

**Existência de medidas invariantes absolutamente
contínuas para recobrimentos críticos do círculo com
combinatória Fibonacci generalizada**

André Ribeiro de Resende Alves

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Edson Vargas

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, março de 2017

Agradecimentos

Ao meu irmão Marcelo, Ao meu pai Lúcio, Ao meu orientador Edson, Aos meus amigos em BH e em SP, Meu mais sincero obrigado.

Resumo

Alves, A. R. R. **Existência de medidas invariantes absolutamente contínuas para recobrimentos críticos do círculo com combinatória Fibonacci generalizada**. 2010. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Nesse trabalho estudamos as propriedades dinâmicas de recobrimentos críticos do círculo que possuam grau topológico $d \geq 2$, derivada de Schwarz negativa e cujo ponto crítico possua ordem $1 < \ell \leq 2$. Mais precisamente, estamos interessados em condições sobre a combinatória que nos garantam que tais aplicações possuam medidas invariantes absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue, que chamamos de medidas acip. Como já foi provado que a combinatória de Fibonacci satisfaz esses requisitos, nos concentramos em uma combinatória que chamaremos de Fibonacci generalizada. Provaremos que para um subconjunto importante dessas aplicações temos $Df^{s_n}(c^f)$ tendendo ao infinito, o que é uma condição suficiente para garantir a existência de acips.

Palavras-chave: círculo, aplicações de recobrimento, medida absolutamente contínua.

Abstract

Alves, A. R. R. **Existence of absolutely continuous measures for critical covering maps of the circle with generalized Fibonacci combinatorics.**

Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

We study the dynamical properties of critical covering maps of the circle with topological degree $d \geq 2$, negative Schwarzian derivative and whose critical point has order $1 < \ell \leq 2$. We're especially interested in combinatorial properties that guarantee the existence of absolutely continuous invariant measures (acip) for those functions. Since such a result was already proven for the Fibonacci combinatorics, we concentrate our efforts on a combinatorics we will call generalized Fibonacci. For an important subset of such functions, we will prove that $Df^{s_n}(c^f)$ tends to infinity, which is a sufficient condition to assure the existence of acip measures.

Keywords: circle, covering maps, absolutely continuous measure.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Apresentação do problema | 3 |
| 2.1 | Principal Nest | 4 |
| 3 | Propriedades Topológicas | 6 |
| 3.1 | Atratores Topológicos | 6 |
| 3.2 | Combinatória do elementos de \mathcal{C}_d | 7 |
| 3.2.1 | Sequências de Intervalos Nice | 8 |
| 3.2.2 | Tempos de Primeira Aproximação | 11 |
| 3.2.3 | Sequências Kneading | 12 |
| 3.2.4 | Prova da equivalência das definições | 13 |
| 3.2.5 | Extensão dos Intervalos $f(I_n)$ | 15 |
| 4 | Propriedades Métricas | 16 |
| 4.1 | Derivada de Schwarz | 16 |
| 4.2 | Lemas de Koebe | 18 |
| 4.3 | Teoria da Medida | 21 |
| 4.4 | Medidas Físicas | 22 |
| 4.5 | Atratores Métricos | 24 |
| 5 | Revisão da bibliografia | 28 |
| 5.1 | Homeomorfismos do círculo | 28 |
| 5.2 | Descrição dos Conjuntos Limites | 28 |
| 5.3 | Classes de conjugação | 30 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.4 | Recobrimientos de Grau 2 | 31 |
| 6 | Prova da existência de acip | 35 |
| 6.1 | Introdução | 35 |
| 6.2 | Extensão das vizinhanças do ponto crítico | 35 |
| 6.3 | Derivadas da Órbita Crítica | 40 |
| 6.4 | Crescimento Exponencial da Derivada | 44 |
| 6.5 | Crescimento da Derivada | 48 |
| 6.6 | Crescimento de $Df^n(c^f)$ | 52 |
| | Referências Bibliográficas | 55 |

Capítulo 1

Introdução

Um recobrimento crítico do círculo $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é uma aplicação de recobrimento $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ com um único ponto crítico c ; que deve ser necessariamente um ponto de inflexão. Vamos considerar apenas aplicações cujo grau topológico seja maior ou igual a dois. De acordo com [dMvS93], desde que tais aplicações não possuam intervalos errantes ou atratores periódicos, pode-se garantir que elas são topologicamente conjugadas à aplicação $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ induzida por $x \mapsto dx$. Isso implica que f não apenas possui órbitas densas em \mathbb{S}^1 , mas que o conjunto $\mathcal{B} = \{x : \omega(x) = \mathbb{S}^1\}$ é residual.

Nosso principal objetivo será investigar as propriedades métricas de f . Para tanto, considere a conjugação $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que:

$$f \circ h = h \circ g$$

Desejamos determinar se tais aplicações possuem uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, que chamaremos de acip daqui em diante. Como a medida de Lebesgue é g -invariante, a existência de medidas acip para f depende da regularidade da conjugação h . Obviamente, a existência de um ponto crítico c impede que a conjugação h seja diferenciável. Considere, por outro lado, o conceito de aplicações absolutamente contínuas. Dizemos que uma aplicação $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua caso para todo $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que se tomarmos uma sequência finita de subintervalos disjuntos (x_k, y_k) com $\sum_k |(x_k, y_k)| < \delta$, então $\sum_k |\phi(x_k) - \phi(y_k)| < \epsilon$. Se a conjugação h for absolutamente contínua, então f possui acip.

Outra forma de se provar que uma aplicação do intervalo possui acip é observar o crescimento das derivadas na órbita crítica. O primeiro resultado nessa direção foi obtido em [CE83], no qual provou-se que se existirem constantes $C > 0$ e $\lambda > 1$ tais que:

$$|Df^n(f(c))| \geq C\lambda^n$$

para todo n natural, então f possui medida acip. Posteriormente encontrou-se condições mais fracas para se garantir que aplicações $f : I \rightarrow I$ possuem acip. Em [NvS91], [SSB03] e [SSBRL08], por exemplo, foram estabelecidos diversos critérios alternativos para se garantir a existência de acip. Uma discussão mais aprofundada sobre esses resultados será feita em 4.

Mas qual o papel que a combinatória desempenha na existência (ou não) de acip para determinadas aplicações? No contexto de aplicações unimodais, provou-se em [She06] que tais medidas existem desde que as seguintes medidas sejam satisfeitas:

- Seu ponto crítico deve ser de ordem $1 < \ell \leq 2$.

- Não possuir atratores periódicos.
- As cascatas de retornos centrais devem ser limitadas.

Deve-se destacar que a prova desse resultado utiliza a simetria natural entre as componentes de aplicações unimodais. Tal simetria não existe no caso de recobrimentos críticos, o que faz com que os resultados obtidos nesse contexto sejam bem mais modestos. De fato, o principal resultado que relaciona a existência de acip com propriedades combinatórias de um recobrimento crítico foi obtido em [CdNV09], aonde se prova que recobrimentos críticos com uma combinatória que chamaremos de Fibonacci generalizada também possuem medida acip. A definição formal desse tipo de combinatória encontra-se na seção seguinte.

Capítulo 2

Apresentação do problema

Definimos o círculo \mathbb{S}^1 como o quociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} , com orientação e métrica induzidas pela reta real. Dada a aplicação de recobrimento $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ com $\pi(x) = x \bmod \mathbb{Z}$, observe que π leva o intervalo $(0, 1)$ difeomorficamente em $\mathbb{S}^1 \setminus \{\pi(0)\}$. Dada uma aplicação $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, dizemos que $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de f quando temos:

$$\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi$$

Caso \hat{f} e \hat{g} sejam levantamentos da mesma aplicação $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\hat{f} - \hat{g} = k$. Por outro lado, uma aplicação $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é o levantamento de alguma aplicação do círculo se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\hat{f}(x+1) = \hat{f}(x) + k$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.0.1 Definição. *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ e $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um de seus levantamentos. Dizemos que f possui grau topológico d caso $\hat{f}(x+1) = \hat{f}(x) + d$.*

Podemos estudar a dinâmica de recobrimentos do círculo. Mais especificamente, vamos estudar as propriedades dinâmicas de recobrimentos do círculo que possuem um único ponto crítico, os chamados recobrimentos críticos do círculo. Em seguida definimos o que é ordem de um ponto crítico:

2.0.2 Definição. *Condição de Ordem do Ponto Crítico*

Dado um recobrimento crítico do círculo f dizemos que seu ponto crítico c possui ordem ℓ caso existam:

- uma constante $\vartheta > 0$
- uma aplicação $\psi : I_0 \rightarrow I_0$ de classe C^1 com $\lim_{x \rightarrow c} \psi(x) = 0$
- uma vizinhança V de c

tais que:

$$f(x) = f(c) + \vartheta \operatorname{sgn}(x - c) |x - c|^\ell (1 + \psi(x)) \quad (2.1)$$

para todo $x \in V$

2.0.3 Definição. *Seja \mathcal{C}_d o conjunto de recobrimentos críticos do círculo f de classe C^1 e grau topológico $d \geq 2$ que apresentam as seguintes propriedades:*

- O ponto crítico c é recorrente e não periódico.

- O ponto crítico c possui ordem $\ell > 1$.
- Restrito a $\mathbb{S}^1 \setminus \{c\}$, a aplicação f possui classe C^3 e derivada de Schwarz negativa.

Quando não existe ℓ que satisfaça 2.0.2, dizemos que c é um ponto crítico flat.

Antes de prosseguir, é importante explicar a razão de restringirmos nossa atenção a aplicações pertencentes ao conjunto \mathcal{C}_d . A primeira condição que exigimos na definição de \mathcal{C}_d é que o ponto crítico c seja recorrente. Essa condição se justifica pois o comportamento dinâmico de aplicações do intervalo cujos pontos críticos são não recorrentes, as chamadas aplicações de Misiurewicz, é bem compreendido. No trabalho de [Mis81], posteriormente estendido em [Str90], provou-se o seguinte teorema:

2.0.4 Teorema. *Seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação que satisfaça as seguintes condições:*

1. f é de classe C^2 e todos os seus pontos críticos são não flat.
2. todos os pontos periódicos de f são repulsores hiperbólicos.
3. a órbita positiva de qualquer ponto crítico de f não se acumula em nenhum ponto crítico de f . Ou seja: se c_1 e c_2 são pontos críticos de f , temos $c_1, c_2 \notin \omega(c_1), \omega(c_2)$.

Então f possui uma medida de probabilidade invariante absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

Daqui por diante, vamos nos referir a medidas de probabilidade invariantes absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue simplesmente como acip, às quais estudaremos com mais detalhes quando tratarmos dos aspectos métricos da dinâmica em dimensão um. Quanto à definição de acip, basta dizer que uma medida μ é f -invariante caso se tenha:

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

para qualquer conjunto mensurável A . Por outro lado, dizemos que uma medida μ_1 é absolutamente contínua em relação à μ_2 caso $\mu_2(A) = 0$ implique $\mu_1(A) = 0$.

2.1 Principal Nest

Seja $f \in \mathcal{C}_d$. Definimos $I_0 = (0, 1)$ e I_1 como a componente de f tal que $c \in I_1$. Como o ponto crítico c é recorrente e não periódico, podemos definir indutivamente I_n como a componente da aplicação de primeiro retorno \mathcal{R}_n do intervalo I_{n-1} tal que $c \in I_n$. Dessa forma obtemos uma sequência de intervalos:

$$I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots \supset \{c\}$$

Essa sequência de intervalos é chamada de principal nest de f .

Usando a principal nest de f e suas respectivas aplicações de primeiro retorno, definiremos agora as combinatórias de Fibonacci e Fibonacci generalizada.

2.1.1 Definição. *Dizemos que uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$ possui combinatória de Fibonacci generalizada caso exista uma sequência $k_n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\mathcal{R}_{n+1}|_{I_{n+1}} = (\mathcal{R}_{n-1}|_{I_{n-1}})^{k_{n-1}} \circ \mathcal{R}_n|_{I_n}$$

2.1.2 Definição. Dizemos que uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$ possui combinatória de Fibonacci caso se verifique a seguinte condição:

$$\tilde{\mathcal{R}}_{n+1}|_{I_{n+1}} = \mathcal{R}_{n-1}|_{I_{n-1}} \circ \mathcal{R}_n|_{I_n}$$

Defina s_n tal que $\mathcal{R}_n|_{I_n} = f^{s_n}$. Se f possui combinatória de Fibonacci, temos que $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$, o que implica que a sequência s_n é a própria sequência de Fibonacci. Por outro lado, se f possui combinatória de Fibonacci generalizada, temos que $s_{n+1} = s_n + k_{n-1}s_{n-1}$.

Finalmente estamos prontos para enunciar nosso principal resultado:

2.1.3 Teorema. *Seja $f \in \mathcal{C}_d$ uma aplicação com combinatória de fibonacci generalizada e $k_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então f possui medida acip.*

Capítulo 3

Propriedades Topológicas

3.1 Atratores Topológicos

Nesse capítulo apresentamos as propriedades topológicas das aplicações $f \in \mathcal{C}_d$; ou seja, as propriedades que são preservadas quando duas aplicações são topologicamente conjugadas. Um resultado provado inicialmente em [Shu69] por Shub garante que toda aplicação $f \in \mathcal{C}_d$ é semi-conjugada à aplicação:

$$g(x) = dx \pmod{1}$$

Denotando essa semi-conjugação por ψ :

$$\psi \circ f = g \circ \psi$$

Se ψ for injetiva, as aplicações f e g são topologicamente conjugadas. Por outro lado, $\psi^{-1}(x)$ pode ser, para algum $x \in [0, 1]$, um intervalo errante ou uma componente da bacia de atração de uma órbita periódica atratora. Mas foi provado em [dMvS93] que aplicações $f \in \mathcal{C}_d$ não possuem intervalos errantes. Isso implica que, caso tais aplicações não tenham atratores periódicos, serão conjugadas às aplicações do tipo $g(x) = dx \pmod{1}$. Levando-se em conta que para todo ponto não periódico x de g temos $\omega_g(x) = [0, 1]$, podemos nos perguntar aonde se acumulam os pontos de $[0, 1]$ quando iterados por uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$. Para responder essa pergunta, considere a definição a seguir:

3.1.1 Definição. Um conjunto A é dito um atrator topológico caso as seguintes propriedades se verifiquem:

1. A bacia de atração de A , definida como $\mathcal{B}(A) = \{x; \omega(x) \subset A\}$, é um conjunto residual em $[0, 1]$ (ou em algum de seus abertos).
2. Para todo conjunto compacto invariante $B \subset A$ com $B \neq A$; tem-se que $\mathcal{B}(B) \setminus \mathcal{B}(A)$ é residual em $[0, 1]$ (ou em algum de seus abertos).

Munidos dessa definição estamos preparados para descrever os conjuntos limites da "maioria" dos pontos de $[0, 1]$. Nesse caso, como estamos interessados em atratores topológicos, a "maioria" se refere a um conjunto residual. No teorema a seguir elenca os possíveis atratores topológicos de aplicações $f \in \mathcal{C}_d$:

3.1.2 Teorema. Se A é um atrator topológico de uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$, então vale uma das seguintes propriedades:

- A é uma órbita periódica atratora
- A é o intervalo $[0, 1]$

Provou-se em [dMvS93] que, caso existam, os pontos periódicos de qualquer recobrimento do círculo têm período limitado. Caso f possua derivada de Schwarz negativa, toda órbita periódica atratora deve necessariamente ao menos um de seus pontos críticos. Isso implica que qualquer aplicação $f \in \mathcal{C}_d$ possui no máximo uma órbita periódica atratora.

Para efeito de comparação, apresentamos agora a classificação dos atratores topológicos de aplicações unimodais:

3.1.3 Teorema. (Atratores Topológicos)

Seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação unimodal, de classe C^2 e cujo ponto crítico c é não flat. Se A é um atrator topológico de f , uma das seguintes propriedades se verifica:

- A é uma órbita periódica
- A , é um conjunto de Cantor minimal que contém c .
- A é uma união finita de intervalos contendo um ponto crítico de c . Nesse caso, f age como uma aplicação topologicamente transitiva nesses intervalos.

Ademais, o número de atratores periódicos é finito.

Comparando-se os atratores topológicos de aplicações unimodais com os de recobrimentos do círculo, verifica-se que a principal diferença é que atratores solenoidais podem ocorrer em aplicações unimodais. Lembrando que o conjunto $\omega(c)$ é solenoidal caso existam uma sequência de intervalos

$$I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots \supset \{c\}$$

e inteiros s_n tais que:

- Os conjuntos $I_n, f(I_n), \dots, f^{s_n-1}(I_n)$ têm interiores dois a dois disjuntos.
- $f^{s_n}(I_n) \subset I_n$.

Nesse caso o conjunto $\Lambda = \omega(c) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k=0}^{s_n-1} f^k(I_n)$ é um conjunto de Cantor, de medida de Lebesgue zero. Tais aplicações são chamadas infinitamente renormalizáveis.

No caso específico em que f é uma aplicação unimodal com derivada de Schwarz negativa, o teorema 3.1.3 foi provado inicialmente em [Guc79]. O principal obstáculo para se provar teoremas semelhantes é a possível existência de intervalos errantes. Em [Yoc84], [WdM89], [BL] e [MMvS92] provou-se, com crescente grau de generalidade, que aplicações reais analíticas do intervalo (ou do círculo) não possuem intervalos errantes, o que permitiu generalizar 3.1.3 a essa classe de aplicações.

3.2 Combinatória do elementos de \mathcal{C}_d

Por comodidade vamos nos referir ao valor crítico $f(c)$ como c^f . Da mesma forma, definimos $c_n = f^n(c)$ para qualquer n natural. Observe que essa notação será usada a partir de agora ao longo de todo o texto.

3.2.1 Sequências de Intervalos Nice

Assim como no caso de aplicações unimodais, um intervalo (a, b) é chamado nice caso $f^i(a), f^i(b) \notin (a, b)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Nos próximos lemas apresentamos algumas propriedades especiais de intervalos nice que contenham o ponto crítico c :

3.2.1 Lema. *Sejam $f \in \mathcal{C}_d$ e U um intervalo nice que contenha o ponto crítico c . Se $\mathcal{R}_U : D_u \rightarrow U$ é a aplicação de primeiro retorno de U e J uma de suas componentes conexas, então:*

1. $\mathcal{R}_U(J) = U$
2. J é um intervalo nice
3. Se $c \in J$, então $\mathcal{R}_U|_J = L \circ f$, onde L é um difeomorfismo.
4. Se $c \notin J$, então a própria aplicação $\mathcal{R}_U|_J$ é um difeomorfismo.

Demonstração. (1)

A prova se dá por contradição. Suponha que $\mathcal{R}_U(J) \neq U$. Como J é componente conexa de \mathcal{R}_U , temos que $\mathcal{R}_U|_J = f^s$ para algum $s \in \mathbb{N}$. Já o fato de $\mathcal{R}_U(J) \neq U$ implica que existe $x \in \partial J$ tal que $f^s(x) \in \text{int } U$.

Nesse caso existe um intervalo $T \ni x$ de forma que $\mathcal{R}_U|_T = f^{s_1}$ com $s_1 < s$ e $f^{s_1}(x) \in \partial U$. Mas isso contraria a hipótese de U ser intervalo nice, pois teríamos $f^{s-s_1}(a) \in \text{int } U$ para algum ponto $a \in \partial U$.

(2)

Seja $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{R}_U|_J = f^s$. Pelo item anterior temos que $f^s(J) = U$. Por \mathcal{R}_U ser uma aplicação de primeiro retorno, concluímos que $f^j(x) \notin \text{int } U$ para quaisquer $1 \leq j < s$ e $x \in \partial J$. Por outro lado, pontos do bordo de J são levados por f^s em pontos do bordo de U . E por U ser nice, concluímos que $f^n(x) \notin U$ para todo $x \in \partial J$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(3)

Como J é uma componente de \mathcal{R}_U , existe $s \in \mathbb{N}$ para o qual:

$$\mathcal{R}_U|_J = f^s$$

O fato de \mathcal{R}_U ser uma aplicação de primeiro retorno nos permite concluir que:

$$f^i(J) \cap U = \emptyset$$

para todo $i = 1, \dots, s-1$.

Como $c \in U$ é o único ponto crítico de f , temos que $f^{s-1}|_{f(J)}$ é um difeomorfismo em sua imagem.

(4) A prova é idêntica à do item anterior. □

Considere agora uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$. Se p é um ponto fixo de f , tomamos o intervalo $I_0 = \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$. Por comodidade, identificamos I_0 com o intervalo $(0, 1)$. Definimos também I_1 como a componente de f que contém o ponto crítico c . Para $n \geq 2$, definimos indutivamente I_{n+1} como a componente da aplicação de primeiro retorno em I_n que contenha o ponto crítico c .

Observe que essa construção, que só é possível por c ser recorrente e não periódico, nos fornece uma sequência de intervalos nice $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset \{c\}$. Como todos os intervalos I_n são nice e contém o ponto crítico, vale o lema 3.2.1. Antes de discutir propriedades

combinatórias das aplicações $f \in \mathcal{C}_d$ vamos introduzir os seguintes conceitos: chamaremos \mathcal{R}_{I_n} simplesmente por \mathcal{R}_n e definimos os tempos de retorno crítico como $s_n = R_{n-1}|_{I_n}$. Também chamamos de ramo pós-crítico a componente M_{n+1} de \mathcal{R}_n tal que $\mathcal{R}_n(c) \in M_{n+1}$, enquanto a componente J de \mathcal{R}_n tal que $\mathcal{R}_n|_J = \mathcal{R}_{n-1}|_J$ é chamada de ramo imediato.

3.2.2 Definição. Retornos Centrais

Dizemos que uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$ possui retorno central na etapa n caso $f^{s_n}(c) \in I_n$.

Observe que $f^{s_n}(c)$ pertence necessariamente a I_{n-1} , enquanto $f^{s_n}(c) \in I_n$ indica uma recorrência forte do ponto crítico no período n . É importante lembrar que em [Bru98a] foram obtidas aplicações unimodais para as quais $\omega(c)$ é um conjunto de intervalos, porém não possuem acip. Tais aplicações possuem retornos centrais em diversas etapas consecutivas, o que garante que a medida invariante absolutamente contínua obtida seja infinita.

3.2.3 Definição. Combinatória de Fibonacci

Dizemos que uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$ possui combinatória de Fibonacci caso sua sequência de tempos de retorno crítico seja a sequência de Fibonacci. Ou seja, devemos ter:

$$s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$$

para todo $n \geq 2$.

O lema a seguir nos fornece algumas características da combinatória de Fibonacci:

3.2.4 Lema. *Se $f \in \mathcal{C}_d$ possuir combinatória de Fibonacci, valem as seguintes propriedades:*

1. *O ramo pós crítico de \mathcal{R}_n é também seu ramo imediato, para todo n natural. Mais especificamente, temos $\mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_{n-1} \circ \mathcal{R}_n$.*
2. *Dois domínios pós-críticos consecutivos M_n e M_{n+1} encontram-se de lados opostos de c e dentro de I_0*

Demonstração. Dado que $f^{s_n}|_{I_n} : I_n \rightarrow I_{n-1}$ é um homeomorfismo, \mathcal{R}_n possui um único ramo imediato. Observe que R_0 possui exatamente d componentes e que R_0 restrita a cada uma delas é f . Quanto a \mathcal{R}_1 , temos $\mathcal{R}_1|_{I_2} = f^{s_2} = f^2$ e $\mathcal{R}_1|_J = f$, onde J é o ramo imediato de R_1 . Ademais, o tempo de retorno de qualquer ramo que não seja o imediato é sempre maior ou igual a dois. Como $s_3 = s_2 + s_1 = 3$, temos que o ramo pós-crítico de R_1 deverá ser necessariamente seu ramo imediato, o que implica que:

$$\mathcal{R}_2|_{I_3} = \mathcal{R}_0|_{I_1} \circ \mathcal{R}_1|_{I_2}$$

Procedemos por indução. Assuma que o ramo imediato de \mathcal{R}_{n-1} possua tempo de retorno igual a s_{n-1} . Assuma também que todos os outros ramos possuam tempo de retorno superior a s_n . Então, como $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$, concluímos que o ramo pós crítico de \mathcal{R}_{n-1} é seu ramo imediato. Ademais, excetuando-se os ramos crítico e central, todos os ramos de \mathcal{R}_n terão tempo de retorno igual ou superior a $2s_{n-1}$, o que termina a prova.

Já segunda afirmativa é consequência dos ramos de \mathcal{R}_n preservarem orientação e dos ramos pós-críticos serem os ramos imediatos. \square

Como veremos na proposição a seguir, a combinatória de Fibonacci apresenta uma forte recorrência do ponto crítico.

3.2.5 Proposição. *Se $g \in \mathcal{C}_d$ possui uma sequência de tempos de retorno crítico s_n menor (com relação à ordem lexicográfica) que a sequência de Fibonacci, então g possui ao menos um retorno central.*

Demonstração. Sejam s_n é a sequência dos tempos de retorno crítico de g e q_n a sequência de Fibonacci. Como a sequência s_n é diferente de q_n , podemos tomar i o menor natural para o qual $s_i \neq q_i$. Obviamente temos $s_i < q_i$ e, pela definição de i , $s_{i-1} = q_{i-1}$. Como vimos no lema 3.2.4, o ramo de \mathcal{R}_{n-2} com menor tempo de retorno é o ramo imediato. Assim, temos que $s_i = s_{i-1}$ o que significa que g possui de fato retornos centrais. \square

Dessa forma, excluindo-se o caso em que há retornos centrais, fica claro que a combinatória de Fibonacci apresenta a recorrência mais forte do ponto crítico. Como a incidência de retornos centrais pode ser uma obstrução à existência de uma medida acip, pode-se perguntar se existe alguma relação entre a combinatória de Fibonacci e a existência de medida acip. Isso foi feito em [CdNV09], onde provou-se o seguinte teorema:

3.2.6 Teorema. *Seja $f \in \mathcal{C}_d$ uma aplicação com combinatória de Fibonacci e cujo ponto crítico é de ordem $\ell \in (1, 2]$. Então f necessariamente possui medida acip.*

Um possível próximo passo seria estender esse resultado para outras combinatórias. Nesse sentido, definiremos uma combinatória que é uma generalização da combinatória de Fibonacci.

3.2.7 Definição. *Combinatória de Fibonacci Generalizada Dizemos que uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$ possui combinatória de Fibonacci generalizada caso sejam satisfeitas as seguintes condições:*

1. Para todo $n \geq 3$ existe $k_{n-1} \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$s_{n+1} = s_n + k_{n-1}s_{n-1}$$

2. Caso k_{n-1} seja maior que um, temos que $c_{s_n+is_{n-1}} \in I_{n-1}$ para todo $0 \leq i \leq k_{n-1} - 1$.

O lema a seguir caracteriza a combinatória de Fibonacci generalizada:

3.2.8 Lema. *Se $f \in \mathcal{C}_d$ possuir combinatória de Fibonacci generalizada, valem as seguintes propriedades:*

1. O ramo pós crítico de \mathcal{R}_n é também seu ramo imediato, para todo n natural. Mais especificamente, temos $\mathcal{R}_{n+1} = (\mathcal{R}_{n-1})^{k_{n-1}} \circ \mathcal{R}_n$.
2. Dois domínios pós-críticos consecutivos M_n e M_{n+1} encontram-se de lados opostos de c e dentro de I_0 .
3. Se k_{n-1} é maior que um, temos que $c_{s_n+is_{n-1}} \in (c, c_{s_n+(i-1)s_{n-1}})$ para todo $1 \leq i \leq k_{n-1} - 1$. Ademais, temos $c_{s_n+is_{n-1}} \in M_n$ para todo $1 \leq i \leq k_{n-1} - 1$.

Demonstração. Assim como na combinatória de Fibonacci, o fato das aplicações $\mathcal{R}_{n-1}|_{I_n} : I_n \rightarrow I_{n-1}$ serem homeomorfismos implica que existe apenas um ramo imediato para todo $n \geq 1$. Considere a aplicação de primeiro retorno \mathcal{R}_1 . A única componente de \mathcal{R}_1 que possui tempo de retorno um é seu ramo imediato. Como $s_3 = s_2 + k_1s_1$ e todos os pontos $c_{s_2+is_1}$,

com $i = 0, 1, \dots, k_1 - 1$, devem pertencer a I_1 , concluímos que o ramo pós crítico M_1 deve ser obrigatoriamente o ramo imediato. Ademais, os pontos $c_{s_2+is_1}$ com $0 \leq i \leq k_1 - 1$ devem todos pertencer a M_1 .

Procedemos, mais uma vez por indução. Suponha que o ramo imediato de \mathcal{R}_{n-1} possui tempo de retorno s_{n-1} . Suponha também que todos os outros ramos possuem tempos de retorno estritamente maiores que s_{n-1} . Usando as propriedades da combinatória de Fibonacci generalizada, temos que $c_{s_{n+1}} = s_n + k_{n-1}s_{n-1}$ para algum $k_{n-1} \in \mathbb{N}$ e $c_{s_n+is_{n-1}} \in I_{n-1}$ para todo $0 \leq i \leq k_{n-1} - 1$. Isso implica que o ramo pós-crítico M_n tenha de ser o ramo imediato e que todos os pontos $c_{s_n+is_{n-1}}$ com $0 \leq i \leq k_{n-1} - 1$ pertencem a M_n , o que implica que:

$$\mathcal{R}_n|_{I_{n+1}} = (\mathcal{R}_{n-2}|_{I_{n-1}})^{k_{n-1}} \circ \mathcal{R}_n|_{I_n}$$

Finalmente, concluímos que qualquer componente de \mathcal{R}_n com exceção do ramo imediato possui tempo de retorno superior a s_n , o que termina a prova da primeira afirmativa.

A segunda afirmativa, assim como no caso Fibonacci, é consequência dos ramos de \mathcal{R}_n preservarem orientação e dos ramos pós-críticos serem os ramos imediatos.

Já a terceira é consequência de $c_{s_n} \in (c, p)$, onde p é o ponto fixo repulsor de $\mathcal{R}_{n-1}|_{M_n}$. \square

O lema 3.2.8 mostra o quão semelhantes são as combinatórias de Fibonacci e Fibonacci generalizada. Em ambas o ramo pós crítico coincide com o ramo imediato.

3.2.2 Tempos de Primeira Aproximação

Outra forma de caracterizar a combinatória das aplicações $f \in \mathcal{C}_d$ é através dos tempos de primeira aproximação, cuja definição daremos a seguir. Definimos $v_1 = 1$ e o intervalo $U_1 = (0, c_1)$. Observe que $c \in U_1$, visto que $c_1 = f(c) > c$. Tomamos v_2 como sendo o menor natural para o qual $c_{v_2} \in U_1$. Em seguida definimos:

$$U_2 = \begin{cases} (0, c_{v_2}), & \text{se } c_{v_2} \in (c, c^1) \\ (c_{v_2}, c_1), & \text{se } c_{v_2} \in (0, c) \end{cases}$$

Vamos agora definir indutivamente tantos os tempos v_m quanto os intervalos U_m . Suponha agora que os intervalos U_i e os inteiros v_i estejam definidos para $1 \leq i \leq m$, de forma que v_i é o menor natural para o qual $c_{v_i} \in U_{i-1}$. Por conveniência, adotaremos a notação $U_i = (c_{v_i}, c_{v_i}^*)$. Definimos v_{m+1} como o menor natural para o qual $c_{v_{m+1}} \in U_m$. Em seguida, definimos U_{m+1} de forma que:

$$U_{m+1} = \begin{cases} (c_{v_{m+1}}, c_{v_m}^*), & \text{se } c_{v_{m+1}} \in (c_{v_m}, c) \\ (c_{v_m}, c_{v_{m+1}}), & \text{se } c_{v_{m+1}} \in (c, c_{v_m}^*) \end{cases}$$

Por fim, definimos $U_{m+1} = (c_{v_{m+1}}, c_{v_{m+1}}^*)$. Chamamos os elementos da sequência v_m que acabamos de definir de tempos de primeira aproximação. São tempos nos quais os iterados do ponto crítico c retornam próximos ao próprio ponto crítico.

Usaremos essa definição para definir a combinatória de Fibonacci generalizada. Para tanto será necessário definir uma subsequência s_n dos tempos de primeira aproximação v_m , assim como uma sequência de inteiros k_n .

Definimos $s_1 = 1$. Já s_2 será o primeiro natural para o qual $c_{s_2} < c$. Se $s_2 = s_1 + k_0$, então todos os tempos $s_1 + i$, com $i = 0, \dots, k_0$ serão tempos de primeira aproximação. Quanto a s_3 e k_1 , definimos k_1 como o maior natural para o qual todos os tempos da forma $s_2 + is_1$, com $i = 1, \dots, k_1$ sejam tempos de primeira aproximação. Definimos então $s_3 = s_2 + k_1s_1$.

Procedemos por indução. Suponha que os primeiros j termos da sequência s_n estejam definidos, assim como os primeiros $j-2$ termos da sequência k_n . Nosso objetivo será determinar tanto s_{j+1} quanto k_{j-1} . Definimos então k_{j-1} como o maior natural para o qual

- $s_j + is_{j-1}$, com $i = 0, \dots, k_{j-1}$, são tempos de primeira aproximação de f .
- Para $i = 1, \dots, k_{j-1}$, não existe nenhum tempo de primeira aproximação entre $s_j + (i-1)s_{j-1}$ e $s_j + is_{j-1}$.

Definimos então $s_{j+1} = s_j + k_{j-1}s_{j-1}$. Observe que a sequência s_n é a sequência de Fibonacci caso $k_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso os tempos de primeira aproximação coincidem com os tempos da sequência de Fibonacci.

3.2.3 Sequências Kneading

Outra forma de se definir a combinatória de uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$ é usando sua sequência kneading, que definiremos a seguir. Considere as aplicações:

$$I_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f^j(x) \in (0, c), \\ 0, 5, & \text{se } f^j(x) = c, \\ 1, & \text{se } f^j(x) \in (c, 1). \end{cases}$$

Usando essas funções, definimos o itinerário de um ponto $x \in (0, 1)$ como a sequência:

$$i(x) = (I_0(x), I_1(x), I_2(x), I_3(x), \dots)$$

Já a sequência de kneading é o itinerário do ponto crítico c , ou seja:

$$\mathcal{K}_f = i(f(c))$$

Vamos definir indutivamente a sequência kneading de aplicações como combinatória Fibonacci e Fibonacci generalizada. Para tanto precisaremos da seguinte definição:

3.2.9 Definição. *Considere um vetor $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ cujas entradas sejam zeros ou uns. Definimos o vetor $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$ de forma que $\bar{u}_i = u_i$ para $i = 1, \dots, n-1$ enquanto:*

$$\bar{u}_n = \begin{cases} 0, & \text{se } u_n = 1, \\ 1, & \text{se } u_n = 0. \end{cases}$$

Dada a sequência kneading \mathcal{K}_f , definimos o vetor \mathcal{K}_f^n composto pelas n primeiras entradas de \mathcal{K}_f . Vamos definir agora a relação recursiva que define as sequências kneading de aplicações como combinatória Fibonacci generalizada. Tome $s_1 = 1$ e $\mathcal{K}_f^1 = 1$. Definimos $s_2 \in \mathbb{N}$ tal que

3.2.10 Definição. *Dizemos que uma aplicação f possui combinatória de Fibonacci generalizada caso existam sequências s_i e k_i tais que:*

- $s_1 = 1$
- s_2 é tal que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{K}_f^{s_2} = (\mathcal{K}_f^1)^{k_0-1} \bar{\mathcal{K}}_f^1$
- Definimos $s_3, k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{K}_f^{s_3} = \mathcal{K}_f^{s_2} (\bar{\mathcal{K}}_f^1)^{k_1-1} \mathcal{K}_f^1$

- Finalmente, para $n \geq 3$ definimos $\mathcal{K}_f^{s_n} = \mathcal{K}_f^{s_{n-1}} \left(\overline{\mathcal{K}_f}^{n-2} \right)^{k_{n-2}-1} \mathcal{K}_f^{n-2}$

Pela definição que acabamos de fornecer, é fácil constatar que c_{s_1} e c_{s_2} encontram-se em lados opostos de c . Ademais, temos que:

$$I_0(c_{s_n}) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isso implica que, para todo n natural, os pontos c_{s_n} e $c_{s_{n+1}}$ encontram-se em lados opostos do ponto crítico.

Observe também que os tempos s_n são definidos indutivamente, utilizando-se a fórmula:

$$s_{n+1} = s_n + k_{n-1}s_{n-1}$$

Por outro lado, a combinatória de Fibonacci é o caso particular da Fibonacci generalizada para o qual $k_n = 1$ para todo n natural. Nesse caso teríamos $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$.

3.2.4 Prova da equivalência das definições

Provaremos aqui que as três definições das combinatórias de Fibonacci e Fibonacci generalizada que acabamos de apresentar são equivalentes. Para tanto, vamos considerar as definições que temos para combinatória de Fibonacci generalizada:

1. Caracterização da combinatória de Fibonacci generalizada por intervalos nice.
2. Caracterização da combinatória de Fibonacci generalizada por tempos de primeira aproximação.
3. Caracterização da combinatória de Fibonacci generalizada por suas sequências Kneading

Demonstração. Prova da equivalência das definições

$$(1) \Rightarrow (2)$$

A prova dessa implicação é imediata. Basta observar as posições relativas dos pontos da órbita crítica, como foi feito em 3.2.8.

$$(2) \Rightarrow (1)$$

Seja $I \ni c$ um intervalo tal que $f(I) = (0, 1)$ e defina a principal nest:

$$I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots \supset \{c\}$$

da mesma forma que fizemos em na definição de (1). Observe que como o intervalo I não é necessariamente o mesmo de (1).

Por definição temos que $f^{s_1} = f$ é a aplicação de primeiro retorno de c em $(0, 1)$. Ademais, s_2 é o tempo de primeira aproximação de c em I_1 . Vamos proceder agora ppor indução para provar que s_n é o tempo de primeira aproximação de c em I_{n-1} .

Suponha que s_k é o tempo de primeiro retorno de c em I_{k-1} para $k \leq n$. Pela definição de combinatória de Fibonacci generalizada por termos de primeira aproximação, existe k_{n-1}

maximal tal que $s_n + i s_{n-1}$ com $i = 0, \dots, k_{n-1}$ são os únicos tempos de primeira aproximação entre s_n e $s_n + k_{n-1} s_{n-1}$. Isso implica que

$$c_{s_n + i s_{n-1}} \in M_n$$

para $i = 0, \dots, k_{n-1} - 1$. Quanto à localização de $c_{s_{n+1}}$, observe que pela definição da combinatória Fibonacci generalizada por tempos de primeira aproximação, temos que o próximo tempo de primeira aproximação será $s_{n+1} + s_n$, o que implica que $c_{s_{n+1}} \in M_{n+1} \subset I_n$, o que termina a prova.

Considere a aplicação de primeiro retorno \mathcal{R}_n de I_{n-1} e seu ramo central, I_n , assim como seu ramo imediato, M_n . Seguindo a mesma notação da caracterização por intervalos nice, temos que $\mathcal{R}_n|_{I_n} = f^{s_n}$ e, pela definição de M_n , temos $\mathcal{R}_n|_{M_n} = f^{s_{n-1}}$. Obviamente $c_{s_n} \in I_{n-1}$. Também pela definição (2), temos que existe k_{n-1} tal que os tempos $s_n + i s_{n-1}$, com $i = 0, \dots, k_{n-1} - 1$, são todos tempos de primeira aproximação. Observe agora que o único domínio de \mathcal{R}_n cujo tempo de retorno é s_{n-1} é o intervalo M_n e que s_{n-1} é o menor tempo de retorno ao intervalo I_{n-1} . Dessa forma temos que $c_{s_n + i s_{n-1}} \in M_n$ para $i = 0, \dots, k_{n-1} - 1$.

Por fim observe que $s_{n+1} = s_n + k_{n-1} s_{n-1}$ também é um tempo de primeira aproximação, assim como $s_{n+1} + s_n$. Ademais temos que $c \in (c_{s_n + (k_{n-1}-1)s_{n-1}}, c_{s_{n+1}})$. Isso implica que $c_{s_{n+1}} \in I_n$ e também que as definições de s_{n+1} de (1) e (2) coincidem, o que termina a prova da afirmação.

$$(1) \Rightarrow (3)$$

A prova dessa afirmação é imediata. Basta observar que todas as aplicações $\mathcal{R}|_{M_n}$ tem associadas a si dois vetores u e \bar{u} . Qualquer ponto x cuja órbita adentre M_n terá u ou \bar{u} como segmento de seu itinerário, sendo que a única diferença entre os dois vetores é sua última entrada.

$$(3) \Rightarrow (1)$$

Suponha que f possui combinatória de Fibonacci generalizada definida por sequências Kneading. Devemos mais uma vez provar que f possui as propriedades descritas em (1). Para tanto, definimos uma principal nest:

$$I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots \supset \{c\}$$

Obviamente $f = f^{s_1}$ é a aplicação de primeiro retorno no intervalo $I_0 = (0, 1)$. Provaremos agora, por indução, que $\mathcal{R}_{n+1}|_{I_{n+1}} = f^{s_{n+1}}$. Suponha que $\mathcal{R}_n|_{I_n} = f^{s_n}$ e $\mathcal{R}_{n-1}|_{I_{n-1}} = f^{s_{n-1}}$. Pela definição da combinatória Fibonacci generalizada pelas sequências kneading, temos:

$$\mathcal{K}_f^{s_{n+1}} = \mathcal{K}_f^{s_n} (\overline{\mathcal{K}_f^{s_{n-1}}})^{k_{n-1}-1} \mathcal{K}_f^{s_{n-1}}$$

Como $\overline{\mathcal{K}_f^{s_{n-1}}}$ e $\mathcal{K}_f^{s_{n-1}}$ são os dois segmentos da sequência kneading associados a $\mathcal{R}_n|_{I_n}$, temos que:

$$c_{s_n + i s_{n-1}} \in M_n$$

para $i = 0, \dots, k_{n-1} - 1$. Resta apenas provar que $f^{s_{n+1}}(c) \in I_n$. Mas isso segue diretamente das propriedades de nossa sequência kneading, visto que:

$$\mathcal{K}_f^{s_{n+1} + s_n} = \mathcal{K}_f^{s_{n+1}} \mathcal{K}_f^{s_n}$$

Isso implica que $c_{s_{n+1}} \in I_n$, ou seja, $\mathcal{R}_{n+1}|_{I_{n+1}} = f^{s_{n+1}}$ como queríamos demonstrar. \square

3.2.5 Extensão dos Intervalos $f(I_n)$

Apresentaremos aqui dois teoremas que nos permitirão decompor

$$f^{s_n}|_{I_n} = f^{s_n-1}|_{f(I_n)} \circ f|_{I_n}$$

onde $f^{s_n-1}|_{f(I_n)}$ é um difeomorfismo com distorção limitada enquanto $f|_{I_n}$, como já vimos, possui c como seu único ponto crítico.

3.2.11 Teorema. (*Real Bounds*) *Seja $f \in \mathcal{C}_d$. Se I_n é a sequência de intervalos nice obtida à partir de 3.2.1, existe $\alpha = \alpha(\ell) > 0$ tal que I_{n+1} está α -bem dentro de I_n desde que $n-2$, $n-1$ e n sejam momentos de retorno não central. Caso a aplicação não possua retorno central, o resultado é válido para $n \geq 3$.*

Esse teorema, provado inicialmente em [SV04], vale tanto para aplicações unimodais quanto para recobrimentos críticos do círculo.

3.2.12 Lema. *Sejam $J \in \mathcal{U}_n$ tal que $\mathcal{R}_n|_J = f^t$ e $\hat{J} \supset f(J)$ o intervalo maximal tal que $f^{t-1}|_{\hat{J}}$ seja um difeomorfismo. Então temos:*

$$f^{t-1}(\hat{J}) \supset I_{n-1}$$

Demonstração. Sejam $(a, b) = \hat{J}$ e $I_n = (w_n^+, w_n^-)$. A maximalidade de \hat{J} implica a existência de $i, j < t-1$ tais que $f^i(a) = c = f^j(b)$. Observe a figura abaixo:



Como tanto $f^{j+1}(J)$ quanto $\{c\}$ estão contidos em $f^j(\hat{J})$ temos que $w_n^- \in f^j(\hat{J})$. Através de procedimento análogo concluímos que $w_n^+ \in f^i(\hat{J})$. Como, pelas definições de I_{n-1} e I_n , as órbitas de w_n^- e w_n^+ jamais adentram I_{n-1} concluímos que $f^{t-1}(\hat{J}) \supset I_{n-1}$, como queríamos demonstrar. \square

3.2.13 Lema. *Considere uma aplicação, $f \in \mathcal{C}_d$ com combinatória de Fibonacci generalizada e cujo ponto crítico c possui ordem ℓ maior que 1. Então existe uma constante:*

$$K^{-1} < \frac{Df^j(x)}{Df^j(y)} < K$$

para $n \geq 4$, $j = 0, 1, \dots, s_n - 1$ e quaisquer $x, y \in f(I_n)$

Em particular temos:

$$K^{-1} < \frac{Df^j(c_{s_{n+1}}^f)}{Df^j(f(c))} < K$$

Demonstração. Seja α a constante obtida em 3.2.11 e K a constante de 4.2.3 associada a α . Então, de acordo com 3.2.12, existe um intervalo $T \supset f(I_n)$ tal que $f^{s_n-1}: T \rightarrow I_{n-2}$ é um difeomorfismo. E de acordo com 3.2.11, I_{n-1} está α bem dentro de I_{n-2} . Basta então usar o lema 4.2.3, para provar a primeira afirmativa.

Quanto à segunda, segue de c e $c_{s_{n+1}}$ pertencerem ao intervalo I_n . \square

Capítulo 4

Propriedades Métricas

Os princípios de Koebe estão entre as principais ferramentas para se controlar a distorção e encontrar cotas inferiores para derivadas de aplicações do intervalo. Aqui listamos diversas definições e resultados básicos que serão usados como ferramentas ao longo de todo o texto. Maiores detalhes podem ser encontrados em [dMvS93]

4.1 Derivada de Schwarz

4.1.1 Definição. *Sejam $J, T \subset [0, 1]$ um par de intervalos tais que $J \subset T$ e $T \setminus J$ possui duas componentes conexas não vazias L e R . Dizemos que J está α -centralizado de T caso*

$$\min\{|L|, |R|\} \geq \alpha|J|$$

4.1.2 Definição. *A razão cruzada de J e T é dada por:*

$$C(T, J) = \frac{|T||J|}{|L||R|}$$

Seja agora $h : T \rightarrow \mathbb{R}$ um difeomorfismo em sua imagem e defina agora:

$$B(h, T, J) = \frac{C(h(T), h(J))}{C(T, J)}$$

4.1.3 Definição. *Seja $f : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^3 . para todo ponto no qual $Df(x) \neq 0$ definimos a derivada de Schwarz como*

$$Sf(x) = \frac{D^3 f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2 f(x)}{Df(x)} \right)^2$$

Em seguida provaremos diversas propriedades do operador derivada de Schwarz, incluindo suas relações com as transformações de Möbius e com a distorção da razão cruzada.

4.1.4 Proposição. *Sejam f, g aplicações de Classe C^3 tais que tenhamos $f : T \subset \mathbb{R} \rightarrow f(T) \subset \mathbb{R}$ e $g : f(T) \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha também que $Df(x), Dg(y) \neq 0$ para quaisquer $x \in T$ e $y \in f(T)$. Então temos:*

$$S(g \circ f) = (Sg \circ f)(Df)^2 + Sf$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [dMvS93]. □

Usando o resultado acima concluímos facilmente que a propriedade de possuir derivada de Schwarz negativa é preservada por composição de funções. Em particular temos que $Sf^n < 0$ sempre que $Sf < 0$.

4.1.5 Proposição. *Seja $g : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona e contínua. Então $B(g, T^*, J^*) = 1$ para quaisquer intervalos $J^* \subset T^* \subset T$ se e somente se g é a restrição de uma transformação de Möbius.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [dMvS93]. \square

4.1.6 Proposição. *Seja $g : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona de classe C^3 . Então a derivada de Schwarz de g é identicamente nula se e somente se g é a restrição de uma transformação de Möbius ao intervalo T .*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [dMvS93]. \square

4.1.7 Proposição. *Seja $g : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 com derivada de Schwarz negativa. Então:*

$$B(g, T^*, J^*) > 1$$

para quaisquer pares de intervalos $J^* \subset T^* \subset T$

Demonstração. Primeiramente devemos provar que a aplicação $x \mapsto Dg(x)$ não possui nenhum mínimo local positivo. Tal propriedade, chamada de princípio do mínimo, será provada a seguir por contradição. Se $a \in T$ fosse mínimo local positivo de Dg teríamos:

- $Dg(a) > 0$
- $D^2g(a) = 0$
- $D^3g(a) > 0$

do que concluímos $Sg(a) > 0$, que contraria nossa hipótese de que $Sg < 0$.

Considere agora os intervalos $T^* = [x_0, x_1]$ e $J^* = [y_0, y_1]$; assim como a transformação de Möbius ϕ tal que $\phi \circ g$ fixe os pontos x_0, x_1 e y_0 . Afirmamos que $\phi \circ g(y_1) > y_1$. De fato suponha por contradição que $\phi \circ g(y_1) \leq y_1$. Nesse caso, pelo Teorema do Valor Médio, existem pontos $z_0 \in [x_0, y_0]$, $z_1 \in [y_0, y_1]$ e $z_2 \in [y_1, x_1]$ tais que:

- $D(\phi \circ g)(z_0) = 1$
- $D(\phi \circ g)(z_1) \leq 1$
- $D(\phi \circ g)(z_2) \geq 1$

o que contraria o princípio do mínimo. Dessa forma temos $\phi \circ g(y_1) > y_1$, o que nos dá:

$$B(\phi \circ g, T^*, J^*) = \frac{\frac{|\phi(g(T^*))|}{|T^*|} \frac{|\phi(g(J^*))|}{|J^*|}}{\frac{|\phi(g(R^*))|}{|R^*|} \frac{|\phi(g(L^*))|}{|L^*|}} = \frac{\frac{|\phi(g(J^*))|}{|J^*|}}{\frac{|\phi(g(R^*))|}{|R^*|}} > 1$$

Observe que:

$$B(\phi \circ g, T^*, J^*) = B(\phi, g(T^*), g(J^*)) \cdot B(g, T^*, J^*)$$

De acordo com 4.1.5 $B(\phi, g(T^*), g(J^*)) = 1$, o que implica que:

$$B(g, T^*, J^*) = B(\phi \circ g, T^*, J^*) > 1$$

como queríamos demonstrar. \square

4.2 Lemas de Koebe

Os lemas de Koebe são uma ferramenta para se controlar a distorção de uma aplicação, que definimos a seguir:

4.2.1 Definição. *Sejam $g : N \rightarrow N$ uma função de classe C^1 e T um subintervalo de N . Se $Dg(x) \neq 0$ para todo $x \in T$, definimos a distorção de g em T como:*

$$Dist(g, T) = \sup_{x, y \in T} \left\{ \frac{|Dg(x)|}{|Dg(y)|} \right\}$$

Ocorre que todos os lemas dessa seção assumem a existência de uma constante $0 < C_0 \leq 1$ tal que $B(g, T, J) \geq C_0$. Felizmente a proposição 4.1.7 garante que qualquer aplicação com derivada de Schwarz negativa possui tal propriedade, com $C_0 = 1$.

4.2.2 Teorema. (*"Princípio do Mínimo"*)

Sejam $T = [a, b] \subset N$ e $g : T \rightarrow g(T) \subset N$ um difeomorfismo de classe C^1 . Se para quaisquer intervalos $J^ \subset T^* \subset T$ tivermos*

$$B(g, T^*, J^*) \geq C_0$$

para alguma constante $0 < C_0 \leq 1$, então:

$$|Dg(x)| \geq C_0^3 \min\{|Dg(a)|, |Dg(b)|\}$$

para todo $x \in (a, b)$

Demonstração. Tome um intervalo $T^* = [a^*, b^*] \subset T$ e defina:

$$B_0(g, T^*) = \left(\frac{|g(T^*)|}{|T^*|} \right)^2 \frac{1}{|Dg(a^*)||Dg(b^*)|}$$

Defina também:

$$B_1(g, T, x) = \frac{|Dg(x)| \frac{|g(T)|}{|T|}}{\frac{|g(L)|}{|L|} \frac{|g(R)|}{|R|}}$$

Onde L e R são as componentes de $T \setminus \{x\}$.

Como

$$B_0(g, T^*) = \lim_{J^* \rightarrow T^*} B(g, T^*, J^*)$$

e

$$B_1(g, T, x) = \lim_{J \rightarrow \{x\}} B(g, T, J)$$

concluimos que:

- $\left(\frac{|g(L)|}{|L|} \right)^2 \geq C_0 |Dg(a)| |Dg(x)|$
- $\left(\frac{|g(R)|}{|R|} \right)^2 \geq C_0 |Dg(x)| |Dg(b)|$

$$\bullet \quad |Dg(x)| \frac{|g(T)|}{|T|} \geq C_0 \frac{|g(L)|}{|L|} \frac{|g(R)|}{|R|}$$

As duas primeiras desigualdades são consequência de $B_0(g, L) \geq C_0$ e $B_0(g, R) \geq C_0$, enquanto a terceira decorre de $B_1(g, T, x) \geq C_0$. Como $g|_T$ é um difeomorfismo temos:

$$\min \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\} \leq \frac{|g(T)|}{|T|} \leq \max \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\}$$

do que depreendemos:

$$\begin{aligned} |Dg(x)|^2 &\geq C_0^2 \left(\frac{\frac{|g(L)|}{|L|} \cdot \frac{|g(R)|}{|R|}}{\frac{|g(T)|}{|T|}} \right)^2 \geq C_0^2 \min \left\{ \left(\frac{|g(L)|}{|L|} \right)^2, \left(\frac{|g(R)|}{|R|} \right)^2 \right\} \\ &\geq C_0^3 \min \{ |Dg(a)||Dg(x)|, |Dg(b)||Dg(x)| \} \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $|Dg(x)| \geq C_0^3 \min \{ |Dg(a)|, |Dg(b)| \}$. □

O princípio do mínimo será usado para provar uma das ferramentas mais poderosas no contexto de dinâmica em dimensão um: o Lema de Koebe. Tal lema nos permite controlar a distorção de aplicações cuja distorção da razão cruzada também seja limitada.

4.2.3 Teorema. ("Princípio de Koebe")

Sejam $J \subset T$ intervalos tais que $g : T \rightarrow g(T)$ é um difeomorfismo de classe C^1 . Assuma também que exista uma constante $C_0 \in (0, 1]$ tal que $J^* \subset T^* \subset T$ para a qual:

$$B(g, T^*, j^*) > C_0$$

Então, se $g(J)$ está τ centralizado em $g(T)$, temos:

$$\frac{1}{K_0(C_0, \tau)} \leq \frac{|D(x)|}{|D(y)|} \leq K_0(C_0, \tau)$$

para quaisquer $x, y \in J$, com $K_0(C_0, \tau) = \frac{(1+\tau)^2}{C_0^6 \tau^2}$.

Demonstração. Usando uma transformação de Mobius podemos reescalonar g de forma que $J = g(J) = (0, 1)$. Sejam então $a, b \in \partial T$ de forma que $a < 0 < 1 < b$. Usando o operador B_0 definido na prova de 4.2.2 temos:

$$B_0(g, J) = \frac{|g(J)|^2}{|J|^2} \frac{1}{|Dg(0)||Dg(1)|} \geq C_0$$

o que implica que:

$$|Dg(0)||Dg(1)| \leq \frac{1}{C_0} \tag{4.1}$$

Da mesma forma usamos o operador B_1 para obter:

$$B_1(g, L \cup J, 0) = \frac{|Dg(0)| \frac{|g(L \cup J)|}{|L \cup J|}}{\frac{|g(L)|}{|L|} \frac{|g(J)|}{|J|}} \geq C_0$$

o que implica

$$|Dg(0)| \geq C_0 \frac{|g(L)|}{|L|} \frac{|g(L \cup J)|}{|L \cup J|} \geq C_0 \frac{|g(L)|}{|L \cup J|}$$

Por $g(J)$ estar τ centralizado em T temos que $\frac{|g(L)|}{|L \cup J|} \geq \frac{\tau}{1+\tau}$, do que concluímos:

$$|Dg(0)| \geq C_0 \frac{\tau}{1+\tau} \quad (4.2)$$

Repetindo o mesmo procedimento para $B_1(g, J \cup R, 1)$, obtemos:

$$|Dg(1)| \geq C_0 \frac{\tau}{1+\tau} \quad (4.3)$$

Combinando as equações 4.1, 4.2 e 4.3 obtemos:

$$C_0 \frac{\tau}{1+\tau} \leq |Dg(0)|, |Dg(1)| \leq \frac{1}{C_0^2} \frac{1+\tau}{\tau}$$

Por 4.2.2, temos:

$$|Dg(x)| \geq C_0^4 \frac{\tau}{1+\tau} \quad (4.4)$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Por outro lado considere os intervalos $U = [0, x]$ e $V = [x, 1]$, dado que $x \in J$. Por $g|_T$ ser um difeomorfismo $\frac{|g(U)|}{|U|} \leq \frac{|g(J)|}{|J|} = 1$ ou $\frac{|g(V)|}{|V|} \leq \frac{|g(J)|}{|J|} = 1$. Supondo que a primeira desigualdade seja verdadeira temos:

$$B_0(g, U) = \frac{\frac{|g(U)|^2}{|U|^2}}{|Dg(0)||Dg(1)|} \geq C_0$$

Usando 4.2 temos:

$$\begin{aligned} |Dg(x)| &\leq \frac{1}{C_0} \frac{1}{|Dg(0)|} \frac{|g(U)|^2}{|U|^2} \leq \frac{1}{C_0} \frac{1}{|Dg(0)|} \\ &\leq \frac{1}{C_0^2} \frac{1+\tau}{\tau} \end{aligned}$$

Combinando essa fórmula com 4.4, temos:

$$C_0^6 \frac{\tau^2}{(1+\tau)^2} \leq \frac{|Dg(x)|}{|Dg(y)|} \leq \frac{1}{C_0^6} \frac{(1+\tau)^2}{\tau^2}$$

para quaisquer $x, y \in J$. O caso em que $\frac{|g(V)|}{|V|} \leq \frac{|g(J)|}{|J|} = 1$ é análogo ao que acabamos de apresentar. \square

Por fim, enunciaremos o princípio macroscópico de Koebe, cuja prova pode ser encontrada em [dMvS93]:

4.2.4 Teorema. (Princípio macroscópico de Koebe)

Seja $h : T \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^3 , com derivada de Schwarz negativa e que seja um difeomorfismo em sua imagem. Então temos:

Seja J um subintervalo de T de modo que $h(J)$ esteja α -centralizado em $h(T)$ para algum $\alpha > 0$. Então existe $\bar{\alpha} > 0$ tal que J esteja $\bar{\alpha}$ -centralizado em T , com

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha^2}{1 + 2\alpha}$$

4.3 Teoria da Medida

Apresentamos aqui algumas definições básicas de teoria da medida, assim como alguns poucos teoremas que nos serão úteis daqui em diante. Mais informações sobre o assunto podem ser encontradas em diversos livros textos, como por exemplo [Rud87] ou [AIS66].

Seja X um espaço topológico. Uma coleção \mathcal{M} de subconjuntos de X é uma σ -álgebra de X caso se verifiquem as seguintes propriedades:

- $X \in \mathcal{M}$
- Se $A \in \mathcal{M}$, então $A^C \in \mathcal{M}$, onde A^C é o complementar de A em relação a X .
- Se $\{A_n\}$ é uma coleção enumerável de elementos de \mathcal{M} , então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ também pertence a \mathcal{M} .

A menor σ -álgebra de X que contém seus subconjuntos abertos é chamada de σ -álgebra de Borel associada a X . Seus elementos são chamados de borelianos de X . Daqui por diante vamos nos referir à σ -álgebra de Borel associada a X por \mathcal{B}_X . Já uma medida de Borel é uma função $\mu : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$$

para qualquer união disjunta e enumerável de conjuntos $A_i \in \mathcal{B}_X$.

Uma medida que merece um destaque especial é a chamada medida de Lebesgue. Se $X = \mathbb{R}^n$ para algum n natural, definimos uma célula de \mathbb{R}^n como um conjunto do tipo:

$$W = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \alpha_i < x_i < \beta_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n\}$$

Nesse caso, definimos o volume de uma célula W de X como sendo $vol(W) = \prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)$.

Dadas essas definições, estamos prontos para definir a medida de Lebesgue de um espaço $X = \mathbb{R}^n$:

4.3.1 Teorema. *Se $X = \mathbb{R}^n$, existe uma medida $m : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

- $m(W) = vol(W)$ para toda célula W de X
- m é invariante por translação, ou seja:

$$m(E) = m(E + x)$$

para todo $x \in X$

- Se $\mu : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma medida invariante por translação tal que $m(K) < \infty$ para todo K compacto, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\mu(E) = cm(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}_X$

No caso em que $X = \mathbb{R}$, a medida m mede o comprimento dos intervalos abertos.

Uma medida μ é chamada medida finita caso se tenha $\mu(X) = C$, para algum $C \in \mathbb{R}^+$. Se $C = 1$ dizemos que m é uma medida de probabilidade. Já uma medida σ -finita pode ser expressa como a soma enumerável de medidas finitas.

Dadas duas medidas μ e ν de (X, \mathcal{B}_X) , dizemos que ν é absolutamente contínua em relação a μ caso $\mu(A) = 0$ implique necessariamente $\nu(A) = 0$, para todo $A \in \mathcal{B}_X$. O teorema a seguir estabelece uma relação entre medidas absolutamente contínuas e funções integráveis:

4.3.2 Teorema. (Teorema de Radon-Nikodym)

Seja μ uma medida finita. Então ν é uma medida absolutamente contínua em relação a μ se e somente se existir uma função integrável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual se tenha:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

para todo $A \in \mathcal{B}_X$.

4.4 Medidas Físicas

Em seguida apresentamos os conceitos e resultados de teoria ergódica que utilizaremos como ferramentas em nossos estudos. O leitor que tiver desejo de uma exposição mais detalhada poderá encontrá-la em diversos livros textos, como por exemplo [Pol93] ou [Sin76].

Seja X um espaço topológico e \mathcal{B}_X sua σ -álgebra de Borel. Dizemos que uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é mensurável caso tenhamos $T^{-1}(\mathcal{B}_X) \subset \mathcal{B}_X$. E dada uma aplicação mensurável $T : X \rightarrow X$, dizemos que uma medida μ é T -invariante caso se verifique $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ para todo conjunto $B \in \mathcal{B}_X$. A seguir daremos alguns exemplos de aplicações mensuráveis e suas respectivas medidas invariantes:

- Seja X o intervalo $[0, 1)$ com a σ -álgebra de Borel. Dada a aplicação $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ com $T(x) = 10x \pmod{1}$, temos que a medida de Lebesgue m é T -invariante.
- Considere agora o intervalo $(0, 1)$, mais uma vez com σ -álgebra de Borel. Se $T : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ é a aplicação $T(x) = \frac{1}{x} \pmod{1}$, comunmente chamada aplicação de Gauss, sua medida invariante será dada por:

$$\mu(B) = \int_B \frac{1}{\log 2(1+x)} dx$$

para todo $B \in \mathcal{B}_X$.

Uma pergunta natural a se fazer é: sob quais condições pode-se garantir a existência de uma medida invariante? O lema a seguir dá uma resposta parcial a tal pergunta:

4.4.1 Lema. *Sejam X um espaço topológico compacto, $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo e \mathcal{B}_X sua σ -álgebra de Borel. Então sempre existe ao menos uma medida μ que seja T -invariante.*

Tendo definido medidas invariantes, dirigimos nossa atenção para um tipo particularmente importante de medidas invariantes: as chamadas medidas ergódicas.

4.4.2 Definição. Uma medida T -invariante μ é ergódica caso sempre que tivermos $T^{-1}(B) = B$, para algum $B \in \mathcal{B}$, tenhamos $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$.

Um dos motivos de se estudar medidas ergódicas são suas propriedades de recorrência. O teorema

4.4.3 Definição. Seja μ uma medida invariante de f . Chamamos de bacia de μ o conjunto:

$$B(\mu) = \left\{ x \in I \ ; \ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x)) \rightarrow \int \phi d\mu \right\}$$

Uma medida μ para a qual $\lambda(B(\mu)) > 0$ é chamada medida física ou medida *SRB*.

Outro tipo especial de medida, cuja relação com medidas físicas será vista a seguir, são as chamadas medidas ergódicas, que definimos logo a seguir:

4.4.4 Definição. Uma medida f -invariante μ é ergódica caso sempre que tivermos $f^{-1}(B) = B$ para algum boreliano B , tenhamos necessariamente $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$.

Dito de outra forma, se μ é uma medida ergódica e B um conjunto f -invariante, então B é um conjunto de medida zero ou medida total. Um dos motivos de se estudar tais medidas são suas propriedades de recorrência. Tanto o teorema a seguir como seu corolário mostram a relação que existe entre a medida de um conjunto e a frequência na qual a órbita de um ponto típico o visita:

4.4.5 Teorema. (Teorema Ergódico de Birkhoff)

Sejam $T : X \rightarrow X$ uma transformação do espaço mensurável (X, \mathcal{B}_X) e m uma medida ergódica. Então, para quase todo ponto $x \in X$ (com respeito à medida m), temos

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \rightarrow \int f dm \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

para toda função f integrável.

Escolha agora um conjunto $B \in \mathcal{B}_X$ e defina a função característica \mathcal{X}_B tal que:

$$\mathcal{X}_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B, \\ 0, & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Substituindo as funções f em 4.4.5 por funções características, obtemos o seguinte corolário:

4.4.6 Corolário. Seja μ uma medida de probabilidade ergódica e $B \in \mathcal{B}_X$. Então para quase todo ponto $x \in X$ (com respeito a μ), a proporção dos iterados da órbita de x que interceptam B é dada por $\mu(B)$. Ou seja:

$$\frac{\#\{0 \leq i \leq n-1 | T^i(x) \in B\}}{n} \rightarrow \mu(B), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

Isso significa que uma medida de probabilidade ergódica mede a frequência com que a órbita da maioria dos pontos $x \in X$ visita cada conjunto $B \in \mathcal{B}_X$. Mas observe que, nesse caso, os conceitos de "maioria" ou quase todo dizem respeito à própria medida μ . A princípio, nada impede que o conjunto $Y \subset X$ maximal para o qual valem 4.4.5 e 4.4.6 tenha medida de Lebesgue 0. Mas deve-se observar que essa situação não ocorre se medida de probabilidade

ergódica μ for também absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Nesse caso μ é um tipo especial de medida física, para a qual $\lambda(B(\mu)) = 1$. Tais medidas, às quais chamaremos de acip daqui por diante, desempenham um papel importante na classificação de sistemas dinâmicos em dimensão 1.

4.5 Atratores Métricos

Um conjunto A é dito atrator métrico de $f \in \mathcal{C}_d$ caso as seguintes propriedades se verificam:

1. A bacia de atração de A , definida como $\mathcal{B}(A) = \{x; \omega(x) \subset A\}$, é um conjunto de medida de Lebesgue positiva.
2. Para todo conjunto compacto invariante $B \subset A$ com $B \neq A$; tem-se que $\mathcal{B}(B) \setminus \mathcal{B}(A)$ também possui medida de Lebesgue positiva.

Vamos agora descrever os atratores métricos de quaisquer aplicações $f \in \mathcal{C}_d$. Mas para tanto será necessário usar o seguinte lema:

4.5.1 Lema. *Seja $f \in \mathcal{C}_d$ e considere o conjunto limite $\omega(c)$. Se $\omega(c)$ não for minimal, então qualquer conjunto $B \subset [0, 1]$ de interior vazio, compacto e invariante terá necessariamente medida de Lebesgue zero.*

Demonstração. Ver [dN01]. □

4.5.2 Teorema. *Se A é um atrator métrico de uma aplicação $f \in \mathcal{C}_d$, vale um dos seguintes casos:*

- A é o intervalo $[0, 1]$
- A é uma órbita periódica atratora
- A é um conjunto de Cantor minimal que contém o ponto crítico c .

Demonstração. A prova desse teorema pode ser encontrada em [dN01]. Mas por ser extremamente relevante para nosso trabalho, decidimos reproduzi-la em sua totalidade.

Caso f possua atratores periódicos, o conjunto dos pontos de $[0, 1]$ atraídos pelos atratores terá medida total, que corresponde à situação descrita no item dois desse teorema. Suponha agora que f não possua órbitas periódicas atradoras.

Nosso primeiro passo será definir uma base enumerável de abertos em $[0, 1]$, ou seja, uma sequência de intervalos abertos J_n tais que:

- $|J_n| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$
- $[0, 1] \subset \bigcup_{n \geq N} J_n$ para todo N natural.

Em seguida definimos os seguintes conjuntos compactos e invariantes:

$$E_n = \{x \in [0, 1] \quad : \quad f^m(x) \notin J_n \quad \text{para todo } m \geq 0\}$$

Definimos agora os conjuntos $E_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ e seu complementar E_∞^C . Como tanto E_∞ quanto E_∞^C são totalmente invariantes por f e f é ergódica em relação à medida de Lebesgue, concluímos que E_∞ ou E_∞^C deve ter medida de Lebesgue um.

Se E_∞^C possui medida um, então f se enquadra no primeiro caso de nosso teorema. Suponha portanto que $|E_\infty| = 1$, o que por sua vez implica que $|E_n| > 0$ para algum n natural. Nosso objetivo é provar que nossa aplicação f se enquadra no terceiro caso descrito nesse teorema. Para tanto, considere a seguinte afirmação:

Afirmação: Para quase todo ponto $x \in E_n$ (em relação à medida de Lebesgue), verifica-se que $\omega(x) = \omega(c)$.

Demonstração. Prova da afirmação

Primeiramente provaremos que existe um conjunto $\Sigma = \{x : \omega(x) \ni c\}$ possui medida de Lebesgue um.

Para tanto, considere os intervalos nice I_n que definimos anteriormente e defina os conjuntos:

$$\Theta_n = \{x \in [0, 1] : f^k(x) \in I_n \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

De acordo com [Ma n85], por f ser uma aplicação que não possui atratores periódicos, todos os conjuntos Θ_n possuem medida de Lebesgue um. Isso por sua vez implica que:

$$\Sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Theta_n$$

também tem medida de Lebesgue um.

Nosso próximo passo será provar que $\omega(x) \subset \omega(c)$ para Lebesgue quase todo ponto $x \in E_n$. A prova se dá por contradição. Suponha que exista um ponto de densidade $y \in E_n$ tal que $\omega(y)$ não esteja contido em $\omega(c)$. Então existe uma sequência $k_i \rightarrow \infty$ e um número $\delta > 0$ tais que:

$$\text{dist}(f^{k_i}(y), \overline{\text{orb}_+(c)}) \geq \delta$$

Considere agora os intervalos maximais H_i tais que:

- $y \in H_i$
- $f^{k_i}|_{H_i}$ é um difeomorfismo

Como todos os valores críticos de f^{k_i} estão contidos em $\overline{\text{orb}_+(c)}$, temos que $f^{k_i}(H_i)$ contém uma δ -vizinhança de $f^{k_i}(y)$.

Considere agora os intervalos $\tilde{H}_i \subset H_i$ tais que:

$$f^{k_i}(\tilde{H}_i) = (f^{k_i}(y) - \frac{\delta}{2}, f^{k_i}(y) + \frac{\delta}{2})$$

Usando o princípio de Koebe concluímos que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|f^{k_i}(\tilde{H}_i) \setminus E_n|}{|f^{k_i}(\tilde{H}_i)|} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|f^{k_i}(\tilde{H}_i) \setminus E_n|}{|f^{k_i}(\tilde{H}_i)|}$$

$$\leq K \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{H}_i \setminus E_n|}{|\tilde{H}_i|} = 0$$

Onde K é uma constante que depende apenas de δ . E como os intervalos $f^{k_i}(\tilde{H}_i)$ têm todos comprimento δ , podemos tomar um intervalo H de comprimento $\frac{\delta}{2}$ tal que $H \subset f^{k_i}(\tilde{H}_i)$ para um número infinito de valores de i . O limite que acabamos de obter implica que $|H \setminus E_n| = 0$. Como E_n é fechado, temos que $H \subset E_n$. Mas isso implicaria que:

$$E_n \supset \bigcup_{m=0}^{\infty} f^m(H) = [0, 1]$$

o que obviamente não é o caso. Com isso concluímos que $\omega(x) = \omega(c)$ para um conjunto de medida de Lebesgue um, o que prova a afirmação. \square

Em seguida considere o conjunto $\omega(c)$. Basta provar que esse conjunto é minimal. Mais uma vez a prova se dá por contradição. Se $\omega(c)$ não for minimal, então pelo Lema 4.5.1 todo conjunto de interior vazio, compacto e f -invariante tem medida de Lebesgue zero. Assim, temos que E_∞ tem medida de Lebesgue zero, contrariando nossa hipótese inicial. \square

Apresentamos agora a classificação dos atratores métricos de aplicações unimodais:

4.5.3 Teorema. (Atratores Métricos)

Seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação unimodal que não contém intervalos de pontos de pontos fixos. Se A é um atrator métrico de f , então uma das seguintes propriedades se verifica:

- A é uma órbita periódica
- $L_x = \omega(c)$, onde c é o ponto crítico de f e $\omega(c)$ é um conjunto minimal com medida de Lebesgue zero. Esse caso se divide em dois subcasos, que serão expostos a seguir:
 - $A = \omega(c)$, de forma que c é um ponto crítico e $\omega(c)$ é um atrator solenoidal.
 - $A = \omega(c)$, c é ponto crítico e $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor minimal mas não solenoidal. Nesse caso a aplicação f age transitivamente em um conjunto de intervalos contendo $\omega(c)$. Porém, Lebesgue quase todo ponto nessa união é atraído para o conjunto $\omega(c)$, que possui medida zero.
- A é um união finita de intervalos que contém o ponto crítico c , enquanto f age transitivamente nessa união.

O teorema 4.5.3 foi provado inicialmente em [BL91] e posteriormente estendido em [Mar94], [She04] e [SV04].

Observando os teoremas 3.1.3 e 4.5.3, devemos destacar o comportamento dinâmico descrito no segundo subcaso do segundo item de 4.5.3. Nesse subcaso, um subconjunto residual de uma coleção de intervalos L apresenta órbita densa em L . Ao mesmo tempo, existe um subconjunto $X \subset L$ com $\lambda(X) = \lambda(L)$ de forma que $\omega(x) = \omega(c)$ para todo $x \in X$, onde $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor de medida zero. Nessa situação, na qual as dinâmicas métrica e topológica parecem estar em conflito, o conjunto $\omega(c)$ é chamado atrator selvagem. No teorema a seguir, provado inicialmente em [HB96] e [Bru98b], verificou-se pela primeira vez a ocorrência de tais atratores:

4.5.4 Teorema. *(Existência de Atratores Selvagens)*

Existem aplicações $f : I \rightarrow I$ da forma $f(x) = x^d + a$, com $a \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{N}$ par (e grande), tais que:

- *Para quase todo ponto x temos $\omega(x) = \omega(c)$; onde c é o ponto crítico de f e $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor de medida zero.*
- *Existe um conjunto residual $X \subset I$ para o qual temos $\omega(x) = L$ para todo $x \in X$, onde L é um conjunto de intervalos contendo $\omega(c)$.*

Tendo estabelecido que atratores selvagens podem de fato ocorrer, pode-se questionar em quais circunstâncias eles aparecem. Mais precisamente, podemos buscar condições suficientes para descartar a existência de tais atratores. Mas antes de seguir essa linha de raciocínio, será necessário apresentar algumas ferramentas usadas para provar 3.1.3 e 4.5.3.

Capítulo 5

Revisão da bibliografia

5.1 Homeomorfismos do círculo

Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo do círculo. Nosso objetivo nesse capítulo será descrever as classes de conjugação de tais aplicações, assim como a regularidade dessas mesmas conjugações. Para tanto, devemos primeiramente descrever os conjuntos limites de suas órbitas, o que foi feito inicialmente por Poincaré. De acordo com o autor, qualquer homeomorfismo do círculo se enquadra em um dos seguintes casos:

1. Se $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ possui uma órbita periódica, então toda órbita de f é assintótica a alguma órbita periódica. Ademais, caso f preserve orientação, garante-se também que quaisquer órbitas periódicas de f possuem o mesmo período.
2. Se f não possui órbitas periódicas, então existe uma aplicação monótona e contínua $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que:

$$h \circ f = g \circ h$$

onde g é uma rotação irracional do círculo.

A aplicação h que acabamos de descrever é chamada uma semi-conjugação entre f e g . Nada garante que tal aplicação seja invertível, pois a imagem inversa de um ponto de \mathbb{S}^1 poderia ser um intervalo. Na verdade um de nossos objetivos será encontrar condições suficientes para garantir que h seja um homeomorfismo. Em seguida trataremos de verificar a classe de diferenciabilidade dessa conjugação, assim como sua relação com a existência de medida acip.

5.2 Descrição dos Conjuntos Limites

Descreveremos aqui os conjuntos limites de homeomorfismos do círculo. Didiviremos essas aplicações em dois grupos distintos: os que preservam e os que invertem orientação. Dizemos que um homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ preserva orientação caso seus levantamentos sejam todos monótonos crescentes, enquanto homeomorfismos cujos levantamentos são monótonos decrescentes invertem a orientação.

Trataremos primeiramente dos homeomorfismos que invertem orientação, pois seu comportamento é relativamente simples de se descrever.

5.2.1 Lema. *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo do círculo que preserva orientação e possui um ponto fixo p . Então a órbita de qualquer ponto $x \in \mathbb{S}^1$ é assintótica a um ponto fixo y , onde y pode ou não ser igual a p .*

Demonstração. Sejam J um intervalo compacto e $f : J \rightarrow J$ uma aplicação injetiva que preserve orientação. Caso tenhamos $f(x) > x$, podemos provar por indução que a sequência $f^n(x)$ é monótona crescente. Assim, por compacidade do intervalo J , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = y = \sup\{f^n(x)\}$$

Pela continuidade da função f temos:

$$f(y) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = y$$

O caso em que $f(x) < x$ é análogo. Para provar o lema, basta tomar $J = \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$ e um recobrimento $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $\pi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$ seja um difeomorfismo. \square

Como acabamos de provar, se f é um homeomorfismo crescente em um intervalo J com um ponto fixo p , então toda órbita de f é assintótica a um ponto fixo. Para provar um resultado semelhante para homeomorfismos do círculo que invertem orientação, basta provar que tais aplicações possuem pontos periódicos e usar 5.2.1.

5.2.2 Proposição. *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um recobrimento do círculo de grau topológico -1 . Então para todo $x \in \mathbb{S}^1$ temos $\omega(x) = \text{Orb}(p)$ para algum ponto periódico p .*

Demonstração. Tome x tal que $x \neq f(x)$. Em seguida tome arcos $A = (x, p)$, $B = (x, q) \subset \mathbb{S}^1$ partindo de x em direções opostas. Tome A e B maximais de forma que $A \cap f(A) = \emptyset$ e $B \cap f(B) = \emptyset$. Como f reverte a orientação, temos que A e $f(A)$ estão contidos na mesma componente conexa de $\mathbb{S}^1 \setminus \{x, f(x)\}$, enquanto B e $f(B)$ estão contidos na outra componente. A maximalidade dos intervalos A e B garante que p e q sejam pontos fixos de f . Como f^2 preserva orientação, basta usar o lema 5.2.1 para obter o resultado. \square

Descreveremos agora os conjuntos limites de homeomorfismos $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que preservam orientação. Para tanto será necessário introduzir o conceito de número de rotação, o que será feito a seguir.

5.2.3 Definição. *Sejam $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um recobrimento de grau 1, $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um de seus levantamentos e $x \in \mathbb{S}^1$. O número de rotação de f será:*

$$r(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}^n(x) - x}{n}$$

O número de rotação nos permite comparar qualquer homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que preserve orientação com rotações fixas do círculo. Lembrando que se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então todo $x \in \mathbb{S}^1$ é ponto periódico de $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Por outro lado, se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, então $\omega(x, R_\alpha) = \mathbb{S}^1$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

Uma pergunta natural a se fazer é se homeomorfismos com número de rotação $r(f) = \alpha$ apresentam comportamento dinâmico semelhante à rotações R_α . Caso $r(f) \in \mathbb{Q}$, garante-se que f possui órbitas periódicas, o que nos permite usar 5.2.1 para garantir que para todo $x \in \mathbb{S}^1$, existe um ponto periódico p tal que $\omega(x) = \text{orb}(p)$. Quanto à homeomorfismos com número de rotação irracional temos o seguinte resultado:

5.2.4 Teorema. *(Poincaré)*

Seja f um homeomorfismo do círculo de grau 1 com $\mathcal{R}(f) \notin \mathbb{Q}$. Então existe uma aplicação $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ contínua, monótona e sobrejetiva tal que:

$$h \circ f = R_\alpha \circ h$$

com $\alpha = \mathcal{R}(f)$

Observe que nesse caso h é uma semi-conjugação entre o homeomorfismo f e a rotação irracional R_α , o que impede que f tenha pontos periódicos. Uma pergunta bastante natural é sob quais circunstâncias a aplicação h é uma conjugação. Caso h não seja uma conjugação, existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $h^{-1}(x) = J$, onde J é um intervalo não degenerado. Observe que $h \circ f = R_\alpha \circ h$ implica que $h \circ f^n(J) = R_\alpha^n(x)$; do que depreendemos que os intervalos $f^n(J)$ são dois a dois disjuntos. As propriedades desse intervalo motivam a seguinte definição:

5.2.5 Definição. Dizemos que J é um intervalo errante de uma aplicação f quando:

- Os intervalos $J, f(J), f^2(J), \dots$ são dois a dois disjuntos
- O ω -limite de J não é uma órbita periódica.

No caso de homeomorfismos do círculo de grau um com número de rotação irracional chegamos à seguinte dicotomia: ou tais aplicações são topologicamente conjugadas à uma rotação irracional ou possuem um intervalo errante. O teorema a seguir fornece condições suficientes para que f seja conjugada à uma rotação:

5.2.6 Teorema. *(Denjoy)*

Seja f um homeomorfismo do círculo de grau 1, de classe C^2 com $\mathcal{R}(f) \notin \mathbb{Q}$. Então f não possui intervalo errante.

Dessa forma podemos garantir que quaisquer aplicações que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Denjoy são topologicamente conjugadas a uma rotação irracional. Isso implica que as órbitas de todos os pontos $x \in \mathbb{S}^1$ são densas em \mathbb{S}^1 .

5.3 Classes de conjugação

Seja f um homeomorfismo de S^1 . Um problema clássico de dinâmica unidimensional consiste em determinar condições para que tais aplicações sejam C^1 conjugadas à uma rotação do círculo. Como a medida de Lebesgue é invariante por qualquer rotação de S^1 , qualquer aplicação C^1 conjugada à uma rotação R_α possui medida acip.

O primeiro resultado nessa direção foi obtido por Arnold em [Arn63], no qual provou-se que qualquer difeomorfismo analítico do círculo com número de rotação Diofantino é analiticamente conjugado à rotação irracional R_ρ . Lembrando que um número irracional é Diofantino quando existem constantes $C > 0$ e $\beta \geq 0$ tais que $\left| \rho - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^{2+\beta}}$ para quaisquer $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$.

Arnold também provou em [Arn63] que tais resultados não podem ser estendidos a todos os números de rotação irracionais; ao construir um difeomorfismo analítico do círculo f , com número de rotação ρ irracional cuja medida invariante é singular. Isso implica que a conjugação h tal que:

$$R_\rho \circ h = h \circ f$$

não é absolutamente contínua.

Um resultado análogo ao de Arnold foi obtido por Herman em [Her], no qual provou-se que quaisquer difeomorfismos C^∞ do círculo f, g com o mesmo número de rotação Diofantino são C^∞ conjugados.

Mas esses resultados fornecem condições suficientes para que difeomorfismos do círculo possuam medida acip. Uma pergunta natural a se fazer é se podemos obter resultados semelhantes para aplicações que possuem um ponto crítico c , os chamados homeomorfismos críticos do círculo. Em [dFdM99], W. de Melo e E. de Faria que quaisquer homeomorfismos críticos analíticos do círculo f, g com número de rotação limitado são C^1 conjugados. Esse resultado foi generalizado por Yampolski em [Yam02] para todos os números de rotação.

Chamamos de rigidez C^1 o fenômeno de todas aplicações que compartilham determinadas características serem C^1 conjugadas. É interessante notar que homeomorfismos críticos do círculo apresentam maior rigidez C^1 que difeomorfismos, visto que nenhuma condição quanto ao número de rotação é necessária.

5.4 Recobrimentos de Grau 2

Considere agora o conjunto dos recobrimentos do círculo de grau $d \geq 2$, sem atratores periódicos ou intervalos errantes. Desejamos encontrar condições suficientes para que tais aplicações possuam medida acip; assim como estudar os casos em que isso não ocorre. Para tanto, introduzimos o conceito de aplicações expansoras, assim como um teorema provado inicialmente por Shub.

5.4.1 Definição. Dizemos que uma aplicação $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é expansora caso existam constantes $C > 0$ e $\lambda > 1$ tais que

$$|Df^n(x)| \geq C\lambda^n$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{N}$.

É imediato verificar que a aplicação $g_d = dx \pmod{1}$ é expansora. O teorema a seguir, cuja prova pode ser vista em [dMvS93],

5.4.2 Teorema. (Shub)

Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ uma aplicação expansora de classe C^1 e grau d . Se $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é um recobrimento de grau d , existe uma aplicação $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ monótona e sobrejetiva tal que:

$$h \circ g = f \circ h$$

Observe que a aplicação $g(x) = dx \pmod{1}$ é uma aplicação expansora e sua medida invariante é a própria medida de Lebesgue. Observe também que caso f não possua atratores periódicos ou intervalos errantes, a semi-conjugação garantida por 5.4.2 é um homeomorfismo. Infelizmente, conjugações topológicas não preservam necessariamente propriedades métricas. Veremos diversos casos de aplicações conjugadas a $dx \pmod{1}$ que não possuem medida acip.

O primeiro teorema a descrever condições suficientes para a existência de medidas acip para recobrimentos do círculo foi o chamado teorema de folclore, provado inicialmente em

[Ren57]. Antes de enunciá-lo será necessário definir o que são aplicações de Markov, o que faremos em seguida.

5.4.3 Definição. *Uma aplicação $f : I \rightarrow I$ é de Markov caso exista uma família enumerável I_i de intervalos abertos disjuntos tais que:*

- $I \setminus \cup_i I_i$ possui medida de Lebesgue zero. Ademais, existem constantes $C > 0$ e $\gamma > 0$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ e cada intervalo J com $f^j(J)$ contido em um único membro da família I_i para $j = 0, 1, \dots, n$, temos:

$$\left| \frac{Df^n(x)}{Df^n(y)} - 1 \right| \leq C |Df^n(x) - Df^n(y)|^\gamma$$

para todo $x, y \in J$

- Se $f(I_k) \cap I_j \neq \emptyset$, então $f(I_k) \supset I_j$.
- Existe $r > 0$ tal que $|f(I_i)| > r$ para todo i .

5.4.4 Teorema. *Teorema de folclore*

Sejam $f : I \rightarrow I$ uma aplicação de Markov sem intervalos errantes ou atratores periódicos e I_i sua partição correspondente. Então f possui medida acip.

Demonstração. Seja \mathcal{P}_n a partição de I definida pela iteração de $\cup_i I_i$ por f^n . Mais precisamente, $I \in \mathcal{P}_n$ se e somente se I é maximal tal que $I, f(I), \dots, f^{n-1}(I)$ estão todos contidos em um único intervalo da partição I_i . Isso garante que I é maximal tal que $f^n|_I$ é um homeomorfismo.

Definimos também as medidas pull-back de Lebesgue como:

$$\lambda_n(A) = |f^{-n}(A)|$$

para todo boreliano A . Considere agora a sequência $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i$. Como o espaço de medidas em I é compacto com relação à topologia fraca, existem subsequências convergentes μ_{n_k} de μ_n . Mostraremos agora que uma medida μ tal que $\mu_{n_k} \rightarrow \mu$ é f invariante.

$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}(A)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} |f^{-i}(f^{-1}(A))| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \left| \sum_{i=0}^{n_k-1} |f^{-i}(A)| + |f^{-n_k}(A)| - |A| \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} |f^{-i}(A)| = \mu(A) \end{aligned}$$

Resta apenas provar que μ é absolutamente contínua em relação a Lebesgue. Para tanto, tome A mensurável. Como $f^n|_I$ possui distorção limitada, para todo $I \in \mathcal{P}_n$ temos:

$$\frac{|f^{-n}(A) \cap I|}{|I|} \frac{|f^n(I) \cap A|}{|f^n(I)|} \leq K \leq \frac{|A|}{|f^n(I)|}$$

Pela definição de aplicação de Markov, existe $r > 0$ tal que $|f^n(I)| \geq r$ para todo $I \in \mathcal{P}_n$, o que nos dá:

$$|f^{-n}(A) \cap I| \leq \frac{K}{r} |I| |A|$$

Tomando todos os intervalos $I \in \mathcal{P}_n$ obtemos:

$$|f^{-n}(A)| \leq \frac{K}{r} |A|$$

O que nos permite concluir, usando a definição de μ , que:

$$\mu(A) \leq \frac{K}{r} |A|$$

□

É importante observar que aplicações muito parecidas com as contempladas no teorema de folclore podem não possuir medida acip. De fato, em [Bow79] provou-se que uma aplicação de Markov que possua um ponto fixo de derivada igual a um não possui medida acip, pois sua medida invariante absolutamente contínua à Lebesgue é infinita. Por outro lado, Lasota e Yorke provaram o seguinte teorema em [LY73]:

5.4.5 Teorema. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação C^2 por partes tal que $|Df(x)| > 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Então f possui acip*

Observe que a principal diferença entre 5.4.5 e 5.4.4 é que 5.4.5 dispensa a hipótese de f ser aplicação de Markov. Posteriormente, [Pia81] generalizou 5.4.5 para aplicações de classe C^1 . Tanto o teorema de Lasota e Yorke quanto o de Piagniani usam como ferramenta o operador de Perron-Frobenius.

Outra contribuição importante foi dada por Misiurewicz em [Mis81] no qual provou-se que qualquer aplicação do intervalo que satisfaça as seguintes condições possui medida acip:

- Ter classe de diferenciabilidade C^3
- Não possuir pontos críticos
- Não possuir atratores periódicos
- Ter derivada de Schwarz negativa

Observe que nenhum das aplicações que tratamos até agora possui pontos críticos. De fato, o primeiro resultado indicando que a presença de pontos críticos não precisa ser necessariamente um obstáculo à existência de medida acip foi provado por P. Collet e J.-P. Eckmann em [CE83]. Nesse trabalho provou-se que se $f : I \rightarrow I$ é uma aplicação unimodal, tendo c como seu único ponto crítico, e existem constantes $C > 0$ e $\lambda > 1$ tais que:

$$|Df^n(f(c))| \geq C\lambda^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então f possui medida acip. A condição $|Df^n(f(c))| \geq C\lambda^n$ é comumente chamada de condição de Collet-Eckmann.

Desde então, no contexto de aplicações unimodais, foram estabelecidos diversos critérios semelhantes para se garantir a existência de medida acip. Em [NvS91], por exemplo, provou-se que qualquer aplicação unimodal f que satisfaça:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Df^n(f(c))|^{-\frac{1}{\ell}} < \infty$$

onde ℓ é a ordem do ponto crítico c , também possui medida acip. Tal condição é chamada condição de Nowicki-van Strien. É importante observar que a condição de Collett-Eckmann implica a condição de Nowicki-van Strien, sendo portanto mais restritiva.

Outro resultado semelhante foi obtido em [SSB03], onde provou-se que se $\frac{|I_{n+1}|}{|I_n|} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então f possui acip.

Por fim, em [SSBRL08], provou-se o seguinte teorema:

5.4.6 Teorema. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação multimodal de classe C^3 , tal que todos os seus pontos críticos sejam não flat e todos os seus pontos periódicos sejam repulsores hiperbólicos. Assuma também que para quaisquer de seus pontos críticos c verifique-se a seguinte condição:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Df^n(f(c))| = \infty$$

Então f possui medida acip.

Capítulo 6

Prova da existência de acip

6.1 Introdução

Tendo definido a combinatória de Fibonacci generalizada, procedemos agora a provar como certas aplicações que apresentam essa combinatória possuem medida acip. Ao longo de todo esse capítulo vamos supor que as aplicações f pertencem ao conjunto \mathcal{C}_d , definido anteriormente. Supomos também que f não só possui combinatória de Fibonacci generalizada, mas também que $k_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em resumo, o objetivo desse capítulo é provar o teorema 2.1.3.

6.2 Extensão das vizinhanças do ponto crítico

Daqui em diante vamos supor que $f \in \mathcal{C}_d^*$. Considerando as aplicações $\mathcal{R}_{n-1}|_{I_n} = f^{s_n} = f_n$ (definimos $f_0 = f|_{M_1}$), nosso objetivo aqui é encontrar intervalos $U_n \supset I_n$ tais que $f^{s_n}|_{U_n}$ tenha c como único ponto crítico. Quanto mais centralizado $f^{s_n}(I_n)$ estiver de $f^{s_n}(U_n)$, melhor o controle de distorção de $f^{s_n-1}|_{f(I_n)}$.

Definimos os pontos $f^m(c) = c_m$ com $m \geq 1$ para quaisquer pontos da órbita crítica. Dentre eles destacamos os pontos $c_{s_n} \in M_n$. Também definimos os pontos $z_n = (f_n)^{-1}(c)$, $\hat{z}_n = (f_n)^{-k_n}(c)$, $\bar{z}_n = (f_n)^{-1}(f_{n-1}(\hat{z}_n))$ e $\hat{c}_{s_n} = c_{s_n+(k_{n-1}-1)s_{n-1}}$.

6.2.1 Lema. *Sejam z_n , \hat{z}_n e \bar{z}_n definidos anteriormente. Temos que:*

1. z_n encontra-se entre os pontos $c_{s_{n-1}}$ e $\hat{c}_{s_{n+1}}$
2. \hat{z}_n encontra-se entre os pontos $c_{s_{n-1}}$ e $c_{s_{n+1}}$
3. \bar{z}_n encontra-se entre os pontos c e z_n

Demonstração. 1. Como $f_n(c) = c_{s_n}$, temos que z_n e c_{s_n} encontram-se de lados opostos de c . Como $z_n \in I_n$, $c_{s_{n-1}} \notin I_n$ e ambos estão do mesmo lado de c , concluímos que $z_n \in (c_{s_{n-1}}, c)$. Resta provar que $\hat{c}_{s_{n+1}} \in (z_n, c)$. Mas tomando a imagem dos três pontos por f_n , temos que $c_{s_{n+2}} \in (c, c_{s_n})$; onde $f_n(\hat{c}_{s_{n+1}}) = c_{s_{n+2}}$, $f_n(z_n) = c$ e $f_n(c) = c_{s_n}$, o que termina a prova.

2. Basta observar que $c_{s_{n+1}} = f_n^{-k_n+1}(\hat{c}_{s_{n+1}})$, $\hat{z}_n = f_n^{-k_n+1}(z_n)$ e usar o item anterior.
3. Basta aplicar f_n nos três pontos e constatar que $f_{n-1}(\hat{z}_{n-1}) \in [c, c_{s_n})$.

□

6.2.2 Definição. Defina agora $g_1, g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como os levantamentos de f tais que $g_1|_{I_1} = f|_{I_1} = f_1$ e $g_0|_{M_1} = f|_{M_1} = f_0$ respectivamente. Para $n \geq 2$, definimos indutivamente $g_n = g_{n-2}^{k_{n-2}} \circ g_{n-1}$

6.2.3 Lema. Seja $e_n = \frac{c_{s_n} - c}{|c_{s_n} - c|}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma constante $A_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$g_{n-1} \circ g_n - g_n \circ g_{n-1} = e_n A_n$$

Demonstração. Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $L_n \geq 2$ tal que $g_n(x+1) = g_n(x) + L_n$. Por definição, temos que $L_0 = L_1 = 2$; enquanto da fórmula $g_n = g_{n-2}^{k_{n-2}} \circ g_{n-1}$ depreendemos que $L_n = L_{n-1} L_{n-2}^{k_{n-2}}$ quando $n \geq 2$. Tendo em mente as constantes L_n , o resto da prova se dá por indução.

- Para $n = 1$, usamos o fato de que $g_1 = g_0 + 1$ para provar que $g_0 \circ g_1 - g_1 \circ g_0 = 1 = e_1$
- Hipótese de Indução: $g_{n-1} \circ g_n - g_n \circ g_{n-1} = e_n A_n$
- Prova da propriedade para $n + 1$: Temos que

$$g_n \circ g_{n+1} = g_n \circ g_{n-1}^{k_{n-1}} \circ g_n = g_{n-1}^{k_{n-1}} \circ g_n \circ g_n - e_n A_n \left(\sum_{i=0}^{k_{n-1}-1} L^i \right) = g_{n+1} \circ g_n + e_{n+1} A_{n+1}$$

onde $A_{n+1} = A_n \left(\sum_{i=0}^{k_{n-1}-1} L^i \right)$, o que termina a prova. Observe que usamos a igualdade

$-e_n = e_{n+1}$, que é consequência direta dos pontos c_{s_n} alternarem de lado em relação a c .

□

6.2.4 Lema. Para todas as aplicações $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $g_n|_{I_n} = f_n|_{I_n}$

Demonstração. Mais uma vez procedemos por indução:

- Para $n = 1$, é segue por definição que $g_1|_{I_1} = f_1|_{I_1}$
- Para $n = 2$, temos que :

$$f_2|_{I_2} = (f_0|_{M_1})^{k_0} \circ f_1|_{I_1} = (g_0|_{M_1})^{k_0} \circ g_1|_{M_1} = g_2|_{M_2}$$

- Hipótese de Indução: Para $k \leq n$ temos $g_k|_{I_k} = f_k|_{I_k}$
- Prova para $n + 1$

$$\text{Temos que } f_{n+1}|_{I_{n+1}} = (f_{n-1}|_{I_{n-1}})^{k_{n-1}} \circ f_n|_{I_n} = (g_{n-1}|_{I_{n-1}})^{k_{n-1}} \circ g_n|_{I_n} = g_{n+1}|_{I_{n+1}}$$

□

6.2.5 Lema. Para $n \geq 1$, seja ∂_n o ponto da fronteira de $(0, 1)$ tal que $c_{s_n} \in (c, \partial_n)$. Seja também $\gamma_n = g_n^{-1}(\partial_n)$. Portanto temos:

1. $\gamma_n \in (\bar{z}_n, c_{s_{n-1}})$, para todo $n \geq 2$
2. $\gamma_n = g_{n-1}^{-1} \circ g_{n-2}^{-k_{n-2}+1}(\gamma_{n-2})$, para $n \geq 3$.
3. $\gamma_{n+1} \in (\bar{z}_{n-1}, c)$, para $n \geq 2$.

Demonstração. 1. Aplicando g_n no intervalo $(\bar{z}_n, c_{s_{n-1}})$, obtemos

$$g_n(\bar{z}_n, c_{s_{n-1}}) = (g_{n-1}(\hat{z}_{n-1}), g_{n-1} \circ g_n(c) - e_n A_n)$$

Usando a definição de e_n dada anteriormente e o fato de $g_{n-1} \circ g_n(c) \in (0, 1)$, fica claro que:

$$\partial_n \in (g_{n-1}(\hat{z}_{n-1}), g_{n-1} \circ g_n(c) - e_n A_n)$$

Do que segue imediatamente que $\gamma_n \in (\bar{z}_n, c_{s_{n-1}})$, pois $g_n(\gamma_n) = \partial_n$.

2. Basta observar que:

$$\partial_n = g_n(\gamma_n) = g_{n-2}^{k_{n-2}} \circ g_{n-1}(\gamma_n) = g_{n-2}(g_{n-2}^{k_{n-2}-1} \circ g_{n-1}(\gamma_n)) = \partial_{n-2}$$

Como $g_{n-2}(\gamma_{n-2}) = \partial_{n-2}$ e g_{n-2} é um homeomorfismo, o resultado segue de imediato.

3. Considere a seguinte afirmação: para todo $n \in \mathbb{N}$, têm-se:

$$g_n(x) < 0 \quad \text{para todo } x < 0 \quad \text{e} \quad g_n(x) > 1 \quad \text{para todo } x > 1$$

A prova dessa afirmação se dá por indução:

- Para $n = 0$ ou 1 , observe que $g_0(0) = -1$, $g_0(1) = 1$, $g_1(0) = 0$ e $g_1(1) = 2$. Concluimos portanto que essa afirmação é válida para $n = 0, 1$
- Hipótese de Indução: suponha que a afirmação seja válida para $i = 0, 1, \dots, n-1$
- Para $i = n$, temos que

$$g_n = (g_{n-2})^{k_{n-2}} \circ g_{n-1}$$

Como as aplicações g_n são homeomorfismos, concluímos que $g_n(x) > 1$ para todo $x > 1$ e $g_n(x) < 0$ para todo $x < 0$, como queríamos demonstrar.

Seguindo o mesmo método usado para provar o item 1 desse lema, provaremos que

$$\partial_{n+1} = g_{n+1}(\gamma_{n+1}) \in g_{n+1}(\bar{z}_{n-1}, c)$$

Observe que:

$$g_{n+1}(\bar{z}_{n-1}) = g_{n-1}^{k_{n-1}} \circ g_n(\bar{z}_{n-1}) = g_{n-1}^{k_{n-1}} \circ g_{n-2}(c) = g_{n-1}^{k_{n-1}-1} \circ (g_{n-2} \circ g_{n-1}(c) - e_{n-1} A_{n-1})$$

Usando as definições de e_n , ∂_{n+1} e a afirmação que acabamos de provar, segue imediatamente que:

$$\partial_{n+1} \in (c_{s_{n+1}}, g_{n-1}^{k_{n-1}-1} \circ (g_{n-2} \circ g_{n-1}(c) - e_{n-1} A_{n-1}))$$

□

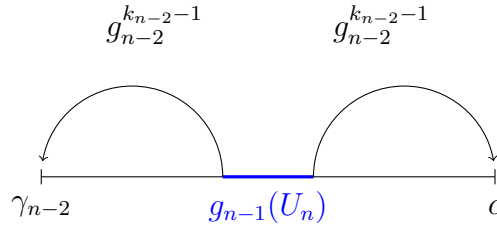
6.2.6 Lema. Para $n \geq 3$, a restrição de g_n ao intervalo $(\gamma_n, \bar{z}_{n-1})$ é um homeomorfismo de classe C^1 , sobrejetivo em $(\partial_n, c_{s_{n-2}})$ tendo c como único ponto crítico.

Demonstração. Definimos os intervalos $U_1 = I_1$, $U_2 = g_1^{-1} \circ g_0^{-k_0+1}(M_1)$ e $U_n = (\gamma_n, \bar{z}_{n-1})$ para $n \geq 3$. Dividimos agora a prova desse lema em dois passos: provar que $U_{n+1} \subset U_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e provar que $g_n|_{U_n}$ é um homeomorfismo de classe C^1 tendo c como único ponto crítico.

- Prova de que $U_{n+1} \subset \bar{U}_n$

Para $n \geq 3$, a prova de que $U_{n+1} \subset U_n$ segue diretamente da definição de U_n e dos Lemas 6.2.5 e 6.2.1, que tratam da localização relativa dos pontos γ_n , \bar{z}_n e c . Resta provar que $U_2 \subset \bar{U}_1$ e $U_3 \subset \bar{U}_2$. Quanto a $U_2 \subset \bar{U}_1$, basta observar que $g_1(I_1) = (0, 1)$ e que $g_0^{-k_0+1}(M_1) \subset (0, 1)$. Para provar que $U_3 \subset \bar{U}_2$, prova-se que γ_3 e \bar{z}_2 pertencem a \bar{U}_2 . Mas pelo segundo item de 6.2.5, temos que $g_2(\gamma_3) = g_1^{-k_1+1}(\gamma_1)$, com $g_1^{-k_1+1}(\gamma_1) \in [0, 1]$. Da mesma forma, $g_2(\bar{z}_2) = g_1(\hat{z}_1) \in [0, 1]$. Como $g_2(\bar{U}_2) = [0, 1]$, segue o resultado.

- Prova de que $g_n|_{U_n}$ possui um único ponto crítico

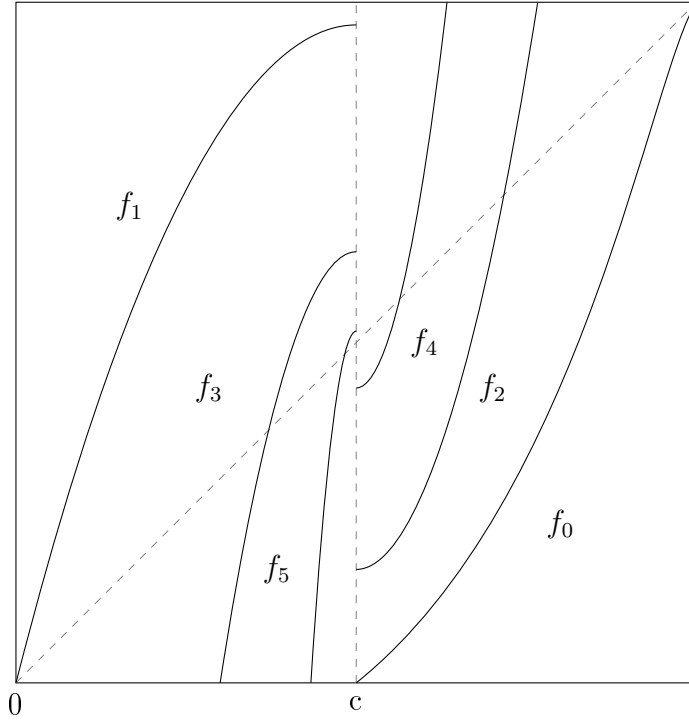


Observe que $g_1(U_1) = (0, 1) = g_2(U_2)$. A primeira igualdade é imediata enquanto a segunda segue do fato de, pela definição de U_2 , termos $g_0^{k_0-1} \circ g_1(U_2) = M_1$. Também segue da definição de U_1 que $g_1|_{U_1}$ possui um único ponto crítico. Quanto a U_2 , basta observar que $g_1(U_2) = g_0^{-k_0+1}(M_1)$, do que concluímos ser c o único ponto crítico de $g_2|_{U_2}$.

Para $n \geq 3$, procedemos por indução supondo que a propriedade seja válida para $n-1$ e $n-2$. Como $U_n \subset U_{n-1}$, temos que $g_{n-1}|_{U_n}$ possui c como seu único ponto crítico. Ademais,

$g_{n-1}(U_n) \subset (\gamma_{n-2}, c)$, onde (γ_{n-2}, c) é uma componente de $U_{n-2} \setminus \{c\}$. De fato $g_{n-1}(U_{n-2}) = (g_{n-1}(\gamma_n, g_{n-2}(\hat{z}_n))) = g_{n-2}^{-k_{n-2}+1}(\gamma_{n-2}, c)$, o que implica que $g_{n-2}^{k_{n-2}}|_{g_{n-1}(U_n)}$ é um difeomorfismo do que segue o resultado. □

O Lema 6.2.6 é o principal resultado dessa seção. Os Lemas 6.2.1, 6.2.3, 6.2.4 e 6.2.5 são lemas auxiliares que estabelecem a ordem relativa das pré imagens do bordo (pontos γ_n), pré imagens do ponto crítico (pontos \bar{z}_n , \hat{z}_n e z_n) e pontos da órbita crítica (c_{s_n}). Conhecer a distribuição desses pontos no intervalo é um pré requisito para se estender as aplicações $f^{s_n}|_{I_n}$, mantendo a presença de apenas um ponto crítico. Sobre as extensões $f^{s_n}|_{U_n}$ obtidas em 6.2.6, destaca-se o fato de um dos pontos do bordo de U_n ser levado por f^{s_n} no bordo de $(0, 1)$.



Sejam $\hat{\gamma}_n = f_n^{-(k_n-1)}(\gamma_n)$ e $\hat{x}_n = f_n(\hat{z}_n)$. Observe que as definições de $\hat{\gamma}_n$ e \hat{x}_n só fazem sentido caso $k_n \geq 2$. Definimos também $q^f = f(q)$ para todo $q \in (0, 1)$.

6.2.7 Lema. Para $n \geq 3$, temos:

1. f^{s_n-1} aplica (γ_n^f, c^f) difeomorficamente em (∂_n, c_{s_n}) .
2. Quando $k_n \geq 2$, $f^{k_n s_n-1}$ aplica $(\hat{\gamma}_n^f, \hat{x}_n^f)$ difeomorficamente em (∂_n, c_{s_n}) .
3. Quando $k_n \geq 2$, $f^{(k_n-1)s_n-1}$ aplica $(f^{s_n}(\hat{\gamma}_n^f), f^{s_n}(\hat{x}_n^f))$ difeomorficamente em (∂_n, c_{s_n}) .

Demonstração. 1. O Lema 6.2.6 garante que $f_n|_{(\gamma_n, \bar{z}_n)}$ possui um único ponto crítico c . Como $(\gamma_n, c) \subset (\gamma_n, \bar{z}_n)$, segue que $f_n|_{(\gamma_n, c)}$ é um difeomorfismo. Como $(c^f, \gamma_n^f) = f(\gamma_n, c)$, segue também que a aplicação:

$$f^{s_n-1}|_{(c^f, \gamma_n^f)}$$

é um difeomorfismo, do que segue o resultado.

2. Pelas definições de f_n e γ_n , temos que $f_n(\gamma_n, c) = (\partial_n, c_{s_n}) \supset (\gamma_n, c)$. Consequentemente, $(f_n)^{-i}(\gamma_n, c) \subset (\gamma_n, c)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$(\hat{\gamma}_n, \hat{x}_n) \subset f_n(\hat{\gamma}_n, \hat{x}_n) \subset f_n^2(\hat{\gamma}_n, \hat{x}_n) \subset \dots \subset f_n^{k_n-1}(\hat{\gamma}_n, \hat{x}_n) = (\gamma_n, c)$$

Como $f_n|_{(\gamma_n, c)}$ é um difeomorfismo, concluímos que $f_n^{k_n}|_{(\hat{\gamma}_n, \hat{x}_n)}$ também é; o que por sua vez implica que $f^{k_n s_n-1}|_{(\hat{\gamma}_n^f, \hat{x}_n^f)}$ também é um difeomorfismo.

3. A prova é análoga à do item anterior.

□

6.3 Derivadas da Órbita Crítica

Tendo definido anteriormente as extensões U_n dos intervalos I_n , nosso próximo passo será fornecer uma primeira estimativa para a razão:

$$\frac{(Df^{s_{n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_n}(c^f)Df^{s_{n-1}}(c^f)}$$

Nossa principal ferramenta será a expansão da razão cruzada, que usaremos em diversos subintervalos de $f(U_n)$ para os quais $f^{s_{n-1}}$, $f^{k_{n-1}s_{n-1}-1}$ ou $f^{(k_{n-1}-1)s_{n-1}-1}$ seja um difeomorfismo.

Sejam $d_n = |c_{s_n} - c|$, $d_n^f = |c_{s_n}^f - c^f|$, $\lambda_n = \frac{d_n}{d_{n+2}}$ e $\lambda_n^f = \frac{d_n^f}{d_{n+2}^f}$.

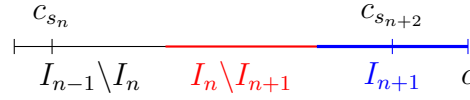
6.3.1 Lema. *Seja $\alpha > 0$ dada pelos real bounds e λ_n definido anteriormente. Então*

$$\lambda_n \geq 1 + \alpha$$

para $n \geq 2$. Ademais, se $k_{n+1} \geq 2$, temos:

$$\frac{d_n}{d_{n+2+(n+1)}} \geq 1 + \alpha.$$

Demonstração. Observe que existe uma componente R de $I_n \setminus I_{n+1}$ entre c_{s_n} e $c_{s_{n+2}}$. Isso ocorre pois $c_{s_{n+2}} \in I_{n+1}$ enquanto $c_{s_n} \in I_{n-1} \setminus I_n$, como podemos ver na figura abaixo:



Por real bounds temos $d_n \geq R + d_{n+2} \geq \alpha|I_{n+1}| + d_{n+2} \geq (1 + \alpha)d_{n+2}$ do que segue que $\lambda_n \geq 1 + \alpha$.

Quando $k_{n+1} \geq 2$, temos que $\frac{d_n}{d_{n+2+(n+1)}} \geq \lambda_n \geq 1 + \alpha$ do que segue a última parte do lema. \square

6.3.2 Lema. *Para n suficientemente grande existem funções $\theta_n^{(1)}$, $\theta_n^{(2)}$ e $\theta_n^{(3)}$ tendendo a 1 quando $n \rightarrow \infty$ tais que :*

$$1. d_n^f = \theta_n^{(1)} \vartheta d_n^\ell$$

$$2. Df(c_{s_n}) = \theta_n^{(2)} \ell \vartheta d_n^{\ell-1}$$

$$3. \frac{d_n^f}{d_n^f - d_{n+2}^f} = \theta_n^{(3)} \frac{d_n^\ell}{d_n^\ell - d_{n+2}^\ell} = \theta_n^{(3)} \frac{1}{1 - \lambda_n^{-\ell}}$$

Demonstração. 1. Segue imediatamente da condição de ordem do ponto crítico.

2. Tomando a derivada equação da condição de ordem do ponto crítico, temos:

$$Df(x) = \vartheta \ell |x - c|^{\ell-1} (1 + \psi_1(x)) + \varsigma(x)$$

Onde $\psi(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow c$ e $\varsigma(x)$ é um termo de erro que também tende a 0 quando $x \rightarrow c$.

3. Considere a função $\varepsilon(a, x) = \frac{1-x}{1-ax}$, com $x \in [0, (1+\alpha)^{-1}]$ e $a < 1+\alpha$, onde α é a constante dada em 6.3.1. Nós temos :

$$\frac{d_n^f}{d_n^f - d_{n+2}^f} = \frac{1}{1 - \frac{d_{n+2}^f}{d_n^f}} = \frac{1}{1 - \frac{\theta_{n+2}^{(2)} d_{n+2}^\ell}{\theta_n^{(2)} d_n^\ell}} = \frac{1}{1 - \frac{\theta_{n+2}^{(2)}}{\theta_n^{(2)}} \lambda_n^{-\ell}} = \theta_n^{(3)} \frac{1}{1 - \lambda_n^{-\ell}}$$

Isolando $\theta_n^{(3)}$ na última igualdade obtemos $\theta_n^{(3)} = \varepsilon\left(\frac{\theta_{n+2}^{(2)}}{\theta_n^{(2)}}, \lambda_n^{-\ell}\right)$. Como, pelo item dois desse lema, $\frac{\theta_{n+2}^{(2)}}{\theta_n^{(2)}} \rightarrow 1$ e $\varepsilon(a, x)$ tende uniformemente para 1 quando $a \rightarrow 1$, concluímos que $\theta_n^{(3)} \rightarrow 1$. □

6.3.3 Lema. Para n grande o suficiente, existe uma constante $K_n^{(1)}$ que tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$ tal que :

$$|Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f)| \geq K_n^{(1)} \frac{d_n + \tilde{d}_{n+1}}{d_{n+1}^f} \frac{d_{n-1}^f}{d_{n-1}^f - d_{n+1}^f}$$

Demonstração. Sejam $g = f^{s_n-1}$, $T = (\gamma_n^f, c^f)$, $J = \{c_{s_{n+1}}^f\}$, $L = ((\gamma_n^f, c_{s_{n+1}}^f))$ e $R = (c_{s_{n+1}}^f, c^f)$. Observe que, por 6.2.7, g aplica os intervalos T, J, L e R difeomorficamente em:

$$g(T) = (c_{s_n}, \partial_n), g(J) = \{c_{t_{n+1}}\}, g(L) = (c_{t_{n+1}}, \partial_n) \text{ e } g(R) = (c_{s_n}, c_{t_{n+1}})$$

Usando a expansão da razão cruzada obtemos:

$$\begin{aligned} Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f) &\geq \frac{g(L)}{g(T)} \frac{g(R)}{R} \frac{T}{L} \\ &\geq \frac{g(L)}{g(T)} \frac{d_n + \tilde{d}_{n+1}}{d_{n+1}^f} \frac{\gamma_n^f}{\gamma_n^f - d_{n+1}^f} \end{aligned}$$

Como $0 < \tilde{d}_n < d_n$ e $0 < \gamma_n^f < d_{n-1}^f$, obtemos:

$$Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f) \geq K_n^{(1)} \frac{d_n + \tilde{d}_{n+1}}{d_{n+1}^f} \frac{d_{n-1}^f}{d_{n-1}^f - d_{n+1}^f}$$

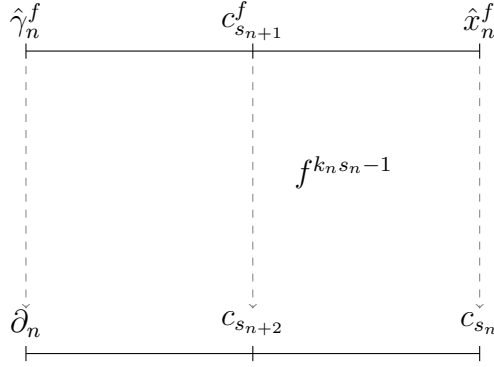
Como queríamos demonstrar. □

6.3.4 Lema. Para n grande o suficiente, existe uma constante $K_{n-1}^{(1)}$ que tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$ tal que :

$$|Df^{k_{n-1}s_{n-1}-1}(c_{s_n}^f)| \geq K_{n-1}^{(1)} \frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{d_n^f}$$

Demonstração. Sejam $g = f^{k_{n-1}s_{n-1}-1}$, $T = (\hat{x}_{n-1}^f, \hat{\gamma}_{n-1}^f)$, $J = \{c_{s_n}^f\}$, $L = (c_{s_n}^f, \hat{\gamma}_{n-1}^f)$ e $R = (\hat{x}_{n-1}^f, c_{s_n}^f)$. Observe que, por 6.2.7, g aplica os intervalos T, J, L e R difeomorficamente em:

$$g(T) = (c_{s_{n-1}}, \partial_{n-1}), g(L) = (c_{s_{n+1}}, \partial_{n-1}), g(J) = \{c_{s_{n+1}}\} \text{ e } g(R) = (c_{s_{n-1}}, c_{s_{n+1}})$$



Em seguida usamos a expansão da razão cruzada para obter:

$$\begin{aligned}
Df^{k_{n-1}s_{n-1}-1}(c_{t_n}^f) &\geq \frac{g(L)}{g(T)} \frac{g(R)}{R} \frac{T}{L} \\
&\geq \frac{g(L)}{g(T)} \frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{\tilde{d}_n^f - \hat{x}_{n-1}^f} \frac{\hat{x}_{n-1}^f - \hat{\gamma}_{n-1}^f}{\hat{\gamma}_{n-1}^f - \tilde{d}_n^f} \\
&\geq K_{n-1}^{(1)} \frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{\tilde{d}_n^f}
\end{aligned}$$

□

6.3.5 Lema. *Seja $t_n = s_n + s_{n-1}$. Para n suficientemente grande temos:*

$$Df^{(k_{n-1}-1)s_{n-1}-1}(c_{t_n}^f) \geq K_{n-1} \frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{\tilde{d}_n^f}$$

Demonstração. Sejam $g = f^{(k_{n-1}-1)s_{n-1}-1}$, $T = (f^{s_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}^f), f^{s_{n-1}}(\hat{\gamma}_{n-1}^f))$, $J = \{c_{t_n}^f\}$, $L = (c_{t_n}^f, f^{s_{n-1}}(\hat{\gamma}_{n-1}^f))$ e $R = (f^{s_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}^f), c_{t_n}^f)$. Observe que, por 6.2.7, g aplica os intervalos T, J, L e R difeomorficamente em:

$$g(T) = (c_{s_{n-1}}, \partial_{n-1}), g(L) = (c_{s_{n+1}}, \partial_{n-1}), g(J) = \{c_{s_{n+1}}\} \text{ e } g(R) = (c_{s_{n-1}}, c_{s_{n+1}})$$

Em seguida usamos a expansão da razão cruzada para obter:

$$\begin{aligned}
Df^{(k_{n-1}-1)s_{n-1}-1}(c_{t_n}^f) &\geq \frac{g(L)}{g(T)} \frac{g(R)}{R} \frac{T}{L} \\
&\geq \frac{g(L)}{g(T)} \frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{\tilde{d}_n^f - f^{s_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}^f)} \frac{f^{s_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}^f) - f^{s_{n-1}}(\hat{\gamma}_{n-1}^f)}{\hat{\gamma}_{n-1}^f - \tilde{d}_n^f} \\
&\geq K_{n-1}^{(1)} \frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{\tilde{d}_n^f}
\end{aligned}$$

□

6.3.6 Lema. *Para n grande o suficiente, existe uma constante $K_{n-1}^{(1)}$ que tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$ tal que :*

$$|Df^{s_{n-1}-1}(c^f)| \leq K_n^{(1)} \frac{d_{n-1} + \tilde{d}_n}{d_n^f} \frac{d_{n-2}^f}{d_{n-2}^f - d_{n+1}^f}$$

Demonstração. Sejam $h = f^{s_{n-1}-1}$, $T = (\gamma_{n-1}^f, c^f)$, $R = \{c^f\}$, $J = (c^f, c_{s_n}^f)$ e $L = (c_{s_n}^f, \gamma_n^f)$. Observe que, por 6.2.7, h aplica os intervalos T, J, L e R difeomorficamente em:

$$g(T) = (\partial_{n-1}, c_{s_{n-1}}), g(R) = \{c_{s_{n-1}}\}, g(J) = (c_{s_{n-1}}, c_{t_n}) \text{ e } g(L) = (c_{t_n}, \partial_{n-1})$$

Usando a expansão da razão cruzada obtemos:

$$\begin{aligned} Df^{s_{n-1}-1}(c^f) &\leq \frac{h(T)}{h(L)} \frac{h(J)}{J} \frac{L}{T} \\ &\leq \frac{g(T)}{g(L)} \frac{d_{n-1} + \tilde{d}_n}{d_n^f} \frac{d_{n-2}^f}{d_{n-2}^f - d_n^f} \end{aligned}$$

Temos então que $\frac{g(T)}{g(L)} = K_{n-1}^{(1)} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, o que termina a prova. \square

No próximo lema, começamos a estimar as derivadas na órbita crítica. Antes devemos introduzir a seguinte definição:

$$q_n = \frac{Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f)}{Df^{s_n-1}(c^f)}$$

6.3.7 Lema. *Para n suficientemente grande, existem funções $K_n^{(2)} \rightarrow 1$ e $\hat{K}_n^{(2)} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$ tais que:*

$$\frac{(Df^{s_{n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_n}(c^f)Df^{s_{n-1}}(c^f)} \geq K_n^{(2)} \lambda_{n-1}^{2-\ell} \ell^2 \frac{q_{n-1}}{q_n} \frac{1 - \lambda_n^{-1}}{1 - \lambda_{n-2}^{-\ell}} \frac{1 - \lambda_{n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{n-1}^{-\ell}},$$

Demonstração. Usando a regra da cadeia obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{(Df^{s_{n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_n}(c^f)Df^{s_{n-1}}(c^f)} &= \frac{[Df^{s_n-1}(c^f)Df(c_{s_n})Df^{k_{n-1}s_{n-1}-1}(c_{s_n}^f)Df(c_{s_{n+1}}^f)]^2}{Df^{s_n-1}(c^f)Df(c_{s_n})Df^{s_{n-1}-1}(c^f)Df(c_{s_{n-1}})} \\ &= (Df^{k_{n-1}s_{n-1}}(c_{s_n}^f))^2 \frac{Df^{s_n-1}(c^f)Df(c_{s_n})}{Df^{s_{n-1}-1}(c^f)Df(c_{s_{n-1}})} = \\ &= \frac{q_{n-1}}{q_n} (Df^{k_{n-1}s_{n-1}}(c_{s_n}^f))^2 \frac{Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f)Df(c_{s_n})}{Df^{s_{n-1}-1}(c_{s_n}^f)Df(c_{s_{n-1}})} \\ &= \frac{q_{n-1}}{q_n} \left(Df^{(k_{n-1}-1)s_{n-1}}(c_{t_n}^f)Df^{s_{n-1}-1}(c_{s_n}^f)Df(c_{t_n}) \right)^2 \frac{Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f)Df(c_{s_n})}{Df^{s_{n-1}-1}(c_{s_n}^f)Df(c_{s_{n-1}})} \\ &= \frac{q_{n-1}}{q_n} \left(Df^{(k_{n-1}-1)s_{n-1}}(c_{t_n}^f) \right)^2 Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f)Df^{s_{n-1}-1}(c_{s_n}^f) \frac{Df(c_{s_n})(Df(c_{t_n}))^2}{Df(c_{s_{n-1}})} \\ &= \frac{q_{n-1}}{q_n} \left(Df^{(k_{n-1}-1)s_{n-1}-1}(c_{t_n}^f) \right)^2 Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f)Df^{s_{n-1}-1}(c_{s_n}^f) \frac{Df(c_{s_n})(Df(c_{t_n})Df(c_{s_{n+1}}))^2}{Df(c_{s_{n-1}})} \end{aligned}$$

Dividimos essa expressão em dois termos:

- Termo 1: $\frac{Df(c_{s_n})(Df(c_{t_n})Df(c_{s_{n+1}}))^2}{Df(c_{s_{n-1}})}$
- Termo 2: $\frac{q_{n-1}}{q_n} \left(Df^{(k_{n-1}-1)s_{n-1}-1}(c_{t_n}^f) \right)^2 Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f) Df^{s_n-1}(c_{s_n}^f)$

Usando 6.3.2 estimamos o Termo 1:

$$\frac{\theta_n^{(2)} \left(\theta_n^{(2)} \right)^2 \left(\theta_{n+1}^{(2)} \right)^2}{\theta_{n-1}^{(2)}} \vartheta^4 \ell^4 \frac{d_n^{\ell-1} \tilde{d}_n^{2\ell-2} d_{n+1}^{2\ell-2}}{d_{n-1}^{\ell-1}} \quad (6.1)$$

Já para estimar o Termo 2 usamos os lemas 6.3.3, 6.3 e 6.3.5

$$\begin{aligned} & \frac{q_{n-1}}{q_n} \left(Df^{(k_{n-1}-1)s_{n-1}-1}(c_{t_n}^f) \right)^2 Df^{s_n-1}(c_{s_{n+1}}^f) Df^{s_n-1}(c_{s_n}^f) \\ & \geq \frac{q_{n-1}}{q_n} K_n^{(2)} \left(\frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{\tilde{d}_n^f} \right)^2 \frac{d_{n-1} + \tilde{d}_n}{d_n^f} \frac{d_{n-2}^f}{d_{n-2}^f - d_n^f} \frac{d_n + \tilde{d}_{n+1}}{d_{n+1}^f} \frac{d_{n-1}^f}{d_{n-1}^f - d_{n+1}^f} \\ & \geq \frac{q_{n-1}}{q_n} K_n^{(2)} \left(\frac{1}{\theta_n^{(1)} \vartheta} \right)^4 \left(\frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{\tilde{d}_n^\ell} \right)^2 \frac{d_{n-1} + \tilde{d}_n}{d_n^\ell} \frac{d_{n-2}^f}{d_{n-2}^f - d_n^f} \frac{d_n + \tilde{d}_{n+1}}{d_{n+1}^\ell} \frac{d_{n-1}^f}{d_{n-1}^f - d_{n+1}^f} \quad (6.2) \end{aligned}$$

Combinando as estimativas de 6.1 e 6.2, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{(Df^{s_{n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_n}(c^f) Df^{s_{n-1}}(c^f)} \geq \\ & \geq K_n^{(3)} \ell^4 \frac{q_{n-1}}{q_n} \left(\frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{\tilde{d}_n} \right)^2 \frac{1}{1 - \lambda_{n-2}^{-\ell}} \frac{1}{1 - \lambda_{n-1}^{-\ell}} \frac{d_{n+1}^{\ell-2}}{d_{n-1}^{\ell-2}} \\ & \geq K_n^{(3)} \ell^4 \frac{q_{n-1}}{q_n} \left(\frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{d_n} \right)^2 \frac{1}{1 - \lambda_{n-2}^{-\ell}} \frac{1}{1 - \lambda_{n-1}^{-\ell}} \frac{d_{n+1}^{\ell-2}}{d_{n-1}^{\ell-2}} \\ & \geq K_n^{(3)} \ell^4 \frac{q_{n-1}}{q_n} (1 - \lambda_{n-1}^{-1})^2 \frac{1}{1 - \lambda_{n-2}^{-\ell}} \frac{1}{1 - \lambda_{n-1}^{-\ell}} \frac{d_{n+1}^{\ell-2}}{d_{n-1}^{\ell-2}} \left(\frac{d_{n-1}}{d_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Onde:

$$\hat{K}_n^{(2)} = K_n^{(1)} K_{n-1}^{(1)} \frac{\theta_{n-1}^{(3)} \theta_{n-2}^{(3)} \theta_n^{(2)} \left(\theta_{n+1}^{(2)} \right)^2}{\theta_{n+1}^{(1)} \theta_n^{(1)} \theta_{n-1}^{(2)}}$$

Como consequência direta de 6.3.2 e de , concluímos que $K_n^{(2)} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. \square

6.4 Crescimento Exponencial da Derivada

Partindo do resultado obtido no Lema 6.3.7, nosso próximo passo é provar que $Df^{s_n}(c^f) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Utilizando a desigualdade obtida em 6.3.7, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\frac{(Df^{s_{n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_n}(c^f)Df^{s_{n-1}}(c^f)} &\geq K_n^{(3)}\ell^4\frac{q_{n-1}}{q_n}(1-\lambda_{n-1}^{-1})^2\frac{1}{1-\lambda_{n-2}^{-\ell}}\frac{1}{1-\lambda_{n-1}^{-\ell}}\frac{d_{n+1}^{\ell-2}}{d_{n-1}^{\ell-2}}\left(\frac{d_{n-1}}{d_n}\right)^2 \\
&\geq K_n^{(3)}\ell^4\frac{q_{n-1}}{q_n}\frac{1-\lambda_{n-1}^{-1}}{1-\lambda_{n-2}^{-1}}\frac{1-\lambda_{n-2}^{-1}}{1-\lambda_{n-2}^{-\ell}}\frac{1-\lambda_{n-1}^{-1}}{1-\lambda_{n-1}^{-\ell}}\frac{d_{n+1}^{\ell-2}}{d_{n-1}^{\ell-2}}\left(\frac{d_{n-1}}{d_n}\right)^2 \\
&\geq \frac{P_{n-1}}{P_n}\sigma_{n-1}\ell^2\left(\frac{d_{n-1}}{d_n}\right)^2
\end{aligned}$$

onde

$$\sigma_{n-1} = K_n^{(3)}\ell^2\frac{1-\lambda_{n-2}^{-1}}{1-\lambda_{n-2}^{-\ell}}\frac{1-\lambda_{n-1}^{-1}}{1-\lambda_{n-1}^{-\ell}}\left(\frac{d_{n-1}}{d_{n+1}}\right)^2$$

e

$$P_n = \frac{q_n}{1-\lambda_{n-1}^{-1}}$$

O que nos deixa com a seguinte desigualdade:

$$\frac{(Df^{s_{n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_n}(c^f)Df^{s_{n-1}}(c^f)} \geq \frac{P_{n-1}}{P_n}\sigma_{n-1}\ell^2\left(\frac{d_{n-1}}{d_n}\right)^2 \quad (6.3)$$

Em seguida, multiplicamos $\frac{(Df^{s_{n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_n}(c^f)Df^{s_{n-1}}(c^f)}$ e $\frac{(Df^{s_{n+2}}(c^f))^2}{Df^{s_{n+1}}(c^f)Df^{s_n}(c^f)}$ para obter:

$$\begin{aligned}
&\frac{(Df^{s_{n+2}}(c^f))^2}{Df^{s_{n+1}}(c^f)Df^{s_n}(c^f)}\frac{(Df^{s_{n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_n}(c^f)Df^{s_{n-1}}(c^f)} \\
&= \frac{(Df^{s_{n+2}}(c^f))^2 Df^{s_{n+1}}}{(Df^{s_n}(c^f))^2 Df^{s_{n-1}}} \geq \frac{P_{n-1}}{P_{n+1}}\sigma_n\sigma_{n-1}\ell^4\left(\frac{d_{n-1}}{d_{n+1}}\right)^2
\end{aligned}$$

Tomando log dos dois lados da inequação, obtemos:

$$X_{n+1} \geq X_{n-1} + \delta_{n-1} - \delta_{n+1} + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n + 2 \log \frac{d_{n-1}}{d_{n+1}} \quad (6.4)$$

Onde:

$$\delta_n = \log P_n$$

$$\epsilon_n = \log \sigma_n$$

$$X_n = \log (Df^{s_{n+1}}(c^f))^2 Df^{s_n}(c^f)$$

Nosso próximo passo será encontrar a solução geral para a equação em diferença 6.4, o que será feito no seguinte lema:

6.4.1 Lema. *Para $n \geq 3$ temos:*

$$X_n \geq \begin{cases} X_1 + \delta_1 - \delta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i + 2 \log \frac{d_1}{d_n}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ X_2 + \delta_2 - \delta_n + \sum_{i=2}^{n-1} \epsilon_i + 2 \log \frac{d_2}{d_n}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Demonstração. A prova se dá por indução. Observe que, por 6.4, temos:

$$X_3 \geq X_1 + \delta_1 - \delta_3 + \sum_{i=1}^2 \epsilon_i + 2 \log \frac{d_1}{d_3}$$

$$X_4 \geq X_2 + \delta_2 - \delta_4 + \sum_{i=2}^3 \epsilon_i + 2 \log \frac{d_2}{d_4}$$

Nossa hipótese de indução será:

$$X_n \geq \begin{cases} X_1 + \delta_1 - \delta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i + 2 \log \frac{d_1}{d_n}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ X_2 + \delta_2 - \delta_n + \sum_{i=2}^{n-1} \epsilon_i + 2 \log \frac{d_2}{d_n}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Para n par temos:

$$\begin{aligned} X_{n+2} &\geq X_n + \delta_n - \delta_{n+2} + \epsilon_{n+1} + \epsilon_n + 2 \log \frac{d_n}{d_{n+2}} \\ &\geq \left(X_2 + \delta_2 - \delta_n + \sum_{i=2}^{n-1} \epsilon_i + 2 \log \frac{d_2}{d_n} \right) + \delta_n - \delta_{n+2} + \epsilon_{n+1} + \epsilon_n + 2 \log \frac{d_n}{d_{n+2}} \\ &\geq X_2 + \delta_2 - \delta_{n+2} + \sum_{i=2}^{n+1} \epsilon_i + 2 \log \frac{d_2}{d_{n+2}} \end{aligned}$$

Por outro lado, se n é ímpar temos:

$$\begin{aligned} X_{n+2} &\geq X_n + \delta_n - \delta_{n+2} + \epsilon_{n+1} + \epsilon_n + 2 \log \frac{d_n}{d_{n+2}} \\ &\geq \left(X_1 + \delta_1 - \delta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i + 2 \log \frac{d_1}{d_n} \right) + \delta_n - \delta_{n+2} + \epsilon_{n+1} + \epsilon_n + 2 \log \frac{d_n}{d_{n+2}} \\ &\geq X_1 + \delta_1 - \delta_{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i + 2 \log \frac{d_1}{d_{n+2}} \end{aligned}$$

o que conclui a prova. \square

Nosso próximo passo será encontrar uma solução para tal que o limite inferior de $\frac{X_n}{n}$ seja positivo.

6.4.2 Lema. *Seja uma sequência que satisfaça 6.4.1. Então, caso $\liminf_n \epsilon_n > -\infty$, temos:*

$$\liminf_n \frac{X_n}{n} \geq \liminf_n \epsilon_n$$

Demonstração. Considere a equação em diferença presente em 6.4.1. Dividimos seu lado esquerdo em quatro termos:

- X_i
- $\delta_i - \delta_n$
- $\sum_{j=i}^{n-1} \epsilon_j$
- $2 \log \frac{d_n}{d_{n+2}}$

Onde $i = 1$ quando n é ímpar e $i = 2$ quando n é par. Como X_1 e X_2 são limitados, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_i}{n} \rightarrow 0$$

Quanto ao segundo termo, observe que 3.2.13 garante que δ_n possui limites superior e inferior, do que se depreende:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_i - \delta_n}{n} = 0$$

Em relação ao quarto termo, basta observar que $\frac{d_i}{d_n} \geq 1$, o que implica $\log \frac{d_i}{d_n} \geq 0$. Concluimos portanto que:

$$\liminf_n \frac{X_n}{n} \geq \liminf_n \frac{\sum_{j=i}^{n-1} \epsilon_j}{n} = \liminf_n \epsilon_n$$

□

6.4.3 Lema. *Seja $\ell \in (1, 2]$ e $\epsilon_n = \frac{1}{2} \log \sigma_n$, onde σ_n é definido em 6.4. Então existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\liminf_n \epsilon_n \geq \epsilon$$

Demonstração. Considere a função $\psi_\ell : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi_\ell(1) = 1$ e

$$\psi_\ell(t) = \ell \frac{1 - t^{-1}}{1 - t^{-\ell}}$$

para $t > 1$. Prova-se com um simples exercício de cálculo que ψ_ℓ é estritamente crescente, contínua e possui $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_\ell(t) = \ell$. Fixando $t = t_0 > 1$ e tratando $\psi_\ell(t_0)$ como uma função $\ell \rightarrow \psi_\ell(t_0)$, também constatamos que $\psi_\ell(t_0)$ é crescente para todo $t_0 > 1$. Lembrando que:

$$\sigma_n = K_n^{(2)} \ell^2 \lambda_{n-1}^{2-\ell} \frac{1 - \lambda_{n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{n-1}^{-\ell}} \frac{1 - \lambda_{n-2}^{-1}}{1 - \lambda_{n-2}^{-\ell}} = K_n^{(2)} \lambda_{n-1}^{2-\ell} \psi_\ell(\lambda_{n-1}) \psi_\ell(\lambda_{n-2})$$

Como $K_n^{(2)} \rightarrow 1$ basta provar $\lambda_{n-1}^{2-\ell} \psi_\ell(\lambda_{n-1}) \psi_\ell(\lambda_{n-2})$ é uniformemente maior que 1. Dividimos a prova em dois casos: $\ell \in (1, \frac{3}{2})$ e $\ell \in [\frac{3}{2}, 2]$. No primeiro caso, observe que $\psi_\ell(x) > 1$, o que implica que o produto é maior que $\lambda_{n-1}^{2-\ell}$. Pelo Lema 6.3.1 temos $\lambda_{n-1}^{2-\ell} = \sqrt{1 + \alpha}$. Já no segundo caso, como $\lambda_{n-1}^{2-\ell} > 1$, o produto é maior ou igual a $\psi_{\frac{3}{2}}(\lambda_{n-1}) \psi_{\frac{3}{2}}(\lambda_{n-2})$. Mais uma vez usando 6.3.1, temos:

$$\psi_{\frac{3}{2}}(\lambda_{n-1})\psi_{\frac{3}{2}}(\lambda_{n-2}) \geq \left[\psi_{\frac{3}{2}}(1+\alpha)\right]^2$$

Assim, concluímos que $\epsilon = \min\{\sqrt{1+\alpha}, \left[\psi_{\frac{3}{2}}(1+\alpha)\right]^2\}$. \square

Como consequência dos Lemas 6.4.2 e 6.4.3, temos:

$$\liminf_n \frac{X_n}{n} \geq \epsilon$$

para $\ell \in (1, 2]$.

6.5 Crescimento da Derivada

Na seção anterior, mais especificamente nos lemas 6.4.2 e 6.4.3, provamos que

$$\log \left[(Df^{s_{n+1}}(c^f))^2 Df^{s_n}(c^f) \right] \geq n\epsilon$$

para algum ϵ maior do que zero. Infelizmente, tal resultado não garante que $Df^{s_n}(c^f)$ cresça exponencialmente com n . Tudo o que se pode garantir é que existe uma subsequência s_{i_n} de s_n para a qual $\log Df^{s_{i_n}}(c^f) \geq \frac{\epsilon}{2}i_n$. Nosso principal objetivo nessa seção será estender esse resultado para toda a sequência s_n , ou seja, provar que $Df^{s_n}(c^f) \rightarrow \infty$.

6.5.1 Lema. *Suponha que exista uma subsequência s_{i_n} de s_n para a qual $\log Df^{s_{i_n-1}}(c^f) \geq \frac{\epsilon}{2}(i_n - 1)$. Então, para n suficientemente grande, temos que:*

$$\log Df^{s_{i_n+1}}(c^f) \geq \frac{\epsilon}{6}(i_n - 1)$$

Demonstração. Pelo lema 6.3.2, $Df(c_{s_{i_n-1}}) = \theta_{i_n-1}^{(2)} \ell \vartheta d_{i_n-1}^{\ell-1}$. Combinando essa igualdade com a desigualdade obtida em 6.3.6, obtemos:

$$\begin{aligned} Df^{s_{i_n-1}}(c^f) &= Df^{s_{i_n-1}-1}(c^f) Df(c_{s_{i_n-1}}) \leq \theta_{i_n-1}^{(2)} \ell \vartheta d_{i_n-1}^{\ell-1} \frac{g(T)}{g(L)} \frac{d_{i_n-1} + \tilde{d}_{i_n}}{d_{i_n}^f} \frac{d_{i_n-2}^f}{d_{i_n-2}^f - d_{i_n}^f} \\ &= \bar{K}_{i_n-1} \ell \frac{d_{i_n-1} + \tilde{d}_{i_n}}{d_{i_n}} \left(\frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n}} \right)^{\ell-1} (1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}) \\ &= \bar{K}_{i_n-1} \ell \left(1 + \frac{\tilde{d}_{i_n}}{d_{i_n-1}} \right) \left(\frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n}} \right)^{\ell} (1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}) \end{aligned}$$

com $\bar{K}_{i_n-1} = K_{i_n-1} \frac{\theta_{i_n-2}^{(3)} \theta_{i_n-1}^{(2)}}{\theta_{i_n}^{(1)}}$. Com isso temos:

$$\log \bar{K}_{i_n-1} \ell \left(1 + \frac{\tilde{d}_{i_n}}{d_{i_n-1}} \right) \left(\frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n}} \right)^{\ell} (1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}) \geq \log Df^{s_{i_n-1}}(c^f) \geq (i_n - 1) \frac{\epsilon}{2}$$

Isolando o termo $\log \frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n}}$, obtemos:

$$\ell \log \frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n}} \geq (i_n - 1) \frac{\epsilon}{2} - \log \bar{K}_{i_n-1} \quad \ell \quad \left(1 + \frac{\tilde{d}_{i_n}}{d_{i_n-1}}\right) (1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell})$$

Considere agora $\frac{(Df^{s_{i_n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_{i_n-1}}(c^f)}$. Usando a regra da cadeia obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{(Df^{s_{i_n+1}}(c^f))^2}{Df^{s_{i_n-1}}(c^f)} = \frac{(Df(c_{s_{i_n+1}})Df^{k_{i_n-1}s_{i_n-1}}(c_{s_{i_n}}^f)Df^{s_{i_n-1}}(c^f)Df(c_{s_{i_n}}))^2}{Df^{s_{i_n-1}-1}(c^f)Df(c_{s_{i_n-1}})} \\ &= \left[\frac{(Df(c_{s_{i_n+1}})Df(c_{s_{i_n}})Df(c_{t_{i_n}}))^2}{Df(c_{s_{i_n-1}})} \right] \frac{q_{i_n-1}}{q_{i_n}^2} \left(Df^{s_{i_n-1}}(c_{i_n+1}^f)Df^{(k_{i_n-1}-1)s_{i_n-1}}(c_{t_{i_n}}^f) \right)^2 Df^{s_{i_n-1}-1}(c_{i_n}^f) \\ &\geq K_{i_n}^{(2)} \frac{q_{i_n-1}}{q_{i_n}^2} \ell^5 \frac{d_{i_n}^{2\ell-2} \tilde{d}_{i_n}^{2\ell-2} d_{i_n+1}^{2\ell-2}}{d_{i_n-1}^{\ell-1}} \left(\frac{d_{i_n} + \tilde{d}_{i_n+1}}{d_{i_n+1}^f} \frac{d_{i_n-1}^f}{d_{i_n-1}^f - d_{i_n+1}^f} \frac{d_{n-1} - d_{n+1}}{d_n^f} \right)^2 \frac{d_{i_n-1} + \tilde{d}_{i_n}}{d_{i_n}^f} \frac{d_{i_n-2}^f}{d_{i_n-2}^f - d_{i_n}^f} \\ &\geq K_{i_n}^{(2)} \frac{q_{i_n-1}}{q_{i_n}^2} \ell^5 \left(\frac{1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-1}^{-\ell}} \right)^2 (1 - \lambda_{i_n-1}^{-1})^2 \frac{1}{1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}} \left(\frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n+1}} \right)^{2-\ell} \left(\frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n+1}} \right)^2 \\ &\geq K_{i_n}^{(2)} \frac{q_{i_n-1}}{q_{i_n}^2} \ell^5 (1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}) \frac{1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-2}^{-1}} \frac{1 - \lambda_{i_n-2}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}} \left(\frac{1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-1}^{-\ell}} \right)^2 \left(\frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n+1}} \right)^{2-\ell} \left(\frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n+1}} \right)^2 \end{aligned}$$

Ao tomar o logaritmo dos dois extremos dessa desigualdade e usar nossa estimativa anterior para $Df^{s_{i_n-1}}(c^f)$, obtemos:

$$\begin{aligned} 2 \log Df^{i_n+1}(c^f) &\geq \log \left[K_{i_n}^{(2)} \frac{q_{i_n-1}}{q_{i_n}^2} \ell^5 (1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}) \frac{1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-2}^{-1}} \frac{1 - \lambda_{i_n-2}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}} \left(\frac{1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-1}^{-\ell}} \right)^2 \right] + \\ &\quad + (2 - \ell) \log \frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n+1}} + 2 \log \frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n+1}} + \log Df^{s_{i_n-1}}(c^f) \geq \\ &\geq (i_n - 1) \frac{\epsilon}{2} + (i_n - 1) \frac{\epsilon(2 - \ell)}{2\ell} - \frac{2 - \ell}{\ell} \log \left[\bar{K}_{i_n-1} \left(1 + \frac{\tilde{d}_{i_n}}{d_{i_n-1}}\right) (1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}) \right] + 2 \log \left(\frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n+1}} \right) + \\ &\quad + \log \left[K_{i_n}^{(2)} \frac{q_{i_n-1}}{q_{i_n}^2} \ell^5 (1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}) \frac{1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-2}^{-1}} \frac{1 - \lambda_{i_n-2}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}} \left(\frac{1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-1}^{-\ell}} \right)^2 \right] \\ &\geq (i_n - 1) \frac{\epsilon}{\ell} - \frac{2 - \ell}{\ell} \log \left[\bar{K}_{i_n-1} \left(1 + \frac{\tilde{d}_{i_n}}{d_{i_n-1}}\right) (1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}) \right] + 2 \log \left(\frac{d_{i_n-1}}{d_{i_n+1}} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \log \left[K_{i_n}^{(2)} \frac{q_{i_n-1}}{q_{i_n}^2} \ell^5 (1 - \lambda_{i_n}^{-1}) \frac{1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-2}^{-1}} \frac{1 - \lambda_{i_n-2}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-2}^{-\ell}} \left(\frac{1 - \lambda_{i_n-1}^{-1}}{1 - \lambda_{i_n-1}^{-\ell}} \right)^2 \right] \geq (i_n - 1) \frac{\epsilon}{3}$$

para n suficientemente grande, o que termina a prova. \square

Dessa forma chegamos à seguinte dicotomia: ou $Df^{s_{2k}}(c^f) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ ou $Df^{s_{2k+1}}(c^f) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Nosso próximo objetivo será provar que os intervalos I_n estão infinitamente centralizados nos intervalos I_{n-1} , o que será feito logo em seguida. Para tanto precisaremos das seguintes definições:

6.5.2 Definição. Definimos I_n^+ como a componente conexa de $I_{n-1} \setminus I_n$ que se encontra à esquerda de I_n . Da mesma forma definimos I_n^- como a componente conexa de I_{n-1}/I_n que se encontra à direita de I_n .

6.5.3 Lema. Considere mais uma vez uma sequência crescente i_n tal que $Df^{s_{i_n-1}}(c^f) \rightarrow \infty$. Então temos $\frac{|I_{n_i-2}|}{|I_{n_i-1}|} \rightarrow \infty$. Ademais, $\frac{|I_{n_i-1}^+|}{|I_{n_i-1}|} \rightarrow \infty$ implica $\frac{|I_{n_i}^+|}{|I_{n_i}|} \rightarrow \infty$ e também $\frac{|M_{n_i}^+|}{|M_{n_i}|} \rightarrow \infty$; enquanto $\frac{|I_{n_i-1}^-|}{|I_{n_i-1}|} \rightarrow \infty$ implica $\frac{|I_{n_i}^-|}{|I_{n_i}|} \rightarrow \infty$ e também $\frac{|M_{n_i}^-|}{|M_{n_i}|} \rightarrow \infty$.

Demonstração. Para provar a primeira afirmação, de que $Df^{s_{i_n-1}}(c^f) \rightarrow \infty$ implica $\frac{|I_{n_i-2}|}{|I_{n_i-1}|} \rightarrow \infty$, basta usar 6.3.2 e a regra da cadeia. Vamos então nos concentrar em provar a segunda afirmação.

Defina $U_{i_n-1} \subset M_{i_n-1}$ de forma que $U_{i_n-1} = (f_{n-1}(\hat{z}_{i_n-2}), y_{i_n-2})$ seja aplicado difeomorficamente por $f_{n-2}^{k_{n-2}}$ na componente de $I_{i_n-2} \setminus \{c_{s_{i_n-1}}\}$ que contém I_{i_n-1} . Em seguida considere os intervalos definidos em 6.5.2:

$$I_{i_n-1} = I_{i_n}^+ \cup I_{i_n} \cup I_{i_n}^-$$

Em seguida definimos $\mathcal{I}_{i_n}^+, \mathcal{I}_{i_n}^- \subset U_{i_n-1}$ de forma que $f_{n-2}^{k_{n-2}}(\mathcal{I}_{i_n}^+) = I_{i_n}^+$ enquanto $f_{n-2}^{k_{n-2}}(\mathcal{I}_{i_n}^-) = I_{i_n}^-$.

Obviamente o intervalo $\mathcal{I}_{i_n}^+ \cup f_{n-1}(I_{i_n}) \cup \mathcal{I}_{i_n}^-$ é levado por $f_{n-2}^{k_{n-2}}$ em I_{n-2} . Como $f_{i_n-2}^{k_{n-2}} = L_{i_n-2} \circ f$, onde L_{i_n-2} são aplicações cuja distorção é uniformemente limitada, concluímos que $\frac{|I_{n_i-1}^+|}{|I_{n_i-1}|} \rightarrow \infty$ implica $\frac{|\mathcal{I}_{i_n}^+|}{|f_{n-1}(I_{i_n})|} \rightarrow \infty$, enquanto $\frac{|I_{n_i-1}^-|}{|I_{n_i-1}|} \rightarrow \infty$ implica $\frac{|\mathcal{I}_{i_n}^-|}{|f_{n-1}(I_{i_n})|} \rightarrow \infty$.

Por outro lado, observe que as pré imagens dos intervalos $\mathcal{I}_{i_n}^+$ e $\mathcal{I}_{i_n}^-$ por f_{i_n-1} estão contidas em I_{n_i-1} . Como $f_{i_n-1} = L_{i_n-1} \circ f$, onde L_{i_n-1} possui distorção uniformemente limitada, podemos garantir que $\frac{|\mathcal{I}_{i_n}^+|}{|f_{n-1}(I_{i_n})|} \rightarrow \infty$ implica $\frac{|I_{n_i}^+|}{|I_{n_i}|} \rightarrow \infty$, enquanto $\frac{|\mathcal{I}_{i_n}^-|}{|f_{n-1}(I_{i_n})|} \rightarrow \infty$ implica $\frac{|I_{n_i}^-|}{|I_{n_i}|} \rightarrow \infty$.

Por fim, o fato de f_{i_n-1} poder ser decomposta em $L_{i_n-1} \circ f$ onde L_{i_n-1} possui distorção uniformemente limitada nos permite concluir que $\frac{|I_{n_i-1}^+|}{|I_{n_i-1}|} \rightarrow \infty$ implica $\frac{|M_{n_i}^+|}{|M_{n_i}|} \rightarrow \infty$ enquanto $\frac{|I_{n_i-1}^-|}{|I_{n_i-1}|} \rightarrow \infty$ implica $\frac{|M_{n_i}^-|}{|M_{n_i}|} \rightarrow \infty$. \square

6.5.4 Lema. Se existe uma sequência crescente i_n para a qual $\frac{|M_{i_n}^+|}{|M_{i_n}|}$ ou $\frac{|M_{i_n}^-|}{|M_{i_n}|}$, então existe uma sequência $b_n \rightarrow \infty$ de forma que I_{i_n+1} está b_n centralizado em I_{i_n} .

Demonstração. Existe uma sequência $a_n \rightarrow \infty$ para a qual $f_{i_n}(I_{i_n+1}) \subset M_{i_n}$ possui um espaço lateral de tamanho $a_n|f_{i_n}(I_{i_n+1})|$ dentro de M_{i_n} . Como M_{i_n} está α centralizado em I_{i_n-1} , concluímos que $f_{i_n}(I_{i_n+1})$ está $a_n\alpha$ centralizado em I_{i_n-1} . Daí basta tomar a pré imagem de ambos por f_{i_n} para obter o resultado. \square

Os lemas 6.5.2 e 6.5.4 provam que existe uma sequência $A_n \rightarrow \infty$ tal que os intervalos M_n e I_n estão A_n centralizado em I_{n-1} . Nosso próximo passo será obter estimativas para o espaço existente entre M_n e I_n , o que será feito no próximo lema.

6.5.5 Lema. *Se existe uma sequência $A_n \rightarrow \infty$ de forma que M_n está A_n centralizado em I_{n-1} e se $k_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então temos $\frac{|G_n|}{|I_n|} \rightarrow \infty$, onde G_n é o espaço entre I_n e M_n .*

Demonstração. Se M_n está B_n centralizado em I_{n-1} , então existe uma função b_{A_n} com $b(A_n) \rightarrow \infty$ quando $A_n \rightarrow \infty$ tal que $(f_{n-1})^{-1}(M_n) \subset M_n$ está $b(A_n)$ centralizado em M_n . Como $f_n(I_{n+1}) \subset (f_{n-1})^{-1}(M_n)$, temos que a distância E_n entre $f_n(I_{n+1})$ e I_n é tal que $\frac{E_n}{|f_n(I_{n+1})|} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Tomando a pré imagem por f_n , obtemos o resultado. \square

Uma consequência direta de 6.5.5 é que $d_n > |I_n|$ para n suficientemente grande. Ademais, como $\frac{|I_{n-1}|}{|I_n|} \rightarrow \infty$, temos que $\frac{d_n}{d_{n+1}}$. Daqui por diante nosso objetivo será comparar $Df^{s_n}(c^f)$ com a razão $\frac{|I_{n-1}|}{|I_n|} \rightarrow \infty$, o que será feito nos dois lemas a seguir.

6.5.6 Lema. *Existe n_0 tal que:*

$$2^{-\ell-1}\vartheta|I_n|^\ell \leq |f(I_n)| \leq 4\vartheta|I_n|^\ell$$

para todo $n \geq n_0$, onde ϑ é a constante definida em 2.0.2. Ademais, para todo intervalo de primeiro retorno $J \subset I_n \setminus \{c\}$ temos

$$|f(J)| \geq \frac{\vartheta}{2}|J|^\ell$$

Demonstração. Observe a definição 2.0.2. Tomamos n_0 grande o bastante para que $\psi(x) \in (-\frac{1}{2}, 1)$ para todo $x \in I_{n_0}$. Tomando $I_n = (c-a, c+b)$ e $n \geq n_0$ obtemos:

$$\frac{\vartheta}{2}(a^\ell + b^\ell) \leq |f(I_n)| \leq 2\vartheta(a^\ell + b^\ell)$$

Observe que a ou b é maior ou igual a $\frac{|I_n|}{2}$. Supondo que seja a , obtemos:

$$\frac{\vartheta}{2} \left(\frac{|I_n|}{2} \right)^\ell \leq \frac{\vartheta}{2} \left(\frac{|I_n|}{2} \right)^\ell + b^\ell \leq \frac{\vartheta}{2}(a^\ell + b^\ell) \leq |f(I_n)|$$

Por outro lado, tanto a quanto b são menores que $|I_n|$, o que nos dá:

$$|f(I_n)| \leq 2\vartheta(a^\ell + b^\ell) \leq 2\vartheta(2|I_n|^\ell) \leq 4\vartheta|I_n|^\ell$$

o que termina a primeira desigualdade.

Quanto à segunda desigualdade, basta supor n grande para obter:

$$|f(J)| \geq \frac{\vartheta}{2} \int_a^b |x|^{\ell-1} dx \geq \frac{\vartheta}{2} \int_0^{b-a} |u|^{\ell-1} du = \frac{\vartheta}{2}|J|^\ell$$

o que termina a prova. \square

6.5.7 Lema. *Sejam K a constante de distorção obtida em 3.2.11 e ϑ em 2.0.2. Existe n_0 tal que:*

$$K^{-1} \frac{\vartheta^{-1} |I_{n-1}|}{4 |I_n|^\ell} \leq Df^{s_n-1}(c^f) \leq 2^{\ell+1} K \vartheta^{-1} \frac{|I_{n-1}|}{|I_n|^\ell}$$

para todo n maior que n_0

Demonstração. Pelo teorema do valor médio, existe $d \in f(I_n)$ tal que $Df^{s_n}(d) = \frac{|I_{n-1}|}{|f(I_n)|}$. Usando o controle de distorção obtido em 3.2.11, concluímos que:

$$K^{-1} \leq \frac{Df^{s_n-1}(c^f)}{Df^{s_n-1}(d)} \leq K$$

o que nos dá:

$$K^{-1} \frac{|I_{n-1}|}{|f(I_n)|} \leq Df^{s_n-1}(c^f) \leq K \frac{|I_{n-1}|}{|f(I_n)|}$$

Em seguida, basta usar 6.5.6 para obter:

$$K^{-1} \frac{\vartheta^{-1} |I_{n-1}|}{4 |I_n|^\ell} \leq Df^{s_n-1}(c^f) \leq 2^{\ell+1} K \vartheta^{-1} \frac{|I_{n-1}|}{|I_n|^\ell}$$

como queríamos demonstrar. \square

Finalmente estamos prontos para provar que $Df^{s_n}(c^f) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Para tanto usamos primeiramente a regra da cadeia para obter:

$$Df^{s_n}(c^f) = Df^{s_n-1}(c^f) Df(c_{s_n})$$

Em seguida usamos 6.3.2 e 6.5.7 para obter as seguintes desigualdades:

$$K^{-1} \theta_n^{(2)} \frac{\ell |I_{n-1}|}{4 |I_n|^\ell} d_n^{\ell-1} \leq Df^{s_n}(c^f) \leq 2^{\ell+1} K \theta_n^{(2)} \ell \frac{|I_{n-1}|}{|I_n|^\ell} d_n^{\ell-1}$$

Mas graças a 6.5.5 podemos garantir que $d_n > |I_n|$, o que nos leva a concluir que $|I_n| < d_n < |I_{n-1}|$. Assim temos:

$$K^{-1} \theta_n^{(2)} \frac{\ell |I_{n-1}|}{4 |I_n|} \leq Df^{s_n}(c^f) \leq 2^{\ell+1} K \theta_n^{(2)} \ell \left(\frac{|I_{n-1}|}{|I_n|} \right)^\ell$$

Como já provamos que $\frac{|I_{n-1}|}{|I_n|} \rightarrow \infty$, concluímos que $Df^{s_n}(c^f)$ também tende à medida que n cresce.

6.6 Crescimento de $Df^n(c^f)$

Em seguida provaremos que $Df^n(c^f) \rightarrow \infty$, que é uma condição suficiente para a existência de acip de acordo com [SSBRL08]. Isso será feito no lema a seguir:

6.6.1 Lema. *Seja $f \in \mathcal{C}_d$ com combinatória de Fibonacci generalizada e $k_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $Df^k(c^f) \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Tome o maior s_n tal que $s_n \leq k$. Nesse caso temos $k = s_n + j$. Dividimos a prova em diversos casos dependendo do valor de j em cada etapa:

1. $j < s_{n-1}$

Usando o lema 3.2.13, obtemos

$$Df^j(c^f) \geq Df^{s_n}(c^f)Df^j(c_{s_n}^f) \geq Df^{s_n}(c^f)\frac{1}{K}Df^j(c^f)$$

Em seguida basta iterar o processo.

2. $s_{n-1} \leq j \leq 2s_{n-1} - 1$

Usando os lemas 6.5.7 e 6.3.2 obtemos:

$$\begin{aligned} Df^k(c^f) &\geq Df^{s_n}(c^f)Df^{s_{n-1}-1}(c_{s_n}^f)Df(c_{t_n})Df^{j_1}(c_{t_n}^f) \geq \\ &\geq \Omega_1 \frac{|I_{n-1}|}{|I_n|} \left(\frac{|I_{n-2}|}{|I_{n-1}|^\ell} \right) d_n^{\ell-1} Df^{j_1}(c_{t_n}^f) \\ &\geq \Omega_1 \frac{|I_{n-2}|}{|I_{n-1}|} \left(\frac{|I_{n-1}|}{|I_n|} \right)^{2-\ell} Df^{j_1}(c^f) \end{aligned}$$

Onde

$$j_1 < s_{n-1}$$

$$\Omega_1 = K^{-3} \frac{1}{16} \theta_{n+1}^{(2)} \quad \ell^2 \theta_n^{(2)}$$

$$\Omega_2 = K^{-3} \frac{1}{16} \theta_{n+1}^{(2)} \quad \ell^2 \theta_n^{(2)} L_1^{\ell-1}$$

Em seguida iteramos o processo novamente.

3. $j \geq 2s_{n-1}$

Usando os lemas 6.5.7, 6.3.2 e 6.6.1 obtemos:

$$\begin{aligned} Df^k(c^f) &\geq Df^{s_n}(c^f)Df^{s_{n-1}-1}(c_{s_n}^f)Df^{is_{n-1}}(c_{t_n})Df(c_{s_n+(i+1)s_{n-1}})Df^{j_1}(c_{s_n+(i+1)s_{n-1}}^f) \geq \\ &\geq \Omega_3 \frac{|I_{n-1}|}{|I_n|} \left(\frac{|I_{n-2}|}{|I_{n-1}|^\ell} \right) d_n^{\ell-1} Df^{j_1}(c_{s_n+(i+1)s_{n-1}}^f) \\ &\geq \Omega_4 \frac{|I_{n-2}|}{|I_{n-1}|} \left(\frac{|I_{n-1}|}{|I_n|} \right)^{2-\ell} Df^{j_1}(c^f) \end{aligned}$$

Onde

$$j_1 < s_{n-1}$$

$$\Omega_3 = \Omega_1 K_1^{-1}$$

$$\Omega_4 = \Omega_3 K_1^{-1}$$

Em seguida iteramos o processo novamente.

Como o número de iterados para os quais $\frac{|I_{n-1}|}{|I_n|}$ é menor que $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ou Ω_4 é finito, podemos concluir que $Df^n(c^f) \rightarrow \infty$ □

Referências Bibliográficas

- [AAIS66] V. I. Arnol'd, V. S. Afrajmovich, Yu. S. Il'yashenko e L. P. Shil'nikov. *Elements of Integration*. John Wiley and Sons, Inc., 1966. 21
- [Arn63] V. I. Arnold. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, 18:85–191, 1963. 30
- [BL] A. M. Blokh e M. Yu. Lyubich. *Ergodic Theory Dynam. Systems*. 7
- [BL91] A. M. Blokh e M. Yu. Lyubich. Measurable dynamics of S-unimodal maps of the interval. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 24:545–573, 1991. 26
- [Bow79] R. Bowen. Invariant measures for Markov maps of the interval. *Comm. Math. Phys.*, 69:1–17, 1979. 33
- [Bru98a] H. Bruin. The existence of absolutely continuous invariant measures is not a topological invariant for unimodal maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 18(3):555–565, Jun 1998. 9
- [Bru98b] Henk Bruin. Topological conditions for the existence of absorbing cantor sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 350(6):2229–2263, 1998. 26
- [CdNV09] E. Colli, M. L. do Nascimento e E. Vargas. Decay of geometry for fibonacci critical covering maps of the circle. *Ann. Inst. H. Poincaré*, AN26:1533–1551, 2009. 2, 10
- [CE83] P. Collet e J.-P. Eckmann. Positive liapunov exponents and absolute continuity for maps of the interval. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(1):13–46, 1983. 1, 33
- [dFdM99] E. de Faria e W. de Melo. Rigidity of critical circle mappings ii. *J. of the Ame. Math. Soc.*, 13(2):343–370, 1999. 31
- [dMvS93] W. de Melo e S. van Strien. *One-dimensional dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. 1, 6, 7, 16, 17, 20, 31
- [dN01] M. L. do Nascimento. *Dinâmica de Recobrimentos do Círculo com Pontos de Inflexão*. Tese de Doutorado, IME-USP, 2001. 24
- [Guc79] John Guckenheimer. Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.*, 70(2):133–160, 1979. 7
- [HB96] T. Nowicki S. van Strien H. Bruin, G. Keller. Wild cantor attractors exist. *Annals of Mathematics*, 143(1):97–130, 1996. 26

- [Her] M. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations. *Publ. Math. IHES*, páginas 5–234. 31
- [LY73] A. Lasota e J.A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 186:481–488, 1973. 33
- [Ma n85] R. Ma né. Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 100:495–524, 1985. 25
- [Mar94] M. Martens. Distortion results and invariant cantor sets of unimodal maps. *Ergodic Theory and Dynam. Systems*, 14(2):331–349, 1994. 26
- [Mis81] M. Misiurewicz. Absolutely continuous invariant measures for certain maps of the interval. *Publ. Math. IHES*, 53:17–51, 1981. 4, 33
- [MMvS92] W. de Melo M. Martens e S. van Strien. Julia-fatou-sullivan theory for real onedimensional dynamics. *Acta Math.*, 168(3-4):273–318, 1992. 7
- [NvS91] T. Nowicki e S. van Strien. Invariant measures exist under a summability condition for unimodal maps. *Invent. Math.*, 105:123–136, 1991. 1, 33
- [Pia81] G. Pianigiani. Existence of invariant measures for piecewise continuous transformations. *Annales Polonici Mathematici*, XL:365–382, 1981. 33
- [Pol93] M. Pollicott. *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*. Cambridge Univ. Press, 1993. 22
- [Ren57] A. Renyi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 8:477–493, 1957. 32
- [Rud87] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, New York, 3 edição, 1987. 21
- [She04] Weixiao Shen. On the metric properties of multimodal interval maps and c^2 density of axiom a. *Invent. Math.*, 156(2):301–403, 2004. 26
- [She06] Weixiao Shen. Decay of geometry for unimodal maps: An elementary proof. *Annals of Mathematics*, 163:383–404, 2006. 1
- [Shu69] M. Shub. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. *Amer. J. Math.*, 91:129–155, 1969. 6
- [Sin76] Ya. Sinai. *Introduction to ergodic theory*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1976. 22
- [SSB03] S. V. Strien, W. Shen e H. Bruin. Invariant measures exists without a growth condition. *Comm. Math. Phys.*, 241:287–306, 2003. 1, 34
- [SSBRL08] S. V. Strien, W. Shen, H. Bruin e J. Rivera-Letelier. Large derivatives, backward contraction and invariant densities for interval maps. *Invent. Math.*, 172:509–533, 2008. 1, 34, 52
- [Str90] S. V. Strien. Hiperbolicity and invariant measures for general c^2 interval maps satisfying the misiorewicz condition. *Comm. Math. Phys.*, 128:437–496, 1990. 4

- [SV04] S. V. Strien e E. Vargas. Real bounds, ergodicity and negative schwarzian formultimodal maps. *J. Am. Math. Soc.*, 17(4):149–182, 2004. [15](#), [26](#)
- [WdM89] S. van Strien W. de Melo. A structure theorem in one dimensional dynamics. *Annals of Mathematics*, 129(3):519–546, 1989. [7](#)
- [Yam02] M. Yampolski. Hyperbolicity of renormalization of critical circle maps. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 96:1–41, 2002. [31](#)
- [Yoc84] J. C. Yoccoz. z. il ny a pas de contre-exemple de denjoy analytique. *C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math.*, 298(7):141–144, 1984. [7](#)