Completamentos C^* e a Álgebra DFR

Daniel Vasques Paulino

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Frank Michael Forger**

Durante o desenvolvimento deste trabalho
o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP
Projeto 2012/06838-3

São Paulo, fevereiro de 2016

Completamentos C^* e a Álgebra DFR

Esta é a versão original da tese elaborada pelo candidato Daniel Vasques Paulino, tal como submetida à Comissão Julgadora.

to Mel, Romeo and Thor,
my reasons to keep on fighting.

"Nevertheless, the fact is that there is nothing as dreamy and poetic, nothing as radical, subversive, and psychedelic, as mathematics. It is every bit as mind blowing as cosmology or physics … and allows more freedom of expression than poetry, art, or music … Mathematics is the purest of the arts, as well as the most misunderstood."

- Paul Lockhart

"Take the risk of thinking for yourself. Much more happiness, truth, beauty and wisdom will come to you that way."

- Christopher Hitchens

"I never am really satisfied that I understand anything; because, understand it well as I may, my comprehension can only be an infinitesimal fraction of all I want to understand."

- Ada Lovelace

"We all have a tendency to think that the world must conform to our prejudices. The opposite view involves some effort of thought, and most people would die sooner than think, in fact they do so."

- Bertrand Russell

"It is not the critic who counts; not the man who points out how the strong man stumbles, or where the doer of deeds could have done them better. The credit belongs to the man who is actually in the arena, whose face is marred by dust and sweat and blood; who strives valiantly; who errs, who comes short again and again, because there is no effort without error and shortcoming; but who does actually strive to do the deeds; who knows great enthusiasms, the great devotions; who spends himself in a worthy cause; who at the best knows in the end the triumph of high achievement, and who at the worst, if he fails, at least fails while daring greatly, so that his place shall never be with those cold and timid souls who neither know victory nor defeat."

- Theodore Roosevelt

Agradecimentos

Gostaria de agradecer profundamente ao meu orientador, Michael Forger, por todo o suporte, compreensão e amizade estendidos a mim durante os anos de trabalho. Não há medida para o quanto sua influência enriqueceu tanto este trabalho quanto o meu próprio caminho.

Também gostaria de agradecer meu coorientador, Klaus Fredenhagen pela hospitalidade estendida a mim durante minha estadia em Hamburg, bem como por compartilhar sua valiosa experiência nesta área.

Devo agradecer também a P.L. Ribeiro pelos vários comentários e sugestões e a J.C.A. Barata por sugerir o problema original de estender o modelo DFR à dimensões mais altas e analisar o seu limite clássico usando estados coerentes, o qual foi a motivação original de todos os desenvolvimentos apresentados aqui.

Por último, gostaria de mencionar minha gratidão à minha família, pelo apoio e paciência, sem os quais eu jamais poderia ter dado a este trabalho o tempo necessário para sua conclusão.

Resumo

O objetivo do presente trabalho é apresentar a construção de uma família geral de C^*-álgebras que inclui, como um caso especial, a "álgebra do espaço-tempo quântico", introduzida por Doplicher, Fredenhagen e Roberts. Esta construção é baseada em uma extensão da noção de completamento C^*, de álgebras para fibrados de álgebras, compatível com o completamento usual no nível de seções, combinada com uma nova definição para a álgebra das relações canônicas de comutação utilizando a teoria da quantização estrita de Rieffel. Considerando a álgebra C^* das seções contínuas, obtemos um funtor que associa a cada fibrado de Poisson uma álgebra C^* e produz a álgebra DFR original como um exemplo particular.

Palavras-chave: Análise funcional, Álgebras de operadores, Álgebras C^*, Fibrados C^*.

Abstract

The aim of this work is to present the construction of a general family of C^*-algebras which includes, as a special case, the "quantum spacetime algebra" introduced by Doplicher, Fredenhagen and Roberts. It is based on an extension of the notion of C^*-completion, from algebras to bundles of algebras, compatible with the usual C^*-completion of the appropriate algebras of sections, combined with a novel definition for the algebra of the canonical commutation relations using Rieffel's theory of strict deformation quantization. Taking the C^*-algebra of continuous sections vanishing at infinity, we arrive at a functor associating a C^*-algebra to any Poisson vector bundle and recover the original DFR-algebra as a particular example.

Keywords: Functional analysis, Operator algebras, C^*-Algebras, C^*-Bundles.

Conteúdo

Introdução

"The beginner ... should not be discouraged if ... he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites."

- Paul Halmos

Em um artigo seminal publicado em 1995 [9], Doplicher, Fredenhagen e Roberts (DFR) introduziram uma C^*-álgebra como um modelo para o espaço-tempo que não admite a localização de eventos com precisão arbitrária: eles se referem a este como um modelo para o "espaço-tempo quântico". Além da interessante motivação, a construção apresentada possui uma reformulação matemática bastante simples: partindo de uma forma simplética no espaço de Minkowski, considera-se as relações canônicas de comutação (CCR) correspondentes, vistas como uma representação de uma álgebra de Lie nilpotente, a bem conhecida álgebra de Heisenberg. Mais precisamente, as CCR aparecem em sua forma de Weyl, i.e., como representações unitárias e fortemente contínuas do grupo de Heisenberg. Essa representação é então usada para definir uma C^*-álgebra, que nós propomos chamar de C^*-álgebra de Heisenberg, a partir de um processo conhecido como quantização de Weyl, i.e. utilizando o produto estrela de Weyl-Moyal.

A maior inovação desta construção é o fato de a forma simplética subjacente ser tratada como uma *variável*. Desta forma, é possível reconciliar a construção com o princípio de invariância relativística: como o espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ não possui uma forma simplética preferida, a única saída é considerar, ao mesmo tempo, *todas* as formas simpléticas que se pode obter a partir de uma fixa, isso é, sua órbita Σ, sob a ação do grupo de Lorentz. Esta órbita é isomorfa a $TS^2 \times \mathbb{Z}_2$, explicando assim a origem das dimensões extra que aparecem nesta abordagem. (Note que o fator $\mathbb{Z}_2$ é devido ao fato de lidarmos com o grupo de Lorentz inteiro, ele não estaria presente caso eliminássemos a invariância sob paridade P ou reversão temporal T.)[1]

Assumindo que a forma simplética varia sobre a órbita Σ de algum representante fixo, obtemos todo um fibrado de C^*-álgebras sobre esta órbita, com a álgebra associada ao representante fixo como fibra típica. As seções contínuas desse fibrado C^* formam uma C^*-álgebra que carrega uma ação do grupo de Lorentz, induzida pela ação no fibrado subjacente (esta por sua vez move tanto os pontos da base quanto as fibras).

Além disso, esta álgebra de seções também é um módulo sobre a álgebra "escalar" $C_0(\Sigma)$ de funções contínuas sobre Σ que se anulam no infinito. No caso especial considerado por DFR, o fibrado C^* subjacente é globalmente trivial e por conseqüência do teorema de von Neumann, se obtém um teorema de classificação das representações, tanto invariantes quanto covariantes, da álgebra DFR.

Em retrospecto, é claro que dada esta formulação geométrica, os resultados de [9] pedem por uma generalização – mesmo que por razões puramente matemáticas.

De um ponto de vista mais físico, uma das inspirações originais para este trabalho foi uma idéia proposta por J.C.A. Barata, de que se buscasse uma interpretação mais clara para o limite clássico da álgebra DFR original em termos de estados coerentes, nas linhas do que foi desenvolvido por K. Hepp [16]. Esta levou o autor a investigar as possíveis generalizações da construção DFR para outros espaços vetoriais e outros grupos de Lie.

Por fim, o componente crucial para a construção da álgebra DFR é um certo fibrado vetorial simplético sobre a órbita Σ, mais precisamente, o fibrado vetorial trivial $\Sigma \times \mathbb{R}^{1,3}$ equipado com a estrutura simplética "tautológica", a qual em cada fibra sobre um ponto $\sigma \in \Sigma$ assume o próprio valor σ. Nesta tese demonstraremos que, usando uma abordagem similar a de [30], é possível generalizar esta construção para qualquer fibrado de Poisson, sem qualquer hipótese sobre homogeneidade sob a ação de algum grupo ou da não degenerescência do tensor de Poisson (forma simplética).

A idéia por trás do procedimento é usar a estrutura de Poisson dada para primeiro construir um fibrado de $*$-álgebras de Fréchet sobre o mesmo espaço base, para qual as fibras são certos espaços de funções sobre as fibras correspondentes do fibrado vetorial original, equipadas com o produto de Weyl-Moyal associado ao tensor de Poisson sobre aquela fibra: a álgebra DFR é então construída como o completamento C^* da $*$-álgebra de seções deste fibrado de $*$-álgebras de Fréchet ou em de uma maneira geometricamente mais clara, como a álgebra de seções de um fibrado C^* obtido como completamento C^* a nível de fibrados.

[1] A característica genérica de que toda deformação da álgebra de funções sobre o espaço de Minkowski deve conter no seu limite clássico algum tipo de dimenções extra foi enfatizado em [10].

Este conceito de completamento C^* a nível de *fibrados* é uma novidade e um dos principais resultados obtidos nesta tese é o desenvolvimento de uma teoria para tal e sua aplicação ao exemplo das álgebras DFR.

Em mais detalhe, a tese é organizada da seguinte maneira.

No Capítulo 1, de uma natureza preliminar, apresentamos definições e resultados pertinentes à teoria de $*$-álgebras e seus completamentos C^*: caso um tal completamento exista, mostramos como ele pode ser controlado em tempos da C^*-álgebra universal envelopante, o que, em particular, provê um critério para decidir quando um tal completamento é único. Além disso, notamos que quando uma dada $*$-álgebra pode ser mergulhada em alguma C^*-álgebra como uma subálgebra espectralmente invariante, tal C^*-álgebra já é, de fato, sua C^*-álgebra universal envelopante.

No Capítulo 2 é proposta uma nova definição para a "C^*-álgebra das relações canônicas de comutação" (para sistemas com um número finito de graus de liberdade), de fato em duas versões, uma unital e outra não-unital, as quais chamamos de *C^*-álgebras de Heisenberg*. Estas são definidas como as C^*-álgebras envelopantes associadas a álgebras de Fréchet obtidas equipando respectivamente os espaços de funções de Schwartz e de funções totalmente limitadas[2] com o produto estrela de Weyl-Moyal induzido por um bivetor σ. A principal vantagem desta definição, quando comparada ao restante da literatura [4, 24], é o fato de que a teoria das representações das álgebras aqui definidas corresponde precisamente à teoria das representações do grupo de Heisenberg: como resultado da unicidade do completamento C^*, não há necessidade de se restringir a uma classe de representações "regulares".

No Capítulo 3 é desenvolvido o material principal desta tese. Iniciamos com a introdução do conceito de um fibrado de $*$-álgebras localmente convexas, o qual contém a classe de fibrados C^* como um caso especial e seguindo a abordagem de Dixmier, Fell e outros [8,11], mostramos que a topologia do espaço total de um destes fibrados é determinada por sua álgebra de seções contínuas. A seguir, passamos para o âmbito C^*, onde exploramos a noção de uma $C_0(X)$-álgebra (X sendo um espaço localmente compacto fixo). A primeira vista, esta parece apenas generalizar a estrutura de módulo natural na álgebra de seções de um fibrado C^* sobre X, mas de acordo com o teorema da representação secional [35, Teorema C.26, p. 367], ela provê uma condição necessária e suficiente para que uma C^*-álgebra seja a álgebra de seções de um fibrado C^* sobre X. Aqui, formulamos uma versão mais forte deste resultado, que estabelece uma equivalência categorial entre fibrados C^* sobre X e $C_0(X)$-álgebras. Finalmente, introduzimos o (aparentemente novo)

[2]Uma função diferenciável limitada é dita *totalmente limitada* se todas as suas derivadas parciais são limitadas.

conceito de completamento C^* de um fibrado de $*$-álgebras localmente convexas e mostramos que, usando essa definição (focada primariamente nas fibras) e impondo condições apropriadas no comportamento das seções no infinito, os processos de completamento e de tomar álgebras de seções comutam: um completamento C^* da álgebra de seções de um fibrado de $*$-álgebras é isomorfo à álgebra de seções de um completamento C^* do fibrado original.

No Capítulo 4 combinamos os métodos desenvolvidos nos dois capítulos anteriores para construir, a partir de um fibrado de Poisson arbitrário E sobre uma variedade qualquer X com tensor de Poisson σ, dois fibrados de $*$-álgebras de Fréchet sobre X, $\mathcal{S}(E,\sigma)$ e $\mathcal{B}(E,\sigma)$, assim como dois fibrados C^* sobre X, $\mathcal{E}(E,\sigma)$ e $\mathcal{H}(E,\sigma)$, obtidos a partir dos anteriores como completamentos C^* em relação às normas C^* fibradas induzidas pelas normas de cada fibra de acordo com a prescrição do Capítulo 2. Propomos chamar estes fibrados C^* de fibrados DFR e suas respectivas álgebras de seções de DFR-álgebras, uma vez que a DFR-álgebra original pode ser recuperada como um caso especial para uma escolha específica de fibrado de Poisson. Além disso, esta construção pode ser aplicada fibra a fibra no fibrado tangente de uma variedade Lorentziana para gerar um funtor entre a categoria de variedades Lorentzianas (em uma dimenção fixa) e aquela das C^*-álgebras, provendo um possível ponto de partida para a noção de um "espaço-tempo quântico localmente covariante".

A imagem emergente das construções apresentadas nesta tese estabelece um método sistemático para produzir uma vasta classe de exemplos de C^*-álgebras ligadas a conceitos da geometria diferencial clássica e/ou da topologia, de maneira funtorial. A relevância destes exemplos em possíveis aplicações permanece uma incógnita; porém, acreditamos que a generalização apresentada aqui é de grande interesse matemático por si só, independente da motivação física do artigo DFR original.

Capítulo 1

Completamentos C^* de $*$-Álgebras

Em um caráter preliminar, este capítulo tem por função estabelecer a notação, bem como fixar alguns conceitos pertinentes à teoria das $*$-álgebras topológicas e seus completamentos. Em especial, discutimos a questão da existência e unicidade de completamentos C^* e sua relação com o conceito de subalgebra espectralmente invariante, bem como a continuidade da inversa em álgebras topológicas. Todos os espaços vetoriais e todas as álgebras consideradas aqui serão sempre sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

1.1 Definições e Exemplos

Definição 1.1 *Seja A uma álgebra associativa. Dizemos que A é uma **álgebra topológica** caso A esteja munida de uma topologia tal que as operações de adição, de multiplicação por escalares e de multiplicação são todas contínuas. Dizemos que A é uma **álgebra topológica fraca** se as operações de adição e de multiplicação por escalares são contínuas e a de multiplicação é separadamente contínua, i.e., para todo elemento $a \in A$, os operadores $L_a : A \longrightarrow A$ de translação a esquerda por a ($L_a b = ab$) e $R_a : A \longrightarrow A$ de translação a direita por a ($R_a b = ba$) são contínuos.*

Observação 1.1 Infelizmente, a terminologia referente a esta definição básica não está uniforme na literatura. Aqui, optamos por seguir [1, p. 84] e não [13, p. 6]. Contudo, para nossos propósitos, a diferença se tornará irrelevante pois estaremos lidando exclusivamente com estruturas de álgebras em espaços de Fréchet, onde a continuidade separada de uma aplicação bilinear já implica em sua continuidade conjunta.

Como já acontece no caso de espaços vetoriais topológicos, os exemplos mais relevantes de álgebras topológicas têm sua topologia gerada por algum sistema adequado de seminormas. Lembramos que uma *seminorma/norma* em um espaço vetorial E é uma aplicação $s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- s é *positiva/positiva definida*:[1]
  $s(x) \geqslant 0$ para todo $x \in E$ / $s(x) > 0$ para todo $x \in E \setminus \{0\}$;
- s é *absolutamente* ou *positivamente homogênea*:
  $s(\lambda x) = |\lambda|\, s(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}\,,\ x \in E$;
- s é *subaditiva*:
  $s(x+y) \leqslant s(x) + s(y)$ para todo $x, y \in E$;

sendo que um espaço vetorial topológico é chamado de *espaço localmente convexo* se sua topologia pode ser gerada por um sistema S de seminormas. O caso mais simples é o de um *espaço normado*, cuja topologia pode ser gerada por uma única norma – ele é chamada de *espaço de Banach* se também for completo. Também merece destaque o caso de um *espaço metrizável*, cuja topologia pode ser gerada por uma sequência de seminormas – ele é chamada de *espaço de Fréchet* se também for completo.

Considerando álgebras, ao invés de espaços vetoriais, segue-se a lógica desta terminologia, com algumas adaptações importantes. Primeiro, uma (semi)norma s em uma álgebra A é chamada de *submultiplicativa*, ou de uma *m-(semi)norma*, se vale

$$s(ab) \leqslant s(a)\, s(b) \qquad \text{para } a, b \in A\,. \tag{1.1}$$

Novamente, o caso mais simples é o de uma *álgebra normada*, cuja topologia pode ser gerada por uma única norma submultiplicativa – ela é chamada de *álgebra de Banach* se também for completa. No entanto, quando lidamos com sistemas de seminormas em álgebras, estas nem sempre serão submultiplicativas, de modo que é conveniente adotar uma terminologia mais diferenciada:

Definição 1.2 *Uma álgebra topológica (fraca) A é chamada de*

- ***álgebra localmente convexa (fraca)*** *se sua topologia (de espaço vetorial topológico) pode ser gerada por um sistema S de seminormas;*
- ***álgebra localmente m-convexa*** *se sua topologia (de espaço vetorial topológico) pode ser gerada por um sistema S de m-seminormas; também falamos de uma* ***álgebra m-convexa*** *ou* ***álgebra multiplicativamente convexa*** *(omitindo o adjetivo "localmente", para simplificar) – ela é chamada de* ***álgebra de Arens-Michael*** *se também for completa.*

[1] Uma expressão mais precisa seria "não negativa", ao invés de "positiva".

Em ambos os casos, mais uma vez merece destaque o caso de uma *álgebra metrizável*, com topologia gerada por uma sequência de seminormas (submultiplicativas ou não) – ela é chamada de *álgebra de Fréchet* se também for completa.

Vale observar que uma álgebra localmente convexa (e não metrizável) pode ser apenas uma álgebra topológica fraca (com multiplicação separadamente contínua mas não contínua) , enquanto que uma álgebra multiplicativamente convexa é necessariamente uma álgebra topológica (com multiplicação contínua). Vamos dar alguns exemplos.

Exemplo 1.1 A álgebra $C(X)$ das funções contínuas sobre um espaço compacto X, munida da topologia gerada pela norma $\|.\|$ do supremo, que é submultiplicativa:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad \text{para } f \in C(X)\,.$$

$C(X)$ é uma álgebra de Banach, comutativa.

Exemplo 1.2 A álgebra $C(X)$ das funções contínuas sobre um espaço localmente compacto X, munida da topologia gerada pela família de seminormas $\|.\|_K$ do supremo em compactos K de X, que são todas submultiplicativas:

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)| \qquad \text{para } f \in C(X)\,.$$

$C(X)$ é uma álgebra de Fréchet, comutativa.

Exemplo 1.3 A álgebra $B(E)$ das transformações lineares limitadas de um espaço de Banach E, com norma $\|.\|$, munida da *topologia uniforme*, gerada pela norma operatorial $\|.\|_{B(E)}$, que é submultiplicativa:

$$\|T\|_{B(E)} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \qquad \text{para } T \in B(E)\,.$$

$B(E)$ é uma álgebra de Banach, não comutativa.

Exemplo 1.4 A álgebra $B(E)$ das transformações lineares limitadas de um espaço de Banach E, com norma $\|.\|$, munida da *topologia forte*, gerada pela família de seminormas s_x, onde x percorre o espaço E:

$$s_x(T) = \|Tx\| \qquad \text{para } T \in B(E)\,.$$

Com esta topologia, $B(E)$ é apenas uma álgebra localmente convexa fraca, com multiplicação separadamente contínua mas não contínua.

Exemplo 1.5 A álgebra $B(\mathfrak{H})$ das transformações lineares limitadas de um espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$, com produto escalar $\langle . , . \rangle$, munida da *topologia fraca*, gerada pela família de seminormas $s_{\phi\psi}$, onde ϕ e ψ percorrem o espaço $\mathfrak{H}$:

$$s_{\phi\psi}(T) = |\langle \phi, T\psi \rangle| \qquad \text{para } T \in B(E)\,.$$

Novamente, com esta topologia, $B(\mathfrak{H})$ é apenas uma álgebra localmente convexa fraca, com multiplicação separadamente contínua mas não contínua.

Exemplo 1.6 A álgebra $M([0,1])$ das (classes de equivalência, a menos de igualdade em quase toda parte, de) funções mensuráveis sobre o intervalo $[0,1]$, em relação à medida de Lebesgue, munida da topologia de convergência em medida [6, pp. 85-89]. Este é um exemplo de uma álgebra topológica, com multiplicação contínua, que é completa e metrizável, mas não é localmente convexa [13, p. 9] (e portanto, na terminologia aqui adotada, que neste ponto, mais uma vez, difere da terminologia adotada em [13] – não é uma álgebra de Fréchet).

Um outro ingrediente essencial na teoria, que permite identificar os "elementos reais" dentro de uma álgebra complexa, é a de involução:

Definição 1.3 *Seja A uma álgebra associativa. Uma **involução** em A é uma aplicação antilinear $* : A \longrightarrow A$ que satisfaz*

$$(a^*)^* = a \qquad \textit{para } a \in A\,,$$

e

$$(ab)^* = b^* a^* \qquad \textit{para } a, b \in A\,.$$

*Uma álgebra munida de uma involução $*$ é dita uma **álgebra com involução** ou uma **$*$-álgebra**.*[2] *De modo análogo, uma álgebra topológica (fraca) munida de uma involução $*$ contínua é dita uma **álgebra topológica (fraca) com involução** ou uma **$*$-álgebra topológica (fraca)**.*

Quanto a seminormas, observamos primeiro que uma (semi)norma / m-(semi)norma s em uma $*$-álgebra A é chamada de *involutiva*, ou de uma *$*$-(semi)norma / m$*$-(semi)norma*, se vale

$$s(a^*) = s(a) \qquad \text{para } a \in A\,. \tag{1.2}$$

[2] Mais exatamente, deveríamos falar de uma álgebra associativa com involução ou de uma $*$-álgebra associativa, já que o conceito de involução pode também ser formulado e acaba sendo de grande utilidade para diversos tipos de álgebras não associativas, por exemplo no estudo de álgebras de Lie. Omitimos a palavra "associativa" apenas para reduzir o acúmulo de adjetivos na terminologia.

Note também que dada qualquer (semi)norma s em uma $*$-álgebra A, podemos sempre definir uma (semi)norma involutiva $\tilde{s}$ em A por

$$\tilde{s}(a) = \max\{s(a), s(a^*)\} \qquad \text{para } a \in A\,,$$

sendo que se s for submultiplicativa, $\tilde{s}$ também será. Portanto, a Definição 1.2 acima pode ser repetida literalmente para $*$-álgebras, substituindo “álgebra” por “$*$-álgebra”, “seminormas” por “$*$-seminormas” e “m-seminormas” por “m$*$-seminormas”, pois devido à hipótese de continuidade da involução, podemos sempre substituir um sistema S de seminormas / m-seminormas gerando a topologia de A por um outro sistema $\tilde{S}$ de $*$-seminormas / m$*$-seminormas que é equivalente ao original. Sendo assim, suporemos que (semi)normas em $*$-álgebras são sempre involutivas; em particular, isso se aplica à definição das noções de *$*$-álgebras de Banach*, *$*$-álgebras de Fréchet* e *$*$-álgebras de Arens-Michael*.

Dentre as $*$-álgebras, e mais especificamente, as $*$-álgebras de Banach, de particular importância é a classe das ditas C^*-álgebras, nas quais a norma satisfaz uma propriedade adicional muito especial:

Definição 1.4 *Seja A uma $*$-álgebra. Dizemos que uma (semi)norma s em A é uma **C^*-(semi)norma** se é submultiplicativa, involutiva e satisfaz a **condição** C^*:*

$$s(a^*a) = s(a)^2 \qquad \textit{para } a \in A\,.$$

*Uma $*$-álgebra munida de uma C^*-norma $\|.\|$ e que é completa na topologia gerada por esta é dita uma **C^*-álgebra**.*

Vale observar que essa definição de C^*-(semi)norma não é minimal, no sentido que as três hipóteses que nela aparecem não são independentes. Por exemplo, toda (semi)norma s submultiplicativa e involutiva sempre satisfaz a desigualdade

$$s(a^*a) \leqslant s(a)^2 \qquad \text{para } a \in A\,,$$

de modo que apenas a desigualdade oposta é uma condição adicional. Reciprocamente, pode-se mostrar que toda (semi)norma s que satisfaz a condição C^* é automaticamente submultiplicativa e involutiva [33]. (O fato dela ser involutiva se também for submultiplicativa é quase óbvio, pois nestas hipóteses vale $s(a)^2 = s(a^*a) \leqslant s(a^*)s(a)$ e portanto $s(a) \leqslant s(a^*)$, de modo que trocando a com a^* se obtém $s(a) = s(a^*)$. Por outro lado, o fato dela ser submultiplicativa é bem mais difícil de provar.)

Entre os exemplos mais importantes de C^*-álgebras temos os dos Exemplos 1.1 e 1.3 (este apenas quando o espaço vetorial subjacente for um espaço de Hilbert), ambos unitais, e mais dois outros, sem unidade:

Exemplo 1.7 A álgebra $C(X)$ das funções contínuas sobre um espaço compacto X, munida da conjugação complexa pontual como involução e da topologia gerada pela norma $\|.\|$ do supremo, é uma C^*-álgebra comutativa unital (com a função 1 como unidade).

Exemplo 1.8 A álgebra $C_0(X)$ das funções contínuas sobre um espaço localmente compacto X que se anulam no infinito (i.e., tais que para todo $\epsilon > 0$ existe um subconjunto compacto K de X tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K$), munida da conjugação complexa pontual como involução e da topologia gerada pela norma $\|.\|$ do supremo, é uma C^*-álgebra comutativa não unital (sem unidade).

Exemplo 1.9 A álgebra $B(\mathfrak{H})$ das transformações lineares limitadas de um espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$, munida da adjunção de operadores como involução e da topologia uniforme, gerada pela norma operatorial $\|.\|_{B(\mathfrak{H})}$ usual, é uma C^*-álgebra não comutativa unital (com o operador 1 como unidade).

Exemplo 1.10 A álgebra $K(\mathfrak{H})$ das transformações lineares compactas de um espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$ (de dimensão infinita),[3] munida da adjunção de operadores como involução e da topologia uniforme, gerada pela norma operatorial $\|.\|_{K(\mathfrak{H})}$ usual, é uma C^*-álgebra não comutativa não unital (sem unidade).

Outro importante conceito, de particular importância para a teoria das C^*-álgebras, é o de $*$-representação:

Definição 1.5 *Seja A uma $*$-álgebra. Uma* ***$*$-representação*** *π de A em um espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$ é um homomorfismo de $*$-álgebras*

$$\pi : A \longrightarrow B(\mathfrak{H}) \,,$$

i.e., π preserva todas as estruturas algébricas em questão:

$$\pi(\lambda a + \mu b) = \lambda\pi(a) + \mu\pi(b) \ , \ \pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \qquad \text{para } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \,,\, a, b \in A \,,$$
$$\pi(a^*) = \pi(a)^* \qquad \text{para } a \in A \,.$$

Uma $*$-representação π é dita

- ***irredutível*** *se os únicos subespaços de $\mathfrak{H}$ invariantes sob a ação de todos os operadores $\pi(a)$, $a \in A$, são os subespaços triviais $\{0\}$ e $\mathfrak{H}$;*
- ***cíclica*** *se existe um vetor $\psi \in \mathfrak{H}$ tal que o subespaço $\{\pi(a)\psi \,|\, a \in A\}$ de $\mathfrak{H}$ é denso em $\mathfrak{H}$, sendo que qualquer tal vetor é chamado de* ***vetor cíclico****;*
- ***não degenerada*** *se o subespaço $\{\pi(a)\psi \,|\, a \in A, \psi \in \mathfrak{H}\}$ de $\mathfrak{H}$ é denso em $\mathfrak{H}$.*

[3] Para um espaço de Hilbert de dimensão finita, $K(\mathfrak{H})$ coincide com $B(\mathfrak{H})$.

Passamos a abordar a questão de como colocar C^*-(semi)normas em $*$-álgebras, para fins de, posteriormente, tomar o completamento.

Primeiro, dada uma $*$-álgebra B e qualquer $*$-representação ρ de B em um espaço de Hilbert $\mathfrak{H}_\rho$, podemos definir uma C^*-seminorma $\|.\|_\rho$ em B tomando a norma operatorial em $B(\mathfrak{H}_\rho)$, i.e., pondo, para todo $b \in B$,

$$\|b\|_\rho \;=\; \|\rho(b)\| \;. \tag{1.3}$$

Obviamente, esta vai ser uma norma C^* se, e somente se, ρ é fiel. De forma mais geral, dado um conjunto R de $*$-representatações de B tal que, para todo $b \in B$, $\{\|\rho(b)\| \mid \rho \in R\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, a expressão

$$\|b\|_R \;=\; \sup_{\rho \in R} \|b\|_\rho \tag{1.4}$$

define uma C^*-seminorma em B, que é uma C^*-norma caso R separe B (i.e., caso, para todo $b \in B \setminus \{0\}$, exista $\rho \in R$ tal que $\rho(b) \neq 0$). Levando em conta que toda C^*-seminorma s em B é a norma operatorial de alguma $*$-representação de B,[4] podemos considerar o conjunto $R = \mathrm{Rep}(B)$ de todas as $*$-representações de B (a menos de equivalência) para obter uma C^*-seminorma em B que é maior do que qualquer outra, desde que, para todo $b \in B$, valha

$$\sup_{\rho \in \mathrm{Rep}(B)} \|b\|_\rho \;<\; \infty \;. \tag{1.5}$$

Desta forma, caso $\mathrm{Rep}(B)$ seja separante, obtemos a bem conhecida *C^*-norma maximal* em B, que gera o *completamento C^* minimal* de B, denotado por $C^*(B)$ e chamado de *C^*-álgebra universal envelopante* de B, uma vez que esta satisfaz a seguinte propriedade universal: para toda C^*-álgebra C, todo $*$-homomorfismo de B para C admite uma única extensão para um $*$-homomorfismo de $C^*(B)$ para C.

Agora, considere a situação de uma $*$-álgebra B que já está mergulhada em alguma C^*-álgebra A como uma $*$-subalgebra densa. Neste caso, um método para garantir a existência da C^*-álgebra universal envelopante é proporcionado pelo conceito de invariância espectral. B é dita *espectralmente invariante* em A se, para todo elemento de B, seu espectro em B é o mesmo que seu espectro em A. (Notamos que, em geral, o primeiro contém o último: assim, apenas a inclusão oposta é uma condição não trivial.[5])

---

[4]Isso segue da aplicação do teorema de Gelfand-Naimark [26, Teorema 3.4.1] ao completamento C^* de $B/\ker s$, junto com o fato de que toda $*$-representação fiel de uma C^*-álgebra é automaticamente isométrica [26, Teorema 3.1.5]

[5]Aqui utilizamos o fato de que, se A e B são $*$-álgebras e $\phi : B \to A$ é algum $*$-homomorfismo, então para todo b em B, o espectro $\sigma_B(b)$ de b em B contém o espectro $\sigma_A(\phi(b))$ de $\phi(b)$ em A e assim temos $r_A(\phi(b)) \leqslant r_B(b)$: isto segue diretamente da definição do espectro de um elemento em uma $*$-álgebra.

Neste caso, concluímos que, para todo elemento auto-adjunto b de B,

$$\sup_{\rho \in \mathrm{Rep}(B)} \|b\|_\rho \leqslant r(b) ,$$

onde $r(b)$ denota o raio espectral de b em B, o qual por hipótese coincide com o seu raio espectral em A e portanto (pela auto-adjunção de b) também com sua C^*-norma em A. Isso significa que a C^*-norma em A é de fato a C^*-norma maximal e portanto que a C^*-álgebra A é exatamente a C^*-álgebra universal envelopante de B: $A = C^*(B)$.

Para demonstrar utilidade deste conceito, citamos o seguinte teorema.

Teorema 1.1 *Seja A uma C^*-álgebra (sem unidade), munida da ordem parcial padrão induzida pelo cone A^+ dos elementos positivos, e seja B uma $*$-subalgebra espectralmente invariante de A. Então A admite um aproximante da identidade que consiste de elementos de B, i.e., um conjunto dirigido $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos e_λ de B tal que, em A, $e_\lambda \geqslant 0$, $\|e_\lambda\| \leqslant 1$, $e_\lambda \leqslant e_\mu$ se $\lambda \leqslant \mu$ e, para todo $a \in A$, $\lim_\lambda e_\lambda a = a = \lim_\lambda a e_\lambda$.*

A prova é uma simples adaptação da demonstração de um teorema similar devido a Inoue, no contexto de álgebras localmente C^* [13, Theorem 11.5], sendo que a versão formulada acima também pode ser generalizada a álgebras localmente C^*, sem esforço adicional. A maior diferença aqui é a hipótese de que B seja uma $*$-subalgebra densa, ao invés de um $*$-ideal denso, e a invariância espectral é o ingrediente crucial para que a prova ainda funcione.

Uma vez que a existência da C^*-álgebra universal envelopante $C^*(B)$ de B esteja garantida – por exemplo representando B explicitamente como uma $*$-subalgebra espectralmente invariante de uma C^*-álgebra A – podemos abordar a questão da classificação de *todas* as possíveis C^*-normas de B. Usando o fato que, nesta situação, toda C^*-norma de B admite uma única extensão a uma C^*-seminorma de A cujo núcleo é um $*$-ideal fechado de A que intersecta B trivialmente, segue que, se conseguirmos determinar todos os $*$-ideais fechados de A e mostrar que nenhum deles intersecta B trivialmente, então podemos concluir que B admite uma *única* C^*-norma.

Finalmente, vale a pena notar que em muitos casos de interesse, B não é apenas uma $*$-álgebra, mas vem munida de uma topologia (localmente convexa) própria, em relação à qual é completa. Nesta direção, podemos enunciar o seguinte resultado que será útil no desenvolvimento de alguns argumentos nesta tese:

Proposição 1.1 *Seja B uma $*$-álgebra de Fréchet, mergulhada (continuamente) em uma C^*-álgebra A como $*$-subalgebra espectralmente invariante. Então o groupo G_B dos* *elementos inversíveis de B é aberto e a inversão*

$$\begin{array}{ccc} G_B & \longrightarrow & G_B \\ b & \longmapsto & b^{-1} \end{array}$$

é contínua, não apenas na topologia C^* induzida mas também na topologia de Fréchet original.

Demonstração: A afirmação desta proposição é bem conhecida para a topologia C^*, mas sua validade para a topologia mais fina de Fréchet não é nada óbvia, como pode ser inferido pela extensiva discussão de conceitos relacionados a esta questão que pode ser encontrada na literatura, tais quais as de "Q-álgebras" e de "álgebras topológicas com inversas"; veja [13, Capítulo 1, Seção 6], [1, Capítulo 3, Seção 6] e referências apontadas lá. No presente contexto, a invariância espectral guarante que G_B é igual a $B \cap G_A$, i.e., é a imagem inversa de G_A, que é aberta em A, sob a aplicação de inclusão $B \hookrightarrow A$, que é contínua. A continuidade da inversão segue então do teorema de Arens-Banach [1, Theorem 3.6.16], ou por um argumento direto mais geral [28]. ■

Capítulo 2

As C^*-Álgebras de Heisenberg

Seja V um espaço vetorial de Poisson, i.e., um espaço vetorial real de dimensão n, digamos, munido de um bivetor σ de posto $2r$, digamos, de maneira que o dual V^* de V se torna um espaço pré-simplético.[1] Então podemos definir uma álgebra de Lie de dimensão $(n+1)$, denotada por $\mathfrak{h}_\sigma$, tomando a extensão central unidimensional da álgebra de Lie abeliana V^* definida pelo cociclo induzido por σ. Esta será chamada de *álgebra de Heisenberg* ou, mais precisamente, *álgebra de Lie de Heisenberg* (associada a V^* e σ): como espaço vetorial, $\mathfrak{h}_\sigma = V^* \oplus \mathbb{R}$, e o comutador é dado por

$$[(\xi,\lambda),(\eta,\mu)] \;=\; (0\,,\,\sigma(\xi,\eta)) \qquad \text{para} \;\; \xi,\eta \in V^*\,,\; \lambda,\mu \in \mathbb{R}\;. \tag{2.1}$$

Associado a esta álgebra de Lie temos o *grupo de Heisenberg* ou, mais precisamente, o *grupo de Lie de Heisenberg*, denotado por H_σ: como variedade, $H_\sigma = V^* \times \mathbb{R}$, e o produto é dado por

$$(\xi,\lambda)\,(\eta,\mu) \;=\; \big(\xi+\eta\,,\,\lambda+\mu-\tfrac{1}{2}\,\sigma(\xi,\eta)\big) \qquad \text{para} \;\; \xi,\eta \in V^*\,,\; \lambda,\mu \in \mathbb{R}\;. \tag{2.2}$$

No que segue, vamos discutir várias maneiras de atribuir um significado matemático preciso ao conceito de uma *representação das relações canônicas de comutação* definidas por σ. Desde o primeiro momento, nos restringimos a representações na *forma de Weyl*, i.e., que correspondem a representações unitárias e fortemente contínuas π do grupo de Heisenberg H_σ: abreviando $\pi(\xi,0)$ por $\pi(\xi)$, estas relações podem ser escritas como

$$\pi(\xi)\,\pi(\eta) \;=\; e^{-\frac{i}{2}\sigma(\xi,\eta)}\,\pi(\xi+\eta)\;. \tag{2.3}$$

No nível infinitesimal, elas correspondem a representações $\dot{\pi}$ da álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}_\sigma$ que em geral são chamadas de representações "regulares": de acordo com o teorema de

[1] Enfatizamos que não exigimos que σ seja não degenerado; portanto, pode ocorrer que $2r < n$.

Nelson [27], estas são exatamente as representações de $\mathfrak{h}_\sigma$ por operadores essencialmente anti-auto-adjuntos em um domínio comum denso e invariante de vetores analíticos.

Nosso objetivo principal neste capitulo é usar estas representações para construir o que chamamos de *C^*-álgebra de Heisenberg*: mais precisamente, esta álgebra vem em duas versões, uma sem unidade e outra com unidade, denotadas respectivamente por $\mathcal{E}_\sigma$ e $\mathcal{H}_\sigma$: como veremos mais adiante, a segunda é a álgebra dos multiplicadores da primeira. Nos enfatizamos que nossa construção difere substancialmente de outras já apresentadas na literatura, tais quais a álgebra de Weyl de [23, 24] ou a álgebra de resolventes de [4], que são todas construídas a partir de conjuntos de geradores e relações. Ao invés disso, nos concentramos em certas $*$-álgebras de Fréchet que desempenham um papel central na teoria de quantização por deformação estrita de Rieffel [32] e mostramos que cada uma delas admite uma única C^*-norma e portanto tem um único completamento C^*. Para mais comentários, referimos o leitor ao fim deste capítulo.

2.1 As Álgebras de Heisenberg-Schwartz e Heisenberg-Rieffel

Nesta tese, dado qualquer espaço vetorial real de dimensão finita W, denotaremos por $\mathcal{S}(W)$ o espaço de Schwartz das funções diferenciáveis de decaimento rápido em W e por $\mathcal{B}(W)$ o espaço das funções diferenciáveis totalmente limitadas em W.[2]

Primeiramente, usaremos o bivector σ para introduzir um novo produto no espaço $\mathcal{S}(V)$, que é uma deformação do produto pontual padrão e comumente conhecido como o *produto estrela de Weyl-Moyal*, e posteriormente mostraremos como extendê-lo ao espaço $\mathcal{B}(V)$.

Inicialmente, notemos que, dada qualquer representação unitária e fortemente contínua π do grupo de Heisenberg H_σ em algum espaço de Hilbert $\mathfrak{H}_\pi$, podemos construir uma aplicação linear contínua

$$\begin{array}{rccc} W_\pi : & \mathcal{S}(V) & \longrightarrow & B(\mathfrak{H}_\pi) \\ & f & \longmapsto & W_\pi f \end{array} \tag{2.4}$$

de $\mathcal{S}(V)$ para o espaço de operadores limitados em $\mathfrak{H}_\pi$, chamado de *quantização de Weyl*, pela fórmula

$$W_\pi f \;=\; \int_{V^*} d\xi \; \check{f}(\xi)\, \pi(\xi) \;, \tag{2.5}$$

[2]De modo geral, usamos a palavra "diferenciável" como sinônimo da expressão de "de classe C^∞". Uma função diferenciável é chamada de totalmente limitada caso tanto ela quanto todas as suas derivadas parciais sejam limitadas.

que pode ser comparada com a fórmula padrão

$$f(x) \;=\; \int_{V^*} d\xi \;\check{f}(\xi)\; e^{i\langle \xi , x \rangle} \;, \tag{2.6}$$

onde $\check{f}$ é a transformada de Fourier inversa de f,

$$\check{f}(\xi) \;\equiv\; (\mathcal{F}^{-1} f)(\xi) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V dx \; f(x)\; e^{-i\langle \xi , x \rangle} \;. \tag{2.7}$$

A equação (2.5) deve ser interpretada no sentido de que para cada vetor ψ em $\mathfrak{H}_\pi$, vale

$$(W_\pi f)\psi \;=\; \int_{V^*} d\xi \;\check{f}(\xi)\; \pi(\xi)\psi \;, \tag{2.8}$$

uma vez que é esta integral que faz sentido dado que π é fortemente contínua, e então é obvio que $W_\pi f \in B(\mathfrak{H}_\pi)$, com $\|W_\pi f\| \leqslant \|\check{f}\|_1$, onde $\|.\|_1$ é a L^1-norma em $\mathcal{S}(V^*)$ que, como será demonstrado no apêndice (veja a equação (A.2)), pode ser estimada em termos de uma seminorma de Schwartz apropriada de f:

$$\|W_\pi f\| \;\leqslant\; \|\check{f}\|_1 \;\leqslant\; (2\pi)^n \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant 2n} \sup_{x \in V} |x^\alpha \, \partial_\beta f(x)| \;. \tag{2.9}$$

Além disso, uma computação explicita mostra que, independentemente da escolha de π, temos, para $f, g \in \mathcal{S}(V)$,

$$W_\pi f \; W_\pi g \;=\; W_\pi (f \star_\sigma g) \;, \tag{2.10}$$

onde $\star_\sigma$ denota o *produto de Weyl-Moyal* de f e g, definido por qualquer uma das seguintes integrais de convolução deformadas:

$$(f \star_\sigma g)(x) \;=\; \int_{V^*} d\xi \; e^{i\langle \xi , x \rangle} \int_{V^*} d\eta \;\check{f}(\eta)\, \check{g}(\xi - \eta)\; e^{\frac{i}{2}\sigma(\xi,\eta)} \;. \tag{2.11}$$

$$(f \star_\sigma g)(x) \;=\; \int_{V^*} d\xi \; e^{i\langle \xi , x \rangle} \int_{V^*} d\eta \;\check{f}(\xi - \eta)\, \check{g}(\eta)\; e^{-\frac{i}{2}\sigma(\xi,\eta)} \;. \tag{2.12}$$

A prova é um cálculo simples (omitimos o ψ):

$$\begin{aligned}
W_\pi f \; W_\pi g \; &= \int_{V^*} d\eta \int_{V^*} d\zeta \; \check{f}(\eta)\, \check{g}(\zeta)\; \pi(\eta)\, \pi(\zeta) \\
&= \int_{V^*} d\eta \int_{V^*} d\zeta \; \check{f}(\eta)\, \check{g}(\zeta)\; e^{-\frac{i}{2}\sigma(\eta,\zeta)}\, \pi(\eta+\zeta) \\
&= \int_{V^*} d\eta \int_{V^*} d\xi \; \check{f}(\eta)\, \check{g}(\xi-\eta)\; e^{-\frac{i}{2}\sigma(\eta,\xi)}\, \pi(\xi) \\
&= \int_{V^*} d\xi \int_{V^*} d\eta \; \check{f}(\eta)\, \check{g}(\xi-\eta)\; e^{\frac{i}{2}\sigma(\xi,\eta)}\, \pi(\xi) \\
&= \int_{V^*} d\xi \; \mathcal{F}^{-1}(f \star_\sigma g)(\xi)\, \pi(\xi) \\
&= W_\pi(f \star_\sigma g) \; .
\end{aligned}$$

Para fins de comparação, notamos uma forma alternativa deste produto [32]: usando o "homomorfismo musical" $\sigma^\sharp : V^* \longrightarrow V$ induzido por σ (i.e., $\langle \xi, \sigma^\sharp \eta \rangle = \sigma(\eta,\xi)$), obtemos

$$\begin{aligned}
(f \star_\sigma g)(x) \; &= \int_{V^*} d\xi \; e^{i\langle \xi, x\rangle} \int_{V^*} d\eta \; \check{f}(\eta)\, \check{g}(\xi-\eta)\; e^{-\frac{i}{2}\langle \xi, \sigma^\sharp \eta\rangle} \\
&= \int_{V^*} d\eta \int_{V^*} d\xi' \; \check{f}(\eta)\, \check{g}(\xi')\; e^{i\langle \xi'+\eta \,,\, x-\frac{1}{2}\sigma^\sharp \eta\rangle} \\
&= \int_{V^*} d\eta \; \check{f}(\eta)\, g(x-\tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \eta)\; e^{i\langle \eta, x\rangle} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{V^*} d\eta \int_{V} dw \; f(w)\, g(x-\tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \eta)\, e^{i\langle \eta, x-w\rangle} \; ,
\end{aligned}$$

e de modo semelhante

$$\begin{aligned}
(f \star_\sigma g)(x) \; &= \int_{V^*} d\xi \; e^{i\langle \xi, x\rangle} \int_{V^*} d\eta \; \check{f}(\xi-\eta)\, \check{g}(\eta)\; e^{\frac{i}{2}\langle \xi, \sigma^\sharp \eta\rangle} \\
&= \int_{V^*} d\eta \int_{V^*} d\xi' \; \check{f}(\xi')\, \check{g}(\eta)\; e^{i\langle \xi'+\eta \,,\, x+\frac{1}{2}\sigma^\sharp \eta\rangle} \\
&= \int_{V^*} d\eta \; f(x+\tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \eta)\, \check{g}(\eta)\; e^{i\langle \eta, x\rangle} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{V^*} d\eta \int_{V} dw \; f(x+\tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \eta)\, g(w)\, e^{i\langle \eta, x-w\rangle} \; ,
\end{aligned}$$

i.e., com a mudança de variáveis $w \to u = w - x$, $\eta \to \xi = \eta/2\pi$ no primeiro caso e $w \to v = w - x$, $\eta \to \xi = -\eta/2\pi$ no segundo,

$$(f \star_\sigma g)(x) \;=\; \int_{V^*} d\xi \int_V du\; f(x+u)\, g(x - \pi\sigma^\sharp\xi)\; e^{-2\pi i \langle \xi, u\rangle}\;. \tag{2.13}$$

$$(f \star_\sigma g)(x) \;=\; \int_{V^*} d\xi \int_V dv\; f(x - \pi\sigma^\sharp\xi)\, g(x+v)\; e^{2\pi i \langle \xi, v\rangle}\;. \tag{2.14}$$

Ademais, o produto estrela de Weyl-Moyal é (juntamente) contínuo em relação à topologia de Fréchet padrão em $\mathcal{S}(V)$ (este fato é bem conhecido e também é uma consequência imediata da Proposição A.1 no apêndice). Assim, segue que, com respeito ao produto estrela de Weyl-Moyal, junto com a involução usual de conjugação complexa pontual e com a topologia de Fréchet usual, o espaço $\mathcal{S}(V)$ se torna uma $*$-álgebra de Fréchet, a qual denotaremos por $\mathcal{S}_\sigma$ e chamaremos de *álgebra de Heisenberg-Schwartz* (com respeito a σ).

Definir o produto estrela de Weyl-Moyal entre funções em $\mathcal{B}(V)$, ao invés de $\mathcal{S}(V)$, é substancialmente mais complicado. Neste caso, sua definição é baseada na equação (2.13) ou na equação (2.14), cujo lado direito deve ser interpretado como uma integral oscilatória em $V^* \times V$. Felizmente, todo o ferramental analítico necessário para tal foi desenvolvido por Rieffel em [32] (com a identificação $J = -\pi\sigma^\sharp$), de forma que podemos afirmar que com respeito ao produto estrela de Weyl-Moyal, junto com a involução usual de conjugação complexa pontual e com a topologia de Fréchet usual, o espaço $\mathcal{B}(V)$ se torna uma $*$-álgebra de Fréchet, a qual denotaremos por $\mathcal{B}_\sigma$ e chamaremos de *álgebra de Heisenberg-Rieffel* (com respeito a σ).

De passagem, notamos que nenhuma dessas álgebras é comutativa (exceto quando $\sigma = 0$), mas que o desvio da comutatividade pode ser explicitamente controlado através da formula

$$g \star_\sigma f \;=\; f \star_{-\sigma} g\;. \tag{2.15}$$

Voltando às formulas integrais explícitas, mencionamos que existe uma situação intermediária, de particular interesse no que segue, que ocorre quando um dos fatores pertence a $\mathcal{B}(V)$ enquanto que o outro pertence a $\mathcal{S}(V)$, pois como o cálculo acima já mostrou, as equações (2.13) e (2.14) podem também ser exritas na forma

$$(f \star_\sigma g)(x) \;=\; \int_{V^*} d\xi\; \check{f}(\xi)\, g(x - \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp\xi)\; e^{i\langle \xi, x\rangle}\;, \tag{2.16}$$

e

$$(f \star_\sigma g)(x) \;=\; \int_{V^*} d\xi\; f(x + \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp\xi)\, \check{g}(\xi)\; e^{i\langle \xi, x\rangle}\;. \tag{2.17}$$

Agora, note que a expressão na equação (2.16) faz sentido quando $f \in \mathcal{S}(V)$ e $g \in \mathcal{B}(V)$, e de modo análogo, a expressão na equação (2.17) faz sentido quando $f \in \mathcal{B}(V)$ e $g \in \mathcal{S}(V)$: ambas são integrais usuais que se tornam integrais iteradas quando a expressão (2.7) para a transformada de Fourier inversa é inserida. (Obviamente, as duas formulas podem ser convertidas uma na outra fazendo uso da equação (2.15).) Além disso, a estimativa da Proposição A.1) no apêndice mostra imediatamente que, em ambos os casos, vale $f \star_\sigma g \in \mathcal{S}(V)$, e os operadores lineares

$$\begin{array}{rccc} L_\sigma f : & \mathcal{S}_\sigma & \longrightarrow & \mathcal{S}_\sigma \\ & h & \longmapsto & f \star_\sigma h \end{array} \tag{2.18}$$

de translação a esquerda por $f \in \mathcal{B}_\sigma$ e

$$\begin{array}{rccc} R_\sigma g : & \mathcal{S}_\sigma & \longrightarrow & \mathcal{S}_\sigma \\ & h & \longmapsto & h \star_\sigma g \end{array} \tag{2.19}$$

de translação a direita por $g \in \mathcal{B}_\sigma$ são contínuos na topologia de Schwartz. Em particular, $\mathcal{S}_\sigma$ é um $*$-ideal bilateral em $\mathcal{B}_\sigma$ (mas $\mathcal{S}_\sigma$ não é fechado em $\mathcal{B}_\sigma$); veja [32, Chapter 3] para mais detalhes. Assim, obtemos um $*$-homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_\sigma & \longrightarrow & M(\mathcal{S}_\sigma) \\ f & \longmapsto & (L_\sigma f, R_\sigma f) \end{array} \tag{2.20}$$

proporcionando um mergulho de $\mathcal{B}_\sigma$ no que poderíamos chamar de "a álgebra de multiplicadores $M(\mathcal{S}_\sigma)$ de $\mathcal{S}_\sigma$". Entretanto, não usaremos esta terminologia aqui, uma vez que não existe uma definição bem estabelecida do conceito de álgebra de multiplicadores para álgebras não normadas: neste caso existem "a priori" muitas possíveis escolhas de topologia localmente convexa.[3] Obviamente, esta ambiguidade desaparecerá assim que passarmos aos completamentos C^*.

2.2 Existência de Normas C^*

As álgebras de Fréchet $\mathcal{S}_\sigma$ e $\mathcal{B}_\sigma$ admitem diversas normas. Poderíamos considerar, por exemplo, a norma do supremo usual; porém, esta é uma C^*-norma para o produto usual e não para o produto estrela de Weyl-Moyal. Assim, a primeira questão que surge é se as álgebras $\mathcal{S}_\sigma$ e $\mathcal{B}_\sigma$ admitem pelo menos alguma C^*-norma. Felizmente, a resposta

[3] Esta afirmação, é claro, é genérica: ela não exclui a existência de casos especiais onde existe uma escolha "natural" para tal topologia, como acontece no caso de $M(\mathcal{S}_\sigma)$ quando σ é não degenerada [34].

é afirmativa: é suficiente tomar a norma operatorial na representação regular. Mais precisamente, considere a $*$-representação

$$\begin{array}{rccc} L_\sigma : & \mathcal{S}_\sigma & \longrightarrow & B(L^2(V)) \\ & f & \longmapsto & L_\sigma f \end{array} \tag{2.21}$$

de $\mathcal{S}_\sigma$, que estende para uma $*$-representação

$$\begin{array}{rccc} L_\sigma : & \mathcal{B}_\sigma & \longrightarrow & B(L^2(V)) \\ & f & \longmapsto & L_\sigma f \end{array} \tag{2.22}$$

de $\mathcal{B}_\sigma$, ambas definidas tomando o operador $L_\sigma f \,:\, L^2(V) \longrightarrow L^2(V)$ como sendo a única extensão linear contínua do operador $L_\sigma f \,:\, \mathcal{S}(V) \longrightarrow \mathcal{S}(V)$ da equação (2.18). Da mesma forma, podemos considerar a (anti-)$*$-representação

$$\begin{array}{rccc} R_\sigma : & \mathcal{S}_\sigma & \longrightarrow & B(L^2(V)) \\ & g & \longmapsto & R_\sigma g \end{array} \tag{2.23}$$

de $\mathcal{S}_\sigma$, que estende para uma (anti-)$*$-representação

$$\begin{array}{rccc} R_\sigma : & \mathcal{B}_\sigma & \longrightarrow & B(L^2(V)) \\ & g & \longmapsto & R_\sigma g \end{array} \tag{2.24}$$

de $\mathcal{B}_\sigma$, ambas definidas tomando o operador $R_\sigma g \,:\, L^2(V) \longrightarrow L^2(V)$ como sendo a única extensão linear contínua do operador $R_\sigma g \,:\, \mathcal{S}(V) \longrightarrow \mathcal{S}(V)$ da equação (2.19). A associatividade do produto estrela de Weyl-Moyal garante que qualquer $L_\sigma f$ comuta com qualquer $R_\sigma g$. Mas esta construção pressupõe que os operadores $L_\sigma f$ da equação (2.18) (assim como os operadores $R_\sigma g$ da equação (2.19)) são contínuos, não só na topologia de Schwartz, mas também na L^2-norma. Além disso, precisamos mostrar que as aplicações lineares L_σ nas equações (2.21) e (2.22) (assim como as aplicações R_σ nas equações (2.23) e (2.24)) são contínuas com respeito às topologias apropriadas. Finalmente, queremos que estas propriedades de continuidade sejam, de alguma forma, uniformes quando variamos σ. Felizmente, todas estas afirmações seguem de uma única estimativa, como será mostrado agora.

Primeiramente, considere o caso em que f pertence a $\mathcal{S}(V)$: podemos então reescrever a equação (2.16) na forma da equação (2.5), uma vez que

$$L_\sigma f \;=\; \int_{V^*} d\xi \;\check{f}(\xi)\; \pi^{\mathrm{S}}(\xi) \;, \tag{2.25}$$

onde π^{S} é a representação de Schrödinger do grupo de Heisenberg H_σ, ou seja, a representação unitária e fortemente contínua de H_σ no espaço de Hilbert $L^2(V)$ definida por

$$(\pi^{\mathrm{S}}(\xi)\psi)(x) \;=\; e^{i\langle\xi,x\rangle}\,\psi(x-\tfrac{1}{2}\sigma^\sharp\xi)\;, \tag{2.26}$$

i.e., $\pi^{\mathrm{S}}(\xi)$ é o operador de translação por $-\frac{1}{2}\sigma^\sharp\xi$ seguido do operador de multiplicação pela função $e^{i\langle\xi,\,.\,\rangle}$. Como antes, segue que $L_\sigma f \in B(L^2(V))$, com $\|L_\sigma f\| \leqslant \|\check{f}\|_1$, onde $\|.\|_1$ é a L^1-norma em $\mathcal{S}(V^*)$ que, como é demonstrado no apêndice (conforme a equação (A.2)), pode ser estimada em termos de uma certa seminorma de Schwartz de f:

$$\|L_\sigma f\| \;\leqslant\; \|\check{f}\|_1 \;\leqslant\; (2\pi)^n \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 2n} \sup_{x\in V} |x^\alpha\,\partial_\beta f(x)|\;. \tag{2.27}$$

Para lidar com o caso em que f pertence a $\mathcal{B}(V)$, precisamos de uma estimativa melhor. Felizmente, podemos recorrer a um famoso teorema da teoria dos operadores pseudo-diferenciais, conhecido como o teorema de Calderón-Vaillancourt [5]: na versão usada aqui nos restringimos a uma classe bastante especial de símbolos [4] mas utilizamos uma versão aprimorada da estimativa pertinente, que pode ser encontrada em [7], afirmando que, dada qualquer função diferenciável totalmente limitada a em $V\times V^*$, a expressão

$$(Au)(x) \;=\; \int_{V^*} d\xi\; a(x,\xi)\,\check{u}(\xi)\,e^{i\langle\xi,x\rangle} \qquad \text{para}\;\; u\in\mathcal{S}(V)$$

define, por extensão linear contínua, um operador limitado em $L^2(V)$ com norma

$$\|A\| \;\leqslant\; C \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant n} \sup_{x\in V,\,\xi\in V^*} \big|\,\partial_{x,\alpha}\partial_{\xi,\beta}\,a\,(x,\xi)\,\big|\;,$$

onde C é uma constante combinatória que depende apenas da dimensão n de V. Aplicando este resultado ao operador $L_\sigma f$ definido pelas equações (2.17) e (2.18), concluímos que, para todo f in $\mathcal{B}(V)$, $L_\sigma f$ é um operador limitado em $L^2(V)$ cuja norma satisfaz uma estimativa da forma

$$\|L_\sigma f\| \;\leqslant\; |P(\sigma)| \sum_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in V} \big|\,\partial_\alpha f(x)\,\big|\;, \tag{2.28}$$

onde $P(\sigma)$ é um polinômio de grau $\leqslant n$ em σ cujos coeficientes são constantes combinatoriais que dependem apenas da dimensão n de V.

Segue destes resultados que podemos definir uma C^*-norma em $\mathcal{S}_\sigma$, bem como em $\mathcal{B}_\sigma$, pondo

$$\|f\| \;=\; \|L_\sigma f\|\;. \tag{2.29}$$

[4] O espaço de funções $\mathcal{B}$ coincide com o espaço S^0_{00} de símbolos de Hörmander.

Que esta é realmente uma norma e não somente uma seminorma decorre do fato de que a representação L_σ é fiel. De fato, dado $f \in \mathcal{B}(V)$, $f \neq 0$, e qualquer ponto x em V tal que $f(x) \neq 0$, tome $g \in \mathcal{S}(V)$ tal que $\check{g} \in \mathcal{S}(V^*)$ assume a forma

$$\check{g}(\xi) = \overline{f(x + \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \xi)}\; e^{-i\langle \xi, x\rangle}\; e^{-q(\xi)}$$

onde q é uma forma quadratica positiva definida em V^*; então pela equação (2.17), $(f \star_\sigma g)(x)$ é igual à L^2-norma da função $\xi \mapsto f(x + \frac{1}{2}\sigma^\sharp \xi)$ com respeito a medida Gaussiana $e^{-q(\xi)}\, d\xi$ em V^* e portanto é maior que 0, uma vez que esta função é diferenciável e diferente de 0 em $\xi = 0$, de forma que $L_\sigma f \cdot g \neq 0$ e portanto $L_\sigma f \neq 0$.

Os completamentos de $\mathcal{S}_\sigma$ e de $\mathcal{B}_\sigma$ com respeito a esta C^*-norma serão denotados por $\mathcal{E}_\sigma$ e por $\mathcal{H}_\sigma$, respectivamente, e serão chamadas de *C^*-álgebras de Heisenberg*: mais precisamente, $\mathcal{E}_\sigma$ é a *C^*-álgebra de Heisenberg sem unidade* enquanto que $\mathcal{H}_\sigma$ é a *C^*-álgebra de Heisenberg com unidade* (com respeito a σ).[5] Obviamente, as estimativas (2.27) e (2.28) implicam que as topologias naturais de Fréchet em $\mathcal{S}_\sigma$ e em $\mathcal{B}_\sigma$ são mais finas do que as topologias induzidas por seus mergulhos nos seus respectivos completamentos C^*. Além do mais, por construção, as $*$-representações fieis (2.21) e (2.22) estendem a C^*-representações fieis de $\mathcal{E}_\sigma$ e de $\mathcal{H}_\sigma$, respectivamente, para as quais mantemos a mesma notação, escrevendo

$$\begin{array}{rccc} L_\sigma : & \mathcal{E}_\sigma & \longrightarrow & B(L^2(V)) \\ & f & \longmapsto & L_\sigma f \end{array} , \tag{2.30}$$

e

$$\begin{array}{rccc} L_\sigma : & \mathcal{H}_\sigma & \longrightarrow & B(L^2(V)) \\ & f & \longmapsto & L_\sigma f \end{array} , \tag{2.31}$$

respectivamente. Também é claro que o mergulho de $\mathcal{S}_\sigma$ em $\mathcal{B}_\sigma$ (como um $*$-ideal) estende canonicamente a um mergulho de $\mathcal{E}_\sigma$ em $\mathcal{H}_\sigma$ (como um $*$-ideal) e, de modo semelhante, que o mergulho da equação (2.20) estende canonicamente a um mergulho de $\mathcal{H}_\sigma$ na álgebra dos multiplicadores $M(\mathcal{E}_\sigma)$ de $\mathcal{E}_\sigma$, o qual escrevemos em forma análoga à equação (2.20):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\sigma & \longrightarrow & M(\mathcal{E}_\sigma) \\ f & \longmapsto & (L_\sigma f, R_\sigma f) \end{array} \tag{2.32}$$

[5] Talvez, o uso do simbolo $\mathcal{E}$ com este significado seja um pouco infeliz, uma vez que $\mathcal{E}_\sigma$ não tem relação alguma com o espaço de Schwartz $\mathcal{E}(V)$ de todas as funções diferenciáveis em V: de fato, a diferença entre os dois fica aparente no caso em que σ é não degenerado e portanto $\mathcal{E}_\sigma$ é isomorfa à álgebra dos operadores compactos no espaço de Hilbert $L^2(V_L)$ onde V_L é um subspaço lagrangiano de V. Ainda assim, decidimos adotar esta notação pela conexão, explicada no Capítulo 4.2 abaixo, com a álgebra DFR, que foi denotada por $\mathcal{E}$ por seus autores [9], e também porque o espaço de Schwartz $\mathcal{E}(V)$ não é relevante neste trabalho, com exceção de um argumento intermediário no apêndice.

Ademais, a C^*-representação (fiel) de $\mathcal{E}_\sigma$ na equação (2.30) também é não degenerada. (Esta afirmação é uma simples consequência da existência de aproximantes da identidade na álgebra de Heisenberg-Schwartz $\mathcal{S}_\sigma$, como provada na Proposição A.2 do apêndice: dada qualquer função quadraticamente integravel $\psi \in L^2(V)$, é suficiente aproximá-la na L^2-norma por alguma função de Schwartz $f \in \mathcal{S}(V)$ e depois aproximar esta na topologia de Schwartz, e assim também na L^2-norma, por alguma função de Schwartz da forma $\chi_k \star_\sigma f$, onde $\chi_k \in \mathcal{S}(V)$.) Desta forma, ela se estende unicamente a uma C^*-representação (fiel)

$$\begin{array}{rccc} L_\sigma : & M(\mathcal{E}_\sigma) & \longrightarrow & B(L^2(V)) \\ & m & \longmapsto & L_\sigma m \end{array} \tag{2.33}$$

da álgebra dos multiplicadores $M(\mathcal{E}_\sigma)$: para uso posterior, gostaríamos de lembrar como definir esta extensão. Escrevendo os elementos de $M(\mathcal{E}_\sigma)$ como pares $m = (m_L, m_R)$ onde $m_L \in L(\mathcal{E}_\sigma)$ é um multiplicador a esquerda, $(m_L(f \star_\sigma g) = m_L(f) \star_\sigma g)$ e $m_R \in L(\mathcal{E}_\sigma)$ é um multiplicador a direita $(m_R(f \star_\sigma g) = f \star_\sigma m_R(g))$, relacionados pela condição de que $f \star_\sigma m_L(g) = m_R(f) \star_\sigma g$, e usando o fato de que a representação L_σ na equação (2.30) é não degenerada, o que significa que o subespaço de $L^2(V)$ gerado por vetores da forma $L_\sigma f \cdot \psi$ com $f \in \mathcal{E}_\sigma$ e $\psi \in L^2(V)$ (ou mesmo $\psi \in \mathcal{S}(V)$) é denso em $L^2(V)$, o operador $L_\sigma m \in B(L^2(V))$ é definido por

$$L_\sigma m \cdot \big(L_\sigma f \cdot \psi\big) \;=\; L_\sigma\big(m_L(f)\big) \cdot \psi \;. \tag{2.34}$$

Que esta expressão é bem definida segue do fato de $\mathcal{E}_\sigma$ ser um $*$-ideal essencial em $M(\mathcal{E}_\sigma)$, i.e., um ideal que possui intersecção não-trivial com qualquer $*$-ideal não-trivial de $M(\mathcal{E}_\sigma)$. Além disso, assim como todo $L_\sigma f$ (originalmente para $f \in \mathcal{S}_\sigma$ mas por continuidade também para $f \in \mathcal{E}_\sigma$), todo $L_\sigma m$ também comuta com todo $R_\sigma g$ (originalmente para $g \in \mathcal{S}_\sigma$, mas por continuidade também para $g \in \mathcal{E}_\sigma$):

$$\begin{aligned} (L_\sigma m\, R_\sigma g) \cdot \big(L_\sigma f \cdot \psi\big) &= (L_\sigma m\, R_\sigma g) \cdot (f \star_\sigma \psi) \;=\; L_\sigma m \cdot \big((f \star_\sigma \psi) \star_\sigma g\big) \\ &= L_\sigma m \cdot \big(f \star_\sigma (\psi \star_\sigma g)\big) \;=\; L_\sigma m \cdot \big(L_\sigma f \cdot (\psi \star_\sigma g)\big) \\ &= \big(L_\sigma(m_L(f))\, R_\sigma g\big) \cdot \psi \;=\; \big(R_\sigma g\, L_\sigma(m_L(f))\big) \cdot \psi \\ &= (R_\sigma g\, L_\sigma m) \cdot \big(L_\sigma f \cdot \psi\big) \;. \end{aligned}$$

Finalmente, vemos que com esta construção, a representação (2.31) se torna simplesmente a composição da representação (2.33) com o mergulho (2.32).

2.3 A Unicidade do Completamento C^*

Tendo resolvido a questão da existência de C^*-normas nas $*$-álgebras de Fréchet $\mathcal{S}_\sigma$ e $\mathcal{B}_\sigma$, queremos discutir a questão de sua unicidade. Para tal fim, seguimos a estratégia delineada na seção anterior, que funciona perfeitamente para as álgebras de Heisenberg-Schwartz e Heisenberg-Rieffel.

O primeiro passo é demonstrar a seguinte afirmação.

Teorema 2.1 *As álgebras de Heisenberg-Schwartz e de Heisenberg-Rieffel, $\mathcal{S}_\sigma$ e $\mathcal{B}_\sigma$, são espectralmente invariantes em seus respectivos completamentos C^*, $\mathcal{E}_\sigma$ e $\mathcal{H}_\sigma$, como definidos acima. Assim, $\mathcal{E}_\sigma$ e $\mathcal{H}_\sigma$ são as C^*-álgebras universais envelopantes das álgebras de Heisenberg-Schwartz $\mathcal{S}_\sigma$ e de Heisenberg-Rieffel $\mathcal{B}_\sigma$, respectivamente.*

A afirmação do teorema 2.1 é bem conhecida no caso comutativo, i.e., quando $\sigma = 0$ [15, Exemplo 3.2, p. 135] e também quando σ é não degenerado [14, Prop. 2.14 & Prop. 2.23], mas para as álgebras deformadas mais gerais ela não parece ter sido formulada explicitamente em nenhum lugar da literatura: assim, apresentaremos a seguir um prova diferente e direta que não faz referência alguma ao posto de σ.

Demonstração: A prova é baseada no teorema principal de [25], que pode ser formulado da seguinte maneira. Primeiramente, seja Ω a forma simplética padrão no espaço $V \oplus V^*$, definida por

$$\Omega\big((x,\xi),(y,\eta)\big) \;=\; \xi(y) - \eta(x) \;, \tag{2.35}$$

seja H_Ω o grupo de Heisenberg correspondente,[6] e considere a representação unitária e fortemente contínua

$$W_\Omega : H_\Omega \;\longrightarrow\; U(L^2(V)) \tag{2.36}$$

de H_Ω em $L^2(V)$, explicitamente dada por

$$\big(W_\Omega(x,\xi,\lambda)\,\psi\big)(z) \;=\; e^{-i\langle \xi,\, z-\frac{1}{2}x\rangle + i\lambda}\,\psi(z-x) \;. \tag{2.37}$$

Também considere a representação isométrica

$$\mathrm{Ad}(W_\Omega) : H_\Omega \;\longrightarrow\; \mathrm{Aut}(B(L^2(V))) \tag{2.38}$$

de H_Ω em $B(L^2(V))$ obtida a partir desta pela ação adjunta (i.e., para $T \in B(L^2(V))$, $\mathrm{Ad}(W_\Omega)(h)\,T = W_\Omega(h)\,T\,W_\Omega(h)^{-1}$). Então dado um operador $T \in B(L^2(V))$, dizemos

[6] Note que o grupo de Heisenberg H_Ω é diferente do grupo de Heisenberg H_σ considerado anteriormente.

que ele é *Heisenberg-diferenciável* se for um vetor diferenciável em relação a esta representação, i.e., se a função

$$\begin{array}{ccc} H_\Omega & \longrightarrow & B(L^2(V)) \\ (x,\xi,\lambda) & \longmapsto & W_\Omega(x,\xi,\lambda)\, T\, W_\Omega(x,\xi,\lambda)^{-1} \end{array}$$

for diferenciável. Com esta terminologia, o teorema principal em [25] afirma que um operador $T \in B(L^2(V))$ é da forma $L_\sigma f$ (veja as equações (2.17), (2.18) e (2.22)), com $f \in \mathcal{B}_\sigma$, se, e somente se, ele é Heisenberg-diferenciável e comuta com todos os operadores da forma $R_\sigma g$ (veja as equações (2.16), (2.19) e (2.24)), onde $g \in \mathcal{B}_\sigma$ (ou equivalentemente, $g \in \mathcal{S}_\sigma$). Este fato, aplicado em ambas as direções, nos permitirá terminar a prova.

Suponha primeiro que $f \in \mathcal{B}_\sigma$ é invertível em $\mathcal{H}_\sigma$. Então o operador $L_\sigma f \in B(L^2(V))$ é Heisenberg-diferenciável e comuta com todos os operadores da forma $R_\sigma g$, onde $g \in \mathcal{S}_\sigma$. Mas isto implica que o operador inverso $(L_\sigma f)^{-1} \in B(L^2(V))$ também é Heisenberg-diferenciável, uma vez que temos

$$W_\Omega(x,\xi,\mu)\,(L_\sigma f)^{-1}\, W_\Omega(x,\xi,\mu)^{-1} \;=\; \big(W_\Omega(x,\xi,\mu)\; L_\sigma f\; W_\Omega(x,\xi,\mu)^{-1}\big)^{-1} \;,$$

e a inversão de operadores limitados é uma aplicação diferenciável, e também comuta com todos os operadores da forma $R_\sigma g$, onde $g \in \mathcal{S}_\sigma$. Portanto, $(L_\sigma f)^{-1}$ é da forma $L_\sigma g$ para algum $g \in \mathcal{B}_\sigma$, mostrando que $\mathcal{B}_\sigma$ é espectralmente invariante em $\mathcal{H}_\sigma$. Para provar que $\mathcal{S}_\sigma$ também é espectralmente invariante em $\mathcal{E}_\sigma$, consideremos as unitizações $\tilde{\mathcal{S}}_\sigma$ de $\mathcal{S}_\sigma$ (ainda contida em $\mathcal{B}_\sigma$) e $\tilde{\mathcal{E}}_\sigma$ de $\mathcal{E}_\sigma$ (ainda contida em $\mathcal{H}_\sigma$), e suponha que $f \in \mathcal{S}_\sigma$ é tal que $\lambda 1 + f \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma$ é invertível em $\tilde{\mathcal{E}}_\sigma$ (note que isso implica $\lambda \neq 0$). Então, como já mostramos, $(\lambda 1 + L_\sigma f)^{-1}$ é da forma $L_\sigma h$ para algum $h \in \mathcal{B}_\sigma$, o que podemos reescrever na forma $h = \lambda^{-1} 1 + g$ com $g \in \mathcal{B}_\sigma$, implicando

$$1 \;=\; (\lambda 1 + f) \star_\sigma (\lambda^{-1} 1 + g) \;=\; 1 \,+\, \lambda^{-1} f \,+\, \lambda g \,+\, f \star_\sigma g$$

e portanto

$$g \;=\; -\,\lambda^{-2} f \,-\, \lambda^{-1}\, f \star_\sigma g \;.$$

Mas $\mathcal{S}_\sigma$ é um ideal em $\mathcal{B}_\sigma$, o que implica em $g \in \mathcal{S}_\sigma$ e assim $\lambda^{-1} 1 + g \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma$. ■

As mesmas técnicas podem ser usadas para provar um interessante teorema sobre a relação entre $\mathcal{E}_\sigma$ e $\mathcal{H}_\sigma$.

Teorema 2.2 *A C^*-álgebra $\mathcal{H}_\sigma$ é a álgebra dos multiplicadores da C^*-álgebra $\mathcal{E}_\sigma$,*

$$\mathcal{H}_\sigma \;=\; M(\mathcal{E}_\sigma) \;, \tag{2.39}$$

e, de fato, é uma álgebra de von Neumann.

Demonstração: Precisamos mostrar que o mergulho (2.32) é na verdade um isomorfismo. Para tal fim, seja R o subspaço de $B(L^2(V))$ que consiste de translações a direita por elementos de $\mathcal{S}_\sigma$:

$$R = \{R_\sigma(g) \mid g \in \mathcal{S}_\sigma\} \ .$$

Consideremos então seu comutante R', que é um subespaço fechado (e de fato, uma subalgebra de von Neumann) de $B(L^2(V))$. Como foi mostrado no fim da última subseção, a representação (2.33) leva $M(\mathcal{E}_\sigma)$ em R'. Por outro lado, a relação

$$W_\Omega(x,\xi,\lambda)\, R_\sigma(g)\, W_\Omega(x,\xi,\lambda)^{-1} \;=\; R_\sigma\big(W_\Omega(x+\tfrac{1}{2}\sigma^\sharp\xi,0,0)\, g\big) \ , \tag{2.40}$$

mostra que R é um subespaço invariante para a representação $\mathrm{Ad}(W_\Omega)$ de H_Ω em $B(L^2(V))$ (conforme a equação (2.38)), e portanto o mesmo vale para R'. Assim, o teorema principal em [25] pode ser reformulado como a afirmação de que a imagem de $\mathcal{B}_\sigma$ sob a representação (2.22) é precisamente o subspaço dos vetores diferenciáveis da representação $\mathrm{Ad}(W_\Omega)$ de H_Ω em R' obtida por restrição, e portanto é densa em R'. Segue que a imagem de $\mathcal{H}_\sigma$ sob a representação (2.31) é precisamente R', uma álgebra de von Neumann. ■

Para o segundo passo, que consiste em provar a unicidade da C^*-norma a partir da invariância espectral, utilizamos um resultado que é de interesse independente, a saber, o fato de que, como foi demonstrado em [32, Proposition 5.2], a C^*-álgebra de Heisenberg $\mathcal{E}_\sigma$ é isomorfa à álgebra de funções contínuas que se anulam no infinito em um certo subespaço V_0 de V (dual a $\ker\sigma$) com valores na álgebra $\mathcal{K}$ de operadores compactos em um espaço de Hilbert separável, que também pode ser escrita como o produto tensorial de C^*-álgebras:

$$\mathcal{E}_\sigma \;\cong\; C_0(V_0,\mathcal{K}) \;\cong\; C_0(V_0)\otimes\mathcal{K} \ . \tag{2.41}$$

Para conferir isso explicitamente, utilizamos o "homomorfismo musical" $\sigma^\sharp : V^* \longrightarrow V$ induzido por σ (i.e., $\langle\xi,\sigma^\sharp\eta\rangle = \sigma(\eta,\xi)$), cuja imagem é um subespaço de V, aqui denotado por W: este é exatamente o aniquilador do núcleo de σ em V^*,

$$W \;=\; \mathrm{im}\,\sigma^\sharp \;=\; (\ker\sigma)^\perp \ , \tag{2.42}$$

e possui uma forma simplética, aqui denotada por ω e definida por $\omega(\sigma^\sharp\xi,\sigma^\sharp\eta) = \sigma(\xi,\eta)$. Escolhendo um subespaço V_0 de V complementar a W, obtemos uma decomposição direta

$$V \;=\; V_0\oplus W \ . \tag{2.43}$$

Tomando os aniquiladores correspondentes, obtemos uma decomposição direta para o espaço dual,

$$V^* \;=\; V_0^*\oplus W^* \qquad \text{onde} \qquad V_0^* = W^\perp = \ker\sigma \quad \text{e} \quad W^* = V_0^\perp \ . \tag{2.44}$$

É claro que W^* também possui uma forma simplética, mais uma vez denotada por ω, que é a restrição de σ a este espaço, no qual ela é não degenerada. Agora, de acordo com o teorema nuclear de Schwartz, temos

$$\mathcal{S}(V) \;\cong\; \mathcal{S}(V_0) \otimes \mathcal{S}(W) \;, \tag{2.45}$$

e de modo semelhante

$$\mathcal{S}(V^*) \;\cong\; \mathcal{S}(V_0^*) \otimes \mathcal{S}(W^*) \;. \tag{2.46}$$

e é claro que a transformação de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(V) \longrightarrow \mathcal{S}(V^*)$ é o produto tensorial das transformações de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(V_0) \longrightarrow \mathcal{S}(V_0^*)$ e $\mathcal{F} : \mathcal{S}(W) \longrightarrow \mathcal{S}(W^*)$. Portanto, pela definição do produto estrela de Weyl-Moyal, os produtos tensoriais nas equações (2.45) e (2.46) são produtos tensoriais de álgebras, i.e.,

$$\mathcal{S}_\sigma \;\cong\; \mathcal{S}_0 \otimes \mathcal{S}_\omega \;, \tag{2.47}$$

onde $\mathcal{S}_0$ é a álgebra comutativa das funções de Schwartz ($\mathcal{S}(V_0)$ com o produto pontual usual ou, equivalentemente, $\mathcal{S}(V_0^*)$ com o produto de convolução usual) enquanto que $\mathcal{S}_\omega$ é a álgebra de Heisenberg-Schwartz associada à 2-forma não degenerada ω. Tomando os completamentos C^* universais, obtemos

$$\mathcal{E}_\sigma \;\cong\; \mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}_\omega \;. \tag{2.48}$$

Mas obviamente, $\mathcal{E}_0 \cong C_0(V_0) \cong C_0(V_0^*)$, e é um fato bem conhecido que $\mathcal{E}_\omega \cong \mathcal{K}$.

De passagem, notamos que o produto tensorial nas equações (2.41) e (2.48) é o produto tensorial de C^*-álgebras e portanto é único (só existe uma única C^*-norma no produto tensorial algébrico), uma vez que um dos fatores é nuclear (de fato, ambos são; veja [26, Exemplo 6.3.2 & Teorema 6.4.15]).

Para completar o argumento, utilizamos o fato de que todo ideal em $\mathcal{E}_\sigma$ é da forma

$$\big\{ \phi \in C_0(V_0, \mathcal{K}) \mid \phi|_F = 0 \big\} \;,$$

ou equivalentemente,

$$\big\{ f \in C_0(V_0) \mid f|_F = 0 \big\} \otimes \mathcal{K} \;,$$

onde F é um subconjunto fechado do espaço V_0. (Que estes são de fato os únicos ideais em $\mathcal{E}_\sigma$ é um caso especial de uma afirmação muito mais geral, cuja formulação e demonstração podem ser encontradas em [11, Lema VIII.8.7], junto com o fato de que $\mathcal{K}$ é simples.) Obviamente, cada um destes ideais tem uma intersecção não trivial com a álgebra de Heisenberg-Schwartz.

Finalmente, podemos estender a conclusão de $\mathcal{E}_\sigma$ para $\mathcal{H}_\sigma$: como a última é a álgebra dos multiplicadores da primeira, qualquer ideal não trivial em $\mathcal{H}_\sigma$ intersecta $\mathcal{E}_\sigma$ em um ideal não trivial de $\mathcal{E}_\sigma$, que por sua vez tem intersecção não trivial com $\mathcal{S}_\sigma$ e portanto com $\mathcal{B}_\sigma$.

Resumindo, acabamos de provar

Teorema 2.3 *A álgebra de Heisenberg-Schwartz $\mathcal{S}_\sigma$ e a álgebra de Heisenberg-Rieffel $\mathcal{B}_\sigma$ admitem uma única C^*-norma, e portanto as C^*-álgebras de Heisenberg $\mathcal{E}_\sigma$ e $\mathcal{H}_\sigma$ são seus únicos completamentos C^*.*

2.4 Teoria de Representações

Voltando à situação discutida no início desta seção, consideramos uma representação unitária e fortemente contínua π do grupo de Heisenberg H_σ. A quantização de Weyl então produz uma $*$-representação W_π da álgebra de Heisenberg-Schwartz $\mathcal{S}_\sigma$, definida de acordo com as equações (2.4)-(2.5), a qual, de acordo com a equação (2.9), é contínua com respeito a topologia de Schwartz. Na verdade, ela também é contínua com respeito a topologia C^*, uma vez que esta é definida pela C^*-norma maximal em $\mathcal{S}_\sigma$ que é um majorante para todas as C^*-seminormas em $\mathcal{S}_\sigma$, incluindo aquela induzida pela representação W_π, e portanto W_π estende unicamente para uma representação da C^*-álgebra de Heisenberg sem unidade $\mathcal{E}_\sigma$ que novamente será denotada por W_π. Além disso, temos

Lema 2.1 *Dada qualquer representação unitária e fortemente contínua π do grupo de Heisenberg H_σ, a representação W_π da álgebra de Heisenberg-Schwartz $\mathcal{S}_\sigma$, e assim também, da C^*-álgebra de Heisenberg $\mathcal{E}_\sigma$, é não degenerada.*

Demonstração: Dado qualquer vetor ψ no espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$ das representações π e W_π e qualquer $\epsilon > 0$, a continuidade forte de π garante a existência de uma vizinhança aberta U^* de 0 em V^* tal que

$$\|\pi(\xi)\psi - \psi\| \ < \ \epsilon \qquad \text{para } \ \xi \in U^* \ ,$$

uma vez que $\pi(0) = 1$. Escolhemos então $f \in \mathcal{S}(V)$ tal que $\check{f} \in \mathcal{S}(V^*)$ é não negativa, com integral normalizada a 1, e tem suporte compacto contido em U^*. Então

$$\|(W_\pi f)\psi - \psi\| \ = \ \left\| \int_{V^*} d\xi \ \check{f}(\xi) \ \pi(\xi)\psi \ - \ \psi \right\| \ \leqslant \ \int_{V^*} d\xi \ \check{f}(\xi) \ \|\pi(\xi)\psi - \psi\| \ < \ \epsilon \ .$$

■

Segue que estas $*$-representações estendem a $*$-representações unitais da álgebra de Heisenberg-Rieffel $\mathcal{B}_\sigma$ e da C^*-álgebra de Heisenberg com unidade $\mathcal{H}_\sigma$, respectivamente, as quais serão também denotadas por W_π.

Reciprocamente, dada qualquer C^*-representação não degenerada W de $\mathcal{E}_\sigma$, podemos estendê-la unicamente a uma C^*-representação de $\mathcal{H}_\sigma$, mais uma vez denotada por W, que se restringe a uma representação unitária π_W de H_σ definida por

$$\pi_W(\xi) \;=\; W\big(e_\xi\big) \; , \tag{2.49}$$

onde $e_\xi \in \mathcal{B}_\sigma$ denota a função exponencial dada por $e_\xi(v) = e^{i\langle \xi, v\rangle}$. Para mostrar que π_W é fortemente contínua, notamos que, de acordo com as equações (2.6) e (2.17), temos, para qualquer $f \in \mathcal{S}_\sigma$,

$$(e_\xi \star_\sigma f)(x) \;=\; e^{i\langle \xi, x\rangle} f(x - \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \xi) \; ,$$

de modo que, na medida em que ξ tende a zero, $e_\xi \star_\sigma f$ converge para f na topologia de Schwartz, e assim, também na topologia C^*. Como W é não degenerada por hipótese e $\mathcal{S}_\sigma$ é denso em $\mathcal{E}_\sigma$, todo vetor em $\mathfrak{H}_W$ pode ser aproximado por vetores da forma $W(f)\psi$ onde $f \in \mathcal{S}_\sigma$ e $\psi \in \mathfrak{H}_W$, e para estes vetores vale a continuidade forte, uma vez que para qualquer $f \in \mathcal{S}_\sigma$ e qualquer $\psi \in \mathfrak{H}_W$, $\pi_W(\xi)W(f)\psi = W(e_\xi \star_\sigma f)\psi$ tende a $W(f)\psi$ quando ξ tende a zero.

Finalmente, é simples ver que compondo as operações de (a) passar de uma representação unitária e fortemente contínua π de H_σ a uma representação não degenerada W_π de $\mathcal{E}_\sigma$ e (b) passar de uma representação não degenerada W de $\mathcal{E}_\sigma$ a uma representação unitária e fortemente contínua π_W de H_σ, em qualquer ordem, reproduzimos a representação original. Assim, provamos

Teorema 2.4 (Equivalência de Representações) *Existe uma correspondência biunívoca entre representações unitárias e fortemente contínuas do grupo de Heisenberg H_σ e representações não degeneradas da C^*-álgebra de Heisenberg sem unidade $\mathcal{E}_\sigma$. Além disso, esta correspondência leva representações irredutíveis em representações irredutíveis.*

Como corolário, podemos obter um teorema de classificação das representações irredutíveis que é baseado em um dos famosos teoremas de von Neumann, segundo o qual, no caso onde σ é não degenerada, existe uma *única* representação irredutível, conhecida como *representação de Schrödinger das relações canônicas de comutação.* Para lidar com o caso degenerado, i.e., quando σ tem um núcleo não trivial, denotado por $\ker \sigma$, fazemos uso da mesma estratégia usada acima: escolhemos um subespaço W^* de V^* complementar a $\ker \sigma$ (conforme a equação (2.44)), tal que a restrição ω de σ a $W^* \times W^*$ é não degenerada, e introduzimos a álgebra de Lie de Heisenberg correspondente $\mathfrak{h}_\omega = W^* \oplus \mathbb{R}$ e o grupo de Lie de Heisenberg correspondente $H_\omega = W^* \times \mathbb{R}$ para decompor os originais como a soma direta $\mathfrak{h}_\sigma = \ker\sigma \oplus \mathfrak{h}_\omega$ de dois ideais comutantes e como o produto direto $H_\sigma = \ker\sigma \times H_\omega$ de dois subgrupos normais comutantes. Segue então que toda representação (fortemente contínua e unitária) de H_σ é o produto tensorial de uma representação (fortemente contínua e unitária) de $\ker\sigma$ e uma representação (fortemente contínua e unitária) de H_ω, onde a primeira é irredutível se e somente se as outras duas o são. Como $\ker\sigma$ é abeliano, suas representações irredutíveis são unidimensionais e definidas por seus pesos, o que prova o seguinte teorema.

Teorema 2.5 (Classificação de representações irredutíveis) *Com a notação acima, as representações irredutíveis unitárias e fortemente contínuas do grupo de Heisenberg H_σ, ou equivalentemente, as representações irredutíveis da C^*-álgebra de Heisenberg sem unidade $\mathcal{E}_\sigma$, são classificadas por seu* ***peso máximo****, que é um vetor v em V, ou mais precisamente, sua classe $[v]$ no espaço quociente $V/(\ker\sigma)^\perp$, tal que*

$$\pi_{[v]}(\xi,\eta) \;=\; e^{i\langle\xi,v\rangle}\,\pi_\omega(\eta) \qquad \text{para} \;\; \xi\in\ker\sigma\,,\; \eta\in H_\omega\;,$$

onde π_ω é a representação de Schrödinger de H_ω.

É importante reforçar aqui que o teorema 2.4 *não* vale se substituírmos $\mathcal{E}_\sigma$ por $\mathcal{H}_\sigma$, uma vez que $\mathcal{H}_\sigma$ admite C^*-representações cuja restrição a $\mathcal{E}_\sigma$ é trivial: basta considerar qualquer C^*-representação não trivial da álgebra corona $\mathcal{H}_\sigma/\mathcal{E}_\sigma$. É por isso que é importante trabalhar não apenas com a álgebra $\mathcal{H}_\sigma$ mas também com a álgebra $\mathcal{E}_\sigma$.

Para concluir este capítulo, gostaríamos de tecer alguns comentários acerca da diferença entre a(s) C^*-álgebra(s) de Heisenberg como definida(s) aqui e algumas outras C^*-álgebras associadas às relações canônicas de comutação encontradas na literatura – mais especificamente, a álgebra de Weyl $\overline{\Delta(V^*,\sigma)}$ de [23, 24] e a álgebra resolvente $\mathcal{R}(V^*,\sigma)$ de [4]. Estas são definidas como as C^*-álgebras universais envelopantes da $*$-álgebra $\Delta(V^*,\sigma)$ gerada pelas exponenciais e_ξ e da $*$-álgebra $\mathcal{R}_0(V^*,\sigma)$ gerada pelas funções resolvente R_ξ, respectivamente, onde $e_\xi(v) = e^{i\langle\xi,v\rangle}$, como antes, e $R_\xi(v) = (i - \langle\xi,v\rangle)^{-1}$.

O maior problema com estas construções é de que as C^*-álgebras resultantes são, em algum sentido, "muito pequenas", como indicado pelo fato de que elas possuem um grande número de representações "puramente álgebricas". Assim, é preciso se restringir a uma classe de representações "regulares", afim de estabelecer uma correspondência biunívoca com as representações usuais das relações canônicas de comutação: representações não regulares não permitem nem definir os operadores "infinitesimais" que seriam candidatos a satisfazer as relações canônicas de comutação na sua forma usual. Além disso, a escolha das respectivas $*$-álgebras de geradores, $\Delta(V^*,\sigma)$ e $\mathcal{R}_0(V^*,\sigma)$, é até um certo ponto arbitrária, e mesmo que estas admitam C^*-normas maximais, elas em geral *não* admitem uma *única* C^*-norma. O ponto mais notável das extensões propostas aqui, usando as C^*-álgebras $\mathcal{E}_\sigma$ ou $\mathcal{H}_\sigma$, que são maiores, em conjunto com as $*$-álgebras geradoras $\mathcal{S}_\sigma$ ou $\mathcal{B}_\sigma$, também maiores, é que este procedimento elimina as representações indesejadas (cuja inclusão invalidaria o Teorema 2.5 e inviabilizaria uma classificação das representações irredutíveis), bem como elimina qualquer ambiguidade na escolha de C^*-norma.

Por outro lado, devemos enfatizar que a nossa abordagem é restrita ao caso de espaços de Poisson de dimensão finita (mecânica quântica): a questão de se, e como, é possível estender esta construção a espaços de dimensão infinita (teoria quântica de campos) está, neste momento, completamente em aberto.

Capítulo 3

Fibrados de $*$-Álgebras e Completamentos C^*

Neste capítulo introduziremos os conceitos que vão nos permitir estender o processo de completamento C^* de $*$-álgebras discutidas na Capítulo 1 para fibrados de $*$-álgebras.

Para começar, gostariamos de discutir por um momento uma questão de terminologia, gerada pelo uso indiscriminado da expressão “fibrado” na literatura de C^*-álgebras.

Suponha que $(V_x)_{x \in X}$ é uma família de conjuntos indexada pelos pontos x de outro conjunto X. Então podemos introduzir o conjunto V definido como sua união disjunta,

$$V \;=\; \dot{\bigcup_{x \in X}} V_x \;, \tag{3.1}$$

junto à aplicação sobrejetora $\rho : V \longrightarrow X$ que leva V_x a x: isso define um *“fibrado”* com *espaço total* V, *espaço base* X e *projeção* ρ, sendo $V_x = \rho^{-1}(x)$ a *fibra sobre* o ponto x. A questão é quais condições adicionais devem ser impostas sobre este tipo de estrutura para nos permitir remover as aspas da expressão “fibrado”. Por exemplo, no contexto da topologia, usualmente requeremos que ambos V e X sejam espaços topológicos e que ρ seja contínua e aberta. Similarmente, no contexto da geometria diferencial, requeremos que, além disso, ambos V e X sejam variedades e que ρ seja uma submersão. É claro que se deve tomar cuidado no caso em que alguma das variedades envolvidas tem dimensão infinita, uma vez que o tratamento dessas é um tanto mais complicado; em particular, a teoria padrão desenvolvida para espaços e variedades de Banach, para a qual citamos [20], não se aplica ao caso mais geral de espaços localmente convexos, no qual devemos utilizar técnicas mais sofisticadas como o “cálculo conveniente” de [19].

Neste contexto, a condição de *trivialidade local* desempenha um papel central: ela requer a existência de um espaço topológico fixo ou de uma variedade fixa, digamos V_0, chamada de *fibra típica*, e de um recobrimento do espaço base por conjuntos abertos tais que para cada um deles, digamos U, o subconjunto $\rho^{-1}(U)$ do espaço total é homeomorfo (para espaços topológicos) ou difeomorfo (para variedades) ao produto cartesiano $U \times V_0$: neste caso costuma se dizer que V é um *fibrado* sobre X e os referidos homeomorfismos (ou difeomorfismos) são chamados de *trivializações locais*. Quando V_0 e cada uma das fibras V_x $(x \in X)$ vem com alguma estrutura adicional fixa e se pode encontrar trivializações locais que preservam esta estrutura, a referência apropriada é incorporada à terminologia: por exemplo, diz-se que V é um *fibrado vetorial* sobre X quando V_0 e cada uma das fibras V_x $(x \in X)$ são espaços vetoriais e as trivializações locais podem ser escolhidas tais que são todas lineares nas fibras. Assim, a terminologia padrão usada em geometria diferencial sugere que fibrados vetoriais, fibrados de álgebras, etc. – e em particular, fibrados de C^*-álgebras – deveriam ser localmente triviais.

3.1 Fibrados de $*$-Álgebras

Infelizmente, a convenção discutida no fim do parágrafo anterior não é seguida universalmente. Em particular, na teoria de álgebras de operadores é necessário permitir um maior grau de flexibilidade, uma vez que existem diversos exemplos relevantes onde não há trivialidade local e até mesmo onde algumas das aplicações estruturais deixam de ser contínuas. Assim, é conveniente formular explicitamente qual é a definição a ser usada no restante deste texto.

Definição 3.1 *Um* ***fibrado de $*$-álgebras localmente convexas*** *sobre um espaço topológico X é um espaço topológico $\mathcal{A}$ junto com uma sobrejeção contínua e aberta $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow X$, munido das seguintes estruturas: (a) operações de adição, multiplicação por escalares, multiplicação e involução fibra a fibra, tornando cada fibra $\mathcal{A}_x = \rho^{-1}(x)$ em uma $*$-álgebra, e tais que as aplicações correspondentes*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times_X \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & a_1 + a_2 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (\lambda, a) & \longmapsto & \lambda a \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times_X \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & a_1 a_2 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ a & \longmapsto & a^* \end{array}$$

onde $\mathcal{A} \times_X \mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid \rho(a_1) = \rho(a_2)\}$ é o produto fibrado de $\mathcal{A}$ consigo *mesmo sobre X, são contínuas,*[1] *e (b) um conjunto dirigido Σ de funções não negativas*[2] $s : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que, para todo ponto x in X, gera um conjunto dirigido $\Sigma_x = \{s|_{\mathcal{A}_x} \mid s \in \Sigma\}$ de seminormas na fibra $\mathcal{A}_x = \rho^{-1}(x)$ fazendo desta uma $*$-álgebra localmente convexa; iremos nos referir às funções s em Σ como* ***seminormas fibradas*** *em $\mathcal{A}$. Além disso, quando cada uma destas seminormas fibradas é contínua ou semicontínua por cima, e quando elas satisfazem a condição adicional de que toda rede $(a_i)_{i\in I}$ em $\mathcal{A}$ para a qual $s(a_i) \to 0$ para todo $s \in \Sigma$ e $\rho(a_i) \to x$ para algum $x \in X$ converge para $0_x \in \mathcal{A}_x$, dizemos que $\mathcal{A}$ é um fibrado de $*$-álgebras localmente convexas* ***contínuo*** *ou* ***semicontínuo por cima****, respectivamente. Finalmente, dizemos que tal fibrado é* ***unital****, ou possui unidade, se cada uma das fibras $\mathcal{A}_x$ possui unidade e a seção*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ x & \longmapsto & 1_x \end{array}$$

é contínua. Apontamos alguns casos especiais:

- *$\mathcal{A}$ é um* ***fibrado de $*$-álgebras de Fréchet*** *se Σ é enumerável e cada fibra é completa na topologia induzida: neste caso, Σ pode ser substituído por uma sequência crescente.*

- *$\mathcal{A}$ é um* ***fibrado de $*$-álgebras de Banach*** *se Σ é finito e cada fibra é completa na topologia induzida: neste caso, Σ pode ser substituído por uma única função $\|.\| : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, chamada de norma fibrada, a qual induz uma $*$-norma de Banach em cada fibra.*

- *$\mathcal{A}$ é um* ***fibrado de C^*-álgebras****, ou simplesmente um* ***fibrado C^*****, se ele é um fibrado de $*$-álgebras de Banach para o qual a norma fibrada induz uma C^*-norma em cada fibra.*

Em particular, de acordo com a convenção adotada nesta tese, fibrados de $*$-álgebras não são necessariamente localmente triviais e portanto a propriedade de trivialidade local – tanto no sentido da topologia (funções de transição contínuas) ou no sentido da geometria diferencial (funções de transição diferenciáveis) – vai ser citada explicitamente onde ela for válida e relevante.

[1] Na verdade, uma generalização simples de um argumento encontrado em [35, Proposition C.17, p. 361] mostra que é suficiente exigir que a multiplicação por escalares seja contínua na segunda variável, ou seja, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, a aplicação $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $a \longrightarrow \lambda a$ é contínua: esta condição é mais fácil de verificar na prática, mas já implica na continuidade conjunta. Quanto à multiplicação, continuamos seguindo a convenção, já adotada no Capítulo 1, que ela deve ser contínua e não apenas separadamente contínua.

[2] A condição de que Σ deve ser dirigido se refere a ordem no conjunto de todas as funções não-negativas em $\mathcal{A}$, definida pontualmente.

Quanto ao aspecto histórico, notamos que uma primeira versão desta definição foi formulada por Dixmier [8], através de sua noção de "campos contínuos de C^*-álgebras". Algum tempo depois, Fell introduziu a noção de um fibrado C^* contínuo (reproduzida em [11, Definition 8.2, p. 580]), dando uma abordagem equivalente mas mais próxima da linguagem atualmente empregada na literatura. Finalmente, foi observado que os resultados mais importantes desta teoria continuam sendo válidos praticamente sem alterações para o caso de fibrados C^* semicontínuos por cima, a maior diferença sendo que neste caso o espaço total $\mathcal{A}$ pode não ser Hausdorff. A extensão proposta aqui, para o caso onde as fibras são $*$-álgebras localmente convexas mais gerais, parece natural e será de grande utilidade no que segue.

A condição adicional de continuidade formulada na definição acima garante que a topologia do espaço total $\mathcal{A}$ é unicamente determinada pelo conjunto das seminormas fibradas Σ; o que segue da seguinte generalização de um teorema de Fell:

Teorema 3.1 (Topologia em fibrados de $*$-álgebras) *Suponha que $(\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ é uma familia de $*$-álgebras indexada pelos pontos x de um espaço topológico localmente compacto X, e considere a união disjunta*

$$\mathcal{A} = \dot{\bigcup_{x\in X}} \mathcal{A}_x \tag{3.2}$$

como "fibrado" sobre X (no sentido da teoria dos conjuntos). Suponha também que, além disso, Σ é um conjunto dirigido de seminormas fibradas em $\mathcal{A}$ transformando cada fibra $\mathcal{A}_x$ de $\mathcal{A}$ em uma $*$-álgebra localmente convexa ($*$-álgebra de Fréchet, $*$-álgebra de Banach ou C^*-álgebra) e que Γ é uma $*$-álgebra de seções deste "fibrado", satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) Para cada seção $\varphi \in \Gamma$ e cada seminorma fibrada $s \in \Sigma$, a função $X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto s(\varphi(x))$ é semicontínua por cima (ou contínua).

(b) Para cada ponto x em X, a $*$-subálgebra $\Gamma_x = \{\varphi(x) \,|\, \varphi \in \Gamma\}$ de $\mathcal{A}_x$ é densa.

Então existe uma única topologia em $\mathcal{A}$ transformando-o em um fibrado semicontínuo por cima (ou contínuo) de $*$-algebras localmente convexas ($*$-álgebras de Fréchet, $*$-álgebras de Banach ou C^*-álgebras) sobre X, respectivamente, tal que Γ se torna uma $*$-subalgebra da $*$-algebra $\Gamma(X,\mathcal{A})$ de todas as seções contínuas de $\mathcal{A}$.

Resultados similares podem ser encontrados, por exemplo, em [11, Theorem II.13.18] (para fibrados contínuos de espaços de Banach) e em [35, Theorem C.25, p. 364] (para fibrados semicontínuos por cima de C^*-álgebras), mas a prova pode ser adaptada trivialmente para a situação mais geral considerada aqui; em particular, uma base para a topologia desejada em $\mathcal{A}$ é dada pelos conjuntos

$$W(\varphi, U, s, \epsilon) \;=\; \big\{ a \in \mathcal{A} \mid \rho(a) \in U \,,\; s(a - \varphi(\rho(a))) < \epsilon \big\} \,,$$

onde $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow X$ é a projeção do fibrado, $\varphi \in \Gamma$, U é um subconjunto aberto de X, $s \in \Sigma$ e $\epsilon > 0$.

Independentemente da classe específica de fibrados sob consideração, a noção de morfismo entre eles é a natural:

Definição 3.2 *Dados dois fibrados de $*$-álgebras localmente convexas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sobre espaços topológicos X e Y, respectivamente, um* ***morfismo*** *(ou* ***homomorfismo****)* ***de fibrados*** *de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ é uma aplicação contínua $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ que preserva as fibras, no sentido de que existe uma (única) aplicação contínua $\check{\phi} : X \longrightarrow Y$ tal que o seguinte diagrama é comutativo,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\rho_{\mathcal{B}}"] \\ X \arrow[r, "\check{\phi}"] & Y \end{tikzcd}$$

e tal que, para cada ponto x em X, a restrição $\phi_x : \mathcal{A}_x \longrightarrow \mathcal{B}_{\check{\phi}(x)}$ de ϕ à fibra sobre x é um homomorfismo de $*$-álgebras localmente convexas. Quando $Y = X$ e $\check{\phi}$ é a identidade, dizemos que ϕ é um ***morfismo estrito*** *(ou* ***homomorfismo estrito****) (sobre X).*

3.2 $C_0(X)$-Álgebras

O Teorema 3.1 acima deixa claro que um objeto importante associado a qualquer fibrado de $*$-álgebras $\mathcal{A}$ sobre X é o espaço $\Gamma(X, \mathcal{A})$ de seções contínuas de $\mathcal{A}$, o qual, quando munido das operações algébricas pontuais usuais, se torna uma $*$-álgebra. Além do mais, dado um conjunto dirigido Σ de seminormas fibradas s em $\mathcal{A}$ que gera sua topologia, como descrito acima, podemos obter um conjunto de seminomas $\|.\|_{s,K}$ sobre $\Gamma(X, \mathcal{A})$ tomando o supremo das seminormas fibradas sobre subconjuntos compactos K de X,

$$\|\varphi\|_{s,K} \;=\; \sup_{x \in K} s(\varphi(x)) \qquad \text{para } \varphi \in \Gamma(X, \mathcal{A}) \,, \tag{3.3}$$

fazendo de $\Gamma(X, \mathcal{A})$ uma $*$-álgebra localmente convexa com respeito ao que nós continuamos a chamar de topologia da convergência uniforme sobre subconjuntos compactos.

Ainda mais, $\Gamma(X,\mathcal{A})$ possui outras duas importantes estruturas adicionais. A primeira é que $\Gamma(X,\mathcal{A})$ é um *módulo* sobre a $*$-álgebra localmente convexa $C(X)$ de funções contínuas sobre X, como expressa pelas condições de compatibilidade

$$\begin{gathered} f(\varphi_1\varphi_2) \;=\; (f\varphi_1)\,\varphi_2 \;=\; \varphi_1\,(f\varphi_2) \quad , \quad (f\varphi)^* \;=\; \bar{f}\varphi^* \\ \|f\varphi\|_{s,K} \;\leqslant\; \|f\|_K\|\varphi\|_{s,K} \\ \text{para } \; f \in C(X),\; \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(X,\mathcal{A}) \;. \end{gathered} \tag{3.4}$$

A segunda é que $\Gamma(X,\mathcal{A})$ vem munida de uma família $(\delta_x)_{x\in X}$, indexada pelos pontos x do espaço base X, de homomorfismos contínuos, as aplicações de avaliação

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \Gamma(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A}_x \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \;. \tag{3.5}$$

Obviamente, quando X é compacto, podemos omitir a referência aos subconjuntos compactos, uma vez que $C(X)$ vem naturalmente munida da norma do supremo sobre o espaço X inteiro, ao passo que cada seminorma fibrada s em $\mathcal{A}$ vai gerar uma seminorma $\|.\|_s$ em $\Gamma(X,\mathcal{A})$ tomando o supremo sobre o espaço X inteiro; em ambos os casos, a topologia resultante é a da convergência uniforme sobre todo X. Por outro lado, quando X é localmente compacto mas não é compacto, a situação é um pouco mais complicada, uma vez que devemos nos preocupar com o comportamento de funções e seções no infinito. Uma maneira de lidar com esta questão consiste em nos restringir às álgebras $C_0(X)$ das funções contínuas sobre X que se anulam no infinito e $\Gamma_0(X,\mathcal{A})$ das seções contínuas de $\mathcal{A}$ que se anulam no infinito (no sentido usual de que $f \in C(X)$ pertence a $C_0(X)$ e $\varphi \in \Gamma(X,\mathcal{A})$ pertence a $\Gamma_0(X,\mathcal{A})$ se para cada $\epsilon > 0$ e $s \in \Sigma$, existe um subconjunto compacto K de X tal que $|f(x)| < \epsilon$ e $s(\varphi(x)) < \epsilon$ para todo $x \notin K$): assim como no caso compacto, estas são $*$-álgebras localmente convexas com respeito à topologia de convergência uniforme sobre todo X e a segunda é um módulo sobre a primeira, com as mesmas condições de compatibilidade e as mesmas aplicações de avaliação de antes (veja as equações (3.4) e (3.5)). Além disso, temos uma condição de não degenerescência, que se faz necessária por tratarmos de álgebras sem unidade: vale que o $*$-ideal gerado por elementos da forma $f\varphi$, com $f \in C_0(X)$ e $\varphi \in \Gamma_0(X,\mathcal{A})$, é denso na álgebra $\Gamma_0(X,\mathcal{A})$.[3] Uma escolha alternativa seria considerar as álgebras $C_b(X)$ das funções contínuas limitadas sobre X e $\Gamma_b(X,\mathcal{A})$ das seções contínuas limitadas de $\mathcal{A}$,[4] mais uma vez com a topologia de convergência uniforme sobre todo X, o que tem a vantagem de que $C_b(X)$ possui

[3]Note que esta condição de não degenerescência já pode pode ser formulada no caso compacto, porém neste caso é trivial, uma vez que a condição de se anular no infinito é vazia e portanto podemos identificar $C_0(X)$ com $C(X)$, que possui unidade, e $\Gamma_0(X,\mathcal{A})$ com $\Gamma(X,\mathcal{A})$.

[4]Uma seção de $\mathcal{A}$ é dita limitada se sua composição com cada seminorma fibrada $s \in \Sigma$ é limitada.

unidade. De fato, tanto $C_0(X)$ quanto $C_b(X)$ são C^*-álgebras, e uma é a álgebra dos multiplicadores da outra:

$$C_b(X) \;=\; M(C_0(X))\;. \tag{3.6}$$

Estas construções de álgebras de seções se tornam especialmente úteis no caso de um fibrado C^* semicontínuo por cima $\mathcal{A}$ sobre X. Neste caso, $\Gamma_0(X,\mathcal{A})$ e $\Gamma_b(X,\mathcal{A})$ são C^*-algebras (que coincidem entre si e com $\Gamma(X,\mathcal{A})$ quando X é compacto), e a estrutura de $C_0(X)$-módulo mencionada acima pode ser interpretada como um homomorphismo $\Phi \,:\, C_0(X) \longrightarrow Z(M(\Gamma_0(X,\mathcal{A})))$, onde $M(\Gamma_0(X,\mathcal{A}))$ é a álgebra dos multiplicadores de $\Gamma_0(X,\mathcal{A})$ e $Z(M(\Gamma_0(X,\mathcal{A})))$ é o seu centro. Assim a álgebra de seções $\Gamma_0(X,\mathcal{A})$ é uma $C_0(X)$-álgebra no sentido de Kasparov [18]:

Definição 3.3 *Dado um espaço topológico localmente compacto X, uma $C_0(X)$-álgebra é uma C^*-álgebra A munida de um homomorphismo*

$$\Phi : C_0(X) \longrightarrow Z(M(A)) \tag{3.7}$$

que é não degenerado, i.e., tal que o $*$-ideal gerado por elementos da forma fa,[5] com $f \in C_0(X)$ e $a \in A$, é denso ná álgebra A.

Note que a condição de não degenerescência formulada nesta definição implica que Φ estende unicamente a um homomorphismo

$$\Phi : C_b(X) \longrightarrow Z(M(A))\;, \tag{3.8}$$

i.e., $C_0(X)$-álgebras são automaticamente $C_b(X)$-álgebras. Entretanto, nem toda $C_b(X)$-álgebra é também uma $C_0(X)$-álgebra, uma vez que a condição de não degenerescência pode falhar: um exemplo óbvio é dado pela própria álgebra $C_b(X)$, que é trivialmente um módulo, não só sobre si mesma, mas também sobre $C_0(X)$; porém, como tal, é degenerada; de fato, neste caso o $*$-ideal mencionado na Definição 3.3 é $C_0(X)$ e não $C_b(X)$. De qualquer forma, no contexto do presente artigo, a extensão da estrutura de módulo de $C_0(X)$ para $C_b(X)$ não tem nenhum papel relevante.

A noção de um homomorfismo de $C_0(X)$-álgebras é, mais uma vez, a natural: é um homomorfismo de $*$-álgebras que também é um homomorfismo de $C_0(X)$-módulos.

Com estes conceitos à nossa disposição, podemos agora considerar o processo de passar de fibrados às suas álgebras de seções como um *funtor*. Mais precisamente, a versão de

[5] Iremos simplesmente escrever fa, ao invés de $\Phi(f)(a)$, sempre que for conveniente.

interesse aqui é a seguinte: dado um espaço localmente compacto X, temos o correspondente *funtor de álgebra de seções*

$$\Gamma_0(X,\cdot) : \mathsf{C}^*_{\mathsf{us}}\mathsf{Bun}(X) \longrightarrow \mathsf{C}_0(X)\mathsf{Alg} \tag{3.9}$$

da categoria $\mathsf{C}^*_{\mathsf{us}}\mathsf{Bun}(X)$ de fibrados C^* semicontínuos por cima sobre X, na qual os morfismos são morfismos estritos de fibrados sobre X, para a categoria $\mathsf{C}_0(X)\mathsf{Alg}$ de $C_0(X)$-álgebras, onde of morfismos são os homomorfismos de $C_0(X)$-álgebras. Pois é claro que, dado qualquer morfismo estrito de fibrados $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre fibrados C^* semicontínuos por cima sobre X, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, o "push forward" de seções por ϕ proporciona um morfismo de $C_0(X)$-álgebras $\Gamma_0(X,\phi) : \Gamma_0(X,\mathcal{A}) \longrightarrow \Gamma_0(X,\mathcal{B})$.

Reciprocamente, podemos construir um *funtor de representação seccional*

$$\mathrm{SR}(X,\cdot) : \mathsf{C}_0(X)\mathsf{Alg} \longrightarrow \mathsf{C}^*_{\mathsf{us}}\mathsf{Bun}(X) \tag{3.10}$$

da seguinte maneira. Primeiro, dado qualquer $C_0(X)$-álgebra A, definimos $\mathrm{SR}(X,A)$, como um "fibrado" sobre X (no sentido da teoria dos conjuntos), escrevendo

$$\mathrm{SR}(X,A) \;=\; \dot{\bigcup_{x\in X}} \mathrm{SR}(X,A)_x \tag{3.11}$$

onde a fibra $\mathrm{SR}(X,A)_x$ sobre qualquer ponto x de X é definida por

$$\mathrm{SR}(X,A)_x \;=\; A \,/\, \overline{\Phi(I_x)A} \quad \text{onde} \quad I_x \;=\; \{f \in C_0(X) \mid f(x) = 0\}\;. \tag{3.12}$$

A estrutura de $\mathrm{SR}(X,A)$ como um fibrado C^* semicontínuo por cima sobre X é então obtida pela construção do Teorema 3.1, no caso especial de fibrados C^* e com

$$\Gamma \;=\; \big\{\varphi_a \,|\, a \in A\big\} \quad \text{onde} \quad \varphi_a(x) = a + \overline{\Phi(I_x)A} \,\in A \,/\, \overline{\Phi(I_x)A}\;, \tag{3.13}$$

uma vez que este espaço Γ satisfaz as duas condições do Teorema 3.1 (a condição (b) é óbvia e a condição (a) é demonstrada em [35, Proposição C.10,p. 357]). Segundo, dado qualquer homomorfismo $\phi_X : A \longrightarrow B$ entre $C_0(X)$-álgebras A e B, a passagem aos quocientes gera um correspondente morfismo estrito de fibrados C^* sobre X, $\mathrm{SR}(X,\phi_X) : \mathrm{SR}(X,A) \longrightarrow \mathrm{SR}(X,B)$.

A construção delineada nos dois parágrafos anteriores é na verdade o ponto central na demonstração de um famoso teorema da área, geralmente conhecido como o teorema da representação seccional, que afirma que toda $C_0(X)$-álgebra é isomorfa à álgebra de seções de um fibrado C^* semicontínuo por cima sobre X; para um formulação explícita e uma prova completa, veja [35, Teorema C.26, p. 367]. Aqui, formulamos uma versão mais forte deste teorema, que o estende a uma equivalência categorial [22, p. 18]:

Teorema 3.2 (Teorema da Representação Seccional) *Dado um espaço topológico localmente compacto X, os funtores $\Gamma_0(X,\cdot)$ e $\mathrm{SR}(X,\cdot)$ estabelecem uma equivalência entre as categorias $\mathsf{C}^*_{\mathsf{us}}\mathsf{Bun}(X)$ e $\mathsf{C}_0(X)\mathsf{Alg}$.*

Demonstração: Explicitamente, o que o teorema afirma é que, para todo fibrado C^* semicontínuo por cima $\mathcal{A}$ sobre X, existe um isomorfismo estrito $\mathcal{A} \cong \mathrm{SR}\big(X, \Gamma_0(X,\mathcal{A})\big)$ que é natural na categoria de fibrados C^*, e similarmente que, para qualquer $C_0(X)$-álgebra A, existe um isomorfismo de $C_0(X)$-álgebras $A \cong \Gamma_0\big(X, \mathrm{SR}(X,A)\big)$ que é natural na categoria de $C_0(X)$-álgebras. A existência do segundo destes isomorfismos é precisamente o conteúdo da formulação tradicional do teorema da representação seccional [35, Theorem C.26, p. 367], enquanto que a construção do primeiro é bastante similar. De fato, dado um fibrado C^* semicontínuo por cima $\mathcal{A}$ sobre X, note que, para todo ponto x de X, vale

$$\overline{\Phi(I_x)\,\Gamma_0(X,\mathcal{A})} \;=\; \big\{\varphi \in \Gamma_0(X,\mathcal{A}) \,|\, \varphi(x) = 0\big\}$$

uma vez que a inclusão "$\subset$" é trivial e a inclusão "$\supset$" segue de um argumento padrão: dado $\varphi \in \Gamma_0(X,\mathcal{A})$ e qualquer $\epsilon > 0$, existem uma vizinhança aberta U de x com fecho compacto $\bar{U}$ e um subconjunto compacto K contendo U tal que a função $x \longmapsto \|\varphi(x)\|_x$ é $< \epsilon$ tanto em U (pois se anula em x e a norma C^* fibrada em $\mathcal{A}$ é semicontínua por cima), como fora de K (pois φ se anula no infinito); assim, aplicando o lema de Urysohn, podemos encontrar uma função $f \in C_c(X)$ com $0 \leqslant f \leqslant 1$ que é $\equiv 0$ fora de U mas satisfaz $f(x) = 1$, e combiná-la com outra função $g \in C_0(X)$ com $0 \leqslant f \leqslant 1$ que é $\equiv 1$ em K, para obter uma função $(1-f)g \in C_0(X)$ que é $\equiv 1$ em $K \setminus U$ mas se anula em x, de forma que a norma do supremo de $\varphi - (1-f)g\varphi$ é $< \epsilon$. Assim, para todo ponto x de X, obtemos um isomorfismo de C^*-álgebras

$$\mathrm{SR}\big(X, \Gamma_0(X,\mathcal{A})\big)_x \cong \mathcal{A}_x$$

que define, fibra-a-fibra, o isomorfismo de fibrados desejado. ∎

Um ponto interessante a ser elaborado neste contexto seria a incorporação das noções de "pull-back" e mudança de anel base. Por um lado, dada qualquer aplicação contínua e própria $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos localmente compactos X e Y, podemos definir um *funtor "pull-back"*

$$f^* : \mathsf{C}^*_{\mathsf{us}}\mathsf{Bun}(Y) \longrightarrow \mathsf{C}^*_{\mathsf{us}}\mathsf{Bun}(X) \;, \tag{3.14}$$

que a cada fibradro C^* semicontínuo por cima $\mathcal{B}$ sobre Y associa seu pull-back via f, que é um fibrado C^* semicontínuo por cima $f^*\mathcal{B}$ sobre X, definido fibra-a-fibra por $(f^*\mathcal{B})_x = \mathcal{B}_{f(x)}$, e a cada morfismo estrito de fibrados C^* sobre Y, $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$, associa seu pull-back via f, que é um morfismo estrito de fibrados C^* sobre X, $f^*\phi : f^*\mathcal{B} \longrightarrow f^*\mathcal{B}'$, definido fibra-a-fibra por $f^*\phi\big|_{(f^*\mathcal{B})_x} = \phi\big|_{\mathcal{B}_{f(x)}}$. Por outro lado, dada qualquer aplicação continua e própria $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos localmente compactos X e Y, podemos definir um *funtor de mudança de base*

$$f_\sharp : \mathsf{C}_0(X)\mathsf{Alg} \longrightarrow \mathsf{C}_0(Y)\mathsf{Alg} \ , \tag{3.15}$$

que a cada $C_0(X)$-álgebra A associa a $C_0(Y)$-álgebra $f_\sharp A$ que é igual a A como C^*-álgebra mas possui uma estrutura de módulo modificada, sendo que a multiplicação por uma função em $C_0(Y)$ é dada pela multiplicação com a função em $C_0(X)$ obtida por pull-back via f, e a cada homomorfismo de $C_0(X)$-álgebras $\phi_X : A \longrightarrow A'$ associa o homomorfismo de $C_0(Y)$-álgebras $f_\sharp\phi_X : f_\sharp A \longrightarrow f_\sharp A'$ que é igual a ϕ_X como homomorfismo de C^*-álgebras mas é linear com respeito à estrutura de módulo modificada. Devemos ressaltar que estes dois funtores *não* se transformam um no outro sob a equivalência estabelecida pelo teorema da representação seccional, até porque as flechas nas equações (3.14) e (3.15) apontam em direções opostas: essencialmente, o primeiro preserva as fibras e altera as álgebras de seções enquanto que o segundo preserva as álgebras de seções e altera as fibras. De fato, para qualquer fibrado C^* semicontínuo por cima $\mathcal{B}$ sobre Y, a composição de seções com f induz um homomorfismo de C^*-álgebras

$$f^* : \Gamma_0(Y, \mathcal{B}) \ \longrightarrow \ \Gamma_0(X, f^*\mathcal{B}) \tag{3.16}$$

que, em geral, possui um núcleo não trivial (formado pelas seções de $\mathcal{B}$ sobre Y que se anulam sobre a imagem de f) e uma imagem não trivial (formada pelas seções de $f^*\mathcal{B}$ sobre X que são constantes sobre as superfícies de nível de f). De maneira similar, partindo de uma $C_0(X)$-álgebra A e utilizando f para considerá-la também como uma $C_0(Y)$-álgebra $f_\sharp A$, aplicamos os respectivos funtores de representação seccional para obter os fibrados C^* correspondentes $\mathcal{A} = \mathrm{SR}(X, A)$ sobre X e $f_\sharp\mathcal{A} = \mathrm{SR}(Y, f_\sharp A)$ sobre Y, de forma que $A \cong \Gamma_0(X, \mathcal{A})$ e $f_\sharp A \cong \Gamma_0(Y, f_\sharp\mathcal{A})$: então podemos concluir que as fibras de $f_\sharp\mathcal{A}$ se relacionam com as fibras de $\mathcal{A}$ conforme

$$(f_\sharp\mathcal{A})_y \ \cong \ \Gamma(f^{-1}(y), \mathcal{A}) \ . \tag{3.17}$$

3.3 O Completamento C^*

Neste ponto, estamos prontos para discutir a noção de completamento C^* a nivel de fibrados e sua relação com o completamento das álgebras de seções correspondentes. Para este fim, suponhamos que X seja um espaço topológico localmente compacto e $\mathcal{A}$ um fibrado de $*$-álgebras localmente convexas sobre X, com projeção $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow X$ e munido de um conjunto dirigido de seminormas fibradas Σ como na Definição 3.1 acima.

Suponhamos ainda que nos seja dada uma função $\|.\| : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ que é uma C^*-norma fibrada, i.e., induzindo uma C^*-norma em cada fibra de $\mathcal{A}$. A partir destes dados, podemos construir um "completamento C^* fibrado" $\bar{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ tomando, para cada ponto x de X, o completamento $\bar{\mathcal{A}}_x$ de $\mathcal{A}_x$ com respeito à norma C^* $\|.\|_x$ para obter uma familia $(\bar{\mathcal{A}}_x)_{x\in X}$ de C^*-álgebras, e considerando a união disjunta

$$\bar{\mathcal{A}} = \dot{\bigcup_{x\in X}} \bar{\mathcal{A}}_x \tag{3.18}$$

como um "fibrado" de C^*-álgebras sobre X (no sentido da teoria dos conjuntos); obviamente, $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$, e a projeção original $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow X$ é simplesmente a restrição da projeção $\bar{\rho} : \bar{\mathcal{A}} \longrightarrow X$. Para controlar os aspectos topológicos envolvidos nesta construção, precisamos de algumas hipóteses adicionais. Especificamente, suporemos que $\mathcal{A}$ é um fibrado semicontínuo por cima de $*$-algebras localmente convexas sobre X, como na Definição 3.1 acima, e que $\|.\|$ é *localmente limitada* por Σ, i.e., para todo ponto x de X existem uma vizinhança U_x de x, uma seminorma fibrada s em Σ e uma constante $C > 0$ tais que $\|a\| \leqslant C\, s(a)$ para $a \in \rho^{-1}(U_x)$. Nosso objetivo é mostrar que nestas condições, $\bar{\mathcal{A}}$ admite uma única topologia que faz dele um fibrado C^* semicontínuo por cima sobre X tal que a C^*-álgebra $\Gamma_0(X, \bar{\mathcal{A}})$ das seções contínuas de $\bar{\mathcal{A}}$ que se anulam no infinito é o completamento da $*$-álgebra $\Gamma_c(X, \mathcal{A})$ das seções contínuas de $\mathcal{A}$ de suporte compacto com respeito à norma do supremo induzida pela norma C^* fibrada $\|.\|$: isso vai constituir um exemplo natural e concreto para o teorema abstrato da representação seccional (Teorema 3.2).

Para tal fim, notamos primeiro que, como a norma fibrada $\|.\|$ é localmente limitada pelas seminormas em Σ, que são semicontínuas por cima, e como X é localmente compacto, segue que, dado qualquer seção contínua φ de $\mathcal{A}$, a função $x \longmapsto \|\varphi(x)\|_x$ sobre X é localmente limitada e portanto limitada sobre subconjuntos compactos de X, de forma que, para toda seção contínua φ de $\mathcal{A}$ de suporte compacto, $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in X} \|\varphi(x)\|_x < \infty$. Então é claro que $\|.\|_\infty$ define uma C^*-norma em $\Gamma_c(X, \mathcal{A})$: seja $\overline{\Gamma_c(X, \mathcal{A})}$ o seu completamento C^* correspondente. Notemos também que $\Gamma_c(X, \mathcal{A})$ é um módulo sobre $C_0(X)$, de forma que $\overline{\Gamma_c(X, \mathcal{A})}$ também o é, uma vez que a multiplicação é obviamente bilinear e contínua com respeito às C^*-normas pertinentes; além disso, temos a igualdade $C_0(X)\, \Gamma_c(X, \mathcal{A}) = \Gamma_c(X, \mathcal{A})$, uma vez que toda seção $\varphi \in \Gamma_c(X, \mathcal{A})$ pode ser escrita na forma $f\varphi$ para alguma função $f \in C_0(X)$ (é suficiente escolher f igual a 1 no suporte de φ, usando o lema de Urysohn), e portanto $\overline{\Gamma_c(X, \mathcal{A})}$ é de fato uma $C_0(X)$-algebra. Assim, pela construção do funtor da representação seccional temos

$$\bar{\mathcal{A}} = \mathrm{SR}(X, \overline{\Gamma_c(X, \mathcal{A})}) .$$

Em particular, $\bar{\mathcal{A}}$ admite uma única topologia que faz dele um fibrado C^* semicontínuo por cima sobre X tal que seções contínuas de $\mathcal{A}$ continuam sendo contínuas quando vistas como seções de $\bar{\mathcal{A}}$, uma vez que o espaço $\Gamma_c(X,\mathcal{A})$ satisfaz as duas condições do Teorema 3.1 (a condição (b) é obvia e a condição (a) pode ser extraída de [35, Proposição C.10, p. 357]). De fato, segue da construção da topologia em $\bar{\mathcal{A}}$ na prova do Teorema 3.1 que a inclusão $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$ é contínua, dado que se U é um aberto suficientemente pequeno de X tal que $\|a\| \leqslant C\, s(a)$ para $a \in \rho^{-1}(U)$ para alguma seminorma fibrada $s \in \Sigma$ e alguma constante $C > 0$, temos que, para todo $\varphi \in \Gamma_c(X,\mathcal{A})$,

$$W_{\mathcal{A}}(\varphi, U, s, \epsilon/C) \;\subset\; W_{\bar{\mathcal{A}}}(\varphi, U, \|.\|, \epsilon) \cap \mathcal{A}\;,$$

e $W_{\mathcal{A}}(\varphi, U, s, \epsilon/C)$ é aberto em $\mathcal{A}$ já que φ é contínua e s é semicontínua por cima; isso também implica que a seminorma C^* fibrada $\|.\|$ em $\mathcal{A}$, assim como sua extensão a $\bar{\mathcal{A}}$ (também denotada por $\|.\|$), é automaticamente semicontínua por cima; além disso, $\mathcal{A}$ é densa em $\bar{\mathcal{A}}$ (simplesmente porque, por construção, toda fibra $\mathcal{A}_x$ de $\mathcal{A}$ é densa na fibra correspondente $\bar{\mathcal{A}}_x$ de $\bar{\mathcal{A}}$). Todos estes argumentos justificam chamar $\bar{\mathcal{A}}$ de *completamento C^* fibrado* de $\mathcal{A}$ com respeito à C^*-norma fibrada $\|.\|$. Finalmente, é claro por construção que a C^*-álgebra de seções $\Gamma_0(X,\bar{\mathcal{A}})$ é o completamento C^* da $*$-álgebra de seções $\Gamma_c(X,\mathcal{A})$, com respeito à norma do supremo $\|.\|_\infty$. Resumindo, temos

Teorema 3.3 (Teorema do Completamento de Fibrados) *Dado um espaço topológico localmente compacto X, seja $\mathcal{A}$ um fibrado semicontínuo por cima de $*$-algebras localmente convexas sobre X, com respeito a algum conjunto dirigido Σ de seminormas fibradas, seja $\|.\|$ uma C^*-norma fibrada em $\mathcal{A}$ que é localmente limitada por Σ e seja $\bar{\mathcal{A}}$ o completamento C^* fibrado correspondente. Então existe uma única topologia que faz de $\bar{\mathcal{A}}$ um fibrado C^* semicontínuo por cima sobre X tal que o completamento C^* da álgebra de seções $\Gamma_c(X,\mathcal{A})$ com respeito à norma do supremo $\|.\|_\infty$ é a álgebra de seções $\Gamma_0(X,\bar{\mathcal{A}})$:*

$$\overline{\Gamma_c(X,\mathcal{A})} \;=\; \Gamma_0(X,\bar{\mathcal{A}})\;. \tag{3.19}$$

No que diz respeito às propriedades universais destes completamentos C^* a nivel de fibrados e de suas álgebras de seções, é facil perceber que estas dependem essencialmente da validade das mesmas propriedades fibra a fibra, a nivel de álgebras, desde que levemos em conta que os morfismos das álgebras de seções são morfismos na categoria de $C_0(X)$-álgebras, e não somente de C^*-álgebras. Mais especificamente, sob as mesmas hipóteses de antes (a saber, que $\mathcal{A}$ é um fibrado semicontínuo por cima de $*$-álgebras localmente convexas sobre X e $\|.\|$ é uma C^*-norma fibrada localmente limitada em $\mathcal{A}$), podemos garantir que:

- Universalidade implica em universalidade. Se, para cada ponto x de X, $\|.\|_x$ é a C^*-norma maximal em $\mathcal{A}_x$ (e se essa família de C^*-normas, quando x percorre X, definir uma C^*-norma fibrada em $\mathcal{A}$ que é localmente limitada), então $\|.\|$ é a C^*-norma fibrada maximal em $\mathcal{A}$ e podemos nos referir a $\bar{\mathcal{A}}$ como o *completamento C^* minimal* ou *fibrado C^* envelopante universal* de $\mathcal{A}$. Além disso, sob essas circunstâncias, $\Gamma_0(X, \bar{\mathcal{A}})$ é o *completamento $C_0(X)$ minimal* ou a *$C_0(X)$-álgebra envelopante universal* de $\Gamma_c(X, \mathcal{A})$.

- Unicidade implica unicidade. Se, para cada ponto x de X, $\mathcal{A}_x$ admite uma única C^*-norma e portanto um único completamento C^* (e se essa família de C^*-normas, quando x percorre X, definir uma C^*-norma fibrada em $\mathcal{A}$ que é localmente limitada), então $\mathcal{A}$ admite uma única C^*-norma fibrada e portanto um único completamento C^* fibrado. Além disso, sob estas circunstâncias, $\Gamma_0(X, \bar{\mathcal{A}})$ é o único completamento $C_0(X)$ de $\Gamma_c(X, \mathcal{A})$.

A Álgebra DFR para Fibrados Vetoriais de Poisson

4.1 Os Fibrados DFR

Seja (E, σ) um fibrado vetorial de Poisson sobre X, i.e., E é um fibrado vetorial real diferenciável de dimensão n, digamos, sobre uma variedade diferenciável X, com fibra típica $\mathbb{E}$, munido de um campo de bivetores diferenciável fixo σ; em outras palavras, o dual E^* de E é um fibrado vetorial pré-simplético.[1] Então é claro que podemos aplicar todas as construções do Capítulo 2 a cada fibra. A questão a ser investigada aqui é a possibilidade de usar os métodos do Capítulo 3 para "colar" os resultados ao longo da variedade base e descrever os objetos globais resultantes.

Começando com a coleção das álgebras de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_{\sigma(x)}$ $(x \in X)$, notamos que podemos juntá-las em um fibrado vetorial real diferenciável sobre X, que é simplesmente a soma direta de E^* e o fibrado em linhas trivial $X \times \mathbb{R}$. A parte não trivial é o comutador, que é definido pela equação (2.1) aplicada a cada fibra, transformando este fibrado vetorial em um algebroide de Lie totalmente intransitivo [21, Def. 3.3.1, p. 100] que vamos chamar de *algebroide de Heisenberg* associado a (E, σ) e denotar por $\mathfrak{h}(E, \sigma)$: ele será um fibrado de álgebras de Lie [21, Def. 3.3.8, p. 104] se e somente se σ tiver posto constante. É claro que certos espaços de seções de $\mathfrak{h}(E, \sigma)$, com certas propriedades de regularidade, vão formar álgebras de Lie (de dimensão infinita) com respeito ao comutador definido pontualmente por σ, mas qual é a escolha correta das referidas condições

[1] Ressaltamos aqui que *não* exigimos que σ seja não degenerado ou mesmo de posto constante, de modo que a dimensão do seu núcleo pode variar de um ponto para outro.

de regularidade é uma questão de análise funcional que deve ser respondida levando em conta a natureza do problema sob consideração.

Similarmente, considerando a coleção dos grupos de Lie de Heisenberg $H_{\sigma(x)}$ $(x \in X)$, notamos mais uma vez que podemos juntá-los em um fibrado diferenciável sobre X, que é o produto fibrado de E^* e o fibrado em linhas trivial $X \times \mathbb{R}$. Agora. a parte não trivial é o produto, que é definido pela equação (2.2) aplicada a cada fibra, transformando este fibrado em um grupoide de Lie totalmente intrasitivo [21, Def. 1.1.3, p. 5 & Def. 1.5.9, p. 32] que vamos chamar de *grupoide de Heisenberg* associado a (E, σ) e denotar por $H(E, \sigma)$: ele será um fibrado de grupos de Lie [21, Def. 1.1.19, p. 11] se e somente se σ tiver posto constante. Novamente, é claro que certos espaços de seções de $H(E, \sigma)$, com certas propriedades de regularidade, vão formar grupos de Lie (de dimensão infinita) com respeito ao produto definido pontualmente por σ, mas qual é a escolha correta das referidas condições de regularidade é uma questão de análise funcional que deve ser respondida levando em conta a natureza do problema sob consideração.

Uma estratégia análoga pode ser aplicada às coleções de C^*-álgebras de Heisenberg $\mathcal{E}_{\sigma(x)}$ e $\mathcal{H}_{\sigma(x)}$ $(x \in X)$, mas o detalhes são um tanto complicados porque agora as fibras são C^*-algebras de dimensão infinita que podem depender dos pontos do espaço base de maneira discontínua, já que o posto de σ pode variar. Ainda assim, permanece a questão se podemos juntar as coleções de C^*-álgebras de Heisenberg $\mathcal{E}_{\sigma(x)}$ e $\mathcal{H}_{\sigma(x)}$ em fibrados C^* sobre X que sejam no minimo semicontínuas por cima.

A ideia básica que nos permite contornar todas essas dificuldades consiste em introduzir dois fibrados vetoriais complexos diferenciáveis sobre X, denotados aqui por $\mathcal{S}(E)$ e $\mathcal{B}(E)$, cujas fibras são, respectivamente, os espaços de Fréchet das funções de Schwartz e das funções diferenciáveis totalmente limitadas sobre as fibras do fibrado original E, i.e., $\mathcal{S}(E)_x = \mathcal{S}(E_x)$ e $\mathcal{B}(E)_x = \mathcal{B}(E_x)$: note que qualquer escolha de um sistema de trivializações locais do fibrado vetorial original E dá origem a um sistema de trivializações locais destes fibrados vetoriais induzidos $\mathcal{S}(E)$ e $\mathcal{B}(E)$ que, acompanhado de uma escolha adequada de partição da unidade, ainda pode ser usado para definir um sistema de seminormas fibradas em cada um deles. Ademais, utilizamos o campo de bivetores de Poisson σ para introduzir o produto estrela de Weyl-Moyal fibra-a-fibra em cada um deles que, quando combinado com a involução usual fibra-a-fibra, lhes confere a estrutura de um fibrado contínuo de $*$-álgebras de Fréchet, aqui denotados por $\mathcal{S}(E, \sigma)$ e $\mathcal{B}(E, \sigma)$, respectivamente. Enfatizamos que ambos, ainda que sejam localmente triviais e até mesmo diferenciáveis enquanto fibrados vetoriais sobre X, não serão em geral localmente triviais como fibrados de álgebras sobre X – a menos que σ tenha posto constante.[2]

[2]Esta é exatamente a mesma situação do comutador nas fibras do algebroide de Heisenberg ou do produto nas fibras do grupoide de Heisenberg.

O próximo passo consiste em arranjar as C^*-normas nas fibras desses dois fibrados, assim como definidas no Capítulo 2, para construir C^*-normas fibradas em cada um deles, as quais, devido à estimativa (2.28), são localmente limitadas. Assim, os resultados do Capítulo 3 mostram que eles admitem completamentos C^* que chamamos de *fibrados DFR* e denotamos por $\mathcal{E}(E,\sigma)$ e $\mathcal{H}(E,\sigma)$, respectivamente; mais especificamente,

$$\mathcal{E}(E,\sigma) \;=\; \overline{\mathcal{S}(E,\sigma)} \quad , \quad \mathcal{H}(E,\sigma) \;=\; \overline{\mathcal{B}(E,\sigma)}\;. \tag{4.1}$$

Suas álgebras de seções contínuas que se anulam no infinito são as *álgebras DFR*.

Ressaltamos aqui que esta é uma construção canônica, uma vez que as C^*-álgebras de Heisenberg são as C^*-álgebras universais associadas às álgebras de Heisenberg-Schwartz e Heisenberg-Rieffel, e ainda mais, são seus *únicos* completamentos C^*, de forma que, de acordo com os resultados obtidos no Capítulo 3, o mesmo vale para os fibrados correspondentes e suas álgebras de seções: os fibrados DFR são os fibrados C^* envelopantes universais dos correspondentes fibrados de $*$-álgebras de Fréchet introduzidos acima e, mais que isso, são seus *únicos* completamentos C^*; o mesmo vale para as álgebras DFR como "os" completamentos $C_0(X)$, universais e únicos, das álgebras das seções contínuas de $\mathcal{S}(E,\sigma)$ e de $\mathcal{B}(E,\sigma)$ (ou até diferenciáveis) de suporte compacto.

É claro que, quando σ é não degenerada, todas estas construções podem ser drasticamente simplificadas; em particular, os fibrados DFR $\mathcal{E}(E,\sigma)$ e $\mathcal{H}(E,\sigma)$ podem ser obtidos diretamente do fibrado principal de referenciais simpléticos de E como fibrados associados, de modo que o primeiro se torna idêntico ao fibrado de Weyl construído em [31].

4.2 Recuperando o Modelo DFR

Um caso importante da construção geral apresentada acima ocorre quando tanto a variedade base X quanto o fibrado de Poisson (E,σ) são homogêneos. Mais especificamente, suponha que G é um grupo de Lie que age propriamente tanto em X como em E, e tal que σ seja G-invariante: assim, escrevendo

$$\begin{array}{ccc} G\times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g\cdot x \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{ccc} G\times E & \longrightarrow & E \\ (g,u) & \longmapsto & g\cdot u \end{array} \tag{4.2}$$

para as respectivas ações, onde a segunda é linear ao longo das fibras e portanto induz uma ação

$$\begin{array}{ccc} G\times \bigwedge^2 E & \longrightarrow & \bigwedge^2 E \\ (g,u) & \longmapsto & g\cdot u \end{array} \tag{4.3}$$

devemos ter

$$\sigma(g \cdot x) \ = \ g \cdot \sigma(x) \qquad \text{para} \ \ g \in G \, , \, x \in X \ . \tag{4.4}$$

Adicionalmente, suporemos que a ação de G em X é transitiva. Assim, escolhendo um ponto de referência x_0 em X e denotando por H seu grupo de estabilidade em G, por $\mathbb{E}$ a fibra de E sobre x_0 e por σ_0 o valor do campo de bivetores σ em x_0, podemos identificar: X com o espaço homogêneo G/H, E com o fibrado vetorial $G \times_H \mathbb{E}$ associado a G (quando visto como um fibrado principal sobre G/H com grupo estrutural H) e à representação de H em $\mathbb{E}$ obtida por restrição da ação de G em E, e σ com o campo de bivetores obtidos de σ_0 pelo processo de associação. Explicitamente, por exemplo, identificamos a clase $gH \in G/H$ com o ponto $g \cdot x_0 \in X$ e, para todo $u_0 \in \mathbb{E}$, a classe $[g, u_0] = [gh, h^{-1} \cdot u_0] \in G \times_H \mathbb{E}$ com o vetor $g \cdot u_0 \in E$. Segue que, caso a representação de H em $\mathbb{E}$ estenda a uma representação de G, o fibrado associado $G \times_H \mathbb{E}$ será globalmente trivial; uma trivialização explicita é dada por

$$\begin{array}{ccc} G \times_H \mathbb{E} & \longrightarrow & G/H \times \mathbb{E} \\ [g, u_0] = [gh, h^{-1} \cdot u_0] & \longmapsto & (gH, g^{-1} \cdot u_0) \end{array} \tag{4.5}$$

É claro que G-invariância combinada com transitividade implica que σ tem posto constante e portanto o algebroide de Heisenberg se torna um fibrado de álgebras de Lie, o grupoide de Heisenberg se torna um fibrado de grupos de Lie e os fibrados DFR $\mathcal{E}(E, \sigma)$ e $\mathcal{H}(E, \sigma)$ se tornam fibrados C^* localmente triviais. Ademais, caso a representação de H em $\mathbb{E}$ se estenda a uma representação de G, todos estes fibrados serão globalmente triviais.

Para recuperar o modelo DFR original, consideramos o espaço de Minkowski em quatro dimensões $\mathbb{R}^{1,3}$, que possui o grupo de Lorentz $O(1,3)$ como grupo de isometrias (lineares), e escolhemos uma forma simplética em $\mathbb{R}^{1,3}$, por exemplo, aquela definida pela matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Seja σ_0 o tensor de Poisson correspondente e H seu grupo de estabilidade sob a ação de $O(1,3)$. Então podemos recuperar o espaço Σ do artigo original [9] como o quociente $O(1,3)/H$. Além disso, o fibrado vetorial $O(1,3) \times_H \mathbb{R}^{1,3}$ associado a $O(1,3)$ (como fibrado principal canônico sobre Σ com grupo estrutural H) e à representação usual de $H \subset O(1,3)$ em $\mathbb{R}^{1,3}$ possui uma estrutura de Poisson canônica definida utilizando a ação de $O(1,3)$ para transportar o tensor de Poisson σ_0 do ponto $o \in \Sigma$ (ou seja, $[1] \in O(1,3)/H$) a todos os pontos de Σ. De acordo com a discussão anterior, os fibrados DFR resultantes vão ser globalmente triviais e portanto temos

$$\mathcal{E}\big(O(1,3) \times_H \mathbb{R}^{1,3}, \sigma\big) \ \cong \ \Sigma \times \mathcal{K} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}\big(O(1,3) \times_H \mathbb{R}^{1,3}, \sigma\big) \ \cong \ \Sigma \times \mathcal{B} \ . \tag{4.6}$$

Além do mais, a álgebra DFR correspondente

$$\Gamma_0 \left(\mathcal{E}\big(O(1,3) \times_H \mathbb{R}^{1,3}, \sigma\big)\right)$$

será a mesma definida no artigo original [9].

4.3 O Modelo DFR Estendido

Podemos estender a construção acima para obter um fibrado C^* sobre um espaço-tempo arbitrário cujas fibras são isomorfas à álgebra DFR original. Seja (M, g) uma variedade de Lorentz n-dimensional e $O(M, g)$ seu fibrado de referenciais ortogonais. Seja também σ_0 um bivetor fixo em $\mathbb{R}^n$ e Σ sua órbita sob a ação do grupo de Lorentz $O(1, n-1)$. Considere então o fibrado associado

$$\Sigma(M) \;=\; O(M, g) \times_{O(1,n-1)} \Sigma$$

sobre M, cuja projeção será denotada por π. Utilizando π para fazer o "pull back" do fibrado tangente de TM de M para $\Sigma(M)$, obtemos um fibrado vetorial π^*TM sobre $\Sigma(M)$ que carrega um campo de bivetores canônico σ definido pelo bivetor original σ_0. Assim a álgebra de seções

$$\Gamma_0\left(\Sigma(M), \mathcal{E}\big(\pi^*TM, \sigma\big)\right)$$

do fibrado DFR resultante $\mathcal{E}(\pi^*TM, \sigma)$ não é só uma $C_0(\Sigma(M))$-álgebra mas, usando a projeção π, também é uma $C_0(M)$-álgebra e portanto pode ser vista como a álgebra de seções de um certo fibrado C^* sobre M. Refinando a discussão do Capítulo 3 (veja, em particular, a equação (3.17)), podemos nos convencer que as fibras deste fibrado C^* sobre M são precisamente as álgebras DFR construídas sobre os espaços tangentes correspondentes:

$$\Gamma_0\left(\Sigma(M)_m, \mathcal{E}\big(O(T_mM, g_m) \times_{H_m} T_mM, \sigma_m\big)\right). \tag{4.7}$$

Em analogia com o termo "espaço-tempo quântico"empregado pelos autores de [9] para designar a álgebra DFR original, sugerimos denotar o funtor que associa à cada variedade de Lorentz (M, g) a álgebra de seções $\Gamma_0(\Sigma(M), \mathcal{E}(\pi^*TM, \sigma))$ por "espaço-tempo quântico localmente covariante".

Conclusão e Perspectivas

Nosso primeiro objetivo ao iniciar esta investigação era encontrar um ambiente matemático adequado para uma generalização geométrica do modelo DFR – um modelo para o "espaço-tempo quântico" que surgiu em função de tentativas de evitar um já bem conhecido parádoxo da "gravitação quântica". Trata-se do conflito entre a descrição clássica do espaço-tempo como uma variedade de Lorentz, por um lado, a qual incorpora intrinsecamente a possibilidade de localizar eventos com precisão arbitrária (a rigor, nos pontos da variedade), e as relações de incerteza de Heisenberg, por outro lado, as quais exigem que tal localização de eventos em uma região suficientemente pequena do espaço-tempo requer uma concentração tão grande de momento e energia nesta região que, segundo as equações de Einstein, formar-se-á uma superfície armadilhada (*closed trapped surface*), transformando a região em questão em um buraco negro e impedindo que um observador externo pudesse observar o resultado do próprio processo de medição.

Para começar, era preciso traduzir as relações de incerteza de Heisenberg para o contexto de C^*-álgebras de forma a manter o controle sobre a forma (pré-)simplética subjacente: um problema completamente resolvido pela teoria de quantização estrita por deformação de Rieffel, levando a uma nova construção para a "C^*-álgebra das relações canônicas de comutação", que constitui uma alternativa a outras escolhas mais difundidas na literatura, como a álgebra de Weyl [23, 24] ou a álgebra de resolventes [4]. O outro ingrediente principal que precisava ser incorporado e desenvolvido foi a teoria geral de fibrados de $*$-álgebras, com ênfase na questão de como se relacionam os processos de completamento C^* de $*$-algebras a nível das fibras e a nível de álgebras de seções. O principal resultado aqui é a definição de um procedimento novo de completamento C^*, agora a nivel de fibrados, que associa a cada fibrado de $*$-álgebras multiplicativamente convexas, munido de uma norma C^* fibrada, um fibrado C^* sobre o mesmo espaço base cujas fibras são completamentos C^* das fibras originais e cuja álgebra de seções contínuas é completamento C^* da álgebra de seções contínuas original (mediante condições apropriadas de decaimento no infinito). Combinando estes dois ingredientes, conseguimos chegar a uma generalização da construção matemática subjacente ao modelo DFR que pode ser aplicada a qualquer variedade de Lorentz.

Devemos enfatizar aqui que, a este ponto, ainda não é claro em que grau a motivação física que levou ao desenvolvimento do modelo original pode ser estendida a essa generalização matemática. Entretanto, acreditamos que a construção é de interesse por si só, como ferramenta para definir uma classe não trivial de fibrados C^* (os fibrados DFR), que podem ser obtidos como completamentos, neste caso únicos, de fibrados localmente triviais de $*$-álgebras de Fréchet canonicamente construídos a partir de fibrados vetoriais de Poisson de dimensão finita. Todo este processo pode ser generalizado ainda mais se considerarmos outros procedimentos para gerar C^*-álgebras a partir de classes apropriadas de espaços vetoriais topológicos (substituindo o funtor que associa as C^*-álgebras de Heisenberg a cada espaço vetorial pré-simplético), desde que estes satisfaçam condições de continuidade que permitam a passagem de espaços vetoriais e C^*-álgebras a fibrados vetoriais e fibrados C^*, no espírito do teorema do levantamento de funtores [20].

A construção dos supracitados fibrados de $*$-álgebras de Fréchet tem ainda mais importância quando levamos em conta a necessidade de identificar outras estruturas geométricas nos "espaços não-comutativos" que as álgebras DFR supostamente emulam. Um primeiro passo nessa direção consiste em considerar a definição de subalgebras diferenciáveis, como discutida em [3] e [2]. Utilizando os resultados dos últimos capítulos é um exercício trivial mostrar que as álgebras de Heisenberg-Schwartz e Heisenberg-Rieffel são subalgebras diferenciáveis em seus respectivos completamentos, e com um pouco mais de esforço podemos mostrar que o mesmo também vale para as álgebras de seções diferenciáveis dos fibrados de $*$-álgebras de Fréchet correspondentes. É nossa opinião que esta é uma linha de investigação bastante promissora que deveria ser seguida no futuro.

Outra possível aplicação da nossa construção dos fibrados DFR é de gerar exemplos não triviais de álgebras localmente C^* [13, 17, 29]; mais precisamente, podemos considerar as álgebras de todas as seções contínuas dos nossos fibrados. O conceito de álgebra localmente C^* é de particular importância ao lidarmos com espaços não compactos e pode ser encontrado naturalmente quando se consideram feixes de álgebras. Uma coleção de novos resultados nesta direção relacionados com o trabalho desta tese pode ser encontrada em [12].

Estamos cientes do fato de que todas estas considerações são de natureza predominantemente matemática: a interpretação física é uma questão completamente diferente. Porém, até um certo ponto, o mesmo pode ser dito do modelo DFR original, uma vez que não é claro como estender a interpretação das relações de comutação postuladas em [9], em termos de relações de incerteza, para outros espaço-tempos, ou mesmo para o espaço de Minkowski em dimensão $\neq 4$. Adicionalmente, não devemos esquecer que, mesmo na física clássica, coordenadas no espaço-tempo *não* são observáveis: isso significa que o axioma básico da teoria quântica de campos conforme o qual observáveis (locais) devem ser descritos por álgebras de um certo tipo (tais quais C^*-álgebras ou álgebras de von Neumann) *não* implica que para descrever a "gravitação quântica" devemos substituir as coordenadas do espaço-tempo clássico por operadores não comutativos. Para nós, a questão mais fundamental é: *Como podemos formular relações de incerteza para o espaço-tempo, no sentido de obstruções à possibilidade de localização de eventos com precisão arbitrária, em termos de* ***observáveis****?* É claro que está questão provoca outra ainda mais fundamental: *Como podemos* ***medir*** *a geometria do espaço-tempo quando os efeitos quânticos se tornam fortes?*

Apêndice: Estimativas para o Produto de Weyl-Moyal

Neste apêndice, estabelecemos alguns resultados importantes sobre o produto de Weyl-Moyal, começando por uma estimativa das seminormas de Schwartz do produto de duas funções f e g em $\mathcal{B}(V)$ quando ao menos uma delas pertence a $\mathcal{S}(V)$, em termos das seminormas dos fatores; como indicado nos corpo da tese, isso implica em uma estimativa correspondente para a norma C^* em $\mathcal{B}(V)$. Tais estimativas podem ser encontradas em [32, Capítulos 3 & 4]; porém, para os nossos propósitos é necessário obter alguma informação sobre como as constantes envolvidas nestas estimativas dependem do tensor de Poisson σ, e esta parte da informação não consta da literatura disponível. Em um segundo momento, estudamos a existência de aproximantes da identidade na álgebra de Heisenberg-Schwartz.

Por simplicidade, trabalharemos em coordenadas; então escolhemos uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V e introduzimos a base dual correspondente $\{e^1, \ldots, e^n\}$ de V^*, expandindo vetores x em V e covetores ξ em V^* conforme $x = x^j e_j$, $\xi = \xi_j e^j$ e o bivetor σ conforme $\sigma(\xi, \eta) = \sigma^{kl} \xi_k \eta_l$; assim

$$\eta_j (\sigma^\sharp \xi)^j \;=\; \langle \eta, \sigma^\sharp \xi \rangle \;=\; \sigma(\xi, \eta) \;=\; \sigma^{kj} \xi_k \eta_j$$

implica que $(\sigma^\sharp \xi)^j = \sigma^{kj} \xi_k$. Além disso, usando a notação de multi-índices, podemos definir as topologias de $\mathcal{S}(V)$ e de $\mathcal{B}(V)$ em termos das seminormas de Schwartz $s_{p,q}$ (para $\mathcal{S}(V)$) e $s_{0,q}$ (para $\mathcal{B}(V)$), definidas por

$$s_{p,q}(f) \;=\; \sum_{|\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant q} \sup_{x \in V} |x^\alpha \, \partial_\beta f(x)| \, . \tag{A.1}$$

Partimos da seguinte estimativa para a norma L^1 da transformada de Fourier inversa $\check{f}$ de uma função de Schwartz f em termos d e uma seminorma de Schwartz apropriada:

$$\|\check{f}\|_1 \leqslant (2\pi)^n s_{2n,2n}(f) \qquad \text{para } f \in \mathcal{S}(V) \ . \tag{A.2}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1} f\|_1 &= \int_{V^*} d\xi \ |(\mathcal{F}^{-1} f)(\xi)| \\
&= \int \frac{d\xi_1}{1+\xi_1^2} \cdots \frac{d\xi_n}{1+\xi_n^2} \ \big| (1+\xi_1^2) \ldots (1+\xi_n^2)(\mathcal{F}^{-1} f)(\xi) \big| \\
&\leqslant \pi^n \sup_{\xi \in V^*} \Big| \Big(\mathcal{F}^{-1} \big((1-\partial_{x^1}^2) \ldots (1-\partial_{x^n}^2) f \big) \Big)(\xi) \Big| \\
&\leqslant \frac{1}{2^n} \int_V dx \ \big| \big((1-\partial_{x^1}^2) \ldots (1-\partial_{x^n}^2) f \big)(x) \big| \\
&= \frac{1}{2^n} \int \frac{dx^1}{1+(x^1)^2} \cdots \frac{dx^n}{1+(x^n)^2} \ \Big| (1+(x^1)^2) \ldots (1+(x^n)^2) \\
&\qquad\qquad \big((1-\partial_{x^1}^2) \ldots (1-\partial_{x^n}^2) f \big)(x) \Big| \\
&\leqslant (2\pi)^n s_{2n,2n}(f) \ .
\end{aligned}$$

■

Agora, da equação (2.17), concluímos que

$$\sup_{x \in V} \big| (f \star_\sigma g)(x) \big| \leqslant \sup_{x \in V} |f(x)| \int_{V^*} d\xi \ |\check{g}(\xi)| \qquad \text{para } f \in \mathcal{B}(V),\ g \in \mathcal{S}(V) \ ,$$

e portanto a equação (A.2) leva à seguinte estimativa:

$$s_{0,0}(f \star_\sigma g) \leqslant (2\pi)^n s_{0,0}(f) s_{2n,2n}(g) \qquad \text{para } f \in \mathcal{B}(V),\ g \in \mathcal{S}(V) \ . \tag{A.3}$$

Para estender esta a seminormas de Schwartz de ordem superior, precisamos dos seguintes fatos.

Lema A.1 *Para $f \in \mathcal{B}(V)$ e $g \in \mathcal{S}(V)$, temos a regra de Leibniz*

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \big(f \star_\sigma g \big) = \frac{\partial f}{\partial x^j} \star_\sigma g + f \star_\sigma \frac{\partial g}{\partial x^j} \ ,$$

e portanto para ordens mais altas

$$\partial_\alpha \big(f \star_\sigma g\big) \;=\; \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \, \partial_\beta f \star_\sigma \partial_{\alpha-\beta} g \ .$$

Demonstração: Simplesmente diferencie a equação (2.17) debaixo da integral. ■

Lema A.2 *Para $f \in \mathcal{B}(V)$ e $g \in \mathcal{S}(V)$, temos*

$$x^j \big(f \star_\sigma g\big) \;=\; f \star_\sigma x^j g \,+\, \nabla_\sigma^j f \star_\sigma g \ ,$$

e portanto

$$x^\alpha \big(f \star_\sigma g\big) \;=\; \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \, \nabla_\sigma^{\alpha-\beta} f \star_\sigma x^\beta g \ ,$$

onde ∇_σ denota o gradiente (pre-)simplético, definido por

$$\nabla_\sigma^j h \;=\; \frac{i}{2}\, \sigma^{jk}\, \frac{\partial h}{\partial x^k} \ .$$

e $\nabla_\sigma^\alpha = \prod_{j=1}^n (\nabla_\sigma^j)^{\alpha_j}$.

Demonstração: Para $f \in \mathcal{B}(V)$ e $g \in \mathcal{S}(V)$, temos, de acordo com a equação (2.17),

$$\begin{aligned}
(f \star_\sigma x^j g)(x) \;&=\; \int_{V^*} d\xi \; f(x + \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \xi)\, (\mathcal{F}^{-1}(x^j g))(\xi)\; e^{i\langle \xi, x\rangle} \\
&=\; i \int_{V^*} d\xi \; f(x + \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \xi)\, \frac{\partial \check{g}}{\partial \xi_j}(\xi)\; e^{i\langle \xi, x\rangle} \\
&=\; -\, i \int_{V^*} d\xi \bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_j} f(x + \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \xi) \Big)\, \check{g}(\xi)\; e^{i\langle \xi, x\rangle} \\
&\qquad\qquad +\; f(x + \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \xi)\, \check{g}(\xi)\; \frac{\partial}{\partial \xi_j}\, e^{i\langle \xi, x\rangle} \bigg) \\
&=\; \frac{i}{2}\, \sigma^{kj} \int_{V^*} d\xi \; \frac{\partial f}{\partial x^k}(x + \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \xi)\, \check{g}(\xi)\; e^{i\langle \xi, x\rangle} \,+\, x^j (f \star_\sigma g)(x) \\
&=\; -\, (\nabla_\sigma^j f \star_\sigma g)(x) \,+\, x^j (f \star_\sigma g)(x) \ .
\end{aligned}$$

■

Combinando estes dois lemas, obtemos a formula

$$\begin{aligned} x^\alpha \partial_\beta (f \star_\sigma g) \ = \sum_{\gamma \leqslant \alpha, \delta \leqslant \beta} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\delta} \left(\nabla_\sigma^{\alpha-\gamma} \partial_{\beta-\delta} f \ \star_\sigma x^\gamma \partial_\delta g \right) \\ \text{para} \ \ f \in \mathcal{B}(V),\, g \in \mathcal{S}(V) \ . \end{aligned} \tag{A.4}$$

Tomando a norma do supremo $s_{0,0}$ e aplicando a definição das seminormas $s_{p,q}$ junto com a estimativa (A.3) estabelecida acima, concluímos o seguinte:

Proposição A.1 *Para quaisquer números naturais p e q, existe um polinômio $P_{p,q}$ de grau p nas entradas da matriz de σ, com coeficientes que dependem somente de n, p e q, tal que vale a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} s_{p,q}(f \star_\sigma g) \ \leqslant \ |P_{p,q}(\sigma)| \, s_{0,p+q}(f) \, s_{p+2n,q+2n}(g) \\ \textit{para} \ \ f \in \mathcal{B}(V) \ \textit{e} \ g \in \mathcal{S}(V) \ . \end{aligned} \tag{A.5}$$

Com estas formulas e estimativas à nossa disposição, podemos abordar a questão da existência de aproximantes da identidade na álgebra de Heisenberg-Schwartz $\mathcal{S}_\sigma$. O fato desta ser uma subalgebra (e até mesmo um ideal) da álgebra de Heisenberg-Rieffel $\mathcal{B}_\sigma$, que tem uma unidade, a saber, a função constante 1, indica que devemos procurar sequências $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções de Schwartz $\chi_k \in \mathcal{S}_\sigma$ que convirjam para 1 em algum sentido adequado: sem perda de generalidade, podemos supor que tais funções sejam reais e satisfaçam $0 \leqslant \chi_k \leqslant 1$. Assim, espera-se que $\chi_k \to 1$ e $\partial_\alpha \chi_k \to 0$ para $\alpha \neq 0$ (ou equivalentemente, $\partial_\alpha(1-\chi_k) \to 0$ para todo α) quando $k \to \infty$, mas tal convergência pode ser uniforme, no máximo, sobre compactos de V.[3] Ainda assim, toda sequência com tais propriedades dá origem a um aproximante da identidade na álgebra de Heisenberg-Schwartz – desde que exigirmos que as derivadas parciais $\partial_\alpha(1-\chi_k)$ sejam uniformemente limitadas em k, para qualquer α:

Proposição A.2 *Seja $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ um sequência de funções de Schwartz $\chi_k \in \mathcal{S}(V)$ satisfazendo $0 \leqslant \chi_k \leqslant 1$, limitada no espaço de Fréchet $\mathcal{B}(V)$ e que converge para 1 na topologia de convergência uniforme de todas as derivadas sobre compactos. Então $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é um aproximante da identidade na álgebra de Heisenberg-Schwartz $\mathcal{S}_\sigma$, i.e., para toda $f \in \mathcal{S}_\sigma$, vale que $\chi_k \star_\sigma f \to f$ em $\mathcal{S}_\sigma$, quando $k \to \infty$.*

[3] Tipicamente, podemos tomar $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como uma sequência de funções teste $\chi_k \in \mathcal{D}(V)$ que é monotonicamente crescente e converge para 1 em $\mathcal{E}(V)$. Porém, esta sequência não converge para 1 no espaço $\mathcal{S}(V)$ e nem mesmo em $\mathcal{B}(V)$, uma vez que a função 1 não tende a 0 no infinito: a convergência uniforme só pode se dar em conjuntos compactos, e não em todo V.

Demonstração: Fixando $f \in \mathcal{S}_\sigma$ e $p, q \in \mathbb{N}$, temos a seguinte estimativa:

$$s_{p,q}(\chi_k \star_\sigma f - f) \;\leqslant\; C_0 \max_{\substack{|\alpha|,|\gamma|\leqslant p \\ |\beta|,|\delta|\leqslant q}} \sup_{x\in V} \left| \big(\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1-\chi_k) \star_\sigma \mathsf{x}^\gamma \partial_\delta f\big)(x) \right| ,$$

onde

$$C_0 \;=\; \sum_{|\alpha|\leqslant p, |\beta|\leqslant q} \; \sum_{\gamma\leqslant\alpha, \delta\leqslant\beta} \binom{\alpha}{\gamma}\binom{\beta}{\delta} ,$$

o que segue diretamente da equação (A.4). Agora, dado $\epsilon > 0$, iremos separar esta norma do supremo em duas partes. Primeiro, usamos que as funções χ_k, e portanto as funções $\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1-\chi_k)$, compõem um conjunto limitado de $\mathcal{B}_\sigma$, enquanto que as funções $\mathsf{x}^\gamma \partial_\delta f$ são fixas em $\mathcal{S}_\sigma$, para concluir que existe um subconjunto compacto K de V tal que, para todo $|\alpha|, |\gamma| \leqslant p$ e $|\beta|, |\delta| \leqslant q$,

$$\sup_{x\notin K} \left| \big(\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1-\chi_k) \star_\sigma \mathsf{x}^\gamma \partial_\delta f\big)(x) \right| \;<\; \frac{\epsilon}{C_0} .$$

De fato, podemos aplicar as equações (A.3) e (A.4) para mostrar que as funções de Schwartz $(1+|\mathsf{x}|^2)\big(\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1-\chi_k) \star_\sigma \mathsf{x}^\gamma \partial_\delta f\big)$ em V são uniformamente limitadas em k (bem como em todos os outros parametros), de forma que as funções de Schwartz $\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1-\chi_k) \star_\sigma \mathsf{x}^\gamma \partial_\delta f$ em V se anulam no infinito uniformemente em k (bem como em todos os outros parametros). A seguir, pomos

$$C_1 \;=\; \max_{|\alpha|\leqslant p, |\beta|\leqslant q} s_{0,0}\big(\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1-\chi_k)\big) \quad , \quad C_2 \;=\; \max_{|\gamma|\leqslant p, |\delta|\leqslant q} \|\mathcal{F}^{-1}(\mathsf{x}^\gamma \partial_\delta f)\|_1$$

e introduzimos um subconjunto compacto K^* de V^* tal que, para todo $|\gamma| \leqslant p$ e $|\delta| \leqslant q$,

$$\int_{V^*\setminus K^*} d\xi \; |\mathcal{F}^{-1}(\mathsf{x}^\gamma \partial_\delta f)(\xi)| \;<\; \frac{\epsilon}{2C_0C_1} .$$

Agora, ponha $L = K + \frac{1}{2}\sigma^\sharp K^*$, que mais uma vez é um subconjunto compacto de V, e por fim utilize a convergência uniforme das funções $1-\chi_k$ e das suas derivadas em L para inferir a existência de $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geqslant k_0$ e todo $|\alpha| \leqslant p$ e $|\beta| \leqslant q$,

$$\sup_{y\in L} \left| \big(\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1-\chi_k)\big)(y) \right| \;<\; \frac{\epsilon}{2C_0C_2} .$$

Então segue da equação (2.17) que, para $k \geqslant k_0$ e todo $|\alpha|, |\gamma| \leqslant p$ e $|\beta|, |\delta| \leqslant q$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in K} \big| \big(\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1 - \chi_k) \star_\sigma x^\gamma \partial_\delta f \big)(x) \big| \\
&\qquad \leqslant \left| \int_{V^* \setminus K^*} d\xi \; (\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1 - \chi_k))(x + \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \xi) \, (\mathcal{F}^{-1}(x^\gamma \partial_\delta f))(\xi) \; e^{i\langle \xi, x \rangle} \right| \\
&\qquad\quad + \left| \int_{K^*} d\xi \; (\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1 - \chi_k))(x + \tfrac{1}{2}\sigma^\sharp \xi) \, (\mathcal{F}^{-1}(x^\gamma \partial_\delta f))(\xi) \; e^{i\langle \xi, x \rangle} \right| \\
&\qquad \leqslant s_{0,0}\big(\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1 - \chi_k) \big) \int_{V^* \setminus K^*} d\xi \; |(\mathcal{F}^{-1}(x^\gamma \partial_\delta f))(\xi)| \\
&\qquad\quad + \sup_{y \in L} \big| \big(\nabla_\sigma^\alpha \partial_\beta (1 - \chi_k) \big)(y) \big| \int_{V^*} d\xi \; |\mathcal{F}^{-1}(x^\gamma \partial_\delta f)(\xi)| \\
&\qquad < \frac{\epsilon}{C_0} \,.
\end{aligned}$$

■

É importante enfatizar que esta construção gera toda um classe de aproximantes da identidade na álgebra de Heisenberg-Schwartz, mas que nenhum destes é limitado: as funções χ_k são uniformemente limitadas em k só em $\mathcal{B}_\sigma$ mas não em $\mathcal{S}_\sigma$. Isso é inevitável, uma vez que não é difícil provar que a álgebra de Heisenberg-Schwartz não admite *nenhum* aproximante da identidade limitado; porém, isso não é um problema, uma vez que tal propriedade é irrelevante para nossos propósitos.

Bibliografia

[1] Balachandran, V.K., *Topological Algebras*, North-Holland Mathematical Studies, Vol. 185, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[2] Bhatt S. J., Inoue, A. & Ogi H., *Differential structures in C^*-algebras*, J. Operator Theory **66** (2011) 301-334.

[3] Blackadar, B. & Cuntz, J., *Differential Banach Algebra Norms and Smooth Subalgebras of C^*-Algebras*, J. Operator Theory **26** (1991) 255-282.

[4] Buchholz, D. & Grundling, H., *The Resolvent Algebra: A New Approach to Canonical Quantum Systems*, J. Funct. Anal. **254** (2008) 2725-2779.

[5] Calderon, A.P. & Vaillancourt, R., *On the Boundedness of Pseudo-Differential Operators*, J. Math. Soc. Japan **23** (1971) 374-378.

[6] Cohn, D.L., *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston 1980.

[7] Cordes, H.O., *On Compactness of Commutators of Multiplications and Convolutions, and Boundedness of Pseudodifferential Operators*, J. Funct. Anal. **18** (1975) 115-131.

[8] Dixmier, J., *C*-Algebras*, North-Holland, Amsterdam 1977.

[9] Doplicher, S., Fredenhagen, K. & Roberts, J.E., *The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields*, Commun. Math. Phys. **172** (1995) 187-220, hep-th/0303037.

[10] Dubois-Violette, M., Madore, J. & Kerner, R., *Shadow of Noncommutativity*, J. Math. Phys. **39** (1998) 730-738.

[11] Fell, J.M.G. & Doran, R.S., *Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups and Banach *-Algebraic Bundles*, Vol. 1: *Basic Representation Theory of Groups and Algebras*, Academic Press, San Diego 1988.

[12] Forger, M. & Paulino, D.V., *Locally C^*-Algebras, C^*-Bundles and Noncommutative Spaces*, Preprint `arXiv:1307.4458`.

[13] Fragoulopoulou, M., *Topological Algebras with Involution*, North-Holland Mathematical Studies, Vol. 200, North-Holland, Amsterdam, 2005.

[14] Gayral, V., Gracia-Bondía, J.M., Iochum, B., Schücker, T. & Várilly, J.C., *Moyal Planes are Spectral Triples*, Commun. Math. Phys. **246** (2004) 569-623.

[15] Gracia-Bondía, J.M., Várilly, J.C. & Figueroa, H., *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Basel 2001.

[16] Hepp, K., *The Classical Limit for Quantum Mechanical Correlation Functions*, Commun. Math. Phys. **35** (1974) 265-277.

[17] Inoue, A., *Locally C^* Algebra*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **25** (1971) 197-235.

[18] Kasparov, G., *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. **91** (1988) 147-201.

[19] Kriegl, A. & Michor, P.W., *The Convenient Setting of Global Analysis*, AMS, Providence RI, 1997.

[20] Lang, S., *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer, Berlin 1995.

[21] Mackenzie, K.C.H., *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Cambridge University Press, Cambridge 2005.

[22] MacLane, S., *Category Theory for the Working Mathematician*, 2$^{\text{nd}}$ edition, Springer, Berlin 1998.

[23] Manuceau, J., *C^*-Algèbre de Relations de Commutation*, Ann. Inst. Henri Poincaré (A) **8** (1968) 139-161.

[24] Manuceau, J., Sirugue, M., Testard, D. & Verbeure, A., *The Smallest C^*-Algebra for Canonical Commutation Relations*, Commun. Math. Phys. **32** (1973) 231-243.

[25] Melo, S.T. & Merklen, M.I., *On a Conjectured Noncommutative Beals-Cordes-Type Characterization*, Proc. AMS **130** (2001) 1997-2000.

[26] Murphy, G.J., *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, New York 1990.

[27] Nelson, E., *Analytic Vectors*, Ann. Math. **70** (1959) 572-615.

[28] Pfister, H., *Continuity of the Inverse*, Proc. AMS **95** (1985) 312-314.

[29] Phillips, N.C., *Inverse Limits of C^*-Algebras*, J. Operator Theory **19** (1988) 159-195.

[30] Piacitelli G., *Quantum Spacetime: A Disambiguation*, SIGMA **6** (2010) 073, 43 pp., `arXiv:math-ph/1004.5261v3`.

[31] Plymen, R.J., *The Weyl Bundle*, J. Funct. Anal. **49** (1982) 186-197.

[32] Rieffel, M.A., *Deformation Quantization for Actions of $\mathbb{R}^d$*, Mem. AMS **506**, 1993.

[33] Sebestyén, Z., *Every C^*-Seminorm is Automatically Submultiplicative*, Period. Math. Hungar. **10** (1979) 1-8.

[34] Várilly, J.C. & Gracia-Bondía, J.M., *Algebras of Distributions Suitable for Phase-Space Quantum Mechanics. II. Topologies on the Moyal Algebra*, J. Math. Phys. **29** (1988) 880-887.

[35] Williams, D.P., *Crossed Products of C^*-Algebras*, AMS, Providence, RI 2007.