Fenômeno Fuller em problemas de controle ótimo com múltiplos controles

Eduardo Oda

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, 3 de junho de 2013

À Brenda e à Carlota

Agradecimentos

Registro aqui meus sinceros agradecimentos.

Ao professor **Pedro Aladar Tonelli**, que me acompanha desde os tempos da graduação, sempre disposto a discutir e apoiar meus estudos. Sua confiança em mim foi fundamental para a realização deste trabalho.

Ao saudoso professor **Ângelo Barone Netto**, que me ensinou muito mais do que se podia esperar e que certamente continuará a me ensinar através de suas lembranças e trabalhos matemáticos.

Aos professores **Manuel Valentim de Pera Garcia** e **Sônia Regina Leite Garcia**, um casal de verdadeiros amigos que adoram ficar horas e horas escutando e discutindo assuntos que estudamos, seja nos nossos seminários macarrônicos, no salão do café ou nos restaurantes canônicos, para azar dos garçons que acabam trabalhando madrugada adentro. Cada um destes momentos é fundamental para todos os alunos que eles acompanham, formando nosso conhecimento, nos estimulando e, por que não, nos dando um puxão de orelha quando necessário.

Ao amigo **Ricardo Freire**, que não me deixou esquecer que "missão dada é missão cumprida".

Ao amigo **Joaquim Vidal**, que se desdobrou para segurar algumas pontas sozinho enquanto eu finalizava este trabalho.

Ao amigo **Álvaro Machado Dias**, com quem pude me divertir conhecendo e experimentando a aplicação da matemática em outras áreas.

À **Ana**, por carinhosamente estar ao meu lado, na alegria, na tristeza, na impaciência, no mau humor, na correria...

Aos **meus pais**, **minhas irmãs** e demais **familiares**, por aturarem minha personalidade peculiar.

Aos amigos **Alexandre Hannud Abdo**, **Marcelo Caetano**, **Ricardo Ribeiro** e tantos outros, com os quais compartilhei ótimos momentos, matemáticos ou não, o que ampliou minha formação em outras áreas, deixando a minha vida muito mais completa.

Missão dada, parceiro, é missão cumprida.

Cap. Nascimento

Resumo

Muitos problemas de controle ótimo apresentam um comportamento sofisticado e ainda não totalmente compreendido, o Fenômeno Fuller. Podemos descrever ingenuamente este fenômeno pela acumulação de descontinuidades no controle.

Neste trabalho elaboramos extensões dos resultados clássicos de detecção deste comportamento aos sistemas com mútiplos controles e damos uma descrição puramente geométrica do problema que nos permite extrair informações e compreender sua complexidade examinando apenas os campos vetoriais envolvidos.

Aplicamos estas técnicas a sistemas de controle que derivam de sistemas hamiltonianos, descobrindo características surpreendentes destes problemas e dando condições suficientes para existência de Fenômeno Fuller em uma família destes sistemas.

Palavras-chave: controle ótimo, Princípio do Máximo de Pontryagin, sistemas hamiltonianos, *chattering*, Fenômeno Fuller, controle singular.

Abstract

Many optimal control problems exhibit a peculiar behavior not completely understood, the Fuller Phenomenon. In a naive way, this phenomenon can be described as the accumulation of descontinuities in the control function.

In this work we elaborate extensions to multiple input control systems of classic results on the detection of this behavior, and we give a purely geometric description of the problem which allows us to extract information and best understand the complexity of the system by considering only the vector fields that define it.

We apply this tecnique to control systems derived from Hamiltonian systems, leading to the observation of surprising features of this kind of behavior. Finally, we give sufficient conditions for existence of the Fuller Phenomenon in a subfamily of these systems.

Keywords: optimal control,Pontryagin Maximum Principle, Hamiltonian systems, chattering, Fuller Phenomenon, singular control.

Sumário

Definições

Na lista abaixo T é um espaço topológico, x um vetor de $\mathbb{R}^n$ e f e g campos vetoriais do $\mathbb{R}^n$.

$\mathrm{Mes}\,(T)$	Conjunto das funções mensuráveis $u : [a, b] \to T$.
$\mathrm{sign}\,(x)$	Vetor cuja i-ésima entrada é 1 se $x_i > 0$ e -1 se $x_i < 0$.
	Se algum $x_i = 0$ então $\mathrm{sign}\,(x)$ não está definido.
$\dot{x}(t)$	Derivada com relação a t de uma função $x(t)$.
$x^{(k)}(t)$	k-ésima derivada com relação a t de uma função $x(t)$.
$[f, g]$	O produto de Lie de f e g.
$\mathrm{ad}_f^k\, g$	O produto de Lie iterado k vezes, $[f, [f, \ldots [f, g] \ldots]]$,
	com $\mathrm{ad}_f\, g = [f, g]$. Por convenção $\mathrm{ad}_f^0\, g = g$.

Introdução

Em problemas aplicados de controle de sistemas dinâmicos, um dos principais desafios é a otimização de funcionais como consumo de combustível, lucro e tempo. A busca por controles ótimos tem como ferramenta básica o Princípio do Máximo de Pontryagin, enunciado em 1961 por Lev Semenovich Pontryagin [1].

Como uma consequência direta deste princípio, muitos dos controles ótimos são descontínuos. Isto é particularmente verdade em sistemas afins com relação ao controle, nos quais claramente o controle é o sinal de uma função diferenciável em quase todo ponto.

Entretanto, um comportamento inesperado, primeiro observado por Anthony Thomas Fuller em 1963 [2] ao estudar um simples problema mecânico, é a possibilidade de acumulação de descontinuidades do controle. Tal comportamento, como demonstrado por Kupka em 1990 [3] não é uma excessão e sim muito mais comum e persistente do que esperávamos.

Atualmente conhecido como *Fenômeno Fuller*, este aspecto dos problemas de controle ótimo tem sido estudado por diversos pesquisadores do ponto de vista teórico e aplicado. Apesar dos avanços de Kupka, muitas questões ficam por ser respondidas. Um caso de particular interesse são problemas afins com múltiplos controles. Um tratamento adequado para detectar Fenômeno Fuller nas fronteiras de arcos singulares era, até então, desconhecida. Também não era claro o papel das distribuições geradas pelos campos vetorias que definem o sistema na possibilidade ou não dessa acumulação de continuidades.

Neste trabalho consideramos sistemas com múltiplos controles para os quais estendemos resultados clássicos relacionados à ordem do problema e damos critérios suficientes, baseados nas distribuições geradas pelos campos, para detectar Fenômeno Fuller. Em seguida, aplicamos estes resultados ao controle ótimo de sistemas mecânicos. Finalizamos discutindo o problema de controle de veículos subaquáticos.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Considere o problema de controle ótimo:

$$\text{minimizar} \int_0^{T_f(u)} f_0(x) + \sum_{i=0}^{m} g_{0i}(x)u_i \, dt$$

$$\text{sujeito à} \begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=0}^{m} g_i(x)u_i \\ u = (u_1, \dots, u_m) : [0, T_f(u)] \to \mathbb{R}^m \text{ tal que} \\ |u_i(t)| \leq K(t), \; \forall t \in [0, T_f(u)] \qquad , i = 1, \dots, m \\ x(0) = A \\ x(T_f(u)) = B \end{cases}$$

onde:

(i) $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$

(ii) f, g_i, $i = 1, \dots, m$, são campos vetoriais de $\mathbb{R}^n$ analíticos com relação às duas variáveis

(iii) f, g_i, f_0, g_{0i}, $i = 1, \dots, m$, são funções de $\mathbb{R}^n$ na reta, analíticas com relação às duas variáveis

(iv) K é analítica e estritamente positiva.

(v) $u_i \in \operatorname{Mes}(\mathbb{R})$

Para aplicarmos o Princípio do Máximo de Pontryagin definimos a função:

$$\begin{aligned} H_\lambda : T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, p, u) &\longmapsto \left\langle p, f(x) + \sum_{i=0}^{m} g_i(x)u_i \right\rangle - \lambda \left(f_0(x) + \sum_{i=0}^{m} g_{0i}(x)u_i \right) \end{aligned}$$

onde $(x,p) \in T_x\mathbb{R}^n$ e λ é um parâmetro. Sabemos então, que toda trajetória ótima $(\bar{x},\bar{u}) : [0,\bar{T}] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ pode ser levantada ao fibrado tangente de modo que $H_\lambda(\bar{x}(\bar{T}),\bar{p}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T})) = 0$ e

$$\text{(Adj)} \begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt}(t) = \frac{\partial H_\lambda}{\partial p}(\bar{x}(t),\bar{p}(t),\bar{u}(t)) \\ \frac{d\bar{p}}{dt}(t) = -\frac{\partial H_\lambda}{\partial x}(\bar{x}(t),\bar{p}(t),\bar{u}(t)) \\ H_\lambda(\bar{x}(t),\bar{p}(t),\bar{u}(t)) = \sup\{H_\lambda(\bar{x}(t),\bar{p}(t),v) | v \in U\} \end{cases}$$

para quase todo $t \in [0,\bar{T}]$ e $\lambda \in \{0,1\}$. Além disso, $(\lambda,\bar{p}(t)) \neq 0$, q.t. $t \in [0,\bar{T}]$. Às soluções de (Adj) chamaremos de extremais, a p de variável adjunta e as equações (Adj) de equações adjuntas.

Note que se definirmos:

$$\bar{f} = (f_0, f) \qquad \bar{g}_i = (g_{0i}, g_i)$$
$$\bar{x} = (x_0, x) \qquad \bar{p} = (\lambda, p)$$

onde x_0 satisfaz

$$\dot{x}_0 = f_0(x) + g_0(x)u,$$

a hamiltoniana fica da forma $H_\lambda = \langle \bar{p}, \bar{f} \rangle + \sum_{i=i}^m \langle \bar{p}, \bar{g}_i \rangle u_i$ e valem:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \frac{\partial H_\lambda}{\partial \bar{p}} = \bar{f} + \bar{g}u \\ \dot{\bar{p}} &= -\frac{\partial H_\lambda}{\partial \bar{x}} = -\bar{p}\frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{i=1}^m \bar{p}\frac{\partial g_i}{\partial x}u_i. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Assim, para simplificar a notação, vamos cometer o abuso de denotar $\bar{f}$ por f. E, de maneira análoga, o mesmo abuso será cometido com relação a g_i, x e p. Note que o novo problema tem dimensão $n+1$.

Como a hamiltoniana H_λ é linear em u, fica claro do Princípio do Máximo de Pontryagin que $u_i(t) = \text{sign}\left(\langle p(t), g_i(x(t))\rangle\right) K(t)$ nos intervalos de tempos em que $\langle p(t), g_i(x(t))\rangle$ não se anula em quase todo instante t. Estes intervalos são chamados de intervalos não singulares e dizemos que o controle neste intervalo é não singular.

De maneira análoga, em intervalos em que $\langle p(t), g_i(x(t))\rangle$ se anula em quase todo t são chamados de intervalos singulares e dizemos que o controle é singular neste intervalo. Note que controles singulares não podem ser determinados pelo Princípio do Máximo de Pontryagin, mas sim pelas derivadas da função $\langle p(t), g_i(x(t))\rangle$.

Fica desse modo claro o papel central das funções $\langle p(t), g_i(x(t))\rangle$ e suas derivadas na síntese do controle ótimo em intervalos singulares. Veremos mais adiante que o conhecimento das distribuições geradas por elas definem a complexidade do problema e a possível ocorrência de Fuller. Estudaremos estas funções nas fronteiras de intervalos singulares e não singulares. Chamaremos o instante de tempo desta fronteira de *junção.*

Como mencionado, nos arcos singulares podemos calcular as derivadas com respeito a t do vetor coluna $[\langle p, g_i\rangle]_{i=1,\dots,m}$ até que possamos encontrar relações onde componentes do controle apareçam explicitamente. Em outras palavras, para cada $l \in \mathbb{N}$ definimos as matrizes $m \times m$:

$$B_l = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^l}{dt^l}\,[\langle p, g_i\rangle]_{i=1,\dots,m}\right)$$

e tomamos a primeira a não ser identicamente nula, B_k. Podemos então escrever o sistema:

$$0 = \frac{d^k}{dt^k}\,[\langle p, g_i\rangle]_{i=1,\dots,m} = A_k(x,p) + B_k(x,p)u$$

Se B_k for uma matriz não singular, então todos os controles estarão determinados. Caso contrário será possível calcular alguns controles, reduzir o problema e refazer o processo para um novo problema com menos controles.

Vale ressaltar que esta á uma visão ingênua do processo. Existem casos em que B_l é identicamente nula para todo l. Além disso, pode ocorrer de B_k tornar-se singular sobre as trajetórias de interesse. Essa discussão é melhor aprofundada em [4] e [5]. Quando for possível definir a matriz B_k, dizemos que o problema tem ordem $q = k/2$. E quando B_k não se tornar singular sobre uma trajetória também diremos que esta é de ordem q. Dar condições para que isto ocorra é um dos objetivos deste trabalho.

Robbins em [5] provou que a ordem de uma trajetória é um número natural (i.e., k é par) e que a matriz $(-1)^q B_{2q}$ é negativa semi-definida. Este resultado estende o critério de otimalidade de Legendre-Clebsch e por isso ficou conhecido conhecido como Condição de Legendre-Clebsch Generalizada (GLC)[1]. Quando a matriz for definida dizemos que ela satisfaz Condição de Legendre-

[1] Alguns autores, como em [6], afirmam que vale GLC para a ordem do problema, mas neste caso, considere o sistema:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = v_1\cos\theta + v_3\sin\theta && \dot{z} = v_3\cos\theta - v_1\sin\theta && \dot{\theta} = \Omega \\ &\dot{v}_1 = u_1 && \dot{v}_3 = u_2 && \dot{\Omega} = u_3. \end{aligned}$$

Independente do custo, a ordem deste problema é $\frac{3}{2}$. Entretanto, se o funcional a ser minimizado for $x^2 + z^2 + \theta^2$, é fácil de ver que, na origem, trajetória totalmente singular é uma solução ótima. Neste caso a matriz B_k se torna identicamente nula, não contradizendo o resultado quando considerado sobre uma trajetória em particular.

Clebsch Generalizada Estrita (GLCS).

O pequeno resultado abaixo é fundamental no cálculo de B_k. Versões deste simples lema foram obtido por diversos autores, inclusive em [4] para sistemas com uma única entrada. Sua extensão para múltiplas entradas é direta, mas por sua brevidade, a apresentamos a seguir.

Lema 1.0.1. *Seja h um campo de vetores diferenciável. Então ao longo de um extremal vale a igualdade:*

$$\frac{d}{dt}\langle p, h\rangle = \left\langle p, [f,h] + \sum_{i=1}^{m} u_i [g_i, h] \right\rangle.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\frac{d}{dt}\langle p, h\rangle = \langle \dot{p}, h\rangle + \left\langle p, \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} \right\rangle.$$

Usando as equações (1.1) e a linearidade do produto interno, a primeira parcela fica:

$$\langle \dot{p}, h\rangle = \left\langle p, -\frac{\partial f}{\partial x} h \right\rangle + \sum_{i=1}^{m} \left\langle p, -\frac{\partial g_i}{\partial x} \right\rangle u_i$$

e a segunda parcela:

$$\left\langle p, \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} \right\rangle = \left\langle p, \frac{\partial h}{\partial x} f \right\rangle + \sum_{i=1}^{m} \left\langle p, \frac{\partial h}{\partial x} g_i \right\rangle u_i$$

de onde segue o resultado. □

Então terminamos esta seção com três definições importantes.

Definição 1.0.2 (Analiticidade por partes)**.** *Uma função f da reta é dita analítica por partes em um intervalo (a,b), se para cada $t_c \in (a,b)$, existe $t_1 \in (a,t_c)$ e existe $t_2 \in (t_c,b)$, tais que f é analítica em (t_1,t_c) e em (t_c,t_2). Uma aplicação em $\mathbb{R}^n$ é analítica por partes em um intervalo (a,b) se cada uma de suas componentes o for.*

Definição 1.0.3 (Junção analítica)**.** *Uma junção é dita analítica se o controle ótimo é analítico por partes em alguma vizinhança da junção.*

Definição 1.0.4 (Junção analítica de ordem q)**.** *Em um problema de ordem q, dada uma trajetória com uma junção t_c de um arco singular com um arco não singular, dizemos que esta junção analítica é de ordem q se a matriz B_{2q} é não singular sobre a trajetória numa vizinhança da junção.*

Capítulo 2

Sobre a analiticidade de junções de arcos

Neste capítulo vamos estudar junções de arcos singulares com não singulares. Começamos estendendo um resultado a respeito da paridade da ordem da junção e, em seguida, estudando as distribuições geradas pelos campos do problema, damos critérios para existência do Fenômenos Fuller.

A fim de não sobrecarregar a notação, denotaremos A_{2q} e B_{2q} apenas por A e B, respectivamente.

2.1 A paridade da ordem da junção em problemas com múltiplos controles

Em 1971, McDanell e Powers [7] provaram um teorema relacionando a ordem do arco com a continuidade do controle e suas derivadas para problemas com um único controle. Alguma confusão em torno desde resultado aconteceu devido à possibilidade de B não ser identicamente nula, mas se anular sobre a trajetória em questão. Podemos, a partir desta discussão, definir ordem do arco e a ordem do problema de maneira diferente, como proposto em [4], mas o cálculo da ordem do arco, quando esta difere da ordem do problema, tem um tratamento muito mais complicado.

Suporemos então que B não é singular sobre a trajetória (veja a definição 1.0.4) e na seção seguinte daremos condições para isso.

Nos dedicaremos, a seguir, a dar uma extensão para o resultado de McDanell e Powers para problemas com múltiplos controles.

Suporemos que todos os controles do problema se tornam singular num mesmo instante t_c, i.e., t_c é uma junção para todos os controles simultaneamente. Quando não for este o caso, temos duas possibilidades: ou um dos controles já será singular e a demostração segue idêntica, ou saberemos que um controle é não singular e portanto sinal de uma função conhecida. Neste caso, se pudermos supor que esta função não se anula numa vizinhança da junção, redefinimos o sistema como um problema com menos entradas.

Teorema 2.1.1. *Seja t_c uma junção analítica de ordem q tal que no arco singular o controle satisfaz $\|u_i\| < K(t)$, $i = 1, \ldots, m$. Se r é o menor inteiro tal que $u^{(r)}$ é descontínuo em t_c, então $q + r$ é ímpar.*

Demonstração. Vamos denotar $\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t))$, onde $\phi_i(t) = \langle p(t), g_i(x(t))\rangle$, com $i = 1, \ldots, m$. Evidentemente, ϕ é de classe $\mathcal{C}^{2q+r-1}$ em t_c, e que ϕ é não nula numa vizinhança de t_c interceptada pelo interior do arco não singular.

Tome $\epsilon \neq 0$ tal que $t_c + \epsilon$ é um ponto da intersecção dessa vizinhança com o interior do arco não singular e $t_c - \epsilon$ é um ponto do arco singular. Isso define uma bola de raio $|\epsilon|$ e centro t_c, então, para ϵ suficientemente pequeno, da definição de ordem da junção, sabemos que B é definida negativa nesta bola, i.e., vale GLCS nesta vizinhança.

Sejam u_s a restrição do controle u ao arco singular e u_n a restrição ao arco não singular, denotamos

$$u_s^{(i)}(t_c) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} u^{(i)}(t_c - \epsilon)$$
$$u_n^{(i)}(t_c) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} u^{(i)}(t_c + \epsilon).$$

Definimos $k = 2q + r$. Como $\phi^{(i)}$ é contínua em t_c para $0 \leq i \leq k - 1$ e $\phi \equiv 0$ no arco singular, a primeira parcela não nula da fórmula de Taylor de ϕ em torno de t_c é a referente a $\phi^{(k)}$:

$$\phi(t_c + \epsilon) = \frac{\epsilon^k}{k!}\phi^{(k)}(t_c) + o(\epsilon^k).$$

Mas note que:

$$\phi^{(k)} = \frac{d^r \phi^{2q}}{dt^r} = \frac{d^r}{dt^r}\left(A + Bu\right),$$

logo:

$$\phi(t_c + \epsilon) = \frac{\epsilon^k}{k!}\left(A^{(r)}(t_c) + \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} B^{(r-i)}(t_c) u_n^{(i)}(t_c)\right) + o(\epsilon^k). \tag{2.1}$$

Mas no arco singular

$$0 = \phi^{(2q)} = A + Bu_s \Rightarrow A = -Bu_s$$

de onde

$$A^{(r)}(t_c) = -\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} B^{(r-i)}(t_c) u_s^{(i)}.$$

Substituindo na equação (2.1):

$$\phi(t_c+\epsilon) = \frac{\epsilon^k}{k!}\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}B^{(r-i)}(t_c)\left(u_n^{(i)}(t_c)-u_s^{(i)}(t_c)\right)\right)+o(\epsilon^k)$$

Mas como $u_n^{(i)}(t_c) = u_s^{(i)}(t_c)$ para $0 \le i \le r-1$, obtemos finalmente:

$$\phi(t_c+\epsilon) = \frac{\epsilon^k}{k!}B(t_c)\left(u_n^{(r)}(t_c)-u_s^{(r)}(t_c)\right)+o(\epsilon^k). \tag{2.2}$$

Seja o vetor $\sigma = (\operatorname{sign}(\phi_1(t_c+\epsilon)), \ldots, \operatorname{sign}(\phi_m(t_c+\epsilon)))$. Note que, uma vez que a junção é analítica, σ é constante numa vizinhança da junção interceptada pelo arco não singular. Assim, do Princípio do Máximo de Pontryagin, sabemos que no arco não singular $u_n(t) = \sigma K(t)$, de onde $u_n^{(i)}(t_c) = \sigma K^{(i)}(t_c)$, $i = 0, \ldots, r$. Agora considere a expansão:

$$\begin{aligned}
\sigma K(t_c-\epsilon) - u(t_c-\epsilon) &= \sum_{i=0}^{r}\frac{(-\epsilon)^i}{i!}\left(\sigma K^{(i)}(t_c)-u_s^{(i)}(t_c)\right)+o(\epsilon^r)\\
&= \sum_{i=0}^{r}\frac{(-\epsilon)^i}{i!}\left(u_n^{(i)}(t_c)-u_s^{(i)}(t_c)\right)+o(\epsilon^r)\\
&= \frac{(-1)^r\epsilon^r}{r!}\left(u_n^{(r)}(t_c)-u_s^{(r)}(t_c)\right)+o(\epsilon^r).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

de onde concluímos que

$$u_n^{(r)}(t_c)-u_s^{(r)}(t_c) = \frac{(-1)^r r!}{\epsilon^r}\left(\sigma K(t_c-\epsilon)-u(t_c-\epsilon)\right)+o(\epsilon^r).$$

Substituindo esse resultado na equação (2.2), obtemos:

$$\phi(t_c+\epsilon) = \frac{(-1)^r r!\epsilon^{2q}}{k!}B(t_c)\left(\sigma K(t_c-\epsilon)-u(t_c-\epsilon)\right)+o(\epsilon^k).$$

Agora note que σ foi definido de modo que $\langle\phi(t_c+\epsilon), \sigma K(t_c-\epsilon)-u(t_c-\epsilon)\rangle$ é positivo. Logo, denotando $v = \sigma K(t_c-\epsilon)-u(t_c-\epsilon)$,

$$0 < \langle v, \phi(t_c+\epsilon)\rangle = \left\langle v, \frac{(-1)^r r!\epsilon^{2q}}{k!}B(t_c)v + o(\epsilon^k)\right\rangle.$$

de onde concluímos que:

$$0 < (-1)^r\langle v, B(t_c)v\rangle. \tag{2.4}$$

Note que cada componente do vetor v é diferente de zero, pois por hipótese no arco singular $\|u_i\| < K(t)$, $i = 1, \ldots, m$. Então como $(-1)^q B(t_c)$ é definida negativa sabemos que $\langle v, (-1)^q B(t_c) v\rangle < 0$. Então multiplicando a inequação (2.4) por esta quantidade negativa, obtemos:

$$0 > (-1)^r \langle v, B(t_c)v\rangle . \langle v, (-1)^q B(t_c) v\rangle = (-1)^{q+r} \langle v, B(t_c)v\rangle^2$$

Assim, concluímos finalmente que $(-1)^{q+r} < 0$. Logo, $q + r$ é ímpar. □

Corolário 2.1.2. *Nas hipóteses do teorema, se q é par e $A(t_c) + K(t_c)B(t_c)v \neq 0$ para todo $v \in \{-1, 1\}^m$, então a junção é não analítica.*

Demonstração. Basta notar que neste caso o controle será descontínuo, i.e., $r = 0$. De fato, existe $v \in \{-1, 1\}^m$ tal que o controle no arco não singular é $u(t) = vK(t)$, assim, para este v, vale $A(t_c) + B(t_c)u_n(t_c) = A(t_c) + K(t_c)B(t_c)v \neq 0 = A(t_c) + B(t_c)u_s(t_c)$. □

Corolário 2.1.3. *Nas hipóteses do teorema, se q é par, $A \equiv 0$, então a junção é não analítica.*

Demonstração. De fato, o controle será nulo no arco singular e não nulo no arco não singular, portanto descontínuo. □

2.2 Uma nova extensão para o exemplo de Fuller

O problema apresentado por Fuller em 1963 foi amplamente estudado e algumas extensões foram propostas para que resultados obtidos a partir de grupos de simetria fossem reaproveitados. Todas estas extensões, porém, continuavam com um problema de uma única entrada. Além disso, uma análise do problema original deixa claro estas extensões não preservam suas características como um problema de mecânica hamiltoniana.

Neste sentido, propomos uma nova extensão do exemplo de Fuller e mostramos, utilizando o resultado da seção anterior, a existência da acumulação de descontinuidades.

O problema originalmente apresentado por Fuller é:

$$\text{minimizar} \int_0^{T_f(u)} \frac{x^2}{2}\, dt$$

$$\text{sujeito à} \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = u \\ u \in \text{Mes}(\mathbb{R}), \qquad |u(t)| \leq 1, \ \forall t \in [0, T_f(u)] \\ (x, v)(0) = A \\ (x, v)(T_f(u)) = B \end{cases}$$

Note que este problema pode ser interpretado como o movimento de um ponto material na reta e com aceleração limitada. Isso é descrito no formalismo hamiltoniano como $H(x,v) = T(x,v)+P(x)$, onde:

$$T(x,v) = \frac{v^2}{2} \qquad\qquad P(x) = -u$$

e o funcional a ser minimizado é essencialmente o quadrado da norma de x.

Então uma generalização deste problema é a generalização das energias cinética e potencial:

$$T(x,v) = \frac{v^\intercal M_1 v}{2} \qquad\qquad P(x) = -u^\intercal M_2 x$$

onde $(x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, M_1 e M_2 são matrizes $n \times n$ simétricas e constantes, M_1 é positiva definida, M_2 é inversível e o funcional a minimizar é $\frac{\|x\|^2}{2}$. Assim o problema fica:

$$\text{minimizar} \int_0^{T_f(u)} \frac{\|x\|^2}{2}\, dt$$

$$\text{sujeito à} \begin{cases} \dot{x} = M_1 v \\ \dot{v} = M_2 u \\ u \in \operatorname{Mes}(\mathbb{R}^n), \\ |u_i(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, T_f(u)],\ i = 1, \dots, n \\ (x,v)(0) = A \\ (x,v)(T_f(u)) = B \end{cases}$$

Então a hamiltoniana estendida do Princípio do Máximo de Pontryagin é:

$$H_\lambda(x,p,u) = p_1^\intercal M_1 v + p_2^\intercal M_2 u - \lambda \frac{\|x\|^2}{2}$$

com $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. E assim, $u = \operatorname{sign}(M_2 p_2)$ nos arcos não singulares e as equações adjuntas ficam:

$$(\text{Adj}) \begin{cases} \dot{x} = M_1 v & \dot{v} = M_2 u \\ \dot{p}_1 = x & \dot{p}_2 = -M_1 p_1. \end{cases}$$

Note que se estivermos parados na origem o controle ótimo é $u \equiv 0$. Portanto qualquer trajetória que chega na origem fora dos eixos coordenados pode ser estendida no tempo para um arco totalmente singular. Por outro lado, em um arco singular, $\phi = M_2 p_2 \equiv 0$ e assim:

$$0 = \phi^{(1)} = M_2 \dot{p}_2 = -M_2 M_1 p_1 \qquad 0 = \phi^{(3)} = -M_2 M_1 \dot{x} = -M_2 M_1 M_1 v$$

$$0 = \phi^{(2)} = -M_2 M_1 \dot{p}_1 = -M_2 M_1 x \qquad 0 = \phi^{(4)} = -M_2 M_1 M_1 \dot{v} = -M_2 M_1 M_1 M_2 u.$$

Assim $A = 0$ e $B = -M_2 M_1 M_1 M_2$. Note que B é inversível e, portanto, a ordem do arco é $q = 2$. Logo, pelo corolário 2.1.3, concluímos que o controle não é analítico por partes na junção. Adicionalmente, note que $(-1)^2 B$ é de fato uma matriz definida negativa, atendendo ao critério de otimalidade GLC.

Fica assim apresentado um exemplo de Fenômeno Fuller em um problema com múltiplos controles. Pudemos provar facilmente a acumulação de descontinuidades pois conhecíamos A e B e elas verificavam as condições necessárias para isso.

Em um problema genérico devemos encontrar outras formas de fazer afirmações sobre A e B. Em [4] adotamos uma abordagem numérica. Porém uma análise mais cuidadosa dos campos permite enunciar resultados analíticos que dão informações sobre estas matrizes, garantindo, em alguns casos, a existência de Fenômeno Fuller.

2.3 O papel das distribuições geradas pelos campos vetoriais

Nesta seção vamos usar o lema 1.0.1 para calcular formas analíticas de A e B e com isso em mãos ficará claro o papel de distribuições geradas pelos campos do problema de controle ótimo.

Vamos considerar o sistema com uma dimensão aumentada como em 1.1, com $H_\lambda = \langle p, f\rangle + \sum_{i=1}^m \langle p, g_i\rangle u_i$ e $\phi = (\langle p, g_1\rangle, \ldots, \langle p, g_m\rangle)$.

A primeira derivada de ϕ é da forma:

$$\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\langle p, g_1\rangle \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\langle p, g_m\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle p, \mathrm{ad}_f\, g_1 + \sum_{i=1}^m [g_i, g_1]\, u_i \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle p, \mathrm{ad}_f\, g_m + \sum_{i=1}^m [g_i, g_m]\, u_i \right\rangle \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Se esta derivada não depender explicitamente de u, i.e., $[g_i, g_j] = 0$, $\forall i, j$, então podemos derivar mais uma vez, obtendo:

$$\phi^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\left\langle p, \mathrm{ad}_f\, g_1 \right\rangle \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\left\langle p, \mathrm{ad}_f\, g_m \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle p, \mathrm{ad}_f^2\, g_1 + \sum_{i=1}^m \left[g_i, \mathrm{ad}_f\, g_1\right] u_i \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle p, \mathrm{ad}_f^2\, g_m + \sum_{i=1}^m \left[g_i, \mathrm{ad}_f\, g_m\right] u_i \right\rangle \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Procedendo com estas derivadas até encontrar um expressão que dependa explicitamente de u obtemos:

$$\phi^{(k)} = \begin{bmatrix} \left\langle p, \mathrm{ad}_f^k\, g_1 + \sum_{i=1}^m \left[g_i, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_1\right] u_i \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle p, \mathrm{ad}_f^k\, g_m + \sum_{i=1}^m \left[g_i, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_m\right] u_i \right\rangle \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Reescrevendo este vetor obtemos $\phi^{(k)} = A + Bu$ onde:

$$A = \begin{bmatrix} \left\langle p, \mathrm{ad}_f^k\, g_1 \right\rangle \\ \left\langle p, \mathrm{ad}_f^k\, g_2 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle p, \mathrm{ad}_f^k\, g_m \right\rangle \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \left\langle p, \left[g_1, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_1\right] \right\rangle & \left\langle p, \left[g_2, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_1\right] \right\rangle & \cdots & \left\langle p, \left[g_m, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_1\right] \right\rangle \\ \left\langle p, \left[g_1, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_2\right] \right\rangle & \left\langle p, \left[g_2, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_2\right] \right\rangle & \cdots & \left\langle p, \left[g_m, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_2\right] \right\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle p, \left[g_1, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_m\right] \right\rangle & \left\langle p, \left[g_2, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_m\right] \right\rangle & \cdots & \left\langle p, \left[g_m, \mathrm{ad}_f^{k-1}\, g_m\right] \right\rangle \end{bmatrix}.$$

Note que obtivemos muitas informações durante estes cálculos. Em particular sabemos que $\left\langle p, \mathrm{ad}_f^l\, g_i \right\rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k-1$ e t do arco singular. Além disso, já sabíamos, uma vez que estamos em um arco singular, que $\langle p, g_i \rangle = 0$. E, se o tempo final for livre, o Princípio do Máximo de Pontryagin garante que H_λ se anula sobre a trajetória, isto, mais o fato de estarmos em um arco singular, implica que $\langle p, f \rangle = 0$.

Vemos, então, que os campos do conjunto $\left\{f,\ \mathrm{ad}_f^l\, g_i \mid i = 1, \ldots, m;\ l = 0, \ldots, k-1\right\}$ são todos ortogonais a p.

Assim, se definirmos a distribuição $\Delta = \mathrm{span}\left\{f,\ \mathrm{ad}_f^l\, g_i \mid i = 1, \ldots, m;\ l = 0, \ldots, k-1\right\}$, fica claro que sua dimensão muito nos conta sobre a complexidade do problema. De fato, é claro que $\Delta \subset p^\perp$ e, lembrando que aumentamos a dimensão em 1 colocando o custo na primeira variável, $p \in \mathbb{R}^{n+1}$. Então, se $\dim(\Delta) = n+1$, concluímos que $p \equiv 0$, contradizendo o critério de otimalidade do Princípio do Máximo de Pontryagin.

Por outro lado, se $\dim(\Delta) = n$, então descrevemos completamente o espaço ortogonal a p e, portanto, sabemos a direção de p. Isto essencialmente nos dá toda a informação necessária para resolver completamente o problema de controle ótimo.

Uma questão fundamental na análise do problema é garantir a inversibilidade da matriz B, pois isto permite que definamos a ordem do arco, por essa razão damos a seguinte definição.

Definição 2.3.1. *Seja M uma matriz da forma:*

$$B = \begin{bmatrix} \langle p, v_{11} \rangle & \langle p, v_{12} \rangle & \cdots & \langle p, v_{1l} \rangle \\ \langle p, v_{21} \rangle & \langle p, v_{22} \rangle & \cdots & \langle p, v_{2l} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle p, v_{l1} \rangle & \langle p, v_{l2} \rangle & \cdots & \langle p, v_{ll} \rangle \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Se os coeficientes constantes desta matriz e os vetores v_{ij} que pertencerem a Δ (e portanto resultarem em um coeficiente nulo) garantirem que M é inversível diremos que M é Δ-inverso-decidível.

Agora é natural o enunciado do teorema abaixo.

Teorema 2.3.2. *Se uma junção tem ordem q par, $\mathrm{ad}_f^{2q}\, g_i \in \Delta$ e as B é Δ-inverso-decidível então existe Fuller na junção.*

Demonstração. Com a discussão acima a demonstração deste teorema é trivial. Basta notar que estamos nas condições do corolário 2.1.3. □

2.4 Fenômeno Fuller em sistema hamiltonianos

Muitos problemas de controle originam-se com a introdução de forças externas a um sistema mecânico. Estas forças tornam-se assim os possíveis controles do sistema e, como tais, tem limitações práticas. Assim, realizar tarefas otimizando critérios dados, naturalmente trazem estes problemas para à luz das técnicas de controle ótimo.

Como um exemplo disto, já vimos neste trabalho que o exemplo originalmente proposto por Fuller pode ser estendido no contexto hamiltoniano para um novo exemplo de Fenômeno Fuller com múltiplos controles. Veremos nesta seção que, sob condições não muito restritivas, este exemplo pode ser generalizado, fornecendo um critério simples para decidir sobre a acumulação de descontinuidades em uma classe de problemas de controle de origem hamiltoniana.

Considere a função hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{v^\intercal T v}{2} + Q(x) - x^\intercal M u$$

onde $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^n$. Suponha que, sujeitos a esta dinâmica, queremos partir de um ponto $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e chegar na origem minimizando um funcional $c : x \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \int_0^{T_f(u)} c(x)\, dt \\ &\text{sujeito à} \begin{cases} \dot{x} = Tv \\ \dot{v} = P(x) + Mu \\ u \in \operatorname{Mes}(\mathbb{R}^n), \\ |u_i(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, T_f(u)],\ i = 1, \dots, n \\ (x, v)(0) = (x_0, v_0) \\ (x, v)(T_f(u)) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

onde $P = -\frac{\partial Q}{\partial x}$. Vamos supor que:

(i) T é simétrica positiva definida;

(ii) M é simétrica e inversível;

(iii) Q e c são aplicações $\mathcal{C}^\infty$;

(iv) P é nula na origem;

(v) $c(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(vi) $\frac{\partial c}{\partial x}(0) = 0$ e $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ é definida positiva.

Note que, uma vez que a origem é um ponto de equilíbrio, assim que uma trajetória ótima chega a ela, todos os controles se anulam, portanto a trajetória possui um arco finalmente singular. Além disso, toda solução deste problema de controle ótimo pode ser estendida indefinidamente no tempo sem alterar o custo, bastando manter o controle identicamente nulo.

Antes de procedermos com a abordagem analítica, observe que se chegarmos à origem num instante t por um arco não singular então certamente t seria uma junção e o controle seria descontínuo nela. Juntando isso ao fato da ordem do arco singular ser 2, como mostraremos a seguir, podemos concluir pelo teorema 2.1.1 que existe Fenômeno Fuller nesta junção.

Vamos agora aplicar as técnicas discutidas na seção anterior. Para isso consideramos os campos vetoriais que descrevem o problema:

$$f(x_0, x, v) = \begin{bmatrix} c(x) \\ Tv \\ P(x) \end{bmatrix} \qquad\qquad g_i(x_0, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Me_i \end{bmatrix}$$

e a função a hamiltoniana do Princípio do Máximo de Pontryagin:

$$H(x_0, x, v, p_0, p_1, p_2, u) = -p_0 c(x) + \langle p_1, Tv\rangle + \langle p_2, P(x)\rangle - \langle p_2, Mu\rangle$$

Calculando os primeiros produtos de Lie dos campos obtemos:

$$[f, g_i] = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial c}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & \frac{\partial P}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ TMe_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ TMe_i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad [g_j, g_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É interessante o fato destes primeiros produtos, juntamente com os campos que definem o sistema, já nos darem praticamente toda informação sobre o problema. De fato, sabemos que o espaço vetorial gerado por $\{f, g_i, \mathrm{ad}_f\, g_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ está contido em $(p_0, p_1, p_2)^\perp$ e tem dimensão maior ou igual a $2n$. Se a dimensão for $2n + 1$, então o arco singular não pode ser ótimo pois neste caso (p_0, p_1, p_2) será o vetor nulo, contradizendo o Princípio do Máximo de Pontryagin.

Por outro lado, a dimensão é $2n$ se e só se f for combinação linear dos campos $g_i, \mathrm{ad}_f\, g_i$, $i = 1, \ldots, n$, pois estes são sempre linearmente independentes. E como a primeira coordenadas destes campos é nula, também deve ser nula a primeira componente de f, e portanto c deve se anular no arco singular. Neste caso, o arco é singular se e só se $x = 0$, pois c anula-se apenas na origem por hipótese. Isto implica que no arco singular $0 = \dot{x} = Tv$, logo, como T é inversível, $v = 0$. De maneira análoga, $0 = \dot{p}_2 = Tp_1$, logo no arco singular p_1 também é nulo e $p_0 = 1$.

Agora já temos uma base inteira para $p^\perp$, portanto $\Delta = \mathrm{span}\left\{f, g_i, \mathrm{ad}_f\, g_i \mid i = 1, \ldots, n\right\}$.

O cálculo dos demais produtos de Lie, apesar de elementar, envolve expressões longas e muitas delas não adicionam informação relevante à nossa análise. Façamos então uma pequena observação.

Seja $h(x_0, x, v)$ campo vetorial que não depende de x_0. Então $[f, h]$ é da seguinte forma:

$$[f,h] = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ Tv \\ P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial c}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & \frac{\partial P}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} *Tv + *P - \frac{\partial c}{\partial x} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

onde o símbolo "*" representa matrizes arbitrátias que dependem de (x, v).

Como todos os campos do problema não dependem de x_0, aplicamos este resultado a eles e, uma vez que no arco singular $*Tv + *P - \frac{\partial c}{\partial x}*$ sempre se anula, concluímos que $\langle p, \mathrm{ad}_f^l \, g_i \rangle \in \Delta$ em todo o arco singular. Agora, para podermos aplicar o corolário 2.1.3 basta verificar que a matriz B é não singular.

Para isso podemos calcular uma forma analítica para B usando os produtos de Lie como na seção anterior, ou diretamente, como na generalização do exemplo de Fuller. A segunda estratégia é mais elementar e, usando que $P(0) = 0$, obtemos $B = -MT\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}TM$ e, portanto, o arco singular tem ordem 2. Note que $(-1)^2 B$ é definida negativa, em concordância com GLC. Finalmente concluímos que a junção não pode ser analítica.

Observação 2.4.1. Mesmo se T e M dependessem de x, ainda teríamos uma descrição completa de $p^\perp$ (desde que estas fossem inversíveis para todo x). Entretanto não poderíamos garantir que a ordem do problema é par e que vale $GLCS$ e portanto não necessariamente teríamos acumulação de descontinuidades.

Ainda assim, como o cálculo da ordem do problema é elementar e podemos descrever completamente $p^\perp$, o estudo do Fenômeno Fuller para sistemas hamiltonianos se resume a verificar que B é Δ-inverso-decidível. △

Observação 2.4.2. A hipótese de $c(0) = 0$ é de fundamental importância, caso contrário a dimensão de Δ seria sempre $n + 1$ e, portanto, p seria identicamente nulo. Neste caso, um arco tal que $Mp_2 = 0$ não seria uma solução ótima.

Uma consequência direta desta observação é que sistemas hamiltonianos de controle nunca tem um arco totalmente singular, i.e., $Mp_2 = 0$, se o funcional a ser otimizado não é nulo no ponto que desejamos atingir. Em particular, se queremos minimizar o tempo, um arco totalmente singular não pode ser ótimo pois neste caso $c(x) \equiv 1$ e $\dim(\Delta) = n + 1$. Este fato já era conhecido (ver [8]), porém esta abordagem traz generalização e uma interpretação geométrica mais clara. △

Observação 2.4.3. Claramente as técnicas apresentadas até aqui podem ser utilizadas em sistemas hamiltonianos que não possuam controle em todas variáveis v. Por isso é a tentadora estratégia de, supondo um dos controles não singular, tirar conclusões sobre a ordem do arco singular. Mas é preciso ter cuidado com o fato de que neste caso a nova matriz B pode ser descontínua na junção, invalidando a demonstração do teorema 2.1.1.

Se, por outro lado, for possível garantir a continuidade dos controles não singulares numa vizinhança da junção, podemos utilizar este fato para conseguir provar que certos campos não são ortogonais a p. De fato, este controle será sinal de uma função da forma $\langle p, Me_i \rangle \neq 0$. Então se temos um campo h tal que $h \in \Delta_i \setminus \Delta$, onde $\Delta_i = \operatorname{span}\{Me_i, \Delta\}$, então certamente $\langle p, h \rangle \neq 0$.

$\triangle$

Capítulo 3

Algumas observações sobre veículo autônomo subaquático

O controle em tempo ótimo de um veículo autônomo subaquático é um exemplo prático interessante por possuir diversas características desafiadoras. Este sistema, cuja dedução pode ser vista em [9], é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1 \cos\theta + v_3 \sin\theta \\ \dot{z} = v_3 \cos\theta - v_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} = \Omega \\ \dot{v}_1 = -v_3 \Omega \dfrac{m_3}{m_1} + \dfrac{u_1}{m_1} \\ \dot{v}_3 = v_1 \Omega \dfrac{m_1}{m_3} + \dfrac{u_2}{m_3} \\ \dot{\Omega} = v_1 v_3 \dfrac{m_3 - m_1}{I} + \dfrac{u_3}{I} \end{cases} \tag{3.1}$$

onde θ é o ângulo que o veículo está com relação ao eixo x do referencial inercial, Ω a velocidade angular, v_1 e v_3 a velocidade horizontal e vertical do submarino com relação ao referencial móvel (com origem no centro de massa do submarino). O controle $u = (u_1, u_2, u_3)$ satisfaz $|u_i| \leq 1$, para $i = 1, 2, 3$. As massas são tais que $m_1 < m_3$ e I é a inércia.

O problema de minimizar o tempo de trajetórias que vão de um ponto $X_0 = (x_1, z_0, 0, 0, 0, 0)$ a um ponto $X_F = (x_2, z_0, 0, 0, 0, 0)$ tem sido objeto de estudo de diversos trabalhos nos últimos anos. Por exemplo [8], [9], [10] e [11]. A presença ou não de Fenômeno Fuller em junções ainda é desconhecida. Indícios numéricos foram apresentados em [4] e, como veremos, serão reforçados por resultados analíticos obtidos nas seções anteriores.

Na notação adotada neste trabalho temos que $f(X) + g_1(X)u_1 + g_2(X)u_2 + g_3(X)u_3$, onde

$X = (x_0, x, z, \theta, v_1, v_2, \Omega)$,

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \cos\theta + v_3 \sin\theta \\ v_3 \cos\theta - v_1 \sin\theta \\ \Omega \\ -v_3 \Omega \frac{m_3}{m_1} \\ v_1 \Omega \frac{m_1}{m_3} \\ v_1 v_3 \frac{m_3 - m_1}{I} \end{bmatrix}$$

e $g_1 = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{m_1}, 0, 0)$, $g_2 = (0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{m_3}, 0)$ e $g_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{I})$. A hamiltoniana do Princípio do Máximo de Pontryaginfica:

$$H = \langle p, f \rangle + \frac{p_4}{m_1} u_1 + \frac{p_5}{m_3} u_2 + \frac{p_6}{I} u_3 - p_0$$

de onde concluímos que o controle ótimo é $u_1 = \text{sign}\,(p_4)$, $u_2 = \text{sign}\,(p_5)$ e $u_3 = \text{sign}\,(p_6)$, ou ainda, $u_i = \text{sign}\,(p_{i+3})$

A primeira coisa que podemos afirmar é que, pela observação 2.4.2, este sistema não pode ser singular em todos os controles ao mesmo tempo.

Supondo que apenas um dos controles seja não singular, digamos u_i, podemos calcular a ordem do problema com relação aos outros dois controles singulares, digamos u_j e u_k, onde $i \neq j \neq k \neq i$. Cálculos simples nos levam a concluir que, neste caso, a ordem do problema é 1 e que a matriz B é da forma:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} p_{i+3}$$

onde p_{i+3} é não nulo por hipótese. Note que $(-1)^1 B$, mesmo que p_{i+3} fosse descontínua, não é negativa, portanto contradiz GLC. Então, apesar de trajetórias deste tipo terem sido estudadas em [8], não existem trajetórias ótimas com arco singular em dois controles.

Nos resta o caso com um único controle singular. Em [4], estudamos numericamente este caso para u_3 e obtivemos indícios de que neste caso os controles u_1 e u_2 eram constantes nas junções de u_3, de modo que pudemos calcular a ordem do problema $q = 2$. Além disso, vimos que B não se anula e tão pouco $A \pm B$, de modo pudemos concluir que a ordem é par e o controle descontínuo, levando ao indício numérico de que existe Fuller nas junções de u_3.

Mesmo sob a hipótese de que u_1 e u_2 é constante numa vizinhança da junção de u_3, a distribuição Δ obtida é de dimensão 5. Como estamos trabalhando em um problema com dimensão 7, ainda não pudemos descrever completamente o espaço $p^{\perp}$.

Então a complexidade do estudo deste problema vem exatamente do fato de termos uma direções desconhecida de $p^{\perp}$, nos impossibilitando de fazer afirmações analíticas sobre A e B.

Como estamos supondo que os controles não singulares são constantes, podemos utilizar a a observação 2.4.3, isto é, definimos duas novas distribuições $\Delta_i = \operatorname{span}\{g_i, \Delta\}$, $i = 1, 2$, e verificamos se os campos que definem A e B pertencem a alguma delas. Porém, isso nunca é verificado.

Vemos que o desconhecimento de uma única direção de $p^{\perp}$ impossibilita, com as técnicas conhecidas, concluir analiticamente a presença ou não de Fenômeno Fuller.

Capítulo 4

Conclusões

Estendemos resultados antes conhecidos apenas para problemas com uma única entrada e obtivemos novos avanços no estudo dos sistemas de controle ótimo. Com estes resultados, descobrimos uma classe de sistemas hamiltonianos que, apesar de comuns e essencialmente simples, possuem soluções com comportamento complicado, tanto do ponto de vista teórico quanto prático.

A abordagem apresentada permite condensarmos os fatos conhecidos sobre as trajetórias singulares em uma descrição puramente geométrica. Com esta visão de um dado problema, podemos facilmente compreender sua complexidade e, possivelmente, concluir a necessidade de mais hipóteses para que possamos fazer afirmações sobre suas trajetórias, pois a teoria por si só não é capaz de dar informações sobre os problemas de interesse de maneira genérica.

Por isso, fica claro que os problemas de controle ótimo ainda precisam ser melhor compreendidos e novos critérios de otimalidade apresentados. Em particular, o Fenômeno Fuller continua a desafiar as técnicas conhecidas.

Referências Bibliográficas

[1] PONTRYAGIN, L. S. et al. *Mathematical Theory of Optimal Processes (Classics of Soviet Mathematics)*. [S.l.]: Gordon and Breach Science, 1962.

[2] FULLER, A. T. Study of an optimum non-linear control system. *Journal of Electronics and Control*, v. 15, p. 63–71, 1963.

[3] KUPKA, I. A. K. The ubiquity of fuller's phenomenon. In: *Nonlinear controllability and optimal control*. New York: Dekker, 1990, (Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., v. 133). p. 313–350.

[4] ODA, E. *Fenômeno Fuller em problemas de controle ótimo: trajetórias em tempo mínimo de veículos autônomos subaquáticos*. Dissertação (Mestrado) — IMEUSP - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

[5] ROBBINS, H. M. A generalized legendre-clebsch condition for the singular cases of optimal control. *IBM J. Res. Develop.*, v. 11, n. 4, p. 361–372, 1967.

[6] LEWIS, R. M. Definitions of order and junction conditions in singular optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, v. 18, n. 1, p. 21–32, 1980. ISSN 0036-1402.

[7] MCDANELL, J. P.; POWERS, W. F. Necessary conditions for joining optimal singular and nonsingular subarcs. *SIAM J. Control*, v. 9, p. 161–173, 1971. ISSN 1095-7138.

[8] CHYBA, M.; LEONARD, N. E.; SONTAG, E. D. Singular trajectories in multi-input time-optimal problems: application to controlled mechanical systems. *J. Dynam. Control Systems*, v. 9, n. 1, p. 103–129, 2003. ISSN 1079-2724.

[9] CHYBA, M.; LEONARD, N. E.; SONTAG, E. D. Optimality for underwater vehicles. *Decision and Control. Proc. 40th IEEE Conference on*, v. 5, p. 4204–4209, 2001.

[10] CHYBA, M. Underwater vehicles: a surprising non time-optimal path. *Decision and Control. Proc. 42nd IEEE Conference on*, v. 3, p. 2750–2755, 2003. ISSN 0191-2216.

[11] CHYBA, M.; SUSSMANN, H.; MAURER, G. V. H. Underwater vehicles: the minimum time problem. *Decision and Control. Proc. 43rd IEEE Conference on*, v. 2, p. 1370–1375, 2004. ISSN 0191-2216.

[12] ISIDORI, A. *Non linear control systems: an introduction.* 2. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 479 p.

[13] KUPKA, I. *Introduction to the theory of systems.* 1. ed. Brasil: IMPA, 1986. 123 p.

[14] NIJMEIJER, H. *Nonlinear dynamical control systems.* New York: Springer-Verlag, 1990. 467 p.

[15] POWERS, W. F. On the order of singular optimal control problems. *J. Optim. Theory Appl.*, v. 32, n. 4, p. 479–489, 1980. ISSN 0022-3239.

[16] ZABCZYK, J. *Mathematical control theory: an introduction.* Boston: Birkhäuser, 1992. 260 p.

[17] MACFARLANE, A. Obituary: Tom Fuller: a memoir. *Internat. J. Control*, v. 73, n. 6, p. 457–463, 2000. ISSN 0020-7179. Biographical notes by Malcolm C. Smith.

[18] BELL, D. J. Optimality conditions at junctions of singular and nonsingular controls. *J. Optim. Theory Appl.*, v. 78, n. 1, p. 1–8, 1993. ISSN 0022-3239.

[19] BORISOV, V. F. Fuller's phenomenon: review. *J. Math. Sci. (New York)*, v. 100, n. 4, p. 2311–2354, 2000. ISSN 1072-3374. Dynamical systems, 8.

[20] ODIA, A.; BELL, D. J. Junction point on partially singular trajectories. *Internat. J. Control*, v. 85, n. 12, p. 1996–2003, 2012. ISSN 0020-7179.

[21] MEESOMBOON, A.; BELL, D. J. Junction points in singular optimal control. *Internat. J. Control*, v. 75, n. 14, p. 1049–1053, 2002. ISSN 0020-7179.