Sobre uma conjectura de E. De Giorgi

João Fernando da Cunha Nariyoshi

Dissertação
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Mestrado em Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2017

Sobre uma conjectura de E. De Giorgi

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 20/02/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes - IME-USP
- Prof. Dr. Gaetano Siciliano - IME-USP
- Prof. Dr. Olivaine Santana de Queiroz - Unicamp

Agradecimentos

In many years from now
Someone will find my ship
Someone will see my body in it
And see the smile on my face

Coroner. "Voyage to Eternity". *Punishment to Decadence*. Noise Records, 1988. CD.

Certamente a redação desta monografia não poderia ter sido realizada sem a ajuda de várias pessoas. Mesmo sob o risco de cometer o pecado de omitir um nome, sinto-me obrigado a homenagear alguns anjos na minha vida.

Primeiro, gostaria de reconhecer o amor que recebo fiel e imerecidamente pela minha família – particularmente pelo meu pai Fernando, meu irmão Pedro, minha cunhada Esther e pela minha sobrinha Alice.

Também devo agradecer aos meus "alguns milhões de amigos"– em especial a Luiz Fernando, Marcelo, Pietro e Vitor Yasu.

É com muita honra que gratifico um dos meus heróis musicais, Ron "Royce" Broder, baixista e vocalista da banda **Coroner**, por me conceder pessoalmente a letra da faixa "The Favorite Game" (curiosamente, a minha favorita do trio). Se este meu texto possui alguma qualidade, é porque ele foi redigido quase que unicamente ao som dos deuses do Heavy Metal *avant-garde*! Para retribuir, embora parcialmente, o presente, resolvi incluir citações de algumas das melhores canções do Coroner.

A pessoa mais importante, no entanto, decidi gratular por último: o prof. Orlando Lopes, a quem também dedico esta obra. Não poderia ter pedido por um orientador melhor (e com um melhor gosto para filmes).

Esta dissertação foi escrita durante o ano de 2016, amplamente considerado como o pior ano dos tempos recentes. Por mais que eu entenda este sentimento, peço para discordar. Assistindo ao desmoronamento de nossa decadência, vim a perceber que este espetáculo excêntrico não conta a história completa sobre nós, pois se esquece completamente da pureza incorruptível vive dentro de cada um – pureza esta que é sempre lembrada, mas que ainda permanece desconhecida. Não é tarde para se ressuscitar; pelo contrário, o tempo se cumpriu.

O autor recebeu auxílio financeiro do CNPq durante o desenvolvimento do presente trabalho.

João Fernando da Cunha Nariyoshi
São Paulo
Fevereiro de 2017

“I sat before the wise man
In the autumn of my youth…”
Ao professor Orlando Lopes.

And fire lightens the scene
Makes tragedy look beautiful
A scavenger shadow sort remains
In black gasoline smoke

From leaves drops liquid sorrow
Swallowed by deadend fields
And the soft voice of reason
shattered by polished grenades

And our princess future
Fades out in black
Into the same eternal winter
Seizes the land we leave

Children left without an answer
Shoved into a game of fear
And a mute world that is watching
As all of us are going down

Star shells cut the red night sky
Raining fire up to heaven
Painting pictures in a frenzy
Leaving scars in angels faces

Where. . .
Where do I. . .
Where do I belong?

Coroner. “The Favorite Game”. *Coroner*. Noise Records, 1995. CD.

Resumo

NARIYOSHI, J. F. C. **Sobre uma conjectura de E. De Giorgi**. 2017. 101 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Esta monografia estuda uma recente prova de E. Serra e P. Tilli a uma conjectura de E. De Giorgi, segundo a qual se poderia obter soluções da equação de onda não-linear $\Box u + |u|^{p-1}u = 0$ como limites de minimizadores de funcionais convexos. Essa descoberta constrói uma inesperada e nova ponte entre equações de evolução complicados e problemas variacionais elementares. Além de tal demonstração, são discutidos alguns aspectos da teoria das equação da onda não-lineares e expostas generalizações deste novo método variacional a certas equações hiperbólicas e parabólicas. Uma breve introdução aos espaços de Lebesgue com valores em um espaço de Banach foi acrescida para fins de autossuficiência.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais, cálculo de variações, equações de evolução, equação da onda, equação do calor.

Abstract

NARIYOSHI, J. F. C. **On a conjecture of E. De Giorgi**. 2017. 101 p. Thesis (Master's Degree) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

This monography studies a recent proof from E. Serra and P. Tilli of a conjecture of E. De Giorgi, according to which one could obtain solutions of the nonlinear wave equation $\Box u + |u|^{p-1}u = 0$ as limits of minimizers for convex functionals. This breakthrough builds an unexpected and new bridge between hard evolution equations and rather painless variational problems. Besides the mentioned proof, some elements of the theory of the nonlinear waves equations are discussed and generalizations of this method to certain hyperbolic and parabolic equations exposed. A brief introduction to the vector-valued Lebesgue spaces was added for the sake of completeness.

Keywords: partial differential equations, calculus of variations, evolution equations, wave equation, heat equation.

Sumário

Capítulo 1

Motivação

A thousand souls are waiting, for a day that never comes
A thousand eyes still closed, cause they're afraid to see the world
Two thousand hands are bound, with golden chains they bought themselves
Two thousand legs can't walk, cause they never learned to move

A thousand hearts are bleeding, despite the nails of unknown pain
A thousand heads are bowed, pray for mercy, pray for gold
Two thousand feet are stumbling, on the roads that lead nowhere
Two thousand ears are deaf, from the noise of luxury

Don't you know you keep the nature chained in dungeons black as coal?
Don't you know you adore an eagle with broken wings,
Roses that never bloom, wheels that never spin,
Bells that never ring, hands too far to reach?

Coroner. "The Lethargic Age". *Grin*. Noise Records, 1993. CD.

1.1 A conjectura de De Giorgi e sua relevância

Um fato muito bem conhecido, mas cuja explicação racional parece superar a compreensão humana, é de que diversos fenômenos naturais podem ser descritos por meio de princípios variacionais.[1] Este inesgotável enigma deu origem a uma série de *Weltanschauungs* importantes, que vão desde o sistema filosófico de G. W. Leibniz até a teoria eletrodinâmica de R. P. Feynman (veja, e.g., I. Ekeland (2006)).

O motivo do estarrecimento é o seguinte. Princípios variacionais, em uma linguagem imprecisa, e de fato incorreta, asserem que "a Natureza age do melhor modo possível". Evidentemente a noção de "melhor" varia de situação para situação: o exemplo primordial, conhecido por "princípio de Fermat", diz que os raios luminosos entre dois pontos sempre percorrem o caminho mais rápido. Neste caso, portanto, a noção de melhor seria a de minimizar o tempo gasto.

Apesar de hoje se saber que essa ideia de "melhor modo possível" nem sempre é verdadeira, possuímos uma formulação mais rigorosa, mas igualmente misteriosa, dos princípios variacionais. Em certos sistemas físicos descritos por equações diferenciais, é possível se introduzir um funcional chamado "ação", que possui a forma $I(u) = \int L dt$, onde a função L é o chamado lagrangeano. Em mecânica, $L(u)$ geralmente expressa a diferença entre a energia cinética e potencial de u; para o caso dos raios luminosos, $I(u)$ é o tempo gasto para a luz percorrer uma trajetória u em um certo meio conhecido. O princípio variacional então afirma é que as

[1]Esta afirmação é de V. I. Arnold (2003), donde se baseia parte da discussão desta seção.

soluções u destas equações (i.e., as configurações possíveis do sistema físico), são os pontos críticos de I; ou seja, aqueles sobre os quais a variação infinitesimal de I é nula. Por isto, se entende que $\frac{d}{d\varepsilon}I(u+\varepsilon\phi)_{|\varepsilon=0} = 0$ para uma classe conveniente de funções-teste ϕ. Na nomenclatura clássica do Cálculo de Variações, a equação diferencial original é chamada de "equação de Euler" para o funcional I.

Informalmente, a versão moderna do princípio variacional diz que na verdade não é sempre que a Natureza minimiza quantidades, mas esta invariavelmente "deriva e iguala a zero". Em particular, se u é um mínimo para I, então u é solução do sistema físico, generalizando o princípio prévio.

Do ponto de vista do matemático, argumentos variacionais têm um papel central no estudo das equações diferenciais da Física. De suas finalidades, são de especial importância os chamados princípios de Dirichlet e o de Noether.

O primeiro foi originalmente descoberto independentemente em meados do século XIX por tanto C. F. Gauss e G. L. Dirichlet. Ele se aplicava ao problema de contorno para a equação de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ e $f \in C(\overline{\Omega})$. Este tipo de equação surge espontaneamente no estudo de potenciais eletrostáticos e gravitacionais e, exceto para casos especiais de Ω, não é imediato saber se tem de fato solução. Gauss e Dirichlet observaram no entanto que as soluções $u \in C^2(\overline{\Omega})$ podiam ser caracterizadas como mínimos do funcional

$$I(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x) \right\} dx \tag{1.1}$$

na classe das funções em $C^2(\overline{\Omega})$ que se anulam em $\partial\Omega$. (Isto decorre facilmente do teorema do divergente). Por sua vez, este funciona quantifica a energia potencial do problema estacionário (1.1) e é limitado inferiormente. Isto os levou a concluir, por via de premissas puramente heurísticas, que de fato o ínfimo de (1.1) era atingido, consequentemente comprovando a existência da desejada solução.

Este formidável argumento, infelizmente, estava aquém do rigor matemático da então recém-nascida Análise Matemática e foi golpeado fatalmente por K. Weierstrass, ao exibir um simples funcional limitado inferiormente mas sem ponto de mínimo. Todavia, após anos em desgraça, o princípio de Dirichlet foi finalmente redimido no começo do século XX por D. Hilbert. Seu método consistia em estender a noção de solução para um contexto abstrato propício no qual problema de minimização fazia sentido e depois provar que tal função generalizada cumpria (1.1) em seu significado original; veja, z. B., F. John (1994) ou, para um tratamento mais moderno, H. Brezis (2011).

Desde então, a conexão entre problemas elípticos e o Cálculo de Variações se tornou uma ativa área de pesquisa matemática, tendo fantástico êxito no estudo de problemas elípticos não-lineares como

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= |u(x)|^{p-1}u(x) && \text{se } x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

para um certo expoente $p > 1$. O funcional relacionado

$$I(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - \frac{1}{p+1}|u(x)|^{p+1} \right\} dx. \tag{1.3}$$

é ilimitado inferiormente e superiormente, porém seu comportamento pode ser muito bem descrito tanto perto da origem, quanto perto do infinito. Disto uma elegante teoria, chamada de *métodos minimax*, permite provar a existência de soluções para problemas como (1.2); veja, e.g., P. H. Rabinowitz (1986).

A outra técnica variacional citada, o princípio de Noether, se aplica a uma outra classe de problemas e tem uma diferente finalidade. Este teorema afirma que se o funcional ação é invariante por uma família de transformações, seus pontos críticos satisfazem uma lei de conservação. Um modelo a se ter em mente é equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = (\Delta u)(t,x), \tag{1.4}$$

a qual, ao menos formalmente, é a equação de Euler para o funcional

$$I(u) = \int\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right)^2 - |\nabla u(t,x)|^2 \right\} dx dt. \tag{1.5}$$

(observe que o lagrangeano é, de fato, a diferença entre a energia cinética e potencial de u. Quando dizemos formalmente é porque há a priori nenhuma razão para se achar que esta integral é convergente). Uma vez que este funcional é invariante pelo chamado grupo de Poincaré (que consiste de translações no espaço-tempo e transformações de Lorenz, ou rotações hiperbólicas), há uma série de quantidades preservadas por soluções de (1.4), das quais a conservação da energia é um caso particular. Essas e outras identidades são indispensáveis para se investigar a geometria das equações hiperbólicas; consulte, *e.g.*, J. Shatah–M. Struwe (2000) e W. A. Strauss (1990).

Apesar de tanto (1.1) e (1.4) possuírem uma formulação variacional, cada um o interpreta distintamente, pois os funcionais de (1.1) e de (1.5) são estruturalmente muito diferentes. Com efeito, a ação em (1.5) da equação da onda não é limitado inferior nem superiormente, não possui propriedades de convexidade ou concavidade, não tem crescimento perto da origem e perto do infinito facilmente estimados. Portanto, são raramente empregados métodos variacionais na prova da existência de soluções para (1.4).

Não obstante, o célebre matemático italiano E. De Giorgi formulou uma alternativa para esse empecilho funcional na seguinte conjectura.

Conjectura 1.1.1. *Seja $k \geq 1$ um inteiro. Para todo $\varepsilon > 0$, seja $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \mapsto u_\varepsilon(t,x)$ o mínimo do funcional*

$$F_\varepsilon(v) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,x) \right)^2 + \frac{1}{2}|\nabla v(t,x)|^2 + \frac{1}{2k}|v(t,x)|^{2k} \right\} dx dt \tag{1.6}$$

sujeito às condições iniciais

$$v(0,x) = \alpha(x), \ \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = \beta(x), \ x \in \mathbb{R}^N \tag{1.7}$$

onde $\alpha, \beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ são funções dadas. Então, existe o limite

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} u_\varepsilon(t,x)$$

e este soluciona em $(0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ a equação da onda não-linear

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) + u(t,x)^{2k-1} = 0 \tag{1.8}$$

sujeito às condições de fronteira (1.7).

A justificativa intuitiva desta questão é a seguinte. Realizando os cálculos formais, não é difícil verificar que a equação de Euler de (1.6) é

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - 2\varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u^{2k-1}.$$

Passando ε a zero, esta equação se transforma em exatamente (1.8). Crucial aqui é que F_ε é estritamente convexo, não-negativo e, na topologia adequada, é coercivo, de modo que a existência e unicidade do mínimo u_ε apresentam nenhuma dificuldade.

A importância dessa conjectura jaz no fato de que, se verdadeira, ela construiria uma nova e inesperada conexão entre equações de evolução difíceis tal qual (1.8) e o Cálculo de Variações. Nas palavras do destacado analista estadunidense L. Nirenberg, ela "*suggests a very interesting approach for solving interesting for* *solving initial value problem for the wave equation with a nonlinear term involving a power of the function via a minimization problem* $\{\dots\}$."[2]

Assim, o resultado que inspira a elaboração da presente dissertação é a seguinte resposta essencialmente afirmativa publicada por E. Serra e P. Tilli (2012) no prestigiado periódico *Annals of Mathematics*:[3]

Teorema 1.1.1. *Seja $p \geq 1$ um número real. Para todo $\varepsilon > 0$, seja $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \mapsto u_\varepsilon(t,x)$ o mínimo de*

$$F_\varepsilon(v) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,x) \right)^2 + \frac{1}{2} |\nabla v(t,x)|^2 + \frac{1}{p+1} |v(t,x)|^{p+1} \right\} dx dt \tag{1.9}$$

com condições iniciais (1.7), onde

$$\alpha, \beta \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N). \tag{1.10}$$

Então, toda sequência $\varepsilon_n > 0$ tendendo a 0, contém uma subsequência ε_n' para a qual $u_{\varepsilon_n'}$ converge a $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ nos seguintes sentidos:

$$u_{\varepsilon_n'} \to u \text{ fortemente em } L^q\big((0,T) \times \Omega\big) \text{ para todos } q \in [1,2] \cup [1, p+1), \tag{1.11}$$
$$\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N \text{ e } T > 0;$$
$$u_{\varepsilon_n'} \rightharpoonup u \text{ fracamente em } H^1\big((0,T) \times \mathbb{R}^N\big) \text{ para todo } T > 0; \tag{1.12}$$
$$u_{\varepsilon_n'} \to u \text{ em quase todo } t > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N.$$

Esta função limite u é ainda mais uma solução fraca de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^{p-1} u = 0 \tag{1.13}$$

sujeito as condições iniciais (1.7) e satisfazendo as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty\big((0,\infty); L^{p+1}(\mathbb{R}^N)\big), \\ u &\in L^\infty_{loc}\big((0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N)\big), \\ \nabla u &\in L^\infty\big((0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N)\big)^N, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\in L^\infty\big((0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N)\big), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\in L^\infty\big((0,\infty); (H^{-1} + L^{(p+1)'})(\mathbb{R}^N)\big). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ademais, vale a desigualdade de energia: se

$$e(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right)^2 + \frac{1}{2} |\nabla u(t,x)|^2 + \frac{1}{p+1} |u(t,x)|^{p+1} \right\} dx$$

então

$$e(t) \leq e(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} |\beta(x)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \alpha(x)|^2 + \frac{1}{p+1} |\alpha(x)|^{p+1} \right\} dx$$

para quase todo $t > 0$.

Esclarecemos este teorema. Em primeiro lugar, enquanto a conjectura original se referia apenas a expoentes naturais ímpares e com dados iniciais muito suaves, o resultado de Serra e Tilli permite que o expoente seja qualquer real maior ou igual a 1 e que os dados estejam no espaço sensivelmente maior $H^1 \cap L^{p+1}$. É evidente também o funcional em (1.9) é apenas a tradução de (1.6) para este contexto mais geral.

[2]A conjectura de De Giorgi apareceu primeiramente em De Giorgi (1996), mas também se encontra, traduzido ao inglês, na coletânea De Giorgi (2006) junto com o comentário citado de Nirenberg. De Giorgi formulou esta conjectura inspirado pelo trabalho de T. Ilmanen (1994) acerca da regularização elíptica e aplicações a geometria.

[3]Notemos que U. Stefanelli (2011) já havia feito progresso nessa conjectura. Entretanto seu método era mais complicado e o resultado mais fraco. Veja também o artigo de M. Liero e U. Stefanelli (2013) para uma aplicação em Mecânica Lagrangeana.

Apesar de o limite de fato existir, não se sabe se é único, como almejava a conjectura original. No entanto, em dimensão 1 e 2 ou para $p \leq \frac{N+2}{N-2}$ quando $N \geq 3$, é possível se provar que só há uma solução para (1.13). Nestes casos então a hipótese de De Giorgi é verdadeira.

Ainda assim, mesmo para p suficientemente grande, o teorema não apenas fornece uma solução global, mas uma com um certo grau de regularidade, que é a desigualdade de energia. Esse tipo de propriedade parece estar intimamente ligada com problemas de unicidade, como será discutido durante o texto.

Tal como imaginado por De Giorgi, o método empregado por Serra e Tilli depende somente de estimativas *a priori* relacionadas ao funcional (1.9) e portanto pode ser estendido para outras equações (como as de Klein-Gordon), condições de contorno etc. Por tal motivo, este argumento, de indiscutível beleza e simplicidade, já garantiu seu lugar nas crônicas matemáticas e poderá ser de grande relevância no futuro.

1.2 Organização do trabalho

Foi composto este texto como se segue.

No capítulo inicial, fazemos uma breve introdução aos espaços L^p de um intervalo de números reais a um espaço de Banach, que serão de fundamental importância no palco abstrato por trás do teorema 1.1.1. Em especial, damos ênfase a diferentes perspectivas aos espaços de Sobolev que essa nova teoria proporciona.

Em seguida, nos ocuparemos ativamente em provar detalhadamente o teorema central da dissertação. A demonstração aqui exposta será parcialmente influenciada por um segundo artigo de Serra e Tilli (2016) que apresenta tal resultado como produto de um esquema mais geral.

A segunda parte do trabalho é dividido em três partes cujos conteúdos disjuntos. Na primeira apresentamos a generalização desse método variacional para uma classe de equações hiperbólicas. Depois, comparamos o resultado de Serra e Tilli com a teoria das equações não-lineares da onda, que foi alvo de grande desenvolvimento entre as décadas de 1960 e 1990. Por último, mostramos uma adaptação a conjectura de De Giorgi para problemas parabólicos.

Para a conveniência do leitor, alguns fatos usados dispersadamente ao longo da dissertação sobre espaços de Sobolev foram demonstrados no apêndice A.

1.3 Notações

Fixemos certas notações, algumas destas já adotamos no texto acima.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto não-vazio e $0 < T \leq \infty$. Dada uma função $u : (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, denotaremos por $D_0 u = \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u} = u_t$ e $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$ para $1 \leq i \leq N$, sejam estas derivadas no sentido clássico, sejam no fraco. Analogamente, escreveremos $\ddot{u} = D_0^2 u = u_{tt}$, $D_{ij}^2 = D_i D_j$ para $0 \leq i, j \leq N$ etc. Às vezes, será cômodo usar a notação de L. Schwartz: se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ é um multi-índice em $\mathbb{R}^N$, $D^\alpha u$ simboliza o operador diferencial $D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N} u$. Ao contrário do caso anterior no entanto, estas derivadas são todas em respeito a x.

Naturalmente, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right)$ será o operador de Hamilton, enquanto $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$ denotará o de Laplace, ou simplesmente laplaciano, na variável espacial $x \in \mathbb{R}^N$. Outra transformação que nos será útil a de D'Alembert, ou d'alembertiano, dado por $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$.

Se E for um espaço de Banach, sua norma será denotada por $\|\ \|_E$ ou por $\|\ \|$ se não houver perigo de confusão. Por $\langle\ ,\ \rangle_{E^*,E}$, ou $\langle\ ,\ \rangle$, entenderemos o produto da dualidade entre E e seu dual E^*: $\langle f, x\rangle = f(x)$, $\forall f \in E^*$ e $x \in E$. Especialmente, quando E for hilbertiano, se optará por $|u| = \|u\| = (u,u)^{1/2}$, onde $(\ ,\ ) = (\ ,\ )_E$ é o produto escalar em E. Em particular, se $v = (v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$, $|v|^2 = \sum_{i=1}^N v_i^2 = v \cdot v$. Todos os espaços encontrados serão reais.

$L^p(\Omega; E)$ e $W^{m,p}(\Omega; E)$ denotarão, respectivamente, os espaços de Lebesgue e Sobolev de "funções" de Ω (com a medida de Lebesgue) a valores em um espaço de Banach E. O conhecimento do caso em que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $E = \mathbb{R}$, no nível de como está em H. Brezis (2011), será presumido. Nesta situação prefere-se também escrever $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$. Se ainda $\Omega = \mathbb{R}^N$, que será o caso mais frequente, será comum simplesmente pôr L^p e $W^{m,p}$. Para $p = 2$, se costumará chamar $W^{m,2}(\Omega; E) = H^m(\Omega; E)$.

Ainda no contexto de espaços de Lebesgue, sempre que $p \geq 1$, p' denotará o seu conjugado, i. e., o único número real estendido para o qual vale $1/p + 1/p' = 1$. Identicamente, escreveremos o expoente crítico de Sobolev p^* como $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, se $1 \leq p < N$.

Outros espaços que surgirão naturalmente nas discussões são os clássicos $C^k(\Omega; E)$ das funções k vezes continuamente diferenciáveis de Ω em E, e $C_c(\Omega; E)$ das contínuas que têm suporte compacto. Deste modo, põe-se $C_c^k(\Omega; E) = C^k(\Omega; E) \cap C_c(\Omega; E)$. Se uma função $u \in C^k(\Omega; E)$ é tal que suas derivadas até ordem k se estendem continuamente em $\overline{\Omega}$, escreveremos que $u \in C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$. Novamente, será normal escrever $C^k(\Omega) = C^k(\Omega; \mathbb{R})$, $C_c(\Omega) = C_c(\Omega; \mathbb{R})$ e assim por diante. Analogamente, se omitirá Ω quando este for o espaço todo $\mathbb{R}^N$. Desta maneira, C_c^∞ é o tradicional das funções-teste da teoria de distribuições.

Em alguns momentos, utilizaremos argumentos baseados na *transformada de Fourier*. Adotamos portanto a notação $(\mathfrak{F} f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$, se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Evidentemente, estendemos esta transformação para L^2 (através do teorema de Plancherel) e para o espaço das distribuições temperadas (por dualidade). Caso $f = f(t,x)$, escreveremos $\widehat{f}(t,\xi) = (\mathfrak{F} f(t))(\xi)$, que é formalmente $\int_{\mathbb{R}^N} f(t,x) e^{-ix\cdot\xi} dx$. Para os resultados básicos da Análise Harmônica, definição dos espaços H^s para s real etc., veja, *e.g.*, F. Linares–G. Ponce (2009), J.-L. Lions–E. Magenes (1972), W. Rudin (1991) ou L. Tartar (2007).

Mais uma noção que também usaremos constantemente é a de *funcional de Neminski*, que é essencial no estudo das equações não-lineares. Uma das melhores referências é o livro de D. de Figueredo (1989).

Dados dois abertos ω e Ω em $\mathbb{R}^N$, se dirá que ω está FORTEMENTE CONTIDO em Ω, simbolicamente $\omega \subset\subset \Omega$, caso $\overline{\omega} \subset \Omega$ e $\overline{\omega}$ for compacto.

Finalmente, por C em geral se entenderá uma constante genérica > 0. Para explicitar do que depende C, escreveremos $C = C(*, \ldots, *)$, onde os termos em asterisco são as variáveis em questão. Adotaremos a convenção de que esta constante C pode mudar de linha para linha.

Daqui em diante, N será um inteiro ≥ 3. Apesar de a teoria deste texto valeria também para $N = 1$ e $N = 2$ com adaptações evidentes, esta inclusão trivial desuniformalizaria a apresentação dos teoremas.[4]

[4]A diferença é que quando $N \geq 3$, o expoente crítico de Sobolev 2^* está bem definido e é finito. Assim, as desigualdades de Sobolev para $N = 1$ e $N = 2$ são mais fortes, o que por sua vez beneficia as conclusões de alguns teoremas específicos.

Capítulo 2

Os espaços de Lebesgue $L^p(I;E)$

Children, fragile minds beware
This world is about to cut your hair
This world is about to bleach your skin
This world is about to lock you in

Gentle, fragile minds beware
This world will appear, cold and bare
This world wants to eat all of your dreams
But there is more than what it seems

Children, fragile minds beware
Sun is about to disappear
Concrete is danger over here
Now leave that place, mayhem and fear

Coroner. "Caveat (To The Coming)". *Grin*. Noise Records, 1993. CD.

Neste capítulo inicial, apresentaremos os rudimentos da teoria dos espaços de Lebesgue com valores em um espaço de Banach. A discussão será focada somente no caso em que o domínio de integração é um intervalo dos números reais, já que, além de ser protagonista na teoria das equações de evolução e dispensar algumas tecnicalidades, é a única situação encontrada nesta monografia. O tratamento aqui exposto é parcialmente baseado nas obras de H. Brezis (1973), Th. Cazenave–A. Haraux (1999) e K. Yosida (1980), onde o leitor pode se aprofundar no tema.

Sejam portanto $I \subset (-\infty, \infty)$ um intervalo aberto não-vazio e E um espaço de Banach abstrato.

2.1 A integral de Bochner

Previsivelmente, esses espaços L^p têm em sua essência a noção de limite advinda de uma integral, conceito que ainda deve ser introduzido uma vez que os integrandos serão funções em espaços normados completos sem *a priori* nenhuma outra estrutura. Para tal finalidade reproduziremos a construção da integral de Lebesgue, evitando no entanto o uso de propriedades genuinamente exclusivas de quando o contra-domínio são os números reais.

Uma função $s : I \to E$ é chamada SIMPLES se admitir uma representação do tipo

$$s(t) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha 1_{X_\alpha}(t) \tag{2.1}$$

para todo $t \in I$, onde $a_\alpha \in E$, A é uma família finita de índices, e, para $\alpha \in A$, $X_\alpha \subset I$ é um conjunto mensurável (à Lebesgue), para a qual $1_{X_\alpha} : I \to (-\infty, \infty)$ é a função característica.

Agora, uma aplicação $u : I \to E$ é dita (FORTEMENTE) MENSURÁVEL se houver uma seqüência de funções simples $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s_n(t) \to u(t)$ para quase todo $t \in I$. Isto evidentemente estende a noção usual (veja, e.g., W. Rudin (1976), teorema 11.20). Note que a classe das funções mensuráveis é fechada pelas operações algébricas de soma de aplicações e multiplicação por escalar, além de incluir as funções contínuas de I a E.

A definição acima, baseada no conceito de densidade, é muito conveniente para operações com integração, mas aparenta ser de difícil verificação. Felizmente existe um critério muito prático devido a B. J. Pettis.

Denomina-se uma função $u : I \to E$ FRACAMENTE MENSURÁVEL se, para qualquer $f \in E^*$, $t \in I \mapsto \langle f, u(t)\rangle$ for mensurável (à Lebesgue); e também será dita DE IMAGEM QUASE SEPARÁVEL caso haja um conjunto de medida nula $N \subset I$ para o qual $u(I \setminus N)$ for separável. Com isto, podemos enunciar:

Teorema 2.1.1 (Pettis)**.** *Uma função $u : I \to E$ é mensurável se, e somente se, for fracamente mensurável e de imagem quase separável.*

Ademais, se u for mensurável, $t \in I \mapsto \|u(t)\| \in \mathbb{R}$ será mensurável.

Note que a condição de imagem quase separável é redundante quando E for um espaço separável. A demonstração da parte da necessidade no teorema acima é imediata, enquanto a suficiência é mais delicada, já que depende de se fazer uma aproximação de E por subespaços de dimensão finita. O lema crucial é o seguinte:

Lema 2.1.1. *Se M for um espaço de Banach separável, M^* na topologia fraca-$*$ $\sigma(M^*, M)$ possui um conjunto enumerável denso.*

Demonstração. Escolhendo (x_k) uma sequência densa em M, seja, para todo inteiro $n \geq 1$, M_n o subespaço gerado por $x_1, \ldots, x_n$. Como cada M_n é de dimensão finita, M_n^* também é e, por conseguinte, é separável. Podemos assim construir uma sequência $(f_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ densa em M_n^*. Aplicando o teorema de Hahn-Banach, estenda cada $f_{n,k}$ a um funcional $\varphi_{n,k}$ em M^* com $\|\varphi_{n,k}\|_{M^*} = \|f_{n,k}\|_{M_n^*}$. Provemos agora que $D = \cup_{n,k=1}^{\infty}\{\varphi_{n,k}\}$ satisfaz as condições desejadas.

Esta tarefa é claramente mesmo que demonstrar que, dado $\psi \in M^*$, se pode tomar uma sequência (ψ_n) em D tal que $\langle \psi_n, x\rangle \to \langle \psi, x\rangle$ para todo $x \in M$. É isto que faremos no próximo parágrafo.

Dado que cada $\psi_{|M_n}$ é um elemento de M_n^*, tome um k_n satisfazendo $\|f_{n,k_n} - \psi_{|M_n}\|_{M_n^*} < 1/n$. Ponha portanto $\psi_n = \varphi_{n,k_n}$. Para todo x_l fixado, $|\langle \psi_n, x_l\rangle - \langle \psi, x_l\rangle| \leq \|f_{n,k_n} - \psi_{|M_n}\|_{M_n^*}\|x_l\|_M \to 0$ quando $n \to \infty$. Mais ainda, como $\|\psi_n\|_{M^*} = \|f_{n,k_n}\|_{M_n^*} \leq \|\psi_{|M_n}\|_{M_n^*} + 1/n \leq \|\psi\|_{M^*} + 1/n$, a sequência (ψ_n) é uniformemente limitada. A conclusão desejada então vem de um argumento padrão de densidade.

////

Demonstração do teorema de Pettis. Como discutimos, basta mostrar que, se $u : (0, T) \to E$ for fracamente mensurável e de imagem quase separável, então ela será fortemente mensurável. Mudando u em um conjunto de medida zero, podemos supor que $N = \emptyset$ (da definição de imagem quase separável) e que $u(I)$ está contido num subespaço M de E separável.

Pelo lema, há uma sequência $\{\varphi_n\}$ densa de em M^* na topologia fraca-$*$. Para todo $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, temos que $\{t \in I; \|u(t) - a\| \leq \varepsilon\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{t \in I; \langle \varphi_n, u(t)\rangle \leq \varepsilon + \langle \varphi_n, a\rangle\}$ e portanto é mensurável. Particularmente, analisando o caso $a = 0$, concluímos que $t \mapsto \|u(t)\|$ é mensurável.

Por outro lado, como $u(I)$ é separável para qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se tomar $a_1, a_2, \ldots$ em E tais que $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}}\{a_\alpha + \varepsilon B_E\}$ contém $u(I)$.[1] Já que cada $Y_\alpha = \{t \in I; u(t) \in a_\alpha + \varepsilon B_E\}$ é mensurável, $X_\alpha = Y_\alpha \setminus \cup_{\beta=1}^{\alpha} Y_\alpha$ também o é, tornando a função $f = \sum a_\alpha 1_{X_\alpha}$ bem definida e mensurável (pelo conta da disjunção dois-a-dois dos X_α's). Ademais, $\|f(t) - u(t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in I$.

Em outras palavras, uma função mensurável pode, após uma modificação em um conjunto de medida zero, ser uniformemente aproximada por aplicações "quase" simples. Isto dá o resultado desejado. ////

Observe que um corolário da prova acima é de que, se $u_n : I \to E$ é uma sequência de funções mensuráveis e $u_n(t) \to u(t)$ para quase todo $t \in I$, então u é mensurável.

[1] Aqui $B_E = \{a \in E; \|a\| \leq 1\}$ é a bola unitária em E, donde $a_\alpha + \varepsilon B_E$ é a bola centrada em a_α e de raio ε.

Uma função simples $s : I \to E$, $s = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha 1_{X_\alpha}$, será dita INTEGRÁVEL caso cada X_α tiver medida finita. Nesta situação, sua integral, como esperado, é o *vetor* $\int_I s(t)dt$ dado por

$$\int_I s(t)dt = \sum_{\alpha \in A} |X_\alpha| a_\alpha$$

onde $|X_\alpha|$ significa a medida de X_α. A integral de uma função simples independe da escolha de sua representação em (2.1).

Mais geralmente, uma aplicação mensurável $u : I \to E$ é chamada INTEGRÁVEL se houver uma seqüência de funções simples (s_n) tal que[2]

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|u(t) - s_n(t)\| dt = 0.$$

Diante disso, pode-se definir univocamente a INTEGRAL (À BOCHNER) de u como o limite

$$\int_I u(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n(t)dt.$$

O célebre teorema de S. Bochner dá uma caracterização elementar das funções integráveis:

Teorema 2.1.2 (Bochner)**.** *Para uma função mensurável $u : I \to E$ ser integrável é necessário e suficiente que $\int_I \|u(t)\| dt < \infty$.*

Assim sendo, vale a desigualdade $\left\| \int_I u(t)dt \right\| \le \int_I \|u(t)\| dt$.

Demonstração. Novamente a parte do "somente se" não apresenta nenhuma dificuldade. A recíproca exige o seguinte artifício: usando o teorema de Riesz–Fischer usual, existem funções simples $f_1, f_2, \ldots : I \to [0, +\infty)$ tais que $f_n \to \|u\|$ em $L^1(I)$ e que $f_n(t) \le g(t)$ para todo $t \in I$, onde $g \in L^1(I)$. Assim, escolhendo uma sequência de funções simples integráveis (s_n) convergindo a u em quase todo ponto e $\varepsilon_n > 0$ com $\varepsilon_n \to 0$, vemos que $v_n(t) = \frac{f_n(t)}{\|s_n(t)\| + \varepsilon_n} s_n(t)$ define uma sequência de funções simples tal que $\|v_n(t) - u(t)\| \le 2g(t)$ e $\|v_n(t) - u(t)\| \to 0$ para quase todo t. Assim o teorema da convergência dominada diz que $\int_I \|v_n(t) - u(t)\| dt \to 0$, mostrando que u é integrável.

A desigualdade da última asserção é obviamente válida para funções simples; daí por densidade é obtido o caso geral. ////

Evidentemente que caso $u : I \to E$ é integrável, é também integrável em todo $J \subset I$ por restrição. Em particular, pode-se definir a "primitiva" $U(t) = \int_{t_0}^t u(s)ds$, onde $t_0 \in I$. Aqui, como no que se segue, adotaremos a convenção de que $\int_b^a = -\int_a^b$ caso $a < b$.

Apesar da integral de Bochner ser um sucessor natural da de Lebesgue, não é muito claro saber como obter o significado exato da integral de f. Se E for um espaço de funções por exemplo, note $\int f dt$ é per se uma função. Há no entanto uma noção correlata à integral de Bochner, que seria uma à Riemann: ao invés de aproximarmos f por funções simples, empregaríamos s's como em (2.1), mas cujos X_α's são intervalos e a_α's são valores de f nesses conjuntos. Desta observação, é imediato concluir que a integral de Bochner é uma ferramenta mais forte. Todavia, em alguns casos, como quando f é contínua e em determinados E's "concretos", é possível calcular explicitamente o vetor $\int f dt$ via este argumento à Riemann.[3] Na última seção do capítulo, exploraremos algumas aplicações destes e dos próximos conceitos a serem apresentados no contexto de espaços de Sobolev.

Enfim, façamos uma observação incontestável, mas que é empregada frequente e tacitamente. Digamos que F é um outro espaço de Banach que $F \subset E$ continuamente. Se $u : I \to F$ é integrável, ela também é integrável como uma função com valores em E. Em especial, fica univocamente definido $\int_I u(s)ds$.

[2]Trivialmente pode se verificar que $u - s_n$ é mensurável para todo $n = 1, 2, \ldots$. Por conseguinte, o teorema de Pettis assere que a função não-negativa $t \mapsto \|u(t) - s_n(t)\|$ é mensurável e assim possui uma integral à Lebesgue bem-definida (possivelmente igual a $+\infty$).

[3]Para ilustrar este escólio, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto não vazio e $f \in C_c(I \times \Omega)$. Se $E = L^p(\Omega)$ para $1 \le p \le \infty$, é fácil ver que $u : I \to E$, dada por $u(t)(x) = f(t, x)$, é contínua. Podemos consequentemente falar na integral $\int_I u dt = L$. Agora, o raciocínio acima conclui que precisamente $L(x) = \int_I f(t, x)dt$. Este exemplo será generalizado mais adiante.

2.2 Definição dos espaços $L^p(I;E)$

Munidos de um conceito de mensurabilidade, já podemos definir os espaços que entitulam este capítulo. Por $L^p(I;E)$ $(1 \le p \le \infty)$, entende-se a classe das funções[4] $u : I \to E$ tais que $t \mapsto \|u(t)\|$ está em $L^p(I)(=L^p(I;\mathbb{R}))$. É neles tomada a norma

$$\|u\|_{L^p(I;E)} = \begin{cases} \left\{ \int_I \|u(t)\|^p dt \right\}^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \text{Ess. Sup}_{t\in I} \|u(t)\| & (p = \infty). \end{cases}$$

Quando estiver subentendido o intervalo I e o espaço E, prefere-se a notações mais cômodas $\| \ \|_{L^p(I;E)} = \| \ \|_{L^p} = \| \ \|_p$.

Sob certas hipóteses adicionais, estes espaços possuem características idênticas ao caso clássico $E = \mathbb{R}$, das quais algumas são listadas no teorema abaixo.

Teorema 2.2.1. *São válidas as seguintes propriedades:*

1. $L^p(I;E)$ *é completo para* $1 \le p \le \infty$*;*

2. $L^p(I;E)$ *é separável para* $1 \le p < \infty$ *se* E *também o for;*

3. *O espaço dual de* $L^p(I;E)$ *pode ser identificado com* $L^{p'}(I;E^*)$ *através da dualidade*

$$(f,u) \in L^{p'}(I;E^*) \times L^p(I;E) \mapsto \int_I \langle f(t), u(t)\rangle dt$$

se $1 \le p < \infty$ *e* E^* *for reflexivo ou separável;*

4. $L^p(I;E)$ *é reflexivo caso* E *o for.*

A primeira asserção não apresenta dificuldades e repete os passos da demonstração do teorema de Riesz–Fischer.

Já a segunda reside em construir uma família enumerável de funções-escada que é densa em $L^p(I;E)$; isto é feito através da regularidade da medida de Lebesgue.

Observa-se que por isso a 2.) pode ser refinada da seguinte maneira. Usando funções de Urysohn (em t) prova-se então que $C_c(I;E)$ também é denso. Por regularização (i.e., convolução em t) então não é difícil se notar que esta afirmação de densidade também vale para $C_c^\infty(I;E)$.[5]

As duas últimas afirmações no entanto são sensivelmente mais difíceis de se provar, já que necessitam de um difícil teorema à Radon–Nikodym; as referências no assunto são N. Dinculeanu (1967) e J. Diestel–J. J. Uhl (1977).

É conveniente também dizer que uma função $u : I \to E$ está LOCALMENTE EM $L^p(I;E)$, ou simbolicamente $u \in L^p_{\text{loc}}(I;E)$, se para todo $M > 0$ $u_{I\cap|_{(-M,M)}}$ pertence a $L^p(I;E)$.[6] Então sempre vale, no sentido de conjuntos, que $L^p(I;E) \subset L^1_{\text{loc}}(I;E)$, qualquer que seja $1 \le p \le \infty$.

2.3 Definição dos espaços de Sobolev $W^{1,p}(I;E)$

De uma função $u \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$, $v \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$ é uma DERIVADA FRACA OU DISTRIBUCIONAL caso

$$\int_I \dot\phi(t)u(t)dt = -\int_I \phi(t)v(t)dt \tag{2.2}$$

[4]Na realidade é necessário se identificar duas funções que difiram somente em um conjunto de medida zero. Este procedimento clássico estará subentendido ao longo do presente texto.

[5]Em geral tal técnica de regularização e truncamento permite mostrar que, mesmo quando E não é separável, para toda $u \in L^p(I;E)$ existe uma sequência de funções ϕ_n em $C_c^\infty(I;E)$ tal que $\phi_n \to u$ em $L^p(I;E)$.

[6]Observe que, de certa maneira, esta definição difere dos $L^p_{\text{loc}}(\Omega)(=L^p_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}))$, onde Ω é um aberto em $\mathbb{R}^N$ $(N \ge 2)$, para os quais em geral é posto $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow u \in L^p(\omega)$, para todo $\omega \subset\subset \Omega$. A razão para isto é que nesta situação unidimensional, entende-se que as complicações de u estão reservadas aos infinitos; enquanto, no caso multidimensional, na ausência direção privilegiada, se permite que as singularidades das funções estejam perto da fronteira.

para toda $\phi \in C_c^\infty(I) = C_c^\infty(I;\mathbb{R})$ (ou $C_c^1(I)$).[7]

Antes de prosseguirmos, é *sine qua non* estabelecer a unicidade da derivada fraca. Isto essencialmente é o conteúdo da seguinte proposição.

Teorema 2.3.1. *Suponha que $u \in L^1_{loc}(I;E)$ é tal que*

$$\int_I \phi(t)u(t)dt = 0$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(I)$. Então $u(t) = 0$ para quase todo $t \in I$.

Demonstração. Seja $f \in E^*$. Trivialmente $t \mapsto \langle f, u(t)\rangle$ é localmente integrável e satisfaz

$$\begin{aligned} \int_I \phi(t)\langle f, u(t)\rangle dt &= \int_I \langle f, \phi(t)u(t)\rangle dt \\ &= \left\langle f, \int_I \phi(t)u(t)dt \right\rangle \\ &= 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(I). \end{aligned} \tag{2.3}$$

(O intercâmbio da ação do funcional f e da integração em (2.3) é conseqüência do fato de integral ser um limite de somas finitas para as quais esta troca é válida). Portanto da teoria univariada, $\langle f, u(t)\rangle = 0$ em quase toda parte. Uma vez que u tem imagem quase separável, uma aplicação do lema 2.1.1 basta para atingir a conclusão desejada. ////

Por conseguinte, a função v em (2.2) é, se existir, unicamente caracterizada (em quase todo ponto) por u. Assim, não há perigo de escrever $v = \dot{u}$ (outras notações possíveis são u' ou $\frac{du}{dt}$). Evidentemente, se $u \in C^1(I;E)$, sua derivada usual será a sua derivada fraca.

Nesse momento já se pode introduzir os também muito usados espaços de Sobolev $W^{1,p}(I;E)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Estes consistem das funções $u \in L^p(I;E)$ tais que $\dot{u}$ igualmente estão em $L^p(I;E)$. Introduz-se portanto neles norma

$$u \mapsto \|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \|\dot{u}\|_p,$$

de modo que o teorema 2.2.1 (exceto o terceiro ítem) é válido trocando onde está escrito L^p por $W^{1,p}$. Para provar isto, basta observar que a relação (2.2) persiste limites e logo $W^{1,p}$ pode ser identificado como um subespaço fechado de $L^p \times L^p$.

É conveniente escrever $H^1 = W^{1,2}$, especialmente quando E for um espaço de Hilbert, já que este H^1 virá também a ser hilbertiano.

Sendo da dimensão do domínio, os espaços de Sobolev possuem algumas propriedades notáveis: seus elementos informalmente são "primitivas" de funções em L^p. A sucessão de proposições abaixo torna a frase anterior precisa.

Teorema 2.3.2. *Suponha que $v \in L^1_{loc}(I;E)$ seja tal que sua derivada fraca $\dot{v} \equiv 0$ (ou seja, $\int_I \dot{\phi}(t)v(t)dt = 0$ para toda $\phi \in C_c^\infty(I)$). Então existe $v_0 \in E$ tal que $v(t) = v_0$ em quase toda parte.*

Demonstração. Lembre-se de que, dada $\rho \in C_c^\infty(I)$, haverá $\psi \in C_c^\infty(I)$ tal que $\psi' = \rho$ se, somente se, $\int_I \rho(t)dt = 0$.

Escolha $\theta \in C_c^\infty(I)$ tal que $\int_I \theta(t)dt = 1$. Então para qualquer $\phi \in C_c^\infty(I)$, a observação anterior afirma que $\rho(t) = \phi(t) - \left(\int_I \phi(s)ds\right)\theta(t)$ é derivada de uma função em $C_c^\infty(I)$. Logo por hipótese

$$0 = \int_I v(t)\phi(t)dt - \int_I \phi(t)dt \cdot \int_I \theta(t)v(t)dt$$

o que, junto do teorema 2.3.1, dá a conclusão desejada com $v_0 = \int_I \theta(t)v(t)dt$. ////

[7]Observe que o produto entre uma função mensurável escalar e uma função vetorial mensurável é também mensurável. Ainda mais, como *a fortiori* $\phi, \phi' \in L^\infty(I)$, as propriedades de integrabilidade de u e v não são alteradas quando multiplicadas por ϕ ou ϕ'.

Teorema 2.3.3. *Seja $J \subset\subset I$ um intervalo não-vazio (se $I = \mathbb{R}$, podemos tomar $J = I$) e defina para todo $|h| < \operatorname{dist}(J, \text{fronteira de } I)$ o operador linear $M_h : L^p(I;E) \to L^p(J;E)$ por*

$$(M_h v)(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} v(s)ds, \ (v \in L^p(I;E)).$$

Para todo $v \in L^p(I;E)$, $M_h v \xrightarrow{h\to 0} v\ (= v_{|J})$ em $L^p(J;E)$ e em quase todo t.

Demonstração. Aplicando a desigualdade integral de Minkowski vê-se que

$$\begin{aligned}
\|M_h u\|_{L^p(J;E)} &= \left\{\int_J \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds\right\|^p dt\right\}^{1/p} \\
&\leq \left\{\int_J \frac{1}{|h|}\left(\int_I \|u(s)\|ds\right)^p dt\right\}^{1/p} \\
&\leq \int_0^h \frac{1}{|h|}\left\{\int_J \|u(t)\|^p dt\right\}^{1/p} ds \\
&\leq \|u\|_{L^p(I;E)}
\end{aligned}$$

donde se vê que $\{M_h\}$ define uma família de operadores lineares limitados entre $L^p(I;E)$ e $L^p(J;E)$ e cujas normas são uniformemente limitadas (em h) por 1.

Por outro lado, é óbvio que $M_h\psi \to \psi$ para toda $\psi \in C_c^\infty(I;E)$. Já que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\psi = \psi_\varepsilon \in C_c^\infty(I;E)$ tal $\|u - \psi\|_p < \varepsilon$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\|M_h u - u\|_{L^p(J;E)} &\leq \|M_h u - M_h\psi\|_{L^p(J;E)} + \|u - \psi\|_{L^p(I;E)} + \|M_h\psi - \psi\|_{L^p(J;E)} \\
&< 2\varepsilon + \|M_h\psi - \psi\|_{L^p(J;E)}
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$\limsup_{h\to 0} \|M_h u - u\|_{L^p(J;E)} \leq 2\varepsilon.$$

Isto dá a convergência em $L^p(J;E)$.

Para a quase pontual, modificando u em um conjunto de medida zero, presume-se que $u(I)$ é um conjunto separável. Seja então $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ um conjunto denso. Uma vez que, para todo α, $t \mapsto \|u(t) - a_\alpha\|$ está em $L^1_{\text{loc}}(I)$, o teorema da diferenciação de Lebesgue (veja, e.g., W. Rudin (1987) e P. M. Fitzpatrick–H. L. Royden (2010)) afirma que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|u(s) - a_\alpha\|ds \xrightarrow{h\to 0} \|u(t) - a_\alpha\|$$

todo $t \in X_\alpha$, onde $|I \setminus X_\alpha| = 0$. Seja $X = \cap_{\alpha=1}^\infty X_\alpha$. Então X contém quase todo $t \in I$ e para estes t's vale que

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds - u(t)\right\| &\leq \limsup_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds - a_\alpha\right\| + \|a_\alpha - u(t)\| \\
&\leq \limsup_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|u(s) - a_\alpha\|ds + \|a_\alpha - u(t)\| \\
&= 2\|a_\alpha - u(t)\|.
\end{aligned}$$

Já que se pode tornar $\|a_\alpha - u(t)\|$ tão pequeno como se queira, fica provado que $M_h u(t) \to u(t)$ em quase toda parte. ////

Teorema 2.3.4. *Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(I;E)$. A função $w : I \to E$ dada $v(t) = \int_0^t v(s)ds$ é uma derivada fraca de v.*[8]

[8] Atente pelo fato de que pela desigualdade de Hölder toda função em L^p está localmente em L^1, de modo que podemos falar na integral do enunciado.

Demonstração. Escolha $\phi \in C_c^\infty(0;T)$ e observe que vale a seguinte igualdade

$$\int_I \frac{w(t+h)-w(t)}{h}\phi(t)dt = \int_I u(t)\frac{\phi(t-h)-\phi(t)}{h}dt$$

se $|h| < \delta = \text{dist.}\big(I, \text{fronteira de } J\big)$, onde $J \subset I$ é um intervalo contendo o suporte de ϕ. Passando ao limite, o teorema 2.3.3 diz o resultado obtido exatamente é (2.2). Isto conclui a prova. ////

Assim, dado $u \in W^{1,p}(I;E)$ e $t_0 \in I$, os três resultados acima afirmam que $t \mapsto u(t) - \int_{t_0}^t \dot u(s)ds$ é (em quase todo ponto) constante. Logo, vale a seguinte versão da desigualdade de Sobolev:

Teorema 2.3.5 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Se $u \in W^{1,p}(I;E)$, então para quase todo $s, t \in I$*

$$u(t) - u(s) = \int_s^t \dot u(s)ds.$$

Por conseguinte, $W^{1,p} \subset C^{1-1/p}(\overline{I};E)$ continuamente.[9]

A última afirmação deverá ser entendida da seguinte maneira. Dos elementos de $W^{1,p}(I;E)$, pode ser escolhido o representante dado pela fórmula $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t \dot u(s)ds$, que é contínuo. A convenção de sempre escolher o representante contínuo de u será adotada neste texto.

Se I é limitado, a desigualdade de Hölder basta para provar a injeção contínua desse teorema; já quando $|I| = \infty$ e $1 < p < \infty$, é necessário um pouco mais para se ter uma estimativa em L^∞. Sem perda de generalidade, digamos que $I = (-\infty, \infty)$. Por aproximações, é suficiente só se considerar u em $C_c^\infty(I;E)$. Escolhendo $f \in E^*$ e pondo $\psi(t) = \langle f, u(t)\rangle$, uma simples aplicação do teorema fundamental do Cálculo e das desigualdades de Hölder e de Young dão $|\psi(t)|^p \le p\int_t^\infty |\psi(s)|^{p-1}|\dot\psi(s)|ds \le \text{const.}\|\psi\|^p_{W^{1,p}}$. Uma vez que $\dot\psi(t) = \langle f, \dot u(t)\rangle$, o que acabou de ser provado é que $|\langle f, u(t)\rangle| \le \text{const.}\|f\|\|u\|_{W^{1,p}(I;E)}$, forçando uma estimativa do tipo $\|u\|_\infty \le \text{const.}\|u\|_{W^{1,p}(I;E)}$ por meio do teorema de Hahn-Banach.

Da densidade das funções suaves de suporte compacto, o argumento acima assere toda $u \in W^{1,p}(I;E)$ se anula "no infinito", i. e., $\lim_{|t|\to\infty} u(t) = 0$ em E. Isto evidentemente só tem significado se I tiver medida infinita.

Corolário 2.3.1. *Se $u \in W^{1,p}(I;E)$, então $\lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = \dot u(t)$ em $L^p(J;E)$ para todo $J \subset\subset I$ (se $I = \mathbb{R}$, é permitido tomar $J = I$) e também em E para quase todo $t \in I$.*

Demonstração. Basta fundir o teoremas 2.3.3 e 2.3.5. ////

Para encerrar esta seção, ainda introduziremos dois espaços. Define-se os espaços de Sobolev de ordem maior $W^{m,p}(I;E)$ onde $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$, indutivamente como o conjunto das funções $u \in W^{1,p}(I;E)$ tais que $\dot u \in W^{m-1,p}(I;E)$. Isto vem a ser equivalente a haver funções $\dot u = Du$, $\ddot u = D^2u, \ldots, D^m u$ em $L^p(I;E)$ tais que

$$\int_I D^k\phi(t)u(t)dt = (-1)^k \int_I \phi(t)D^k u(t)dt$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(I)$. Aqui $D = \dot{} = d/dt$ é o operador de derivação. $W^{m,p}(I;E)$ se torna um espaço de Banach sob a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{k=1}^m \|D^k u\|_p.$$

Tal como explicado anteriormente, é comum também se escrever $H^m = W^{m,2}$.

[9] Aqui, $C^\alpha(\overline{I};E)$ $(0 < \alpha \le 1)$ é o espaço de Hölder, i.e., das funções (uniformemente contínuas) $u : \overline{I} \to E$, para as quais está bem-definida a norma $\|u\|_{C^\alpha} = \|u\|_\infty + \text{Sup}_{x\neq y}\|u(x)-u(y)\|/|x-y|^\alpha$. Por inércia, entende-se aqui C^0 como o conjunto das funções contínuas e limitadas com a norma da convergência uniforme.

2.4 Exemplos

Mostraremos certos casos em que a teoria aqui exposta é comumente aplicada. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto não-vazio, $0 < T \leq \infty$ e $1 \leq p < \infty$.

Exemplo 2.4.1. *Relação entre $L^p\big((0;T)\times\Omega\big)$ e $L^p\big((0,T);L^p(\Omega)\big)$.*

Verifiquemos que injeção $J : L^p\big((0;T)\times\Omega\big) \to L^p\big((0,T);L^p(\Omega)\big)$ dada por $(Ju)(t)(x) = u(t,x)$ não apenas está bem-definida como é um isomorfismo isométrico.

Primeiro, o teorema de Tonelli afirma, pois $\int_0^T \int_\Omega |u(t,x)|^p dt dx < \infty$, que $x \mapsto u(t,x)$ é mensurável e está em $L^p(\Omega)$ para quase todo $0 < t < T$. Assim, a função $Ju : (0,T) \to L^p(\Omega)$ está bem-definida (ao menos para quase todo t).

Notemos que tal Ju é mensurável. Como $L^p(\Omega)$ é separável, somente temos de verificar que a hipótese de mensurabilidade fraca. Aqui isto é equivalente a mostrar que $t \mapsto \int_\Omega f(x)u(t,x)dx$ é mensurável para toda $f \in L^{p'}(\Omega)$. No entanto, esta é mais uma consequência do teorema de Tonelli, pois $fu \in L^1\big((0,T')\times\Omega\big)$ para todo $T' \in (0,T] \cap (0,\infty)$.

Por conseguinte, o teorema de Fubini mostra que tal J é uma isometria linear, já que

$$\|Ju\|^p_{L^p((0,T);L^p(\Omega))} = \int_0^T \int_\Omega |u(t,x)|^p dx dt = \|u\|^p_{L^p((0,T)\times\Omega)}.$$

Finalmente, a fim de estabelecer a sobrejetividade de J, é suficiente demostrar que sua imagem é densa. Seja $\gamma \in L^p\big((0,T);L^p(\Omega)\big)$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função simples $s = \sum \chi_i g_i$ tal que $\|\gamma - s\| < \varepsilon$. Por outro lado, cada $g_i \in L^p(\Omega)$ pode ser tão bem aproximada por uma função simples $h_i \in L^p(\Omega)$, de modo a ainda ter $\|\gamma - \sigma\| < \varepsilon$, com $\sigma = \sum \chi_i h_i$. É fácil ver que $u(t,x) = \sigma(t)(x)$ está em $L^p\big((0,T)\times\Omega\big)$ e $Ju = \sigma$, provando a desejada densidade.

Desta maneira, *faremos extensivamente a identificação*

$$L^p\big((0;T)\times\Omega\big) = L^p\big((0,T);L^p(\Omega)\big)$$

por meio do abuso de notação $u(t,x) = u(t)(x)$, dispensando assim a transformação J. O cuidado que deve ser feito é que, não é claro que se $u \in L^p\big((0,T);L^p(\Omega)\big)$, a função $(t,x) \mapsto u(t)(x)$ vem a ser sequer mensurável; isto é no entanto verdade tomando representantes adequados da classe de equivalência definida por ela.[10]

////

Exemplo 2.4.2. *Relação entre $W^{1,p}\big((0,T)\times\Omega\big)$ e $L^p\big((0,T);W^{1,p}(\Omega)\big)$.*

Na veia da discussão anterior, provemos que

Teorema 2.4.1. *O espaço $L^p\big((0,T);W^{1,p}(\Omega)\big)$ é exatamente o conjunto das funções $u \in L^p\big((0,T)\times\Omega\big)$ cujas primeiras derivadas espaciais (em distribuição) pertencem igualmente a $L^p\big((0,T)\times\Omega\big)$.*

Esta proposição evidentemente permite a injeção isométrica

$$W^{1,p}\big((0,T)\times\Omega\big) \subset L^p\big((0,T);W^{1,p}(\Omega)\big).$$

[10] O mesmo argumento acima também dá seguinte "caracterização" de $L^p\big((0,T);L^q(\Omega)\big)$ para $1 \leq p,q < \infty$: este é o espaço das funções mensuráveis $u(t,x)$ tais que

$$\int_\Omega |u(t,x)|^q dx < \infty$$

para quase todo t e

$$\left[\int_0^T \left\{\int_\Omega |u(t,x)|^q dx\right\}^{p/q} dt\right]^{1/p} = \|u\|_{L^p((0,T);L^q)} < \infty.$$

Estes espaços desempenham um papel central na teoria das equações dispersivas; veja, por exemplo, F. Linares–G. Ponce (2009).

Demonstração. Passo um. Primeiro determinemos que, se u e $D_i u \in L^p((0,T)\times\Omega)$ para $1 \le i \le N$, então vale
$$\int_\Omega u(t,x) D_i\phi(x)dx = -\int_\Omega D_i u(t,x)\phi(x)dx \tag{2.4}$$
para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, todo $1 \le i \le N$ e quase todo $0 < t < T$. Uma vez que podemos interpretar $u(t)(x)$ e $\nabla u(t)(x)$ como elementos de, respectivamente, $L^p\big((0,T);L^p(\Omega)\big)$ e $L^p\big((0,T);L^p(\Omega)\big)^N$, se comprovará uma das inclusões do teorema.[11]

Fixe um aberto $\omega \subset\subset \Omega$, um índice $1 \le i \le N$ e escolha uma seqüência (h_n) tal que $|h_n| < \mathrm{dist.}(\omega, \mathrm{Fr.}\,\Omega)$ e $h_n \to 0$. Como é bem conhecido em espaços de Sobolev, vale o limite
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_\omega \left|\frac{u(t,x+h_ne_i)-u(x)}{h_n} - D_i u(t,x)\right|^p dxdt = 0 \tag{2.5}$$
Portanto, aplicando o teorema de Fubini e o de Riesz–Fischer, há uma subsequência (h_n') de (h_n) tal que
$$\lim_{n\to\infty}\int_\omega \left|\frac{u(t,x+h_n'e_i)-u(x)}{h_n'} - D_i u(t,x)\right|^p dx = 0$$
para quase todo $0 < t < T$. Então, passando $n \to \infty$ na identidade
$$\int_\Omega \frac{u(t,x+h_n'e_i)-u(t,x)}{h_n'}\phi(x)dx = \int_\Omega u(t,x)\frac{\phi(x-h_n'e_i)-\phi(x)}{h_n'}dx,$$
mostra-se que (2.4) de fato vale para este i, para toda ϕ com suporte em ω e quase todo t. O caso geral é então construído exaustando Ω por uma sequência crescente de (ω_n), cada um com fecho compacto, e se observando que a união enumerável de conjuntos de medida zero tem novamente medida zero.

Passo dois. Reciprocamente, quando $u \in L^p\big((0,T);W^{1,p}(\Omega)\big)$, u pode ser entendida como uma função em $L^p\big((0,T)\times\Omega\big)$ com derivadas espaciais também em L^p. De fato, se $\varphi \in C^\infty\big((0,T)\times\Omega\big)$, o teorema de Fubini diz que
$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega u(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,x)dxdt &= \int_0^T\left[\int_\Omega u(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,x)dx\right]dt\\ &= -\int_0^T\left[\int_\Omega \varphi(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)dx\right]dt\\ &= -\int_0^T\int_\Omega \varphi(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)dxdt.\end{aligned}$$
////

Exemplo 2.4.3. *Relação entre $W^{1,p}\big((0,T)\times\Omega\big)$ e $W^{1,p}\big((0,T);L^p(\Omega)\big)$.*

Antes, provemos um resultado abstrato.

Seja E um espaço de Banach de distribuições; isto é, E é um espaço de Banach que possui uma identificação natural como um subconjunto do enorme conjunto das distribuições $\mathscr{D}'(\Omega)$ (por exemplo, E pode ser um espaço de Lebesgue ou de Sobolev). Por esta razão, $C_c^\infty(\Omega)$ pode ser compreendido como um subespaço de E^*, através da relação
$$[h,f] \in C_c^\infty \times E \mapsto \langle f,h\rangle$$
onde os colchetes sem índices denotam (e denotarão até o final do capítulo) o produto de dualidade entre $\mathscr{D}'(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$.

Uma observação importante é que
$$C_c^\infty(\Omega) \subset E^* \text{ continuamente,}$$

[11]A mensurabilidade fraca de u como curva em $L^p\big((0,T);W^{1,p}(\Omega)\big)$ é comprovada lembrando, para todo um elemento de $\xi \in W^{1,p}(\Omega)^*$, existem funções $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$, tais que $\langle \xi, u\rangle = \int_\Omega f_0(x)u(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i(x)(D_iu)(x)dx$ (veja a demonstração da proposição 8.14 de H. Brezis (2011)).

onde, é claro, estamos considerando C_c^∞ com a sua topologia usual.[12] Por conseguinte, um elemento $\varphi \in C_c^\infty((0,T)\times\Omega)$ pode ser considerado um elemento de $C_c((0,T);E^*) \subset L^{p'}((0,T);E^*)$.

Com isto, podemos dizer que uma distribuição $T \in \mathscr{D}'((0,T)\times\Omega)$ está em $L^p((0,T);E)$ se houver um u neste espaço tal que

$$\langle T,\varphi\rangle_{\mathscr{D}'((0,T)\times\Omega),C_c^\infty((0,T)\times\Omega)} = \int_0^T \langle u(t),\varphi(t)\rangle dt = \int_0^T \langle \varphi(t),u(t)\rangle_{E^*,E}dt.$$

Podemos continuar esta questão e formular conjecturas sobre as derivadas de T, que chamaremos de u a partir de agora. Se $\frac{\partial u}{\partial t}$ está em $L^p((0,T);E)$, o que diz a respeito a $\dot{u}$? E mutuamente, a existência de $\dot{u}$ tem alguma relação com $\frac{\partial u}{\partial t}$?

Teorema 2.4.2. *Nas condições acima, $W^{1,p}((0,T);E)$ é precisamente o conjunto das distribuições u tais que $u, \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p((0,T);E)$.*

Demonstração. Parte I. Inicialmente mostremos que u e $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p((0,T);E)$, então $\dot{u}$ existe e é igual a $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Passo um (da parte I). Melhor do que $\varphi \in C_c((0,T);E^*)$, mostremos que toda $\varphi \in C_c^\infty((0,T)\times\Omega)$ de fato está em $C_c^\infty((0,T);E^*)$. Como a derivada forte implica na fraca, em particular $\varphi \in W^{1,p'}((0,T);E^*)$.

Com efeito, para h pequeno, $t \mapsto \varphi(t+h)$ é uma curva em $C_c^\infty(\Omega)$ e é bem-sabido que $\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} \to \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t)$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Assim, $t \mapsto \varphi(t)$ é de classe $C_c^1((0,T);E^*)$. Procedendo identicamente para $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ etc, a afirmação é provada.

Passo dois (da parte I). Justifiquemos a asserção da parte um.

Tome uma $\eta \in C_c^\infty(0,T)$ arbitrária. O que devemos mostrar é que, pondo

$$f = \int_0^T u(t)\dot{\eta}(t)dt$$
$$g = -\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t)\dot{\eta}(t)dt,$$

então $f = g$ em E, ou

$$\langle f,h\rangle = \langle g,h\rangle$$

[12]A verificação desta afirmação exige uma certa excursão na teoria das distribuições, por isto explicaremos rapidamente o motivo. Uma excelente referência é W. Rudin (1991) (especificamente, o capítulo 6).

Como é tradicional, escrevamos $C_c^\infty(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)$ por um instante. Se K é um compacto de Ω, entendemos por $\mathscr{D}_K$ o subespaço de $\mathscr{D}(\Omega)$ cujos elementos estão suportados em K. Já que $\mathscr{D}_K$ admite a distância

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}\frac{\|\varphi-\psi\|_{W^{k,\infty}}}{1+\|\varphi-\psi\|_{W^{k,\infty}}} \qquad [\varphi,\psi \in \mathscr{D}_K],$$

$\mathscr{D}_K$ é um chamado *espaço de Fréchet*, i.e., um espaço vetorial e métrico, que é completo, localmente convexo e cuja distância é invariante por translações (quer dizer, $d(\varphi+\eta,\phi+\eta) = d(\varphi,\eta)$, $\forall\varphi,\psi,\eta \in \mathscr{D}_K$).

Se F é um outro espaço de Fréchet (ou mais simplesmente de Banach), bem-sabido que uma transformação linear $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to F$ será contínua se, e só se, as restrições $\Lambda : \mathscr{D}_K \to F$ o forem. No entanto, vale um teorema do gráfico fechado em espaços de Fréchet, de modo que esta última condição é equivalente a: "se $\varphi_n \to 0$ em $\mathscr{D}_K$ e $\Lambda\varphi_n \to \xi$ em F, então $\xi = 0$".

Pois então, o nosso caso é $F = E^*$ e $\Lambda =$ [a aplicação idêntica de $\mathscr{D}(\Omega)$ em E^*]. Assim mostrar que esta injeção é contínua, é mostrar que se $\varphi_n \to 0$ em $\mathscr{D}_K$ e $\varphi_n \to \xi$ em E^* então $\xi = 0$. Agora, dada $f \in E$, por esta ser uma distribuição, $\langle f,\varphi_n\rangle \to 0$. Por outro lado, $\langle f,\varphi_n\rangle = \langle\varphi_n,f\rangle_{E^*,E} \to \langle\xi,f\rangle_{E^*,E}$. Logo, $\langle\xi,f\rangle_{E^*,E} = 0$ para toda $f \in E$ e portanto $\xi = 0$.

para todo $h \in C_c^\infty(\Omega)$. Porém, $\varphi(t,x) = \eta(t)h(x) \in C_c^\infty\big((0,T)\times\Omega\big) \subset W^{1,p'}\big((0,T);E^*\big)$ (pelo passo um) e

$$\begin{aligned}
\langle f,h\rangle &= \Big\langle h, \int_0^T u(t)\dot\eta(t)dt\Big\rangle_{E^*,E}\\
&= \int_0^T \langle \dot\eta(t)h, u(t)\rangle_{E^*,E}dt\\
&= \int_0^T \langle \dot\varphi(t), u(t)\rangle_{E^*,E}dt\\
&= \int_0^T \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t), u(t)\Big\rangle_{E^*,E}dt\\
&= -\int_0^T \Big\langle \varphi(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t)\Big\rangle_{E^*,E}dt\\
&= -\Big\langle h, \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t)dt\Big\rangle_{E^*,E}\\
&= \langle g,h\rangle,
\end{aligned}$$

como almejávamos.

Parte II. Agora é vez da inclusão recíproca: se $u \in W^{1,p}\big((0,T);E\big)$, então $\dot u$ dá origem a $\frac{\partial u}{\partial t}$. Apresentaremos duas provas diferentes, mas ambas semelhantemente interessantes.

Primeira demonstração (da parte II). Esta decorre um princípio mais geral.

Lema 2.4.1. *Se B é um espaço de Banach, $x \in W^{1,p}\big((0,T);B\big)$ e $y \in W^{1,p'}\big((0,T);B^*\big)$, então $z(t) = \langle x(t), y(t)\rangle_{B^*,B}$ está em $W^{1,1}(0,T)$ e $\dot z(t) = \langle \dot x(t), y(t)\rangle_{B^*,B} + \langle x(t), \dot y(t)\rangle_{B^*,B}$.*

Demonstração. Seja $\eta \in C_c^\infty(0,T)$. Para h pequeno,

$$\int_0^T \frac{z(t+h)-z(t)}{h}\eta(t)dt = \int_0^T z(t)\frac{\eta(t-h)-\eta(t)}{h}dt,$$

de maneira que um cálculo direto envolvendo corolário 2.3.1 diz que quando $h \to 0$

$$\int_0^T \big\{\langle \dot x(t), y(t)\rangle_{B^*,B} + \langle x(t), \dot y(t)\rangle_{B^*,B}\big\}\eta(t)dt = -\int_0^T z(t)\dot\eta(t)dt.$$

////

Com isto, como $u \in W^{1,p}\big((0,T);E\big)$ e toda função-teste φ pertence a $W^{1,p'}\big((0,T);E^*\big)$, temos que pelo lema acima

$$\frac{d}{dt}\langle \varphi(t), u(t)\rangle_{E^*,E} = \langle \dot\varphi(t), u(t)\rangle_{E^*,E} + \langle \varphi(t), \dot u(t)\rangle_{E^*,E}.$$

Integrando esta identidade de 0 a T e lembrando que φ possui suporte compacto,

$$\int_0^T \langle \varphi(t), \dot u(t)\rangle_{E^*,E}dt = -\int_0^T \langle \dot\varphi(t), u(t)\rangle_{E^*,E}dt = -\int_0^T \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t), u(t)\Big\rangle_{E^*,E}dt,$$

o que dá o resultado desejado.

Segunda demonstração (da parte II). Desta vez, empreguemos um fato da teoria de distribuições, que enunciaremos para uso futuro.[13]

[13] A prova disto segue as seguintes linhas. É possível escolher uma sequencia de regularizadores da forma $\rho_{q_n}(t,x) = a_{q_n}(t)b_{q_n}(x)$, onde $q_n > 0$ é um parâmetro que tende a 0. Assim sendo, dada uma função-teste arbitrária η, $(\rho_{q_n} * \eta)(z) = \int \rho_{q_n}(z-y)\eta(y)dy$, onde $z = (t,x)$, converge a η na topologia de $C_c^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)$ (possivelmente tendo de excluir alguns dos primeiros q_n's). Note que as derivadas de $\rho_q * \eta$ são do tipo $D^\alpha(\rho_q * \eta) = (D^\alpha \rho_q) * \eta$. Por conseguinte, aproximando a integral que define $(\rho_q * \eta)$ por somas de Riemann em um paralelepípedo adequado, $\rho_q * \eta$, logo η, é bem aproximado por uma somatória de funções-teste da forma

Lema 2.4.2. *O subespaço*

$$M = \Big\{\psi \in C_c^\infty\big((0,T)\times\Omega\big); \psi(t,x) = \sum_{i\in I} \eta_i(t)h_i(x),$$
$$\text{onde } I \text{ é um conjunto finito de índices e } \eta_i \in C_c^\infty(0,T), h_i \in C_c^\infty(\Omega), \forall i \in I\Big\}$$

é denso em $C_c^\infty\big((0,T)\times\Omega\big)$.

Prossigamos. Realizando os mesmos cálculos da parte um (passo dois), não é difícil ver que para toda $\eta \in C_c^\infty(0,T)$ e $h \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_0^T \langle \eta(t)h, \dot u(t)\rangle_{E^*,E}dt = -\int_0^T \langle \dot\eta(t)h, u(t)\rangle_{E^*,E}dt.$$

Pela linearidade desta igualdade, de fato

$$\int_0^T \Big\langle \sum_{i\in I}\eta_i(t)h_i, \dot u(t)\Big\rangle_{E^*,E}dt = -\int_0^T \Big\langle \sum_{i\in I}\dot\eta_i(t)h_i, u(t)\Big\rangle_{E^*,E}dt,$$

para qualquer família de índices finita I e $[\eta_i, h_i] \in C_c^\infty(0,T)\times C_c^\infty\big((0,T)\times\Omega\big)$. Consequentemente, o lema garante novamente que

$$\int_0^T \langle \varphi(t), \dot u(t)\rangle_{E^*,E}dt = -\int_0^T \langle \dot\varphi(t), u(t)\rangle_{E^*,E}dt = -\int_0^T \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t), u(t)\Big\rangle_{E^*,E}dt,$$

para cada $\varphi \in C_c^\infty\big((0,T)\times\Omega\big)$. ////

Sendo assim, as notações $\dot u$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, u_t são todas consistentes e simbolizam a mesma distribuição.

Uma aplicação importante é quando $E = L^p(\Omega)$. Neste caso, provamos que $u \in L^p\big((0,T)\times\Omega\big)$, pertence a $W^{1,p}\big((0,T); L^p(\Omega)\big)$ se, e somente, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p\big((0,T)\times\Omega\big)$ em distribuição. Com isto, entende-se

$$W^{1,p}\big((0,T)\times\Omega\big) \subset W^{1,p}\big((0,T); L^p(\Omega)\big) \text{ continuamente.}$$

Um escólio curioso do resultado acima é que se tem uma fórmula explícita para a integral de Bochner em $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.4.3. *Seja* $u \in W^{1,p}\big((0,T); L^p(\Omega)\big)$. *Para quase todo* $x \in \Omega$, *a aplicação* $t \in (0,T) \mapsto u(t,x)$ *está em* $W^{1,p}(0,T)$ *e sua derivada é precisamente* $t \mapsto \dot u(t,x)$.

Como resultado,

$$u(t,x) = u(0,x) + \int_0^t \dot u(s,x)ds \tag{2.6}$$

para quase todo x, sendo essa a integral de Lebesgue unidimensional.

Demonstração. Seja (h_n) uma sequência de números reais tendendo a 0. Uma vez que para todo $J \subset\subset (0,T)$ temos que

$$\lim_{h_n\to 0}\int_J \left|\frac{u(t+h,x)-u(t,x)}{h} - \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|^p dtdx = 0.$$

Assim, passando a uma subsequência se necessário, podemos escolher um conjunto de medida total $A \subset \Omega$

desejada, como desejávamos.

tal que

$$\lim_{h_n \to 0} \int_J \left| \frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} - \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right|^p dt = 0 \text{ para todo } J \subset\subset (0,T), \tag{2.7}$$

$$\int_0^T |u(t,x)|^p dt = 0, \tag{2.8}$$

$$\int_0^T \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right|^p dt = 0 \tag{2.9}$$

sempre que $x \in A$. Por (2.8) e (2.9), as funções $t \mapsto u(t,x)$ e $t \mapsto \dot{u}(t,x)$ são elementos de $L^p(0,T)$, enquanto (2.7) afirma que, para estes x's, $\frac{d}{dt}u(t,x) = \dot{u}(t,x)$ em distribuição. Isto mostra o teorema. ////

Resumo da ópera: "$u \in W^{m,p}((0,T); W^{k,p}(\Omega))$" para inteiros $k, m \geq 0$, significa precisamente que u tem suas derivadas espaciais até ordem k em L^p e, por sua vez, estas derivadas espaciais têm m derivadas temporais em L^p. Assim, concebemos uma correspondência natural entre as funções dos espaços de Sobolev com as curvas abstratas deste capítulo.

Capítulo 3

O teorema de E. Serra e P. Tilli

No one will ever know the forces that dragged her down
Destruction – she has invited herself
They became her sun, open dream her moon
Death became deliverer, and poison was her god

And the secret she kept within
Was written across her arms
The silver plane she entered once
Became a trap – nailed on dead ground

She...
She should have...
She should have... known!

Coroner. "Golden Cashmere Sleeper, pt. 1". *Coroner*. Noise Records, 1995. CD.

3.1 A definição de solução fraca

Um dos trunfos da prova que apresentaremos é certamente a colocação do problema numa linguagem adequada. Nestas duas primeiras seções então nos ocuparemos em montar esse palco.

De saída, é necessário se fazer claro o que se entende por uma solução do problema de Cauchy em que estamos interessados. Evidentemente se pode dar um passo a frente e considerar um problema semilinear mais geral da forma

$$\begin{cases} (\Box u)(t,x) + f\big(t,x,u(t,x)\big) = 0 \\ u(0,x) = \alpha(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

onde α e β são localmente integráveis e $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma não-linearidade contínua. Diremos a seguir que uma função $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^N \mapsto u(t,x) \in \mathbb{R}$ é uma SOLUÇÃO (FRACA) de (3.1) caso $(t,x) \mapsto u(t,x)$ e $(t,x) \mapsto f\big(t,x,u(t,x)\big)$ forem integráveis em todo conjunto da forma $(0,T)\times\Omega$ para $0 < T < \infty$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ e se também valer a identidade

$$\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} u(t,x)(\Box\phi)(t,x)dtdx = \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,x)dx$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\phi(0,x)dx + \int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} f\big(t,x,u(t,x)\big)\phi(t,x)dtdx, \qquad (3.2)$$

para qualquer que seja função-teste $\phi = \phi(t,x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$.

A motivação para este conceito vem da bem-sucedida teoria de distribuições. Com efeito, suponha que $u : [0,\infty)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma SOLUÇÃO CLÁSSICA de (3.1), i.e., u é de classe C^2, suas derivadas se estendem continuamente até $\{t = 0\}\times\mathbb{R}^N$ e se verifica (3.1) no seu sentido usual (o que tem lógica assumindo que α e β são *per se* regulares). Então uma série de integrações por partes em $\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N}(\Box u)\phi dtdx$ dá expressão (3.2).

Apesar de aqui estarmos primordialmente preocupados com soluções globais (i.e., aquelas que estão definidas para todo $0 < t$), poderíamos muito bem também falar de soluções locais; ou seja, funções cujos domínios são da forma $(0,T)\times\mathbb{R}^N$ para $0 < T < \infty$, e que satisfazem (3.1) se $\phi \in C_c^\infty\big((-\infty,T)\times\mathbb{R}^N\big)$. Adaptações nos enunciados das proposições abaixo entretanto vêm a ser óbvias e, portanto, serão omitidas.

Uma classe mais restrita de soluções, mas que surgem naturalmente nas estimativas a priori, são as chamadas DE ENERGIA FINITA; isto é, aquelas para as quais valem as inclusões

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty\big((0,\infty);L^2\big),$$
$$\nabla u \in L^\infty\big((0,\infty);L^2\big)^N. \qquad (3.3)$$

A razão desta nomenclatura é que podemos calcular a "energia" $t \mapsto \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\{u_t^2 + |\nabla u|^2\}dx$ em quase todo tempo e esta permanece limitada.[1]

Com estas noções já nós seria suficiente para desenvolver uma série de resultados profundos (dos quais vislumbraremos no capítulo 5), contudo sob certas condições o trabalho de verificar as hipóteses acima pode ser facilitado. A situação que encontraremos nessa dissertação é a contemplada pela seguinte proposição.

Teorema 3.1.1. *Seja E um espaço de Banach para o qual valha a tripla*

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset E \subset L^2(\mathbb{R}^N) \qquad (3.4)$$

e que todas essas injeções sejam densas contínuas. Considere suponha também $u : (0,\infty)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaz (3.3), que $(t,x) \mapsto f\big(t,x,u(t,x)\big)$ esteja em $L^1\big((0,T)\times\Omega\big)$ para todo $0 < T < \infty$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ e que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}\big((0,\infty);E^*\big)$. Por fim, suponha também que α e β estão em L^2.

Nessas condições, u será solução de (3.1) se, e somente se, $u(0) = \alpha$, $\dot{u} = \beta$ e $\Box u(t,x) = f\big(t,x,u(t,x)\big)$ no sentido de distribuições (em x) para quase todo $t > 0$.

Duas observações estão em ordem, que ajudarão explicar o conteúdo deste resultado.

In primo loco, entendamos o que significa a afirmação "$u(0) = \alpha$ e $\dot{u}(0) = \beta$". Comecemos pela primeira.

Pelas hipóteses acima, o teorema 2.4.2 implica que $u \in W^{1,1}\big((0,T);L^1(\Omega)\big)$ para todo $0 < T < \infty$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, de modo que

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s)ds.$$

Podemos neste instante saber o que se entende por $u(0) = \alpha$, uma vez que existe o traço $u(0) \in L^1_{\mathrm{loc}}$. (Aqui usamos extensivamente que $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$).

Note que esta integral possui sentido em $L^2(\Omega)$ para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ caso $u(0) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Portanto, um momento de reflexão (veja o último comentário na seção 2.1 ou então a fórmula (2.6)) diz que quando

[1] A definição de o que é ser "de energia finita" depende de equação para equação, já que em diversos sistemas temos quantidades que formalmente são finitas. Por exemplo, para a equação de Klein-Gordon $\Box u + u = 0$, a energia nesse caso é $t \mapsto \frac{1}{2}\int\{u_t^2 + u_{x_1}^2 + \ldots + u_{x_N}^2 + u^2\}dx$. Portanto, ser de energia finita aqui seria (3.3) mais $u \in L^\infty\big((0,\infty);L^2\big)$. Estas questões serão retomadas futuramente no deste trabalho.

$u(0) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, então de fato $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}((0,\infty); L^2)$.[2]

Para compreender $\dot{u}(0) = \beta$, é necessário que sejam feitos algumas considerações preliminares. Identificando $(L^2)^*$ com L^2 através do teorema da representação de Riesz-Fréchet, por restrição[3] temos também a seguinte relação dual de (3.4)[4]

$$L^2(\mathbb{R}^N) \subset E^* \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N) \tag{3.5}$$

onde $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ é o tradicional espaço de distribuições. Disto interpretamos $\dot{u} \in W^{1,1}_{\text{loc}}((0,\infty), E^*) \subset C([0,\infty); E^*)$. Em particular novamente, pode-se falar nos $\dot{u}(0) \in E^*$ em $t = 0$ e faz sentido uma possível igualdade $\dot{u}(0) = \beta$ (em E^*).[5]

Por fim, analisemos a frase "$\Box u = f(u)$ em distribuição em x para quase todo $t > 0$". A suposição de integrabilidade local de u_{tt} e u_{x_i} implica que para quase todo $t > 0$ podemos falar em $u_{tt}(t) \in E^*$ e $u_{x_i}(t) \in L^2$. Para estes t's, a distribuição $\Box u = u_{tt} - \Delta u$ age em uma função-teste $\phi(x) \in C_c^\infty$ como[6]

$$\begin{aligned}\langle \Box u(t), \phi \rangle &= \langle u_{tt}(t), \phi \rangle_{E^*,E} - \langle \Delta u(t), \phi \rangle_{H^{-1},H^1} \\ &= \langle u_{tt}(t), \phi \rangle_{E^*,E} + \int_\Omega \nabla u(t,x) \cdot \nabla \phi(x) dx.\end{aligned}$$

Consequentemente, por tal asserção afirmamos que para estes t's a distribuição acima é igual àquela gerada pela função localmente integrável $f(u)$.

Nas condições expressas, observe que $t \mapsto \langle \Box u(t), \phi \rangle$ está em $L^1(0,\infty)$ para qualquer que seja $\phi \in C_c^\infty$.

A prova do teorema 3.1.1 é essencialmente consequência do seguinte lema.

Lema 3.1.1. *Se $w : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é tal que*

$$\begin{cases} w & \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty), L^2), \\ \dot{w} & \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty); L^2), \\ \ddot{w} & \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty); E^*), \\ \nabla w & \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty); L^2)^N, \end{cases}$$

então temos a identidade

$$\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} w(\Box\phi) dt dx = (w(0), \dot{\phi}(0))_{L^2} - \langle \dot{w}(0), \phi(0) \rangle_{E^*,E} + \int_{(0,\infty)} \langle \Box w, \phi \rangle dt \tag{3.6}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

Caso $\Box w \in L^1_{\text{loc}}((0,T) \times \Omega)$ para todos $0 < T < \infty$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, a igualdade (3.6) então se torna

$$\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} w(\Box\phi) dt dx = (w(0), \dot{\phi}(0))_{L^2} - \langle \dot{w}(0), \phi(0) \rangle_{E^*,E} + \int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} \phi(\Box w) dt dx \tag{3.7}$$

Demonstração. A verificação de (3.6) não apresenta dificuldade nenhuma; ainda assim, como ela toca em alguns pontos relativamente sensíveis da teoria, realizaremos os cálculos minuciosamente.

Podemos considerar $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ como um elemento de $W^{1,\infty}((0,\infty); E)$, de modo que o lema 6.3

[2] $u(0) = \alpha$ tem portanto o mesmo significado do apresentado no capítulo anterior. É possível também compreender esta afirmação pela teoria de distribuições.

[3] Por isto, queremos dizer o seguinte. Para todo $u \in L^2$ podemos definir o funcional linear em E por $f \in E \mapsto (f,u)_{L^2}$. Com isto, entende-se que $L^2 \subset E^*$ continuamente.

[4] Mais detalhes sobre este tipo de tripla, consulte H. Brezis (2011) (seção 5.2) e J.-L. Lions e E. Magenes (1972) (primeiro capítulo). Nesta situação, L^2 é chamado de um "espaço pivô".

[5] Em outras palavras, se quer dizer que $\langle \dot{u}(0), h \rangle_{E^*,E} = \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) h(x) dx$ para todo $h \in E$.

[6] Nesta seção, o símbolo $\langle\ ,\ \rangle$, se não possuir índices, representará o produto de dualidade entre $\mathscr{D}'$ e C_c^∞.

afirma que

$$-\langle \dot{w}(0), \phi(0)\rangle_{E^*,E} = \int_0^\infty \langle \ddot{w}(t), \phi(t)\rangle_{E^*,E} dt + \int_0^\infty \langle \dot{w}(t), \dot{\phi}(t)\rangle_{E^*,E} dt$$
$$= \int_0^\infty \langle \ddot{w}(t), \phi(t)\rangle_{E^*,E} dt + \int_0^\infty (\dot{w}(t), \dot{\phi}(t))_{L^2} dt.$$

Analogamente, repetindo o mesmo argumento, mas com L^2 no lugar de E e $\dot{u}$ no de $\ddot{u}$,

$$-(w(0), \dot{\phi}(0))_{L^2} = \int_0^T (\dot{w}(t), \dot{\phi}(t))_{L^2} dt + \int_0^T (w(t), \ddot{\phi}(t))_{L^2} dt.$$

Por fim, como vale trivialmente

$$\langle (-\Delta w)(t), \phi(t)\rangle_{H^{-1},H^1} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w(t,x) \cdot \nabla \phi(t,x) dx$$
$$= \int w(t,x)(-\Delta\phi)(t,x) dx,$$

juntamos as três equações acima, a fim de se ter (3.6). (3.7) segue trivialmente desta. ////

Demonstração do teorema 3.1.1. Assim, caso u seja tal que $u(0) = \alpha$, $\dot{u}(0) = \beta$ e $\Box u(t,x) + f\big(u(t,x)\big) = 0$ no sentido de distribuições para quase todo $t > 0$, uma aplicação de (3.7) com $w = u$ com o teorema de Fubini na integral de $\Box u$ dá imediatamente (3.2).

Para a recíproca, devemos relembrar de um resultado clássico da teoria de distribuições que diz que existe uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ densa em C_c^∞ na topologia das funções-teste.[7] Fixando $n \geq 1$, escolha uma ϕ da forma $\phi(t,x) = \eta(t)h_n(x)$, onde $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Subtraindo então (3.6) com $w = u$ de (3.2), conseguimos a identidade

$$\int_0^\infty \langle \Box u(t) + f\big(u(t)\big), h_n\rangle \eta(t) dt = 0.$$

Já que isto vale para toda η, o lema fundamental do Cálculo das Variações (ou o teorema de Lusin) afirma que $\langle \Box u(t) + f\big(u(t)\big), h_n\rangle = 0$ para quase todo $t > 0$. Da densidade das h_n's, verificamos que $\langle \Box u(t) + f\big(u(t)\big), h\rangle = 0$ para quase todo $t > 0$ e toda função-teste $h \in C_c^\infty$. Isto claramente era tudo que precisávamos. ////

Um outro critério muito simples que deriva do teorema 3.1.1 fecha essa seção.

Corolário 3.1.1. *Pressuponha novamente a tripla (3.4), que u satisfaz (3.3) e $\ddot{u} \in L^2_{\text{loc}}((0,\infty); E^*)$ e que $\alpha, \beta \in L^2$. Então, para u ser solução de (3.1) é necessário e suficiente que $u(0) = \alpha$, $\dot{u}(0) = \beta$ e que*

$$-\int_0^\infty \big(\dot{u}(t), \dot{\phi}(t)\big)_{L^2} dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{\nabla u(t,x) \cdot \nabla\phi(t,x) + f\big(t,x,u(t,x)\big)\Big\} dx dt = 0 \tag{3.8}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Temos de mostrar que (3.8) é de fato equivalente a $\Box u + f(u) = 0$ para quase todo $t > 0$.

Com certeza, se $\Box u + f(u) = 0$, então algumas integrações por partes (tal como procedemos anteriormente) dão (3.8). Note que não há termos de fronteira já que $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$.

Reciprocamente, tomamos uma sequência (h_n) densa em C_c^∞ e estudamos (3.8) com uma função teste da forma $\phi(t,x) = \eta(t)h_n(x)$ com $\eta \in C_c^\infty(0,\infty)$. Realizando integrações por partes, reprisamos o argumento do teorema acima e concluímos que $\Box u + f(u) = 0$ para quase todo $t > 0$. ////

[7] Eis um esboço da prova desse fato. Escolha uma exaustão (ω_m) de $\mathbb{R}^N$. Para todo inteiro $k \geq 0$ e todo $m \geq 1$, $C_c^\infty(\omega_m)$ é um subespaço de $C^k(\omega_m)$, que é separável (com a sua topologia usual). Tome então $D_{m,k}$ um conjunto denso de $C_c^\infty(\omega_m)$. É fácil ver agora que a "sequência" $\cup_{k\geq 0, m\geq 1} D_{m,k}$ cumpre os requerimentos almejados.

3.2 A existência dos mínimos u_ε

Depois desse breve prelúdio, voltemos a estudar o problema com $f(t,x,u) = |u|^{p-1}u$:

$$\begin{cases}(\square u)(t,x) + |u(t,x)|^{p-1}u(t,x) = 0\\ u(0,x) = \alpha(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta(x)\end{cases} \tag{3.9}$$

com $p \geq 1$ e α e β em $H^1 \cap L^{p+1}$. Lembremos que a família de funcionais cujos mínimos queremos estudar é

$$F_\varepsilon(v) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon}\left\{\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,x)\right)^2 + \frac{1}{2}|\nabla v(t,x)|^2 + \frac{1}{p+1}|v(t,x)|^{p+1}\right\}dxdt. \tag{3.10}$$

O maior espaço linear no qual F_ε está (efetivamente) definido é o espaço $X = X_\varepsilon$ das funções u localmente integráveis, cujas derivadas em distribuição $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq N$, estão em $L^2_{\text{loc}}\big((0,\infty);\mathbb{R}^N\big)$ e para as quais a integral que define F_ε é finita. Introduzindo então a norma

$$\|u\|_X = \left\{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon}\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 + |\nabla u|^2\right)dxdt\right\}^{1/2} + \left\{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon}|u|^{p+1}dxdt\right\}^{1/(p+1)},$$

X se torna um espaço de Banach reflexivo.

Ademais, valem algumas imersões interessantes. Por restrição, é fácil ver que para todo $u \in X$, $T > 0$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, u (através a desigualdade de Hölder) e $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ estão em $L^2\big((0,T)\times\Omega\big) = L^2\big((0,T);L^2(\Omega)\big)$. Disto o exemplo 2.4.2 diz que

$$X \subset L^2\big((0,T);H^1(\Omega)\big) \text{ continuamente.}$$

Mais ainda, dessa integrabilidade quadrática local de u e de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, temos pelo teorema A.0.7 contido no apêndice A que analogamente $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\big((0,T)\times\Omega\big)$. Por conseguinte, obtemos uma segunda injeção:

$$X \subset H^2\big((0,T);L^2(\Omega)\big) \text{ continuamente.}$$

Logo, podemos falar nos traços de u e de $\dot{u}$ em $t = 0$. O conjunto $K = K_{\alpha,\beta} = \{u \in X; u(0) = \alpha, \dot{u}(0) = \beta\}$ é, pois as injeções do parágrafo anterior são contínuas, um convexo fechado em X. Além disso, K é não-vazio, uma vez que a função "afim" $g(t,x) = \alpha(x) + t\beta(x)$ está em X. Dado então que F_ε é uma função coerciva e estritamente convexa em K, F_ε possui um único mínimo em $u_\varepsilon \in K$ (veja, z. B., H. Brezis (2011)).

Finalmente, observe que se $u \in K$, $\ddot{u}$ está em $L^2_{\text{loc}}\big((0,\infty);L^2\big)$. Tal como após o enunciado do teorema 3.1.1 escoliamos, o teorema fundamental do Cálculo 2.3.5 diz que de fato $\dot{u}(t) = \beta + \int_0^t \ddot{u}(s)ds$ e $u = \alpha + \int_0^t \dot{u}(s)ds$, que estão ambas por conseguinte em $L^2_{\text{loc}}\big((0,\infty);L^2\big)$. Ou seja, $u \in H^2_{\text{loc}}\big((0,\infty);L^2\big)$. Assim provamos:

Teorema 3.2.1. *Para todo $\varepsilon > 0$ e α e β em $H^1 \cap L^{p+1}$, existe uma única função $u_\varepsilon \in H^2_{\text{loc}}\big((0,\infty);L^2\big)$ que minimiza F_ε na classe das funções $u \in H^2_{\text{loc}}\big((0,\infty);L^2\big)$ cujos traços são $u(0) = \alpha$ e $\dot{u}(0) = \beta$.*

Pois, se $v \in H^2_{\text{loc}}\big((0,\infty),L^2\big)$, mas não em X, então $F_\varepsilon(v) = \infty$. Logo, podemos nos restringir a K onde provamos a existência e a unicidade do mínimo.

Esta belíssima prova usa todo arsenal dos espaços de Lebesgue que desenvolvemos no primeiro capítulo. Gostaríamos no entanto de apontar que há uma segunda demonstração, à método direto do Cálculo de Variações, que pode ser generalizada para outras equações hiperbólicas, tal como discutiremos no próximo capítulo. Para isto, observemos que formal e fisicamente a energia potencial de (3.9) é a quantidade

$$V(u) = \int_{\mathbb{R}^N}\left\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\right\}dx. \tag{3.11}$$

No que se seguirá, será conveniente estudar a estrutura V como um funcional.

Primeiro definamos o seu domínio (efetivo). Escreva

$$E = H^1 \cap L^{p+1}$$

e tome nele a norma

$$\|u\|_E = \|u\|_{H^1} + \|u\|_{L^{p+1}}.$$

Note que $C_c^\infty \subset E \subset L^2$ densamente e continuamente e que E é per se um outro espaço de Banach reflexivo.[8] Ponha agora $V : L^2 \to [0, \infty]$ como $V(u)$ é igual a (3.11) se $u \in E$ e $V(u) = \infty$ quando não.

Com estas convenções, listamos as principais propriedades de V.

Teorema 3.2.2. *1. V é uma função convexa;*

2. $V(u) < \infty$ se, e somente se, $u \in E$;

3. V é semicontínua inferiormente na topologia fraca de L^2. Em particular, se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente, então $V(u) \leq \liminf V(u_n)$ (já que L^2 é separável);

4. V é diferenciável à Gateaux em E e sua derivada dV é dada por

$$\langle dV(u), h\rangle_{E^*,E} = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\nabla u(x) \cdot \nabla h(x) + |u(x)|^{p-1} u(x) h(x)\right\} dx \tag{3.12}$$

$\forall u, h \in E$.

5. Existe uma constante $C = C(p) > 0$ tal que

$$\|dV(u)\|_{E^*} \leq C\big(1 + V(u)^{1-1/(p+1)}\big) \tag{3.13}$$

para todo $u \in E$;

6. V satisfaz a seguinte condição à Lipschitz: existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|V(u+h) - V(u)| \leq C\big(1 + V(u)^{p/(p+1)} + \|h\|_E^p\big)\|h\|_E, \tag{3.14}$$

$\forall u, h \in E$.

Demonstração. 1.) e 2.) são imediatas.

Lembre-se que dizer que V é semicontínua inferiormente na topologia fraca de L^2 é o mesmo que dizer que os conjuntos $[V \leq \alpha] = \{u \in L^2; V(u) \leq \alpha\}$ são fechados (na topologia fraca) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Por causa de 1.), os $[V \leq \lambda]$'s são convexos e assim o teorema de Mazur afirma que estes conjuntos serão fechados na topologia fraca se e, somente se, o forem na topologia original de L^2 (advinda da norma).

Fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ e escreva $S = [V \leq \lambda]$. Claramente podemos supor que $S \neq \emptyset$, do contrário o resultado seria automaticamente verdadeiro. Tome portanto um ponto de acumulação u de S e escolha u_n em S tais que $u_n \to u$ em L^2. Como $V(u_n) \leq \lambda$, temos que $|\nabla u_n|_{(L^2)^N}$ e $\|u_n\|_{L^{p+1}}$ são limitadas, donde a reflexividade destes espaços dá que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente tanto em H^1 quanto em L^{p+1}. Assim, $|\nabla u|_{(L^2)^N} \leq \liminf |\nabla u_n|_{(L^2)^N}$

---

[8] Relembramos um pouco da teoria das somas e intersecções de espaços de Banach.

Sejam E e F espaços de Banach (sob suas normas $\|\ \|_E$ e $\|\ \|_F$, respectivamente) e suponha que exista um espaço vetorial topológico X no qual $E \subset X$ e $F \subset X$ continuamente. Nos subespaços $E \cap F$ e $E + F$ de X, introduzimos respectivamente as normas $\|u\|_{E\cap F} = \|u\|_E + \|u\|_F$ e $\|u\|_{E+F} = \operatorname{Inf} \|u_1\|_E + \|u_2\|_F$, onde este último ínfimo se dá no conjunto dos $u_1 \in E$ e $u_2 \in F$ tais que $u = u_1 + u_2$. Usando o fato de X satisfaz o axioma da separação de Haussdorf (pois todo espaço vetorial topológico o cumpre) e um argumento semelhante àquele usado para mostrar que espaços quocientes são completos, pode-se provar que $E \cap F$ e $E + F$ são também de Banach.

Assuma agora que adicionalmente exista um outro espaço vetorial topológico X_0 tal que E^* e F^* estão também continuamente contidos em X_0. Neste caso, se E e F forem reflexivos, então $E \cap F$ e $E + F$ também o serão. De fato, é muito bem conhecido que espaço produto $E \times F$ será reflexivo. Assim, pode-se interpretar $E \cap F$ como um subespaço fechado de $E \times F$ (informalmente sua "diagonal"), verificando sua reflexividade. Ainda mais, entendendo $E + F$ como o espaço quociente $(E \times F)/(E \cap F)$, este também é reflexivo.

Se adicionalmente $E \cap F$ for denso tanto em E e em F, não é difícil se verificar que podemos identificar isometricamente $(E+F)^* = E^* \cap F^*$. Por outro lado, $(E \cap F)^* = (E^{**} \cap F^{**})^* = (E^* + F^*)^{**} = E^* + F^*$.

A situação que encontraremos nessa dissertação em geral é o caso em que $X = X_0 = \mathscr{D}'$ e E e F são espaços de Lebesgue ou de Sobolev, possibilitando a aplicação da discussão acima.

As conclusões anteriores valeriam no caso geral (sem a hipótese de reflexividade), mas as provas são mais intrincadas; veja J. Bergh–J. Löfström (1976).

e $\|u\|_{L^{p+1}} \leq \liminf \|u_n\|_{L^{p+1}}$, o que finalmente leva a $V(u) \leq \liminf V(u_n) \leq \lambda$. Logo $u \in S$ e este é fechado. Isto prova 3.).

V pode ser escrita como $V(u) = \frac{1}{2}a(u,u) + F(u)$, onde $a(u,h) = \int \nabla u \cdot \nabla h dx$ é uma forma bilinear limitada em H^1 e $F(u) = \int |u|^{p+1}dx$ é um operador de Neminski de classe C^1 em L^{p+1}, cuja diferencial é $\langle dF(u), h\rangle = \int |u|^{p-1}uhdx$. Portanto, V é de fato de classe C^1 em E e sua derivada é dada pela fórmula (3.12), demonstrando 4.).

5.) é uma consequência da representação de 4.) mais uma simples aplicação das desigualdades de Hölder e Young e da observação de que $p/(p+1) = 1 - 1/(p+1)$:

$$\begin{aligned}|\langle dV(u), h\rangle| &= \int \Big\{\nabla u \cdot \nabla h + |u|^{p-1}uh\Big\}dx \\ &\leq \Big(\int |\nabla u|^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int |\nabla h|^2 dx\Big)^{1/2} + \|u\|_{p+1}^p \|h\|_{p+1} \\ &\leq C\big(1 + V(u)^{1-1/(p+1)}\big)\|h\|_E.\end{aligned}$$

Por fim, para 6.), podemos evidentemente assumir que $h \neq 0$ e assim escrever $\phi(t) = V(u + th/\|h\|_E)$ ($t \geq 0$). ϕ é uma função real de classe C^1 e 5.) afirma que $|\phi(t)| \leq C\big(1 + \phi(t)^{1-1/(p+1)}\big)$. Portanto, uma desigualdade à Gronwall[9] leva à estimativa $\phi(t) \leq C\big(1 + \phi(0)^{1/(p+1)} + t\big)^{p+1}$, ou seja, $V(u + th) \leq C\big(1 + V(u)^{1/(p+1)} + \|th\|_E\big)^{p+1}$. Voltando a 5.), obtemos $\|dV(u + th)\|_{E^*} \leq C\big(1 + V(u)^{1/(p+1)} + \|th\|_E\big)^p \leq C\big(1 + V(u)^{p/(p+1)} + \|th\|_E^p\big)$, produzindo (3.14) através da desigualdade do valor médio. ////

Com V, podemos escrever o funcional (3.10) mais sucintamente como

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}\Big\{\frac{\varepsilon^2}{2}|\ddot{u}(t)|_{L^2}^2 + V\big(u(t)\big)\Big\}dt, \tag{3.15}$$

fórmula que faz sentido para qualquer $u \in H^2_{\mathrm{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$, se obviamente permitirmos o valor $+\infty$. Mostremos que, só com as propriedades 2.)–6.) listadas no teorema (6.3), seria possível mostrar a existência do mínimo u_ε (a unicidade deste entretanto depende fortemente da propriedade 1.)).

Ponha novamente $K = \{u \in X; u(0) = \alpha, \dot{u}(0) = \beta\}$. F_ε não é identicamente $+\infty$ em K, já que é finita na mesma função afim $g(t) = \alpha + t\beta \in K$. É possível então escolher uma sequencia minimizante $v_n \in K$, isto é, tal que $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \to m = \mathrm{Inf}_K\, F_\varepsilon$.

Pela expressão de F_ε, a sequência $\ddot{v}_n$ é limitada em $H^2\big((0,T;L^2)\big)$ para todo $T > 0$. Portanto, usando um processo diagonal, existe uma subsequência de $\ddot{v}_n$ que converge fracamente em $H^2\big((0,T); L^2\big)$ a uma função $u_\varepsilon \in H^2_{\mathrm{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$ para todo $T > 0$. Como em particular $\dot{v}_n \rightharpoonup \dot{u_\varepsilon}$ e $\ddot{v}_n \rightharpoonup \ddot{u}_\varepsilon$ fracamente em $L^2\big((0,T;L^2)\big)$, uma passagem ao limite na expressões

$$\begin{aligned}v_n(t) &= \alpha + \int_0^t \dot{v}_n(s)ds \\ \dot{v_n}(t) &= \beta + \int_0^t \ddot{v}_n(s)ds\end{aligned}$$

diz que $v_n(t) \rightharpoonup u_\varepsilon(t)$ e $\dot{v}_n(t) \rightharpoonup \dot{u}_\varepsilon(t)$ fracamente em L^2 para *todo* $t \geq 0$. Logo $u_\varepsilon \in K$. Verifiquemos que de fato u_ε minimiza F_ε.

Evidentemente, qualquer que seja $T > 0$, temos que

$$\int_0^T e^{-t/\varepsilon}|\ddot{u}_\varepsilon(t)|_{L^2}^2 dt \leq \liminf \int_0^T e^{-t/\varepsilon}|\ddot{v}_n(t)|_{L^2}^2 dt \leq \liminf \int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}|\ddot{v}_n(t)|_{L^2}^2 dt$$

---

[9]Verifiquemos esta desigualdade. Escrevendo $\theta = 1 - 1/(p+1) \in (0,1)$, defina $g(s) = \big|\int_0^s d\xi/(1+\xi^\theta)\big|$. É fácil ver que, qualquer que seja $0 < \gamma < 1$, existe uma constante $C = C(\gamma) > 0$ tal que $\gamma|s|^{1-\theta} - C \leq g(s) \leq |s|^{1-\theta}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. A relação sobre ϕ afirma que $g\big(\phi(t)\big) - g\big(\phi(0)\big) \leq Ct$, donde $|\phi(t)| \leq C(1 + \phi(0)^{1-\theta} + t)^{1/(1-\theta)}$.

donde passando o limite $T \to \infty$, obtemos

$$\int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}|\ddot{u}_\varepsilon(t)|_{L^2}^2 dt \leq \liminf \int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}|\ddot{v}_n(t)|_{L^2}^2 dt.$$

Por outro lado, a semicontinuidade inferior de V e lema de Fatou afirmam que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t/\varepsilon} V\big(u_\varepsilon(t)\big)dt &\leq \int_0^\infty \liminf \Big(e^{-t/\varepsilon} V\big(v_n(t)\big)\Big)dt \\ &\leq \liminf \int_0^\infty e^{-t/\varepsilon} V\big(v_n(t)\big)dt.\end{aligned}$$

Logo, juntando estas duas desigualdades, finalmente provamos que

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \liminf F_\varepsilon(v_n) = m.$$

Isto então conclui a segunda prova do teorema 3.2.1.

3.3 Estimativas a priori para u_ε, parte 1

Por enquanto, será conveniente se mudar a escala de tempo de t para εt. Desse modo, pondo

$$w_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(\varepsilon t)$$

temos que $w_\varepsilon \in H^2_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$. Não é difícil ver que valem as seguintes relações

$$\dot{w}_\varepsilon(t) = \varepsilon \dot{u}_\varepsilon(\varepsilon t), \quad \ddot{w}_\varepsilon(t) = \varepsilon^2 \ddot{u}_\varepsilon(\varepsilon t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Além disso, $w_\varepsilon(t)$ podem ser caracterizadas como os mínimos dos funcionais

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) &= \int_0^\infty e^{-t} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,x)\right)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + \frac{1}{p+1}|v(t,x)|^{p+1} \right\} dx dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \left\{ \frac{|\ddot{v}(t)|_{L^2}^2}{2\varepsilon^2} + V\big(v(t)\big) \right\} dt \end{aligned} \tag{3.16}$$

sujeito as condições inciais

$$v(0) = \alpha, \; \dot{v}(0) = \varepsilon\beta$$

na classe $H^2_{\text{loc}}((0,\infty); L^2)$.

Como é de especial interesse fazer o limite $\varepsilon \to 0$, **estaremos tacitamente assumindo que** $0 < \varepsilon < 1$.

Lema 3.3.1. *Existe uma constante $C = C(\alpha, \beta)$ tal que*

$$J_\varepsilon(w_\varepsilon) \leq V(\alpha) + C\varepsilon. \tag{3.17}$$

e, particularmente,

$$J_\varepsilon(w_\varepsilon) \leq C. \tag{3.18}$$

Demonstração. Como enfatizamos na seção passada, a função afim $g(t) = \alpha + \varepsilon t \beta$ está classe das funções sobre a qual estamos minimizando J_ε, donde aplicando a estimativa à Lipschitz (3.14) temos

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(w_\varepsilon) &\le J_\varepsilon(g)\\
&= \int_0^\infty e^{-t} V(\alpha + \varepsilon t\beta)dt\\
&\le \int_0^\infty e^{-t}\{V(\alpha) + C\varepsilon t(1 + V(\alpha)^{p/(p+1)} + \varepsilon^p t^p \|\beta\|_E)\|\beta\|_E\}dt\\
&\le V(\alpha) + C\varepsilon.
\end{aligned}$$

////

Para facilitar a escrita, introduziremos algumas funções escalares. Dado $\varepsilon > 0$, escreva para $t > 0$

$$\begin{aligned}
V_\varepsilon(t) &= V_\varepsilon\big(w_\varepsilon(t)\big) &&= \text{energia potencial no instante } t;\\
D_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2\varepsilon^2}|\ddot{w}_\varepsilon(t)|_{L^2}^2;\\
L_\varepsilon(t) &= D_\varepsilon(t) + V_\varepsilon(t) &&= \text{lagrangeano de } J_\varepsilon;\\
K_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2\varepsilon^2}|\dot{w}_\varepsilon(t)|_{L^2}^2 &&= \text{energia cinética no instante } t.
\end{aligned}$$

Segundo lema 6.3, K_ε está em $W^{1,1}_{\text{loc}}(0,\infty)$ e

$$K_\varepsilon'(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^n} \dot{w}_\varepsilon(t,x)\ddot{w}_\varepsilon(t,x)dx. \tag{3.19}$$

Lema 3.3.2. *Para toda função $y \in H^1_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$ vale a desigualdade*

$$\int_0^\infty e^{-t}|y(t)|_{L^2}^2 dt \le 2|y(0)|_{L^2}^2 + 4\int_0^\infty e^{-t}|\dot{y}(t)|_{L^2}^2 dt. \tag{3.20}$$

Observe que a convergência de nenhuma integral acima é admitida em princípio.

Demonstração. Conforme o teorema , para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, a função $t \mapsto y(t,x)$ está em $H^1_{\text{loc}}(0,\infty)$ e sua derivada é precisamente $\dot{y}(t,x)$. Portanto, para todo $T > 0$, podemos integrar por partes e ter

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-t}|y(t,x)|^2 dt &= -e^{-t}|y(t,x)|^2\Big|_0^T + 2\int_0^T e^{-t}y(t,x)\dot{y}(t,x)dt\\
&\le |y(0,x)|^2 + 2\Big(\int_0^T e^{-t}|y(t,x)|^2dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T e^{-t}|\dot{y}(t,x)|^2dt\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Young $2\sqrt{ab} \le a/2 + 2b$, ficamos com

$$\int_0^T e^{-t}|y(t,x)|^2 dt \le 2|y(0,x)|^2 + 4\int_0^T e^{-t}|\dot{y}(t,x)|^2 dt.$$

Para finalizar, é só necessário integrar sobre x e passar $T \to \infty$. ////

Lema 3.3.3. *Existe uma constante $C = C(\alpha,\beta)$ tal que*

$$\int_0^\infty e^{-t}D_\varepsilon(t)dt \le C; \tag{3.21}$$

$$\int_0^\infty e^{-t}K_\varepsilon(t)dt \le C; \tag{3.22}$$

$$\int_0^\infty e^{-t}|w_\varepsilon(t)|_{L^2}^2 dt \le C. \tag{3.23}$$

Demonstração. (3.21) é uma consequência gratuita de (3.18). Aplicando a desigualdade (3.20) em $y(t,x) = \dot{w}_\varepsilon(t,x)$, temos imediatamente (3.22). Novamente (3.20), mas agora com $y(t,x) = w_\varepsilon(t,x)$, obtemos (3.23). ////

3.4 Estimativas a priori para u_ε, parte 2

As desigualdades acima têm a grande desvantagem de envolver um termo exponencial nos integrandos. Assim, o limite $\varepsilon \to 0$ acarreta uma perda severa de informação acerca dos u_ε. A solução para isto é a introdução de uma quantidade que chamaremos de "energia aproximada", que, como a energia usual, assere que algumas normas dos minimizadores não degeneram com o tempo.

Para definir esta função, introduziremos uma operação de média. Dada uma função mensuravél não-negativa $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$(Af)(t) = \int_t^\infty e^{-(\xi-t)} f(\xi)d\xi, \quad t \geq 0.$$

Como $f \geq 0$, Af fica bem definida, possivelmente $+\infty$. No entanto, é fácil ver que, caso $(Af)(0) = \int_0^\infty e^{-\xi} f(\xi)d\xi < \infty$, Af estará em $W^{1,1}_{\text{loc}}(0,\infty)$ e

$$\frac{d}{dt}(Af)(t) = (Af)(t) - f(t).$$

De qualquer forma, uma vez que $Af \geq 0$ e mensurável, podemos reaplicar o operador A e obter $A^2 f$. Uma simples aplicação do teorema de Fubini dá a fórmula

$$\begin{aligned}
(A^2 f)(t) &= e^t \int_t^\infty \int_s^\infty e^{-\xi} f(\xi)d\xi ds \\
&= \int_t^\infty \int_0^\infty 1_{(s,\infty)} e^{t-\xi} f(\xi)d\xi ds \\
&= \int_0^\infty e^{t-\xi} f(\xi)\left(\int_t^\infty 1_{(s,\infty)}(\xi)ds\right)d\xi \\
&= \int_t^\infty e^{-(\xi-t)}(t-\xi)f(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Definimos portanto para $0 < \varepsilon < 1$ a ENERGIA APROXIMADA $\widetilde{e}_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ de w_ε por

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_\varepsilon(t) &= K_\varepsilon(t) + (A^2 V_\varepsilon)(t) \\
&= K_\varepsilon(t) + \int_t^\infty e^{-(\xi-t)}(\xi - t)V\big(w_\varepsilon(\xi)\big)d\xi.
\end{aligned}$$

A intuição por trás dessa é a seguinte. Enquanto o termo da energia cinética é preservado, nós extraímos uma média da energia potencial por meio do núcleo de probabilidade $e^{-(\xi-t)}(\xi - t)$. Quando voltamos para o parâmetro $t \mapsto t/\varepsilon$ original, este núcleo concentra em t para o delta de Dirac. Por conta disto, heuristicamente poderíamos imaginar que $\widetilde{e}_\varepsilon(t/\varepsilon) \approx e(t)$, onde $e(t)$ é a energia física $\int(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1})dx$. Para isto, obviamente já estamos pressupondo que u_ε converge a u em algum sentido.

Pelo lema 3.3.1, $(AV_\varepsilon)(0) \leq (AL_\varepsilon)(0) = J_\varepsilon(w_\varepsilon) \leq C$, de modo que AV_ε é, pela discussão acima, uma função relativamente bem-comportada. Não há, no entanto, razão óbvia para supor o mesmo de $A^2 V_\varepsilon$ e ver que $\widetilde{e}_\varepsilon$ é sempre finita. De fato, mostraremos que, não apenas a energia aproximada é limitada, como é não-crescente. O passo fundamental para a prova disto é o seguinte lema técnico.[10]

[10]No artigo original de Serra e Tilli (2012), é prestada atenção à uma outra quantidade que se assemelha com energia, que é

$$Q_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon^2}\int \dot{w}_\varepsilon^2 dx - \frac{1}{\varepsilon^2}\int \dot{w}_\varepsilon \ddot{w}_\varepsilon dx - e^t \int_t^\infty e^{-s} L_\varepsilon(s)ds.$$

A propriedade especial de $Q_\varepsilon(t)$ é que sua derivada em distribuição é $Q_\varepsilon'(t) = -4D_\varepsilon(t) \leq 0$, donde $Q_\varepsilon \in W^{1,1}_{\text{loc}}((0,\infty))$ e é

Lema 3.4.1. *Para toda função $\phi \in C^2([0,\infty))$ tal que $\phi(0) = 0$ e tal que ϕ' tem suporte compacto, temos*

$$\int_0^\infty e^{-s}(\phi'(s) - \phi(s))L_\varepsilon(s)ds - \int_0^\infty e^{-s}(4D_\varepsilon(s)\phi'(s) + K_\varepsilon'(t)\phi''(t))ds = \phi'(0)R(w_\varepsilon) \tag{3.24}$$

onde

$$R(w_\varepsilon) = -\varepsilon \int_0^\infty e^{-s}s\langle dV(w_\varepsilon(s)), \beta\rangle_{E^*,E}ds \tag{3.25}$$

Mais ainda, existe uma constante $C = C(\alpha,\beta) \geq 0$ tal que

$$|R(w_\varepsilon)| \leq C\varepsilon. \tag{3.26}$$

Demonstração. A ideia é gerar uma família de "competidores" de $w_\varepsilon(t)$ variando a escala temporal e assim usar a equação de Euler de J_ε para obter a lei de conservação (3.24). Tornemos este argumento rigoroso. Como ε estará fixo, omitiremos os índices que o envolvem.

Observe que a hipótese sobre ψ afirma que ela é constante para t suficientemente grande, logo limitada. Portanto, para $\delta \in (-\infty,\infty)$ suficientemente pequeno, a funções

$$t \in [0,\infty) \mapsto g^\delta(t) = g(t;\delta) = t - \delta\phi(t) \tag{3.27}$$

são difeomorfismos de classe C^2 em $(0,\infty)$ que variam suavemente com o parâmetro δ. Denotemos então por $\psi(s;\delta)$ as suas inversas em t, i.e., $\psi(g(t;\delta);\delta) = t = g(\psi(t;\delta);\delta)$ para todo $t \geq 0$ e δ pequeno. É fácil ver que $t \mapsto \psi(t;\delta)$ também é um difeomorfismo de classe C^2 e que $\psi(t;\delta)$ depende diferenciavelmente em δ.

Para estes δ's, ponha

$$w^\delta(t) = w(t;\delta) = u\big(g(t;\delta)\big) - t\delta\varepsilon\phi'(0)\beta.$$

As funções w^δ satisfazem as condições iniciais $w(0;\delta) = \alpha$ e $w_t(0;\delta) = \beta$. Ademais, um cálculo direto dá

$$\begin{aligned} w_t(t;\delta) &= g_t(t;\delta)\dot{w}\big(g(t;\delta)\big) + \delta\varepsilon\phi'(0)\beta \\ w_{tt}(t;\delta) &= g_t(t;\delta)^2\ddot{w}\big(g(t;\delta)\big) + g_{tt}(t;\delta)\dot{w}\big(g(t;\delta)\big). \end{aligned}$$

Assim, w^δ faz parte de $H^2_{\text{loc}}((0,\infty);L^2)$ e podemos calcular

$$J(w^\delta) = \int_0^\infty e^{-t}\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2}\left|g_t(t;\delta)^2\ddot{w}\big(g(t;\delta)\big) + g_{tt}(t;\delta)\dot{w}\big(g(t;\delta)\big)\right|^2_{L^2} + V\Big(w\big(g(t;\delta)\big) + t\delta\varepsilon\phi'(0)\beta\Big)\right\}dt,$$

o que, realizando a mudança de variável $t = \psi(t;\delta)$, se transforma na fórmula

$$\begin{aligned} J(w^\delta) = \int_0^\infty \psi(s;\delta)e^{-\psi(s;\delta)}\bigg\{&\frac{1}{2\varepsilon^2}\big|g_t(\psi(s;\delta);\delta)^2\ddot{w}(s) \\ &+ g_{tt}\big(\psi(s;\delta);\delta\big)\dot{w}(s)\big|^2_{L^2} + V\big(w(s) + \delta\varepsilon\phi'(0)\psi(s)\beta\big)\bigg\}ds. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Da definição de g em (3.27) e de ψ, temos que $s = g\big(\psi(s;\delta);\delta\big) = \psi(s;\delta) - \delta\phi(\psi(t;\delta))$, ou seja,

$$\psi(s;\delta) = s + \delta\phi\big(\psi(s;\delta)\big). \tag{3.29}$$

Por conseguinte $|\psi(s;\delta) - s| \leq \delta\|\phi\|_\infty$ e $e^{-\psi(s;\delta)} \leq e^{\delta\|\phi\|_\infty}e^{-s}$. Por outro lado, (3.14) afirma que

$$V\big(w(s) + \delta\varepsilon\phi'(0)\psi(s)\beta\big) \leq C\big(1 + V\big(w_\varepsilon(s)\big) + \psi(s;\delta)^{p/(p+1)}\big).$$

---

não-crescente. Formalmente, esta identidade poderia ter sido obtida através da equação de Euler para J_ε com uma variação do tipo $\eta(t)\dot{u}_\varepsilon(t)$, onde $\eta \in C_c^\infty(0,\infty)$; o problema seria a produção de termos como $|u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon\dot{u}_\varepsilon$, que podem deixar de ser integráveis.

Mesmo assim, o resultado original para esta $Q_\varepsilon(t)$ pode ser obtida através do lema 3.4.1 tomando $\phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$, onde $\varphi \in C_c^\infty(0,\infty)$, e realizando uma série tediosa de cálculos envolvendo $e^t\phi(t)$.

Consequentemente, a discussão acima junto com o lema 3.3.3 e a limitação de $\|g_t^\delta\|_{L^\infty}$ e $\|g_{tt}^\delta\|_{L^\infty}$ mostra que $J(w^\delta)$ permanece finito e portanto as w^δ's pertencem à classe K definida na seção 3.2.

Agora a nossa vontade é derivar $J(w^\delta)$ em $\delta = 0$. De fato, essa derivada existe e vale a regra de Leibniz, ou seja, a permutação entre a derivada e o sinal da integral. A razão disto é quase idêntica à prova da finitude de $J(w^\delta)$. Com efeito, devido à fórmula (3.29), realmente o único termo que poderia causar algum problema é aquele que envolve V. Entretanto, o fato de V ser diferenciável à Gâteaux e satisfazer a condição de Lipschitz (3.14), mostra que se pode aplicar facilmente o teorema da convergência dominada no quociente $\big(J(w^\delta) - J(w)\big)/\delta$ e concluir o que queríamos.[11]

Com isto, computemos a identidade

$$\frac{d}{d\delta} J(w^\delta)_{|\delta=0} = 0. \tag{3.30}$$

De (3.29), temos que

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\Big(\psi'(s)e^{-\psi(s)}\Big)_{|\delta=0} = \phi(s)e^{-s} - g'(s)e^{-s}.$$

Mais cálculos diretos dão

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\Big(g_t\big(\psi(s;\delta)\big)^2\Big)_{|\delta=0} = -2\phi'(s), \quad \frac{\partial}{\partial\delta}\Big(g_{tt}\big(\psi(s;\delta)\big)\Big)_{|\delta=0} = -\phi''(s).$$

Se $\{\ldots\}$ é a função entre chaves em (3.28), então

$$\begin{aligned}
\{\ldots\}_{|\delta=0} &= D(s) + V(s) = L(s)\\
\frac{\partial}{\partial\delta}\{\ldots\}_{|\delta=0} &= -\frac{1}{\varepsilon^2}\big(\ddot{w}(s), 2\phi'(s)\ddot{w}(s) + \phi''(s)\dot{w}(s)\big) + \varepsilon\phi'(0)s\big\langle dV\big(u(s)\big), \beta\big\rangle_{E^*,E}\\
&= -4D(s)\phi'(s) - K'(s)\phi''(s) + \varepsilon\phi'(0)s\big\langle dV\big(u(s)\big), \beta\big\rangle_{E^*,E}.
\end{aligned}$$

Combinando estas resultados, então concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\delta}\Big(\phi'(s)e^{-\phi(s)}\{\ldots\}\Big)_{|\delta=0} &= e^{-s}\big(\phi'(s) - \phi(s)\big)L(s)\\
&\quad - e^{-s}\Big(4D(s)\phi'(s) + K'(s)\phi''(s)\Big)\\
&\quad + \phi'(0)e^{-s}\varepsilon s\big\langle dV\big(u(s)\big), \beta\big\rangle_{E^*,E}.
\end{aligned}$$

Logo, integrando essa expressão, estabelecemos que (3.30) é exatamente (3.24).

Por fim, aplicamos (3.13), a desigualdade de Young e a estimativa (3.18) para constatar

$$\begin{aligned}
|R(w_\varepsilon)| &\le \varepsilon\int_0^\infty e^{-s}s\|dV\big(w_\varepsilon(s)\big)\|_{E^*}\|\beta\|_E ds\\
&\le C\varepsilon\int_0^\infty e^{-s}s\big(1 + V(s)^{1-1/(p+1)}\big)ds\\
&\le C\varepsilon\left(1 + \int_0^\infty e^{-s}s^{p+1}ds + \int_0^\infty e^{-s}V(s)ds\right)ds\\
&\le \big(C + CJ(w_\varepsilon)\big)\varepsilon\\
&\le C\varepsilon,
\end{aligned}$$

verificando (3.26) e encerrando assim a prova deste lema. ////

Corolário 3.4.1. *A identidade (3.24) vale mesmo que ϕ for de classe $C^{1,1}$ (isto é, ϕ' é lipschitiziana) com $\phi(0) = 0$ e $\phi'(t)$ tem suporte compacto.*

[11]Nós omitimos todos os passos, uma vez que a escrita se tornaria desagrádavel. Não obstante, um raciocínio igual reaparece no lema 3.5.1, onde é possível exibir o procedimento por completo de maneira indolor.

Particularmente, para $\phi(t) = t$

$$(A^2L_\varepsilon)(0) + 4(AD_\varepsilon)(0) = (AL_\varepsilon)(0) - R(w_\varepsilon). \tag{3.31}$$

Demonstração. A dificuldade dessa demonstração é a exibição de uma sequência de funções (ϕ_n), cada uma delas de classe C^2, tal que:

1. cada $\phi_n'(t)$ tem suporte compacto;
2. $\phi_1(t) \le \phi_2(t) \le \ldots \le \phi(t)$ e $\phi_n(t) \to \phi(t)$ ponto-a-ponto para todo $0 \le t < \infty$;
3. $\phi_1'(t) \le \phi_2'(t) \le \ldots \le \phi'(t)$ e $\phi_n'(t) \to \phi'(t)$ ponto-a-ponto para todo $0 \le t < \infty$;
4. $\phi_n''(t) \to \phi''(t)$ em quase todo $0 < t < \infty$;
5. existe $C > 0$ tal que $\|\phi_n''\|_\infty \le C$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Admitindo por um instante a exibição de tais ϕ_n, vejamos como conclui a prova.

Por causa do lema 3.3.3, tanto $e^{-t}L_\varepsilon(t)$ e $e^{-t}D_\varepsilon(t)$ estão em $L^1(0,\infty)$. Por outro lado, pela expressão (3.19) e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^\infty e^{-t}|K_\varepsilon'(t)|dt \le \Big\{\int_0^\infty 2e^{-t}K_\varepsilon(t)dt\Big\}^{1/2}\Big\{\int_0^\infty 2e^{-t}D_\varepsilon(t)dt\Big\}^{1/2} < \infty,$$

segundo a desigualdade (3.18). Portanto, $e^{-t}K_\varepsilon'(t)$ também está em L^1.

Assim uma aplicação do teorema da convergência dominada mostra que todas em integrais em (3.24) com $\phi = \phi_n$ passam ao limite quando $n \to \infty$, exceto pela integral de $e^{-t}\phi_n(t)L_\varepsilon(t)$. Para esta, entretanto, pode-se aplicar o teorema da convergência monótona e $\int_0^\infty e^{-t}\phi(t)L_\varepsilon(t)dt$ existe, por causa da limitação de todos os outros termos. Isto prova o corolário.

Resta agora verificar que há de fato uma sequência como (ϕ_n). Para isto, seja ρ_δ uma aproximação da identidade (ou um núcleo de Dirac) em $(-\infty,\infty)$ e escolha $\delta_n \to 0$ tal que, se $\psi_n(t) = (\rho_{\delta_n} * \phi'')(t)$, $\psi_n \to \phi''$ em quase todo ponto e em L^1 e $\sum \|\psi_{n+1} - \psi_n\|_{L^1} < \infty$.

Pondo $a_n = \|\psi_{n+1} - \psi_n\|_{L^1}$, defina $b_n = \sum_{k \ge n} a_k \to 0$ e $\phi_n'(t) = \eta(t/n)\{\phi'(0) - b_n + \int_0^t \psi_n(s)ds\}$, onde η é uma função suave que é igual a 1 para $|t| \le 1$ e 0 para $|t| \ge 2$. Uma verificação mostra que $\phi_n(t) = \int_0^t \psi_n(s)ds$ satisfaz então as propriedades desejadas.

////

Corolário 3.4.2. *Para quase todo $t > 0$*

$$(A^2L_\varepsilon)(t) - (AL_\varepsilon)(t) + K_\varepsilon'(t) = -4(AD_\varepsilon)(t). \tag{3.32}$$

Demonstração. Primeiro defina a função $\phi \in C^{1,1}(\mathbb{R})$ por $\phi(\xi) = 0$ para $\xi \le 0$, $\phi(\xi) = \xi^2/2$ se $0 \le \xi \le 1$ e $\phi(\xi) = \xi - 1/2$ caso $\xi > 1$. Então, para $\delta > 0$ a função $\phi_\delta(\xi) = \delta\phi\big((\xi - t)/\delta\big)$ satisfaz as condições do corolário 3.4.1 com $\phi_\delta''(\xi) = \frac{1}{\delta}1_{(t,t+\delta)}(\xi)$. Assim, escrevendo $\phi = \phi_\delta$ e rearranjando os termos, temos

$$\int_t^\infty e^{-\xi}\big(\phi_\delta(\xi) - \phi_\delta'(\xi)\big)L_\varepsilon(\xi)d\xi + \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} e^{-\xi}K_\varepsilon(\xi)d\xi = -4\int_t^\infty D_\varepsilon(\xi)\phi_\delta'(\xi)d\xi.$$

Entretanto, quando $\delta \to 0$, $\phi_\delta(\xi) \to (\xi - t)^+ =$ [parte positiva de $(\xi - t)$] enquanto $\phi_\delta'(\xi) \to 1_{(t,\infty)}(\xi)$ para quase todo ξ. Como valem as desigualdades $\phi_\delta(\xi) \le (t-\xi)^+$ e $|\phi_n'(t)| \le 1$, os teoremas da convergência dominada e da diferenciação de Lebesgue acarretam que

$$\int_t^\infty (\xi - t)e^{-\xi}L_\varepsilon(\xi)d\xi - \int_t^\infty e^{-\xi}L_\varepsilon(\xi) + e^{-t}K_\varepsilon(t) = 4\int_t^\infty e^{-\xi}D_\varepsilon(\xi)d\xi$$

para quase todo $t > 0$. O resultado segue então multiplicando ambos membros por e^t. ////

Teorema 3.4.1. *As funções* $\widetilde{e}_\varepsilon$ *estão em* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$ *e são não-crescentes, pois*

$$\widetilde{e}_\varepsilon'(t) \leq 0. \tag{3.33}$$

Há assim uma constante $C = C(\alpha,\beta)$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < 1$

$$\widetilde{e}_\varepsilon(t) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2}|\beta(x)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\alpha(x)|^2 + \frac{1}{p+1}|\alpha(x)|^{p+1} \right\} dx + C\varepsilon. \tag{3.34}$$

Demonstração. Porque $V_\varepsilon \leq L_\varepsilon$, os lemas 3.4.1 e 3.4.2 asserem que $(A^2 V_\varepsilon)$ pertence a $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$. Disto (3.19) mostra que $\widetilde{e}_\varepsilon \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$. Assim, diferenciando $\widetilde{e}_\varepsilon$, temos

$$\widetilde{e}_\varepsilon'(t) = K_\varepsilon'(t) - (AV_\varepsilon)(t) + (A^2 V_\varepsilon)(t).$$

Uma vez que $V_\varepsilon = L_\varepsilon - D_\varepsilon$, o corolário 3.4.2 assere que

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_\varepsilon'(t) &= K_\varepsilon'(t) - (AL_\varepsilon)(t) + (AD_\varepsilon)(t) + (A^2 L_\varepsilon)(t) - (A^2 D_\varepsilon)(t) \\
&= -(3AD_\varepsilon)(t) - (A^2 D_\varepsilon)(t) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Isto mostra (3.33). Agora, integrando esta desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_\varepsilon'(t) &\leq \widetilde{e}_\varepsilon(0) \\
&= K_\varepsilon(0) + (A^2 V_\varepsilon)(0) \\
&\leq K_\varepsilon(0) + (A^2 L_\varepsilon)(0).
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando (3.17), (3.26) e (3.31), alcançamos

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_\varepsilon(t) &\leq K_\varepsilon(0) + (AL_\varepsilon)(0) - R(w_\varepsilon) \\
&= K_\varepsilon(0) + J_\varepsilon(w_\varepsilon) - R(w_\varepsilon) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2}|\beta(x)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\alpha(x)|^2 + \frac{1}{p+1}|\alpha(x)|^{p+1} \right\} dx + C\varepsilon
\end{aligned}$$

como queríamos. ////

3.5 Estimativas a priori para u_ε, *outro*

Retornemos agora para os minimizadores originais $u_\varepsilon(t)$, dados por $u_\varepsilon(\varepsilon t) = w_\varepsilon(t)$. O resultado central desta sessão que justifica todo o trabalho anterior, é o seguinte.

Teorema 3.5.1. *Nas condições deste capítulo, existe uma constante* $C = C(\alpha,\beta)$ *tal que*

$$\int_t^{t+T} V\big(u_\varepsilon(\xi)\big) d\xi \leq CT, \quad t \geq 0 \quad T \geq \varepsilon; \tag{3.35}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\dot{u}_\varepsilon(t,x)|^2 dx \leq C, \quad t > 0; \tag{3.36}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(t,x)|^2 dx \leq C(1+t^2), \quad t > 0; \tag{3.37}$$

$$\|\ddot{u}_\varepsilon\|_{L^\infty((0,\infty);E^*)} \leq C. \tag{3.38}$$

Demonstração de (3.35). Uma vez que $0 \le V_\varepsilon \le L_\varepsilon$, a desigualdade 3.18 dá imediatamente

$$e^{-2}\int_0^2 V_\varepsilon(\xi)d\xi \le \int_0^2 e^{-\xi}L_\varepsilon(\xi)d\xi \le C. \tag{3.39}$$

Agora, como o mínimo de $s \in [1,2] \mapsto se^{-s}$ se dá em $s = 2$, o teorema 3.4.1 diz que para qualquer $t \ge 0$

$$e^{-2}\int_{t+1}^{t+2} V_\varepsilon(\xi)d\xi \le \int_{t+1}^{t+2}(t-\xi)e^{-(t-\xi)}L_\varepsilon(\xi)d\xi \le (A^2V_\varepsilon)(t) \le \widetilde{e}_\varepsilon(t) \le C. \tag{3.40}$$

Assim combinando (3.39) e (3.40) obtemos

$$\int_t^{t+1} V_\varepsilon(\xi)d\xi \le C, \quad \forall t \ge 0.$$

Trocando t por t/ε e realizando a mudança de variáveis na integral acima, ficamos com

$$\int_t^{t+\varepsilon} V_\varepsilon(\xi)d\xi \le C\varepsilon, \quad \forall t \ge 0. \tag{3.41}$$

Finalmente, sejam dados $t \ge 0$ e $T \ge \varepsilon$. Para se alcançar (3.35), seja $k = \lceil T/\varepsilon \rceil = [\text{menor inteiro} \ge T/\varepsilon]$, de maneira que $(k-1) < T/\varepsilon$ e então $T \le k\varepsilon < T + \varepsilon \le 2T$. Aplicando (3.41), vemos que

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T} V_\varepsilon(\xi)d\xi &\le \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t+j\varepsilon}^{t+(j+1)\varepsilon} V_\varepsilon(\xi)d\xi \\ &\le \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t+j\varepsilon}^{t+(j+1)\varepsilon} C\varepsilon \\ &\le Ck\varepsilon \\ &\le 2CT,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ////

Demonstração de (3.36) e de (3.37). Pela definição de $K_\varepsilon(t)$ e do teorema 3.4.1, uma mudança de variável leva a

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\dot{u}_\varepsilon(t,x)|^2dx = K_\varepsilon(t/\varepsilon) \le C$$

dando (3.36). Já a desigualdade (3.37) provém do teorema fundamental do Cálculo $u_\varepsilon(t) = \alpha + \int_0^t \dot{u}_\varepsilon(\xi)d\xi$ mais as desigualdades $\|\int f\| \le \int \|f\|$ e $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. ////

A verificação de (3.38) é um pouco mais complicada e depende de dois lemas técnicos.

Lema 3.5.1. *Se $\eta(t,x) = \phi(t)h(x)$ é tal que $\phi \in C^{1,1}[0,\infty)$ com $\phi(0) = 0 = \phi'(0)$ e $h \in E$, então vale a "equação de Euler"*

$$\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}(\ddot{w}_\varepsilon(t),\ddot{\eta}(t))_{L^2} + \langle dV_\varepsilon(w_\varepsilon(t)),\eta(t)\rangle_{E^*,E}\right)dt = 0. \tag{3.42}$$

Esta mesma equação vale se $\eta \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Observe que $w_\varepsilon + \delta\eta$ está na classe $K_{\alpha,\beta}$ da seção 2.2, de modo a condição de minimalidade de w_ε diz que $J_\varepsilon(w_\varepsilon) \le J_\varepsilon(w_\varepsilon + \delta\eta)$ para todo $-\infty < \delta < \infty$. Portanto, a equação (3.42) corresponde à condição de criticidade $\frac{d}{d\delta}J_\varepsilon(w_\varepsilon + \delta\eta)_{|\delta=0} = 0$ se trocarmos o sinal da derivada com o da integral. Já que o termo envolvendo $\ddot{w}_\varepsilon$ é bilinear, esta passagem será portanto justificada se provarmos isto para a parte que envolve V.

Seja $g_\delta(t) = e^{-t}\int \big(V(w_\varepsilon(t,x)+\delta\eta(t,x)\big)dx$ o termo do integrando da função f acima que possui V em sua expressão. Como estamos interessados no comportamento de f e g_δ para δ pequeno, tomemos $|\delta| \le 1$. Pela condição de Lipschitz (3.14), existe uma constante $C > 0$ tal que $|\frac{g_\delta(t)-g_0(t)}{\delta}| \le Ce^{-t} \in L^1(0,\infty)$. Por outro lado, a derivabilidade à Gateaux de V assere que $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{g_\delta(t)-g_0(t)}{\delta} = \langle dV(w_\varepsilon(t),\eta(t)\rangle$ para todo $t > 0$. Agora uma aplicação simples do teorema da convergência dominada dá a conclusão desejada.

A afirmação de que (3.42) é válida se η for uma função-teste qualquer é consequência agora da linearidade da equação e do lema 2.4.2.

////

Lema 3.5.2. *Para quase todo $t > 0$ e $h \in E$, temos a fórmula*

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(\ddot{w}_\varepsilon(t),h)_{L^2} = \int_t^\infty e^{-(\xi-t)}(t-\xi)\big\langle dV\big(w_\varepsilon(t)\big),h\big\rangle_{E^*,E}d\xi. \tag{3.43}$$

Demonstração. Para $T > 0$ e $\delta > 0$, seja $\phi_\delta \in C^{1,1}(0,\infty)$ a mesma função que definimos no corolário 3.4.2. Dada $h \in E$, ponha $\eta(t,x) = \phi_\delta(t)h(x)$ e apliquemos o lema 3.5.1 acima. Já que $\phi_\delta''(t) = \delta^{-1}1_{(T,T+\delta)}$, multiplicando 3.42 por e^T leva a

$$\frac{e^T}{\varepsilon^2\delta}\int_T^{T+\delta} e^{-t}\big(\ddot{w}_\varepsilon(t),h\big)_{L^2}dt = \int_T^\infty e^{-(t-T)}\phi_\delta(t)\big\langle dV\big(w_\varepsilon(t)\big),h\big\rangle_{E^*,E}dt.$$

Como já observado, $|\phi_\delta(t)| \le (t-T)^+$ e $|\phi_\delta'(x)| \le 1_{(T,\infty)}$. Assim, podemos usar o teorema da diferenciação de Lebesgue do lado esquerdo e o da convergência dominada do lado direito para concluir que (3.43) vale para quase todo $t > 0$. ////

Demonstração de (3.38). Aplicando a desigualdade de Young em (3.12), temos que

$$\big|\big\langle dV\big(w_\varepsilon(t)\big),h\big\rangle_{E^*,E}\big| \le C(1+V_\varepsilon(t))\|h\|_E.$$

Mas $A^2 1 = 1$ e $A^2 V_\varepsilon \le \widetilde{e}_\varepsilon \le C$, de modo que para quase todo $t > 0$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(\ddot{w}_\varepsilon(t),h)_{L^2} = \int_t^\infty e^{-(\xi-t)}(t-\xi)\big\langle w_\varepsilon(t),h\big\rangle_{E^*,E}d\xi \le \Big(A^2\big|\big\langle dV\big(w_\varepsilon\big),h\big\rangle_{E^*,E}\big|\Big)(t) \le C\|h\|_E.$$

Assim, como um elemento de E^*, temos que

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\|\ddot{w}_\varepsilon(t)\|_{E^*} \le C$$

em quase todo $t > 0$. Destarte (3.38) fica estabelecida ao mudar de w_ε para u_ε. ////

3.6 Demonstração do teorema 1.1.1

Finalmente podemos agora provar o teorema principal desta dissertação. Ao decorrer desta seção, teremos de tomar uma série de subsequências e aplicar corretamente um argumento diagonal. Por conta disso, facilitaremos a escrita e denotaremos todas estas subsequência pelo mesmo índice original ε_n.

Passo um: demonstração de (1.12). Verifiquemos a convergência da sequência (u_{ε_n}) no sentido asserido. Por conta do teorema 3.5.1, vemos que para todo $T > 0$ suficientemente grande, existe uma constante $C = C(T,\alpha,\beta) > 0$ tal que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\left\{u_{\varepsilon_n}^2 + \left(\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial x_N}\right)^2\right\}dtdx \le C;$$

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|u_{\varepsilon_n}|^{p+1}dtdx \le C.$$

Em outros termos, u_{ε_n} é eqüilimitada em $H^1((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ e em $L^{p+1}((0,T)\times\mathbb{R}^N)$. Da reflexividade destes espaços, o teorema de Kakutani garante a existência de uma subseqüência e uma certa função u para as quais $u_{\varepsilon_n}\rightharpoonup u$ fracamente em $H^1((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ e de $L^{p+1}((0,T)\times\mathbb{R}^N)$. Escolhendo uma sequência crescente de T's e aplicando um argumento diagonal, podemos supor que $u_\varepsilon\rightharpoonup u$ fracamente em $H^1((0,M)\times\mathbb{R}^N)$ e em $L^{p+1}((0,M)\times\mathbb{R}^N)$ para qualquer $M>0$.

Por outro lado, para todo $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^N$ regular e $T>0$, o teorema de Rellich-Kondrachov assere que a injeção $H^1((0,T)\times\Omega)\subset L^2((0,T)\times\Omega)$ é compacta. Assim um raciocínio análogo ao do parágrafo anterior leva à conclusão de que se pode presumir que $u_{\varepsilon_n}\to u$ fortemente em $L^2((0,T)\times\Omega)$ e em quase toda parte, quaisquer que sejam $T>0$ e aberto limitado $\Omega\subset\mathbb{R}^N$. Em particular, $u_{\varepsilon_n}(t,x)\to u(t,x)$ em quase todo t,x.

A prova da convergência $u_{\varepsilon_n}\to u$ em $L^q((0,T)\times\Omega)$ depende do valor de q. Se $1\le q\le 2$, então basta usar que $L^2((0,T)\times\Omega)\subset L^q((0,T)\times\Omega)$ continuamente pela desigualdade de Hölder. Já se $2<q<p+1$, ela é então fruto da desigualdade de interpolação $\|f\|_q\le\|f\|_2^\alpha\|f\|_{p+1}^{1-\alpha}$, onde $1/q=\alpha/2+(1-\alpha)/(p+1)$; consulte, e.g., H. Brezis (2011). Aqui foi usada a limitação em L^{p+1}. Isto finaliza a demonstração de (1.12).

Passo dois: demonstração de que $u(0)=\alpha$ *e* $\dot u(0)=\beta$. Como corolário da discussão acima, $\dot u_{\varepsilon_n}\rightharpoonup\dot u$ em $L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)=L^2((0,T);L^2)$, para todo $T>0$. Assim, da fórmula de representação $u_{\varepsilon_n}(t)=\alpha+\int_0^t\dot u_{\varepsilon_n}(s)ds$ é fácil ver que $u_{\varepsilon_n}(t)\rightharpoonup u(t)$ fracamente em L^2 para todo $t\ge 0$. Como $u_{\varepsilon_n}(0)=\alpha$ para todo n, temos imediatamente que $u(0)=\alpha$ no sentido de L^2.

Verifiquemos que $\dot u=\beta$ em E^*. Como vimos na seção 2 deste capítulo, $L^2\subset E^*$ continuamente. Portanto (3.36) e (3.38) se traduzem no fato de que $\dot u_{\varepsilon_n}\in W^{1,\infty}((0,\infty);E^*)$ e é eqüilimitada. Por outro lado, sabemos do teorema 2.2.1 que $L^\infty((0,\infty);E^*)=(L^1((0,\infty);E))^*$, já que E é reflexivo. Portanto, pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (note que $L^1((0,\infty);E)$ é separável), existe uma subsequência ε_{n_k} tal que $\dot u_{\varepsilon_{n_k}}\overset{*}{\rightharpoonup}\psi_0$ e $\ddot u_{\varepsilon_{n_k}}\overset{*}{\rightharpoonup}\psi_1$ na topologia fraca-$*$ $\sigma(L^1((0,\infty);E),L^\infty((0,\infty);E))$. Como $\dot u_{\varepsilon_n}$ já convergia fracamente em L^2 para $\dot u(t)$, temos que $\psi_0=\dot u$. Portanto, com um argumento similar ao caso acima, a fórmula do teorema fundamental do Cálculo $\dot u_{\varepsilon_{n_k}}(t)=\beta+\int_0^t\ddot u_{\varepsilon_{n_k}}(s)ds$ mostra que $\dot u_{\varepsilon_{n_k}}\overset{*}{\rightharpoonup}\dot u(t)$ na topologia fraca em $\sigma(E,E^*)$ para todo $t>0$ e que $\dot u\in W^{1,\infty}((0,\infty);E^*)$ com $\ddot u(t)=\psi_1(t)$. Consequentemente, $\dot u(0)=\beta$, como queríamos demonstrar.[12]

Passo três: demonstração de (1.14).

Como V é semicontínua inferiormente na topologia fraca de L^2 (teorema 6.3), uma aplicação do lema de Fatou na estimativa (3.35) dá que

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}V\big(u(s)\big)ds\le C$$

para todo $t>0$ e $T>0$. Assim, o teorema da diferenciação de Lebesgue diz que $V(u(t))\le C$ para quase todo $t>0$. Isto e mais as estimativas a priori sobre u_ε dão (1.14). (Lembre-se que $E^*=H^1+L^{(p+1)'}$.)

Passo quatro: demonstração de u satisfaz a equação $\Box u+|u|^{p-1}u=0$. Seja $\eta\in C_c^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)$. Usando como função-teste $(t,x)\mapsto e^t\eta$ em (3.42) e fazendo a mudança de w_ε para u_ε, obtemos

$$\int_0^\infty(\ddot u_\varepsilon(t),\varepsilon^2\ddot\eta(t)+2\varepsilon\dot\eta(t)+\eta(t))_{L^2}dt=-\int_0^\infty\big\langle dV\big(u_\varepsilon(t)\big),\eta(t)\big\rangle dt,$$

que, após uma integração por partes, pode ser reescrita como

$$\int_0^\infty(\dot u_\varepsilon(t),\varepsilon^2\dddot\eta(t)+2\varepsilon\ddot\eta(t)+\dot\eta(t))_{L^2}dt=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\Big\{\nabla u_\varepsilon(t,x)\cdot\nabla\eta(t,x)+|u_\varepsilon(t,x)|^{p-1}u_\varepsilon(t,x)\eta(t,x)\Big\}dxdt.$$

Quando $\varepsilon_n\to 0$, temos que $\dot u_{\varepsilon_n}\rightharpoonup\dot u$ e $D_iu_{\varepsilon_n}\rightharpoonup D_iu$ $(1\le i\le N)$ fracamente em $L^2((0,T);L^2)$ e $u_{\varepsilon_n}\to u$ em fortemente $L^p((0,T)\times\Omega)$, onde $T>0$ e Ω são tais que $(0,T)\times\Omega$ contém o suporte de η. Logo,

[12] Observe que de não era necessário passar para a subsequencia ε_{n_k}. Também era possível evitar o uso de topologias fracas-$*$ se fizéssemos a inclusão $W^{1,\infty}((0,\infty);E^*)\subset H^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty);E^*)$.

passando $\varepsilon_n \to 0$, a teoria dos funcionais de Neminski diz que

$$\int_0^\infty (\dot{u}_\varepsilon(t), \dot{\eta}(t))_{L^2} dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ \nabla u(t,x) \cdot \nabla \eta(t,x) + |u(t,x)|^{p-1} u(t,x)\eta(t,x) \Big\} dx dt.$$

Usando agora o corolário 6.5 e as estimativas (1.14), concluímos que u é uma solução fraca da equação da onda não-linear supracitada.

Passo cinco: demonstração da desigualdade de energia. Só resta provar a desigualdade de energia. A dificuldade aqui é que o operador A^2 na energia aproximada usa valores de w_ε para todo $t > 0$ e nós não possuímos uma convergência global dos minimizadores. Para se livrar dessa dificuldade, necessitaremos do seguinte lema.

Lema 3.6.1. *Sejam f e g funções não-negativas em $L^1_{\text{loc}}(0,\infty)$ tais que*

$$(A^2 f)(\xi) \le g(\xi) \quad \textit{para quase todo } \xi > 0. \tag{3.44}$$

Então para todos $t \ge 0$, $a > 0$ e $0 < \delta < 1$ temos

$$\Big(\int_0^\delta se^{-s} ds\Big) \int_{t+\delta a}^{t+a} f(\xi) d\xi \le \int_t^{t+a} g(\xi) d\xi.$$

Demonstração do lema. Lembremos que (3.44) significa

$$g(\xi) \ge \int_0^\infty (s-\xi)^+ e^{-(s-\xi)} f(s) ds$$

para quase todo $\xi > 0$. Portanto, para $t \ge 0$, $a > 0$ e $0 < \delta < 1$, integramos esta última desigualdade em $(t, t+a)$ para obter

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+a} g(\xi) d\xi &\ge \int_0^\infty f(\xi) \Big(\int_t^{t+a} (s-\xi)^+ e^{-(s-\xi)} ds \Big) d\xi \\
&= \int_t^\infty f(\xi) \Big(\int_t^{\text{Min.}\{t+a,s\}} (s-\xi)^+ e^{-(s-\xi)} ds \Big) d\xi \\
&\ge \int_{t+\delta a}^{t+a} f(\xi) \Big(\int_t^{\text{Min.}\{t+a,s\}} (s-\xi)^+ e^{-(s-\xi)} ds \Big) d\xi \\
&\ge \int_{t+\delta a}^{t+a} f(\xi) \Big(\int_t^{s} (s-\xi) e^{-(s-\xi)} ds \Big) d\xi \\
&= \int_{t+\delta a}^{t+a} f(\xi) \Big(\int_0^{s-\xi} s e^{-s} ds \Big) d\xi \\
&\ge \int_{t+\delta a}^{t+a} f(\xi) \Big(\int_0^{\delta a} s e^{-s} ds \Big) d\xi
\end{aligned}$$

tal como desejávamos. ////

Por causa de (3.34), podemos aplicar o lema para $f(t) = V_\varepsilon(t)$ e $g(t) = \frac{1}{2}|\beta|_{L^2} + V(\alpha) - K_\varepsilon(t) + C\varepsilon = e(0) - K_\varepsilon(t) + C\varepsilon$. Assim, escrevendo $Y(\xi) = \int_0^\xi se^{-s} ds$, temos que para todos $t \ge 0$, $a > 0$ e $0 < \delta < 1$ que

$$Y(\delta a) \int_{t+\delta a}^{t+a} V_\varepsilon(\xi) d\xi + \int_t^{t+a} K_\varepsilon(\xi) d\xi \le ae(0) + aC\varepsilon.$$

Troquemos agora w_ε para u_ε. Por isto, se torna conveniente reescrever a estimativa acima com t/ε e a/ε ao invés de, respectivamente, t e a. Fazendo isto, obtemos

$$Y(\delta a/\varepsilon) \int_{t+\delta a}^{t+a} V\big(u_\varepsilon(\xi)\big) d\xi + \int_t^{t+a} \frac{1}{2} |\dot{u}_\varepsilon(\xi)|^2_{L^2} d\xi \le ae(0) + aC\varepsilon.$$

Uma vez que $Y(\infty) = 1$, podemos usar as propriedades de semicontinuidade inferior de V e o lema de Fatou para concluir que com $\varepsilon_n \to 0$

$$\int_{t+\delta a}^{t+a} V\big(u(\xi)\big)d\xi + \int_{t}^{t+a} \frac{1}{2}|\dot{u}(\xi)|_{L^2}^2 d\xi \leq ae(0).$$

Passando $\delta \to 0$, então dividindo por a e fazendo $a \to 0$, a desigualdade de energia é estabelecida através do teorema da diferenciação de Lebesgue.

////

Capítulo 4

Uma generalização a uma classe de problemas hiperbólicos

Wake up, step out of your dream, come out of the mire
Realize what they do, think about what you do
Is this what I live for, or a dream I die for?
Where is the sense? What's the price you pay?

Did you see their faces beaten to obey?
Did you see the colours: sulphur yellow, concrete gray?
Did you see the eyes listless and indifferent?
Oppression, no resistance, bodies without a spine

Sometimes they talk behind your back
Is he your friend? Who do you trust?
How far can we go? Who sets all the limits?
Who gives us rights we've never wanted?

Coroner. "Sudden Fall". *Punishment to Decadence*. Noise Records, 1988. CD.

Uma vez terminados todos os trabalhos do último capítulo, paremos para refletir no que foi realmente demonstrado. De certo modo, a prova exibida pode ser dividida em duas fases.

Na primeira, mostramos que os mínimos u_ε dos funcionais

$$F_\varepsilon(v) = \int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}\Big\{\frac{1}{2}\big|\ddot{v}(t)\big|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}V\big(v(t)\big)\Big\}dt \tag{4.1}$$

restritos às condições $v(0) = \alpha$ e $\dot{v}(0) = \beta$, satisfaziam uma série de estimativas *a priori* boas, como uma limitação uniforme em $t \mapsto \big|\dot{u}_\varepsilon(t)\big|_{L^2}^2$ e em $t \mapsto V\big(u_\varepsilon(t)\big)$. Nesta parte foram utilizadas poucas propriedades essenciais de $V(u) = \int \{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\}dx$, porém principalmente as características expressas no teorema 3.2.2.

Já na segunda etapa, mostramos que os estes mínimos se acumulam em funções $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$ tais que

$$\int_0^\infty \Big\{\big(\dot{u}(t), \dot{\eta}(t)\big)_{L^2} + \big\langle dV\big(u(t)\big), \eta(t)\big\rangle_{E^*,E}\Big\}dt = 0 \quad \big[\forall \eta \in C^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)\big] \tag{4.2}$$

e que $u(0) = \alpha$ e $\dot{u}(0) = \beta$ em algum sentido. Aqui certamente foram aplicadas algumas características mais finas de dV. Com base nisto, generalizaremos o enunciado do teorema 1.1.1, como foi feito no segundo artigo de E. Serra e P. Tilli (2016).

4.1 Hipóteses funcionais e enunciado dos teoremas

Declaremos as suposições do teorema a ser enunciado. Caso ilustrativo, daremos alguns exemplos de quando estas hipóteses são válidas; entretanto, a maior parte das aplicações salvaremos para a próxima seção.

Tal qual anteriormente, consideraremos a família de funcionais $F_\varepsilon : H^2_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big) \to \mathbb{R}$ da forma (4.1). Sobre V, será pressuposto:[1]

(∗) $V : L^2 \to [0,\infty]$ é semicontínua inferiormente na topologia fraca $\sigma(L^2, L^2)$. O seu domínio próprio é um subespaço E; supomos que E possui uma norma "natural" na qual E é reflexivo e que as seguintes injeções sejam válidas, contínuas e densas

$$C_c^\infty \subset E \subset L^2$$

(novamente C_c^∞ está com a topologia das funções-teste).
Restrita a E, $V : E \to [0,\infty)$ é diferenciável à Gateaux e sua diferencial fraca, $dV : E \to E^*$, cumpre

$$\|V(u)\|_{E^*} \leq C\big(1 + V(u)^\theta\big) \tag{4.3}$$

para todo $u \in E$, onde $C > 0$ e $0 < \theta < 1$ são constantes.

Obviamente, estamos interessados que, no limite $\varepsilon \to 0$, produzamos soluções para o problema do "fluxo gradiente de segunda ordem"[2]

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = -dV\big(u(t)\big), \\ u(0) = \alpha, \dot{u}(0) = \beta, \end{cases} \tag{4.4}$$

já que (4.1) possuem formalmente a equação de Euler

$$\varepsilon^2 u_{tttt} - 2\varepsilon u_{ttt} + u_{tt} = -dV(u).$$

Assim, antes de mais nada, é conveniente que reintroduzamos a noção de solução fraca. Para facilitar as questões, já presumamos agora em diante que V é como em (∗).

Diremos que um $u : [0,\infty) \to L^2$ é uma SOLUÇÃO FRACA DE (4.4) se $u \in L^1_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$, $t \mapsto dV(u) \in L^1_{\text{loc}}\big((0,\infty); E^*\big)$ e, para toda $\varphi \in C_c^\infty\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^N\big)$,[3]

$$\int_0^\infty \big(u(t), \ddot{\varphi}(t)\big)_{L^2} dt = \big(\alpha, \dot{\varphi}(0)\big)_{L^2} - \big(\beta, \varphi(0)\big)_{L^2} + \int_0^\infty \big\langle dV\big(u(t)\big), \varphi(t)\big\rangle_{E^*,E} dt. \tag{4.5}$$

Uma consequência de (4.5) é que toda solução fraca u possui sua derivada distribucional $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^1_{\text{loc}}\big((0,\infty); E^*\big)$.

É comum chamar (4.4) de uma equação conservativa, pois a energia

$$t \mapsto \frac{1}{2}\big|\dot{u}(t)\big|^2_{L^2} + V\big(u(t)\big)$$

é preservada segundo um cálculo formal. Por conta disso, chamaremos uma função $u \in L^1_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$ DE ENERGIA FINITA se $\dot{u} \in L^\infty\big((0,\infty); L^2\big)$ e $V(u) \in L^\infty(0,\infty)$.

Note que, se u for de energia finita, então automaticamente $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$; em particular é contínua e, por isso, $t \mapsto V(u)$ é mensurável.[4] Além disso, (4.3) diz que $t \mapsto dV(u) \in L^\infty\big((0,\infty); E^*\big) \subset L^1_{\text{loc}}\big((0,\infty); E^*\big)$.

[1] Que E seja reflexivo, é imposto de modo que, para $1 \leq p < \infty$, $L^p\big((0,T); E\big)^* = L^{p'}\big((0,T); E^*\big)$, como expressa o teorema 2.2.1. Esta condição não aparece no artigo de E. Serra e P. Tilli, apesar de ser tacitamente utilizada.

[2] Este nome é dado porque esta equação lembra de perto as chamadas equações do fluxo gradiente, que tomam a forma $u'(t) = -\nabla V\big(u(t)\big)$. Observe que V que estudamos até daqui dá origem formalmente a $dV(u) = -\Delta u + |u|^{p-1}u$, este fluxo gradiente correspondente é a equação do calor $u_t = \Delta u - |u|^{p-1}u$, que será analisada na última parte desta dissertação.

[3] Em comparação com a definição prévia da seção 3.1, esta é um pouco mais fraca: ela é "menos" localizada no espaço e exige uma certa integrabilidade do operador $dV(u)$. No entanto, este conceito é adequado para a nova situação abstrata que estamos estudando.

[4] Com efeito, temos que mostrar que para todo, $q \in \mathbb{R}$, $\{t; V(u) \geq q\}$ é mensurável. Porém $\{t; V(u) \geq q\} = u^{-1}([V \geq q]) = u^{-1}(\text{fracamente fechado}) = u^{-1}(\text{fortemente fechado}) = \text{fechado}$, já que u é contínua.

Como antes, essas novas estimativas sobre u também facilitam o tarefa de verificar se esta é uma solução fraca.

Teorema 4.1.1. *Se u é energia finita, então uma dessas afirmações implica nas demais.*

1. *u é solução de (4.4);*
2. *$u(0) = \alpha$ como curva em $W^{1,\infty}_{loc}\big((0,\infty); L^2\big)$, $\dot{u} \in W^{1,\infty}\big((0,\infty); E^*\big)$ com $\dot{u}(0) = \beta$ e $\ddot{u}(t) = -dV\big(u(t)\big)$;*
3. *$u(0) = \alpha$ como curva em $W^{1,\infty}_{loc}\big((0,\infty); L^2\big)$, $\dot{u} \in W^{1,\infty}\big((0,\infty); E^*\big)$ com $\dot{u}(0) = \beta$ e*

$$\int_0^\infty \Big\{\big(\dot{u}(t), \dot{\varphi}(t)\big)_{L^2} + \big\langle dV\big(u(t)\big), \varphi(t)\big\rangle_{E^*,E}\Big\} dt = 0,$$

$\forall \varphi \in C^\infty_c\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^N\big)$.

Evidentemente o funcional que estudamos no capítulo 3 cai nesta categoria com $E = H^1 \cap L^{p+1}$ e $\theta = 1 - 1/(p+1) = p/(p+1)$. Há no entanto outras escolhas possíveis: por exemplo para $p > 1$

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ \sum_{i=1}^N \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 \Big\}^{p/2} dx \end{aligned} \tag{4.6}$$

observa $(*)$ para $E = \{v \in L^2; \nabla v \in (L^p)^N\}$ e $\theta = 1 - 1/p$. Aqui, dV é precisamente

$$\big\langle V(u), h\big\rangle_{E^*,E} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla h dx$$

que dá formalmente origem ao chamado operador "p-laplaciano" $\Delta_p u = \mathrm{Div.}\, |\nabla u|^{p-2} \nabla u$.

Uma observação oportuna que fornece uma grande gama de exemplos, é que $(*)$ é "aditivamente estável" no seguinte sentido. Se $V_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ e $V_2 : E_2 \to \mathbb{R}$ realizam a nossa hipótese, então $V = V_1 + V_2 : E_1 \cap E_2 \to \mathbb{R}$ também satisfaz $(*)$ para $\theta = \mathrm{Max.}\{\theta_1, \theta_2\}$.[5]

É importante também notar que (4.3) acarreta na continuidade à Lipschitz para V em E:

$$\big|V(u+h) - V(u)\big| \le C\big(1 + V(u)^\theta + \|h\|\|_E^{\theta/(1-\theta)}\big)\|h\|_E \tag{4.7}$$

$\forall u, h \in E$. A demonstração é idêntica à do teorema (6.3).

Assim, replicando o raciocínio do capítulo anterior *verbatim et literatim*, provamos

Teorema 4.1.2 (Estimativas *a priori* e convergência no caso conservativo)**.** *Suponha válida $(*)$. Dados $\alpha, \beta \in E$ e $\varepsilon > 0$, o funcional F_ε em (4.1) possui um mínimo u_ε na classe das funções $v \in H^2_{loc}\big((0,\infty); L^2\big)$ com $v(0) = \alpha$ e $\dot{v}(0) = \beta$.[6] Além disso, são válidas as seguintes conclusões sobre as u_ε's:*

1. *(Estimativas). Existe $C = C(\alpha, \beta) > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$, $t \ge 0$ e $T \ge \varepsilon$,*

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} V\big(u_\varepsilon(s)\big) ds &\le CT, \\ \big|\dot{u}_\varepsilon(t)\big|^2_{L^2} &\le C, \\ \big|u_\varepsilon(t)\big|^2_{L^2} &\le C(1 + t^2), \\ \big\|u_\varepsilon\big\|_{L^\infty((0,\infty);E^*)} &\le C. \end{aligned}$$

[5] A fim de mostrar que $C^\infty_c \subset E_1 \cap E_2$ densamente, utilize o teorema de Hahn-Banach e o fatos de que $C^\infty_c \subset E_1 \cap E_2 \subset E_1, E_2$, que $(E_1 \cap E_2)^* = E_1^* + E_2^*$ e que E_1^*, E_2^* são espaços de distribuições.

[6] Este mínimo não é mais necessariamente único se V não for convexo. Portanto, o problema de unicidade do limite fica mais delicada no caso geral.

2. *(Convergência). Toda sequência* $\varepsilon_n \to 0$ *possui uma subsequência* $\varepsilon'_n \to 0$ *tal que* $u_{\varepsilon'_n} \rightharpoonup u$ *na topologia fraca de* $H^1((0,T),L^2)$ *para qualquer* $T > 0$*. Esta função u cumpre*

$$\begin{cases} u & \in H^1_{loc}\big((0,\infty);L^2\big),\\ \dot{u} & \in L^\infty\big((0,\infty);L^2\big),\\ \ddot{u} & \in L^\infty\big((0,\infty);E^*\big) \end{cases}$$

e $u(0)=\alpha$ *(em* L^2*) e* $\dot{u}(0)=\beta$ *(em* E^**).*

3. *(Desigualdade de energia). Se*

$$e(t) = \frac{1}{2}\big|\dot{u}(t)\big|^2_{L^2} + V\big(u(t)\big)$$

então para quase todo $t > 0$

$$e(t) \le e(0) = \frac{1}{2}|\beta|^2_{L^2} + V(\alpha).$$

No mesmo artigo, Serra e Tilli também consideram o problema abstrato com dissipação

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = -dV\big(u(t)\big) - dD\big(\dot{u}(t)\big),\\ u(0)=\alpha, \dot{u}(0)=\beta. \end{cases} \tag{4.8}$$

A hipótese sobre a função dissipativa D será a seguinte:

$D : L^2 \to [0,\infty]$ é quadrático, no sentido de que

$$D(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}b(v,v) & \text{se } v \in H\\ \infty & \text{se } v \in L^2 \text{ mas } v \notin H \end{cases}$$

$(**)$ onde $b : H \times H \to \mathbb{R}$ é simétrica, limitada e não-negativa no espaço de Hilbert $H \subset L^2$, cuja norma é $|v|^2_H = |v|^2_{L^2} + 2D(u)$. Novamente, presumiremos que

$$C^\infty_c \subset H \subset L^2 \text{ continua e densamente.}$$

Observe que a condição acima também possui uma propriedade de estabilidade aditiva óbvia.

Nesta situação, o funcional F_ε se transforma em

$$G_\varepsilon(v) = \int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}\Big\{\frac{1}{2}\big|\ddot{v}(t)\big|^2_{L^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}V\big(v(t)\big) + \frac{1}{\varepsilon}D\big(\dot{v}(t)\big)\Big\}dt. \tag{4.9}$$

O modelo básico de uma D segundo $(**)$ assim é

$$D(v) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in A}|D^\alpha v|^2_{L^2}$$

onde A é um conjunto finito de subíndices em $\mathbb{R}^N$ e $H = \{v \in L^2; D^\alpha v \in L^2\}$. Por exemplo, se $V(u) = \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2dx$ e $D(v) = \frac{1}{2}\int|v|^2dx$, então (4.8) se transmuta na conhecida "equação do telégrafo"

$$u_{tt} = \Delta u - u_t.$$

A definição de uma solução fraca do problema de (4.8) segue as mesmas linhas anteriores. $u \in L^1_{\text{loc}}\big((0,\infty);L^2\big)$ com $dV(u) \in L^1_{\text{loc}}\big((0,\infty);E^*\big)$ e $dD(u) \in L^1_{\text{loc}}\big((0,\infty);H^*\big)$ é chamada de uma SOLUÇÃO FRACA para (4.8), caso

$$\int_0^\infty \big(u(t),\ddot{\varphi}(t)\big)_{L^2}dt = \big(\alpha,\dot{\varphi}(0)\big)_{L^2} - \big(\beta,\varphi(0)\big)_{L^2} + \int_0^\infty \big\langle dV\big(u(t)\big),\varphi(t)\big\rangle_{E^*,E}dt + \int_0^\infty \big\langle dD\big(\dot{u}(t)\big),\varphi(t)\big\rangle_{H^*,H}dt,$$

não importando $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$.

Aqui, a fórmula da energia é

$$t \mapsto \frac{1}{2}|\dot{u}(t)|_{L^2}^2 + V\big(u(t)\big) + 2\int_0^t D(u)ds,$$

onde usamos que D é quadrática. Aqui a parte com D mede fisicamente a quantidade de energia dissipada, explicando por que (4.8) é chamada de dissipativa.

Assim sendo definição agora de uma função u de ENERGIA FINITA é se $\dot{u} \in L^\infty\big((0,\infty);L^2\big)$, $V(u) \in L^\infty(0,\infty)$ $D(\dot{u}) \in L^1(0,\infty)$.

O critério do teorema (4.1.1) se transforma pois em

Teorema 4.1.3. *Se u é energia finita para (4.8), então as próximas afirmações são equivalentes:*

1. *u é solução de (4.8);*
2. *$u(0) = \alpha$ como curva em $W^{1,\infty}_{loc}\big((0,\infty);L^2\big)$, $\dot{u} \in W^{1,\infty}\big((0,\infty);E^*\big) + H^1_{loc}((0,\infty);H^*)$ com $\dot{u}(0) = \beta$ e $\ddot{u}(t) = -dV\big(u(t)\big) - dD\big(\dot{u}(t)\big)$;*
3. *$u(0) = \alpha$ como curva em $W^{1,\infty}_{loc}\big((0,\infty);L^2\big)$, $\dot{u} \in W^{1,\infty}\big((0,\infty);E^*\big) + H^1_{loc}((0,\infty);H^*)$ com $\dot{u}(0) = \beta$ com $\dot{u}(0) = \beta$ e*

$$\int_0^\infty \Big\{\big(\dot{u}(t),\dot{\eta}(t)\big)_{L^2} + \big\langle V\big(u(t)\big),\eta(t)\big\rangle_{E^*,E} + \big\langle dD\big(\dot{u}(t)\big),\eta(t)\big\rangle_{H^*,H}\Big\}dt = 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)$.

O correspondente então do teorema 4.1.2 é então o

Teorema 4.1.4 (Estimativas *a priori* e convergência no caso dissipativo)**.** *Suponha válidas (*) e (**). Dados $\alpha \in E$, $\beta \in E \cap H$ e $\varepsilon > 0$, o funcional G_ε em (4.9) possui um mínimo u_ε na classe das funções $v \in H^2_{loc}\big((0,\infty);L^2\big)$ com $v(0) = \alpha$ e $\dot{v}(0) = \beta$. Além disso, são válidas as seguintes conclusões sobre as u_ε's:*

1. *(Estimativas). Existe $C = C(\alpha,\beta) > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$, $t \geq 0$ e $T \geq \varepsilon$,*

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T} V\big(u_\varepsilon(s)\big)ds &\leq CT,\\ \big|\dot{u}_\varepsilon(t)\big|_{L^2}^2 &\leq C,\\ \big|u_\varepsilon(t)\big|_{L^2}^2 &\leq C(1+t^2),\\ \|u_\varepsilon\|_{L^\infty((0,\infty);E^*)+L^2((0,\infty);H^*)} &\leq C,\\ \int_0^\infty D\big(u_\varepsilon(s)\big)ds &\leq C.\end{aligned}$$

2. *(Convergência). Toda sequência $\varepsilon_n \to 0$ possui uma subsequência $\varepsilon'_n \to 0$ tal que $u_{\varepsilon'_n} \rightharpoonup u$ na topologia fraca de $H^1\big((0,T),L^2\big)$ para qualquer $T > 0$; também temos que $\dot{u}_{\varepsilon'_n} \rightharpoonup \dot{u}$ na topologia fraca de $L^2\big((0,T);H\big)$ para todo $T > 0$. Esta função u cumpre*

$$\begin{cases} u & \in H^1_{loc}\big((0,\infty);L^2\big),\\ \dot{u} & \in L^\infty\big((0,\infty);L^2\big),\\ \ddot{u} & \in L^\infty\big((0,\infty);E^*\big) + L^2\big((0,\infty),H^*\big)\end{cases}$$

e $u(0) = \alpha$ (em L^2) e $\dot{u}(0) = \beta$ (em $E^* + H^*$).

3. *(Desigualdade de energia). Se*

$$e(t) = \frac{1}{2}\big|\dot{u}(t)\big|_{L^2}^2 + V\big(u(t)\big) + 2\int_0^t D\big(u(s)\big)ds$$

então para quase todo $t > 0$

$$e(t) \le e(0) = \frac{1}{2}|\beta|_{L^2}^2 + V(\alpha).$$

A demonstração é totalmente análoga, apesar de ser necessário algum esforço técnico para incluir os termos envolvendo D nas estimativas *a priori*. Indicamos ao trabalho de Serra e Tilli (2016) para os detalhes.

4.2 Passagem à equação hiperbólica e aplicações

Se as u's obtidas tanto nos teoremas 4.1.2 e 4.1.4 vêm a ser soluções fracas, é algo a ser estudado caso-a-caso dependendo de V. Uma situação razoavelmente geral no qual a resposta é de fato afirmativa, é quando informalmente a equação hiperbólica correspondente for linear nas derivadas mais altas. De modo mais preciso,

Teorema 4.2.1. *Caso V for da forma*

$$V(u) = \frac{1}{2}|u|_{\dot{H}^s}^2 + \sum_{|\alpha|<s} \frac{\lambda_\alpha}{p_\alpha} \|D^\alpha u\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \tag{4.10}$$

onde $s > 0$, $\lambda_\alpha \ge 0$ e $p_\alpha > 1$,[7] *e D satisfazer (**), então as funções u obtidas nos teoremas 4.1.2 e 4.1.4 serão soluções fracas de, respectivamente, (4.4) e (4.8) com $u(0) = \alpha$ e $\dot{u}(0) = \beta$.*

Aqui, a norma do espaço de Sobolev homogêneo $\dot{H}^s$ é

$$|u|_{\dot{H}^s} = \left|(-\Delta)^{s/2}u\right|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}\left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi. \tag{4.11}$$

Assim V, como em (4.10), é relacionado ao operador diferencial

$$dV(u) = (-\Delta)^s u + \sum_{|\alpha|<s} (-1)^{|\alpha|}\lambda_\alpha D^\alpha\big(|D^\alpha u|^{p_\alpha-2}D^\alpha u\big).$$

Não obstante, a escolha por uma norma equivalente também é permitida. Por exemplo, pode-se tomar

$$|u|_{\dot{H}^s}^2 = \sum_{|\alpha|=\lfloor s\rfloor}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.$$

Quando $s = m$ um inteiro ≥ 1, então[8]

$$|u|_{\dot{H}^m}^2 = \sum_{|\alpha|=m}\binom{|\alpha|}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}|D^\alpha u(x)|^2dx$$

(naturalmente $\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\cdots\alpha_N!}$, onde $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_N)$), mas estaríamos livres para pôr alternativamente

$$|u|_{\dot{H}^m}^2 = \sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}|D_i^m u(x)|^2dx.$$

Será conveniente expor a prova desta proposição para elucidar onde as peças do jogo acima se movimentam.

[7]Evidentemente pode-se provar que esta V cumpre (*) com $E = \{u \in L^2; u \in H^s \text{ e } \lambda_\alpha D^\alpha u \in L^{p_\alpha}, \forall|\alpha| < s\}$ e $\theta = \text{Max.}\{1/2, 1-1/p_\alpha\}$.

[8]Este caso é especial: quando $m = 1$, evidentemente temos uma equação da onda $u_{tt} = \Delta u+$ [outros termos]; se $m = 2$, temos a chamada *"equação da viga vibrante"* $u_{tt} = \Delta^2 u+$ [outros termos]. Aqui $\Delta^2 = \Delta\cdot\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^4}{\partial x_i^4} + 2\sum_{1\le j<k\le N}\frac{\partial^4}{\partial x_j^2\partial x_k^2}$ é o dito operador biharmônico ou bilaplaciano.

Demonstração. Por comodidade, consideraremos somente o caso dissipativo, apesar de no conservativo o raciocínio é totalmente símile (e os cálculos na realidade mais simples). A partir de agora, ω denotará um aberto fortemente contido em $\mathbb{R}^N$ e $0 < T < \infty$.

Como no teorema (1.1.1), os mínimos u_ε solucionam a equação de Euler

$$\int_0^\infty (\dot{u}_\varepsilon(t), \varepsilon^2\dddot{\eta}(t) + 2\varepsilon\ddot{\eta}(t) + \dot{\eta}(t))_{L^2}dt = -\int_0^\infty \Big\{\big\langle dV\big(u_\varepsilon(t)\big)\big), \eta\big\rangle_{E^*,E} + \big\langle dD\big(\dot{u}_\varepsilon(t)\big)\big), \eta\big\rangle_{H^*,H}\Big\}dt, \quad (4.12)$$

qualquer que seja $\eta \in C_c^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)$ O nosso desejo é claro: passar o limite $\varepsilon \to$ e descartar os termos envolvendo ε. Justifiquemos como isto é possível.

Devido à eqüilimitação de $t \mapsto V(u_\varepsilon)$ e $t \mapsto V(u)$ e à convergência de $u_{\varepsilon'_n}$ a u, temos que $u_{\varepsilon'_n} \rightharpoonup u$ fracamente em $L^2\big((0,T); H^s(\omega)\big)$. Consequentemente, o teorema A.0.9 no apêndice A diz que $D^\alpha u_{\varepsilon'_n} \to D^\alpha u$ fortemente em $L^2\big((0,T)\times\omega\big)$.

Assim, se $1 < p_\alpha < 2$, $\lambda_\alpha D^\alpha u\varepsilon'_n \to \lambda_\alpha D^\alpha u$ em $L^{p_\alpha}\big((0,T)\times\omega\big)$; já para $2 \le p_\alpha < \infty$, a limitação de $\lambda_\alpha D^\alpha u_\varepsilon$ em L^{p_α} e a desigualdade de interpolação asserem que $\lambda_\alpha D^\alpha u_{\varepsilon'_n} \to \lambda_\alpha D^\alpha u$ em $L^{p_\alpha-1}\big((0,T)\times\omega\big)$.

De qualquer modo, como

$$\big\langle dV\big(u_\varepsilon(t)\big), \eta(t)\big\rangle_{E^*,E} = \big(u_\varepsilon(t), \eta(t)\big)_{\dot{H}^s} + \sum_{|\alpha|<s}(-1)^{|\alpha|}\lambda_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha u_\varepsilon(t,x)|^{p_\alpha-2}D^\alpha u_\varepsilon(t,x)\cdot D^\alpha\eta(t,x)dx,$$

verificamos acima que

$$\int_0^\infty \big\langle dV\big(u_{\varepsilon'_n}(t), \eta(t)\big\rangle dt \to \int_0^\infty \big\langle dV\big(u(t), \eta(t)\big\rangle_{E^*,E}dt.$$

Por outro lado, sabemos que $\dot{u}_{\varepsilon'_n} \to \dot{u}$ fracamente em $L^2\big((0,T); H\big)$. Dado que

$$\big\langle dD\big(\dot{u}_\varepsilon(t), \eta(t)\big\rangle_{H^*,H} = b\big(u_\varepsilon(t), \eta(t)\big),$$

isto basta para mostrar que

$$\int_0^\infty \big\langle dD\big(\dot{u}_{\varepsilon'_n}(t), \eta(t)\big\rangle_{H^*,H}dt \to \int_0^\infty \big\langle dD\big(\dot{u}(t), \eta(t)\big\rangle_{H^*,H}dt.$$

Logo, podemos passar o limite $\varepsilon'_n \to 0$ em (4.12) e usar o terceiro critério do teorema 4.1.3 para concluir que u é solução. ////

Todavia, o silogismo acima *não* seria válido para a V do p-laplaciano (4.6), porque $\nabla u_{\varepsilon'_n} \to \nabla u$ em L^p não necessariamente implica que $\langle dV(u_{\varepsilon'_n}), \varphi\rangle_{E^*,E} \to \langle dV(u), \varphi\rangle$ para toda função-teste φ.[9] Observemos ainda que é um problema aberto provar a existência global de soluções fracas para a equação quasilinear $u_{tt} = \Delta_p u$.

Agora daremos algumas outras aplicações onde valem os teoremas 4.1.2 e 4.1.4. Comecemos com o caso conservativo.

Exemplo 4.2.1. *Equações lineares.*

Se A é de novo um conjunto finito de multi-índices em $\mathbb{R}^N$ e

$$V(u) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in A}\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha u(x)|dx$$

[9]Com efeito, a continuidade de operadores não-lineares na topologia fraca é dificuldade capital na Análise Funcional. Todavia a conclusão permaneceria válida para

$$V(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \int \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big|^2 dx + \frac{1}{p}\int |\nabla u|^p dx$$

para $p > 1$. A prova é a mesma do teorema 4.2.1.

com $E = \{u \in L^2; D^\alpha u \in L^2\}$, então $(*)$ é válida, bem como o teorema 4.1.2 e a conclusão do 4.2.1. Deveras, V gera a equação linear

$$u_{tt} = \sum_{\alpha \in A} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u$$

e a única condição para garantir que $\int_0^\infty \langle dV(u_{\varepsilon'_n}), \eta \rangle dt \to \int_0^\infty \langle dV(u), \eta \rangle dt$ é uma convergência fraca em L^2 que trivialmente possuímos.

////

Exemplo 4.2.2. *Certas equações da onda semilineares.*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com $f(0) = 0$ e tal que $|f(s)| \leq \text{const.}|s|$. Presuma também que $F(z) = \int_0^z f(s)ds \geq 0$ para todo z e que exista uma constante $C > 0$ tal que

$$f(s)^2 \leq CF(s)$$

em toda parte.[10] Então para

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx,$$

$(*)$ é verificada com $E = H^1$ e $\theta = 1/2$. $dV(u)$ neste caso é bem conhecido ser

$$\langle dV(u), h \rangle_{H^{-1}, H^1} = \int_{\mathbb{R}^N} \{\nabla u \cdot \nabla h + f(u)h\} dx,$$

de modo que a equação diferencial originada é

$$\square u + f(u) = 0.$$

As conclusões de tanto o teorema 4.1.2 e do 4.2.1 são procedentes, já que, como conseguimos garantir a convergência de $u_{\varepsilon'_n} \to u$ em $L^2_{\text{loc}}((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$, temos que $f(u_{\varepsilon'_n}) \to f(u)$ também localmente em L^2.

Uma aplicação interessante é à famosa equação de sine-Gordon da Física

$$\square u + \sin u = 0,$$

cujo funcional de energia potencial é

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \cos u) dx.$$

Observe que V *não* é convexo.

////

Exemplo 4.2.3. *Equação de Kirchoff.*

Se tomarmos

$$V(u) = \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2$$

a hipótese $(*)$ é observada com $E = H^1$ e $\theta = 1/4$. No entanto, não é claro se a u obtida é solução da equação correspondente, a chamada *equação de Kirchoff*,

$$u_{tt} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u.$$

[10] Digamos, se f for C^1 com f' limitada, basta verifica esta desigualdade "nos infinitos", já que pela regra de L'Hôpital $s \mapsto f(s)^2/F(s)$ não tem singularidades. No próximo capítulo, estudaremos equações da onda com não-linearidades lipschitzianas muito mais gerais.

Novamente, a existência de soluções globais para esta equação é um problema em aberto, sobre a qual esperançosamente o método variacional poderá lançar alguma luz.

Mais geralmente, poderíamos estudar algumas não-lineares não-locais da forma $u_{tt} = F'(\int |\nabla u|^p dx)\Delta_p u$, se pormos $V(u) = \frac{1}{p}F(\int |\nabla u|^p dx)$.

////

Vejamos agora uma aplicação do caso dissipativo.

Exemplo 4.2.4. *Equações fortemente amortecidas.*

Já notamos que $D(v) = \frac{1}{2}\int |v|^2 dx$ produz equações do tipo "telégrafo"; outros exemplos podem ser obtidos tomando D como a norma ao quadrado de um espaço de Sobolev hilbertiano. Digamos, para

$$D(v) = \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 dx,$$

garantimos a presença do termo Δu_t, que está ligado às chamadas equações *"fortemente amortecidas"*. Assim, se tomarmos $V(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1} dx$ para algum $p > 0$, temos pelo teorema 4.2.1 a existência de soluções fracas do problema

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-1}u + \Delta u_t = 0$$

para dados iniciais $u(0) = \alpha \in H^1 \cap L^{p+1}$ e $\dot{u}(0) = \beta \in H^1 \cap L^{p+1}$.

Já o problema

$$u_{tt} - \Delta_p u + |u|^{q-2}u + \Delta u_t = 0,$$

apesar de estar nas condições do teorema 4.1.4, não está nas de 4.2.1, exceto se $p = 2$. Serra e Tilli contudo anunciaram que as conclusões deste continuam verdadeiras se $p, q > 1$.

////

Por fim, uma outra generalização possível seria considerar abertos Ω mais gerais que $\mathbb{R}^N$ e, assim, certas condições de fronteira. Da teoria das equações de evolução (veja H. Brézis (2011)), isto pode ser facilmente feito mudando o espaço onde está u. Por exemplo, uma condição do tipo "$u(t) \in H^1(\Omega)$" está relacionado à formulação fraca condição de Neumann "$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ em $\partial\Omega$" (ν é a normal exterior em $\partial\Omega$); enquanto "$u(t) \in H_0^1(\Omega)$" é associado à fraca da de Dirichlet "$u = 0$ em $\partial\Omega$". No método desta dissertação, basta trocar $\mathbb{R}^N$ por Ω e alterar convenientemente o domínio efetivo de V.

Sob certas hipóteses de coercividade sobre V, este também pode comportar termos de ordem menor. Isto permite que estudemos equações não-homogêneas.

Por exemplo, tome $V(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1} dx$. Se $f \in L^q$ para q no intervalo de extremos $(2^*)'$ e $(p+1)'$, então, via a desigualdade de Hölder e de Young, existe uma constante $m > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f u dx = \langle f, u \rangle_{E^*,E} \leq \frac{1}{2}V(u) + m,$$

para todo $u \in E$. Por consequência, se $\widetilde{V}(u) = V(u) - \langle f, u \rangle + m$, este funcional satisfaz $\widetilde{V}(u) \geq \frac{1}{2}V(u)$ e portanto cumpre $(*)$ com o mesmo θ. A equação adjunta se então altera para $u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-1}u = f$.[11]

De maneira análoga, se poderia estudar *sistemas*, como *e.g.*

$$\begin{cases} (\Box u)(t,x) & = -(|u|^2 + |v|^2)^{p/2}u \\ (\Box v)(t,x) & = -(|u|^2 + |v|^2)^{p/2}v. \end{cases}$$

Neste caso, ao invés de trabalharmos em L^2 e com funções reais, tomamos como espaço ambiente $(L^2)^k$ e incógnita $u(t) = [u_1(t), \ldots, u_k(t)]$. Novamente, as correções são triviais.

[11] É claro que tem-se uma variedade maior de expoentes na condição de o domínio ser limitado.

Capítulo 5

Elementos da teoria das ondas não-lineares

His hand must be hard as stone
As they call him "the eternal god"
They fear his wrath and more...
Steel against steel, so many fell

Hunting in the endless land
For the jewel-crowned king
The sound of distant hymns
Echoes in the broken past
Fanes to the highest emperors
Trembled under his feet

Stygian forges formed his sword
Bearing pride over fear
Whispered fantasia follows his ways
And cries silent in the dark

The black altar
Sculptured of the false
Scepters in the way
To wisdom on the throne
The veil of might – reborn
Above the broken existence

Coroner. "The Invincible". *Death Cult*. Independente, 1986. Cassete.

5.1 O problema de Cauchy linear

Neste ponto da dissertação, mostraremos alguns fundamentos da teoria clássica das equações de onda não-lineares, a fim de compará-la com o teorema de Serra e Tilli. De modo geral, esta teoria se fundamenta em dois alicerces: o chamado *princípio de Duhamel* (ou *fórmula de Duhamel*), e uma análise delicada de *estimativas a priori*.

Primeiro, relembremos o princípio de Duhamel, que nada mais é que uma versão da "fórmula da variação das constantes" das equações ordinárias. É bem conhecido que a solução (ao menos formal) de

$$\begin{cases} (\Box u)(t,x) = 0 \\ u(0,x) = \alpha(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

é dada por

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} R(t,y)\alpha(x-y) + R(t,y)\beta(x-y) \right\} dy \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial t}(t) * \alpha \right)(x) + \big(R(t) * \beta\big)(x) \end{aligned}$$

onde R é a "solução fundamental" de (5.1); ou seja, a solução de

$$\begin{cases} (\Box u)(t,x) = 0 \\ u(0,x) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \delta \end{cases}$$

sendo δ o delta de Dirac concentrado na origem. Por vezes, R também é chamada de função de Riemann.

Apesar de se haver uma expressão explícita para R (veja, e.g, L. C. Evans (2010) ou J. Shatah–M. Struwe (2000)), para os nossos propósitos só será necessário a ciência destes dois seguintes casos.

Na dimensão física $N = 3$, R é uma integral esférica e é dada pela chamada fórmula de Kirchoff

$$\big(R(t) * \beta\big)(x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \beta(y) d\sigma(y) = \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} \beta(x+ty) d\sigma(y) \tag{5.2}$$

($d\sigma$ é a medida superficial). Para qualquer N no entanto, temos a representação através da transformada de Fourier

$$\begin{aligned} R(t,x) &= \mathfrak{F}^{-1}\big(\cos(|\xi|t)\big) \\ \frac{\partial R}{\partial t}(t,x) &= \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \right) \end{aligned}$$

onde $\mathfrak{F}$ é a transformada de Fourier nas variáveis espaciais x. Pondo $\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\big(-|\xi|\cos(|\xi|t)\big)$, é fácil então que a família de operadores $\{T_t\}_{t\geq 0}$ em $H^1 \times L^2$, $T_t(\alpha,\beta) = \left[R(t)*\beta + \frac{\partial}{\partial t}R(t)*\alpha, \frac{\partial}{\partial t}R(t)*\beta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}R(t)*\alpha\right]$, é um grupo fortemente contínuo (veja também H. Brézis (2011) para uma derivação da existência desse grupo através do teorema de Hille-Yosida).

Observe também que, até em dimensão 3, a solução u de (5.1) é menos regular que os dados iniciais (exceto se α e $\beta \in C^\infty$) em virtude da derivada temporal em $R(t) * \alpha$. Isto indica que possivelmente os espaços C^k não são ótimos para estudar esquações hiperbólicas. Por outro lado, as soluções não degeneram no espaço de energia $H^1 \times L^2$. Com efeito, uma derivação formal (ou um cálculo direto escrevendo $\widehat{u}(t,\xi) = \cos(t|\xi|)\widehat{\alpha}(\xi) + \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\widehat{\beta}(\xi))$ mostra que a energia $e(t) = \frac{1}{2}\int \{u_t^2 + u_{x_1}^2 + \ldots + u_{x_n}^2\} dx$ é constante. Voltaremos a este tópico em breve.

Podemos agora explicar o que é princípio de Duhamel. Este afirma que a solução do problema não-homogêneo

$$\begin{cases} (\Box u)(t,x) + f(t,x) = 0 \\ u(0,x) = \alpha(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta(x). \end{cases} \tag{5.3}$$

é dada por

$$u(t,x) = u^0(t,x) - \int_0^t R(t-\tau) * f(\tau) d\tau \tag{5.4}$$

onde $u^0(t,x)$ **a partir de agora simbolizará a solução de** (5.1). No espaço de frequência (5.4) é dada mais simplesmente como

$$\widehat{u}(t,\xi) = \cos(|\xi|t)\widehat{\alpha}(\xi) + \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\widehat{\beta}(\xi) - \int_0^t \frac{\sin(|\xi|(t-\tau))}{|\xi|}\widehat{f}(\tau,\xi) d\tau. \tag{5.5}$$

Se até o momento, tudo foi dito sem nenhuma preocupação com o rigor, a partir de (5.5) já podemos discernir a validade do raciocínio acima. De fato, um momento de reflexão mostra que, se $\alpha \in H^1$, $\beta \in L^2$ e

$f \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty); L^2)$, u dada acima é uma solução fraca de (5.3) segundo o teorema 3.1.1, tomando $E^* = H^{-1}$. Neste caso, de fato $u \in C([0,\infty); H^1) \cap W^{1,1}_{\text{loc}}((0,\infty); L^2) \cap W^{2,1}_{\text{loc}}((0,\infty); H^{-1})$ e as derivadas de $\widehat{u}$ são dadas pelas "derivadas formais" de (5.5). Outros resultados de regularidade podem evidentemente serem obtidos sob outras hipóteses em f.

A fórmula de Duhamel também dá algumas estimativas a priori pontuais e em média para uma solução (5.3). A mais simples desta é sem dúvidas

$$|u(t)|_{L^2} \le |u^0(t)|_{L^2} + \|f\|_{L^1((0,T);L^2)} \le |\alpha|_{L^2} + |\beta|_{L^2} + \|f\|_{L^1((0,T);L^2)}, \tag{5.6}$$

que decorre imediatamente de (5.5). Uma outra classe de estimativas são as *desigualdades de energia*, que têm um cunho geométrico e dão estimativas em espaços de Sobolev. Para ilustrar, recapitulemos a seguinte clássica proposição.

Teorema 5.1.1 (Estimativa de energia). *Seja $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma solução fraca de (5.3) e fixe $t_0 > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Definindo*

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{|x-x_0|<t_0-t} \left(u_t(t,x)^2 + |\nabla u(t,x)|^2\right) dx,$$

então para quase todo $t > 0$

$$e(t)^{1/2} \le e(0)^{1/2} + \sqrt{2} \left\{ \int_0^t |f(\tau)|_{L^2(\Sigma_\tau)} d\tau \right\}^{1/2} \tag{5.7}$$

onde $\Sigma_\tau = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - x_0| < t - \tau\}$.

Demonstração. Passo um. Primeiro, presumemos que u é uma função suave, digamos de classe C^∞. A primeira etapa é estabelecer a identidade diferencial

$$u_t(\Box u) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_t^2 + |\nabla u|^2}{2}\right) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_t \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \text{divergente de } X(t,x)$$

que pode ser feita por uma simples aplicação da regra de Leibniz. Portanto integrando $u_t(\Box u)$ no tronco de cone $K = \{(\tau,x) \in \mathbb{R}^{1+N}; 0 < \tau < t, |x - x_0| < t_0 - \tau\}$, o teorema do divergente diz precisamente que

$$e(t) = e(0) - F - \int\int_K u_t f \, dt dx$$

onde F é o fluxo de $X(t,x)$ na "região lateral" do cone K.

No entanto, um cálculo direto dá que

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\substack{0<\tau<t-t_0,\\ |x-x_0|=t-t_0}} \left\{ \left(u_t(\tau,x)^2 + |\nabla u(\tau,x)|^2\right) - 2u_t(\nabla u(\tau,x)) \cdot \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \right\} d\sigma(\tau,x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\substack{0<\tau<t-t_0,\\ |x-x_0|=t-t_0}} \left| u_t(\tau,x) \frac{x-x_0}{|x-x_0|} - \nabla u(\tau,x) \right|^2 d\sigma(\tau,x) \ge 0, \end{aligned}$$

enquanto a desigualdade de Cauchy-Schwarz afirma que

$$\begin{aligned} \int_K u_t f \, dt dx &= \int_0^t \int_{\Sigma_\tau} u_t(\tau,x) f(\tau,x) dx d\tau \\ &\le \int_0^t |u_t(\tau)|_{L^2(\Sigma_\tau)} |f(\tau)|_{L^2(\Sigma_\tau)} d\tau \\ &\le \sqrt{2} \int_0^t e(\tau)^{1/2} |f(\tau)|_{L^2(\Sigma_\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Chamando $\phi(t) = \text{Máx.}_{0 \le \tau \le t} e(\tau)^{1/2}$ e $\psi(t) = \int_0^t |f(\tau)|_{L^2(\Sigma_\tau)} d\tau$, um momento de reflexão diz que demonstramos que $\phi(t)^2 \le \phi(0)^2 + \sqrt{2}\psi(t)\phi(t)$. Esta desigualdade por sua vez só é possível se $\phi(t) \le \frac{\sqrt{2}}{2}\psi(t) + \frac{1}{2}\sqrt{4\phi(0)^2 + 2\psi(t)^2} \le \sqrt{2}\psi(t) + \phi(0)$. Já que $e(t)^{1/2} \le \phi(t)$, fica estabelecida assim a desigualdade (5.7) para quando u é suave.

Passo dois. Agora, por densidade, provaremos a validade de (5.7) se u não é necessariamente diferenciável.

Para $t_0 > 0$ fixado, estendemos f para fora do cone. Isto pode ser feito tomando $\widetilde{f}(t) = E(t)f(t)$, onde $E(t)g(x) = g(x)$, se $|x - x_0| \le t_0 - t$, e $E(t)g(x) = \varphi(x/t)g(\frac{t^2}{|x|^2}x)$, se $|x - x_0| > t_0 - t$, sendo que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é tal que $\varphi = 1$ na bola unitária de $\mathbb{R}^N$. Com esta escolha, temos que $|E(\tau)g|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le C|g|_{L^2(\Sigma_\tau)}$ para uma constante $C > 0$ independente de $0 < \tau < t$ e $g \in L^2(\Sigma_\tau)$.

Visto que toda função em $L^1((0, t_0); L^2)$ pode ser bem aproximada por funções-escada, um argumento básico de densidade garante a existência de uma sequência de funções $\widetilde{f}_n(t, x) \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$ tais que $\widetilde{f}_n \to \widetilde{f}$ em $L^1((0, t_0); L^2)$. Por convolução e truncamento, podemos escolher também α_n e β_n em C_c^∞ com $\int_{|x-x_0|<t_0} \{|\nabla\alpha_n(x) - \nabla u(0, x)|^2 + |\beta_n - u_t(0, x)|^2\}dx \to 0$.

Com estas funções em mão, se define u_n como soluções dos problemas de Cauchy $(\Box u_n)(t, x) = \widetilde{f}_n(t, x)$ com $u_n(0) = \alpha_n$ e $\dot{u}_n(0) = \beta_n$. Pela teoria linear das equações hiperbólicas (veja, e.g., S. Alinhac (2009), L. C. Evans (2010), F. John (1994)), tais u_n vêm a ser de classe C^∞.[1] Daí, aplicando a estimativa de energia em $u_m - u_n$, vemos que $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ e ∇u_n convergem dentro do cone para uma $\frac{\partial v}{\partial t}$ e ∇v. Esta v por sua vez satisfaz desigualdade de energia e

$$\int v(\Box\varphi)dtdx = -\int u(0, x)\frac{\partial\phi}{\partial t}(0, x)dx - \int \frac{\partial v}{\partial t}(0, x)\phi(0, x)dx + \int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} f(t, x)\phi(t, x)dtdx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ tal que $\phi(t, x) = 0$ se $t > t_0$ ou $|x - x_0| > t_0 - t$ com $t > 0$.

Para finalizar, resta provarmos que $u = v$ dentro do cone. De fato, $w = u - v$ é uma função tal que

$$\int w(\Box\varphi)dtdx = 0 \tag{5.8}$$

para toda ϕ como acima. Na realidade, estendendo $w = 0$ para $t < 0$ no "semi-cone" infinito $\widetilde{K} = \{t < t_0, |x - x_0| < t - t_0\}$, vemos que (5.8) permanece válida para toda função-teste φ suportada em $\widetilde{K}$. Assim, toda regularização w_ε de w no interior de $\widetilde{K}$ satisfaz a equação da onda $\Box w_\varepsilon = 0$ e com dados iniciais nulos na base de um cone. Pela estimativa de energia para funções suaves, $w_\varepsilon = 0$. Dado que $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ no sentido de distribuições, $w = 0$. Isto completa a demonstração. ////

Observe que a convergência de nenhuma integral tanto em (5.7) é presumida a princípio. De fato, uma das consequências deste teorema é justamente que se $\alpha \in H^1_{\text{loc}}$, $\beta \in L^2_{\text{loc}}$ e $f \in L^1((0, T); L^2(\Omega))$ para todos $T > 0$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, então $u \in H^1_{\text{loc}}((0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$. Mais ainda, se os dados iniciais forem nulos, a solução fraca terá de ser nula, o que confere legitimidade à solução dada por (5.5).

A forma que usaremos esta desigualdade será em sua formulação global: passando $t_0 \to \infty$ e aplicando com o teorema da convergência monótona, obtemos

$$\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (u_t(t, x)^2 + |\nabla u(t, x)|^2)dx\right\}^{1/2} \le \left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\beta(x)^2 + |\nabla\alpha(x)|^2)dx\right\}^{1/2} + \int_0^t |f(\tau)|_{L^2(\mathbb{R}^N)}d\tau, \tag{5.9}$$

para quase todo $t > 0$. Esta estimativa poderia também ser obtida usando a fórmula de representação (5.5), entretanto preferimos esta prova por três motivos.

Em primeiro lugar, está seu caráter geométrico. Esta versão localizada implica o famoso *princípio da casualidade* (ou *"princípio fraco de Huyghens"*): os dados inicias *"se propagam com velocidade finita"* (e igual a 1 neste caso). Isto quer dizer que os dados iniciais forem nulos dentro de uma bola de raio $r > 0$ e centro $a \in \mathbb{R}^N$, então certamente $u(t, x) = 0$ para $0 < t < r$ e $|x - a| < r - t$. Em particular, se $u(0)$ estiver

[1] É suficiente empregar a caracterização de Fourier para as derivadas parciais e a fórmula de Duhamel (5.5). Observe que pela estimativa de energia para funções suaves, estas u_n's são únicas.

suportada em $|x| < M$, então o suporte de $u(t)$ está contido em $|x| < M + t$. Estas propriedades valem tanto para soluções fortes quanto fracas.

Além disso, o argumento da prova possui diversas extensões, entre elas o chamado método *abc* de K. O. Friedrichs. Este consiste em multiplicar $\Box u$ não necessariamente por u_t, mas por um "multiplicador" geral da forma $au_t + b \cdot \nabla u + cu$, onde a, b, c são funções, e proceder em escrever a expressão obtida como uma divergência (mais possivelmente alguns outros termos "bem-comportados"). Com isto, se obtém estimativas de u perto da origem (como a desigualdade de Morawetz), perto ou longe dos "cones de luz" (desigualdade de Keel-Smith-Sogge), em função do grupo de Poincaré (desigualdade conforme) etc. Neste vasto e clássico tema, consulte S. Alinhac (2009), J. Shatah–M. Struwe (2000), W. A. Strauss (1990) e outros.

Finalmente, estas estimativas similarmente possuem homólogos em outras equações da onda. Por exemplo, para equação não-homogênea de Klein-Gordon

$$\begin{cases} (\Box u)(t,x) + u(t,x) = f(t,x) \\ u(0,x) = \alpha(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta(x). \end{cases} \tag{5.10}$$

o teorema 5.1.1 permanece válido se substituirmos a expressão de $e(t)$ para

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_{|x-x_0|<t_0-t} (u_t(t,x)^2 + |\nabla u(t,x)|^2 + |u(t,x)|^2)dx.$$

Por conseguinte, (5.9) é modificada para

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (u_t(t,x)^2 + |\nabla u(t,x)|^2 + u(t,x)^2)dx\right\}^{1/2} \\ &\qquad \leq \left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\beta(x)^2 + |\nabla \alpha(x)|^2 + \alpha(x)^2)dx\right\}^{1/2} + \sqrt{2}\int_0^t |f(\tau)|_{L^2(\Sigma_\tau)}d\tau. \end{aligned} \tag{5.11}$$

É interessante também salientar que, para *soluções clássicas* de uma equação semilinear (5.18), o raciocínio do teorema 5.1.1 permite concluir a identidade

$$\begin{aligned} &\int_{|x-x_0|<t_0} \left\{\frac{1}{2}\beta(x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\alpha(x)|^2 + F\big(\alpha(x)\big)\right\}dx \\ &\quad = \int_{|x-x_0|<t_0-t} \left\{\frac{1}{2}u_t(t,x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + F\big(u(t,x)\big)\right\}dx \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\substack{0<\tau<t-t_0,\\ |x-x_0|=t-t_0}} \left\{\frac{1}{2}\left|u_t\frac{x-x_0}{|x-x_0|} - \nabla u\right|^2 + F(u)\right\}d\sigma(\tau,x) \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde $F(s) = \int_0^s f(z)dz$. Em particular, se $F \geq 0$, vale o princípio da casualidade como acima. Por conseguinte, temos que para soluções clássicas vale a identidade de energia

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}u_t(t,x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + F\big(u(t,x)\big)\right\}dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}\beta(x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\alpha(x)|^2 + F\big(\alpha(x)\big)\right\}dx,$$

caso α e β tiverem suporte compacto. Lamentavelmente não é claro se soluções fracas possuem a suavidade necessária para que estas mesmas conclusões permaneçam válidas.[2]

[2] Na realidade, o princípio da casualidade continua válido caso a não-linearidade f fosse lipschitziana. Para ver isto, escreva $\Box u + f(u) = 0$ como $(\Box + 1)u + g(u)$, utilize a versão localizada de (5.11) em cones e aplique a desigualdade de Gronwall.

5.2 Existência de soluções para o problema semilinear

Agora já podemos a estudar a equação semilinear

$$\begin{cases}(\Box u)(t,x) + f\big(t,x,u(t,x)\big) = 0 \\ u(0,x) = \alpha(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta(x).\end{cases} \tag{5.13}$$

A estratégia tradicional é escrevê-lo como o problema de ponto fixo

$$u(t) = u^0(t) - \int_0^t R(t-\tau) * f\big(\tau, u(\tau,x)\big) d\tau \tag{5.14}$$

e mostrar através de estimativas a priori que este tem mesmo solução. Comecemos com um caso simples.[3]

Teorema 5.2.1. *Seja que $f : [0,\infty)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo $f(t,x,0) = 0$ e a condição de Lipschitz $|f(t,x,u) - f(t,x,v)| \leq L|u-v|$ para uma certa constante $L > 0$, quaisquer que sejam $0 \leq t$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $u, v \in \mathbb{R}$.*

Então para quaisquer $\alpha \in H^1$ e $\beta \in L^2$, a equação (5.18) possui uma e única solução de energia finita $u : [0,\infty)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Mais ainda, as soluções dependem continuamente dos dados iniciais: se $g(\alpha,\beta)(t)$ é a solução de (5.18), então $[t,\alpha,\beta] \in [0,\infty)\times H^1\times L^2 \mapsto \Big[g(\alpha,\beta), \frac{\partial g}{\partial t}(\alpha,\beta)\Big] \in H^1\times L^2$ é contínua.

Se f independer de t e x, adicionalmente temos que $u \in C^1\big([0,\infty);L^2\big)\cap C\big([0,\infty);H^1\big)$ e que a energia total se conserva: pondo $F(s) = \int_0^s f(z)dz$ e

$$e(t) = \int_{\mathbb{R}^N}\left\{\frac{1}{2}u_t(t,x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + F\big(u(t,x)\big)\right\}dx \tag{5.15}$$

então

$$e(t) = e(0) = \int_{\mathbb{R}^N}\left\{\frac{1}{2}\beta(x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\alpha(x)|^2 + F\big(\alpha(x)\big)\right\}dx \tag{5.16}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Dividiremos esta prova em três partes.[4]

Passo um: existência e unicidade de u.

Esta etapa não deve apresentar dificuldade a alguém familiar com a teoria de semigrupos (ou mesmo das equações diferenciais ordinárias), contudo para a conveniência do leitor exporemos o argumento.

Já que, para todo $s \in \mathbb{R}$, a transformação linear $A_s \in \mathscr{L}(L^2;L^2)$, $A_s f = R(s) * f$, tem norma ≤ 1 e $|f(u)|_{L^2} \leq L|u|_{L^2}$, a desigualdade (5.6) assere que uma solução de (5.14) necessariamente pode ser estimada como

$$|u(t)|_{L^2} \leq |\alpha|_{L^2} + |\beta|_{L^2} + L\int_0^t |u(\tau)|_{L^2} d\tau$$

donde aplicando a desigualdade de Gronwall obtemos que

$$|u(t)| \leq \big(|\alpha|_{L^2} + |\beta|_{L^2}\big)e^{Lt}.$$

Por conseguinte, é natural procurar a solução de (5.14) no espaço

$$X = \left\{u : [0,\infty) \to L^2; u \text{ é contínua e } \operatorname*{Sup}_{t\geq 0} e^{-kt}|u(t)|_{L^2} < \infty\right\}$$

para alguma constante $k > L$ e munido como a norma

$$\|u\|_X = \operatorname*{Sup}_{t\geq 0} e^{-kt}|u(t)|_{L^2}.$$

Esta norma não apenas torna X em um espaço de Banach, como faz com que a aplicação $S : X \to X$

[3] Trivialmente este resultado também possui um análogo para soluções locais.

[4] Veja também J. Shatah–M. Struwe (2000) para uma prova diferente.

$$S(u)(t) = u^0(t) - \int_0^t R(t-\tau) * f\big(\tau, u(\tau)\big)d\tau$$

esteja bem definida e seja uma contração de constante $L/k < 1$. Portanto o teorema do ponto fixo de Banach garante a existência e unicidade da solução de (5.14). Além disso, u é de energia finita por conta da estimativa (5.9). Consequentemente, já que $t \mapsto f\big(t, u(t)\big) \in C\big([0,\infty); L^2\big) \subset L^1_{\mathrm{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$, u é uma solução fraca de (5.18).

Passo dois: dependência contínua e um resultado de regularidade.

Convertemos (5.18) na equação de Klein-Gordon $\Box u + u = -f(t,x,u) + u = -g(t,x,u)$, donde $g(t,x,0) = 0$ e é lipschitziana de constante $L + 1 = L'$. Sejam u e v soluções com dados iniciais $u(0,x) = \alpha(x), u_t(0,x) = \beta(x), v(0,x) = \gamma(x)$ e $v_t(0,x) = \delta(x)$, onde naturalmente estamos considerando que α e $\gamma \in H^1$ e β e $\delta \in L^2$. Neste caso, aplicando a versão de Klein-Gordon de (5.9), temos que

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|u_t(t,x) - v_t(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x) - \nabla v(t,x)|^2 + |u(t,x) - v(t,x)|^2\Big)dx\right\}^{1/2}\\ \leq \left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\beta(x) - \delta(x)|^2 + |\nabla\alpha(x) - \nabla\gamma(x)|^2 + |\alpha(x) - \gamma(x)|^2\Big)dx\right\}^{1/2}\\ + \sqrt{2}L'\int_0^t |u(\tau) - v(\tau)|_{L^2}d\tau\end{aligned}$$

para quase todo $t > 0$; logo,

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{2}|u_t(t) - v_t(t)|^2_{L^2} + \frac{1}{2}|u(t) - v(t)|^2_{H^1}\right\}^{1/2}\\ &\leq \left\{\frac{1}{2}|\beta - \delta|^2_{L^2} + \frac{1}{2}|\alpha - \gamma|^2_{H^1}\right\}^{1/2} + \sqrt{2}L'\int_0^t\left\{\frac{1}{2}|u_t(\tau) - v_t(\tau)|^2_{L^2} + \frac{1}{2}|u(\tau) - v(\tau)|^2_{H^1}\right\}^{1/2}d\tau\end{aligned}$$

donde, aplicando novamente a desigualdade de Gronwall,

$$\left\{\frac{1}{2}|u_t(t) - v_t(t)|^2_{L^2} + \frac{1}{2}|u(t) - v(t)|^2_{H^1}\right\}^{1/2} \leq \left\{\frac{1}{2}|\beta - \gamma|^2_{L^2} + \frac{1}{2}|\alpha - \gamma|^2_{H^1}\right\}^{1/2} e^{\sqrt{2}L't} \tag{5.17}$$

em quase toda parte. Esta desigualdade provém uma nova demonstração da unicidade de soluções, bem como a de que estas variam continuamente com os dados iniciais.

Presuma a partir de agora que $f = f(s)$ somente. Seja T_h é o operador de translação, $T_h f(x) = f(x + he_i)$, onde $1 \leq i \leq N$ e $\{e_1, \ldots, e_N\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^N$. Se escolhermos $\gamma(x) = T_h\alpha$ e $\delta(x) = T_h\beta$, então $v(t) = (T_h u)(t)$ e verificamos que

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{|h|}|T_h\dot{u}(t) - \dot{u}(t)|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{|h|}|T_h u(t) - u(t)|^2_{H^1}\right\}^{1/2} \leq \left\{\frac{1}{2}\frac{1}{|h|}|T_h\beta - \beta|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{|h|}|T_h\alpha - \alpha|^2_{H^1}\right\}^{1/2} e^{\sqrt{2}L't}.$$

Agora, se $\alpha \in H^2$ e $\beta \in H^1$, então $\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{|h|}|T_h\beta - \beta|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{|h|}|T_h\alpha - \alpha|^2_{H^1}\right\}^{1/2} \leq C$, onde $C = C(\alpha, \beta)$ independe de h. Portanto, escolhendo $h = h_n \to 0$, uma proposição básica da teoria dos espaços de Sobolev (veja, por exemplo, a seção 2.4 desta dissertação) assere que $\dot{u} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}\big((0,\infty); H^1\big)$ e $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}\big((0,\infty); H^2\big)$. Como $u_{tt} = \Delta u + f(u) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$, a prova desta etapa é concluída.

Passo três: a identidade de energia. Se $\alpha \in H^2$ e $\beta \in H^1$, u tem regularidade suficiente para que $e(t)$ em (5.15) esteja em $W^{1,\infty}$ e possamos derivá-la através da regra de Leibniz. Neste caso, um cálculo direto dá que $e'(t) = 0$ e $e(t) = e(0)$ para todo $t > 0$. No caso geral, aproximamos α e β por funções suaves e utilizamos a dependência contínua das condições iniciais que provamos no segundo passo. Observe que, dado que a convergência sobre u e suas derivadas é uniforme sobre conjuntos limitados, de fato as soluções u estão em $C^1\big([0,\infty); L^2\big) \cap C\big([0,\infty); H^1\big)$, como afirmamos. ////

Apesar de a conclusão da proposição acima ser muito forte, a hipótese da não-linearidade ser lipschitziana é extremamente restringente e raramente vista na prática. Para equações mais complicadas, alguns resultados positivos são conhecidos desde que f possua algum tipo de coercividade. Um teorema clássico nesta direção é o de W. A. Strauss. Por simplicidade, consideraremos somente o problema onde f não depende de t, x

$$\begin{cases} (\Box u)(t,x) + f\big(u(t,x)\big) = 0 \\ u(0,x) = \alpha(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta(x), \end{cases} \tag{5.18}$$

apesar de que enunciados parecidos possam ser válidos no caso geral (sem a desigualdade de energia, contudo).

Teorema 5.2.2 (Strauss). *Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente lipschitziana (i.e., restrita a conjuntos limitados, é lipschitziana), tal que $f(0) = 0$ e que satisfaça a condição do sinal: $sf(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Sejam também $\alpha \in H^1$ e $\beta \in L^2$ tais que $\int_{\mathbb{R}^N} \{\frac{1}{2}\beta(x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\alpha(x)|^2 + F\big(\alpha(x)\big)\}dx = e(0) < \infty$, onde novamente $F(s) = \int_0^s f(z)dz$.*

Então a equação (5.18) possui uma solução de energia finita $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Além disso, para esta u vale a desigualdade de energia: se $e(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \{\frac{1}{2}u_t(t,x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + F\big(u(t,x)\big)\}dx$, então

$$e(t) \leq e(0) \tag{5.19}$$

para quase todo $t > 0$.

Demonstração. Passo um: definição de u_n e de u. Como agora não há um espaço natural para se procurar uma solução u, procedemos por aproximar o problema geral por outros em que a não-lineridade é lipschitziana.

Seja $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\eta \geq 0$, $\eta(s) = 1$ se $|s| < 1$ e $\eta(s) = 0$ para $|s| > 2$. Pondo $f_n(s) = \eta(s/n)f(s)$, o teorema 5.2.1 assere que existe uma única solução u_n de (5.18) com $f = f_n$. Estas soluções em particular conservam a energia: para quase todo $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}u_t(t,x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + F\big(u(t,x)\big)\right\}dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}\beta(t,x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\alpha(t,x)|^2 + F_n\big(\alpha(x)\big)\right\}dx \\ &= e_n. \end{aligned} \tag{5.20}$$

onde nitidamente $F_n(z) = \int_0^z f_n(s)ds$.

Pelo teorema da convergência monótona $e_n \to e(0) < \infty$, de modo que $D_i u$ é, qualquer que seja $0 \leq i \leq N$, uma sequência limitada em $L^\infty\big((0,\infty); L^2\big)$. Assim o teorema 2.2.1 e o de Banach-Alaoglu-Bourbaki garantem a existência de uma subsequência, que ainda denotaremos por u_n, tal que $D_i u_n \overset{*}{\rightharpoonup} D_i u$ na topologia fraca-$*$ $\sigma\big(L^1\big((0,\infty); L^2\big); L^\infty\big((0,\infty); L^2\big)\big)$.

Da semicontinuidade inferior da norma, $\|D_i u\|_{L^\infty((0,\infty);L^2)} < \infty$ e, do teorema fundamental do Cálculo, $u \in H^1_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$. Por conseguinte, temos que $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \{u_n^2 + D_0 u_n^2 + \ldots + D_N u_n^2\}dtdx \leq C < \infty$ uniformemente em n, de modo que uma aplicação do teorema de Rellich-Kondrachov com um argumento diagonal permite que presumamos que $u_n(t,x) \to u(t,x)$ em quase todo $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Em virtude de (5.20), temos que para quaisquer $t, h > 0$

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}u_t(s,x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(s,x)|^2 + F\big(u(s,x)\big)\right\}dxds = e_n.$$

O lema de Fatou e a semicontinuidade da norma então mostram que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e(s)ds \leq e(0),$$

implicando, por meio do teorema da diferenciação de Lesbesgue, que u satisfaz (5.19).

Passo dois: $f_n(u_n) \to f(u)$ em $L^1\big((0,T)\times\Omega\big)$ para todo $T > 0$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, parte i. Nesta etapa, provaremos que, para todo $T > 0$, existe $C = C(T, |\alpha|_{H^1}, |\beta|_{L^2}) > 0$ tal que $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u_n f_n(u_n)|dxdt \leq C$.

Para isto, primeiro suponhamos que $\alpha \in H^2$ e $\beta \in H^1$, de maneira que sabemos pelo passo dois da prova do teorema 5.2.1 que $D_{ij}u_n \in L^\infty_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$ para todo $i, j = 0, \dots, N$. Neste caso, multiplicamos a equação $\Box u_n + f_n(u_n) = 0$ por u_n e integramos em $0 < t < T$ e $x \in \mathbb{R}^N$ para ter

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u_n f_n(u_n)| dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_n f_n(u_n) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ D_0 u_n(t,x)^2 - |\nabla u_n(t,x)|^2 \Big\} dx dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ u_n(T,x) D_0 u_n(T,x) - u_n(0,x) D_0 u_n(T,x) \Big\} dx \\ &\leq C,\end{aligned}$$

como queríamos. O caso geral $\alpha \in H^1$ e $\beta \in L^2$ decorre da continuidade das soluções sob as condições iniciais e do fato de que constante C depende somente das primeiras derivadas de u_n e não das segundas.

Passo três: $f_n(u_n) \to f(u)$ em $L^1\big((0,T) \times \Omega\big)$ para todo $T > 0$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, parte ii. Mostraremos agora que sequencia $g_n = f_n(u_n)$ é uniformemente integrável em $(0,T) \times \mathbb{R}^N$; isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $A \subset (0,T) \times \mathbb{R}^N$ é mensurável e tem medida $< \delta$, então $\int_A |g_n| dt dx < \varepsilon$.

Com efeito, para todo $\lambda > 0$ o passo anterior nos permite estimar

$$\begin{aligned}\int_A |g_n| dt dx &= \int_{A \cap \{|u_n| \geq \lambda\}} |f_n(u_n)| dt dx + \int_{A \cap \{|u_n| < \lambda\}} |f_n(u_n)| dt dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \int_A |u_n f_n(u_n)| dt dx + \Big(\operatorname*{Máx.}_{|s| \leq \lambda} |f(s)| \Big) |A| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} C + \Big(\operatorname*{Máx.}_{|s| \leq \lambda} |f(s)| \Big) |A|\end{aligned}$$

onde $|A|$ denota a medida de A. Tomando λ suficientemente grande, $\frac{1}{\lambda} C < \varepsilon/2$, bastando agora tomar δ tal que $\delta \operatorname{Máx.}_{|s| \leq \lambda} |f(s)| < \varepsilon/2$ e concluir.

Passo quatro: $f_n(u_n) \to f(u)$ em $L^1\big((0,T) \times \Omega\big)$ para todo $T > 0$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, conclusão.

Finalmente, deduziremos a convergência de $f_n(u_n)$ a $f(u)$.

De fato, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ obtido pela integrabilidade uniforme de $f_n(u_n)$. Sabemos que $f_n(u_n) \to f(u)$ em quase todo ponto; disto o teorema de Egorov garante que existe um conjunto $A \subset (0,T) \times \Omega$ de medida inferior a δ tal que $f_n(u_n) \to f(u)$ uniformemente em $(0,T) \times \Omega \setminus A$. Assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^T \int_\omega |f_n(u_n) - f(u)| dx dt \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{(0,T)\times\omega\setminus A} |f_n(u_n) - f(u)| dt dx + 2\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Passando $\varepsilon \to 0$ dá o resultado desejado.

Passo cinco: u é uma solução fraca de (5.18). De fato, dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ temos a identidade

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} u_n(t,x)(\Box\phi)(t,x) dt dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,x) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\phi(0,x) dx + \int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} f_n\big(u_n(t,x)\big)\phi(t,x) dt dx\end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. Portanto, quando $n \to \infty$ ficamos com

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} u(t,x)(\Box\phi)(t,x) dt dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,x) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\phi(0,x) dx + \int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^N} f\big(u(t,x)\big)\phi(t,x) dt dx,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

////

Alguns comentários estão em ordem.

Apesar da condição do sinal não ser estritamente necessária,[5] ela não é de toda superficialidade, já que são bem-conhecidos exemplos em que, tendo f o "sinal errado", as soluções podem "explodir" em tempo finito. Um teorema surpreendente e importante nesta direção foi o de F. John, que afirma, em dimensão $N = 3$, não há solução global do problema $\Box u - |u|^{1+\sqrt{2}} = 0$ mesmo com dados iniciais $(u(0), u_t(0)) = (\alpha, \beta) \in C_c^\infty \times C_c^\infty$; veja W. A. Strauss (1990) e as referências lá contidas.

Podemos também comparar o teorema acima para $f(s) = |s|^{p-1}s$ com o teorema de Serra–Tilli. No último vemos que as soluções obtidas têm pelo menos a regularidade $u_{tt} \in L^\infty((0,\infty); (H^1 \cap L^{p+1})^*)$; de fato, as obtidas pelo teorema de Strauss também a possuem, uma vez que a desigualdade de energia afirma que para toda $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\langle u_{tt}, \varphi \rangle &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \nabla u(t,x) \cdot \nabla \varphi(t,x) - |u(t,x)|^{p-1} u(t,x) \varphi(t,x) \right\} dx\, dt \\
&\leq \int_0^\infty \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t,x)|^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi(t,x)|^2 dx \right\}^{1/2} dt \\
&\quad + \int_0^\infty \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^{p+1} dx \right\}^{1/(p+1)'} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(t,x)|^{p+1} dx \right\}^{1/(p+1)} dt \\
&\leq C \|\varphi\|_{L^1((0,\infty); H^1 \cap L^{p+1})}.
\end{aligned}$$

($\langle\ ,\ \rangle$ novamente simboliza o produto de dualidade entre $\mathscr{D}'$ e C_c^∞). Como então $C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ é denso em $L^1((0,\infty); H^1 \cap L^{p+1})$, temos que $u_{tt} \in \left(L^1((0,\infty); H^1 \cap L^{p+1})\right)^* = L^\infty((0,\infty); (H^1 \cap L^{p+1})^*)$. No entanto, nós decidimos enfatizar este fato no enunciado do teorema 1.1.1, uma vez que ela desempenha um papel fundamental na verificação da condição inicial $u_t(0) = \beta$.

Não obstante, o teorema de Strauss pede que $[\alpha, \beta] \in H^1 \cap L^{p+1} \times L^2$, ao passo que o de Serra–Tilli solicita $[\alpha, \beta] \in H^1 \cap L^{p+1} \times H^1 \cap L^{p+1}$. Infelizmente esta última exigência não pode ser enfraquecida para a primeira. O motivo: vimos que o espaço X_ε natural para se estudar o funcional F_ε possuía as injeções contínuas $X \subset L^2((0,T); H^1(\Omega))$ e $X \subset H^2((0,T); L^2(\Omega))$ para qualquer $0 < T$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$. Deste modo o teorema A.0.8 do apêndice A diz que todo elemento $u \in X$ de fato satisfaz $u(0) \in H^{3/4}_{\mathrm{loc}}$ e $\dot{u}(0) \in H^{1/4}_{\mathrm{loc}}$. Portanto, o método variacional seria inefetivo com a condição $\beta \in L^2$.[6]

Uma questão que fica aberta pelos dois teoremas é a unicidade das soluções fracas.[7] Este é um problema

[5]As conclusões do teorema 5.2.2 continuariam válidas se substituíssemos a $sf(s) \geq 0$ $[\forall s \in \mathbb{R}]$ pelas seguintes condições: (i) a de coercitividade de I. E. Segal

$$0 \leq sf(s) + Cs^2 \leq CF(s) + C's^2$$

para duas constantes $C, C' > 0$ e todo $|s|$ suficientemente grande; (ii) outra possibilidade é impor que

$$|f(s)| \leq C|s|^p$$

para algum $1 \leq p < 2^*$ com

$$F(s) \geq -Cs^2$$

(um exemplo de uma função assim é a não-linearidade oscilatória $F(s) = \sin(|s|^p s)$); (iii) ainda uma outra seria, mantendo $F(s) \geq -Cs^2$, supor que $|F(s)|/|f(s)| \to \infty$ quando $|s| \to \infty$. Para a demonstração sob tais hipóteses, veja, respectivamente, J. Shatah–M. Struwe (2000), M. Majdoub–N. Masmoudi (2014) e W. A. Strauss (1990). A prova segue, no entanto, as mesmas linhas da dedução do teorema de Strauss: se aproxima f por funções lipschitzianas f_n para se fabricar uma sequência de soluções aproximadas (u_n); mostra-se que esta sequência é limitada no espaço de energia; verifica-se que $f_n(u_n)$ são uniformemente integráveis *und so weiter*.

[6]Mesmo assim, ressaltemos que o passo 2 (portanto a demonstração) do teorema 5.2.2 permanece válida com f no lugar de f_n quando f satisfaz a condição do sinal; veja M. Majdoub–N. Masmoudi (2014). Por conseguinte, é possível construir soluções para $\beta \in L^2$ aproximando por soluções u_n tais que $\dot{u}_n(0) = \beta_n \in H^1 \cap L^{p+1}$.

[7]Serra e Tilli conjecturam que, mesmo que não se tenha unicidade, a solução obtida pelo método variacional seja única, podendo ser chamada deste modo de *a solução variacional*. Não se sabe qualquer progresso foi feito neste sentido; a prova certamente passaria por novas estimativas a priori sobre u_ε e por novas leis de conservação sobre os funcionais F_ε. Este não é um trabalho inteiramente óbvio, dado que seria necessário construir explicitamente novos "competidores" a u_ε, isto é, funções em $v \in H^2_{\mathrm{loc}}((0,\infty); L^2)$ tais que $v(0) = \alpha$, $\dot{v}(0) = \beta$ e $J_\varepsilon(v) < \infty$.

delicado, como ilustra o seguinte argumento heurístico.

As técnicas desenvolvidas até hoje tentam mostrar que se duas soluções tiverem dados iniciais suficientemente próximos em um espaço adequado, elas estarão próximas por algum tempo. Este tipo de argumento de fato não mira apenas unicidade, porém também a dependência contínua. Um ambiente natural para se estudar estas questões é o espaço de energia $B = H^1 \cap L^{p+1} \times L^2$, pois, como vimos, a energia física permanece finita e pode ser estimada pelos variantes do teorema 5.1.1.

No caso de esta ideia possuir procedência, em particular a energia em $t = 0$ deve ser suficiente para ter algum controle sobre o comportamento de u para $t > 0$. Dado que estamos tomando a velocidade $c = 1$, "fisicamente" as variáveis t e x possuem mesma dimensão, digamos L. Assim, da equação

$$\Box u + |u|^{p-1}u = 0$$

e da expressão da energia

$$\mathscr{E}(u) = \frac{1}{2}\int \{u_t^2 + |\nabla u|^2\}dx + \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1}dx,$$

a dimensão de u é precisamente $L^{2/(p-1)}$ e de $\mathscr{E}(u)$ é $\frac{1}{L^2}L^{-4/(p-1)}L^N = L^{N-2-4/(p-1)}$.

Ou seja, $\mathscr{E}(u)$ tem dimensão negativa se $1 < p < 2^* - 1$, é adimensional para $p = 2^* - 1$ e tem dimensão positiva quando $p > 2^* - 1$. Neste contexto, se diz que os problemas são, respectivamente, *subcríticos*, *crítico* e *supercríticos*.[8]

Essa análise dimensional sugere que nos casos supercríticos, a conservação (ou limitação) da energia não exclui possíveis singularidades, uma vez que mesmo quando $L \to 0$ (ou seja, quando "a energia se concentrar em um ponto") $\mathscr{E}(u)$ permanece limitada. Já para os problemas subcríticos, a concentração $L \to 0$ pode ser descartada, já que esta requiriria uma energia inicial infinita.

Confirmando esta intuição, é válido a seguinte proposição para as equações subcríticas e críticas.

Teorema 5.2.3. *Para $1 \le p \le 2^* - 1$, a solução fraca de energia finita u de*

$$\begin{cases} (\Box u) + |u|^{p-1}u = 0 \\ u(0,x) = \alpha(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta(x), \end{cases} \tag{5.21}$$

onde $\alpha \in H^1$ e $\beta \in L^2$, é única. Mais ainda, o fluxo $[t, \alpha, \beta] \in [0,\infty) \times H^1 \times L^2 \mapsto [u(t), u_t(t)] \in H^1 \times L^2$ é contínuo.

Demonstração. Omitiremos a prova do caso geral, uma vez que esta depende de técnicas sofisticadas da Análise Harmônica – a saber, das chamadas *"desigualdades de Strichartz"*; consulte, z.B., J. Shatah–M. Struwe (2000). Entretanto, esboçaremos rapidamente o estudo do caso $1 \le p \le 2^*/2 = N/(N-2)$, o qual pode ser resolvido completamente por um *método de energia*.

Mais geralmente, podemos considerar uma não-linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $|f'(s)| \le C(1 + |s|^{p-1})$.[9] Digamos também que f cumpre a condição do sinal, donde já temos a existência de soluções fracas globais. A particularidade aqui é que $f : H^1 \to L^2$.

Transformando novamente a equação $\Box u + f(u) = 0$ na equação de Klein-Gordon $\Box u + u = g(u)$, temos que g é tal que $|g(z) - g(w)| \le C(1 + |z|^{p-1} + |w|^{p-1})|z - w| \le C(1 + |z|^{2^*/2-1} + |w|^{2^*/2-1})|z - w|$, onde C independe de z e $w \in \mathbb{R}$. Observe que $2^*/2 - 1 = 2/(N-2)$ e que $1 = 2/N + (N-2)/N$.

Sendo então $u(t)$ e $v(t)$ forem duas soluções de energia finita da equação diferencial parcial, escreva $K(t) = \left\{\frac{1}{2}|u_t(t) - v_t(t)|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|u(t) - v(t)|_{H^1}^2\right\}^{1/2}$. Da estimativa de energia e das desigualdades de Hölder e

[8] Note também que, pela desigualdade de Sobolev, $H^1 \subset L^q$, se $2 \le q \le 2^*$ para $N \ge 3$ e $2 \le q < \infty$ para $N = 1, 2$. Portanto, para os problemas subcríticos e críticos temos que automaticamente que a energia inicial é finita se $\alpha \in H^1$.

[9] Por exemplo, na dimensão física $N = 3$, temos $1 \le p \le 3$, de modo que a demonstração acima engloba a célebre equação do méson $(\Box u) + u + u^3 = 0$.

de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
K(t) &\le K(0) + \sqrt{2}\int_0^t |g(u) - g(v)|_{L^2} ds \\
&\le K(0) + C\int_0^t |u(s) - v(s)|_{L^2} ds + C\int_0^t \Big(|u(s)|_{L^{2N/(N-2)}} + |v(s)|_{L^{2N/(N-2)}}\Big)|u(s) - v(s)|_{L^{2^*}} ds \\
&\le K(0) + C\int_0^t K(s) ds
\end{aligned}$$

para C dependendo de "como é finita a energia de u e v". Então, $K(t) \le K(0)e^{Ct}$ pela desigualdade de Gronwall; disso temos a unicidade de soluções de energia finita. Em particular estas soluções satisfazem a desigualdade (5.19) e portanto $C = C(f, \text{energia inicial de } u \text{ e } v)$. É então possível replicar os argumentos do teorema 5.2.1, e obter exatamente mesmas conclusões: unicidade de soluções, dependência contínua das condições iniciais, regularidade em H^2, continuidade em H^1 e conservação da energia. ////

Todavia, o caso supercrítico possui somente resultados muito parciais; veja as referências de M. Madjoub–N. Masmoudi (2014) e, para uma análise numérica do problema, W. A. Strauss e L. Vazquez (1978). Na próxima seção, optaremos por expor alguns resultados mais elementares e clássicos em dimensão $N = 3$, mas que ilustram muito bem alguns dos fenômenos interessantes desta teoria.

5.3 O teorema de Jörgens

Na dimensão física $N = 3$, temos a particularidade de a fórmula de Duhamel (5.4) admitir uma expressão extremamente simples, conhecida como "potencial retardado":

$$u(t,x) = u^0(t,x) - \frac{1}{4\pi}\int_{|x-y|<t} \frac{f(t-|x-y|,y)}{|x-y|} dy. \tag{5.22}$$

A vantagem desta fórmula é que ela permite estimar u em função de f em L^∞. Desta forma, é possível produzir soluções clássicas para o problema semilinear com alguma facilidade.

Teorema 5.3.1 (Jörgens). *Considere a equação semilinear (5.18) em dimensão $N = 3$ e suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^k ($2 \le k \le \infty$) e que $\alpha, \beta \in C_c^\infty$. Então existe um $T^* > 0$ maximal e uma única solução $u \in C^k([0,T^*) \times \mathbb{R}^3)$. Ainda mais, se $T^* < \infty$, então*

$$\lim_{t\to T^*} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \infty. \tag{5.23}$$

Demonstração. Passo um: existência de uma solução local contínua.

Baseando-nos em (5.22), queremos provar a existência de um $u(t,x)$ satisfazendo a equação

$$u(t,x) = u^0(t,x) - \frac{1}{4\pi}\int_{|x-y|<t} \frac{f\big(u(t-|x-y|,y)\big)}{|x-y|} dy. \tag{5.24}$$

Para mostrar a existência deste ponto fixo, introduza o espaço métrico $X = \{u \in C([0,T]\times\mathbb{R}^3); u(0,x) = \alpha(x), \|u(t) - u^0(t)\| \le 1\}$, onde $T > 0$ será escolhido em um instante. A métrica em X é a da convergência uniforme. Note que, da regularidade de α e β, u^0 também é suave e tem suporte compacto em $[0,T] \times \mathbb{R}^N$. Portanto existe um $C_1 > 0$ tal que $\|u\|_{L^\infty} \le C_1$ para todo $u \in X$.

Defina agora para todo $u \in X$ a transformação não-linear

$$(Su)(t) = u^0(t,x) - \frac{1}{4\pi}\int_{|x-y|<t} \frac{f(u(t-|x-y|,y))}{|x-y|} dy.$$

Uma vez, para u e $v \in X$,

$$\begin{aligned}\|S(u)-u^0\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3)} &= \underset{0\le t\le T, x\in\mathbb{R}^3}{\text{Máx}} \frac{1}{4\pi}\int_{|x-y|<t}\frac{|f(u(t-|x-y|,y))|}{|x-y|}dy\\ &\le \frac{C_1M}{4\pi}\int_{|x-y|<t}\frac{1}{|x-y|}dy\\ &\le \frac{C_1MT^2}{2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|S(u)-S(v)\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3)} &= \underset{0\le t\le T, x\in\mathbb{R}^3}{\text{Máx}} \frac{1}{4\pi}\int_{|x-y|<t}\frac{|f(u(t-|x-y|,y))-f(v(t-|x-y|,y))|}{|x-y|}dy\\ &\le \frac{M}{4\pi}\int_{|x-y|<t}\frac{|u(t-|x-y|,y)-v(t-|x-y|,y)|}{|x-y|}dy\\ &\le \frac{MT^2}{2}\|u-v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

onde $M = \text{Máx.}_{|s|<C_1}|f'(s)|$, S mapeia X em X e é uma contração quando for T suficientemente pequeno. Isto mostra existência do ponto fixo u.

Passo dois: $u \in C^k$.

O mesmo procedimento pode ser usado para mostrar que u é regular. De fato, por um análogo "local" do teorema 5.2.1, sabemos que as derivadas espaciais $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(1 \le i \le 3)$ existem no sentido de distribuições para $0 \le t \le T$ e são as (únicas) soluções fracas dos problemas $\Box v + f'(u)v = 0$ com $v(0) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$ e $v_t(0) = \frac{\partial \beta}{\partial x_i}$. Basta provar que estas soluções são contínuas; entretanto, o método do ponto fixo acima mostra que existem soluções contínuas destes problemas para $0 \le t \le T$, como queríamos.

De modo geral, para todo multi-índice α com comprimento $|\alpha| \le k$, $D^\alpha u$ é solução de um problema do tipo $\Box w + f^{(m)}(u)w +$ [termos conhecidos envolvendo u e suas derivadas até ordem $m-1$], donde um argumento idêntico mostra a existência de solução contínua.[10] A regularidade sobre as derivadas em t são obtidas da equação $u_{tt} = \Delta u + f(u)$.[11]

Passo três: extensão de u até o tempo maximal.

Seguindo o argumento de K. Jörgens, podemos estender u para $t > T$ usando a representação

$$u(t,x) = u^1(t,x) - \frac{1}{4\pi}\int_{|x-y|<t-T}\frac{f(u(t-|x-y|,y))}{|x-y|}dy$$

onde

$$u^1(t,x) = u^0(t,x) - \frac{1}{4\pi}\int_{t-T<|x-y|<t}\frac{f(u(t-|x-y|,y))}{|x-y|}dy.$$

Por estas iterações, u pode ser definida até um tempo maximal T^*; neste instante, u tem de "explodir" na norma L^∞, do contrário poderíamos repetir o argumento do passo um perto de T^* e obter uma solução em $[0, T^*+\varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$. ////

Além de estabelecer a existência de uma solução clássica, o teorema ainda fornece um critério bastante simples para existência de existências globais: como em equações diferenciais ordinárias, basta verificar que

[10]É necessário substituir a definição de X, mas a mesma escolha de T continua sendo válida. Mesmo que $0 \le k \le 1$, o que provamos é que a solução fraca é, de qualquer maneira, de classe C^k em x.

[11]Observe que essa equação é ao menos satisfeita no sentido fraco. Aqui também é necessário usar uma desigualdade da seguinte natureza. Seja $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado; caso $f \in C([0,T]\times\overline{\Omega})$ é uma distribuição que possui a seguinte estimativa $f_{tt} \in C([0,T]\times\overline{\Omega})$, então $f_t \in C([0,T]\times\overline{\Omega})$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe um $C_\varepsilon > 0$ tal que $\|f_t\|_{C([0,T]\times\overline{\Omega})} \le \varepsilon\|f_{tt}\|_{C([0,T]\times\overline{\Omega})} + C_\varepsilon\|f\|_{C([0,T]\times\overline{\Omega})}$. A prova é simples: basta argumentar por contradição através de uma sequência (u_n) de funções suaves e aplicar o teorema de Arzelá-Ascoli. (Note que, para $0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto u(t,x)$ tem suporte compacto).

as soluções não "explodem" em L^∞. Portanto, em alguns casos de f é possível fortalecer as conclusões do teorema. Daremos alguns exemplos.

Corolário 5.3.1 (Jörgens). *Para $1 \le p < 5$ e $\alpha, \beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, o problema (5.18) com $f(s) = |s|^{p-1}s$ admite uma solução suave global.*[12]

Demonstração. A prova fará uso da seguinte desigualdade à Hardy.

Lema 5.3.1. *Se $v \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ com $1 < q < N$, então para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $R > 0$:*

$$\int_{|y-x|<R} \frac{|v(y)|^q}{|y|^q} dy \le C \int_{|y-x|<R} |\nabla v(y)|^q dy + \frac{C}{R^{q-1}} \int_{|y-x|=R} |v(y)|^q d\sigma(y), \tag{5.25}$$

onde $C = C(q, N)$.

Demonstração. Por densidade, podemos supor que $v \in C^\infty$ (observe que, se $v \in H^1$, então v possui traço). Escrevendo a integral (5.25) em coordenadas esféricas e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|y-x|<R} \frac{|v(y)|^q}{|y|^q} dy &= \int_{|z|=1} \int_0^R |v(rz)|^p r^{N-1-q} dr\, d\sigma(z) \\
&= \frac{1}{N-q} \int_{|z|=1} |v(Rz)|^q R^{N-q} d\sigma(z) \\
&\quad - \frac{q}{N-q} \int_{|z|=1} \int_0^R |v(rz)|^{q-1} \nabla v(rz) \cdot z\, d\sigma(z) dr \sigma(z) \\
&\le \frac{1}{(N-q)R^{q-1}} \int_{|y-x|=R} |v(y)|^q d\sigma(y) \\
&\quad + \frac{q}{N-q} \left\{ \int_{|y-x|<R} \frac{|v(y)|^q}{|y|^q} dy \right\}^{1/q'} \left\{ \int_{|y-x|<R} |\nabla v(y)|^q dy \right\}^{1/q},
\end{aligned}$$

bastando agora aplicar a desigualdade de Young. ////

Agora podemos provar o corolário. A fórmula do potencial retardado (5.24) nos permite majorar

$$|u(t,x)| = |u^0(t,x)| + \frac{1}{4\pi} \int_{|y|<t} \frac{|v(y)|^p}{|x-y|} dy \tag{5.26}$$

onde $v(y) = u(t - |y|, x + y)$ para $|y| < t$. No entanto, a desigualdade de Schwarz diz que

$$\int_{|y|<t} \frac{|v(y)|^p}{|x-y|} dy \le \left\{ \int_{|y|<t} \frac{|v(y)|^2}{|y|^2} dy \right\}^{1/2} \left\{ \int_{|y|<t} |v(y)|^{2(p-1)} dy \right\}^{1/2}. \tag{5.27}$$

Estimemos o lado direito da equação acima. Pelo lema,

$$\int_{|y|<t} \frac{|v(y)|^2}{|y|^2} dy \le C \int_{|y|<t} |\nabla v(y)|^2 dy + \frac{C}{t} \int_{|z|=t} |v(z)|^2 d\sigma(z). \tag{5.28}$$

[12]Estritamente falando, temos que suavizar $u \mapsto |u|^{p-1}u$ perto da origem se $1 < p \le 2$. De fato, isto não constitui de um problema, já que a prova a seguir pode ter as hipóteses enfraquecidas a "f satisfaz a condição do sinal com $|f(s)| \le C|s|^p$" ou (ainda "condição do sinal + $|f(s)| \le C(|s|^p + |s|)$").

Contudo, sabe-se pela demonstração do teorema 5.2.3 que, para potências "baixas" $1 \le p \le 3$, há unicidade de soluções fracas. Mais ainda, como $\alpha, \beta \in C_c^\infty$, temos que $u \in H^2_{\mathrm{loc}}((0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$ e esta é, na realidade, a única regularidade necessária para a demonstração do corolário (já que ela permite a estimativa de energia (5.12)). Logo, concluímos que, para o caso "problemático" $1 < p \le 2$, há uma única solução u e ela está em $C([0,\infty); C^1(\mathbb{R}^3)) \cap W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}((0,\infty); L^2(\mathbb{R}^3)) \cap W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}((0,\infty); H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,\infty); H^2(\mathbb{R}^3))$.

De um lado, $\nabla v(y) = \nabla u(t - |y|, x + y) - u_t(t - |y|, x + y)\frac{y}{|y|}$ e pela desigualdade de energia (5.12) temos então que, chamando de $K = K_{x,t} = \{(\tau, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; 0 < \tau < t, |y - x| = t - \tau\}$,

$$\int_{|y|<t} |\nabla v|^2 dy = \int_K \frac{1}{2}\left| u_t \frac{y-x}{|y-x|} - \nabla u \right|^2 d\sigma(\tau, y) \leq Ce(0) \tag{5.29}$$

onde $e(0) = \int \left\{\frac{1}{2}|\nabla \alpha|^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{p+1}|\alpha|^{p+1}\right\} dx$ é a energia inicial. (Aqui usamos que $F(s) = |s|^{p+1}/(p+1) \geq 0$). Por outro, o teorema do divergente assere que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_{|z|=t} |v(z)|^2 d\sigma(z) &= \frac{1}{t}\int_{|z-x|=t} |\alpha(z)|^2 d\sigma(z) \\
&= \frac{1}{t}\int_{|z-x|=t} |\alpha(z)|^2 \frac{z-x}{t} \cdot \frac{z-x}{t} d\sigma(z) \\
&= \frac{1}{t}\int_{|y-x|<t} \text{Div.} \left\{|\alpha(y)|^2 \frac{y-x}{t}\right\} dy \\
&\leq \frac{C}{t^2}\int_{|y-x|<t} |\alpha(y)|^2 dy + C\int_{|y-x|<t} |\nabla\alpha(y)|^2 dy \\
&\leq C\left\{\int_{|y-x|<t} |\alpha(y)|^{2^*} dy\right\}^{2/2^*} + C\int_{|y-x|<t} |\nabla\alpha(y)|^2 dy \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\alpha(y)|^2 dy \leq Ce(0)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

onde no fim aplicamos a desigualdade de Sobolev.

Analogamente, é fácil ver

$$\int_{|y|<t} |v(y)|^{2(p-1)} dy = \int_K |u(\tau, y)|^{2(p-1)} d\sigma(\tau, y). \tag{5.31}$$

Unindo portanto (5.27), (5.28), (5.29), (5.30) e (5.31) em (5.26), estabelecemos que

$$|u(t,x)| \leq |u^0(t,x)| + Ce(0)^{1/2} \| |u|^{p-1} \|_{L^2(K)}.$$

Se $1 \leq p < 3$, como $2(p-1) < p+1$, a desigualdade de Hölder e de energia dizem que

$$\| |u|^{p-1} \|_{L^2(K)} \leq C\|u\|^{p-1}_{L^{p+1}(K)} \leq Ce(0)^{(p-1)/(p+1)}$$

e por conseguinte neste caso temos

$$|u(t,x)| \leq |u^0(t,x)| + Ce(0)^{1/2+(p-1)/(p+1)}.$$

onde $C = C(t, p)$.

No entanto, para $3 \leq p < 5$, a mesma estimativa de energia pode ser usada para verificar que

$$\| |u|^{p-1} \|_{L^2(K)} \leq \|u\|^{(p+1)/2}_{L^{p+1}(K)} \|u\|^{(p-3)/2}_{L^\infty(K)} \leq Ce(0)^{1/2} \|u\|^{(p-3)/2}_{L^\infty(K)}$$

donde temos

$$\|u\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^3)} \leq \|u^0\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^3)} + Ce(0)\|u\|^{(p-3)/2}_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^3)}. \tag{5.32}$$

sendo que agora C independe de t.

Seja como for, obtemos a estimativa pontual se $1 \leq p < 5$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \text{constante dependendo de } t, e(0) \text{ e } u^0,$$

provando o teorema. ////

No caso crítico $p = 5$, (5.32) dá que $\|u\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^3)} \le \|u^0\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^3)} + Ce(0)\|u\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^3)}$. Disto, pode-se concluir um teorema de J. Rauch: *existem soluções clássicas globais para o problema crítico se os dados iniciais tiverem energia suficientemente pequena*. Posteriormente M. G. Grillakis (1990) provou a existência de soluções globais para dados de qualquer tamanho em $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Sua prova, apesar de trabalhosa, é acessível a partir dos resultados desta monografia; veja também L. C. Evans (2010).

Corolário 5.3.2 (Peral)**.** *Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, $f(0) = 0$, f é não-crescente e limitada para $s < 0$.*[13] *Então, para todas $\alpha, \beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, o problema (5.18) admite uma única solução suave global.*

Demonstração. A brilhante idéia por trás desta prova é aplicar um argumento à *princípio do máximo*. Seja $A > 0$ tal que $f(s) \ge -A$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Além da solução (inicialmente local) u de (5.18), sejam v e w funções satisfazendo

$$\begin{cases} (\Box v)(t,x) = A \\ v(0,x) = \alpha(x), \ \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = \beta(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Box w)(t,x) + f\big(v(t,x)\big) \\ w(0,x) = \alpha(x), \ \frac{\partial w}{\partial t}(0,x) = \beta(x). \end{cases}$$

Em outras palavras, pelo princípio de Duhamel u v e w resolvem as equações integrais

$$\begin{aligned} u(t) &= u^0(t) - \int_0^t R(t-\tau) * f\big(u(\tau)\big)d\tau \\ v(t) &= u^0(t) + \int_0^t R(t-\tau) * A d\tau \\ &= u^0(t) + At \\ w(t) &= u^0(t) - \int_0^t R(t-\tau) * f\big(v(\tau)\big)d\tau. \end{aligned}$$

onde R é função de Riemann. Como $R \ge 0$, subtraindo v de u, vemos que a condição sobre f diz que $u \le v$. Logo, $f(u) \le f(v)$ e assim analogamente $w \le u$. Resumindo: é válida estimativa pontual $w \le u \le v$ $\forall t, x$. Como resultado, u é limitada inferior e superiormente por funções conhecidas. Segundo o teorema de Jörgens, u pode ser estendida globalmente. ////

Corolário 5.3.3 (Soluções de amplitude pequena para equações de Klein-Gordon cúbicas)**.** *Considere a equação de Klein-Gordon não-linear*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u + f(u) = 0 \\ u(0,x) = \alpha(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \beta(x). \end{cases}$$

em $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ e com dados iniciais $\alpha, \beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Além disso, pressuponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^3 e $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.[14] *Então, se $\|\alpha\|_{H^2\cap W^{3,1}}$ e $\|\beta\|_{H^1\cap W^{2,1}}$ forem suficientemente pequenos, a solução suave é global.*

Demonstração. A intuição para a demonstração é que, quando $\|u\|_\infty$ é suficientemente pequena, a não-linearidade é "desligada" e a equação entra no seu regime linear.[15] Para mostrar que u não explode, basta demonstrar que a função

$$M(t) = \operatorname*{Sup}_{0\le\tau\le t} \left\{ |u(\tau)|_{H^2} + |u_t(\tau)|_{H^1} + (1+\tau)^{3/2}\|u(\tau)\|_{L^\infty} \right\} \tag{5.33}$$

permanece limitada. A inclusão do último termo é motivada pela seguinte estimativa clássica de decaimento:

[13] *Exempli gratia*, $f(s) = e^s - 1$.

[14] A famosa equação de Sinh-Gordon $(\Box u) + \sinh(u) = 0$ cai nesta categoria.

[15] Por conta disso, o fato da equação ser de Klein-Gordon e não uma da onda geral é crucial. De fato, quando u é pequeno, $f(u)$ é aproximadamente linear e este termo só é controlado pela energia inicial se a equação for de Klein-Gordon.

Lema 5.3.2. *Seja $u_0(t,x)$ a solução da equação de Klein-Gordon linear $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \Delta u_0 + u_0 = 0$ em $\mathbb{R}^3$ com dados iniciais $u_0(0,x) = \alpha$, $\frac{\partial u_0}{\partial t}(0,x) = \beta$, sendo $\alpha, \beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Então existe uma constante C, independente de α e β, tal que*

$$\|u_0(t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-3/2}\Big(\|\alpha\|_{W^{3,1}} + \|\beta\|_{W^{2,1}}\Big), \ \ \forall t > 0.$$

Demonstração. Esboçaremos a demonstração que está em C. Morawetz–W. A. Strauss (1972); veja também L. Hörmander (1997), corolário 7.2.4, para um enunciado válido em $\mathbb{R}^N$ para N arbitrário. A prova essencialmente depende de uma fórmula explícita para a solução fundamental S (ou função de Riemann) da equação de Klein-Gordon linear. Como na equação da onda, a função u_0 é dada por expressão do tipo

$$u_0(t) = \frac{\partial S}{\partial t}(t) * \alpha + S(t) * \beta.$$

A convolução com S é, por outro lado,

$$4\pi S(t) * \beta = \frac{1}{t} I[\beta; x; t] + \frac{1}{t}\int_0^t \frac{J_1(\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}} I[\beta; x; r]dr$$

onde $I[x;\beta;r] = \int_{|z|=r} \beta(x+z)d\sigma(z)$ e $J_p(z)$ é a função de Bessel de primeira espécie e índice p; veja W. A. Strauss (2007). (Note que, ao contrário da equação da onda, aqui a solução fundamental tem seu suporte em uma bola inteira, não somente sua "casca". Por conseguinte, o princípio de Huyghens só vale em sua formulação fraca). Mostraremos só a validade da estimativa para $S(t) * \beta$ e $t \ge 1$ ($0 < t < 1$ é mais simples, enquanto o estudo de $\frac{\partial S(t)}{\partial t} * \alpha$ é similar).

A integral, para $0 < r < t/2$, pode ser estimada como sendo de ordem $O(t^{-3/2})$, já que $J_1(z)$ é *per se* de ordem $O(z^{-1/2})$. Para $t/2 < r < t$, integramos por partes, usando que $J_0'(z) = J_1(z)$ para cancelar $\frac{1}{t} I[\beta; x; t]$. Os termos restantes são

$$J_0(t/\sqrt{2})(t/2)^{-1} I[\beta; x; t/2] + \int_{t/2}^t J_0(\sqrt{t^2-r^2})\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r} I[\beta; x; r]\right\}dr.$$

Esta última integral também pode ser estimada se usarmos que $J_0(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos(z - \pi/4) + O(z^{-3/2})$ e integrarmos por partes. Somando tudo, obtemos que $\forall t > 1$

$$\begin{aligned}\|S(t) * \beta\|_{L^\infty} &\le \frac{C}{t^{-3/2}}\left(|I[\beta; x; t]| + \int_{t/2}^t \left\{|I[\beta; x; t]| + \left|\frac{\partial}{\partial r} I[\beta; x; r]\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial r^2} I[\beta; x; r]\right|\right\}dr\right)\\ &\le C(1+t)^{-3/2}\|\beta\|_{W^{2,1}},\end{aligned}$$

como queríamos. (Lembre-se que, como $I[\beta; x; r] = \int_{|y|=t} \beta(x+y)\frac{z}{t}\cdot\frac{z}{t}d\sigma(z) = \int_{|y|<t} \mathrm{Div.}\{\beta(x+y)y\}t^{-1}dy$, I pode ser estimada pela norma de $W^{1,1}$. Uma forma alternativa seria aplicar a teoria dos traços). ////

Como corolário, a família de transformações lineares $\beta \in W^{2,1} \mapsto T_t\beta = S(t) * \beta \in L^\infty$, onde S é a função de Riemann da equação de Klein-Gordon, não apenas está bem definida, como satisfaz $\|T_t\|_{\mathscr{L}(W^{2,1};L^\infty)} \le C/(1+t)^{3/2}$. Procedemos então em na análise de $M(t)$; escreva $\varepsilon = \|\alpha\|_{W^{3,1}\cap H^2} + \|\beta\|_{W^{2,1}\cap H^1}$.

Da desigualdade de energia, temos imediatamente que

$$|u(t)|_{H^2} + |u_t(t)|_{H^2} \le \varepsilon + C\int_0^t |f(u(\tau))|_{H^1}d\tau.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}|f(u(\tau))|_{H^1} &\leq C\delta(\tau)|u^3(\tau)|_{L^2} + C\sum_{i=1}^{3}\left|u(\tau)^2\frac{\partial u}{\partial x_i}(\tau)\right|_{L^2} \\ &\leq C\delta(\tau)\|u(\tau)\|_{L^\infty}^2\left(|u(\tau)|_{L^2} + \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\tau)\right|_{L^2}\right) \\ &\leq C\delta(\tau)(1+\tau)^{-3}M(\tau)^3,\end{aligned}$$

onde $\delta(t) = \mathrm{Sup}_{0\leq s\leq t}\left|f'''(u(t))\right|$. Assim

$$|u(t)|_{H^2} + |u_t(t)|_{H^2} \leq \varepsilon + C\delta(t)M(t)^3.$$

Para estimar a norma ∞, usamos a fórmula $u(t) = u^0(t) - \int_0^t S(t-\tau) * f(u(\tau))d\tau$, para ver que

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-3/2}\varepsilon + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-3/2}\|f(u(\tau))\|_{W^{2,1}}d\tau.$$

Agora, calculamos

$$\begin{aligned}\|f(u(\tau))\|_{W^{2,1}} \leq &\int_{\mathbb{R}^3}\left\{|f(u(\tau,x))| + \sum_{i=1}^{3}\left|f'(u(\tau,x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(\tau,x)\right|\right. \\ &\left. + \sum_{i,j=1}^{3}\left|f''(u(\tau,x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(\tau,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(\tau,x)\right| + \sum_{i,j=1}^{3}\left|f'(u(\tau,x))\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\tau,x)\right|\right\}dx \\ &\leq C\delta(\tau)\|u(\tau)\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\left\{|u(\tau,x)| + \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\tau,x)\right| + \sum_{j,k=1}^{3}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_k}(\tau,x)\right|\right\}^2 dx \\ &\leq C(1+\tau)^{-3/2}\delta(\tau)M(\tau)^3.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^\infty} &\leq C(1+t)^{-3/2}\varepsilon + C\delta(t)M(t)^3\int_0^t (1+t-\tau)^{-3/2}(1+\tau)^{-3/2}d\tau \\ &= C(1+t)^{-3/2}\varepsilon + 2C\delta(t)M(t)^3\int_0^{t/2}(1+t-\tau)^{-3/2}(1+\tau)^{-3/2}d\tau \\ &\leq C(1+t)^{-3/2}\varepsilon + C(1+t)^{-3/2}\delta(t)M(t)^3.\end{aligned}$$

Provamos portanto que

$$M(t) \leq C\varepsilon + C\delta(t)M(t)^3. \tag{5.34}$$

Disto um argumento clássico prova que $M(t)$ é limitada sempre que ε for suficientemente pequeno.[16] ////

Antes de encerrarmos esta subseção, gostaríamos de enfatizar que a proposição acima é provavelmente a mais simples no estudo de soluções de pequena amplitude (isto é, soluções que ficam perto de 0 em todo ponto no espaço e tempo) para equações de evolução. Iniciado por nomes como F. John, I. E. Segal e W. A Strauss, esta área recebeu contribuições fundamentais na década de 1980 por D. Christodoulou (método do mapa conformal), S. Klainerman (método das normas invariantes) e J. Shatah (método das formas normais). Estas técnicas dão critérios geométricos para que equações da onda quasilineares tenham soluções de pequena amplitude e ainda são objeto de pesquisa nos dias de hoje; vide o recente método de ressonâncias no espaço-

[16] O raciocínio é o seguinte. Escolha $\lambda > 0$ e seja $K = \mathrm{Sup}_{|s|\leq\lambda}|f'''(s)|$; com base nisto, tome $0 < \varepsilon_0 < \lambda/(1+C)$ tal que $\varepsilon_0 < (CK)^{-1/2}(1+C)^{-3/2}$. Nestas condições, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, então $M(t) < (1+C)\varepsilon$ para todo $0 < t$. De fato, se houvesse um instante no qual $M(t) = (1+C)\varepsilon$, então de (5.34) $(1+C)\varepsilon \leq C\varepsilon + CK(1+C)^3\varepsilon^3$, contradizendo os critérios prévios.

tempo de P. Germain, N. Masmoudi e J. Shatah. Nestas questões, consulte W. A. Strauss (1990), P. Germain–N. Masmoudi–J. Shatah (2012) e suas referências.

5.4 A desigualdade de energia

Se investigarmos com atenção, veremos que a desigualdade de energia (5.19) foi uma consequência de termos construído a solução u como limite de funções "boas" (no método de Serra–Tilli, pelos minimizadores u_ε e, no método de Strauss, pelas "soluções aproximadas" u_n). Curiosamente, mais do que uma simples estimativa mais precisa para as normas de u, ela acarreta duas propriedades qualitativas interessantes para essa.

Primeiro, temos este resultado de continuidade.

Teorema 5.4.1. *Considere a equação da onda semilinear em $\mathbb{R}^N$ (5.18), onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua com $f(0) = 0$. Suponha também que $F(z) = \int_0^z f(s)ds \geq -Cz^2$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e uma constante $C > 0$ e que as condições iniciais $\alpha \in H^1$ e $\beta \in L^2$ satisfaçam $e(0) = \int \{\frac{1}{2}|\nabla\alpha|^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + F(\alpha)\}dx < \infty$. Pressuponha também que $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma solução para este problema cumprindo a desigualdade de energia (5.19) para todo $t \in D$, onde $D \subset [0,\infty)$ tem medida total.*

Então, qualquer que seja $0 \leq i \leq N$, $t \in D \mapsto (D_i u)(t) \in L^2$ é contínua na topologia fraca $\sigma(L^2), L^2)$. Além disto, então $[u(t), u_t(t)] \to [\alpha, \beta]$ em $H^1 \times L^2$ quando $t \in D$ tende a 0.

Demonstração. Passo um: a continuidade fraca de u. Comecemos a verificação disto com as derivadas espaciais; a tarefa é evidentemente mostrar que, para todo $\varphi \in L^2$, $t \mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t), \varphi\right)_{L^2}$ é contínua. Já que $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ por sua vez também está em $L^\infty((0,\infty); L^2)$, basta provar esta continuidade se $\varphi \in H^1$. Lembrando que $u \in C([0,\infty); L^2)$, vemos então que para todo $t_0 \in D$, $\lim_{t\to t_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t), \varphi\right)_{L^2} = -\lim_{t\to t_0} \left(u(t), \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_{L^2} = -\left(u(t_0), \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_{L^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t_0), \varphi\right)_{L^2}$, como queríamos.

A demonstração para as $\frac{\partial u}{\partial t}$ é um pouco mais delicada. Para qualquer $\varphi \in C^\infty$, $t \mapsto (u_t(t), \varphi)_{L^2}$ e $t \mapsto \langle u_{tt}(t), \varphi\rangle$ estão em $L^1_{\text{loc}}((0,\infty))$, onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto de dualidade entre $\mathscr{D}'$ e C_c^∞. Mais ainda, no sentido de distribuições, $\frac{d}{dt}\langle u_t(t), \varphi\rangle = \langle u_{tt}(t), \varphi\rangle$, já que para toda $\eta \in C_c^\infty(0,\infty)$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \langle u_{tt}(t), \varphi\rangle \eta(t)dt &= \int_0^\infty \langle u_{tt}(t), \eta(t)\varphi\rangle dt \\
&= -\int_0^\infty \langle u_t(t), \eta'(t)\varphi\rangle dt \\
&= -\int_0^\infty (u_t(t), \varphi)_{L^2}\eta'(t)dt.
\end{aligned}
$$

Por conseguinte, $(u_t(t), \varphi)_{L^2} = (\beta, \varphi)_{L^2} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \{\nabla u(\tau, x) \cdot \nabla\varphi(x) + f(u(\tau, x))\varphi(x)\}dxd\tau$, o que, por novamente um argumento de densidade, dá a continuidade desejada de u_t.

Passo dois: a continuidade em $t = 0$. Que $u(t) \to \alpha$ em L^2 já sabemos. Para as derivadas, notemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \left\{|\nabla u(t,x) - \nabla\alpha(x)|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \beta(x)\right|^2\right\}dx \\
&\qquad = 2e(t) + 2e(0) - 2\int_{\mathbb{R}^N} \left\{\nabla u(t,x)\cdot\nabla\alpha(x) + \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\beta(x)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + F(\alpha(x)) + F(u(t,x))\right\}dx \\
&\qquad \leq 4e(0) - 2\int_{\mathbb{R}^N} \left\{\nabla u(t,x)\cdot\nabla\alpha(x) + \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\beta(x)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + F(\alpha(x)) + F(u(t,x))\right\}dx.
\end{aligned}
$$

Agora a continuidade fraca das derivadas, o teorema da convergência dominada aplicado à parte negativa de $F(u)$ e o lema de Fatou aplicado à positiva, implicam que o limite superior da expressão acima é ≤ 0, terminando a demonstração.[17] ////

Como enfatizamos anteriormente, a unicidade de soluções fracas é um problema em aberto, dado que é necessário uma análise sofisticada de estimativas *a priori*. Não obstante, na seção anterior mostramos que, ao menos em dimensão 3 com dados iniciais em C_c^∞, um problema semilinear possui de fato soluções clássicas. A unicidade destas, por sua vez, é uma tarefa fácil: basta amalgamar a estimativa básica de energia e a desigualdade do valor médio. Entretanto, mesmo com a existência de uma solução clássica, não é excluída a possibilidade de outras soluções fracas.

Um fato interessante, e que foi recentemente descoberto, é que a questão da unicidade está intimamente relacionada à desigualdade de energia. Este é o conteúdo do seguinte teorema de M. Majdoub e N. Masmoudi (2014), estendendo um resultado prévio de M. Struwe (2006).

Teorema 5.4.2. *Considere a equação da onda não-linear em* $\mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} (\Box u)(t,x) + m^2 u(t,x) + f\big(u(t,x)\big) = 0 \\ v(0,x) = \alpha(x), \ \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = \beta(x). \end{cases} \tag{5.35}$$

onde estamos supondo que $\alpha, \beta \in C_c^\infty$, $m \geq 0$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^1 *com* $f(0) = f'(0) = 0$.[18] *Se* $F(z) = \int_0^z f(s)ds$, *suponha que ou (i)* f *satisfaz a condição do sinal:* $f(s)s \geq 0$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$*; ou então (ii) que exista uma constante* $C > 0$ *tal que* $F(z) \geq -Cz^2$ *e que* $|f(s)| \leq C|s|^q$ *para algum* $1 \leq q < 2^*$.

Presuma adicionalmente que existam duas soluções de (5.35): uma clássica $u : [0,T) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *e uma de energia finita* $v : [0,T) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *satisfazendo a desigualdade de energia (5.19) para quase todo* $t > 0$.[19]

Nestas hipóteses, então necessariamente $u = v$.

A demonstração, que é um pouco longa e portanto não será exposta aqui, é não obstante elementar e se reduz a provar que, para $w = u - v$, vale uma desigualdade do tipo $\int_{\mathbb{R}^N} \{w_t(t)^2 + |\nabla w(t)|^2 + m^2 w(t)^2\} dx \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \{w_t^2(\tau) + |\nabla w(\tau)|^2 + m^2 w(\tau)^2\} dx d\tau$.

Como corolário deste teorema e o de Jörgens, concluímos que a conjectura de De Giorgi é verdadeira em dimensão 3 para $1 \leq p \leq 5$ (isto é, u_ε converge sem a necessidade de se passar por subsequencias); ou para qualquer $p > 5$, se $0 \leq t < T^*$; sendo que, se $T^* < \infty$, em $t = T^*$ u se torna ilimitada.

Outros exemplos em que tanto o método variacional quanto o de Strauss convergem para uma única solução, que é suave, são aqueles em que as condições dos corolários da seção passada puderem ser verificados. Um exemplo cômico destes é a equação $\Box u + u + u^{17} = 0$ em $\mathbb{R}^3$, com os dados iniciais sendo funções-teste de normas pequenas em um espaço de Sobolev adequado.

[17] Empregamos ali a chamada *"recíproca do teorema da convergência dominada"*: se $f_n \to g$ em $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, então existem uma subsequencia f_{n_k} e uma função $g \in L^p$ tais que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ e $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ para quase todo x. Esta proposição é de fato fundamental para a prova do teorema de Riesz-Fischer; veja H. Brézis (2011).

[18] No artigo original, Majdoub e Masmoudi consideram somente o caso $m = 0$ (isto é, a equação da onda "pura"), mas as adaptações na prova são óbvias.

[19] Aqui obviamente $e(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \{\frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + \frac{1}{2}u_t(t,x)^2 + \frac{m^2}{2}u(t,x)^2 + F(u(t,x))\} dx$.

Capítulo 6

Uma adaptação a equações parabólicas

Oppression, weighs a ton
Depression, stains in black
Regression, the way things run
Aggression, my last resort

Love never crossed my way
Care, not even for myself
Peace means to reload a gun
Rest, I won't before I die

Adrenalin, a legal drug
Anger corrodes my heart
Boredom, nitroglycerine
Violence, primal fear

Religion, violent innocence, guilt, panic.
Exposed to all – a false reality,
Look all through society:
More locks than keys

Nails in my brain, all that's left just
GRIN, until I lose. . . myself

Coroner. "Grin (Nails Hurt)". *Grin*. Noise Records, 1993. CD.

6.1 O teorema e algumas observações iniciais

Neste derradeiro capítulo, aplicaremos o método variacional para a equação do calor não-linear

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - (\Delta u)(t,x) + |u(t,x)|^{p-1}u(t,x) = 0 \tag{6.1}$$

onde $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é a incógnita e $p \geq 1$ é um exponente. Consideraremos o problema de Cauchy, onde se prescreve

$$u(0,x) = \alpha(x) \tag{6.2}$$

para $\alpha : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável. A constatação fundamental é que o funcional análogo a (1.6) neste novo contexto é

$$F_\varepsilon(v) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |(\nabla u)(t,x)|^2 + \frac{1}{(p+1)\varepsilon} |u(t,x)|^{p+1} \right\} dx dt \tag{6.3}$$

uma vez que a sua equação de Euler formal é

$$-\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |u|^{p-1} u = 0.$$

Evidentemente poderíamos escolher parabólicas com não-linearidades mais complicadas. Entretanto, por hora preferimos enfatizar que, em contraste com a equação da onda, as demonstrações serão muito mais simples e os resultados de fato mais fortes.

Tal como anteriormente, definamos o que é uma solução fraca de (6.1). No espírito da seção 3.1, tomaremos inicialmente o problema semilinear

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - (\Delta u)(t,x) + f\big(t,x,u(t,x)\big) = 0, \tag{6.4}$$

onde $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. Com a condição inicial (6.2), $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ será uma SOLUÇÃO FRACA do problema acima se tanto $(t,x) \mapsto u(t,x)$ quanto $(t,x) \mapsto f(t,x,u)$ estiverem em $L^1((0,T) \times \Omega)$, quaisquer que forem $0 < T < \infty$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, e se valer a identidade

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + (\Delta \varphi)(t,x) \right) dx dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} f\big(t,x,u(t,x)\big) \varphi(t,x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) \varphi(0,x) dx \tag{6.5}$$

para toda função teste $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$.

Encore, poderíamos estudar alternativamente soluções locais às globais de acima (*i.e.*, soluções cujos domínios temporais não são todo $(0,\infty)$, mas intervalos menores); as alterações são imediatas.

Apesar de ser dissipativo, a equação (6.1) com $f = 0$ possui formalmente a energia

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (t,x) dx dt + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t,x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \alpha(x)|^2 dx = \text{constante}.$$

Como na equação abstrata (4.8), a parte envolvendo $\frac{\partial u}{\partial t}$ quantifica a quantidade de calor que foi perdida ao ambiente, ao passo de que a outra, a quantidade que ainda está dentro do sistema.

Por conta disso, diremos uma função $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tal que $u \in L^1\big((0,T) \times \Omega\big)$, $\forall 0 < T < \infty$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, será de ENERGIA FINITA (para a equação do calor), se $\dot{u} \in L^2\big((0,\infty); L^2\big)$ e $\nabla u \in L^\infty\big((0,\infty); L^2\big)^N$.[1]

Assim, *noch einmal*, o seguinte critério é válido:

Teorema 6.1.1. *Seja $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Se $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $(t,x) \mapsto u(t,x)$ e $(t,x) \mapsto f\big(t,x,u(t,x)\big)$ estão em $L^1((0,T) \times \Omega)$ para todos $0 < T < \infty$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ e adicionalmente $u \in L^1_{loc}((0,\infty); H^1) \cap W^{1,1}_{loc}((0,\infty); L^2)$ e $\alpha \in L^2$, então uma das afirmações abaixo implica nas demais:*

1. *u é solução fraca de (6.4) com (6.2);*

2. *$u(0) = \alpha$ em L^2 e*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) + f\big(t,x,u(t,x)\big) = 0$$

no sentido de distribuições (em x) para quase todo $t > 0$;

[1] Como vimos, se u é de energia finita e $u(0) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, então $u \in H^1_{\text{loc}}((0,T); L^2)$.

3. $u(0) = \alpha$ *em* L^2 *e, qualquer que seja* $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$*, temos*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\varphi + \nabla u \cdot \nabla\varphi + f(t,x,u)\varphi\right) dxdt = 0.$$

A prova, como permanece a mesma, será omitida.

Demonstraremos sem grande esforço que

Teorema 6.1.2. *Se* $\alpha \in H^1 \cap L^{p+1}$*, para todo* $\varepsilon > 0$ *o funcional* F_ε *em (6.3) possui um único mínimo na* u_ε *na classe* $H^1_{loc}((0,\infty);L^2)$ *sujeita à condição inicial (6.2).*

Estes mínimos u_ε*'s possuem as seguintes estimativas a priori*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t,x)\right|^2 dxdt \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}|\nabla\alpha(x)|^2 + \frac{1}{p+1}|\alpha(x)|^{p+1}\right\} dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}|\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2 + \frac{1}{p+1}|u_\varepsilon(t,x)|^{p+1}\right\} dx \leq 2e \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}|\nabla\alpha(x)|^2 + \frac{1}{p+1}|\alpha(x)|^{p+1}\right\} dx$$

para quase todo $t > 0$*. Quando é passado o limite* $\varepsilon \to 0$*, existe uma função* u*, também em* $H^1_{loc}((0,\infty);L^2)$*, tal que*

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon \to u \text{ fortemente em } L^q\big((0,T)\times\Omega\big) \text{ para todo } q \in [1,2] \cup [1,p+1), \\ &\qquad \text{todo } \Omega \subset\subset \mathbb{R}^N \text{ e todo } T > 0; \\ &u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ fracamente em } H^1\big((0,T)\times\mathbb{R}^N\big) \text{ para todo } T > 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Além disso, u *é a única solução de energia finita de (6.1) com (6.2) e vale a seguinte desigualdade de energia: se*

$$e(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(s,x)\right|^2 dxds + \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + \frac{1}{p+1}|u(t,x)|^{p+1}\right\} dx \tag{6.7}$$

então para quase todo $t > 0$

$$e(t) \leq e(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{1}{2}|\nabla\alpha(x)|^2 + \frac{1}{p+1}|\alpha(x)|^{p+1}\right\} dx. \tag{6.8}$$

Observe que aqui o "caminho" inteiro u_ε converge a u.

Este capítulo, de maneira geral, segue o espírito do trabalho de V. Bögelein–F. Duzaar–P. Marcellini (2014), no entanto com algumas adaptações para os contextos nos quais estamos interessados. Consulte também V. Bögelein–F. Duzaar–P. Marcellini (2015a) e V. Bögelein–F. Duzaar–P. Marcellini–S. Signoriello (2015b) para variações sobre o tema.

6.2 Demonstração do teorema 6.1.2, parte 1: obtenção das estimativas a priori

Será conveniente readotar algumas notações que instauramos no capítulo 3. Quando for conveniente enxergar $u(t)$ como uma curva em um espaço abstrato, denotaremos por $\dot{u}(t)$ a sua derivada temporal; retornaremos a escrever por $V(v)$ a "energia potencial" de v:

$$V(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{1}{p+1}|v|^{p+1}\right) dx. \tag{6.9}$$

Novamente, V está perfeitamente definida em $H^1 \cap L^{p+1}$, mas podemos estendê-la a uma função $V : L^2 \to [0,\infty]$, se impusermos $V(v) = \infty$ para toda $v \in L^2$ que não está em $H^1 \cap L^{p+1}$.

Assim, dado que F_ε pode ser reescrito como

$$F_\varepsilon(v) = \int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}|\dot{v}(t)|_{L^2} + \frac{1}{\varepsilon}V\big(v(t)\big)\right\} dt,$$

ele faz sentido como um funcional em $H^1_{\text{loc}}((0,\infty);L^2)$. Seu domínio próprio, no entanto, é o espaço X_ε das funções para as quais a norma

$$\|v\|_X = \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon}\Big\{\sum_{i=0}^N |D_i v(t,x)|^2\Big\} dx dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon}|v(t,x)|^{p+1} dx dt\right)^{1/(p+1)}$$

é finita. X_ε é então um espaço de Banach reflexivo e, como antes, $K = K_{\alpha,\varepsilon} = \{v \in X_\varepsilon; v(0) = \alpha\}$ também está bem-definido e é um convexo fechado em X. Mais ainda, é não-vazio, uma vez que a função constante $t \mapsto c(t) \equiv \alpha$ está nele. Portanto, sendo $F_\varepsilon : X_\varepsilon \to \mathbb{R}$ um funcional estritamente convexo, contínuo e coercivo, F_ε atinge seu ínfimo em K sobre uma função u_ε, que é única. Desta forma, provamos a existência dos mínimos u_ε.

Lema 6.2.1. *Para todo $\varepsilon > 0$, o funcional F_ε possui um único mínimo na u_ε na classe $H^1_{loc}((0,\infty);L^2)$.*

Adicionalmente, vale a desigualdade

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \le V(\alpha) \tag{6.10}$$

e, consequentemente,

$$\int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t)\Big|_{L^2}^2 dt \le 2V(\alpha), \tag{6.11}$$

$$\int_0^\infty e^{-t/\varepsilon} V\big(u_\varepsilon(t)\big) dt \le \varepsilon V(\alpha). \tag{6.12}$$

A estimativa (6.10) é obviamente fruto da comparação entre $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ e $F(c)$, onde $c(t) = \alpha$ é o estado constante que já usamos acima.

Para a sequência, defina as seguintes quantidades

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2}\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t)\Big|_{L^2}^2 && = \text{“calor dissipado no instante de } t\text{”},\\
V_\varepsilon(t) &= V\big(u_\varepsilon(t)\big) && = \text{“energia potencial no instante } t\text{”},,\\
L_\varepsilon(t) &= K_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}V_\varepsilon(t) && = \text{“lagrangeano” de } F_\varepsilon\big(u_\varepsilon(t)\big),\\
(A_\varepsilon L_\varepsilon)(t) &= \int_t^\infty e^{(t-s)/\varepsilon} L_\varepsilon(s) ds.
\end{aligned}$$

Todas as funções acima, à exceção de $A_\varepsilon L_\varepsilon$, estão definidas em quase toda parte. Note também que $(A_\varepsilon L_\varepsilon)(t)$ é um velho amigo: é o operador de médias definido na seção 3.4 sem realizar a mudança de escala $t \leftrightarrow \varepsilon t$. Aqui, como a equação é de primeira ordem, podemos realizar os cálculos com o termo $e^{-t/\varepsilon}$ com uma relativa facilidade.

É importante observar que

$$(A_\varepsilon L_\varepsilon)(0) = F_\varepsilon(u_\varepsilon) \le V(\alpha) \tag{6.13}$$

segundo (6.10).

Lema 6.2.2. *Para todo $\varepsilon > 0$, temos que no sentido de distribuições*

$$(A_\varepsilon L_\varepsilon)'(t) = -2K_\varepsilon(t) \le 0.$$

Por conseguinte, $A_\varepsilon L_\varepsilon$ pertence a $W^{1,\infty}(0,\infty)$ e é uma função não-negativa não-crescente.

Demonstração. A prova é análoga à do lema 3.4.1, mas, por conveniência do leitor, iremos reiterá-la. Temporariamente, escrevamos

$$J_\varepsilon(t) = \int_t^\infty e^{-s/\varepsilon} L_\varepsilon(s) ds$$

de modo que, para quase todo $t > 0$, J_ε é derivável com

$$J'_\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon} L_\varepsilon(t) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\varepsilon} e^{t/\varepsilon} J_\varepsilon(t) + e^{t/\varepsilon} J'_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon L_\varepsilon)'(t).$$

Dada $\phi \in C_c^\infty(0,\infty)$, definamos para $-\infty < \delta < \infty$ as funções

$$t \in [0,\infty) \mapsto g^\delta(t) = g(t;\delta) = t + \delta\phi(t).$$

Para δ suficientemente pequeno, as g^δ's definem difeomorfismos em $\mathbb{R}$ e, assim, podemos introduzir suas inversas em t. Estas funções, que denotaremos por $\psi(t;\delta) = \psi^\delta(t)$, variam diferenciavelmente em δ e satisfazem a equação $\psi_\delta(t) = t - \delta\phi(\psi^\delta(t))$.

Com base nelas, para $\varepsilon > 0$ fixo, introduzamos os "competidores" $u^\delta(t,x) = u_\varepsilon^\delta(t,x) = u_\varepsilon(g^\delta(t),x)$. Se realizarmos uma mudança de variável elementar, temos que

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon^\delta) = \int_0^\infty e^{-\psi(t;\delta)/\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2\psi_t(\delta;t)} K_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} \psi_t(t;\delta) V_\varepsilon(t) \right\} dt.$$

Dado que $e^{-\psi(t;\delta)/\varepsilon} \leq e^{\delta\|\phi\|_\infty} e^{-t/\varepsilon}$, a fórmula acima mostra que u^δ está em X. Ademais, uma análise verifica que $\delta \mapsto F_\varepsilon(u_\varepsilon^\delta)$ é derivável na origem e que vale a regra de Leibniz. Como

$$\begin{cases} \psi(t;0) = t, \\ \psi_t(t;0) = 1, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\delta}(t;0) = \phi(t), \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\delta\partial t}(t;0) = \phi'(t), \end{cases}$$

temos assim a identidade

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\delta} F(u_\varepsilon^\delta)_{|\delta=0} \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}\phi(t)}{\varepsilon} \left(K_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} V_\varepsilon(t) \right) dt + \int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}\phi'(t)}{\varepsilon} \left(K_\varepsilon(t) - \frac{1}{\varepsilon} V_\varepsilon(t) \right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}\phi(t)}{\varepsilon} L_\varepsilon(t) dt + \int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}\phi'(t)}{\varepsilon} \big(2K_\varepsilon(t) - L_\varepsilon(t) \big) dt. \end{aligned}$$

Uma vez que $L_\varepsilon(t) = -e^{-t/\varepsilon} J'_\varepsilon(t)$, ficamos com

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \phi(t) J'_\varepsilon(t) dt + \int_0^\infty \phi'(t) \big(2e^{-t/\varepsilon} + J'_\varepsilon(t) \big) dt \\ &= \int_0^\infty \phi'(t) \left(\frac{1}{\varepsilon} J_\varepsilon(t) + J'_\varepsilon(t) + 2e^{-t/\varepsilon} K_\varepsilon(t \right) dt. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema (2.3.2),

$$\frac{1}{\varepsilon} J_\varepsilon(t) + J'_\varepsilon(t) + 2e^{-t/\varepsilon} K_\varepsilon(t) = \text{const.}$$

para quase todo $t > 0$; entretanto, já que $J_\varepsilon(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ e ambas $J'_\varepsilon(t)$ e $e^{-t/\varepsilon} K_\varepsilon(t)$ estão em $L^1(0,\infty)$, a constante acima é 0. (Para ver isto, integre a igualdade em $(t, t+h)$, para h pequeno e passe $t \to \infty$). Por conseguinte, $(A_\varepsilon L_\varepsilon)'(t) = (e^{t/\varepsilon} J_\varepsilon)'(t) = -2K_\varepsilon(t)$, como queríamos. ////

Corolário 6.2.1. $(A_\varepsilon L_\varepsilon)(t) \leq V(\alpha)$ *para todos* $t \geq 0$ *e* $\varepsilon > 0$.

Demonstração. De fato, $(A_\varepsilon L_\varepsilon)(t) \leq (A_\varepsilon L_\varepsilon)(0) \leq V(\alpha)$, segundo (6.13). ////

Corolário 6.2.2.
$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t)\right|_{L^2}^2 dt \leq V(\alpha),$$
qualquer que seja $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Segundo o lema 6.2.1, temos que para todo $T > 0$
$$\begin{aligned}\int_0^T \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t)\right|_{L^2}^2 dt &= 2\int_0^T K_\varepsilon(t)dt \\ &= (A_\varepsilon L_\varepsilon)(0) - (A_\varepsilon L_\varepsilon)(t) \\ &\leq (A_\varepsilon L_\varepsilon)(0) \leq V(\alpha).\end{aligned}$$
Basta agora fazer $T \to \infty$. ////

Corolário 6.2.3. *Dados* $h > \varepsilon$ *e* $t > 0$, *temos que*
$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} V\big(u_\varepsilon(s)\big)ds \leq 2eV(\alpha).$$

Demonstração. Se $0 < k < \varepsilon$, temos que
$$\begin{aligned}\int_t^{t+k} V_\varepsilon(s)ds &\leq \varepsilon e^{k/\varepsilon}\varepsilon\int_t^{t+k} e^{(t-s)/\varepsilon}V_\varepsilon(s)/\varepsilon ds \\ &\leq \varepsilon e^{k/\varepsilon}(A_\varepsilon L_\varepsilon)(t) \\ &\leq \varepsilon eV(\alpha).\end{aligned}$$

Agora, para $h > \varepsilon$, seja $m \geq 1$ o inteiro tal que $(m-1)\varepsilon \leq h < m\varepsilon$, de modo que $m\varepsilon \leq h+\varepsilon \leq (m+1)\varepsilon \leq 2h$ e, portanto,
$$\begin{aligned}\int_t^{t+h} V\big(u_\varepsilon(s)\big)ds &= \int_t^{t+h} V_\varepsilon(s)ds \\ &\leq \sum_{i=0}^{m}\int_{t+i\varepsilon}^{t+(i+1)\varepsilon} V_\varepsilon(s)ds \\ &\leq (m+1)\varepsilon eV(\alpha) \\ &\leq 2\varepsilon ehV(\alpha).\end{aligned}$$
////

6.3 Demonstração do teorema 6.1.2, parte 2: conclusão

Passo um: convergência. Em um primeiro momento, não mostraremos a convergência de toda família $\{u_\varepsilon\}$, mas isto será estabelecido a posteriori como produto da unicidade de soluções para o problema parabólico.

O corolário 6.2.2 estabeleceu que $\{\dot{u}_\varepsilon\}$ é um conjunto limitado em $L^2((0,\infty); L^2) = L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$. Em razão disto, (u_ε) vem a ser também limitada em $H^1((0,T); L^2)$ para todo $T > 0$ fixo.

Analogamente, segundo o corolário 6.2.3, u_ε é limitada em $L^{p+1}((0,T); L^{p+1}) = L^{p+1}((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ e em $L^2((0,T); H^1)$. Por conta desta última afirmação e do parágrafo anterior, $\{u_\varepsilon\}$ permanece limitada em $H^1((0,T)\times\mathbb{R}^N)$.

Destarte, aplicamos o teorema de Rellich-Kondrashov a fim de garantir que, para toda sequência $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, existe uma subsequência, que ainda rotulada ε_n por conveniência, e uma função $u : (0,\infty)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ para as quais as convergências expressas em (6.6) são válidas.

Passo dois: a condição inicial. Já que, para todo $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon(t) = \alpha + \int_0^t \dot{u}_\varepsilon(s)ds$, vemos que $u_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t)$ fracamente em $\sigma(L^2; L^2)$ para todo $t \geq 0$. Em particular, $u(0) = \alpha$ e $u \in C^{1/2}([0,\infty); L^2)$.

Passo três: u satisfaz (6.1) no sentido fraco. Um argumento elementar envolvendo a definição de u_ε e o teorema diz que

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t/\varepsilon}\left\{\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi + \frac{1}{\varepsilon}|u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon\varphi\right\}dxdt = 0$$

qualquer que seja $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$. Trocando $\varphi(t,x)$ por $e^{t/\varepsilon}\varphi(t,x)$, podemos reescrever isto como

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\varphi + \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi + |u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon\varphi\right\}dxdt = 0$$

para toda $\varphi \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$. Portanto, em virtude do passo um passamos $\varepsilon_n \to 0$ para concluir que

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{\partial u}{\partial t}\varphi + \nabla u \cdot \nabla\varphi + |u|^{p-1}u\varphi\right\}dxdt = 0.$$

Com isto, o passo dois e o teorema 6.1.1 mostram que u é solução da equação diferencial desejada.

Passo quatro: unicidade do limite. Para estabelecer que a $\{u_\varepsilon\}$ inteira vai à u, é suficiente se estabelecer que só há uma solução de (6.1) com a regularidade dada.

Sejam portanto duas soluções fracas u e v de (6.1) tais que $u(0) = \alpha, v(0) = \beta \in H^1 \cap L^{p+1}$, $\dot{u}, \dot{v} \in L^1_{\mathbf{loc}}((0,\infty); L^2)$ e $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty); H^1 \cap L^{p+1})$. Então sabemos de antemão que, se w é u ou v, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left\{\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)\varphi(x) + \nabla w(t,x)\cdot\nabla\varphi(x) + |w(t,x)|^{p-1}w(t,x)\varphi(x)\right\}dx = 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e quase todo $t > 0$. Por densidade, podemos enfraquecer esta condição sobre φ e supor somente que $\varphi \in H^1 \cap L^{p+1}$.

Sendo assim, segundo o lema podemos calcular para quase todo $t > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|^2_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial v}{\partial t}(t,x)\right)\cdot\Big(u(t,x) - v(t,x)\Big)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}\Big\{|\nabla u(t,x) - \nabla v(t,x)|^2 + \Big(|u(t,x)|^{p-1}u(t,x) \\ &\qquad\qquad - |v(t,x)|^{p-1}v(t,x)\Big)\cdot\Big(u(t,x) - v(t,x)\Big)\Big\}dx \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Logo por integração,

$$|u(t) - v(t)|_{L^2} \leq |\alpha - \beta|_{L^2}, \tag{6.14}$$

o que verifica o que desejávamos.

Passo cinco: desigualdade de energia. Segundo o lema 6.2.2, temos que

$$(A_\varepsilon L_\varepsilon)(s) + 2\int_0^s K_\varepsilon(\xi)d\xi = (A_\varepsilon L_\varepsilon)(0) \leq V(\alpha)$$

por (6.13). Integrando de $s = t$ a $s = t + h$ ($h > 0$) e dividindo por h, obtemos então

$$\begin{aligned}V(\alpha) &\geq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}(A_\varepsilon L_\varepsilon)(s)ds + \frac{2}{h}\int_t^{t+h}\int_0^s K_\varepsilon(\xi)d\xi ds \\ &= \text{(I)} + \text{(II)}.\end{aligned}$$

O nosso objetivo agora é passar $\varepsilon \to 0$. Obviamente, a análise de (II) é extremamente simples, já que pela semicontinuidade inferior da norma

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\,(\mathrm{II}) \geq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_0^s \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\xi)\right|_{L^2} d\xi ds.$$

(I) é um pouco mais trabalhosa, mas aplicando o teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{II}) &= \frac{1}{h}\int_t^{\infty}\int_t^{\mathrm{Min.}\{\xi,t+h\}} e^{-(\xi-s)/\varepsilon} L_\varepsilon(\xi) ds d\xi \\
&\geq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_t^{\xi} e^{-(\xi-s)/\varepsilon} L_\varepsilon(\xi) ds d\xi \\
&\geq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_t^{\xi} \frac{e^{-(\xi-s)/\varepsilon}}{\varepsilon} V_\varepsilon(\xi) ds d\xi \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (1-e^{(t-\xi)/\varepsilon}) V_\varepsilon(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

logo

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\,(\mathrm{I}) \geq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} V(u(\xi)) d\xi.$$

Juntando tudo, temos que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_0^s \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\xi)\right|^2_{L^2} d\xi ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} V(u(\xi)) d\xi \leq V(\alpha)$$

o que, passando $h \to 0$, (6.8) é demonstrada (sob uma notação ligeiramente diferente).

A prova está finalizada.

////

6.4 A dinâmica das soluções

Teorema 6.4.1. *Se $u(t,x)$ é a solução de (6.1) com dado inicial $u(0) = \alpha$, então $|u(t,x)| \leq v^0(t,x)$ (em distribuição) para todo $t \geq 0$, onde v^0 é a solução de $v^0_t - \Delta v^0 = 0$ com $v^0(0) = |\alpha|$.*

Em particular, $\|u(t)\|_\infty$ é limitada nos intervalos da forma (δ,∞) ($\delta > 0$) e $u(t) \to 0$ em L^2.

Antes de provarmos este teorema, notemos o seguinte curioso corolário.

A desigualdade (6.14) com um argumento de convergência uniforme mostra que podemos definir unicamente um sistema dinâmico[2] $\{\phi_t\}_{t\geq 0}$ em L^2 somente com a imposição de que $\phi_t(\alpha) =$ [a solução de energia finita de (6.1) com $u(0) = \alpha$], se $\alpha \in H^1 \cap L^{p+1}$. Como $\phi_t(\alpha)$ é sempre lipschitziana de constante 1 em α, temos um comportamento completo desta dinâmica: *o estado nulo $w \equiv 0$ é um atrator global e assintoticamente estável (à Lyapunov) para ϕ_t.*

Demonstração. No espírito da observação acima, por $\phi_t(\alpha)$ simbolizaremos a solução $u(t)$ da equação do calor com condição inicial $u(0) = \alpha$.

Passo um: se $\alpha \geq 0$, então $u(t) = \phi_t(\alpha) \geq 0$. De fato, da teoria dos espaços de Sobolev $u(t)^- =$ [parte

[2]Com isto, queremos dizer que $[t,\alpha] \in [0,\infty)\times L^2 \mapsto \phi_t(\alpha) \in L^2$ é contínua, satisfaz $\phi_0 =$ [identidade] e a regra de composição $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ para todos $t, s \geq 0$.

negativa de $u(t)] = (-u(t))^+$ tem a mesma regularidade de u e podemos calcular para quase todo $t > 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}\big(u(t,x)^-\big)^2dx &= 2\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)^-\dot{u}(t,x)dx\\ &= 2\int_{\mathbb{R}^N}\Big\{\nabla u(t,x)^-\cdot\nabla u(t,x)+|u(t,x)|^{p-1}u(t,x)u(t,x)^-\Big\}dx\\ &= -2\int_{\mathbb{R}^N}\Big\{|\nabla u(t,x)^-|^2+|u(t,x)^-|^{p+1}\Big\}dx\\ &\le 0.\end{aligned}$$

Consequentemente $|u(t)^-|_{L^2} \le |u(0)^-|_{L^2} = 0$.

Passo dois: se $u(t) = \phi_t(\alpha)$ e $v(t) = \phi_t(\beta)$, onde $\beta = |\alpha|$, então $|u(t)| \le v(t)$. A ideia novamente é a mesma: temos que para quase todo $t > 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}\big((u(t,x)-v(t,x))^+\big)^2dx =& -2\int_{\mathbb{R}^N}\{|\nabla(u(t,x)-v(t,x))^+|^2\\ &+\big(|u(t,x)|^{p-1}u(t,x)-|v(t,x)|^{p-1}v(t,x)\big)\big(u(t,x)-v(t,x)\big)^+\}dx\\ \le& \ 0.\end{aligned}$$

Desta maneira, $|(u(t)-v(t))^+|_{L^2} \le |(|\alpha|-\alpha)^-|_{L^2} = 0$. Analogamente verificamos o mesmo para $(v(t)+u(t))^-$, obtendo o que desejávamos.

Passo três: se $\beta \ge 0$, $v(t) = \phi_t(\beta)$ e v^0 é da equação do calor linear $v_t^0 - \Delta v_0 = 0$ com $v^0(0) = \beta$, então $u(t) \le u^0(t)$ (no sentido de distribuições) para todo $t > 0$. Mais uma vez, realizamos os cálculos e notamos que para quase todo $t > 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}\big((v(t,x)-v^0(t,x))^+\big)^2dx =& -2\int_{\mathbb{R}^N}\Big\{|\nabla(v(t,x)-v^0(t,x))^+|^2\\ &+|v(t,x)|^{p-1}v(t,x)\big(v(t,x)-v(t,x)^0\big)^+\Big\}dx\\ \le& \ 0,\end{aligned}$$

onde aqui já usamos que que $v \ge 0$.

Passo quatro (conclusão): se $u(t) = \phi_t(\alpha)$, então $u(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Com efeito, pelos três passos anteriores

$$|u(t,x)| \le v^0(t,x) \tag{6.15}$$

para quase todo $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$, onde v^0 resolve a equação do calor linear $v_t^0+\Delta v_0 = 0$ com $v^0(0) = |\alpha| = \beta$. Entretanto,

$$v^0(t) = K_t * \beta,$$

onde $K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\exp\big(-|x|^2/(4t)\big)$ é o núcleo gaussiano. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que $\|v^0\|_\infty \in L^\infty(\delta,\infty)$ para todo $\delta > 0$.[3] Melhor ainda, em coordenadas de Fourier,

$$\widehat{v^0}(t,\xi) = \exp(-|\xi|^2 t)\widehat{\beta}(\xi).$$

de modo que, pelo teorema de Plancherel e o da convergência dominada, $v^0(t) \to 0$ em L^2 se $t \to \infty$, *quod erat demonstrandum*. ////

Em virtude desta limitação em L^∞, as conclusões do teorema 6.1.2 podem ser sensivelmente refinadas.

Teorema 6.4.2. *Para a solução u dada pelo teorema 6.1.2 com $u(0) = \alpha \in H^1 \cap L^{p+1}$, podemos asserir que*

$$u \in C^1\big((0,\infty);L^2\big)\cap C\big((0,\infty);H^2\big)\cap C\big([0,\infty);H^1\cap L^{p+1}\big) \tag{6.16}$$

[3] De fato, $v^0(t) \to 0$ em L^∞.

e que, se $e(t)$ é dada por (6.7), então

$$e(t) = e(0) \tag{6.17}$$

para todo $t > 0$. Ademais, $u \to 0$ em $H^1 \cap L^{p+1}$, de modo que

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|_{L^2}^2 dt = V(\alpha). \tag{6.18}$$

Demonstração. Ao longo desta prova, $\delta > 0$ será um número real positivo tão pequeno quanto se queira e por ($\mathscr{B}$) estaremos simbolizando a obra de H. Brezis (2011).

Passo um: continuidade de u longe de $t = 0$. De fato, escreva $f(t,x) = |u(t,x)|^{p-1}u(t,x)$. Por causa da discussão acima, é fácil ver que $f \in L^2_{\text{loc}}((\delta,\infty); H^1) \cap H^1((\delta,\infty); L^2)$, com sua derivada sendo $D_i f(t,x) = p|u(t,x)|^{p-1}D_i u(t,x)$, qualquer que seja $0 \leq i \leq N$.[4] Assim, como u resolve $u_t - \Delta u = f$, é possível mostrar que u é dada pela fórmula à Duhamel

$$\begin{aligned} u(t+\delta) &= \big(K_t * u(\delta)\big) + \int_0^t \big(K_{t-s} * f(s)\big) ds \\ &= \big(K_t * u(\delta)\big) + \int_0^t \big(K_s * f(t-s)\big) ds \end{aligned} \tag{6.19}$$

para todo $t > 0$;[5] no espaço de frequência então, (6.19) se escreve como

$$\begin{aligned} \widehat{u}(t+\delta,\xi) &= \exp(-t|\xi|^2)\widehat{u}(\delta) + \int_0^t \exp(-(t-s)|\xi|^2)\widehat{f}(s+\delta) ds \\ &= \exp(-t|\xi|^2)\widehat{u}(\delta) + \int_0^t \exp(-s|\xi|^2)\widehat{f}(t-s+\delta) ds. \end{aligned}$$

Por conta da segunda igualdade,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t+\delta) = -|\xi|^2 \exp(-t|\xi|^2)\widehat{u}(\delta) + \int_0^t \exp(-s|\xi|^2)\widehat{f}'(t-s+\delta) ds + \exp(-t|\xi|^2) f(\delta)$$

donde $\dot{u} \in C\big((0,\infty); L^2\big)$.

Identicamente, uma análise direta desta expressão legitima a identidade

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(t+\delta) = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(K_t * u(\delta)\big) + \int_0^t \Big(K_{t-s} * \frac{\partial f}{\partial x_i}(s+\delta)\Big) ds \tag{6.20}$$

e assim $u \in C\big((0,\infty); H^1\big)$. O fato de que $u \in C\big((0,\infty); L^{p+1}\big)$ é uma combinação da limitação em L^∞ e da continuidade em L^2.[6]

Finalmente, que $u \in C\big((0,\infty); H^2\big)$ é corolário de $-\Delta u + u = -u_t + f + u \in C\big((0,\infty); L^2\big)$ e da teoria básica da regularização elíptica.[7]

Passo dois: continuidade de u em $t = 0$. Uma vez que vale a desigualdade de energia (6.8), podemos repetir exatamente os mesmos argumentos do teorema 5.4.1, para ver que $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}$ é contínua na topologia fraca $\sigma(L^2; L^2)$ e que $u(t) \to \alpha$ em H^1 quando $t \to 0$. Isto dá que $u \in C\big([0,\infty); H^1\big)$.

[4] A demonstração disto é feita aproximando u por funções suaves; veja, e.g., o teorema 9.2 em ($\mathscr{B}$).

[5] Se v é a função dada pelo lado direito de (6.19), então $v \in C([0,\infty; L^2)$ e é solução fraca de (6.1) com $v(\delta) = u(\delta)$. Assim, $w = u - v$ está em $C([0,\infty); L^2)$, $w(0) = 0$ e resolve $w_t = \Delta w$. Tomando regularizações de w (como no final do teorema 5.1.1), mostra-se que $w = 0$, ou seja, $u = v$.

Sobre esta expressão e questões correlatas, consulte Th. Cazenave–A. Haraux (1999).

[6] Lembre da desigualdade "de interpolação"

$$\|h\|_q^q = \int |h|^q dx \leq \|h\|_\infty^{q-2} \int |h|^2 dx = \|h\|_\infty |h|_2^2,$$

para todo $2 \leq q \leq \infty$ e $h \in L^2 \cap L^\infty$.

[7] Basta ver o caso A do teorema 9.25 em ($\mathscr{B}$); poderia-se também empregar a análise de Fourier, como em W. Rudin (1991)

A análise em L^{p+1} é idêntica. Com efeito, $t \mapsto u(t)$ é contínua na topologia fraca $\sigma(L^{p+1}; L^{(p+1)'})$, já que para toda $\varphi \in L^{(p+1)'} \cap L^2$ e todo $t_0 \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \langle \varphi, u(t)\rangle_{L^{(p+1)'},L^{p+1}} &= \lim_{t\to t_0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)u(t,x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)u(t_0,x)dx,\end{aligned}$$

por conta da continuidade de $u(t)$ em L^2. Dado que vale a desigualdade de energia, o caso geral $\varphi \in L^{(p+1)'}$ é então obtido por um raciocínio padrão de densidade.

Agora, como subproduto da desigualdade de energia e da continuidade em H^1, vemos que

$$\limsup_{t\to 0} \|u(t)\|_{p+1} \leq \|\alpha\|_{p+1} = \|u(0)\|_{p+1}.$$

Logo a convexidade uniforme de L^{p+1} é suficiente para concluir que $u(t) \to \alpha$ em L^{p+1} quando $t \to 0$[8]; ou seja, $u \in C([0,\infty); L^{p+1})$. Fica provada por conseguinte (6.16).

Passo três: regularidade de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Escolhendo $1 \leq i \leq N$, escreva $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Em vista de (6.20),

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t+\delta) = \frac{\partial^2 K_t}{\partial t \partial x_i} * u(\delta) + \int_0^t \frac{\partial K_s}{\partial x_i} * f'(t-s)ds.$$

Uma vez que $\left\|\frac{\partial K_s}{\partial x_i}\right\|_{L^1} = cs^{-1/2}$, a desigualdade de Young para convoluções garante que a integral acima é convergente e portanto possui sentido. Em particular, ela mostra que $v \in C^1((0,\infty); L^2)$, ou seja, $u \in C^1((0,\infty); H^1)$.

Mais ainda, não é difícil constatar que v é solução fraca de

$$v_t = \Delta v - p|u|^{p-1}v, \tag{6.21}$$

com $v(\delta) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(\delta) \in H^1$. Os argumentos à princípio do máximo no teorema 6.4.1 agora permitem concluir que $|v(t,x)| \leq w^0(t,x)$, sendo w^0 a solução de $\frac{\partial w^0}{\partial t} - \Delta w^0 = 0$ com $w^0(\delta) = |v(\delta)|$.[9] Por consequência, $v(t) \to 0$; em outras palavras, $\nabla u(t) \to 0$ em L^2 quando $t \to \infty$.[10]

Passo quatro: a igualdade de energia (6.17). Uma vez que $|u|^{p+1} \in H^1((\delta,\infty); L^2)$ com $\frac{d}{dt}|u(t)|^{p+1} = (p+1)|u(t)|^{p-1}u(t)\dot{u}(t)$, se multiplicarmos a equação (6.1) por $\dot{u}$ e integramos de δ a t, concluímos que

$$\int_\delta^t \left|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\right|_{L^2}^2 ds + V(u(t)) = V(u(\delta)).$$

Por conta de (6.16), podemos passar $\delta \to 0$ e provar (6.17).

Passo cinco: o limite (6.18). Já sabemos que $u(t) \to 0$ em H^1; entretanto, a estimativa em L^∞ e o decaimento em L^2 dizem também que $u(t) \to 0$ em L^{p+1}. Consequentemente, passando $t \to \infty$, verificamos (6.18) – i.e., fisicamente, "todo o calor inicial é fatalmente dissipado ao ambiente". ////

Assim, os comentários pós-teorema 6.4.1 também pode ser fortalecidos: as identidades (6.17) e (6.18) garantem que o problema (6.1) é também globalmente bem posto no espaço de energia $E = H^1 \cap L^{p+1}$.[11]

---

[8]Consulte a proposição 3.32 e o passo dois na demonstração do teorema 4.10 de ($\mathscr{B}$). Uma prova alternativa seria aplicar o lema de Brezis–Lieb (exercício 4.17 de ($\mathscr{B}$)).

[9]Com efeito, $\frac{d}{dt}|(v(t)-w^0(t))^+|_{L^2}^2 = -2\int|\nabla(w^0(t,x)-v(t,x))^+|^2dx - p\int_{\{x;v\geq w^0\}}|u(t,x)|^{p-1}v(t,x)(v(t,x)-w^0(t,x))^+dx \leq -2p\int_{\{x;v\geq w^0\}}|u(t,x)|^{p-1}w^0(t,x)(v(t,x)-w^0(t,x))^+dx \leq 0$, já que $w^0 \geq 0$. Logo, $v(t) \leq w^0(t)$. Similarmente, $-w^0(t) \leq v(t)$.

[10]Dependendo da natureza do expoente p, podemos continuar este argumento para obter mais regularidade de u longe de $t = 0$. Por exemplo, se p for um inteiro ímpar ≥ 1, $u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$. Mais ainda, se α estiver, digamos, no espaço de Schwartz das funções de decrescimento rápido $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então todas as funções "livres" v^0, w^0 etc, que usamos para comparar com u, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ und so weiter, estarão em $C([0,\infty); L^\infty)$. Isto posto, concluímos então de uma análise da fórmula de Duhamel que $u \in C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$.
Logo, o variante da conjectura de De Giorgi para a equação do calor é verdadeiro.

[11] (6.14) afirma também que $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right|_{L^2} \leq \left|\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\right|_{L^2}$ se u soluciona (6.1) com $u(0) = \alpha$. Logo, pelo o teorema abaixo (em especial

Teorema 6.4.3. *O fluxo $\phi : [0,\infty) \times E \to E$, $\phi(t;\alpha) = \phi_t(\alpha) = u(t) =$ [solução de (6.1) com dado inicial α], é contínuo.*

Demonstração. Passo um: dependência contínua em L^{p+1}. Dadas $\alpha, \beta \in E$, ponha $u(t) = \phi_t(\alpha)$ e $v(t) = \phi_t(\beta)$. Segundo os teoremas 6.4.1 e 6.4.2, u e v são contínuas em L^{p+1} e que $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x) - v(t,x)|^{p+1} dx$ está em $C^1(0,\infty)$. Portanto, um cálculo direto dá que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)-v(t,x)|^{p+1}dx &= (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)-v(t,x)|^{p-1}\big(u(t,x)-v(t,x)\big)\\ &\qquad\big(\Delta u(t,x) - \Delta v(t,x)\big)dx - (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)-v(t,x)|^{p-1}\\ &\qquad\big(u(t,x)-v(t,x)\big)\big(|u(t,x)|^{p-1}u(t,x) - |v(t,x)|^{p-1}v(t,x)\big)dx\\ &\le -(p+1)p\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)-v(t,x)|^{p-1}|\nabla u(t,x) - \nabla v(t,x)|^2 dx\\ &\le 0.\end{aligned}$$

Por conseguinte $\int_{\mathbb{R}^N} |u(t)-v(t)|^{p+1}dx \le \int_{\mathbb{R}^N} |u(\delta,x)-v(\delta,x)|^{p+1}dx$ para todo $0 < \delta < t$. Passando $\delta \to 0$, temos que

$$\|u(t) - v(t)\|_{p+1} \le \|\alpha - \beta\|_{p+1} \tag{6.22}$$

para todo $t \ge 0$.

Passo dois: dependência da derivada em t. Se $\alpha_n \to \alpha$ em E e $u(t) = \phi_t(\alpha)$, $u_n(t) = \phi_t(\alpha_n)$, então $\dot{u}_n \to \dot{u}$ em $L^2\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)$.

De fato, da limitação das $\dot{u}_n$ e do fato de $u_n(t) \to u(t)$ em $L^\infty\big((0,\infty);L^2\big)$ (vide (6.14)), a argumentação em 5.4.1 diz que $\dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}$ fracamente em $L^2\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)$. No entanto, pelas identidades (6.18), $|\dot{u}_n|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)} \to |\dot{u}|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)}$, donde a conclusão é obtida pela convexidade uniforme de L^2 (ou simplesmente abrindo o produto $|\dot{u}_n - \dot{u}|^2$; veja o próximo passo).

Passo três: dependência em H^1. Fixe $T > 0$. Mantendo as notações do passo anterior, verifiquemos que $\|u_n - u\|_{L^\infty((0,T);H^1)} \to 0$. Isto encerrará a prova.

Qualquer que seja toda $\varphi \in C\big([0,T];L^2\big)$, afirmamos que

$$\int \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(t,x)\varphi(t,x)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)\varphi(t)dx \tag{6.23}$$

uniformemente em t e i. Para provar isto, vamos precisar do seguinte lema

Lema 6.4.1. *Se $\varphi \in C\big([0,T];L^2\big)$, existe uma sequência $\varphi_j \in C([0,T];H^1)$ tal que $|\varphi_j(t) - \varphi(t)|_{L^2} \to 0$ uniformemente em $[0,T]$.*

Demonstração do lema. De fato, tome uma aproximação da identidade $\{\rho_\eta\}_{\eta>0}$, sequência $\eta_j > 0$ com $\eta_j \to 0$ e defina $\varphi_j(t) = (\rho_{\eta_j} * \varphi)(t)$. É fácil ver que $\varphi \in C([0,T];H^1)$ e que $\varphi_j(t) \to \varphi(t)$ em L^2 para todo t. Além disso, pelo fato de $\|\rho_\eta\|_{L^1} = 1$, a desigualdade de Young para convoluções e a continuidade uniforme de φ afirmam que a família $\{\varphi_j\}$ é eqüicontínua. Deste modo, $\varphi_j \to \varphi$ uniformemente. ////

Em virtude da proposição acima, para estabelecer (6.23) basta considerar $\varphi \in C\big([0,T];H^1\big)$. Mas então podemos integrar por partes e usar que $u_n \to u$ em $L^\infty\big((0,T);L^2\big)$.

(6.22)), novamente 0 é um atrator global e assintoticamente estável.

Mais ainda, $|u_n(t)|_{H^1} \to |u(t)|_{H^1}$ uniformemente, pois

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(t,x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t,x)|^2 dx \right| &= \left|V(u_n(t))) - V(u(t)) - (\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} - \|u_n(t)\|_{p+1}^{p+1})\right| \\
&= \Bigg| V(\alpha_n) - V(\alpha) + \left(\int_0^t \{|\dot u_n(s)|_2^2 - |\dot u(s)|_2^2\} ds \right) \\
&\qquad - \left(\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} - \|u_n(t)\|_{p+1}^{p+1} \right) \Bigg| \\
&\le |V(\alpha_n) - V(\alpha)| + \int_0^\infty \left| |\dot u_n(s)|_2^2 - |\dot u(s)|_2^2 \right| ds \\
&\qquad + \left| \|u(t)\|_{p+1}^{p+1} - \|u_n(t)\|_{p+1}^{p+1} \right| \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Logo, por (6.23),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(t,x) - \nabla u(t,x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(t,x)|^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(t,x) \cdot \nabla u(t,x) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t,x)|^2 dx \\
&\to 0
\end{aligned}$$

uniformemente em $0 \le t \le T$.

////

6.5 Uma generalização

Como atestado nos parágrafos anteriores, o método variacional consegue produzir resultados mais fortes e com menos esforço no caso parabólico do que no hiperbólico. Evidentemente, repetindo as ideias delineadas no capítulo 4 é possível estender o argumento para uma equação diferencial mais geral. Contudo, atentando aos passos da demonstração do teorema 6.1.2 (em especial, à verificação de (6.14)), a unicidade do limite u é na realidade uma consequência da diferencial $dV : E \to E^*$ ser o que chamam de um operador monótono, i.e., cumpre $\langle dV(u) - dV(v), u - v\rangle_{E^*,E} \ge 0$ quaisquer que forem $u, v \in E$. Esta monotonicidade, por sua vez, está fortemente ligada a propriedades de convexidade.[12]

Com efeito, mostraremos que se $V : L^2 \to [0,\infty]$ observar a hipótese $(*)$ da seção 4.1[13] e for **convexa**, então não apenas vale conclusões como as do teorema 4.1.2 como o limite u é *de fato uma solução fraca da equação abstrata*

$$\begin{cases} \dot u(t) = -dV(u(t)) \\ u(0) = \alpha. \end{cases} \tag{6.24}$$

Com isto, podemos tratar problemas quasilineares (como $u_t = \Delta_p u - |u|^{q-2}u$) e não-locais (tal qual $u_t = (\int |\nabla u|^2 dx)\Delta u$), dentre outros.

Antes de mais nada, expressemos o que entendemos por uma solução fraca do problema de Cauchy acima (apesar de se poder já antecipar o qual deva ser a definição). Por simplicidade, novamente já presumamos a validade de $(*)$ e que $\alpha \in L^2$. Uma função $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma SOLUÇÃO FRACA de (6.24) caso $u \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty); L^2)$, $dV(u) \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty); E^*)$ e se

$$\int_0^\infty \left(u(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t)\right)_{L^2} dt = (\alpha, \varphi(0))_{L^2} + \int_0^\infty \langle dV(u(t)), \varphi(t)\rangle_{E^*,E} dt \tag{6.25}$$

[12]Os operadores monótonos foram uma área de intensa pesquisa durante as décadas de 1960 e 1970 e possuem uma vasta e rica teoria; veja, *par example*, K. Deimling (2010).

[13]Na realidade, a hipótese de E ser reflexivo pode ser omitida, já que não faremos uso das identidades $L^p((0,T);E)^* = L^{p'}((0,T);E^*)$. (Isto só era usado para mostrar que, na equação hiperbólica, $\dot u(0) = \beta$, o que agora não é necessário).

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$

Como nas provas das proposições 3.1.1 e , isto implica que

$$\dot{u}(t) = -dV(u(t))$$

no sentido de distribuições em x para quase todo $t > 0$; isto é, $\langle \dot{u}(t), \eta \rangle_{\mathscr{D}', C_c^\infty} = -\langle dV(u(t)), \eta \rangle_{E^*, E}$ em quase todo $t > 0$, não importando $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Já fazendo a inclusão $L^2 \subset E^*$, o fato de $dV(u)$ ser localmente integrável, permite que concluamos que uma solução fraca está em $W^{1,1}_{\text{loc}}((0,\infty); E^*)$.

Logo, é fácil ver que o critério no teorema 6.1.1 admite esta nova forma:

Teorema 6.5.1. *As três asserções a seguir são equivalentes sobre um caminho $u \in L^1_{loc}((0,\infty); L^2)$, tal que $dV(u) \in L^1_{loc}((0,\infty); E^*)$:*

1. *u é solução de (6.24);*
2. *$u(0) = \alpha$ como curva em $W^{1,1}_{loc}((0,\infty); E^*)$ e $\dot{u}(t) = -dV(u(t))$ em distribuição para quase todo $t > 0$;*
3. *$u(0) = \alpha$ como curva em $W^{1,1}_{loc}((0,\infty); E^*)$ e*

$$\int_0^\infty \left(u(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t)\right)_{L^2} dt = \int_0^\infty \langle dV(u(t)), \varphi(t) \rangle_{E^*, E} dt, \tag{6.26}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$.

De graça já temos um resultado de unicidade.

Teorema 6.5.2. *Se V cumpre (*) e é convexa, há no máximo uma única solução $u \in W^{1,1}_{loc}((0,\infty); L^2)$ de (6.24).*

Atente à hipótese de $\dot{u} \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty); L^2)$. Esta hipótese faz sentido, porque a energia no sistema 6.24, $e(t) = \int_0^t |\dot{u}(s)|^2_{L^2} ds + V(u(t))$, é formalmente conservada. Assim, diremos uma solução u é DE ENERGIA FINITA se $\dot{u} \in L^2((0,\infty); L^2)$ e $V(u) \in L^\infty(0,\infty)$. Em virtude de (4.3), esta última condição implica diretamente que $dV(u) \in L^\infty_{\text{loc}}((0,\infty); E^*)$.

Demonstração. Forem u e v duas soluções de (6.24) com $u, v \in W^{1,1}_{\text{loc}}((0,\infty); L^2)$, $u(0) = \alpha$ e $v(0) = \beta$, $t \mapsto |u(t) - v(t)|^2_{L^2}$ estará em $W^{1,1}_{\text{loc}}(0,\infty)$ e para quase todo $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|^2_{L^2} &= 2(\dot{u}(t) - \dot{v}(t), u(t) - v(t))_{L^2} \\ &= -2\langle dV(u(t)) - dV(v(t)), u(t) - v(t) \rangle_{E^*, E} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

já que para $u(t), v(t) \in E$ em quase todo t (do contrário, $dV(u)$ e $dV(v)$ não poderiam ser localmente integrável) e dV é monotóna (por conta da convexidade de V e sua diferenciabilidade em E). Portanto $|u(t) - v(t)|_{L^2} \leq |\alpha - \beta|_{L^2}$ para todo $t > 0$; particularmente, $\alpha = \beta$ implica em $u \equiv v$, como queríamos. ////

Com isto, já podemos enunciar o teorema central deste parágrafo.

Teorema 6.5.3. *Suponha que $V : L^2 \to [0,\infty]$ satisfaz a hipótese (*) da seção 4.1 e que V seja também convexa.*

Se $\alpha \in E$, para todo $\varepsilon > 0$ o funcional $F_\varepsilon : H^1_{loc}((0,\infty); L^2) \to [0,\infty]$

$$F_\varepsilon(v) = \int_0^\infty e^{-t/\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2}|\dot{u}(t)|^2_{L^2} + \frac{1}{\varepsilon} V(v(t)) \right\} dt \tag{6.27}$$

possui um único mínimo na u_ε na classe das $v \in H^1_{loc}((0,\infty); L^2)$ tais que $v(0) = \alpha$.

Estes mínimos u_ε's possuem as seguintes estimativas a priori

$$\int_0^\infty |\dot{u}_\varepsilon(t)|_{L^2}^2 dt \leq V(\alpha),$$
$$V\big(u_\varepsilon(t)\big) \leq 2eV(\alpha) \tag{6.28}$$

para quase todo $t > 0$. Quando é passado o limite $\varepsilon \to 0$, existe uma função u, também em $H^1_{loc}((0,\infty); L^2)$, tal que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1\big((0,T); L^2\big)$ para todo $T > 0$.

Além disso, u é a solução de energia finita de 6.24 e vale a seguinte desigualdade de energia: se

$$e(t) = \int_0^t |\dot{u}(s)|_{L^2}^2 ds + V\big(u(t)\big) \tag{6.29}$$

então para quase todo $t > 0$

$$e(t) \leq e(0) = V(\alpha). \tag{6.30}$$

A novidade não-trivial é que u ser uma solução da equação correspondente. A demonstração disto depende da noção de solução variacional.

A partir de agora, estaremos implicitamente presumindo que V é como no teorema acima e que $\alpha \in E$.

Uma curva $u \in C\big([0,\infty); L^2\big)$ é chamada uma SOLUÇÃO VARIACIONAL do sistema (6.24) caso $V(u) \in L^1_{\text{loc}}(0,\infty)$ e caso, para toda $v \in H^1_{\text{loc}}\big((0,\infty); L^2\big)$ com $V(v) \in L^1_{\text{loc}}(0,\infty)$, valer a seguinte condição de minimalidade

$$\int_0^T V\big(u(t)\big)dt \leq \int_0^T \Big\{\big(\dot{v}(t), v(t) - u(t)\big)_{L^2} + V\big(v(t)\big)\Big\}dt + \frac{1}{2}|v(0) - \alpha|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|v(T) - u(T)|_{L^2}^2, \tag{6.31}$$

qualquer que seja $T > 0$.

Antes de prosseguirmos, expliquemos a origem deste conceito. Suponha que $u(t)$ é uma solução de energia finita de (6.24). Então, se v é como acima, temos

$$\big(\dot{u}(t) - \dot{v}(t), u(t) - v(t)\big)_{L^2} = \big\langle dV\big(u(t)\big), u(t) - v(t)\big\rangle - \big(\dot{v}(t), u(t) - v(t)\big)_{L^2}$$

para quase todo $s > 0$. Integrando esta igualdade de 0 a t, usando que $\langle dV(u), v - u\rangle \leq V(v) - V(u)$ e rearranjando os termos, (6.31) é prontamente obtida.

A vantagem de se trabalhar com soluções variacionais é que o termo envolvendo dV é subsitituído por V, que tende a ser mais robusto. De fato, podemos falar de soluções variacionais mesmo quando V deixa de ser diferenciável e a equação $\dot{u} = -dV(u)$ sequer possui assim sentido.

No entanto, como no nosso caso V é de fato diferenciável em seu domínio efetivo, é possível provar que

Teorema 6.5.4. *Se u é uma solução variacional de (6.24), u é uma solução fraca deste e satisfaz a desigualdade de energia (6.30).*

A verificação desta afirmação será fragmentada em quatro lemas.

Lema 6.5.1. *Caso u for uma solução variacional de (6.24), $u(0) = \alpha$.*

Demonstração. Aplicando a função constante $v(t) \equiv \alpha$ em (6.31), temos que

$$\frac{1}{2}|u(T) - \alpha|_{L^2}^2 \leq \int_0^T \Big(V\big(u(t)\big) - V(\alpha)\Big)dt.$$

Como $u \in C\big([0,\infty); L^2\big)$, uma passagem ao limite $T \to 0$ dá o resultado desejado. ////

Para a sequência, teremos de introduzir um operador de regularização, uma vez que não sabemos a princípio se uma solução variacional possui derivada em L^2.

Na condição de que $u \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty);L^2)$, $u_0 \in L^2$ e $h > 0$, entenderemos por $R_{h,u_0}u$ a curva

$$(R_{h,u_0}u)(t) = e^{-t/h}u_0 + \frac{1}{h}\int_0^t e^{(s-t)/h}u(s)ds. \tag{6.32}$$

Observe que $R_{h,u_0}u(t)$ é contínua.

Pelas técnicas apresentadas no capítulo 2, não é difícil mostrar

Lema 6.5.2. *1. Caso $u \in C\big([0,\infty);L^2\big)$ e $u(0) = u_0$, então $(R_{h,u_0}u)(t) \xrightarrow{h\to 0} u(t)$ uniformemente em L^2 sobre intervalos limitados;*

2. Quando $u \in L^\infty\big([0,\infty);L^2\big)$, $R_{h,u_0}u \in W^{1,\infty}_{loc}\big((0,\infty);L^2\big)$ e para quase todo $t > 0$

$$\frac{d}{dt}(R_{h,u_0}u)(t) = -\frac{1}{h}\big((R_{h,u_0}u)(t) - u(t)\big); \tag{6.33}$$

3. Na hipótese de $u \in H^1_{loc}\big((0,\infty);L^2\big)$ e $u(0) = u_0$, $R_{h,u_0}u \xrightarrow{h\to 0} u$ em $H^1\big((0,T);L^2\big)$ para todo $T > 0$.[14]

Um resultado um pouco mais delicado é o seguinte

Lema 6.5.3. *Se $u \in L^1_{loc}\big((0,\infty);L^2\big)$ é tal que $V(u) \in L^1_{loc}(0,\infty)$ e se $u_0 \in E$,*

$$\lim_{h\to 0}\int_0^T V\big((R_{h,u_0}u)(t)\big)dt = \int_0^T V\big(u(t)\big)dt \tag{6.34}$$

qualquer que seja $T > 0$.

Demonstração. Como aqui teremos de aplicar uma versão um pouco incomum da desigualdade de Jensen, explicaremos rapidamente quais são os elementos envolvidos. Uma discussão mais detalhada está em H. Brezis (2011).

Sejam B um espaço de Banach e $j : B \to (-\infty,\infty]$ uma função convexa, semicontínua inferiormente e que não é identicamente ∞. A sua função *conjugada* (ou *transformada de Legendre*) é a transformação $j^* : B^* \to (-\infty,\infty]$ dada por

$$j^*(f) = \operatorname*{Sup}_{x\in B}\big\{\langle f,x\rangle - j(x)\big\}.$$

Claramente temos a chamada *desigualdade de Young*

$$\langle f,x\rangle \le j(x) + j^*(f)$$

apesar de que aqui ela é absolutamente trivial; o caso clássico no entanto $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ para $a,b \ge 0$ e $1 < p < \infty$, é obtido com $B = B^* = \mathbb{R}$, $j(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ e $j^*(f) = \frac{1}{p'}|f|^{p'}$.

j^* é uma função também convexa e semicontínua inferiormente, pois é o envelope superior das funções $f \mapsto \langle f,x\rangle - j(x)$, que são contínuas e convexas. Portanto, podemos falar de sua conjugada também. Restringiremos-nos no entanto ao subespaço $B \subset B^{**}$, de modo que $j^{**} : B \to (-\infty,\infty]$ será definida como

$$j^{**}(x) = \operatorname*{Sup}_{f\in B^*}\big\{\langle f,x\rangle - j^*(f)\big\}.$$

Um dos pilares da Análise Convexa, o teorema de Frenchel–Moreau, assere que $j^{**} = j$.

É fácil ver que se $B = L^2$ e $j = V$, estamos nas condições acima. Assim, a desigualdade de Young diz que

$$(f,u(s))_{L^2} \le V\big(u(s)\big) + V^*(f)$$

para toda $f \in L^2$ e $0 \le s \le t$.

[14] Vale também a estimativa $\left|\frac{\partial}{\partial t}R_{h,u_0}u\right|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)} \le \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)}$.

Logo, se $X = X_t$ for $[0,t]$ com a medida de probabilidade $d\mu(s) = \frac{1}{h(1-e^{-t/h})} e^{(s-t)/h} ds$ e, conformemente, pormos $\int_X u d\mu = \frac{1}{h(1-e^{-t/h})} \int_0^t e^{(s-t)/h} u(s)$, teremos

$$\Big(f, \int_X u d\mu\Big)_{L^2} \leq \int_X V(u) d\mu + V^*(f),$$

Assim, o teorema de Frenchel–Moreau dá que

$$V\Big(\int_X u d\mu\Big) = \operatorname*{Sup}_{f \in L^2} \Big\{ \Big(f, \int_X u d\mu\Big)_{L^2} - V^*(f) \Big\} \leq \int_X V(u) d\mu, \tag{6.35}$$

que era a desigualdade na qual estávamos interessados em obter.

Usando o fato de que $\frac{1}{h(1-e^{t/h})} \int_0^t e^{(s-t)/h} ds = 1$, a convexidade de V e (6.35), mostramos portanto que para todo $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} V((R_{h,u_0}u)(t)) &= V\left(e^{-t/h} u_0 + \frac{1-e^{-t/h}}{h(1-e^{-t/h})} \int_0^t e^{(s-t)/h} u(s) ds\right) \\ &\leq e^{-t/h} V(u_0) + (1-e^{-t/h}) V\left(\frac{1}{h(1-e^{-t/h})} \int_0^t e^{(s-t)/h} u(s) ds\right) \\ &\leq e^{-t/h} V(u_0) + \frac{1}{h} \int_0^t e^{(s-t)/h} V(u(s)) ds. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Por conseguinte, chamando de $g_h(t)$ é o lado direito em (6.36), uma aplicação do teorema de Fubini (como fizemos na demonstração da desigualdade de energia no teorema 6.1.2) é possível mostrar que

$$\int_0^T g_h(t) dt = h(1-e^{-T/h}) V(u_0) + \int_0^T (1-e^{(s-T)/h}) V(u) ds.$$

Assim,

$$\limsup_{h \to 0} \int_0^T V((R_{h,u_0}u)(t)) dt \leq \int_0^T V(u(t)) dt.$$

Por outro lado, a semicontinuidade inferior de V, o lema de Fatou e o lema 6.5.2 (parte 1.) dizem que

$$\int_0^T V(u(t)) dt \leq \liminf_{h \to 0} \int_0^T V((R_{h,u_0}u)(t)) dt,$$

o que finaliza a prova. ////

Lema 6.5.4. *Caso u for uma solução variacional de (6.24), $\dot u \in L^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$, $V(u) \in L^\infty(0,\infty)$ e para quase todo $t > 0$ vale a desigualdade de energia (6.30).*

Demonstração. Graças a $v = R_{h,\alpha}u$ ser uma função de comparação admissível na condição de minimalidade (6.31), temos que para todo $h > 0$

$$\begin{aligned} h \int_0^T \Big|\frac{d}{dt} R_{h,\alpha} u(t)\Big|_{L^2}^2 dt &= -\int_0^T \Big(\frac{d}{dt} R_{h,\alpha} u(t), R_{h,\alpha} u(t) - u(t)\Big)_{L^2} \\ &\leq \int_0^T \big[V(R_{h,\alpha} u(t)) - V(u(t))\big] dt - \frac{1}{2} |R_{h,\alpha} u(T) - u(T)|_{L^2}^2 \\ &\leq \int_0^T \big[V(R_{h,\alpha} u(t)) - V(u(t))\big] dt. \end{aligned}$$

Por (6.35), $V(R_{h,\alpha} u(t)) \leq e^{-t/h} V(\alpha) + \frac{1}{h} \int_0^t e^{(s-t)/h} V(u(s)) ds = g_h(t)$, de modo que um cálculo direto dá que

$$
\begin{aligned}
h\int_0^T \left|\frac{d}{dt}R_{h,\alpha}u(t)\right|_{L^2}^2 dt &\le \int_0^T \left[g(t)-V\big(u(t)\big)\right]dt \\
&= -h\int_0^T \frac{dg_h}{dt}(t)dt \\
&= h[g(0)-g(T)] && (6.37)\\
&\le hg(0)=hV(\alpha). && (6.38)
\end{aligned}
$$

Destarte (6.37) e (6.38) implicam nas estimativas

$$
\frac{1}{k}\int_T^{T+k}\left[\int_0^t \left|\frac{d}{dt}R_{h,\alpha}u(s)\right|_{L^2}^2 ds + g_h(t)\right]dt = V(\alpha), \tag{6.39}
$$

$$
\int_0^\infty \left|\frac{d}{dt}R_{h,\alpha}u(t)\right|_{L^2}^2 dt \le V(\alpha) \tag{6.40}
$$

Já que $R_{h,\alpha}u(t) \to u(t)$ uniformemente sobre os intervalos limitados de $[0,\infty)$, existe portanto $\dot{u}(t)$ em L^2. De fato, por (6.40), existe uma sequência $h_n \to 0$ tal que $\frac{\partial}{\partial t}R_{h,\alpha}u \rightharpoonup f$ fracamente em $L^2\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)$. Assim, para toda $\phi \in C_c^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)$,

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} f(t,x)\varphi(t,x)dxdt &= -\lim_{h_n\to 0}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial t}R_{h,\alpha}u(t,x)\varphi(t,x)dxdt \\
&= \lim_{h_n\to 0}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} R_{h,\alpha}u(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)dxdt \\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)dxdt,
\end{aligned}
$$

como queríamos.

Em contrapartida, uma reprise da análise do lema (6.5.3) conclui que $\int_T^{T+k} g_h(t)dt \overset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_T^{T+k} V\big(u(t)\big)dt$. Portanto, uma passagem ao limite em (6.39) produz

$$
\frac{1}{k}\int_T^{T+k}\left[\int_0^t \left|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\right|_{L^2}^2 ds + V\big(u(t)\big)\right]dt \le V(\alpha),
$$

o que prova a desigualdade de energia se fizermos $k \to 0$. ////

Demonstração do teorema 6.5.4. Devido a (6.5.4), $v_\delta(t) = u(t) + \delta\varphi(t)$ pode ser usada em (6.31) caso $\varphi \in C_c^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^N\big)$. Tomando T de modo que $(0,T)$ contenha o suporte de φ, temos que

$$
\int_0^T \big(\dot{u}(t)+\delta\dot{\varphi}(t),\varphi(t)\big)_{L^2}dt \le \int_0^T \frac{1}{\delta}\Big\{V\big(u(t)+\delta\varphi(t)\big)-V\big(u(t)\big)\Big\}dt.
$$

Portanto, no limite $\delta \to 0$, a regra de Leibniz ratifica que

$$
\int_0^T \big(\dot{u}(t),\varphi(t)\big)_{L^2}dt \le \big\langle dV\big(u(t)\big),\varphi(t)\big\rangle_{E^*,E}dt.
$$

Se trocarmos φ por $-\varphi$, fica verificada precisamente (6.26). Dado que $u(0)=\alpha$ (lema 6.5.1), o teorema 6.5.1 conclui a prova do teorema. ////

A proposição capital na prova do teorema 6.5.3 é que os mínimos u_ε convergem a soluções variacionais de (6.24).

Teorema 6.5.5. *Nas condições do teorema 6.5.3, toda sequência $\varepsilon_n > 0$ com $\varepsilon_n \to 0$ contém uma subsequência ε_n' tal que $u_{\varepsilon_n'}$ converge fracamente a uma função u na topologia fraca de $H^1\big((0,T);L^2\big)$ para todo $T > 0$. Por sua vez, u satisfaz a desigualdade de energia (6.30) e é uma solução variacional de (6.24).*

Demonstração. Dado que a prova desta convergência e da desigualdade de calor devem ser natural à essa altura, somente verificaremos que u cumpre (6.31).

Tome $T > 0$ e $\phi \in H^1_{\text{loc}}\big((0,\infty);L^2\big)$ com $V(\phi) \in L^1_{\text{loc}}(0,\infty)$. Para $0 < \theta < T/2$, defina a função à Heaviside $h_\theta \in H^1(0,\infty) \cap H^1_0(0,T)$

$$h_\theta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} t & \text{se } 0 \le t \le \theta \\ 1 & \text{se } \theta \le t \le T-\theta \\ \frac{1}{\theta}(T-t) & \text{se } T-\theta \le \theta T \\ 0 & \text{se } T \le t. \end{cases}$$

Fixando ε por um momento, definiremos para $\delta > 0$ a classe $\{\varphi_\delta\}$ por $\varphi_\delta(t) = \delta e^{t/\varepsilon} h_\theta(t)\phi(t)$.

Evidentemente, se F_ε é o funcional definido em (6.27), temos que $F_\varepsilon(u_\varepsilon + \varphi_\delta) < \infty$ e, por $\varphi_\delta(0) = \alpha$,

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \le F_\varepsilon(u_\varepsilon + \varphi_\delta).$$

Isto pode ser reescrito explicitamente como

$$0 \le \int_0^T e^{-t/\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\Big(\big|\dot u_\varepsilon(t) + \varphi_\delta(t)\big|^2_{L^2} - \big|\dot u_\varepsilon(t)\big|^2_{L^2}\Big) + \frac{1}{\varepsilon}\Big(V\big(u_\varepsilon(t) + \varphi_\delta(t)\big) - V\big(u_\varepsilon(t)\big)\Big)\right\}dt. \tag{6.41}$$

Simplifiquemos a expressão acima.

Comecemos pelo termo envolvendo V. Se $\delta e^{T/\varepsilon} < 1$, a convexidade de V acarreta na desigualdade

$$\begin{aligned} V\big(u_\varepsilon(t) + \varphi_\delta(t)\big) - V\big(u_\varepsilon(t)\big) &= V\big(u_\varepsilon(t) + \delta e^{t/\varepsilon} h_\theta(t)\phi(t)\big) - V\big(u_\varepsilon(t)\big) \\ &\le \delta e^{t/\varepsilon}\Big(V\big(u_\varepsilon(t) + \phi(t)\big) - V\big(u_\varepsilon(t)\big)\Big). \end{aligned}$$

Em contrapartida, a parte com $\dot u_\varepsilon$ é precisamente

$$\big|\dot u_\varepsilon(t) + \varphi_\delta(t)\big|^2_{L^2} - \big|\dot u_\varepsilon(t)\big|^2_{L^2} = \delta^2 \left|\frac{d}{dt}\Big(e^{t\varepsilon} h_\theta(t)\phi(t)\Big)\right|^2_{L^2} + 2\delta\left(\dot u_\varepsilon(t), \frac{d}{dt}\Big(e^{t\varepsilon} h_\theta(t)\phi(t)\Big)\right)_{L^2}.$$

Juntando estas expressões, se multiplicarmos (6.41) por ε/δ e passarmos $\delta \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_0^T e^{-t/\varepsilon}\left\{\varepsilon\left(\dot u_\varepsilon(t), \frac{d}{dt}\Big(e^{t/\varepsilon} h_\theta(t)\phi(t)\Big)\right)_{L^2} + e^{t/\varepsilon} h_\theta\Big(V\big(u_\varepsilon(t) + \phi(t)\big) - V\big(u(t)\big)\Big)\right\}dt \\ &= \int_0^T h_\theta(t)\Big\{\big(\dot u_\varepsilon(t), \phi(t)\big)_{L^2} + V\big(u_\varepsilon(t) + \phi(t)\big) - V\big(u(t)\big)\Big\}dt \\ &\quad + \varepsilon \int_0^T \Big\{h_\theta'(t)\big(\dot u_\varepsilon(t), \phi(t)\big)_{L^2} + h_\theta(t)\big(\dot u_\varepsilon(t), \dot\phi(t)\big)_{L^2}\Big\}dt. \end{aligned}$$

Porém, se $v \in H^1_{\text{loc}}\big((0,\infty);L^2\big)$ com $V(v) \in L^1_{\text{loc}}(0,\infty)$, poderíamos muito bem escolher $\phi = v - u_\varepsilon$. Se fizermos isto, todo o esforço anterior serviu para mostrar que

$$\begin{aligned}\int_0^T V(u_\varepsilon(t))dt \le \int_0^T & h_\theta(t)V(v(t))dt \\ &+ \varepsilon\int_0^T \left\{h'_\theta(t)\big(\dot u_\varepsilon(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\big)_{L^2} + h_\theta(t)\big(\dot u_\varepsilon(t), \dot\phi(t)-\dot u_\varepsilon(t)\big)_{L^2}\right\}dt \\ &+ \int_0^T (1-h_\theta(t))V(u_\varepsilon(t))dt + \int_0^T h_\theta(t)\big(\dot u_\varepsilon(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\big)_{L^2}dt.\end{aligned}$$

Analisemos o comportamento desta desigualdade quando $\varepsilon'_n \to 0$. Evidentemente, o lado esquerdo e o primeiro termo à direito permanecem estáticos. Graças a (6.28), o segundo decai a 0 sempre que ε'_n tende a 0.

Para o terceiro, observemos que novamente por (6.28),

$$\begin{aligned}\int_0^T (1-h_\theta(t))V(u_\varepsilon)dt &\le \left\{\int_0^\theta + \int_{T-\theta}^T\right\}V(\alpha)dt \\ &= 2\theta V(\alpha).\end{aligned}$$

Por último, escrevemos o postremo elemento como

$$\begin{aligned}\int_0^T h_\vartheta(t)\big(\dot u_\varepsilon(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\big)_{L^2}dt &= \int_0^T h_\theta(t)\big(\dot v(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\big)_{L^2} - \frac{1}{2}\int_0^T h_\theta(t)\frac{d}{dt}|v(t)-u_\varepsilon(t)|_{L^2}^2dt \\ &= \int_0^T h_\theta(t)\big(\dot v(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\big)_{L^2} + \frac{1}{2}\int_0^T h'_\theta(t)|v(t)-u_\varepsilon(t)|_{L^2}^2dt \\ &= \int_0^T h_\theta(t)\big(\dot v(t), v(t)-u_\varepsilon(t)\big)_{L^2} - \frac{1}{2\theta}\int_{T-\theta}^T |v(t)-u_\varepsilon(t)|_{L^2}^2dt \\ &\quad + \frac{1}{2\theta}\int_0^\theta |v(t)-u_\varepsilon(t)|_{L^2}^2dt.\end{aligned}$$

Uma vez que $u_\varepsilon(0)=\alpha$ e $|\dot u_\varepsilon|^2_{L^2((0,\infty);L^2)} \le V(\alpha)$, a desigualdade triangular e a de Hölder permitem estimar a parte final como

$$\begin{aligned}\int_0^\theta |v(t)-u_\varepsilon(t)|_{L^2}^2dt &\le \left\{\sqrt{\frac{1}{2\theta}\int_0^\theta |\alpha-v(t)|_{L^2}^2dt} + \sqrt{\frac{1}{2\theta}\int_0^\theta |u_\varepsilon(t)-\alpha|_{L^2}^2dt}\right\}^2 \\ &\le \left\{\sqrt{\frac{1}{2\theta}\int_0^\theta |\alpha-v(t)|_{L^2}^2dt} + \frac{1}{2}\sqrt{\theta V(\alpha)}\right\}^2.\end{aligned}$$

Encaixando todas as peças, a semicontinuidade inferior de V, da norma e o lema de Fatou mostram que

$$\begin{aligned}\int_0^T V(u(t))dt &\le \liminf_{\varepsilon'_n\to 0}\int_0^T V(u_\varepsilon(t))dt \\ &\le \int_0^T h_\theta(t)V(v(t))dt + 2\theta V(\alpha) \\ &\quad + \int_0^T h_\theta(t)\big(\dot v(t), v(t)-u(t)\big)dt \\ &\quad + \left\{\sqrt{\frac{1}{2\theta}\int_0^\theta |\alpha-v(t)|_{L^2}^2dt} + \frac{1}{2}\sqrt{\theta V(\alpha)}\right\}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\theta}\int_{T-\theta}^T |v(t)-u(t)|_{L^2}^2dt.\end{aligned}$$

Portanto, quando $\theta \to 0$, ficamos com (lembre-se de que $u, v \in C([0,\infty); L^2)$)

$$\int_0^T V(u(s))ds \le \int_0^T \left\{(\dot v(t), v(t) - u(t))_{L^2} + V(v(t))\right\}dt + \frac{1}{2}|v(0) - \alpha|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|v(T) - u(T)|_{L^2}^2,$$

o que era a nossa missão. ////

Demonstração do teorema 6.5.3. Basta unir os teoremas 6.5.5, 6.5.4 e 6.5.2. ////

Para fechar o capítulo, mostremos o princípio do máximo para a equação (6.24).[15]

Teorema 6.5.6. *Sejam u_1 e u_1 soluções variacionais de $\dot u = -dV(u)$, com $u_1(0) = \alpha_1$ e $u_2(0) = \alpha_2$. Se $\alpha_1, \alpha_2 \in E$ com $\alpha_1 \le \alpha_2$, então $u_1(t) \le u_2(t)$ para todo $t \ge 0$.*

Demonstração. Defina $v_1(t) = \text{Min}\{u_1(t), u_2(t)\}$ e $v_2(t) = \text{Max}\{u_1(t), u_2(t)\}$. É possível mostrar que $v_1, v_2 \in H^1_{\text{loc}}((0,\infty); L^2)$ (por causa do teorema (6.5.4)) e que $V(v_1), V(v_2) \in L^1_{\text{loc}}(0,\infty)$. Assim comparando em (6.31) u_1 com v_1 e u_2 com v_2 e somando as duas desigualdades, obtemos para todo $T > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^T \left[V(u_1(t)) + V(u_2(t))\right]dt \le& \int_0^T \left[V(v_1(t)) + V(v_2(t))\right]dt \\ &+ \int_0^T \left[(\dot v_1(t), v_1(t) - u_1(t))_{L^2} + (\dot v_2(t), v_2(t) - u_2(t))_{L^2}\right]dt \\ &- \frac{1}{2}\left[|v_1(T) - u_1(T)|_{L^2}^2 + |v_2(T) - u_2(T)|_{L^2}^2\right].\end{aligned}$$

Analisemos a equação acima. Um momento de reflexão dá que

$$\int_0^T \left[V(u_1(t)) + V(u_2(t))\right]dt = \int_0^T \left[V(v_1(t)) + V(v_2(t))\right]dt.$$

Por outro lado, não é difícil ver que $v_1(t) - u_1(t) = -(u_1(t) - u_2(t))^+$ e $v_2(t) - u_2(t) = (u_1(t) - u_2(t))^+$, de modo que

$$\begin{aligned}\int_0^T \left[(\dot v_1(t), v_1(t) - u_1(t))_{L^2} + (\dot v_2(t), v_2(t) - u_2(t))_{L^2}\right]dt &= \int_0^T (\dot v_2(t) - \dot v_1(t), (u_1(t) - u_2(t))^+)_{L^2} \\ &= \int_0^T ((\dot u_1(t) - \dot u_2(t))^+, (u_1(t) - u_2(t))^+)_{L^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|(u_1(t) - u_2(t))^+|_{L^2}^2 dt \\ &\le |(u_1(T) - u_2(T))^+|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

[15]Este teorema em particular implicaria a unicidade de soluções variacionais quando V deixa de ser diferenciável.
Infelizmente, a prova a seguir não seria válida para sistemas de equações (veja o último parágrafo do capítulo 4). Estamos realçando este fato, pois são de grande importância em aplicações as chamadas equações de *reação-difusão*; isto é, sistemas da forma $\frac{\partial u_i}{\partial t} + \Delta u_i = F_i(u_1, \ldots, u_k)$ (consulte as referências de H. Brezis (2011)).
Em geral, se V não for necessariamente diferenciável, mas *estritamente convexa*, ainda só existirá uma solução variacional (com a mesma condição inicial).
De fato, suponha que u_1 e u_2 são soluções variacionais com $u_1(0) = \alpha = u_2(0)$. Se elas forem diferentes, haverá um $T > 0$ tal que

$$\int_0^T V(\widetilde u)dt < \frac{1}{2}\int_0^T (V(u_1) + V(u_2))dt.$$

Se testarmos u_1 e u_2 com $\widetilde u = (u_1 + u_2)/2$ (que é possível pelo teorema 6.5.4) e somando as duas desigualdades, obtemos

$$\int_0^T \left[V(u_1) + V(u_2)\right]dt \le 2\int_0^T V(\widetilde u)dt,$$

que é uma contradição.

Analogamente,

$$-\frac{1}{2}\left|v_1(T)-u_1(T)\right|_{L^2}^2=-\frac{1}{2}\left|(u_1(T)-u_2(T))^+\right|_{L^2}^2=-\left|v_2(T)-u_2(T)\right|_{L^2}^2.$$

Portanto, agregando todos os termos,

$$\left|(u_1(T)-u_2(T))^+\right|_{L^2}^2\leq 0 \qquad [\forall T>0],$$

como queríamos demonstrar. ////

Com isto, pode-se imaginar que os resultados da seção 6.4 possam ser válidas para uma família mais extensa de equações do calor semilineares.

Apêndice A

Algumas proposições em espaços de Sobolev

In a world where we think, that we've seen everything
In a world where we think, that we rise above all things
In a time that is so fast, you have to run so you won't get lost
In a time that is so loud, you have to scream to get recognized

In a land where you must fight, for a little fragment of human rights
In a system that uses war, to spread its spirit around the globe
A religion that uses hate, to plug its message into your brain
A revolution that turns back time, forgets what we have learned to be

A public where shoes do shine, and money beats respect for life
In a world that is cleaned of all secrets that nature kept
A public where death's reduced to be excitement in late night news
In a time where children learn to ignore the world around them

I'd like to say, I have to say
You... don't know nothin'
You... don't know nothin' about
You... don't know nothin' at all

Coroner. "About Life". *Mental Vortex*. Noise Records, 1991. CD.

Neste apêndice, investigaremos três situações que encontramos espalhadas no decurso desta dissertação. Apesar de na literatura estas questões terem sido estudadas em grande generalidade (veja, *par example*, R. A. Adams–J. J. F. Fournier (2003), J.-L. Lions–E. Magenes (1972), L. Tartar (2007) e as referências lá contidas), aqui nós nos ateremos ao caso hilbertiano $p = 2$, porque, além de ser o único com qual nos deparamos, este pode ser facilmente compreendido por meio da *transformada de Fourier*.

O primeiro dos problemas diz respeito a uma questão de interpolação. Digamos que, para algum aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ não-vazio, $u \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$ seja tal que tenhamos igualmente $\frac{\partial^m u}{\partial t^m} \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$ para algum inteiro $m > 1$. O que se pode dizer acerca das derivadas intermediárias $\frac{\partial^l u}{\partial t^l}$ para $1 \leq l < m$?

Teorema A.0.7. *Nas condições acima, para todo $\omega \subset\subset \Omega$ e $0 < T' < T$, $\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in L^2\big((0,T');L^2(\omega)\big)$. De fato, há uma constante $C = C(\omega, T', l, m)$ tal que*

$$\left|\frac{\partial^l u}{\partial t^l}\right|_{L^2((0,T');L^2(\omega))} \leq C\left(|u|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} + \left|\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))}\right). \tag{A.1}$$

Adicionalmente, se Ω tiver fronteira limitada e suave ou se $\Omega = \mathbb{R}^N$, então podemos tomar $\omega = \Omega$; caso $T = \infty$, também é possível a escolha $T' = \infty$.

Demonstração. Primeiro, escolha uma função $\theta \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ tal que $\theta(t,x) = 1$, se $0 \leq t \leq T'$ e $x \in \omega$, e $\theta(t,x) = 0$ para $t > T$ e $x \notin \Omega$. Agora, por meio do argumento clássico de reflexão (vide D. Gilbarg–N. Trudinger (1983)) é possível estender θu para uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, que está em L^2, assim como m-ésima derivada temporal.[1] (Se a fronteira de Ω for suave e limitada, então primeiro estendemos u em x pelo supracitado princípio da reflexão e depois truncamos em t. Este truncamento é evidentemente desnecessário se $T = \infty$).

Por conseguinte, se $(\mathscr{F} f)(\tau,\xi)$ é a transformada de Fourier de f em t e x, temos que

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} (1+\tau^{2m})|(\mathscr{F} f)(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi = |f|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} + \left|\frac{\partial^m f}{\partial t^m}\right|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} < \infty.$$

A desigualdade de Young $\tau^{2l} \leq C(1+\tau^{2m})$, no entanto nos garante que

$$\int_{\mathbb{R}^{1+N}} \tau^{2l}|(\mathscr{F} f)(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi \leq \int\int (1+\tau^{2m})|(\mathscr{F} f)(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi.$$

Assim pela caracterização de derivadas fracas através da transformada de Fourier, $\frac{\partial^l f}{\partial t^l}$ pertence a L^2 e, por restrição, $\frac{\partial^l u}{\partial t^l} \in L^2((0,T')\times\omega) = L^2\big((0,T');L^2(\omega)\big)$. Obviamente, uma inspeção do raciocínio acima comprova a validade de (A.1). ////

Já segunda pergunta é sobre uma outra propriedade curiosa dos espaços de Sobolev. Digamos que $u : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ tenha $m \geq 1$ derivadas em t e derivadas espaciais até ordem k em L^2; simbolicamente, $u \in H^m((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);H^k(\Omega))$. Pelo teorema fundamental do Cálculo, sabemos então que u estão bem-definidos os "traços" $u(0), \ldots, \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}(0)$ e que estes estão L^2. Será que alguma regularidade x de u é herdada para os estes traços?

Teorema A.0.8. *Nas condições acima, para todo $\omega \subset\subset \Omega$ e $0 \leq j \leq m-1$,*

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0) \in H^{s_j}(\omega)$$

onde $s_j = s_{j,m,k} = \frac{2(m-j)-1}{2m}k$. Ademais, existe uma constante $C = C(\omega,j,m,k)$ tal que

$$\left|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0)\right|_{H^{s_j}(\omega)} \leq C\Big(|u|_{H^m((0,T);L^2)} + |u|_{L^2((0,T);H^k)}\Big).$$

Como antes, se Ω tiver fronteira limitada e suave ou se $\Omega = \mathbb{R}^N$, então é permitido tomar $\omega = \Omega$.

Demonstração. Repetindo os argumentos de extensão do teorema A.0.7, já supomos que pudemos estender continuamente u para uma função $f \in H^m(\mathbb{R};L^2) \cap L^2(\mathbb{R};H^k)$.

Já que a injeção obtida no final será contínua, podemos supor *a priori* que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$.

Defina então os operadores integrais

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\tau,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} f(t,x)dt &&= \text{“transformada de Fourier em relação a } t\text{”},\\
\widehat{f}(t,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(t,x)dx &&= \text{“transformada de Fourier em relação a } x\text{”},\\
(\mathscr{F} f)(\tau,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{1+N}} e^{-i(t\tau+x\cdot\xi)} f(t,x)dtdx &&= \text{“transformada de Fourier em relação a } t \text{ e a } x\text{”}.
\end{aligned}$$

[1]Escrevendo $v(t,x) = \theta(t,x)u(t,x)$, basta colocar $f(t,x) = u(t,x)$ para $t > 0$ e $f(t,x) = \sum_{i=1}^{m+1} c_i v(-t/i,x)$ para $t < 0$, onde $\sum_{i=1}^{m+1}(-1/i)^l c_i = 1$, qualquer que seja $1 \leq l \leq m+1$.

Integrando por partes, é fácil ver que

$$\widetilde{\left(\frac{\partial^j f}{\partial t^j}\right)}(\tau,\xi) = (i\tau)^j \widetilde{f}(\tau,x)$$

de modo que o teorema de inversão dá que

$$\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(0,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (i\tau)^j \widetilde{f}(\tau,x)d\tau.$$

e o teorema de Fubini assere que

$$\left(\widehat{\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(0)}\right)(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (i\tau)^j (\mathcal{F}f)(\tau,\xi)d\tau.$$

Lembremos que por hipótese

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\tau|^{2m}+|\xi|^{2k})\left|(\mathcal{F}f)(\tau,\xi)\right|^2 d\tau dx \leq C\left(|f|_{H^m((0,T);L^2)} + |f|)_{L^2((0,T);H^k)}\right) < \infty.$$

Logo,

$$\left|\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(0)\right|^2_{H^{s_j}(\mathbb{R}^N)} = C\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{s_j}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(i\tau)^j(\mathcal{F}f)(\tau,\xi)d\tau\right|d\xi.$$

Agora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(i\tau)^j(\mathcal{F}f)(\tau,\xi)d\tau\right| \leq \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\tau^{2(m-j)}+|\xi|^{2r}}d\tau\right\}\left\{\int_{\infty}^{\infty}\tau^{2j}\left(1+\tau^{2(m-j)}+|\xi|^{2r}\right)|(\mathcal{F}f)(\tau,\xi)|^2 d\tau\right\}.$$

onde o expoente r descobriremos em um instante. Um cálculo direto verifica que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\tau^{2(m-j)}+|\xi|^{2r}}d\tau \leq C(1+|\xi|^2)^{-r\left(1-\frac{1}{2(m-j)}\right)}.$$

e uma aplicação da desigualdade de Young nos fornece

$$\int_{\infty}^{\infty}\tau^{2j}(1+\tau^{2(m-j)}+|\xi|^{2r})\left|(\mathcal{F}f)(\tau,\xi)\right|^2 d\tau \leq \int_{\infty}^{\infty}(1+\tau^{2m}+|\xi|^{2\frac{m}{m-j}r})\left|(\mathcal{F}f)(\tau,\xi)\right|^2 d\tau.$$

Consequentemente,

$$\left|\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(0)\right|^2_{H^{s_j}(\mathbb{R}^N)} \leq C\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{s_j-r\left(1-\frac{1}{2(m-j)}\right)}\left(1+\tau^{2m}+|\xi|^{2\frac{m}{m-j}r}\right)\left|(\mathcal{F}f)(\tau,\xi)\right|^2 d\tau d\xi.$$

Se escolhermos portanto $r\left(1-\frac{1}{2(m-j)}\right) = s_j$ e $\frac{m}{m-j}r = k$, obteremos a almejada injeção contínua para $s_j = \frac{2(m-j)-1}{2m}k$. ////

Notemos que vale a recíproca: se $\alpha_j \in H^{s_j}(\mathbb{R}^N)$ para $j = 0,\ldots,m-1$, existe uma $f \in H^m(\mathbb{R};L^2) \cap L^2(\mathbb{R};H^k)$ tal que $\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(0) = \alpha_j$ no sentido de traços.

Para ver isto, sejam $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ $(j = 0,1,\ldots,m-1)$ tais que para qualquer inteiro $0 \leq j \leq m-1$ tenhamos $\int_{-\infty}^{\infty}(i\tau)^l\varphi_j(\tau)d\tau = 1$, se $l = j$, e $= 0$, caso $l \neq j$. (A existência destas funções vem procede da dimensão infinita de C_c^∞). Definindo $f(t,x) = \sum_{j=0}^{m-1} f_j(t,x)$, onde

$$(\mathcal{F}f_j)(\tau,\xi) = \frac{\widehat{\alpha_j}(\xi)\varphi_j\left(\tau\big/(\sqrt{1+|\xi|^2})^{k/m}\right)}{(\sqrt{1+|\xi|^2})^{(j+1)k/m}},$$

um cálculo direto dá que esta f tem as propriedades desejadas. Construímos desta maneira uma transformação linear e contínua $[\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}] \mapsto f$.

Por fim, apresentaremos um teorema de compacidade à Arzelà-Ascoli.[2]

Teorema A.0.9. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto não-vazio, $0 < T < \infty$ e $s > 0$ e escreva $B = H^1\big((0,T); L^2(\Omega)\big) \cap L^2\big((0,T); H^s(\Omega)\big)$*

Se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $\sigma(B, B^*)$, então $u_n \to u$ fortemente em $L^2\big((0,T); H^{s'}(\omega)\big)$, quaisquer que sejam $0 \le s' < s$ e $\omega \subset\subset \Omega$.

Novamente, quando Ω for per se limitado e de fronteira suave, pode-se tomar $\omega = \Omega$.

Em outras palavras, como B é hilbertiano, as injeções $B \subset L^2\big((0,T); H^{s'}(\omega)\big)$ são compactas.[3]

Demonstração. No espírito da seção 2.4, é fácil ver que $u \in B$ é o mesmo que afirmar que $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ possui s derivadas em x e uma em t. (É suficiente reproduzir do 2.4.2 usando a transformada de Fourier ao invés de diferenças divididas). Dividiremos pois a prova em quatro etapas.

Passo um. Para todos $0 \le s' < s$ e $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C = C(s, s', \Omega, \omega, \varepsilon)$ tal que

$$|v|^2_{H^{s'}(\omega)} \le \varepsilon |v|^2_{H^s(\Omega)} + C|v|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{A.2}$$

seja qual for $v \in H^s(\Omega)$.

Com efeito, primeiro escolha $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\theta = 1$ em ω e ponha $f = \theta v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ (caso $\partial\Omega$ for suave e limitada entretanto, tome f como a extensão obtida por meio do princípio da reflexão). Pela desigualdade de Hölder para $p = s/s'$,

$$\begin{aligned}
|v|^2_{H^{s'}(\omega)} &\le |f|^2_{H^{s'}(\mathbb{R}^N)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^{2s'}) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\le \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^{2s}) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/p} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/p'} \\
&= |f|^{2/p}_{H^s(\mathbb{R}^N)} |f|^{2/p'}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\le C |v|^{2/p}_{H^s(\mathbb{R}^N)} |v|^{2/p'}_{L^2(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

bastando agora aplicar a desigualdade de Young.

Passo dois. Suponha que, além de ser como no enunciado, adicionalmente (u_n) é limitada $L^\infty\big((0,T); H^s\big)$. Mostremos que $u_{n_k}(t) \to u(t)$ uniformemente em $L^2(\omega)$, para todo $\omega \subset\subset \Omega$.

Primeiro fixemos ω e provemos que existe uma subsequência $u_{n_k}(t)$ que converge em $L^2(\omega)$ a uma certa $\widetilde{u}(t)$ para todo $t \in [0,T]$. De fato, há um conjunto enumerável denso $X \subset [0,T]$ sobre o qual podemos falar nos "pontos" $u_n(t)$ e estes satisfazem $\operatorname{Sup}_n |u_n(t)|_{H^s} \le$ const. $< \infty$. Pelo teorema de Rellich-Kondrachov e por um argumento diagonal, podemos extrair $n_1 < n_2 < \ldots$ tais que $u_{n_k}(t) \to \widetilde{u}(t)$, $\forall t \in X$.

Afirmamos que $u_n(t)$ possui limite para todo $0 \le t \le T$. Com efeito, dados $k, l \in \mathbb{N}$, vemos que

$$\begin{aligned}
|u_{n_k}(t) - u_{n_l}(t)|_{L^2(\omega)} &\le |u_{n_k}(t) - u_{n_k}(s)|_{L^2(\omega)} + |u_{n_k}(s) - u_{n_l}(s)|_{L^2(\omega)} + |u_{n_l}(s) - u_{n_l}(t)|_{L^2(\omega)} \\
&\le \left| \int_s^t |\dot{u}_{n_k}(\tau)|_{L^2(\omega)} d\tau \right|_{L^2(\omega)} + |u_{n_k}(s) - u_{n_l}(s)|_{L^2(\omega)} + \left| \int_s^t |\dot{u}_{n_l}(\tau)|_{L^2(\omega)} d\tau \right|_{L^2(\omega)} \\
&\le 2K\sqrt{|t-s|} + |u_{n_k}(s) - u_{n_l}(s)|_{L^2(\omega)},
\end{aligned}$$

onde $K = \operatorname{Sup}_n |u_n|_B < \infty$. Escolhendo $s \in X$, a densidade deste conjunto diz que o limite superior da expressão acima quando $m, n \to \infty$ é ≤ 0.

[2]Este teorema, na verdade, vem a ser um caso particular do chamado lema de Aubin–Lions, cuja demonstração é totalmente análoga.

[3]É claro que inspecionando a demonstração que poderíamos muito bem substituir a hipótese de as $\dot{u}_n$'s serem uniformemente limitadas por uma condição mais branda de eqüicontinuidade.

Verifiquemos agora que esta convergência é uniforme. Uma vez que $|u_{n_k}(t) - u_{n_l}(s)|_{L^2(\omega)} \leq K\sqrt{|t-s|}$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $s, t \in [0, T]$, passando $n \to \infty$ obtemos $|\widetilde{u}(t) - \widetilde{u}(s)|_{L^2(\omega)} \leq K\sqrt{|t-s|}$. Escolha então $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ em $[0, T]$ tais que $2K\sqrt{t_{l+1} - t_l} < \varepsilon/3$, de maneira que para $t_p \leq t \leq t_{p+1}$,

$$\begin{aligned}|\widetilde{u}(t) - u_{n_k}(t)|_{L^2(\omega)} &\leq |\widetilde{u}(t) - \widetilde{u}(t_p)|_{L^2(\omega)} + |\widetilde{u}(t_p) - u_{n_k}(t_p)|_{L^2(\omega)} + |u_{n_k}(t_p) - u_{n_k}(t)|_{L^2(\omega)} \\ &\leq 2\varepsilon/3 + \operatorname*{Sup}_{1 \leq l \leq k} |u(t_l) - u_n(t_l)|_{L^2(\omega)}.\end{aligned}$$

Isto claramente implica que o limite superior de $\mathrm{Sup}_t\, |\widetilde{u}(t) - u_n(t)|_{L^2}$ é $\leq 2\varepsilon/3$, dando a conclusão desejada.

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u$, devemos ter necessariamente que $\widetilde{u} = u$. Como corolário, vemos não era preciso passar à subsequencia u_{n_k} e que esta convergência era válida qualquer que fosse ω.

Passo três. Considerando o caso geral, estabeleçamos que $u_n \to u$ em $L^2(\omega)$ uniformemente.

Observe que pode-se estender funções $f \in B$ para $H^1((0,\infty); L^2) \cap L^2((0,\infty); H^s)$. Esta é mais uma consequência do princípio da reflexão; com efeito, tomando $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\eta(s) = 1$ quando $0 < s < T$ e $\eta(s) = 0$ para $s > 3T/2$, é suficiente pôr

$$Ef(t) = \begin{cases} f(t) & 0 < t < T, \\ \eta(t) f(T - t) & T < t < 2T, \\ 0 & 2T < t \end{cases}$$

(para ver que Ef tem uma derivada em t, use o teorema fundamental do Cálculo). Como esta extensão E é linear e contínua, entenderemos momentaneamente que todos os elementos de B têm como domínio $(0, \infty)$.

Se $\{M_h\}_{h>0}$ é a família de operadores lineares $(M_h f)(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds$ do teorema 2.3.3 (esta integral é a de Bochner em H^s), um cálculo direto diz que

$$|M_h u(t)|_{H^s(\Omega)} \leq K/\sqrt{h}, \quad \forall h > 0, \tag{A.3}$$

$$|M_h u_n(t) - u_n(t)|_{L^2(\Omega)} \leq K\sqrt{h}, \quad \forall h > 0, n \in \mathbb{N}, \tag{A.4}$$

$$|M_h u(t) - u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq K\sqrt{h} \quad \forall h > 0, \tag{A.5}$$

onde novamente $K = \mathrm{Sup}_n\, |u_n|_B$. Em razão de (A.3), os passos dois e três se aplicam a $M_h u_n$ para $h > 0$ fixo, de modo que não é difícil ver que $M_h u_n \to M_h u(t)$ uniformemente em $L^2(\omega)$ para $0 \leq t \leq T$. Pois então, (A.4) e (A.5) afirmam que para todo $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}|u(t) - u_n(t)|_{L^2(\omega)} &\leq |u(t) - M_h u(t)|_{L^2(\omega)} + |M_h u(t) - M_h u_n(t)|_{L^2(\omega)} + |M_h u_n(t) - u_n(t)|_{L^2(\omega)} \\ &\leq 2K\sqrt{h} + |M_h u(t) - M_h u_n(t)|_{L^2(\omega)}.\end{aligned}$$

Portanto, sendo $\varepsilon > 0$ qualquer, tomamos $0 < h < \big(\varepsilon/(2K)\big)^2$, a fim de que $|u(t) - u_n(t)|_{L^2(\omega)} < \varepsilon$ para qualquer $t \in [0, T]$ e para todo n suficientemente grande. Isto finaliza a demonstração deste passo.

Passo quatro. Finalmente demonstraremos a convergência forte em $L^2((0,T); H^{s'}(\omega))$. Para isto, tome $\varepsilon > 0$ e note que, pelo passo um, existe $C > 0$ tal que

$$|u_n - u|^2_{L^2((0,T);H^{s'}(\omega))} \leq \varepsilon |u_n - u|^2_{L^2((0,T);H^s(\omega))} + C|u_n - u|^2_{L^2((0,T);L^2(\omega))}.$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} |u_n - u|^2_{L^2((0,T);H^{s'}(\omega))} \leq 4K^2\varepsilon,$$

o que passando $\varepsilon \to 0$, prova a nossa asserção. ////

I might find myself
Out in the desert's land
Raise the moon, call the dead
Touch the sky, curse the sand

I might leave myself
Out in the desert's land
Like the serpent glides from its skin
With gentle moves on floors of sin

Coroner. "Serpent Moves". *Grin*. Noise Records, 1993. CD.

Referências Bibliográficas

Adams e Fournier(2003) Robert A. Adams e John J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Elsevier, 2ª edição. Citado na pág. 93

Alinhac(2009) Serge Alinhac. *Hyperbolic Partial Differential Equations*. Springer. Citado na pág. 54, 55

Arnold(2003) Vladimir I. Arnold. *Lectures on Partial Differential Equations*. Springer, 2ª edição. Tradução de R. Cooke. Citado na pág. 1

Bergh e Löfström(1976) Jöran Bergh e Jörgen Löfström. *Interpolation Spaces: An Introduction*. Springer. Citado na pág. 26

Bögelein *et al.*(2014) Verena Bögelein, Frank Duzaar e Paolo Marcellini. Existence of evolutionary variational solutions via the calculus of variations. *Journal of Differential Equations*, 256(12):3912–3942. Citado na pág. 73

Bögelein *et al.*(2015a) Verena Bögelein, Frank Duzaar e Paolo Marcellini. A time dependent variational approach to image restoration. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 8(2):968–1006. Citado na pág. 73

Bögelein *et al.*(2015b) Verena Bögelein, Frank Duzaar, Paolo Marcellini e Stefano Signoriello. Nonlocal diffusion equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 432(1):398–428. Citado na pág. 73

Brezis(2011) Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer. Citado na pág. 2, 5, 15, 23, 25, 37, 49, 52, 70, 80, 86, 91

Brezis(1973) Haim Brezis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland. Citado na pág. 7

Cazenave e Haraux(1999) Thierry Cazenave e Alain Haraux. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Clarendon Press. Tradução de Y. Martel. Citado na pág. 7, 80

de Figueiredo(1989) Djairo Guedes de Figueiredo. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*. Springer. Citado na pág. 6

De Giorgi(2006) Ennio De Giorgi. *Selected Papers*. Springer-Verlag. Citado na pág. 4

De Giorgi(1996) Ennio De Giorgi. Conjectures concerning some evolution problems. *Duke Mathematical Journal*, 81:255–268. Citado na pág. 4

Deimling(2010) Klaus Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*. Dover, 2ª edição. Citado na pág. 83

Diestel e Uhl(1977) Joseph Diestel e J. Jerry Uhl. *Vector Measures*. American Mathematical Society. Citado na pág. 10

Dinculeanu(1967) Nicolae Dinculeanu. *Vector Measures*. Pergamon Press. Citado na pág. 10

Ekeland(2006) Ivar Ekeland. *The Best of All Possible Worlds: Mathematics and Destiny*. University of Chicago Press. Citado na pág. 1

Evans(2010) Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2ª edição. Citado na pág. 52, 54, 66

Germain *et al.*(2012) Pierre Germain, Nader Masmoudi e Jalal Shatah. Global solutions for the gravity water waves equation in dimension 3. *Annals of Mathematics*, 175(2):691–754. Citado na pág. 69

Gilbarg e Trudinger(1983) David Gilbarg e Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer. Citado na pág. 94

Grillakis(1990) Manoussos G. Grillakis. Regularity and asymptotic behavior of the wave equation with a critical nonlinearity. *Annals of Mathematics*, 132(3):485–509. Citado na pág. 66

Hörmander(1997) Lars Hörmander. *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*. Springer. Citado na pág. 67

Ilmanen(1994) Tom Ilmanen. *Elliptic Regularization and Partial Regularity for Motion by Mean Curvature*. American Mathematical Society. Citado na pág. 4

John(1994) Fritz John. *Partial Differential Equations*. Springer, 4ª edição. Citado na pág. 2, 54

Liero e Stefanelli(2013) Matthias Liero e Ulisse Stefanelli. A new minimum principle for lagrangian mechanics. *Journal of Nonlinear Science*, 23(2):179–204. Citado na pág. 4

Linares e Ponce(2009) Felipe Linares e Gustavo Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Springer, 2ª edição. Citado na pág. 6, 14

Lions e Magenes(1972) Jacques-Louis Lions e Enrico Magenes. *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, volume 1. Springer. Citado na pág. 6, 23, 93

Majdoub e Masmoudi(2014) Mohamed Majdoub e Nader Masmoudi. On uniqueness for supercritical nonlinear wave and schrödinger equations. *International Mathematics Research Notices*, 2015 (9):2386–2405. Citado na pág. 60, 62, 70

Morawetz e Strauss(1972) Cathleen S. Morawetz e Walter A. Strauss. Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 25:1–31. Citado na pág. 67

Rabinowitz(1986) Paul H. Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. American Mathematical Society. Citado na pág. 2

Royden e Fitzpatrick(2010) Halsey L. Royden e Patrick M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Pearson, 4ª edição. Citado na pág. 12

Rudin(1976) Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 3ª edição. Citado na pág. 8

Rudin(1987) Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3ª edição. Citado na pág. 12

Rudin(1991) Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 2ª edição. Citado na pág. 6, 16, 80

Serra e Tilli(2012) Enrico Serra e Paolo Tilli. Nonlinear wave equations as limits of convex minimization problems: proof of a conjecture by de giorgi. *Annals of Mathematics*, 175(3):1551–1574. Citado na pág. 4, 30

Serra e Tilli(2016) Enrico Serra e Paolo Tilli. A minimization approach to hyperbolic cauchy problems. *Journal of the European Mathematical Society*, 18(9):2019–2044. Citado na pág. 5, 41, 46

Shatah e Struwe(2000) Jalal Shatah e Michael Struwe. *Geometric Wave Equations*. American Mathematical Society, Courant Institute of Mathematical Sciences at New York University. Citado na pág. 3, 52, 55, 56, 60, 61

Stefanelli(2011) Ulisse Stefanelli. The de giorgi conjecture on elliptic regularization. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21:1377–1394. Citado na pág. 4

Strauss(2007) Walter A. Strauss. *Partial Differential Equations*. Wiley, 2ª edição. Citado na pág. 67

Strauss(1990) Walter A. Strauss. *Nonlinear Wave Equations*. American Mathematical Society. Citado na pág. 3, 55, 60, 69

Strauss e Vazquez(1978) Walter A. Strauss e Luis Vazquez. Numerical solution of a nonlinear klein-gordon equation. *Journal of Computational Physics*, 28(2):271–278. Citado na pág. 62

Struwe(2006) Michael Struwe. On uniqueness and stability for supercritical nonlinear wave and schrödinger equations. *International Mathematics Research Notices*. Art. ID 76737, 14 pp. Citado na pág. 70

Tartar(2007) Luc Tartar. *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*. Springer. Citado na pág. 6, 93

Yosida(1980) Kôsaku Yosida. *Functional Analysis*. Springer, 6ª edição. Citado na pág. 7