

# Pares holomorfos e a Família de Arnol'd Generalizada

Arlane Manoel Silva Vieira

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Edson de Faria

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, agosto de 2015

# Pares comutantes e dinâmica complexa

Esta é a versão original da tese elaborada pelo candidato Arlane Manoel Silva Vieira, tal como submetida à Comissão Julgadora.

# Resumo

VIEIRA, A. **Pares comutantes e dinâmica complexa**. 2015. 92 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Para obter os *complex bounds* para mapas críticos do círculo de tipo cúbico, de Faria definiu um objeto análogo às aplicações *tipo quadráticas* chamado *par comutante holomorfo* (de grau 3). Um modelo para esse objeto foi construído a partir da família de Arnol'd (padrão). Neste trabalho, consideramos uma extensão dessa família e construímos pares comutantes com qualquer criticalidade, estendendo assim os resultados de de Faria. Além disso, provamos que o conjunto de escape da projeção canônica dessa extensão da família de Arnol'd ao cilindro  $\mathbb{C}^*$  tem medida positiva e que o seu conjunto de Fatou tem medida finita.

**Palavras-chave:** Mapas críticos do círculo, renormalização, pares comutantes, conjuntos de Julia.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Rigidez de difeomorfismos . . . . .	2
1.2 Rigidez de mapas críticos . . . . .	4
1.3 Modelo de pares holomorfos . . . . .	6
1.4 Outra extensão da família de Arnol'd . . . . .	7
1.5 Resultados principais . . . . .	8
1.6 Organização do Texto . . . . .	9
<b>2 Pares comutantes</b>	<b>11</b>
2.1 Mapas críticos do círculo . . . . .	11
2.2 Pares comutantes reais . . . . .	13
2.2.1 Espaço métrico dos pares comutantes reais normalizados . . . . .	14
2.2.2 Renormalização de pares comutantes reais . . . . .	15
2.2.3 Renormalização de homeomorfismos do círculo . . . . .	16
2.3 Pares comutantes holomorfos . . . . .	17
2.3.1 Renormalização de pares comutantes holomorfos . . . . .	21
2.4 O argumento <i>pull-back</i> . . . . .	21
2.5 Limites <i>a priori</i> complexos . . . . .	22
<b>3 Construção de pares comutantes holomorfos</b>	<b>23</b>
3.1 Descrição da Família de Arnol'd Generalizada . . . . .	23
3.2 Extensão holomorfa da Família de Arnold Generalizada . . . . .	30
3.3 Estimativas para o crescimento de $E_\omega$ . . . . .	31
3.4 Geometria da família . . . . .	31
3.5 Construção de pares comutantes holomorfos . . . . .	36
3.6 Rigidez dos pares comutantes holomorfos . . . . .	39

<b>4 Ferramentas de Análise e Dinâmica Complexa</b>	<b>41</b>
4.1 Dinâmica Complexa . . . . .	41
4.2 Distorção . . . . .	44
4.3 Conjuntos encaixantes . . . . .	48
<b>5 Dinâmica da Família de Arnol'd Generalizada</b>	<b>51</b>
5.1 Classificação das componentes de Fatou . . . . .	56
5.2 Medida do conjunto de Julia . . . . .	56
5.3 Recorrência . . . . .	66
<b>A Prova do Teorema 3.2</b>	<b>71</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>81</b>

# Lista de Figuras

2.1	par comutante real . . . . .	14
2.2	par comutante holomorfo de grau 5. . . . .	18
2.3	comutação . . . . .	19
3.1	Curvas $\text{Im}(E_\omega(x + iy)) = 0$ , para $k = 2$ . . . . .	32
3.2	Primeiros retornos . . . . .	34
5.1	A região em preto é o conjunto de Fatou de $E_{3/11}$ para $k = 3$ . . . . .	52
5.2	Conjunto de Julia de $f_0$ , para $k = 2$ ; no centro da figura aparece a bacia de atração imediata do ponto fixo $z_0 = -1$ (parabólico). . . . .	53
5.3	Conjunto de Julia de $f_\omega$ , onde $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ , para $k = 2$ ; Na figura aparece o círculo unitário e algumas componentes de Fatou. . . . .	57
5.4	Conjunto de Julia de $f_\omega$ , onde $\omega = 1/2$ , para $k = 2$ ; nela aparece o círculo unitário. . . . .	57
5.5	Conjunto de Fatou (componentes em preto) de $E_\omega$ para $k = 3$ e $\omega = 0,2831$ , no retângulo $[0, 1] \times [-0,7, 0, 7]$ . . . . .	58





## Introdução

O fenômeno da Rigidez e seus diferentes aspectos constituem uma das mais importantes e notáveis descobertas em geometria e em sistemas dinâmicos unidimensionais (veja [20]). Provavelmente, o fenômeno de rigidez (global) mais antigo que se conhece foi descoberto por G. D. Mostow 1968, hoje conhecido como *Teorema da Rigidez de Mostow*. Na forma geométrica, esse resultado afirma que se duas variedades riemannianas fechadas de curvatura constante negativa e dimensão maior ou igual a 3 têm grupos fundamentais isomorfos então elas são, de fato, isométricas (para mais detalhes, veja [59]). Em dinâmica, esse problema consiste em verificar se uma equivalência topológica pode ser promovida a uma equivalência diferenciável. No contexto de difeomorfismos do círculo, o problema da rigidez está completamente solucionado.

Começando com os conceitos básicos, revisaremos a seguir os principais resultados de rigidez de difeomorfismos e mapas críticos do círculo (veja também [21]).

Em 1885, Poincaré [53] introduziu importante um invariante topológico, chamado *número de rotação*, e mostrou que todo homeomorfismo do círculo sem pontos periódicos é combinatoriamente equivalente a uma (única) rotação rígida, isto é, órbitas correspondentes estão ordenadas da mesma forma no círculo. A existência de órbitas periódicas é equivalente ao número de rotação ser racional.

Para ser mais preciso, seja  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  um homeomorfismo e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento qualquer de  $f$ . A sequência  $(F^n(x)/n)$  converge para um número real  $\rho(F)$  que não depende de  $x$ . A parte fracionária desse número, que denotaremos por  $\rho(f)$ , está bem definida e não

depende da escolha do levantamento  $F$ . O número de rotação de  $f$  é  $\rho(f)$ , por definição, e qualquer homeomorfismo combinatorialmente equivalente à  $f$  tem o mesmo número de rotação. Denotaremos por  $R_\alpha$  a rotação rígida do círculo com número de rotação  $\alpha$ . Portanto, se  $f$  não tem pontos periódicos, existe uma função contínua  $h$  sobrejetora tal que  $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$ , chamada de semiconjugação entre  $f$  e  $R_{\rho(f)}$ . Assumiremos, daqui por diante, que  $\rho(f)$  é irracional, a menos de menção explícita em contrário.

Dessa forma, o principal problema é saber quão regular pode ser essa semiconjugação. Como veremos a seguir, foram usadas técnicas diferentes para tratar dos casos de difeomorfismos e homeomorfismos com, pelo menos, um ponto crítico.

A teoria da rigidez no contexto de mapas unimodais têm sido desenvolvida em paralelo à de homeomorfismos do círculo por diversos autores como D. Sullivan, M. Lyubich, W. de Melo, A. Ávila, M. Yampolsky, E. de Faria, C. McMullen, S. van Strien, dentre outros (para mais detalhes recomendamos [20, 21, 22]).

## 1.1 Rigidez de difeomorfismos

No contexto de difeomorfismos, Denjoy [9] construiu exemplos dessas aplicações de classe  $C^1$  para os quais a correspondente semiconjugação não é injetora (esses homeomorfismos são chamados *contraexemplos de Denjoy*), veja [22, Theorem 2.3, pg. 42]. Para uma prova simples usando renormalização e pares comutantes, veja [48]. Herman [36] também construiu certos difeomorfismos do círculo de classe  $C^{1+\alpha}$ , para qualquer  $0 \leq \alpha < 1$ , que possuem *intervalos errantes*, isto é, uma coleção de intervalos fechados dois a dois disjuntos que são permutados pelo homeomorfismo. A existência desse tipo de órbita é a única obstrução para a injetividade da semiconjugação, e neste caso, o único conjunto minimal para o difeomorfismo é um conjunto de Cantor. Esse exemplo pode ser cuidadosamente modificado de modo que a medida de Lebesgue do conjunto minimal seja  $a$ , qualquer que seja  $a \in [0, 1)$  (veja [39, Proposition 12.2.2]).

Por outro lado, se esse difeomorfismo for de classe  $C^2$ , ou de classe  $C^1$  e tiver variação limitada, por um resultado clássico de Denjoy [9], tal semiconjugação é injetora ([22, Theorem 2.1, pg. 38]), e portanto, uma conjugação topológica.

Quando um homeomorfismo do círculo é topologicamente conjugado a uma rotação rí-

gida, essa conjugação está bem definida a menos de uma rotação rígida. Em particular, se fixarmos dois pontos no círculo, existe uma única conjugação que leva um desses pontos no outro.

Ainda neste contexto, Herman [36, pg. 8] obteve um resultado fundamental de Rigidez: todo difeomorfismo do círculo de classe  $C^r$ , onde  $r \geq 3$  é real ou  $r \in \{\infty, \omega\}$ , cujo número de rotação pertence a um subconjunto de medida total dos números de tipo de Roth [36, cap. V], é  $C^{r-1-\epsilon}$ -conjugado a uma rotação rígida, para qualquer  $\epsilon \in (0, 1]$ . Alguns anos depois, Yoccoz [67] estendeu esse resultado para todos os números de rotação que satisfazem alguma condição Diofantina.

Para cada  $\beta \geq 0$ , denotaremos por  $D_\beta$  o conjunto dos números reais Diofantinos de expoente  $\beta$ , isto é,  $x \in D_\beta$  se, e somente se, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|\alpha - p/q| \geq C/q^{2+\beta}$$

para todo  $p/q$  racional. É interessante observar que  $D_\beta \subseteq D_{\beta'}$  sempre que  $\beta < \beta'$ . Os conjuntos  $D_0$ ,  $\bigcap_{\beta>0} D_\beta$  e  $\bigcup_{\beta\geq 0} D_\beta$  representam os números irracionais de tipo constante, de tipo de Roth e Diofantinos, respectivamente. Por um resultado clássico de Khinchin [40],  $D_0$  tem medida nula e  $D_\beta$  tem medida total para todo  $\beta > 0$ . Em particular, os números reais de tipo de Roth e Diofantinos têm medida total. Além disso, observamos que  $D_0$  é denso em  $[0, 1]$  e tem dimensão de Hausdorff igual a um (Teorema de Jarník [37]). Os números irracionais que não são Diofantinos, são ditos de Liouville. Observe que  $D_0$  coincide com o conjunto dos números irracionais cuja sequência dos coeficientes em sua expansão em frações contínuas, é limitada (veja [40, Theorem 23], por exemplo). Por esse motivo, diz-se que os números em  $D_0$  são do *tipo limitado* (veja também [33]).

O Teorema de Herman-Yoccoz generaliza um Teorema de Rigidez de Arnol'd (1961), na categoria  $C^\omega$  (veja [36, pg. 7]). Ao mesmo tempo, Arnol'd construiu exemplos de difeomorfismos linearizáveis nessa mesma classe, para os quais a conjugação topológica associada nem ao menos é absolutamente contínua. Ao leitor interessado, indicamos a referência [2] para uma discussão detalhada de diversos resultados de M. Herman sobre difeomorfismos do círculo.

Os resultados mais recentes (Katznelson e Ornstein [38], Sinai e Khanin [58], Teplinsky [62]), descrevem a máxima regularidade da conjugação  $h$ . Por exemplo, com base nos resultados de Katznelson e Ornstein [38], Teplinsky [62] provou que, se  $f$  é de classe  $C^{3+\delta}$  e  $\rho(f) \in D_\beta$ , com  $0 < \delta < \beta < 1$ , então  $h$  é de classe  $C^{2+\delta-\beta}$ . Katznelson e Ornstein [38] construíram exemplos de conjugações com essa regularidade e provaram que não existem conjugações com regularidade maior.

## 1.2 Rigidez de mapas críticos

No caso de homeomorfismos do círculo com pontos críticos, Hall [35] construiu contraexemplos de Denjoy de classe  $C^\infty$  com pontos críticos do tipo *flat*, isto é, todas as derivadas se anulam neste ponto. No caso em que os pontos críticos são não-*flat*, e conseqüentemente em número finito, Yoccoz [66] provou que não existem intervalos errantes, e portanto, a semiconjugação é injetora (veja [33]).

Nesse contexto, se  $f$  é topologicamente conjugada à  $R_{\rho(f)}$  via  $h$ , não podemos esperar que essa conjugação seja ao menos diferenciável, em virtude da presença de pontos críticos para  $f$ . Isto sugere que devemos comparar homeomorfismos críticos entre si, e não com rotações rígidas. Assim, o problema da Rigidez consiste em saber se a conjugação topológica entre homeomorfismos críticos pode ser promovida a uma conjugação diferenciável.

Nosso objeto principal de estudo são os *mapas críticos do círculo*. Estas aplicações são homeomorfismos críticos do círculo que preservam orientação, sem pontos periódicos, e de classe  $C^r$ ,  $r \geq 3$ , com um único ponto crítico (não-*flat*) de ordem  $p \geq 3$ . Esta última condição significa que, numa vizinhança do ponto crítico  $c$ , podemos escrever  $f(t) = \pm|\phi(t)|^p + f(c)$  onde  $\phi$  é um difeomorfismo local de classe  $C^r$  com  $\phi(c) = 0$ . Topologicamente, cada um desses mapas é conjugado a uma rotação rígida (Yoccoz [66]). Conseqüentemente, dados dois mapas críticos do círculo, existe um único homeomorfismo que conjuga esses mapas e leva o ponto crítico de um deles no ponto crítico do outro.

Com base em resultados anteriores (Feigenbaum, Kadanoff, Lanford, Rand, Shenker e outros) e analogia com o caso unimodal (Sullivan [60]), a seguinte conjectura foi formulada por de Faria em sua Tese (veja [13, pg. 996]), conhecida por Conjectura da Rigidez: *dois mapas críticos do círculo de classe  $C^3$  com o mesmo número de rotação e cujos pontos*

*críticos têm a mesma ordem, são topologicamente conjugados através de um difeomorfismo de classe  $C^{1+\beta}$ , para um certo  $0 \leq \beta < 1$  universal.*

Para abordar esse problema, de Faria adaptou para o contexto de mapas críticos do círculo, os métodos da teoria de renormalização, o argumento *pull-back*, e diversas técnicas de análise complexa para aplicações unimodais desenvolvidos por Sullivan [60].

Para definir o operador de renormalização no espaço dos mapas críticos do círculo, de Faria identificou cada um desses mapas com um par comutante crítico, um método desenvolvido por Lanford [47] e Rand [55]. Posteriormente, de Faria definiu uma extensão complexa desses pares comutantes, no caso analítico, bem como um operador de renormalização sobre essas extensões, compatível com o operador de renormalização pré-existente, que passou a chamar de *par comutante holomorfo*. Esses objetos são os análogos às aplicações tipo quadráticas da teoria de Douady-Hubbard [10] usadas por Sullivan no estudo de mapas unimodais.

Uma das principais etapas na demonstração da Conjectura da Rigidez, é a prova da existência certos limitantes geométricos nos mapas renormalizados, chamados *limites a priori complexos* para mapas críticos do círculo (veja a seção 2.5). Em [13], de Faria obtém esses limites para mapas críticos na classe de Epstein com número de rotação em  $D_0$ . Posteriormente, Yampolsky [63] estendeu esse resultado para mapas críticos na classe de Epstein com qualquer número de rotação irracional. O resultado de Yampolsky foi estendido por de Faria e de Melo em [18, Theorem 3.1] para mapas críticos analíticos, e com os resultados de [17], provaram a Conjectura da Rigidez para mapas críticos analíticos com número de rotação em um subconjunto de medida total que contém  $D_0$ .

Ainda em [17], foram construídos mapas críticos de classe  $C^\infty$  topologicamente conjugados, com número de rotação em um subconjunto não-enumerável e que contém números Diofantinos, para os quais a conjugação não pode ser de classe  $C^{1+\beta}$ , qualquer que seja  $\beta > 0$ . O mesmo tipo de exemplo foi construído por Ávila [1] no caso analítico.

Em [45], Khanin e Teplinsky provaram que a conjugação entre dois mapas críticos analíticos com pontos críticos de mesma ordem, é de classe  $C^1$ , qualquer que seja o número de rotação (irracional). Em [38], Khmelev e Yampolsky provaram que, nesse mesmo contexto analítico, a conjugação é  $C^{1+\alpha}$  no ponto crítico, onde  $\alpha > 0$  é uma constante universal, sem hipóteses sobre o número de rotação (irracional). A prova desse resultado está baseada nas

técnicas desenvolvidas em [18] e em propriedades básicas dos pares holomorfos.

Recentemente, com base nos resultados de de Faria, de Melo, Khanin, Teplinsky, Yampolsky e novas técnicas no contexto de mapas críticos, Guarino [31] provou em sua Tese a Conjectura da Rigidez para mapas críticos de classe  $C^3$  com número de rotação em  $D_0$ . E mais recentemente ainda, Guarino anunciou a extensão desse resultado para mapas críticos com qualquer número de rotação irracional, em um trabalho conjunto com W. de Melo e M. Martens [34]. Para mais detalhes, veja a seção 7 de [33].

### 1.3 Modelo de pares holomorfos

Um modelo topológico para esses pares comutantes holomorfos foi construído a partir da família de Arnol'd (a um parâmetro)

$$\tilde{f}_\theta(z) = z + \theta - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi z), \quad \theta \in [0, 1), \quad z \in \mathbb{C}.$$

A restrição de  $\tilde{f}_\theta$  ao eixo real é o levantamento de um mapa crítico do círculo real-analítico com um único ponto crítico de ordem  $p = 3$  (cúbico).

Usando esse modelo, alguns resultados de pré-rigidez foram obtidos e transferidos aos pares comutantes holomorfos gerais por de Faria [12, 13]. Observamos que tais resultados tratam explicitamente do caso cúbico, já que os pontos críticos de  $\tilde{f}_\theta$  na reta real são os inteiros, todos do tipo cúbico.

Nosso ponto de partida foi a construção desses pares holomorfos por de Faria [12] e então consideramos o problema de estender, em termos do grau de criticalidade, a teoria básica dos pares comutantes holomorfos. Naturalmente, a principal dificuldade aqui diz respeito à extensão da família de Arnol'd a ser definida. Também em [12, pág. 996], de Faria observa que os métodos desenvolvidos podem ser estendidos para qualquer criticalidade.

Consideramos a família de funções inteiras  $(E_\omega)$ , obtida da família trigonométrica

$$E_{\omega,k}(z) = z + \omega + \sum_{j=1}^k a_j \sin(2j\pi z), \quad (1.1)$$

com  $\omega \in [0, 1)$  e  $E_\omega := E_{k,\omega}$  onde  $k \in \mathbb{N}$ , com as seguintes características: os pontos críticos coincidem com os números inteiros, todos de ordem  $2k + 1$ , e  $E_{1,\omega} = \tilde{f}_\theta$ . Além disso,  $E_\omega|_{\mathbb{R}}$

deve ser o levantamento de um homeomorfismo crítico do círculo real analítico com um único ponto crítico de ordem  $2k + 1$ . Essas restrições sobre  $(E_\omega)$  implicam em uma rigidez nos coeficientes  $a_j$ 's, que provaremos serem unicamente determinados. Denotaremos por  $f_\omega$  a projeção de  $E_\omega$  como endomorfismo holomorfo de  $\mathbb{C}^*$  através do recobrimento  $z \mapsto e^{2\pi iz}$ , e para simplificar a notação denotaremos por  $\rho(\omega)$  o número de rotação de  $f_\omega|_{\partial\mathbb{D}}$ . Como  $\rho$  é contínua,  $(f_\omega|_{\partial\mathbb{D}})$  é uma família completa de mapas críticos do círculo.

## 1.4 Outra extensão da família de Arnol'd

Em [23], os autores consideraram a família mais geral

$$F_a(x) = dx + a_1 + a_{2m} \sin(2\pi mx) + \sum_{j=1}^{m-1} (a_{2j} \sin(2j\pi x) + a_{2j+1} \cos(2j\pi x)) \quad (1.2)$$

de polinômios trigonométricos, com  $a = (a_1, \dots, a_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$  tal que:

- (i)  $a_{2m} > 0$
- (ii) a projeção  $f_a$  de  $F_a$  no círculo via  $x \mapsto e^{2\pi ix}$ , é uma aplicação  $2m$ -modal.
- (iii)  $d \in \mathbb{Z}$

Eles verificaram que, sob certas condições, a família  $(f_a)$  é completa, isto é, se  $g$  é uma aplicação  $2m$ -modal do círculo e satisfaz certas condições naturais ([23, p. 1326]), então  $g$  é topologicamente conjugado a algum membro dessa família. Denotaremos por  $\Delta$  o conjunto dos parâmetros  $a \in \mathbb{R}^{2m}$  que satisfazem as condições (i), (ii) e (iii). Dessa forma, se  $a = (a_1, \dots, a_{2m})$  representa o parâmetro na família (1.1) devemos ter  $a_{2j+1} = 0$  com  $1 \leq j < m$ , e é provável que  $a$  esteja na fronteira de  $\Delta$ .

Recentemente, Rempe e van Strien [54] provaram a densidade de hiperbolicidade na família  $(f_a)$ . Em outras palavras, o subconjunto dos parâmetros nos quais  $f_a$  é hiperbólica, é aberto e denso em  $\Delta$ . Dizer que  $f_a$  é hiperbólica significa que a órbita de cada ponto crítico está contida em uma bacia atratora ou é assintótica a uma singularidade essencial. A densidade de funções hiperbólicas no espaço de funções racionais (Conjectura de Fatou) é um dos problemas mais importantes em dinâmica complexa. Esse problema foi reduzido,

por Mané-Sad-Sullivan, à não existência de campo de linhas invariante no conjunto de Julia (veja [50, p. 3]).

No caso da família  $(f_\omega)$ , a hiperbolicidade de um membro é equivalente ao seu número de rotação ser racional, e portanto, temos a densidade de hiperbolicidade para  $(f_\omega)$ . Além disso, segue-se imediatamente de [54, Theorem 9.3 and Theorem 9.4] que  $f_\omega$  não suporta um campo de linhas invariante em seu conjunto de Julia e nem mesmo no conjunto de escape.

Tanto quanto sabemos, a dinâmica complexa (espaço de fase) induzida pela extensão inteira de  $E_\omega$  ainda não foi descrita.

## 1.5 Resultados principais

Nossa principal contribuição com este trabalho é a construção de pares comutantes holomorfos de grau arbitrário e o estudo de alguns aspectos da dinâmica complexa da família  $(f_\omega)$  de endomorfismos de  $\mathbb{C}^*$ . Mais precisamente, provamos os seguintes teoremas:

**Teorema A.** *Dado  $k > 0$ , para cada  $n \geq 0$  e cada  $\omega$  tal que  $\rho(\omega)$  tem expansão em frações continuadas de comprimento  $n+1$ , no mínimo, o par comutante real de ordem  $2k+1$  definido por  $(f_\omega^{q_n}, f_\omega^{q_{n+1}})$  estende-se a um par comutante holomorfo  $\Gamma_{n,\omega}$ , de grau  $2k+1$ , com fronteiras geométricas e número de rotação  $G^n(\rho(\omega))$ .*

No Teorema A, a função  $G$  é a aplicação de Gauss, isto é,  $G(x)$  é a parte fracionária de  $x$ , para cada  $x \in [0, 1)$ .

**Teorema B.** *Para todo  $\omega \in [0, 1)$ , o conjunto de escape de  $f_\omega$  tem medida positiva e o conjunto de Fatou tem medida finita.*

Alguns aspectos na dinâmica complexa de famílias de funções holomorfas têm sido estudados por um longo tempo. Até onde sabemos, a família de funções inteiras mais estudada é a exponencial:  $z \mapsto \lambda e^z$  com  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Dentre as famílias de endomorfismos de  $\mathbb{C}^*$ , pouco se sabe. Alguns aspectos topológicos e combinatórios da dinâmica da família

$$z \mapsto z + a + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi z), \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

foram descritos por Fagella [28].



Em termos da medida do conjunto de Julia, McMullen mostrou em [49] que o conjunto de Julia da família exponencial tem dimensão de Hausdorff igual a 2, e no caso em que existe uma órbita periódica atratora ele provou que a medida desse conjunto é igual a zero. Em contraste, McMullen demonstrou que o conjunto de Julia da família de senos  $z \mapsto \sin(\alpha z + \beta)$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ , tem sempre medida positiva.

Seguindo as ideias de McMullen, Fang [29] mostrou que o conjunto de Julia de endomorfismos de  $\mathbb{C}^*$  da forma  $z \mapsto z^m \exp(P(z) + Q(1/z))$ , onde  $P(z)$  e  $Q(z)$  são polinômios mônicos de grau  $d$ , e  $m \in \mathbb{Z}$ , tem medida positiva. Com as mesmas ideias, Schubert [56] verificou que, em cada faixa vertical de largura  $2\pi$ , a área do conjunto de Fatou da função seno é finita, confirmando assim uma conjectura de J. Milnor.

Usaremos as técnicas desenvolvidas por McMullen [49] em conjunto com os resultados de Schubert para provar o Teorema B. Até o momento não sabemos como usar as ideias do Teorema B para dizer, por exemplo, se o conjunto de Julia dos pares holomorfos tem medida positiva.

## 1.6 Organização do Texto

Esta Tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 introduzimos os mapas críticos do círculo, apresentamos os conceitos e os principais resultados sobre pares comutantes reais e holomorfos desenvolvidos por de Faria, devidamente adaptados ao caso com criticidade arbitrária. Explicamos ainda a construção do operador de renormalização no espaço dos mapas críticos em termos dos pares comutantes.

Já no Capítulo 3, introduzimos a família de Arnol'd *generalizada*, como já dissemos na introdução, e provamos que os coeficientes  $a_j$ 's são números reais não-nulos, e a seguir determinamos explicitamente seus valores. Adaptamos um resultado técnico fundamental de [12] a respeito do crescimento exponencial de  $E_\omega$  e a seguir, construímos os pares comutantes holomorfos (prova do Teorema A).

No Capítulo 4, relembremos importantes resultados sobre distorção conforme de funções univalentes, e a teoria básica de iterações de funções inteiras e endomorfismos de  $\mathbb{C}^*$  essenciais para a descrição da dinâmica de  $f_\omega$ . Em particular, apresentamos alguns resultados sobre o conjunto de escape para funções inteiras transcendentais de  $\mathbb{C}$  e do cilindro  $\mathbb{C}^*$ .

No Capítulo 5, apresentamos a classificação das componentes de Fatou de  $f_\omega$  em função do número de rotação de sua restrição ao círculo unitário, e estendemos para  $f_\omega$  os resultados obtidos por de Faria [13] para a família de Arnol'd (padrão). Usando os resultados do Capítulo 4 provamos o Teorema B. Para concluir, mostramos que quase toda órbita segue o conjunto pós-singular de  $f_\omega$ , incluindo aqui, as singularidades essenciais.

No Apêndice A, apresentamos a demonstração do Teorema 3.2.

## Pares comutantes

Seguindo [12, 17], apresentaremos neste capítulo a teoria básica dos pares comutantes reais e holomorfos, este último no contexto mais geral em termos do grau de criticalidade. Essa é uma adaptação dos pares comutantes holomorfos introduzidos por de Faria [12] no caso cúbico. Nesse contexto, apresentaremos com mais detalhes apenas a construção desses pares comutantes holomorfos a partir de uma generalização da família de Arnol'd, no próximo capítulo.

### 2.1 Mapas críticos do círculo

Neste texto, consideraremos o círculo  $\mathbb{S}^1$  como a fronteira do disco unitário  $\partial\mathbb{D}$ . Um homeomorfismo  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  de classe  $C^r$ , para algum  $r \geq 3$ , com um único ponto crítico  $c \in \mathbb{S}^1$  não-*flat* de ordem  $2k + 1$ , onde  $k \geq 1$ , é chamado *mapa crítico do círculo* de grau  $2k + 1$ . Isto significa, em particular, que existe um difeomorfismo local  $\phi$  de classe  $C^r$  tal que  $f(z) = \pm|\phi(z)|^{2k+1} + f(c)$  para todo  $z$  numa vizinhança de  $c$ , com  $\phi(c) = 0$ . A principal família de mapas críticos do círculo que consideraremos neste trabalho é uma generalização da famosa *família de Arnol'd* induzida por

$$f_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ onde } f_\theta(z) = z + \theta - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi z) \text{ e } \theta \in [0, 1) \quad (2.1)$$

Dado um homeomorfismo do círculo  $f$ , denotaremos seu número de rotação por  $\rho(f) \in$

$[0, 1)$ , o qual pode ser expresso como fração contínua:

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} [r_0, r_1, \dots, r_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_0 + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{r_n}}}}},$$

que por sua vez pode ser finita ou infinita dependendo se  $\rho(f)$  é racional ou irracional, respectivamente. A menos que seja dito explicitamente o contrário, daqui por diante suporemos que o número de rotação de  $f$  é irracional.

Seja  $(q_n)$  a sequência de primeiros retornos de  $\rho(f)$  definida por:

$$q_0 = 1, \quad q_1 = r_0, \quad \text{e} \quad q_{n+1} = r_n q_n + q_{n-1}, \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

Se  $R_\theta$  é a rotação rígida de ângulo  $\theta := 2\pi\rho(f)$  em  $\mathbb{S}^1$  e  $z \in \mathbb{S}^1$ ,  $(R_\theta^{q_n}(z))$  é a sequência de primeiros retornos de  $z$ , isto é,

$$d(z, R_\theta^{q_n}(z)) < d(z, R_\theta^j(z)), \quad 0 < j < q_n,$$

onde  $d$  é a distância usual em  $\mathbb{S}^1$ . Pelo Teorema de Poincaré, existe uma função  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  contínua e sobrejetora tal que  $h \circ f = R_\theta \circ h$ . Portanto, se  $h(x) = z$  e  $[x, f^{q_n}(x)]$  é a imagem do intervalo de primeiro retorno com extremidades em  $z$  e  $R_\theta^{q_n}(z)$  então

$$f^j(x) \notin [x, f^{q_n}(x)], \quad \text{se} \quad 0 < j < q_n.$$

Dado  $z \in \mathbb{S}^1$  e  $n \geq 1$ , seja  $J_n(z)$  o intervalo em  $\mathbb{S}^1$  limitado por  $f^{q_n}(z)$  e  $f^{q_{n-1}}(z)$  e que contém  $z$ . Denotaremos por  $I_n(z) \subset J_n(z)$  o intervalo limitado por  $z$  e  $f^{q_n}(z)$ . Note que  $I_n(z) \cap I_{n-1}(z) = \{z\}$  e  $I_n(z) \cup I_{n-1}(z) = J_n(z)$ . No caso em que  $f$  é um mapa crítico com ponto crítico em  $z = c$ , escreveremos simplesmente  $I_n$  e  $J_n$  sem referência ao ponto que estamos considerando. Neste caso definimos a *partição dinâmica*  $\mathcal{P}_n$  de nível  $n$  associado à  $f$  por:

$$\mathcal{P}_n = \{I_{n-1}, f(I_{n-1}), \dots, f^{q_{n-1}}(I_{n-1})\} \cup \{I_n, f(I_n), \dots, f^{q_n-1}(I_n)\}.$$

Cada intervalo em  $\mathcal{P}_n$  é compacto, e a menos de pontos de fronteira, a partição dinâmica é, de fato, uma partição. Note que essa partição é induzida por  $\{f^j(c); 0 \leq j \leq q_n + q_{n-1} - 1\}$ . Denotaremos por  $\mathcal{P}_n(z)$  o átomo da partição  $\mathcal{P}_n$  que contém o ponto  $z$ . Dois resultados fundamentais sobre homeomorfismos críticos do círculo é o seguinte, cuja prova pode ser encontrada, por exemplo, em [17]:

**Teorema 2.1 (Real bounds).** *Seja  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  um mapa crítico de classe  $C^3$  com número de rotação irracional. Existe  $n_0 = n_0(f)$  tal que, para todo  $n \geq n_0$  e qualquer par  $I, J$  de átomos adjacentes de  $\mathcal{P}_n$  temos  $K^{-1}|I| \leq |J| \leq K|I|$ , onde  $K$  é uma constante universal.*

**Teorema 2.2.** *Sejam  $f$  e  $g$  mapas críticos do círculo com o mesmo número de rotação, e seja  $h$  a conjugação entre  $f$  e  $g$  que leva o ponto crítico de  $f$  no ponto crítico de  $g$ , de mesma ordem. Então,  $h$  é quase simétrica.*

A extensão dos Teoremas 2.1 e 2.2 para homeomorfismos do círculo com mais de um ponto crítico (todos não-*flat*), foi anunciado recentemente por de Faria [15] em um trabalho conjunto com G. Estevez.

## 2.2 Pares comutantes reais

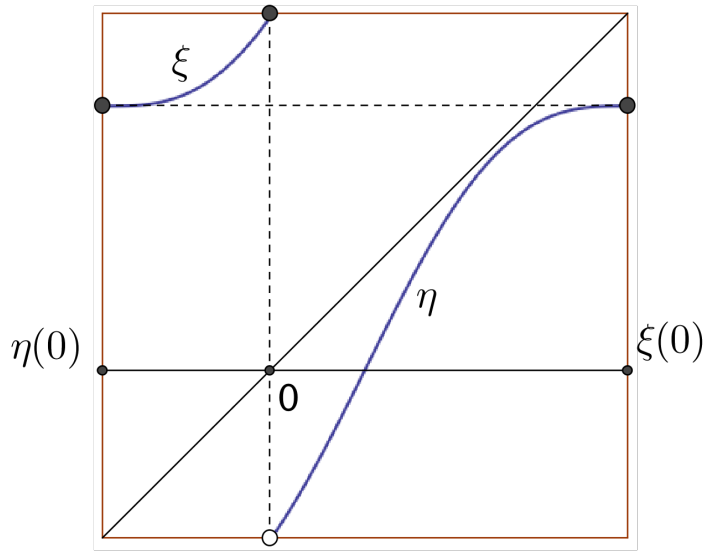
Se  $f$  é um mapa crítico do círculo, como antes, podemos considerar a aplicação de primeiro retorno  $f_n : J_n \rightarrow J_n$  de  $f$  ao intervalo  $J_n$ , definida por  $f_n|_{I_n} = f^{q_{n-1}}$  e  $f_n|_{I_{n-1}} = f^{q_n}$ . O par  $(f^{q_{n-1}}|_{I_n}, f^{q_n}|_{I_{n-1}})$  motiva a ideia abstrata de par comutante real (veja a figura 2.1).

**Definição 1.** *Um par comutante real  $\zeta := (\xi, \eta)$  de classe  $C^r$  é um par funções reais injetoras  $\xi : I_\xi \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\eta : I_\eta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^r$  que preservam orientação onde:*

- (a)  $I_\xi := [\eta(0), 0]$  e  $I_\eta := [0, \xi(0)]$ ;
- (b) *existe uma vizinhança de  $I_\xi$  e  $I_\eta$  na qual  $\xi$  e  $\eta$  estendem-se injetivamente com a mesma regularidade e  $\xi \circ \eta = \eta \circ \xi$ , onde ambos os estiverem definidos;*
- (c)  $0 < \xi \circ \eta(0) < \xi(0)$ ;
- (d)  $\xi'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I_\xi \setminus \{0\}$  e,  $\eta'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I_\eta \setminus \{0\}$ .

Tendo em vista a condição (b), chamaremos de *par comutante crítico* de ordem  $2k + 1$  um par comutante real  $(\xi, \eta)$  tal que a origem é ponto crítico de ordem  $2k + 1$  para  $\xi$  e  $\eta$ . Usaremos a seguinte convenção: dado um par comutante real  $\zeta := (\xi, \eta)$  definimos

$$\zeta(x) = \begin{cases} \xi(x), & \text{se } \eta(0) \leq x \leq 0, \\ \eta(x), & \text{se } 0 < x \leq \xi(0). \end{cases}$$



**Figura 2.1:** *par comutante real*

Com isso, podemos associar à  $\zeta$  um único  $a \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  que chamaremos de *tempo primeiro retorno* de  $\zeta$  da seguinte forma: se existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\eta^{n+1} \circ \xi(0) < 0 \leq \eta^n \circ \xi(0)$  então  $a$  será o menor  $n$  que satisfaz esta desigualdade; caso contrário,  $a = \infty$ . No último caso a sequência  $(\eta^n \circ \xi(0))$  converge para um ponto fixo parabólico no intervalo  $(0, \xi(0))$ .

### 2.2.1 Espaço métrico dos pares comutantes reais normalizados

Dado um par comutante real  $\zeta = (\eta, \xi)$ , sejam  $\lambda := \lambda(\zeta) = \xi(0)/|\eta(0)|$  e  $\Lambda(x) = |\eta(0)|x$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Podemos assim, definir  $\tilde{\zeta} = \Lambda^{-1} \circ \zeta \circ \Lambda$  e de modo análogo,  $\tilde{\xi}$  e  $\tilde{\eta}$ . Então  $\tilde{\zeta} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$  é um par comutante real, onde  $I_{\tilde{\xi}} = [-1, 0]$  e  $I_{\tilde{\eta}} = [0, \lambda]$ , que chamaremos de *normalização* de  $\zeta$ , ou que  $\tilde{\zeta}$  é um par comutante real *normalizado*. Note ainda, que existe uma única transformação de Möbius  $A_\lambda$  tal que

$$A_\lambda(-1) = -1, \quad A_\lambda(0) = 0 \quad \text{e} \quad A_\lambda(\lambda) = 1.$$

Em particular, se  $\lambda_i = \lambda(\zeta_i)$  para  $i = 1, 2$ , então  $\lambda_1 = \lambda_2$  se e, somente se,  $A_{\lambda_1} = A_{\lambda_2}$ .

No que segue definiremos uma métrica no espaço dos pares comutantes reais normalizados de classe  $C^r$ . Antes disso devemos lembrar que, se  $\phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^r$  em  $[-1, 1] \setminus \{0\}$  e possui uma descontinuidade na origem, definimos

$$\|\phi\|_r = \max \left\{ \|\phi|_{[-1,0]}\|_r, \|\phi|_{[0,1]}\|_r \right\}.$$

**Definição 2.** *Sejam  $\zeta_1 = (\eta_1, \xi_1)$  e  $\zeta_2 = (\eta_2, \xi_2)$  dois pares comutantes reais normalizados de classe  $C^r$ , com  $0 \leq r < \infty$ , com  $\lambda_i = \lambda(\zeta_i)$  para  $i = 1, 2$ . Definimos*

$$d_r(\zeta_1, \zeta_2) = \max \left\{ |\lambda_1 - \lambda_2|, \|A_{\lambda_1} \circ \zeta_1 \circ A_{\lambda_1}^{-1} - A_{\lambda_2} \circ \zeta_2 \circ A_{\lambda_2}^{-1}\|_r \right\}$$

Da observação acima segue-se que se  $d_r(\zeta_1, \zeta_2) = 0$  então  $\zeta_1 = \zeta_2$ . Com isso pode-se verificar facilmente  $d_r$  é, de fato, uma métrica. Denotaremos esse espaço métrico por  $\mathbb{P}^r$ .

### 2.2.2 Renormalização de pares comutantes reais

Nesta seção estamos interessados apenas em apresentar os pares comutantes reais sem pontos periódicos, de modo que, para cada  $\zeta$  sempre existe um tempo de primeiro retorno  $a$  finito tal que  $\zeta^{a+1}(0) > 0$ . Neste caso será possível definir a partir  $\zeta$  um novo par comutante real  $\mathcal{R}\zeta$  que chamaremos de renormalização de  $\zeta$ , como se segue. Seja  $\tilde{\zeta}$  a normalização de  $\zeta$  e considere  $A_\zeta(x) = -\zeta^{a+1}(0)x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Definindo-se  $\tilde{\xi}(0) = -\eta(0)/\eta^{a+1}(0)$ , seja  $\mathcal{R}\zeta : [-1, \tilde{\xi}(0)] \rightarrow [-1, \tilde{\xi}(0)]$  a aplicação dada por

$$\mathcal{R}\zeta(x) = \begin{cases} A_\zeta^{-1} \circ \eta \circ A_\zeta(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ A_\zeta^{-1} \circ \zeta^{a+1} A_\zeta(x), & \text{se } 0 < x \leq \tilde{\xi}(0). \end{cases}$$

O subespaço dos pares comutantes  $\zeta \in \mathbb{P}^r$  renormalizáveis é denotado por  $\mathbb{P}_1^r$ , de modo que o operador de renormalização  $\mathcal{R} : \mathbb{P}_1^r \rightarrow \mathbb{P}^r$  está bem definido. Considerando-se  $\mathbb{P}_n^r := \mathcal{R}^{-n}(\mathbb{P}^r)$  para cada  $n \geq 1$ , temos  $\mathbb{P}_{n+1}^r \subseteq \mathbb{P}_n^r$  para todo  $n$ . Se  $\zeta$  não possui pontos periódicos então  $\tilde{\zeta} \in \mathbb{P}_\infty^r = \bigcap_{n \geq 1} \mathbb{P}_n^r$ , isto é,  $\tilde{\zeta}$  é *infinitamente renormalizável*.

Suponha, agora, que  $\zeta \in \mathbb{P}_n^r$  para algum  $n \geq 1$ . Neste caso, seja  $a_n$  o tempo de primeiro

retorno do par comutante  $\mathcal{R}^n \zeta$ . Se  $\zeta \in \mathbb{P}_\infty^r$ , definimos o número de rotação de  $\zeta$  por  $\rho(\zeta) = [a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ . Caso contrário existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\zeta \in \mathbb{P}_n^r$  e  $\zeta \notin \mathbb{P}_{n+1}^r$ , e  $\rho(\zeta) := [a, a_1, a_2, \dots, a_n]$ .

### 2.2.3 Renormalização de homeomorfismos do círculo

Sejam  $f$  um homeomorfismo do círculo e  $c \in \mathbb{S}^1$  tal que  $f^{q_n}(c) \neq c$ , para algum  $n \geq 1$ . Como antes,  $f_n : J_n \rightarrow J_n$  é a aplicação de primeiro retorno de  $f$  em  $J_n := I_n \cup I_{n-1}$ . Existe um único recobrimento afim  $A_{n-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $A_{n-1}([-1, 0]) = I_n$ , com  $A_{n-1}(-1) = f^{q_n}(c)$  e  $A_{n-1}(0) = c$ . Suponha ainda que  $f^{q_j}(c) \neq c$  para cada  $0 \leq j \leq n$  e defina  $\lambda_n > 0$ , o menor número real tal que  $A_{n-1}(\lambda_n) = f^{q_{n-1}}(c)$ . Então  $A_{n-1}([0, \lambda_n]) = I_{n-1}$ . Segue-se do fato de que  $A_{n-1}$  é um recobrimento afim que  $\lambda_n = |I_{n-1}|/|I_n|$  para cada  $n \geq 1$ , uma sequência uniformemente limitada pelo Teorema 2.1. Note que  $1/\lambda_n$  é a  $n$ -ésima razão de escala de  $f$  (veja [13], p. 997). Com isso podemos considerar a aplicação  $\zeta_n : [-1, \lambda_n] \rightarrow [-1, \lambda_n]$  dada por  $\zeta_n = A_{n-1}^{-1} \circ f_n \circ A_{n-1}$ ; aqui,  $A_{n-1}^{-1}$  é o ramo da inversa de  $A_{n-1}$  cuja imagem inversa de  $J_n$  é o intervalo  $[-1, \lambda_n]$ . A aplicação  $\zeta_n$  é um par comutante real normalizado chamado  $n$ -ésima renormalização de  $f$ . No caso em que  $f$  é um homeomorfismo crítico, tomamos o ponto  $c$  como o (único) ponto crítico de  $f$ . Em particular, se  $f$  não tem pontos periódicos então  $\zeta_{n+1} = \mathcal{R}\zeta_n$  para todo  $n \geq 0$  e ainda, se  $\rho(f) = [a, a_1, a_2, a_3, \dots]$  então  $\rho(\zeta_n) = [a_n, a_{n+1}, \dots]$ .

A seguir,  $Q : z \mapsto z^p$  onde  $p$  é um número inteiro positivo ímpar.

**Definição 3.** Diremos que um par comutante real analítico  $\zeta = (\xi, \eta)$  de ordem  $p$  pertence à classe de Epstein  $\mathcal{E}$  se, para  $\gamma = \xi, \eta$ , existe uma decomposição  $\gamma = h_\gamma \circ Q$  tal que:

- (a)  $h_\gamma : Q(I_\gamma) \rightarrow \gamma(I_\gamma)$  é um difeomorfismo que preserva orientação;
- (b)  $h_\gamma^{-1}$  estende-se como uma função univalente para  $\mathbb{C}(\tilde{I}_\gamma)$ , onde  $\tilde{I}_\gamma \supseteq \gamma(I_\gamma)$  é um intervalo aberto e  $\mathbb{C}(I) := \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \setminus I)$ .

**Lema 2.2.1** (de Faria [12]). A classe de Epstein  $\mathcal{E}$  é invariante pelo operador de renormalização.



## 2.3 Pares comutantes holomorfos

Diremos que uma quádrupla  $(\mathcal{D}, \mathcal{O}_\xi, \mathcal{O}_\eta, \mathcal{O}_\nu)$  de domínios simplesmente conexos no plano é uma *bowtie*<sup>1</sup> se:

- (B<sub>1</sub>) os quatro domínios são simétricos em relação ao eixo real;
- (B<sub>2</sub>) cada  $\mathcal{O}_\gamma$  é um domínio de Jordan cujo fecho está contido em  $\mathcal{D}$ ;
- (B<sub>3</sub>)  $\overline{\mathcal{O}_\xi} \cap \overline{\mathcal{O}_\eta} = \{0\} \subset \mathcal{O}_\nu$ ;
- (B<sub>4</sub>)  $\mathcal{O}_\gamma \setminus \mathcal{O}_\nu$  e  $\mathcal{O}_\nu \setminus \mathcal{O}_\gamma$  são subconjuntos conexos não-vazios para  $\gamma = \xi, \eta$ ;
- (B<sub>5</sub>) o intervalo  $\mathcal{O}_\xi \cap \mathbb{R}$  está a esquerda da origem.

Definindo-se  $J_\gamma = \mathcal{O}_\gamma \cap \mathbb{R}$ , para  $\gamma = \xi, \eta, \nu$ , segue-se de (B<sub>3</sub>) que a origem é uma extremidade comum aos intervalos abertos  $J_\xi$  e  $J_\eta$ , e  $J_\xi$  está contido no semieixo real negativo por (B<sub>5</sub>). Além disso, por (B<sub>3</sub>),  $J_\nu$  contém a origem e está contido em  $J_\xi \cup \{0\} \cup J_\eta$ , por (B<sub>4</sub>). E mais, segue-se de (B<sub>4</sub>) que  $\mathcal{O}_\xi \cup \mathcal{O}_\nu \cup \mathcal{O}_\eta$  e  $\mathcal{O}_\gamma \cap \mathcal{O}_\nu$ , para  $\gamma = \xi, \eta$ , são domínios de Jordan (veja a figura 2.2).

**Definição 4.** *Um par comutante holomorfo de grau  $p$  é formado por uma bowtie  $(\mathcal{D}, \mathcal{O}_\xi, \mathcal{O}_\eta, \mathcal{O}_\nu)$ , três funções analíticas  $\xi, \eta$  e  $\nu$ , com domínios  $\mathcal{O}_\xi, \mathcal{O}_\eta$  e  $\mathcal{O}_\nu$ , respectivamente, e um inteiro positivo  $m$  satisfazendo as seguintes condições:*

*H<sub>1</sub> as três funções comutam com a conjugação complexa;*

*H<sub>2</sub> as funções  $\xi : \mathcal{O}_\xi \rightarrow \mathcal{D} \cap \mathbb{C}(\xi(J_\xi))$  e  $\eta : \mathcal{O}_\eta \rightarrow \mathcal{D} \cap \mathbb{C}(\eta(J_\eta))$  são univalentes e sobrejetoras;*

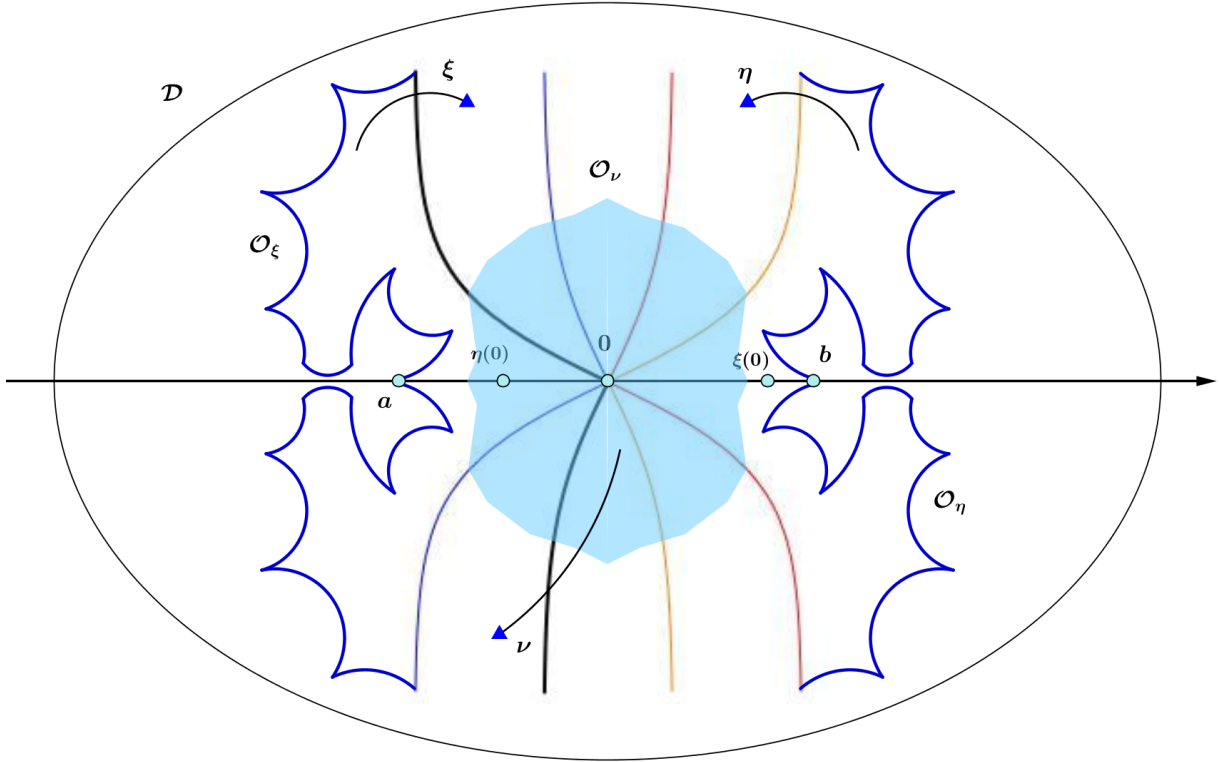
*H<sub>3</sub>  $\nu : \mathcal{O}_\nu \rightarrow \mathcal{D} \cap \mathbb{C}(\nu(J_\nu))$  é um recobrimento ramificado sobrejetor de grau  $p$ , com um único ponto crítico na origem;*

*H<sub>4</sub>  $\xi$  e  $\eta$  estendem-se analiticamente a uma vizinhança da origem na qual estão definidas*

*$\xi \circ \eta$  e  $\eta \circ \xi$ , e ainda,  $\xi \circ \eta(z) = \eta \circ \xi(z) = \nu(z)$  para todo  $z$  nesta vizinhança;*

---

<sup>1</sup>Em português isto seria uma *gravata borboleta*, nome sugestivo para a configuração desta quádrupla no plano. Esse nome foi dado por de Faria em [13].



**Figura 2.2:** par comutante holomorfo de grau 5.

$H_5$  se  $x \in J_\xi$  então  $\xi(x) > x$ , enquanto que  $\eta(x) < x$  se  $x \in J_\eta$ ; e ainda,  $\xi(0), \nu(0) \in J_\eta$  e  $\eta(0) \in J_\xi$ ;

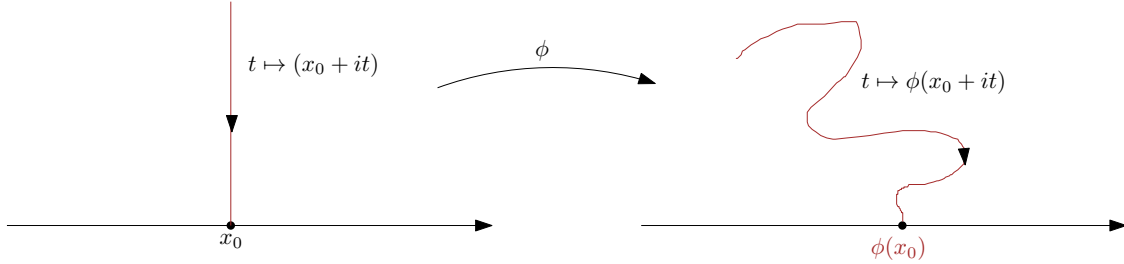
$H_6$  se  $J_\xi = (a, 0)$  e  $J_\eta = (0, b)$  então  $\xi^m(a)$  e  $\eta(b)$  estão bem definidos como valores de fronteira e temos  $\xi^m(a) = \eta(0)$  e  $\eta(b) = \xi(0)$ .

Apesar  $\xi$  e  $\eta$  não estarem definidas propriamente na fronteira de seus domínios, o Teorema de Carathéodory (veja [8], pág. 51) garante que essas funções estendem-se como homeomorfismos ao fecho dos seus domínios, o que justifica a condição  $H_6$ .

Pares comutantes holomorfos serão denotados por  $\Gamma$ . Neste capítulo construiremos explicitamente pares comutantes holomorfos de grau  $p$  arbitrário. Note que, da condição  $H_2$ ,  $p$  é necessariamente ímpar. Segue-se também, da definição acima, que  $(\widehat{\xi}, \widehat{\eta})$  é um par comutante crítico real analítico de ordem  $p$ , onde  $\widehat{\xi} := \xi|_{[\eta(0), 0]}$  e  $\widehat{\eta} := \eta|_{[0, \xi(0)]}$ , e portanto, podemos definir o número de rotação de  $\Gamma$  como sendo o número de rotação desse par comutante real associado. Dado um subconjunto  $\Omega$  do plano complexo, denotaremos por  $\Omega^+$  o subconjunto  $\Omega \cap \mathbb{H}$ . E ainda,  $\Omega^-$  é a reflexão de  $\Omega^+$  em relação ao eixo real.

**Lema 2.3.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{C}$  um domínio simétrico em relação ao eixo real e  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função univalente que comuta com a conjugação complexa e tal que  $\phi|_{\Omega \cap \mathbb{R}}$  é crescente. Então  $\phi(\Omega^+) \subset \mathbb{H}$ .*

*Demonstração.* Se  $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$  então  $\phi(x) = \phi(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$ , de onde segue-se que  $\phi(x) \in \mathbb{R}$ , e portanto  $\phi(\Omega \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ . Como  $\phi$  é injetora, temos duas possibilidades:  $\phi(\Omega^+) \subset \mathbb{H}$  ou



**Figura 2.3:** comutação

$\phi(\Omega^-) \subset \mathbb{H}$ , exclusivamente. Fixado  $x_0 \in \Omega$  real, considere a curva  $\alpha : t \mapsto (x_0 + it)$  (figura 2.3). Então, para  $t > 0$  suficientemente pequeno,

$$\text{Im } \phi(x_0 + it) = \phi'(x_0)t + \mathcal{O}(t^3) > 0,$$

visto que os coeficientes da série de Taylor de  $\phi$  em torno de  $x_0$  são reais e que  $\phi'(x_0)$  é positivo.  $\square$

**Proposição 2.1** (de Faria [12]). *Em qualquer par comutante holomorfo de grau  $p$ , as funções  $\xi$  e  $\eta$  têm extensões analíticas à  $\mathcal{O}_\xi \cup \mathcal{O}_\nu$  e  $\mathcal{O}_\eta \cup \mathcal{O}_\nu$ , respectivamente. Além disso, as restrições  $\xi_* := \xi|_{\mathcal{O}_\nu}$  e  $\eta_* := \eta|_{\mathcal{O}_\nu}$  são recobrimentos ramificados de grau  $p$  sobre  $\mathcal{O}_\nu$  e  $\mathcal{O}_\xi \cap \mathbb{C}([\xi^{-1} \circ \eta(0), 0])$ , respectivamente, e  $\eta \circ \xi_* = \xi \circ \eta_* = \nu$ .*

*Demonstração.* Como  $\xi|_{J_\xi}$  é monótona crescente e  $\xi^m(a) < 0$  por  $H_6$ , segue-se que  $\xi(a) < 0$ . Por outro lado,

$$\xi(\mathcal{O}_\xi) \cap \mathcal{O}_\eta = \mathcal{O}_\eta \setminus (\mathbb{R} \setminus [\xi(a), \xi(0)]) = \mathcal{O}_\eta \setminus (\mathbb{R} \setminus [0, \xi(0)]) = \mathcal{O}_\eta \setminus [\xi(0), b]$$

Portanto, existe  $V \subset \mathcal{O}_\xi$  tal que  $\xi(V) = \mathcal{O}_\eta \setminus [\xi(0), b]$ . Em particular, por  $H_2$ ,

$$\eta \circ \xi(V) = \eta(\mathcal{O}_\eta) \setminus [\eta \circ \xi(0), \eta(b)] = [(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R}) \cup (\eta(0), \xi(0))] \setminus [\eta \circ \xi(0), \eta(b)] = \mathcal{D} \cap \mathbb{C}([\eta(0), \eta \circ \xi(0)])$$

Logo,

$$\eta \circ \xi : V \longrightarrow \mathcal{D} \cap \mathbb{C}([\eta(0), \eta \circ \xi(0)])$$

é uma função univalente e sobrejetora. Seja  $Y := \nu^{-1}([\nu(0), +\infty))$ . Pela condição  $H_3$ ,  $Y$  é a reunião  $p$  curvas (arcos)  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$  tais que  $\gamma_i \cap \gamma_j = \{0\}$ , se  $i \neq j$ , e cada  $\gamma_j$  tem extremidades em 0 e na fronteira de  $\mathcal{O}_\nu$ . Note que, se  $\gamma_j$  é uma dessas curvas então sua reflexão em relação ao eixo real também o é. Em particular, uma delas está contida no eixo real, cuja imagem é o intervalo  $\overline{\mathcal{O}_\nu} \cap [0, b]$ ; Dessa forma,  $\mathcal{O}_\nu - Y$  tem  $p$  componentes, uma das quais é simétrica em relação ao eixo real. Seja  $W$  esta componente. Na verdade provaremos que  $W = V$ . Para tanto, será suficiente verificar que  $W^+ = V^+$ , já que ambos são simétricos em relação ao eixo real. Pelo Lema acima,  $\nu$  leva  $W^+$  injetivamente sobre  $\mathcal{D}^+$ , e da mesma forma,  $\eta \circ \xi$  leva  $V^+$  injetivamente sobre  $\mathcal{D}^+$ . Com isso podemos considerar a função  $\phi := \nu^{-1} \circ (\eta \circ \xi)$ , que está bem definida em  $V^+$ , cuja imagem é  $W^+$ . Seja  $U$  uma vizinhança da origem, dada pela condição  $H_4$ . Então, para todo  $z \in V^+ \cap U$ ,  $\phi(z) = z$ , e portanto,  $\phi$  é a identidade em  $V^+$ . Em particular segue-se que  $V^+ = W^+$ , como queríamos.

Lembrando que  $\xi(V) = \mathcal{O}_\eta \setminus [\xi(0), b]$ , a partir da discussão acima concluímos que  $V \cap \mathbb{R} = (\xi^{-1}(0), 0)$ , de onde segue-se que  $\mathcal{O}_\xi \cap J_\nu = (\xi^{-1}(0), 0)$ . Como  $\nu$  coincide com  $\eta \circ \xi$  em  $W$  obtemos  $\nu(\xi^{-1}(0)) = \eta \circ \xi(\xi^{-1}(0)) = \eta(0)$ . Analogamente podemos concluir que  $\mathcal{O}_\eta \cap J_\nu = (0, \eta^{-1}(0))$  e que  $\nu(\eta^{-1}(0)) = \xi \circ \eta(\eta^{-1}(0)) = \xi(0)$ . Portanto, por  $H_3$ , a imagem de  $\mathcal{O}_\nu$  por  $\nu$  é  $\mathcal{D} \cap \mathbb{C}([\eta(0), \xi(0)])$ . Isto prova que a função  $\xi_* := \eta^{-1} \circ \nu : \mathcal{O}_\nu \longrightarrow \mathcal{O}_\eta$  está bem definida. Por  $H_3$ ,  $\xi_*$  é um recobrimento ramificado de grau  $p$ , e como  $\nu$  coincide com  $\eta \circ \xi$  em  $W$ , temos o seguinte: para todo  $z \in W$

$$\xi_*(z) = \eta^{-1} \circ \nu(z) = \eta^{-1} \circ \eta \circ \xi(z) = \xi(z),$$

o que prova que  $\xi_*$  é uma extensão de  $\xi$  a  $\mathcal{O}_\nu$ . Da mesma forma prova-se que

$$\eta_* := \xi^{-1} \circ \eta : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_\xi$$

está bem definida e estende  $\eta$  a  $\mathcal{O}_\nu$ . □

### 2.3.1 Renormalização de pares comutantes holomorfos

A Proposição 2.1 é peça fundamental para introduzir um operador de renormalização no espaço dos pares comutantes holomorfos compatível com o, já existente, operador de renormalização no espaço dos pares comutantes reais.

**Teorema 2.3** (de Faria [12]). *Seja  $\Gamma$  um par comutante holomorfo de grau  $p$ . Então existe um par comutante holomorfo  $\mathcal{R}(\Gamma)$  de grau  $p$  cujo par comutante real associado é a primeira renormalização do par comutante real associado a  $\Gamma$ , ambos de ordem  $p$ .*

Considerando o par comutante holomorfo como um sistema dinâmico complexo, podemos identificá-lo com uma *aplicação auxiliar associada* definida por

$$F(z) := \begin{cases} \xi(z), & \text{se } z \in \mathcal{O}_\xi \\ \eta(z), & \text{se } z \in \mathcal{O}_\eta \\ \nu(z), & \text{se } z \in \mathcal{O}_\nu \setminus (\mathcal{O}_\xi \cup \mathcal{O}_\eta) \end{cases}$$

**Proposição 2.2** (de Faria [12]). *Dado um par comutante holomorfo  $\Gamma$  de grau  $p$ , sejam  $F$  sua aplicação auxiliar associada,  $\mathcal{U} := \mathcal{O}_\xi \cup \mathcal{O}_\nu \cup \mathcal{O}_\eta$  e  $X := J \cup F^{-1}(J)$ , onde  $J := \mathbb{R} \cap \mathcal{U}$ . Então:*

- (a)  $F|_{\mathcal{U} \setminus X}$  é um recobrimento regular de grau  $p$  sobre  $\mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$ ;
- (b)  $F$  e  $\Gamma$  têm as mesmas órbitas como conjuntos.

**Definição 5.** *Seja  $\Gamma$  um par comutante holomorfo. O conjunto de Julia cheio de  $\Gamma$  é o conjunto*

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \overline{\bigcap_{n \geq 0} F^{-n}(\mathcal{D})}.$$

Como no caso de iterações de polinômios, denotaremos por  $\mathcal{J}(\Gamma) := \partial\mathcal{K}(\Gamma)$  o conjunto de Julia de  $\Gamma$ . Em [18, Proposition 4.10] foi provado que  $\mathcal{K}(\Gamma) = \mathcal{J}(\Gamma)$ .

## 2.4 O argumento *pull-back*

Dizemos que um par comutante holomorfo  $\Gamma$  tem *fronteiras geométricas* se a bowtie associada  $(\mathcal{D}, \mathcal{O}_\xi, \mathcal{O}_\eta, \mathcal{O}_\nu)$  é tal que  $\partial\mathcal{D}$  e  $\partial\mathcal{U}$ , onde  $\mathcal{U} := \mathcal{O}_\xi \cup \mathcal{O}_\eta \cup \mathcal{O}_\nu$ , são  $K$ -quase círculos

para algum  $K \geq 1$ . O menor valor de  $K$  junto com o número  $\text{mod}(\mathcal{D} - \mathcal{U})$  serão chamados de *parâmetros geométricos* de  $\Gamma$ .

**Teorema 2.4** (Pull-back Theorem [12]). *Sejam  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  pares comutantes holomorfos de grau  $p$  com fronteiras geométricas. Se  $h : J_0 \rightarrow J_1$  é uma conjugação  $K$ -quase simétrica entre  $\Gamma_0|_{J_0}$  e  $\Gamma_1|_{J_1}$ , onde  $J_i = \mathbb{R} \cap \mathcal{U}_i$ , então existe uma conjugação  $H : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1$  quaseconforme entre  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  tal que  $H|_{J_0} = h$  e cuja dilatação maximal depende apenas de  $K$  e dos parâmetros geométricos de  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ .*

## 2.5 Limites *a priori* complexos

Usando a família de Arnold, de Faria construiu, em [12], exemplos de pares comutantes holomorfos de grau 3 além de obter certos *complex bounds* para estudar a rigidez de homeomorfismos críticos (veja também [18]). Os resultados seguem para qualquer criticalidade.

**Teorema 2.5.** [18, Theorem 3.1] *Seja  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  um homeomorfismo crítico de ordem  $p$  real analítico com número de rotação irracional arbitrário. Então existe  $n_0 = n_0(f)$  tal que, para todo  $n \geq n_0$  a  $n$ -ésima renormalização de  $f$  estende-se a um par comutante holomorfo com fronteiras geométricas cujo domínio fundamental tem módulo conforme limitado inferiormente por uma constante uniforme.*

**Teorema 2.6.** [63, Theorem 1.3] *Sejam  $f$  e  $g$  dois homeomorfismos críticos do círculo na classe de Epstein com o mesmo número de rotação. Então*

$$d_r(\mathcal{R}^n f, \mathcal{R}^n g) \rightarrow 0,$$

para todo  $0 \leq r < \infty$ .

## Construção de pares comutantes holomorfos

Neste capítulo definiremos uma possível generalização da conhecida família de Arnol'd, apresentaremos algumas propriedades geométricas e construiremos exemplos de pares comutantes holomorfos de grau arbitrário. Essa construção é uma das principais contribuições desse trabalho.

### 3.1 Descrição da Família de Arnol'd Generalizada

Nesta seção definiremos um levantamento de um homeomorfismo crítico do círculo, analítico real e com um único ponto crítico (de ordem ímpar qualquer).

**Teorema 3.1.** *Seja  $k$  um número inteiro positivo. Existe uma única  $k$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  de números reais não-nulos, tais que a função  $f_\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $\omega \in [0, 1)$ , dada por*

$$f_\omega(x) = x + \omega + \sum_{j=1}^k a_j \sin(2j\pi x)$$

*é um homeomorfismo crescente e satisfaz:*

- (a)  $f(x + 1) = f(x) + 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (b) todo número inteiro é ponto crítico de  $f_\omega$  com ordem  $2k + 1$ ;
- (c)  $f$  é analítica real.

Em particular,  $f_\omega$  induz uma família completa de homeomorfismos críticos do círculo com um único ponto crítico de ordem  $2k + 1$ . A prova do Teorema 3.1 será uma consequência do seguinte resultado clássico sobre determinantes.

**Lema 3.1.1 (Matriz de Vandermonde).** *Sejam  $b_1, b_2, \dots, b_k$  números complexos não nulos. Então*

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ b_1^3 & b_2^3 & \cdots & b_k^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{2k-1} & b_2^{2k-1} & \cdots & b_k^{2k-1} \end{pmatrix} = \left[ \prod_{j=1}^k b_j \right] \cdot \left[ \prod_{i<j} (b_j^2 - b_i^2) \right]$$

*Demonstração.* Dividindo cada elemento da  $j$ -ésima coluna por  $b_j$ , obtemos

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ b_1^3 & b_2^3 & \cdots & b_k^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{2k-1} & b_2^{2k-1} & \cdots & b_k^{2k-1} \end{pmatrix} &= \left[ \prod_{j=1}^k b_j \right] \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{2k-2} & b_2^{2k-2} & \cdots & b_k^{2k-2} \end{pmatrix} \\ &= \left[ \prod_{j=1}^k b_j \right] \cdot \left[ \prod_{i<j} (b_j^2 - b_i^2) \right] \end{aligned}$$

Observe que a última matriz acima é uma matriz de Vandermonde, cujo termo geral é  $(b_n^2)^{m-1}$ . □

Usando o Lema 3.1.1 acima podemos provar o Teorema 3.1.

*Demonstração do Teorema 3.1.* Os itens (a) e (c) são imediatos e por isso, provaremos apenas o item (b). Note que

$$Df_\omega(x) = 1 + \sum_{j=1}^k 2j\pi a_j \cos(2j\pi x) \tag{3.1}$$

e por indução em  $n \geq 1$  pode-se verificar que

$$D^n f_\omega(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^k (-1)^m (2j\pi)^n a_j \cos(2j\pi x), & \text{se } n = 2m + 1; \\ \sum_{j=1}^k (-1)^m (2j\pi)^n a_j \sin(2j\pi x), & \text{se } n = 2m. \end{cases}$$



Usando isto, concluimos que

$$D^{2m-1}f_\omega(0) = \sum_{j=1}^k (-1)^m (2j\pi)^{2m-1} a_j$$

e  $D^{2m}f_\omega(0) = 0$  para todo  $m \geq 1$ .

Para simplificar a notação escreveremos  $b_j = 2j\pi$  para cada  $j \geq 1$ . Considerando  $a_j$  como incógnita, para  $j = 1, 2, \dots, k$ , gostaríamos de obter uma única solução para o sistema de equações:

$$D^n f_\omega(0) = 0, n = 1, 2, \dots, 2k - 1$$

Como  $D^{2j}f_\omega(0) = 0$  para todo  $j \geq 1$ , isto significa resolver o sistema de  $k$  equações lineares com  $k$  incógnitas

$$D^{2m-1}f_\omega(0) = 0, m = 1, 2, \dots, k,$$

e portanto é preciso resolver o sistema linear não homogêneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} -b_1 a_1 - b_2 a_2 - \dots - b_k a_k = 1 \\ b_1^3 a_1 + b_2^3 a_2 + \dots + b_k^3 a_k = 0 \\ \vdots \\ (-1)^j b_1^{2j-1} a_1 + (-1)^j b_2^{2j-1} a_2 + \dots + (-1)^j b_k^{2j-1} a_k = 0 \\ \vdots \\ (-1)^k b_1^{2k-1} a_1 + (-1)^k b_2^{2k-1} a_2 + \dots + (-1)^k b_k^{2k-1} a_k = 0 \end{array} \right.$$

onde a  $j$ -ésima linha desse sistema corresponde à equação  $D^{2j-1}f_\omega(0) = 0$ , para  $j = 1, 2, \dots, k$ . Dividindo-se cada parcela na  $j$ -ésima linha por  $(-1)^j$ , chegamos ao seguinte sistema linear equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_k a_k = -1 \\ b_1^3 a_1 + b_2^3 a_2 + \cdots + b_k^3 a_k = 0 \\ \vdots \\ b_1^{2j-1} a_1 + b_2^{2j-1} a_2 + \cdots + b_k^{2j-1} a_k = 0 \\ \vdots \\ b_1^{2k-1} a_1 + b_2^{2k-1} a_2 + \cdots + b_k^{2k-1} a_k = 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

E ainda, a matriz dos coeficientes é

$$B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ b_1^3 & b_2^3 & \cdots & b_k^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{2k-1} & b_2^{2k-1} & \cdots & b_k^{2k-1} \end{pmatrix}$$

cujo determinante é não-nulo, pelo Lema 3.1.1, e portanto o sistema linear acima admite uma única solução não-trivial, já que sistema 3.2 não é homogêneo.

**Afirmção 1** Para cada  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $a_j \neq 0$ .

Para ver isto, suponha que  $a_j = 0$  para algum  $1 \leq j \leq k$ . Consideremos agora o subsistema com  $k - 1$  equações lineares e  $k - 1$  incógnitas obtido a partir do sistema 3.2 eliminando-se a primeira equação e as parcelas correspondentes à  $j$ -ésima coluna da matriz dos coeficientes. Tal sistema linear é homogêneo cuja matriz dos coeficientes é de Vandermonde, com todas as entradas distintas e não nulas, e portanto tem determinante não nulo. Isto implica que  $a_n = 0$  se  $n \neq j$ . Como estamos supondo que  $a_j = 0$ , concluímos que  $a_n = 0$  para cada  $n = 1, 2, \dots, k$ . Com essa contradição provamos a Afirmção 1.

Feito isto, basta provar que  $D^{2k+1} f_\omega(0) \neq 0$  de onde seguir-se-à que a origem, e portanto todo inteiro, é um ponto crítico de ordem  $2k + 1$ . Para tanto, basta trocar a primeira linha do sistema linear 3.2 pela equação  $D^{2k+1} f_\omega(0) = 0$ . Novamente usando o Lema 3.1.1 conclui-se que a matriz dos coeficientes tem determinante não nulo e portanto, o novo sistema linear admite apenas a solução trivial, o que não pode ocorrer já que teríamos  $a_j = 0$  para todo  $j = 1, 2, \dots, k$ .  $\square$

**Corolário 6.** *Nas hipóteses do Teorema 3.1, para cada  $j = 1, 2, \dots, k$  temos:*

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k\pi} \binom{2k}{k}^{-1} \quad e \quad a_j = \frac{(-1)^{k+j} k a_k}{j} \binom{2k}{k+j}$$

Antes de provar este corolário vamos recordar alguns resultados sobre *equações de diferenças* (veja [24, p. 57]). Seja  $z \mapsto P(z)$  uma função polinomial de grau  $q$ . Consideraremos um operador de diferença que será essencial na prova do Corolário 6, definido da seguinte forma:

$$\Delta P(z) := P(z+1) - P(z)$$

Pode-se observar agora, que  $\Delta P(z)$  é um polinômio de grau  $q-1$ . Continuando esse processo iterativo, definimos recursivamente

$$\Delta^n P(z) := \Delta^{n-1} P(z+1) - \Delta^{n-1} P(z)$$

Com isso, pode-se verificar que, para todo  $n \geq 0$ ,

$$\Delta^n P(z) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} P(z+n-m) \quad (3.3)$$

Em particular, se  $P(z) = z^{2p}$  então

$$\Delta^{2k} P(z) = \begin{cases} (2k)!, & \text{se } p = k; \\ 0, & \text{se } 1 \leq p < k. \end{cases} \quad (3.4)$$

*Demonstração do Corolário 6.* Faremos a demonstração em duas etapas, simplesmente verificando que os coeficientes  $a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , definidos acima, satisfazem o sistema linear 3.2, e a conclusão seguirá da unicidade desses coeficientes.

### Parte 1:

Observe que

$$A := \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \binom{2k}{k+j} = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{2k}{k-j},$$

e como

$$\sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} = \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \binom{2k}{k+j} + (-1)^k \binom{2k}{k} + \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{2k}{k-j}$$

segue-se que

$$\sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} = 2A + (-1)^k \binom{2k}{k} \quad (3.5)$$

Lembrando que

$$k\pi a_k \binom{2k}{k} = (-1)^k \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} = 0,$$

segue da igualdade 3.5 que

$$A = \frac{(-1)^{k+1}}{2} \binom{2k}{k}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k b_j a_j &= 2k\pi a_k \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \binom{2k}{k+j} \\ &= 2k\pi a_k \frac{(-1)^{k+1}}{2} \binom{2k}{k} \\ &= -1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Isto prova que estes  $a_j$ 's satisfazem a primeira equação do sistema linear 3.2.

### Parte 2:

Fixemos  $2 \leq j \leq k$  e defina  $p := j - 1$ . Em particular,  $1 \leq p < k$ . Se  $P(z) := z^{2p}$  então  $\Delta^{2k} P(z) = 0$ , para todo  $z$ , pela relação 3.4. Agora, por 3.3 temos:

$$\sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \binom{2k}{m} (k-m)^{2p} = 0 \quad (3.7)$$

Por outro lado, se  $B := \sum_{m=1}^k (-1)^{k+m} m^{2p} \binom{2k}{k+m}$  então  $\sum_{m=1}^k (-1)^{k-m} m^{2p} \binom{2k}{k-m} = B$ , visto que  $(-1)^{k+m} = (-1)^{k-m}$  e  $\binom{2k}{k+m} = \binom{2k}{k-m}$ . Fazendo um mudança de variáveis conveni-

ente, obtemos:

$$B = \sum_{m=k+1}^{2k} (-1)^m (k-m)^{2p} \binom{2k}{m} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m (k-m)^{2p} \binom{2k}{m}$$

E com isso,

$$\sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \binom{2k}{m} (k-m)^{2p} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{2k}{m} (k-m)^{2p} + \sum_{m=k+1}^{2k} (-1)^m (k-m)^{2p} \binom{2k}{m} = 2B$$

Logo, a igualdade 3.7 implica que  $B = 0$ . Para finalizar, juntamos estes ingredientes para obter o seguinte:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k b_m^{2j-1} a_m &= \sum_{m=1}^k (2m\pi)^{2p+1} \frac{(-1)^{k+m} k a_k}{m} \binom{2k}{k+m} \\ &= (2\pi)^{2p+1} k a_k \sum_{m=1}^k (-1)^{k+m} m^{2p} \binom{2k}{k+m} \\ &= (2\pi)^{2p+1} k a_k B \end{aligned} \tag{3.8}$$

Isto é, para cada  $2 \leq j \leq k$ ,

$$\sum_{m=1}^k b_m^{2j-1} a_m = 0,$$

provando com isso, que os coeficientes  $a_j$ 's também satisfazem as últimas  $k-1$  equações do sistema linear 3.2.  $\square$

Até agora sabemos que todo número inteiro é um ponto crítico de  $f_\omega$ , para todo  $\omega$ , e no entanto, poderiam existir outros pontos críticos que não sejam números inteiros. Essa possibilidade é eliminada pelo próximo resultado.

**Corolário 7.** *Todo ponto crítico de  $f_\omega$  é um número inteiro.*

*Demonstração.* Seja  $x_0$  tal que  $Df_\omega(x_0) = 0$  e definamos

$$z = e^{2\pi i x_0} \tag{3.9}$$

Como

$$\cos(b_j x_0) = \frac{1}{2} \left( z^j + \frac{1}{z^j} \right),$$

segue-se da equação 3.1:

$$2z^k + \sum_{j=1}^k a_j b_j z^{k+j} + \sum_{j=1}^k a_j b_j z^{k-j} = 0 \quad (3.10)$$

Mas, pelo Corolário 6 temos a identidade

$$2z^k + \sum_{j=1}^k a_j b_j z^{k+j} + \sum_{j=1}^k a_j b_j z^{k-j} = a_k b_k (z-1)^{2k} \quad (3.11)$$

de modo que, a única solução da equação 3.10 é  $z = 1$ . E isto implica que  $x_0 \in \mathbb{Z}$ , por 3.9.  $\square$

### 3.2 Extensão holomorfa da Família de Arnold Generalizada

Para cada  $0 \leq \omega < 1$ , seja  $E_\omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a função inteira definida por

$$E_\omega(z) = z + \omega + \sum_{j=1}^k a_j \sin(2j\pi z), \quad (3.12)$$

onde os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_k$  são dados pelo Teorema 3.1. Apesar de conhecermos os pontos críticos de  $E_\omega$  no eixo real, não é imediatamente claro se existem ou não, outros pontos críticos em  $\mathbb{C}$ .

**Lema 3.2.1.** *Todo ponto crítico da função inteira  $E_\omega$  é, necessariamente, um número inteiro.*

*Demonstração.* Seja  $z \in \mathbb{C}$  um ponto crítico de  $E_\omega$ . Isto equivale a dizer que

$$1 + \sum_{j=1}^k a_j b_j \cos(b_j z) = 0 \quad (3.13)$$

Fazendo  $w = e^{2\pi iz}$ , é possível verificar que  $2 \cos(b_j z) = w^j + w^{-j}$ . Substituindo na equação 3.13, obtemos

$$2w^k + \sum_{j=1}^k a_j b_j w^{k+j} + \sum_{j=1}^k a_j b_j w^{k-j} = 0 \quad (3.14)$$

Da identidade 3.11 concluímos que  $w = 1$ . Isso mostra que, se  $z \in \mathbb{C}$  é um ponto crítico de  $E_\omega$  então  $e^{2\pi iz} = 1$ , isto é,  $z \in \mathbb{Z}$ . Note que  $E_\omega$  não do tipo finito, já que  $\omega + \mathbb{Z}$  é o conjunto dos seus valores críticos.  $\square$

A restrição de  $E_\omega$  aos números reais é o levantamento de um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Portanto, se  $E_\omega^n(x) - x \notin \mathbb{Z}$ , para todo inteiro  $n$  e qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , a projeção de  $E_\omega$  restrita ao eixo real é um homeomorfismo minimal do círculo.

### 3.3 Estimativas para o crescimento de $E_\omega$

O resultado a seguir, cuja prova ficará para o final destas notas, é a ferramenta principal na construção dos pares comutantes holomorfos de grau arbitrário. O mesmo resultado foi obtido por de Faria [12] para o caso em que  $E_\omega$  têm pontos críticos cúbicos.

**Teorema 3.2.** *Existe uma constante positiva  $C_0$  e uma função  $s \mapsto \varphi(s)$  positiva, monótona não-decrescente definida para  $s \geq 0$  tal que se  $|y| \geq \varphi(|x|)$  então  $|E_\omega(x + iy)| \geq C_0 \exp(k\pi|y|)$ .*

A prova desse resultado técnico será adiada para o final desta tese.

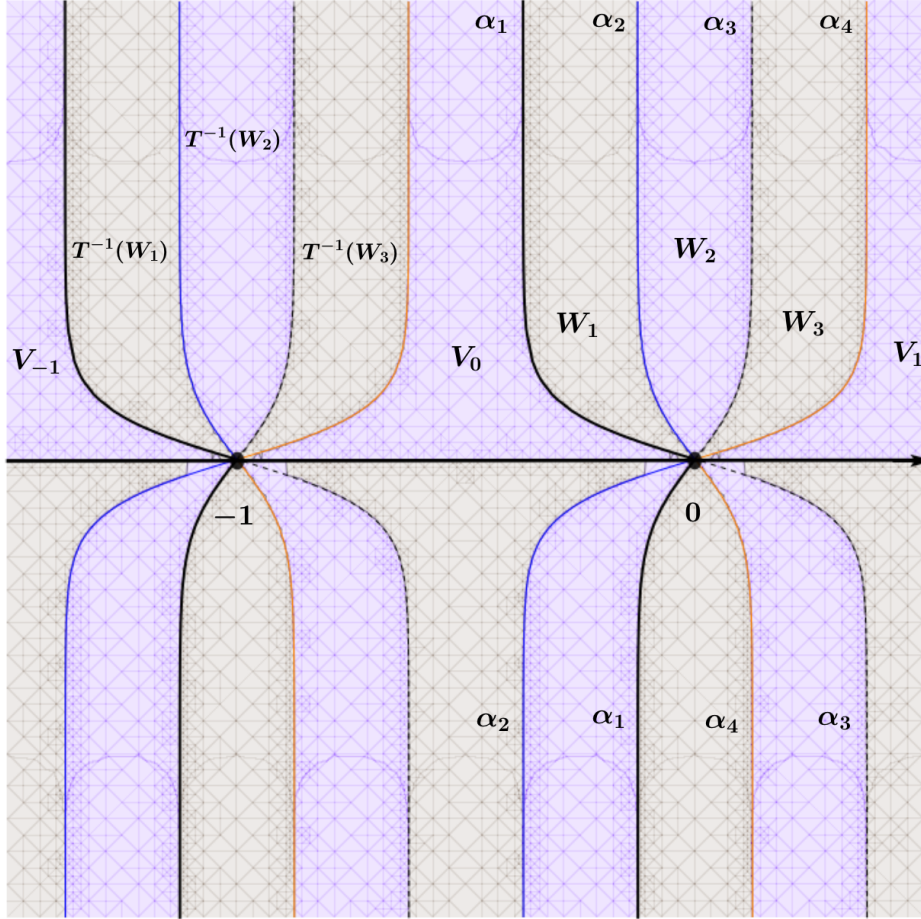
### 3.4 Geometria da família

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades geométricas da Família de Arnold Generalizada  $\{E_\omega\}$  definida pela equação 5.1. A preimagem do eixo real por  $E_\omega$  é uma família de curvas analíticas, além do próprio eixo real, que passaremos a descrever agora. Implicitamente, essas curvas são definidas pela equação

$$y + \sum_{j=1}^k a_j \cos(2j\pi x) \sinh(2j\pi y) = 0 \quad (3.15)$$

Primeiro, passando pela origem, existem  $2k$  curvas analíticas que são levadas no eixo real pela aplicação de Arnold  $E_\omega$ , às quais são simétricas aos pares, em relação ao eixo imaginário. Para cada  $j = 1, 2, \dots, k$ , denotaremos por  $\alpha_j$  a curva analítica cuja imagem é mapeada no eixo real por  $E_\omega$  e, é assintótica à reta  $x = (1 - 2j)/4k$  quando  $y \rightarrow +\infty$ . A imagem de cada uma dessas curvas está contida no fecho do semiplano  $i\mathbb{C}^+$ , que é o conjunto dos números complexos com parte real negativa. Se  $L$  é a reflexão em torno do eixo imaginário,

isto é,  $L(z) := -\bar{z}$ , então, definindo-se  $\alpha_{k+j} := L(\alpha_{k-j+1})$  para cada  $j = 1, 2, \dots, k$ , obtemos as últimas  $k$  curvas analíticas cujas imagens são mapeadas no eixo real por  $E_\omega$  (veja figura 3.1).



**Figura 3.1:** Curvas  $\text{Im}(E_\omega(x + iy)) = 0$ , para  $k = 2$ .

**Observação 8.** Dado  $x \in \mathbb{R}$ , denotaremos por  $l_x$  a reta formada pelos pontos de  $\mathbb{C}$  com parte real igual a  $x$ . É importante observar que, para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , a semireta  $l_{m/2} \cap \mathbb{C}^+$  é mapeada no semiplano superior  $\mathbb{C}^+$ , enquanto que  $l_m \cap \mathbb{C}^+$  é mapeada em  $\mathbb{C}^+$  apenas quando  $k$  for par.

Como os únicos pontos críticos de  $E_\omega$  são os números inteiros, cada um com multiplicidade  $2k + 1$ , a preimagem do eixo real por esta aplicação é, exatamente, a família de curvas

$$\{T^m(\alpha_j); 1 \leq j \leq 2k, m \in \mathbb{Z}\} \cup \mathbb{R}$$

No que segue, usaremos a notação  $\alpha_j^\pm$  para representar a porção da curva  $\alpha_j$  no semiplano



$\mathbb{C}^\pm$ . Seja  $V_m$  o domínio simplesmente conexo limitado pelas curvas  $T^{m-1}(\alpha_{2k}^+)$  e  $T^m(\alpha_1^+)$ , e o segmento de reta  $[m-1, m] \subset \mathbb{R}$ . Pela Observação 8, para todo  $m$  inteiro,  $E_\omega|_{V_m}$  é univalente cuja imagem é  $\mathbb{C}^+$ ; portanto, podemos definir  $\phi_m : \mathbb{C}^+ \rightarrow V_m$  como a inversa de  $E_\omega|_{V_m}$ .

Da mesma forma, para cada  $j = 1, 2, \dots, 2k-1$ , seja  $W_j$  o domínio simplesmente conexo limitado pelas curvas  $\alpha_j^+$  e  $\alpha_{j+1}^+$ . Aqui é preciso considerar duas possibilidades que dependem da paridade do inteiro  $j$ , que está fixado desde o início. Primeiro,  $E_\omega|_{W_j}$  é univalente. Depois, sua imagem é  $\mathbb{C}^+$  se  $j$  for par e,  $\mathbb{C}^-$  se  $j$  for ímpar. Em qualquer caso, denotaremos por  $\psi_j$  a correspondente inversa.

Seguindo [13], seja  $A_n \subset V_0 \cup V_1$  o domínio cujo fecho contém o número real  $T^{-p_{n+1}} \circ E_\omega^{q_{n+1}}(0)$  e tal que  $E_\omega^{q_n}(A_n) = \mathbb{C}^+$ . A partir da definição de  $\{p_n\}$  e  $\{q_n\}$ ,  $A_n \subset V_0$  ou  $A_n \subset V_1$  dependendo apenas da paridade de  $n$ . Analogamente, seja  $B_n \subset V_0 \cup V_1$  o domínio tal que  $T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n}(0) \in \overline{B_n}$  e  $E_\omega^{q_{n+1}}(B_n) = \mathbb{C}^+$ . Note que, para todo  $n$ , os domínios  $A_n$  e  $B_n$  estão em componentes conexas distintas de  $V_0 \cup V_1$ .

**Lema 3.4.1.** *Para cada  $n \geq 0$ , existe uma única  $q_n$ -upla  $(k_1, k_2, \dots, k_{q_n})$  com  $0 = k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{q_n} \leq p_n + 1$  tal que*

$$A_n = \phi_{k_1} \circ \phi_{k_2} \circ \dots \circ \phi_{k_{q_n}}(\mathbb{C}^+)$$

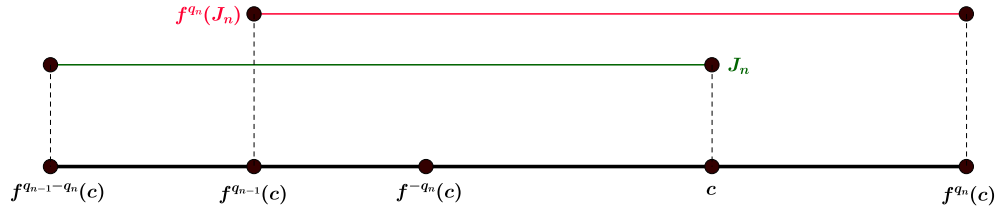
*Da mesma forma, existe uma única  $q_{n+1}$ -upla  $(k'_1, k'_2, \dots, k'_{q_{n+1}})$  com  $0 = k'_1 \leq k'_2 \leq \dots \leq k'_{q_{n+1}} \leq p_{n+1} + 1$  tal que*

$$B_n = \phi_{k'_1} \circ \phi_{k'_2} \circ \dots \circ \phi_{k'_{q_{n+1}}}(\mathbb{C}^+)$$

*Demonstração.* O resultado segue imediatamente da seguinte observação. Para cada  $j = 0, 1, \dots, q_n$  existe  $k_j$  inteiro positivo tal que  $k_j < E_\omega^j(0) \leq k_j + 1$ . Da definição de  $p_n$  e  $q_n$  tem-se  $k_1 = 0$  e  $k_{q_n} = p_n + 1$ .  $\square$

**Lema 3.4.2.** *Seja  $f$  um homeomorfismo do círculo com  $\rho(f) := [r_0, r_1, r_2, \dots]$ , seja  $c \in \mathbb{S}^1$ , e para cada  $n \geq 0$  seja  $J_n \subset \mathbb{S}^1$  o intervalo fechado com extremidades em  $c$  e  $f^{q_{n-1}-q_n}(c)$ , e que contém o ponto  $f^{q_{n-1}}(c)$ . Se  $f^{-j}(c) \in J_n$  para algum  $j < q_n$  então  $j \leq 0$ .*

*Demonstração.* Por hipótese  $q_n - j > 0$ . Portanto  $f^{q_n-j}(c)$  pertence ao intervalo de primeiro



**Figura 3.2:** Primeiros retornos

retorno  $\langle f^{q_{n-1}}(c), f^{q_n}(c) \rangle$ , que contém  $c$  (veja a figura 3.2). Por definição de  $q_n$ , devemos ter  $q_n - j \geq q_n$ , isto é,  $j \leq 0$ .  $\square$

**Lema 3.4.3.** Para cada  $n \geq 0$  tem-se  $\overline{A_n} \cap \mathbb{R} = \langle \alpha_n, 0 \rangle$  e  $\overline{B_n} \cap \mathbb{R} = \langle 0, \beta_n \rangle$ , onde  $\alpha_0 = -1$ ,  $\beta_0 = \alpha_1$  e para  $n \geq 1$  os pontos  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$  estão unicamente determinados pelas condições:

$$T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n}(\alpha_n) = T^{-p_{n-1}} \circ E_\omega^{q_{n-1}}(0) \quad e \quad T^{-p_{n+1}} \circ E_\omega^{q_{n+1}}(\beta_n) = T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n}(0)$$

*Demonstração.* Seja  $f_\omega$  aplicação do círculo cujo recobrimento é  $E_\omega|_{\mathbb{R}}$ . Então  $c := 1$  é o ponto crítico de  $f_\omega$ . Pelo Lema 3.4.2,  $f_\omega^{q_n}$  não possui pontos críticos em  $J_n$ . De fato, pela regra da cadeia,  $z \in \mathbb{S}^1$  é um ponto crítico de  $f_\omega^{q_n}$  se, e somente se,  $f_\omega^j(z) = c$  para algum  $j = 0, 1, \dots, q_n - 1$ . Portanto,  $f_\omega^{q_n}|_{\text{int}(J_n)}$  é um difeomorfismo sobre a imagem, para cada  $n \geq 0$ , de onde segue-se que  $\alpha_n$  está unicamente determinado pela relação

$$T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n}(\alpha_n) = T^{-p_{n-1}} \circ E_\omega^{q_{n-1}}(0).$$

Da mesma forma o resultado segue para  $\beta_n$ .  $\square$

Dado  $R > 0$ , usaremos a notação  $D_R$  para representar o disco aberto com centro na origem e raio  $R > 0$ . E, como antes,  $D_R^+ := D_R \cap \mathbb{C}^+$ .

Seja  $A_{n,R}$  o subconjunto de  $A_n$  cuja imagem por  $E_\omega^{q_n}$  é o semidisco  $T^{p_n}(D_R^+)$ . Neste caso,  $A_{n,R}$  é um domínio simplesmente conexo. De modo análogo definimos o aberto  $B_{n,R} \subset B_n$ . Escolhendo  $R > p_n + 1$ , temos  $(V_0 \cap V_1) \cap \mathbb{R} \subset T^{p_n}(D_R^+)$  e portanto,  $\overline{A_{n,R}} \cap \mathbb{R} = \overline{A_n} \cap \mathbb{R}$  e  $\overline{B_{n,R}} \cap \mathbb{R} = \overline{B_n} \cap \mathbb{R}$  para  $n \geq 0$ . Por outro lado, como  $D_R^+$  é a imagem de  $A_{n,R}$  por  $T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n}$ ,

que é conforme, segue-se que  $A_{n,R}$  é um quase-disco, e em particular, é um domínio de Jordan. Analogamente concluímos que  $B_{n,R}$  é um quase-disco.

**Lema 3.4.4.** *Para todo  $R$  suficientemente grande temos*

$$\overline{A_{n,R}} \subset D_R \cap \overline{\mathbb{C}^+} \quad e \quad \overline{B_{n,R}} \subset D_R \cap \overline{\mathbb{C}^+}$$

*Demonstração.* Sejam  $\varphi$  e  $C_0$  dados pelo Teorema 3.2. Considere

$$\delta(s, R) := \varphi(s) + \frac{1}{k\pi} \log^+ \left( \frac{R}{C_0} \right)$$

Se  $|y| \geq \delta(|x|, R)$ , então  $|y| \geq \frac{1}{k\pi} \log^+ \left( \frac{R}{C_0} \right)$ , de onde tiramos que

$$C_0 \exp(k\pi|y|) \geq R,$$

por um lado. E por outro lado, essa desigualdade implica que  $|y| \geq \varphi(|x|)$ , e do Teorema 3.2 obtemos

$$|E_\omega(x + iy)| \geq C_0 \exp(k\pi|y|) \geq R,$$

isto é,  $E_\omega(x + iy) \in \mathbb{C} - D_R$ . Em particular, para todo  $m \in \mathbb{Z}$  temos

$$\phi_m(\overline{D_R^+}) \subset V_m \cap \{x + iy; y \leq \delta(|x|, R)\}.$$

Seja  $V_{m,R} := V_m \cap \{x + iy; y \leq \delta(|x|, R)\}$ . Para cada  $n \geq 0$ , existe  $R_n > 0$  suficientemente grande tal que

$$R_n - \frac{1}{k\pi} \log^+ \left( \frac{2R_n}{C_0} \right) > p_n + 1 + \varphi(p_n + 1),$$

isto é,

$$R_n > p_n + 1 + \delta(p_n + 1, 2R_n).$$

Dessa forma, se  $0 \leq m \leq p_n + 1$  e  $z \in V_{m,2R_n}$  com  $z := x + iy$ , então

$$|z| \leq |x| + |y| \leq |x| + \delta(|x|, 2R_n) \leq p_n + 1 + \delta(p_n + 1, 2R_n) < R_n,$$

de onde segue-se que  $z \in D_{R_n} \cap \overline{\mathbb{C}^+}$ . Isto posto, se  $0 \leq m \leq p_n + 1$  então

$$\phi_m(\overline{D_{2R_n}^+}) \subset D_{R_n} \cap \overline{\mathbb{C}^+} \subset \overline{D_{2R_n}^+}.$$

Uma vez que  $T^{p_n}(\overline{D_{R_n}^+}) \subset \overline{D_{2R_n}^+}$ , escolhendo-se  $(k_1, k_2, \dots, k_{q_n})$  como no Lema 3.4.1, deduzimos que

$$\overline{A_{n,R_n}} = \phi_{k_1} \circ \phi_{k_2} \circ \dots \circ \phi_{k_{q_n}} \left( T^{p_n}(\overline{D_{R_n}^+}) \right) \subset \overline{A_{n,R_n}} = \phi_{k_1} \circ \phi_{k_2} \circ \dots \circ \phi_{k_{q_n}} \left( \overline{D_{2R_n}^+} \right) \subset D_{R_n} \cap \overline{\mathbb{C}^+}$$

Isto demonstra a primeira inclusão, enquanto que a segunda segue-se analogamente.  $\square$

**Observação 9.** *Seja  $U_{n,R} := \phi_{k_2} \circ \phi_{k_3} \circ \dots \circ \phi_{k_{q_n}}(\overline{D_R^+})$ . Repare que se definirmos*

$$A_{n,R}^{(2m-1)} := \psi_{2m-1} \circ \sigma(U_{n,R}) \quad e \quad A_{n,R}^{(2m)} := \psi_{2m}(U_{n,R})$$

para cada  $m = 1, 2, \dots, k$ , onde  $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é a conjugação complexa, podemos aplicar os mesmos argumentos da prova do Lema 3.4.4 para verificar que, para cada  $j = 1, 2, \dots, 2k-1$ , para todo  $R > 0$  suficientemente grande, e para todo  $n \geq 0$ ,

$$\overline{A_{n,R}^{(j)}} \subset D_R \cap \overline{\mathbb{C}^+}.$$

### 3.5 Construção de pares comutantes holomorfos

Nesta seção, o propósito principal é construir pares comutantes holomorfos de grau arbitrário a partir da família de Arnold Generalizada (Teorema A). Seja  $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a aplicação de Gauss, definida por  $G(0) = 0$  e  $G(x) = \langle 1/x \rangle$  (parte fracionária) se  $x \neq 0$ .

**Teorema 3.3.** *Dado  $k > 0$ , para cada  $n \geq 0$  e cada  $\omega$  tal que  $\rho(\omega)$  tem expansão em frações continuadas de comprimento  $n+1$ , pelo menos, o par comutante real de ordem  $2k+1$  definido*

por  $(f_\omega^{q_n}, f_\omega^{q_{n+1}})$  estende-se a um par comutante holomorfo  $\Gamma_{n,\omega}$ , de grau  $2k+1$ , com fronteiras geométricas e número de rotação  $G^n(\rho(\omega))$ .

Este é o resultado análogo obtido em [13], sobre a existência de pares comutantes holomorfos de grau cúbico, já que foi construído usando-se a família de Arnold tradicional. Usando as informações obtidas até aqui sobre a família  $(E_\omega)$ , seguiremos a construção de de Faria (sem modificações), para obter o Teorema 3.3.

*Demonstração do Teorema 3.3.* Dado  $n \geq 0$ , seja  $R_n > 0$  dado pelo Lema 3.4.4. Sejam

$$\xi_n := T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n} \quad \text{e} \quad \eta_n := T^{-p_{n+1}} \circ E_\omega^{q_{n+1}},$$

e sejam  $\mathcal{O}_{\xi_n}, \mathcal{O}_{\eta_n} \subset \mathbb{C}$ , domínios de Jordan simétricos em relação ao eixo real e tais que

$$\mathcal{O}_{\xi_n}^+ = A_{n,R_n} \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_{\eta_n}^+ = B_{n,R_n}.$$

Sendo assim, as aplicações  $\xi_n$  e  $\eta_n$  comutam e pelo Lema 3.4.4,  $\mathcal{O}_{\xi_n}, \mathcal{O}_{\eta_n} \subset D_{R_n}$ . Além do mais, por construção,  $\xi_n|_{\mathcal{O}_{\xi_n}}$  e  $\eta_n|_{\mathcal{O}_{\eta_n}}$  são univalentes cujas imagens são, respectivamente,

$$\mathbb{C}(\langle \xi_n(\alpha_n), \xi_n(0) \rangle) \quad \text{e} \quad \mathbb{C}(\langle \eta_n(0), \eta_n(\beta_n) \rangle),$$

pelo Lema 3.4.3.

Além disso, seja  $\mathcal{O}_{\nu_n}$  a componente conexa de  $\xi_n^{-1}(\mathcal{O}_{\eta_n})$  que contém a origem. Note que, por construção,  $T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n}(0) \in \overline{B_{n,R_n}}$ . Seja agora  $\nu_n := \xi_n \circ \eta_n$ . Isto posto,  $\nu_n|_{\mathcal{O}_{\nu_n}}$  é um recobrimento ramificado de grau  $2k+1$  sobre a imagem, e

$$\nu_n(\mathcal{O}_{\nu_n}) = D_{R_n} \cap \mathbb{C}(\langle \eta_n(0), \xi_n(0) \rangle).$$

Além do mais, pela Observação 9 temos

$$\overline{\mathcal{O}_{\nu_n}^+} \subset \bigcup_{j=0}^{2k-1} \overline{A_{n,R_n}^{(j)}} \subset D_{R_n} \cap \overline{\mathbb{C}^+},$$

onde  $A_{n,R_n}^{(0)} := A_{n,R_n}$ . Isto prova que  $(D_{R_n}, \mathcal{O}_{\xi_n}, \mathcal{O}_{\eta_n}, \mathcal{O}_{\nu_n})$  é uma *bowtie*.

Para terminar a demonstração, basta pois mostrar que as aplicações  $\xi_n, \eta_n$  e  $\nu_n$  juntamente com essa *boutie* determinam um par comutante holomorfo  $\Gamma_{n,\omega}$ , a menos de orientação, de grau  $2k + 1$  com fronteira geométrica, com número de rotação  $\rho(\Gamma_{n,\omega}) = [r_{n+1} + 1, r_{n+2}, r_{n+3}, \dots]$  e *altura* dada por  $m(\Gamma_{0,\omega}) = r_0$  e  $m(\Gamma_{n,\omega}) = r_n + 1$  quando  $n > 0$ . Mas, na definição 4 já verificamos os itens  $H_1$  até  $H_5$ . Falta apenas provar o item  $H_6$ .

Se  $n = 0$  então  $a = -1$  e  $b$  satisfaz a igualdade  $(T^{-p_1} \circ E_\omega^{q_1})(b) = (T^{-p_0} \circ E_\omega^{q_0})(0)$ , pelo Lema 3.4.3. À vista disso,

$$\xi_0^{r_0}(a) = E_\omega^{r_0}(-1) = E_\omega^{r_0}(0) - 1 = (T^{-1} \circ E_\omega^{r_0})(0) = (T^{-p_1} \circ E_\omega^{q_1})(0) = \eta_0(0)$$

e

$$\eta_0(b) = (T^{-p_1} \circ E_\omega^{q_1})(b) = (T^{-p_0} \circ E_\omega^{q_0})(0) = \xi_0(0)$$

Fixemos agora  $n > 0$ . Como  $T$  e  $E_\omega$  comutam, segue-se novamente do Lema 3.4.3 que

$$\begin{aligned} \xi_n^{r_n+1}(\alpha_n) &= (T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n})^{r_n} \circ (T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n})(\alpha_n) \\ &= (T^{-r_n p_n} \circ E_\omega^{r_n q_n}) \circ (T^{-p_n-1} \circ E_\omega^{q_n-1})(0) \\ &= T^{-r_n p_n - p_n - 1} \circ E_\omega^{r_n q_n + q_n - 1}(0) \\ &= T^{-p_{n+1}} \circ E_\omega^{q_{n+1}}(0) \\ &= \eta_n(0) \end{aligned}$$

e

$$\eta_n(\beta_n) = (T^{-p_{n+1}} \circ E_\omega^{q_{n+1}})(\beta_n) = (T^{-p_n} \circ E_\omega^{q_n})(0) = \xi_n(0)$$

Com isso provamos a condição  $H_6$ , e  $m(\Gamma_{n,\omega}) = r_n + 1$  é a *altura* de  $\Gamma_{n,\omega}$  quando  $n > 0$ . A afirmação sobre o número de rotação segue-se da definição.  $\square$

**Observação 10.** *Pelo Teorema 2.3 podemos fixar  $R > 0$  suficientemente grande. Consequentemente, para cada  $n \geq 0$ ,  $\Gamma_{n+1,\omega}$  será a primeira renormalização de  $\Gamma_{n,\omega}$ , a menos de*

*rescalonamento linear.*

### 3.6 Rigidez dos pares comutantes holomorfos

A construção de pares comutantes holomorfos de grau arbitrário a partir da família de Arnold Generalizada, em conjunto com o Teorema *Pullback*, nos permitirá transferir certas propriedades de rigidez dessa família, através de conjugações quase conformes, aos pares comutantes mais gerais. A prova de de Faria [12] aplica-se *mutatis mutandis*.

**Teorema 3.4.** *Seja  $\Gamma$  um par comutante holomorfo de grau  $2k+1$  com fronteiras geométricas e número de rotação irracional. Então  $\Gamma$  não possui domínios errantes e todo coeficiente de Beltrami com suporte em  $\mathcal{J}(\Gamma)$ , simétrico e  $\Gamma$ -invariante é trivial.*

**Proposição 3.1** (de Faria, de Melo [18]). *Seja  $\Gamma$  um par comutante holomorfo. Então*

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \overline{\bigcap_{n \geq 0} F^{-n}(J)}.$$





# Ferramentas de Análise e Dinâmica Complexa

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos e resultados sobre dinâmica complexa e distorção conforme que usaremos a seguir.

## 4.1 Dinâmica Complexa

Seja  $f : S \rightarrow S$  um endomorfismo holomorfo de uma superfície de Riemann  $S$ . A dinâmica induzida pelos iterados de  $f$  em  $S$  particionam esta superfície em dois subconjuntos da seguinte forma. O subconjunto dos pontos de  $S$  no qual  $(f^n)$  é uma família normal é chamado *conjunto de Fatou* de  $f$ , e será denotado por  $\mathcal{F}(f)$ . Esse conjunto é aberto, por definição. O complemento  $\mathcal{J}(f) := S - \mathcal{F}(f)$  é dito *conjunto de Julia* de  $f$ . Estamos interessados principalmente nos casos  $S = \mathbb{C}$  e  $S = \mathbb{C}^*$ . Para mais detalhes, veja [51].

A estrutura topológica das componentes do conjunto de Fatou de  $f$  depende essencialmente dos valores singulares de  $f$ . Mais precisamente, denotaremos por  $\text{sing}(f^{-1})$  o conjunto dos pontos que possuem alguma vizinhança na qual nenhum ramo de  $f^{-1}$  pode ser definido. Como consequência, se  $f \in \text{End}(\mathbb{C}) \cup \text{End}(\mathbb{C}^*)$  então

$$\text{sing}((f^n)^{-1}) \subset \bigcup_{j=0}^{n-1} f^j(\text{sing}(f^{-1})).$$

Em [43], Keen classificou o conjunto dos valores singulares para certos endomorfismos holomorfos de  $\mathbb{C}^*$ .

**Proposição 4.1 (Keen [43]).** *Seja  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  uma função holomorfa do tipo*

$$f(z) = z^n \exp [P(z) + Q(1/z)]$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $P$  e  $Q$  são polinômios de grau  $p$  e  $q$ , com  $p+q > 0$ . Então, os valores singulares de  $f$  são os valores assintóticos  $0$  e  $\infty$  e os valores críticos de  $f$ .

**Teorema 4.1 (Bergweiler [5], Keen [42]).** *Sejam  $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  holomorfa e  $f$ , uma função inteira não-linear e não-constante. Se  $\exp f(z) = g(\exp z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , então  $\exp^{-1} \mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(f)$ .*

O conjunto pós-crítico de  $f \in \text{End}(\mathbb{C}) \cup \text{End}(\mathbb{C}^*)$  é definido por

$$P(f) := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{sing}((f^n)^{-1})}.$$

Diremos que  $f \in \text{End}(\mathbb{C}) \cup \text{End}(\mathbb{C}^*)$  é do *tipo finito* se  $\text{sing}(f^{-1})$  é um conjunto finito. Para essa classe de funções holomorfas sabe-se que toda componente de Fatou é não errante (veja [44], [42], [27] e [30]). Dessa forma, toda componente de Fatou deve ser periódica ou pré-periódica, conforme classificação a seguir.

**Teorema 4.2 (Kotus [44]).** *Seja  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^*)$  com singularidades essenciais em  $0$  e  $\infty$ . Se  $D$  é uma componente periódica do conjunto de Fatou de  $f$ , então uma das seguintes possibilidades ocorre:*

- (a)  $D$  é um domínio (super)atrator.
- (b)  $D$  é um domínio parabólico.
- (c)  $D$  é um disco de Siegel.
- (d)  $D$  é um anel de Herman.

A relação entre o conjunto dos valores singulares de  $f$  e suas componentes de Fatou é dada pela Proposição a seguir (veja [51]).

**Proposição 4.2.** *Seja  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^*)$  com singularidades essenciais em  $0$  e  $\infty$ .*

(a) Se  $D_1, D_2, \dots, D_q$  é um ciclo periódico (super)atrator ou parabólico então  $\bigcup_{j=1}^q D_j$  contém um valor singular de  $f$ .

(b) Se  $D_1, D_2, \dots, D_q$  é um ciclo periódico de discos de Siegel ou anéis de Herman de  $f$  então

$$P(f) \supset \bigcup_{j=1}^q \partial D_j.$$

Consideraremos ainda, o conjunto dos pontos de escape de uma função transcendente  $f \in \text{End}(\mathbb{C}) \cup \text{End}(\mathbb{C}^*)$ .

**Definição 11.** *Seja  $f : S \rightarrow S$  um endomorfismo holomorfo de uma superfície de Riemann  $S$ . O conjunto de escape de  $f$  é definido por*

$$I(f) = \{z \in S; \omega(z) \cap S = \emptyset\}$$

Na definição acima,  $\omega(z)$  é o conjunto limite da órbita positiva de  $z$ . Alguns resultados são conhecidos sobre o conjunto de escape de  $f$ .

**Teorema 4.3 (Eremenko [26]).** *Se  $f \in \text{End}(\mathbb{C})$  é transcendente então:*

(a)  $I(f) \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ .

(b)  $\mathcal{J}(f) = \partial I(f)$ .

(c) todas as componentes de  $\overline{I(f)}$  são ilimitadas.

(d) se  $\text{sing}(f^{-1})$  é limitado então  $I(f) \subset \mathcal{J}(f)$ .

**Teorema 4.4 (Liping [29]).** *Seja  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^*)$  com singularidades essenciais em 0 e  $\infty$ . Considere os conjuntos*

$$I_0(f) := \{z \in \mathbb{C}^*; f^n(z) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} \quad e \quad I_\infty(f) := \{z \in \mathbb{C}^*; f^n(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}.$$

*Então:*

(a)  $I_0(f)$  e  $I_\infty(f)$  são não vazios.

$$(b) \mathcal{J}(f) = \partial I_0(f) = \partial I_\infty(f).$$

$$(c) \mathcal{J}(f) \cap I_0(f) \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{J}(f) \cap I_\infty(f) \neq \emptyset.$$

$$(d) \text{ se } \text{sing}(f^{-1}) \text{ é limitado então } \mathcal{J}(f) = \overline{I(f)}.$$

## 4.2 Distorção

Nesta seção apresentaremos algumas técnicas de controle de distorção conforme que usaremos a seguir. O primeiro resultado é uma versão do clássico Teorema 1/4 de Koebe. Esse Teorema diz o seguinte: se  $f$  é uma função univalente no disco unitário que fixa a origem e cuja derivada na origem tem módulo igual a 1 então sua imagem contém o disco de raio 1/4, com centro na origem (veja [11, p. 31], por exemplo).

**Lema 4.2.1 (Koebe).** *Seja  $f : B(z_0, 2r) \rightarrow \mathbb{C}$  uma função univalente. Então*

$$(a) \text{ (Teorema 1/4 de Koebe) } B(f(z_0), |f'(z_0)|r/4) \subseteq f(B(z_0, r)).$$

$$(b) \text{ (Teorema do Crescimento de Koebe) } f(B(z_0, r)) \subseteq B(f(z_0), 4|f'(z_0)|r).$$

$$(c) \text{ (Teorema da Distorção de Koebe) para quaisquer } z, w \in B(z_0, r) \text{ tem-se}$$

$$\frac{1}{81} \leq \frac{|f'(z)|}{|f'(w)|} \leq 81.$$

*Demonstração.* Para provar o item (a), considere as funções

$$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{r} \quad \text{e} \quad \psi(z) = \frac{z - f(z_0)}{r f'(z_0)}.$$

Se  $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  então  $g$  é univalente em  $B(0, 1)$ ,  $g(0) = 0$  e  $g'(0) = 1$ . Pelo Teorema 1/4 de Koebe, devemos ter  $B(0, 1/4) \subseteq g(B(0, 1))$ . Como  $\varphi^{-1}(B(0, 1)) = B(z_0, r)$  e

$$\psi^{-1}(B(0, 1/4)) = B(f(z_0), r|f'(z_0)|/4),$$

segue-se o resultado.

Quanto ao item (b), consideremos  $\alpha(z) = \varphi(z)/2$  e  $\beta(z) = \psi(z)/2$ . Com isso, a função  $h := \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$  é univalente em  $B(0, 1)$  e satisfaz  $h(0) = 0$  e  $h'(0) = 1$ . Portanto (veja [11, p. 33]), para  $|z| = r < 1$ ,

$$|h(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Isto implica que

$$h(B(0, r)) \subseteq B(0, s),$$

onde  $0 < r < 1$  e  $s = r/(1-r^2)$ . Em particular, tomando-se  $r = 1/2$  temos

$$h(B(0, 1/2)) \subseteq B(0, 2).$$

Como  $\alpha^{-1}(B(0, 1/2)) = B(z_0, r)$  e  $\beta^{-1}(B(0, 2)) = B(f(z_0), 4r|f'(z_0)|)$ , segue-se a conclusão do item (b).

Falta provar o item (c). Com a notação acima, (veja [11, p. 32])

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |h'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

para  $|z| = r < 1$ . Em particular, para todo  $z \in B(0, 1/2)$ ,

$$\frac{4}{27} \leq |h'(z)| \leq 12.$$

Por outro lado, como  $h'(z) = f'(\alpha^{-1}(z))/f'(z_0)$  para todo  $z \in B(0, 1/2)$ , concluímos que

$$\frac{4}{27}|f'(z_0)| \leq |f'(z)| \leq 12|f'(z_0)|$$

sempre que  $z \in B(z_0, r)$ . Logo, para quaisquer  $z, w \in B(z_0, r)$ ,

$$\frac{1}{81} \leq \frac{|f'(z)|}{|f'(w)|} \leq 81.$$

□

O resultado a seguir é uma consequência do Lema 4.2.1.

**Lema 4.2.2.** *Seja  $f : B(z_0, 2r) \rightarrow \mathbb{C}$  uma função univalente. Se  $A \subset B \subset B(z_0, r)$  são mensuráveis então*

$$81^{-2} \frac{m(A)}{m(B)} \leq \frac{m(f(A))}{m(f(B))} \leq 81^2 \frac{m(A)}{m(B)}.$$

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos mensuráveis de  $B(z_0, r)$ . Então,

$$\inf_{z \in A} |f'(z)|^2 \cdot m(A) \leq m(f(A)) = \int_A |f'(z)|^2 dz \leq \sup_{z \in A} |f'(z)|^2 \cdot m(A).$$

Portanto,

$$\frac{\inf_{z \in A} |f'(z)|^2 \cdot m(A)}{\sup_{z \in B} |f'(z)|^2 \cdot m(B)} \leq \frac{m(f(A))}{m(f(B))} \leq \frac{\sup_{z \in A} |f'(z)|^2 \cdot m(A)}{\inf_{z \in B} |f'(z)|^2 \cdot m(B)}$$

Para concluir a demonstração, basta ver que

$$\frac{1}{81^2} \leq \frac{\inf_{z \in A} |f'(z)|^2}{\sup_{z \in B} |f'(z)|^2} \leq \frac{\sup_{z \in A} |f'(z)|^2}{\inf_{z \in B} |f'(z)|^2} \leq 81^2,$$

pelo Lema 4.2.1. □

Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos mensuráveis do plano complexo, com  $0 < m(B) < \infty$ , definimos a *densidade* de  $A$  em  $B$  por:

$$\text{dens}(A, B) := \frac{m(A \cap B)}{m(B)}.$$

E ainda, se  $A$  é não vazio, o diâmetro de  $A$  será denotado por  $\text{diam}(A)$ .

**Definição 12.** *Sejam  $D \subseteq \mathbb{C}$  um subconjunto limitado e  $f$  uma função holomorfa em uma vizinhança de  $D$ . Dizemos que  $f$  tem distorção limitada em  $D$  se existem  $c$  e  $C$  constantes positivas tais que*

$$c < \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|} < C \tag{4.1}$$

para quaisquer  $z, w \in D$  distintos.

Definimos a *distorção* de  $f$  em  $D$  por

$$L_f(D) = \inf\{C/c; (c, C) \text{ satisfaz (4.1)}\}.$$

Se  $A$  e  $D$  são subconjuntos mensuráveis de  $\mathbb{C}$  e  $f$  tem distorção limitada em  $D$  então

$$\text{dens}(f(A), f(D)) < L_f(D)^2 \text{dens}(A, D). \quad (4.2)$$

Outra ferramenta relacionada ao controle de distorção conforme é a não-linearidade de uma função. Seja  $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$  uma função univalente no domínio  $V \subseteq \mathbb{C}$ . Dado um subconjunto limitado  $D \subset V$ , a não-linearidade de  $\phi$  em  $D$  é definida por (compare com [19, p. 60])

$$N_\phi(D) := \text{diam}(D) \sup_{z \in D} \left| \frac{\phi''(z)}{\phi'(z)} \right|.$$

Uma relação entre distorção de uma função e sua não-linearidade é dada pelo resultado a seguir (compare com [56, Lemma 2.1]).

**Lema 4.2.3.** *Sejam  $Q$  um quadrado e  $f$  uma função conforme em uma vizinhança de  $Q$ . Se  $N_f(Q) < 1/4$  então*

$$L_f(Q) \leq 1 + 8N_f(Q).$$

*Demonstração.* Por [19, Lemma 3.8.1] temos

$$\exp(-N_f(Q)) \leq \left| \frac{f'(z)}{f'(w)} \right| \leq \exp(N_f(Q))$$

para quaisquer  $z, w \in Q$ . Portanto

$$L_f(Q) \leq \exp(N_f(Q)) \leq 1 + 8N_f(Q),$$

já que  $e^x \leq 1 + 8x$  para  $0 \leq x < 1/4$ . □

Em [49], McMullen verificou que  $L_f(Q)$  é limitado por  $1 + O(N(f|_Q))$ , para  $N(f|_Q)$  próximo de 0.

De agora em diante, todo quadrado que considerarmos neste texto será fechado e terá lados paralelos aos eixos coordenados.

**Definição 13.** Dado um número real  $r > 0$ , uma grade  $\mathcal{G}_r$  em  $\mathbb{C}$  é o conjunto de todos os quadrados da forma  $[mr, (m+1)r] \times [nr, (n+1)r]$  para algum  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

O resultado a seguir foi provado por Schubert [56, Lemma 2.3].

**Lema 4.2.4.** Sejam  $y > 0$  e  $Q$  um quadrado de lado  $r > 0$ . Suponha que  $f$  é uma função univalente em uma vizinhança de  $Q$ . Se  $z_0 \in Q$  então

$$\#\left\{Q_r \in \mathcal{G}_r; Q_r \cap \partial f(Q) \neq \emptyset \text{ ou } Q_r \cap (\partial R(y) \cap f(Q)) \neq \emptyset\right\} \leq 12 + 21L_f(Q)|f'(z_0)|.$$

### 4.3 Conjuntos encaixantes

Nesta seção apresentaremos uma técnica geral, desenvolvida por McMullen [49], para mostrar que o conjunto de Julia de certas funções inteiras têm medida positiva.

Para cada  $j \in \mathbb{N}_0$ , seja  $E_j$  uma coleção finita de compactos em  $\mathbb{C}$ . Usaremos a seguinte notação:

$$E_j := \{F_j^l \subset \mathbb{C}; 1 \leq l \leq n_j\},$$

onde  $n_j = \#E_j$ .

Dizemos que a sequência  $(E_j)$  satisfaz as *condições encaixantes* se  $E_0 = \{F_0^1\}$ , onde  $F_0^1$  é conexo e, para cada  $j \in \mathbb{N}_0$ :

- (a) todo  $F \in E_{j+1}$  está contido em algum  $F' \in E_j$ ;
- (b) todo  $F \in E_j$  contém pelo menos um elemento de  $E_{j+1}$ ;
- (c) se  $1 \leq l < l' \leq n_j$  então

$$m\left(F_j^l \cap F_j^{l'}\right) = 0.$$

- (d) existe  $\Delta_j > 0$  tal que, para todo  $1 \leq m \leq n_j$  e  $F_j^m \in E_j$  tem-se

$$\text{dens}\left(\bigcup_{l=1}^{n_{j+1}} F_{j+1}^l, F_j^m\right) \geq \Delta_j.$$



Neste caso, podemos considerar o conjunto

$$E := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{n_j} F_j^l.$$

**Lema 4.3.1** (McMullen [49]). *Seja  $(E_j)$  uma sequência que satisfaz as condições encaixantes. Então*

$$m(E, F_0^1) \geq \prod_{j=0}^{\infty} \Delta_j.$$

O lema a seguir é uma versão de [49, Proposition 3.1], cuja prova detalhada pode ser encontrada em [57, p. 12].

**Lema 4.3.2.** *Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Para todo  $j \leq n$  natural, sejam  $D_j \subset \mathbb{C}$  abertos e  $f_j : D_j \rightarrow \mathbb{C}$  uma funções univalentes. Suponha que existem  $\alpha > 1$  e  $M > 0$  constantes tais que*

$$|f_j'(z)| > \alpha \quad e \quad \left| \frac{f_j''(z)}{f_j'(z)} \right| < M$$

para todo  $j \leq n$  e  $z \in D_j$ . Suponha ainda que, para cada  $j \leq n$ ,  $Q_j \subset D_j$  é um quadrado de lado  $r < \sqrt{2}/8M$  que satisfaz  $Q_{j+i} \subset f_j(Q_j)$ . Defina  $D := f_n(Q_n)$  e  $h : D \rightarrow Q_1$  por

$$h(z) = (f_n \circ \dots \circ f_1)^{-1}(z).$$

Então  $h$  é univalente e existe uma constante  $c := c(\alpha, M, r) > 0$  tal que

$$L_h(D) < c.$$

Em [57, p. 12], foi obtido

$$c = \prod_{m=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{8Mr\sqrt{2}}{\alpha^m} \right).$$



## Dinâmica da Família de Arnol'd Generalizada

Neste capítulo estudaremos a dinâmica complexa da família de Arnol'd generalizada e de sua projeção em  $\mathbb{C}^*$ .

Para cada  $0 \leq \omega < 1$ , seja  $E_\omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a função inteira definida por

$$E_\omega(z) \doteq z + \omega + \sum_{j=1}^k a_j \sin(2j\pi z), \quad (5.1)$$

onde os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_k$  são dados pelo Teorema 3.1. Pelo Lema 3.2.1, o conjunto dos pontos críticos de  $E_\omega$  coincide com os inteiros, para todo  $\omega \in \mathbb{C}$ . A figura 5.1 apresenta componentes de Fatou contendo pontos críticos.

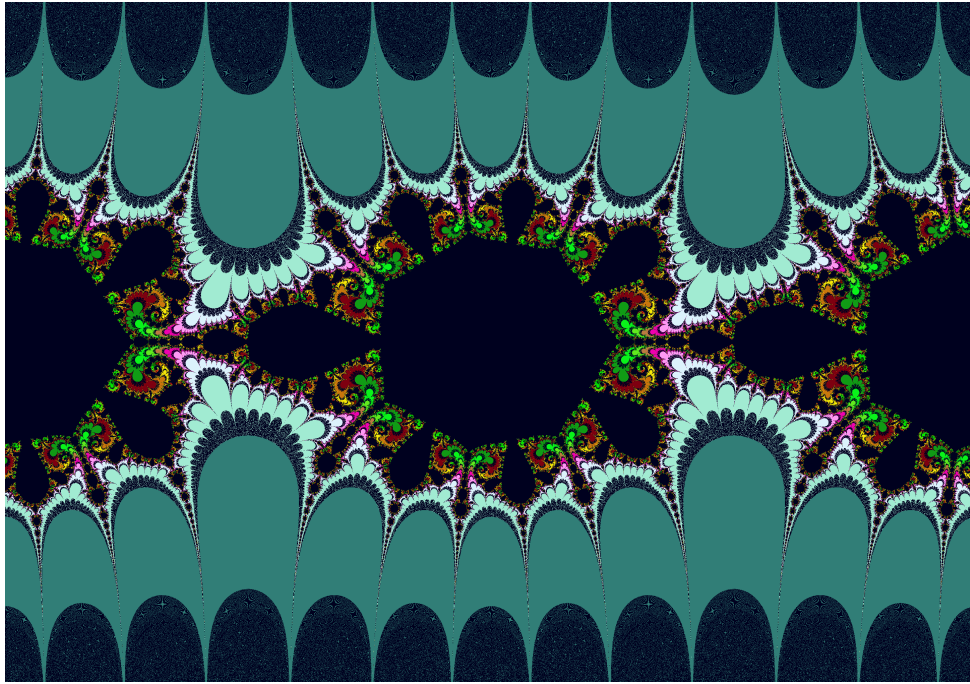
Como  $E_\omega$  comuta com a translação  $T$ , a família de Arnol'd generalizada induz uma família de funções holomorfas  $f_\omega : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  através do recobrimento  $z \mapsto \exp(2\pi iz)$ , que leva o eixo real no círculo unitário:

$$f_\omega(z) = ze^{2\pi i\omega} \prod_{j=1}^k \exp \left[ \pi a_j \left( z^j - \frac{1}{z^j} \right) \right]$$

Ou seja, de modo que o diagrama a seguir seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{E_\omega} & \mathbb{C} \\ e^{2\pi iz} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow e^{2\pi iz} \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{f_\omega} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

Note ainda que, se  $\sigma(z) := 1/\bar{z}$  então  $f_\omega$  comuta com  $\sigma$ , o que significa que  $f_\omega$  é simétrica



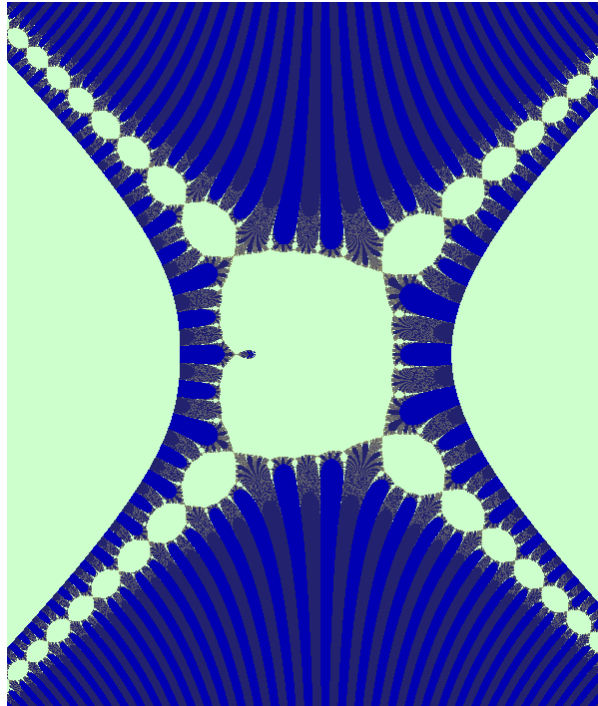
**Figura 5.1:** A região em preto é o conjunto de Fatou de  $E_{3/11}$  para  $k = 3$ .

em relação ao círculo unitário. Dessa forma,  $f_\omega|_{\partial\mathbb{D}}$  é um homeomorfismo crítico do círculo com número de rotação  $\rho(\omega)$ , digamos. Por um resultado obtido por Herman (veja [36]), a aplicação  $[0, 1) \ni \omega \mapsto \rho(\omega)$ , é contínua, não-decrescente e tal que o intervalo  $\rho^{-1}(t) \subset [0, 1)$  é degenerado se  $t$  é irracional, enquanto que, se  $t$  é racional este intervalo possui interior.

Portanto, a restrição de  $E_\omega$  aos números reais é o levantamento de um homeomorfismo do círculo  $f_\omega|_{\partial\mathbb{D}}$  que preserva orientação. Pelo Teorema de Poincaré (veja [39, capítulo 11]), se o número de rotação de  $f_\omega|_{\partial\mathbb{D}}$  for racional então existirá pelo menos uma órbita periódica (semi)atratora no círculo unitário (na figura 5.2,  $f_\omega$  tem uma componente parabólica). Caso contrário, como  $f_\omega|_{\partial\mathbb{D}}$  é um homeomorfismo crítico do círculo, segue-se do Teorema de Yoccoz ([66]) que  $f_\omega|_{\partial\mathbb{D}}$  será minimal. Isto nos ajudará a classificar as componentes de Fatou de  $f_\omega$  em termos do número de rotação de  $f_\omega|_{\partial\mathbb{D}}$ , tendo em vista que a única órbita crítica está no círculo unitário.

No caso da família de Arnold generalizada  $E_\omega$ ,  $\mathbb{Z} + \omega$  é o conjunto dos valores singulares. Para cada  $\omega$ ,  $f_\omega$  é uma função holomorfa com um único ponto crítico  $1 \in \mathbb{S}^1$ , de ordem  $2k+1$ , duas singularidades essenciais ( $0$  e  $\infty$ ), e um único valor crítico  $e^{2\pi i\omega}$ . Pela Proposição 4.1,  $f_\omega$  é uma função holomorfa de  $\mathbb{C}^*$  do tipo *finito*.

Para conveniência do leitor apresentaremos algumas propriedades de rigidez dessa família



**Figura 5.2:** Conjunto de Julia de  $f_0$ , para  $k = 2$ ; no centro da figura aparece a bacia de atração imediata do ponto fixo  $z_0 = -1$  (parabólico).

de Arnol'd generalizada, análogas àquelas obtidas por de Faria, em [13], para a família de Arnol'd padrão. As demonstrações são as mesmas.

**Proposição 5.1 (Rigidez).** *Seja  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  uma função holomorfa normalizada, simétrica e topologicamente conjugada a  $f_\omega$ , para algum  $\omega \in [0, 1)$ . Então existe  $\alpha \in [0, 1)$  tal que  $f = f_\alpha$ .*

Em outras palavras, a Proposição 5.1 afirma que, em um certo sentido, a família  $\{f_\omega\}$  é topologicamente completa. Nas condições dessa Proposição, diremos que  $f$  é *simétrica* se comutar com a aplicação  $\sigma$  e, que é *normalizada* se o ponto crítico for  $1 \in \partial\mathbb{D}$ .

*Demonstração da Proposição 5.1.* Seja  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  uma função holomorfa e suponha, pós-compondo com  $\sigma$  se necessário, que  $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é um homeomorfismo que preserva orientação, fixa a origem e o ponto no infinito, e satisfaz  $h \circ f_\omega = f \circ h$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^* & \xrightarrow{f_\omega} & \mathbb{C}^* \\
 h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h \\
 \mathbb{C}^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^*
 \end{array}$$

Definindo-se  $\lambda = e^{-2\pi i\omega} h(e^{2\pi i\omega})$ , segue-se que a função dada por  $A(z) = \lambda z$  é um automorfismo conforme de  $\widehat{\mathbb{C}}$  que satisfaz  $A \circ f_\omega(1) = h \circ f_\omega(1)$ . Com isso, existe uma homotopia  $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \times [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $\Phi(z, 0) = h(z)$  e  $\Phi(z, 1) = A(z)$  para todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , e ainda,  $\Phi(p, t) = h(p)$  se  $p \in \{0, e^{2\pi i\omega}, \infty\}$ . Por outro lado, se  $X_f := \mathbb{C}^* - \text{sing}(f^{-1})$  e  $X_{f_\omega} := \mathbb{C}^* - \text{sing}(f_\omega^{-1})$ , então as aplicações  $f : f^{-1}(X_f) \rightarrow X_f$  e  $f_\omega : f_\omega^{-1}(X_{f_\omega}) \rightarrow X_{f_\omega}$  são recobrimentos regulares. Pelo Teorema do Levantamento de Homotopias,  $\Phi(z, t)$  admite um levantamento  $\widetilde{\Phi}(z, t)$  (veja o diagrama abaixo) tal que

$$\widetilde{\Phi}(z, 0) = h(z) \quad \text{e} \quad f \circ \widetilde{\Phi}(z, t) = \Phi(f_\omega(z), t).$$

$$\begin{array}{ccc} f_\omega^{-1}(X_{f_\omega}) & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} & f^{-1}(X_f) \\ f_\omega \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f \\ X_{f_\omega} & \xrightarrow{\Phi} & X_f \end{array}$$

Seja  $\widetilde{A} : f_\omega^{-1}(X_{f_\omega}) \rightarrow f^{-1}(X_f)$  definida por  $\widetilde{A}(z) = \widetilde{\Phi}(z, 1)$ , para cada  $z \in f_\omega^{-1}(X_{f_\omega})$ . Em particular,  $\widetilde{A}$  é holomorfa e injetiva em  $f_\omega^{-1}(X_{f_\omega})$ . Além disso, como  $\widetilde{A}$  é homotópica a  $h$  e  $f_\omega^{-1}(e^{2\pi i\omega})$  é discreto em  $\mathbb{C}^*$ , segue-se do teorema das singularidades removíveis de Riemann que  $\widetilde{A}$  tem extensão holomorfa em  $\widehat{\mathbb{C}}$  (que também denotaremos por  $\widetilde{A}$ ) tal que  $\widetilde{A}(0) = 0$  e  $\widetilde{A}(\infty) = \infty$ , e portanto,  $\widetilde{A} \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ . Logo,  $\widetilde{A}(z) = az$  para algum  $a \in \mathbb{C}^*$ .

Por outro lado, se  $f$  comuta com  $\sigma$  e seu ponto crítico é 1 então  $h(1) = 1$  e com isso,  $h \circ f_\omega(1) = f \circ h(1) = f(1) \in \partial\mathbb{D}$  de onde segue-se que existe  $\alpha \in [0, 1)$  tal que  $h \circ f_\omega(1) = e^{2\pi i\alpha}$ . E ainda, para cada  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $f_\omega(z) = e^{2\pi i\omega}$  tem-se  $\widetilde{A}(z) = h(z)$ . Em particular  $\widetilde{A}(1) = h(1) = 1$  e portanto,  $\widetilde{A}$  é a identidade. Logo, para todo  $z$ ,

$$f(z) = A \circ f_\omega \circ \widetilde{A}(z) = \lambda f_\omega(z) = f_\alpha(z).$$

□

**Teorema 5.1.** *Para cada  $\omega \in [0, 1)$ , a função  $f_\omega$  não admite coeficiente de Beltrami invariante, simétrico, não-trivial e com suporte em seu conjunto de Julia.*

*Demonstração.* Por absurdo, suponha que  $\mu$  é um coeficiente de Beltrami  $f_\omega$ -invariante em

$\widehat{\mathbb{C}}$  com suporte em  $\mathcal{J}(f_\omega)$ . Suponha ainda que  $\mu$  é simétrica em relação ao círculo unitário, isto é,  $\mu \circ \sigma = \sigma \circ \mu$ . Para cada  $t$  real suficientemente pequeno seja  $h_t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  a única solução normalizada de  $\bar{\partial}h_t = (t\mu)\partial h_t$ , isto é, que fixa os pontos 0, 1 e  $\infty$ . Pela unicidade da solução normalizada da equação de Beltrami temos  $\sigma \circ h_t \circ \sigma^{-1} = h_t$ , já que  $t\mu$  é simétrica, e portanto  $h_t$  é simétrica. Agora considere a função  $f_t := h_t \circ f_\omega \circ h_t^{-1}$ . Como  $t\mu$  é invariante por  $f_\omega$ , a função  $f_t$  é holomorfa e possui um único ponto crítico em 1. Pela Proposição 5.1, para cada  $t$  existe  $\alpha_t \in [0, 1)$  tal que  $f_t = f_{\alpha_t}$ . Em particular,  $\rho(\alpha_t)$  é irracional para todo  $t$  ou  $\rho(\alpha_t)$  é racional para todo  $t$ , e como  $t \mapsto \rho(\alpha_t)$  é contínua, segue-se que  $\rho(\alpha_t) = \rho(\omega)$ . Logo  $h_t$  comuta com  $f_\omega$  para todo  $t$ . Portanto, o conjunto  $Y_n := f_\omega^{-n}(1)$  é invariante por  $h_t$ , para cada  $n \geq 0$ . Como  $h_0$  é a identidade de  $\widehat{\mathbb{C}}$  e a aplicação  $t \mapsto h_t(z)$  é contínua para cada  $z$ , pelo Teorema de Ahlfors-Bers, segue-se que  $h_t(z) = z$  para todo  $z \in Y_n$  e cada  $n \geq 0$ . Sejam agora,  $z_0 \in \mathcal{J}(f_\omega) \cap \mathbb{C}^*$  e  $U$  uma vizinhança qualquer de  $z_0$  em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Pelo Teorema de Montel existe  $n > 0$  suficientemente grande tal que  $1 \in f_\omega^n(U)$ , isto é,  $Y_n \cap U \neq \emptyset$ . Como  $U$  é uma vizinhança arbitrária de  $z_0$ , que por sua vez é um ponto arbitrário do conjunto de Julia de  $f_\omega$ , isto prova que  $\mathcal{J}(f_\omega) \subseteq \overline{\bigcup_{n \geq 0} Y_n}$ . E com isso,  $h_t(z) = z$  para todo  $z \in \mathcal{J}(f_\omega)$  e cada  $t$ . Por fim, lembrando que o suporte de  $t\mu$  está contido no conjunto de Julia de  $f_\omega$ , concluímos que  $h_t$  é holomorfa em  $\mathbb{C}^* - \mathcal{J}(f_\omega)$  e portanto,  $h_t(z) = z$  para  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  e cada  $t$ , de onde segue-se que  $\mu \equiv 0$  em quase todo ponto.  $\square$

O Teorema 5.1 foi enunciado em [13] para o caso  $\rho(\omega)$  irracional. No entanto, ao analisar a prova verificamos que o resultado vale para qualquer número de rotação.

**Definição 14.** *Um campo de linhas (não trivial) em  $\mathbb{C}^*$  é uma diferencial de Beltrami*

$$\mu = \mu(z) \frac{d\bar{z}}{dz}$$

onde  $\mu(z)$  é uma função complexa mensurável tal que:

(a) para quase todo  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $|\mu(z)| = 0$  ou  $|\mu(z)| = 1$ .

(b) o suporte  $\text{supp}(\mu) := \{z \in \mathbb{C}^* ; |\mu(z)| = 1\}$  tem medida positiva.

Dizemos que o conjunto de escape de  $f$  suporta um campo de linhas  $\mu$  invariante se

$\text{supp}(\mu) \subset I_f$  e

$$\mu(f(z)) \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)} = \mu(z)$$

para quase todo  $z \in \mathbb{C}^*$ , com  $f'(z) \neq 0$ .

O resultado a seguir é uma consequência imediata do Teorema 5.1.

**Corolário 15.** *Para cada  $\omega \in [0, 1)$ , o conjunto de escape de  $f_\omega$  não suporta um campo de linhas invariante e simétrico.*

## 5.1 Classificação das componentes de Fatou

Suponha que o conjunto de Fatou de  $f_\omega$  é não vazio. Pelo fato de a órbita crítica estar contida no círculo unitário, segue-se da Proposição 4.2 que não existem ciclos de anéis de Herman e nem de discos de Siegel em  $\mathcal{F}(f_\omega)$ , uma vez que a origem é uma singularidade essencial de  $f_\omega$ . Além disso, o Teorema 4.2 implica que existe apenas um ciclo periódico no conjunto de Fatou de  $f_\omega$ , e este ciclo deve ser (super)atrator ou parabólico. Ambos podem ocorrer. Isto prova o resultado a seguir.

**Proposição 5.2.** *Suponha que o conjunto de Julia de  $f_\omega$  é diferente de  $\mathbb{C}^*$ . Então, o conjunto de Fatou  $\mathcal{F}(f_\omega)$  possui um único ciclo periódico, (super)atrator ou parabólico, e não contém domínios errantes.*

Ainda neste caso, o número de rotação  $\rho(\omega)$  deve ser, necessariamente, racional. Portanto, obtemos o

**Corolário 16.** *O número de rotação  $\rho(\omega)$  é irracional se, e somente se,  $\mathcal{J}(f_\omega) = \mathbb{C}^*$ .*

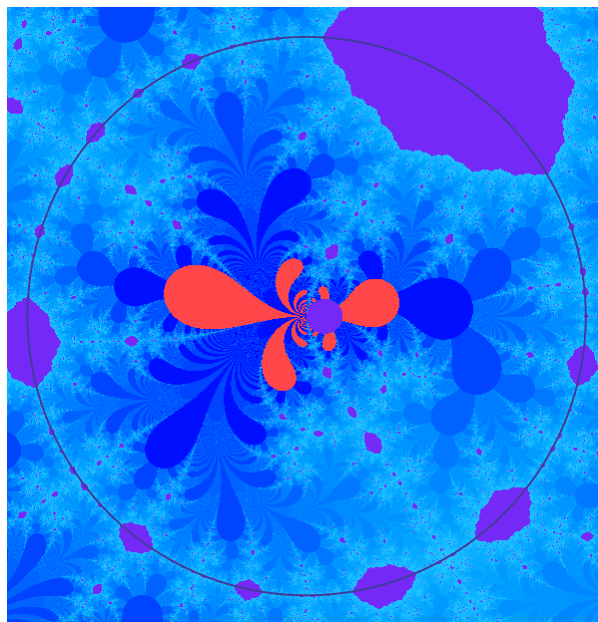
Na figura 5.4, a órbita de todo ponto no círculo unitário é densa neste subconjunto.

## 5.2 Medida do conjunto de Julia

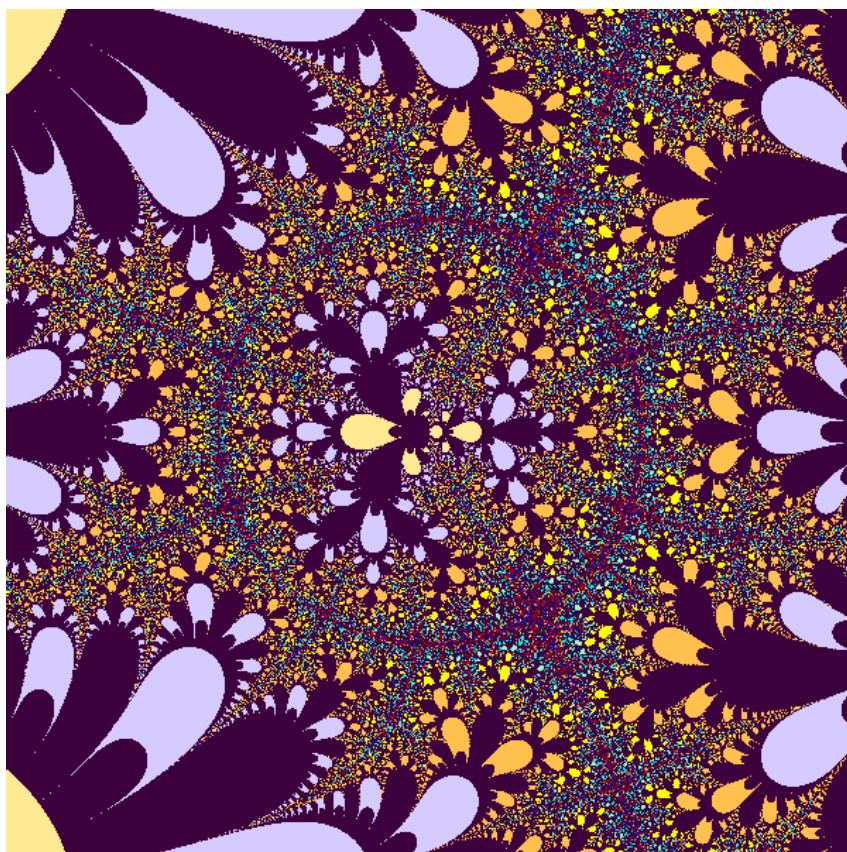
Nesta seção o objetivo é verificar que a área do conjunto de Fatou de  $E_\omega$  em cada faixa vertical de comprimento unitário é finita. Isto implica, em particular, que o conjunto de Julia de  $f_\omega$  tem medida positiva para cada  $\omega \in [0, 1)$ . Mais precisamente, demonstraremos o seguinte teorema.

**Teorema 5.2.** *Para todo  $\omega \in [0, 1)$ , o conjunto de escape de  $f_\omega$  tem medida positiva e o conjunto de Fatou tem medida finita.*



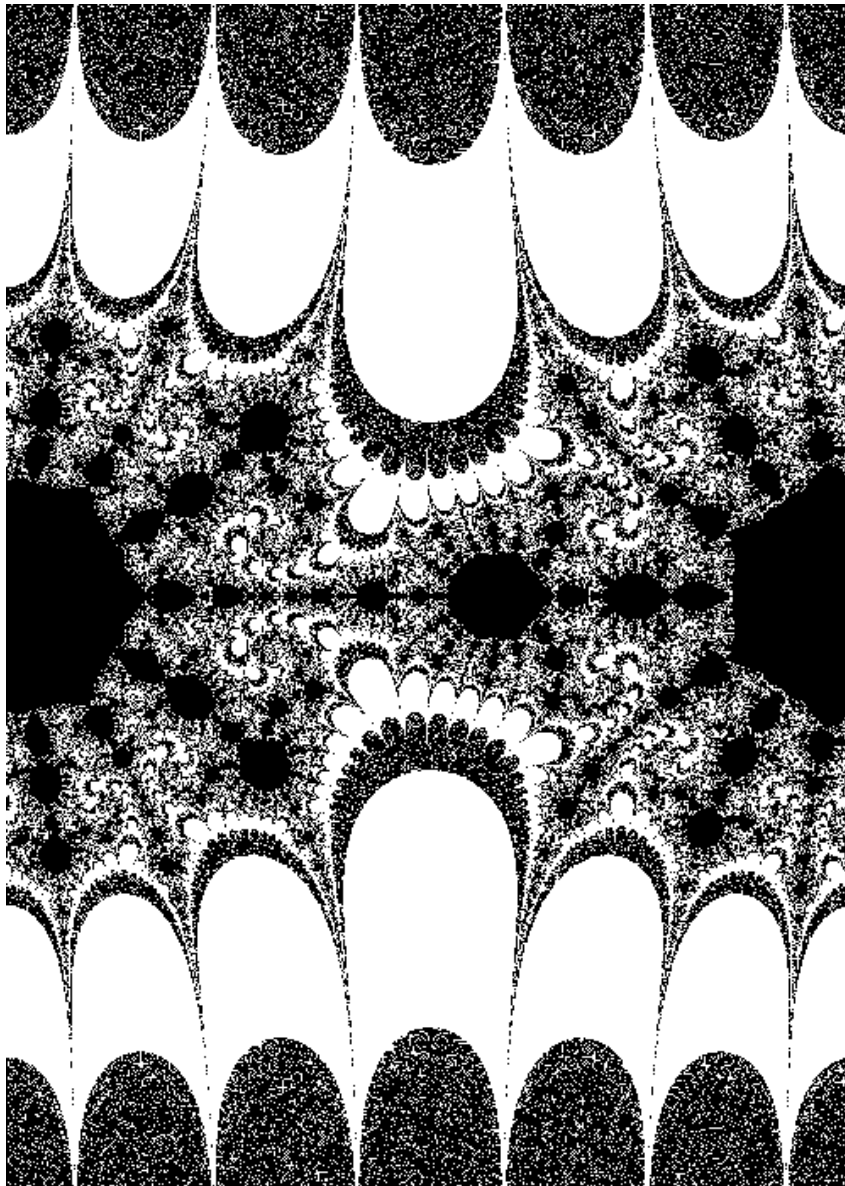


**Figura 5.3:** *Conjunto de Julia de  $f_\omega$ , onde  $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$ , para  $k = 2$ ; Na figura aparece o círculo unitário e algumas componentes de Fatou.*



**Figura 5.4:** *Conjunto de Julia de  $f_\omega$ , onde  $\omega = 1/2$ , para  $k = 2$ ; nela aparece o círculo unitário.*

Seguiremos as ideias de McMullen [49] e Schubert [56] para provar o Teorema 5.2. Primeiro mostraremos que  $E_\omega$  tem expansão uniforme e não-linearidade limitada numa certa



**Figura 5.5:** Conjunto de Fatou (componentes em preto) de  $E_\omega$  para  $k = 3$  e  $\omega = 0,2831$ , no retângulo  $[0, 1] \times [-0,7, 0,7]$ .

região do plano complexo. Para cada  $y \in \mathbb{R}$  positivo, definimos a região

$$R(y) := \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} z| > y\}$$

**Lema 5.2.1.** *Existe  $y_0 \in \mathbb{R}$  tal que*

$$|E'_\omega(z)| \geq \frac{1}{2} e^{2k\pi|\operatorname{Im} z|} \quad e \quad \left| \frac{E''_\omega(z)}{E'_\omega(z)} \right| < 10k$$

para quaisquer  $\omega \in \mathbb{C}$  e  $z \in R(y_0)$ .

*Demonstração.* Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$E'_\omega(z) = 1 + \sum_{j=1}^k \pi j a_j (e^{2\pi i j z} + e^{-2\pi i j z}) \quad \text{e} \quad E''_\omega(z) = \sum_{j=1}^k 2(\pi j)^2 i a_j (e^{2\pi i j z} - e^{-2\pi i j z})$$

Como

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \frac{|E'_\omega(z)|}{e^{2k\pi|\operatorname{Im} z|}} = k\pi|a_k|$$

e

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \frac{|E''_\omega(z)|}{e^{2k\pi|\operatorname{Im} z|}} = 2(k\pi)^2|a_k|,$$

existem  $y_1$  e  $y_2$  positivos tais que

$$\frac{|E'_\omega(z)|}{e^{2k\pi|\operatorname{Im} z|}} \geq \frac{1}{2}k\pi|a_k|, \quad \text{para } |\operatorname{Im} z| > y_1,$$

e

$$\frac{|E''_\omega(z)|}{|E'_\omega(z)|} \leq 10k, \quad \text{para } |\operatorname{Im} z| > y_2.$$

Como  $k\pi|a_k| \geq 1$  para todo inteiro  $k$  positivo, é suficiente escolher  $y_0 := \max\{y_1, y_2\}$ .  $\square$

Aumentando-se  $y_0$  se necessário, podemos supor que  $y_0 > 1136$  e portanto,  $E_\omega$  tem expansão uniforme em  $R(y_0)$ :

$$|E'_\omega(z)| \geq 2, \quad z \in R(y_0). \quad (5.2)$$

**Definição 17.** Dados um número real  $r > 0$  e um subconjunto  $B \subset \mathbb{C}$ , um  $r$ -empacotamento de  $B$ , que será denotado por  $\operatorname{pack}_r(B)$ , é a coleção dos quadrados da grade  $\mathcal{G}_r$  contidos em  $B$ . Usaremos a notação  $\bigcup \operatorname{pack}_r(B)$  para a reunião desses quadrados.

**Lema 5.2.2.** Dado  $y \geq y_0$ , defina  $y_j = \exp^j(k\pi y)/k\pi$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Se  $Q \subset R(y_j)$  é um quadrado de lado  $r < \sqrt{2}/80k$  então

$$\operatorname{dens}\left(\bigcup \operatorname{pack}_r(E_\omega(Q) \cap R(y_{j+1})), E_\omega(Q)\right) \geq 1 - \frac{2y_{j+1}}{\exp(2k\pi y_j)}$$

para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ .

*Demonstração.* Fixemos  $j \in \mathbb{N}_0$  e seja  $Q$  um quadrado em  $R(y_j)$  de lado  $r > 0$ . Como  $y_j > 0$  segue-se que  $E_\omega$  é conforme em  $Q$  e pelo Lema 5.2.1, obtemos

$$N_{E_\omega}(Q) < 10k \operatorname{diam}(Q) = 20kr\sqrt{2} < 1/4. \quad (5.3)$$

E pelo Lema 4.2.3,

$$L_{E_\omega}(Q) < 1 + 8N_{E_\omega}(Q) < 3. \quad (5.4)$$

Fixemos  $z_0 \in Q$ . Como

$$L_{E_\omega}(Q) \geq \frac{\sup_{z \in Q} |E'_\omega(z)|}{\inf_{z \in Q} |E'_\omega(z)|} \quad (5.5)$$

temos

$$\sup_{z \in Q} |E'_\omega(z)| \leq \left( \inf_{z \in Q} |E'_\omega(z)| \right) L_{E_\omega}(Q) \leq |E'_\omega(z_0)| L_{E_\omega}(Q),$$

e portanto,

$$\operatorname{diam}(E_\omega(Q)) \leq \left( \sup_{z \in Q} |E'_\omega(z)| \right) \operatorname{diam}(Q) \leq 3r |E'_\omega(z_0)| \sqrt{2}. \quad (5.6)$$

Também segue-se de 5.5 que

$$\inf_{z \in Q} |E'_\omega(z)|^2 \geq \frac{|E'_\omega(z_0)|^2}{L_{E_\omega}(Q)^2} > \frac{1}{9} |E'_\omega(z_0)|^2.$$

Logo,

$$m(E_\omega(Q)) \geq \left( \inf_{z \in Q} |E'_\omega(z)|^2 \right) m(Q) > \frac{r^2}{9} |E'_\omega(z_0)|^2. \quad (5.7)$$

Como  $z_0 \in R(y_j)$ , segue-se do Lema 5.2.1 que

$$|E'_\omega(z_0)| \geq \frac{1}{2} \exp(2k\pi |\operatorname{Im} z_0|) > \frac{1}{2} \exp(2k\pi y_j). \quad (5.8)$$

Agora considere os seguintes subconjuntos da grade  $\mathcal{G}_r$ :

$$\mathcal{A} := \{Q_r \in \mathcal{G}_r; Q_r \cap E_\omega(Q) \neq \emptyset\}, \quad \mathcal{B} := \{Q_r \in \mathcal{G}_r; Q_r \subset E_\omega(Q) \cap (\mathbb{C} - R(y_{j+1}))\}$$

e

$$\mathcal{C} := \{Q_r \in \mathcal{G}_r; Q_r \cap \partial E_\omega(Q) \neq \emptyset \text{ ou } Q_r \cap (\partial R(y_{j+1}) \cap E_\omega(Q)) \neq \emptyset\}$$

Então

$$\bigcup_{Q_r \in \mathcal{A}} Q_r = \bigcup \text{pack}_r(E_\omega(Q) \cap R(y_{j+1})) \cup \left[ \bigcup_{Q_r \in \mathcal{B}} Q_r \right] \cup \left[ \bigcup_{Q_r \in \mathcal{C}} Q_r \right],$$

e portanto, a densidade de  $\bigcup \text{pack}_r(E_\omega(Q) \cap R(y_{j+1}))$  em  $E_\omega(Q)$  é igual a

$$\text{dens} \left( \bigcup_{Q_r \in \mathcal{A}} Q_r, E_\omega(Q) \right) = \text{dens} \left( \bigcup_{Q_r \in \mathcal{B}} Q_r, E_\omega(Q) \right) + \text{dens} \left( \bigcup_{Q_r \in \mathcal{C}} Q_r, E_\omega(Q) \right) \quad (5.9)$$

Dos resultados já encontrados, obteremos uma estimativa para cada parcela acima.

Primeiro, observe que todo quadrado  $Q_r \in \mathcal{B}$  está contido no retângulo com centro na origem, de altura igual a  $2y_{j+1}$  e largura  $\text{diam}(E_\omega(Q))$ . Portanto,

$$\text{dens} \left( \bigcup_{Q_r \in \mathcal{B}} Q_r, E_\omega(Q) \right) \leq \frac{2y_{j+1} \text{diam}(E_\omega(Q))}{m(E_\omega(Q))}$$

Usando as estimativas 5.6, 5.7 e 5.8 concluímos que

$$\text{dens} \left( \bigcup_{Q_r \in \mathcal{B}} Q_r, E_\omega(Q) \right) \leq \frac{108\sqrt{2}}{r} \cdot \frac{y_{j+1}}{\exp(2k\pi y_j)} \quad (5.10)$$

Por outro lado, segue-se do Lema 4.2.4 que

$$\#\mathcal{C} \leq 12 + 21L_{E_\omega}(Q)|E'_\omega(z_0)|,$$

e portanto,

$$\text{dens} \left( \bigcup_{Q_r \in \mathcal{C}} Q_r, E_\omega(Q) \right) \leq \frac{(12 + 21L_{E_\omega}(Q)|E'_\omega(z_0)|)r^2}{m(E_\omega(Q))} \quad (5.11)$$

Como  $y_0 > 1136 (> \ln(206)/2\pi)$ , segue-se do Lema 5.2.1 que

$$|E'_\omega(z_0)| \geq \frac{1}{2} \exp(2k\pi y_0) \geq \frac{1}{2} \exp(2\pi y_0) > 108,$$

e portanto,

$$\frac{9(12 + 63|E'_\omega(z_0)|)}{|E'_\omega(z_0)|^2} \leq \frac{568}{|E'_\omega(z_0)|}.$$

Das relações 5.4, 5.11 e 5.8 temos:

$$\text{dens} \left( \bigcup_{Q_r \in \mathcal{C}} Q_r, E_\omega(Q) \right) < \frac{1136}{\exp(2k\pi y_j)} < \frac{y_{j+1}}{\exp(2k\pi y_j)} \quad (5.12)$$

Para finalizar combinamos 5.9, 5.10, 5.12 e a igualdade

$$\text{dens} \left( \bigcup_{Q_r \in \mathcal{A}} Q_r, E_\omega(Q) \right) = 1$$

para obter o resultado. □

**Teorema 5.3.** *Seja  $y \geq y_0$ . Se  $Q$  é um quadrado em  $R(y)$  de lado  $r < \sqrt{2}/80k$  então*

$$\text{dens}(I(E_\omega), Q) > 1 - 19 \exp(-k\pi y).$$

Prorrogaremos a prova do Teorema 5.3 para o final desta seção a fim de obter a demonstração do Teorema principal.

**Proposição 5.3.** *Se  $S := \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \text{Re } z \leq 1 \text{ e } \text{Im } z \geq 0\}$  então  $S - I(E_\omega)$  tem medida finita, para todo  $\omega \in [0, 1)$ .*

*Demonstração.* Seja  $r < \sqrt{2}/80k$  e escolha  $l_0$  natural tal que  $rl_0 > 1$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $0 \leq l \leq l_0$ , considere o quadrado

$$Q_j^l := \{z \in \mathbb{C}; lr \leq \text{Re } z \leq (l+1)r \text{ e } jr \leq \text{Im } z \leq (j+1)r\}$$

Então

$$S \cap R(y_0) \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{l_0-1} Q_j^l.$$

E ainda, se  $j_0$  é o menor inteiro positivo tal que  $rj_0 \geq y_0$  então  $Q_j^l \in \mathcal{G}_r$  é um quadrado em  $R(y_0)$  para quaisquer  $j \geq j_0$  e  $0 \leq l \leq l_0$ . Pelo Teorema 5.3

$$\text{dens}(I(E_\omega), Q_j^l) > 1 - \exp(-k\pi jr),$$

para todo  $j \geq j_0$ . Portanto

$$\begin{aligned}
m([S \cap R(y_0)] - I(E_\omega)) &\leq m\left(\left[\bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{l_0-1} Q_j^l\right] - I(E_\omega)\right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{l_0-1} m(Q_j^l - I(E_\omega)) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{l_0-1} \left(1 - \text{dens}(I(E_\omega), Q_j^l)\right) m(Q_j^l) \\
&< \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{l_0-1} 19r^2 \exp(-k\pi jr) \\
&= 19r^2 \left[ \sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{l=0}^{l_0-1} \exp(-k\pi jr) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{l=0}^{l_0-1} \exp(-k\pi jr) \right] \\
&\leq 19l_0r^2 \left[ j_0 + \sum_{j=j_0}^{\infty} \exp(-k\pi jr) \right] \\
&\leq 19l_0r^2 \left[ j_0 + \frac{1}{1 - \exp(-k\pi r)} \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$m(S - I(E_\omega)) \leq y_0 + 19l_0r^2 \left[ j_0 + \frac{1}{1 - \exp(-k\pi r)} \right] < \infty.$$

□

*Demonstração do Teorema 5.2.* Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , considere a faixa vertical

$$S_n = \{z \in \mathbb{C}; n \leq \text{Re } z \leq n + 1\}.$$

Pela Proposição 5.3, e por  $E_\omega$  ser simétrica em relação ao eixo real, o conjunto de Fatou de  $E_\omega$  na faixa  $S_0$  tem medida finita; e ainda, o conjunto de escape de  $E_\omega$  em  $S_0$  tem medida positiva. Como  $E_\omega$  comuta com a translação  $z \mapsto z + 1$ , essa mesma conclusão é válida para qualquer faixa  $S_n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Como  $S_0 \cap I(E_\omega)$  projeta-se no conjunto de escape de  $f_\omega$ , através do recobrimento  $z \mapsto \exp(2\pi iz)$ , segue-se que

$$I(f_\omega) = I_0(f_\omega) \cup I_\infty(f_\omega)$$

tem medida positiva, e portanto  $\mathcal{J}(f_\omega)$  tem medida positiva. Além disso, com o mesmo

argumento conclui-se que  $\mathcal{F}(f_\omega)$  tem medida finita.  $\square$

*Demonstração do Teorema 5.3.* Sejam  $y \geq y_0$  e  $Q$ , um quadrado em  $R(y)$  de lado  $r < \sqrt{2}/80k$ . Considere a sequência definida por  $y_j = \exp^j(k\pi y)/k\pi$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Em particular

$$k\pi y_{j+1} = \exp(k\pi y_j) \text{ para cada } j \in \mathbb{N}. \quad (5.13)$$

A seguir construiremos uma sequência de coleções de subconjuntos de  $Q$  que satisfazem as condições encaixantes. Seja  $E_0 := \{Q\}$  e recursivamente definimos

$$E_j := \left\{ G_j \subset Q; G_j \subset F_{j-1} \in E_{j-1} \text{ e } E_\omega^j(G_j) \in \text{pack}_r \left( E_\omega^j(F_{j-1}) \cap R(y_j) \right) \right\},$$

para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Em particular,  $F_0 = Q$ .

Em outras palavras,  $E_j$  é a coleção de pré-imagens por  $E_\omega^j$  dos quadrados no  $r$ -empacotamento de  $E_\omega^j(F) \cap R(y_j)$  para cada  $F \in E_{j-1}$ . Seja  $n_j := \#E_j$ . Usaremos a seguinte notação:

$$E_j = \{F_j^1, F_j^2, \dots, F_j^{n_j}\}$$

Com essa construção, cada  $F_j^l$  é compacto e pelo Lema 5.2.2 temos

$$\text{dens} \left( \bigcup \text{pack}_r(E_\omega^{j+1}(F_j^l) \cap R(y_{j+1})), E_\omega^{j+1}(F_j^l) \right) \geq 1 - \frac{2y_{j+1}}{\exp(2k\pi y_j)} \quad (5.14)$$

para todo  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $1 \leq l \leq n_j$ .

Por construção, a sequência  $(E_j)$  satisfaz os itens (a), (b) e (c) das condições encaixantes. Falta verificar apenas o item (d).

Para  $1 \leq l \leq n_j$ , seja  $h : E_\omega^{j+1}(F_j^l) \rightarrow Q$  um ramo da inversa de  $E_\omega^{j+1}$ . Pelo Lema 4.3.2 temos

$$L_h(E_\omega^{j+1}(F_j^l)) < 9. \quad (5.15)$$

Como

$$\text{dens} \left( h(A), h(E_\omega^{j+1}(F_j^l)) \right) \leq L_h(E_\omega^{j+1}(F_j^l))^2 \text{dens}(A, E_\omega^{j+1}(F_j^l)),$$



para todo  $A \subseteq E_\omega^{j+1}(F_j^l)$  mensurável, segue-se de 5.14 e 5.15 que

$$\begin{aligned}
\text{dens} \left( \bigcup_{l=1}^{n_{j+1}} F_{j+1}^l, F_j^l \right) &= 1 - \text{dens} \left( F_j^l - \bigcup_{l=1}^{n_{j+1}} F_{j+1}^l, F_j^l \right) \\
&= 1 - \text{dens} \left( h \left( E_\omega^{j+1} \left( F_j^l - \bigcup_{l=1}^{n_{j+1}} F_{j+1}^l \right) \right), h \left( E_\omega^{j+1} (F_j^l) \right) \right) \\
&\geq 1 - L_h(E_\omega^{j+1}(F_j^l))^2 \text{dens} \left( E_\omega^{j+1} \left( F_j^l - \bigcup_{l=1}^{n_{j+1}} F_{j+1}^l \right), E_\omega^{j+1} (F_j^l) \right) \\
&\geq 1 - 9 \text{dens} \left( E_\omega^{j+1} (F_j^l) - \bigcup \text{pack}_r(E_\omega^{j+1} (F_j^l) \cap R(y_{j+1})), E_\omega^{j+1} (F_j^l) \right) \\
&> 1 - 9 \left( 1 - \text{dens} \left( \bigcup \text{pack}_r(E_\omega^{j+1} (F_j^l) \cap R(y_{j+1})), E_\omega^{j+1} (F_j^l) \right) \right) \\
&\geq 1 - 18 \frac{y_{j+1}}{\exp(2k\pi y_j)}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$1 - 18 \frac{y_{j+1}}{\exp(2k\pi y_j)} > \frac{1}{2},$$

para quaisquer  $k$  e  $j$  naturais.

Para obter o item (d) das condições encaixantes para a sequência  $(E_j)$ , basta escolher

$$\Delta_j := 1 - 18 \frac{y_{j+1}}{\exp(2k\pi y_j)}.$$

Pelo Lema 4.3.1, se

$$E := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{n_j} F_j^l$$

então

$$\text{dens}(I(E_\omega), Q) \geq \text{dens}(E, Q) \geq \prod_{j=0}^{\infty} \Delta_j$$

Mostraremos que o produto à direita da desigualdade acima, é convergente. Para tanto, note que

$$1 - 18 \frac{y_{j+1}}{\exp(2k\pi y_j)} = 1 - \frac{18}{k\pi \exp^{j+1}(k\pi y)} \geq 1 - \frac{18}{k\pi \exp(k\pi y)} e^{-j}$$

já que

$$\exp^{j+1}(k\pi y) \geq e^j \exp(k\pi y)$$

para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ , e

$$\log(1 - x) > -2x$$

se  $0 \leq x \leq 1/2$ . Com isso,

$$\log \left( \prod_{j=0}^{\infty} \Delta_j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \log \left( 1 - \frac{18}{k\pi \exp^{j+1}(k\pi y)} \right) > -\frac{36e}{k\pi(e-1) \exp(k\pi y)}$$

Logo,

$$\text{dens}(I(E_\omega), Q) \geq \exp \left( -\frac{36e}{k\pi(e-1) \exp(k\pi y)} \right) \geq 1 - \frac{36e}{k\pi(e-1) \exp(k\pi y)} > 1 - 19 \exp(-k\pi y).$$

□

### 5.3 Recorrência

Para uma função  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^*)$  com singularidades essenciais em 0 e  $\infty$ , consideraremos o conjunto

$$\widehat{P}(f) := P(f) \cup \{0, \infty\}.$$

Nesta seção vamos provar o

**Teorema 5.4.** *Seja  $\omega \in [0, 1)$ . Então, para quase todo  $z \in \mathcal{J}(f_\omega)$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\chi(f_\omega^n(z), \widehat{P}(f_\omega)) = 0,$$

onde  $d_\chi$  é a distância cordal em  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Corolário 18.** *Se  $f_\omega$  é hiperbólica então o conjunto de escape de  $f_\omega$  atrai quase toda órbita em  $\mathcal{J}(f_\omega)$ .*

**Corolário 19.** *Para todo  $\omega \in [0, 1)$ ,  $f_\omega$  não é recorrente.*

O Teorema 5.4 é uma combinação do Corolário 16 com uma simples adaptação de [7, Theorem] para endomorfismos de  $\mathbb{C}^*$ , que apresentaremos a seguir.

**Proposição 5.4.** *Seja  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^*)$  com singularidades essenciais em 0 e  $\infty$ . Se  $\mathcal{J}(f) \neq \mathbb{C}^*$*

então, para quase todo  $z \in \mathcal{J}(f)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\chi(f^n(z), \widehat{P}(f)) = 0.$$

Usaremos o seguinte Lema (veja [7, p. 18]).

**Lema 5.3.1.** *Seja  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^*)$  com singularidades essenciais em 0 e  $\infty$ . Considere o conjunto*

$$E := \left\{ z \in \mathcal{J}(f) ; \limsup_{n \rightarrow \infty} d_\chi(f^n(z), \widehat{P}(f)) > 0 \right\}. \quad (5.16)$$

Se  $X \subseteq \mathcal{J}(f)$  é invariante e  $m(E \cap X) > 0$  então  $m(\mathbb{C}^* - X) = 0$ .

*Demonstração da Proposição 5.4.* Suponha que o conjunto

$$E := \left\{ z \in \mathcal{J}(f) ; \limsup_{n \rightarrow \infty} d_\chi(f^n(z), \widehat{P}(f)) > 0 \right\}.$$

tem medida positiva. Pelo Lema 5.3.1, com  $X = E$ , segue-se que  $m(\mathbb{C}^* - E) = 0$ . Como  $\mathbb{C}^* - \mathcal{J} \subseteq \mathbb{C}^* - E$ , concluímos que  $m(\mathbb{C}^* - \mathcal{J}) = 0$  e portanto  $\mathcal{J} = \mathbb{C}^*$ , uma contradição.  $\square$

Seguindo [7, p. 18], apresentaremos a prova do Lema 5.3.1.

*Demonstração do Lema 5.3.1.* Suponha que  $X \subseteq \mathcal{J}(f)$  é invariante e  $m(E \cap X) > 0$ . Para cada  $q \in \mathbb{N}$ , considere o conjunto

$$E_q := \left\{ z \in \mathcal{J}(f) ; \limsup_{n \rightarrow \infty} d_\chi(f^n(z), \widehat{P}(f)) > 1/q \right\}.$$

Então  $E_q \subseteq E_{q+1}$  para todo  $q \in \mathbb{N}$ , de onde segue-se que  $E = \bigcup_{q=1}^{\infty} E_q$ . Portanto,

$$m(E \cap X) = \lim_{q \rightarrow \infty} m(E_q \cap X).$$

Isto implica que existe  $q > 0$  tal que  $m(E_q \cap X) > 0$ . Seja  $z_0 \in E_q \cap X$  um ponto de densidade de  $E_q \cap X$ . Então, existe uma subsequência  $(n_j)$  crescente tal que

$$d(f^{n_j}(z_0), \{0, \infty\}) \geq d(f^{n_j}(z_0), \widehat{P}(f)) > 1/q, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Em particular, existe  $R > 0$  tal que

$$\frac{1}{R} < |f^{n_j}(z_0)| < R, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \quad (5.17)$$

E mais, escrevendo-se  $z_j = f^{n_j}(z_0)$ , existe  $r > 0$  tal que

$$B(z_j, 2r) \cap P(f) = \emptyset, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, existe um ramo da inversa de  $f^{n_j}$  em  $B(z_j, 2r)$  que denotaremos por  $g_j$ , tal que  $g_j(z_j) = z_0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , sejam  $B_j := g_j(B(z_j, r))$  e  $r_j := r|g'_j(z_j)|/4$ . Pelo Lema 4.2.1, temos

$$B(z_0, r_j) \subseteq B_j \subseteq B(z_0, 16r_j). \quad (5.18)$$

Para ver que a sequência  $(r_j)$  converge para zero, suponha que existam um subconjunto  $M \subset \mathbb{N}$  infinito e um número real  $s > 0$ , tal que  $s < r_j$  para todo  $j \in M$ . Com isso,  $B(z_0, s) \subset B(z_0, r_j)$  para cada  $j \in M$  e por 5.18 obtemos

$$f^{n_j}(B(z_0, s)) \subset f^{n_j}(B(z_0, r_j)) \subseteq f^{n_j}(B_j) = B(z_j, r).$$

Por 5.17, a sequência  $(z_j)$  é limitada e, escolhendo  $s > 0$  suficientemente pequeno, podemos assumir que  $|z| > 1/2R$  para todo  $z \in B(z_0, s)$ . Logo, a família  $(f^{n_j})_{j \in M}$  é uniformemente limitada em  $B(z_0, s)$  e portanto normal, o que contradiz o fato de  $z_0$  estar no conjunto de Julia de  $f$ . Provamos, assim, que  $r_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Por outro lado, segue-se novamente de 5.18 que

$$\frac{m(X \cap B(z_0, 16r_j))}{m(B(z_0, 16r_j))} = 1 - \frac{m(B(z_0, 16r_j) - X)}{m(B(z_0, 16r_j))} \leq 1 - \frac{m(B_j - X)}{256m(B_j)}$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$ , e como  $z_0$  é um ponto de densidade de  $X$  obtemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m(B_j - X)}{m(B_j)} = 0.$$

Mas, pelo Lema 4.2.2 temos

$$\frac{m(B(z_j, r) - X)}{m(B(z_j, r))} \leq 81^2 \frac{m(B_j - X)}{m(B_j)},$$

já que  $X$  é invariante. Portanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m(B(z_j, r) \cap X)}{m(B(z_j, r))} = 1. \quad (5.19)$$

Novamente por 5.17 podemos supor que  $(z_j)$  converge para um certo  $z \in \mathbb{C}^*$ , tomando-se uma subsequência se for preciso. Assim, segue-se de 5.19 que

$$m(B(z, r) \cap X) = m(B(z, r)),$$

e portanto,  $N := B(z, r) - X$  tem medida nula. Como  $z \in \mathcal{J}(f)$ , existe  $n > 0$  suficientemente grande tal que  $f^n(B(z, r)) = \mathbb{C}^*$ . Para terminar a prova basta ver que

$$\mathbb{C}^* - X \subseteq f^n(N).$$

□

A proposição a seguir é uma imediata adaptação dos resultados de [7] para o contexto de endomorfismos holomorfos de  $\mathbb{C}^*$ .

**Proposição 5.5.** *Seja  $f$  um endomorfismo holomorfo de  $\mathbb{C}^*$  com singularidades essenciais em 0 e  $\infty$ . Se o conjunto  $E$ , definido em 5.16, tem medida positiva então, para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,*

(a)  *$f^m$  é recorrente e ergódica.*

(b) *a órbita de quase todo  $z \in \mathbb{C}^*$  por  $f^m$  é densa em  $\mathbb{C}^*$ .*

Uma função  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^*)$  é dita *ergódica* se para qualquer  $A \subseteq \mathbb{C}^*$  mensurável que satisfaz  $f^{-1}(A) = A$  tem-se  $m(A) = 0$  ou  $m(\mathbb{C}^* - A) = 0$ .

*Demonstração do Teorema 5.4.* Se  $\rho(\omega)$  é racional então  $\mathcal{J}(f_\omega) \neq \mathbb{C}^*$ , pelo Corolário 16. A conclusão segue da Proposição 5.4. Suponha agora que  $\rho(\omega)$  é irracional. Como os conjuntos

de escape  $I_0(f_\omega)$  e  $I_\infty(f_\omega)$  são invariantes e ambos têm medida positiva, pelo Teorema 5.2, segue-se que  $f_\omega$  não é ergódica. Pela Proposição 5.5, o conjunto  $E$  tem medida nula.       $\square$

## Prova do Teorema 3.2

A seguir apresentaremos com detalhes a prova do Teorema 3.2, que generaliza o Lema 4.3 [13, p. 1011] para qualquer criticalidade. Mas antes precisamos relembrar uma extensão do binômio de Newton, uma ferramenta útil nessa discussão, conhecida como Teorema Multinomial:

$$(x_0 + x_1 + \cdots + x_k)^2 = \sum_{j=0}^k x_j^2 + 2 \sum_{0 \leq p < q \leq k} x_p x_q$$

Escrita de outra forma,

$$(x_0 + x_1 + \cdots + x_k)^2 = x_0^2 + \sum_{j=1}^k x_j^2 + 2x_0 \sum_{m=1}^k x_m + 2 \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{m=\ell+1}^k x_\ell x_m \quad (\text{A.1})$$

*Demonstração do Teorema 3.2.* Consideremos

$$E_\omega(z) = z + \omega + \sum_{j=1}^k a_j \sin(2j\pi z)$$

Lembrando que, para  $z = x + iy$ ,

$$\sin(2\pi j z) = \sin(2j\pi x) \cosh(2j\pi y) + i \cos(2j\pi x) \sinh(2j\pi y), \quad (\text{A.2})$$

obtemos as relações

$$\operatorname{Re}(E_0(x + iy)) = x + \sum_{j=1}^k a_j \sin(2j\pi x) \cosh(2j\pi y) \quad (\text{A.3})$$

e

$$\operatorname{Im}(E_0(x + iy)) = y + \sum_{j=1}^k a_j \cos(2j\pi x) \sinh(2j\pi y). \quad (\text{A.4})$$

Na identidade A.1, fazendo-se

$$x_0 = x \quad \text{e} \quad x_j = a_j \sin(2j\pi x) \cosh(2j\pi y)$$

chega-se à seguinte relação:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}^2(E_0(z)) &= x^2 + \sum_{j=1}^k a_j^2 \sin^2(2j\pi x) \cosh^2(2j\pi y) + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^k a_m x \sin(2m\pi x) \cosh(2\pi m y) + \\ &+ 2 \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{m=\ell+1}^k a_\ell a_m \sin(2\ell\pi x) \sin(2m\pi x) \cosh(2\ell\pi y) \cosh(2m\pi y) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Analogamente, das equações A.1 e A.4,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}^2(E_0(z)) &= y^2 + \sum_{j=1}^k a_j^2 \cos^2(2j\pi x) \sinh^2(2j\pi y) + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^k a_m y \cos(2m\pi x) \sinh(2m\pi y) + \\ &+ 2 \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{m=\ell+1}^k a_\ell a_m \cos(2\ell\pi x) \cos(2m\pi x) \sinh(2\ell\pi y) \sinh(2m\pi y) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Agora, a partir das relações A.5 e A.6, obteremos um limitante inferior para  $|E_0(z)|^2$ .

**Passo 1:**



Lembrando que  $\sinh^2(2\pi jx) = \cosh^2(2\pi jx) - 1$  temos

$$\begin{aligned} \sin^2(2j\pi x) \cosh^2(2j\pi y) + \cos^2(2j\pi x) \sinh^2(2j\pi y) &= \cosh^2(2j\pi y) - \cos^2(2j\pi x) \\ &\geq \cosh^2(2j\pi y) - 1 \\ &= \frac{\cosh(4j\pi y) - 1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $z=x+iy$ , segue da identidade A.2 que

$$\sum_{j=1}^k a_j^2 |\sin(2\pi jz)|^2 = \sum_{j=1}^k a_j^2 (\sin^2(2j\pi x) \cosh^2(2j\pi y) + \cos^2(2j\pi x) \sinh^2(2j\pi y))$$

e portanto,

$$\sum_{j=1}^k a_j^2 |\sin(2\pi jz)|^2 \geq \sum_{j=1}^k \frac{a_j^2}{2} \cosh(4j\pi y) - \sum_{j=1}^k \frac{a_j^2}{2} \quad (\text{A.7})$$

**Passo 2:**

Para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$-|x| \leq x \sin(2\pi x) \leq |x|,$$

de onde segue-se que

$$-|x| \leq x \sin(2m\pi x) \leq |x|,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  e qualquer inteiro positivo  $m$ . Isto implica, em particular, que

$$-|x| \cosh(2m\pi y) \leq x \sin(2m\pi x) \cosh(2m\pi y) \leq |x| \cosh(2m\pi y).$$

Por outro lado, para todo  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} y \cos(2m\pi x) \sinh(2m\pi y) &\geq -|y| \sinh(2m\pi |y|) \\ &\geq -|y| \cosh(2m\pi |y|) \\ &= -|y| \cosh(2m\pi y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y \cos(2m\pi x) \sinh(2m\pi y) &\leq |y| \sinh(2m\pi|y|) \\
&\leq |y| \cosh(2m\pi|y|) \\
&= |y| \cosh(2m\pi y)
\end{aligned}$$

Logo,

$$-|y| \cosh(2m\pi y) \leq y \cos(2m\pi x) \sinh(2m\pi y) \leq |y| \cosh(2m\pi y),$$

para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Com isso, se  $a_m \geq 0$  temos

$$a_m x \sin(2m\pi x) \cosh(2m\pi y) + a_m y \cos(2m\pi x) \sinh(2m\pi y) \geq -a_m(|x| + |y|) \cosh(2m\pi y),$$

enquanto que, para  $a_m < 0$ ,

$$a_m x \sin(2m\pi x) \cosh(2m\pi y) + a_m y \cos(2m\pi x) \sinh(2m\pi y) \geq a_m(|x| + |y|) \cosh(2m\pi y).$$

Em qualquer caso, para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  e qualquer inteiro positivo  $m$ ,

$$a_m x \sin(2m\pi x) \cosh(2m\pi y) + a_m y \cos(2m\pi x) \sinh(2m\pi y) \geq -|a_m|(|x| + |y|) \cosh(2m\pi y).$$

Portanto, um limitante inferior para

$$2 \sum_{m=1}^k a_m (x \sin(2m\pi x) \cosh(2\pi m y) + y \cos(2m\pi x) \sinh(2m\pi y))$$

é

$$-2(|x| + |y|) \sum_{m=1}^k |a_m| \cosh(2m\pi y). \quad (\text{A.8})$$

**Passo 3:**

Observe que, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $\ell, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
-\cosh(2\ell\pi y) \cosh(2m\pi y) &\leq \sin(2\ell\pi x) \sin(2m\pi x) \cosh(2\ell\pi y) \cosh(2m\pi y) \\
&\leq \cosh(2\ell\pi y) \cosh(2m\pi y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\sinh(2\ell\pi y) \sinh(2m\pi y) &\leq \cos(2\ell\pi x) \cos(2m\pi x) \sinh(2\ell\pi y) \sinh(2m\pi y) \\ &\leq \sinh(2\ell\pi y) \sinh(2m\pi y), \end{aligned}$$

de onde segue-se que a expressão

$$\left| \sin(2\ell\pi x) \sin(2m\pi x) \cosh(2\ell\pi y) \cosh(2m\pi y) + \cos(2\ell\pi x) \cos(2m\pi x) \sinh(2\ell\pi y) \sinh(2m\pi y) \right|$$

é superiormente limitada por  $\cosh(2(\ell + m)\pi y)$ . Portanto, se  $a_\ell a_m \geq 0$  então

$$a_\ell a_m \left( \sin(2\ell\pi x) \sin(2m\pi x) \cosh(2\ell\pi y) \cosh(2m\pi y) + \cos(2\ell\pi x) \cos(2m\pi x) \sinh(2\ell\pi y) \sinh(2m\pi y) \right)$$

é inferiormente limitada por

$$-a_\ell a_m \cosh(2(\ell + m)\pi y). \tag{A.9}$$

Analogamente, se  $a_\ell a_m < 0$ , a expressão [A.9](#) é inferiormente limitada por

$$a_\ell a_m \cosh(2(\ell + m)\pi y).$$

Em qualquer caso

$$-|a_\ell a_m| \cosh(2(\ell + m)\pi y)$$

é um limitante inferior para a expressão [A.9](#).

Das estimativas obtidas nas desigualdades [A.7](#) e [A.8](#), e aquela obtida no passo 3, con-

cluímos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
|E_0(x + iy)|^2 &\geq \left( x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k a_j^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k a_j^2 \cosh(4j\pi y) - \\
&\quad - 2(|x| + |y|) \sum_{m=1}^k |a_m| \cosh(2m\pi y) - \\
&\quad - 2 \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{m=\ell+1}^k |a_\ell a_m| \cosh(2(\ell + m)\pi y)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Para terminar a demonstração obteremos novas estimativas para  $|E_0(x + iy)|^2$ , a partir da desigualdade A.10.

**Passo 4:**

Primeiro é preciso lembrar que, da última parcela no segundo membro da desigualdade A.10,  $m + \ell < 2k - 1$ , de onde segue-se que  $2(\ell + m) \leq 4k - 2$ . Logo,

$$\cosh(2(\ell + m)\pi y) \leq \cosh((4k - 2)\pi y).$$

Tomando-se

$$C_1 := 2 \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{m=\ell+1}^k |a_\ell a_m| > 0,$$

temos a seguinte estimativa:

$$- 2 \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{m=\ell+1}^k |a_\ell a_m| \cosh(2(\ell + m)\pi y) \geq -C_1 \cosh((4k - 2)\pi y) \tag{A.11}$$

**Passo 5:**

Por outro lado, do Corolário 6 obtemos  $a_j^2 \geq a_k^2$  para  $1 \leq j \leq k$ , e com isso

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k a_j^2 \cosh(4j\pi y) \geq \frac{1}{2} a_k^2 \cosh(4k\pi y) \tag{A.12}$$

Relacionadas às desigualdades A.11 e A.12, precisaremos das estimativas a seguir.

**Afirmção 1.** Para todo  $y \in \mathbb{R}$  e qualquer inteiro positivo  $k$ , vale

$$\cosh(4k\pi y) \geq \cosh((4k-2)\pi y) \cosh(2\pi y) \quad (\text{A.13})$$

*Demonstração da Afirmção 1.* Para todo  $y \in \mathbb{R}$  e qualquer inteiro positivo  $k$ , temos:

$$\begin{aligned} & \cosh((4k-4)\pi y) \leq \cosh(4k\pi y) \\ \Leftrightarrow & \cosh(4k\pi y) \cosh(4\pi y) - \sinh(4k\pi y) \sinh(4\pi y) \leq \cosh(4k\pi y) \\ \Leftrightarrow & \cosh(4k\pi y) \cosh(4\pi y) - \cosh(4k\pi y) \leq \sinh(4k\pi y) \sinh(4\pi y) \\ \Leftrightarrow & \cosh(4k\pi y) [\cosh(4\pi y) - 1] \leq \sinh(4k\pi y) \sinh(4\pi y) \\ \Leftrightarrow & \cosh(4k\pi y) [(2 \cosh^2(2\pi y) - 1) - 1] \leq \sinh(4k\pi y) \sinh(4\pi y) \\ \Leftrightarrow & 2 \cosh(4k\pi y) \cosh^2(2\pi y) - 2 \cosh(4k\pi y) \leq 2 \sinh(4k\pi y) \sinh(2\pi y) \cosh(2\pi y) \\ \Leftrightarrow & \cosh(4k\pi y) \cosh^2(2\pi y) - \sinh(4k\pi y) \sinh(2\pi y) \cosh(2\pi y) \leq \cosh(4k\pi y) \\ \Leftrightarrow & \cosh((4k-2)\pi y) \cosh(2\pi y) \leq \cosh(4k\pi y) \end{aligned}$$

□

**Afirmção 2.** Existe  $y_0 \geq 0$  real tal que, para todo inteiro positivo  $k$ ,

$$\frac{1}{2} a_k^2 \cosh(4k\pi y) - C_1 \cosh((4k-2)\pi y) \geq \frac{1}{4} a_k^2 \cosh(2k\pi y) \cosh(2\pi y), \quad (\text{A.14})$$

sempre que  $|y| \geq y_0$ .

*Demonstração da Afirmção 2.* Seja  $y_0$  o menor número real não-negativo tal que

$$\cosh(2\pi y_0) \geq \frac{4C_1}{a_k^2}.$$

Como o cosseno hiperbólico é par e crescente para  $y \geq 0$ , obtemos

$$\frac{1}{2} a_k^2 \cosh(2\pi y) - C_1 \geq \frac{1}{4} a_k^2 \cosh(2\pi y)$$

se  $|y| \geq y_0$ . Juntando-se essa desigualdade com a Afirmção 1, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}a_k^2 \cosh(4k\pi y) - C_1 \cosh((4k-2)\pi y) &\geq \cosh((4k-2)\pi y) \left[ \frac{1}{2}a_k^2 \cosh(2\pi y) - C_1 \right] \\
&\geq \frac{1}{4}a_k^2 \cosh((4k-2)\pi y) \cosh(2\pi y) \\
&\geq \frac{1}{4}a_k^2 \cosh(2k\pi y) \cosh(2\pi y),
\end{aligned}$$

já que  $4k-2 \geq 2k$ . □

**Passo 6:**

Seja  $y_1 := \max \left\{ y_0, 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k a_j^2 \right\}$ . Se  $|y| \geq y_1$  então

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k a_j^2 \geq 0 \tag{A.15}$$

**Passo 7:**

Defina  $C_2 := 2 \sum_{m=1}^k |a_m| > 0$ . Para todo  $y \in \mathbb{R}$  temos:

$$\begin{aligned}
-2(|x| + |y|) \sum_{m=1}^k |a_m| \cosh(2m\pi y) &\geq -2(|x| + |y|) \sum_{m=1}^k |a_m| \cosh(2k\pi y) \\
&= -C_2(|x| + |y|) \cosh(2k\pi y)
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Aplicando-se, agora, as estimativas obtidas nas desigualdades [A.11](#), [A.12](#), [A.15](#) e [A.16](#), na desigualdade [A.10](#), obtemos uma nova estimativa para  $|E_0(x + iy)|^2$ :

$$|E_0(x + iy)|^2 \geq \frac{1}{2}a_k^2 \cosh(4k\pi y) - C_2(|x| + |y|) \cosh(2k\pi y) - C_1 \cosh((4k-2)\pi y)$$

E da Afirmação [2](#) obtemos

$$|E_0(x + iy)|^2 \geq \frac{1}{4}a_k^2 \cosh(2k\pi y) \cosh(2\pi y) - C_2(|x| + |y|) \cosh(2k\pi y),$$

isto é,

$$|E_0(x + iy)|^2 \geq \left( \frac{1}{4} a_k^2 \cosh(2\pi y) - C_2(|x| + |y|) \right) \cosh(2k\pi y). \quad (\text{A.17})$$

Defina  $C_3 := \frac{a_k^2}{4C_2}$  e considere a função  $t \mapsto \varepsilon(t)$  definida por

$$\varepsilon(t) := C_3 \cosh(2\pi t) - t - 1.$$

Essa função  $\varepsilon$  é estritamente convexa e possui um mínimo global em

$$t_0 := \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4\pi^2 C_3^2}}{2\pi C_3} \right) > 0.$$

Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, para cada  $s \geq \varepsilon(t_0)$  existe um único  $\bar{\varphi}(s) \geq t_0$  tal que  $\varepsilon(\bar{\varphi}(s)) = s$ . Como  $\varepsilon$  é estritamente convexa para  $t \geq t_0$ , o mesmo ocorre com  $\bar{\varphi}$  para  $s \geq \varepsilon(t_0)$ , já que

$$\bar{\varphi}''(s) = -[\bar{\varphi}'(s)]^3 \varepsilon''(\bar{\varphi}(s)).$$

Dessa forma, se  $t \geq \bar{\varphi}(s)$  então

$$\varepsilon(t) \geq \varepsilon(\bar{\varphi}(s)) = s.$$

Considere agora a função  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(s) = \begin{cases} \max\{y_1, \bar{\varphi}(s)\}, & \text{se } s \geq \varepsilon(t_0); \\ \max\{y_1, t_0\}, & \text{se } 0 \leq s \leq \varepsilon(t_0). \end{cases}$$

Aumentando  $y_1$  se necessário, suporemos que

$$\exp(2k\pi y_1) > C_2.$$

Essa escolha é para garantir que

$$1 - \sqrt{C_2} e^{-k\pi y_1} > 0.$$

Se  $|y| \geq \varphi(|x|)$  então, da desigualdade A.17,

$$\begin{aligned}
|E_0(x + iy)|^2 &\geq \left( \frac{1}{4} a_k^2 \cosh(2\pi y) - C_2(|x| + |y|) \right) \cosh(2k\pi y) \\
&= \frac{1}{C_2} \left( \frac{a_k^2}{4C_2} \cosh(2\pi y) - |x| - |y| \right) \cosh(2k\pi y) \\
&= \frac{1}{C_2} (C_3 \cosh(2\pi|y|) - |x| - |y|) \cosh(2k\pi y) \\
&\geq \frac{1}{C_2} ((|x| + |y| + 1) - |x| - |y|) \cosh(2k\pi y) \\
&= \frac{1}{C_2} \cosh(2k\pi y)
\end{aligned}$$

de onde segue-se que

$$|E_0(x + iy)| \geq \frac{1}{\sqrt{C_2}} \exp(k\pi|y|)$$

Por outro lado, se  $0 < \omega < 1$  então

$$|E_\omega(z)| = |E_0(z) + \omega| \geq |1 - |E_0(z)|^{-1}| \cdot |E_0(z)|.$$

Portanto, se  $|y| \geq \varphi(|x|)$  temos

$$|E_\omega(x + iy)| \geq \frac{1}{\sqrt{C_2}} \left( 1 - \sqrt{C_2} e^{-k\pi y_1} \right) \exp(k\pi|y|)$$

Para completar a prova, basta tomar

$$C_0 \doteq \frac{1}{\sqrt{C_2}} \left( 1 - \sqrt{C_2} e^{-k\pi y_1} \right).$$

□



# Referências Bibliográficas

- [1] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 3rd Edition, 1978. [5](#)
- [2] L. Antunes, *Comportamento genérico de difeomorfismos do círculo*. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 2012. [3](#)
- [3] A. Ávila, *Dynamics of Renormalization Operators*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, Índia, 2010.
- [4] A. Ávila, *On rigidity of critical circle maps*. Bull. Braz. Math. Soc., New Series 44(4), 611-619, 2013.
- [5] W. Bergweiler, *On the Julia Set of analytic self-maps of the punctured plane*. Analysis 15 (3), 251-256 (1995). [42](#)
- [6] W. Bergweiler, *Iteration of meromorphic functions*. Bull. Am. Math. Soc. 29 (2), 151-188 (1993).
- [7] H. Bock, *On the dynamics of entire functions on the Julia set*. Results in Math. 30, 16-20 (1996). [66](#), [67](#), [69](#)
- [8] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*. Springer-Verlag, New York, 1st Edition, 1995. [18](#)
- [9] A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*. J. Math Pures et Appl., 11, 333-375, (1932). [2](#)
- [10] A. Douady and J. Hubbard *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 18, pp. 287-343, (1985). [5](#)
- [11] P.L. Duren *Univalent Functions*. Springer-Verlag, New York, 1st Edition, 1983. [44](#), [45](#)
- [12] E. de Faria, *Proof of universality for critical circle mappings*. PhD Thesis, CUNY, 1992. [6](#), [9](#), [11](#), [16](#), [19](#), [21](#), [22](#), [31](#), [39](#)
- [13] E. de Faria, *Asymptotic rigidity of scaling ratios for critical circle mappings*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 19, pp 995-1035. [4](#), [5](#), [6](#), [10](#), [16](#), [17](#), [33](#), [37](#), [53](#), [55](#), [71](#)
- [14] E. de Faria, *On conformal distortion and Sullivan's sector theorem*. Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1), 67-74.

- [15] E. de Faria and G. Estevez, *Real bounds and quasisymmetric rigidity for multicritical circle maps*. in preparation. 13
- [16] E. de Faria and P. Guarino, *Real bounds and Lyapunov exponents*. to appear in Discrete and Continuous Dynamical Systems.
- [17] E. de Faria e W. de Melo, *Rigidity os critical circle mappings I*. J. Eur. Math. Soc. 1 (4), 339-392, (1999). 5, 11, 13
- [18] E. de Faria e W. de Melo, *Rigidity os critical circle mappings II*. J. Amer. Math. Soc. 13 (2), 343-370, (1998). 5, 6, 21, 22, 39
- [19] E. de Faria e W. de Melo, *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 115, Cambridge University Press, (2008). 47
- [20] W. de Melo, *Rigidity in Dynamics*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, v. 15, 789-796, (2008). 1, 2
- [21] W. de Melo, *Dynamics on the Circle*. M.M. Peixoto et al. (eds.), Dynamics, Games and Science I, Springer Proceedings in Mathematics 1, (2011). 1, 2
- [22] W. de Melo e S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*. Springer-Verlag, 1993. 2
- [23] W. de Melo, P.A.S. Salomão e E. Vargas, *A full family of multimodal maps on the circle*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., v. 31, n. 05, 1325-1344, (2011). 7
- [24] Saber Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*. Springer UTM, New York, 3rd Edition, 2005. 27
- [25] A. Epstein, L. Keen, C. Tresser, *The Set of Maps  $F_{a,b} : x \mapsto x + a + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x)$  with any Given Rotation Interval is Contractible*. Commun. Math. Phys. 173, 313-333, (1995).
- [26] A. Eremenko, *On the iteration of entire functions*. Dynamical Systems and Ergodic Theory, Banach Center Publ., 23, 339-345, (1989). 43
- [27] A. Eremenko, M. Lyubich *Dynamical properties of some classes of entire functions*. Ann. Inst. Fourier, 42 (4), 1-32, (1992). 42
- [28] N. Fagella, *Dynamics of the Complex Standard Family*. J. Math. Anal. Appl. 229(1), 1-31, 1999. 8
- [29] F. Liping, *On the Iteration of Holomorphic Self-Maps of  $\mathbb{C}^*$* . Acta Mathematica Sinica. 14(1), 139-144, 1998. 9, 43
- [30] L. Goldberg, L. Keen, *A finiteness theorem for a dynamical class of entire functions*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 6, 183-192, (1986). 42
- [31] P. Guarino *Rigidity conjecture for  $C^6$  critical circle maps*. Doctoral Thesis, IMPA-RJ, 2013. 6
- [32] P. Guarino *Rigidity of smooth critical circle maps*. available at arXiv:1303.3470.
- [33] P. Guarino *Some topological and geometrical aspects of circle dynamics*. Cadernos de Matemática, 16, 62-92, (2015). 3, 4, 6

- [34] P. Guarino, M. Martens and W. de Melo, *Rigidity of critical circle maps: unbounded combinatorics*. in preparation. 6
- [35] G.R. Hall, *A  $C^\infty$  Denjoy counterexample*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 1, 261-272, (1983). 4
- [36] M. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations*. Publ. Math. I.H.E.S. 49 (1979), 5-233. 2, 3, 52
- [37] V. Jarnik, *Diophantischen Approximationen und Hausdorffsches Mass*. Mat. Sbornik, 36, 371-382, (1929). 3
- [38] Y. Katznelson and D. Ornstein, *The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 4(9), 643-680, (1989). 4, 5
- [39] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. 2, 52
- [40] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*. Dover Publications, Inc., 1997. 3
- [41] M. Kisaka, *On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 18, 189-205, (1998).
- [42] L. Keen, *Dynamics of holomorphic self-maps of  $\mathbb{C}^*$* . Holomorphic Functions and Moduli I. Eds D. Drasin *et al* Springer, New York, 1988. 42
- [43] L. Keen, *Topology and growth of a special class of holomorphic self-maps of  $\mathbb{C}^*$* . Ergod. Th. & Dynam. Sys., 9 (2), 321-328, (1989). 41, 42
- [44] J. Kotus, *Iterated Holomorphic Maps On The Punctured Plane*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Volume 287, Springer Berlin Heidelberg, 1987, pp 10-28. 42
- [45] K. Khanin, A. Teplinsky, *Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities*. Invent. Math., 169, 193-218, (2007). 5
- [46] D. Khmelev and M. Yampolsky, *The rigidity problem for analytic critical circle maps*. Mosc. Math. J., 6(2), 317-351, (2006).
- [47] O.E. Lanford, *Renormalization group methods for circle mappings*. Nonlinear Evolution and Chaotic Phenomena (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B: Phys., 176). Plenum, New York, 1988, pp 25-36. 5
- [48] R.S. MacKay, *A simple proof of Denjoy's theorem*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 103, 299-303, (1988). 2
- [49] C. McMullen, *Area and Hausdorff dimension of the set of Julia sets of entire functions*. Trans. Amer. Math. Soc., 300, 329-342, (1987). 9, 47, 48, 49, 57
- [50] C. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*. Ann. of Math. Stud., 135, Princeton Uni. Press, Princeton, (1994). 8
- [51] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*. Annals of Mathematics Studies 160, Princeton University Press, Princeton, NJ, 3rd Edition, 2006. 41, 42

- [52] S. Morosawa, M. Taniguchi, Y. Nishimura, T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 66, Cambridge University Press, 1st Edition, 2000.
- [53] H. Poincaré, *Memoire sur les courbes definies par une équation differentielle, III* J. Math. Pures et Appl., 1, 167-244, 1885. 1
- [54] L. Rempe-Gillen, S. van Strien, *Density of hyperbolicity for classes of real transcendental entire functions and circle maps*. Duke Math. J. 164(6), 1079-1137, 2015. 7, 8
- [55] D. Rand, *Existence, non-existence and universal breakdown of dissipative golden invariant tori. I. Golden critical circle mappings*. Nonlinearity 5, 639-662, 1992. 5
- [56] H. Schubert, *Area of Fatou sets of trigonometric functions*. Proc. Am. Math. Soc. 136(4), 1251-1259, 2008. 9, 47, 48, 57
- [57] D. J. Sixsmith, *Julia and escaping set spiders' webs of positive area*. Preprint, arXiv:1309.3099v1 (2013). 49
- [58] Ya. G. Sinai and K.M. Khanin, *Smoothness of conjugations of circle diffeomorphisms with rotations*. Usp. Mat. Nauk, 1(44), 57-82, (1989). 4
- [59] R. J. Spatzier, *An invitation to rigidity theory*. Modern dynamical systems and applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, pp. 211-231. 1
- [60] D. Sullivan, *Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures*. AMS Centennial Publications, (2), Mathematics into Twenty-first Century, 1992. 4, 5
- [61] D. Sullivan, *Reminiscences of Michael Herman's first great theorem*. Gaz. Math., n. 88 (2001). Société Mathématique de France, Paris, pp. 91-94, (2001).
- [62] O. Yu. Teplinsky, *On the smoothness of conjugation of circle diffeomorphisms with rigid rotations*. Ukrainian Math. J., 2(60), 310-326, (2008). 4
- [63] M. Yampolsky, *Complex bounds for renormalization of critical circle maps*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 19, 227-257, (1999). 5, 22
- [64] M. Yampolsky, *Hyperbolicity of renormalization of critical circle maps*. Publ. Math. IHES, 96, 1-41, (2002).
- [65] M. Yampolsky, *Renormalization horseshoe for critical circle maps*. Commun. Math. Phys., 240, 75-96, (2003)
- [66] J.C. Yoccoz, *Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique*. C.R. Acad. Sc. Paris, 298, 141-144, (1984). 4, 52
- [67] J.C. Yoccoz, *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 17, no. 3, 333-359, (1984). 3