

**Subgrupos maximais de
grupos de Lie compactos e
quebra de simetria no código genético**

Paola Andrea Gaviria Kassama

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Frank Michael Forger**

São Paulo, dezembro de 2011

**Subgrupos maximais de
grupos de Lie compactos e
quebra de simetria no código genético**

Versão original da tese apresentada pela aluna Paola
Andrea Gaviria Kassama

*A meu filho e esposo,
Matheus e Jorge.*

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Michael Forger, meu orientador, pela dedicação, compreensão e tempo despendido ao longo desta jornada. Seu vasto e apurado conhecimento é um incentivo para meu crescimento acadêmico e tornou possível a realização desta tese.

Ao Prof. Dr. Fernando Martins Antoneli Júnior, que com seu intelecto e prestatividade incondicional me ajudou no decorrer deste trabalho.

Ao meu pequeno Matheus, que trouxe tanta luz e felicidade para minha vida, me brindando harmonia nos momentos tumultuosos.

Ao meu esposo Jorge, pelo amor, os dias vividos juntos, seu apoio e companheirismo.

À minha mãe e minha família na Colômbia que sempre torce e acredita em mim.

À minha família no Brasil, pelo apoio constante e incondicional.

A todos meus amigos do IME, pelo camaradagem.

Resumo

Esta tese visa dar uma contribuição ao projeto de busca de modelos algébricos para a evolução do código genético, iniciada por Hornos e Hornos [19]. Estendendo resultados obtidos anteriormente, resolvemos aqui o problema de classificar os possíveis esquemas de quebra de simetria que reproduzam as degenerescências do código genético, baseados em grupos de Lie compactos de posto baixo e através de cadeias de subgrupos maximais. A principal novidade é a inclusão sistemática de subgrupos que não são conexos. Como ponto de partida, usamos a lista conhecida de grupos de Lie compactos simples que possuem representações de códons, ou seja, representações irredutíveis de dimensão 64 (veja a Tabela 3), e aplicamos em seguida a classificação dos subgrupos maximais dos grupos de Lie compactos (conexos ou não) obtida em um extenso trabalho anterior [5], para a construção das cadeias. Este processo de construção de cadeias procede em passos, cada um dos quais consiste em encontrar os subgrupos maximais de um grupo de Lie compacto (que a partir do segundo passo pode deixar de ser conexo) e aplicar regras de ramificação, as quais disciplinam a decomposição de uma representação irredutível de um grupo, quando restrita a um determinado subgrupo, em representações irredutíveis deste subgrupo. Cabe salientar que, devido ao fato de que estamos lidando com grupos que não são necessariamente conexos, esta abordagem requer combinar métodos da teoria de grupos finitos com técnicas da teoria de álgebras de Lie. O resultado principal da tese é que, além de identificarmos alguns caminhos mais “suaves” de quebra de simetria, com subgrupos intermediários adicionais, não encontramos nenhuma cadeia nova, além das já conhecidas, baseadas nos grupos $Sp(6)$ [19] e G_2 [13].

Palavras-chave: Código genético, Evolução, Grupos de Lie, Subgrupos maximais, Teoria de representações.

Abstract

The main goal of this thesis is to contribute to the search for algebraic models for the evolution of the genetic code, initiated by Hornos and Hornos [19]. Extending previous results, we solve the problem of classifying the possible symmetry breaking schemes that reproduce the degeneracies of the genetic code, based on compact Lie groups of low rank and using chains of maximal subgroups. The basic novelty is the systematic inclusion of subgroups that are not connected. As a starting point, we use the known list of compact simple Lie groups that possess a codon representation, that is, an irreducible representation of dimension 64, and apply the classification of maximal subgroups of compact Lie groups (connected or not) obtained in an extensive previous work [5] to construct the chains. This construction of chains proceeds in steps, each of which consists in finding the maximal subgroups of a compact Lie group (which, from the second step onward, may cease to be connected) and apply branching rules, which govern the decomposition of an irreducible representation of a group, when restricted to a certain subgroup, into irreducible representations of that subgroup. It should be emphasized that, due to the fact that we are dealing with groups that are not necessarily connected, this approach requires combining methods from the theory of finite groups with techniques from the theory of Lie algebras. The main result of the thesis is that, apart from identifying a few “more gentle” ways of symmetry breaking, with additional intermediate subgroups, we have not found any new chain, beyond the known ones, based on the groups $\text{Sp}(6)$ [19] and G_2 [13].

Keywords: Genetic code, Evolution, Lie groups, Maximal subgroups, Representation theory.

Conteúdo

Introdução	ix
1 Estratégia Geral	1
1.1 Esquema Geral e Definições Básicas	1
1.2 Subgrupos Maximais	4
1.3 Regras de Ramificação	8
1.4 Critérios de Eliminação	13
2 Construção das Cadeias	17
2.1 Primeira Etapa	17
2.1.1 Subgrupos maximais	17
2.1.2 Regras de ramificação	24
2.2 Segunda Etapa	42
2.3 Resultados	71
Bibliografia	74

Introdução

O código genético – totalmente decifrado em 1966 e exibido na Tabela 1 – tem características bem particulares. Entre elas, uma é que ele é altamente degenerado, no sentido de que vários códons codificam o mesmo aminoácido (sendo que há no total 64 códons, mas apenas 20 aminoácidos, além do sinal de terminação); a distribuição exata encontra-se na Tabela 2. Para explicar essas degenerescências, Hornos & Hornos propuseram, em 1993, um modelo algébrico para a evolução do código genético [19], baseado na hipótese de que o código genético observado hoje é o resultado de um processo evolutivo acompanhado de uma sequência de quebras de simetria; veja [20] para uma exposição detalhada. A implementação desta ideia na categoria dos grupos de Lie compactos começa pela escolha de um grupo de Lie compacto G com álgebra de Lie \mathfrak{g} simples e de uma representação irredutível de \mathfrak{g} de dimensão 64, chamada de *representação de códons* porque os 64 vetores de uma base (adequadamente escolhida) do espaço dessa representação são identificados com os 64 códons. Segundo o dogma central do procedimento de *quebra de simetria*, a tarefa principal é então encontrar um subgrupo fechado H de G que reproduz as degenerescências do código genético, ou seja, tal que sob redução a H , a representação de códons de G se decompõe na soma direta de representações irredutíveis de H cujas dimensões e multiplicidades são idênticas com os números provindo da Tabela 2:

$$3 \text{ sextetos} + 5 \text{ quartetos} + 2 \text{ tripletos} + 9 \text{ dubletos} + 2 \text{ singletos} \quad (1)$$

Ocorre que o melhor método para executar essa tarefa é proceder em passos, obtendo H como último membro de uma cadeia descendente de subgrupos de G , na qual cada membro é um subgrupo maximal do anterior.

Observamos, de passagem, que a condição de que a representação de códons seja irredutível pode ser justificada notando-se que uma representação redutível, que (no âmbito de grupos de Lie compactos) sempre pode ser escrita como a soma direta de componentes

primeira base	segunda base				terceira base
	U	C	A	G	
U	Phe	Ser	Tyr	Cys	U
	Phe	Ser	Tyr	Cys	C
	Leu	Ser	TERM	TERM	A
	Leu	Ser	TERM	Try	G
C	Leu	Pro	His	Arg	U
	Leu	Pro	His	Arg	C
	Leu	Pro	Gln	Arg	A
	Leu	Pro	Gln	Arg	G
A	Ile	Thr	Asn	Ser	U
	Ile	Thr	Asn	Ser	C
	Ile	Thr	Lys	Arg	A
	Met	Thr	Lys	Arg	G
G	Val	Ala	Asp	Gly	U
	Val	Ala	Asp	Gly	C
	Val	Ala	Glu	Gly	A
	Val	Ala	Glu	Gly	G

Tabela 1: O código genético padrão (códon de mRNA vs. aminoácidos)

Dimensão de Multipletos	Número de Multipletos	Aminoácidos
6	3	Arg, Leu, Ser
4	5	Ala, Gly, Pro, Thr, Val
3	2	Ile, TERM
2	9	Asn, Asp, Cys, Gln, Glu, His, Lys, Phe, Tyr
1	2	Met, Trp

Tabela 2: Distribuição dos multipletos no código genético padrão

irredutíveis, corresponderia não ao ponto inicial do processo da quebra de simetria mas sim a um estágio posterior, no qual já ocorreu alguma quebra. Por um motivo semelhante, consideramos apenas álgebras de Lie simples, pois a álgebra de Lie de um grupo de Lie compacto é reductiva, i.e., é a soma direta do seu centro (que em qualquer representação irredutível é representado por múltiplos da identidade, conforme o lema de Schur) e um ideal semisimples (que é igual à sua álgebra derivada), que por sua vez é a soma direta de ideais simples. Portanto, partir de uma representação irredutível de um grupo de Lie compacto que é semisimples mas não é simples corresponderia a uma simetria primordial composta, e não simples.

Sendo assim, o primeiro passo para a implementação deste programa consiste em determinar todas as possíveis representações de códon de grupos de Lie compactos simples. A solução é baseada no teorema de classificação de Cartan, de acordo com o qual as álgebras de Lie simples (tanto as complexas como as suas formas reais compactas) organizam-se em quatro séries de álgebras clássicas, A_n , B_n , C_n , D_n , e cinco álgebras excepcionais, E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , G_2 . Além disso, para qualquer N (aqui, $N = 64$), essas álgebras têm apenas um número finito de representações irredutíveis de dimensão N : isso segue do fato de que a dimensão das representações irredutíveis de álgebras de Lie (semi)simples é uma função monotonicamente crescente do seu peso máximo – fato este que está implicitamente contido na fórmula de dimensão de Weyl. Grosso modo, isso implica

que “álgebras de posto alto só admitem representações irreduzíveis de dimensão alta”; em particular, existe para cada série clássica X_n e cada N (aqui, $N = 64$) um posto crítico $n_c(N)$ tal que para $n > n_c(N)$, qualquer representação irreduzível de X_n tem dimensão maior que N . Por conseguinte, a lista de representações de códon é finita.

Para determinar explicitamente a lista de representações de códon dos grupos de Lie compactos simples G , usamos as tabelas de dimensões de McKay & Patera [24]: a parte relevante para as álgebras clássicas está reproduzida em [20, Tabelas 4a-d]. O resultado, sob a restrição adicional de que G seja conexo, encontra-se em [20, Tabela 5]. Porém, ele pode ser facilmente estendido para incluir o caso em que G deixa de ser conexo, observando que se G for um grupo de Lie compacto mas não conexo, G_0 for a sua componente conexa da identidade e $\Gamma = G/G_0$ for o seu grupo de componentes, a única maneira de se obter uma representação irreduzível de G de dimensão 64 cuja restrição a G_0 deixa de ser irreduzível é por *fusão* de 2 representações irreduzíveis de G_0 de dimensão 32, ou de 4 representações irreduzíveis de G_0 de dimensão 16, ou de 8 representações irreduzíveis de G_0 de dimensão 8, ou de 16 representações irreduzíveis de G_0 de dimensão 4, ou de 32 representações irreduzíveis de G_0 de dimensão 2, ou de 64 representações irreduzíveis de G_0 de dimensão 1, todas adequadamente interconectadas pela ação do grupo Γ que, para tanto, precisa agir sobre \mathfrak{g} por automorfismos externos. Inspeccionando as tabelas reproduzidas em [20, Tabelas 4a-d], encontramos uma única possibilidade adicional, associada à álgebra rotulada de D_6 : sob extensão do grupo $\text{SO}(12)$ ao grupo $\text{O}(12)$, ou melhor, do grupo $\text{Spin}(12)$ ao grupo $\text{Pin}(12)$, as duas representações spinoriais de dimensão 32, com pesos máximos $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, fusionam em uma única representação irreduzível de dimensão 64. Porém, considerando a álgebra rotulada de B_6 , notamos que a representação de códon de $\text{O}(12)$ (ou melhor, de $\text{Pin}(12)$) assim construída pode ser obtida diretamente por restrição da representação de códon de $\text{SO}(13)$ (ou melhor, de $\text{Spin}(13)$), que é a representação spinorial com peso máximo $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, por restrição, pois $\text{O}(12) \subset \text{SO}(13)$ e logo $\text{Pin}(12) \subset \text{Spin}(13)$. Portanto, essa representação de códon nada acrescenta em relação à análise já efetuada em [3] e portanto pode ser desconsiderada: assim, o resultado obtido em [20, Tabela 5] torna-se o resultado final, reproduzida na Tabela 3.

O próximo passo na implementação do programa requer classificar os subgrupos máximos de cada um dos grupos da Tabela 3. Subgrupos máximos *conexos* de grupos de Lie compactos *conexos* correspondem a subálgebras máximas de álgebras de Lie compactas e, após complexificação, geram subálgebras máximas semisimples de álgebras de Lie complexas semisimples, as quais foram completamente classificadas há mais de 50 anos por Dynkin [11, 12]. Porém, quando passarmos a subgrupos máximos não necessariamente conexos, e ainda de grupos de Lie compactos não necessariamente conexos, a situação é bem diferente, sendo que a metodologia para chegar a uma classificação neste caso

Rótulo de Cartan	Grupo de Lie Simples	Peso Máximo
A_1	SU(2)	63
A_2	SU(3)	(3, 3)
C_2	Sp(4)	(3, 1)
G_2	G_2	(1, 1)
A_3	SU(4)	(1, 1, 1)
C_3	Sp(6)	(1, 1, 0)
B_6	Spin(13)	(0, 0, 0, 0, 0, 1)
D_7	Spin(14)	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)
C_{32}	Sp(64)	(1, 0, ..., 0)
D_{32}	Spin(64)	(1, 0, ..., 0)
A_{63}	SU(64)	(1, 0, ..., 0) (0, ..., 0, 1)

Tabela 3: Representações de códon de grupos de Lie compactos simples

foi completada apenas recentemente [5]: sem estes resultados, o presente trabalho não poderia ter sido executado. Em seguida, precisamos, para cada um destes subgrupos maximais H , usar regras de ramificação para determinar a decomposição da representação de códon, quando restrita a H , em representações irredutíveis de H . Quando H não for conexo, isso é feito em dois passos: primeiro, estabelecem-se as regras de ramificação para sua componente conexa da identidade H_0 , usando as tabelas de McKay & Patera [24], e segundo, aplica-se uma “engenharia reversa” para reconstruir as regras de ramificação para H , analisando as “regras de fusão” que determinam quais dos H_0 -multipletos estendem a H -multipletos (“split case”) e quais dos H_0 -multipletos devem ser combinados para proporcionar H -multipletos (“fusion case”). De modo geral, a unificação dos métodos necessários para tratar de um problema da teoria de representações que envolve grupos finitos e grupos de Lie conexos, ou álgebras de Lie, requer a descrição de representações em termos de caracteres, sendo que no caso de uma álgebra de Lie semisimples, o caráter de uma representação irredutível é determinado por seu peso máximo conforme a fórmula de Weyl. Felizmente, os grupos finitos que aparecem neste trabalho são muito elementares e portanto não é necessário lançar mão de toda esta teoria para resolver os casos concretos.

Este processo de redução de simetria para subgrupos maximais deve ser repetido e leva a cadeias descendentes de subgrupos, cada um dos quais é maximal no anterior. Em cada passo, a distribuição de multipletos deve ser comparada com a observada no código genético, apresentada na Tabela 2, sendo que cadeias levando a uma distribuição de multipletos incompatível com a da Tabela 2 devem ser descartadas. Porém, o número de cadeias a serem analisadas é enorme, e portanto torna-se imprescindível “podar a árvore”, formulando critérios para identificar cadeias que não podem reproduzir as degenerescências do código genético através de qualquer quebra posterior: tais cadeias serão denominadas de “não sobreviventes”. Tal metodologia já foi adotada em trabalhos anteriores sobre o tema, e critérios para caracterizar cadeias não sobreviventes foram estabelecidos em [3,20], reduzindo drasticamente o número de alternativas que precisam ser analisadas de forma mais detalhada. Desta forma, foi possível executar uma busca exaustiva e estabelecer uma classificação de todos os possíveis esquemas de quebra de simetria através de grupos e cadeias de subgrupos conexos [1, 3, 7, 13, 19, 20].

O motivo central do presente trabalho é que a classificação obtida até agora ainda é incompleta, uma vez que no processo de quebra de simetria, aparecem natural e quase inevitavelmente subgrupos não conexos: não há nenhum motivo para o grupo de estabilidade de um vetor em uma representação de um grupo ser conexo, e a redução para um subgrupo não conexo e para sua componente conexa da identidade pode ser dramaticamente diferente. Na verdade, esta opção já foi amplamente utilizada em todos os trabalhos mencionados acima, uma vez que um dos passos envolve a quebra do grupo

$SO(3)$ (ou $SU(2)$) para seu subgrupo maximal $O(2)$ (ou $\mathbb{Z}_2 \times U(1)$), o qual é uma extensão da sua componente conexa da identidade $SO(2)$ (ou $U(1)$) por um fator \mathbb{Z}_2 , sendo que as regras de ramificação são dramaticamente diferentes: a representação irredutível de $SU(2)$ de spin s (com peso máximo $2s$) quebra em $2s + 1$ singletos quando reduzirmos para $U(1)$ (já que $U(1)$ é abeliano), mas quebra em $2s$ dubletos mais um singlete se $2s$ for par e quebra em $2s$ dubletos só se $2s$ for ímpar, quando reduzirmos para $\mathbb{Z}_2 \times U(1)$. Para uma bela exposição da enorme diferença entre redução para $O(2)$ e para $SO(2)$ no contexto de sistemas dinâmicos com simetria e quebra de simetria causada por bifurcação, veja [16].

Esta tese será dividida em dois capítulos. No primeiro, explicamos com maiores detalhes a estratégia adotada para resolver o problema, enquanto que no segundo, apresentamos os detalhes das construções das cadeias e os argumentos para sua sobrevivência ou eliminação.

Estratégia Geral

Neste capítulo, descrevemos a estratégia geral para construir modelos algébricos para o código genético, baseados na ideia de quebra de simetria, segundo Hornos e Hornos [19]. Este programa pode ser implementado em várias categorias algébricas que implementam a noção de simetria na natureza, através de sua teoria de representações, tais como: grupos (de diversos tipos – por exemplo, grupos finitos ou grupos de Lie), álgebras de Lie, superálgebras de Lie, “grupos quânticos”, grupoides, etc.. Neste trabalho, consideraremos apenas a opção mais tradicional, que é a de grupos – mais exatamente, de grupos de Lie compactos (que incluem os grupos finitos), para os quais existe uma teoria de representações bem desenvolvida.

1.1 Esquema Geral e Definições Básicas

Seja G um grupo de Lie compacto e ρ uma representação irredutível de G em um espaço vetorial V .¹ Quando restringirmos ρ a um subgrupo fechado H de G , V se decompõe na soma direta de subespaços irredutíveis sob H : as regras que determinam quais representações irredutíveis de H (a menos de equivalência) aparecem nessa decomposição, e com quais multiplicidades, são chamadas de *regras de ramificação*.² Frequentemente, seguiremos a terminologia adotada em Física, onde tal (sub)espaço irredutível costuma ser chamado de *multiplete*, sendo que, mais corretamente, um multiplete corresponde a alguma base do referido (sub)espaço.

¹Neste trabalho, consideramos exclusivamente representações de dimensão finita.

²Aqui usamos o fato de que qualquer representação de um grupo compacto (H , no caso) é completamente redutível, pois qualquer subespaço invariante possui um subespaço invariante complementar – por exemplo, o seu complemento ortogonal em relação a um produto escalar invariante.

Os modelos baseados em simetrias quebradas tem como fundamento a ideia de que as degenerescências encontradas em situações experimentais reflitam uma simetria residual, isto é, o remanescente de uma simetria maior que foi perdida, ou quebrada, ao longo de um processo de evolução. Assim, o grupo G descreve a simetria original e o subgrupo H a simetria residual que permaneceu após a quebra. Em termos de representações, houve originalmente um único multipletos sob G que foi quebrado em vários multipletos sob H . Ademais, esse processo de quebra pode ocorrer em vários passos, o que leva à ideia de considerar cadeias de subgrupos fechados, do tipo $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_k = H$, onde em cada passo a quebra é determinada pelas regras de ramificação das representações irredutíveis do respectivo subgrupo de G nesta cadeia sob restrição ao próximo. Também, podemos considerar o problema inverso, isto é, quando nos deparamos com algum fenômeno que produziu uma certa distribuição de multipletos, podemos tentar reconstruir o processo (ou um processo) que gerou tal distribuição de multipletos, supondo que esta foi resultado de uma evolução que partiu de uma situação totalmente simétrica e que, ao decorrer do tempo, essa simetria foi parcialmente perdida. Concretamente, a implementação desta *busca por simetrias* requer

- a escolha de um grupo de Lie compacto G , o *grupo de simetria primordial*;
- a escolha de uma representação irredutível de G em um espaço vetorial V cuja dimensão é igual à soma das dimensões dos multipletos observados;
- a identificação de um subgrupo fechado H de G , o *grupo de simetria residual*, tal que a distribuição de multipletos obtida da representação irredutível de G em V por restrição a H e subsequente decomposição em representações irredutíveis de H seja igual à distribuição de multipletos observada.

A questão de como executar a quebra de simetria do grupo primordial G até o grupo residual H não de uma vez só, mas de forma gradual, em vários passos, através de uma *cadeia* decrescente $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_k = H$ de subgrupos fechados de G , requer uma atenção especial, pois para que possamos, em cada um dos passos, atingir uma quebra que seja tão suave quanto possível, costuma-se exigir que cada subgrupo da cadeia seja maximal no anterior: tais cadeias serão simplesmente chamadas de *cadeias maximais*. A ideia é que se essa condição não for satisfeita, deveria sempre ser possível inserir subgrupos fechados intermediários e assim definir uma cadeia mais longa na qual ela é válida. Porém, precisa-se de um argumento para garantir que tal processo termine após um número finito de tais inserções. No caso dos grupos finitos, isso fica claro se considerarmos a ordem de cada subgrupo envolvido (usando que a ordem de um subgrupo de um grupo finito divide a ordem do grupo inteiro). O mesmo vale para os subgrupos de Lie conexos de um grupo de Lie conexo, devido à correspondência biunívoca entre eles e as subálgebras

da álgebra de Lie correspondente (usando que a dimensão de uma subálgebra não-trivial de uma álgebra de Lie é estritamente inferior à dimensão da álgebra inteira). No entanto, para grupos de Lie compactos não necessariamente conexos, a situação é muito menos clara, pois existe um contraexemplo absolutamente elementar: os subgrupos do círculo $U(1)$ são exatamente os grupos cíclicos \mathbb{Z}_n , e nenhum deles é maximal, pois para qualquer inteiro $p > 1$, $\mathbb{Z}_n \subset \mathbb{Z}_{pn}$. Na verdade, pode-se provar que *nenhum grupo de Lie abeliano contém qualquer subgrupo maximal*: todo subgrupo é sempre contido em algum maior ainda [5, Proposition 2.3]. Isso nos leva à seguinte

Definição 1.1 *Seja G um grupo de Lie compacto. Dizemos que um subgrupo fechado H de G é **alcançável (por uma cadeia maximal)** se existe uma cadeia maximal que termina em H , i.e., uma cadeia decrescente $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_k = H$ de subgrupos fechados de G tal que, para $i = 1, \dots, k$, H_i é subgrupo maximal de H_{i-1} .*

Do contraexemplo anterior, segue imediatamente que *qualquer grupo de Lie contém subgrupos fechados que não são alcançáveis por cadeias maximais*: no caso semisimples, basta considerar qualquer subgrupo do toro maximal.

Uma outra restrição que imporemos neste trabalho é que o grupo de simetria residual H não seja puramente discreto, i.e., não seja um grupo finito. O motivo desta restrição é de natureza técnica: a classificação dos subgrupos finitos dos grupos de Lie compactos, mesmo dos grupos de Lie compactos conexos simples, ainda é um tema atual de pesquisa em teoria dos grupos, e a questão de regras de ramificação neste caso é um assunto largamente em aberto. Uma resposta completa existe apenas para o caso mais elementar: o grupo $SO(3)$ de rotações no espaço tridimensional euclidiano e o seu grupo de recobrimento universal $SU(2)$: sabe-se quais são todos os subgrupos finitos destes dois grupos, maximais ou não, e quais são as regras de ramificação de qualquer representação irreduzível, i.e., da representação de spin s , para qualquer $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$, sob restrição a cada um deles [22, 23]. Para grupos de Lie compactos conexos simples de posto > 1 , parece que resultados tão completos não estão disponíveis.

Em função desta restrição, fomos obrigados a impor uma condição adicional sobre as cadeias maximais permitidas para alcançar um determinado subgrupo:

Definição 1.2 *Seja G um grupo de Lie compacto. Dizemos que um subgrupo fechado H de G é **alcançável (por uma cadeia maximal sem fatores discretos)** se existe uma cadeia decrescente $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_k = H$ de subgrupos fechados de G tal que, para $i = 1, \dots, k$, H_i é subgrupo maximal do tipo trivial ou do tipo normalizador (i.e., não do tipo normal) de H_{i-1} .*

Para a classificação de subgrupos maximais nos três tipos usados nesta definição (tipo trivial, tipo normal e tipo normalizador), veja a Seção 1.2.

Felizmente, para os fins do presente trabalho, a existência de subgrupos não alcançáveis por cadeias maximais ou por cadeias maximais sem fatores discretos pode ser menos relevante do que parece,

De fato, a observação acima de que grupos de Lie abelianos não contêm subgrupos maximais, e portanto também não contêm subgrupos alcançáveis, é pouco relevante, pois grupos abelianos não contribuem para regras de ramificação, uma vez que todas as suas representações irredutíveis são unidimensionais. Portanto, a questão que se coloca não é se todo subgrupo fechado H de um grupo de Lie compacto G é alcançável (já vimos que isso não é verdade), mas se, para qualquer representação irredutível de G , é possível, através de alguma cadeia maximal ou mesmo de alguma cadeia maximal sem fatores normais, chegar em qualquer esquema de ramificação desta representação. Afinal, dois subgrupos H_1 e H_2 de G podem levar ao mesmo esquema de ramificação, e isso para qualquer representação irredutível de G , mesmo quando são diferentes no sentido de não serem conjugados em G . (Por exemplo, pelo menos para subgrupos conexos, isso ocorre quando um é o grupo derivado do outro, ou reciprocamente, uma extensão central do outro.) Porém, colocada desta forma geral, essa questão é altamente complexa e longe de ser completamente resolvida.

1.2 Subgrupos Maximais

Para viabilizar o programa de estudar regras de ramificação de representações através de cadeias maximais, é imprescindível dispor de uma classificação de subgrupos maximais. Um estudo detalhado deste tema foi iniciado na dissertação de mestrado [14] e resultou em um extenso artigo [5] que apresenta tal classificação no âmbito de grupos de Lie compactos mas não necessariamente conexos.

Um dos primeiros resultados básicos obtidos em [5] é que dado um grupo de Lie compacto G , com componente conexa da identidade G_0 , grupo de componentes Γ (i.e., $\Gamma = G/G_0$) e álgebra de Lie \mathfrak{g} , existem três tipos de subgrupos maximais: denotando, para um subgrupo fechado qualquer H de G , sua interseção com G_0 por H_1 ($H_1 = H \cap G_0$), sua componente conexa da identidade por H_0 e sua álgebra de Lie por \mathfrak{h} , temos [5, Theorem 3.1 & Theorem 4.1] que um subgrupo fechado M de G é

- um **subgrupo maximal de tipo trivial** se $M_0 = G_0$, $M_1 = G_0$ e M é uma extensão de G_0 por um subgrupo maximal Ξ do grupo finito Γ ,

$$M = G_0 \cdot \Xi, \tag{1.1}$$

- um **subgrupo maximal de tipo normal** se $M_0 \neq G_0$ é um subgrupo fechado Γ -invariante *normal* de G_0 , M_1 é uma extensão de M_0 por um subgrupo finito maximal Γ -invariante D_0 de G_0/M_0 e M é a extensão de M_1 por Γ ,

$$M_1 = M_0 \cdot D_0 \quad , \quad M = M_1 \cdot \Gamma \quad , \quad (1.2)$$

- um **subgrupo maximal de tipo normalizador** se $M_0 \neq G_0$ é um subgrupo fechado Γ -invariante *não normal* de G_0 , M_1 é o normalizador de M_0 (ou \mathfrak{m}) em G_0 , M é o normalizador de M_0 (ou \mathfrak{m}) em G e M é a extensão de M_1 por Γ ,

$$M_1 = N_{G_0}(M_0) = N_{G_0}(\mathfrak{m}) \quad , \quad M = N_G(M_0) = N_G(\mathfrak{m}) \quad , \quad M = M_1 \cdot \Gamma \quad . \quad (1.3)$$

A seguir, passamos a explicar este resultado de uma forma mais detalhada.

Primeiro, para evitar mal-entendidos, enfatizamos que, embora a classificação dos subgrupos maximais *conexos* de grupos de Lie compactos *conexos* seja equivalente à classificação das subálgebras maximais de álgebras de Lie compactas, ou ainda, das subálgebras maximais redutivas de álgebras de Lie complexas redutivas, tal equivalência deixa de valer, e mesmo de ser útil, para encontrar subgrupos maximais M que não são conexos, mesmo em grupos de Lie compactos G que são conexos – simplesmente porque a componente conexa da identidade M_0 de um subgrupo maximal M de G e a correspondente subálgebra \mathfrak{m} de \mathfrak{g} não são necessariamente maximais. Muito pelo contrario, M_0 e \mathfrak{m} podem até ser triviais, o que significa que M é discreto: evidentemente, isso não implica que M seja trivial. (Considere, por exemplo, o grupo do octaedro O ou o grupo do icosaedro I , que são subgrupos maximais de $SO(3)$.) Por outro lado, M_0 pode ser maximal entre todos os subgrupos fechados conexos de G sem ser maximal entre todos os subgrupos fechados de G . (Considere, por exemplo, o grupo do círculo $SO(2)$, que é um subgrupo maximal conexo mas não um subgrupo maximal de $SO(3)$, pois é contido no grupo $O(2)$: este sim é subgrupo maximal de $SO(3)$.) Sendo assim, coloca-se a pergunta qual seria a classe de subálgebras que corresponde aos subgrupos maximais, principalmente aos subgrupos maximais de tipo normalizador: conforme explicado em [5], são as subálgebras quase-primitivas. Complicações adicionais aparecem quando o grupo ambiente G não é conexo, mas elas podem ser tratadas através da introdução de um conceito modificado de maximalidade e de quase-primitividade, dando origem à noção de um subgrupo “maximal Γ -invariante” e de uma subálgebra “ Γ -quase-primitiva” [5].

Para chegarmos a uma visão mais detalhada sobre os três tipos de subgrupos maximais M de um grupo de Lie compacto G , observamos primeiro que os de tipo trivial são simplesmente obtidos escrevendo

$$G = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma \quad , \quad (1.4)$$

onde os subconjuntos G_γ são as componentes conexas de G , e pondo

$$M = \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Xi} G_\gamma, \quad (1.5)$$

onde Ξ é um subgrupo maximal do grupo finito Γ . Para descrever quais são os de tipo normal e os do tipo normalizador, consideremos a representação adjunta de G em \mathfrak{g} , que proporciona um homomorfismo $G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ que leva G_0 para $\text{Inn}(\mathfrak{g})$ e portanto induz um homomorfismo $\Gamma = G/G_0 \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})/\text{Inn}(\mathfrak{g}) = \text{Out}(\mathfrak{g})$, cuja imagem denotaremos por Σ : assim, o subgrupo Σ de $\text{Out}(\mathfrak{g})$ representa a “parte relevante” do grupo de componentes Γ de G . Como explicado em [5], existe então uma noção natural de Σ -invariância, ou Γ -invariância, para subgrupos de G_0 e para subálgebras de \mathfrak{g} , que na verdade é uma “invariância módulo conjugação em G_0 ”: um subgrupo H_1 de G_0 e uma subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} são chamados Σ -invariantes, ou Γ -invariantes, se para todo elemento g de G existe algum elemento g_0 de G_0 tal que conjugação com $g g_0^{-1}$ deixa H_1 invariante e $\text{Ad}(g g_0^{-1})$ deixa \mathfrak{h} invariante. São os subgrupos Σ -invariantes H_1 de G_0 , e apenas estes, que admitem extensões (únicas) para subgrupos H de G tais que H intersecta toda componente conexa de G e satisfaz $H_1 = H \cap G_0$. Além disso, H é subgrupo maximal de G se e somente se H_1 for subgrupo Σ -invariante maximal de G_0 .

Seja agora H um subgrupo fechado de G com componente conexa da identidade H_0 e álgebra de Lie \mathfrak{h} ; pomos ainda $H_1 = H \cap G_0$ e observamos que H_0 , H_1 e \mathfrak{h} são todos Σ -invariantes, com $H_0 \subset H_1 \subset H$. Existem então duas opções, dependendo de H_0 ser normal,³ ou seja, de \mathfrak{h} ser um ideal de \mathfrak{g} , ou não. No primeiro caso, podemos considerar o grupo quociente discreto H/H_0 como subgrupo Σ -invariante do grupo de Lie quociente G/H_0 e concluir que H é subgrupo maximal de G se e somente se H/H_0 for subgrupo maximal discreto de G/H_0 : tais subgrupos maximais H de G são chamados do tipo normal. No segundo caso, podemos considerar o normalizador $N = N_G(\mathfrak{h}) = N_G(H_0)$ de \mathfrak{h} ou de H_0 em G e concluir que H é subgrupo maximal de G se e somente se $H = N$ e se \mathfrak{h} for uma subálgebra Σ -quase-primitiva de \mathfrak{g} : tais subgrupos maximais H de G são chamados do tipo normalizador. Veja [5, Theorem 3.1 & Theorem 4.1].

A situação é bastante simplificada se impormos hipóteses adicionais. Por exemplo, se o grupo de Lie G for conexo, temos $G = G_0$, o grupo Σ é trivial e a condição de Σ -invariância torna-se vazia, de modo que podemos omitir o prefixo “ Σ -”. Neste caso, não há subgrupos maximais do tipo trivial. Outra hipótese adicional e frequente é que a álgebra de Lie \mathfrak{g} seja simples. Neste caso, os subgrupos maximais do tipo normal são os subgrupos Σ -invariantes maximais discretos. Combinando as duas hipóteses (G conexo e \mathfrak{g} simples), vemos que há exatamente dois tipos de subgrupos maximais: os do tipo normalizador e os discretos.

³É fácil ver que se H_0 é Σ -invariante, então H_0 é normal em G se e somente se for normal em G_0 .

Sendo assim, surge o problema de calcular, para uma subálgebra Σ -quase-primitiva \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , o seu normalizador $N = N_G(\mathfrak{h}) = N_G(H_0)$ em G , que é a extensão do seu normalizador $N_1 = N_{G_0}(\mathfrak{h}) = N_{G_0}(H_0)$ em G_0 . Para tanto, é necessário e suficiente calcular (a) o correspondente centralizador $Z = Z_G(\mathfrak{h}) = Z_G(H_0)$ em G e (b) o grupo $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ dos automorfismos externos de \mathfrak{h} que são implementáveis por conjugação com algum elemento do grupo ambiente G . De fato, note que a restrição da representação adjunta de G em \mathfrak{g} a N preserva \mathfrak{h} (por definição de N) e que a restrição dessa a \mathfrak{h} define um homomorfismo de grupos

$$(\text{Ad}_G|_N)|_{\mathfrak{h}} : N \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{h}) \quad (1.6)$$

cuja imagem é, por definição, o grupo $\text{Aut}_G(\mathfrak{h})$ dos automorfismos de \mathfrak{h} que são implementáveis por conjugação com algum elemento de G . Observando ainda que automorfismos internos de \mathfrak{h} certamente são deste tipo, pois são implementáveis até por conjugação com elementos de H_0 , ou seja, vale $\text{Inn}(\mathfrak{h}) \subset \text{Aut}_G(\mathfrak{h})$, podemos passar ao quociente $\text{Out}_G(\mathfrak{h}) = \text{Aut}_G(\mathfrak{h})/\text{Inn}(\mathfrak{h}) \subset \text{Aut}(\mathfrak{h})/\text{Inn}(\mathfrak{h}) = \text{Out}(\mathfrak{h})$ e assim obter um homomorfismo de grupos

$$N \longrightarrow \text{Out}_G(\mathfrak{h}) \quad (1.7)$$

que, por definição, é sobrejetor e tem núcleo o subgrupo $Z H_0$ de G . Portanto, N pode ser visto como uma extensão do grupo $Z H_0$ pelo grupo $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$, através da seguinte seqüência exata:

$$\{1\} \longrightarrow Z H_0 \longrightarrow N \longrightarrow \text{Out}_G(\mathfrak{h}) \longrightarrow \{1\}, \quad (1.8)$$

ou mais explicitamente,

$$\{1\} \longrightarrow Z_G(\mathfrak{h}) H_0 \longrightarrow N_G(\mathfrak{h}) \longrightarrow \text{Out}_G(\mathfrak{h}) \longrightarrow \{1\}. \quad (1.9)$$

Se essa seqüência cindir, de modo que $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ pode ser realizado como subgrupo de N , então N será o produto semidireto

$$N = (Z H_0) \rtimes \text{Out}_G(\mathfrak{h}). \quad (1.10)$$

ou mais explicitamente,

$$N_G(\mathfrak{h}) = (Z_G(\mathfrak{h}) H_0) \rtimes \text{Out}_G(\mathfrak{h}). \quad (1.11)$$

Observe que há algumas situações especiais em que a construção do produto $Z H_0$ pode ser simplificada. Por exemplo, se \mathfrak{h} tiver posto máximo, vale $Z \subset H_0$ e portanto $Z H_0 = H_0$. E quando a inclusão de H_0 em G definir uma representação irreduzível, então pelo lema de Schur vale $Z = Z_G(H_0) = Z(G)$ e portanto $Z H_0$ será o produto direto $Z \times H_0$ de Z e H_0 .

Permanece a questão da classificação das subálgebras Σ -quase-primitivas de álgebras de Lie compactas \mathfrak{g} . Em um primeiro passo, essa classificação pode ser reduzida de álgebras de Lie compactas gerais para álgebras de Lie compactas simples, ou mais geralmente, Σ -simples [5, Sec. 5]. O segundo passo consiste na classificação das subálgebras Σ -quase-primitivas de álgebras de Lie compactas simples \mathfrak{g} , que são todas Σ -primitivas e, com algumas poucas exceções, maximais Σ -invariantes, de modo que este problema pode ser abordado usando os resultados e a metodologia de Dynkin [11, 12]. Em particular, quando \mathfrak{g} for uma álgebra clássica, é pertinente distinguir entre subálgebras simples (s) e subálgebras que não são simples, sendo que estas serão caracterizadas como abelianas (a), semisimples mas não simples (n) e redutivas com centro e álgebra derivada não-trivial (r), e ainda conforme a natureza do seu mergulho na álgebra ambiente \mathfrak{g} , que pode ser por uma representação redutível (soma direta) ou por uma representação irredutível (produto tensorial).

- Para subálgebras primitivas simples \mathfrak{s} de \mathfrak{g} , sabe-se que quase toda representação irredutível de \mathfrak{s} proporciona uma inclusão de \mathfrak{s} como subálgebra maximal da álgebra clássica \mathfrak{g} adequada: existem apenas 19 casos em que \mathfrak{s} deixa de ser maximal [12], e entre estes apenas um caso em que \mathfrak{s} deixa de ser maximal mas ainda é primitiva [9].
- Para subálgebras primitivas que não são simples, a classificação é dada em [5], sendo que em muitos casos, as inclusões pertinentes correspondem a espaços riemannianos simétricos irredutíveis.

A única álgebra de Lie compacta simples excepcional de interesse no presente trabalho é G_2 : neste caso, temos uma classificação completa dada por Dynkin: A_2 e $A_1 \oplus A_1$ são subálgebras maximais regulares e A_1 é uma subálgebra maximal singular. Esta segue de um teorema de Dynkin [11, Theorem 16.1, p. 239], que apresenta todas as álgebras excepcionais que possuem subálgebras maximais singulares que são irredutíveis com respeito à restrição de alguma representação irredutível da álgebra excepcional que a contém.

Finalmente, o tratamento do caso de subálgebras maximais Σ -invariantes requer apenas pequenas modificações, pois para todas as álgebras de Lie \mathfrak{g} compactas simples com a única exceção de $D_4 = \mathfrak{so}(8)$, vale $\Sigma = \{1\}$ ou $\Sigma = \mathbb{Z}_2$.

1.3 Regras de Ramificação

Regras de ramificação disciplinam o que acontece quando restringimos representações de um grupo a algum subgrupo. Aqui, consideramos grupos de Lie compactos, representações de dimensão finita e subgrupos fechados. Essas restrições são compatíveis com a noção

de (ir)redutibilidade pois toda representação irredutível de um grupo de Lie compacto é de dimensão finita e toda representação de dimensão finita de um grupo de Lie compacto é soma direta de representações irredutíveis. Portanto, se π_G é uma representação irredutível de um grupo de Lie compacto G , a sua restrição $\pi = \pi_G|_H$ a um subgrupo fechado H de G será a soma direta de certas representações irredutíveis de H , ou seja,

$$\pi = \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_n .$$

Reciprocamente, podemos perguntar se um dado conjunto $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ de representações irredutíveis de H provém, deste modo, de alguma representação irredutível π_G de G . Para classificar as diferentes respostas possíveis, usamos a seguinte terminologia:

- Se $n = 1$, dizemos que π_G *não quebra* (sob restrição a H) e, reciprocamente, que π *estende* (a G).
- Se $n > 1$, dizemos que π_G *quebra* (sob restrição a H) e, reciprocamente, que π_1, \dots, π_n *fundem* (em G).

A seguir, escreveremos a decomposição de π em subrepresentações irredutíveis na forma da *decomposição isotópica* [8]

$$\pi = n_1\pi_1 \oplus \dots \oplus n_p\pi_p , \tag{1.12}$$

onde $\{\pi_1, \dots, \pi_p\}$ é um conjunto de representações irredutíveis inequivalentes de H (i.e., $\pi_i \not\sim \pi_j$ se $i \neq j$) e n_1, \dots, n_p um conjunto de inteiros não-negativos: n_i é a multiplicidade com que π_i aparece em π . Essa decomposição tem a vantagem de que os subespaços isotópicos, i.e., os subespaços invariantes onde agem as representações $n_i\pi_i$, são unicamente determinados, o que geralmente não é verdade para os subespaços irredutíveis onde agem as representações π_i .

Uma situação especial, de importância fundamental para o presente trabalho, ocorre quando H é um subgrupo normal de G e ainda tal que o grupo quociente G/H é discreto. Neste caso, é possível deduzir afirmações bem mais específicas, fazendo uso do fato de que o grupo quociente G/H age naturalmente sobre classes de equivalência de representações, sobre caracteres e sobre pesos máximos de H :

Primeiro, dada uma representação (irredutível ou mesmo redutível) π_G de G e denotando por π_1, \dots, π_p as representações irredutíveis inequivalentes de H que aparecem na decomposição isotópica de $\pi = \pi_G|_H$, como acima, e por V_1, \dots, V_p os subespaços isotópicos correspondentes, G/H age sobre o conjunto $\{1, \dots, p\}$ por permutações, da seguinte forma: Dado $g \in G$, defina uma nova representação $g \cdot \pi$ de H por

$$(g \cdot \pi)(h) = \pi(g^{-1}hg) ,$$

e observe que esta tem a mesma decomposição isotópica que π , a menos de uma permutação $\sigma(g)$ do conjunto de índices $\{1, \dots, p\}$, determinada pela condição de que

$$\pi_G(g)(V_i) = V_{\sigma(g)(i)}$$

Fica claro então que essa prescrição define um homomorfismo de grupos

$$\sigma : G/H \longrightarrow S_p$$

e é fácil verificar que se a representação original π_G de G for irredutível, então a correspondente ação de G/H sobre $\{1, \dots, p\}$ é transitiva. Neste caso, todas as multiplicidades n_i têm que ser iguais ($n_i = n$) e todas as representações irredutíveis π_i têm que ter a mesma dimensão: denotando esta por d , temos portanto

$$\dim \pi_G = \dim \pi = npd .$$

Ademais, se para $1 \leq i \leq p$, denotarmos por $(G/H)_i$ o subgrupo de estabilidade da i -ésima componente isotópica sob a referida ação de G/H , i.e., $(G/H)_i$ é a préimagem sob o homomorfismo σ de $\{\tau \in S_p \mid \tau(i) = i\}$, verifica-se que se a representação original π_G de G for irredutível, a ação de $(G/H)_i$ que permuta as n representações irredutíveis equivalentes de H nesta componente isotópica tem que ser transitiva, constituindo uma representação irredutível de $(G/H)_i$ de dimensão n . Em particular, concluímos que se $(G/H)_i$ for abeliano, então necessariamente $n = 1$.

Segundo, G/H age sobre o “espaço” $\mathcal{C}(H)$ de classes de conjugação em H , ou seja,

$$\mathcal{C}(H) = \{[h] \mid h \in H\} ,$$

onde, para todo $h \in H$,

$$[h] = \{h'hh'^{-1} \mid h' \in H\} .$$

A referida ação é definida por conjugação, passada aos respectivos quocientes:

$$\begin{aligned} G/H \times \mathcal{C}(H) &\longrightarrow \mathcal{C}(H) \\ (gH, [h]) &\longmapsto [ghg^{-1}] \end{aligned} ,$$

Por dualização, obtém-se a ação de G/H sobre o espaço das funções sobre $\mathcal{C}(H)$. No entanto, $\mathcal{C}(H)$ é um espaço de órbitas com singularidades, de modo que não há como definir o que seria uma função de classe C^∞ sobre $\mathcal{C}(H)$ de forma direta. Felizmente, este problema pode ser contornado: basta identificar funções “de classe C^∞ ” sobre $\mathcal{C}(H)$ com funções de classe C^∞ sobre H que são invariantes sob conjugação com elementos de H . Denotando a álgebra destas funções por $C_I^\infty(H)$, a desejada ação é dada por

$$\begin{aligned} G/H \times C_I^\infty(H) &\longrightarrow C_I^\infty(H) \\ (gH, \chi) &\longmapsto gH \cdot \chi \end{aligned} ,$$

onde, para todo $h \in H$,

$$(gH \cdot \chi)(h) = \chi(g^{-1}hg).$$

Na situação descrita no parágrafo anterior, e denotando por χ_i o caráter da representação π_i , concluímos que

$$gH \cdot \chi_i = \chi_{\sigma(g)(i)}.$$

Terceiro,⁴ para explicar como G/H age sobre pesos máximos, precisamos fixar um toro maximal $T \subset H$ com a correspondente subálgebra maximal abeliana $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ e uma câmara de Weyl \mathfrak{c} em \mathfrak{t} que determina quais são as raízes simples $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, as raízes positivas, os pesos fundamentais $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ e os pesos dominantes, onde r é o posto de H . Como G age sobre H por automorfismos e como quaisquer dois toros maximais de H são conjugados em H , toda classe lateral em G/H possui um representante g que normaliza T e, além disso, ainda preserva \mathfrak{c} : este representante (que é unicamente determinado a menos de multiplicação à direita por elementos de T) induz uma permutação das raízes positivas, das raízes simples, dos pesos fundamentais e dos pesos dominantes que pode ser visualizada como um automorfismo do diagrama de Dynkin de H “com etiquetagem”. De fato, podemos imaginar um peso dominante como uma etiquetagem do diagrama de Dynkin, onde se atribui a cada vértice – ou seja, a cada raíz simples α_i – um inteiro não-negativo n_i , que é o coeficiente do peso fundamental λ_i na expansão

$$\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i$$

do peso dominante λ sob consideração em termos da base dos pesos fundamentais. Tendo em vista que o vetor

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha = \sum_{i=1}^r \lambda_i$$

é invariante sob a ação deste representante, a fórmula de caracteres de Weyl [10] mostra que a ação de G/H sobre pesos dominantes assim definida corresponde exatamente à ação de G/H sobre caracteres introduzida no parágrafo anterior.

No presente trabalho, esses resultados gerais serão utilizados para tratar do seguinte problema:

Suponha que G_0 é um grupo de Lie compacto conexo e H é um subgrupo maximal de G_0 com componente conexa da identidade H_0 ; então sabemos [5] que se H_0 não for discreto e nem um subgrupo normal de G_0 , H será igual ao normalizador de H_0 em G_0 . Dada uma representação de G_0 , podemos usar técnicas conhecidas (veja [24], por exemplo)

⁴Neste caso, suporemos que H é conexo.

para calcular as suas regras de ramificação quando passamos de G_0 para H_0 . A partir desta informação, podemos então usar a técnica descrita acima para construir as regras de ramificação quando passamos de G_0 apenas para H , substituindo, na discussão acima, G por H e H por H_0 . Assim, para cada uma das diferentes representações irredutíveis de H_0 provindas da representação original de G_0 , existem as seguintes possibilidades:

- “*Split case*”: $n = 1, p = 1$.

Nesta hipótese, a representação irredutível de H_0 sob consideração, caracterizada por seu peso máximo λ_0 , digamos, estende a alguma representação irredutível de H ; porém, pode haver várias extensões diferentes. Em geral, a condição $p = 1$ é facilmente verificada, pois significa que λ_0 deve ser invariante sob a ação de H/H_0 ; em particular, isso acontece sempre quando existe apenas uma representação irredutível de H_0 de dimensão $d(\lambda_0)$. Além disso, como vimos acima, a condição $n = 1$ será garantida de forma automática se o grupo H/H_0 for abeliano.

- “*Fusion case*”: $n > 1$ ou $p > 1$.

Nesta hipótese, a representação irredutível de H_0 sob consideração, caracterizada por seu peso máximo λ_0 , digamos, funde com $p - 1$ outras representações irredutíveis de H_0 , levando a um total de p representações irredutíveis inequivalentes de H_0 , cada uma delas aparecendo n vezes, para que, juntas, formarem uma representação irredutível de H . Novamente, o valor de p é facilmente identificado: é a cardinalidade da órbita de λ_0 sob a ação de H/H_0 . Além disso, como vimos acima, a condição $n = 1$ será garantida de forma automática se o grupo de estabilidade de λ_0 em H/H_0 for abeliano.

Por outro lado, quando o grupo de estabilidade de λ_0 em H/H_0 não for abeliano, o problema de encontrar o valor correto de n pode se tornar muito mais difícil. (Por exemplo, quando G é o produto direto de H e G/H , um teorema clássico [17, p.] afirma que toda representação irredutível π_G de G é obtida como o produto tensorial de uma representação irredutível π_H de H e uma representação irredutível $\pi_{G/H}$ de G/H : neste caso, vale $\dim \pi_G = \dim \pi_H \cdot \dim \pi_{G/H}$, o que é um caso muito especial da situação considerada acima, com $n = \dim \pi_{G/H}$ e $p = 1$, mostrando que não há praticamente nenhuma restrição sobre os valores possíveis de n .) Neste caso, como parte final do procedimento, torna-se necessário analisar detalhadamente a representação original de G_0 para decidir como a componente isotópica gerada pela representação irredutível de H_0 com peso máximo λ_0 se decompõe em representações irredutíveis do grupo de estabilidade de λ_0 em H/H_0 : cada uma destas gerará uma representação irredutível de H .

1.4 Critérios de Eliminação

Um dos aspectos mais importantes da construção de modelos algébricos para o código genético pelo procedimento de quebra de simetria em passos, usando cadeias de subgrupos maximais, é que nem sempre é preciso seguir cada uma dessas cadeias até o seu fim. Considerando todas elas como formando uma árvore com o grupo de simetria primordial G no topo, nota-se que, muitas vezes, o processo de quebra já pode ser abortado quando se chega a um certo subgrupo intermediário H , sendo que toda a subárvore das cadeias que passam por H , i.e., que resultariam da continuação do processo de quebra para qualquer subgrupo de H , pode ser sumariamente descartada.

Para explicar como funciona essa estratégia, seguimos [20, p. 2851 f.] e [3, p. 3140 f.], com uma importante alteração referente ao critério do “pareamento total” (veja abaixo). Primeiro, observamos que há algumas regras simples para decidir se o processo de quebra de simetria, tendo chegado a um determinado subgrupo H de G e uma correspondente distribuição de H -multipletos, termina ou não. De fato, comparação com a distribuição de multipletos observada no código genético (veja a Tabela 2) mostra que o processo deve prosseguir quando constatamos

- menos de 21 multipletos,
- multipletos de dimensão ≥ 7 ,
- mais de 3 multipletos de dimensão 6,
- multipletos de dimensão 5,

enquanto que ele deve ser encerrado quando constatamos

- mais de 21 multipletos,
- mais de 2 singletos,
- mais de 4 multipletos de dimensão ímpar,
- um número insuficiente de multipletos de dimensão ≥ 6 (menos do que 3) ou de dimensão ≥ 4 (menos do que 8),

sendo que, neste caso, devemos examinar a possibilidade de “congelamento” do processo de quebra no passo imediatamente anterior.

De modo geral, o que permite eliminar toda a subárvore das cadeias que passam por um determinado subgrupo H é que a correspondente distribuição de H -multipletos entra

em conflito com algum critério da primeira lista e também com algum critério da segunda lista, de modo que, independentemente da questão se a quebra prossegue ou não, chega-se a uma contradição.

O mais simples dentre estes critérios refere-se ao número total de multipletos, pois é claro que se este número for < 21 , a quebra deve prosseguir, enquanto que se ele for ≥ 21 , o processo deve ser encerrado. Também é claro que, no limiar de encontrarmos exatamente 21 multipletos, a cadeia deve reproduzir precisamente as degenerescências do código genético ou então ser descartada. Finalmente, se o número total de multipletos for > 21 , devemos ainda examinar a opção de “congelar” algumas das ramificações ocasionadas durante o passo imediatamente anterior, para verificar se desta forma, é possível reproduzir precisamente as degenerescências do código genético (neste caso, o número total de multipletos efetivamente obtidos seria reduzido para 21).

Posso isto, podemos formular alguns critérios que permitem eliminar cadeias obtidas por quebra para algum subgrupo H de G mesmo quando o número total de multipletos ainda é < 21 .

- *Excesso de singletos*: Já aparecem mais do que 2 singletos.
- *Excesso de multipletos ímpares*: Já aparecem mais do que 4 multipletos de dimensão ímpar.
- *Deficiência de multipletos grandes*: O número de multipletos de dimensão grande é insuficiente: há menos de 3 multipletos de dimensão ≥ 6 ou menos de 8 multipletos de dimensão ≥ 4 .
- *Pareamento total*: Os multipletos se arranjam em pares iguais ou relacionados por um automorfismo involutivo de H (neste último caso, são eliminadas apenas as cadeias que passam por subgrupos H' de H invariantes sob o referido automorfismo).

De fato, verifica-se facilmente que as primeiras três propriedades de uma distribuição de multipletos são “hereditárias”, no sentido de que continuam valendo para a distribuição de multipletos com respeito a qualquer subgrupo de H : nenhuma quebra posterior pode reduzir o número de singletos ou de multipletos de dimensão ímpar, nem aumentar o número de multipletos de dimensão $\geq k$, onde k é um número fixo qualquer.

Quanto ao último critério, é claro que quando prevalecer pareamento total de multipletos, é impossível reproduzir as multiplicidades ímpares do código genético (3 sextetos, 5 quartetos e 9 dubletos), mas a situação em relação à persistência de tal pareamento sob restrição a subgrupos é mais complicada. Primeiro, é claro que se um determinado H -multipletos aparece k vezes, todos os H' -multipletos em que ele se decompõe também

aparecerão k vezes (novamente, k pode ser um número fixo qualquer). Por outro lado, como veremos, é muito comum encontrarmos situações em que certos H -multipletos aparecem em pares relacionados por um automorfismo involutivo σ de H : neste caso, eles se decompõem em pares de H' -multipletos relacionados pelo mesmo automorfismo involutivo σ desde que H' for σ -invariante.⁵

A necessidade de impor a condição adicional de σ -invariância de H' pode ser verificada notando o seguinte exemplo: considere $H = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ munido do automorfismo involutivo σ que troca os dois fatores, i.e., $\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$, e da representação com peso máximo $(2s_1 - 2s_2) \oplus (2s_2 - 2s_1)$ com $s_1 \neq s_2$. Seja agora $H' \cong \text{SU}(2)$ o subgrupo imerso como o primeiro ou o segundo fator, de modo que H' não é σ -invariante; digamos que $H' = \text{SU}(2) \times \{1\}$. Então o H -multipleteo $(2s_1 - 2s_2)$ se decompõe em $2s_2$ H' -multipletos de dimensão $2s_1 + 1$, enquanto que o H -multipleteo $(2s_2 - 2s_1)$ se decompõe em $2s_1$ H' -multipletos de dimensão $2s_2 + 1$: assim, o pareamento entre os dois H -multipletos $(2s_1 - 2s_2)$ e $(2s_2 - 2s_1)$ não induz nenhum pareamento entre os H' -multipletos em que eles se decompõem. Por outro lado, se $H' \cong \text{SU}(2)$ for o subgrupo diagonal, que é σ -invariante, os dois H -multipletos $(2s_1 - 2s_2)$ e $(2s_2 - 2s_1)$ se decompõem da mesma forma, dada pelo teorema de Clebsch-Gordan.

Para mostrar que a condição adicional de σ -invariância de H' também é suficiente para garantir a persistência do pareamento sob restrição de H a H' , suponha que, para $i = 1, 2$, $\pi_i : H \rightarrow \text{GL}(V_i)$ sejam representações irredutíveis de H obtidas pela quebra de uma representação irredutível $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ de G ($V_i \subset V$, $\pi_i(h) = \pi(h)|_{V_i}$ para $h \in H$) e pareadas mediante o automorfismo involutivo σ de H , no sentido de que existe um isomorfismo linear $T : V_1 \rightarrow V_2$ tal que

$$\pi_2(h) = T \pi_1(\sigma(h)) T^{-1} \quad \text{para } h \in H. \quad (1.13)$$

(Neste caso, diz-se que π_1 e π_2 são quase-equivalentes: seriam equivalentes se σ fosse a identidade sobre H . No caso em que σ provém de um automorfismo interno de G , i.e., $\sigma(h) = g_0^{-1} h g_0$ para algum $g_0 \in G$, teríamos $T = \pi(g_0)|_{V_1}$ e $T^{-1} = \pi(g_0)|_{V_2}$.) Então se H' for σ -invariante, segue que T mapeia o subespaços H' -irredutíveis de V_1 sobre os subespaços H' -irredutíveis de V_2 : assim, o pareamento entre os H -multipletos π_1 e π_2 induz um pareamento entre os H' -multipletos em que eles se decompõem.

Para evitar mal-entendidos, ressaltamos que o pareamento total de H -multipletos sob um automorfismo involutivo σ *não* exclui cadeias que passam por subgrupos H' de H que

⁵Em [20] e [3], fala-se apenas em pares complex conjugados de multipletos, e o fato de que o critério de pareamento total elimina apenas cadeias passando por subgrupos “reais” não foi devidamente apreciado.

não são σ -invariantes e também *não* exclui cadeias que passam pelo subgrupo $\mathbb{Z}_2 \times H$ de G onde o elemento não-trivial age sobre H por σ . Porém, neste último caso, há uma restrição importante, provindo do fato de que no código genético, os multipletos de dimensão par têm multiplicidade ímpar (3 sextetos, 5 quartetos e 9 dubletos), enquanto que os multipletos de dimensão ímpar têm multiplicidade par (2 tripletos e 2 singletos). Portanto, para todas as quebras de $\mathbb{Z}_2 \times H$ onde o fator \mathbb{Z}_2 não é quebrado, ou seja, para subgrupos da forma $\mathbb{Z}_2 \times H'$ onde H' é um subgrupo σ -invariante de H , os multipletos de dimensão ímpar do código genético (2 tripletos e 2 singletos) têm que provir dos H -multipletos que estendem para $\mathbb{Z}_2 \times H$ (“split case”) e estes tem que ocorrer com multiplicidade par.

Construção das Cadeias

Neste capítulo, executaremos a análise detalhada das regras de ramificação das representações de códon dos grupos de Lie compactos simples de posto baixo ao longo de cadeias de subgrupos nas quais cada subgrupo é maximal no anterior, conforme explicado no Capítulo 1. Lembramos que, conforme a Tabela 3, os grupos de Lie compactos simples de posto baixo que possuem uma representação de códon são os seguintes:

$$\text{SU}(2) , \text{SU}(3) , \text{Sp}(4) , G_2 , \text{SU}(4) , \text{Sp}(6) . \quad (2.1)$$

2.1 Primeira Etapa

A primeira etapa da análise consiste em determinar, para cada um dos grupos da lista (2.1), (a) todos os seus subgrupos maximais e (b) a decomposição da respectiva representação de códon sob restrição a cada um destes, ou seja, a regra de ramificação pertinente.

2.1.1 Subgrupos maximais

O primeiro passo é a determinação dos subgrupos maximais; o resultado final está resumido na Tabela 2.1 logo abaixo. Como em cada um destes casos, o grupo ambiente G é conexo e simples, todos os subgrupos maximais aqui são do tipo normalizador, de modo que podem ser encontrados determinando as subálgebras primitivas de \mathfrak{g} , usando para tanto as tabelas de [5] para subálgebras não simples e a análise de dimensões de representações irredutíveis das álgebras de Lie simples para subálgebras simples, sendo que nenhum dos casos que aparece pertence à “lista de exceções” de Dynkin. Os detalhes seguem.

1. $G = \text{SU}(3)$: As subálgebras primitivas \mathfrak{h} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$ são as seguintes:

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$, que é maximal e reductiva, com inclusão em \mathfrak{g} por matrizes diagonais em bloco $\begin{pmatrix} A_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & B_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, digamos, sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica em relação à conjugação pela matriz $\begin{pmatrix} 1_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, correspondendo ao espaço complexo projetivo $\mathbb{C}P^2 = \text{SU}(3)/\text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2))$ (tipo *A III*) [18, p. 518]. Neste caso, segue diretamente que $N_G(\mathfrak{h}) = \text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2))$, pois os elementos de $N_G(\mathfrak{h})$, que devem normalizar, separadamente, o centro $\mathfrak{u}(1)$ e a álgebra derivada $\mathfrak{su}(2)$ de \mathfrak{h} , são necessariamente diagonais em bloco (veja [5, Lemma 8.2]); em particular, $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial.
- $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2$, que é primitiva (sem ser maximal) e abeliana: \mathfrak{h} é a subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} e H_0 é o toro maximal \mathbb{T}^2 de G . Neste caso, é imediato que $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é o grupo de Weyl S_3 de \mathfrak{g} ; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h})$ é o seu produto semidireto com H_0 , pois as transposições τ_{12} e τ_{23} que geram S_3 podem ser representadas pelas matrizes

$$\tau_{12} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad \tau_{23} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

que pertencem a $\text{SU}(3)$ e normalizam H_0 , mostrando que o grupo quociente S_3 pode ser realizado como um subgrupo de $N_G(\mathfrak{h})$. Portanto, neste caso, a sequência exata (1.9) cinde, tomando a forma

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{T}^2 \longrightarrow S_3 \times \mathbb{T}^2 \longrightarrow S_3 \longrightarrow \{1\}. \quad (2.2)$$

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$, que é maximal e simples, com inclusão em \mathfrak{g} por matrizes reais, ou ainda, pela representação irredutível de spin 1 (peso máximo 2), sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica em relação à conjugação complexa, correspondendo ao espaço simétrico $\text{SU}(3)/\text{SO}(3)$ (tipo *A I*) [18, p. 518]. Neste caso, é imediato que $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial, pois \mathfrak{h} não possui automorfismos externos. Ademais, devido ao lema de Schur, $Z_G(\mathfrak{h})$ é o centro $Z(G) = \mathbb{Z}_3$ de G ; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h})$ é o seu produto direto com H_0 .
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(4) \cong \mathfrak{so}(5)$. O grupo simplesmente conexo associado é $\text{Sp}(4) \cong \text{Spin}(5)$, que é um recobrimento duplo de $\text{SO}(5)$, mas neste caso é mais fácil trabalhar com o último, já que o normalizador de uma subálgebra \mathfrak{h} se comporta naturalmente sob recobrimentos. Portanto, suporemos aqui que $G = \text{SO}(5)$. As subálgebras primitivas \mathfrak{h} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5)$ são as seguintes:

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(4)$, que é maximal e semisimples, com inclusão em \mathfrak{g} por matrizes diagonais em bloco $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{4 \times 4} \end{pmatrix}$, sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica em relação à conjugação pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1_{4 \times 4} \end{pmatrix}$, correspondendo à esfera $S^4 \cong \text{SO}(5)/\text{SO}(4)$ (tipo *BDI*). (Se tivéssimos escolhido $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(4)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(2)$, $G = \text{Sp}(4)$ e $H_0 = \text{Sp}(2) \times \text{Sp}(2)$, teríamos chegado ao grassmanniano simplético $\text{Sp}(4)/(\text{Sp}(2) \times \text{Sp}(2))$ (tipo *CII*), que é isometricamente isomorfo a este.) Veja [18, pp. 518-519]. Neste caso, segue diretamente que $N_G(\mathfrak{h}) = \text{O}(4)$, pois os elementos de $N_G(\mathfrak{h})$ são necessariamente diagonais em bloco (veja [5, Lemma 8.2]). Ademais, como \mathfrak{h} é de posto máximo, $Z_G(\mathfrak{h})$ é contido em $H_0 = \text{SO}(4)$, de modo que a sequência exata (1.9) implica que $\text{Out}_G(\mathfrak{h}) = \mathbb{Z}_2$ e assim toma a forma

$$\{1\} \longrightarrow \text{SO}(4) \longrightarrow \text{O}(4) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \{1\}. \quad (2.3)$$

Note que essa sequência cinde, pois podemos realizar \mathbb{Z}_2 como subgrupo de $\text{O}(4)$, usando como representante de -1 qualquer matriz da forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_{4 \times 4} \end{pmatrix}$ onde $R \in \text{O}(4) \setminus \text{SO}(4)$, com $R^2 = 1$, é uma reflexão.

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(3)$, que é maximal e reductiva, com inclusão em \mathfrak{g} por matrizes diagonais em bloco $\begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & B_{3 \times 3} \end{pmatrix}$, sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica em relação à conjugação pela matriz $\begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$, correspondendo ao grassmanniano real $\text{SO}(5)/(\text{SO}(2) \times \text{SO}(3))$ (tipo *BDI*). (Se tivéssimos escolhido $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(4)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{u}(2)$, $G = \text{Sp}(4)$ e $H_0 = \text{U}(2)$, teríamos chegado ao espaço simétrico $\text{Sp}(4)/\text{U}(2)$ (tipo *CI*), que é isometricamente isomorfo a este.) Veja [18, pp. 518-519]. Neste caso, segue diretamente que $N_G(\mathfrak{h}) = \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3))$, pois os elementos de $N_G(\mathfrak{h})$, que devem normalizar, separadamente, o centro $\mathfrak{so}(2)$ e a álgebra derivada $\mathfrak{so}(3)$ de \mathfrak{h} , são necessariamente diagonais em bloco (veja [5, Lemma 8.2]). Ademais, como \mathfrak{h} é de posto máximo, $Z_G(\mathfrak{h})$ é contido em $H_0 = \text{SO}(2) \times \text{SO}(3)$, de modo que a sequência exata (1.9) implica que $\text{Out}_G(\mathfrak{h}) = \mathbb{Z}_2$ e assim toma a forma

$$\{1\} \longrightarrow \text{SO}(2) \times \text{SO}(3) \longrightarrow \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3)) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \{1\}. \quad (2.4)$$

Note que essa sequência cinde, pois podemos realizar \mathbb{Z}_2 como subgrupo de $\text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3))$, usando como representante de -1 qualquer matriz da forma $\begin{pmatrix} R_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$ onde $R \in \text{O}(2) \setminus \text{SO}(2)$ é uma reflexão.

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$, que é maximal e simples, com inclusão em \mathfrak{g} proporcionada pela representação irredutível de $\text{spin } 2$ (peso máximo 4). Neste caso, é imediato que $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial, pois \mathfrak{h} não possui automorfismos externos, enquanto que, devido ao lema de Schur, $Z_G(\mathfrak{h})$ é o centro de G , que é trivial; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h}) = H_0 = \text{SU}(2)$.

3. $G = G_2$: As subálgebras primitivas \mathfrak{h} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2$ são as seguintes:

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, que é maximal e semisimples, sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica, correspondendo ao espaço simétrico excepcional $G_2/(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))$ (tipo G) [18, p. 518]. Neste caso, $\mathrm{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial, pois o automorfismo externo de \mathfrak{h} que troca os dois fatores de $\mathfrak{su}(2)$ não pode ser implementado por conjugação com um elemento de G_2 . Ademais, como \mathfrak{h} é de posto máximo, $Z_G(\mathfrak{h})$ é contido em H_0 ; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h}) = H_0 = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$.
- $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(3)$, que é maximal e simples, realizada como a subálgebra gerada pelas raízes longas. Neste caso, $\mathrm{Out}_G(\mathfrak{h})$ é \mathbb{Z}_2 , pois o automorfismo externo de \mathfrak{h} pode ser implementado por conjugação com um elemento g_0 de G_2 , agindo sobre \mathfrak{g}_2 como $\mathrm{Ad}_{G_2}(g_0)$. Como $\ker \mathrm{Ad}_{G_2}$ é o centro de G_2 , que é trivial, o fato de $\mathrm{Ad}_{G_2}(g_0)$ ter ordem 2 implica que g_0 também tem ordem 2, mostrando que o grupo quociente \mathbb{Z}_2 pode ser realizado como um subgrupo de $N_G(\mathfrak{h})$. Ademais, como \mathfrak{h} é de posto máximo, $Z_G(\mathfrak{h})$ é contido em H_0 , de modo que a sequência exata (1.9) cinde e toma a forma:

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{SU}(3) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SU}(3) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \{1\}. \quad (2.5)$$

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$, que é maximal e simples, com inclusão em \mathfrak{g} proporcionada pela representação irredutível de $\mathrm{spin} 3$ (peso máximo 6), obtida por restrição da representação fundamental de \mathfrak{g}_2 de dimensão 7. Neste caso, é imediato que $\mathrm{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial, pois \mathfrak{h} não possui automorfismos externos, enquanto que, devido ao lema de Schur, $Z_G(\mathfrak{h})$ é o centro de G , que é trivial; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h}) = H_0 = \mathrm{SU}(2)$.
4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$. O grupo simplesmente conexo associado é $\mathrm{SU}(4) \cong \mathrm{Spin}(6)$, que é um recobrimento duplo de $\mathrm{SO}(6)$, mas neste caso é mais fácil trabalhar com o primeiro. Portanto, suporemos aqui que $G = \mathrm{SU}(4)$. As subálgebras primitivas \mathfrak{h} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4)$ são as seguintes:

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, que é maximal e reductiva, com inclusão em \mathfrak{g} por matrizes diagonais em bloco $\begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & B_{2 \times 2} \end{pmatrix}$ onde $A, B \in \mathfrak{u}(2)$ e $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0$, sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica em relação à conjugação pela matriz $\begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, correspondendo ao grassmanniano complexo $\mathrm{SU}(4)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2))$ (tipo $AIII$). (Se tivéssimos escolhido $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(6)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(4)$, $G = \mathrm{SO}(6)$ e $H_0 = \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(4)$, teríamos chegado ao grassmanniano real $\mathrm{SO}(6)/(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(4))$ (tipo BDI), que é isometricamente isomorfo a este.) Veja [18, pp. 518-519]. Neste caso, segue diretamente

que $N_G(\mathfrak{h})$ é o produto semidireto de $H_0 = S(U(2) \times U(2))$ com \mathbb{Z}_2 , pois os elementos de $N_G(\mathfrak{h})$ são necessariamente diagonais ou antidiagonais em bloco (veja [5, Lemma 7.6]), sendo que cada elemento antidiagonal pode ser escrito, de maneira única, como o produto de um elemento diagonal com a matriz antidiagonal $\begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$, que pertence a $SU(4)$ e tem quadrado 1, mostrando que o grupo quociente \mathbb{Z}_2 pode ser realizado como um subgrupo de $N_G(\mathfrak{h})$. Ademais, como \mathfrak{h} é de posto máximo, $Z_G(\mathfrak{h})$ é contido em H_0 , de modo que a sequência exata (1.9) implica que $\text{Out}_G(\mathfrak{h}) = \mathbb{Z}_2$ e assim toma a forma

$$\{1\} \longrightarrow S(U(2) \times U(2)) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times S(U(2) \times U(2)) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \{1\}. \quad (2.6)$$

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(3) \cong \mathfrak{u}(3)$, que é maximal e reductiva, com inclusão em \mathfrak{g} por matrizes diagonais em bloco $\begin{pmatrix} A_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & B_{3 \times 3} \end{pmatrix}$, digamos, sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica em relação à conjugação pela matriz $\begin{pmatrix} 1_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & -1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$, correspondendo ao espaço complexo projetivo $\mathbb{C}P^3 = SU(4)/S(U(1) \times U(3))$ (tipo *AIII*). (Se tivéssimos escolhido $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(6)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(3) \cong \mathfrak{u}(3)$, $G = SO(6)$ e $H_0 = U(3)$, teríamos chegado ao espaço simétrico $SO(6)/U(3)$ (tipo *DIII*), que é isometricamente isomorfo a este.) Veja [18, pp. 518-519]. Neste caso, segue diretamente que $N_G(\mathfrak{h}) = S(U(1) \times U(3))$, pois os elementos de $N_G(\mathfrak{h})$, que devem normalizar, separadamente, o centro $\mathfrak{u}(1)$ e a álgebra derivada $\mathfrak{su}(3)$ de \mathfrak{h} , são necessariamente diagonais em bloco (veja [5, Lemma 8.2]); em particular, $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial.
- $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, que é maximal e semisimples, com inclusão em \mathfrak{g} por matrizes reais, ou ainda, pela representação irredutível obtida como o produto tensorial de duas cópias da representação fundamental de $\mathfrak{su}(2)$, de spin $\frac{1}{2}$ (peso máximo 1), sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica, correspondendo ao espaço simétrico $SU(4)/SO(4)$ (tipo *AI*) [18, p. 518]. Neste caso, $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é \mathbb{Z}_2 , pois o automorfismo externo de \mathfrak{h} dado por conjugação com a matriz $\begin{pmatrix} 1_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & -1_{3 \times 3} \end{pmatrix} \in O(4) \setminus SO(4)$, digamos (e que troca os dois fatores de $\mathfrak{su}(2)$), pode ser implementado por conjugação com a matriz (4×4) complexa $A = \alpha \begin{pmatrix} 1_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & -1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$, onde α é uma oitava raiz primitiva da unidade ($\alpha^4 = -1$) para garantir que $A \in SU(4)$. Ademais, devido ao lema de Schur, $Z_G(\mathfrak{h})$ é o centro $Z(G) = \mathbb{Z}_4$ de G , assim, segue que $Z_G(\mathfrak{h}) H_0$ é o seu produto com H_0 e $N_G(\mathfrak{h})$ é o produto do grupo cíclico de ordem 8 gerado por A com H_0 ¹ de modo que a sequência exata (1.9) toma a forma

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} SO(4) \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \times_{\mathbb{Z}_2} SO(4) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \{1\}, \quad (2.7)$$

¹Note que estes produtos não são diretos nem semidiretos, pois tanto o centro de $SU(4)$ como o subgrupo cíclico de $SU(4)$ de ordem 8 gerado por A intersectam $SO(4)$ no seu centro $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$.

onde o penúltimo homomorfismo consiste em tomar a quarta potência da primeira entrada.

- $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^3$, que é primitiva (sem ser maximal) e abeliana: \mathfrak{h} é a subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} e H_0 é o toro maximal \mathbb{T}^3 de G . Neste caso, é imediato que $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é o grupo de Weyl S_4 de \mathfrak{g} ; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h})$ é sua extensão com H_0 , porém não é um produto semidireto, pois S_4 pode ser realizado como subgrupo de $U(4)$ mas não de $SU(4)$. Portanto, neste caso, a sequência exata (1.9) não cinde, tomando a forma

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{T}^3 \longrightarrow S_4 \cdot \mathbb{T}^3 \longrightarrow S_4 \longrightarrow \{1\}. \quad (2.8)$$

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(4)$, que é maximal e simples, com inclusão em \mathfrak{g} por matrizes quaterniônicas, ou ainda, pela representação fundamental de dimensão 4, sendo que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica, correspondendo ao espaço simétrico $SU(4)/Sp(4)$ (tipo *AII*) [18, p. 518]. Neste caso, é imediato que $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial, pois \mathfrak{h} não possui automorfismos externos. Ademais, devido ao lema de Schur, $Z_G(\mathfrak{h})$ é o centro $Z(G) = \mathbb{Z}_4$ de G ; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h})$ é o seu produto direto com H_0 .

5. $G = Sp(6)$: As subálgebras primitivas \mathfrak{h} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(6)$ são as seguintes:

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(4)$, que é maximal e semisimples, com inclusão em \mathfrak{g} que, em termos de matrizes (3×3) quaterniônicas, é dada por matrizes diagonais em bloco $\begin{pmatrix} A_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & B_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, digamos, sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica em relação à conjugação pela matriz (3×3) quaterniônica $\begin{pmatrix} 1_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, correspondendo ao espaço quaterniônico projetivo $\mathbb{H}P^2 = Sp(6)/(Sp(2) \times Sp(4))$ (tipo *CII*) [18, p. 518]. Neste caso, segue diretamente que $N_G(\mathfrak{h}) = Sp(2) \times Sp(4)$, pois os elementos de $N_G(\mathfrak{h})$, que devem normalizar, separadamente, cada um dos dois ideais não-isomorfos $\mathfrak{sp}(2)$ e $\mathfrak{sp}(4)$ de \mathfrak{h} , são necessariamente diagonais em bloco (veja [5, Lemma 8.2]); em particular, $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial.
- $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(3) \cong \mathfrak{u}(3)$, que é maximal e reductiva, com inclusão em \mathfrak{g} que, em termos de matrizes (6×6) complexas, é dada por

$$A + iB \longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix},$$

sendo que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie ortogonal simétrica, correspondendo ao espaço simétrico $Sp(6)/U(3)$ (tipo *CI*) [18, p. 518]. Neste caso, $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é \mathbb{Z}_2 , pois o automorfismo externo de \mathfrak{h} dado por conjugação complexa pode ser implementado por conjugação com a matriz (6×6) complexa $C = \alpha \begin{pmatrix} 1_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & -1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$, onde α é

uma quarta raiz primitiva da unidade ($\alpha^2 = -1$) para garantir que $C \in \text{Sp}(6)$. Ademais, como \mathfrak{h} é de posto máximo, $Z_G(\mathfrak{h})$ é contido em $H_0 = \text{U}(3)$; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h})$ é uma extensão de H_0 por \mathbb{Z}_2 , porém não é um produto semidireto, pois é possível provar que não há nenhum elemento de ordem 2 na componente conexa de $N_G(\mathfrak{h})$ que não é a da identidade. (Para tanto, note que $\text{Sp}(6)$ pode ser definido por

$$\text{Sp}(6) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \in \text{U}(6) \right\}$$

onde a componente conexa da identidade de $N_G(\mathfrak{h})$ é o subgrupo

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \mid A + iB \in \text{U}(3) \right\}$$

enquanto que a outra componente conexa de $N_G(\mathfrak{h})$ é

$$\left\{ i \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \mid A + iB \in \text{U}(3) \right\}$$

Note que a matriz C acima tem ordem 4. Para excluir a possibilidade de que algum outro elemento desta componente tenha ordem 2, note que isso significaria que a correspondente matriz $A + iB \in \text{U}(3)$ satisfaça $A^2 + B^2 = -1$ e $[A, B] = 0$, implicando que as matrizes reais A e B sejam simultaneamente diagonalizáveis sobre \mathbb{C} com todos os autovalores puramente imaginários, o que em dimensão ímpar é impossível.) Portanto, neste caso, a sequência exata (1.9) não cinde, tomando a forma

$$\{1\} \longrightarrow \text{U}(3) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \cdot \text{U}(3) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \{1\}. \quad (2.9)$$

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, que é maximal e semisimples, com inclusão em \mathfrak{g} pela representação irredutível obtida como o produto tensorial da representação fundamental de $\mathfrak{su}(2)$, de spin $\frac{1}{2}$ (peso máximo 1), com a representação adjunta de $\mathfrak{su}(2)$, de spin 1 (peso máximo 2). Neste caso, $\text{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial, pois o automorfismo externo de \mathfrak{h} que troca os dois fatores de $\mathfrak{su}(2)$ não pode ser implementado por conjugação com uma matriz em $\text{Sp}(6)$. Ademais, devido ao lema de Schur, $Z_G(\mathfrak{h})$ é o centro $Z(G) = \mathbb{Z}_2$ de G , mas este já está contido em H_0 ; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h}) = H_0 = \text{Sp}(2) \times \text{SO}(3)$.
- $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(2) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, que é primitiva (sem ser maximal) e semisimples, com inclusão em \mathfrak{g} que, em termos de matrizes (3×3) quaterniônicas, é dada por matrizes diagonais. Neste caso, segue diretamente

que $N_G(\mathfrak{h})$ é o produto semidireto de $H_0 = \mathrm{Sp}(2)^3 \cong \mathrm{SU}(2)^3$ com S_3 (veja [5, Lemma 7.6]), sendo que aqui, as transposições τ_{12} e τ_{23} que geram S_3 são representadas pelas matrizes quaterniônicas

$$\tau_{12} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \tau_{23} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que pertencem a $\mathrm{Sp}(6)$ e normalizam H_0 , mostrando que o grupo quociente S_3 pode ser realizado como um subgrupo de $N_G(\mathfrak{h})$. Ademais, como \mathfrak{h} é de posto máximo, $Z_G(\mathfrak{h})$ é contido em H_0 , de modo que a sequência exata (1.9) implica que $\mathrm{Out}_G(\mathfrak{h}) = S_3$ e assim toma a forma

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{SU}(2)^3 \longrightarrow S_3 \times \mathrm{SU}(2)^3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow \{1\}. \quad (2.10)$$

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$, que é maximal e simples, com inclusão em \mathfrak{g} proporcionada pela representação irredutível de $\mathrm{spin} \frac{5}{2}$ (peso máximo 5). Neste caso, é imediato que $\mathrm{Out}_G(\mathfrak{h})$ é trivial, pois \mathfrak{h} não possui automorfismos externos. Ademais, devido ao lema de Schur, $Z_G(\mathfrak{h})$ é o centro $Z(G) = \mathbb{Z}_2$ de G ; assim, segue que $N_G(\mathfrak{h})$ é o seu produto direto com H_0 .

2.1.2 Regras de ramificação

Passando à determinação das decomposições das representações de códon sob restrição aos subgrupos maximais listados na Tabela 2.1, nossa estratégia será utilizar, para cada um deles, a sua decomposição sob restrição à sua componente conexa da identidade, que é conhecida [20, 24], e a partir desta reconstruir a decomposição procurada por fusão, que é a junção de várias representações irredutíveis de um subgrupo menor para formar uma única representação irredutível de um subgrupo maior. Obviamente, nos nove casos em que o subgrupo maximal em questão já é conexo, não há nada a fazer além de utilizar os resultados obtidos em [20]. A mesma afirmação vale nos dois casos em que o subgrupo maximal em questão é o produto direto de sua componente conexa com o centro de G , pois este é representado por múltiplos da identidade já na representação de códon original e portanto não acarreta qualquer tipo de fusão. Entre os oito casos remanescentes, seis são produtos semidiretos e dois não. Em qualquer caso, a tarefa principal é determinar se a decomposição obtida é “sobrevivente”, no sentido de permitir continuar o processo de quebra com a possibilidade de se chegar à distribuição de multipletos observada no código genético em alguma etapa posterior, ou não, usando para tanto os critérios desenvolvidos na Seção 1.4.

Grupo G Álgebra \mathfrak{g}	Subálgebra \mathfrak{h}	Tipo	$\text{Out}_G(\mathfrak{h})$	$N_G(\mathfrak{h})$
SU(3) $\mathfrak{su}(3)$	$\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ \mathbb{R}^2 $\mathfrak{so}(3)$	m, r , A III $p, a, -$ m, s , A I	$\{1\}$ S_3 $\{1\}$	$S(U(1) \times U(2))$ $S_3 \times \mathbb{T}^2$ $\mathbb{Z}_3 \times \text{SO}(3)$
SO(5) $\mathfrak{so}(5)$	$\mathfrak{so}(4)$ $\mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(3)$ $\mathfrak{su}(2)$	m, n , BDI / CII m, r , BDI / CI $m, s, -$	\mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_2 $\{1\}$	$O(4)$ $S(O(2) \times O(3))$ $SU(2)$
G_2 \mathfrak{g}_2	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{su}(3)$ $\mathfrak{su}(2)$	m, n , G $m, s, -$ $m, s, -$	$\{1\}$ \mathbb{Z}_2 $\{1\}$	$SU(2) \times SU(2)$ $\mathbb{Z}_2 \times SU(3)$ $SU(2)$
SU(4) $\mathfrak{su}(4)$	$\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(3)$ $\mathfrak{so}(4)$ \mathbb{R}^3 $\mathfrak{sp}(4)$	m, r , A III / BDI m, r , A III / DIII m, n , A I $p, a, -$ m, s , A II / BDI	\mathbb{Z}_2 $\{1\}$ \mathbb{Z}_2 S_4 $\{1\}$	$\mathbb{Z}_2 \times S(U(2) \times U(2))$ $S(U(1) \times U(3))$ $\mathbb{Z}_8 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{SO}(4)$ $S_4 \cdot \mathbb{T}^3$ $\mathbb{Z}_4 \times \text{Sp}(4)$
Sp(6) $\mathfrak{sp}(6)$	$\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(4)$ $\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(3)$ $\mathfrak{sp}(2) \times \mathfrak{so}(3)$ $\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(2)$ $\mathfrak{su}(2)$	m, n , CII m, r , CI $m, n, -$ $p, n, -$ $m, s, -$	$\{1\}$ \mathbb{Z}_2 $\{1\}$ S_3 $\{1\}$	$\text{Sp}(2) \times \text{Sp}(4)$ $\mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} U(3)$ $\text{Sp}(2) \times \text{SO}(3)$ $S_3 \times \text{Sp}(2)^3$ $SU(2)$

Tabela 2.1: A primeira quebra: subgrupos maximais

1. $G = \text{SU}(3)$:

- $H = \text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2))$, que é um subgrupo conexo. O esquema de ramificação pode ser consultado em [20, Tabela 8] (primeira e segunda coluna): obtemos 16 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, mas já aparecem 8 multipletos de dimensão ímpar; assim, qualquer cadeia que passa por este subgrupo é eliminada.
- $H = S_3 \ltimes \mathbb{T}^2$, que é o produto semidireto do toro maximal de G com o grupo de Weyl S_3 de G . Para encontrar a ramificação da representação irredutível de G de peso máximo $(3, 3)$ em representações irredutíveis de H , aplicamos a construção apresentada na Seção 1.3. O primeiro passo consiste em analisar como o grupo de Weyl S_3 de G age sobre os pesos desta representação. Identificando a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{su}(3)$ e o seu dual com o subespaço

$$\{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \cong \mathbb{R}^2$$

de \mathbb{R}^3 , onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica ortonormal de \mathbb{R}^3 , as raízes simples α_1 e α_2 são dadas por $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$ e os pesos fundamentais por $\lambda_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_3)$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 - 2e_3)$; portanto, o peso máximo Λ e os demais pesos na câmara de Weyl fundamental da representação de peso máximo $(3, 3)$ são os seguintes:

$$\begin{aligned} \Lambda &= 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 3e_1 - 3e_3 \\ \Lambda - \alpha_1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2e_1 + e_2 - 3e_3 \\ \Lambda - \alpha_2 &= 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3e_1 - e_2 - 2e_3 \\ \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 &= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2e_1 - 2e_3 \\ \Lambda - 2\alpha_1 - \alpha_2 &= 3\lambda_2 = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ \Lambda - \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 3\lambda_1 = 2e_1 - e_2 - e_3 \\ \Lambda - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 = e_1 - e_3 \end{aligned}$$

O conjunto completo dos pesos é obtido aplicando as permutações do grupo de Weyl e pode ser escrito na forma

$$\{k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 \in \mathbb{Z}^3 \mid k_1 + k_2 + k_3 = 0, -3 \leq k_i \leq 3\}$$

onde o grupo de Weyl age por permutações dos coeficientes k_i . (Para uma representação gráfica deste diagrama de pesos, veja a Figura 2.1.) Segue que entre os 5 pesos Λ , $\Lambda - \alpha_1$, $\Lambda - \alpha_2$, $\Lambda - \alpha_1 - \alpha_2$ e $\Lambda - 2\alpha_1 - 2\alpha_2$, todos localizados no interior da câmara de Weyl fundamental e portanto com grupo de estabilidade trivial, os primeiros três, tendo multiplicidade 1, geram um sexteto cada um, enquanto que o penúltimo, tendo multiplicidade 2, gera dois

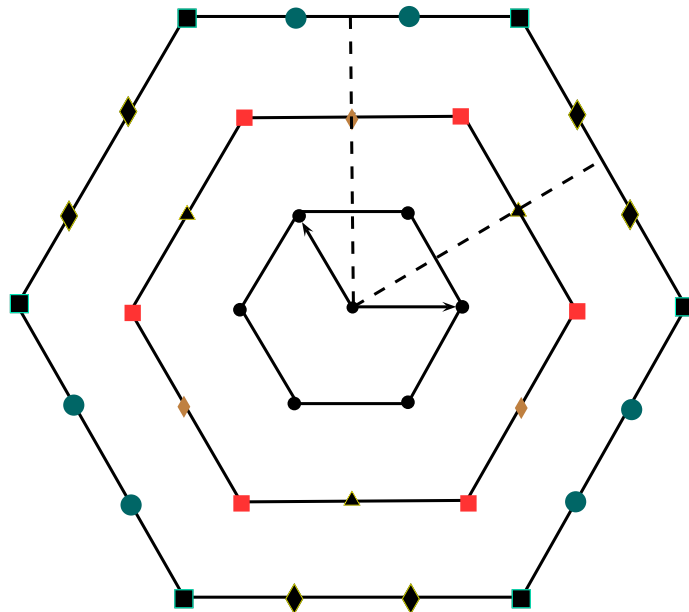


Figura 2.1: Diagrama de pesos da representação de códons de $SU(3)$ com indicação das órbitas sob o grupo de Weyl S_3

sextetos e o último, tendo multiplicidade 3, gera três sextetos. De modo semelhante, os 2 pesos $\Lambda - 2\alpha_1 - \alpha_2$ e $\Lambda - \alpha_1 - 2\alpha_2$, ambos localizados no bordo da câmara de Weyl fundamental, mas não conjugados sob a ação de S_3 , e ambos com grupo de estabilidade \mathbb{Z}_2 (o qual, sendo abeliano, admite apenas representações irredutíveis unidimensionais), tendo multiplicidade 2, geram dois tripletos cada um. Finalmente, resta o peso 0, com grupo de estabilidade S_3 e multiplicidade 4. Identificar a representação do grupo S_3 sobre o correspondente espaço de peso é a tarefa mais complicada da análise: isso determina se teremos dois dubletos, um dubleto e dois singletos ou quatro singletos. Felizmente, para os fins da presente investigação, podemos contornar esta questão, porque as outras informações já são suficientes para mostrar que a cadeia será eliminada:

- Quebrando S_3 para seu subgrupo maximal \mathbb{Z}_3 , os oito sextetos quebram em dois tripletos cada um e os quatro tripletos não quebram; assim, essa cadeia é eliminada por excesso de multipletos de dimensão ímpar.
 - Quebrando S_3 para seu subgrupo maximal \mathbb{Z}_2 (existem três deles, mas são todos conjugados), os oito sextetos quebram em três dubletos cada um e os quatro tripletos quebram em um dubleto e um singleto cada um; assim, essa cadeia é eliminada por excesso de singletos.
- $H = \mathbb{Z}_3 \times \text{SO}(3)$, que é o produto direto da sua componente conexa da identidade $H_0 = \text{SO}(3)$ com o centro de G . Assim, o esquema de ramificação para H é o mesmo que para H_0 , e este pode ser consultado em [20, Tabela 8] (terceira e quarta coluna): obtemos 8 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, mas todos são de dimensão ímpar; assim, qualquer cadeia que passa por este subgrupo é eliminada.
2. $G = \text{SO}(5)$, com grupo de recobrimento universal $\tilde{G} = \text{Spin}(5) \cong \text{Sp}(4)$: Neste item, denotaremos a imagem inversa de qualquer subgrupo H de G sob o homomorfismo de recobrimento $\text{Spin}(5) \rightarrow \text{SO}(5)$ por \tilde{H} . (Consideraremos apenas subgrupos \tilde{H} de \tilde{G} que contêm o centro \mathbb{Z}_2 de \tilde{G} e portanto coincidem com a imagem inversa de sua imagem H sob o referido homomorfismo de recobrimento, uma vez que subgrupos maximais de \tilde{G} são sempre deste tipo.)
- $H = \text{O}(4)$, que é o produto semidireto da sua componente conexa da identidade $H_0 = \text{SO}(4)$ com o grupo \mathbb{Z}_2 , que age sobre H_0 por conjugação por uma matriz da forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_{4 \times 4} \end{pmatrix}$, onde $R \in \text{O}(4) \setminus \text{SO}(4)$ é uma reflexão, com $R^2 = 1$. O esquema de ramificação para $\tilde{H}_0 = \text{Spin}(4)$ pode ser consultado em [20, Tabela 9] (terceira e quarta coluna): obtemos 8 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, e que, sob a ação de \mathbb{Z}_2 , formam pares conjugados que

se fundem para formar multipletos sob $\tilde{H} = \text{Pin}(4)$, todos então de dimensão par, conforme indicado na Tabela 2.2. Assim, qualquer quebra posterior para um subgrupo de \tilde{H} não totalmente contido em \tilde{H}_0 , ou para um subgrupo \mathbb{Z}_2 -invariante de \tilde{H}_0 , conterà somente multipletos de dimensão par e portanto está eliminada: apenas cadeias passando por \tilde{H}_0 e com quebra posterior para um subgrupo de \tilde{H}_0 não \mathbb{Z}_2 -invariante são sobreviventes.

Spin(5)		Pin(4)		Spin(4)			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d		
(3, 1)	64	$(3 - 2) \oplus (2 - 3)$	24	3 - 2	12		
				2 - 3	12		
		$(4 - 1) \oplus (1 - 4)$	20	4 - 1	10		
				1 - 4	10		
		$(2 - 1) \oplus (1 - 2)$	12	2 - 1	6		
				1 - 2	6		
		$(3 - 0) \oplus (0 - 3)$	8	3 - 0	4		
				0 - 3	4		
				4 subespaços		8 subespaços	

Tabela 2.2: Ramificação da representação dos códons de Spin(5) na cadeia Spin(5) \supset Pin(4) \supset Spin(4)

- $H = \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3)) = \mathbb{Z}_2 \ltimes (\text{SO}(2) \times \text{SO}(3))$, que é o produto semidireto da sua componente conexa da identidade $H_0 = \text{SO}(2) \times \text{SO}(3)$ com o grupo \mathbb{Z}_2 , que age sobre H_0 por conjugação por uma matriz da forma $\begin{pmatrix} R_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$, onde $R \in \text{O}(2) \setminus \text{SO}(2)$ é uma reflexão. Notamos que o grupo H_0 é reductivo, com centro $\text{SO}(2)$, e que o seu grupo derivado $\text{SO}(3)$ não é mais maximal em $\text{SO}(5)$; assim, o esquema de ramificação pertinente precisa ser construído indiretamente. Para tanto, empregamos a cadeia Spin(5) \supset Spin(4) \supset Spin(3), cujo primeiro passo já utilizamos no passo anterior. O resultado pode ser conferido na Tabela 2.3: obtemos 24 multipletos que permanecem inalterados sob inclusão do fator central, de modo que a quebra precisa terminar e portanto existe a possibilidade de congelamento, mas mesmo assim, essa cadeia é eliminada considerando o Spin(4)-multiplete 1 - 4, pois o código genético não contém multipletos nem de dimensão 5 e nem de dimensão 10. Porém, sob a

ação de \mathbb{Z}_2 , os multipletos sob \tilde{H}_0 se fundem (parcialmente) conforme indicado na Tabela 2.4, mostrando que as cadeias passando pelo subgrupo \tilde{H} são sobreviventes (mas notemos que o grupo discreto \mathbb{Z}_2 não deve ser quebrado, pois isso leva a uma cadeia passando por um subgrupo de \tilde{H}_0 , que não é sobrevivente).

- $\tilde{H} = \text{SU}(2)$, que é um subgrupo conexo. O esquema de ramificação pode ser consultada em [20, Tabela 9] (primeira e segunda coluna): obtemos 8 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, sendo que esta cadeia é sobrevivente.

3. $G = G_2$:

- $H = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$, que é um subgrupo conexo. O esquema de ramificação pode ser consultado em [20, Tabela 10] (primeira e segunda coluna): obtemos 8 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, sendo que esta cadeia é sobrevivente.
- $H = \mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$, que é o produto semidireto da sua componente conexa da identidade $H_0 = \text{SU}(3)$ com o grupo \mathbb{Z}_2 , que age sobre H_0 por conjugação complexa. O esquema de ramificação para H_0 pode ser consultado em [20, Tabela 10] (terceira e quarta coluna): obtemos 8 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, e que, sob a ação de \mathbb{Z}_2 , se fundem (parcialmente) conforme indicado na Tabela 2.5; assim, ambas as cadeias (tanto para H_0 como para H) são sobreviventes.
- $H = \text{SU}(2)$, que é um subgrupo conexo. O esquema de ramificação pode ser consultada em [20, Tabela 10] (quinta e sexta coluna): obtemos 6 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, mas todos são de dimensão ímpar: assim, qualquer cadeia que passa por este subgrupo é eliminada.

4. $G = \text{SU}(4)$:

- $H = \mathbb{Z}_2 \times \text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(2))$, que é o produto semidireto da sua componente conexa da identidade $H_0 = \text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(2))$ com o grupo \mathbb{Z}_2 , que age sobre H_0 por troca dos fatores $\text{U}(2)$. Notamos que o grupo H_0 é reductivo, com centro $\text{U}(1)$, e que o seu grupo derivado $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ não é mais maximal em $\text{SU}(4)$; assim, o esquema de ramificação pertinente precisa ser construído indiretamente. Para tanto, empregamos a cadeia $\text{SU}(4) \supset \text{Sp}(4) \supset \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$, usando as tabelas em [24, pp. 86 & 207]. O resultado pode ser conferido na Tabela 2.6: obtemos 14 multipletos que permanecem inalterados sob inclusão do fator central $\text{U}(1)$, de modo que a quebra precisa continuar, mas já aparecem 8 multipletos de dimensão ímpar; assim, qualquer cadeia que passa por

Spin(5)		Spin(4)		Spin(3)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	$2s$	d
(3, 1)	64	3 – 2	12	2	3
				2	3
				2	3
				2	3
		2 – 3	12	3	4
				3	4
				3	4
		4 – 1	10	1	2
				1	2
				1	2
				1	2
				1	2
		1 – 4	10	4	5
				4	5
		2 – 1	6	1	2
				1	2
				1	2
		1 – 2	6	2	3
				2	3
		3 – 0	4	0	1
				0	1
				0	1
				0	1
		0 – 3	4	3	4
		8 subespaços		24 subespaços	

Tabela 2.3: Ramificação da representação dos códons de Spin(5) na cadeia $\text{Spin}(5) \supset \text{Spin}(4) \supset \text{Spin}(3)$

Spin(5)		\tilde{H}		Spin(3)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	$2s$	d
(3, 1)	64	$(\pm 3) - 2$	6	2	3
				2	3
		$(\pm 1) - 2$	6	2	3
				2	3
		$(\pm 2) - 3$	8	3	4
				3	4
		$0 - 3$	4	3	4
		$(\pm 4) - 1$	4	1	2
				1	2
		$(\pm 2) - 1$	4	1	2
				1	2
		$0 - 1$	2	1	2
		$(\pm 1) - 4$	10	4	5
				4	5
		$(\pm 2) - 1$	4	1	2
				1	2
		$0 - 1$	2	1	2
		$(\pm 1) - 2$	6	2	3
				2	3
		$(\pm 3) - 0$	2	0	1
0	1				
$(\pm 1) - 0$	2	0	1		
		0	1		
$0 - 3$	4	3	4		
		14 subespaços		24 subespaços	

Tabela 2.4: Ramificação da representação dos códon de Spin(5) na cadeia $\text{Spin}(5) \supset \tilde{H} \supset \text{Spin}(3)$ com $H = \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3)) = \mathbb{Z}_2 \times (\text{SO}(2) \times \text{SO}(3))$

G_2		$\mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$		$\text{SU}(3)$	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1)	64	$(2, 1) \oplus (1, 2)$	30	(2, 1)	15
				(1, 2)	15
		(1, 1)	8	(1, 1)	8
		(1, 1)	8	(1, 1)	8
		$(2, 0) \oplus (0, 2)$	12	(2, 0)	6
				(0, 2)	6
$(1, 0) \oplus (0, 1)$	6	(1, 0)	3		
		(0, 1)	3		
		5 subespaços		8 subespaços	

Tabela 2.5: Ramificação da representação dos códon de G_2 na cadeia $G_2 \supset \mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3) \supset \text{SU}(3)$

este subgrupo é eliminada. Porém, sob a ação de \mathbb{Z}_2 , os H_0 -multipletos se fundem (parcialmente) conforme indicado na Tabela 2.7, mostrando que as cadeias passando pelo subgrupo H são sobreviventes (mas notemos que o grupo discreto \mathbb{Z}_2 não deve ser quebrado, pois isso leva a uma cadeia passando por um subgrupo de H_0 , que não é sobrevivente).

- $H = \text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(3))$, que é um subgrupo conexo. O esquema de ramificação pode ser consultado em [24, p. 86] (veja também a Tabela 2.8): obtemos 8 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, sendo que esta cadeia é sobrevivente.
- $H = \mathbb{Z}_8 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{SO}(4)$, que é o produto da sua componente conexa da identidade $H_0 = \text{SO}(4)$ com o grupo \mathbb{Z}_8 gerado pela matriz $A = \alpha \begin{pmatrix} 1_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & -1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$, onde α é uma oitava raiz primitiva da unidade ($\alpha^4 = -1$). O esquema de ramificação para H_0 pode ser consultado em [24, p. 86]: obtemos 8 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, mas todos são de dimensão ímpar; assim, qualquer cadeia que passa por este subgrupo é eliminada. Porém, sob a ação de conjugação por A , os H_0 -multipletos se fundem (parcialmente) conforme indicado na Tabela 2.9, mostrando que as cadeias passando pelo subgrupo H são sobreviventes (mas notemos que o grupo discreto \mathbb{Z}_8 não deve ser quebrado, pois isso leva a uma cadeia passando por um subgrupo de H_0 , que não é sobrevivente).

SU(4)		Sp(4)		SU(2) × SU(2)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 1)	64	(2, 1)	35	2 – 2	9
				3 – 1	8
				1 – 3	8
				1 – 1	4
				2 – 0	3
				0 – 2	3
		(0, 2)	14	2 – 2	9
				1 – 1	4
				0 – 0	1
		(2, 0)	10	1 – 1	4
				2 – 0	3
				0 – 2	3
		(0, 1)	5	1 – 1	4
				0 – 0	1
		4 subespaços		14 subespaços	

Tabela 2.6: Ramificação da representação dos códon de SU(4) na cadeia $SU(4) \supset Sp(4) \supset SU(2) \times SU(2)$

SU(4)		$\mathbb{Z}_2 \times S(U(2) \times U(2))$		SU(2) \times SU(2)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 1)	64	2 - 2	9	2 - 2	9
		$(3 - 1) \oplus (1 - 3)$	16	3 - 1	8
				1 - 3	8
		1 - 1	4	1 - 1	4
		$(2 - 0) \oplus (0 - 2)$	6	2 - 0	3
				0 - 2	3
		2 - 2	9	2 - 2	9
		1 - 1	4	1 - 1	4
		0 - 0	1	0 - 0	1
		1 - 1	4	1 - 1	4
		$(2 - 0) \oplus (0 - 2)$	6	2 - 0	3
				0 - 2	3
		1 - 1	4	1 - 1	4
0 - 0	1	0 - 0	1		
		11 subespaços		14 subespaços	

Tabela 2.7: Ramificação da representação dos códon de SU(4) na cadeia $SU(4) \supset \mathbb{Z}_2 \times S(U(2) \times U(2)) \supset SU(2) \times SU(2)$

SU(4)		S(U(1) × U(3))	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 1)	64	(2, 1)	15
		(1, 2)	15
		(1, 1)	8
		(1, 1)	8
		(2, 0)	6
		(0, 2)	6
		(1, 0)	3
		(0, 1)	3
		8 subespaços	

Tabela 2.8: Ramificação da representação dos códon de SU(4) na cadeia SU(4) \supset S(U(1) × U(3))

- $H = S_4 \cdot \mathbb{T}^3$, que é o produto do toro maximal de G com o grupo de Weyl S_4 de G . [Este não é um produto semidireto, mas tal defeito pode ser contornado usando o fato de que qualquer representação irredutível de SU(N) admite uma única extensão a uma representação irredutível de U(N): basta observar que se α é uma N -ésima raiz primitiva da unidade (por exemplo, $\alpha = \exp(2\pi i/N)$), de modo que a matriz $\alpha 1_N$ gera o centro \mathbb{Z}_N de SU(N), então a representação deve associar a esta matriz um múltiplo da identidade no espaço da representação, onde este múltiplo também é uma N -ésima raiz da unidade (porém, talvez não primitiva), e essa associação pode ser utilizada para definir a desejada extensão. Agora, o grupo de Weyl S_N de SU(N) pode ser realizada como subgrupo de SU(N) apenas se N for ímpar, mas sempre pode ser realizado como subgrupo de U(N).] Para encontrar a ramificação da representação irredutível de G de peso máximo (1, 1, 1) em representações irredutíveis de H , aplicamos a construção apresentada na Seção 1.3. O primeiro passo consiste em analisar como o grupo de Weyl S_4 de G age sobre os pesos desta representação. Identificando a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{su}(4)$ e o seu dual com o subespaço

$$\{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \cong \mathbb{R}^3$$

de \mathbb{R}^4 , onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica ortonormal de \mathbb{R}^4 , as raízes simples

SU(4)		$\mathbb{Z}_8 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{SO}(4)$		SO(4)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 1)	64	$(2 - 4) \oplus (4 - 2)$	30	2 - 4	15
				4 - 2	15
		2 - 2	9	2 - 2	9
		2 - 2	9	2 - 2	9
		$(0 - 4) \oplus (4 - 0)$	10	0 - 4	5
				4 - 0	5
		$(0 - 2) \oplus (2 - 0)$	6	0 - 2	3
				2 - 0	3
		5 subespaços		8 subespaços	

Tabela 2.9: Ramificação da representação dos códonos de SU(4) na cadeia $\text{SU}(4) \supset \mathbb{Z}_8 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{SO}(4) \supset \text{SO}(4)$

α_1 , α_2 e α_3 são dadas por $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$, $\alpha_3 = e_3 - e_4$ e os pesos fundamentais por $\lambda_1 = \frac{1}{4}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{1}{4}(3e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}(2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3) = \frac{1}{4}(2e_1 + 2e_2 - 2e_3 - 2e_4)$, $\lambda_3 = \frac{1}{4}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) = \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3 - 3e_4)$; portanto, o peso máximo Λ e os demais pesos na câmara de Weyl fundamental da representação de peso máximo (1, 1, 1) são os seguintes:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{4}(6e_1 + 2e_2 - 2e_3 - 6e_4) \\ \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 &= 2\lambda_3 = \frac{1}{4}(2e_1 + 2e_2 + 2e_3 - 6e_4) \\ \Lambda - \alpha_2 - \alpha_3 &= 2\lambda_1 = \frac{1}{4}(6e_1 - 2e_2 - 2e_3 - 2e_4) \\ \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= \lambda_2 = \frac{1}{4}(2e_1 + 2e_2 - 2e_3 - 2e_4) \end{aligned}$$

O conjunto completo dos pesos é obtido aplicando as permutações do grupo de Weyl. (Para uma representação gráfica deste diagrama de pesos, veja [15, p. 162].) Segue que o peso máximo Λ , localizado no interior da câmara de Weyl fundamental e portanto com grupo de estabilidade trivial, tendo multiplicidade 1, gera um multipletto de dimensão 24, enquanto que o peso $\Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$, localizado no bordo da câmara de Weyl fundamental e com grupo de estabilidade $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (o qual, sendo abeliano, admite apenas representações irredutíveis unidimensionais), tendo multiplicidade 4, gera 4 sextetos.² Finalmente, restam

²As multiplicidades são calculados usando a fórmula de Freudenthal [21, p. 122].

os pesos $\Lambda - \alpha_1 - \alpha_2$ e $\Lambda - \alpha_2 - \alpha_3$, também localizados no bordo da câmara de Weyl fundamental, mas não conjugados sob a ação de S_4 , e ambos com grupo de estabilidade S_3 e multiplicidade 2.² (Uma descrição mais explícita deste diagrama de pesos pode ser encontrada em [15, p. 263].) Novamente, identificar as representações do grupo S_3 sobre os correspondentes espaços de peso é a tarefa mais complicada da análise: isso determina se teremos, para cada um destes dois pesos, um octeto ou dois quartetos. Felizmente, para os fins da presente investigação, podemos contornar esta questão, porque as outras informações já são suficientes para mostrar que a cadeia será eliminada em um estágio posterior, i.e., quando quebramos para um subgrupo S'_4 de S_4 : para tanto, precisamos, para cada um dos oito pesos em questão, denotado por λ , diga, calcular seu grupo de estabilidade S'_λ em S'_4 e sua órbita $S'_4 \cdot \lambda \cong S'_4/S'_\lambda$ sob S'_4 , sendo que $S'_\lambda = S'_4 \cap S_\lambda$ onde $S_\lambda \cong S_3$ é o grupo de estabilidade de λ em S_4 , que é um subgrupo maximal de S_4 . Então há apenas duas alternativas: ou $S'_\lambda = S_\lambda$, i.e., $S'_4 \subset S_\lambda$, ou $S'_\lambda \neq S_\lambda$. No primeiro caso, a órbita de λ sob S'_4 é trivial, $S'_4 \cdot \lambda = \{\lambda\}$, enquanto que no segundo caso, S'_λ é um subgrupo próprio de S_λ : sendo assim, S'_λ é abeliano e portanto todas as suas representações irredutíveis são unidimensionais. No primeiro caso, a ambiguidade persiste: continuamos contornando a questão se o espaço de peso de λ , que é de dimensão 2, forma um dubleto ou quebra em dois singletos. No segundo caso, ele quebra em dois singletos.

- Quebrando S_4 para seu subgrupo maximal A_4 , obtemos 10 multipletos: o multipletto de dimensão 24 quebra em dois multipletos de dimensão 12, os quatro sextetos não quebram e os demais multipletos formam quatro quartetos ($A_4 \cap S_\lambda \cong \mathbb{Z}_3$ para todo λ); assim, a quebra precisa continuar. No entanto, considerando as próximas quebras, constatamos que
 - * Quebrando A_4 para seu subgrupo maximal $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (o grupo de Klein), obtemos 22 multipletos: os dois multipletos de dimensão 12 quebram em três quartetos cada um, os quatro sextetos quebram em três dubletos cada um e os quatro quartetos não quebram ($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cap S_\lambda \cong \{1\}$ para todo λ); assim, a quebra precisa terminar, mas não produziu nenhum tripleto e nenhum singleto.
 - * Quebrando A_4 para seu subgrupo maximal \mathbb{Z}_3 , obtemos 24 multipletos: os dois multipletos de dimensão 12 quebram em quatro tripletos cada um, os quatro sextetos quebram em dois tripletos cada um e os quatro quartetos quebram em um tripleto e um singleto cada um (vale $\mathbb{Z}_3 \subset S_\lambda$ para exatamente um dos quatro pesos λ e $\mathbb{Z}_3 \cap S_\lambda \cong \{1\}$ para os outros três pesos λ); assim, a quebra precisa terminar e portanto existe a possibilidade de congelamento, mas mesmo assim, essa

cadeia é eliminada, pois os multipletos de dimensão 12 não podem ser congelados e já produzem 8 tripletos.

- Quebrando S_4 para seu subgrupo maximal D_8 , obtemos 15 multipletos: o multipletto de dimensão 24 quebra em três octetos, os quatro sextetos quebram em um quarteto e um dubleto cada um e os demais multipletos formam quatro quartetos ($D_8 \cap S_\lambda \cong \mathbb{Z}_2$ para todo λ); assim, a quebra precisa continuar. No entanto, já não tem mais nenhuma possibilidade de, através de qualquer quebra posterior, gerar os três sextetos e dois tripletos do código genético; assim, essa cadeia é eliminada.
- Quebrando S_4 para seu subgrupo maximal S_3 (existem quatro deles, mas são todos conjugados), obtemos, no máximo, 20 multipletos: o multipletto de dimensão 24 quebra em quatro sextetos, os quatro sextetos quebram em dois tripletos cada um e os demais multipletos formam dois tripletos e um dubleto ou dois singletos (vale $S_3 = S_\lambda$ para exatamente um dos quatro pesos λ e $S_3 \cap S_\lambda \cong \mathbb{Z}_2$ para os outros três pesos λ); assim, essa cadeia é eliminada por excesso de multipletos de dimensão ímpar.
- $H = \mathbb{Z}_4 \times \text{Sp}(4)$, que é o produto direto da sua componente conexa da identidade $H_0 = \text{Sp}(4)$ com o centro de G . Assim, o esquema de ramificação para H é o mesmo que para H_0 , e este pode ser consultado em [24, p. 86] (veja também a Tabela 2.6): obtemos 4 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, sendo que ambas as cadeias (tanto para H_0 como para H) são sobreviventes. Porém, basta considerar apenas cadeias que passam por H_0 , pois o centro de G é representado por um múltiplo da identidade que é a mesma fase para todos os multipletos sob H_0 que aparecem e portanto não contribui para nenhuma quebra ou fusão posterior.

5. $G = \text{Sp}(6)$:

- $H = \text{Sp}(2) \times \text{Sp}(4)$, que é um subgrupo conexo. O esquema de ramificação pode ser consultada em [20, Tabela 11a] (quinta e sexta coluna): obtemos 6 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, sendo que esta cadeia é sobrevivente.
- $H = \mathbb{Z}_4 \rtimes_{\mathbb{Z}_2} \text{U}(3)$, que é o produto da sua componente conexa da identidade $H_0 = \text{U}(3)$ com o grupo \mathbb{Z}_2 gerado pela matriz $C = \alpha \begin{pmatrix} 1_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & -1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$, onde α é uma quarta raiz primitiva da unidade ($\alpha^2 = -1$). O esquema de ramificação para H_0 pode ser consultado em [24, p. 230]: obtemos 8 multipletos que permanecem inalterados sob inclusão do fator central $\text{U}(1)$, de modo que a quebra precisa continuar, e que, sob a ação de \mathbb{Z}_2 , se fundem (parcialmente) conforme indicado

Sp(6)		$\mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} U(3)$		U(3)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 0)	64	$(2, 1) \oplus (1, 2)$	30	(2, 1)	15
				(1, 2)	15
		(1, 1)	8	(1, 1)	8
		(1, 1)	8	(1, 1)	8
		$(2, 0) \oplus (0, 2)$	12	(2, 0)	6
				(0, 2)	6
		$(1, 0) \oplus (0, 1)$	6	(1, 0)	3
(0, 1)	3				
		5 subespaços		8 subespaços	

Tabela 2.10: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset \mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} U(3) \supset U(3)$

na Tabela 2.10; assim, ambas as cadeias (tanto para H_0 como para H) são sobreviventes.

- $H = \text{Sp}(2) \times \text{SO}(3)$, que é um subgrupo conexo. O esquema de ramificação pode ser consultada em [20, Tabela 11a] (terceira e quarta coluna): obtemos 6 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, sendo que esta cadeia é sobrevivente.
- $H = S_3 \times \text{Sp}(2)^3$, que é o produto semidireto da sua componente conexa da identidade $H_0 = \text{Sp}(2)^3$ com S_3 , que age sobre H_0 por permutações entre os fatores $\text{Sp}(2)$. O esquema de ramificação para H_0 pode ser consultado em [20, Tabela 11b] (terceira e quarta coluna): obtemos 14 multipletos que, sob a ação de S_3 , se fundem (parcialmente) conforme indicado na Tabela 2.11, sendo que ambas as cadeias (tanto para H_0 como para H) são sobreviventes.
- $H = \text{SU}(2)$, que é um subgrupo conexo. O esquema de ramificação pode ser consultada em [20, Tabela 11a] (primeira e segunda coluna): obtemos 8 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, sendo que esta cadeia é sobrevivente.

Sp(6)		$S_3 \times \text{Sp}(2)^3$		$\text{Sp}(2)^3$			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d		
(1, 1, 0)	64	1 - 1 - 1	8	1 - 1 - 1	8		
		1 - 1 - 1	8	1 - 1 - 1	8		
		$(2 - 1 - 0) \oplus (2 - 0 - 1) \oplus (1 - 2 - 0)$ \oplus $(0 - 2 - 1) \oplus (1 - 0 - 2) \oplus (0 - 1 - 2)$	36	2 - 1 - 0	6	2 - 1 - 0	6
				2 - 0 - 1	6	2 - 0 - 1	6
				1 - 2 - 0	6	1 - 2 - 0	6
				0 - 2 - 1	6	0 - 2 - 1	6
				1 - 0 - 2	6	1 - 0 - 2	6
				0 - 1 - 2	6	0 - 1 - 2	6
		$(1 - 0 - 0) \oplus (0 - 1 - 0) \oplus (0 - 0 - 1)$	6	1 - 0 - 0	2	1 - 0 - 0	2
				0 - 1 - 0	2	0 - 1 - 0	2
				0 - 0 - 1	2	0 - 0 - 1	2
		$(1 - 0 - 0) \oplus (0 - 1 - 0) \oplus (0 - 0 - 1)$	6	1 - 0 - 0	2	1 - 0 - 0	2
				0 - 1 - 0	2	0 - 1 - 0	2
				0 - 0 - 1	2	0 - 0 - 1	2
5 subespaços			14 subespaços				

Tabela 2.11: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset S_3 \times \text{Sp}(2)^3 \supset \text{Sp}(2)^3$

2.2 Segunda Etapa

Na segunda etapa da nossa análise, consideramos como ponto de partida apenas as cadeias sobreviventes da primeira etapa. Isso elimina, por exemplo, todas as cadeias provindas da representação de códon do grupo $SU(3)$. Também podemos descartar, desde já, as cadeias sobreviventes provindas das representações de códon dos grupos $Spin(5)$ e $Sp(6)$ que, na primeira etapa, passam pelo subgrupo $SU(2)$: ambas levam à mesma distribuição de multipletos sob $SU(2)$, a saber, 8 multipletos de dimensões 14, 12, 10, 8 (duas vezes), 6, 4 e 2, e tendo em vista que todos os multipletos de dimensão > 6 terão que ser quebrados, qualquer quebra posterior não poderá deixar mais do que um sexteto. Finalmente, podemos descartar as cadeias sobreviventes provindas das representações de códon dos grupos $SU(4)$ e $Sp(6)$ que, na primeira etapa, passam pelo subgrupo $SU(3)$ (mais exatamente, passam por $S(U(1) \times U(3))$ e $U(3)$, respectivamente): novamente, todas elas levam à mesma distribuição de multipletos sob $SU(3)$, a saber, 8 multipletos de dimensões 15, 8, 6 e 3 (duas vezes cada um), e tendo em vista que os subgrupos de $SU(3)$ que podem aparecer em estágios posteriores do processo são, a menos de conjugação, invariantes sob conjugação complexa e portanto o “pareamento” de representações em pares complexo conjugados (ou no caso de representações reais ou pseudo-reais, em duplas) é estável sob restrição a estes subgrupos, tal distribuição de multipletos leva a esquemas onde todas as multiplicidades são pares e que assim se tornam incapazes de reproduzir os 3 sextetos, 5 quartetos e 9 dubletos do código genético.

Sendo assim, restam os grupos e subgrupos contidos na listagem a seguir, sendo que todos os subgrupos maximais dos quais precisaremos podem ser deduzidos a partir da Tabela 2.1.

1. $G = SO(5)$, $\tilde{G} = Spin(5) \cong Sp(4)$:

- $H = SO(4)$: Neste caso, temos apenas 8 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.2), de modo que a quebra precisa continuar. Quebrando o primeiro fator $SO(3)$, digamos, para seu subgrupo maximal $O(2)$, nota-se que chegamos exatamente à mesma distribuição de multipletos como no caso seguinte (veja a Tabela 2.4).
- $H = S(O(2) \times O(3)) = \mathbb{Z}_2 \times (SO(2) \times SO(3))$: Neste caso, temos apenas 14 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.4), de modo que a quebra precisa continuar, e como já foi mencionado na seção anterior, o grupo discreto \mathbb{Z}_2 não deve ser quebrado. Assim, devemos quebrar o fator $SO(3)$ para $O(2)$ ou $SO(2)$. Mas como, além dos três sextetos, não há nenhum multipletos cuja dimensão seja um multipletos de 3, tais quebras não podem gerar os três sextetos e dois tripletos do código genético.

Assim, todas as cadeias baseadas em $SO(5)$ (ou mais exatamente, $Spin(5) \cong Sp(4)$) são eliminadas.

2. $G = G_2$:

- $H = SU(2) \times SU(2)$: Neste caso, todas as quebras possíveis para subgrupos subsequentes já foram analisadas em [20]; assim, podemos nos restringir a transferir os resultados para o resumo apresentado na Seção 2.3.
- $H = \mathbb{Z}_2 \times SU(3)$: Neste caso, temos apenas 5 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.5), de modo que a quebra precisa continuar. Analisaremos primeiro o que acontece quando preservamos o fator \mathbb{Z}_2 e quebramos o fator $SU(3)$ para um dos três subgrupos maximais já listados na Tabela 2.1.
 - Quebrando $\mathbb{Z}_2 \times SU(3)$ para o subgrupo $\mathbb{Z}_2 \times S(U(1) \times U(2))$, obtemos 19 multipletos e ainda temos um octeto (veja a Tabela 2.12), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, considerando as próximas quebras, constatamos que
 - * quando quebramos de $\mathbb{Z}_2 \times S(U(1) \times U(2))$ para $S(U(1) \times U(2))$, obtemos 30 multipletos, de modo que a quebra precisa terminar e portanto existe a possibilidade de congelamento, sendo que o octeto e um dos quartetos devem ser quebrados enquanto que os sextetos e dubletos e três dos quartetos devem ser congelados, o que é incompatível com as regras do congelamento;
 - * quando quebramos de $\mathbb{Z}_2 \times S(U(1) \times U(2))$ para $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$, obtemos 25 multipletos, de modo que a quebra precisa terminar e portanto existe a possibilidade de congelamento, sendo que o octeto deve ser quebrado e os sextetos e tripletos devem ser congelados, mas como os quartetos e dubletos não são atingidos por essa quebra, resultam 6 quartetos e 8 dubletos;
 - Quebrando $\mathbb{Z}_2 \times SU(3)$ para o subgrupo $\mathbb{Z}_2 \times (S_3 \times \mathbb{T}_2)$, obtemos 11 multipletos e ainda temos um multipletos de dimensão 12 e oito sextetos (veja a Tabela 2.13), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, considerando as próximas quebras, constatamos que
 - * o fator \mathbb{Z}_2 deve ser mantido, pois caso contrário, obtemos 18 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, mas já aparecem 12 tripletos;
 - * quando quebramos de $\mathbb{Z}_2 \times (S_3 \times \mathbb{T}_2)$ para $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{T}_2)$, obtemos 23 multipletos, de modo que a quebra precisa terminar, mas não produziu nenhum triplete e nenhum singleto;

- * quando quebramos de $\mathbb{Z}_2 \times (S_3 \times \mathbb{T}_2)$ para $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{T}_2)$, obtemos 14 multipletos (oito sextetos, quatro tripletos e dois dubletos), de modo que a quebra precisa continuar, mas já não há mais como produzir quartetos.
- Quebrando $\mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$ para o subgrupo $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \times \text{SO}(3))$, obtemos 10 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão 14, 10 e 5 (veja a Tabela 2.14), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, considerando as próximas quebras, constatamos que
 - * o fator \mathbb{Z}_2 deve ser mantido, pois caso contrário, obtemos 16 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, mas todos são de dimensão ímpar;
 - * quando quebramos de $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \times \text{SO}(3))$ para $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \times \text{O}(2))$, obtemos 25 multipletos, de modo que a quebra precisa terminar, mas produziu apenas dois sextetos.
- Finalmente, quebrando $\mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$ primeiro para $\text{SU}(3)$ e depois quebrando este subgrupo para um dos três subgrupos maximais já listados na Tabela 2.1, os últimos dois não apresentam nenhuma novidade, enquanto que no caso do primeiro, ou seja, do subgrupo $\text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2))$, obtemos 30 multipletos, de modo que a quebra precisa terminar e portanto existe a possibilidade de congelamento, mas mesmo assim, essa cadeia é eliminada, pois os multipletos de dimensão 15 e 8 não podem ser congelados e já produzem 6 tripletos e 4 singletos.

Assim, todas as cadeias baseadas em $G_2 \supset \mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$ são eliminadas.

G_2		$\mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$		$\mathbb{Z}_2 \times \text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2))$			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	$2s \oplus 2s$ ou $2s$	d		
(1, 1)	64	$(2, 1) \oplus (1, 2)$	30	$3 \oplus 3$	8		
				$2 \oplus 2$	6		
				$2 \oplus 2$	6		
				$1 \oplus 1$	4		
				$1 \oplus 1$	4		
				$0 \oplus 0$	2		
		(1, 1)	8	(1, 1)	8	2	3
						1	2
						1	2
						0	1
		(1, 1)	8	(1, 1)	8	2	3
						1	2
						1	2
						0	1
		$(2, 0) \oplus (0, 2)$	12	$(2, 0) \oplus (0, 2)$	12	$2 \oplus 2$	6
						$1 \oplus 1$	4
						$0 \oplus 0$	2
		$(1, 0) \oplus (0, 1)$	6	$(1, 0) \oplus (0, 1)$	6	$1 \oplus 1$	4
						$0 \oplus 0$	2
		5 subespaços		19 subespaços			

Tabela 2.12: Ramificação da representação dos códon de G_2 na cadeia $G_2 \supset \mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3) \supset \mathbb{Z}_2 \times \text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2))$

G_2		$\mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$		$\mathbb{Z}_2 \times (S_3 \times \mathbb{T}_2)$	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d		d
(1, 1)	64	$(2, 1) \oplus (1, 2)$	30	$6 \oplus 6$	12
				$3 \oplus 3$	6
				$3 \oplus 3$	6
				$3 \oplus 3$	6
		(1, 1)	8	6	6
				2	2
		(1, 1)	8	6	6
				2	2
		$(2, 0) \oplus (0, 2)$	12	$3 \oplus 3$	6
				$3 \oplus 3$	6
		$(1, 0) \oplus (0, 1)$	6	$3 \oplus 3$	6
		5 subespaços		11 subespaços	

Tabela 2.13: Ramificação da representação dos códons de G_2 na cadeia
 $G_2 \supset \mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3) \supset \mathbb{Z}_2 \times (S_3 \times \mathbb{T}_2)$

G_2		$\mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$		$\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \times \text{SO}(3))$	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	$2s \oplus 2s$ ou $2s$	d
(1, 1)	64	$(2, 1) \oplus (1, 2)$	30	$6 \oplus 6$	14
				$4 \oplus 4$	10
				$2 \oplus 2$	6
		(1, 1)	8	4	5
				2	3
		(1, 1)	8	4	5
				2	3
		$(2, 0) \oplus (0, 2)$	12	$4 \oplus 4$	10
				$0 \oplus 0$	2
$(1, 0) \oplus (0, 1)$	6	$2 \oplus 2$	6		
		5 subespaços		10 subespaços	

Tabela 2.14: Ramificação da representação dos códons de G_2 na cadeia $G_2 \supset \mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3) \supset \mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \times \text{SO}(3))$

3. $G = \text{SU}(4)$:

- $H = \mathbb{Z}_2 \times \text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(2))$: Neste caso, temos apenas 11 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.7), de modo que a quebra precisa continuar, e como já foi mencionado na seção anterior, o grupo discreto \mathbb{Z}_2 não deve ser quebrado. Assim, devemos quebrar ambos os fatores $\text{SU}(2)$ em $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \subset \text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(2))$ para $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$ ou $\text{U}(1)$, e isso de forma simétrica sob a troca. Agora, quebrando $\mathbb{Z}_2 \times \text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(2))$ para o subgrupo $\mathbb{Z}_2 \times ((\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)))$, obtemos 18 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, mas já aparecem 4 singletos; assim, qualquer cadeia que passa por este subgrupo é eliminada.
- $H = \text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(3))$: Neste caso, temos apenas 8 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.8), de modo que a quebra precisa continuar. Observe que a distribuição de multipletos encontrada é exatamente a mesma que no caso em que G_2 é quebrado para $\mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$ e depois para $\text{SU}(3)$ (veja a Tabela 2.5); portanto, a discussão das possíveis quebras para aquele caso mostra que todas essas cadeias são eliminadas.
- $H = \mathbb{Z}_8 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{SO}(4)$: Neste caso, temos apenas 5 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.9), de modo que a quebra precisa continuar, e como já foi mencionado na seção anterior, o grupo discreto \mathbb{Z}_2 não deve ser quebrado. Assim, devemos quebrar ambos os fatores $\text{SU}(2)$ em $\text{SO}(4) \cong (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))/\mathbb{Z}_2$ para $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$ ou $\text{U}(1)$, e isso de forma simétrica sob a troca. Agora, quebrando $\mathbb{Z}_8 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{SO}(4)$ para $\mathbb{Z}_8 \times (((\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)))/\mathbb{Z}_2)$, obtemos 17 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, mas já não é mais capaz de produzir os dois tripletos, pois além de 2 singletos, todos os outros multipletos têm dimensão par.
- $H = \text{Sp}(4)$: Neste caso, temos apenas 4 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.6), de modo que a quebra precisa continuar. Analisaremos o que acontece quando quebramos $\text{Sp}(4)$ para cada um dos três subgrupos maximais já listados na Tabela 2.1.
 - Quebrando $\text{Sp}(4)$ para o subgrupo $\text{Pin}(4) = \mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))$ que recobre o subgrupo maximal $\text{O}(4)$ de $\text{SO}(5)$, obtemos 11 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.15), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, a distribuição de multipletos que aparece é igual à que resultou da quebra de $\text{SU}(4)$ para seu subgrupo maximal $\mathbb{Z}_2 \times \text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(2))$ (veja a Tabela 2.7),³ da qual já sabemos que

³Note a diferença sutil entre os dois subgrupos, por um fator $\text{U}(1)$, mas eles têm as mesmas representações.

será eliminada no próximo passo.

- Quebrando $\text{Sp}(4)$ para o subgrupo \tilde{H} que recobre o subgrupo maximal $H = \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3)) = \mathbb{Z}_2 \times (\text{SO}(2) \times \text{SO}(3))$ de $\text{SO}(5)$, o esquema de ramificação pertinente precisa ser construído indiretamente. Para tanto, empregamos a cadeia $\text{SU}(4) \supset \text{Spin}(5) \supset \text{Spin}(4) \supset \text{Spin}(3)$, cujo primeiro passo já utilizamos no passo anterior. O resultado pode ser conferido na Tabela 2.16: obtemos 30 multipletos que permanecem inalterados sob inclusão do fator central, de modo que a quebra precisa terminar e portanto existe a possibilidade de congelamento, mas mesmo assim, essa cadeia é eliminada por excesso de multipletos de dimensão ímpar. Porém, sob a ação de \mathbb{Z}_2 , os multipletos sob \tilde{H}_0 se fundem (parcialmente) conforme indicado na Tabela 2.17, formando 19 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, mas já aparecem 4 singletos.
- Quebrando $\text{Sp}(4)$ para o subgrupo maximal $\text{SU}(2)$, obtemos 10 multipletos (veja a Tabela 2.18), de modo que a quebra precisa continuar, mas todos os multipletos são de dimensão ímpar; assim, qualquer cadeia que passa por este subgrupo é eliminada.

4. $G = \text{Sp}(6)$:

- $H = \mathbb{Z}_4 \times_{\mathbb{Z}_2} \text{U}(3)$: Neste caso, temos apenas 5 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.10), de modo que a quebra precisa continuar. Observe que a distribuição de multipletos encontrada é exatamente a mesma que no caso em que G_2 é quebrado para $\mathbb{Z}_2 \times \text{SU}(3)$ (veja a Tabela 2.5); portanto, a discussão das possíveis quebras para aquele caso mostra que todas essas cadeias são eliminadas.
- $H = \text{Sp}(2) \times \text{SO}(3)$: Neste caso, temos apenas 6 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 , de modo que a quebra precisa continuar. Para a próxima quebra, temos as seguintes possibilidades:
 - Quebrando o primeiro fator $\text{Sp}(2)$ de H para $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$, obtemos 8 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.19), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, já não tem mais nenhuma possibilidade de, através de qualquer quebra posterior, gerar os três sextetos e dois tripletos do código genético; assim, essa cadeia é eliminada.
 - Quebrando o segundo fator $\text{SO}(3)$ de H para $\text{O}(2)$, obtemos 15 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.20), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, já não tem mais

SU(4)		Sp(4)		$\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))$	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 1)	64	(2, 1)	35	$(3, 1) \oplus (1, 3)$	16
				$(2, 2)$	9
				$(2, 0) \oplus (0, 2)$	6
				$(1, 1)$	4
		(0, 2)	14	$(2, 2)$	9
				$(1, 1)$	4
				$(0, 0)$	1
		(2, 0)	10	$(2, 0) \oplus (0, 2)$	6
				$(1, 1)$	4
		(0, 1)	5	$(1, 1)$	4
				$(0, 0)$	1
		4 subespaços		11 subespaços	

Tabela 2.15: Ramificação da representação dos códon de SU(4) na cadeia $\text{SU}(4) \supset \text{Sp}(4) \supset \mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))$

SU(4)		Spin(5)		Spin(4)		Spin(3)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	$2s$	d
(1, 1, 1)	64	(2, 1)	35	3 - 1	8	1	2
						1	2
						1	2
						1	2
				1 - 3	8	3	4
						3	4
				2 - 2	9	2	3
						2	3
						2	3
				2 - 0	3	0	1
						0	1
						0	1
				0 - 2	3	2	3
						2	3
		1 - 1	4	1	2		
				1	2		
		(0, 2)	14	2 - 2	9	2	3
						2	3
						2	3
				1 - 1	4	1	2
						1	2
		0 - 0	1	0	1		
		(2, 0)	10	2 - 0	3	0	1
						0	1
						0	1
				1 - 1	4	1	2
						1	2
		0 - 2	3	2	3		
		(0, 1)	5	1 - 1	4	1	2
						1	2
0 - 0	1			0	1		
		4 subespaços		14 subespaços		30 subespaços	

Tabela 2.16: Ramificação da representação dos códon de SU(4) na cadeia $SU(4) \supset Spin(5) \supset Spin(4) \supset Spin(3)$

SU(4)		Spin(5)		\tilde{H}		Spin(3)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	$2s$	d
(1, 1, 1)	64	(2, 1)	35	$(\pm 3) - 1$	4	1	2
						1	2
				$(\pm 1) - 1$	4	1	2
						1	2
				$(\pm 1) - 3$	8	3	4
						3	4
				$(\pm 2) - 2$	6	2	3
						2	3
				$0 - 2$	3	2	3
				$(\pm 2) - 0$	2	0	1
						0	1
				$0 - 0$	1	0	1
				$0 - 2$	3	2	3
				$(\pm 1) - 1$	4	1	2
						1	2
				(0, 2)	14	$(\pm 2) - 2$	6
		2	3				
		$0 - 2$	3			2	3
		$(\pm 1) - 1$	4			1	2
				1	2		
		(2, 0)	10	$(\pm 2) - 0$	2	0	1
						0	1
				$0 - 0$	1	0	1
				$(\pm 1) - 1$	4	1	2
		1	2				
		$0 - 2$	3	2	3		
		(0, 1)	10	$(\pm 1) - 1$	4	1	2
						1	2
				$0 - 0$	1	0	1
				4 subespaços		19 subespaços	

Tabela 2.17: Ramificação da representação dos códon de SU(4) na cadeia
 $SU(4) \supset Spin(5) \supset \tilde{H} \supset Spin(3)$
 onde \tilde{H} é o grupo de recobrimento de $H = S(O(2) \times O(3))$

SU(4)		Sp(4)		SU(2)			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	$2s$	d		
(1, 1, 1)	64	(2, 1)	35	10	11		
				8	9		
				6	7		
				4	5		
				2	3		
		(0, 2)	14	8	9		
				4	5		
		(2, 0)	10	6	7		
				2	3		
		(0, 1)	5	4	5		
				4 subespaços		10 subespaços	

Tabela 2.18: Ramificação da representação dos códon de SU(4) na cadeia $SU(4) \supset Sp(4) \supset SU(2)$

Sp(6)		Sp(2) × SO(3)		(Z ₂ × U(1)) × SO(3)	
Peso Máximo	<i>d</i>	Peso Máximo	<i>d</i>	Peso Máximo	<i>d</i>
(1, 1, 0)	64	3 – 4	20	(±3) – 4	10
				(±1) – 4	10
		1 – 6	14	(±1) – 6	14
		3 – 2	12	(±3) – 2	6
				(±1) – 2	6
		1 – 4	10	(±1) – 4	10
		1 – 2	6	(±1) – 2	6
		1 – 0	2	(±1) – 0	2
		6 subespaços		8 subespaços	

Tabela 2.19: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(2) \times \text{SO}(3) \supset (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)) \times \text{SO}(3)$

nenhuma possibilidade de, através de qualquer quebra posterior, gerar os três sextetos e dois tripletos do código genético; assim, essa cadeia é eliminada.

- Quebrando H para o subgrupo diagonal Sp(2), obtemos 14 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a Tabela 2.21), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, já não tem mais nenhuma possibilidade de, através de qualquer quebra posterior, gerar os dois tripletos do código genético; assim, essa cadeia é eliminada.

Sp(6)		Sp(2) × SO(3)		Sp(2) × O(2)			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d		
(1, 1, 0)	64	3 - 4	20	3 - (±4)	8		
				3 - (±2)	8		
				3 - 0	4		
		1 - 6	14	1 - 6	14	1 - (±6)	4
						1 - (±4)	4
						1 - (±2)	4
						1 - 0	2
		3 - 2	12	3 - 2	12	3 - (±2)	8
						3 - 0	4
		1 - 4	10	1 - 4	10	1 - (±4)	4
						1 - (±2)	4
						1 - 0	2
		1 - 2	6	1 - 2	6	1 - (±2)	4
						1 - 0	2
		1 - 0	2	1 - 0	2	1 - 0	2
		6 subespaços		15 subespaços			

Tabela 2.20: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(2) \times \text{SO}(3) \supset \text{Sp}(2) \times \text{O}(2)$

Sp(6)		Sp(2) × SO(3)		diag(Sp(2))	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	$2s$	d
(1, 1, 0)	64	3 – 4	20	7	8
				5	6
				3	4
				1	2
		1 – 6	14	7	8
				5	6
		3 – 2	12	5	6
				3	4
				1	2
		1 – 4	10	5	6
				3	4
		1 – 2	6	3	4
				1	2
		1 – 0	2	1	2
		6 subespaços		14 subespaços	

Tabela 2.21: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(2) \times \text{SO}(3) \supset \text{diag}(\text{Sp}(2))$

- $H = \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2)$:⁴ Neste caso, temos apenas 6 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja, por exemplo, a terceira e quarta coluna de cada uma das Tabelas 2.22-2.29 abaixo), de modo que a quebra precisa continuar. Ademais, não podemos deixar de quebrar o fator $\text{Sp}(4)$ de H , pois caso contrário, permanecem multipletos cuja dimensão é um múltiplo de 5, e o código genético não contém nenhum multipletos deste tipo.
 - Quebrando o primeiro fator $\text{Sp}(4)$ de H para o subgrupo $\text{Pin}(4) = \mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))$ que recobre o subgrupo maximal $\text{O}(4)$ de $\text{SO}(5)$, obtemos 9 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 , de modo que a quebra precisa continuar. Considerando as próximas quebras, constatamos que:
 - * Quebrando o fator $\text{Pin}(4)$ de $\text{Pin}(4) \times \text{Sp}(2)$ para sua componente conexa $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$, chegamos ao subgrupo $\text{Sp}(2)^3$ e à distribuição de multipletos já exibida na quinta e sexta coluna da Tabela 2.11.
 - * Quebrando a componente conexa $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ do fator $\text{Pin}(4)$ de $\text{Pin}(4) \times \text{Sp}(2)$ para seu subgrupo maximal \mathbb{Z}_2 -invariante $\text{diag}(\text{SU}(2))$, obtemos 12 multipletos (veja a Tabela 2.22), de modo que a quebra precisa continuar.
 - * Quebrando a componente conexa $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ do fator $\text{Pin}(4)$ de $\text{Pin}(4) \times \text{Sp}(2)$ para seu subgrupo maximal \mathbb{Z}_2 -invariante $(\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$, obtemos 11 multipletos (veja a Tabela 2.23), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, já não tem mais nenhuma possibilidade de, através de qualquer quebra posterior, gerar os três sextetos e dois tripletos do código genético; assim, essa cadeia é eliminada.
 - * Quebrando o fator $\text{Sp}(2)$ de $\text{Pin}(4) \times \text{Sp}(2)$ para seu subgrupo maximal $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$, obtemos 10 multipletos (veja a Tabela 2.24), de modo que a quebra precisa continuar.
 - Quebrando o primeiro fator $\text{Sp}(4)$ de H para o subgrupo \tilde{H}' que recobre o subgrupo maximal $H' = \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3)) = \mathbb{Z}_2 \times (\text{SO}(2) \times \text{SO}(3))$ de $\text{SO}(5)$, o esquema de ramificação pertinente precisa ser construído indiretamente. Para tanto, empregamos a cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Spin}(5) \times \text{Sp}(2) \supset \text{Spin}(4) \times \text{Sp}(2) \supset \text{Spin}(3) \times \text{Sp}(2)$. O resultado pode ser conferido na Tabela 2.25: obtemos 24 multipletos que permanecem inalterados sob inclusão do fator central, de modo que a quebra precisa terminar e portanto existe a possibilidade de congelamento, mas mesmo assim, essa cadeia é

⁴A partir deste ponto, substituímos $\text{Sp}(2) \times \text{Sp}(4)$ por $\text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2)$ para facilitar a comparação com os esquemas de quebra obtidos em [19, 20].

eliminada porque há exatamente dois dubletos idênticos que, no último passo, quebram em singletos, de modo que um deles precisaria ser quebrado e o outro não, o que é incompatível com as regras do congelamento. Porém, sob a ação de \mathbb{Z}_2 , os multipletos sob $\tilde{H}'_0 \times \text{Sp}(2)$ se fundem (parcialmente) como indicado na Tabela 2.26, formando 16 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar. Considerando as próximas quebras, constatamos que:

- * Quebrando o fator \tilde{H}' de $\tilde{H}' \times \text{Sp}(2)$ para sua componente conexa \tilde{H}'_0 e descartando o centro desta, chegamos ao subgrupo $\text{Spin}(3) \times \text{Sp}(2)$ e à distribuição de multipletos já exibida na Tabela 2.26, que acabamos de eliminar.
 - * Quebrando a componente conexa \tilde{H}'_0 do fator \tilde{H}' de $\tilde{H}' \times \text{Sp}(2)$ para o subgrupo maximal obtido a partir da inclusão de $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$ em $\text{Spin}(3)$, chegamos a um subgrupo da forma $(\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))^2 \times \text{Sp}(2)$ e obtemos 18 multipletos (veja a Tabela 2.27), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, já não tem mais nenhuma possibilidade de, através de qualquer quebra posterior, gerar os três sextetos e dois tripletos do código genético; assim, essa cadeia é eliminada.
 - * Quebrando o fator $\text{Sp}(2)$ de $\tilde{H}' \times \text{Sp}(2)$ para seu subgrupo maximal $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$, obtemos 18 multipletos (veja a Tabela 2.28), de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, já não tem mais nenhuma possibilidade de, através de qualquer quebra posterior, gerar os três sextetos e dois tripletos do código genético; assim, essa cadeia é eliminada.
- Quebrando o primeiro fator $\text{Sp}(4)$ de H para o subgrupo maximal $\text{SU}(2)$, obtemos 9 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 , de modo que a quebra precisa continuar. Ademais, não podemos deixar de quebrar o fator $\text{SU}(2)$ de $\text{SU}(2) \times \text{Sp}(2)$, pois caso contrário, permanecem multipletos cuja dimensão é um múltiplo de 7 e de 5, e o código genético não contém nenhum multipletos deste tipo. No entanto, quebrando o fator $\text{SU}(2)$ de $\text{SU}(2) \times \text{Sp}(2)$ para seu subgrupo maximal $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$, obtemos 22 multipletos (veja a Tabela 2.29), de modo que a quebra precisa terminar e portanto existe a possibilidade de congelamento, mas mesmo assim, essa cadeia é eliminada, pois não gerou nenhum triplo e nenhum singlo.
 - Quebrando o segundo fator $\text{Sp}(2)$ de H para seu subgrupo maximal $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$ ou mesmo completamente, para o subgrupo $\text{U}(1)$, obtemos 7 e 11 multipletos, respectivamente, de modo que a quebra precisa continuar. Como já foi mencionado, o primeiro fator $\text{Sp}(4)$ de H precisa ser quebrado também, e se o quebrarmos para um dos seus subgrupos maximais,

como já foi feito acima, obtemos, respectivamente, 10 e 16 multipletos se quebrarmos para $\text{Pin}(4) = \mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))$ (veja a Tabela 2.24), 18 e 27 multipletos se quebramos para o recobrimento de $\text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3))$ (veja a Tabela 2.28) e 10 e 15 multipletos se quebrarmos para $\text{SU}(2)$ (veja a Tabela 2.30). Portanto, em todos estes casos, exceto um, a quebra ainda precisa continuar e assim todos os esquemas possíveis que resultam destas cadeias já estão contemplados nos casos analisados anteriormente. A exceção é a cadeia que termina no subgrupo $\tilde{H}' \times \text{U}(1)$ onde \tilde{H}' é o recobrimento de $\text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3))$, com 27 multipletos (veja a Tabela 2.31), sendo que aqui a quebra precisa terminar e portanto existe a possibilidade de congelamento, mas mesmo assim, essa cadeia é eliminada, pois os multipletos de dimensão 10 e 5 não podem ser congelados e já produzem 4 singletos (além dos dois já presentes anteriormente).

Em um primeiro resumo, concluímos que entre todas as cadeias que, na primeira etapa, passam pelo subgrupo maximal $\text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2)$ de $\text{Sp}(6)$, apenas as seguintes são sobreviventes:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(6) &\supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset (\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2) \\ &\supset \text{Sp}(2)^3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}(6) &\supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset (\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2) \\ &\supset (\mathbb{Z}_2 \times \text{diag}(\text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}(6) &\supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset (\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2) \\ &\supset (\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

A primeira, com todas as quebras possíveis para subgrupos subsequentes, já foi analisada por completo em [20]; assim, podemos nos restringir a transferir os resultados para o resumo apresentado na Seção 2.3. As outras duas requerem uma análise mais detalhada.

- A cadeia (2.12) (veja a Tabela 2.22): Note que ainda é preciso quebrar o fator $\mathbb{Z}_2 \times \text{diag}(\text{SU}(2))$ de $(\mathbb{Z}_2 \times \text{diag}(\text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2)$, pois caso contrário, não quebramos o octeto, e o código genético não contém nenhum octeto.
 - * Quebrando o fator \mathbb{Z}_2 de $(\mathbb{Z}_2 \times \text{diag}(\text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2)$, obtemos 18 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, com um esquema que também pode ser alcançado a partir de uma cadeia do tipo (2.11).
 - * Quebrando o fator $\text{diag}(\text{SU}(2))$ de $(\mathbb{Z}_2 \times \text{diag}(\text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2)$ para seu subgrupo maximal $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$, obtemos 16 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar. No entanto, já não tem mais nenhuma possibilidade de, através de qualquer quebra posterior, gerar os três sextetos e dois tripletos do código genético; assim, essa cadeia é eliminada.

- * Quebrando o fator $\text{Sp}(2)$ de $(\mathbb{Z}_2 \times \text{diag}(\text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2)$ para seu subgrupo maximal $\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)$, ou mesmo completamente, para o subgrupo $\text{U}(1)$, obtemos 13 e 21 multipletos, respectivamente. No segundo caso, a quebra precisa terminar, mas como a distribuição de multipletos obtida não é a do código genético, essa cadeia é eliminada. No primeiro caso, a quebra precisa continuar. Aqui, como antes, não podemos deixar de quebrar o fator $\mathbb{Z}_2 \times \text{diag}(\text{SU}(2))$, agora de $(\mathbb{Z}_2 \times \text{diag}(\text{SU}(2))) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$: quebrando \mathbb{Z}_2 ou $\text{diag}(\text{SU}(2))$, como já foi feito acima, obtemos 20 multipletos no primeiro caso e 16 multipletos no segundo. Portanto, em ambos os casos, a quebra ainda precisa continuar, e assim todos os esquemas possíveis que resultam destas cadeias já estão contempladas nos casos analisados anteriormente.
- A cadeia (2.13) (veja a Tabela 2.24): Note que ainda é preciso quebrar o fator $\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))$ de $(\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$, pois caso contrário, não quebramos um dos dois multipletos de dimensão 12, e o código genético não contém nenhum multipletos de dimensão 12.
 - * Quebrando o grupo $(\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$ para o subgrupo $(\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$, obtemos 16 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, com um esquema que também pode ser alcançado a partir de uma cadeia do tipo (2.11).
 - * Quebrando o grupo $(\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$ para o subgrupo $(\mathbb{Z}_2 \times \text{diag}(\text{SU}(2))) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$, obtemos 13 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, com um esquema que também pode ser alcançado a partir de uma cadeia do tipo (2.12), que já foi analisada.
 - * Quebrando o grupo $(\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$ para o subgrupo $(\mathbb{Z}_2 \times ((\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)))) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$, obtemos 12 multipletos, de modo que a quebra precisa continuar, com um esquema que também pode ser alcançado a partir de uma outra cadeia que já foi eliminada (veja a Tabela 2.23).

Assim, finalmente, concluímos que as cadeias que, na primeira etapa, passam pelo subgrupo maximal $\text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2)$ de $\text{Sp}(6)$, e que são capazes de reproduzir as degenerescências do código genético, são equivalentes a uma cadeia que, na segunda etapa, passa pelo subgrupo maximal conexo $\text{Sp}(2)^3$ de $\text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2)$, sendo que todas estas já foram analisadas em [19, 20].

Sp(6)		H_1		H_2		H_3			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d		
(1, 1, 0)	64	(2, 0) - 1	20	((2 - 0) \oplus (0 - 2)) - 1	12	(2 \oplus 2) - 1	12		
				(1 - 1) - 1	8	2 - 1	6		
						0 - 1	2		
		(1, 1) - 0	16	((2 - 1) \oplus (1 - 2)) - 0	12	(3 \oplus 3) - 0	8	(1 \oplus 1) - 0	4
				((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 0	4	(1 \oplus 1) - 0	4		
		(1, 0) - 2	12	((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 2	12	(1 \oplus 1) - 2	12		
		(0, 1) - 1	10	(1 - 1) - 1	8	2 - 1	6	0 - 1	2
				(0 - 0) - 1	2	0 - 1	2		
(1, 0) - 0	4	((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 0	4	(1 \oplus 1) - 0	4				
(0, 0) - 1	2	(0 - 0) - 1	2	0 - 1	2				
		6 subespaços		9 subespaços		12 subespaços			

Tabela 2.22: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia

$$\mathrm{Sp}(6) \supset H_1 \supset H_2 \supset H_3 \text{ com}$$

$$H_1 = \mathrm{Sp}(4) \times \mathrm{Sp}(2)$$

$$H_2 = (\mathbb{Z}_2 \times (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))) \times \mathrm{Sp}(2) = \mathrm{Pin}(4) \times \mathrm{Sp}(2)$$

$$H_3 = (\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{diag}(\mathrm{SU}(2))) \times \mathrm{Sp}(2)$$

Sp(6)		H_1		H_2		H_3			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d		
(1, 1, 0)	64	(2, 0) - 1	20	$((2 - 0) \oplus (0 - 2)) - 1$	12	$((\pm 2) - 0) \oplus (0 - (\pm 2)) - 1$	8		
				$(1 - 1) - 1$	8	$((0 - 0) \oplus (0 - 0)) - 1$	4		
				$(\pm 1) - (\pm 1) - 1$		$(\pm 1) - (\pm 1) - 1$	8		
		(1, 1) - 0	16	$((2 - 1) \oplus (1 - 2)) - 0$	12	$((\pm 2) - (\pm 1)) \oplus ((\pm 1) - (\pm 2)) - 0$	8	$((\pm 2) - (\pm 1)) \oplus ((\pm 1) - (\pm 2)) - 0$	8
				$(1 - 0) \oplus (0 - 1) - 0$	4	$(0 - (\pm 1)) \oplus ((\pm 1) - 0) - 0$	4	$(0 - (\pm 1)) \oplus ((\pm 1) - 0) - 0$	4
				$((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 0$	12	$((\pm 1) - 0) \oplus ((0 - (\pm 1)) - 0)$	12	$((\pm 1) - 0) \oplus ((0 - (\pm 1)) - 0)$	12
		(0, 1) - 1	10	$(1 - 1) - 1$	8	$(\pm 1) - (\pm 1) - 1$	8	$(\pm 1) - (\pm 1) - 1$	8
				$(0 - 0) - 1$	2	$0 - 0 - 1$	2	$0 - 0 - 1$	2
		(1, 0) - 0	4	$((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 0$	4	$((\pm 1) - 0) \oplus ((0 - (\pm 1)) - 0)$	4	$((\pm 1) - 0) \oplus ((0 - (\pm 1)) - 0)$	4
(0, 0) - 1	2	$(0 - 0) - 1$	2	$0 - 0 - 1$	2	$0 - 0 - 1$	2		
		6 subespaços		9 subespaços		11 subespaços			

Tabela 2.23: Ramificação da representação dos códons de Sp(6) na cadeia

$$\text{Sp}(6) \supset H_1 \supset H_2 \supset H_3 \text{ com}$$

$$H_1 = \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2)$$

$$H_2 = (\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2) = \text{Pin}(4) \times \text{Sp}(2)$$

$$H_3 = (\mathbb{Z}_2 \times ((\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)))) \times \text{Sp}(2)$$

Sp(6)		H_1		H_2		H_3	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 0)	64	(2, 0) - 1	20	$((2 - 0) \oplus (0 - 2)) - 1$	12	$((2 - 0) \oplus (0 - 2)) - (\pm 1)$	12
				$(1 - 1) - 1$	8	$1 - 1 - (\pm 1)$	8
		(1, 1) - 0	16	$((2 - 1) \oplus (1 - 2)) - 0$	12	$((2 - 1) \oplus (1 - 2)) - 0$	12
				$((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 0$	4	$((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 0$	4
		(1, 0) - 2	12	$((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 2$	12	$((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - (\pm 2)$	8
						$((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 0$	4
		(0, 1) - 1	10	$(1 - 1) - 1$	8	$1 - 1 - (\pm 1)$	8
						$(0 - 0) - 1$	2
(1, 0) - 0	4	$((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 0$	4	$((1 - 0) \oplus (0 - 1)) - 0$	4		
(0, 0) - 1	2	$(0 - 0) - 1$	2	$0 - 0 - (\pm 1)$	2		
		6 subespaços		9 subespaços		10 subespaços	

Tabela 2.24: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia

$$\text{Sp}(6) \supset H_1 \supset H_2 \supset H_3 \text{ com}$$

$$H_1 = \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2)$$

$$H_2 = (\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times \text{Sp}(2) = \text{Pin}(4) \times \text{Sp}(2)$$

$$H_3 = (\mathbb{Z}_2 \times (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$$

Sp(6)		Spin(5) × Sp(2)		Spin(4) × Sp(2)		Spin(3) × Sp(2)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 0)	64	(2, 0) - 1	20	(2 - 0) - 1	6	0 - 1	2
				0 - 1	2		
				0 - 1	2		
				(0 - 2) - 1	6	2 - 1	6
				(1 - 1) - 1	8	1 - 1	4
				1 - 1	4		
		(1, 1) - 0	16	(2 - 1) - 0	6	1 - 0	2
				1 - 0	2		
				1 - 0	2		
				(1 - 2) - 0	6	2 - 0	3
				2 - 0	3		
				(1 - 0) - 0	2	0 - 0	1
		0 - 0	1				
		(0 - 1) - 0	2	1 - 0	2		
		(1, 0) - 2	12	(1 - 0) - 2	6	0 - 2	3
				0 - 2	3		
				(0 - 1) - 2	6	1 - 2	6
		(0, 1) - 1	10	(1 - 1) - 1	8	1 - 1	4
				1 - 1	4		
				(0 - 0) - 1	2	0 - 1	2
		(1, 0) - 0	4	(1 - 0) - 0	2	0 - 0	1
				0 - 0	1		
				(0 - 1) - 0	2	1 - 0	2
		(0, 0) - 1	2	(0 - 0) - 1	2	0 - 1	2
		6 subespaços		14 subespaços		24 subespaços	

Tabela 2.25: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $Sp(6) \supset Spin(5) \times Sp(2) \supset Spin(4) \times Sp(2) \supset Spin(3) \times Sp(2)$

Sp(6)		Sp(4) × Sp(2)		$\tilde{H}' \times \text{Sp}(2)$		Spin(3) × Sp(2)			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d		
(1, 1, 0)	64	(2, 0) – 1	20	((±2) – 0) – 1	4	0 – 1	2		
				0 – 1	2	0 – 1	2		
				(0 – 0) – 1	2	0 – 1	2		
				(0 – 2) – 1	6	2 – 1	6		
				((±1) – 1) – 1	8	1 – 1	4		
				1 – 1	4	1 – 1	4		
				(1, 1) – 0	16	((±2) – 1) – 0	4	1 – 0	2
						1 – 0	2	1 – 0	2
		(0 – 1) – 0	2			1 – 0	2		
		((±1) – 2) – 0	6			2 – 0	3		
		2 – 0	3			2 – 0	3		
		((±1) – 0) – 0	2			0 – 0	1		
		0 – 0	1	0 – 0	1				
		(1, 0) – 2	12	((±1) – 0) – 2	6	0 – 2	3		
				0 – 2	3	0 – 2	3		
				(0 – 1) – 2	6	1 – 2	6		
		(0, 1) – 1	10	((±1) – 1) – 1	8	1 – 1	4		
				1 – 1	4	1 – 1	4		
				(0 – 0) – 1	2	0 – 1	2		
		(1, 0) – 0	4	((±1) – 0) – 0	2	0 – 0	1		
0 – 0	1			0 – 0	1				
(0 – 1) – 0	2			1 – 0	2				
(0, 0) – 1	2	(0 – 0) – 1	2	0 – 1	2				
		6 subespaços		16 subespaços		24 subespaços			

Tabela 2.26: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia
 $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset \tilde{H}' \times \text{Sp}(2) \supset \text{Spin}(3) \times \text{Sp}(2)$
 onde \tilde{H}' é o grupo de recobrimento de $H' = \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3))$

Sp(6)		Sp(4) × Sp(2)		$\tilde{H}' \times \text{Sp}(2)$		$(\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))^2 \times \text{Sp}(2)$			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d		
(1, 1, 0)	64	(2, 0) - 1	20	$((\pm 2) - 0) - 1$	4	$((\pm 2) - 0) - 1$	4		
				$(0 - 0) - 1$	2	$(0 - 0) - 1$	2		
				$(0 - 2) - 1$	6	$(0 - (\pm 2)) - 1$	4		
						$(0 - 0) - 1$	2		
		(1, 1) - 0	16		16	$((\pm 2) - 1) - 0$	4	$((\pm 2) - (\pm 1)) - 0$	4
						$(0 - 1) - 0$	2	$(0 - (\pm 1)) - 0$	2
						$((\pm 1) - 2) - 0$	6	$((\pm 1) - (\pm 2)) - 0$	4
								$((\pm 1) - 0) - 0$	2
						$((\pm 1) - 0) - 0$	2	$((\pm 1) - 0) - 0$	2
						$(0 - 1) - 0$	2	$(0 - (\pm 1)) - 0$	2
		(1, 0) - 2	12		12	$((\pm 1) - 0) - 2$	6	$((\pm 1) - 0) - 2$	6
						$(0 - 1) - 2$	6	$(0 - (\pm 1)) - 2$	6
		(0, 1) - 1	10		10	$((\pm 1) - 1) - 1$	8	$((\pm 1) - (\pm 1)) - 1$	8
						$(0 - 0) - 1$	2	$(0 - 0) - 1$	2
		(1, 0) - 0	4		4	$((\pm 1) - 0) - 0$	2	$((\pm 1) - 0) - 0$	2
						$(0 - 1) - 0$	2	$(0 - (\pm 1)) - 0$	2
		(0, 0) - 1	2		2	$(0 - 0) - 1$	2	$(0 - 0) - 1$	2
				6 subespaços		16 subespaços		18 subespaços	

Tabela 2.27: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset \tilde{H}' \times \text{Sp}(2) \supset (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))^2 \times \text{Sp}(2)$ onde \tilde{H}' é o grupo de recobrimento de $H' = \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3))$

Sp(6)		Sp(4) × Sp(2)		$\tilde{H}' \times \text{Sp}(2)$		$\tilde{H}' \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$			
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d		
(1, 1, 0)	64	(2, 0) − 1	20	$((\pm 2) - 0) - 1$	4	$((\pm 2) - 0) - (\pm 1)$	4		
				$(0 - 0) - 1$	2	$(0 - 0) - (\pm 1)$	2		
				$(0 - 2) - 1$	6	$(0 - 2) - (\pm 1)$	6		
				$((\pm 1) - 1) - 1$	8	$((\pm 1) - 1) - (\pm 1)$	8		
		(1, 1) − 0	16	$((\pm 2) - 1) - 0$	4	$((\pm 2) - 1) - 0$	4		
				$(0 - 1) - 0$	2	$(0 - 1) - 0$	2		
				$((\pm 1) - 2) - 0$	6	$((\pm 1) - 2) - 0$	6		
				$((\pm 1) - 0) - 0$	2	$((\pm 1) - 0) - 0$	2		
				$(0 - 1) - 0$	2	$(0 - 1) - 0$	2		
		(1, 0) − 2	12	$((\pm 1) - 0) - 2$	6	$((\pm 1) - 0) - (\pm 2)$	4		
						$((\pm 1) - 0) - 0$	2		
				$(0 - 1) - 2$	6	$(0 - 1) - (\pm 2)$	4		
						$(0 - 1) - 0$	2		
		(0, 1) − 1	10	$((\pm 1) - 1) - 1$	8	$((\pm 1) - 1) - (\pm 1)$	8		
				$(0 - 0) - 1$	2	$(0 - 0) - (\pm 1)$	2		
		(1, 0) − 0	4	$((\pm 1) - 0) - 0$	2	$((\pm 1) - 0) - 0$	2		
				$(0 - 1) - 0$	2	$(0 - 1) - 0$	2		
		(0, 0) − 1	2	$(0 - 0) - 1$	2	$(0 - 0) - (\pm 1)$	2		
				6 subespaços		16 subespaços		18 subespaços	

Tabela 2.28: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia
 $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset \tilde{H}' \times \text{Sp}(2) \supset \tilde{H}' \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$
 onde \tilde{H}' é o grupo de recobrimento de $H' = \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3))$

Sp(6)		Sp(4) × Sp(2)		SU(2) × Sp(2)		(Z ₂ × U(1)) × Sp(2)	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 0)	64	(2, 0) - 1	20	6 - 1	14	(±6) - 1	4
						(±4) - 1	4
						(±2) - 1	4
						0 - 1	2
				2 - 1	6	(±2) - 1	4
						0 - 1	2
		(1, 1) - 0	16	7 - 0	8	(±7) - 0	2
						(±5) - 0	2
						(±3) - 0	2
						(±1) - 0	2
				5 - 0	6	(±5) - 0	2
						(±3) - 0	2
		1 - 0	2	(±1) - 0	2		
				(±1) - 0	2		
		(1, 0) - 2	12	3 - 2	12	(±3) - 2	6
						(±1) - 2	6
		(0, 1) - 1	10	4 - 1	10	(±4) - 1	4
						(±2) - 1	4
						0 - 1	2
		(1, 0) - 0	4	3 - 0	4	(±3) - 0	4
						(±1) - 0	4
		(0, 0) - 1	2	0 - 1	2	0 - 1	2
		6 subespaços		9 subespaços		22 subespaços	

Tabela 2.29: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset \text{SU}(2) \times \text{Sp}(2) \supset (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1)) \times \text{Sp}(2)$

Sp(6)		Sp(4) × Sp(2)		SU(2) × Sp(2)		SU(2) × (Z ₂ × U(1))	
Peso Máximo	<i>d</i>	Peso Máximo	<i>d</i>	Peso Máximo	<i>d</i>	Peso Máximo	<i>d</i>
(1, 1, 0)	64	(2, 0) − 1	20	6 − 1	14	6 − (±1)	14
				2 − 1	6	2 − (±1)	6
		(1, 1) − 0	16	7 − 0	8	7 − 0	8
				5 − 0	6	5 − 0	6
				1 − 0	2	1 − 0	2
		(1, 0) − 2	12	3 − 2	12	3 − (±2)	8
						3 − 0	4
		(0, 1) − 1	10	4 − 1	10	4 − (±1)	10
		(1, 0) − 0	4	3 − 0	4	3 − 0	4
		(0, 0) − 1	2	0 − 1	2	0 − (±1)	2
		6 subespaços		9 subespaços		10 subespaços	

Tabela 2.30: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset \text{SU}(2) \times \text{Sp}(2) \supset \text{SU}(2) \times (\mathbb{Z}_2 \times \text{U}(1))$

Sp(6)		Sp(4) × Sp(2)		Sp(4) × U(1)		$\tilde{H}' \times U(1)$	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 0)	64	(2, 0) – 1	20	(2, 0)	10	(±2) – 0	2
						0 – 0	1
						0 – 2	3
						(±1) – 1	4
				(2, 0)	10	(±2) – 0	2
						0 – 0	1
						0 – 2	3
						(±1) – 1	4
		(1, 1) – 0	16	(1, 1)	16	(±2) – 1	4
						0 – 1	2
						(±1) – 2	6
						(±1) – 0	2
						0 – 1	2
		(1, 0) – 2	12	(1, 0)	4	(±1) – 0	2
						0 – 1	2
				(1, 0)	4	(±1) – 0	2
						0 – 1	2
				(1, 0)	4	(±1) – 0	2
						0 – 1	2
		(0, 1) – 1	10	(0, 1)	5	(±1) – 1	4
						0 – 0	1
				(0, 1)	5	(±1) – 1	4
						0 – 0	1
		(1, 0) – 0	4	(1, 0)	2	(±1) – 0	2
						0 – 1	2
		(0, 0) – 1	2	(0, 0)	1	0 – 0	1
				(0, 0)	1	0 – 0	1
		6 subespaços		11 subespaços		27 subespaços	

Tabela 2.31: Ramificação da representação dos códon de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset \text{Sp}(4) \times \text{U}(1) \supset \tilde{H}' \times \text{U}(1)$ onde \tilde{H}' é o grupo de recobrimento de $H' = \text{S}(\text{O}(2) \times \text{O}(3))$

- $H = S_3 \times \text{Sp}(2)^3$: Neste caso, temos apenas 5 multipletos e ainda temos multipletos de dimensão > 6 (veja a terceira e quarta coluna da Tabela 2.11), de modo que a quebra precisa continuar.
 - Quebrando o primeiro fator S_3 de H por completo, ou seja, quebrando $S_3 \times \text{Sp}(2)^3$ para $\text{Sp}(2)^3$, obtemos 14 multipletos (veja a quinta e sexta coluna da Tabela 2.11), de modo que a quebra precisa continuar, com um esquema que já foi analisado anteriormente, decorrente da cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset \text{Sp}(2)^3$.
 - Quebrando o primeiro fator S_3 de H para \mathbb{Z}_2 , ou seja, quebrando $S_3 \times \text{Sp}(2)^3$ para $(\mathbb{Z}_2 \times \text{Sp}(2)^2) \times \text{Sp}(2)$, obtemos 9 multipletos (veja, por exemplo, a quinta e sexta coluna de cada uma das Tabelas 2.22-2.24), de modo que a quebra precisa continuar, com um esquema que já foi analisado anteriormente, decorrente da cadeia $\text{Sp}(6) \supset \text{Sp}(4) \times \text{Sp}(2) \supset (\mathbb{Z}_2 \times \text{Sp}(2)^2) \times \text{Sp}(2)$.
 - Quebrando o primeiro fator S_3 de H para \mathbb{Z}_3 , ou seja, quebrando $S_3 \times \text{Sp}(2)^3$ para $\mathbb{Z}_3 \times \text{Sp}(2)^3$, obtemos 6 multipletos (veja a Tabela 2.32), de modo que a quebra precisa continuar.

Agora, observamos que, enquanto não quebrarmos o subgrupo \mathbb{Z}_3 do primeiro fator S_3 de H , não poderemos abaixar o valor total do número d_3 [3, 20] (a soma das dimensões de todos os multipletos cuja dimensão é um múltiplo de 3), do valor de 48 para o valor de 24 que prevalece no código genético. De fato, mantendo este subgrupo \mathbb{Z}_3 de S_3 intacto e quebrando o segundo fator $\text{Sp}(2)^3$ para qualquer subgrupo H' que é \mathbb{Z}_3 -invariante, a ramificação das representações irredutíveis de $\text{Sp}(2)^3$ em representações irredutíveis de H' preserva o comportamento sob \mathbb{Z}_3 : os $\text{Sp}(2)^3$ -multipletos que são \mathbb{Z}_3 -invariantes ramificam em H' -multipletos que são todos \mathbb{Z}_3 -invariantes (dimensão total: 16), enquanto que os $\text{Sp}(2)^3$ -multipletos que não são \mathbb{Z}_3 -invariantes formam tripletos que ramificam em H' -multipletos que também não são \mathbb{Z}_3 -invariantes e também formam tripletos (dimensão total: 48). Assim, nenhum esquema baseado em um grupo da forma $\mathbb{Z}_3 \times H'$ pode reproduzir as degenerescências do código genético.

2.3 Resultados

Para a conveniência do leitor, apresentamos a seguir as cadeias, já contidas em [13, 19, 20] e baseadas nos grupos G_2 e $\text{Sp}(6)$, que reproduzem as degenerescências do código genético.

Sp(6)		$S_3 \times \text{Sp}(2)^3$		$\mathbb{Z}_3 \times \text{Sp}(2)^3$	
Peso Máximo	d	Peso Máximo	d	Peso Máximo	d
(1, 1, 0)	64	1 - 1 - 1	8	1 - 1 - 1	8
		1 - 1 - 1	8	1 - 1 - 1	8
		$(2 - 1 - 0) \oplus (2 - 0 - 1) \oplus (1 - 2 - 0)$	36	$(2 - 1 - 0) \oplus (0 - 2 - 1) \oplus (1 - 0 - 2)$	18
		$(0 - 2 - 1) \oplus (1 - 0 - 2) \oplus (0 - 1 - 2)$		$(2 - 0 - 1) \oplus (1 - 2 - 0) \oplus (0 - 1 - 2)$	18
		$(1 - 0 - 0) \oplus (0 - 1 - 0) \oplus (0 - 0 - 1)$	6	$(1 - 0 - 0) \oplus (0 - 1 - 0) \oplus (0 - 0 - 1)$	6
		$(1 - 0 - 0) \oplus (0 - 1 - 0) \oplus (0 - 0 - 1)$	6	$(1 - 0 - 0) \oplus (0 - 1 - 0) \oplus (0 - 0 - 1)$	6
5 subespaços			6 subespaços		

Tabela 2.32: Ramificação da representação dos códons de Sp(6) na cadeia $\text{Sp}(6) \supset S_3 \times \text{Sp}(2)^3 \supset \mathbb{Z}_3 \times \text{Sp}(2)^3$

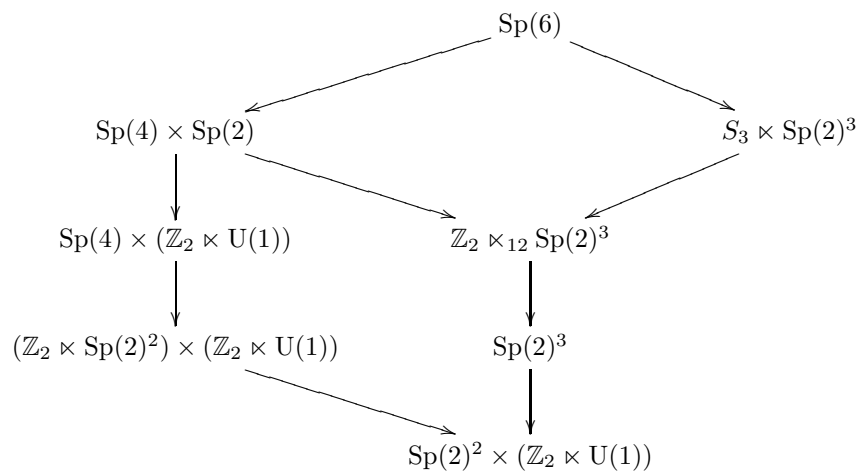


Figura 2.2: Árvore dos subgrupos de Sp(6) para a construção de cadeias para o código genético

Como resultado principal desta tese, podemos afirmar que, a menos de algumas diferenças de detalhe na escolha da cadeia de subgrupos empregada (as opções para isso podem ser visualizadas na Figura 2.2) estas continuam sendo as únicas cadeias possíveis baseadas em grupos de Lie compactos de posto baixo (≤ 3), mesmo quando incluímos subgrupos que não são conexos, com a restrição de que não sejam discretos.

ITENS A SEREM REVISTOS PARA A VERSÃO A SER DEFENDIDA

- Capítulo 1, p. 16:
Explicar as regras de geração de tripletos e sextetos, conforme [3, 20] (critérios hereditários).
- Capítulo 2, p. 18:
Comportamento do normalizador de uma subálgebra sob recobrimento.
- Capítulo 2, pp. 43 e 59:
Redigir uma seção final com resultados, reproduzindo as cadeias de [13, 20], já reproduzidas em [20], baseadas nos grupos G_2 e $\text{Sp}(6)$.

Bibliografia

- [1] F. Antoneli, *Subálgebras Maximais das Álgebras de Lie Semisimples, Quebra de Simetria e o Código Genético*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, São Paulo 1998.
- [2] F. Antoneli, *Grupos Finitos e Quebra de Simetria no Código Genético*, Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo 2003.
- [3] F. Antoneli, L. Braggion, M. Forger & J.E.M. Hornos, *Extending the Search for Symmetries in the Genetic Code*, Int. J. Mod. Phys. B **17** (2003) 3135-3204.
- [4] F. Antoneli, M. Forger, *Symmetry Breaking in the Genetic Code: Finite Groups*, Math. Comput. Model. **53** (2011) 1469-1488.
- [5] F. Antoneli, M. Forger & P.A. Gaviria, *Maximal Subgroups of Compact Lie Groups*, arXiv:math/0605784v3.
- [6] F. Antoneli, M. Forger & J.E.M. Hornos, *The Search for Symmetries in the Genetic Code: Finite Groups*, Mod. Phys. Lett. B **18** (2004) 971-978.
- [7] L. Braggion, *Procura por Simetrias de Lie na Evolução do Código Genético*, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, São Carlos 1998.
- [8] T. Bröcker & T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer, Berlin 1985.
- [9] I.V. Chekalov, *Primitive Subalgebras of Complex Lie Algebras I: Primitive Subalgebras of the Classical Complex Lie Algebras*, Pacific J. Math. **158** (1993), 273-292.
- [10] J.J. Duistermaat & J.A.C. Kolk, *Lie Groups*, Springer, Berlin 1999.

-
- [11] E.B. Dynkin, *Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras*, Mat. Sb. **30** (1952) 349-462; Engl.: AMS Translations (2) **6** (1957) 111-244.
- [12] E.B. Dynkin, *Maximal Subgroups of the Classical Groups*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **1** (1952) 39-166; Engl.: AMS Translations (2) **6** (1957) 245-378.
- [13] M. Forger, J.E.M. Hornos & Y.M.M. Hornos, *Global Aspects in the Algebraic Approach to the Genetic Code*, Phys. Rev. E **56** (1997) 7078-7082.
- [14] P.A. Gaviria, *Subgrupos Maximais de Grupos de Lie Compactos*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, São Paulo 2006.
- [15] B.C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*, Springer, Berlin 2003.
- [16] M. Golubitsky, I. Stewart & D.G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 2, Springer, Berlin 1988.
- [17] R. Goodman & N.R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge 1998.
- [18] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York 1978.
- [19] J.E.M. Hornos & Y.M.M. Hornos, *Algebraic Model for the Evolution of the Genetic Code*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 4401-4404.
- [20] J.E.M. Hornos, Y.M.M. Hornos & M. Forger, *Symmetry and Symmetry Breaking: An Algebraic Approach to the Genetic Code*, Int. J. Mod. Phys. B **13** (1999) 2795-2885.
- [21] J.E. Humphries, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, Berlin 1972.
- [22] B. Kostant: *The McKay Correspondence, the Coxeter Element and Representation Theory*, in: "Élie Cartan et Les Mathématiques d'Aujourd'Hui" (Lyon 1984), Astérisque, Numéro Hors Série (1985) 209-255, Soc. Math. France, Paris 1985.
- [23] B. Kostant: *The Coxeter Element and the Branching Law for the Finite Subgroups of SU(2)*, arXiv:math/0411142v1.
- [24] W.G. McKay & J. Patera, *Tables of Dimensions, Indices and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras*, Marcel Dekker, New York 1981.
- [25] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, AMS, Providence 1996.