

Jogos de Perseguição:
Introdução a Capturabilidade

Paulo Gomes Staaks

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DE TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS
PELO
PROGRAMA DE MATEMÁTICA APLICADA

Orientador: Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli

28 de Junho de 2015

Jogos de Perseguição: Introdução a Capturabilidade

Este exemplar corresponde a redação final de depósito
da dissertação de mestrado apresentada ao IME/USP
para a obtenção de título de Mestre em Ciências
pelo Programa de Matemática Aplicada do
Sr. Paulo Gomes Staaks.

Banca Examinadora:

- _____
- _____
- _____

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli pela persistência em minha orientação e pela oportunidade de estudar um assunto tão incrível que é a Teoria dos Jogos Diferenciais.

Aos meus pais, Marcia Regina Gomes Staaks e Vicente Aparecido Staaks, por terem me ensinado tamanhas determinação e persistência, que foram necessárias para minha sobrevivência no meio acadêmico.

À minha esposa, Patrícia Camargo Franco Staaks, pela paciência, carinho e motivação, que foram fundamentais para a conclusão desse trabalho.

Resumo

A Teoria dos Jogos Diferenciais (TJD) teve origem em meados de 1950 com a pesquisa de Rufus Philip Isaacs, um pesquisador da RAND Corporation. Os pesquisadores que tinham contato com essa teoria logo descobriram que o trabalho de John Von Neumann e Oskar Morgenstern [9] não era suficiente para resolver tais problemas. Os estudos relacionados a TJD ficaram ligados diretamente ao estudo de sistemas dinâmicos. Sendo assim, assuntos ligados a Teoria de Controle Ótimo começaram a tomar a frente nas pesquisas sobre TJD. O Jogo do Motorista Assassino (JMA), se tornou um JP padrão no estudo em TJD.

A solução de JDs está ligada a existência de controles ótimos. O Princípio da Programação Dinâmica e o Princípio do Mínimo, propostos por Richard Ernst Bellman e Lev Semyonovitch Pontryagin, respectivamente, se tornam condições para a determinação de estratégias (controles) ótimas. A existência é garantida por um teorema proposto por Aleksei Fyodorovich Filipov.

Os JDs serão apresentados de maneira formal, junto com a função de *Payoff*. Daremos especial atenção aos JPs. Os JPs são JDs de Dois Jogadores com Soma Zero, conceito bastante difundido em TJD. No caso dos JPs, teremos dois jogadores: um Perseguidor e um Evasor. A função de *Payoff* será estudada de acordo com a sua convergência a Função de Valores de um JD. A continuidade da função de valores será provada, utilizando a Equação de Hamilton-Jacobi-Isaacs (EHJI).

Um estudo qualitativo será feito sobre as condições de capturabilidade do Evasor pelo Perseguidor. Utilizaremos o Princípio do Mínimo como ferramenta principal para determinarmos a Barreira S , que determina a região de capturabilidade do Evasor pelo Perseguidor.

Palavras-chave: Jogos Diferenciais, Jogos de Perseguição, Jogo do Motorista Assassino, Teoria dos Jogos, Teoria de Controle Ótimo, Princípio do Mínimo, Capturabilidade.

Abstract

The Differential Game Theory (DGT) originated in the mid 1950s with the research Rufus Philip Isaacs, a researcher at the RAND Corporation. Researchers who had contact with this theory soon discovered that the work of John von Neumann and Oskar Morgenstern [9] was not enough to solve such problems. Studies related to DGT were directly linked to the study of dynamical systems. Therefore, issues related to Optimal Control Theory began to take the lead in research on DGT. The Homicidal Chauffeur Game (HCG) has become a standard PG of study in DGT.

The DGs solution is attached to the existence of optimal controls. The Dynamic Programming Principle and The Minimum Principle proposed by Richard Ernst Bellman and Lev Semyonovitch Pontryagin, respectively, become conditions for determining optimal strategies (controls). The existence is guaranteed by a theorem proposed by Aleksei Fyodorovich Filipov.

The DGs will be presented formally, along with the Payoff function. We will give special attention to DGs. The PGs are Two Player Zero-Sum DG, a concept widespread in DGT. In the case of PGs, we have two players: a Pursuer and an Evader. The Payoff Function will be studied according to their convergence to the Value Function of a DG. The continuity of the Value Function will be tested, using the Hamilton-Jacobi-Isaacs Equation (HJIE).

A qualitative study will be done about the conditions of capturability of Evader by the Pursuer. We will use the Minimum Principle as the main tool to determine the Barrier S , which determines the capturability region of Evader by the Pursuer.

Keywords: Differential Games, Pursuit Games, Homicidal Chauffeur Game, Game Theory, Optimal Control Theory.

Conteúdo

1	O Jogo do Motorista Assassino	10
2	Controle Ótimo	13
2.1	Introdução	13
2.2	Princípio de Bellman	14
2.3	Princípio do Mínimo	17
2.4	Existência de Controles Ótimos	20
3	Jogos Diferenciáveis	23
3.1	Introdução	23
3.2	Definindo um Jogo Diferenciável entre Dois Jogadores	24
3.3	O Valor de um Jogo Diferenciável de Soma Zero entre Dois Jogadores	25
3.4	Uma Condição Necessária Para a Existência de Estratégias Ótimas	35
4	Explicando o Jogo do Motorista Assassino	53
4.1	Rápida Reapresentação do Problema	53
4.2	Capturabilidade	53
4.3	Determinando a barreira S	55
4.4	Descrição dos dois tipos de Barreiras	59
4.4.1	Caso 1	59
4.4.2	Caso 2	60
4.5	Conclusão	61
A	Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias	63
A.1	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	63
A.2	Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Não Lineares	64

<i>CONTEÚDO</i>	7
B Teoria de Sistemas de Controle	68
B.1 Introdução	68
B.2 Controlabilidade	69
C Tópicos de Teoria da Medida	73

LISTA DE NOTAÇÕES MATEMÁTICAS:

1. Δ : raio de manobrabilidade máxima do perseguidor.
2. $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$
3. $C^i(A, B)$: Conjunto de funções de domínio A e imagem em B i vezes diferenciáveis.
4. \mathfrak{R} : Conjunto dos números reais.
5. $\nabla_{s_i s_j}^{n_i+n_j} f(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) = \frac{\partial^{n_i}}{\partial s_i} \frac{\partial^{n_j}}{\partial s_j} f(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots)$.
6. A^* : transposta da matriz A .
7. Seja E um espaço de hilbert qualquer, então $\langle a, b \rangle$ é um produto escalar entre a e b .
8. Id : Matriz identidade.
9. $M(\mathfrak{R}, n, m)$: conjunto das matrizes de n linhas e m colunas.
10. Seja $F : A \subset \mathfrak{R}^m \rightarrow M(\mathfrak{R}, n, m)$. Então $FF^{-1} = F^{-1}F = Id$.
11. Seja E um espaço métrico qualquer, então $\|a\|$ é a norma de a .
12. Para um conjunto qualquer A , o conjunto $\bar{A} = \partial A \cup \overset{\circ}{A}$ é o fecho de A , sendo ∂A a fronteira de A e $\overset{\circ}{A}$ o interior de A .
13. Sejam A e B subconjuntos de um conjunto qualquer, então $A/B = \{x \in A : x \notin B\}$.
14. $L^p(A; B)$: Conjunto das funções Borel integráveis em potência p em A , com valores em B .
15. $B_\delta(x) = \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x\| \leq \delta\}$

LISTA DE SIGLAS:

1. JMA: Jogo do Motorista Assassino (em inglês HCG).
2. JD: Jogos Diferenciais (em inglês DG).
3. JP: Jogo de Perseguição (em inglês PG).
4. TJD: Teoria dos Jogos Diferenciais (em inglês DGT).
5. EHJI: Equação de Hamilton-Jacobi-Isaacs ou simplesmente Equação de Isaacs (em inglês HJIE).

Capítulo 1

O Jogo do Motorista Assassino

A Teoria dos Jogos estuda as formas de interações entre jogadores racionais que possuem objetivos a serem cumpridos, que podem ser conflitantes ou não. Os jogadores procuram sempre escolher uma estratégia que cumpra seus objetivos de maneira ótima. No caso do problema proposto por Rufus Philip Isaacs em seu trabalho mestre [7], *The Homicidal Chauffeur Game* (Jogo do Motorista Assassino), que foi resultado de sua pesquisa sobre JDs (ver capítulo 3) realizada na RAND Corporation entre 1948 e 1955, um jogador p (perseguidor) persegue um jogador e (evasor) com uma velocidade v_p no plano cartesiano e o evasor foge com uma velocidade $v_e < v_p$. O jogador p possui um raio de manobrabilidade máxima Δ , que é o menor raio de virada que o perseguidor possui, ao efetuar uma manobra, e o jogador e foge livremente pelo plano. No JMA, os objetivos dos jogadores p e e estão definidos pelo tempo de captura de e por p , pois sabemos que o jogador p possui uma velocidade maior que a de e e que o único obstáculo para que p capture e está em seu raio de manobrabilidade: dessa forma, p jogará com o objetivo de minimizar o tempo de captura e e jogará com o objetivo de maximizar o tempo de captura. O JMA terminará quando p estiver a uma distância ϵ do evasor. As equações abaixo determinam como os jogadores p e e interagem (dinâmica):

- Dinâmica do Perseguidor:

$$\dot{p}(t) = (\dot{p}_x(t), \dot{p}_y(t)) = (v_p \text{sen}(\theta_p(t)), v_p \text{cos}(\theta_p(t))), \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Restrição de manobrabilidade:

$$\dot{\theta}_p(t) = \frac{v_p \phi(t)}{\Delta}, \quad t \geq 0 \text{ e } |\phi(t)| \leq 1. \quad (1.2)$$

- Dinâmica do Evasor:

$$\dot{e}(t) = (\dot{e}_x(t), \dot{e}_y(t)) = (v_e \text{sen}(\theta_e(t)), v_e \text{cos}(\theta_e(t))), \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

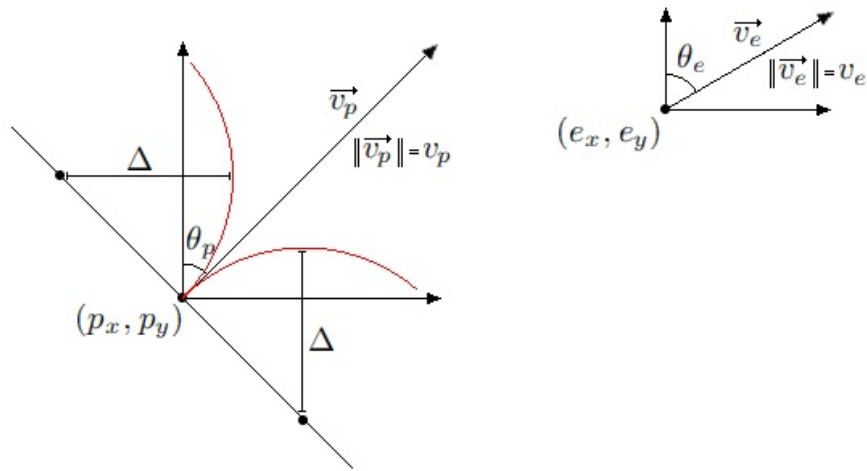


Figura 1.1: Descrição do Jogo do Motorista Assassino

O sistema da dinâmica do jogo poderá ter a sua dimensão reduzida de 5 para 2 dimensões: vamos considerar a perseguição de p por e e as distâncias nos eixos x e y por

$$d_x(t) = e_x(t) - p_x(t), \quad d_y(t) = e_y(t) - p_y(t), \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

Teremos ainda que achar alguma maneira de incluir a variabilidade do ângulo $\theta_p(t)$, para isso iremos efetuar uma rotação de ângulo $\theta_p(t)$ na direção do eixo y no sistema $d(t) = (d_x(t), d_y(t))$.

$$x(t) = d_x(t) \text{cos}(\theta_p(t)) - d_y(t) \text{sen}(\theta_p(t)) \quad (1.5)$$

$$y(t) = d_x(t) \text{sen}(\theta_p(t)) + d_y(t) \text{cos}(\theta_p(t)). \quad (1.6)$$

Agora, para terminarmos, iremos calcular $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ e chegaremos ao nosso sistema reduzido.

$$\dot{x} = \dot{d}_x(t)\cos(\theta_p(t)) - d_x(t)\dot{\theta}_p(t)\text{sen}(\theta_p(t)) - \dot{d}_y(t)\text{sen}(\theta_p(t)) - d_y(t)\dot{\theta}_p(t)\cos(\theta_p(t)) \quad (1.7)$$

$$= \dot{d}_x(t)\cos(\theta_p(t)) - \dot{d}_y(t)\text{sen}(\theta_p(t)) - \dot{\theta}_p(t)y(t) \quad (1.8)$$

$$= (v_e\text{sen}(\theta_e(t)) - v_p\text{sen}(\theta_p(t)))\cos(\theta_p(t)) \quad (1.9)$$

$$- (v_e\cos(\theta_e(t)) - v_p\cos(\theta_p(t)))\text{sen}(\theta_p(t)) - \frac{v_p\phi(t)}{\Delta}y(t) \quad (1.10)$$

$$= v_e\text{sen}(\theta_e(t) - \theta_p(t)) - \frac{v_p\phi(t)}{\Delta}y(t) \quad (1.11)$$

Vamos chamar $\theta_e(t) - \theta_p(t) = u_e(t)$ e $\phi(t) = u_p(t)$, temos:

$$\dot{x}(t) = v_e\text{sen}(u_e(t)) - \frac{v_p u_p(t)}{\Delta}y(t). \quad (1.12)$$

Calculando $\dot{y}(t)$, temos:

$$\dot{y} = \dot{d}_x(t)\text{sen}(\theta_p(t)) + d_x(t)\dot{\theta}_p(t)\cos(\theta_p(t)) + \dot{d}_y(t)\cos(\theta_p(t)) - d_y(t)\dot{\theta}_p(t)\text{sen}(\theta_p(t)) \quad (1.13)$$

$$= \dot{d}_x(t)\text{sen}(\theta_p(t)) + \dot{d}_y(t)\cos(\theta_p(t)) + \dot{\theta}_p(t)x(t) \quad (1.14)$$

$$= (v_e\text{sen}(\theta_e(t)) - v_p\text{sen}(\theta_p(t)))\text{sen}(\theta_p(t)) \quad (1.15)$$

$$+ (v_e\cos(\theta_e(t)) - v_p\cos(\theta_p(t)))\cos(\theta_p(t)) + \frac{v_p u_p(t)}{\Delta}x(t) \quad (1.16)$$

$$= v_e\cos(u_e(t)) - v_p + \frac{v_p u_p(t)}{\Delta}x(t). \quad (1.17)$$

Após esta série de transformações, teremos as seguintes equações de dinâmica de um jogo diferenciável:

$$\dot{x}(t) = v_e\text{sen}(u_e(t)) - \frac{v_p u_p(t)}{\Delta}y(t) \quad (1.18)$$

$$\dot{y}(t) = v_e\cos(u_e(t)) - v_p + \frac{v_p u_p(t)}{\Delta}x(t) \quad (1.19)$$

Agora que diminuimos a dimensão do JMA, podemos estudá-lo como um sistema de controle em \mathfrak{R}^2 , utilizando a Teoria de Controle Ótimo e os conceitos a ela ligados: Princípio de Bellman (Princípio da Programação Dinâmica e o Princípio do Mínimo.

Capítulo 2

Controle Ótimo

2.1 Introdução

Em determinados sistemas de controle não há só o interesse de transferir um estado z_0 para um estado z_f , há também o interesse de efetuar esta transferência de maneira ótima, de acordo com algum critério pré estabelecido. Para entendermos isso, começaremos estudando um princípio bem conhecido sobre Programação Dinâmica: um princípio proposto por Richard Bellman baseado na Equação de Hamilton-Jacobi (Princípio de Bellman). O princípio de Bellman tem uma característica de condição suficiente para que uma dada estratégia seja ótima. Para completar o estudo de Controle Ótimo, iremos utilizar de uma condição necessária proposta por Lev Semenovich Pontryaguin: O Princípio do Mínimo. A existência de estratégias ótimas será discutida no final deste capítulo, com o Teorema de Filipov.

Vamos desenvolver neste capítulo um estudo sobre controles ótimos para sistemas não lineares da seguinte forma abaixo:

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)), \quad z(0) = x, \quad x \in E \subset \mathfrak{R}^n, \quad (2.1)$$

sendo E o espaço de estados do sistema, $u \in U_{ad}(U)$, sendo U o espaço de entradas (controles ou estratégias) e $f \in C^1(E \times U, \mathfrak{R}^n)$. A função de controle ótimo $u_{(*)}$ será escolhida de acordo com um funcional de critério pré estabelecido num intervalo $[0, \bar{t}]$ ou $[0, \infty)$. O funcional de critério pode ser dado por:

$$J_{\bar{t}}(x, u) = \int_0^{\bar{t}} g(z(t), u(t)) + G(z(\bar{t})) dt \quad (2.2)$$

ou

$$J(x, u) = \int_0^\infty g(z(t), u(t)) dt \quad (2.3)$$

Se existir uma estratégia ótima $u_{(*)}$, então ela irá caracterizar o funcional de critério da seguinte maneira abaixo:

$$J_{\bar{t}}(x, u_{(*)}) = \min_{u \in U_{ad}(U)} J_{\bar{t}}(x, u) \text{ ou } J(x, u_{(*)}) = \min_{u \in U_{ad}(U)} J(x, u). \quad (2.4)$$

2.2 Princípio de Bellman

Vamos enunciar e demonstrar abaixo o Princípio de Bellman para o funcional de critério 2.2.

Teorema 2.2.1 *Seja $W : [0, \bar{t}] \times E \rightarrow \mathfrak{R}$, $W \in C^1([0, \bar{t}] \times E, \mathfrak{R})$, e funções $g, f \in C^1(E \times U, \mathfrak{R}^n)$ com $g \geq 0$. W satisfaz a equação abaixo.*

$$W_t(t, x) = \inf_{u \in U} (g(x, u) + \langle W_x(t, x), f(x, u) \rangle), \quad W(0, x) = G(x) \quad (2.5)$$

1. *Seja z uma solução contínua em $[0, \bar{t}]$ de 2.1, então $\forall u \in U_{ad}(U)$ vale a seguinte relação:*

$$J_{\bar{t}}(x, u) \geq W(\bar{t}, x). \quad (2.6)$$

2. *Seja $\hat{v} : [0, \bar{t}] \times E \rightarrow U$, satisfazendo a relação abaixo:*

$$g(x, \hat{v}(t, x)) + \langle W_x(t, x), f(x, \hat{v}(t, x)) \rangle \leq g(x, u) + \langle W_x(t, x), f(x, u) \rangle \quad \forall u \in U. \quad (2.7)$$

Seja ainda \hat{y} solução de:

$$\frac{d}{dt} \hat{z}(t) = f(\hat{z}(t), \hat{v}(T - t, \hat{z}(t))), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad \hat{z}(0) = x. \quad (2.8)$$

Então, para o controle $\hat{u} = \hat{v}(\bar{t} - t, \hat{z}(t))$:

$$W(\bar{t}, x) = J_{\bar{t}}(x, \hat{u}) \quad (2.9)$$

Demonstração do Teorema 2.2.1 *Vamos provar os itens em sequência.*

1. *Seja $w(t) = W(\bar{t} - t, z(t))$, com $[\alpha, \beta] \subset [0, \bar{t}]$ e $w \in C^1([\alpha, \beta], \mathfrak{R})$. Ou seja:*

$$\dot{w}(t) = -W_t(\bar{t} - t, z(t)) + \langle W_x(\bar{t} - t, z(t)), \dot{z}(t) \rangle. \quad (2.10)$$

Então vale:

$$w(\beta) - w(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \dot{w}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} -W_t(\bar{t} - t, z(t)) + \langle W_x(\bar{t} - t, z(t)), \dot{z}(t) \rangle dt. \quad (2.11)$$

Porém:

$$W_t(t, x) = \inf_{u \in U} (g(x, u) + \langle W_x(t, x), f(x, u) \rangle) \Rightarrow \quad (2.12)$$

$$W_t(t, x) \leq g(x, u) + \langle W_x(t, x), f(x, u) \rangle \Rightarrow \quad (2.13)$$

$$-g(x, u) \leq -W_t(t, x) + \langle W_x(t, x), f(x, u) \rangle \quad \forall u \in U. \quad (2.14)$$

Logo:

$$w(\beta) - w(\alpha) \geq - \int_{\alpha}^{\beta} g(z(t), u(t)) dt, \quad \forall u \in U_{ad}(U). \quad (2.15)$$

Se $\beta \rightarrow \bar{t}$ e $\alpha \rightarrow 0$, temos:

$$w(\bar{t}) - w(0) = W(0, z(\bar{t})) - W(\bar{t}, x) \geq - \int_0^{\bar{t}} g(z(t), u(t)) dt \Rightarrow \quad (2.16)$$

$$W(\bar{t}, x) \leq \int_0^{\bar{t}} g(z(t), u(t)) dt + G(y(\bar{t})) = J_{\bar{t}}(x, u), \quad \forall u \in U_{ad}(U). \quad (2.17)$$

2. Admitindo o comportamento de \hat{v} para \hat{u} , temos:

$$W_t(t, x) = \inf_{u \in U} (g(x, u) + \langle W_x(t, x), f(x, u) \rangle) = g(x, \hat{u}) + \langle W_x(t, x), f(x, \hat{u}) \rangle. \quad (2.18)$$

Então:

$$w(\beta) - w(\alpha) = - \int_{\alpha}^{\beta} g(z(t), u(t)) dt \Rightarrow \quad (2.19)$$

$$W(0, z(\bar{t})) - W(\bar{t}, x) = - \int_0^{\bar{t}} g(z(t), u(t)) dt \Rightarrow \quad (2.20)$$

$$W(\bar{t}, x) = \int_0^{\bar{t}} g(z(t), \hat{u}(t)) dt + G(y(\bar{t})) = J_{\bar{t}}(x, \hat{u}), \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (2.21)$$

□

Observação 2.2.1 Admitindo certas condições, $W(\bar{t}, x)$ nos dá o menor valor do funcional de custo proposto. A função \hat{v} é um seletor teórico tal que $\hat{v} \in U_{ad}$.

A equação 2.5 será chamada de Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, e sua solução W será chamada como função de valor ótimo, referente ao controle ótimo \hat{u} , que minimizará 2.2. O Princípio de Bellman pode ser demonstrado também no âmbito do “Horizonte Infinito” (quando $\bar{t} \rightarrow \infty$) e o funcional de custo é determinado por 2.3. Vamos enunciar e demonstrar esta versão abaixo.

Teorema 2.2.2 *Seja $g \geq 0$, $g \in C^0(E \times U, \mathfrak{R})$ e assumamos que existe $W : E \rightarrow \mathfrak{R}$, com $W \in C^1(E, \mathfrak{R})$ que satisfaz a equação abaixo:*

$$\inf_{u \in U} (g(x, u) + \langle W_x(x), f(x, u) \rangle) = 0, \quad x \in E. \quad (2.22)$$

Se, para um controle u e sua saída correspondente z , $\lim_{t \rightarrow \infty} W(z(t)) = 0$, então:

$$J(x, u) \geq W(x). \quad (2.23)$$

Se $\hat{v} : E \rightarrow U$ é uma função que satisfaz:

$$g(x, \hat{v}(x)) + \langle W_x(x), f(x, \hat{v}(x)) \rangle = 0, \quad x \in E \quad (2.24)$$

e \hat{z} é solução de:

$$\frac{d}{dt} \hat{z}(t) = f(\hat{z}(t), \hat{v}(\hat{z}(t))), \quad t \geq 0 \quad (2.25)$$

com $\lim_{t \rightarrow \infty} W(\hat{z}(t)) = 0$ e $\hat{u}(t) = \hat{v}(\hat{z}(t))$, então:

$$J(x, \hat{u}) = W(x). \quad (2.26)$$

Demonstração do Teorema 2.2.2 *Seja $w(t) = W(z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, com $[\alpha, \beta] \subset [0, \bar{t}]$ e $w \in C^1([\alpha, \beta], \mathfrak{R})$, desta forma, temos:*

$$\dot{w}(t) = \langle W_x(x), \dot{z}(t) \rangle. \quad (2.27)$$

Então vale:

$$w(\beta) - w(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \dot{w}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \langle W_x(x), \dot{z}(t) \rangle dt. \quad (2.28)$$

Porém:

$$\inf_{u \in U} (g(x, u) + \langle W_x(x), f(x, u) \rangle) = 0 \Rightarrow g(x, u) + \langle W_x(x), f(x, u) \rangle \geq 0 \quad (2.29)$$

$$\langle W_x(x), f(x, u) \rangle \geq -g(x, u) \Rightarrow w(\beta) - w(\alpha) \geq - \int_{\alpha}^{\beta} g(z(t), u(t)) dt. \quad (2.30)$$

Se $\beta \rightarrow \bar{t}$ e $\alpha \rightarrow 0$, temos:

$$w(\bar{t}) - w(0) = W(z(\bar{t})) - W(x) \geq - \int_0^{\bar{t}} g(z(t), u(t)) dt \Rightarrow \quad (2.31)$$

$$W(x) \leq \int_0^{\bar{t}} g(z(t), u(t)) dt + W(z(\bar{t})) = J_{\bar{t}}(x, u). \quad (2.32)$$

Chegamos a mesma conclusão do item 2.2.1 do teorema 2.2.1, mas levando em consideração que $\lim_{t \rightarrow \infty} W(z(t)) = 0$, temos:

$$W(x) \leq \lim_{\bar{t} \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\bar{t}} g(z(t), u(t)) dt + W(z(\bar{t})) \right) = \int_0^{\infty} g(z(t), u(t)) dt = J(x, u) \quad (2.33)$$

Como $\hat{v}(\hat{y}(t)) = \hat{u}(t)$ é uma função definida no enunciado, temos:

$$\inf_{u \in U} (g(x, u) + \langle W_x(x), f(x, u) \rangle) = 0 \Rightarrow -g(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) = \langle W_x(\hat{z}(t)), f(\hat{z}(t), \hat{u}) \rangle \Rightarrow \quad (2.34)$$

$$w(\beta) - w(\alpha) = - \int_{\alpha}^{\beta} g(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) dt \Rightarrow W(\hat{z}(T)) - W(x) = - \int_0^T g(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) dt \Rightarrow \quad (2.35)$$

$$W(x) = \int_0^T G(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) dt + W(\hat{z}) = J_T(x, \hat{u}) \quad (2.36)$$

Dessa forma, chegamos a mesma consideração do item 1 do teorema 2.2.1, mas levando em consideração que $\lim_{t \rightarrow \infty} W(\hat{z}(t)) = 0$, temos:

$$W(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\int_0^T g(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) dt \right) = \int_0^{\infty} g(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) dt = J(x, \hat{u}). \quad (2.37)$$

□

O Princípio de Bellman junto com o Princípio do Mínimo, que apresentaremos a seguir, possuem características complementares que serão extremamente úteis: o primeiro acaba sendo uma condição suficiente para que um dado controle \hat{u} seja ótimo, enquanto o Princípio do Mínimo trabalha uma condição necessária para a otimização. Tanto o Princípio do Mínimo como o Princípio de Bellman podem ser tratados no âmbito da Equação de Hamilton-Jacobi, como veremos a seguir.

2.3 Princípio do Mínimo

Para estudarmos o Princípio do Mínimo de Pontryaguin, teremos que considerar o problema 2.1 com as definições feitas na introdução desse capítulo. Vamos

considerar também as derivadas em relação ao vetor de estados $x \in E$ de f , g e G por $\nabla_x f$, $\nabla_x g$ e $\nabla_x G$, respectivamente. Oferecemos abaixo o enunciado do Princípio do Mínimo.

Teorema 2.3.1 *Assuma que f , g , G , $\nabla_z f$, $\nabla_z g$ e $\nabla_z G$ sejam contínuas e que um dado controle \hat{u} , limitado, com uma solução \hat{z} de 2.1 que minimiza o funcional 2.2. Dessa forma, para $t \in (0, \bar{t})$ tal que $\frac{d^-}{dt} \hat{z}(t) = f(\hat{z}(t), \hat{u}(t))$, a desigualdade abaixo se mantém:*

$$\langle p(t), f(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) \rangle + g(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) \leq \min_{u \in U} (\langle p(t), f(\hat{z}(t), u) \rangle + g(\hat{z}(t), u)) \quad (2.38)$$

com p solução de

$$\dot{p}(t) = -\nabla_z f^*(\hat{z}(t), \hat{u}(t))p(t) - \nabla_z g^*(\hat{z}(t), \hat{u}(t)), \quad p(\bar{t}) = \nabla_z G(\hat{z}(\bar{t})). \quad (2.39)$$

Demonstração do Teorema 2.3.1 *Vamos dividir a demonstração em dois casos.*

1. Para $g(z, u) = 0$.

Seja para algum $t_0 \in (0, \bar{t})$, $\frac{d^-}{dt} \hat{z}(t_0) = f(\hat{z}(t_0), \hat{u}(t_0))$. Para um controle $\bar{u} \in U$ e $h \geq 0$, com h pequeno, definimos a variação abaixo.

$$u(t, h) = \begin{cases} \hat{u}, & \text{se } t \in \{[0, t_0 - h]\} \cup \{[t_0, \bar{t}]\} \\ \bar{u}, & \text{se } t \in [t_0 - h, t_0] \end{cases} \quad (2.40)$$

Seja $z(t, h)$ a saída correspondente a $u(t, h)$, dessa forma, temos:

$$\frac{d^+}{dh} G(z(\bar{t}, 0)) \geq 0, \quad (2.41)$$

pois $G(z(\bar{t}, s_1)) \leq G(z(\bar{t}, s_2))$ se $0 \leq s_1 \leq s_2$. Vamos agora calcular o valor de 2.41 utilizando as igualdades abaixo.

$$z(t_0, h) = z(t_0 - h, h) + \int_{t_0 - h}^{t_0} f(z(t, h), \bar{u}) dt \quad (2.42)$$

$$\hat{z}(t_0) = \hat{z}(t_0 - h) + \int_{t_0 - h}^{t_0} f(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) dt \quad (2.43)$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} \hat{z}(t_0 - h) = \hat{z}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} z(t_0 - h, h)$, ocorre que $z(t_0 - h, h) \approx \hat{z}(t_0 - h)$ para valores pequenos de h , logo:

$$z(t_0, h) \approx \hat{z}(t_0 - h) + \int_{t_0 - h}^{t_0} f(z(t, h), \bar{u}) dt. \quad (2.44)$$

Dessa forma, temos:

$$\frac{d^+}{dh}z(t_0, 0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{z(t_0, s) - \hat{z}(t_0)}{s} \quad (2.45)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} \left(\int_{t_0-s}^{t_0} f(z(t, s), \bar{u}) dt - \int_{t_0-s}^{t_0} f(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) dt \right) \quad (2.46)$$

$$= f(\hat{z}(t_0), \bar{u}) - f(\hat{z}(t_0), \hat{u}(t_0)). \quad (2.47)$$

Para $t \in [t_0, \bar{t}]$, $\frac{d}{dt}z(t, h) = f(z(t, h), \hat{u}(t))$ e como $z(t, h) \in C^2((t_0, \bar{t}) \times \mathfrak{R}^+, \mathfrak{R})$ (ver [1], páginas 379, 380, 381 e 382), temos:

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{d}{dt}z(t, h) \right) = f_z(z(t, h), \hat{u}(t)) \frac{d}{dh}z(t, h) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dh}z(t, h) \right). \quad (2.48)$$

Substituindo $\frac{d}{dh}z(t, 0) = q(t)$, temos:

$$\dot{q}(t) = f_z(\hat{z}(t), \hat{u}(t))q(t). \quad (2.49)$$

Seja $F(t)$ uma solução fundamental da equação acima, logo $\forall t \in (t_0, \bar{t})$, temos:

$$\frac{d^+}{dh}z(T, 0) = F(T)F^{-1}(t_0)(f(\hat{z}(t_0), \bar{u}) - f(\hat{z}(t_0), \hat{u}(t_0))). \quad (2.50)$$

Prosseguindo com o cálculo de $\frac{d^+}{dh}G(z(\bar{t}, 0))$, temos:

$$\frac{d^+}{dh}G(z(T, 0)) = \left\langle G_z(z(\bar{t}, 0)), \frac{d^+}{dh}z(\bar{t}, 0) \right\rangle \quad (2.51)$$

$$= \left\langle G_z(z(\bar{t}, 0)), F(\bar{t})F^{-1}(t_0)(f(\hat{z}(t_0), \bar{u}) - f(\hat{z}(t_0), \hat{u}(t_0))) \right\rangle \quad (2.52)$$

$$= \left\langle (F^{-1}(t_0))^* F^*(\bar{t}) G_z(z(\bar{t}, 0)), (f(\hat{z}(t_0), \bar{u}) - f(\hat{z}(t_0), \hat{u}(t_0))) \right\rangle. \quad (2.53)$$

Como $p(t)$ é solução de:

$$\dot{p}(t) = -\nabla_z f^*(\hat{z}(t), \hat{u}(t))p(t) \quad (2.54)$$

e como $F(t)$ tem o comportamento abaixo:

$$\frac{d}{dt}(F(t)F^{-1}(t)) = \frac{d}{dt}F(t)F^{-1}(\bar{t}) + F(t)\frac{d}{dt}F^{-1}(t) \quad (2.55)$$

$$= \nabla_z f(\hat{z}(t), \hat{u}(t)) + F(t)\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = 0, \quad (2.56)$$

logo,

$$\frac{d}{dt}F^{-1}(t)^* = -\nabla_z f(\hat{z}(t), \hat{u}(t))F^{-1}(t)^* \quad (2.57)$$

Então $p(t) = F^{-1}(t)^*$, ou seja, com a desigualdade 2.41 existindo, provamos o teorema para o Caso 1.

2. $g(z, u) \neq 0$

Basta reajustarmos o problema:

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)) \quad (2.58)$$

$$z(0) = x \quad (2.59)$$

$$J_{\bar{t}}(x, u) = \int_0^{\bar{t}} g(z(t), u(t))dt + G(z(\bar{t})) \quad (2.60)$$

para

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z(t), u(t)) \\ g(z(t), u(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

$$w(t) = \int_0^{\bar{t}} g(z(s), u(s))ds \quad (2.62)$$

$$\tilde{J}(x, u) = \tilde{G}(z(\bar{t}), w(\bar{t})) = w(\bar{t}) + G(z(\bar{t})), \quad (2.63)$$

aplicando o caso 1, o teorema está provado.

□

2.4 Existência de Controles Ótimos

Nas últimas duas seções oferecemos condições necessárias e suficientes para que uma dada estratégia ou controle seja ótima para um dado sistema de controle qualquer. Iremos agora fechar este capítulo com a idéia de existência de controles ótimos. O teorema que garante isso de forma simples e precisa é o Teorema de Filipov, que será enunciado e demonstrado, considerando o problema 2.1 com o funcional de critério abaixo.

$$J(x, u) = G(\bar{t}, z(\bar{t})) \quad (2.64)$$

Teorema 2.4.1 (Filipov) *Sejam os conjuntos U e K conjuntos compactos e $L(x) = \{u \in U : f(x, u)\}$ um conjunto convexo para $x \in \mathfrak{R}^n$. Ainda, vamos considerar que f satisfaz*

$$\|f(x, u)\| \leq C(1 + \|x\| + \|u\|), \quad (2.65)$$

$$\|f(x, u) - f(y, u)\| \leq C\|x - y\|(1 + \|u\|) \quad (2.66)$$

e G seja uma função contínua em K . Se existe um controle admissível para 2.1 com $(\bar{t}, z(\bar{t})) \in K$, então existe um controle admissível que minimiza 2.64.

Demonstração do Teorema 2.4.1 *Segue da limitação de K que existe um número $\tilde{t} > 0$ tal que existem controles admissíveis $u(t)$ definidos em intervalos $[0, \tilde{t}] \subset [0, \bar{t}]$. Vamos estender um controle admissível $u(t)$ em $[0, \tilde{t}]$ determinando $u(t) = u^+$ para $t \in [\tilde{t}, \bar{t}]$, $u^+ \in U$. Vamos determinar por Ω o conjunto de todas as soluções de 2.1, definidas em $[0, \tilde{t}]$ e que correspondam aos controles extendidos. De 2.65, para $z \in \Omega$ e $t \in [0, \tilde{t}]$,*

$$\gamma(t) = \|z(t)\| = \left\| x + \int_0^t f(z(s), u(s)) ds \right\| \leq \|x\| + C \int_0^t (1 + \|z(s)\| + \|u(s)\|) ds. \quad (2.67)$$

Levando em conta o lema de Gronwall (Lema A.2.3),

$$\|z(t)\| \leq e^{Ct} \left(\|x\| + Ct + \int_0^t \|u(s)\| ds \right), \quad t \in [0, \tilde{t}]. \quad (2.68)$$

Como U é limitado, então para uma constante $C_1 > 0$

$$\|z(t)\| \leq C_1 \text{ para } z \in \Omega, \quad t \in [0, \tilde{t}]. \quad (2.69)$$

Ainda, para $z \in \Omega$ e $[t, s] \subset [0, \tilde{t}]$,

$$\|z(t) - z(s)\| \leq \int_t^s \|f(z(r), u(r))\| dr \leq C \int_t^s (1 + \|z(r)\| + \|u(r)\|) dr \leq C_2 |t - s|. \quad (2.70)$$

As condições 2.69 e 2.70 implicam que Ω é um conjunto limitado de $C([0, \tilde{t}]; \mathbb{R}^n)$ e que seus elementos são equicontínuos. Pelo Teorema C.0.5, o fecho de Ω , $\bar{\Omega}$, é um compacto em $C([0, \tilde{t}]; \mathbb{R}^n)$. Seja \hat{J} um valor mínimo de 2.64 e seja (z_m) uma seqüência de elementos de Ω correspondente a uma seqüência de elementos (u_m) tal que

$$J(x, u_m) = G(t_m, z_m(t_m)) \rightarrow \hat{J}. \quad (2.71)$$

Como K e $\bar{\Omega}$ são compactos e a função G é contínua, podemos assumir que a seqüência (z_m) converge uniformemente em $[0, \tilde{t}]$ para uma função contínua \hat{z} com $t_m \rightarrow \hat{t}$. Vamos demonstrar agora que \hat{z} é a trajetória ótima do problema.

A função \hat{z} satisfaz a condição de Lipschitz, portanto ela possui derivadas finitas para quase todo $t \in [0, \tilde{t}]$. Seja t fixo em $(0, \tilde{t})$ para qual $\frac{d}{dt} \hat{z}(t)$ exista. A continuidade de f implica que para um $\epsilon > 0$ arbitrário existe $\delta > 0$ tal que se $\|z - \hat{z}\| < \delta$, o conjunto $f(z, U)$ fica contido numa vizinhança $f_\delta(\hat{z}(t), U)$ de δ

no conjunto $f(\hat{z}(t), U)$. Pelo convergência uniforme da sequência (z_m) , existem η e $N > 0$ tais que $\|z_m(s) - \hat{z}(t)\| < \delta$, para $s \in (t, t + \eta)$ e $m > N$. Vamos lembrar que

$$\frac{z_m(s) - z_m(t)}{s - t} = \frac{1}{s - t} \int_t^s f(z_m(r), u_m(r)) dr \quad (2.72)$$

sendo $\frac{1}{s-t} \int_t^s f(z_m(r), u_m(r)) dr \in \overline{f_\delta(\hat{z}(t), U)}$ do conjunto convexo $f_\delta(\hat{z}(t), U)$. Com $m \rightarrow +\infty$, teremos

$$\frac{z(s) - z(t)}{s - t} \in \overline{f_\delta(\hat{z}(t), U)} \Rightarrow \frac{d}{dt} \hat{z}(t) \in \overline{f_\delta(\hat{z}(t), U)}. \quad (2.73)$$

Desde que $\delta > 0$ seja arbitrário e o conjunto $f(\hat{z}(t), U)$ seja convexo e fechado, teremos ainda

$$\frac{d}{dt} \hat{z}(t) \in f(\hat{z}(t), U). \quad (2.74)$$

Ou seja, $\frac{d}{dt} \hat{z}(t)$ existe para algum $t \in (0, \tilde{t})$. Temos agora que provar que existe um controle \hat{u} que seja ótimo que nos dê a trajetória ótima \hat{z} tal que

$$\frac{d}{dt} \hat{z}(t) = f(\hat{z}(t), \hat{u}(t)), \text{ para quase todo } t \in [0, \tilde{t}]. \quad (2.75)$$

Pelo Lema C.0.1, pela a convergência de $t_m \rightarrow \hat{t}$ e $z_m \rightarrow \hat{z}$ em $C([0, \tilde{t}]; \mathbb{R}^n)$ enquanto $m \rightarrow +\infty$, pela a compacidade de K e pela continuidade de G temos que $\hat{J} = G(\hat{t}, \hat{z}(\hat{t}))$ e $(\hat{t}, \hat{z}(\hat{t})) \in K$. Para completarmos a prova deste Teorema, segue do teorema C.0.6 que existe uma sequência crescente (Δ_k) de subconjuntos compactos do intervalo $[0, \tilde{t}]$ tais que a medida de Lebesgue de $\bigcup_k \Delta_k$ é \tilde{t} e, em cada Δ_k , a função $\frac{d}{dt} \hat{z}$ é contínua. Os conjuntos $D_k = \{(t, u) \in \Delta_k \times U : \frac{d}{dt} \hat{z}(t) = f(\hat{z}(t), u)\}$, tais que $D_k \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ para todo k , são conjuntos compactos e pelo lema C.0.1 existe funções de Borel $\hat{u} : \Delta_k \rightarrow U$ tais que

$$\frac{d}{dt} \hat{z}(t) = f(\hat{z}(t), \hat{u}_k(t)), \quad t \in \Delta_k, \quad \forall k. \quad (2.76)$$

Ou seja, o controle ótimo \hat{u} pode ser dado pela seguinte fórmula abaixo

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \hat{u}_1(t) & \text{se } t \in \Delta_1, \\ \hat{u}_k(t) & \text{se } t \in \Delta_k / \Delta_{k-1}, \forall k. \end{cases} \quad (2.77)$$

E assim garantimos a existência de um controle ótimo.

□

Capítulo 3

Jogos Diferenciáveis

3.1 Introdução

O conceito de Jogo Diferenciável apareceu pela primeira vez, de forma bastante clara e objetiva, com a obra prima de Rufus Isaacs, *Differential Games*, em 1951. Apesar da TJD diferir em muitos aspectos em relação a Teoria de Jogos Clássica, pode-se dizer que a primeira só foi amplamente estudada por Isaacs devido aos esforços militares dos Norte-Americanos em entender o trabalho pioneiro de Neumann e Morgenstern, *The Theory of Games and economic Behaviour*, de 1944. Mas apesar de as questões de combate e estratégias militares serem o motivo original para o estudo de JDs, logo foi percebido que essa rica teoria poderia ser amplamente estudada para as mais diversas áreas como biologia, economia, ciência política, entre outras. A forma como é apresentada a TJD deixa o campo aberto para aplicações, desde que tenhamos uma dinâmica de interação entre agentes racionais que procuram cumprir certos objetivos.

Nesse capítulo, iremos estudar apenas o que diz respeito aos JDs entre 2 jogadores. Como veremos, toda a Teoria de Controle e Teoria de EDOs será de grande importância para o estudo de JDs. Jamais se esqueça que o foco de estudo do presente trabalho serão os JPs, especificamente o que diz respeito a um jogo especial: *The Homicidal Chauffeur Game* (JMA). Resumindo, não nos estenderemos muito em relação a outras classes de JDs, mais iremos abordar de maneira geral condições para que existam estratégias ótimas para os jogadores envolvidos.

3.2 Definindo um Jogo Diferenciável entre Dois Jogadores

Um JD entre dois jogadores pode ser definido por uma interação entre dois jogadores, definida por um sistema de EDOs, que é realizada por escolhas de estratégias em espaços estratégicos $U \subset \mathfrak{R}^{m_u}$ e $V \subset \mathfrak{R}^{m_v}$ num intervalo de tempo $[t_0, t_f] = I$. O conjunto de estratégias que um jogador poderá escolher será chamada de conjunto de estratégias admissíveis: nesse caso, o jogador u escolherá estratégias admissíveis em $U_{ad} = L^1(I; U)$ e o jogador v em $V_{ad} = L^1(I; V)$. O jogo poderá ter uma duração de tempo $t_f - t_0$, com um t_f fixo ou não num espaço de estados $E \subset \mathfrak{R}^n$. Chamaremos o conjunto $R = I \times E$ de espaço de trajetórias e o conjunto $T \subset \partial R$ de *superfície terminal* do jogo. De acordo com a escolha deste perfil (entrada pareada $(u, v) \in U_{ad} \times V_{ad}$) teremos uma resposta (saída do sistema em E) que será modelada conforme o sistema dinâmico abaixo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in E. \quad (3.1)$$

O sistema de EDOs acima terá solução sempre que respeitar os teoremas A.2.3 e A.2.4. Agora que determinamos condições para a existência de uma solução geral para o sistema 3.1, estamos aptos a comentar sobre perfis estratégicos (u, v) . A escolha do perfil estará atrelada a otimização de dois dados funcionais de saldo (*Payoff*), um para cada jogador. Veja abaixo:

$$P_{u,v}^u(t_0, x_0) = F_u(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} S_u(s, x(s), u(s), v(s)) ds \quad (3.2)$$

e

$$P_{u,v}^v(t_0, x_0) = F_v(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} S_v(s, x(s), u(s), v(s)) ds. \quad (3.3)$$

Esses funcionais serão otimizados de acordo com o critério de cada jogador. Trataremos neste trabalho de um critério bastante difundido, que o critério que compreende os Jogos de Dois Jogadores com Soma Zero, que pode ser definido da seguinte forma

$$P_{u,v}^u(t_0, x_0) = F(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} S(s, x(s), u(s), v(s)) ds \quad (3.4)$$

$$= -P_{u,v}^v(t_0, x_0) = P_{u,v}(t_0, x_0) > 0 \quad (3.5)$$

com o jogador u querendo maximizar o funcional $P_{u,v}$ e o jogador v querendo minimizar $P_{u,v}$, uma vez que o ganho de um jogador é o prejuízo do outro. O

Jogo de dois Jogadores com Soma Zero definido até aqui poderá ser abreviado por $G(f, U, V, E, P)$ ou simplesmente por G .

O par (u, v) pode ser escolhido com o auxílio de seletores teóricos de estratégias (Ver Princípio de Bellman, Seção 2.2), chamados de *Estratégias Puras*:

$$u : I \times E \rightarrow \Omega_u \subset U \quad (3.6)$$

$$v : I \times E \rightarrow \Omega_v \subset V, \quad (3.7)$$

sendo Ω_u e Ω_v restrições em U e V . Os conjuntos de estratégias puras admissíveis serão $U_{ad_0} = L^1(I \times E; \Omega_u)$ e $V_{ad_0} = L^1(I \times E; \Omega_v)$, para u e v respectivamente.

3.3 O Valor de um Jogo Diferenciável de Soma Zero entre Dois Jogadores

Voltando ao funcional 3.4, daremos uma atenção especial para o par de funções $(u_{(*)}, v_{(*)})$ com a seguinte característica abaixo:

$$P_{u, v_{(*)}}(t_0, x_0) \leq P_{u_{(*)}, v_{(*)}}(t_0, x_0) \leq P_{u_{(*)}, v}(t_0, x_0), \quad \forall (u, v) \in U_{ad} \times V_{ad} \quad (3.8)$$

O par $(u_{(*)}, v_{(*)})$ será chamado de *Ponto de Sela* do Jogo Diferenciável G e $W = P_{u_{(*)}, v_{(*)}}(t_0, x_0)$ será o *Valor do Jogo G* . Este valor representa o valor do *Payoff* numa situação onde os dois jogadores escolhem suas melhores estratégias para jogar o jogo G . Vamos agora estudar algumas propriedades de um valor W de um jogo diferenciável qualquer. Vamos assumir que os jogadores tenham informação perfeita do passado de seu oponente mas não tenham informação precisa sobre o futuro. Dessa forma, iremos determinar um esquema para tentarmos inferir algo sobre o futuro de cada um dos jogadores. Para isso, vamos determinar duas situações: na primeira, o jogador $u(s)$ terá conhecimento perfeito de $v(s)$ para todo $s \leq t$, enquanto $v(s)$ terá conhecimento de $u(s)$ somente para todo $s \leq t - \delta$; na segunda situação ocorre o contrário, o jogador $v(s)$ terá conhecimento perfeito de $u(s)$ para todo $s \leq t$, enquanto $u(s)$ terá conhecimento de $v(s)$ somente para todo $s \leq t - \delta$. Agora, seja $\delta = \frac{t_f - t_0}{n}$, vamos dividir o intervalo I em n intervalos $I_j = \{t; t_{j-1} < t \leq t_j\}$, com $t_j = t_0 + j\delta$, $1 \leq j \leq n$. Ainda, sejam os conjuntos U_{ad}^j e V_{ad}^j os conjuntos de controles admissíveis para o intervalos I_j . Com estes conjuntos poderemos determinar quatro transformações que nos auxiliarão para a representação das duas situações que comentamos

nesse paragrafo:

$$\Gamma_{u_+}^{\delta,j} : V_{ad}^1 \times U_{ad}^1 \dots V_{ad}^{j-1} \times U_{ad}^{j-1} \times V_{ad}^j \rightarrow U_{ad}^j, \Gamma_{u_+}^\delta = (\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta,n}), \quad 1 \leq j \leq n \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{u_-}^{\delta,j} : V_{ad}^1 \times U_{ad}^1 \dots V_{ad}^{j-1} \times U_{ad}^{j-1} \rightarrow U_{ad}^j, \Gamma_{u_-}^\delta = (\Gamma_{u_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_-}^{\delta,n}), \quad 2 \leq j \leq n \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{v_+}^{\delta,j} : U_{ad}^1 \times V_{ad}^1 \dots U_{ad}^{j-1} \times V_{ad}^{j-1} \times U_{ad}^j \rightarrow V_{ad}^j, \Gamma_{v_+}^\delta = (\Gamma_{v_+}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{v_+}^{\delta,n}), \quad 1 \leq j \leq n \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{v_-}^{\delta,j} : U_{ad}^1 \times V_{ad}^1 \dots U_{ad}^{j-1} \times V_{ad}^{j-1} \rightarrow V_{ad}^j, \Gamma_{v_-}^\delta = (\Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}), \quad 2 \leq j \leq n. \quad (3.12)$$

As transformações 3.9 e 3.10 serão chamadas de estratégias δ -superior e δ -inferior para o jogador u e as transformações 3.11 e 3.12 serão chamadas de estratégias δ -superior e δ -inferior para o jogador v . O par $(\Gamma_{u_+}^\delta, \Gamma_{v_-}^\delta)$ representa a primeira situação descrita no parágrafo anterior (situação de vantagem para o jogador u) e o par $(\Gamma_{u_-}^\delta, \Gamma_{v_+}^\delta)$ representa a segunda situação (vantagem para o jogador v). Chamaremos de *respostas* os pares de funções (u_+^δ, v_-^δ) e (u_-^δ, v_+^δ) que forem escolhidas de maneira única utilizando os pares estratégicos $(\Gamma_{u_+}^\delta, \Gamma_{v_-}^\delta)$ e $(\Gamma_{u_-}^\delta, \Gamma_{v_+}^\delta)$ com componentes (u_j, v_j) , respectivamente, com

$$(u_+^\delta(t), v_-^\delta(t)) = (u_j(t), v_j(t)), \quad \text{se } t \in I_j, \quad (3.13)$$

$$u_j = \Gamma_{u_+}^{\delta,j}(u_1, v_1, \dots, u_{j-1}, v_{j-1}, v_j), \quad v_j = \Gamma_{v_-}^{\delta,j}(u_1, v_1, \dots, u_{j-1}, v_{j-1}) \quad (3.14)$$

e

$$(u_-^\delta(t), v_+^\delta(t)) = (u_j(t), v_j(t)), \quad \text{se } t \in I_j, \quad (3.15)$$

$$u_j = \Gamma_{u_-}^{\delta,j}(u_1, v_1, \dots, u_{j-1}, v_{j-1}, u_j), \quad v_j = \Gamma_{v_+}^{\delta,j}(u_1, v_1, \dots, u_{j-1}, v_{j-1}, u_j). \quad (3.16)$$

O *Payoff* do Jogo G utilizando alguma das respostas indicadas, será escrito da seguinte forma abaixo:

$$P_{u_+^\delta, v_-^\delta}(t_0, x_0) = P(u_+^\delta, v_-^\delta) = P[\Gamma_{u_+}^\delta, \Gamma_{v_-}^\delta] = P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}] \quad (3.17)$$

ou

$$P_{u_-^\delta, v_+^\delta}(t_0, x_0) = P(u_-^\delta, v_+^\delta) = P[\Gamma_{v_+}^\delta, \Gamma_{u_-}^\delta] = P[\Gamma_{u_-}^{\delta,1}, \Gamma_{v_+}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_-}^{\delta,n}, \Gamma_{v_+}^{\delta,n}] \quad (3.18)$$

O *Payoff* 3.17 representa um esquema que será chamado de Jogo Superior G^δ , sendo que a escolha da estratégia ótima $\Gamma_{u_+}^{\delta,n}$ terá como o objetivo a determinação de uma função $u_{+, (*)}^\delta$ no intervalo I que satisfaz a propriedade abaixo:

$$P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}] = \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}]. \quad (3.19)$$

Prosseguindo de maneira indutória, o Jogo G^δ também terá o fator de escolha da estratégia ótima $\Gamma_{v_-, (*)}^{\delta, n}$, que vai respeitar a seguinte propriedade abaixo:

$$P[\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+, (*)}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-, (*)}^{\delta, n}] = \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}]. \quad (3.20)$$

Agora, estendendo o conceito acima para toda a extensão do intervalo I , teremos:

$$W^\delta = P[\Gamma_{u_+, (*)}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-, (*)}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+, (*)}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-, (*)}^{\delta, n}] \quad (3.21)$$

$$= \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, 1}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}]. \quad (3.22)$$

O valor W^δ será chamado de Valor Superior δ do Jogo G^δ . Similarmente teremos o *Payoff* 3.18, que representa um esquema que será chamado de Jogo Inferior G_δ , sendo que a escolha da estratégia ótima $\Gamma_{v_+, (*)}^{\delta, n}$ terá como o objetivo a determinação de uma função $v_{+, (*)}^\delta$ no intervalo I que satisfaz a propriedade abaixo:

$$P[\Gamma_{u_-}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_+}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_-, (*)}^{\delta, n}, \Gamma_{v_+, (*)}^{\delta, n}] = \inf_{\Gamma_{v_+}^{\delta, n}} P[\Gamma_{u_-}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_+}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_-}^{\delta, n}, \Gamma_{v_+}^{\delta, n}]. \quad (3.23)$$

Prosseguindo de maneira indutória, o Jogo G_δ também terá o fator de escolha da estratégia ótima $\Gamma_{u_-, (*)}^{\delta, n}$, que vai respeitar a seguinte propriedade abaixo:

$$P[\Gamma_{u_-}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_+}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_-, (*)}^{\delta, n}, \Gamma_{v_+, (*)}^{\delta, n}] = \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta, n}} \inf_{\Gamma_{v_+}^{\delta, n}} P[\Gamma_{u_-}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_+}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_-}^{\delta, n}, \Gamma_{v_+}^{\delta, n}]. \quad (3.24)$$

Agora, estendendo o conceito acima para toda a extensão do intervalo I , teremos:

$$W_\delta = P[\Gamma_{u_-, (*)}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_+, (*)}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_-, (*)}^{\delta, n}, \Gamma_{v_+, (*)}^{\delta, n}] \quad (3.25)$$

$$= \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta, 1}} \inf_{\Gamma_{v_+}^{\delta, 1}} \dots \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta, n}} \inf_{\Gamma_{v_+}^{\delta, n}} P[\Gamma_{u_-}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_+}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_-}^{\delta, n}, \Gamma_{v_+}^{\delta, n}]. \quad (3.26)$$

O valor W_δ será chamado de Valor Inferior δ do Jogo G_δ . Esses conceitos analíticos estão sendo desenvolvidos para que possamos provar a existência de valores ótimos para um jogo diferenciável de acordo com as seguintes condições básicas abaixo:

- (J1) - A função f do problema 3.1 é contínua em $I \times E \times U \times V$.
- (J2) - Existe uma função $\sigma : I \rightarrow \mathfrak{R}^+$ com $\int_I \sigma(s) ds < \infty$ tal que $\|f(t, x, u, v)\| \leq \sigma(t)(1 + \|x\|) \forall (t, x, u, v) \in I \times E \times U \times V$.

- (J3) - Para cada $\vartheta > 0$ existe uma função $\sigma_\vartheta : I \rightarrow \mathfrak{R}^+$ com $\int_I \sigma_\vartheta(s) ds < \infty$ tal que $\|f(t, x, u, v) - f(t, y, u, v)\| \leq \sigma_\vartheta(t) \|x - y\| \forall (t, x, u, v) \in I \times E \times U \times V$ e $\|x\| \leq \vartheta$ e $\|y\| \leq \vartheta$.
- (J4) - A função S do *Payoff* 3.4 é contínua em $I \times E \times U \times V$.

Com essas condições, poderemos definir quatro propriedades dos valores W^δ e W_δ , expressas na forma de teoremas.

Teorema 3.3.1 *Sejam as condições (J1) a (J4) e um jogo diferenciável G . Então vale*

$$W^\delta = \inf_{\Gamma_{v_-}^\delta} \sup_{\Gamma_{u_+}^\delta} P[\Gamma_{u_+}^\delta, \Gamma_{v_-}^\delta] = \sup_{\Gamma_{u_+}^\delta} \inf_{\Gamma_{v_-}^\delta} P[\Gamma_{u_+}^\delta, \Gamma_{v_-}^\delta], \quad (3.27)$$

com

$$\inf_{\Gamma_{v_-}^\delta} = \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,1}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,n}} \quad (3.28)$$

e

$$\sup_{\Gamma_{u_+}^\delta} = \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta,1}} \dots \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta,n}} \quad (3.29)$$

Demonstração do Teorema 3.3.1 *Para provarmos o teorema, primeiramente vamos determinar*

$$B = \sup_{\Gamma_{u_+}^\delta} \inf_{\Gamma_{v_-}^\delta} P[\Gamma_{u_+}^\delta, \Gamma_{v_-}^\delta]. \quad (3.30)$$

É bastante óbvio que a sequência abaixo sempre vale

$$\inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,1}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}] \leq \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,1}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta,1}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,n}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}], \quad (3.31)$$

ou seja, $B \leq W^\delta$. Para provarmos que $B \geq W^\delta$, precisaremos de um argumento mais sofisticado. Seja $\epsilon > 0$ e $\tilde{\Gamma}_{u_+}^{\delta,n}$ tal que

$$\sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}] \leq P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \tilde{\Gamma}_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}] + \epsilon. \quad (3.32)$$

Da afirmação acima, segue que

$$\inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,n}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}] \leq \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \tilde{\Gamma}_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}] + \epsilon. \quad (3.33)$$

Vamos determinar

$$P_{n-1}[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta,n-1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n-1}] = \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1}, \dots, \tilde{\Gamma}_{u_+}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}]. \quad (3.34)$$

Podemos determinar, da mesma maneira que nas equações 3.32 e 3.33, o seguinte resultado abaixo.

$$\inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n-1}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, n-1}} P_{n-1} [\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n-1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n-1}] \quad (3.35)$$

$$\leq \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n-1}} P_{n-1} [\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \tilde{\Gamma}_{u_+}^{\delta, n-1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n-1}] + \epsilon. \quad (3.36)$$

A regra acima nos oferece a seguinte fórmula por indução

$$\inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, k}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, k}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, n}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, k}, \Gamma_{v_-}^{\delta, k}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}] \quad (3.37)$$

$$\leq \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, k}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \tilde{\Gamma}_{u_+}^{\delta, k}, \Gamma_{v_-}^{\delta, k}, \dots, \tilde{\Gamma}_{u_+}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}] + (n - (k - 1))\epsilon. \quad (3.38)$$

Ou seja

$$W^\delta = \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, 1}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, n}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}] \quad (3.39)$$

$$\leq \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, 1}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n}} P [\tilde{\Gamma}_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \tilde{\Gamma}_{u_+}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}] + n\epsilon \quad (3.40)$$

$$= \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta}} \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta}, \Gamma_{v_-}^{\delta}] + n\epsilon = B + n\epsilon. \quad (3.41)$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $W^\delta \leq B$. Como $W^\delta \leq B$ e $W^\delta \geq B$, temos que $W^\delta = B$. Vamos agora demonstrar que $W^\delta = \inf_{\Gamma_{u_+}^{\delta}} \sup_{\Gamma_{v_-}^{\delta}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta}, \Gamma_{v_-}^{\delta}]$. Seja

$$A = \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta}, \Gamma_{v_-}^{\delta}]. \quad (3.42)$$

Sabemos que, para qualquer $\hat{\Gamma}_{v_-}^{\delta}$,

$$P [\Gamma_{u_+}^{\delta}, \hat{\Gamma}_{v_-}^{\delta}] \geq \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta}, \Gamma_{v_-}^{\delta}]. \quad (3.43)$$

Ou seja, teremos que

$$\sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta}, \hat{\Gamma}_{v_-}^{\delta}] \geq \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta}} \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta}, \Gamma_{v_-}^{\delta}] = B = V^\delta. \quad (3.44)$$

Ou seja, tomando o infimo em respeito a $\hat{\Gamma}_{v_-}^{\delta}$, teremos que $A \geq W^\delta$. Falta demonstrar que $A \leq W^\delta$. Defina

$$\tilde{P}_n [\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n-1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n-1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}] = \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, n}} P [\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}]. \quad (3.45)$$

Ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\tilde{\Gamma}_{v_-}^{\delta, n}$ tal que

$$\tilde{P}_n[\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n-1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n-1}, \tilde{\Gamma}_{v_-}^{\delta, n}] \leq \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n}} \tilde{P}_n[\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}, \Gamma_{u_+}^{\delta, n-1}] + \epsilon. \quad (3.46)$$

A desigualdade acima pode ser generalizada da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, k}} \dots \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \tilde{\Gamma}_{v_-}^{\delta, k}, \Gamma_{u_+}^{\delta, k-1}, \dots, \Gamma_{v_-}^{\delta, n-1}, \Gamma_{u_+}^{\delta, n}, \tilde{\Gamma}_{v_-}^{\delta, n}] \\ & \leq \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, k}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, k}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, k}, \Gamma_{v_-}^{\delta, k}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}] + (n - (k - 1))\epsilon. \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$(3.48)$$

Utilizando a desigualdade acima e tomando o ínfimo de $\sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta}, \tilde{\Gamma}_{v_-}^{\delta}]$ em relação a $\tilde{\Gamma}_{v_-}^{\delta}$ teremos o seguinte:

$$A = \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta}, \Gamma_{v_-}^{\delta}] \quad (3.49)$$

$$\leq \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, 1}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta, n}} \sup_{\Gamma_{u_+}^{\delta, n}} P[\Gamma_{u_+}^{\delta, 1}, \Gamma_{v_-}^{\delta, 1}, \dots, \Gamma_{u_+}^{\delta, n}, \Gamma_{v_-}^{\delta, n}] + n\epsilon. \quad (3.50)$$

$$= W^{\delta} + n\epsilon. \quad (3.51)$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $A \leq W^{\delta}$, portanto $A = W^{\delta}$. Com isso, terminamos a demonstração. \square

Uma segunda propriedade dos valores W^{δ} e W_{δ} é um Corolário do Teorema anterior, que omitiremos a demonstração.

Corolário 3.3.1 *Sejam as condições (J1) a (J4) e um jogo diferenciável G . Então vale*

$$W_{\delta} = \inf_{\Gamma_{v_+}^{\delta}} \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta}} P[\Gamma_{u_-}^{\delta}, \Gamma_{v_+}^{\delta}] = \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta}} \inf_{\Gamma_{v_+}^{\delta}} P[\Gamma_{u_-}^{\delta}, \Gamma_{v_+}^{\delta}], \quad (3.52)$$

A terceira propriedade a ser apresentada relaciona os dois valores W^{δ} e W_{δ} , veja abaixo.

Teorema 3.3.2 *Sejam as condições (J1) a (J4) e um jogo diferenciável G . Então $W^{\delta} \geq W_{\delta}$.*

Demonstração do Teorema 3.3.2 *De acordo com os esquemas 3.13-3.14 e 3.15-3.16 e a definição dos valores W_δ e W^δ , teremos que*

$$W_\delta = \sup_{u_1} \inf_{v_1} \dots \sup_{u_n} \inf_{v_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \quad (3.53)$$

e

$$W^\delta = \inf_{v_1} \sup_{u_1} \dots \inf_{v_n} \sup_{u_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n). \quad (3.54)$$

Vamos determinar

$$\pi_k(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k) = \sup_{u_{k+1}} \inf_{v_{k+1}} \dots \sup_{u_n} \inf_{v_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \quad (3.55)$$

e

$$\Pi_k(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k) = \inf_{v_{k+1}} \sup_{u_{k+1}} \dots \inf_{v_n} \sup_{u_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n). \quad (3.56)$$

Levando em consideração as equações acima, podemos determinar a seguinte recursão abaixo

$$\inf_{v_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \leq P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \leq \sup_{u_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n), \quad (3.57)$$

ou seja

$$\sup_{u_n} \inf_{v_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \leq P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \leq \inf_{v_n} \sup_{u_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n). \quad (3.58)$$

Usando as equações de referência 3.55 e 3.56, temos

$$\pi_{n-1}(u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}) \leq P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \leq \Pi_{n-1}(u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}). \quad (3.59)$$

Ou seja

$$\pi_k(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k) \leq P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \leq \Pi_k(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k) \quad \forall 0 \leq k \leq n-1, \quad (3.60)$$

com

$$\pi_0 = \sup_{u_1} \inf_{v_1} \dots \sup_{u_n} \inf_{v_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \quad (3.61)$$

e

$$\Pi_0 = \inf_{v_1} \sup_{u_1} \dots \inf_{v_n} \sup_{u_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n). \quad (3.62)$$

Mas $\pi_0 = W_\delta$ e $\Pi_0 = W^\delta$, portanto $W^\delta \geq W_\delta$, conforme 3.60.

□

Finalmente, mostramos abaixo a quarta propriedade sobre os valores W^δ e W_δ .

Teorema 3.3.3 *Sejam as condições (J1) a (J4) e n e k números inteiros positivos tais que $m = kn$, $\delta = (t_f - t_0)/n$ e $v = (t_f - t_0)/m$. Então*

$$W^\delta \geq W^v \geq W_v \geq W_\delta. \quad (3.63)$$

Demonstração do Teorema 3.3.3 *Para simplificarmos, vamos demonstrar somente o caso em que $k = 2$. Vamos dividir cada interval I_j em subintervalos de tamanhos iguais:*

$$I_j^{(1)} = \left\{ t; t_{j-1} < t \leq \frac{1}{2}(t_{j-1} + t_j) \right\} \text{ e } I_j^{(2)} = \left\{ t; \frac{1}{2}(t_{j-1} + t_j) < t \leq t_j \right\}. \quad (3.64)$$

com $I_j = \{t; t_{j-1} < t \leq t_j\}$, $t_j = t_0 + j\delta$. Sejam $U_{ad}^{j,(1)}$ e $U_{ad}^{j,(2)}$ os espaços de controles admissíveis de U nos intervalos $I_j^{(1)}$ e $I_j^{(2)}$, sendo $V_{ad}^{j,(1)}$ e $V_{ad}^{j,(2)}$ os espaços de controles admissíveis de V nos intervalos $I_j^{(1)}$ e $I_j^{(2)}$. Com isso, teremos as seguintes funções de controles abaixo, definidas no intervalo I_j .

$$u_j(t) = \begin{cases} u_j^{(1)}(t) & \text{se } t \in I_j^{(1)}, \\ u_j^{(2)}(t) & \text{se } t \in I_j^{(2)}. \end{cases} \text{ e } v_j(t) = \begin{cases} v_j^{(1)}(t) & \text{se } t \in I_j^{(1)}, \\ v_j^{(2)}(t) & \text{se } t \in I_j^{(2)}. \end{cases} \quad (3.65)$$

Agora, podemos prosseguir da seguinte maneira abaixo.

$$\inf_{v_n} \sup_{u_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \quad (3.66)$$

$$= \inf_{v_n^{(1)} v_n^{(2)}} \inf_{u_n^{(1)} u_n^{(2)}} \sup_{u_n^{(1)} u_n^{(2)}} P(u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, u_1^{(2)}, v_1^{(2)}, \dots, u_n^{(1)}, v_n^{(1)}, u_n^{(2)}, v_n^{(2)}) \quad (3.67)$$

$$\geq \inf_{v_n^{(1)} u_n^{(1)} v_n^{(2)} u_n^{(2)}} \sup_{u_n^{(1)} u_n^{(2)}} \inf_{v_n^{(1)} v_n^{(2)}} P(u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, u_1^{(2)}, v_1^{(2)}, \dots, u_n^{(1)}, v_n^{(1)}, u_n^{(2)}, v_n^{(2)}). \quad (3.68)$$

Utilizando esse argumento para todos os intervalos I_j , temos:

$$\inf_{v_1} \sup_{u_1} \dots \inf_{v_n} \sup_{u_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \quad (3.69)$$

$$= \inf_{v_1^{(1)} v_1^{(2)} u_1^{(1)} u_1^{(2)}} \inf_{v_n^{(1)} v_n^{(2)} u_n^{(1)} u_n^{(2)}} \sup_{u_1^{(1)} u_1^{(2)}} \dots \inf_{v_n^{(1)} v_n^{(2)} u_n^{(1)} u_n^{(2)}} P(u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, u_1^{(2)}, v_1^{(2)}, \dots, u_n^{(1)}, v_n^{(1)}, u_n^{(2)}, v_n^{(2)}) \quad (3.70)$$

$$\geq \inf_{v_1^{(1)} u_1^{(1)} v_1^{(2)} u_1^{(2)}} \sup_{u_1^{(1)} u_1^{(2)}} \inf_{v_n^{(1)} u_n^{(1)} v_n^{(2)} u_n^{(2)}} \dots \inf_{v_n^{(1)} u_n^{(1)} v_n^{(2)} u_n^{(2)}} \sup_{u_n^{(1)} u_n^{(2)}} P(u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, u_1^{(2)}, v_1^{(2)}, \dots, u_n^{(1)}, v_n^{(1)}, u_n^{(2)}, v_n^{(2)}), \quad (3.71)$$

ou seja $W^\delta \geq W^v$. A demonstração que $W_\delta \leq W_v$ é análoga.

□

Os dois jogos criados, G_δ e G^δ são sequências que definem um jogo diferenciável G . Se os limites

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} W^\delta = W^+ \text{ e } \lim_{\delta \rightarrow 0} W_\delta = W^- \quad (3.72)$$

existirem, então charemos W^+ e W^- de valores superior e inferior do jogo diferenciável G . Finalmente, se $W^+ = W^- = W$, então chamaremos W de valor do jogo G .

Vamos agora seguir por uma nova abordagem ao valor W de um jogo diferenciável G . Tanto o jogador u como o jogador v vão escolher estratégias $\Gamma_{u_-}^\delta = \Gamma_u$ e $\Gamma_{v_-}^\delta = \Gamma_v$ respectivamente, gerando uma saída (u_-^δ, v_-^δ) . Só para esclarecer: dizer que tanto u como v escolhendo estratégias δ -inferiores significa que no ato da escolha, cada um desses jogadores conhecerá somente o passado do outro, a escolha presente do adversário ficará incógnita até o próximo turno. Iremos chamar este novo esquema de *Jogo- δ* . Vamos agora introduzir os valores \tilde{W}^δ e \tilde{W}_δ , definidos por

$$\tilde{W}^\delta = \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,1}} \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta,1}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,n}} \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_-}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1} \dots \Gamma_{u_-}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}] \quad (3.73)$$

$$\tilde{W}_\delta = \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta,1}} \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,1}} \dots \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta,n}} \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_-}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1} \dots \Gamma_{u_-}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}], \quad (3.74)$$

sendo que é trivial que

$$W^\delta \geq \tilde{W}^\delta \geq \tilde{W}_\delta \geq W_\delta. \quad (3.75)$$

Utilizando 3.75, teremos uma relação, que pode ser vista no teorema abaixo, entre os valores W^δ , W_δ , \tilde{W}^δ e \tilde{W}_δ que será bastante útil.

Teorema 3.3.4 *Sejam as condições (J1) a (J4) e $P = P_{u,v}$, então $W^\delta = \tilde{W}^\delta$ e $\tilde{W}_\delta = W_\delta$.*

Demonstração do Teorema 3.3.4 *A demonstração desse teorema é bastante trivial. para um k qualquer, temos que:*

$$\inf_{v_k} \sup_{u_k} \dots \inf_{v_n} \sup_{u_n} P(\Gamma_{u_-}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1} \dots \Gamma_{u_-}^{\delta,k-1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,k-1}, u_k, v_k, \dots, u_n, v_n) \quad (3.76)$$

$$= \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,k}} \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta,k}} \dots \inf_{\Gamma_{v_-}^{\delta,n}} \sup_{\Gamma_{u_-}^{\delta,n}} P[\Gamma_{u_-}^{\delta,1}, \Gamma_{v_-}^{\delta,1} \dots \Gamma_{u_-}^{\delta,n}, \Gamma_{v_-}^{\delta,n}] \quad (3.77)$$

ou seja, para $k = 1$, temos que

$$\tilde{W}^\delta = \inf_{v_1} \sup_{u_1} \dots \inf_{v_n} \sup_{u_n} P(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) = W^\delta. \quad (3.78)$$

A hipótese $\tilde{W}_\delta = W_\delta$ é provada de maneira análoga.

□

Para prosseguirmos, vamos determinar como a resposta do Jogo- δ , utilizando o par de estratégias (Γ_u, Γ_v) , o par (u^δ, v^δ) e a trajetória correspondente por x^δ . Vamos supor que existe uma subsequência $\{\nu\}$ de $\{\delta\}$ tal que as seguintes condições abaixo se mantenham quando $\delta = \nu \rightarrow 0$:

$$u^\delta \rightarrow \bar{u}, \bar{u} \in U_{ad} \quad (3.79)$$

$$v^\delta \rightarrow \bar{v}, \bar{v} \in V_{ad} \quad (3.80)$$

$$\max_{t \in I} \|x^\delta(t) - \bar{x}(t)\| \rightarrow 0, \quad (3.81)$$

sendo \bar{x} uma trajetória correspondente a escolha das funções \bar{u} e \bar{v} no problema 3.1. Chamaremos de \bar{x} de *trajetória generalizada* do par estratégico (Γ_u, Γ_v) . As funções \bar{u} e \bar{v} serão chamadas de *saídas* referentes ao par estratégico (Γ_u, Γ_v) e o conjunto de todos os valores $P_{\bar{u}, \bar{v}}$ será chamado de *conjunto de valores* e será denotado por $P[\Gamma_u, \Gamma_v]$. Quando o Payoff de um dado jogo diferencial G_0 estiver definido como

$$P_{u,v}(t_0, x_0) = F(t_f(x_0), x(t_f(x_0))) + \int_{t_0}^{t_f(x_0)} S(s, x(s)) ds = P_{u,v}(x_0), \quad (3.82)$$

determinaremos como o conjunto de todas as saídas generalizadas de (Γ_u, Γ_v) do jogo G_0 o conjunto $P_0[\Gamma_u, \Gamma_v]$, que será chamado de *conjunto generalizado de valores*.

No início desse capítulo, definimos o que era o *Ponto de Sela* de um Jogo Diferencial G . Agora, tratando em termos do par estratégico (Γ_u, Γ_v) , podemos redefinir abaixo, em notação de conjuntos, quando $P[\Gamma_{u(*)}, \Gamma_{v(*)}]$ será um *conjunto de Pontos de Sela* do jogo G

$$P[\Gamma_u, \Gamma_{v(*)}] \leq P[\Gamma_{u(*)}, \Gamma_{v(*)}] = \{V\} \leq P[\Gamma_{u(*)}, \Gamma_v], \quad (3.83)$$

para toda estratégia Γ_u e Γ_v , se o valor W existir para o jogo G . Da mesma maneira definimos *conjunto generalizado de Pontos de Sela* do Jogo G

$$P_0[\Gamma_u, \Gamma_{v(*)}] \leq P_0[\Gamma_{u(*)}, \Gamma_{v(*)}] = \{W\} \leq P_0[\Gamma_{u(*)}, \Gamma_v], \quad (3.84)$$

para toda estratégia Γ_u e Γ_v , se o valor W existir para o jogo G .

Observação 3.3.1 *Em termos de Teoria de Conjuntos, no que diz respeito a conjuntos de valores reais, podemos estabelecer a seguinte relação de ordem para dois conjuntos $A \subset \mathfrak{R}$ e $B \subset \mathfrak{R}$: se $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ ocorrer $a \leq b$, então $A \leq B$.*

Como podemos ver, o valor W de um dado jogo diferencial está intimamente ligado a um ponto de sela $(u_{(*)}, v_{(*)})$. Podemos ainda formular uma hipótese nessa seção: gostaríamos de dizer que, se $(u_{(*)}, v_{(*)})$ é de fato um ponto de sela, então

$$W(t) = P_{u_{(*)}, v_{(*)}}(t, x(t)) = \min_{v \in V_{ad}} \max_{u \in U_{ad}} P_{u, v}(t, x(t)) = \max_{u \in U_{ad}} \min_{v \in V_{ad}} P_{u, v}(t, x(t)), \quad (3.85)$$

com $W(t) = W(t, x(t)) = P_{u_{(*)}, v_{(*)}}(t, x(t))$. A igualdade acima nos dará o *Princípio Min-Max*, que será provado na próxima seção. Derivando 3.85 em relação a t , temos:

$$\frac{d}{dt} W(t) = \min_{v \in V_{ad}} \max_{u \in U_{ad}} \{ -S(t, x, u, v) \} \quad (3.86)$$

$$= \min_{v \in V_{ad}} \max_{u \in U_{ad}} (\nabla_t W(t, x), \nabla_x W(t, x))(1, f(t, x, u, v)) \quad (3.87)$$

$$= \min_{v \in V_{ad}} \max_{u \in U_{ad}} \{ \nabla_t W(t, x) + \nabla_x W(t, x) f(t, x, u, v) \}. \quad (3.88)$$

Ou seja

$$\nabla_t W(t, x) = \min_{v \in V_{ad}} \max_{u \in U_{ad}} \{ \nabla_x W(t, x) f(t, x, u, v) + S(t, x, u, v) \}. \quad (3.89)$$

Chamaremos a equação acima de *Equação de Isaacs* e toda a teoria algébrica sobre estratégias ótimas estará ligada a existência de soluções desta EDP.

3.4 Uma Condição Necessária Para a Existência de Estratégias Ótimas

Nessa seção extendemos o estudo sobre jogos diferenciais G definido na seção 3.2 deste capítulo. Para facilitar a notação nesta seção, iremos determinar $(t_0, x_0) = (\tau, \xi)$. A primeira consideração a ser feita nessa seção será sobre a superfície terminal T do jogo G , sendo T dado por:

$$T = \bigcup_{i=1}^{\alpha} T_i \quad (3.90)$$

com T_i uma sub-superfície parametrizada por $(Y_i(\sigma), X_i(\sigma))$, $\sigma \in K_i$, $Y_i \in C^1(K_i, \mathfrak{R})$ e $X_i \in C^1(K_i, \mathfrak{R}^n)$, sendo $K_i \in E$ um cubo. Para prosseguirmos, vamos precisar da seguinte definição abaixo.

Definição 3.4.1 *Uma coleção finita de sub-regiões D_1, \dots, D_l de uma região D será chamada de uma decomposição de D se ocorrer:*

1. Cada D_i é conexo e tem uma fronteira com finitas superfícies, todas elas contínuas e diferenciáveis.
2. $D_i \cap D_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Uma função definida em \bar{D} com valores num conjunto qualquer $A \subset \mathbb{R}^\gamma$ será $C^l(\bar{D}, A)$ por partes se esta função for $C^l(D_i, A)$, com D_i pertencente a alguma decomposição de D . Para prosseguirmos, definimos o jogo $G(U_{ad_0}, V_{ad_0}, P)$, com $U_{ad_0} \neq \emptyset$ e $V_{ad_0} \neq \emptyset$ tais que, se $(u_{(*)}, v_{(*)})$ um ponto de sela do jogo G , ele será independente do valor inicial (τ, ξ) . A definição abaixo nos auxiliará a controlar as descontinuidades que u e v poderão ter, garantindo que, em tais pontos de descontinuidade, a trajetória ótima $x_{(*)}$ seja pelo menos contínua.

Definição 3.4.2 *Seja R uma região qualquer. Uma decomposição regular de R será uma decomposição composta por sub-regiões R_{i,j_i} , $i = 1, \dots, \alpha$, com as condições abaixo sendo satisfeitas.*

1. As regiões R_i são definidas por:

$$R_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} \bar{R}_{i,j} \cap R, \quad (3.91)$$

de tal forma que R_1, \dots, R_α seja uma decomposição de R .

2. Para cada $i = 1, \dots, \alpha$, R_i sempre será adjacente a T_i e $R_i \cap T_k = \emptyset$, $i \neq k$.
3. Para cada $i = 1, \dots, \alpha$, $\bar{R}_{i,j_i} \cap T_i \neq \emptyset$ e $\bar{R}_{i,j} \cap T_i = \emptyset$, $j \neq j_i$.
4. Para cada $i = 1, \dots, \alpha$ e $j = 1, \dots, j_i - 1$, o conjunto

$$M_{i,j} = (\bar{R}_{i,j} \cap \bar{R}_{i,j+1}) \cap R_i \quad (3.92)$$

é uma superfície orientada de dimensão n e diferenciável em $K_{i,j}$, com $K_{i,j}$ sendo um cubo em E e $M_{i,j}$ parametrizada por

$$(t, x) = (Y_{i,j}(\sigma), X_{i,j}(\sigma)), \quad \sigma \in K_{i,j}. \quad (3.93)$$

5. Cada superfície $M_{i,j}$ divide R_i em duas regiões disjuntas, tal que $\bar{M}_{i,j} \cap \bar{M}_{i,k} = \emptyset$, $j \neq k$.
6. Para cada conjunto de inteiros $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, \alpha\}$, o conjunto $N_{\{i_1, \dots, i_k\}}$ definido abaixo

$$N_{\{i_1, \dots, i_k\}} = \left(\bigcap_{j=1}^k \bar{R}_{i_j} \right) \cap R \quad (3.94)$$

pode ser vazio ou uma fronteira diferenciável não singular.

Complementando a definição acima, determinamos a seguinte notação:

$$M_{i,j_i} = T_i \quad (3.95)$$

$$M_{i,0} = \text{União de todas as regiões } N_{\{i_1, \dots, i_s\}} \quad (3.96)$$

$$R_{i,j}^+ = R_{i,j} \cup M_{i,j} \quad (3.97)$$

$$R_{i,j}^- = R_{i,j} \cup M_{i,j-1} \quad (3.98)$$

$$\tilde{R}_{i,j} = R_{i,j}^+ \cup R_{i,j}^-, \quad i \in \{1, \dots, \alpha\}, \quad j \in \{1, \dots, j_i\}. \quad (3.99)$$

Agora podemos definir as restrições para $(u_{(*)}, v_{(*)})$. Vamos tratar, $u_{(*)} \in C^1(R, U)$ e $v_{(*)} \in C^1(R, V)$, ambos por partes, como estratégias puras. Vamos definir uma decomposição regular R associada aos pontos de descontinuidade $M_{i,j}$, tal que $u_{(*)} \in C^1(R_{i,j}, U)$ e $v_{(*)} \in C^1(R_{i,j}, V)$ para cada $R_{i,j} \subset R$. As funções $u_{(*)}$ e $v_{(*)}$ vão respeitar as seguintes regras abaixo.

1. A decomposição associada a $(u_{(*)}, v_{(*)})$ é uma decomposição regular de R .
2. Se $(\tau, \xi) \in R_{i,j}^-$, $i = 1, \dots, \alpha$, $j = 1, \dots, j_i$, então existe somente uma trajetória ótima

$$\phi_{(*)}(t, \tau, \xi) = \phi_{(*)i}(t, \tau, \xi), \quad \phi_{(*)i} : (\tau, t_{i,j_i}) \rightarrow R_i, \quad (3.100)$$

sendo t_{i,j_i} o tempo que $\phi_{(*)}$ alcança a superfície T_i . Ainda: $\phi_{(*)}$ nunca será tangente a $M_{i,k}$, $k \in \{j, \dots, j_i\}$, ou algum $N_{\{i_1, \dots, i_k\}}$.

O lema abaixo garante e reforça as restrições acima.

Lema 3.4.1 *Seja $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$, $1 \leq j \leq j_i$, e seja $(t_{i,k}(\tau, \xi), x_{i,k}(\tau, \xi))$ uma representação da intersecção de $\phi_{(*)}$ com a superfície $M_{i,k}$, $j \leq k \leq j_i$. Então para cada k , $j \leq k \leq j_i$, as funções $\phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$, $\nabla_{\tau} \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$, $\nabla_{\xi} \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$, $\nabla_{t\tau}^2 \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$ e $\nabla_{t\xi}^2 \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$ existem e são contínuas em $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$ e os valores das funções acima em $t = t_{i,k-1}$ e $t = t_{i,k}$ são os limites, calculados a partir de $\mathring{R}_{i,k}$. Ainda, se em todos pontos $(\bar{\tau}, \bar{\xi}) \in M_{i,k-1}$ ou $(\bar{\tau}, \bar{\xi}) \in M_{i,k}$, nós definimos para estas funções, limites tais que $(\tau, \xi) \rightarrow (\bar{\tau}, \bar{\xi})$ de $\mathring{R}_{i,k}$, tornando assim as funções $\phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$, $\nabla_{\tau} \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$, $\nabla_{\xi} \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$, $\nabla_{t\tau}^2 \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$ e $\nabla_{t\xi}^2 \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$ definidas e contínuas para $(\tau, \xi) \in \mathring{R}_{i,j}$.*

Demonstração do Lema 3.4.1 *De acordo com a condição 3.4, temos que R possui uma decomposição regular para garantir que o par $(u_{(*)}, v_{(*)})$ seja um ponto de sela para o jogo $G(U_{ad_1}, V_{ad_1}, P)$, de tal forma que, ao considerarmos uma região R_i com $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$ para algum $1 \leq j \leq j_i$, temos que $\phi_{(*)i}(t, \tau, \xi) = \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$ é a trajetória ótima em R_i que alcança T_i . Sabemos que em cada*

superfície $M_{i,j}$, $u_{(*)}$ ou $v_{(*)}$ possuem descontinuidades. Para transpormos este obstáculo, vamos tratar de uma forma mais local o problema estudado: sejam $u_{(*),i,j}$ e $v_{(*),i,j}$ extensões diferenciáveis de $u_{(*)}$ e $v_{(*)}$ em $R_{i,j}$, com j fixo. Vamos analisar o problema abaixo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_{(*),i,j}(t, x(t)), v_{(*),i,j}(t, x(t))), \quad x(\tau) = \xi, \quad (3.101)$$

com $(\tau, \xi) \in \mathring{R}_{i,j}$. Como $f \in C^1(R \times U \times V, E)$, segue de $(u_{(*),i,j}, v_{(*),i,j})$ e dos Teoremas A.2.3 e A.2.4 que existe uma única função $\psi(t, \tau, \xi)$ que é solução de 3.101, definida no intervalo $(a(\tau, \xi), b(\tau, \xi)) \subseteq (t_{i,j-1}, t_{i,j})$. Ainda, as funções $\nabla_{\xi}\psi_j$, $\nabla_{\tau}\psi_j$, $\nabla_{t\xi}^2\psi_j$ e $\nabla_{t\tau}^2\psi_j$ existem e são contínuas em $\mathring{R}_{i,j}$. Como $u_{(*),i,j}$ e $v_{(*),i,j}$ são extensões de $u_{(*)}$ e $v_{(*)}$, que são diferenciáveis em $R_{i,j}$, então ψ_j também será diferenciável em $R_{i,j}$, definida em $[t_{i,j-1}, t_{i,j}]$. Logo, vale:

$$f(t, x(t), u_{(*),i,j}(t, x(t)), v_{(*),i,j}(t, x(t))) = f(t, x(t), u_{(*)}(t, x(t)), v_{(*)}(t, x(t))). \quad (3.102)$$

Para $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$, a função $\phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$ é definida em $\tau \leq t \leq t_i(\tau, \xi)$, sendo $t_i(\tau, \xi)$ o momento que $\phi_{(*)}$ alcança T_i . Como ψ_j é diferenciável em $R_{i,j}$, então ψ_j também é diferenciável em $\tilde{R}_{i,j}$, logo:

$$\phi_{(*)}(t, \tau, \xi) = \psi_j(t, \tau, \xi), \quad t \in (t_{i,j-1}, t_{i,j}). \quad (3.103)$$

Se $(\tau, \xi) \in M_{i,j-1}$, $(\tau, \xi) \in M_{i,j}$, $t = t_{i,j-1}$ ou $t = t_{i,j}$, cada função relacionada terá o valor computado pelos limites partindo de $\mathring{R}_{i,j}$. Seja agora $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$, $1 \leq j \leq j_i$. A trajetória ótima intercepta $M_{i,j}$ em:

$$(t_{i,j}, x_{i,j}) = (t_{i,j}(\tau, \xi), x_{i,j}(\tau, \xi)) = (Y_{i,j}(\sigma), X_{i,j}(\sigma)). \quad (3.104)$$

Portanto, $\phi_{(*)}$ tem que satisfazer:

$$F(\sigma) = \phi_{(*)}(Y_{i,j}(\sigma), \tau, \xi) - X_{i,j}(\sigma) = 0, \quad (3.105)$$

pois $\nabla_{\sigma}F(\sigma)$ não é singular:

$$\nabla_{\sigma}F(\sigma) = \dot{\psi}_j(t_{i,j}, \tau, \xi)\nabla_{\sigma}Y_{i,j}(\sigma) - \nabla_{\sigma}X_{i,j}(\sigma) \quad (3.106)$$

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \dot{\phi}_{(*)}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) \right) \nabla_{\sigma}Y_{i,j}(\sigma) - \nabla_{\sigma}X_{i,j}(\sigma). \quad (3.107)$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \lim_{h \rightarrow 0^-} \dot{\phi}_{(*)}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) \\ -(\nabla_{\sigma}Y_{i,j}(\sigma))^t & -\nabla_{\sigma}X_{i,j}(\sigma) \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

tem posto $n + 1$, pois $\phi_{(*)}$ nunca é tangente a $M_{i,j}$. Como a matriz acima é semelhante a:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lim_{h \rightarrow 0^-} \dot{\phi}_{(*)}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) \\ 0 & -\nabla_{\sigma} F(\sigma) \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

obviamente $\nabla_{\sigma} F(\sigma)$ tem posto n , sendo $F \in C^1(K_{i,j}, E)$. Como usamos ψ_j acima, podemos considerar $t_{i,j}$ e $x_{i,j}$ como funções diferenciáveis em $(\tau, \xi) \in M_{i,j-1}$ ou $(\tau, \xi) \in M_{i,j}$, calculando assim $t_{i,j}(\tau, \xi)$ e $x_{i,j}(\tau, \xi)$ como limites partindo de $\tilde{R}_{i,j}$.

Seja novamente $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$, supondo $j < j_i$. Definimos a trajetória ótima $\phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$ em $\tilde{R}_{i,j+1}$, com $(t_{i,j+1}(\tau, \xi), x_{i,j+1}(\tau, \xi))$. No intervalo $[t_{i,j}, t_{i,j+1}]$, temos que

$$\phi_{(*)}(t, \tau, \xi) = \phi_{(*)}(t, t_{i,j}, x_{i,j}), \quad (3.110)$$

pois em $\tilde{R}_{i,j+1}$ existem $u_{(*),i,j+1} = u_{(*)}$ e $v_{(*),i,j+1} = v_{(*)}$ diferenciáveis em $R_{i,j}$. Para $(a, b) \in \tilde{R}_{i,j+1}$, seja $\psi_{j+1}(t, a, b)$ a solução de:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_{(*),i,j+1}(t, x(t)), v_{(*),i,j+1}(t, x(t))), \quad x(a) = b. \quad (3.111)$$

Sabemos que ψ_{j+1} , $\dot{\psi}_{j+1}$, $\nabla_a \psi_{j+1}$, $\nabla_b \psi_{j+1}$, $\nabla_t a^2 \psi_{j+1}$ e $\nabla_t b \psi_{j+1}$ existem e são contínuas $R_{i,j+1}$. Como visto anteriormente, temos:

$$\phi_{(*)}(t, \tau, \xi) = \psi_{j+1}(t, t_{i,j}, x_{i,j}) = \phi_{(*)}(t, t_{i,j}, x_{i,j}), \quad t_{i,j} \leq t \leq t_{i,j+1}. \quad (3.112)$$

Pela hipótese de diferenciação de ψ_{j+1} , se $(\tau, \xi) \in M_{i,j}$ ou $(\tau, \xi) \in M_{i,j-1}$, novamente os limites de suas derivadas são calculados partindo de $\tilde{R}_{i,j}$, portanto:

$$\nabla_{\xi} \phi_{(*)}(t, \tau, \xi) = \nabla_{x_{i,j}} \psi_{j+1}(t, t_{i,j}, x_{i,j}) \nabla_{\xi} t_{i,j}(\tau, \xi) + \nabla_{t_{i,j}} \psi_{j+1}(t, t_{i,j}, x_{i,j}) \nabla_{\xi} x_{i,j}(\tau, \xi). \quad (3.113)$$

Se $t = t_{i,j}$, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \nabla_{\xi} \phi_{(*)}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) = \nabla_a \psi_{j+1}(t_{i,j}, t_{i,j}, x_{i,j}) \nabla_{\xi} t_{i,j}(\tau, \xi) \quad (3.114)$$

$$+ \nabla_b \psi_{j+1}(t_{i,j}, t_{i,j}, x_{i,j}) \nabla_{\xi} x_{i,j}(\tau, \xi). \quad (3.115)$$

Temos como resultado do apêndice A que

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_{(*),i,j+1}(t, x(t)), v_{(*),i,j+1}(t, x(t))), \quad x(t_{i,j}) = x_{i,j} \Rightarrow \quad (3.116)$$

$$x(t) = x_{i,j} + \int_{t_{i,j}}^t f(s, x(s), u_{(*),i,j+1}(s, x(s)), v_{(*),i,j+1}(s, x(s))) ds \Rightarrow \quad (3.117)$$

$$\psi_{j+1}(t, a, b) = b + \int_a^t f(s, x(s), u_{(*),i,j+1}(s, x(s)), v_{(*),i,j+1}(s, x(s))) ds \Rightarrow \quad (3.118)$$

$$\therefore \nabla_a \psi_{j+1}(t_{i,j}, t_{i,j}, x_{i,j}) = -f(Z_{i,j}^+) \Rightarrow \quad (3.119)$$

$$\nabla_b \psi_{j+1}(t_{i,j}, t_{i,j}, x_{i,j}) = Id, \quad (3.120)$$

sendo Id a matriz identidade e $Z_{i,j}^+$,

$$Z_{i,j}^+ = (t_{i,j}, x_{i,j}, u_{(*),i,j+1}(t_{i,j}), v_{(*),i,j+1}(t_{i,j})). \quad (3.121)$$

Substituindo em 3.114-3.115, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \nabla_\xi \phi_{(*)}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) = -f(Z_{i,j}^+) \nabla_\xi t_{i,j}(\tau, \xi) + \nabla_\xi x_{i,j}(\tau, \xi). \quad (3.122)$$

Para calcularmos $\lim_{h \rightarrow 0^-} \nabla_\xi \phi_{(*)}(t_{i,j} + h, \tau, \xi)$, substituímos $\sigma = \sigma(\tau, \xi)$ em 3.105 usando 3.104,

$$\tilde{F}(\tau, \xi) = \psi_j(t_{i,j}(\tau, \xi), \tau, \xi) - x_{i,j}(\tau, \xi). \quad (3.123)$$

Calculando $\nabla_\xi \tilde{F}(\tau, \xi)$, temos:

$$\nabla_\xi \tilde{F}(\tau, \xi) = \dot{\psi}(t_{i,j}(\tau, \xi), \tau, \xi) \nabla_\xi t_{i,j}(\tau, \xi) \quad (3.124)$$

$$+ \nabla_\xi \psi_j(t_{i,j}(\tau, \xi), \tau, \xi) + \nabla_\xi x_{i,j}(\tau, \xi) = 0. \quad (3.125)$$

Como $(\tau, \xi) \in \tilde{R}_{i,j}$ e $t_{i,j-1} \leq t \leq t_{i,j}$, nós temos $\phi_{(*)}(t, \tau, \xi) = \psi_j(t, \tau, \xi)$, portanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \nabla_\xi \phi_{(*)}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) = - \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \phi_{(*)}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) \right) \nabla_\xi t_{i,j}(\tau, \xi) + \nabla_\xi x_{i,j}(\tau, \xi). \quad (3.126)$$

Vamos definir agora

$$Z_{i,j}^- = (t_{i,j}, x_{i,j}, u_{(*),i,j}(t_{i,j}, x_{i,j}), v_{(*),i,j}(t_{i,j}, x_{i,j})), \quad (3.127)$$

e usando o fato que $\phi_{(*)}$ satisfaz 3.102, finalmente obtemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \nabla_\xi \phi_{(*)}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) = -f(Z_{i,j}^-) \nabla_\xi t_{i,j}(\tau, \xi) + \nabla_\xi x_{i,j}(\tau, \xi). \quad (3.128)$$

Com as considerações acima, garantimos uma análise das extensões de $\phi_{(*)}$ em $\tilde{R}_{i,j}$, logo o lema está provado. \square

No lema anterior, conseguimos analisar todas as propriedades de $\phi_{(*)}$ que serão importantes para o estudo da função de valores $W(\tau, \xi)$ em R . Definimos a função de valores para o jogo $G(U_{ad_1}, V_{ad_1}, P)$:

$$W(\tau, \xi) = F(t_{i,j_i}, x_{i,j_i}) + \int_{\tau}^{t_{i,j}} \tilde{S}(s) ds + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{i,k}}^{t_{i,k+1}} \tilde{S}(s) ds, \quad (3.129)$$

com $\tilde{S}(t) = S(t, \phi_{(*)}(t), u_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t)), v_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t)))$. O teorema abaixo garante algumas propriedades importantes para finalmente determinarmos uma condição necessária para que existam estratégias ótimas.

Teorema 3.4.1 *A função de valores W é contínua em R . Para cada $R_{i,j}$, as funções $\nabla_{\tau}W$ e $\nabla_{\xi}W$ existem e são contínuas e, além disso, possuem extensões contínuas em $\tilde{R}_{i,j}$. Se $M_{i,j}$ é uma fronteira de descontinuidade de somente uma das estratégias $u_{(*)}$ ou $v_{(*)}$, então $\nabla_{\tau}W$ e $\nabla_{\xi}W$ são contínuas em pontos de $M_{i,j}$. A função W satisfaz abaixo, para todos os valores de $R \cup T$:*

$$S(\tau, \xi, u, v_{(*)}) + \nabla_{\xi}W(\tau, \xi)f(\tau, \xi, u, v_{(*)}) \leq \quad (3.130)$$

$$- \nabla_{\tau}W(\tau, \xi) \leq S(\tau, \xi, u_{(*)}, v) + \nabla_{\xi}W(\tau, \xi)f(\tau, \xi, u_{(*)}, v) \quad (3.131)$$

com

$$u_{(*)} = u_{(*)}(\tau, \xi), \quad v_{(*)} = v_{(*)}(\tau, \xi), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad (3.132)$$

e $S(\tau, \xi, u_{(*)}, v_{(*)}) + \nabla_{\xi}W(\tau, \xi)f(\tau, \xi, u_{(*)}, v_{(*)}) = -\nabla_{\tau}W(\tau, \xi)$. Ainda, os valores de $\nabla_{\tau}W$, $\nabla_{\xi}W$, $u_{(*)}$ e $v_{(*)}$ como limites nos pontos em T , nas fronteiras N_{i_1, \dots, i_k} e em fronteiras de descontinuidade $M_{i,j}$.

Demonstração do Teorema 3.4.1 *Pela definição de W e pelo lema 3.4.1, segue que W é diferenciável em $R_{i,j}$. Logo, se $(\tau_0, \xi_0) \in M_{i,j}$ ou $(\tau_0, \xi_0) \in M_{i,j-1}$, os limites*

$$\lim_{(\tau, \xi) \rightarrow (\tau_0, \xi_0)} \nabla_{\xi}W(\tau, \xi) \text{ e } \lim_{(\tau, \xi) \rightarrow (\tau_0, \xi_0)} \nabla_{\tau}W(\tau, \xi), \text{ com } (\tau, \xi) \in R_{i,j}, \quad (3.133)$$

existem e as funções que calcularmos utilizando esses limites nos pontos (τ_0, ξ_0) são contínuas em $\tilde{R}_{i,j}$. Seja o conjunto $N(\tau, \xi)$ com as seguintes propriedades:

1. $N(\tau, \xi) \subset R_{i,j}$;

2. $(\tau, \xi) \in N(\tau, \xi)$;
3. Existe $\gamma > 0$ tal que o intervalo $[\tau, \tau + \gamma]$ representa a projeção de $N(\tau, \xi)$ na reta t ;
4. A função

$$\hat{v}(t, x) = \begin{cases} v_{(*)}(t, x) & \text{se } (t, x) \notin N(\tau, \xi), \\ v(t, x) & \text{se } (t, x) \in N(\tau, \xi). \end{cases} \quad (3.134)$$

é, tal que $\hat{v} \in V_{ad_1}$.

Seja $\hat{\psi}(t)$ a trajetória resultante da estratégia pareada $(u_{(*)}, \hat{v})$, começando em (τ, ξ) , com $\tau + \gamma$ o tempo em que $\hat{\psi}$ intercepta a fronteira de $N(\tau, \xi)$. Temos:

$$W(\tau, \xi) = P(\tau, \xi)_{u_{(*)}, v_{(*)}} \leq P(\tau, \xi)_{u_{(*)}, \hat{v}}, \quad (3.135)$$

com

$$P(\tau, \xi)_{u_{(*)}, \hat{v}} = F(t, x) + \int_{\tau}^t \hat{S}(s) ds \quad (3.136)$$

$$= F(t, x) + \int_{\tau}^{\tau+\delta} \hat{S}(s) ds + \int_{\tau+\delta}^t \hat{S}(s) ds \quad (3.137)$$

$$= W(\tau + \delta, \hat{\psi}(\tau + \delta)) + \int_{\tau}^{\tau+\delta} \hat{S}(s) ds, \quad (3.138)$$

com

$$\hat{S}(t) = S(t, \hat{\psi}(t), u_{(*)}(t, \hat{\psi}(t)), \hat{v}(t, \hat{\psi}(t))). \quad (3.139)$$

Ou seja

$$W(\tau, \xi) - W(\tau + \delta, \hat{\psi}(\tau + \delta)) \leq \int_{\tau}^{\tau+\delta} \hat{S}(s) ds. \quad (3.140)$$

Agora, levando em consideração $N(\tau, \xi) \rightarrow (\tau, \xi)$, implica que $\delta \rightarrow 0$. Como $\nabla_{\tau} W$ e $\nabla_{\xi} W$ são diferenciáveis em $R_{i,j}$, podemos aplicar o teorema do valor médio,

$$W(\tau, \xi) - W(\tau + \delta, \hat{\psi}(\tau + \delta)) = -\nabla_{\tau} W(\tau, \xi) \delta - \nabla_{\xi} W(\tau, \xi) (\hat{\psi}(\tau + \delta) - \xi), \quad (3.141)$$

mas:

$$\hat{\psi}(\tau + \delta) - \xi = \hat{\psi}(\tau + \delta) - \hat{\psi}(\tau) = f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), \hat{v}(\tau, \xi)) \delta, \quad (3.142)$$

$$\therefore -(\nabla_{\tau} W(\tau, \xi) + \nabla_{\xi} W(\tau, \xi) f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), \hat{v}(\tau, \xi))) \delta \leq \int_{\tau}^{\tau+\delta} \hat{S}(s) ds. \quad (3.143)$$

Concluindo:

$$-\nabla_{\tau}W(\tau, \xi) \leq S(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v) + \nabla_{\xi}W(\tau, \xi)f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v), \quad (3.144)$$

resultado mantido $\forall v \in V_{ad_1}$. Podemos conseguir um resultado análogo $\forall u \in U_{ad_1}$:

$$-\nabla_{\tau}W(\tau, \xi) \geq S(\tau, \xi, u, v_{(*)}(\tau, \xi)) + \nabla_{\xi}W(\tau, \xi)f(\tau, \xi, u, v_{(*)}(\tau, \xi)). \quad (3.145)$$

Combinando 3.144 e 3.145, temos:

$$S_{u, v_{(*)}} + \nabla_{\xi}W(\tau, \xi)f_{u, v_{(*)}} \leq -\nabla_{\tau}W(\tau, \xi) \leq S_{u_{(*)}, v} + \nabla_{\xi}W(\tau, \xi)f_{u_{(*)}, v}, \quad (3.146)$$

com:

$$S(\tau, \xi, u, v_{(*)}(\tau, \xi)) = g_{u, v_{(*)}}, \quad (3.147)$$

$$S(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v) = g_{u_{(*)}, v}, \quad (3.148)$$

$$f(\tau, \xi, u, v_{(*)}(\tau, \xi)) = f_{u, v_{(*)}}e \quad (3.149)$$

$$f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v) = f_{u_{(*)}, v}. \quad (3.150)$$

Logo, vale

$$\min_{v \in V_{ad_1}} \max_{u \in U_{ad_1}} \hat{S} + \nabla_{\xi} \hat{f} = \max_{u \in U_{ad_1}} \min_{v \in V_{ad_1}} \hat{S} + \nabla_{\xi} \hat{f}, \quad (3.151)$$

com

$$\hat{S} = S(\tau, \xi, u, v), \quad \hat{f} = f(\tau, \xi, u, v) \text{ e } \nabla_{\xi} = \nabla_{\xi}(\tau, \xi). \quad (3.152)$$

O resultado acima é um dos mais importantes desta seção, pois é uma condição forte para o entendimento sobre pontos de sela de um jogo $G(U_{ad_1}, V_{ad_1}, P)$. Agora vamos procurar mostrar, de alguma forma, que W é contínua em R . Seja $(\tau, \xi) \in M_{i,j}$, tal que $M_{i,j}$ é uma fronteira de descontinuidade de $u_{(*)}$ ou $v_{(*)}$. Os limites

$$\nabla_{\tau}W^{-}(\tau, \xi) = \lim_{(t,x) \rightarrow (\tau, \xi)} \nabla_{\tau}W(t, x), \quad (t, x) \in R_{i,j}, \quad (3.153)$$

$$\nabla_{\xi}W^{-}(\tau, \xi) = \lim_{(t,x) \rightarrow (\tau, \xi)} \nabla_{\xi}W(t, x), \quad (t, x) \in R_{i,j}, \quad (3.154)$$

$$\nabla_{\tau}W^{+}(\tau, \xi) = \lim_{(t,x) \rightarrow (\tau, \xi)} \nabla_{\tau}W(t, x), \quad (t, x) \in R_{i,j+1}, \quad (3.155)$$

$$\nabla_{\xi}W^{+}(\tau, \xi) = \lim_{(t,x) \rightarrow (\tau, \xi)} \nabla_{\xi}W(t, x), \quad (t, x) \in R_{i,j+1}, \quad (3.156)$$

representam o comportamento de W na fronteira $M_{i,j}$. Vamos supor que $v_{(*)}$ é descontínua em $M_{i,j}$ e que $u_{(*)}$ seja contínua em $M_{i,j}$. Seja $(\tau, \xi) \in M_{i,j}$ e seja $(t(s), x(s))$ uma curva diferenciável no intervalo $(-1, 1)$ contida em $M_{i,j}$

com $(t(0), x(0)) = (\tau, \xi)$. Seja $w(s) = W(t(s), x(s))$. Como $M_{i,j}$ é diferenciável em $K_{i,j}$ e $\nabla_t W^+$, $\nabla_x W^+$ e W^+ são contínuas em $\tilde{R}_{i,j+1}$, segue que existe \tilde{W} definida numa vizinhança N de (τ, ξ) , tal que $\forall (t, x) \in \tilde{R}_{i,j+1} \cap N$, temos $\tilde{W} = W$. Logo:

$$w(s) = W(t(s), x(s)) = \tilde{W}(t(s), x(s)). \quad (3.157)$$

Ou seja, existe $\dot{w}(0)$ tal que:

$$\dot{w}(0) = \nabla_t \tilde{W}(\tau, \xi) \dot{t}(0) + \nabla_x \tilde{W}(\tau, \xi) \dot{x}(0) = \nabla_t \tilde{W}^+(\tau, \xi) \dot{t}(0) + \nabla_x \tilde{W}^+(\tau, \xi) \dot{x}(0). \quad (3.158)$$

Por argumentos similares, temos que:

$$\dot{w}(0) = \nabla_t \tilde{W}^-(\tau, \xi) \dot{t}(0) + \nabla_x \tilde{W}^-(\tau, \xi) \dot{x}(0). \quad (3.159)$$

Portanto:

$$(\nabla_t W^+(\tau, \xi) - \nabla_t W^-(\tau, \xi)) \dot{t}(0) + (\nabla_x W^+(\tau, \xi) - \nabla_x W^-(\tau, \xi)) \dot{x}(0) = 0. \quad (3.160)$$

A equação acima nos leva a supor que $(\nabla_t W^+(\tau, \xi) - \nabla_t W^-(\tau, \xi), \nabla_x W^+(\tau, \xi) - \nabla_x W^-(\tau, \xi))$ é um vetor não nulo ortogonal a $M_{i,j}$ ou $\nabla_t W^+(\tau, \xi) = \nabla_t W^-(\tau, \xi)$ e $\nabla_x W^+(\tau, \xi) = \nabla_x W^-(\tau, \xi)$. Seja N uma vizinhança de (τ, ξ) . Vamos elaborar estratégias $v_{(+)}$ e $v_{(-)}$ tais que:

$$v_{(+)}(t, x) = \begin{cases} v_{(*),i,j+1}(t, x) & \text{se } (t, x) \in N, \\ v_{(*)}(t, x) & \text{se } (t, x) \notin N. \end{cases} \quad (3.161)$$

$$v_{(-)}(t, x) = \begin{cases} v_{(*),i,j}(t, x) & \text{se } (t, x) \in N, \\ v_{(*)}(t, x) & \text{se } (t, x) \notin N. \end{cases} \quad (3.162)$$

Como $u_{(*)}$ é contínua em $M_{i,j}$, temos:

$$u_{(*)}(\tau, \xi) = u_{(*),i,j}(\tau, \xi) = u_{(*),i,j+1}(\tau, \xi). \quad (3.163)$$

Pelas relações 3.151 e 3.146:

$$-\nabla_t W_{(+)}(\tau, \xi) = S(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(+)}(\tau, \xi)) + \quad (3.164)$$

$$\nabla_x W_{(+)}(\tau, \xi) f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(+)}(\tau, \xi)) \quad (3.165)$$

$$\leq S(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(-)}(\tau, \xi)) + \quad (3.166)$$

$$\nabla_x W_{(+)}(\tau, \xi) f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(-)}(\tau, \xi)) \quad (3.167)$$

e

$$-\nabla_t W_{(-)}(\tau, \xi) = S(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(-)}(\tau, \xi)) + \quad (3.168)$$

$$\nabla_x W_{(-)}(\tau, \xi) f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(-)}(\tau, \xi)) \quad (3.169)$$

$$\geq S(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(+)}(\tau, \xi)) + \quad (3.170)$$

$$\nabla_x W_{(-)}(\tau, \xi) f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(+)}(\tau, \xi)), \quad (3.171)$$

Logo:

$$\nabla_t W_{(+)}(\tau, \xi) - \nabla_t W_{(-)}(\tau, \xi) \leq -(\nabla_x W_{(+)}(\tau, \xi) - \nabla_x W_{(-)}(\tau, \xi)) f_{(*),(+)}(\tau, \xi) \quad (3.172)$$

$$\nabla_t W_{(+)}(\tau, \xi) - \nabla_t W_{(-)}(\tau, \xi) \geq -(\nabla_x W_{(+)}(\tau, \xi) - \nabla_x W_{(-)}(\tau, \xi)) f_{*(-),(-)}(\tau, \xi), \quad (3.173)$$

com

$$f_{(*),(+)}(\tau, \xi) = f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(+)}(\tau, \xi)) \quad (3.174)$$

$$f_{*(-),(-)}(\tau, \xi) = f(\tau, \xi, u_{(*)}(\tau, \xi), v_{(-)}(\tau, \xi)) \quad (3.175)$$

Se $(\nabla_t W_{(+)}(\tau, \xi) - \nabla_t W_{(-)}(\tau, \xi), \nabla_x W_{(+)}(\tau, \xi) - \nabla_x W_{(-)}(\tau, \xi))$ é ortogonal a $M_{i,j}$ e for diferente de zero, vale as duas desigualdades acima. Caso a igualdade ocorresse em alguma das desigualdades acima, $(1, f(t, x, u_{(*)}(t, x), v_{(+)}(t, x)))$ ou $(1, f(t, x, u_{(*)}(t, x), v_{(-)}(t, x)))$ seria tangente a $M_{i,j}$, uma contradição. Portanto $\nabla_t W_{(+)}(\tau, \xi) = \nabla_t W_{(-)}(\tau, \xi)$ e $\nabla_x W_{(+)}(\tau, \xi) = \nabla_x W_{(-)}(\tau, \xi)$, e isso prova o teorema. □

Garantimos, com o teorema anterior, não só a continuidade de W em R como sua derivabilidade nas regiões $R_{i,j}$. Um resultado incrível deste teorema é que W satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(t, x) + H\left(t, x, u_{(*)}(t, x), v_{(*)}(t, x), \frac{\partial}{\partial x} W(t, x)\right) = 0, \quad (3.176)$$

com

$$H(t, x, u, v, \lambda) = S(t, x, u, v) + \lambda f(t, x, u, v). \quad (3.177)$$

Vamos concluir esta seção com uma relação bem elaborada entre W com o hamiltoniano 3.177, definida no teorema a seguir.

Teorema 3.4.2 *Seja $\phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$ uma trajetória ótima de um ponto $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$. Então existe uma função $\lambda(t, \tau, \xi)$ definida em $t \in [\tau, t_{i,j_i}(\tau, \xi)]$ e $t \neq t_{i,k}$, $k \in \{j, j+1, \dots, j_i-1\}$, de tal forma que as condições abaixo sejam respeitadas:*

1. λ é contínua em seu domínio de definição e os pontos $t_{i,k}$ possuem limites laterais $\lambda_{(+),k}$ e $\lambda_{(-),k}$.
2. As funções λ e $\phi_{(*)}$ satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u_{(*)}(t, x(t)), v_{(*)}(t, x(t))), \quad (3.178)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u_{(*)}(t, x(t)), v_{(*)}(t, x(t))), \quad (3.179)$$

sendo H a Hamiltoniana 3.177, e para $t = t_{i,k}$, $k \in \{j, j+1, \dots, j_i-1\}$, estas equações são respeitadas para os limites laterais $\lambda_{(+),k}$ e $\lambda_{(-),k}$.

3. Se $M_{i,k}$, $k \in \{j, j+1, \dots, j_i-1\}$, é uma fronteira de descontinuidade de somente uma das funções $u_{(*)}$ ou $v_{(*)}$, então λ é contínua em $t = t_{i,k}$. Caso contrário vale:

$$H(\Pi_{(-),i,k}) \frac{\partial t_{i,k}}{\partial \xi} - \lambda_{(-),k} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial \xi} = H(\Pi_{(+),i,k}) \frac{\partial t_{i,k}}{\partial \xi} - \lambda_{(+),k} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial \xi}, \quad (3.180)$$

com

$$\Pi_{\pm,i,k} = (t_{i,k}, x_{i,k}, u_{(*)\pm}(t_{i,k}, x_{i,k}), v_{(*)\pm}(t_{i,k}, x_{i,k}), \lambda_{\pm,k}). \quad (3.181)$$

4. Para $t = t_{i,j_i}$, vale:

$$F_\sigma(t_{i,j_i}(\tau, \xi), x_{i,j_i}(\tau, \xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\tau, \xi) + H(\Pi_{i,j_i}, \lambda_{j_i}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j_i}(\tau, \xi) - \lambda_{j_i} x_{i,j_i} = 0. \quad (3.182)$$

5. Se $x(t) = \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$, $t \geq \tau$, então:

$$\nabla_x W(t, x) = \lambda(t, \tau, \xi). \quad (3.183)$$

6. Para todo $t \in [\tau, t_{i,j_i}]$ e $t \neq t_{i,k}$, $k \in \{j, \dots, j_i-1\}$, vale:

$$\max_u \min_v H(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u, v, \lambda(t)) = \min_v \max_u H(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u, v, \lambda(t)) \quad (3.184)$$

$$= H(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)), v_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)), \lambda(t)), \quad (3.185)$$

e em $t = t_{i,k}$, $k \in \{j, \dots, j_i-1\}$, as equações acima são respeitadas para limites laterais $\lambda_{(+),k}$ e $\lambda_{(-),k}$.

Demonstração do Teorema 3.4.2 Vamos primeiro desenvolver $\nabla_\xi W(t, x)$, de acordo com a definição de W e após isso, provar um lema que facilitará a demonstração deste teorema,

$$\nabla_\xi W(\tau, \xi) = F_\sigma(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\tau, \xi) + S(P_{i,j_i}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j_i}(\tau, \xi) \quad (3.186)$$

$$+ \sum_{k=j}^{j_i-1} (S(P_{(-),i,k}) - S(P_{(+),i,k})) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,k}(\tau, \xi) \quad (3.187)$$

$$+ \int_\tau^{t_{i,j}} (\nabla_x \bar{S}(t) + \nabla_u \bar{S}(t) \nabla_x u_{(*)}(t, \phi(t, \tau, \xi))) \quad (3.188)$$

$$+ \nabla_v \bar{S}(t) \nabla_x v_{(*)}(t, \phi(t, \tau, \xi)) \nabla_\xi \phi_{(*)}(t, \tau, \xi) dt \quad (3.189)$$

$$+ \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{i,k}}^{t_{i,k+1}} (\nabla_x \bar{S}(t) + \nabla_u \bar{S}(t) \nabla_x u_{(*)}(t, \phi(t, \tau, \xi))) \quad (3.190)$$

$$+ \nabla_v \bar{S}(t) \nabla_x v_{(*)}(t, \phi(t, \tau, \xi)) \nabla_\xi \phi_{(*)}(t, \tau, \xi) dt, \quad (3.191)$$

com

$$\bar{S}(t) = S(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)), v_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi))), \quad (3.192)$$

$$P_{i,k} = (t_{i,k}, \phi_{(*)}(t_{i,k}, \tau, \xi), u_{(*)}(t_{i,k}, \phi_{(*)}(t_{i,k}, \tau, \xi)), v_{(*)}(t_{i,k}, \phi_{(*)}(t_{i,k}, \tau, \xi))) \quad (3.193)$$

$$P_{(+),i,k} = (t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)), v_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi))), \quad (3.194)$$

$$t \in [t_{i,k-1}, t_{i,k}], \quad t \rightarrow t_{i,k}, \quad (3.195)$$

$$P_{(-),i,k} = (t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)), v_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi))), \quad (3.196)$$

$$t \in [t_{i,k}, t_{i,k+1}], \quad t \rightarrow t_{i,k}, \quad (3.197)$$

e

$$F_\sigma(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) = \frac{\partial}{\partial t} F(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \sigma} t_{i,j_i}(\sigma) \quad (3.198)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} F(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \sigma} x_{i,j_i}(\sigma) \quad (3.199)$$

Como podemos ver, o cálculo de $\nabla_\xi W$ envolve uma série de operações complicadas que vão depender de certas condições em cada uma das superfícies de descontinuidades de $u_{(*)}$ ou $v_{(*)}$, ou seja, teremos que procurar alguma técnica que nos ajude a transpor este obstáculo. Para isso, vamos enunciar e provar o lema abaixo.

Lema 3.4.2 Existe uma função $\lambda(t, \tau, \xi)$ definida para $(t, \tau, \xi) \in (t_{i,k-1}, t_{i,k}) \times R_{i,j}$, com $k \in \{j, j+1, \dots, j_i\}$, respeitando os resultados abaixo.

1. Para $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$ e $t \in (t_{i,k-1}, t_{i,k})$, λ é uma função contínua de (t, τ, ξ) .

2. Os limites,

$$\lambda_{(-),k} = \lim_{t \rightarrow t_{(-),i,k}} \lambda(t, \tau, \xi), \quad (3.200)$$

$$\lambda_{(+),k} = \lim_{t \rightarrow t_{(+),i,k}} \lambda(t, \tau, \xi) \quad (3.201)$$

e

$$\lambda_{j_i} = \lim_{t \rightarrow t_{(-),i,j_i}} \lambda(t, \tau, \xi) \quad (3.202)$$

são únicos. Além disso, $\lambda_{(-),k}$ e $\lambda_{(+),k}$ satisfazem 3.181 e λ_{j_i} satisfaz a equação abaixo:

$$\nabla_{\sigma} F(t_{i,j_i}(\tau, \xi), x_{i,j_i}(\tau, \xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\tau, \xi) \quad (3.203)$$

$$+ H(P_{i,j_i}, \lambda_{j_i}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j_i}(\tau, \xi) - \lambda_{j_i} \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j_i}(\tau, \xi) = 0. \quad (3.204)$$

3. Em cada intervalo $[t_{i,k-1}, t_{i,k}]$, $k \in \{j, \dots, j_i\}$, $\dot{\lambda}(t, \tau, \xi)$ existe e satisfaz a equação abaixo:

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial}{\partial x} H(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)), v_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi))), \quad (3.205)$$

com os devidos limites laterais em $t_{i,k}$, calculado interior de $R_{i,k}$.

Demonstração do Lema 3.4.2 Vamos aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange para acharmos um ponto em K_i , um cubo em E , que define o término da trajetória ótima $\phi_{(*)}$, associada a W . Dessa forma, temos:

$$\nabla_{\sigma} F(t_{i,j_i}(\tau, \xi), x_{i,j_i}(\tau, \xi)) + S(P_{i,j_i}) \frac{\partial}{\partial \sigma} T_{i,j_i} + \quad (3.206)$$

$$\lambda_{j_i} \left(f(P_{i,j_i}) \frac{\partial}{\partial \sigma} T_{i,j_i} - \frac{\partial}{\partial \sigma} X_{i,j_i} \right) = 0. \quad (3.207)$$

Pelo Princípio do Mínimo, se trocarmos $f(P_{i,j_i})$ por $\phi(t_{i,j_i}, \tau, \xi)$, a equação acima define unicamente λ_{j_i} como uma função contínua de (τ, ξ) em $R_{i,j}$. Reescrevendo, temos:

$$\nabla_{\sigma} F(t_{i,j_i}(\tau, \xi), x_{i,j_i}(\tau, \xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\tau, \xi) \quad (3.208)$$

$$+ H(P_{i,j_i}, \lambda_{j_i}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j_i}(\tau, \xi) - \lambda_{j_i} \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j_i}(\tau, \xi) = 0. \quad (3.209)$$

Aplicando mais uma vez o Princípio do Mínimo para λ em $[t_{i,j-1}(\tau, \xi), t_{i,j_i}(\tau, \xi)]$, considere a equação diferencial abaixo,

$$\dot{\lambda}(t) = \nabla_x H(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)), v_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)), \lambda(t)), \quad (3.210)$$

sujeito a condição de contorno:

$$\lambda(t_{i,j_i}) = \lambda_{j_i}. \quad (3.211)$$

Novamente pelo Princípio do Mínimo, sabemos que 3.210 é um sistema linear em λ com uma condição de contorno, portanto possui uma solução única definida em $[t_{i,j-1}, t_{i,j_i}]$ e como λ_{j_i} e t_{i,j_i} são funções contínuas de $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$, temos:

$$\lambda = \lambda(t, t_{i,j_i}, \lambda_{j_i}) = \lambda(t, \tau, \xi), \quad (3.212)$$

com $\lambda(t, \tau, \xi)$ contínua em $(t, \tau, \xi) \in [t_{i,j-1}, t_{i,j_i}] \times R_{i,j}$. Agora, seja $\lambda_{(+),j_i-1} = \lambda(t_{(+),j_i-1}, \tau, \xi)$. Considere o sistema linear abaixo:

$$-\lambda_{(-),j_i-1}\zeta_{(-)} = (S(P_{(-),i,j_i-1}) - S(P_{(+),i,j_i-1})) \frac{\partial}{\partial \sigma} T_{i,j_i-1} - \lambda_{j_i}\zeta_{(+)} \quad (3.213)$$

com

$$\zeta_{(\pm)} = f(P_{(\pm),i,j_i-1}) \frac{\partial}{\partial \sigma} T_{i,j_i-1} - \frac{\partial}{\partial \sigma} X_{i,j_i-1}. \quad (3.214)$$

Como $\lim_{t \rightarrow t_{i,j_i-1}} \dot{\phi}_{(*)}(t, \tau, \xi) = f(P_{(+),i,j_i-1})$, pelo lema 3.4.1 e pela continuidade em (τ, ξ) de $\lambda(t_{i,j_i-1}, \tau, \xi)$, segue que o sistema acima define $\lambda_{(-),j_i-1}$ de forma única como função contínua de $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$. Logo, para a condição de contorno

$$\lambda(t_{i,j_i-1}) = \lambda_{(-),j_i-1}, \quad (3.215)$$

a equação 3.210 possui uma solução única no intervalo $[t_{i,j_i-2}, t_{i,j_i-1}]$. Ainda, a solução $\lambda(t, \tau, \xi)$ é uma solução contínua em $[t_{i,j_i-2}, t_{i,j_i-1}] \times R_{i,j}$. É bastante trivial checar que a equação 3.213 pode ser reescrita utilizando a notação da função Hamiltoniana H :

$$\left(H(\Pi_{(-),i,j_i-1}) - H(\Pi_{(+),i,j_i-1}) \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} T_{i,j_i-1} \quad (3.216)$$

$$- \left(\lambda_{(-),j_i-1} - \lambda_{(+),j_i-1} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} X_{i,j_i-1} = 0, \quad (3.217)$$

com

$$\Pi_{(\pm),i,k} = (t_{i,k}, x_{i,k}, u_{(*)}, (\pm)(t_{i,k}, x_{i,k}), v_{(*)}, (\pm)(t_{i,k}, x_{i,k})) \quad (3.218)$$

$$u_{(*)},+ = u_{(*)},i,k+1, \quad u_{(*)},- = u_{(*)},i,k, \quad (3.219)$$

$$v_{(*)},+ = v_{(*)},i,k+1 \text{ e } v_{(*)},- = v_{(*)},i,k. \quad (3.220)$$

Checando a relação 3.213 e adaptando para k , temos:

$$-\lambda_{(-),k}\zeta_{(-)} = (S(P_{(-),i,k}) - S(P_{(+),i,k})) \frac{\partial}{\partial \sigma} T_{i,k} - \lambda_k \zeta_{(+)} \quad (3.221)$$

com

$$\zeta_{(\pm)} = f(P_{(\pm),i,k}) \frac{\partial}{\partial \sigma} T_{i,k} - \frac{\partial}{\partial \sigma} X_{i,k}. \quad (3.222)$$

Retrocedendo no tempo até $k = j$ e multiplicando 3.222 por $\frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\tau, \xi)$, provamos o lema. □

Retornando para a demonstração do Teorema 3.4.2, com λ sendo uma função de acordo com o lema anterior, temos que:

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial}{\partial x} H(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u_{(*)}(t, \tau, \xi), v_{(*)}(t, \tau, \xi)) \quad (3.223)$$

$$= - (\nabla_x \bar{S}(t) + \nabla_u \bar{S}(t) \nabla_x \bar{u}_{(*)}(t) + \nabla_v \bar{S}(t) \nabla_x \bar{v}_{(*)}(t)) \quad (3.224)$$

$$- \lambda(t) (\nabla_x \bar{f}(t) + \nabla_u \bar{f}(t) \nabla_x \bar{u}_{(*)}(t) + \nabla_v \bar{f}(t) \nabla_x \bar{v}_{(*)}(t)). \quad (3.225)$$

Logo:

$$\nabla_\xi W(\tau, \xi) = F_\sigma(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\tau, \xi) + S(P_{i,j_i}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j_i}(\tau, \xi) \quad (3.226)$$

$$+ \sum_{k=j}^{j_i-1} (S(P_{(-),i,k}) - S(P_{(+),i,k})) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,k}(\tau, \xi) \quad (3.227)$$

$$+ \int_\tau^{t_{i,j}} -(\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) (\nabla_x \bar{f}(t) + \nabla_u \bar{f}(t) \nabla_x \bar{u}_{(*)}(t) \quad (3.228)$$

$$+ \nabla_v \bar{f}(t) \nabla_x \bar{v}_{(*)}(t))) \nabla_\xi \phi_{(*)}(t, \tau, \xi) dt \quad (3.229)$$

$$+ \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{i,k}}^{t_{i,k+1}} -(\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) (\nabla_x \bar{f}(t) + \nabla_u \bar{f}(t) \nabla_x \bar{u}_{(*)}(t) \quad (3.230)$$

$$+ \nabla_v \bar{f}(t) \nabla_x \bar{v}_{(*)}(t))) \nabla_\xi \phi_{(*)}(t, \tau, \xi) dt. \quad (3.231)$$

$$(3.232)$$

Como:

$$\dot{\phi}_{(*)}(t, \tau, \xi) = f(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi), u_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)), v_{(*)}(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi))), \quad (3.233)$$

e pelo lema 3.4.1, segue que, para $t \in [t_{i,k}, t_{i,k+1}]$, $k \in \{j, \dots, j_i\}$, temos

$$\nabla_\xi \dot{\phi}_{(*)}(t, \tau, \xi) = \left(\nabla_x \bar{f}(t) + \nabla_u \bar{f}(t) \nabla_x \bar{u}(t) + \nabla_v \bar{f}(t) \nabla_x \bar{v}(t) \right) \nabla_\xi \phi_{(*)}(t, \tau, \xi). \quad (3.234)$$

Ou seja:

$$\nabla_{\xi} W(\tau, \xi) = \nabla_{\sigma} F(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\tau, \xi) + S(P_{i,j_i}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j_i}(\tau, \xi) \quad (3.235)$$

$$+ \sum_{k=j}^{j_i-1} (S(P_{(-),i,k}) - S(P_{(+),i,k})) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,k}(\tau, \xi) \quad (3.236)$$

$$+ \sum_{k=j}^{j_i-1} (\lambda_{(+),k} \nabla_{\xi} \phi_{(*)}(t_{(+),i,k}, \tau, \xi) - \lambda_{(-),k} \nabla_{\xi} \phi_{(*)}(t_{(-),i,k}, \tau, \xi)) \quad (3.237)$$

$$- \lambda_{j_i} \nabla_{\xi} \phi_{(*)}(t_{i,j_i}, \tau, \xi) - \lambda(\tau, \tau, \xi) \nabla_{\xi} \phi_{(*)}(\tau, \tau, \xi). \quad (3.238)$$

Pelo lema 3.4.1, temos que:

$$\lim_{t \rightarrow t_{(+),i,j}} \nabla_{\xi} \phi_{(*)}(t, \tau, \xi) = -f(P_{(+),i,j}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j} + \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j} \quad (3.239)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{(-),i,j}} \nabla_{\xi} \phi_{(*)}(t, \tau, \xi) = -f(P_{(-),i,j}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j} + \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j}. \quad (3.240)$$

Logo:

$$\nabla_{\xi} W(\tau, \xi) = \nabla_{\sigma} F(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\tau, \xi) \quad (3.241)$$

$$+ S(P_{i,j_i}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j_i} + \sum_{k=j}^{j_i-1} \left((S(P_{(-),i,k}) - S(P_{(+),i,k})) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,k} \right) \quad (3.242)$$

$$+ \sum_{k=j}^{j_i-1} \left(\lambda_{(+),k} \left(-f(P_{(+),i,k}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,k} + \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j} \right) \right) \quad (3.243)$$

$$- \lambda_{(-),k} \left(-f(P_{(-),i,k}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,k} + \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j} \right) \quad (3.244)$$

$$- \lambda_{j_i} \left(-f(P_{i,j_i}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j_i} + \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j_i} \right) + \lambda(\tau, \tau, \xi) \quad (3.245)$$

$$= \lambda(\tau, \tau, \xi), \quad (3.246)$$

resultado garantido por 3.206 e 3.181. Ou seja, para $t \geq \tau$, vale:

$$\nabla_x W(t, x) = \lambda(t, t, x), \quad (3.247)$$

pois seja $\hat{\xi} = \phi_{(*)}(\hat{\tau}, \tau, \xi)$, para $\hat{\tau} > \tau$, então para $t > \hat{\tau}$ vale $\phi_{(*)}(t, \hat{\tau}, \hat{\xi}) = \phi_{(*)}(t, \tau, \xi)$. Esta mesma regra é aplicável a λ . Desde que $\nabla_x W$ seja contínua

nas fronteiras de descontinuidades de somente uma das funções $u_{(*)}$ e $v_{(*)}$, para (τ, ξ) fixo, λ é contínua em valores $t_{i,k}$, logo, se (t, x) é um ponto da trajetória $(t, \phi_{(*)}(t, \tau, \xi))$, então segue de 3.247 e de 3.151 a relação abaixo:

$$\min_u \max_v H(t, x, u, v, \lambda) = \max_v \min_u H(t, x, u, v, \lambda) \quad (3.248)$$

$$= H(t, \phi_{(*)}, u_{(*)}, v_{(*)}, \lambda) = -\nabla_t W(t, x) \quad (3.249)$$

E isso demonstra o teorema.

□

Os dois teoremas demonstrados nessa seção nos oferecem um panorama geral sobre a função de valores para quaisquer JDs, tanto que eles compreendem uma série de resultados clássicos demonstrados por Rufus Isaacs em [7].

Capítulo 4

Explicando o Jogo do Motorista Assassino

4.1 Rápida Reapresentação do Problema

Vamos agora prosseguir o estudo sobre o JMA, aumentando nosso poder de análise sobre este JP, que é um jogo diferencial de soma zero não cooperativo. Seguiremos a trilha deixada pela a Equação de Isaacs, que tem um foco central na solução de JDs em geral. Vamos analisar a equação de estados obtida no capítulo 1 seguinte equação de estados abaixo:

$$\dot{x}(t) = v_e \sin(v(t)) - \frac{v_p u(t)}{\Delta} y(t) \quad (4.1)$$

$$\dot{y}(t) = v_e \cos(v(t)) - v_p + \frac{v_p u(t)}{\Delta} x(t). \quad (4.2)$$

com o funcional de custo dado por

$$P_{u,v}(t, x) = t_f(x) - t. \quad (4.3)$$

Os conjuntos U e V do problema serão definidos por $U = [-1, 1]$ e $V = [0, 2\pi]$, lembrando que o jogo terá o seu término quando atingir o conjunto $T_E = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 : \|(x, y)\| \leq \epsilon\}$, para algum $\epsilon > 0$. O conjunto de estados será dado por $E = \mathfrak{R}^2 / \overset{\circ}{T}_E$.

4.2 Capturabilidade

Antes de analisarmos o jogo formulado pelo conjunto de equações 4.1-4.3, temos que pensar sobre quais condições o conjunto ∂T_E possa ser atingido. Se ele

não puder ser atingido, simplesmente diremos que o problema não é bem posto. Vamos pensar agora de uma maneira mais qualitativa para o jogo dado, tentando definir em quais posições o perseguidor tem a chance de capturar o evasor. Essas possíveis posições vitoriosas podem ser dadas por:

$$\min_u \max_v \nu^* f(x, u, v) = \max_v \min_u \nu^* f(x, u, v) \leq 0, \quad (4.4)$$

sendo ν um vetor normal a ∂T_E . Se a desigualdade acima se mantém estritamente, então ∂T_E será atingido, caso contrário, se for mantida a igualdade para algum x , então esses pontos serão pontos de tangência da trajetória com ∂T_E . O conjunto de todos os pontos $x \in \partial T_E$ que satisfazem 4.4 será chamado de *parte utilizável* (PU) de ∂T_E . Teremos dois outros conjuntos importantes que iremos definir: *fronteira da parte utilizável* (FPU) e a *barreira* S . A *barreira* S será a curva que separa o conjunto de estados E em dois conjuntos básicos: dos estados em que o evasor possa ser capturado diretamente e dos pontos onde isso não ocorre. O conjunto FPU será dado por $S \cap PU$. Seja agora $x \in S$ tal que exista um hiperplano tangente a S em x com vetor normal p , então:

$$\min_u \max_v p^* f(x, u, v) = 0. \quad (4.5)$$

Vamos lembrar que a função de valores W de um jogo de perseguição é tida como solução da Equação de Isaacs

$$W_t(t, x) + \min_u \max_v \{W_x(t, x)f(x, u, v) + S(t, x, u, v)\} = \quad (4.6)$$

$$-1 + \min_u \max_v \{W_x(t, x)f(x, u, v) + 1\} = \quad (4.7)$$

$$\min_u \max_v \{W_x(t, x)f(x, u, v)\} = 0. \quad (4.8)$$

Ou seja, quando o estado x do jogo de perseguição está contido em S , se o perseguidor estiver com uma estratégia ótima $u_{(*)}$, o evasor não conseguirá determinar uma estratégia que direcione o estado atual do jogo para fora da S . E se o evasor estiver com uma estratégia ótima $v_{(*)}$, o perseguidor não conseguirá determinar uma estratégia que direcione o estado atual do jogo para dentro da S . Chamaremos então o conjunto S de superfície semi-permeável. Ainda comentando sobre a S , como os jogos de perseguição, em geral, não dependem do tempo inicial, iremos propor que as estratégias, tanto para o perseguidor como para o evasor, sejam procuradas via controles da seguinte forma: $(u(t, x), v(t, x)) = (u(x), v(x))$. Com esse novo ponto de vista, podemos reescrever a equação 4.5 da seguinte maneira abaixo

$$p(x(t))f(x(t), u_{(*)}(x(t)), v_{(*)}(x(t))) = 0. \quad (4.9)$$

Aplicando o princípio do mínimo, temos que p será obtido ao longo de S de acordo com o seguinte sistema abaixo:

$$\dot{p}(t) = -f_x^*(x(t), u_{(*)}(x(t)), v_{(*)}(x(t)))p(t), \quad p(t_f) = \nu. \quad (4.10)$$

Na próxima seção iremos desenvolver os conceitos propostos até aqui para o estudo sobre O JMA.

4.3 Determinando a barreira S

$$\dot{x}(t) = v_e \text{sen}(u_e(t)) - \frac{v_p}{\Delta} u_p(t) y(t) \quad (4.11)$$

$$\dot{y}(t) = v_e \text{cos}(u_e(t)) - v_p + \frac{v_p}{\Delta} u_p(t) x(t). \quad (4.12)$$

No sistema acima, v_p e v_e representam as velocidades do perseguidor e do evasor, respectivamente. O par de controles (u_e, u_p) possuem valores em $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$. Vamos agora determinar os conjuntos T_E , PU , FPU e S deste jogo.

- T_E :

$$(x, y) \in \mathfrak{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq \epsilon^2 \quad (4.13)$$

- PU : lembre que nesse caso $(x, y) \in \partial T_E$ e (x, y) é um vetor normal a ∂T_E

$$\min_{u_p} \max_{u_e} (x, y)^* \left(v_e \text{sen}(u_e) - \frac{v_p}{\Delta} u_p y, v_e \text{cos}(u_e) - v_p + \frac{v_p}{\Delta} u_p x \right) = \quad (4.14)$$

$$\min_{u_p} \max_{u_e} x v_e \text{sen}(u_e) + y v_e \text{cos}(u_e) - v_p y = \quad (4.15)$$

$$\min_{u_p} \max_{u_e} v_e (x \text{sen}(u_e) + y \text{cos}(u_e)) - v_p y = \quad (4.16)$$

$$- v_p y + v_e \epsilon \leq 0. \quad (4.17)$$

De acordo como PU foi determinado, então podemos presumir que se o evasor estiver na frente do perseguidor, a captura pode ocorrer. Caso o evasor estiver do lado do perseguidor, mas numa posição que o perseguidor tenha chances de capturá-lo, ele pode manobrar e evitar uma captura imediata. A FPU nesse caso será $FPU = \{(\epsilon\sqrt{1-\beta^2}, \beta\epsilon)\} \cup \{(-\epsilon\sqrt{1-\beta^2}, \beta\epsilon)\}$ Para construirmos a primeira parte da barreira S , vamos iniciar do ponto $(x, y) = (\epsilon\sqrt{1-\beta^2}, \beta\epsilon)$, sendo $\beta = v_e/v_p < 1$, utilizando a lógica da equação 4.5, teremos:

$$\min_{u_p} \max_{u_e} \left(p_x \left(-\frac{v_p}{\Delta} u_p y + v_e \text{sen}(u_e) \right) + p_y \left(v_e \text{cos}(u_e) - v_p + \frac{v_p}{\Delta} u_p x \right) \right), \quad (4.18)$$

sendo que, as estratégias que otimizam 4.18, estão descritas abaixo:

$$\sin(u_{e,(*)}) = \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}, \quad \cos(u_{e,(*)}) = \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \quad (4.19)$$

$$u_{p,(*)} = \text{sinal}(s), \quad \text{com } s = p_x y - p_y x. \quad (4.20)$$

O vetor $p = (p_x, p_y)$ é solução do seguinte sistemas de EDOs abaixo:

$$\dot{p}_x = -\frac{v_p}{\Delta} u_p p_y \quad (4.21)$$

$$\dot{p}_y = \frac{v_p}{\Delta} u_p p_x, \quad (4.22)$$

com a condição final,

$$(p_x(t_f), p_y(t_f)) = (\epsilon\sqrt{1 - \beta^2}, \epsilon\beta) = (\epsilon \cos(\alpha), \epsilon \sin(\alpha)). \quad (4.23)$$

Para determinarmos $p(t)$, temos que conhecer melhor $u_{p,(*)}$. Para $t = t_f$ e $s = 0$, $u_{p,(*)}$ não pode ser determinada diretamente. Para isso, iremos efetuar uma derivação indireta com

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(p_x y - p_y x) = -v_p p_x. \quad (4.24)$$

Desde que $p_x > 0$ em $t = t_f$, teremos $\frac{ds}{dt} < 0$ em $t = t_f$, ou seja, $s(t) > 0$ para algum t suficientemente perto de t_f portanto $u_p = 1$ logo antes do término. Ou seja, a solução do sistema 4.21-4.22 com a condição final 4.23 é

$$(p_x(t), p_y(t)) = \left(\epsilon \cos\left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha\right), \epsilon \sin\left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha\right) \right), \quad (4.25)$$

e, com essa solução dada a $p(t)$ logo antes do término, temos que a FPU será dada pela trajetória dada pela solução do sistema de EDOs abaixo:

$$\dot{x}(t) = v_e \cos\left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha\right) - \frac{v_p}{\Delta} y(t) \quad (4.26)$$

$$\dot{y}(t) = v_e \sin\left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha\right) - v_p + \frac{v_p}{\Delta} x(t), \quad (4.27)$$

com a condição de contorno $(x(t_f), y(t_f)) = (\epsilon\sqrt{1 - \beta^2}, \beta\epsilon)$. A solução do sistema acima será:

$$x(t) = (\epsilon + v_e(t - t_f)) \cos\left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha\right) + \Delta \left(1 - \cos\left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f)\right)\right) \quad (4.28)$$

$$y(t) = (\epsilon + v_e(t - t_f)) \sin\left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha\right) - \Delta \sin\left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f)\right), \quad (4.29)$$

que é a barreira S . A trajetória acima terá início em ∂T_E e sairá dele tangencialmente a partir do ponto $(\epsilon\sqrt{1-\beta^2}, \beta\epsilon)$. A trajetória definida acima estará fora do círculo de centro na origem e raio ϵ desde que em $t = t_f$ a função

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (4.30)$$

tenha um ponto de mínimo, ou seja: que $\dot{r}(t_f) = 0$ e que $\ddot{r}(t_f) > 0$.

- $\dot{r}(t_f) = 0$

$$\dot{r}(t_f) = \frac{x(t_f)\dot{x}(t_f) + y(t_f)\dot{y}(t_f)}{\sqrt{x^2(t_f) + y^2(t_f)}} \quad (4.31)$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \left(\epsilon \cos(\alpha) \left(v_e \cos(\alpha) - \frac{v_p}{\Delta} \epsilon \sin(\alpha) \right) + \epsilon \sin(\alpha) \left(v_e \sin(\alpha) - v_p \right) \right) \quad (4.32)$$

$$+ \frac{v_p}{\Delta} \epsilon \cos(\alpha) \Big) \quad (4.33)$$

$$= v_e - v_p \sin(\alpha) = v_e - v_p \frac{v_e}{v_p} = 0 \quad (4.34)$$

- $\ddot{r}(t_f) > 0$

$$\ddot{r}(t_f) = \frac{\dot{x}(t_f)^2 + \dot{y}(t_f)^2 + x(t_f)\ddot{x}(t_f) + y(t_f)\ddot{y}(t_f)}{\sqrt{x^2(t_f) + y^2(t_f)}} \quad (4.35)$$

$$- \frac{x(t_f)\dot{x}(t_f) + y(t_f)\dot{y}(t_f)}{x^2(t_f) + y^2(t_f)} \dot{r}(t_f) \quad (4.36)$$

$$= \frac{\dot{x}(t_f)^2 + \dot{y}(t_f)^2 + \epsilon\sqrt{1-\beta^2}\ddot{x}(t_f) + \epsilon\beta\ddot{y}(t_f)}{\epsilon} \quad (4.37)$$

$$(4.38)$$

Seja:

$$\dot{x}(t_f) = v_e\sqrt{1-\beta^2} - \frac{v_p}{\Delta}\epsilon\beta \quad (4.39)$$

$$\dot{y}(t_f) = v_e\beta - v_p + \frac{v_p}{\Delta}\epsilon\sqrt{1-\beta^2} \quad (4.40)$$

$$\ddot{x}(t_f) = -v_e\beta - \frac{v_p}{\Delta}\dot{y}(t_f) \quad (4.41)$$

$$\ddot{y}(t_f) = v_e\sqrt{1-\beta^2} + \frac{v_p}{\Delta}\dot{x}(t_f) \quad (4.42)$$

Temos:

$$\ddot{r}(t_f) = \frac{1}{\epsilon} \left(\left(v_e \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{v_p}{\Delta} \epsilon \beta \right) v_e \sqrt{1 - \beta^2} \right) \quad (4.43)$$

$$+ \left(v_e \beta - v_p + \frac{v_p}{\Delta} \epsilon \sqrt{1 - \beta^2} \right) (v_e \beta - v_p) \quad (4.44)$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \left(v_p^2 - v_e^2 - \frac{v_p^2}{\Delta} \epsilon \sqrt{1 - \beta^2} \right) \quad (4.45)$$

Ou seja,

$$v_p^2 - v_e^2 - \frac{v_p^2}{\Delta} \epsilon \sqrt{1 - \beta^2} > 0. \quad (4.46)$$

Além da barreira S sempre ter início na FPU , tangencial a PU , teremos dois tipos de barreiras S :

- Caso 1: $x(t) > 0 \forall t \in (0, t_f)$, se $s(t) > 0$.
- Caso 2: $x(\tau) = 0$ para algum $\tau \in (0, t_f)$.

Esses dois casos acima podem ser simplificados se estudarmos $\epsilon(t)$, utilizando o primeiro caso acima:

$$x(t) = 0 = (\epsilon + v_e(t - t_f)) \cos \left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha \right) + \Delta \left(1 - \cos \left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) \right) \right). \quad (4.47)$$

Logo:

$$\epsilon(t) = \frac{\Delta \left(\cos \left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) \right) - 1 \right)}{\cos \left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha \right)} - v_e(t - t_f) \quad (4.48)$$

Vamos analisar $\epsilon(t)$ no intervalo $(0, t_f)$. calculando $\dot{\epsilon}(t)$ e $\ddot{\epsilon}(t)$, temos:

$$\dot{\epsilon}(t) = v_p \frac{\sin(\alpha) - \sin \left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha \right)}{\cos^2 \left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha \right)} - v_e \quad (4.49)$$

e

$$\ddot{\epsilon}(t) = \frac{v_p^2}{\Delta} \frac{2 \sin(\alpha) \sin \left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha \right) - \cos \left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha \right)}{\cos^3 \left(\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha \right)} \quad (4.50)$$

A função $\dot{\epsilon}(t)$ se anula quando $\frac{v_p}{\Delta}(t - t_f) + \alpha = \pi k$, para todo k inteiro, mas estamos a procura de t mínimo e positivo tal que $\epsilon(t)$ seja mínimo, porém positivo. Se $k = 0$, $\ddot{\epsilon}(t) = \frac{v_p^2}{\Delta}$, portanto $t = -\frac{\Delta}{v_p}\alpha + t_f$ é ponto de mínimo. Dessa forma, conseguimos dividir em dois casos: se $\epsilon \leq \Delta(\beta \arcsin(\beta) + \sqrt{1 - \beta^2} - 1)$, então temos o Caso 1, caso contrário, teremos o Caso 2.

4.4 Descrição dos dois tipos de Barreiras

Antes de começarmos com uma descrição geométrica dos dois tipos de barreiras, temos que levar em conta que, para que uma dada barreira S seja factível e tangencie ∂T_E em $t = t_f$, a seguinte condição abaixo tem que ser garantida:

$$\epsilon < \Delta \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.51)$$

4.4.1 Caso 1

Quando ocorrer $\epsilon \leq \Delta(\beta \arcsin(\beta) + \sqrt{1 - \beta^2} - 1)$, teremos a seguinte configuração para a barreira S :

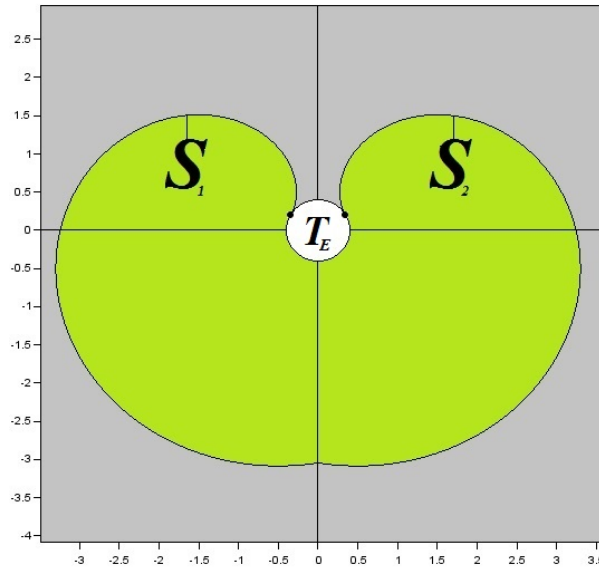


Figura 4.1: Definição da Região de Capturabilidade do Caso 1

Note que a região verde tem como fronteira a PU e as duas curvas S_1 e S_2 ,

tais que $S_1 \cup S_2 = S$. Se o evasor se encontra nessa região, o perseguidor não tem como traçar uma rota de captura: ele terá que efetuar uma manobra para transferir o evasor para a região cinza, onde pode ocorrer a captura. Caso o evasor esteja na região de captura, se o perseguidor jogar de maneira ótima ele conseguirá capturar o evasor (atraindo o evasor para a PU do problema), mesmo que o evasor jogue também de maneira ótima. Nesse caso, o evasor é atraído para uma das curvas S_1 e S_2 e atraído para um dos pontos $(\epsilon \cos \alpha, \epsilon \sin \alpha)$ ou $(-\epsilon \cos \alpha, \epsilon \sin \alpha)$, que é a FPU de ∂T_E .

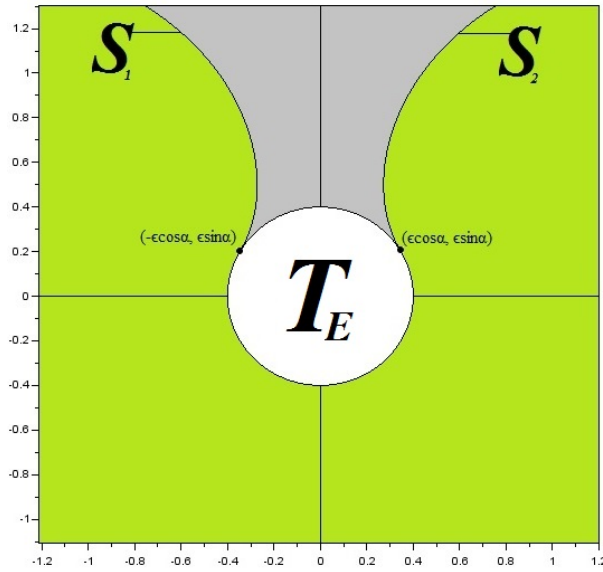


Figura 4.2: Destaque para a PU e a barreira S , próximo de T_E

4.4.2 Caso 2

Quando ocorrer $\epsilon > \Delta(\beta \arcsin(\beta) + \sqrt{1 - \beta^2} - 1)$, as curvas S_1 e S_2 possuem um ponto τ tal que $x(\tau) = 0$, delimitando assim a região de captura a região cinza, delimitada pela PU e pelas curvas S_1 e S_2 . Este caso acontecerá para valores altos do raio de manobrabilidade Δ do perseguidor, diminuindo sua área de captura. Da mesma maneira que no Caso 1, se o evasor estiver na região cinza, a captura pode ocorrer normalmente, uma vez que o perseguidor use sua estratégia ótima. Caso o evasor estiver na região verde, o perseguidor terá que

manobrar até que ele consiga detectar o evasor na região cinza.

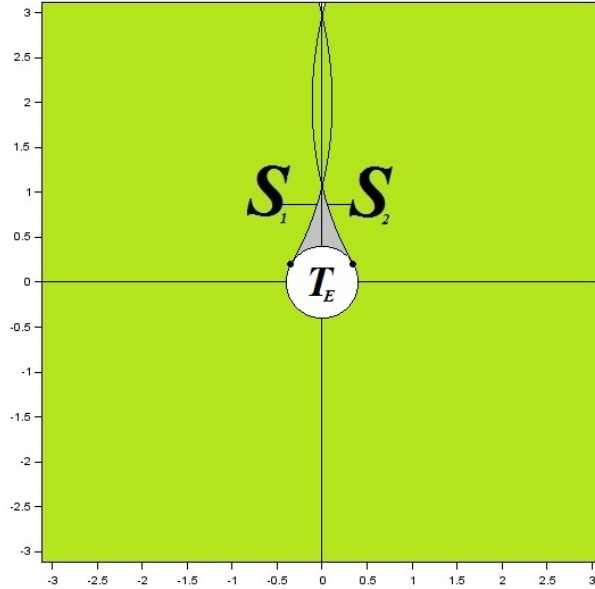


Figura 4.3: Definição da Região de Capturabilidade do Caso 1

4.5 Conclusão

A Teoria de Controle Ótimo, como pudemos comprovar, é uma ferramenta básica e ao mesmo tempo poderosa para o estudo moderno de JDs em geral. O Princípio do Mínimo de Pontryagin foi amplamente utilizado tanto para provar a continuidade da Função de Valores W de um JD qualquer como para determinar a barreira S que determina a região de capturabilidade no espaço de estados do JMA.

Os estudos mais modernos sobre o JMA tem como base a determinação da barreira S . Na região de capturabilidade, o tempo de captura é menor do que fora dela, dessa forma podemos determinar W para todo o espaço de estados do JMA. Os artigos [13] e [14], podemos ver vários avanços relacionados a JPs, e um deles é referente a determinação das curvas de níveis de W no espaço de estados do JMA, com um tempo de captura t_f associado, levando em conta que W é contínua. Os dois tipos de barreira S geram dois tipos de funções W .

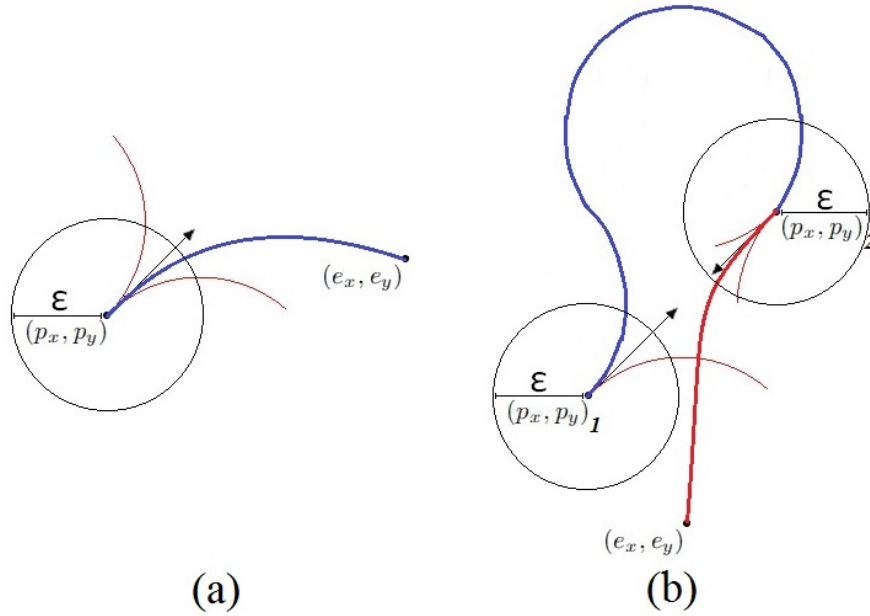


Figura 4.4: Em (a), temos uma captura direta (em azul). Em (b), temos uma manobra (em azul) seguida de uma captura direta (em vermelho).

Levamos em consideração todo o espaço de estados, exceto o conjunto terminal T_E . Conclui-se que, caso o estado inicial do JMA seja fora da região de capturabilidade, o tempo de captura deverá ser maior (ver 4.4, situação (b)), pois o Perseguidor deverá efetuar uma manobra que transfira o estado inicial para a região de capturabilidade, caso ocorra o contrário (ver 4.4, situação (a)), a captura será mais rápida.

Apêndice A

Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

A.1 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Seja o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias lineares com uma condição inicial, definido abaixo

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + b(t), \quad z(t_0) = x_0 \in \mathfrak{R}^n, \quad t_0 \in [0, T] \quad (\text{A.1})$$

com $z : [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $A : [0, T] \rightarrow M(\mathfrak{R}, n, n)$, $b : [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^n$ e $T > 0$. Agora, vamos enunciar um teorema que garanta a existência e unicidade do problema acima.

Teorema A.1.1 *Assuma que $A \in L^1([0, T]; M(\mathfrak{R}, n, n))$. Então existe exatamente uma função $S : [0, T] \rightarrow M(\mathfrak{R}, n, n)$ com elementos $S_{i,j}$ absolutamente contínuos, tais que*

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t), \quad \text{para quase todo } t \in [0, T] \quad (\text{A.2})$$

$$S(0) = Id. \quad (\text{A.3})$$

Além disso, a matriz $S(t)$ é inversível para um $t \in [0, T]$ dado, e a solução única de A.1 terá a forma

$$z(t) = S(t)S^{-1}(t_0)z_0 + \int_{t_0}^t S(t)S^{-1}(s)b(s)ds, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{A.4})$$

Observação A.1.1 A função S do Teorema A.1.1 será chamada de solução fundamental de EDOs Lineares e terá o seguinte aspecto:

$$S(t) = e^{\int_0^t A(s)ds} \quad (\text{A.5})$$

sendo e^X a função exponencial de uma matriz $X \in M(\mathfrak{R}, n, n)$, veja abaixo:

$$e^X = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} X^i \quad (\text{A.6})$$

O seguinte teorema abaixo fornecerá uma propriedade específica para a função exponencial de uma matriz.

Teorema A.1.2 Seja $A \in M(\mathfrak{R}, n, n)$ e $\gamma \in \mathfrak{R}$ definido por

$$\gamma = \max\{\text{Re}(\lambda) | \det(A - \lambda Id)\}. \quad (\text{A.7})$$

Para cada $\epsilon > 0$, existe uma constante c (dependendo de ϵ e A) tal que

$$\|e^{tA}\| \leq ce^{(\gamma+\epsilon)t}, \forall t \geq 0. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Não Lineares

Definição A.2.1 O sistema

$$\dot{z}(t) = f(t, z(t)), \quad z \in \mathfrak{R}^n, \quad (\text{A.9})$$

será chamado de sistema autônomo se a função f não depender do tempo, ou seja $f(t, z(t)) = f(z(t))$.

Definição A.2.2 O Problema de Valor inicial

$$\dot{z}(t) = f(t, z(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad z_0 \in \mathfrak{R}^n, \quad (\text{A.10})$$

será chamado de Problema de Cauchy.

Definição A.2.3 Uma função $f(t, x)$ satisfaz a condição de continuidade de Lipschitz na variável y , $(t, y) \in \bar{E} \subset \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, se e somente se existir uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x_0) - f(t, x_f)\| \leq L\|x_0 - x_f\|, \quad (\text{A.11})$$

para quaisquer par de pontos (t, x_0) e (t, x_f) em \bar{E} .

Definição A.2.4 *O maior intervalo de definição de soluções do problema A.10 que passam por z_0 será chamado de intervalo maximal de soluções e será determinado pelo símbolo $\mathfrak{S}_f(z_0) \subset \mathfrak{R}$. A solução que for definida no intervalo $\mathfrak{S}_f(z_0)$ será chamada de solução maximal do problema A.10.*

Teorema A.2.1 *Seja o Problema de Cauchy A.10, com f contínua em t e Lipschitz contínua em x . Nestas condições, existe uma única solução para o Problema A.10.*

Teorema A.2.2 *Assuma que f seja uma função contínua em $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$ com valores em \mathfrak{R}^n do problema A.10. Então para um $t_0 \geq 0$ dado e $x \in \mathfrak{R}^n$, existirá uma solução local para A.10. Se $z(t)$, $t \in [t_0, \tau)$, é uma solução maximal e $\tau < +\infty$, então*

$$\lim_{t \uparrow \tau} \|z(t)\| = +\infty. \quad (\text{A.12})$$

Teorema A.2.3 *Assuma que para um $x \in \mathfrak{R}^n$ fixo, a função $t \rightarrow f(t, x)$, $t \in [0, T]$, é Borel mensurável e para uma função c não negativa e integrável em $[0, T]$ vale*

$$\|f(t, x)\| \leq c(t)(\|x\| + 1), \quad (\text{A.13})$$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq c(t)\|x - y\|, x, y \in \mathfrak{R}^n, t \in [0, T]. \quad (\text{A.14})$$

Então a equação A.10 tem exatamente uma solução z . Ainda, para um $t \in [0, T]$ dado, a função $x \rightarrow z(t, x)$ é um homeomorfismo de \mathfrak{R}^n em \mathfrak{R}^n .

Teorema A.2.4 *Assuma que a função $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ seja contínua e, para um real c positivo,*

$$\|f(x, v)\| \leq c(\|x\| + \|v\| + 1), \quad (\text{A.15})$$

$$\|f(x, v) - f(y, v)\| \leq c\|x - y\|, x, y \in \mathfrak{R}^n, v \in \mathfrak{R}^m. \quad (\text{A.16})$$

Então, para uma função localmente integrável qualquer v existe exatamente uma solução do problema de cauchy abaixo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), v(t)), x(t) \in \mathfrak{R}^n \text{ e } v(t) \in \mathfrak{R}^m \quad (\text{A.17})$$

Teorema A.2.5 *Assuma que sejam mantidas as condições do teorema A.2.3 para um $t \in [0, T]$ dado, sendo que a função $f(t, \cdot)$ tenha uma derivada contínua $f_x(t, \cdot)$ e que as funções $f(\cdot, \cdot)$ e $f_x(\cdot, \cdot)$ são limitadas em conjuntos limitados de $[0, T] \times \mathfrak{R}^n$. Então a função $x_0 \rightarrow x(\cdot, x_0)$, de \mathfrak{R}^n no espaço das funções*

APÊNDICE A. SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS 66

contínuas $C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ é Fréchet diferenciável num ponto z_0 dado e a derivada direcional na direção $\omega \in \mathbb{R}^n$ é a solução ξ da equação linear

$$\dot{\xi}(t) = f_x(t, x(t, x_0))\xi(t), \quad \xi(t_0) = \omega. \quad (\text{A.18})$$

Em particular, a função $t \rightarrow x_{x_0}(t, x_0)$ é absolutamente contínua e satisfaz a equação

$$x_{x_0}^\cdot(t, x_0) = f_x(t, x(t, x_0))x_{x_0}(t, x_0) \text{ para quase todo } t \in [0, T] \text{ e } x_{x_0}(t_0, x_0) = Id. \quad (\text{A.19})$$

Teorema A.2.6 *Assuma que a função $f(t, x, \gamma)$, $(x, \gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$, satisfaz o Teorema A.2.4 com \mathbb{R}^n substituído por $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Então, para um $t \in [0, T]$ dado, $(x_0, \gamma_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, a função $\gamma \rightarrow z(t, x_0, \gamma)$ é Fréchet diferenciável em γ_0 e*

$$z_\gamma^\cdot(t, x_0, \gamma_0) = f_x(t, x(t, x_0, \gamma_0), \gamma_0)x_\gamma(t, x_0, \gamma_0) + f_\gamma(t, x(t, x_0, \gamma_0), \gamma_0), \quad t \in [0, T]. \quad (\text{A.20})$$

Lema A.2.1 *Seja X e Z espaços de Banach e F uma função na vizinhança Ω de um ponto (ξ_0, ζ_0) , com as seguintes propriedades:*

1. $F(\xi_0, \zeta_0) = 0$
2. *existem as derivadas de Gateaux F_ξ e F_ζ , contínuas em $(0, 0)$, e o operador $F_\zeta(\xi_0, \zeta_0)$ tem uma inversa contínua $F_\zeta^{-1}(\xi_0, \zeta_0)$. Então existem bolas abertas $B_{\delta_\xi}(\xi_0) \subset X$ e $B_{\delta_\zeta}(\zeta_0) \subset Z$, tais que para um $\xi \in B_{\delta_\xi}(\xi_0)$ dado, existe um único $\zeta \in B_{\delta_\zeta}(\zeta_0)$, denotado por $\zeta(\xi)$, tal que $F(\xi, \zeta) = 0$.*

Ainda, a função $\zeta(\xi)$ é diferenciável em $\delta_\xi(\xi_0)$ e

$$\zeta_\xi(\xi) = -F_\zeta^{-1}(\xi, \zeta(\xi))F_\xi(\xi, \zeta(\xi)). \quad (\text{A.21})$$

Lema A.2.2 *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : D \rightarrow D$ de Lipschitz contínua em D com constante de Lipschitz L . Seja ainda $z : [0, T] \rightarrow D$ uma solução de $\dot{z}(t) = f(z(t))$, $z(0) = z_0$ e $y \in C^1([0, T]; D)$ continuamente diferenciável satisfazendo*

$$\|y(0) - z(0)\| \leq a, \quad \|\dot{y}(t) - f(y(t))\| \leq b, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{A.22})$$

Então vale a seguinte estimativa

$$\|y(t) - z(t)\| \leq (a + bT)e^{Lt}, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{A.23})$$

APÊNDICE A. SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS 67

Lema A.2.3 (*Lema de Gronwall*) *Seja k uma função não negativa, limitada e Borel Mensurável num intervalo $[t_0, t_f]$ e l uma função não decrescente. Seja v uma função integrável em $[t_0, t_f]$ de tal forma que para quase todo $t \in [t_0, t_f]$*

$$v(t) \leq l(t) + \int_{t_0}^t k(s)v(s)ds. \quad (\text{A.24})$$

Então para todo $t \in [t_0, t_f]$ que satisfaça a equação acima, vale

$$v(t) \leq e^{\int_{t_0}^t k(s)ds}l(t). \quad (\text{A.25})$$

Apêndice B

Teoria de Sistemas de Controle

B.1 Introdução

Apresentaremos nesse apêndice os resultados mais importantes sobre a Teoria dos Sistemas de Controle, que nos auxiliarão no estudo de Controles Ótimos para os seguintes sistemas:

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z(t_0) = z_0, \quad z \in E \subset \mathbb{R}^n \text{ e } u \in U \subset \mathbb{R}^m \quad (\text{B.1})$$

De especial atenção para a existência de uma condição inicial para o problema: veremos que, sobre certas condições, se o problema tiver uma condição inicial, teremos uma solução única para o sistema B.1. Vamos chamar E de Conjunto de Estados do Sistema e U de Conjunto de Entradas (Controles) do Sistema. O objetivo de usarmos o parâmetro u em Sistemas Dinâmicos é de determinar uma trajetória para um subconjunto de E que consideramos, de acordo com algum critério pré determinado, como alvo. O parâmetro u como veremos a seguir, é uma função $u : [0, +\infty) \rightarrow U$. O conceito de controlabilidade estará ligado ao conceito de transferência de estados, de acordo com a definição abaixo.

Definição B.1.1 *A função $z(t)$, solução do sistema*

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)), \quad z(t_0) = a, \quad z \in E \subset \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.2})$$

leva o estado a ao estado b ($(a, t_0) \rightarrow (b, t_f)$) em tempo $t_f - t_0$ se $z(t_f) = b$.

Com esta definição podemos prosseguir ao estudo de controlabilidade linear de sistemas.

B.2 Controlabilidade

Após uma rápida discussão sobre transferência de estados, surge um questionamento natural sobre quais condições temos que cumprir para transferir um sistema que está num estado a para um estado b , podemos até mesmo nos perguntar se tal transferência é possível. É lógico que a resposta estará diretamente ligada a escolha da estratégia u e até mesmo se a escolha de tal estratégia será possível. Primeiramente, vamos estudar amplamente a controlabilidade de sistemas lineares em geral, que possuem o seguinte formato abaixo

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), z(t_0) = z_0 \in E, \quad (\text{B.3})$$

$$w(t) = C(t)z(t), \quad (\text{B.4})$$

sendo $z : [t_0, t_f] \rightarrow E$, $A : [t_0, t_f] \rightarrow M(\mathfrak{R}, n, n)$, $B : [t_0, t_f] \rightarrow M(\mathfrak{R}, n, m)$, $u : [t_0, t_f] \rightarrow U$, $w : [t_0, t_f] \rightarrow W$, $C : [t_0, t_f] \rightarrow M(\mathfrak{R}, l, n)$, $W \in \mathfrak{R}^l$ o conjunto de saídas do sistema (oserações), t_0 o tempo inicial e t_f o tempo final escolhido. Para facilitarmos em termos de notação, vamos representar o sistema das equações B.3-B.4 para a notação abreviada (A, B) . As funções A e B deverão respeitar as condições de existência e unicidade de soluções para sistemas de equações diferenciais ordinárias (ver Apêndice A, Teorema A.1.1). Chamaremos a partir daqui $L^1([t_0, t_f]; \mathfrak{R}^m)$ como espaço das funções localmente intergráveis no intervalo $[t_0, t_f]$. Após a apresentação de todas estas definições, estamos aptos a desenvolver o conceito de controlabilidade.

Definição B.2.1 *O sistema (A, B) é dito controlável em $[t_0, t_f]$ quando, $\forall z_0, z_f \in E$, existe um controle $u \in L^1([t_0, t_f]; \mathfrak{R}^m)$ que satisfaz a condição de contorno $z(t_0) = z_0$ e $z(t_f) = z_f$ para o problema B.3. O sistema (A, B) será dito completamente controlável se $\forall z_0, z_f \in E$ existe um $T \in [0, +\infty)$ e um controle $u \in L^1([0, T]; \mathfrak{R}^m)$ que satisfaz a condição inicial $z(0) = z_0$ e condição de contorno $z(T) = z_f$. Chamaremos de evolução de z_0 a z_f uma solução do problema A que tenha como condição inicial $z(t_0) = z_0$ e condição de contorno $z(t_f) = z_f$ $((t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_f, z_f))$.*

Esta forma de definir controlabilidade é bastante teórica. Como o nosso objetivo é bastante prático neste trabalho, vamos enunciar formas mais objetivas para determinar a controlabilidade de um sistema.

Teorema B.2.1 *Dado o Sistema Linear de Controle (A, B) , são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. O sistema (A, B) é controlável em $[t_0, t_f]$;

2. $\forall z_f \in \mathfrak{R}^n \exists u \in L^1([t_0, t_f]; \mathfrak{R}^m)$ tal que (A, B) evolui $(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_f, z_f)$;

3. $\forall z_0 \in \mathfrak{R}^n \exists u \in L^1([t_0, t_f]; \mathfrak{R}^m)$ tal que (A, B) evolui $(t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_f, 0)$;

Os resultados relacionados a controlabilidade até o presente momento foram vistos sem restrições ao conjunto de entradas do sistema. Seja $U \in \mathfrak{R}^m$ o conjunto da qual estão restritas as escolhas de estratégias de controle. O conjunto

$$U_{ad}(U) = \{u \in L^1([t_0, t_f]; \mathfrak{R}^m) \mid u : [t_0, t_f] \rightarrow U\} \quad (\text{B.5})$$

será chamado de conjunto de controles admissíveis em U . Vamos definir abaixo um conjunto de especial importância em teoria de controle.

Definição B.2.2 *Seja $z_0 \in \mathfrak{R}^n$. O subconjunto do \mathfrak{R}^n definido por*

$$R(U; z_0, [t_0, t_f]) = R(z_0, [t_0, t_f]) = \{z_f \in \mathfrak{R}^n \mid (t_0, z_0) \xrightarrow{u} (t_f, z_f), u \in U_{ad}(U)\} \quad (\text{B.6})$$

é chamado de conjunto de acessibilidade de z_0 .

Observação B.2.1 *Note que se o conjunto de acessibilidade de um estado z_0 qualquer for \mathfrak{R}^n , então, pelo Teorema B.2.1, o sistema linear com condição inicial z_0 é controlável.*

Uma idéia mais do que natural seria garantir que $R(U; z_0, [t_0, t_f]) = \mathfrak{R}^n$ quando $U = \mathfrak{R}^m$ e (A, B) é controlável em $[t_0, t_f]$. O teorema abaixo irá tratar de uma propriedade muito importante para o conjunto $R(U; z_0, [t_0, t_f]) = \mathfrak{R}^n$, no caso de U ser conjunto próprio de \mathfrak{R}^m .

Teorema B.2.2 *Sejam U , $U_{ad}(U)$ e $R(U; z_0, [t_0, t_f])$ os conjuntos definidos acima. Se U é convexo e compacto, então $R(U; z_0, [t_0, t_f])$ também será convexo e compacto para todo $z_0 \in \mathfrak{R}^n$.*

Considerando o seguinte sistema de controle linear autônomo abaixo

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad z \in \mathfrak{R}^n, \quad u \in \mathfrak{R}^m, \quad A \in M(\mathfrak{R}, n, n), \quad B \in M(\mathfrak{R}, n, m), \quad (\text{B.7})$$

vamos prosseguir com o enunciado e a demonstração de um dos teoremas mais importantes sobre a controlabilidade de sistemas lineares autônomos: *Crítério de Controlabilidade do Posto*.

Teorema B.2.3 *O Sistema de Controle B.7 é controlável se a matriz de dimensão $n \times nm$*

$$\Lambda = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad (\text{B.8})$$

tiver posto n .

O teorema acima é, sem sombra de dúvida, um dos teoremas mais utilizados em teoria de controle para determinar a controlabilidade de um sistema linear autônomo. Sua importância é tão grande que, podemos determinar a controlabilidade de um sistema não linear autônomo, utilizando uma técnica de linearização em torno de um ponto z_0 qualquer, levando em consideração algumas condições especiais que serão apresentadas posteriormente. Vamos elaborar um protótipo teórico de controle para um sistema linear autônomo.

Definição B.2.3 *Seja (A, B) um sistema de controle linear autônomo. A matriz*

$$Q_T = \int_0^T S(r)BB^*S^*(r)dr, T > 0 \quad (\text{B.9})$$

será chamada de Matriz de Controlabilidade do sistema (A, B) num intervalo $[0, T]$.

A matriz da definição acima é simétrica positiva definida, pois ela é a integral de uma função matricial composta pelo produto da matriz $S(r)B$ pela a sua transposta. Vamos prosseguir com a proposição abaixo.

Proposição B.2.1 *Assuma que para um $T > 0$ a matriz Q_T de um sistema autônomo linear (A, B) dado tenha posto máximo. Então*

1. *para $z_0, z_f \in \mathfrak{R}^n$, o sistema (A, B) evolui do estado z_0 para o estado z_f em tempo T com o seguinte controle abaixo*

$$\hat{u}(t) = -B^*S^*(T-t)Q_T^{-1}(S(T)z_0 - z_f), t \in [0, T]; \quad (\text{B.10})$$

2. *de todos os controles $u \in L^1([0, T]; \mathfrak{R}^m)$ que evoluem o sistema (A, B) do estado z_0 para o estado z_f , o controle \hat{u} minimiza a integral $\int_0^T \|\hat{u}(s)\|^2 ds$. Ainda,*

$$\int_0^T \|\hat{u}(s)\|^2 ds = \langle Q_T^{-1}S(T)z_0 - z_f, S(T)z_0 - z_f \rangle. \quad (\text{B.11})$$

Esta proposição é um primeiro comentário sobre o formato de um controle que evolui um sistema linear autônomo (A, B) de um estado para um outro, num determinado período de tempo. Este conceito será muito importante no Capítulo 2, onde iremos estudar amplamente métodos para determinar um controle ótimo para um sistema qualquer, dado um funcional de critério. A controlabilidade de sistemas lineares autônomos será utilizada no estudo de controlabilidade de *sistemas de controle não lineares autônomos*, veja sua descrição geral abaixo

$$\dot{x}(t) = F(x(t), v(t)), x(t) \in \mathfrak{R}^n \text{ e } v(t) \in \mathfrak{R}^m \quad (\text{B.12})$$

O sistema acima, sobre determinadas condições que iremos demonstrar, pode ser aproximado em torno de um ponto $(x_0, v_0) = (x(t_0), v(t_0)) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ da seguinte forma

$$\dot{z}(t) = J_x(F)(x_0, v_0)z(t) + J_v(F)(x_0, v_0)u(t), \quad z(t) = x(t) - x_0 \text{ e } u(t) = v(t) - v_0 \quad (\text{B.13})$$

sendo $J_x(F)(x_0, v_0)$ a matriz jacobiana de F em relação a variável x no ponto (x_0, v_0) e $J_v(F)(x_0, v_0)$ a matriz jacobiana de F em relação a variável v no ponto (x_0, v_0) . Basta agora provar em quais condições essa aproximação será válida para prosseguirmos com o estudo de controlabilidade de sistemas de controle não lineares autônomos, e para isso, iremos definir o conceito de controlabilidade local.

Definição B.2.4 *O sistema B.12 será localmente controlável em \bar{x} em tempo T se para um dado $\epsilon > 0$ existir um $\delta \in (0, \epsilon)$, tal que para $x_0, x_f \in B_\delta(\bar{x})$ arbitrários, existe um controle v definido no intervalo $[0, t] \subset [0, T]$ com a trajetória da evolução de x_0 a x_f em tempo t contida em $B_\epsilon(\bar{x})$.*

Este conceito de controlabilidade local será muito útil, do ponto de vista computacional, para definirmos um controle ótimo para um dado sistema. Para isso, basta conectar esse conceito a linearização de um sistema qualquer. Veja abaixo o teorema que garante a controlabilidade local de um sistema de controle não linear qualquer.

Teorema B.2.4 *Assuma que a função F da equação B.12 seja diferenciável e com derivada contínua numa vizinhança de um ponto (\bar{x}, \bar{u}) tal que $F(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. Se a linearização do sistema B.12 for controlável, então o sistema será localmente controlável em tempo $T > 0$ no ponto \bar{x} .*

Apêndice C

Tópicos de Teoria da Medida

Teorema C.0.5 (Teorema de Ascoli) *Seja K um conjunto fechado de $C([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$. Toda seqüência de elementos de K contém uma subseqüência convergente se, e somente se*

1. $\sup_{t \in [\alpha, \beta], f \in K} \|f(t)\| < +\infty$
2. para um $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \epsilon, \quad \forall f \in K \quad (\text{C.1})$$

e $\forall t, s \in [\alpha, \beta]$ tal que $|t - s| < \delta$.

Lema C.0.1 *Assuma que D seja um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ e seja Ψ uma projeção de D em \mathbb{R}^p . Então existe uma função de Borel $v : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$(w, v(w)) \in D \text{ para um } w \in \Psi. \quad (\text{C.2})$$

Teorema C.0.6 (Teorema de Luzin) *Se $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Borel, então para um arbitrário $\epsilon > 0$ existe um conjunto fechado $\Gamma \subset [\alpha, \beta]$ tal que a medida de Lebesgue de $[\alpha, \beta] \setminus \Gamma$ é menor que ϵ e f restrita a Γ é uma função contínua.*

Bibliografia

- [1] DE LA BARRIÈRE, P. - Optimal Control Theory - 1967 - W. B. Saunders Company - London.
- [2] KUHN, H. W. e SZEGÖ, G. P. - Differential Games and Related Topics - 1971 - North Holland Publishing Company.
- [3] BASAR T., JAN OLSDER G. - Dynamic Noncooperative Game Theory - 1982 - SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics - Philadelphia.
- [4] ZABCZYK, J. - Mathematical Control Theory: an Introduction - 1992 - Birkhäuser - Boston.
- [5] BELLMAN, R. - Dynamic Programming - 1957 - Princeton University Press - Princeton
- [6] FRIEDMAN, A. - Differential Games - 1971 - Dover Publications Inc. - New York.
- [7] ISAACS, R. P. - Differential Games: a Mathematical Theory with Applications to warfare and Pursuit, Control and Optimization - 1965 - Dover Publications Inc. - New York.
- [8] HÁJEK, O - Pursuit Games: an Introduction to the Theory and Applications of Differential Games of Pursuit and Evasion - 1975 - Dover Publications Inc. - New York.
- [9] NEUMANN, J. V. e MORGENSTERN O. - Theory of Games and Economic Behavior - 1947 - Princeton University Press - Princeton.
- [10] NIJMEIJER, H. - Nonlinear Dynamical Control Systems - 1990 - Springer-Verlag - New York.

- [11] LEE E. B., MARKUS L. - Foundations of Optimal Control Theory (The SIAM Series in applied Mathematics) - 1967 - Wiley - New York.
- [12] BLAQUIÈRE A., GÉRARD F., LEITMANN G. - Quantitative and Qualitative Differential Games - 1969 - New York: Academic Press - New York.
- [13] PATSKO V. S., TUROVA V. L. - Level Sets of the Value Function in Differential Games with the Homicidal Chauffeur Dynamics 2001 - International Game Theory Review. Vol. 3(1). P. 67112.
- [14] PATSKO V. S., TUROVA V. L. - Numerical Investigation of the Value Function for the Homicidal Chauffeur Problem with a more agile pursuer - Advances in Dynamic Games and Their Applications: Analytical and Numerical Developments Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games Vol. 10. P. 231258 - 2009 - Birkhäuser - Boston.
- [15] BERKOVITZ, L. D. - Necessary Conditions for Optimal Strategies in a Class of Differential Games and Control Problems - Journal of Control Theory, Vol. 5 - 1967 - SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics - Philadelphia.