo $\lambda \in [0,\ 1]$ tem-se

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y).$$

$$\begin{aligned} &\text{Para } \lambda = \frac{u}{u+v},\ x = u+v \text{ e } y = 0 \text{ tem-se } \frac{u}{u+v}h(u+v) + \frac{v}{u+v}h(0) \leq h(u). \\ &\text{Para } \lambda = \frac{v}{u+v},\ x = u+v \text{ e } y = 0 \text{ tem-se } \frac{v}{u+v}h(u+v) + \frac{u}{u+v}h(0) \leq h(v). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Somando as duas desigualdades e sabendo que $h(0) \geq 0$ tem-se a prova de (a).

(b) Dado $u \geq 0$, para $C > 0,\ C \leq 1$, tem-se $Cu \leq u$ e como h é crescente tem-se $h(Cu) \leq h(u)$. Se $C \geq 1$, para $\lambda = \frac{1}{C}$, e $x = Cu$ e $y = 0$ na definição de função côncava resulta que $\frac{1}{C}h(Cu) \leq \frac{1}{C}h(Cu) + \frac{C-1}{C}h(0) \leq h(u)$. Em qualquer dos casos resulta $h(Cu) \leq max\{C,\ 1\}h(u)$.

(c) Por (a), para $b \geq a$ tem-se $g(b) = g(a+(b-a)) \leq g(a)+g(b-a)$, donde $0 \leq g(b)-g(a) \leq g(b-a)$. Da continuidade de g em 0 vem que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < b-a < \delta$ tem-se $0 \leq g(b) - g(a) \leq g(b-a) \leq \epsilon$.

□

Lema 2.3.2. *Sejam $r,\ s \in C(\mathbb{R}_+)$ não-negativas e crescentes. Então para todo $u \geq 0$ e $v \geq 0$,*

$$r(u)s(v) \leq r(u)s(u) + r(v)s(v).$$

Demonstração. Consideremos a função $g(u,v) = r(u)s(u)+r(v)s(v)-r(u)s(v)$. Usando a monotonicidade de r e s e o fato de serem ambas não negativas temos $g(u,v) = r(u)s(u)+(r(v)-r(u))s(v) \geq 0$ se $v \geq u$, e $g(u,v) = r(v)s(v) + r(u)(s(u) - s(v)) \geq 0$ se $u \geq v$, e o resultado fica provado. □

Lema 2.3.3 (Lema de Barbalat)**.** *Se $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua tal que $\int_0^\infty |f(s)|\, ds < +\infty$ então*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

Demonstração. Suponha por contradição que $\lim_{t\to\infty} f(t) \neq 0$. Então existe uma constante real $M_1 > 0$ tal que para cada $T > 0$ podemos encontrar $t_1 \geq T$ tal que $|f(t_1)| \geq M_1$. Como f é uniformemente contínua, para esse M_1, existe $M_2 > 0$, tal que se $0 \leq \delta \leq M_2$, tem-se $|f(t+\delta) - f(t)| < \frac{M_1}{2}$ para todo $t \geq 0$. Em particular, temos $|f(t) - f(t_1)| < \frac{M_1}{2}$ para t no intervalo $[t_1,\ t_1 + M_2]$.

Pela desigualdade triangular, obtemos

$$|\,f(t)\,| = |f(t)-f(t_1)+f(t_1)| \geq |f(t_1)|-|f(t)-f(t_1)| \geq M_1 - \frac{M_1}{2} = \frac{M_1}{2}, \quad \text{para todo } t \in [t_1,\ t_1 + M_2],$$

Integrando $|f(t)|$ de t_1 a $t_1 + M_2$ e usando essa desigualdade, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_1+M_2} |\,f(s)\,|ds \geq \frac{M_1}{2} M_2.$$

Tal como mostrado anteriormente, podemos encontrar $t_2 \geq t_1 + M_2$ com $|f(t_2)| \geq M_1$ e teremos $|f(t) - f(t_2)| < \frac{M_1}{2}$ para t no intervalo $[t_1,\ t_1 + M_2]$ e portanto

$$\int_{t_2}^{t_2+M_2} |\,f(s)\,|ds \geq \frac{M_1}{2} M_2.$$

Repetindo o argumento infinitas vezes, pode-se concluir que existe uma sequência $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ com $t_i + M_2 \leq t_{i+1}$, $i = 1,2,3,...$, tal que

$$\int_{t_i}^{t_i+M_2} |\,f(s)\,|ds \geq \frac{M_1}{2} M_2, \quad i = 1,2,3,...,$$

Portanto

$$\int_0^\infty |\,f(s)\,|ds \geq \sum_{i=1}^\infty \int_{t_i}^{t_i+M_2} |\,f(s)\,|ds \geq \frac{M_1}{2} \sum_{i=1}^\infty M_2 = \infty.$$

Isso contradiz a hipótese de que $\int_0^\infty |f(s)|\, ds < +\infty$. Portanto $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. □

Antes de tratarmos o principal assunto dessa seção, introduziremos algumas definições e notações úteis para uma melhor compreensão da aplicação.

Uma função $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$ diz-se essencialmente limitada se existe uma constante $K > 0$ tal que $\|u(t)\| \leq K$ exceto num conjunto de medida nula de $\mathbb{R}_+$. O ínfimo de tais valores de K é chamado supremo essencial de $\|u(.)\|$ em $\mathbb{R}_+$ e é denotado por $ess\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|u(t)\|$.

Denotamos por $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções essencialmente limitadas de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}^N$ munido da "seminorma" $\|u\|_\infty := ess\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|u(t)\|$.

$$L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N;\ u \text{ é essencialmente limitada}\}.$$

Se identificando duas funções de $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$ cuja diferença tem $\|\ \|_\infty$ nula, essa semi-norma define naturalmente uma norma no espaço quociente, que o torna completo.

O conjunto das funções essencialmente limitadas $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$ com derivadas até a segunda ordem $\dot{u},\ \ddot{u}$ essencialmente limitadas, com a norma $|u|_{2,\infty} = max\{\|u\|_\infty, \|\dot{u}\|_\infty, \|\ddot{u}\|_\infty\}$, é denotado por

$$W^{2,\infty} = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N);\ \dot{u},\ \ddot{u} \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)\}.$$

Teorema 2.3.4. *Seja $u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ uma solução (global) limitada de (2.19). Suponha que existam $\bar{\varphi} \in \omega(u)$, uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\bar{\varphi}$ e uma função contínua crescente, côncava e não negativa $\Theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tais que para todo $v \in U$,*

$$\Theta(|E(v) - E(\bar{\varphi})|) \leq \| \nabla E(v)\|.$$

Suponha que $\Theta(s) \leq c\sqrt{s}$ para algum $c > 0$ e para todo $s > 0$ suficientemente pequeno, e que $s \mapsto 1/(\Theta(s)g(\Theta(s))) \in L^1_{loc}([0, \infty))$.
Então u tem comprimento finito e, em particular, $\lim_{t\to\infty} u(t) = \bar{\varphi}$.

A prova desse teorema baseia-se no seguinte roteiro:

1º) Fazemos o produto interno de ambos os membros da equação (2.19) por $\dot{u}$ e integramos de 0 até t, de forma a mostrar que $\lim_{t\to\infty} \dot{u}(t) = 0$, utilizando o lema de Barbalate (2.3.3).

2º Transformamos a equação (2.19) num sistema de 1ª ordem, definimos uma função auxiliar e mostramos, usando as estimativas, que tal função é de Lyapunov estrita para (2.19).

3º Utilizamos as hipóteses do Teorema 2.3.4 para verificamos a validade da desigualdade adaptada de Kurdyka-Łojasiewicz-Simon (2.14) para a função de Lyapunov estrita encontrada e concluímos a convergência aplicando o teorema 2.3.3.

Demonstração.

I Passo) Provar que $\lim_{t\to\infty} \|\dot{u}(t)\| = 0$.

Fazendo o produto interno de ambos os membros da equação (2.19) por $\dot{u}$ e em seguida integrando de 0 à t, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^t \{\langle \ddot{u}(s),\, \dot{u}(s)\rangle + \langle G(u(s),\, \dot{u}(s)),\, \dot{u}(s)\rangle + \langle \nabla E(u(s)),\, \dot{u}(s)\rangle\}\, ds &= 0\\
\int_0^t \left\{\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\dot{u}(s)\|^2 + \langle G(u(s),\, \dot{u}(s)),\, \dot{u}(s)\rangle + \frac{d}{ds}E(u(s))\right\} ds &= 0\\
\frac{1}{2}\{\|\dot{u}(t)\|^2 - \|\dot{u}(0)\|^2\} + E(u(t)) - E(u(0)) + \int_0^t \langle G(u(s),\, \dot{u}(s)),\, \dot{u}(s)\rangle\, ds &= 0
\end{aligned}$$

e de (2.20) decorre que

$$\int_0^t g(\|\dot{u}(s)\|)\|\dot{u}(s)\|^2 + \frac{1}{2}\|\dot{u}(t)\|^2 + E(u(t)) \leq \frac{1}{2}\|\dot{u}(0)\|^2 + E(u(0))$$

Como u e $\dot{u}$ são limitadas e E é contínua em $\mathbb{R}^n$ segue que

$$\int_0^\infty g(\|\dot{u}(s)\|)\|\dot{u}(s)\|^2 ds < +\infty.$$

Observemos que:

(i) Composta de funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua.

(ii) Como $\ddot{u}$ é limitada, $\dot{u}$ é Lipschitziana com constante $K = \|\ddot{u}\|_\infty$, portanto é uniformemente contínua.

(iii) Pelo lema 2.3.1(a) e o item (i), segue que $g(\|\dot{u}(.)\|)$ é uniformemente contínua.

Vamos mostrar que $g(\|\dot{u}\|)\|\dot{u}\|^2$ é uniformemente contínua.

Com efeito,

Seja M = $\|\dot{u}\|_\infty$ e sejam $t_1, t_2 \in [0, \infty)$. Podemos supor spg que $\|\dot{u}(t_1)\| \leq \|\dot{u}(t_2)\| \leq M$.

Então

$$\begin{aligned}
&\left| g(\|\dot{u}(t_2)\|)\, \|\dot{u}(t_2)\|^2 - g(\|\dot{u}(t_1)\|)\, \|\dot{u}(t_1)\|^2 \right|\\
=\;& g(\|\dot{u}(t_2)\|)\, \|\dot{u}(t_2)\|^2 - g(\|\dot{u}(t_1)\|)\, \|\dot{u}(t_1)\|^2\\
=\;& g(\|\dot{u}(t_2)\|)\, \left(\|\dot{u}(t_2)\|^2 - \|\dot{u}(t_1)\|^2\right) + (g(\|\dot{u}(t_2)\|) - g(\|\dot{u}(t_1)\|))\, \|\dot{u}(t_1)\|^2\\
\leq\;& g(\|\dot{u}(t_2)\|)\, (\|\dot{u}(t_2)\| + \|\dot{u}(t_1)\|)\, (\|\dot{u}(t_2)\| - \|\dot{u}(t_1)\|) + (g(\|\dot{u}(t_2)\|) - g(\|\dot{u}(t_1)\|))\, \|\dot{u}(t_1)\|^2\\
\leq\;& 2Mg(M)\, \|\dot{u}(t_2) - \dot{u}(t_1)\| + M^2 \left| g(\|\dot{u}(t_2)\|) - g(\|\dot{u}(t_1)\|) \right|.
\end{aligned}$$

Como $\dot{u}$ e $g(\|\dot{u}(.)\|)$ são uniformemente contínua, resulta da desigualdade acima que $g(\|\dot{u}(.)\|)\, \|\dot{u}(.)\|^2$ é uniformemente contínua.

Pelo lema 2.3.3, tem-se $lim_{t\to\infty} g(\|\dot{u}(t)\|)\|\dot{u}(t)\|^2 = 0$. Como por hipótese $g(s) > 0$ sempre que $s > 0$, e g é crescente, isto implica

$$lim_{t\to\infty}\|\dot{u}(t)\| = 0$$

e portanto, $lim_{t\to\infty}\dot{u}(t) = 0$.

II Passo) Notemos que u é uma solução global de (2.19) se e somente se $(u, \dot{u})$ é uma solução global para o seguinte problema

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{2.22}$$

onde

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ G(u, v) + \nabla E(u) \end{pmatrix}.$$

Como u e $\dot{u}$ são limitadas, podemos tomar uma bola fechada $B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ suficientemente grande, vizinhança do fecho da imagem de $(u, \dot{u})$. Uma vez que $lim_{t\to\infty}||\dot{u}(t)|| = 0$, usando a hipótese de que $\bar{\varphi} \in \omega(u)$ concluímos que $(\bar{\varphi}, 0)$ pertence ao conjunto ω-limite de $(u, \dot{u})$, e portanto está no interior de B e é ponto de equilíbrio de (2.22).

Usando a limitação uniforme de cada função contínua em B, existe uma constante K tal que

$$\max\{g(||v||),\ ||G(u, v)||,\ ||\nabla G(u, v)||,\ ||\nabla E(u)||\} \leq K$$

e

$$\max\{g(||\nabla E(u)||),\ ||G(u, \nabla E(u))||,\ ||\nabla G(u, \nabla E(u))|| \leq K,$$

para todo $(u, v) \in B$. Seguindo a ideia da prova dada por Chergui (2008), definimos, para cada $\epsilon > 0$ pequeno, a função

$$\varepsilon(u, v) := \frac{1}{2}||v||^2 + E(u) + \epsilon\langle G(u, \nabla E(u)),\ v\rangle.$$

Mostremos agora que ε é uma função de Lyapunov estrita para (2.22) em B, se $\epsilon > 0$ for suficientemente pequeno.

O gradiente de ε é dado por

$$\nabla_{g_e}\varepsilon(u,\ v) \;=\; \left(\ \nabla_{g_e}E(u) + \epsilon\,\nabla_{g_e}G\Big(u,\ \nabla_{g_e}E(u)\Big)\Big(Id,\ \nabla^2_{g_e}E(u)\Big)v\ ,\ \ v + \epsilon\,G\Big(u,\ \nabla_{g_e}E(u)\Big)\ \right),$$

onde $\nabla^2_{g_e}E(u)$ denota a matriz hessiana de E. Assim sendo, a derivada de ε ao longo de $(u(t),\ v(t))$ é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varepsilon(u(t),v(t)) &= \dot{\varepsilon}(u,v) \qquad (2.23)\\
&= -\langle \varepsilon'(u,v), F(u,v)\rangle = -\langle \nabla_{g_e}\varepsilon(u,\ v), F(u,v)\rangle_{g_e}\\
&= -\big(-\langle \nabla_{g_e}E(u)\,,\ v\rangle_{g_e} - \epsilon\big\langle \nabla_{g_e}G\left(u, \nabla_{g_e}E(u)\right)\left(Id, \nabla^2_{g_e}E(u)\right)v, v\big\rangle_{g_e} + \langle G(u,v)\,,\ v\rangle_{g_e}\big)\\
&- \left(\langle \nabla_{g_e}E(u)\,,\ v\rangle_{g_e} + \epsilon\,\langle G\left(u,\ \nabla_{g_e}E(u)\right),\ G(u,v)\rangle_{g_e} + \epsilon\,\langle G\left(u,\ \nabla_{g_e}E(u)\right),\ \nabla_{g_e}E(u)\rangle_{g_e}\right)\\
&= -\big(\langle G(u,v),v\rangle_{g_e} - \epsilon\big\langle \nabla G(u,\nabla_{g_e}E(u))(Id,\nabla^2_{g_e}E(u))v, v\big\rangle_{g_e}\big)\\
&- \big(\epsilon\big\langle \nabla_{g_e}G(u,\nabla_{g_e}E(u)), G(u,v)\big\rangle_{g_e} + \epsilon\big\langle G(u,\nabla_{g_e}E(u)), \nabla_{g_e}E(u)\big\rangle_{g_e}\big).
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela segunda linha de (2.20), para todo $(u,v)\in B$, podemos estimar cada uma das expressões envolvidas na equação da derivada de ε ao longo da solução $(u(t),v(t))$ como segue:

- $$\begin{aligned}|\epsilon\langle G(u,\nabla E(u)), G(u,v)\rangle| &\leq \epsilon\|G(u,\nabla E(u))\|\,\|G(u,v)\|\\ &\leq c^2\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|\,g(\|v\|)\,\|v\| \text{ (segunda linha de (2.20)).}\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\epsilon\Big(\frac{1}{2}g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\| - Kc^2 g(\|v\|)\,\|v\|\Big)^2 &\geqq 0\\
\epsilon\frac{1}{4}(g(\|\nabla E(u)\|))^2\,\|\nabla E(u)\|^2 + \epsilon K^2c^4(g(\|v\|))^2\,\|v\|^2 - \epsilon Kc^2 g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|\,g(\|v\|)\,\|v\| &\geqq 0
\end{aligned}$$

Utilizando as estimativas $g(\|\nabla E(u)\|)\leq K$ e $g(\|v\|)\leq K$ tem-se:

$$c^2\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|\,g(\|v\|)\,\|v\| \leq \frac{1}{4}\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 + K^2c^4\epsilon g(\|v\|)\,\|v\|^2.$$

Com essa estimativa resulta:

$$|\epsilon\langle G(u,\nabla E(u)), G(u,v)\rangle| \leq \frac{1}{4}\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 + C_1\epsilon g(\|v\|)\,\|v\|^2,\ \text{com } C_1 = K^2c^4.$$

Utilizando novamente a estimativa de G, o facto de g ser crescente e o lema 2.3.1 (b), para toda $(u,v)\in B$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
\bullet\ |\epsilon\langle \nabla G(u,\nabla E(u))(Id,\nabla^2 E(u))v, v\rangle| &\leq \epsilon\|\nabla G(u,\nabla E(u))\|\,(1+\|\nabla^2 E(u)\|)\|v\|^2 \\
&\leq C_2\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|v\|^2 \quad \left(C_2 \geq c(1+\|\nabla^2 E(u)\|), \forall u \in B\right) \\
&\leq \begin{cases} \frac{1}{4}\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2, & se\ \ 2\sqrt{C_2}\,\|v\| \leq \|\nabla E(u)\| \\ C_2\epsilon g(\|2\sqrt{C_2}\,\|v\|)\,\|v\|^2, & se\ \ 2\sqrt{C_2}\,\|v\| \geq \|\nabla E(u)\| \end{cases} \\
&\leq \frac{1}{4}\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 + C_2\epsilon g(2\sqrt{C_2}\,\|v\|)\,\|v\|^2 \\
&\leq \frac{1}{4}\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\|\nabla E(u)\|^2 + C_3\epsilon g(\|v\|)\|v\|^2 (\text{lema } 2.3.1(\text{b})),
\end{aligned}
$$

onde $C_3 = max\left\{C_2,\ 2\sqrt{C_2^3}\right\}$.
Usando essas duas últimas desigualdades e a primeira desigualdade de (2.20) das hipóteses sobre G reescritas abaixo,

$$
\begin{aligned}
\langle G(u,v), v\rangle &\geq g(\|v\|)\,\|v\|^2 \quad \text{e} \\
\epsilon\langle G(u,\nabla E(u)), \nabla E(u)\rangle &\geq \epsilon\, g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2,
\end{aligned}
$$

obtemos, para todo $(u,v) \in B$,

$$
\begin{aligned}
\langle \varepsilon'(u,v), F(u,v)\rangle &\geq g(\|v\|)\,\|v\|^2 - \frac{1}{4}\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 - C_3\epsilon g(\|v\|)\,\|v\|^2 + \\
&- \frac{1}{4}\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 - C_1\epsilon g(\|v\|)\,\|v\|^2 + \epsilon\, g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 \\
&= (1-(C_1+C_3)\epsilon) g(\|v\|)\,\|v\|^2 + \frac{1}{2}\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Em particular, para $\epsilon \geq 0$ pequeno (a saber: $\epsilon < \frac{1}{C_1+C_3}$), tem-se:

$$\dot{\varepsilon} = -\langle \varepsilon'(u,v), F(u,v)\rangle < 0 \ \text{ exceto se } \ g(\|v\|)\,\|v\|^2 = 0 \ \text{ e } \ g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 = 0,$$

caso em que $G(u,v) = 0$ por (2.20), $v = 0$ e $\nabla E(u) = 0$. Portanto, em tal caso, $F(u,v) = 0$.

Assim, em B, $\dot{\varepsilon}(u,v) < 0$ exceto nos pontos em que $F(u,v) = 0 = F(\bar{\varphi},0)$, e com isso conclui-se que ε é função de Lyapunov estrita para (2.22) na bola B.

III Passo) De,

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} -v \\ G(u,v) + \nabla E(u) \end{pmatrix}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
\|F(u,v)\| &\leq \|v\| + \|G(u,v) + \nabla E(u)\| \\
&\leq \|v\| + \|G(u,v)\| + \|\nabla E(u)\| \text{ (desigualdade triangular)} \\
&\leq \|v\| + cg(\|v\|)\|v\| + \|\nabla E(u)\| \text{ (estimativa de } \|G\|) \\
&\leq (1 + cg(\|v\|))\,(\|v\| + \|\nabla E(u)\|) \\
&\leq C_4(\|v\| + \|\nabla E(u)\|), \quad \text{com } C_4 \geq 1 + cK. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Como a norma de uma função é uma função não negativa, e pelas hipóteses sobre g, as funções $r, s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definidas por $r(\tau) := \tau$ e $s(\tau) := g(\tau)\tau$ são contínuas, não negativas e crescentes. Pelo lema 2.3.2 temos:

$$g(\|v\|)\,\|v\|\,\|\nabla E(u)\| \leq g(\|v\|)\,\|v\|^2 + g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 \qquad (2.26)$$

$$g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|\,\|v\| \leq g(\|v\|)\,\|v\|^2 + g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2. \qquad (2.27)$$

Utilizando as duas desigualdades anteriores obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
(\|v\| + \|\nabla E(u)\|)\,(g(\|v\|)\,\|v\| + g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|\,) &= g(\|v\|)\,\|v\|^2 + g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 \\
&+ g(\|v\|)\,\|v\|\,\|\nabla E(u)\| \\
&+ g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|\,\|v\| \\
&\leq 3(g(\|v\|)\,\|v\|^2 + g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2).
\end{aligned} \qquad (2.28)$$

Da estimativa (2.24) usando as estimativas (2.25) e (2.28), obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon'(u,v), \frac{F(u,v)}{\|F(u,v)\|} \right\rangle &\geq \frac{1}{C_4(\|v\|+\|\nabla E(u)\|)}\Big((1-(C_1+C_3)\epsilon)g(\|v\|)\,\|v\|^2 + \frac{1}{2}\epsilon g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2\Big) \\
&\geq \frac{1}{C_4} min\left\{1-(C_1+C_3)\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon\right\} \frac{(g(\|v\|)\,\|v\|^2 + g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2)}{(\|v\|+\|\nabla E(u)\|)} \\
&\geq C_5 \frac{(\,\|v\|+\|\nabla E(u)\|)\,(\,g(\|v\|)\,\|v\| + g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|\,)}{3(\|v\|+\|\nabla E(u)\|)} \quad \text{(por (2.28))} \\
&\geq \alpha(g(\|v\|)\,\|v\| + g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|) \quad \text{em B,} \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

onde $C_5 = min \frac{1}{C_4}\left\{1-(C_1+C_3)\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon\right\}$ com $\alpha \leq \frac{C_5}{3}$ (dependendo apenas da limitação uniforme de $E,\ G\ e\ g$).

Pela definição de ε e pela hipótese sobre G, estimamos a seguinte diferença

$$\begin{aligned}
|\varepsilon(u,v)-\varepsilon(\bar{\varphi},0)| &\leq \frac{1}{2}\|v\|^2 + |E(u)-E(\bar{\varphi})| + \epsilon c g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|\,\|v\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|v\|^2 + |E(u)-E(\bar{\varphi})| + \frac{1}{2}\epsilon^2 c^2 g^2(\,\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2 \text{ (des. de Young)} \\
&\leq \|v\| + |E(u)-E(\bar{\varphi})| + \frac{1}{2}\epsilon^2 c^2 K^2\,\|\nabla E(u)\|^2, \text{ pois } g^2(\,\|\nabla E(u)\|) \leq K^2 \\
&\leq \|v\| + |E(u)-E(\bar{\varphi})| + \epsilon^2 C_7\,\|\nabla E(u)\|^2, \text{ com } C_7 = \frac{1}{2}c^2K^2 \\
&\leq \|v\| + |E(u)-E(\bar{\varphi})| + \tilde{C}_1\,\|\nabla E(u)\|^2, \text{ onde } \tilde{C}_1 = \epsilon^2 C_7 \text{ depende de } K \ e\ de\ \epsilon.
\end{aligned}$$

Calculando o valor de Θ em $|\varepsilon(u,v)-\varepsilon(\bar{\varphi},0)|$ e aplicando o lema 2.3.1 para a função $h = \Theta$ obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\Theta(|\varepsilon(u,v)-\varepsilon(\bar{\varphi},0)|) &\leq \Theta\left(\|v\|^2 + |E(u)-E(\bar{\varphi})| + \tilde{C}_1\|\nabla E(u)\|^2\right) \\
&\leq \Theta(\|v\|^2) + \Theta(|E(u)-E(\bar{\varphi})|) + max\left\{\tilde{C}_1,\ 1\right\}\Theta(\|\nabla E(u)\|^2).
\end{aligned}$$

Por hipótese $\Theta(s) \leq c\sqrt{s}$ e pela desigualdade gradiente para E, $(\Theta(|E(u)-E(\bar{\varphi})|) \leq \|\nabla E(u)\|)$, já que B é um conjunto positivamente invariante para $(u,\dot{u})$, resulta que existe uma vizinhança $U \subseteq B$ de $(\bar{\varphi},0)$, tal que para todo $(u,v) \in U$ temos

$$\begin{aligned}
\Theta(|\varepsilon(u,v)-\varepsilon(\bar{\varphi},0)|) &\leq c\|v\| + \|\nabla E(u)\| + max\left\{c\tilde{C}_1,\ c\right\}\|\nabla E(u)\| \text{ (usando } \Theta(s) \leq c\sqrt{s}) \\
&\leq max\left\{c\tilde{C}_1+1,\ c+1\right\}(\,\|v\|+\|\nabla E(u)\|\,) \\
&= \tilde{C}_2\,(\,\|v\|+\|\nabla E(u)\|\,),\ \text{onde } \tilde{C}_2 = max\left\{c\tilde{C}_1+1,\ c+1\right\}. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Seja agora a função, $\tilde{\Theta} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $\tilde{\Theta}(s) := \Theta(s)g(\Theta(s))$. Usando o lema 2.3.1 e o lema 2.3.2 resulta,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Theta}(|\varepsilon(u,v)-\varepsilon(\bar{\varphi},0)|) &= \Theta(|\varepsilon(u,v)-\varepsilon(\bar{\varphi},0)|)\, g(\Theta(|\varepsilon(u,v)-\varepsilon(\bar{\varphi},0)|)) \text{ (definição de } \tilde{\Theta})\\
&\leq \tilde{C}_2\,(\|v\|+\|\nabla E(u)\|)\; g(\tilde{C}_2\,(\|v\|+\|\nabla E(u)\|)\,) \text{ (desigualdade (2.30))}\\
&\leq \tilde{C}_2\,(\|v\|+\|\nabla E(u)\|)\,\Big(g(\tilde{C}_2\|v\|)+g(\|\nabla E(u)\|)\Big) \text{ (lema 2.3.1(a))}\\
&\leq \tilde{C}_2\,(\|v\|+\|\nabla E(u)\|)\,\Big(max\Big\{\tilde{C}_2,\ 1\Big\}\,g(\|v\|)+g(\|\nabla E(u)\|)\Big) \text{(lema 2.3.1(b))}\\
&\leq max\Big\{\tilde{C}_2^2,\ \tilde{C}_2\Big\}\,g(\|v\|)\,\|v\|+\tilde{C}_2 g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|+\\
&+ max\Big\{\tilde{C}_2^2,\ \tilde{C}_2\Big\}g(\|v\|)\,\|\nabla E(u)\|+\tilde{C}_2 g(\|\nabla E(u)\|)\|v\|\\
&\leq max\Big\{\tilde{C}_2^2,\ \tilde{C}_2\Big\}\,g(\|v\|)\,\|v\|+\tilde{C}_2 g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|+\\
&+ max\Big\{\tilde{C}_2^2,\ \tilde{C}_2\Big\}g(\|v\|)\,\|v\|+max\Big\{\tilde{C}_2^2,\ \tilde{C}_2\Big\}g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|+\\
&+ \tilde{C}_2 g(\|\nabla E(u)\|)\|\nabla E(u)\|+\tilde{C}_2 g(\|v\|)\|v\| \text{ (utilizando 2.26 e 2.27)}\\
&\leq \tilde{C}_3\,(g(\|v\|)\,\|v\|+g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|)\,, \text{ com } \tilde{C}_3 = max\Big\{3\tilde{C}_2^2,\ 3\tilde{C}_2\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Com essa estimativa e usando a estimativa (2.29), conclui-se que existe uma vizinhança $U \subseteq B$ de $(\bar{\varphi},\ 0)$ tal que, para todo $(u,\ v) \in U$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Theta}(|\varepsilon(u,v)-\varepsilon(\bar{\varphi},0)|) &\leq \tilde{C}_3\,(g(\|v\|)\,\|v\|+g(\|\nabla E(u)\|)\,\|\nabla E(u)\|)\\
&\leq \frac{\tilde{C}_3}{\alpha}\Big\langle \varepsilon'(u,v), \frac{F(u,v)}{\|F(u,v)\|}\Big\rangle\\
&\leq \tilde{C}\Big\langle \varepsilon'(u,v), \frac{F(u,v)}{\|F(u,v)\|}\Big\rangle,
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

onde $\tilde{C} = \frac{\tilde{C}_3}{\alpha}$.

Portanto, já que por hipótese $\frac{1}{\Theta} \in L^1_\infty\,[0,\infty)$, pelo teorema 2.3.3, conclui-se que:

$$\lim_{t\to\infty}(u(t),\ \dot{u}(t)) = (\bar{\varphi},\ 0) \quad \text{e que } u \ \text{ tem cumprimento finito.}$$

$\square$

Observação 7. *Se para algum* $\alpha \geq 0$*, tivermos a equação* 2.19 *com* $G(u,\ v) = \|v\|^\alpha v$ *e tomarmos* $g(v) = \|v\|^\alpha$*, então*
$\varepsilon(u, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + E(u) + \epsilon\,\langle\|\nabla E(u)\|^\alpha \nabla E(u),\ v\rangle$ *e as coordenadas do gradiente são dadas por*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varepsilon(u,v)}{\partial u} & = \nabla E(u) + \dfrac{\epsilon(\alpha+2)}{2}\|\nabla E(u)\|^\alpha \nabla^2 E(u)v, \\ & e \\ \dfrac{\partial\varepsilon(u,v)}{\partial v} & = v + \epsilon\|\nabla E(u)\|^\alpha \nabla E(u), \end{cases}$$

resulta que,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon'(u,v)\| = \|\nabla\varepsilon(u,v)\| &\leq \|\nabla E(u)\| + \frac{\epsilon(\alpha+2)}{2}\|\nabla E(u)\|^\alpha\|\nabla^2 E(u)\|\ \|v\| + \|v\| + \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} \\ &\leq \|\nabla E(u)\|(1 + \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+1}) + \|v\|\Big(1 + \frac{\epsilon(\alpha+2)}{2}\|\nabla E(u)\|^\alpha\|\nabla^2 E(u)\|\Big) \\ &\leq A_1\|\nabla E(u)\| + A_2\|v\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{Portanto, } \|\varepsilon'(u,v)\|^2 &\leq A_1^2\|\nabla E(u)\|^2 + A_2^2\|v\|^2 + 2A_1A_2\|v\|\ \|\nabla E(u)\| \\ &\leq A_1^2\|\nabla E(u)\|^2 + A_2^2\|v\|^2 + A_1A_2\|\nabla E(u)\|^2 + A_1A_2\|v\|^2 \\ &\leq A(\|\nabla E(u)\|^2 + \|v\|^2), \end{aligned}$$

onde

$$A_1 = A_1(u) = 1 + \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+1};\quad A_2 = A_2(u) = 1 + \tfrac{\epsilon(\alpha+2)}{2}\|\nabla E(u)\|^\alpha$$
$$e\ \ A = A(u) = Max\left\{A_1^2 + A_1A_2,\ A_2^2 + A_1A_2\right\}\ \ com$$

$$\lim_{(v,\nabla E(u))\to(0,0)} A = 2.$$

Por outro lado,

$$\|F(u,v)\| \leq \|v\|(1 + \|v\|^\alpha) + \|\nabla E(u)\| = B_1\|v\| + \|\nabla E(u)\|.$$

$$\begin{aligned} \textit{Portanto, } \|F(u,v)\|^2 &\leq B_1^2\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2 + 2B_1\|v\|\ \|\nabla E(u)\| \\ &\leq B_1^2\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2 + B_1\|v\|^2 + B_1\|\nabla E(u)\|^2 \\ &\leq B(\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2). \end{aligned}$$

onde

$$B_1 = B_1(v) = 1 + \|v\|^\alpha;\quad B_1\ B = B(v) = B_1^2 + B_1\ \ e\ \ \lim_{(v,\nabla E(u))\to(0,0)} B = 2.$$

Logo,

$$\|\varepsilon'(u,v)\|^2 + \|F(u,v)\|^2 \leq (A+B)\,(\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2). \tag{2.33}$$

Uma vez que $\dot{\varepsilon}(u,v) = -\langle \varepsilon'(u,v), F(u,v)\rangle$ *e*

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon'(u,v), F(u,v)\rangle &= -\langle \nabla E(u),\ v\rangle - \epsilon(\alpha+1)\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\ \|\nabla^2 E(u)\|\ \|v\|^2 + \|v\|^{\alpha+2} + \langle \nabla E(u),\ v\rangle + \\
&+ \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} + \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\|v\|^{\alpha}\langle \nabla E(u), v\rangle \\
&= \|v\|^{\alpha+2} - \epsilon(\alpha+1)\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\ \|\nabla^2 E(u)\|\ \|v\|^2 + \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\|v\|^{\alpha}\langle \nabla E(u), v\rangle + \\
&+ \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Fixada uma bola B e tomando-se K e C tais que, nessa bola, $\|\nabla E(u)\|^{\alpha} \leq K,\ \|v\|^{\alpha} \leq K$ *e C tal que* $C \geq \|\nabla^2 E(u)\|$*, tem-se:*
$0 \leq \left(\frac{1}{2}\|\nabla E(u)\|^{\alpha+1} - K\|v\|^{\alpha+1}\right)^2 \Longrightarrow \|\nabla E(u)\|^{\alpha+1}\|v\|^{\alpha+1} \leq \frac{1}{4}\epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} + \epsilon C_1\|v\|^{\alpha+2}$*, logo*

$$|\epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\|v\|^{\alpha}\langle \nabla E(u), v\rangle| \leq \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+1}\|v\|^{\alpha+1} \leq \frac{1}{4}\epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} + \epsilon C_1\|v\|^{\alpha+2}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon\ \|\nabla E(u)\|^{\alpha}\ \|\nabla^2 E(u)\|\ |v|^2 &\leq \epsilon C\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\|v\|^2 \\
&\leq \begin{cases} \frac{1}{4}\epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2}\| & se\ 2\sqrt{C}\|v\| \leq \|\nabla E(u)\| \\ C\epsilon\left(2\sqrt{C}\|v\|\right)^{\alpha}\|v\|^2 & se\ 2\sqrt{C}\|v\| \geq \|\nabla E(u)\| \end{cases} \\
&\leq \frac{1}{4}\epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} + \epsilon C_2\|v\|^{\alpha+2},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

onde $C_1 = K^2$ *e* $C_2 = C(2\sqrt{C})^{\alpha}$*, resulta que:*

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon'(u,v), F(u,v)\rangle &\geq \|v\|^{\alpha+2} - \frac{\epsilon(\alpha+1)}{4}\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} - \epsilon(\alpha+1)\ C_2\|v\|^{\alpha+2} - \frac{\epsilon}{4}\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} - \epsilon C_1\|v\|^{\alpha+2} + \\
&+ \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} \\
&\geq \{(1-\epsilon(C_1 + (\alpha+1)C_2))\,\|v\|^{\alpha}\}\,\|v\|^2 + \left\{\frac{\epsilon(2-\alpha)}{4}\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\right\}\|\nabla E(u)\|^2 \\
&\geq D\left(\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2\right),
\end{aligned} \tag{2.36}$$

com $D = Min_B\left\{(1-\epsilon(C_1+(\alpha+1)C_2)\|v\|^{\alpha},\ (\frac{\epsilon(2-\alpha)}{4})\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\right\}$ *e* $\lim_{(v,\nabla E(u))\to(0,0)} D = 0$.

Assim sendo, para todo $\alpha < 2$ *e* $\epsilon \leq \frac{1}{C_1+(\alpha+1)C_2}$*, a estimativa (2.24) é válida. Portanto,* ε *é uma função de Lyapunov estrita, em B, para a equação*

$$\ddot{u} + \|\dot{u}\|^{\alpha}u + \nabla E(u) = 0. \tag{2.37}$$

Vamos mostrar que F e ε' *não satisfazem a Condição Angular (CA).*

Estimando a expressão (2.34) por cima temos,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}'(u,v), F(u,v)\rangle &\leq \|v\|^{\alpha+2} + \epsilon(\alpha+1)\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\|\nabla^2 E(u)\|\;\|v\|^2 + \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+1}\|v\|^{\alpha+1} + \\
&+ \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} \\
&\leq \|v\|^{\alpha+2} + \epsilon(\alpha+1)\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\|\nabla^2 E(u)\|\;\|v\|^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\nabla E(u)\|^{2\alpha+2} + \frac{\epsilon}{2}\|v\|^{2\alpha+2} + \\
&+ \epsilon\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} \\
&\leq \|v\|^2\left(\|v\|^{\alpha} + \epsilon(\alpha+1)\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\|\nabla^2 E(u)\| + \frac{\epsilon}{2}\|v\|^{2\alpha}\right) + \frac{(2+\|\nabla E(u)\|^{\alpha})}{2}\|\nabla E(u)\|^{\alpha+2} \\
&\leq L\left(\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2\right), \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

onde $L = Max_B\left\{\frac{(2+\|\nabla E(u)\|^{\alpha})}{2}\|\nabla E(u)\|^{\alpha},\ \|v\|^{\alpha} + \epsilon(\alpha+1)\|\nabla E(u)\|^{\alpha}\|\nabla^2 E(u)\| + \frac{1}{2}\|v\|^{2\alpha}\right\}$ *e* $\lim_{(v,\nabla E(u))\to(0,0)} L = 0$.

Tomando $w = (v, \nabla E(u))$ *e utilizando a desigualdade (CA+C), tem-se, onde* $F(u,v) \neq 0$*:*

$$\frac{D\left(\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2\right)}{\|\mathcal{E}'\|^2 + \|F\|^2} \leq \frac{\langle \mathcal{E}'(u,v), F(u,v)\rangle}{\|\mathcal{E}'\|^2 + \|F\|^2} \leq \frac{L\left(\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2\right)}{\|\mathcal{E}'\|^2 + \|F\|^2}$$

$$e \quad \lim_{w\to 0}\frac{D\left(\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2\right)}{\|\mathcal{E}'\|^2 + \|F\|^2} = \lim_{w\to 0}\frac{L\left(\|v\|^2 + \|\nabla E(u)\|^2\right)}{\|\mathcal{E}'\|^2 + \|F\|^2} = 0.$$

Pelo Teorema de confronto, tem-se

$$\lim_{w\to 0}\frac{\langle \mathcal{E}'(u,v), F(u,v)\rangle}{\|\mathcal{E}'\|^2 + \|F\|^2} = 0$$

Portanto, para todo $\alpha < 2$ *e* $\epsilon \leq \frac{1}{C_1+(\alpha+1)C_2}$ $\mathcal{E}'$ *e* F *não satisfazem a condição angular (CA).*

Apesar disso, o teorema 2.3.4 é válido se tomarmos $\Theta(s) = cs^{1-\theta}$, $G(u,\ v) := \|v\|^{\alpha}v$ *e* $g(s) := s^{\alpha}$ *para* $\alpha \in [0,\ \frac{\theta}{1-\theta})$ *e* $\theta \in (0,\ \frac{1}{2}]$, *e a equação (2.19) se reduz na equação (2.37). Isso mostra que o teorema 2.3.4 generaliza o resultado de convergência do problema 1 provado por Chergui (2008).*

Portanto, o teorema 2.3.4, permite uma não linearidade mais geral e ordens maiores de crescimento do amortecimento quando estamos próximos do caso crítico $\alpha = \frac{\theta}{1-\theta}$*. Destarte, se* $\Theta(s) = s^{1-\theta}$ *e* $g(s) := s^{\frac{\theta}{1-\theta}}$, *em geral não se pode esperar a convergência, pois nesse caso tem-se:* $\Theta(s) = \sqrt{s}$, $g(s) := s$ *e para todo número real* $b > 0$ *tem-se*

$$\int_0^b \frac{1}{\Theta(s)g(\Theta(s))}ds = \int_0^b \frac{1}{s}ds = +\infty.$$

Logo, $1/(\Theta(s)g(\Theta(s))) \notin L^1_{loc}[0,\ +\infty)$*, mostrando assim que uma das hipótese do teorema 2.3.4 não é satisfeita (um exemplo de não convergência na reta foi dado por Haraux (2012)).*

Mas se melhorarmos um pouco mais o crescimento de Θ *ou de* g *obtemos convergência.*

Exemplo 4. *Se para s suficientemente pequeno tomarmos a)* $\Theta(s) = s^{1-\theta}$ *e* $g(s) = s^{\frac{\theta}{1-\theta}}\ln^{1+\epsilon}(\frac{1}{s})$, *para* > 0*, nulas em* $s = 0$*, ou b)* $\Theta(s) = s^{1-\theta}\ln^{1-\theta+\epsilon}(\frac{1}{s})$ *e* $g(s) = s^{\frac{\theta}{1-\theta}}$*, para* > 0*, nulas em* $s = 0$.

Para $\theta = \frac{1}{2}$ *observamos que*

a) O gráfico das funções $\Theta(s) = \sqrt{s}$ *e* $g(s) = s\ln^{1+\epsilon}(\frac{1}{s})$ *é representado abaixo*

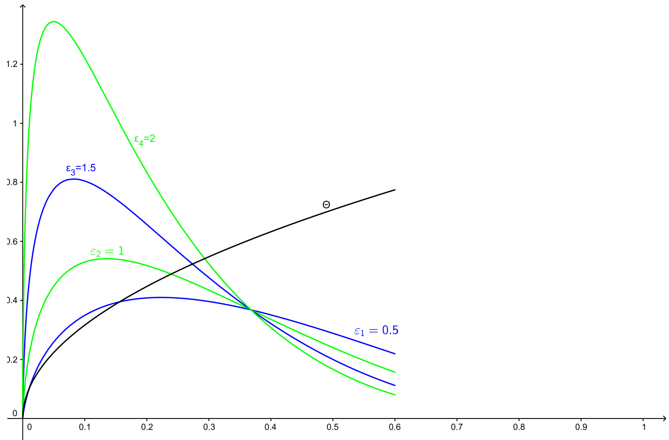

Fig 2: Graficos de Θ e g para ε=0.5; 1;1.5;2

A função $\Theta(s) = \sqrt{s}$ *é côncava, crescente e não negativa para todo* $s \geq 0$*. Já a função* $g(s) = s\ln^{1+\epsilon}(\frac{1}{s})$ *apenas o é numa vizinhança da origem, e temos*

(i) $g(s) \geq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq s \leq 1$*;* $\lim_{s\to 0^+} g(s) = 0$ *e* $g(1) = 0$*;*

(ii) $g'(s) = \ln^{\epsilon}(\frac{1}{s})\left[\ln(\frac{1}{s}) - (1+\epsilon)\right] > 0$ *em* $(0, e^{-(1+\epsilon)})$*;*

(iii) $g''(s) = \frac{(1+\epsilon)}{s}\ln^{\epsilon}(\frac{1}{s})\left[-1 + \frac{\epsilon}{\ln(\frac{1}{s})}\right] < 0$ *em* $(0, e^{-\epsilon})$.

Portanto, g e Θ são ambas contínuas, crescentes, côncavas e não negativas para $s \in [0, e^{-(1+\epsilon)}]$. *Dado* $b < \frac{1}{e^{1+\epsilon}}$ *temos,*

$$
\begin{aligned}
\int_0^b \frac{1}{\Theta(s)g(\Theta(s))}ds &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^b \frac{1}{s\ln^{1+\epsilon}(\frac{1}{\sqrt{s}})}ds = 2^{1+\epsilon}\lim_{t\to 0^+}\int_t^b \frac{[-\ln(s)]^{-1-\epsilon}}{s}ds = \lim_{t\to 0^+}[\frac{2^{1+\epsilon}}{\epsilon}(-\ln(x))^{-\epsilon}]_t^b \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left\{\frac{2^{1+\epsilon}}{\epsilon}(-\ln(b))^{-\epsilon} - \frac{2^{1+\epsilon}}{\epsilon}(-\ln(t))^{-\epsilon}\right\} = \frac{2^{1+\epsilon}}{\epsilon}(-\ln(b))^{-\epsilon}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\frac{1}{\Theta(s)g(\Theta(s))} \in L^1_{loc}([0,\ e^{-(1+\epsilon)}))$.

b) Para $s \geq 0$ *a função* $g(s) = s$ *é crescente, côncava e não negativa. Para a função* $\Theta(s) = \sqrt{s}\ln^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\frac{1}{s})$*, temos*

(i) $\Theta(s) \geq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq s \leq 1$*;* $\lim_{s\to 0^+} g(s) = 0$ *e* $g(1) = 0$*;*

(ii) $\Theta'(s) = \frac{\ln^{\epsilon}(\frac{1}{s})}{\sqrt{s}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\ln(\frac{1}{s})} - \frac{(\frac{1}{2}+\epsilon)}{\sqrt{\ln(\frac{1}{s})}}\right] > 0$ *em* $(0, e^{-(1+2\epsilon)})$;

(iii) $\Theta''(s) = \frac{\ln^{\epsilon}(\frac{1}{s})}{\sqrt{s^3}}\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\ln(\frac{1}{s})} + \frac{(-\frac{1}{4}+\epsilon^2)}{\sqrt{\ln(\frac{1}{s})^3}}\right] < 0$ *em* $(0, e^{-\sqrt{4\epsilon^2-1}})$.

Portanto, para $\epsilon \geq \frac{1}{2}$, *ambas as funções* g *e* Θ *são contínuas, côncavas, crescentes e não negativas para* $s \in [0;\ e^{-(1+2\epsilon)}]$.

Graficamente, temos:

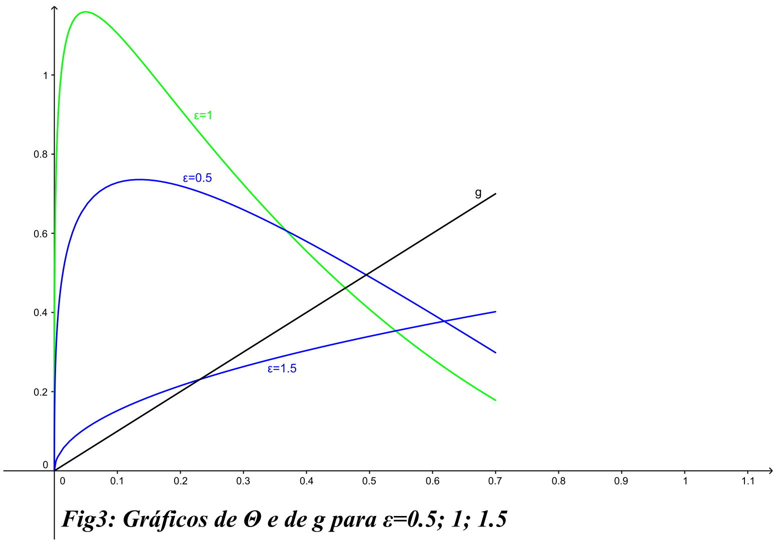

Fig3: Gráficos de Θ e de g para ε=0.5; 1; 1.5

Também,

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{1}{\Theta(s)g(\Theta(s))}ds &= \lim_{t\to 0}\int_t^b \frac{1}{s\ln^{1+2\epsilon}(\frac{1}{s})}ds = \lim_{t\to 0}\int_t^b \frac{[-\ln(s)]^{-1-2\epsilon}}{s}ds = \lim_{t\to 0}[\frac{(-\ln(x))^{-2\epsilon}}{2\epsilon}]_t^b \\ &= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{(-\ln(b))^{-2\epsilon}}{2\epsilon} - \frac{(-\ln(t))^{-2\epsilon}}{2\epsilon}\right\} = \frac{(-\ln(b))^{-2\epsilon}}{2\epsilon}.\end{aligned}$$

O que mostra também que $\frac{1}{\Theta(s)g(\Theta(s))} \in L^1_{loc}([0,\ e^{-(1+2\epsilon)}))$.

Portanto, para $\epsilon > 0$ *no caso do exemplo 4 a), e para* $\epsilon \geq \frac{1}{2}$ *no caso do exemplo 4 b), para* Θ *e* g *dadas como no exemplo 4 o teorema 2.3.4 é válido.*

Bibliografia

Referências Bibliográficas

Pierre-Antoine Absil, R Mahony, and B Andrews. Convergence of the iterates of descent methods for analytic cost functions. *SIAM Journal on Optimization*, 16(2):531–547, 2005. 2, 31, 43

Tomáš Bárta, Ralph Chill, and Eva Fašangová. Every ordinary differential equation with a strict lyapunov function is a gradient system. *Monatshefte für Mathematik*, 166(1):57–72, 2012. v, vii, 2, 3, 19, 25

Jérôme Bolte, Aris Daniilidis, Adrian Lewis, and Masahiro Shiota. Clarke subgradients of stratifiable functions. *SIAM Journal on Optimization*, 18(2):556–572, 2007. 2

Jérôme Bolte, Aris Daniilidis, Olivier Ley, and Laurent Mazet. Characterizations of łojasiewicz inequalities: subgradient flows, talweg, convexity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 362(6):3319–3363, 2010. 2

L Chergui. *Convergence of global and bounded solutions of a second order gradient like system with nonlinear dissipation and analytic nonlinearity*. journal of dynamics and differential equations, vol. 20, Nº.3, 643-652 September 2008, 2008. 2, 3, 49, 57

Ralph Chill, Alain Haraux, and Mohamed Ali Jendoubi. Applications of the łojasiewicz–simon, gradient inequality to gradient-like evolution equations. *Analysis and Applications*, 7(04):351–372, 2009. v, 2, 25, 31, 43

Alain Haraux. Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 11(6), 2012. 57

Alain Haraux and Mohamed-Ali Jendoubi. Convergence of solutions of second-order gradient-like systems with analytic nonlinearities. *journal of differential equations*, 144(2):313–320, 1998. 2

Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2004. 22, 24

Krzysztof Kurdyka. On gradients of functions definable in o-minimal structures. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 48, pages 769–783, 1998. 2

Christian Lageman. Pointwise convergence of gradient-like systems. *Mathematische Nachrichten*, 280(13-14):1543–1558, 2007. 2, 3, 25, 31, 36, 43

John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Second Edition, Springer Science & Business Media New York 2003, 2013. 5, 8, 16, 21

Elon Lages Lima. *Variedades diferenciáveis*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973. 5

Robert I McLachlan, GRW Quispel, and Nicolas Robidoux. Unified approach to hamiltonian systems, poisson systems, gradient systems, and systems with lyapunov functions or first integrals. *Physical Review Letters*, 81(12):2399, 1998. v, 1, 3

Robert I McLachlan, GRW Quispel, and Nicolas Robidoux. Geometric integration using discrete gradients. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 357(1754):1021–1045, 1999. 1, 3

J Jr Palis and Welington De Melo. *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012. 2

Patrick C Parks. Am lyapunov's stability theory—100 years on. *IMA journal of Mathematical Control and Information*, 9(4):275–303, 1992. 1

Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. 22, 35

Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Second Edition, Springer Science & Busness Media, LLC, 2011. 5, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17