

Dinâmica de funções transcendentas

Arlane Manoel da Silva e Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Edson de Faria

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro
da CAPES

São Paulo, Setembro de 2010

Resumo

Segundo o Teorema de Baker, as órbitas periódicas repulsoras de uma função inteira transcendente f formam um conjunto denso em $\mathcal{J}(f)$. Neste trabalho apresentamos uma prova elementar deste fato, seguindo [5], e outra prova alternativa usando o Teorema das Cinco Ilhas de Ahlfors. Em contraste com a dinâmica de funções racionais, verificamos que, em geral, não vale o Teorema das componentes não-errantes no caso transcendente. No entanto, seguindo [11][14][23][19], provamos que tal resultado pode ser estendido para certas classes de funções inteiras transcendentais.

Palavras-chave: dinâmica complexa, conjuntos errantes, conjuntos de Julia, funções inteiras.

Abstract

According to Baker's theorem, the periodic orbits repellers of an entire transcendental map f forms a dense set in $\mathcal{J}(f)$. At this work we present an elementary proof of this fact following [5], and other alternative proof using Ahlfors Five Islands Theorem. In contrast to the dynamics of rational maps, we found that, in general, not worth the non-wandering components theorem for entire transcendental maps. However, following [11][14][23][19], we prove that this result can be extended to certain classes of transcendental entire maps.

Keywords: complex dynamics, wandering sets, Julia sets, entire maps.

Sumário

Lista de Símbolos	ix
Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
2 Dinâmica Local	5
2.1 Classificação dos pontos fixos	5
2.2 Pontos fixos repulsores e geometricamente atratores	6
2.3 Pontos fixos superatratores	8
2.4 Pontos fixos parabólicos	9
2.5 Pontos fixos irracionalmente neutros	9
3 Conjuntos de Fatou e Julia	13
3.1 A dicotomia Fatou-Julia	13
3.2 O Teorema de Misiurewicz	20
3.2.1 Geometria associada à função exponencial	20
3.2.2 O conjunto de Julia da função exponencial	26
3.3 Domínios de Fatou	27
3.3.1 Propriedades de funções Inteiras Transcendentes	32
3.3.2 Classes especiais de funções inteiras	36
4 Propriedades fundamentais de $\mathcal{J}(f)$	41
4.1 O conjunto $\mathcal{J}(f)$ é perfeito	42
4.2 Caracterização do conjunto de Julia	47
4.3 O Teorema de Baker: prova alternativa	51

5	O Teorema das Componentes Não-Errantes	55
5.1	O argumento de Baker	56
5.2	Deformando estruturas complexas em $\widehat{\mathbb{C}}$	57
5.3	O Teorema de Sullivan	61
6	Domínios Errantes e Funções Transcendentes	65
6.1	Finitude dos domínios de Fatou na classe \mathcal{S}	71
6.2	Sobre a classe de funções Eremenko-Lyubich	74
A	Homeomorfismos Quaseconformes	79
	Referências Bibliográficas	81

Lista de Símbolos

- \mathbb{D} Disco aberto de raio 1 com centro na origem.
- \mathbb{D}_r Disco aberto de raio $r > 0$ com centro na origem.
- $D_r(z_0)$ Disco aberto de raio $r > 0$ com centro em z_0 .

Lista de Figuras

2.1	$z \mapsto 2, 1z + 0, 8iz^3$ (ponto fixo repulsor).	6
2.2	$z \mapsto e^{\pi i/8}z - z^3 + \frac{z^4}{10}$ (ponto fixo racionalmente neutro).	6
2.3	$z \mapsto e^{(1+\sqrt{5})\pi i}z + z^2$ (ponto fixo irracionalmente neutro).	7
2.4	$z \mapsto \sqrt{2}z^2 + 0, 74ie^{0,1i}z^4$ (ponto fixo superatrator).	7
2.5	$z \mapsto 0, 9z - z^3 + 0, 1z^4$ (ponto fixo geometricamente atrator).	8
2.6	$z \mapsto z + z^4$	10
2.7	$z \mapsto -z + z^4$	10
2.8	Dinâmica nas pétalas atradoras de $z \mapsto z + z^4$ e $z \mapsto -z + z^4$ (veja [13], pág. 40).	11
2.9	Disco de Siegel (da galeria de Arnaud Cheritat): $z \mapsto e^{2\pi i\zeta}(e^z - 1)$ com $\zeta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$	11
3.1	$z \mapsto z^2 - 1.75488$ (conexo).	14
3.2	$z \mapsto z^2 - 0.765 + 0.12i$ (totalmente desconexo).	14
3.3	$z \mapsto z^2 + 0.39 + 0.14i$ (conexo).	15
3.4	$z \mapsto z^2 + (0.99 + 0.14i)z$ (curva de Jordan).	15
3.5	Componente de Fatou totalmente invariante: $z \mapsto z - z^2$	19
3.6	gráficos das funções $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto x$ no quadrado $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$	21
3.7	À esquerda, as curvas $y = \cos x$ e $2y = x $. À direita, o gráfico de ϕ	22
3.8	As curvas $y = \sin x $ e $\pi y = 2 x $	23
3.9	ilustração do item 2(b).	23
3.10	24

3.11	25
3.12	Vizinhanças do ponto no infinito e de um ponto não-excepcional no conjunto de Julia.	32
3.13	Para α e a convenientes, o conjunto de Fatou de $z \mapsto e^{2\pi i\alpha} z^2 \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ contém anéis de Herman.	33
3.14	O domínio V é ilimitado e simplesmente conexo.	37
3.15	$f \circ \exp = \exp \circ F$	38
6.1	Gráfico de f restrita à reta real.	66
6.2	Conjunto errante (Fagella e Henriksen [17]).	66
6.3	construção da função φ	68
6.4	singularidade logarítmica.	69
6.5	$p : \text{Homeo}(\mathbb{C}) \longrightarrow Y$ é a projeção canônica.	73

CAPÍTULO 1

Introdução

Dado um automorfismo holomorfo f de uma superfície de Riemann S , tal função induz, através de seus iterados, uma partição de S em dois subconjuntos invariantes conhecidos como conjuntos de Fatou e Julia. No primeiro, a dinâmica induzida pelo automorfismo é bastante simples, bem comportada. No segundo, a dinâmica é caótica, isto é, pontos que começam arbitrariamente próximos, após um certo tempo tornam-se distantes na métrica esférica. De fato, diz-se que f restrita ao conjunto de Julia é *sensível às condições iniciais*.

Por volta de 1918, Fatou e Julia escreveram, independentemente, longos memoriais nos quais inicia-se a Teoria de iterações de funções racionais, parte do que se conhece hoje por *dinâmica complexa*, baseando-se fortemente no critério de normalidade desenvolvido por P. Montel. Um dos principais problemas na área permaneceu sem solução até 1982, quando Dennis Sullivan anunciou seu famoso *Teorema das Componentes não-errantes*. No caso de funções inteiras transcendentais o problema foi solucionado, sob certas condições, por Eremenko e Lyubich [19] em 1985, e de forma independente, por Goldberg e Keen [23] no ano seguinte. Fatou [22] foi, provavelmente, o primeiro a escrever um trabalho dedicado às iterações de funções inteiras transcendentais; questões fundamentais permaneceram sem solução. Baker foi o primeiro a apresentar uma função inteira transcendente cujo conjunto estável possui domínios errantes. Isto mostra que é preciso impor certas restrições sobre a função para que valha um resultado do calibre do Teorema de Sullivan.

Outro problema fundamental sobre o conjunto de Julia de uma função in-

teira transcendente permaneceu sem solução até 1968 quando Baker [3] provou que o conjunto das órbitas periódicas é denso no conjunto de Julia usando uma poderosa ferramenta: o Teorema das Cinco Ilhas de Ahlfors. Mais tarde, em 1999, Bargmann [5] apresentou uma nova demonstração utilizando-se apenas de ferramentas simples de Análise Complexa, respondendo a uma das perguntas colocadas por Bergweiler [10] em 1993. No artigo que acabamos de citar, Bergweiler apresenta diversas perguntas sobre iterações de funções meromorfas, muitas das quais permanecem sem resposta até o presente momento.

Neste trabalho discutiremos os resultados supracitados e ainda, demonstraremos diversas propriedades topológicas dos conjuntos de Fatou e Julia de uma função inteira transcendente.

No capítulo 2 apresentamos o comportamento local das funções holomorfas descrevendo (sem provas) os principais resultados. No capítulo 3 descrevemos a dicotomia Fatou-Julia associado a uma função holomorfa. Demonstramos que o conjunto de Julia é transitivo e ainda, apresentamos um exemplo de uma função inteira transcendente cujo conjunto de Julia é toda a esfera de Riemann, o que responde afirmativamente uma antiga conjectura de Fatou. Provamos esse resultado de duas formas; uma delas é elementar, seguindo Misiurewicz [25]. A outra é muito simples mas faz uso de um "canhão": O Teorema de Classificação das Componentes de Fatou. Ainda neste capítulo, descrevemos o papel fundamental exercido pelo conjunto dos valores singulares de uma função inteira transcendente e, principalmente pela singularidade essencial (ponto no infinito). Como consequência, demonstramos que toda componente de Fatou ilimitada é simplesmente conexa. Apresentamos também, resultados fundamentais sobre certas classes de funções inteiras transcendentais. Em particular, demonstramos que funções inteiras transcendentais cujo conjunto singular é limitado não admitem domínios de Baker em seu conjunto estável.

No capítulo 4 apresentamos algumas propriedades topológicas fundamentais de uma função inteira transcendente. O resultado principal consiste no Teorema de Baker: o conjunto de Julia coincide com o fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores. Apresentamos uma prova elementar desse fato e outra demonstração, essencialmente, devida à Baker utilizando-se do Teorema das Cinco Ilhas de Ahlfors [12].

O capítulo 5 é dedicado à prova do Teorema de Sullivan. No capítulo 6, apresentamos a prova do Teorema das Componentes não-errantes para funções criticamente finitas devido à Eremenko e Lyubich [19]. Seguindo Bergweiler *et all* [11] estendemos esses resultados para uma certa classe de funções in-

teiras transcendentais conhecida como *Eremenko-Lyubich*; esta classe consiste das funções criticamente limitadas cuja órbita futura do conjunto dos valores singulares está a uma distância (euclidiana) positiva do conjunto de Julia. No Apêndice incluímos o enunciado do famoso Teorema da Aplicação Mensurável de Riemann, peça fundamental na prova do Teorema de Sullivan.

CAPÍTULO 2

Dinâmica Local

O primeiro passo para a descrição da dinâmica induzida por uma aplicação é o estudo local das órbitas numa vizinhança de seus pontos fixos. Nesta seção apresentaremos os principais resultados acerca da existência de coordenadas locais canônicas nestes pontos fixos. Na seção seguinte mostraremos que estas coordenadas exercem papel importante quanto à descrição da dinâmica global.

2.1 Classificação dos pontos fixos

Seja z_0 um ponto fixo de uma função holomorfa f . Note que podemos supor, sem perda de generalidade, que $z_0 = 0$ compondo a função f com translações do plano, se necessário. Dessa forma podemos escrever localmente

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

onde $\lambda = f'(0)$ é chamado *autovalor* do ponto fixo. A classificação de um ponto fixo com autovalor valor λ é a seguinte:

- (a) Atrator: $|\lambda| < 1$. Um ponto fixo atrator é chamado *superatrator* (veja figura 2.4) ou *geometricamente atrator* caso $|\lambda| = 0$ ou $0 < |\lambda| < 1$ (veja figura 2.5), respectivamente.
- (b) Repulsor: $|\lambda| > 1$ (veja figura 2.1).
- (c) Racionalmente neutro: $|\lambda| = 1$ e $\lambda^n = 1$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ (veja figura 2.2).

- (d) Irrracionalmente neutro: $|\lambda| = 1$ e $\lambda^n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (veja figura 2.3).

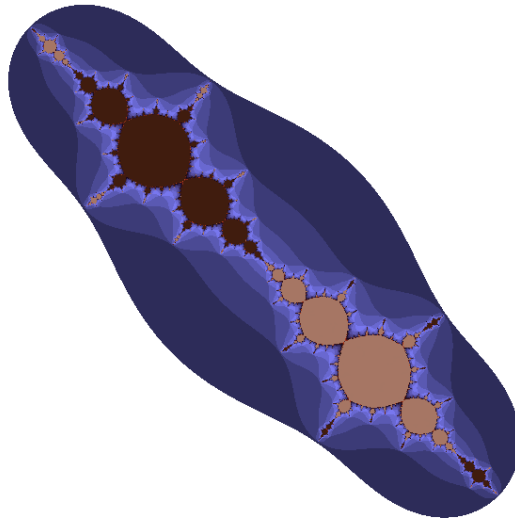


Figura 2.1: $z \mapsto 2,1z + 0,8iz^3$ (ponto fixo repulsor).

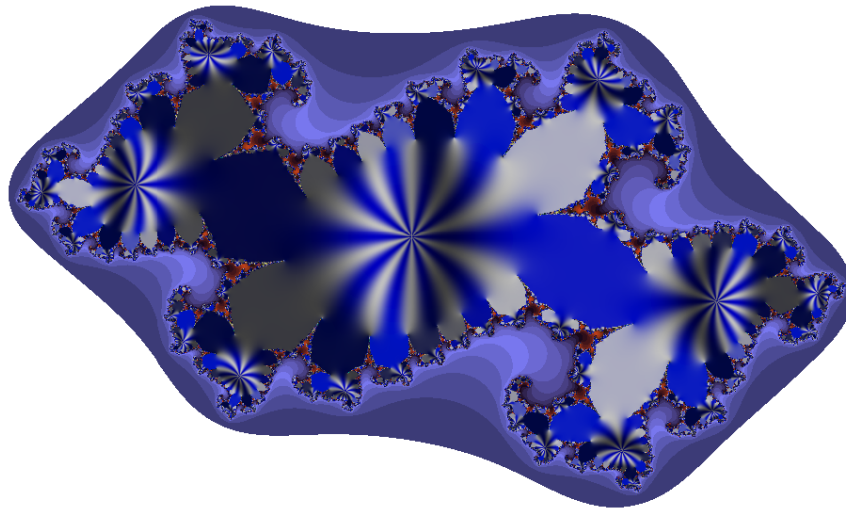


Figura 2.2: $z \mapsto e^{\pi i/8}z - z^3 + \frac{z^4}{10}$ (ponto fixo racionalmente neutro).

2.2 Pontos fixos repulsores e geometricamente atratores

Lembramos que um ponto fixo z_0 de uma função f é topologicamente atrator se existe uma vizinhança U de z_0 na qual os iterados de f estão definidos e a sequência $\{f^n|_U\}$ converge uniformemente para a função constante igual a z_0 . No caso em que f é holomorfa isto equivale a dizer que $|f'(z_0)| < 1$, de acordo

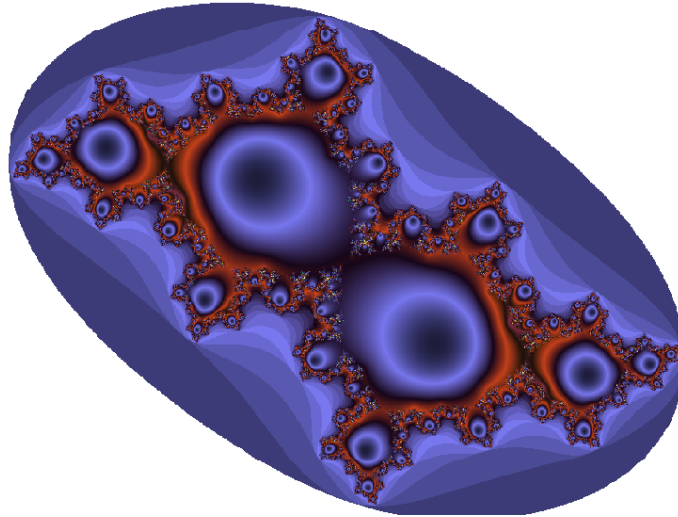


Figura 2.3: $z \mapsto e^{(1+\sqrt{5})\pi i}z + z^2$ (ponto fixo irracionalmente neutro).

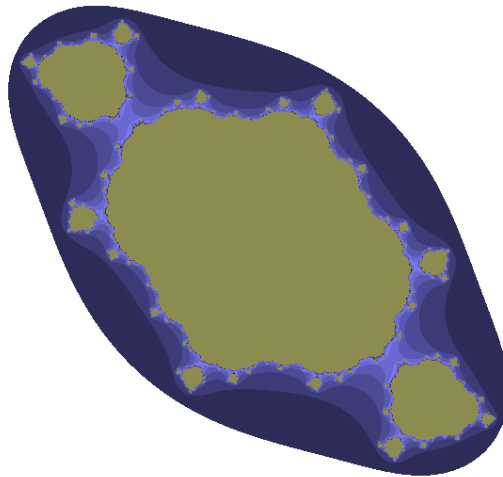


Figura 2.4: $z \mapsto \sqrt{2}z^2 + 0,74ie^{0,1i}z^4$ (ponto fixo superatrator).

com a classificação dada acima no item (a). Da mesma forma, dizer que um ponto fixo z_0 é topologicamente repulsor é equivalente a dizer que $|f'(z_0)| > 1$ quando a função f é holomorfa.

Localmente, a dinâmica em torno de um ponto fixo repulsor ou geometricamente atrator é descrita pelo seguinte resultado.

Teorema 1 (Kœnigs). *Seja f um função holomorfa numa vizinhança da origem. Se $f(0) = 0$ e $|\lambda|$ é diferente de 0 e 1, então existe uma mudança de coordenadas locais $w = \phi(z)$, com $\phi(0) = 0$, tal que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ é a aplicação linear $w \mapsto \lambda w$ para todo w numa vizinhança da origem. Além disso, ϕ é única a menos de multiplicação por uma constante.*

Dito de outra forma, o Teorema de Kœnigs afirma que o diagrama a seguir

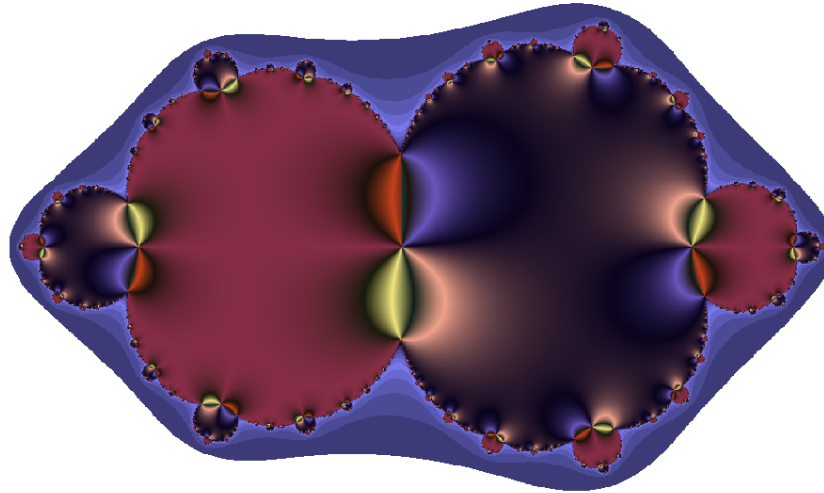


Figura 2.5: $z \mapsto 0,9z - z^3 + 0,1z^4$ (ponto fixo geometricamente atrator).

é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda \cdot} & \mathbb{C} \end{array}$$

2.3 Pontos fixos superatratores

Consideremos uma função holomorfa f que fixa a origem e tal que $\lambda = 0$. De acordo com a classificação dos pontos fixos, a origem é um superatrator e portanto, podemos escrever localmente

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

para algum $n > 1$ e $a_n \neq 0$. O inteiro n é chamado o *grau local* de f em $z_0 = 0$.

A dinâmica numa vizinhança da origem é caracterizada pelo Teorema a seguir.

Teorema 2 (Böttcher). *Seja f uma função holomorfa numa vizinhança da origem tal que $f(0) = 0$, com autovalor $\lambda = 0$. Então existe uma mudança de coordenadas locais $w = \phi(z)$, com $\phi(0) = 0$, que conjuga f com a função $w \mapsto w^n$ numa vizinhança da origem. Além disso, ϕ é única a menos de multiplicação por uma $(n - 1)$ -raiz da unidade.*

Próximo de um ponto fixo crítico, f é conjugada a uma função potência de

modo que o diagrama a seguir é comutativo, pelo Teorema de Böttcher.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{C} \end{array}$$

2.4 Pontos fixos parabólicos

Consideremos a função $f(z) = \lambda z + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots$ definida numa vizinhança da origem, com $a_m \neq 0$, e tal que o autovalor λ é uma raiz da unidade. Se nenhuma iterada da função f for a função identidade dizemos que a origem é um ponto fixo parabólico. Segundo nossa classificação, um ponto fixo parabólico é racionalmente neutro. Com isso, trocando f por alguma iterada, se necessário, podemos assumir que $\lambda = 1$.

Teorema 3 (Teorema da Flor Parabólica). *Suponha que*

$$f(z) = z + az^m + a_{m+1}z^{m+1} + \dots$$

numa vizinhança da origem, com $a \neq 0$ e $m > 0$. Para cada $j = 0, 1, \dots, m$, se

$$\theta_j := -\frac{\arg a - 2\pi j}{m}$$

então existem m domínios

$$U_j \subset \{z \in \mathbb{C}; \theta_j < \arg z < \theta_{j+1}\},$$

$j = 0, 1, \dots, m-1$, com $0 \in \partial U_j$ e cujas fronteiras são diferenciáveis por partes tangentes aos raios $\arg z = \theta_j$ e $\arg z = \theta_{j+1}$ tais que $f(U_j) \subset U_j$ e $f^n|_{U_j} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Os domínios U_j , no Teorema da Flor Parabólica, também são chamados de *pétalas atratoras*. As figuras 2.6, 2.7 e 2.8 ilustram o Teorema.

2.5 Pontos fixos irracionalmente neutros

Consideremos agora $\lambda = e^{2\pi i \zeta}$ onde ζ é irracional. Uma questão importante, mas difícil, é saber se a função holomorfa $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$, definida numa vizinhança da origem, é *localmente linearizável*. Isto é, existe uma mudança de coordenadas locais $z = \phi(w)$ que conjuga f a uma rotação irracional $w \mapsto \lambda w$ próximo da origem? Tal conjugação deve ser uma solução

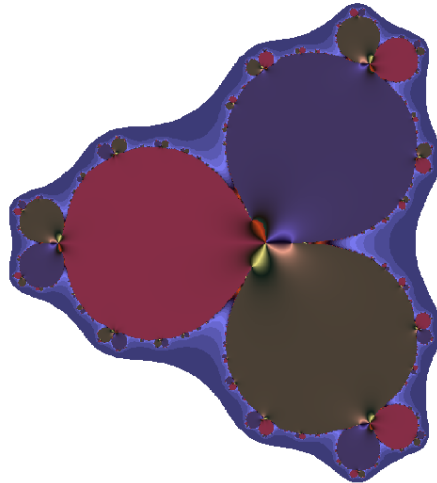


Figura 2.6: $z \mapsto z + z^4$.

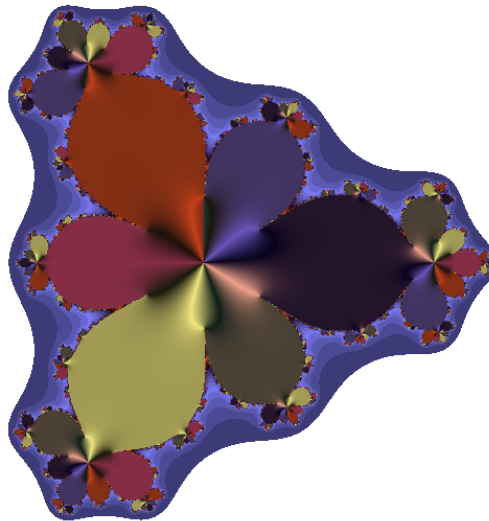


Figura 2.7: $z \mapsto -z + z^4$.

da equação funcional $f(\phi(w)) = \phi(\lambda w)$ para w próximo de 0. Em caso afirmativo podemos supor que $\phi'(0) = 1$. Uma propriedade fundamental dessa conjugação é o fato de ser univalente num disco centrado na origem. Vamos demonstrar essa afirmação.

Vamos supor a existência de ϕ e tomar ξ_1 e ξ_2 tais que $\phi(\xi_1) = \phi(\xi_2)$. Então $\phi(\lambda^n \xi_1) = \phi(\lambda^n \xi_2)$ para todo inteiro positivo n . Isto segue da equação de conjugação. Como $\{\lambda^n\}$ é denso no círculo unitário temos $\phi(\xi_1 e^{i\theta}) = \phi(\xi_2 e^{i\theta})$ para todo θ , e portanto, $\phi(\xi_1 z) = \phi(\xi_2 z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Derivando esta equação concluímos que $\xi_1 \phi'(\xi_1 z) = \xi_2 \phi'(\xi_2 z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Em particular, calculando em $z = 0$ segue-se que $\xi_1 = \xi_2$, o que demonstra a afirmação.

Teorema 4. *Seja f uma função holomorfa definida numa vizinhança da origem*

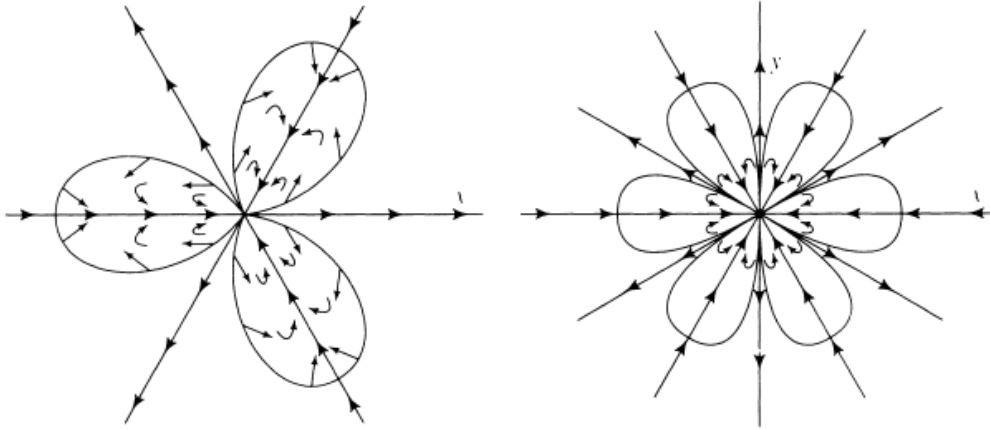


Figura 2.8: Dinâmica nas pétalas atratoras de $z \mapsto z + z^4$ e $z \mapsto -z + z^4$ (veja [13], pág. 40).

e tal que 0 é um ponto fixo irracionalmente neutro. Então f é localmente linearizável se, e somente se, a sequência $\{f^n\}$ é uniformemente limitada numa vizinhança da origem.

Dizemos que um ponto fixo irracionalmente indiferente é de *Siegel* ou de *Cremer* de acordo com a possibilidade de linearização local ou não. A figura (2.9) apresenta um ponto fixo de Siegel. Para uma discussão mais detalhada

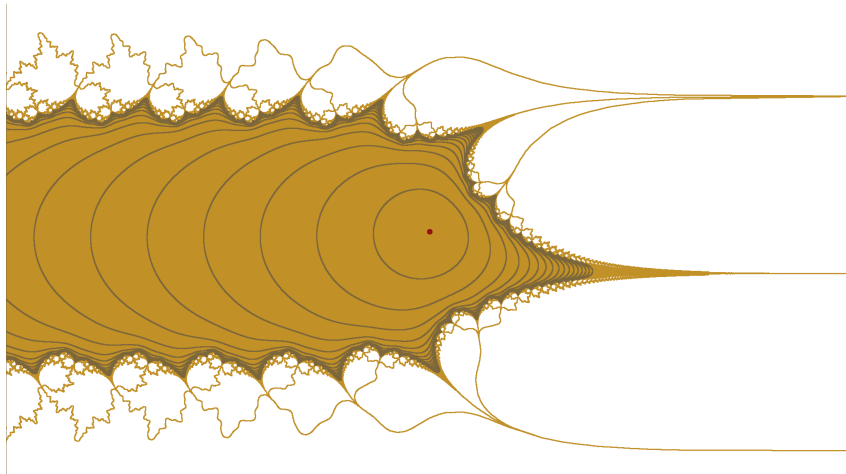


Figura 2.9: Disco de Siegel (da galeria de Arnaud Cheritat): $z \mapsto e^{2\pi i\zeta}(e^z - 1)$ com $\zeta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

veja [27]. A existência de pontos de Siegel e de Cremer é garantida pelos resultados a seguir.

Teorema 5 (Cremer). *Dados λ no círculo unitário e $d > 1$, se a sequência $\{|\lambda^q - 1|^{-d^q}\}$ é ilimitada quando $q \rightarrow \infty$, então nenhum ponto fixo, com autovalor λ , de uma função racional de grau d pode ser localmente linearizável.*

Teorema 6 (Siegel). *Para Lebesgue quase todo $\theta \in [0, 1)$, a função quadrática $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z + z^2$ é linearizável numa vizinhança da origem.*

3.1 A dicotomia Fatou-Julia

Sejam S uma superfície de Riemann e $f : S \rightarrow S$ uma função holomorfa. Denotaremos por f^n a n -ésima iterada da função f , isto é, $f^0(z) := z$, $f^1(z) := f(z)$ e indutivamente, $f^n(z) := f(f^{n-1}(z))$ para $n > 1$. Estamos interessados no caso em que $S = \mathbb{C}$ e f não se estende à esfera de Riemann como função meromorfa. Desse modo f será uma função inteira não-polinomial, também conhecida como *inteira transcendente*. O conjunto de tais funções será denotado por \mathcal{E} assim como o conjunto das funções racionais, de grau no mínimo dois, será denotado por \mathcal{R} . Se $f \in \mathcal{E}$, o ponto no infinito é uma singularidade essencial. O comportamento da função f numa vizinhança furada desse ponto será crucial no estudo que se segue.

Dizemos que um ponto $z_0 \in S$ pertence ao *conjunto de Fatou* $\mathcal{F}(f)$ de f se existe uma vizinhança U de z_0 tal que a sequência $\{f^n|_U\}$ está bem definida e satisfaz uma das condições:

- (a) possui uma subsequência que converge uniformemente nas partes compactas de U ;
- (b) contém uma subsequência que diverge uniformemente nas partes compactas de U , de modo que, as imagens de um subconjunto compacto de U não intersecta eventualmente qualquer subconjunto compacto de S .

No caso em que S é compacto, toda sequência possui uma subsequência

convergente, e portanto, o caso (b) não ocorre. Caso contrário, se tal vizinhança não existe então dizemos que z_0 pertence ao *conjunto de Julia* $\mathcal{J}(f)$ de f . Segue-se dessa definição que $\mathcal{F}(f)$ é aberto e $\mathcal{J}(f)$ é fechado. Um exemplo clássico que exhibe essa dicotomia é dado pela função $f : z \mapsto z^2$. Aqui, $\mathcal{J}(f) = \mathbb{S}^1$ e $\mathcal{F}(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{S}^1$. De fato, para todo $z \in \mathbb{D}$ tem-se que $f^n(z) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Da mesma forma, $f^n(z)$ tende a ∞ quando $n \rightarrow \infty$, se $z \notin \overline{\mathbb{D}}$. Isto implica que \mathbb{D} e $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ são componentes do conjunto de Fatou de f . Por outro lado, se $z_0 \in \mathbb{S}^1$ e U é uma vizinhança qualquer de z_0 então toda função limite da sequência $\{f^n|_U\}$ é descontínua em $U \cap \mathbb{S}^1$. Isto mostra que $\mathcal{J}(f) = \mathbb{S}^1$.

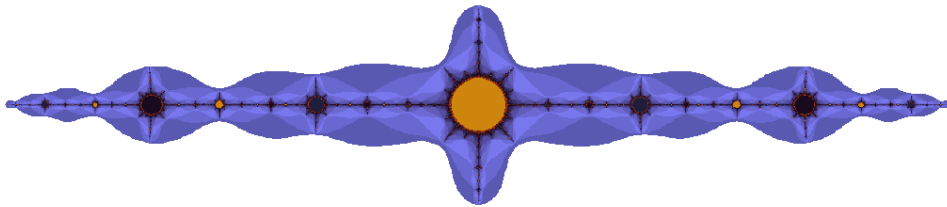


Figura 3.1: $z \mapsto z^2 - 1.75488$ (conexo).

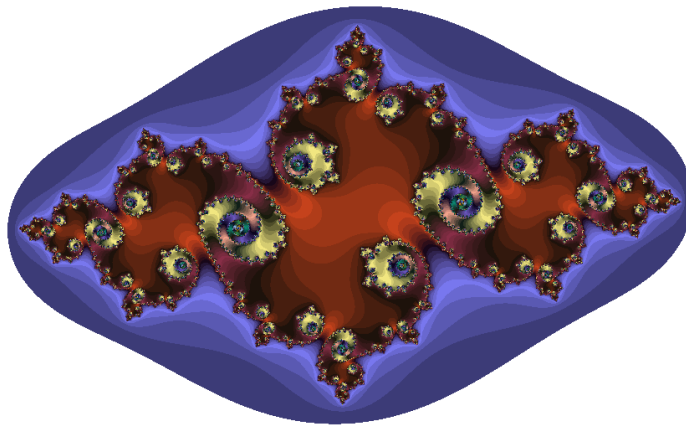


Figura 3.2: $z \mapsto z^2 - 0.765 + 0.12i$ (totalmente desconexo).

Lema 1. *Seja S uma superfície de Riemann hiperbólica e $f : S \rightarrow S$ uma função holomorfa. Então o conjunto de Julia de f é vazio.*

Demonstração. [27]

□

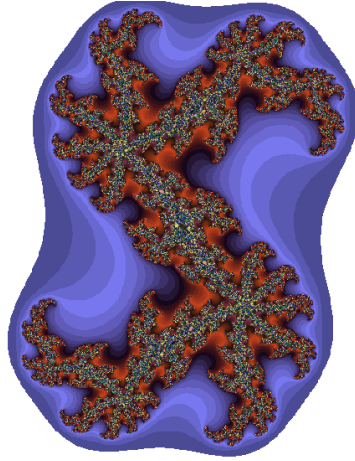


Figura 3.3: $z \mapsto z^2 + 0.39 + 0.14i$ (*conexo*).

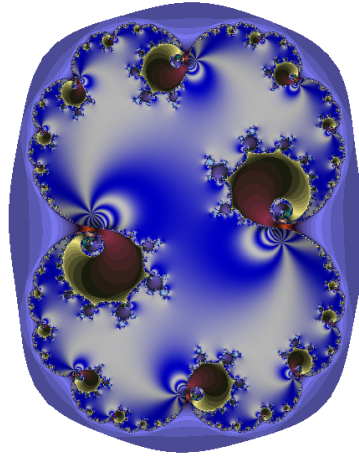


Figura 3.4: $z \mapsto z^2 + (0.99 + 0.14i)z$ (*curva de Jordan*).

Definição 1. Dada uma superfície de Riemann S e uma função $f : S \rightarrow S$ holomorfa, dizemos que z e w estão na mesma grande órbita por f se existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $f^n(z) = f^m(w)$. A grande órbita de z por f é definida por

$$\text{GO}(z, f) := \{w \in S ; f^n(z) = f^m(w), \text{ para algum } m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Observe que a relação de grande órbita é uma *relação de equivalência*.

Teorema 7. O conjunto de Fatou de f é completamente invariante, isto é, $z \in \mathcal{F}(f)$ se, e somente se, $f(z) \in \mathcal{F}(f)$.

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathcal{F}(f)$ e suponha que $\{f^{n_j+1}\}$ converge uniformemente numa vizinhança U de z_0 . Como f é uma aplicação aberta, $\{f^{n_j}\}$ converge uniformemente numa vizinhança $f(U)$ de $f(z_0)$. Logo, $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$. Agora, suponha que $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$ e assumamos que $\{f^{n_j+1}\}$ converge uniformemente numa vizinhança U de $f(z_0)$. Seja V um aberto contendo z_0 tal que

$f(V) \subset U$. Neste caso, $\{f^{n_j}\}$ converge uniformemente em V , vizinhança de z_0 , e portanto, $z_0 \in \mathcal{F}(f)$. \square

Corolário 1. *O conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ é completamente invariante.*

Segue-se imediatamente que se z_0 pertence ao conjunto de Julia de f então $\text{GO}(z_0, f) \subset \mathcal{J}(f)$.

Teorema 8. *Para todo $k > 0$, o conjunto de Julia de f coincide com o conjunto $\mathcal{J}(f^k)$.*

Demonstração. Basta ver que $\{f^n\}$ é normal num aberto U se, e somente se, $\{f^{kn}\}$ é normal em U . Isto implica que $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^k)$. \square

No caso em que $f \in \mathcal{E}$, mostraremos a seguir que o conjunto de Julia é *perfeito* e coincide com o fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores.

Por definição, um ponto z_0 é dito *ponto periódico* de f se $f^n(z_0) = z_0$, para algum $n > 0$. O menor n que satisfaz essa condição é chamado de *período minimal* de z_0 , ou simplesmente período de z_0 . Para um ponto periódico z_0 de período n o número $\lambda := (f^n)'(z_0)$ é chamado de *autovalor* de z_0 . Dizemos que um ponto n -periódico z_0 é *atrator*, *neutro* ou *repulsor* se o módulo do autovalor de z_0 for menor do que um, igual a um, ou maior do que um, respectivamente. Se $\lambda = 0$ dizemos que z_0 é um ponto periódico *superatrator*. No caso $|\lambda| = 1$, existe $\alpha \in [0, 1[$ tal que $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$. Dizemos que z_0 é *racionalmente* (irracionalmente) *indiferente* se α é racional (irracional). Dizemos que z_0 é *parabólico* se $\lambda = 1$. Localmente, a dinâmica depende apenas do autovalor λ , não sendo relevante de f se estende a uma função racional ou inteira. Para mais informações recomendamos [27], [13] e [6].

Teorema 9. *Seja $f \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$. Então, todo ponto periódico repulsor ou parabólico de f pertence ao conjunto de Julia. Todo ponto periódico atrator ou superatrator pertence ao conjunto de Fatou. Um ponto periódico irracionalmente indiferente pertence ao conjunto de Fatou se, e somente se, f^p é linearizável no ponto fixo z_0 , isto é, a equação de Schröder para f^p em z_0*

$$\phi \circ f^p = \lambda \phi$$

tem uma solução.

Demonstração. [25] \square

Dizemos que um ponto $z_0 \in S$ é *excepcional* por f se sua grande órbita $\text{GO}(z_0, f)$ é um conjunto finito. Usando o Teorema de Montel temos o

Lema 2. (a) Se $f \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ então o conjunto dos pontos excepcionais contém no máximo dois pontos.

(b) Se $f \in \mathcal{E}$ tem dois pontos excepcionais 0 e ∞ , então f é da forma

$$f(z) = z^m e^{g(z)},$$

onde $m \geq 0$ e g é uma função inteira.

Se f é inteira transcendente o conjunto dos pontos excepcionais é vazio ou unitário no plano. No entanto, ∞ é sempre um ponto excepcional se $f \in \mathcal{E}$. Na aplicação $z \mapsto e^z$, por exemplo, temos dois pontos excepcionais (0 e ∞). Outro fato interessante é que, no caso $f \in \mathcal{R}$ os pontos excepcionais são pontos periódicos superatratores, e portanto, pertencem ao conjunto de Fatou de f . Se $f \in \mathcal{E}$, isto não ocorre em geral, como mostra que a aplicação $z \mapsto 2ze^z$ (a origem é um ponto fixo repulsor).

Demonstração do Lema 2. Suponha que exista três grande órbitas finitas e distintas. A união dessas grandes órbitas formam um conjunto finito com mais de três pontos, e portanto, o complementar U em $\widehat{\mathbb{C}}$ é uma superfície hiperbólica, com $f(U) = U$. Pelo Teorema de Montel $\{f^n|_U\}$ é normal. Logo U e seu complementar estão contidos no conjunto de Fatou de f . Mas isto implica que $\mathcal{J}(f)$ é vazio, uma contradição. Se $z_0 \neq \infty$ é um ponto excepcional de f então devemos ter $f^{-1}(z_0) \subset \{z_0\}$, pois qualquer outro ponto tem uma infinidade de pré-imagens. Fazendo $z_0 = 0$, existe $m \geq 0$ tal que $f(z)/z^m \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo existe uma função inteira g tal que $f(z)/z^m = e^{g(z)}$. E segue o resultado. \square

O resultado a seguir fornece outra caracterização do conjunto de Julia.

Teorema 10. Seja $f \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$. Para todo ponto $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ não-excepcional,

$$\mathcal{J}(f) = \overline{\{z ; f^n(z) = z_0 \text{ para algum } n \geq 0\}}.$$

Demonstração. Como $\mathcal{J}(f)$ é totalmente invariante e fechado temos que

$$\mathcal{J}(f) \supseteq \overline{\{z ; f^n(z) = z_0 \text{ para algum } n \geq 0\}}.$$

Por outro lado, tome $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ e U uma vizinhança de z_0 , fixada. Como z_0 não é excepcional, sua pré-órbita é infinita. Pelo Teorema de Montel,

$$\bigcup_{n>0} f^n(U) \cap \{z ; f^n(z) = z_0 \text{ para algum } n \geq 0\} \neq \emptyset,$$

e portanto, $U \cap \{z ; f^n(z) = z_0 \text{ para algum } n \geq 0\} \neq \emptyset$. Como z_0 e U são arbitrários, segue-se o resultado. \square

Corolário 2. *Genericamente a órbita positiva de qualquer ponto $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ é densa em $\mathcal{J}(f)$.*

Demonstração. Seja $\{B_j\}$ uma coleção enumerável de abertos formando uma base para a topologia de $\widehat{\mathbb{C}}$. Para cada j tal que $B_j \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ seja

$$U_j := \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(B_j).$$

Segue-se do Teorema 10 que o fecho do conjunto $U_j \cap \mathcal{J}(f)$ coincide com o conjunto de Julia de f . Agora basta considerar o conjunto residual

$$\Lambda := \bigcap_j U_j \cap \mathcal{J}(f),$$

que é um subconjunto denso, pelo Teorema de Baire. Tome $z_0 \in \Lambda$. Então, para cada j (como definido acima) existe $n(j)$ tal que

$$f^{n(j)}(z_0) \in B_j \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset.$$

Portanto a órbita de z_0 é densa no conjunto de Julia de f . \square

O resultado a seguir é consequência imediata do Teorema de Montel.

Teorema 11. *Seja Ω um conjunto totalmente invariante por f contendo pelo menos três pontos. Então o conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ está contido no fecho de Ω .*

Corolário 3. *Dentre todos os conjuntos fechados e totalmente invariantes por f contendo pelo menos três pontos, o conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ é o menor (no sentido da inclusão).*

Corolário 4. *Seja Ω a reunião de componentes de Fatou, totalmente invariante por f . Então o conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ coincide com a fronteira de Ω . Em particular, para toda componente de Fatou Ω totalmente invariante, $\mathcal{J}(f) = \partial\Omega$.*

Teorema 12 (Transitividade). *Sejam $z_0 \in \mathcal{J}(f) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ arbitrário e N uma vizinhança arbitrária de z_0 . Então $U := \bigcup_{n \geq 0} f^n(N)$ é tal que $\mathcal{J}(f) \subset U$ e $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ contém no máximo dois pontos.*

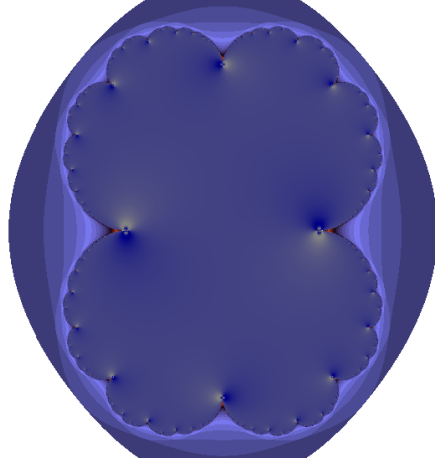


Figura 3.5: *Componente de Fatou totalmente invariante: $z \mapsto z - z^2$.*

Demonstração. Como o conjunto U é positivamente invariante, isto é, $f(U) \subset U$, segue-se do Teorema de Montel que o conjunto $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ contém no máximo dois pontos, pois caso contrário teríamos $U \subset \mathcal{F}(f)$ contrariando o fato $z_0 \in U \cap \mathcal{J}(f)$. \square

Corolário 5. *Se $f \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ então o conjunto de Julia possui interior vazio ou coincide com a esfera de Riemann.*

Demonstração. Suponha que exista um ponto interior $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. Isto implica que existe uma vizinhança $N \subset \mathcal{J}(f)$ de z_0 . Como $\mathcal{J}(f)$ é fechado e totalmente invariante, segue-se do Teorema 12 que $\mathcal{J}(f) = \widehat{\mathbb{C}}$. \square

O primeiro exemplo de uma função inteira transcendente com essa propriedade foi dada por Baker [4] considerando a família $z \mapsto \lambda z e^z$. A seguir mostraremos que $\mathcal{J}(e^z) = \widehat{\mathbb{C}}$, seguindo Misiurewicz [25].

Teorema 13. *Seja $f \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$, $\alpha \in \mathcal{J}(f)$ e V uma vizinhança arbitrária de α . Então, para todo compacto K que não contenha pontos excepcionais, $f^n(V) \supset K$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. Seja E o conjunto dos pontos excepcionais. Então, para todo aberto W contendo pontos de $\mathcal{J}(f)$ tem-se

$$\bigcup_{n>0} f^n(W) \supset \widehat{\mathbb{C}} \setminus E,$$

pois E é totalmente invariante. Em particular, isto vale para o aberto V . Fixemos um ponto periódico repulsor $z_0 \in V$, digamos de período q . Seja V_0 uma vizinhança suficientemente pequena de z_0 contida em V tal que $V_0 \subset f^q(V_0)$. Se $g := f^q$ então

$$V_0 \subset g(V_0) \subset g^2(V_0) \subset \dots$$

Fazendo $V_j := f^j(V_0)$ temos que

$$\bigcup_{k \geq 0} g^k(V_j) \supset \widehat{\mathbb{C}} \setminus E \supset K,$$

para todo $j = 0, 1, \dots, q-1$. Como K é compacto, para cada $j = 0, 1, \dots, q-1$ existe $k(j) > 0$ tal que $K \subset g^{k(j)}(V_j)$. Tomando

$$k := \max\{k(j) ; 0 \leq j < q\}$$

e $N := k \cdot q$ temos que

$$K \subset g^k(V_j) = f^{qk}(V_j) = f^{kq+j}(V_0) = f^{N+j}(V_0)$$

para todo $j = 0, 1, \dots, q-1$. Mas isto implica que $f^n(V_0) \supset K$ para todo $n \geq N$. Como $V_0 \subset V$, segue-se o resultado. \square

3.2 O Teorema de Misiurewicz

Consideraremos a função inteira $E : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $E(z) = e^z$. Mostraremos que a família $\{E^n\}_{n \geq 0}$ não é normal em nenhum ponto. Com isso, apresentamos uma função transcendental com conjunto de Fatou $\mathcal{F}(E) = \emptyset$.

Observe que a órbita de todo ponto na reta real converge para o infinito. Esse fato mostrar-se-á um ingrediente fundamental na prova do resultado. De agora em diante, E está fixada e consideraremos os conjuntos

$$\mathbf{S} := \left\{ z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{\pi}{3} \right\} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 4\}.$$

A seguir, estudamos alguns propriedades geométricas da exponencial.

3.2.1 Geometria associada à função exponencial

Lema 3. *Seja $z \in \mathbb{C}$. Então $|\operatorname{Im}(E^n(z))| \leq |(E^n)'(z)|$.*

Demonstração. Como $E(x + iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ e $|\operatorname{sen} y| \leq |y|$, para todo $y \in \mathbb{R}$ (figura 3.6), temos que

$$|\operatorname{Im}(E(w))| = e^x |\operatorname{sen} y| = |E(w)| \cdot |\operatorname{sen} y| \leq |\operatorname{Im}(w)| \cdot |E(w)|,$$

para todo $w \in \mathbb{C}$. Mas $E(w) = E'(w)$, e com isso se $w \notin \mathbb{R}$ então

$$\frac{|\operatorname{Im}(E(w))|}{|\operatorname{Im}(w)|} \leq |E(w)|.$$

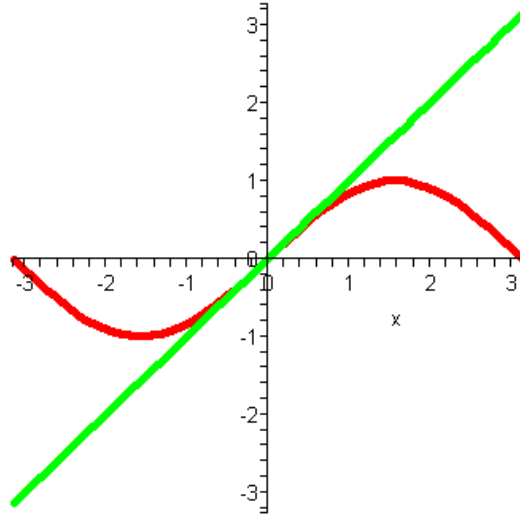


Figura 3.6: gráficos das funções $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto x$ no quadrado $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Disto segue que, se $E^n(w) \notin \mathbb{R}$ então

$$\frac{|\operatorname{Im}(E^n(w))|}{|\operatorname{Im}(E(w))|} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im}(E(E^k(w)))|}{|\operatorname{Im}(E^k(w))|} \leq \prod_{k=1}^{n-1} |E(E^k(w))| = \prod_{k=1}^{n-1} |E'(E^k(w))|.$$

Note que, se $E^n(w) \notin \mathbb{R}$ então $E^j(w) \notin \mathbb{R}$ para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$ pois o eixo real é positivamente invariante. Por outro lado,

$$|\operatorname{Im}(E(w))| \leq |E(w)| = |E'(w)|$$

e portanto,

$$|\operatorname{Im}(E^n(w))| \leq \prod_{k=0}^{n-1} |E'(E^k(w))| = |(E^n)'(w)|.$$

O caso em que $E^n(w) \in \mathbb{R}$ está trivialmente satisfeito. \square

Lema 4. (a) Se $z \in \mathbf{S}$ então $\operatorname{Re}(E(z)) \geq \operatorname{Re}(z) + (1 - \log 2)$

(b) Se $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ então existe $n \geq 0$ tal que $E^n(z) \notin \mathbf{S}$.

Demonstração. Para todo $y \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ temos $\cos y \geq \frac{1}{2}$ (figura 3.7) e por conseguinte, se $x + iy \in \mathbf{S}$ então

$$\operatorname{Re}(E(x + iy)) = e^x \cos y \geq \frac{1}{2} e^x.$$

Seja $\phi(x) := \frac{1}{2}e^x - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (figura 3.7). Então $\phi'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$ e portanto,

$$\inf_{\mathbb{R}} \phi(x) = \phi(\log 2) = 1 - \log 2.$$

Assim, se $z \in \mathbf{S}$ então

$$\operatorname{Re}(E(z)) \geq \operatorname{Re}(z) + (1 - \log 2).$$

Isto prova o item (a).

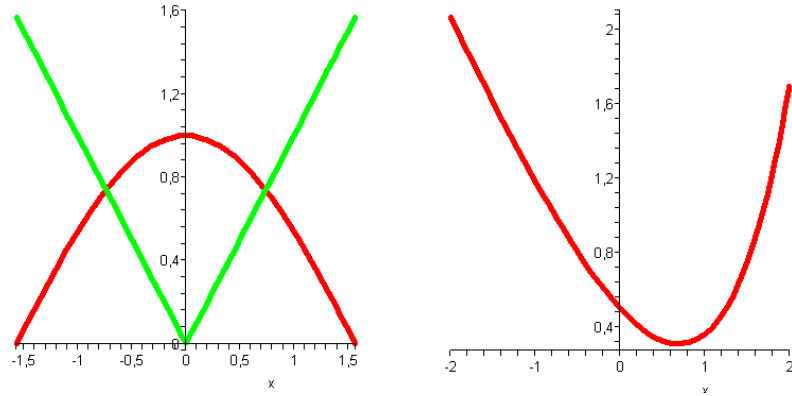


Figura 3.7: À esquerda, as curvas $y = \cos x$ e $2y = |x|$. À direita, o gráfico de ϕ .

Quanto ao item (b), suponha por absurdo que $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ e $E^n(z) \in \mathbf{S}$ para todo $n \geq 0$. Como $1 - \log 2 > 0$ segue do item (a) que $\operatorname{Re}(E^k(z)) \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$. Para todo $y \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ temos $|\operatorname{sen} y| \geq \frac{2}{\pi}|y|$ (figura 3.8). Logo,

$$|\operatorname{Im}(E^{k+1}(z))| \geq e^{\operatorname{Re}(E^k(z))} \frac{2}{\pi} |\operatorname{Im}(E^k(z))|$$

para todo $k \geq 0$.

Mas para k suficientemente grande, $\frac{2}{\pi} e^{\operatorname{Re}(E^k(z))} > 2$ por (a), e com isso $\lim_k \operatorname{Im}(E^k(z)) = \infty$, uma contradição (figura 3.9). \square

No que segue, $D_r(b)$ é o disco aberto $\{z \in \mathbb{C}; |z - b| < r\}$.

Lema 5. *Seja $n \geq 0$ tal que $E^n|_{D_r(b)}$ é um homeomorfismo. Então $E^n(D_r(b))$ contém um disco com centro em $E^n(b)$ e raio $r \cdot \inf_{D_r(b)} |(E^n)'|$.*

Demonstração. Como $E^n|_{D_r(b)}$ é um homeomorfismo, $E^n(D_r(b))$ é um aberto que contém $E^n(b)$ em seu interior. Seja $R := \operatorname{dist}_{\mathbb{C}}(E^n(b), \partial E^n(D_r(b)))$. Se $R = \infty$, pelo Teorema de Liouville $(E^n|_{D_r(b)})^{-1}$ seria constante. Podemos, então, supor que $R < \infty$ (figura 3.10). Neste caso existe $z_0 \in \partial E^n(D_r(b))$ tal que $|E^n(b) - z_0| = R$. Seja γ o segmento ligando $E^n(b)$ a z_0 . Então a curva $\tilde{\gamma} := (E^n|_{D_r(b)})^{-1}(\gamma)$ conecta o ponto b ao ponto $(E^n|_{D_r(b)})^{-1}(z_0) \in \partial D_r(b)$, a qual tem comprimento, no mínimo, r . No entanto, a expansão ou contração que $\tilde{\gamma}$

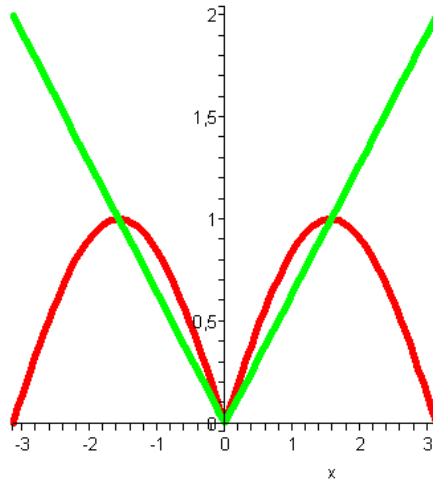


Figura 3.8: As curvas $y = |\text{sen } x|$ e $\pi y = 2|x|$.

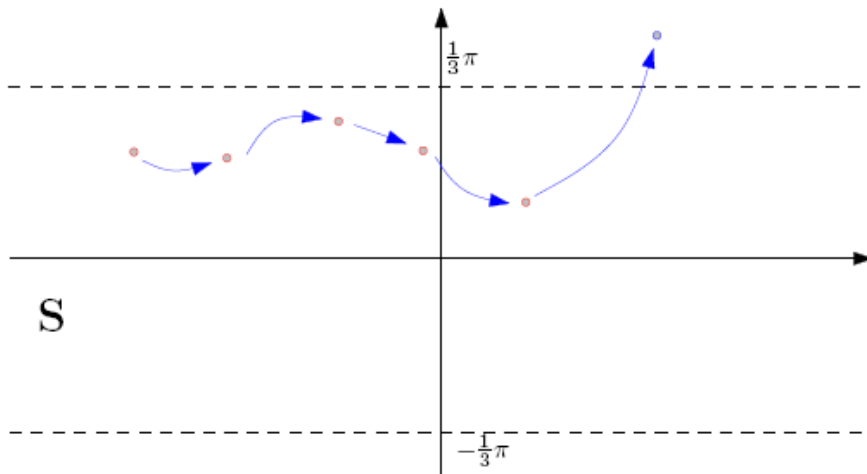


Figura 3.9: ilustração do item 2(b).

sofre, em qualquer direção, coincide com o valor absoluto da derivada, pois $E^n|_{D_r(b)}$ é conforme. Portanto o comprimento de γ é, pelo menos

$$r \cdot \inf_{D_r(b)} |(E^n)'|.$$

□

Observamos que um *domínio* é um subconjunto aberto e conexo.

Lema 6. *Seja $V \subset \mathbb{C}$ um domínio não-vazio. Então, o conjunto*

$$\{n \geq 0; E^n(V) \cap \mathbf{S} = \emptyset\}$$

é finito.

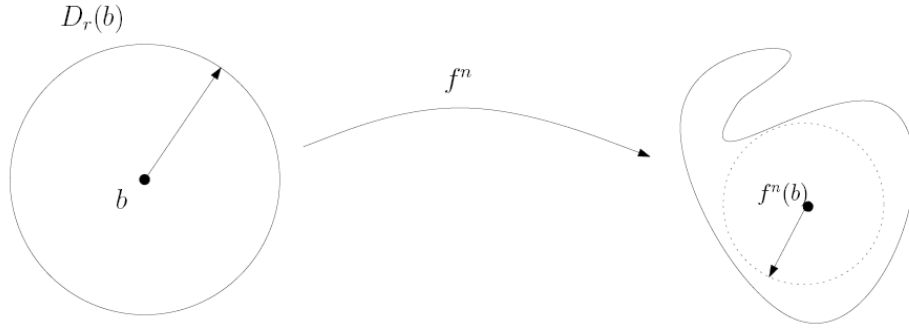


Figura 3.10

Demonstração. Por absurdo, suponha que exista uma sequência crescente $(n_j)_{j>0}$ tal que $E^{n_j}(V) \cap \mathbf{S} = \emptyset$, para todo $j > 0$. Então, pelo Lema 3,

$$\inf_V |(E^{n_j})'| \geq \left(\frac{1}{3}\pi\right)^j.$$

Basta ver que

$$\begin{aligned} |(E^{n_{j+1}})'(z)| &= |(E^{n_{j+1}-n_j} \circ E^{n_j})'(z)| \\ &= |(E^{n_{j+1}-n_j})'(E^{n_j}(z))| \cdot |(E^{n_j})'(z)| \\ &\geq \operatorname{Im}(E^{n_{j+1}}(z)) \left(\frac{1}{3}\pi\right)^j \\ &\geq \left(\frac{1}{3}\pi\right)^{j+1}, \end{aligned}$$

por indução em j . Portanto, dado $r > 0$ existe $k \geq 0$ suficientemente grande de modo que

$$r \cdot |(E^{n_k})'(z)| \geq \left(\frac{1}{3}\pi\right)^k r \geq \pi.$$

Conseqüentemente, se $E^{n_j}|_V$ é um homeomorfismo, para todo $j > 0$, existe $k > 0$ tal que $E^k(V)$ contém um disco de raio π . Então existe $m \geq 0$ tal que $E^k(V)$ intersecta a reta $\mathbb{R} + 2\pi im$ (figura 3.11).

Se $E^{n_j}|_V$ não for um homeomorfismo, para algum $j > 0$, existem z e w em V , distintos, e $k \in \{0, 1, \dots, n_j - 1\}$ tais que $e^{E^k(z)} = e^{E^k(w)}$, ou melhor, $e^{E^k(z) - E^k(w)} = 1$. Com isso, existe $l \in \mathbb{Z} - \{0\}$ satisfazendo $E^k(z) - E^k(w) = 2\pi il$. Como V é um domínio não-vazio, $E^k(V)$ também o é. Isto implica que $\operatorname{Im}(E^k(V))$ é conexo. Como $\operatorname{diam}(\operatorname{Im} E^k(V)) \geq 2\pi l$, existem $z_0 \in V$ e $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tais que $E^k(z_0) \in \mathbb{R} + 2\pi im$. Isto mostra que $E^k(V)$ intersecta a reta $\mathbb{R} + 2\pi im$. Em ambos os casos, $E^{k+1}(V)$ intersecta o eixo real. Logo, todos os conjuntos $E^{n_j}(V)$, para $n_j \geq k + 1$, intersectam o eixo real. Contradição. \square

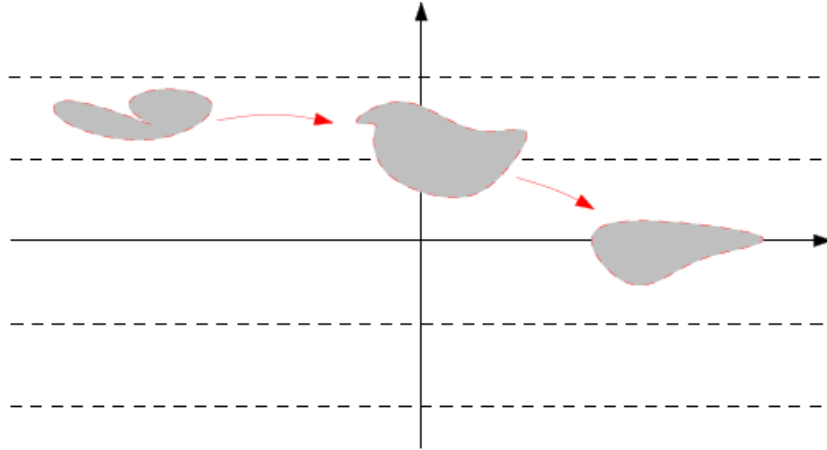


Figura 3.11

Lema 7. *Seja V um domínio não-vazio tal que o conjunto*

$$\{n \geq 0; E^n(V) \subset \mathbf{H}\}$$

é infinito. Então existe $k \geq 0$ tal que $E^k(V) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

Demonstração. Por absurdo, suponha que $E^j(V) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ para todo $j \geq 0$. Considere o conjunto

$$W := \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z)| \leq 2\pi \text{ e } |\operatorname{Im}(E(z))| \leq 2\pi\}.$$

Afirmamos que $E^n(V) \cap \partial W = \emptyset$ para todo $n \geq 0$. Com efeito, se $z_0 := x_0 + iy_0 \in E^l(V) \cap \partial W$ para algum $l \geq 0$ então, $|y_0| = 2\pi$ e $|\operatorname{Im}(E(z_0))| \leq 2\pi$, ou, $|y_0| \leq 2\pi$ e $|\operatorname{Im}(E(z_0))| = 2\pi$ (podendo ocorrer os dois casos). Note que a última possibilidade implica que $E^2(z_0) \in \mathbb{R}$ o que contradiz o fato de z_0 estar em alguma imagem de V . Quanto ao primeiro caso, temos que

$$2\pi \leq |\operatorname{Im}(E(z_0))| = e^{x_0} |\operatorname{sen} y_0| = 0,$$

o que também é uma contradição. Portanto devemos ter $E^n(V) \cap \partial W = \emptyset$ para todo $n \geq 0$. Se um conjunto conexo A é disjunto de W então A ou $E(A)$ é disjunto de \mathbf{S} . De fato, se $z \in A$ e $z \notin W$ então $|\operatorname{Im}(z)| > 2\pi$ ou $|\operatorname{Im}(E(z))| > 2\pi$. Se o primeiro caso ocorre, $z \notin \mathbf{S}$. Caso valha a segunda possibilidade, $E(z) \notin \mathbf{S}$. Como A é conexo e $z \in A$ foi escolhido arbitrariamente segue-se que A ou $E(A)$ é disjunto de \mathbf{S} . Com isso, segue do Lema 6, que apenas um número finito de imagens de V é disjunta de W . Portanto, existe $n_0 > 0$ tal que $E^n(V) \subset W$ para todo $n \geq n_0$. Se

$$|\operatorname{Im} z| = \frac{1}{3}\pi \text{ e } \operatorname{Re} z \geq 4$$

então

$$|\operatorname{Im}(E(z))| = e^{\operatorname{Re} z} |\operatorname{sen} \operatorname{Im} z| \geq e^4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} > 2^4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 4 > 2\pi.$$

Isto mostra que a fronteira de \mathbf{S} é disjunta de $W \cap \mathbf{H}$. Logo, todo subconjunto conexo de $W \cap \mathbf{H}$ está contido ou é disjunto de \mathbf{S} .

Pelo que vimos acima, uma quantidade infinita de imagens de V está contida em $W \cap \mathbf{H}$. Pelo Lema 4(a) segue que $E(W \cap \mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$. Assim, segue do Lema 4(b), que uma quantidade infinita de imagens de V está contida em $\mathbf{H} - \mathbf{S}$. Isto contradiz o Lema 6. \square

Lema 8. *Seja V um domínio não-vazio. Então alguma imagem de V intersecta o eixo real.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que $E^n(V) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ para todo $n \geq 0$. Pelo Teorema de Montel, $\{E^n|_V\}$ é uma família normal. Pelo Lema 7, a menos de um número finito, quase todas as imagens de V intersectam o disco $D := E(\mathbb{C} - \mathbf{H}) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq e^4\}$. Seja g o limite de alguma subsequência da sequência $\{E^n|_V\}$. Então $g(V)$ intersecta D . Com efeito, seja $(n_k)_{k \geq 0}$ tal que $\lim_k E^{n_k} = g$ e suponha que $g(V) \cap D = \emptyset$. Dado $z_0 \in V$ existe um domínio $\Omega \subset V$ contendo z_0 tal que $\overline{g(\Omega)} \cap D = \emptyset$. Mas, para todo k suficientemente grande $E^{n_k}(\Omega) \cap D \neq \emptyset$. Portanto, $\lim_k \overline{E^{n_k}(\Omega)} \cap D \neq \emptyset$, ou seja, $\overline{g(\Omega)} \cap D \neq \emptyset$. Contradição.

Seja $z \in g(V) \cap D$. Se $z \in \mathbb{R}$ existe $k \geq 0$ tal que $g^k(z) \in \mathbf{H}$. Caso $z \notin \mathbb{R}$ então, pelo Lema 4(b), existe $k \geq 0$ tal que $g^k(z) \notin \mathbf{S}$. Portanto, existe uma subsequência da sequência $\{E^n|_V\}$ que converge para uma função holomorfa \tilde{g} e um ponto $w \in V$ tal que $\tilde{g}(w) \in \mathbf{H}$ ou $\tilde{g}(w) \notin \mathbf{S}$. Então existe uma vizinhança conexa U de w tal que $U \subset V$ e $E^n(U) \subset \mathbf{H}$ ou $E^n(U) \cap \mathbf{S} = \emptyset$ para infinitos n 's. Logo, pelos Lemas 6 e 7, alguma imagem de U intersecta o eixo real. Contradição. \square

3.2.2 O conjunto de Julia da função exponencial

Teorema 14 (Misiurewicz, 1981). $\mathcal{J}(E) = \widehat{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{F}(E) \neq \emptyset$. Então existe um domínio U não-vazio tal que $\{E^n|_U\}$ é normal. Pelo Lema 8 o conjunto dos pontos de U cujas órbitas intersectam o eixo real é denso em U . Pelo Lema 4(a) as imagens de todos esses pontos convergem para o infinito. Logo, a sequência $\{E^n|_U\}$ converge uniformemente para o infinito. Como $E(\mathbb{C} - \mathbf{H})$ é limitado, quase

todos os conjuntos $E^n(U)$ estão em \mathbf{H} . Além disso, quase todos intersectam o eixo real. Pelo Lema 4(b), uma infinidade desses conjuntos não estão contidos em \mathbf{S} . Como a fronteira de \mathbf{S} é disjunta de $W \cap \mathbf{H}$, uma quantidade infinita de imagens de U não está contida em W . Logo, uma infinidade de imagens $E^n(V)$ não está contida na faixa $\{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} z| \leq 2\pi\}$. Consequentemente, uma quantidade infinita delas, intersecta uma das retas $\mathbb{R} \pm \pi i$. Mas, se $z = x \pm \pi i$, com $x > 4$, então

$$0 < E^2(z) = E(-e^x) = e^{-e^x} < e^{-e^4} < 1.$$

Em outras palavras, a segunda imagem de qualquer uma dessas retas está contida em \mathbb{D} . Contradição. \square

Corolário 6. *A função exponencial é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Sejam U e V abertos de \mathbb{C} . Se $E^n(U) \cap V = \emptyset$ para todo $n \geq 0$ então $\left\{E^n \Big|_U\right\}$ é uma família normal, pelo Teorema de Montel. Isto contradiz o Teorema de Misiurewicz e termina a prova. \square

3.3 Domínios de Fatou

Seja S uma superfície de Riemann e $f : S \rightarrow S$ holomorfa. Suponha que Ω é uma componente p -periódica do conjunto de Fatou de f . O comportamento de f^n em Ω é classificado de acordo com as seguintes possibilidades (*Teorema de Classificação* [27]):

- (a) Ω contém um ponto periódico atrator z_0 de período p . Então $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $z \in \Omega$, é Ω é chamada *bacia de atração* (imediata) de z_0 .
- (b) $\partial\Omega$ contém um ponto periódico z_0 de período p e $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $z \in \Omega$. Então $(f^p)'(z_0) = 1$ se $z_0 \in \mathbb{C}$. Se $z_0 = \infty$ então $(g^p)'(0) = 1$, onde $g(z) = \frac{1}{f(1/z)}$. Neste caso, Ω chama-se um *domínio de Leau* ou *parabólico*.
- (c) Existe um homeomorfismo analítico $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\phi \circ f^p \circ \phi^{-1}(z) = e^{2\pi i \alpha} z$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Neste caso, Ω chama-se *disco de Siegel*.
- (d) Existe um homeomorfismo analítico $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{A}$, onde \mathbb{A} é um anel,

$$\mathbb{A} := \{z; 1 < |z| < r\},$$

$r > 1$, tal que $\phi \circ f^p \circ \phi^{-1}(z) = e^{2\pi i \alpha} z$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Neste caso, Ω chama-se *anel de Herman*.

- (e) Existe $z_0 \in \partial\Omega$ tal que $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $z \in \Omega$, mas $f^p(z_0)$ não está definido. Neste caso, Ω chama-se *domínio de Baker*.

Note que $f \in \mathcal{R}$ não admite domínios de Baker, diferentemente de função inteiras transcendentess onde pode ocorrer domínios de Baker para $z_0 = \infty$ (singularidade essencial). Mostraremos a seguir que para $f \in \mathcal{E}$ o conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ não contém anéis de Herman.

Exemplo 1 (Fatou). *Considere a função $f : z \mapsto 1 + z + e^{-z}$. Se $z = x + iy$, com $x > 0$, então*

$$\operatorname{Re} f(z) = x + 1 + e^{-x} \cos y \geq x + 1 - e^{-x},$$

e portanto, o semi-plano $H := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > 0\}$ é invariante por f . Por outro lado, segue-se do Teorema do Valor Médio que existe $c \in]0, x[$ tal que $1 - e^{-x} = e^{-c}x$, para $x > 0$. Fazendo $\lambda := e^{-c}$, concluímos que $\operatorname{Re} f^n(z) \geq (1 + \lambda)^n \operatorname{Re} z$ para todo $n > 0$, onde $\operatorname{Re} z = x$. Isto mostra que H está contido em um domínio de Baker.

Seja f uma função inteira. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{C}$ é um valor regular (ou não-singular) da função f^{-1} se existe uma vizinhança V de a tal que $f : f^{-1}(V) \rightarrow V$ é um recobrimento não-ramificado. O conjunto dos valores singulares de f^{-1} será denotado por $\operatorname{sing}(f^{-1})$. Como os automorfismos do plano são da forma $z \mapsto az + b$, para toda função inteira não-linear tem-se que $\operatorname{sing}(f^{-1}) \neq \emptyset$. Os valores singulares são dos seguintes tipos: *valores críticos*, *valores assintóticos* ou limites desses pontos.

Definição 2. *Dizemos que uma singularidade $a \in \mathbb{C}$ de f^{-1} é um valor assintótico se existe uma curva γ , com $\gamma(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, tal que*

$$f(\gamma(t)) \rightarrow a$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Por exemplo, a origem é valor assintótico para $f : z \mapsto e^z$. Para ver isto basta tomar $\gamma(t) = -t$, $t \in \mathbb{R}$. No caso de funções racionais de grau ≥ 2 o conjunto dos valores singulares é discreto e contém apenas valores críticos.

No que segue veremos que o conjunto $\operatorname{sing}(f^{-1})$ exerce papel fundamental na estrutura das componentes (periódicas) do conjunto de Fatou.

Teorema 15. *Para toda $f \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$, a bacia imediata de qualquer órbita periódica atratora ou parabólica contém um valor singular de f .*

Demonstração. Trocando f por algum iterado podemos supor que U é a bacia imediata de um ponto fixo z_0 . Se z_0 for superatrator não há o que fazer. Primeiro vamos assumir que $0 < |f'(z_0)| < 1$. Então existe uma vizinhança V de z_0 simplesmente conexa, contida em U é uma função holomorfa ϕ tal que

$$\phi \circ f(z) = \lambda\phi(z),$$

onde $\lambda = f'(z_0)$. Então, $\psi = \phi^{-1}$ é uma aplicação conforme de uma vizinhança da origem sobre V , com $\psi(0) = z_0$. Caso não existam valores singulares de f em U , podemos estender ψ (analiticamente) a uma função holomorfa de \mathbb{C} em U através da equação

$$f \circ \psi(z) = \psi(\lambda z).$$

Isto contradiz o Teorema de Liouville.

Suponha agora que $f'(z_0) = 1$. Fixemos uma pétala atratora U_0 em U . Então, existe uma aplicação conforme $\phi : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\phi \circ f(z) = \phi(z) + 1$$

e $\phi(U_0)$ contém o semi-plano direito $\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > 0\}$. Se $U \cap \operatorname{sing}(f^{-1}) = \emptyset$, podemos estender $\psi = \phi^{-1}$ a uma função holomorfa de \mathbb{C} em U através da equação

$$f \circ \psi(z) = \psi(z + 1),$$

novamente contradizendo o Teorema de Liouville. □

Os domínios de Baker não contém, necessariamente, valores singulares.

Exemplo 2. *Suponha que $f : z \mapsto e^{2\pi i\theta} z e^z$ com $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ linearizável. Então 0 está contido em um disco de Siegel U . Como $f^{-1}(0) = \{0\}$, podemos considerar $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$. Logo, a aplicação*

$$g : z \mapsto \ln \lambda + z + e^z$$

satisfaz o diagrama de comutação abaixo, onde $\lambda := f'(0)$. Com isso, $\exp^{-1}(U)$ é um domínio de Baker para g o qual é mapeado injetivamente

sobre si mesmo. De fato, sejam $z, w \in \exp^{-1}(U)$ tal que $g(z) = g(w)$. Neste caso,

$$f(e^z) = e^{g(z)} = e^{g(w)} = f(e^w),$$

e como f é injetiva em U temos que $e^z = e^w$. Como $z + e^z = w + e^w$, segue-se que g é univalente em $\exp^{-1}(U)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

Considere o conjunto

$$S^+(f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\text{sing}(f^{-1})),$$

a órbita positiva do conjunto dos valores singulares de f .

Teorema 16. *Seja $\{U_1, U_2, \dots, U_q\}$ um ciclo periódico de discos de Siegel ou anéis de Herman de $f \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$. Então*

$$\bigcup_{j=1}^q \partial U_j \subset \overline{S^+(f)}.$$

Para demonstrar o Teorema 16 precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 9. *Fixemos um aberto conexo $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ e consideremos uma família \mathfrak{F} de ramos holomorfos de alguma sequência $(f^m)^{-1}$ em U . Então \mathfrak{F} é normal.*

Demonstração. Podemos supor que $U \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$, pois caso contrário o resultado é imediato. Como o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em $\mathcal{J}(f)$, existem conjuntos finitos A_1 e A_2 disjuntos tais A_j contém pelo menos três pontos e $f(A_j) = A_j$ para cada j . Então, como $g(U \setminus A_j) \cap A_j$ é vazio para todo $g \in \mathfrak{F}$, \mathfrak{F} é normal em $U \setminus A_j$ para cada j , e portanto, é normal em $U = (U \setminus A_1) \cup (U \setminus A_2)$. \square

Lema 10. *Nas hipóteses do Lema 9, se $U \cap \mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ então todo limite de qualquer sequência convergente em \mathfrak{F} é constante.*

Demonstração. Podemos supor que U é suficientemente pequeno. Seja $z_0 \in U \cap \mathcal{F}(f)$, e suponha que uma sequência $\{g_j\}$ de elementos de \mathfrak{F} converge normalmente em U para uma função g não-constante. Então, $g(z_0) \in \mathcal{J}(f)$, pelo Teorema de Weierstrass g é holomorfa e pelo Teorema de Hurwitz, g é univalente. Logo existe uma vizinhança V suficientemente pequena de $g(z_0)$ tal que $g_j(U) \supset V$ para todo j grande. Se g_j é um ramo de $(f^{n(j)})^{-1}$, temos que $n(j) \rightarrow \infty$ e

$$f^{n(j)}(V) \subset f^{n(j)} \circ g_j(U) = U.$$

Isto contradiz o Teorema 13. \square

Demonstração do Teorema 16. Trocando f^q por f , se necessário, é suficiente considerar um disco de Siegel ou anel de Herman U invariante. Por absurdo, suponha que existe $\zeta \in \partial U$ e uma vizinhança $V \ni \zeta$ tal que $V \cap \overline{S^+(f)} = \emptyset$. Como $f|_U$ é um automorfismo conforme sobre a imagem U , podemos considerar

$$g = (f|_U)^{-1} : U \rightarrow U.$$

Por hipótese podemos estender g^n a uma função holomorfa definida em V . Pelo Lema 9, $\{g^n\}$ é uma família normal em V e pelo Lema 10, toda função limite de uma subsequência convergente deve ser constante. Mas existe uma subsequência convergindo para a identidade sobre $U \cap V$, uma contradição. \square

Quando um ponto periódico irracionalmente neutro pertence ao conjunto de Julia de $f \in \mathcal{R} \cup \mathcal{E}$ dizemos que este é um *ponto de Cremer* de f . A existência de tais pontos periódicos pode ser vista em [31] à pagina 40.

Teorema 17. *Todo ponto de Cremer está contido em $\overline{S^+(f)}$.*

Demonstração. Novamente é suficiente considerar um ponto fixo irracionalmente neutro $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. Suponha que existe uma vizinhança $V \ni z_0$ tal que

$$S^+(f) \cap V \setminus \{z_0\} = \emptyset.$$

Então existe um ramo homomorfo g_n de $(f^n)^{-1}$ tal que $g_n(z_0) = z_0$ para todo n . Novamente pelos Lemas 9 e 10, existe uma subsequência de $\{g_n\}$ convergindo para uma constante, o que contradiz o fato que $|g'_n(z_0)| = 1$. \square

3.3.1 Propriedades de funções Inteiras Transcendentes

Nesta seção descreveremos algumas propriedades básicas quanto a dinâmica de funções inteiras transcendententes e estudaremos algumas classes especiais de funções em \mathcal{E} . Em particular, apresentaremos uma nova demonstração do Teorema de Misiurewicz.

Um das diferenças fundamentais entre a dinâmica de funções polinomiais e funções inteiras transcendententes é que $\mathcal{J}(p)$ é compacto para todo polinômio p , enquanto que para funções em \mathcal{E} temos a

Proposição 1. *O conjunto de Julia de uma função inteira transcendente é ilimitado.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{E}$. Como o conjunto de Julia de f é infinito e f omite no máximo dois pontos, pelo Teorema de Picard, existe $\zeta \in \mathcal{J}(f)$ valor não-omitido. Seja U uma vizinhança do ponto no infinito. Pelo Teorema de Picard, existe $\eta \in U$ tal que $f(\eta) = \zeta$ (veja figura 3.12). Por outro lado, o conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ é totalmente invariante, e portanto, $\eta \in \mathcal{J}(f)$. Logo, $\mathcal{J}(f)$ é ilimitado. \square

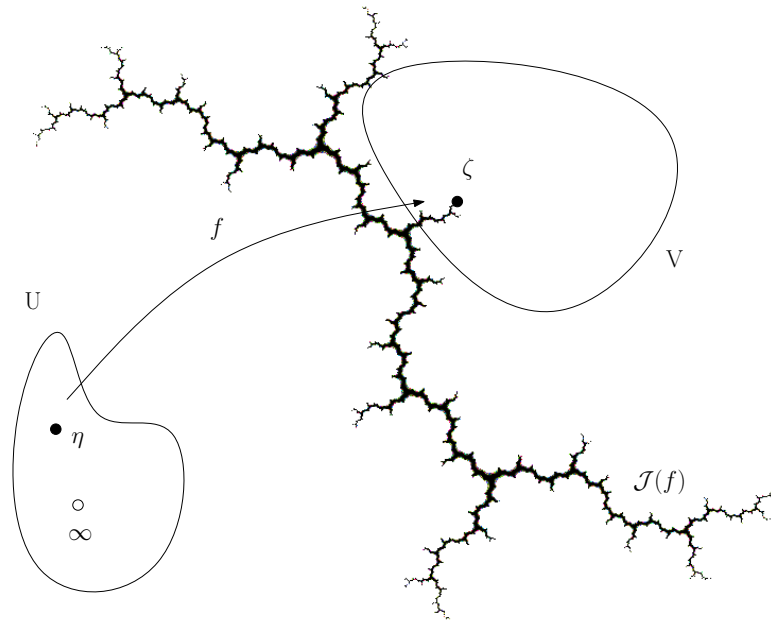


Figura 3.12: *Vizinhanças do ponto no infinito e de um ponto não-excepcional no conjunto de Julia.*

Ao contrário das funções racionais, que admitem anéis de Herman no conjunto de Fatou (figura 3.13), o conjunto de Fatou das funções inteiras

transcendentes não possuem anéis de Herman. Isto é uma consequência do Lema 1.

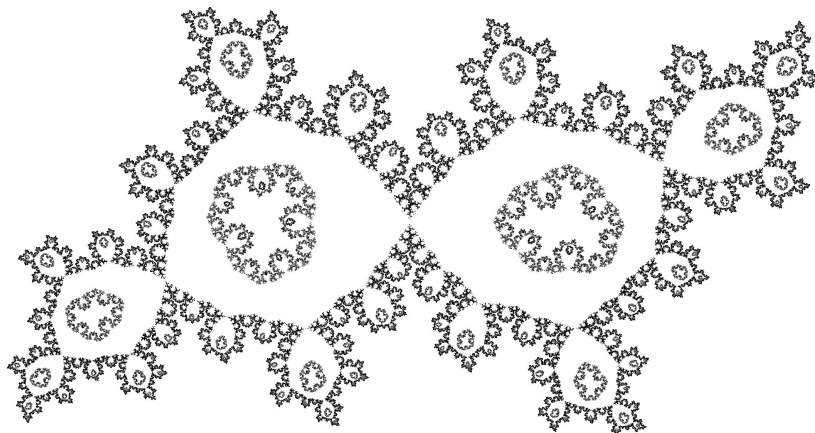


Figura 3.13: Para α e a convenientes, o conjunto de Fatou de $z \mapsto e^{2\pi i\alpha} z^2 \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ contém anéis de Herman.

Com efeito, suponha que H é um anel de Herman para $f \in \mathcal{E}$. Mas então $\{f^n\}$ é uniformemente limitada em H . Pelo Princípio do Máximo, esta sequência também é uniformemente limitada na componente limitada de $\mathbb{C} \setminus H$, que possui vez contém pontos de $\mathcal{J}(f)$, uma contradição. Em resumo temos a

Proposição 2. *O conjunto de Fatou de uma função inteira transcendente não contém ciclos de anéis de Herman.*

Naturalmente pode existir componente multiplamente conexa no conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$. De fato, Baker [2] mostrou que existem funções com essas características.

No que segue mostraremos que as componentes de Fatou de $f \in \mathcal{E}$ multiplamente conexas são domínios errantes, e que as componentes ilimitadas devem ser simplesmente conexas. No caso em que o conjunto dos valores singulares de f é limitado, verificaremos que todas as componentes de Fatou são limitadas, isto é, não existem domínios de Baker. Em particular, este fato fornecerá uma nova prova do Teorema de Misiurewicz.

Definição 3. *Se γ é uma curva retificável em \mathbb{C} então, para $a \notin \{\gamma\}$,*

$$n(a, \gamma) := \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

é chamado o índice de γ em relação ao ponto a . Se $a = 0$, escreveremos apenas $n(\gamma) = n(0, \gamma)$.

A grosso modo, o índice de uma curva em relação a um ponto é o número de voltas, contado com sinal, que esta curva dá em torno do ponto.

Lema 11. *Seja $f \in \mathcal{E}$ e U uma componente de $\mathcal{F}(f)$ multiplamente conexa. Então*

- (a) $\{f^n\}$ converge uniformemente para ∞ nas partes compactas de U ;
- (b) $n(\gamma) > 0$ para todo n suficientemente grande, onde γ é uma curva de Jordan não-contrátil em U .

Demonstração. (a) Por absurdo suponha que exista alguma subsequência $\{f^{n(j)}\}$ uniformemente limitada nas partes compactas de U . Em particular existe $M > 0$ tal que $|f^{n(j)}(z)| \leq M$ sobre γ . Pelo Princípio do Máximo, essa desigualdade é válida nas componentes limitadas de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$, que por sua vez contém pontos de $\mathcal{J}(f)$. Isto contradiz o fato de $\mathcal{J}(f)$ ser ilimitado.

(b) Suponha que exista uma subsequência $\{f^{n(k)}\}$ tal que $n(f^{n(k)}(\gamma)) = 0$, para todo k . Pelo Princípio do Argumento $f^{n(k)}$ não contém zeros no interior da região limitada por γ , pois

$$0 = n(f^{n(k)}(\gamma)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f^{n(k)} \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f^{n(k)})'(z)}{f^{n(k)}(z)} dz.$$

Pelo Princípio do Mínimo, para cada inteiro positivo k , existe $z_k \in \gamma$ tal que

$$0 < |f^{n(k)}(z_k)| \leq |f^{n(k)}(z)|$$

para todo z no interior de γ . Como γ é um conjunto compacto contido em U segue-se do item (a) que $|f^{n(k)}(z_k)| \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, $f^{n(k)} \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$, no interior de γ . Isto contraria o fato de existir pontos periódicos repulsores no interior de γ . \square

Lema 12. *Suponha que $f \in \mathcal{E}$ é limitada sobre uma curva Γ que tende para ∞ , então toda componente de $\mathcal{F}(f)$ é simplesmente conexa.*

Demonstração. Por absurdo suponha que exista uma componente de Fatou U multiplamente conexa. Seja γ uma curva de Jordan em U não homotópica a uma constante em U . Pelo Lema 11, existe uma subsequência $\{n(k)\}$ tal que $f^{n(k)}(\gamma) \cap \Gamma \neq \emptyset$. Tome $z_k \in f^{n(k)}(\gamma) \cap \Gamma$. Mas então, existe $w_k \in \gamma$ tal que

$$f(z_k) = f^{n(k)+1}(w_k),$$

e portanto, $f(z_k) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, uma contradição. \square

Teorema 18 (Baker). *Toda componente de Fatou ilimitada de uma função inteira transcendente é simplesmente conexa.*

Essa característica difere o conjunto de Julia de funções transcendentess e polinomiais.

Corolário 7. *O conjunto de Julia de uma função inteira transcendente não pode ser totalmente desconexo.*

Corolário 8. *Seja $f \in \mathcal{E}$. Se $\mathcal{F}(f)$ contém uma componente ilimitada então todas as componentes do conjunto de Fatou de f são simplesmente conexas.*

Demonstração. Seja U uma componente $\mathcal{F}(f)$. Se for ilimitada, o resultado segue do Teorema 18. Podemos assumir que U é uma componente limitada. Então a sequência $\{f^n\}$ é uniformemente limitada em U e pelo Lema 11, U é simplesmente conexa. \square

O resultado a seguir segue-se imediatamente do Lema 11 e do Teorema 18.

Teorema 19. *Seja $f \in \mathcal{E}$. Toda componente não-errante de $\mathcal{F}(f)$ é simplesmente conexa.*

Ainda sobre componentes multiplamente conexas em $\mathcal{F}(f)$, com $f \in \mathcal{E}$, temos o

Corolário 9. *Toda componente multiplamente conexa do conjunto de Fatou de $f \in \mathcal{E}$ é um domínio errante.*

Para demonstrar o Teorema 18 usaremos a famosa desigualdade de *Harnack*

Lema 13. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica positiva. Dado um compacto $K \subset \Omega$, existe uma constante c dependendo apenas de Ω e K , tal que*

$$h(z) \leq ch(w)$$

para quaisquer $z, w \in K$.

Demonstração do Teorema 18. Seja $f \in \mathcal{E}$ e suponha que U é uma componente de $\mathcal{F}(f)$ multiplamente conexa. Seja γ_0 uma curva de Jordan não-homotópica a um ponto em U . Pelo Lema 11 existe uma subsequência $\{n(k)\}$ tal que $\gamma_k := f^{n(k)}(\gamma_0)$ intersecta U para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue-se então que $\gamma_k \subset U$.

Seja Ω um domínio limitado contendo as curvas γ_0 e γ_1 e tal que $\overline{\Omega} \subset U$. Pelo Lema 11, $|f^{n(k)}(z)| > 1$, $z \in \Omega$, para todo k . Logo,

$$h_k(z) := \log |f^{n(k)}(z)|$$

é uma função harmônica positiva definida em Ω , para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $\gamma_0 \cup \gamma_1$ é compacto, pela desigualdade de Harnack existe uma constante c independente de $n(k)$ tal que $h_k(z_0) \leq ch_k(z_1)$ para todo $z_j \in \gamma_j$, $j = 0, 1$, e qualquer k . Portanto, $|f^{n(k)}(z_1)| \leq |f^{n(k)}(z_0)|^c$.

Por outro lado, como $\gamma_k \rightarrow \infty$, $n(\gamma_k) > 0$, e $f \in \mathcal{E}$, existe $\zeta_k \in \gamma_k$ tal que $|f(\zeta_k)| > |\zeta_k|^c$ para todo k . Fixado k , seja $z_0 \in \gamma_0$ tal que $\zeta_k = f^{n(k)}(z_0)$ e considere $z_1 := f^{n(1)}(z_0) \in \gamma_1$. Com isso temos que

$$|f^{n(k)}(z_1)| > |f^{n(k)}(z_0)|^c,$$

uma contradição. □

3.3.2 Classes especiais de funções inteiras

Considere o conjunto das funções inteiras transcendentais f tais que o conjunto $S^+(f)$ é limitado, isto é,

$$\mathcal{B} := \{f \in \mathcal{E} ; S^+(f) \text{ é limitado}\}.$$

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos à respeito dessa classe e como consequência obteremos uma demonstração alternativa para o Teorema de Misiurewicz.

Sejam $f \in \mathcal{B}$ e $R > 0$ tal que $S^+(f) \subset \mathbb{D}_R$. Consideremos $A := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_R}$ e $G := f^{-1}(A)$. Seja V uma componente de G .

Lema 14. *O domínio V é simplesmente conexo e limitado por uma curva analítica com extremos tendendo para ∞ .*

Demonstração. Seja V uma componente de G . Por definição V é um domínio e $f(V) = A$. Se V fosse limitado, pelo Princípio do Máximo

existiria $z_0 \in \partial V \subset \mathbb{C}$ tal que $|f(z_0)| > |f(z)|$ para todo $z \in V$, isto é, teríamos $|f(z_0)| > |w|$ para todo $w \in A$, o que implicaria que A é limitado, uma contradição. Mostraremos que V é simplesmente conexo (figura 3.14). Observe que $|f(z)| > R$ para todo $z \in V$ e, em particular, f

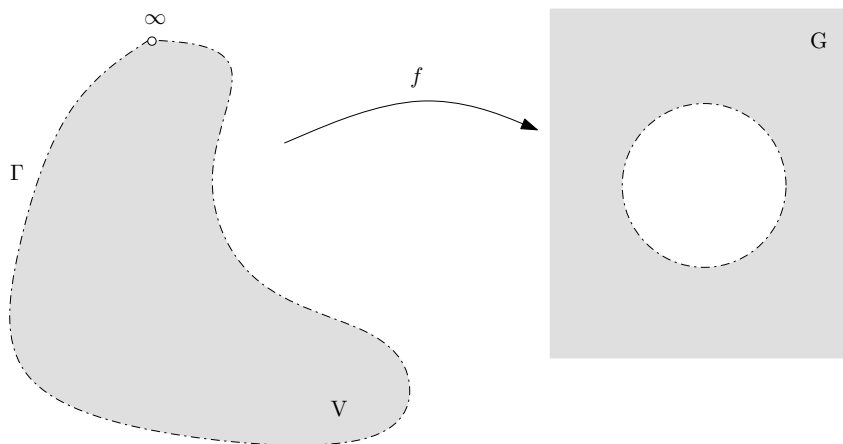


Figura 3.14: O domínio V é ilimitado e simplesmente conexo.

não se anula em V . Por absurdo suponha que γ seja uma curva de Jordan não-contrátil em V . Então existe z_0 na componente conexa limitada por γ tal que $f(z_0) < R$. Pelo Princípio do Módulo Mínimo, $|f(z_0)| \geq \inf_{\Gamma} |f| = R$, uma contradição; isto mostra que V é simplesmente conexo. Por outro lado, segue-se do Grande Teorema de Picard que V não é uma vizinhança do ponto no infinito pois a imagem de V não intersecta o disco unitário, o que mostra que $\infty \in \partial V$ e termina a demonstração. \square

Como $|f(z)| = R$ para todo $z \in \Gamma$, o resultado a seguir é uma consequência imediata do Lema (12).

Corolário 10. *Se $f \in \mathcal{B}$ então toda componente de $\mathcal{F}(f)$ é simplesmente conexa.*

Como V é simplesmente conexo e não contém zeros de f podemos definir um ramo holomorfo do logaritmo de f em V , isto é, uma função holomorfa φ sobre V tal que $e^\varphi = f$. Neste caso,

$$\operatorname{Re} \varphi(z) = \log |f(z)| > \log R,$$

e com isso, é possível mostrar que $\varphi : V \rightarrow H_R$ é conforme e univalente, onde

$$H_R := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > \log R\}.$$

Isto segue-se do fato que o ramo $f^{-1} : A \rightarrow V$ da inversa de f em V é um recobrimento universal, e portanto, f é conforme e univalente em V . Também podemos assumir que R é grande o suficiente para que $|f(0)| < R$, isto é, $0 \notin G$. Logo \exp é univalente em cada componente de $U := \exp^{-1}(G)$. Segue-se que existe uma função holomorfa F tal que o diagrama 3.15 seja comutativo. Observe que $F'(z) = 0$ se, e somente

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & H_R \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Figura 3.15: $f \circ \exp = \exp \circ F$

se, $f'(e^z) = 0$ para $z \in U$, de certo que F é conforme e univalente em cada componente W de U sobre o semi-plano H_R . Portanto, podemos considerar a aplicação $F^{-1} : H_R \rightarrow W$, um ramo da inversa de F . Sejam $z_0 \in W$ e D o disco centrado em $F(z_0)$ e raio $\operatorname{Re} F(z_0) - \log R$. Note que $D \subset H_R$. Como F^{-1} é univalente em H_R segue-se do Teorema 1/4 de Koebe (veja [13], por exemplo) que

$$\frac{1}{4} |(F^{-1})'(F(z_0))| \operatorname{dist}(F(z_0), \partial D) \leq \operatorname{dist}(z_0, \partial F^{-1}(D)).$$

Por outro lado, sendo a função \exp univalente em W , W não contém segmentos verticais de comprimento 2π , o que implica que

$$\operatorname{dist}(z_0, \partial F^{-1}(D)) \leq \pi$$

pois $F^{-1}(D) \subset W$. Como $(F^{-1})'(F(z_0)) = \frac{1}{F'(z_0)}$ segue-se que

$$|F'(z_0)| \geq \frac{1}{4\pi} (\operatorname{Re} F(z_0) - \log R). \quad (3.1)$$

Com essa desigualdade é possível mostrar que nenhuma órbita em $\mathcal{F}(f)$ tende para ∞ . Com efeito, suponha que $f^n(z) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, para algum $z \in \mathcal{F}(f)$. Isto implica que, para algum disco $D_0 := D_r(z)$, $\{f^n|_{D_0}\}$ converge uniformemente para o ponto no infinito. Trocando z_0 por algum ponto em sua órbita positiva podemos assumir que $D_n := f^n(D_0) \subset G$ para todo n . Denote por C_0 uma componente de $\exp^{-1}(D_0)$ e defina $C_n := F^n(C_0)$. Então,

$$\exp(C_n) = \exp \circ F^n(C_0) = f^n \circ \exp(C_0) = f^n(D_0) = D_n \subset G,$$

e portanto $C_n \subset U$ para todo n . Seja $\zeta_0 \in C_0$ e defina $\zeta_n := F^n(\zeta_0) \in C_n$. Agora denotemos que r_n o raio do disco maximal centrado em ζ_n e contido em C_n . Novamente pelo Teorema 1/4 de Koebe,

$$\frac{1}{4}|f'(\zeta_n)|\text{dist}(\zeta_n, \partial D_{r_n}(\zeta_n)) \leq \text{dis}(f(\zeta_n), \partial f(D_{r_n}(\zeta_n))).$$

Como $\text{dis}(f(\zeta_n), \partial f(D_{r_n}(\zeta_n))) = \text{dis}(\zeta_{n+1}, \partial f(D_{r_n}(\zeta_n))) \leq r_{n+1}$, segue-se que

$$r_{n+1} \geq \frac{1}{4}r_n|f'(\zeta_n)|.$$

Da equação (3.1) e sabendo que $\text{Re } \zeta_n$ converge uniformemente para ∞ em C_0 , temos que $|F'(\zeta_n)| \rightarrow \infty$, que por sua vez implica $r_n \rightarrow \infty$. Em particular, algum domínio C_n contém um segmento vertical de comprimento 2π , uma contradição. Em resumo, demonstramos o seguinte resultado.

Teorema 20. *Se $f \in \mathcal{B}$ então $\{f^n(z)\}_{n \geq 0}$ não converge para ∞ , para todo $z \in \mathcal{F}(f)$.*

Corolário 11. *Se $f \in \mathcal{B}$ então $\mathcal{F}(f)$ não contém domínios de Baker.*

Do Lema (11) segue imediatamente o

Corolário 12. *Se $f \in \mathcal{B}$ então toda componente de $\mathcal{F}(f)$ é simplesmente conexa.*

Estamos interessados principalmente em estudar funções inteiras transcendentais com conjunto singular finito, isto é, o conjunto

$$\mathcal{S} := \{f \in \mathcal{E} ; \text{sing}(f^{-1}) \text{ é um conjunto finito}\}.$$

Note que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ e a função $z \mapsto \frac{\text{sen } z}{z}$ pertence ao conjunto $\mathcal{B} \setminus \mathcal{S}$. Um dos principais resultados deste trabalho é o Teorema das componentes não-errantes para funções em \mathcal{S} . Mostraremos que se $f \in \mathcal{S}$ então toda componente do conjunto de Fatou de f é pré-periódica. Disto segue-se o

Teorema 21. *Se $f \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$, então a órbita de qualquer $z \in \mathcal{F}(f)$ está eventualmente contida em uma bacia de atração imediata, uma bacia parabólica imediata ou um ciclo de discos de Siegel.*

Em particular, obtemos o

Teorema 22. *Seja $f \in \mathcal{S}$ e suponha que $\text{sing}(f^{-1})$ é pré-periódico ou converge para ∞ . Então $\mathcal{J}(f) = \widehat{\mathbb{C}}$.*

Como consequência obtemos, novamente, o

Corolário 13 (Teorema de Misiurewicz). *O conjunto de Fatou de $z \mapsto \exp(z)$ é vazio.*

CAPÍTULO 4

Propriedades fundamentais de $\mathcal{J}(f)$

No caso de funções racionais, existem diferentes demonstrações para o fato do conjunto de Julia ser o fecho das órbitas periódicas repulsoras. Milnor [27] apresenta duas provas, devido à Fatou e Julia. Mas nenhuma delas se aplica ao caso transcendente. Com efeito, na prova de Fatou, primeiro mostrou-se que o número de pontos periódicos atratores e neutros é finito e depois verificou-se que todo ponto no conjunto de Julia pode ser aproximado por pontos periódicos, o que implica o resultado. A aplicação $z \mapsto 1 + z + e^z$ mostra que o primeiro argumento não é válido no caso de funções inteiras transcendentais.

Seguindo [30] e [5], apresentamos uma prova elementar desse resultado. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira transcendente. O objetivo desta seção é demonstrar as seguintes propriedades básicas a respeito do conjunto de Julia da função f .

Teorema 23. $\mathcal{J}(f)$ é um conjunto perfeito, isto é, um conjunto fechado, não-vazio e que não contém pontos isolados.

Teorema 24. $\mathcal{J}(f)$ é o fecho do conjunto de todos os pontos periódicos repulsoras.

Considere o conjunto dos pontos que escapam para ∞ , isto é,

$$I(f) := \left\{ z \in \mathbb{C} ; \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \infty \right\}.$$

Se f fosse um polinômio, $I(f)$ seria exatamente a bacia de atração do ponto fixo (superatrator) ∞ , e neste caso teríamos $\mathcal{J}(f) = \partial I(f)$ (veja [6]). No caso em que estamos interessados, $f \in \mathcal{E}$, a situação é mais complicada. Em [21], Eremenko usa o Teorema de Wiman-Valiron para demonstrar o

Teorema 25. *Para toda $f \in \mathcal{E}$, $I(f) \neq \emptyset$.*

Em particular, segue-se que $I(f)$ é infinito pois é totalmente invariante invariante, e por sua vez, temos que $\partial I(f) \subset \mathcal{J}(f)$. Por outro lado, afirmamos que $\partial I(f) \supset \mathcal{J}(f)$. Para ver isto, tome $z \in \mathcal{J}(f)$ e V uma vizinhança arbitrária de z . Seja $z_0 \in I(f)$ e defina $z_1 = f(z_0)$. Note que $I(f)$ não contém pontos periódicos, e portanto $z_1 = f(z_0) \neq z_0$. Como f omite no máximo um ponto no plano complexo, segue-se do Teorema 13 que existe $z_* \in V$ e $k \geq 0$ tal que $f^k(z_*) = z_0$ ou $f^k(z_*) = z_1$. Logo, $z_* \in I(f)$. Como o interior do conjunto dos pontos que escapam para ∞ está contido no conjunto de Fatou de f , segue-se que $\partial I(f) \subset \mathcal{J}(f)$. Em resumo, obtemos o

Teorema 26. *Se f é uma função inteira então $\mathcal{J}(f) = \partial I(f)$.*

No caso da função $f : z \mapsto 1 + z + e^{-z}$, $I(f)$ contém o semi-plano $\text{Re } z > 0$ e portanto,

$$\text{Int}(I(f)) \neq \emptyset.$$

No entanto, no caso em que f é um polinômio tem-se $I(f) \cap \mathcal{J}(f) = \emptyset$ de acordo com a observação que fizemos acima. Para funções inteiras transcendentais temos o seguinte

Teorema 27 ([21],[28]). *Para qualquer $f \in \mathcal{E}$, $I(f) \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.*

4.1 O conjunto $\mathcal{J}(f)$ é perfeito

Para demonstrar o Teorema (23) uma das principais dificuldades é mostrar que o conjunto de Julia é não-vazio. No caso em que f é racional de grau maior do que 1, uma demonstração pode ser feita como se segue. Se o conjunto de Julia fosse vazio existiria uma subsequência (n_j) tal que $f^{n_j} \rightarrow g$ uniformemente em $\widehat{\mathbb{C}}$. Pelo Teorema de Weierstrass, g seria racional. Mas $\deg(f^{n_j}) \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, uma contradição.

Outra forma de ver isto seria mostrar que $\mathcal{J}(f)$ contém um ponto fixo repulsor ou de autovalor 1. Ambos métodos não podem ser aplicados neste caso.

Teorema 28 (Radström [30]). *Seja $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ uma função holomorfa transcendente. Então $\mathcal{J}(f)$ é infinito.*

Demonstração. Suponha que o conjunto $\mathcal{J}(f)$ é finito, possivelmente vazio. Neste caso o conjunto de Fatou de f é um conjunto aberto e conexo. Suponha também, sem perda de generalidade, que ∞ é uma singularidade essencial de f . Note que 0 é uma singularidade isolada de f . Se a origem for uma singularidade essencial de f , as equações

$$f(z) = 0 \text{ e } f(z) = \infty$$

não admitem solução alguma. Caso contrário, uma delas admite uma única solução. Pelo Teorema de Picard, a equação $f(z) - z = 0$ admite infinitas soluções que se acumulam em 0, se a origem for uma singularidade essencial, e em ∞ . Todas as soluções, exceto um número finito, estão em $\mathcal{F}(f)$, já que o conjunto $\mathcal{J}(f)$ é finito, por hipótese. Sejam z_0 e w_0 , duas destas soluções. Então z_0 é atrator ou é o centro de um domínio de rotação.

Suponha que z_0 seja atrator. Então $\{f^n\}$ converge normalmente para z_0 em $\mathcal{F}(f)$. Em particular, $w_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(w_0) = z_0$, uma contradição.

Se z_0 for o centro de um domínio de rotação, existe uma sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $f^{n_k}(z) \rightarrow z$, quando $k \rightarrow \infty$, em $\mathcal{F}(f)$. Seja $\alpha \in \mathcal{F}(f) \setminus \{z_0\}$ tal que $f(\alpha) = z_0$. A existência de α é garantida pelo Teorema de Picard. Com isso, $z_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(\alpha) = \alpha$, outra contradição. \square

O Teorema (28) será útil para demonstrar a seguinte propriedade.

Lema 15. *O conjunto de Julia de uma função inteira transcendente não contém pontos isolados.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{E}$ e vamos assumir que $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$. Primeiro mostraremos que $\mathcal{J}(f)$ é infinito e depois, que não contém pontos isolados. Seja $z \in \mathcal{J}(f)$ e assumamos que $\mathcal{J}(f)$ é finito. Como $f^{-1}(w) \in \mathcal{J}(f)$ para todo $w \in \mathcal{J}(f)$, segue-se que todo ponto de $\mathcal{J}(f)$ é excepcional. Pelo Teorema de Picard existe no máximo um ponto excepcional de f no plano

complexo, e portanto $\mathcal{J}(f) = \{z\}$. Conjugando f com uma translação, se necessário, podemos assumir que $z = 0$. Assim, $f|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ é uma função holomorfa transcendente, e pelo Teorema (28), $\mathcal{J}(f|_{\mathbb{C}^*})$ é não-vazio. Disto segue-se que $\mathcal{J}(f) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, uma contradição.

Portanto, o conjunto $\mathcal{J}(f)$ é infinito. Sejam $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ e U uma vizinhança de z_0 . Considere os pontos $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{J}(f) \setminus \mathcal{O}^+(z_0)$, distintos. Como $\{f^n|_U\}$ não é normal, $z_j \in \mathcal{O}^+(U)$ para algum $j \in \{1, 2, 3\}$. Logo, $\mathcal{O}^-(z_j) \cap U \setminus \{z_0\} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{O}^-(z_j) \subset \mathcal{J}(f)$ segue-se que

$$\mathcal{J}(f) \cap U \setminus \{z_0\} \neq \emptyset.$$

E portanto, z_0 não é isolado. \square

Agora o Teorema (23) segue imediatamente do Lema (15) e da Proposição a seguir.

Proposição 3. *O conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ é não vazio.*

Para demonstrar a Proposição (3), serão necessários dois resultados preliminares.

Lema 16. *Seja g uma função inteira tal que $g \neq \text{id}_{\mathbb{C}}$ e $(g^2 - \text{id}_{\mathbb{C}})/(g - \text{id}_{\mathbb{C}})$ é constante. Então g é um polinômio de grau ≤ 1 .*

Demonstração. Podemos assumir que g não é constante, pois caso contrário a conclusão é imediata. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$g^2 - \text{id}_{\mathbb{C}} = \alpha(g - \text{id}_{\mathbb{C}}). \quad (4.1)$$

Se $\alpha = 0$, $g^2 = \text{id}_{\mathbb{C}}$ e portanto, g é injetora. Segue-se daí que g é um isomorfismo conforme e portanto, um polinômio de grau ≤ 1 . Se $\alpha = 1$, $g^2 = g$. E portanto,

$$g'(z)(g'(g(z)) - 1) = 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Logo, g é constante ou $g = \text{id}_{\mathbb{C}}$. Com isso, podemos assumir que $\alpha \notin \{0, 1\}$. Da equação (4.1) obtemos

$$g'(z) \cdot g' \circ g(z) - 1 = \alpha(g'(z) - 1), \text{ para todo } z \in \mathbb{C},$$

e portanto, $g'(z)(g' \circ g(z) - \alpha) = 1 - \alpha$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Como $\alpha \neq 1$, g' omite 0 e $g' \circ g$ omite $\alpha \neq 0$. Pelo Teorema de Picard, $g' \circ g$ é constante. Logo, g é um polinômio de grau ≤ 1 . \square

Lema 17. *Seja g uma função inteira tal que $g(0) = 0$, $|g'(0)| < 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n = 0$ localmente uniformemente em \mathbb{C} . Então $g(z) = g'(0)z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Dada uma função inteira h , denotaremos por $M(r, h)$ o módulo máximo de h na fronteira do disco \mathbb{D}_r . Na demonstração do Lema (17) usaremos o Teorema a seguir.

Teorema 29 (Bohr). *Seja \mathcal{H} o conjunto das funções holomorfas $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $h(0) = 0$ e $M(1/2, h) \geq 1$. Para cada $h \in \mathcal{H}$, seja*

$$c(h) := \sup\{r > 0 ; \partial\mathbb{D}_r \subset h(\mathbb{D})\}.$$

Então $\inf\{c(h) ; h \in \mathcal{H}\} > 0$.

Demonstração. Por absurdo, suponha que $\inf\{c(h) ; h \in \mathcal{H}\} = 0$. Isto significa que existe uma sequência $\{h_n\}$ em \mathcal{H} tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(h_n) = 0.$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existem pontos $z_1(n) \in \partial\mathbb{D}$ e $z_2(n) \in \partial\mathbb{D}_2$ omitidos por h_n . Por outro lado, existe uma única transformação afim φ_n que aplica $z_1(n)$ e $z_2(n)$ em 1 e 2, respectivamente. Em particular, a função holomorfa $\varphi_n \circ h_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ omite os pontos 1 e 2, o que implica que a família $\{\varphi_n \circ h_n\}$ é normal, pelo Teorema de Montel. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $z_j(n) \rightarrow z_j$ quando $n \rightarrow \infty$. Explicitamente temos

$$\varphi_n(z) = \frac{z - z_1(n)}{z_2(n) - z_1(n)} + 1.$$

Isto implica que φ_n converge uniformemente para uma função afim φ tal que $\varphi(z_1) = 1$ e $\varphi(z_2) = 2$. Novamente, tomando uma subsequência, se preciso for, assumiremos que $\varphi_n \circ h_n \rightarrow g$ uniformemente nas partes compactas do disco unitário. Agora, considere a função $h := \varphi^{-1} \circ g$. Então,

$$\lim_n h_n = \lim_n [\varphi_n^{-1} \circ (\varphi_n \circ h_n)] = h.$$

Logo, h_n converge para h uniformemente nas partes compactas de \mathbb{D} . Pelo Teorema de Hurwitz, $h \in \mathcal{H}$. Portanto h não é constante e, por sua vez, isto implica que existe $r > 0$ tal que $\partial\mathbb{D}_r \subset h(\mathbb{D}_{1/2})$. Como $\lim_n c(h_n) = 0$, para cada $n > 0$ suficientemente grande, existe $w_n \notin$

$h_n(\mathbb{D})$ tal que $w_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Considere a função dada por $g_n(z) := h_n(z) - w_n$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Note que $g_n \rightarrow h$ uniformemente nas partes compactas do disco unitário e cada g_n não possui zeros em \mathbb{D} . Novamente pelo Teorema de Hurwitz a função h não possui zeros no disco $\mathbb{D}_{1/2}$, e com isso chegamos a uma contradição. \square

Demonstração do Lema 17. Sem perda de generalidade, podemos assumir que g não é constante. Como $|g'(0)| < 1$, existe $r > 0$ tal que $g(\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{D}_r$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere

$$D_n := g^{-n}(\mathbb{D}_r) \quad \text{e} \quad r_n := \sup\{\rho ; \partial\mathbb{D}_\rho \subset D_n\}.$$

Observe que, se $z \in D_n$ então $g^{n+1}(z) \in g(\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{D}_r$. Portanto, $D_n \subset D_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, dado $z \in \mathbb{C}$ existe $k \geq 0$ tal que $g^k(z) \in \mathbb{D}_r$, e com isso concluímos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \mathbb{C}$. Logo, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$. A última afirmação pode ser verificada da seguinte forma. Como $r_n \geq r_{n+1}$ para todo n , podemos considerar o número real estendido (pode ser ∞) $r_* := \sup\{r_n\}$. Por absurdo, suponha que $r_* < \infty$. Isto implica que, para cada n , existe $z_n \in \partial\mathbb{D}_{r_*}$ tal que $z_n \notin D_n$. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $z_n \rightarrow z_* \in \partial\mathbb{D}_{r_*}$. Por um lado, existe $N > 0$ tal que $z_* \in U_N$. Por outro lado, para todo $m > 0$ suficientemente grande, z_m está próximo de z_* . Mas, se $m > N$ temos que $z_m \in D_N \subseteq D_m$, uma contradição. Isto mostra que a sequência $\{r_n\}$ não pode ser limitada. E ainda, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{D}_{r_n}$, existe $s \in]|z|, r_n[$ tal que $\partial\mathbb{D}_s \subset D_n$. Por sua vez, isto implica que $g^n(\partial\mathbb{D}_s) \subset \mathbb{D}_r$ e pelo princípio do máximo, $g^n(z) \in \mathbb{D}_r$. Com isso verificamos que $z \in D_n$. O que acabamos de demonstrar é que

$$r_n = \max\{s > 0 ; \mathbb{D}_s \subset D_n\}.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $s_n := r_n/2$ e $h_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h_n(z) = \frac{g(2s_n z)}{M(s_n, g)}.$$

Note que $h_n(0) = 0$ e $M(1/2, h_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Bohr existe $c > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \geq c$ satisfazendo $\partial\mathbb{D}_{t_n} \subset h_n(\mathbb{D})$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\partial\mathbb{D}_{t_n M(s_n, g)} \subset g(\mathbb{D}_{r_n}) \subset g(D_n) \subset D_{n-1} \subset D_n,$$

o que por definição de r_n implica que

$$cM(s_n, g) \leq t_n M(s_n, g) \leq r_n = 2s_n.$$

Portanto, $\left(\frac{M(s_n, g)}{s_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Isto implica que a função $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\phi = \frac{g(z) - g'(0)z}{z}, \text{ se } z \neq 0 \text{ e } \phi(0) = 0$$

satisfaz, para cada $n \in \mathbb{N}$, $M(s_n, \phi) \leq C$ para alguma constante $C > 0$. Como a função ϕ é contínua no plano e holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, segue-se que ϕ é inteira, e pelo Teorema de Liouville, ϕ é constante. Isto mostra que ϕ é identicamente nula, já que $\phi(0) = 0$, o que conclui o resultado. \square

Demonstração da Proposição 3. Como f é inteira transcendente, segue-se do Lema (16) que $g := (f^2 - \text{id}_{\mathbb{C}})/(f - \text{id}_{\mathbb{C}})$ é uma função meromorfa não-constante. Pelo Teorema de Picard concluímos que $g^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \neq \emptyset$. Isto implica que f possui um ponto periódico $p \in \mathbb{C}$. Podemos assumir que $p = 0$ e $f(0) = 0$. Se $0 \in \mathcal{J}(f)$, não há o que fazer. Caso contrário, $0 \in \mathcal{F}(f)$ e portanto, $|f'(0)| \leq 1$. Seja U a componente de $\mathcal{F}(f)$ que contém 0.

Se $|f'(0)| = 1$, pelo Teorema de Weierstrass, toda função limite da sequência $\{f^n|_U\}_{n \in \mathbb{N}}$ é diferente de constante. Suponha que $f^{n_j} \rightarrow \varphi$ para $z \in U$ quando $j \rightarrow \infty$. Então $f^{n_{j+1}-n_j}(z) \rightarrow z$ para $z \in U$. E portanto, $f|_U$ é injetiva. Como f é transcendente, $U \neq \mathbb{C}$ e portanto, $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.

Se $|f'(0)| < 1$ então segue do Lema (17) que $U \neq \mathbb{C}$, e portanto, $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$. \square

4.2 Caracterização do conjunto de Julia

A demonstração do Teorema 24 será dividida nos resultados a seguir.

Lema 18. *Se p é um ponto periódico repulsor de f de período n , então $p \in \mathcal{J}(f)$.*

Demonstração. De fato, segue-se da regra da cadeia que

$$|(f^{nk})'(p)| \rightarrow \infty$$

quando $k \rightarrow \infty$. Pelo Teorema de Weierstrass, a família $\{f^{nk} ; k \in \mathbb{N}\}$ não é normal em p , e portanto, p pertence ao conjunto de Julia de f^n , que por sua vez coincide com o conjunto $\mathcal{J}(f)$. \square

Como $\mathcal{J}(f)$ é fechado, o Lema acima implica que o fecho do conjunto dos pontos periódicos, está contido no conjunto de Julia de f . Agora, basta demonstrar a inclusão contrária. Para tanto, considere o conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{J}(f)$ dos pontos recorrentes mas não-periódicos. Dito de outra forma, $z \in \mathcal{M}$ se, e somente se, existe $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z) = z$ e $f^n(z) \neq z$ para todo $n > 0$.

Proposição 4. *\mathcal{M} está contido no fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores de f .*

Para demonstrar a Proposição (4), usaremos uma adaptação do famoso Lema de Zalcman:

Lema 19 (Zalcman [35]). *Seja \mathfrak{F} uma família de funções meromorfas em um aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Seja $z_0 \in \Omega$ tal que \mathfrak{F} não é normal em z_0 . Então existem sequências $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathfrak{F} , $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em Ω e $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}_+ , e uma função meromorfa não-constante $g : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ e a sequência*

$$(f_n \circ (\rho_n \text{id}_{\mathbb{C}} + z_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

converge para g localmente uniformemente em \mathbb{C} .

Como uma ilustração desse resultado, considere a família

$$\mathfrak{F} := \{f_k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}; f_k(z) = (2z)^k, k \geq 0\}$$

de funções holomorfas no disco unitário. Observe que \mathfrak{F} não é normal em $z_0 = \frac{1}{2}$. Sejam $\rho_k = \frac{a}{2k}$ e $z_k = \frac{1}{2}$ para todo $k > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ positivo. Então,

$$f_k(z_k + \rho_k z) = \left(1 + \frac{az}{k}\right)^k \rightarrow \exp(az),$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Para demonstrar o Lema de Zalcman lembramos que, se $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é meromorfa definimos a derivada esférica de f em $z \in \Omega$ como sendo

$$f^\#(z) := \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

O Critério de Marty diz que uma família \mathfrak{F} de funções meromorfas em um domínio Ω do plano complexo é normal se, e somente se, $\mathfrak{F}^\#$ é uniformemente limitada em cada subconjunto compacto de Ω , onde

$$\mathfrak{F}^\# := \{f^\#; f \in \mathfrak{F}\}.$$

Demonstração do Lema de Zalcman. Seja $r > 0$ tal que $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Pelo Critério de Marty, para cada $n > 0$, existe $w_n \in \overline{D_{r/n}(z_0)}$ e $f_n \in \mathfrak{F}$ tais que

$$f_n^\#(w_n) > n.$$

Observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z_0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\#(w_n) = \infty$. A menos de composição com uma função do tipo $z \mapsto \frac{z - z_0}{r}$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $z_0 = 0$ e $D_r(z_0) = \mathbb{D}$. Como $f^\#$ é contínua no fecho do disco unitário existe $z_n \in \mathbb{D}$ tal que

$$f^\#(z_n)(1 - |z_n|) = R_n$$

onde

$$R_n := \max\{f^\#(z)(1 - |z|); z \in \mathbb{D}\}.$$

Como $R_n \geq f^\#(w_n)(1 - |w_n|)$ temos que $R_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

Para

$$\rho_n := \frac{1}{f^\#(z_n)} = \frac{1 - |z_n|}{R_n}$$

obtemos $\rho_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Note que $D_{\rho_n R_n}(z_n) \subset \mathbb{D}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

As funções

$$g_n(z) := f_n(\rho_n z + z_n)$$

estão definidas em

$$|z| \leq R_n,$$

já que nessas condições,

$$|\rho_n z + z_n| \leq \rho_n |z| + |z_n| = \rho_n |z| + (1 - R_n \rho_n) < 1.$$

Dado $R > 0$, tome n suficientemente grande de modo que $R_n > R$.

Então, g_n está definida em $|z| < R$ e

$$g_n^\#(z) = \rho_n f_n^\#(\rho_n z + z_n) \leq \rho_n \frac{R_n}{1 - |\rho_n z + z_n|}.$$

Como

$$\rho_n(R_n - R) = 1 - |z_n| - \rho_n R \leq 1 - |z_n + \rho_n z|$$

temos que

$$g_n^\#(z) \leq \frac{R_n}{R_n - R} = \frac{1}{1 - R/R_n}$$

para $|z| < R$. Pelo Critério de Marty $\{g_n\}$ é normal em \mathbb{D}_R . Tomando uma subsequência se necessário podemos assumir que $g_n \rightarrow g$ normalmente, onde $g : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é meromorfa e ainda,

$$g^\#(0) = 1 \quad \text{e} \quad g^\#(z) \leq 1,$$

pois $g_n^\#(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Demonstração da Proposição 4. Sejam $z_0 \in \mathcal{M}$ e $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma vizinhança de z_0 . Pelo Lema de Zalcman existem uma sequência estritamente crescente $\alpha(n) \in \mathbb{N}$, sequências $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em Ω e $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}_+ , e uma função meromorfa não-constante $g : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f^{\alpha(n)} \circ (\rho_n \text{id}_{\mathbb{C}} + z_n)) = g.$$

Como $z_0 \in \mathcal{M}$ e g não é constante, segue-se do Pequeno Teorema de Picard que existe $j \geq 0$ tal que $f^j(z_0) \in \Omega \cap g(\mathbb{C})$. Seja $w \in \mathbb{C}$ satisfazendo $g(w) = f^j(z_0)$. Então existe uma vizinhança V de w tal que

$$g(V) \subset \Omega \setminus \{z_0\}$$

e $g'(v) \neq 0$ para cada $v \in V \setminus \{w\}$.

Como $z_0 \in \mathcal{M}$, $f^j(z_0) \in \mathcal{M}$. Sendo $g(w) = f^j(z_0)$ existe $i > j$ tal que $f^i(z_0)$ está próximo de $g(w)$. Portanto, existe $v \in V \setminus \{w\}$ tal que $g(v) = f^i(z_0)$. Em particular, v é um zero isolado da função

$$h := g - f^i(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{\alpha(n)} \circ (\rho_n \text{id}_{\mathbb{C}} + z_n) - f^i \circ (\rho_n \text{id}_{\mathbb{C}} + z_n)).$$

Assim, o Teorema de Hurwitz implica que existe uma sequência $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ e

$$f^{\alpha(n)}(\rho_n v_n + z_n) - f^i(\rho_n v_n + z_n) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Portanto, $p_n := f^i(\rho_n v_n + z_n)$ é um ponto fixo de $f^{\alpha(n)-i}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ grande. Pelo Teorema de Weierstrass e a regra da cadeia, obtemos

$$g'(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{\alpha(n)} \circ (\rho_n \text{id}_{\mathbb{C}} + z_n))'(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((f^{\alpha(n)-i})'(p_n) \cdot (f^i)'(\rho_n v_n + z_n) \rho_n).$$

Note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((f^i)'(\rho_n v_n + z_n) \rho_n) = (f^i)'(z_0) \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0.$$

Como $v \in V \setminus \{w\}$, temos que $g'(v) \neq 0$. Disto segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(f^{\alpha(n)-i})'(p_n)| = \infty,$$

e portanto, p_n é repulsor para todo n suficientemente grande. Finalmente, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^i(p_n v_n + z_n) = f^i(z_0) \in \Omega,$$

vemos que Ω contém um ponto periódico repulsor de f . \square

O Teorema (24) agora segue imediatamente do Lema (18), da Proposição (4) e do Lema a seguir.

Lema 20. \mathcal{M} é denso em $\mathcal{J}(f)$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$A := \{z \in \mathcal{J}(f) ; \mathcal{O}^+(z) \text{ é denso } \mathcal{J}(f)\}.$$

Note que os pontos periódicos repulsores não estão contidos em A e ainda, o conjunto A está contido em \mathcal{M} . Pelo Corolário (2), A é denso no conjunto de Julia de f . Portanto \mathcal{M} é denso em $\mathcal{J}(f)$. \square

Alternativamente, podemos demonstrar o Teorema (24) como uma aplicação do famoso Teorema das Cinco Ilhas de Ahlfors [9].

4.3 O Teorema de Baker: prova alternativa

A seguir apresentamos uma demonstração alternativa do Teorema (24) essencialmente devido à Baker [3], como uma importante aplicação do Teorema das Cinco Ilhas à Dinâmica Complexa. Seguindo [12] demonstraremos o

Teorema 30. *Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é uma função meromorfa transcendente então o conjunto $\mathcal{J}(f)$ coincide com o fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores de f .*

Precisaremos da seguinte

Proposição 5. *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_5 \in \mathbb{C}$ pontos distintos. Então existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é uma função meromorfa transcendente e se $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ é um domínio tal que $U \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$, então existem $\nu \in \{1, 2, \dots, 5\}$, $n \in \mathbb{N}$ e um domínio $V \subset U$ tal que $f^n|_V : V \rightarrow D_\varepsilon(a_\nu)$ é conforme.*

Sejam f, a_1, \dots, a_5 e ε como na Proposição (5). Considere $\delta \in]0, \varepsilon[$ e para cada $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ sejam U_1, U_2, \dots, U_5 domínios satisfazendo

$$U_j \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$$

e $U_j \subset D_\delta(a_j)$. Então existem $\nu(j) \in \{1, 2, \dots, 5\}$, $n(j) \in \mathbb{N}$ e um domínio $V_j \subset U_j$ tal que $f^{n(j)}|_{V_j} : V_j \rightarrow D_\delta(a_{\nu(j)})$ é conforme. Note que a aplicação $\nu : \{1, 2, \dots, 5\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 5\}$ tem um ponto periódico, digamos $\nu^p(\mu) = \mu$. Defina

$$n = n(\mu) \cdot n(\nu(\mu)) \cdot n(\nu^2(\mu)) \cdots n(\nu^{p-1}(\mu)).$$

Logo, existe $V \subset U_\mu$ tal que $f^n|_V : V \rightarrow D_\delta(a_\mu)$ é conforme. Em resumo, demonstramos a

Proposição 6. *Sejam f, a_1, \dots, a_5 e ε como na Proposição 5. Sejam $0 < \delta < \varepsilon$ e U_1, U_2, \dots, U_5 domínios satisfazendo*

$$U_j \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$$

e $U_j \subset D_\delta(a_j)$. Então existem $\mu \in \{1, 2, \dots, 5\}$, $n \in \mathbb{N}$ e um domínio $U \subset U_\mu$ tal que $f^n|_U : U \rightarrow D_\delta(a_\mu)$ é conforme.

Demonstração do Teorema 30. Note que os pontos periódicos repulsores pertencem ao conjunto de Julia de f . Com isso, basta mostrar que, se U é um domínio que intersecta $\mathcal{J}(f)$ então U contém um ponto periódico repulsor.

Como $\mathcal{J}(f)$ é perfeito, $U \cap \mathcal{J}(f)$ contém cinco pontos $a_1, a_2, \dots, a_5 \in \mathbb{C}$. Seja $\varepsilon > 0$ como na Proposição 5, e tome $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $D_\delta(a_j) \subset U$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Pela Proposição (6) existem $\mu \in \{1, 2, \dots, 5\}$, $n \in \mathbb{N}$ e um domínio V com $\bar{V} \subset D_\delta(a_\mu)$ tal que $f^n|_V : V \rightarrow D_\delta(a_\mu)$ é conforme. Isto implica que o ramo da inversa de f^n que leva o disco $D_\delta(a_\mu)$ em V tem um ponto fixo atrator $z_0 \in D_\delta(a_\mu) \subset U$. Isto mostra que z_0 é um ponto periódico repulsor por f de período n . \square

Para enunciar uma versão do Teorema das Cinco Ilhas de Ahlfors, sejam U_1, U_2, \dots, U_5 domínios de Jordan em $\widehat{\mathbb{C}}$ com $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ se $i \neq j$. Seja $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um domínio e $\mathfrak{F}(U, \{U_j\}_{j=1}^5)$ a família de todas as funções meromorfas $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ com a propriedade de que nenhum subdomínio de U é mapeado conformemente sobre algum dos domínios U_j por f .

Teorema 31 (Teorema das Cinco Ilhas). $\mathfrak{F}(U, \{U_j\}_{j=1}^5)$ é normal.

De fato, usaremos a seguinte versão fraca desse resultado.

Teorema 32 ([9]). *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_5 \in \mathbb{C}$ distintos. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathfrak{F}(U, \{D_\varepsilon(a_j)\}_{j=1}^5)$ é normal.*

Observe que a Proposição (5) segue-se imediatamente do Teorema (32).

O Teorema das Componentes Não-Errantes

Neste capítulo discutiremos um dos principais resultados em dinâmica de funções holomorfas: o famoso Teorema de Sullivan [34]. Mais precisamente, o Teorema diz que se U for uma componente de $\mathcal{F}(R)$, onde R é uma função racional de grau ≥ 2 , então a sequência $U, R(U), R^2(U), \dots$ é eventualmente periódica. Na demonstração original aparecem pelo menos duas complicações: a possibilidade de U não ser simplesmente conexa e o comportamento de R numa vizinhança de ∂U , por exemplo, ∂U poderia não ser localmente conexo. Apresentaremos uma prova bastante simplificada devida à McMullen & Baker.

Dizemos que uma componente U do conjunto de Fatou de R é errante se os conjuntos $U, R(U), R^2(U), \dots$ de $\mathcal{F}(R)$ forem disjuntos dois a dois.

Teorema 33 (Sullivan). *Seja $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma função racional de grau ≥ 2 . Então toda componente U do conjunto de Fatou de R é eventualmente periódica, isto é, existem $n > m \geq 0$ tais que $R^n(U) = R^m(U)$.*

A idéia da prova é bastante simples. Primeiro vamos supor que exista uma componente errante U e deformaremos a estrutura complexa da esfera de Riemann ao longo da grande órbita de U , encontrando assim, uma família infinito-dimensional de funções racionais de grau d , na qual todas as funções são quaseconformemente conjugadas a R . Mas isto é

uma contradição pois o espaço de todas as funções racionais de grau d é isomorfo a um subconjunto aberto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2d+1}$, na topologia de Zariski, que por sua vez tem dimensão finita.

5.1 O argumento de Baker

Em [8], Bers cita o argumento não publicado que se segue, devido I.N. Baker. O lema de Baker simplifica substancialmente a prova de Sullivan e até mesmo, aquela apresentada no trabalho supracitado.

Lema 21 (Baker). *Se U é uma componente errante de $\mathcal{F}(R)$ então existe $n_0 > 0$ tal que $R^n(U)$ é simplesmente conexo para todo $n > n_0$.*

Usaremos a notação $\text{diam}[X]$ para denotar o diâmetro do conjunto $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ com respeito à métrica esférica.

Lema 22. *Suponha que $U \subset \mathcal{F}(R)$ é uma componente errante. Então, para todo $K \subset U$ compacto, $\text{diam}[f^n(K)] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que existam um compacto $K \subset U$, algum $\varepsilon > 0$, e uma subsequência $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ estritamente crescente tais que

$$\text{diam}[R^{n_j}(K)] \geq \varepsilon,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $\{R^n|_U\}$ é normal, existe uma subsequência $\{n_{j(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, tal que $R^{n_{j(k)}}$ converge normalmente em U para uma função holomorfa g . Se tivermos g igual a uma constante, digamos α , em U , então $R^{n_{j(k)}}$ converge uniformemente para α em K e portanto,

$$\text{diam}[R^{n_{j(k)}}(K)] < \varepsilon/3,$$

para todo k suficientemente grande, uma contradição. Isto mostra que $R^{n_{j(k)}}$ converge normalmente em U para uma função holomorfa g não-constante, que por sua vez, é uma aplicação aberta.

Seja $\zeta \in U$ com $g'(\zeta) \neq 0$. Então existe $r > 0$ tal que $\mathbb{D}_r(\zeta) \subset U$ e $g(z) \neq g(\zeta)$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}_r(\zeta)$. Com isso, existe $k_0 > 0$ tal que

$$|R^{n_{j(k)}}(z) - g(z)| < \inf_{w \in \partial\mathbb{D}_r(\zeta)} |g(w) - g(\zeta)| < |g(z) - g(\zeta)|$$

para todo $k \geq k_0$ e qualquer $z \in \partial\mathbb{D}_r(\zeta)$. Note que, para cada $k \geq k_0$ e qualquer $z \in \partial\mathbb{D}_r(\zeta)$,

$$|[R^{n_{j(k)}}(z) - g(\zeta)] - [g(z) - g(\zeta)]| = |R^{n_{j(k)}}(z) - g(z)| < |g(z) - g(\zeta)|.$$

Pelo Teorema de Rouché, o número de zeros (contados com a devida multiplicidade) da função $z \mapsto g(z) - g(\zeta)$ coincide com o número de zeros da função $z \mapsto R^{n_{j(k)}}(z) - g(\zeta)$ no disco $\mathbb{D}_r(\zeta)$. Portanto $g(\zeta) \in R^{n_{j(k)}}(U)$ para todo $k \geq k_0$. Isto contradiz o fato que U é uma componente errante, e termina a prova. \square

Demonstração do Lema 21. Defina $U_n = R^n(U)$ para todo $n \geq 0$. Como o número de pontos críticos de R é no máximo $2d - 1$, trocando U por algum U_k se necessário, para k grande, podemos supor que os conjuntos U_n não contêm pontos críticos de R , de modo que $R^n|_U : U \rightarrow U_n$ é um recobrimento, para todo n . Também podemos assumir que $\infty \in U$.

Agora, sejam $\gamma \subset U$ uma curva fechada simples e $\gamma_n := R^n(\gamma) \subset U_n$. Pelo Lema (22), $\text{diam}[\gamma_n] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, se B_n é a reunião das componentes limitadas de $\mathbb{C} \setminus \gamma_n$ então $\text{diam}[B_n] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $R(B_n)$ é aberto, $\partial R(B_n) \subset \gamma_{n+1}$ e $\text{diam}[R(B_n)] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, devemos ter $R(B_n) \subset \overline{B_{n+1}}$, para todo n suficientemente grande. Em particular, os iterados de B_n estão $\mathbb{C} \setminus U$ para n suficientemente grande. Pelo Teorema de Montel $B_n \subset \mathcal{F}(R)$, e portanto $B_n \subset U_n$. Observando que $\gamma_n \subset \overline{B_n}$ temos que existe uma homotopia $H : U_n \times [0, 1] \rightarrow U_n$ entre γ_n e uma constante $c \in U_n$, para todo n suficientemente grande. Como $R^n|_U : U \rightarrow U_n$ é um recobrimento, podemos levantar esta homotopia à U . Em outras palavras existe uma homotopia $\tilde{H} : U \times [0, 1] \rightarrow U$, $(z, t) \mapsto \tilde{H}_t(z)$ tal que $R^n \circ \tilde{H}_t = H_t \circ R^n$ para cada $t \in [0, 1]$ e n grande o suficiente. Isto mostra que U é simplesmente conexo. \square

5.2 Deformando estruturas complexas em $\widehat{\mathbb{C}}$

Nesta seção vamos assumir que U é uma componente errante de $\mathcal{F}(R)$ e ainda, segundo o Lema de Baker, que U é simplesmente conexa. Em particular, $R|_{U_n} : U_n \rightarrow U_{n+1}$ é um isomorfismo conforme para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado um coeficiente de Beltrami μ definido em U , podemos estendê-lo

à toda esfera de Riemann de modo que seja também R -invariante. Com efeito, basta estender μ ao longo da grande órbita de U

$$\text{GO}(U) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}}; R^n(z) \in U_m, \text{ para algum } n, m \geq 0\}.$$

E no complemento $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{GO}(U)$, fazemos $\mu = 0$. Mais precisamente, se $z \in \text{GO}(U)$, existem $n, m \geq 0$ e $\zeta \in U$ tais que $R^n(z) = R^m(\zeta)$. Com isso, definimos $\mu(z) = \mu(\zeta)$. Essa extensão está definida em quase todo ponto de $\widehat{\mathbb{C}}$ e satisfaz

- (a) $R^*\mu = \mu$,
- (b) $\|\mu\|_\infty < \infty$.

Observe que R^n é um isomorfismo entre U e U_n , e portanto não altera a dilatação em U_n , isto é, ao longo da grande órbita de U a dilatação é a mesma que aquela em U . Consideremos agora, a deformação $\mu_t = t\mu$ para $|t| < \varepsilon$, onde ε é suficientemente pequeno de modo $\|\mu_t\|_\infty < 1$ se $|t| < \varepsilon$. Pelo Teorema da Aplicação Mensurável de Riemann existe $\varphi_t = \varphi^{\mu t} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ homeomorfismo quaseconforme que fixa os pontos $0, 1$ e ∞ , e cujo coeficiente de Beltrami é μ_t . Note que

$$R^*\mu_t = t\mu \circ R \frac{\overline{R'}}{R'} = tR^*\mu = t\mu = \mu_t.$$

Proposição 7. *Sejam μ um coeficiente de Beltrami na esfera de Riemann e $\varphi_\mu : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma solução normalizada da equação $\bar{\partial}\varphi = \mu\partial\varphi$. Então, a aplicação $R_\mu := \varphi_\mu \circ R \circ \varphi_\mu^{-1}$ é racional.*

Dizemos que R_μ é a deformação μ -quaseconforme de R .

Demonstração da Proposição 7. Seja A o conjunto dos pontos críticos (pontos de ramificação) de R . Neste caso, $R_\mu|_{\widehat{\mathbb{C}} \setminus \varphi_\mu(A)}$ é um homeomorfismo quaseconforme sobre sua imagem. Como R é holomorfa, R_μ preserva a estrutura conforme em quase todo ponto de $\widehat{\mathbb{C}}$. Portanto, R_μ é localmente conforme em $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \varphi_\mu(A)$, e portanto holomorfa em $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \varphi_\mu(A)$. Como R_μ é limitada numa vizinhança furada de cada ponto em $\varphi_\mu(A)$, segue-se que todo ponto de $\varphi_\mu(A)$ é uma singularidade removível de R_μ . Observando que R_μ é contínua, concluímos que deve ser holomorfa em $\widehat{\mathbb{C}}$. Logo, R_μ é uma aplicação racional. \square

Segue-se do Teorema de Aplicação Mensurável de Riemann que $t \mapsto R_{\mu_t}$ é holomorfa, onde $R_{\mu_0} = R$. Portanto, podemos considerar a variação infinitesimal

$$w(z) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_t(z) \in T_{R(z)}\widehat{\mathbb{C}}. \quad (5.1)$$

Definição 4. *Um campo de vetores sobre R é uma aplicação $v : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow T\widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\pi \circ v = R$, onde $\pi : T\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é a projeção canônica sobre a base do fibrado tangente da esfera, isto é, $\pi : (z, u) \mapsto z$ onde $u \in T_z\widehat{\mathbb{C}}$.*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{v} & T\widehat{\mathbb{C}} \\ & \searrow R & \downarrow \pi \\ & & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

Dizemos que um campo de vetores contínuo $v : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow T\widehat{\mathbb{C}}$ é uma deformação de R se

$$\delta_R v := v \circ R - R' \cdot v$$

é um campo de vetores holomorfo sobre R . Como $\bar{\partial}R' = \bar{\partial}R = 0$ e $\bar{\partial}R = \bar{\partial} \bar{R}$, temos que

$$\bar{\partial}(\delta_R v) = (\bar{\partial}v \circ R) \cdot \bar{R}' - R' \cdot \bar{\partial}v.$$

Disto segue-se o

Lema 23. *Um campo de vetores contínuo $v : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow T\widehat{\mathbb{C}}$ é uma deformação de R se, e somente se, o coeficiente de Beltrami $\mu = \bar{\partial}v$ é R -invariante, isto é,*

$$\mu(z) = \mu(R(z)) \frac{\overline{R'(z)}}{R'(z)},$$

para quase todo ponto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.

No que segue determinaremos explicitamente $w(z)$ definido na equação 5.1. Para tanto, dado μ , considere a única solução da equação $\bar{\partial}v = \mu$ que se anula em $0, 1$ e ∞ . Tal solução é um campo de vetores quaseconforme, dado pelo Teorema de Ahlfors-Bers. Afirmamos que

$$v(z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(z).$$

Com efeito,

$$\bar{\partial}v(z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [\bar{\partial}\varphi_t(z)] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [t\mu(z)\partial\varphi_t(z)] = \mu(z).$$

Agora não é difícil de verificar que

$$w(z) = v \circ R(z) - R'(z)v(z).$$

Observe que a aplicação $\mu \mapsto w$ é linear.

Dizemos que o campo de vetores v é uma deformação trivial de R se $R^*v = v$. Veja que, se $v = v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ então

$$R^*v = \frac{v(R(z))}{R'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$$

Segue-se então o seguinte

Lema 24. *O campo de vetores v é uma deformação trivial de R se, e somente se, $\delta_R v = 0$.*

Corolário 14. *Se $v : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow T\widehat{\mathbb{C}}$ é contínuo e induz uma deformação trivial de R então v é identicamente zero sobre o conjunto de Julia de R .*

Demonstração. Como $\delta_R v = 0$,

$$R'(z)v(z) = v(R(z))$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Observe que

$$v(R^2(z)) = R'(R(z))v(R(z)) = R'(R(z))R'(z)v(z) = (R^2)'(z)v(z).$$

Por indução sobre $k \geq 0$, segue-se que

$$(R^k)'(z)v(z) = v(R^k(z))$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Em particular, se $z = p$ é um ponto k -periódico de R , temos que

$$(R^k)'(p)v(p) = v(p).$$

Se p é um ponto periódico repulsor de R então $(R^k)'(p) \neq 1$. Logo, $v(p) = 0$. Sendo $\mathcal{J}(R)$ o fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores de R , segue-se da continuidade v que $v(z) = 0$ para todo $z \in \mathcal{J}(R)$. \square

5.3 O Teorema de Sullivan

Da construção que fizemos acima temos as aplicações lineares

$$M(U) \xrightarrow{i} M_R(\widehat{\mathbb{C}}) \xrightarrow{L} \mathrm{TRRac}_d$$

onde $M(U)$ é o espaço dos coeficientes de Beltrami definidos em $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, $M_R(\widehat{\mathbb{C}})$ é o espaço dos coeficientes de Beltrami R -invariantes definidos em $\widehat{\mathbb{C}}$ e L é a transformação linear definida por $L(\mu) = w = \delta_R v$, como fizemos acima.

No que segue diremos que $\mu \in M(U)$ é trivial se existe um campo de vetores v contínuo tal que $\bar{\partial}v = \mu$ e $v|_{\partial U} = 0$.

Para demonstrar o Teorema de Sullivan precisaremos do seguinte

Lema 25. *Existe um subespaço vetorial $V \subset M(U)$ de dimensão infinita, cujos vetores possuem suporte compacto em U , com a propriedade que se $\mu \in V$ então $\mu = 0$.*

Demonstração do Teorema das Componentes Não-Errantes 33. Vamos assumir que U é uma componente errante do conjunto de Fatou de R simplesmente conexa e V o subespaço vetorial dado pelo Lema 25. Se $L(\mu) = 0$ para algum $\mu \in V$ então, a solução normalizada v da equação de Beltrami $\bar{\partial}v = \mu$ é R -invariante. Logo v é identicamente zero sobre $\mathcal{J}(R)$. Em particular, $v|_{\partial U} = 0$. Como $\mu \in V$ segue-se que $\mu = 0$. Isto significa, em outras palavras, que a transformação linear $L|_V$ é injetora. Observe que a dimensão de TRRac_d é $2d + 1$. Mas isto é impossível, pois a dimensão de V é infinita. Essa contradição mostra que não pode existir domínios errantes para R . \square

Precisamos, então, demonstrar o Lema 25. Antes, faremos uma redução nas hipóteses.

Lema 26. *Sejam v um campo de vetores quaseconforme em $\widehat{\mathbb{C}}$ e*

$$\psi : \mathbb{D} \longrightarrow U,$$

um isomorfismo conforme. Suponha que $\mu = \bar{\partial}v|_U$ é trivial e tem suporte compacto. Então $\psi^(v)$ é identicamente nulo em $\partial\mathbb{D}$ e $\psi^*(\mu)$ é trivial em $M(\mathbb{D})$.*

Demonstração. Digamos que μ está suportado no compacto $K \subset U$. Então

$$\mu \Big|_{\widehat{\mathbb{C}} \setminus K} = \bar{\partial}v \Big|_{\widehat{\mathbb{C}} \setminus K} = 0$$

e portanto, v é holomorfo em $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$. E ainda, $v \Big|_{\partial U} = 0$. Escrevendo $v = v(z) \frac{\partial}{\partial z}$ tem-se que

$$\psi^*(v) = \frac{v(\psi(z))}{\psi'(z)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{w(z)}{\psi'(z)} \frac{\partial}{\partial z},$$

é um campo de vetores sobre \mathbb{D} com w holomorfo no complemento de um subconjunto compacto de \mathbb{D} e

$$\lim_{z \rightarrow \partial \mathbb{D}} w(z) = 0.$$

Pelo Princípio da Reflexão de Schwarz, w é identicamente zero numa vizinhança de \mathbb{S}^1 , e portanto, $\psi^*(v)$ é um campo vetorial com suporte compacto em \mathbb{D} . Como $\bar{\partial}\psi^*(v) = \psi^*(\mu)$, segue-se que $\psi^*(\mu)$ é trivial em $M(\mathbb{D})$. \square

Demonstração do Lema 25. Pelo Lema 26 podemos assumir que $U = \mathbb{D}$. Dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, definimos $\mathbf{a}(n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e

$$\mu_{\mathbf{a}(n)}(z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_n \bar{z}^{k-1}, & \text{se } |z| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{se } |z| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Variando os vetores $\mathbf{a}(n)$, os coeficientes $\mu_{\mathbf{a}(n)}$ formam um subespaço vetorial de dimensão infinita com suporte compacto contido em \mathbb{D} , o qual denotaremos por V . Segue-se então que

$$\bar{\partial}v_{\mathbf{a}(n)} = \mu_{\mathbf{a}(n)}$$

onde

$$v_{\mathbf{a}(n)}(z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{a_n}{k} \bar{z}^k, & \text{se } |z| \leq \frac{1}{2}, \\ \sum_{k=1}^n \frac{a_n}{4^k k} z^{-k}, & \text{se } |z| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se $|z| = \frac{1}{2}$ temos que $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \frac{1}{4}$ e portanto, $\bar{z} = \frac{1}{4}z^{-1}$. Disto segue-se que $v_{\mathbf{a}(n)}$ é um campo de vetores contínuo. Suponha, agora, que

$\mu = \mu_{\mathbf{a}(n)} \in V$ é trivial. Então $\bar{\partial}w = \mu$ para algum w , onde $w|_{\partial\mathbb{D}} = 0$. Com isso, $\bar{\partial}(v_{\mathbf{a}(n)} - w) = 0$. Isto implica que $v_{\mathbf{a}(n)} - w$ é um campo holomorfo no disco \mathbb{D} e como $(v_{\mathbf{a}(n)} - w)|_{\partial\mathbb{D}} = v_{\mathbf{a}(n)}|_{\partial\mathbb{D}} = 0$, concluímos que $v_{\mathbf{a}(n)}$ admite uma extensão holomorfa à fronteira do disco unitário. Como $v_{\mathbf{a}(n)}|_{\partial\mathbb{D}}$ é um polinômio em z^{-1} segue-se que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, e portanto $\mu = 0$. \square

Domínios Errantes e Funções Transcendentes

Seguindo Eremenko e Lyubich [19], mostraremos que para uma certa classe de funções inteiras transcendentess vale o Teorema das Componentes não-errantes. Mais precisamente, se f é uma função inteira transcendente tal que o conjunto $\text{sing}(f^{-1})$ é finito então toda componente do conjunto de Fatou de f é eventualmente periódica. No caso de funções racionais, como vimos no Capítulo anterior, este resultado é devido à Sullivan [34]. O exemplo a seguir mostra que este teorema não vale em geral.

Exemplo 3. *Consideremos a função inteira transcendente $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z + 2\pi + \text{sen}(z)$. O conjunto dos pontos críticos de f coincide com o conjunto formado pelas raízes da equação $\cos z = -1$, e portanto, f possui uma infinidade de pontos críticos, a saber $c_k = (2k + 1)\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. E ainda, $f(c_k) = c_{k+1}$ (figura 6.1) para todo número inteiro k .*

Consideremos agora as retas $L_k := \{z ; \text{Re}(z) = 2k\pi\}$ para cada inteiro k . Neste caso, para todo $y \in \mathbb{R}$ tem-se

$$f(2k\pi + iy) = 2(k + 1)\pi + i(y + \text{senh}(y)),$$

o que implica que $f(L_k) = L_{k+1}$ e cada reta L_k está contida no conjunto de Julia de f , basta ver que todo ponto nestas retas, com parte imaginária diferente de zero, converge exponencialmente para ∞ . Como cada

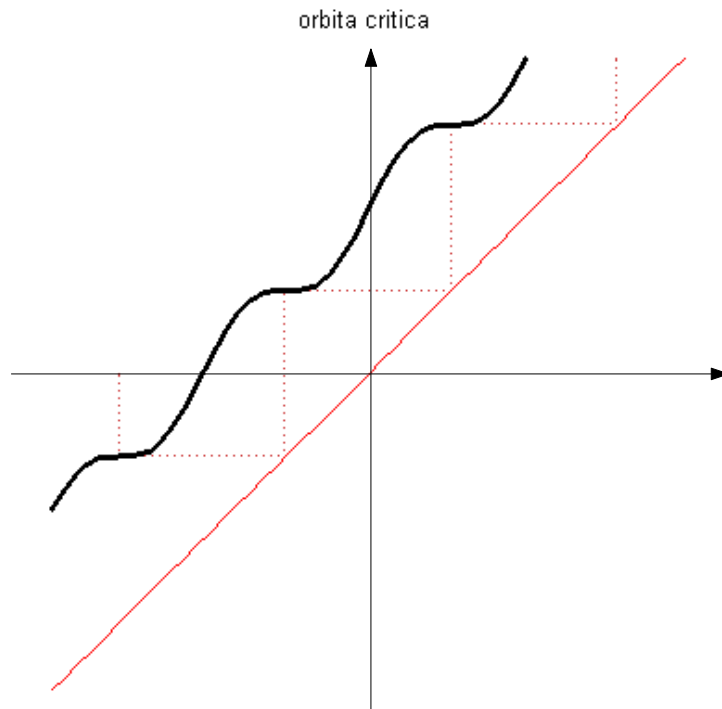


Figura 6.1: Gráfico de f restrita à reta real.

c_k pertence ao conjunto de Fatou de f , existe uma sequência $\{U_k\}$ de componentes de Fatou com $c_k \in U_k$ e $U_k \cap U_j = \emptyset$ se $k \neq j$. Além disso, $f(U_k) = U_{k+1}$ (veja figura 6.2). Cada U_k é uma componente errante.

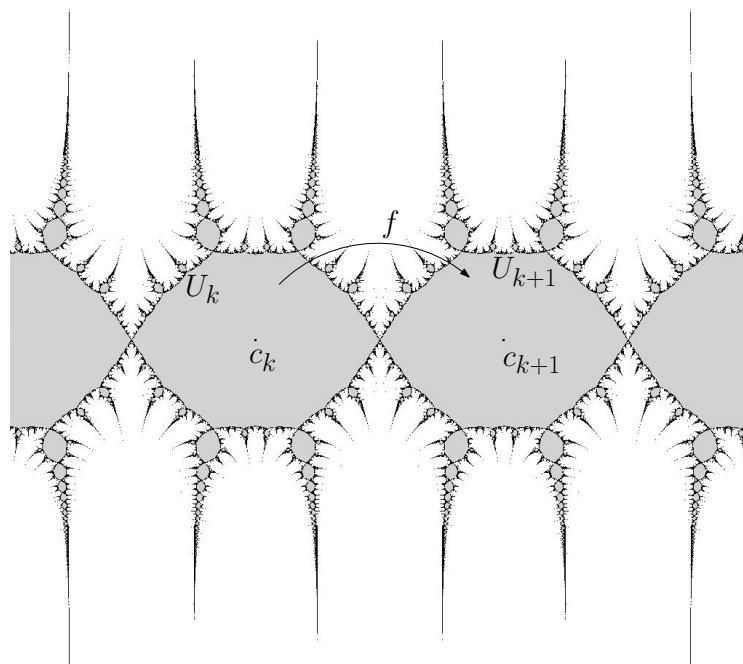


Figura 6.2: Conjunto errante (Fagella e Henriksen [17]).

Consideremos o conjunto \mathcal{S} das funções inteiras transcendentais f tais que o conjunto $\text{sing}(f^{-1})$ é finito. Por vezes, diz-se que f criticamente finita ou pertence à classe de Speiser, ou mesmo, que é do tipo finito. O resultado principal deste trabalho é o

Teorema 34 (Goldberg, Keen, Eremenko & Lyubich). *Se $f \in \mathcal{S}$ então toda componente de $\mathcal{F}(f)$ é eventualmente periódica.*

Uma das principais diferenças entre as funções racionais e as funções inteiras transcendentais é a presença de valores assintóticos, na última classe. Nestes pontos, os ramos da inversa de $f \in \mathcal{E}$ não estão bem definidos, enquanto que na primeira classe este problema ocorre apenas sobre conjunto dos valores críticos.

Para demonstrar o Teorema (34), usaremos algumas propriedades de recobrimento das funções em \mathcal{S} , as quais são semelhantes às funções racionais. Em [23] mostra-se que

Teorema 35. *Se $f \in \mathcal{S}$ então o espaço de deformações quaseconformes de f tem dimensão finita.*

Em outras palavras, isto quer dizer que o espaço de Teichmüller de f é finito-dimensional. Com os mesmos argumentos usados na prova do Teorema de Sullivan, ao supor que f possui domínios errantes, é possível construir um subconjunto linearmente independente e infinito de coeficientes de Beltrami invariantes por f . Isto mostrará que o espaço de deformações quaseconformes de f tem dimensão infinita, em contradição com o Teorema (35).

Para uma função inteira f , denotaremos por $VC(f)$ o conjunto dos valores críticos de f , isto é, o conjunto dos pontos $f(c)$ que satisfazem $f'(c) = 0$; $VA(f)$, o conjunto dos valores assintóticos de f e $\text{sing}(f^{-1}) = \overline{VC(f) \cup VA(f)}$, o conjunto dos valores singulares de f . Observe que ∞ é uma singularidade essencial para toda $f \in \mathcal{E}$ e assim, pertence ao conjunto $\text{sing}(f^{-1})$.

Sejam $M_f = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{sing}(f^{-1})$ e $\widetilde{M}_f = f^{-1}(M_f)$. Apesar de $VC(f)$ ser discreto, é possível que M_f seja vazio. De fato, Gross [24] construiu uma função inteira para a qual todo ponto é um valor assintótico ao longo de algum caminho radial. O resultado a seguir apresenta uma propriedade essencial do conjunto M_f .

Lema 27. *Seja f um função inteira. Então o conjunto M_f é aberto.*

Demonstração. Com efeito, basta ver que $\text{sing}(f^{-1})$ é fechado, por definição, e portanto, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{sing}(f^{-1})$ é aberto. \square

Lema 28. *Se $f \in \mathcal{E}$ então $f : \widetilde{M}_f \rightarrow M_f$ é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Seja $w \in M_f$. É preciso verificar que existe uma vizinhança U de w em M_f tal que $f^{-1}(U)$ é uma reunião disjunta de abertos cada um dos quais é aplicado homeomorficamente sobre U . Para tanto, como M_f é aberto existe uma vizinhança simplesmente conexa U de w . Em seguida definimos $\varphi : f^{-1}(w) \times U \rightarrow f^{-1}(U)$ do seguinte modo. Sejam $z \in f^{-1}(w)$, $u \in U$ e escolhamos um caminho simples e contínuo em U entre w e u : $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ onde $\gamma(0) = w$ e $\gamma(1) = u$ (veja figura 6.3). Como $w \notin VC(f)$ podemos definir um ramo g da inversa de f em uma vizinhança de w , a qual é unicamente determinada pela condição $g(w) = z$.

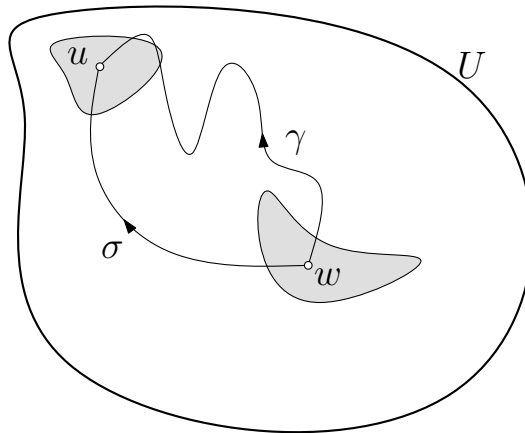


Figura 6.3: construção da função φ .

E ainda, como $U \cap \text{sing}(f^{-1}) = \emptyset$ podemos continuar g analiticamente ao longo de γ até u . Daí definimos $\varphi_z(u) := \varphi(z, u) = g(u)$. Pelo Teorema da Monodromia φ está bem definida, isto é, não depende do caminho γ escolhido. Sendo definida a partir de uma inversa de f , φ_z é injetiva. Também é fácil verificar que é sobrejetiva. Segue-se então que φ_z é um homeomorfismo e que $f|_{\widetilde{M}_f}$ é um recobrimento. \square

No que segue mostraremos que \mathcal{S} é fechado por composições e para tanto precisaremos de um resultado a respeito dos valores assintóticos.

Definição 5. Dizemos que $\zeta \in VA(f)$ é uma singularidade logarítmica se existe uma vizinhança U simplesmente conexa de ζ e um aberto simplesmente conexo ilimitado $V \subset f^{-1}(U)$ tal que $f|_V : V \rightarrow U \setminus \{\zeta\}$ é uma aplicação de recobrimento.

Por exemplo, a origem é uma singularidade logarítmica para a exponencial complexa $z \mapsto e^z$. Basta tomar $U = \mathbb{D}$ e

$$V = \{z ; \operatorname{Re}(z) < 0\}.$$

Lema 29. Se $f \in \mathcal{S}$ e $\zeta \in VA(f)$ então ζ é uma singularidade logarítmica.

Demonstração. Como $\operatorname{sing}(f^{-1})$ é finito, existe uma vizinhança U de ζ simplesmente conexa tal que $\operatorname{sing}(f^{-1}) \cap U \setminus \{\zeta\} = \emptyset$. Seja $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho crítico para ζ e seja V a componente conexa maximal de $f^{-1}(U)$ contendo $\alpha(t)$ para todo t suficientemente grande (figura 6.4).

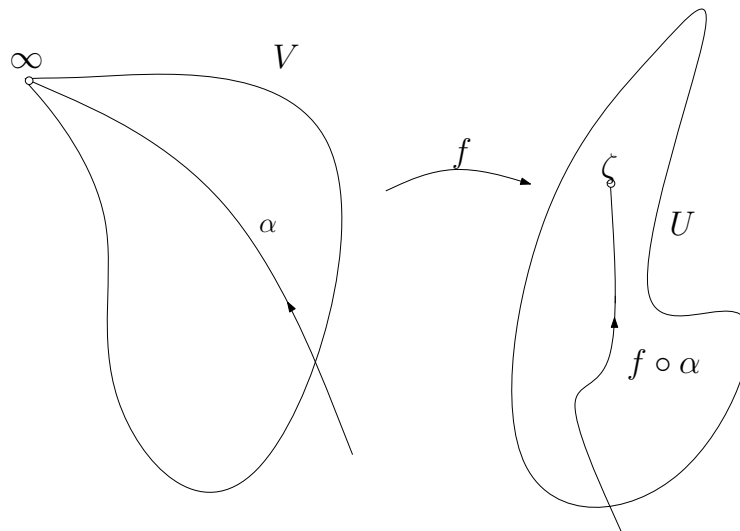


Figura 6.4: singularidade logarítmica.

Seja $V^* = V \setminus f^{-1}(\zeta)$. Pelo Lema (28), $f|_{V^*} : V^* \rightarrow U \setminus \{\zeta\}$ é uma aplicação de recobrimento, portanto V^* é homeomorfo a um anel, um disco furado ou um disco, pelo Teorema da Uniformização de Riemann e observando que V^* é ilimitado.

Se V^* é um anel, então a componente limitada do conjunto complementar é levada em ζ por f , o que não pode ocorrer pois f é localmente injetiva, ou contém um pólo, o que também não ocorre pois f é inteira.

Se V^* for um disco furado, então $f|_{V^*} : V^* \longrightarrow U \setminus \{\zeta\}$ é um recobrimento finito, isto é, a pré-imagem de todo ponto é um conjunto finito, o que não ocorre pois V^* é ilimitado enquanto que U tem fecho compacto no plano.

Portanto, $V^* = V$ é homeomorfo a um disco, $f|_V : V \longrightarrow U \setminus \{\zeta\}$ é um recobrimento e ζ é uma singularidade logarítmica. \square

Proposição 8. *Se $f, g \in \mathcal{S}$ então $\text{sing}((f \circ g)^{-1}) = \text{sing}(f^{-1}) \cup f(\text{sing}(g^{-1}))$.*

Corolário 15. *\mathcal{S} é fechado por composição de funções.*

Demonstração da Proposição 8. Primeiro vamos mostrar que

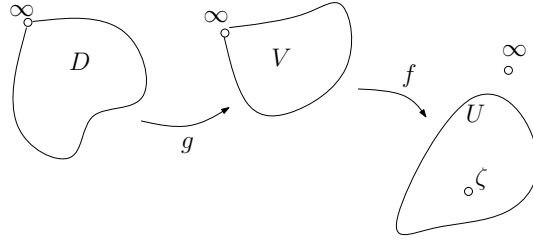
$$VC(f \circ g) = VC(f) \cup f(VC(g)).$$

De fato, seja $(f \circ g)(c) \in VC(f \circ g)$. Então $f'(g(c)) = 0$ ou $g'(c) = 0$. Se $f'(g(c)) = 0$ então $g(c)$ é um ponto crítico de f e portanto, $f \circ g(c) \in VC(f)$. Agora, se $g'(c) = 0$ então c é um ponto crítico de g e isto implica que $g(c) \in VC(g)$; portanto, $f \circ g(c) \in f(VC(g))$. Por outro lado, seja $z \in VC(f) \cup f(VC(g))$. Então $z = f(c)$ com $f'(c) = 0$, para algum c , ou $z = f(g(p))$ com $g'(p) = 0$ para algum. Isto mostra, novamente, que $z \in VC(f \circ g)$.

Portanto, basta mostrar que $VA(f \circ g) = VA(f) \cup f(VA(g))$. Também é imediato que $f(VA(g)) \subset VA(f \circ g)$. Com isso, precisamos mostrar que $VA(f) \subset VA(f \circ g)$ para concluir a inclusão $VA(f \circ g) \supset VA(f) \cup f(VA(g))$. Para isto, suponha que $\zeta \in VA(f)$. Pelo Lema 29 ζ é logarítmica, então existe uma vizinhança U de ζ simplesmente conexa e um aberto $V \subset f^{-1}(U)$ maximal, conexo e ilimitado tal que $f|_V : V \longrightarrow U \setminus \{\zeta\}$ é um recobrimento. Em particular, $V \cap f^{-1}(\zeta) = \emptyset$. Seja D uma componente de $g^{-1}(V)$. D é um aberto ilimitado e $D \cap (f \circ g)^{-1}(\zeta) = \emptyset$. Pelo Teorema de Iversen [29], dado $\xi \in U$ diferente de ζ e qualquer $z \in (f \circ g)^{-1}(\xi)$, existe um caminho $\alpha : [0, \infty) \longrightarrow D$ tal que $\alpha(0) = z$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty$. Em outras palavras, $f \circ g \circ \alpha$ é um caminho em U entre ξ e ζ . Portanto, ζ é um valor assintótico de $f \circ g$, como queríamos mostrar.

Para terminar a demonstração, falta concluir que

$$VA(f \circ g) \subset VA(f) \cup f(VA(g)).$$



Seja $B = \mathbb{C} \setminus [\text{sing}(f^{-1}) \cup f(\text{sing}(g^{-1}))]$. Como f e g são criticamente finitas, existem $w \in B$ e uma vizinhança U de w simplesmente conexa, $U \subset B$, tal que $f^{-1}(U) = \bigcup_i V_i$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ se $i \neq j$, e $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ é um recobrimento para cada i pelo Lema (28). Também pelo Lema (28), $g^{-1}(V_i) = \bigcup_k W_k^i$ tal que $g|_{W_k^i} : W_k^i \rightarrow V_i$ é um recobrimento para cada k e $W_k^i \cap W_l^i = \emptyset$ se $k \neq l$. Segue-se então que $f \circ g$ é um recobrimento sobre B e portanto, não existem pontos de $\text{sing}((f \circ g)^{-1})$ em B . \square

6.1 Finitude dos domínios de Fatou na classe \mathcal{S}

Dizemos que uma função f pertence à classe \mathcal{S}_q se o conjunto $\text{sing}(f^{-1})$ contém no máximo q pontos. Em outras palavras, existe um subconjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ tal que $f : \mathbb{C} \setminus f^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{C} \setminus A$ é uma aplicação de recobrimento (Lema 28). E ainda, $\mathcal{S} = \bigcup_{q \geq 1} \mathcal{S}_q$.

Dizemos que $g \in \mathcal{E}$ e $f \in \mathcal{E}$ são topologicamente equivalentes se existem $\phi, \psi \in \text{Homeo}(\mathbb{C})$ tais que

$$\psi \circ f = g \circ \phi,$$

ou seja, de modo que o diagrama a seguir, seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \end{array}$$

Fixado $f \in \mathcal{S}_q$, consideremos o conjunto

$$T_f := \{g \in \mathcal{E} ; g \text{ é topologicamente equivalente à } f\} \subset \mathcal{S}_q.$$

No que segue definiremos uma estrutura de variedade complexa em T_f de dimensão $q + 2$. Para tanto, dados $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ distintos e tais que

$f(b_i) \notin \text{sing}(f^{-1})$, definimos o conjunto $T_f(b_1, b_2)$ das funções $g \in T_f$ tais que os homeomorfismos ϕ e ψ podem ser escolhidos de modo que $\phi(b_i) = b_i$. Pode-se verificar que $T_f = \bigcup T_f(b_1, b_2)$, onde a reunião é sobre os pares (b_1, b_2) , com $b_1 \neq b_2$ e $f(\{b_1, b_2\}) \cap \text{sing}(f^{-1}) = \emptyset$. Fixemos $b_1, b_2 \notin \text{sing}(f^{-1}) = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ e façamos

$$a_{q+1} = f(b_1) \quad \text{e} \quad a_{q+2} = f(b_2).$$

Lema 30. *Sejam $g_i = \psi_i \circ f \circ \phi_i^{-1} \in \mathcal{S}$, com $\phi_j(b_i) = b_i$, $i, j = 1, 2$. Suponha que exista uma isotopia ψ_t entre ψ_1 e ψ_2 tal que $\psi_t(a_j) = \psi_1(a_j)$ para $1 \leq t \leq 2$ e $1 \leq j \leq q + 2$. Então $g_1 = g_2$.*

Demonstração. Fixado $t \in [1, 2]$ considere a aplicação $z \mapsto \psi_t \circ f(z)$. Como $g_2|_{\mathbb{C} \setminus \text{sing}(g_2^{-1})}$ é um recobrimento podemos levantar a homotopia $\psi_t \circ f$ a uma única isotopia h_t tal que $h_1 = \phi_1$ e $\psi_t \circ f = g_2 \circ h_t$.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow h_t & \downarrow g_2 \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\psi_t \circ f} & \mathbb{C} \end{array}$$

Para $i = 1, 2$, as funções $t \mapsto h_t(b_i)$ são contínuas e suas imagens, formam um conjunto discreto, e portanto, são funções constantes. Como $h_1(b_i) = \phi_1(b_i) = b_i$ segue-se que $h_t(b_i) = b_i$ para $i = 1, 2$. Fazendo $t = 1$ tem-se que

$$g_1 \circ \phi_1 = \psi_1 \circ f = g_2 \circ h_1,$$

portanto, $g_1 = g_2 \circ (h_1 \circ \phi_1^{-1})$. Note que o homeomorfismo $h_1 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fixa b_1 e b_2 e é conforme exceto em um subconjunto discreto, que por sua vez é um conjunto de singularidades removíveis dessa aplicação. Logo, $h_1 \circ \phi_1^{-1}$ é a aplicação identidade e portanto, $g_1 = g_2$, como queríamos. \square

No espaço $\text{Homeo}(\mathbb{C})$ dizemos que $\psi_0 \sim \psi_1$ se existe uma isotopia $\psi_t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entre ψ_0 e ψ_1 tal que $\psi_t(a_j) = \psi_0(a_j)$ para todo $t \in [0, 1]$ e $1 \leq j \leq q + 2$. Defina $Y = \text{Homeo}(\mathbb{C}) / \sim$ e considere a aplicação $\Theta : Y \rightarrow \mathbb{C}^{q+2}$ dada por

$$\Theta(\psi) = (\psi(a_1), \psi(a_2), \dots, \psi(a_{q+2})).$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Homeo}(\mathbb{C}) & & \\
 p \downarrow & \searrow \Theta \circ p & \\
 Y & \xrightarrow{\Theta} & \mathbb{C}^{q+2}
 \end{array}$$

Figura 6.5: $p : \text{Homeo}(\mathbb{C}) \longrightarrow Y$ é a projeção canônica.

Como Θ é um homeomorfismo local podemos induzir uma estrutura complexa em Y , tornando-o uma variedade de dimensão $q + 2$. Observe que todo elemento de Y pode ser representado por um homeomorfismo quaseconforme. Se ψ é um desses representantes, considere a aplicação $\psi \circ f$. Pelo Teorema da Aplicação Mensurável de Riemann, existe um homeomorfismo φ quaseconforme tal que $\varphi(b_j) = b_j$, $j = 1, 2$, e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = g \in \mathcal{E}$. Pelo Lema 30, a aplicação $\pi : Y \longrightarrow T_f(b_1, b_2)$ dada por $\pi(\psi) = g$ está bem definida, isto é, não depende do representante escolhido. Localmente, e fora de um conjunto discreto, tem-se $g^{-1} = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$. Disto segue-se que

$$\text{sing}(g^{-1}) = \{a_1(g), a_2(g), \dots, a_q(g)\} = \{\psi(a_1), \psi(a_2), \dots, \psi(a_q)\}.$$

$$\begin{array}{ccc}
 Y & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \Theta & \\
 T_f(b_1, b_2) & \xrightarrow{\dots\dots\dots} & \mathbb{C}^{q+2}
 \end{array}$$

Note que π é sobrejetora e localmente injetora. A primeira afirmação segue imediatamente da definição de π e para a segunda, se $\pi(\psi_0) = \pi(\psi_1)$, basta tomar a isotopia $\psi_t = (1 - t)\psi_0 + t\psi_1$ para ψ_0 próximo de ψ_1 e $0 \leq t \leq 1$. Portanto, π induz uma estrutura de variedade complexa em $T_f(b_1, b_2)$. E ainda, as funções $a_1(g), a_2(g), \dots, a_q(g)$ são cartas locais sobre $T_f(b_1, b_2)$. Como $T_f = \bigcup T_f(b_1, b_2)$, essa construção fornece uma estrutura de variedade complexa de dimensão $q + 2$ ao conjunto T_f . Como as componentes de Fatou de f são simplesmente conexas, a demonstração do Teorema (34) segue-se com a mesma construção do Teorema de Sullivan.

6.2 Sobre a classe de funções Eremenko-Lyubich

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre as funções $f \in \mathcal{B}$. Mostraremos que se

$$\text{dist}(\mathcal{J}(f), S^+(f)) > 0 \quad (6.1)$$

então o conjunto de Fatou de f não contém domínios errantes. Para tanto precisaremos de dois resultados importantes.

Proposição 9. *Seja Ω um domínio errante de $f \in \mathcal{E}$. Então cada função limite da sequência $\{f^n\}$ em Ω é constante, podendo ser a constante igual a ∞ . Em particular, se Ω for multiplamente conexo, então tal limite é sempre ∞ . Além disso, se a constante for finita, então ela pertence ao conjunto de Julia de f .*

Demonstração. Suponha que $f^{n_i} \rightarrow \varphi$ uniformemente nas partes compactas de Ω . Se φ não for constante então, como $\varphi(\Omega)$ e $f^{n_i}(\Omega)$ são abertos, existem i e j distintos tais que $f^{n_i}(\Omega) \cap f^{n_j}(\Omega) \neq \emptyset$, o que contradiz o fato de Ω ser errante. Suponha agora que a função φ é constante e igual a ζ e diferente de ∞ . Como $f^{n_i}(\Omega)$ está contido em uma componente de $\mathcal{F}(f)$, para cada $i > 0$, afirmamos que $\zeta \in \mathcal{J}(f)$. Para verificar esta afirmação, suponha que $\zeta \in \mathcal{F}(f)$. Então existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta)$ está contida em alguma componente do conjunto de Fatou de f . Por outro lado, $f^{n_i}(\Omega) \subset D_r(\zeta)$ para todo i suficientemente grande. Isto contradiz, novamente, o fato de ser errante o domínio Ω .

Segue-se do Lema (11) que se Ω é multiplamente conexa então $\varphi(z) = \infty$, para todo $z \in \Omega$. \square

No que segue denotaremos que X o conjunto dos pontos de acumulação de $S^+(f)$ em \mathbb{C} , também conhecido como conjunto *derivado* de $S^+(f)$.

Teorema 36 (Bergweiler, Haruta, Kriete, Meier, Terglane [11]). *Sejam $f \in \mathcal{B}$ e Ω um domínio errante de f . Então toda função limite de $\{f^n|_{\Omega}\}$ é uma constante contida em $X \cup \{\infty\}$.*

Seja $f \in \mathcal{B}$ satisfazendo a condição (6.1). Se $\mathcal{F}(f)$ contém um domínio errante Ω segue-se da Proposição (9) que toda função limite da sequência $\{f^n\}$ em Ω é uma constante contida no conjunto de Julia de f , já que $\mathcal{F}(f)$ não contém domínios de Baker. Pelo Teorema (36), tal constante pertence ao conjunto conjunto X , contradizendo a condição (6.1). Logo, temos a seguinte consequência do Teorema (36).

Corolário 16. *Se $f \in \mathcal{B}$ e $\text{dist}(\mathcal{J}(f), S^+(f)) > 0$ então $\mathcal{F}(f)$ não contém domínios errantes.*

Exemplo 4. *Considere a função $f \in \mathcal{E}$ definida por $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$. Note que f possui uma infinidade de valores singulares todos pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$. Logo, $f \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{S}$. Como o intervalo $[0, 1]$ é invariante por f , existe um ponto fixo atrator nesse intervalo cuja bacia de atração contém o conjunto $\text{sing}(f^{-1})$. Segue disto que $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ e pelo Corolário (16), f não admite domínios errantes.*

Demonstração do Teorema 36. Pelo Lema (11) segue-se o resultado no caso em que Ω é um domínio errante multiplamente conexo. Com isso, podemos assumir que Ω é simplesmente conexo; isto implica que $f^n(\Omega)$ é simplesmente conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja $\alpha \in \mathbb{C} \setminus X$ o limite de alguma subsequência $\{f^{n(k)}\}$ em Ω . Por hipótese, $\Omega \cap S^+(f) = \emptyset$ e $f^n(\Omega) \cap S^+(f) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que f^{-n} existe localmente em cada $f^n(\Omega)$ e possui uma continuação analítica em $f^n(\Omega)$. Logo $f^n|_{\Omega}$ é univalente.

Sem perda de generalidade podemos assumir que $\alpha = 0$. Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ e $r > 0$ tais que $\overline{D_R(z_0)} \subset \Omega$ e

$$\mathbb{D}_r \cap (S^+(f) \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

A menos de uma translação, também podemos assumir que

$$f^{n(k)}(D_R(z_0)) \subset \mathbb{D}_r \setminus \{0\}.$$

Pelo Teorema 1/4 de Koebe temos que

$$\frac{1}{4} |(f^{n(k)})'(z_0)| R \leq |f^{n(k)}(z_0)|. \quad (6.2)$$

Defina $H := \{z \in \mathbb{C}; \text{Re } z < \log r\}$ e $g_k : D_R(z_0) \rightarrow H$ um ramo do logaritmo de $f^{n(k)}$, isto é, $e^{g_k} = f^{n(k)}$. Da desigualdade (6.2) concluímos que

$$|g'_k(z_0)| = \frac{|(f^{n(k)})'(z_0)|}{|f^{n(k)}(z_0)|} \leq \frac{4}{R}.$$

Como H é simplesmente conexo, a inversa de g_k pode ser continuada analiticamente a uma função h_k definida em H , isto é, $h_k : H \rightarrow \mathbb{C}$ e $h_k(g_k(z)) = z$ para todo $z \in D_R(z_0)$.

Suponha que h_k é univalente em H e defina $w_k = g_k(z_0)$. Então $w_k \in H$, isto é, $\operatorname{Re} w_k < \log r$; por sua vez, isto implica que $D_{(\log r - \operatorname{Re} w_k)}(w_k) \subset H$. Pelo Teorema 1/4 de Koebe temos que

$$D_{\frac{1}{4}|h'_k(w_k)|(\log r - \operatorname{Re} w_k)}(z_0) \subset h_k(D_{(\log r - \operatorname{Re} w_k)}(w_k)) \subset h_k(H).$$

Seja $\{p, q\}$ uma órbita periódica por f de período 2 com $\mathbb{D}_r \cap \{p, q\} = \emptyset$. Como $D_R(z_0) = h_k(H)$ temos que

$$h_k(H) \cap \{p, q\} = \emptyset.$$

Disso segue-se que

$$\frac{1}{4}|h'_k(w_k)|(\log r - \operatorname{Re} w_k) \leq M,$$

onde $M := \min\{|z_0 - p|, |z_0 - q|\}$. Como $f^{n(k)} \rightarrow 0$ e

$$\operatorname{Re} w_k = \operatorname{Re} g_k(z_0) = \log |f^{n(k)}(z_0)| \rightarrow -\infty,$$

concluimos que $h'_k(w_k) \rightarrow 0$. Mas $h_k(g_k(z)) = z$, e portanto, $h'_k(w_k)g'_k(z_0) = 1$. Isto contradiz a condição $|g'_k(z_0)| \leq \frac{4}{R}$.

Agora podemos assumir que h_k não é univalente em H . Então h_k é periódica com período $2l_k\pi i$ e univalente na faixa

$$\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z < \log r \quad \text{e} \quad c < \operatorname{Im} z < c + 2l_k\pi\}$$

para todo k (veja [29] pág. 283).

Se $l_k \rightarrow \infty$ obtemos uma contradição repetindo o argumento acima. Logo, podemos supor que a sequência $\{l_k\}$ é finita. Tomando uma subsequência se necessário podemos assumir que $l_k = l$ para todo k .

Consideremos agora, $G_k := \exp\left(\frac{g_k}{l}\right)$ e a função $H_k : \mathbb{D}_{r^{1/l}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $H_k(z) = h_k(l \log z)$. Para todo $z \in D_R(z_0)$ tem-se $H_k(G_k(z)) = z$, e novamente pelo Teorema 1/4 de Koebe obtemos

$$|G'_k(z_0)| = \frac{|g'_k(z_0)|}{l} |G_k(z_0)| \leq \frac{4}{lR} |G_k(z_0)|.$$

Como $G_k(z_0) = (f^{n(k)}(z_0))^{1/l} \rightarrow 0$ temos que $|G'_k(z_0)| \rightarrow 0$.

Como H_k é univalente, 0 não pode ser uma singularidade essencial de H_k . Suponha que a origem é um pólo de H_k . Isto implica que $H_k(\mathbb{D}_{r^{1/l}} \setminus \{0\})$ contém uma vizinhança de ∞ . Como o conjunto de Julia de f é ilimitado e perfeito, tal vizinhança contém uma órbita periódica de f , que por sua

vez não está contida em $H_k(\mathbb{D}_{r^{1/l}} \setminus \{0\})$ desde que a intersecção com o disco \mathbb{D}_r seja vazia, como observamos anteriormente. Essa contradição mostra que H_k admite uma extensão holomorfa (univalente) ao disco $\mathbb{D}_{r^{1/l}}$. Defina $z_k = G_k(z_0)$. Novamente pelo Teorema 1/4 de Koebe temos que

$$|H'_k(z_0)| \leq \frac{4M}{r^{1/l} - |z_k|}.$$

Como $|z_k| \rightarrow 0$, temos $|H'_k(z_0)| \leq \frac{8M}{r^{1/l}}$ para todo k suficientemente grande. Isto contradiz $H'_k(z_k)G'_k(z_0) = 1$ e completa a prova.

□

APÊNDICE A

Homeomorfismos Quaseconformes

Um *homeomorfismo quaseconforme* f da esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ é um homeomorfismo que preserva orientação tal que:

- (a) as derivadas distribucionais $\frac{\partial f}{\partial z}$ e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ estão localmente em $L^2(\widehat{\mathbb{C}})$, e
- (b) para alguma função mensurável $\mu \in L^\infty(\widehat{\mathbb{C}})$ com $\|\mu\|_\infty < 1$, temos, para quase todo ponto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial f}{\partial z} \tag{A.1}$$

A função μ acima é chamada *coeficiente de Beltrami* de f . A *dilatação* de f é o número

$$K(f) := \frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty},$$

e a equação (A.1) chama-se *equação de Beltrami*.

Dada uma função mensurável μ , como no item (b), é natural perguntar quando existe uma solução da equação de Beltrami associada. A resposta é dada pelo famoso Teorema da Aplicação Mensurável de Riemann.

Teorema 37 (Alhfors-Bers-Morrey). *Seja U um domínio na esfera de Riemann.*

- (i) *Dada uma função mensurável $\mu : U \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\|\mu\|_\infty < 1$, existe um homeomorfismo quaseconforme $f : U \rightarrow V$ que satisfaz*

a equação de Beltrami

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial f}{\partial z}.$$

E ainda, de g é outra solução definida em U então $f \circ g^{-1}$ é uma função holomorfa. Em particular, se U é a esfera de Riemann existe uma única solução da equação de Beltrami que fixa três pontos dados.

(ii) Seja Λ um subconjunto aberto de algum espaço de Banach complexo e considere a aplicação $\Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$, $(t, z) \mapsto \mu_t(z)$, satisfazendo as seguintes condições:

(a) Para todo $t \in \Lambda$, a aplicação $z \mapsto \mu_t(z)$ é mensurável, e $\|\mu_t\|_\infty \leq k$ para algum $k < 1$ fixado.

(b) Para Lebesgue quase todo ponto $z \in \mathbb{C}$, a aplicação $t \mapsto \mu_t(z)$ é holomorfa.

Para cada t , seja f_t o único homeomorfismo da esfera de Riemann que fixa os pontos $0, 1$ e ∞ e cujo coeficiente de Beltrami é μ_t . Então a aplicação $t \mapsto \mu_t(z)x$ é holomorfa para todo z .

Para uma prova e discussão mais ampla a respeito desse resultado veja [1] e [14].

Referências Bibliográficas

- [1] AHLFORS, L. Lectures on Quasiconformal Mappings. Van Nostrand (1966). 80
- [2] BAKER, I.N. An entire function wich has wandering domains. J. Austral. Math. Soc., vol. **22** (1976), 173-176. 33
- [3] BAKER, I.N. Repulsive fixpoints of entire functions. Math. Z., vol. **104** (1968), 252-256. 2, 51
- [4] BAKER, I.N. Limit functions and sets of non-normality in iteration theory. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., vol. **467** (1970), 1-10. 19
- [5] BARGMANN, D. Simple proofs of some fundamental properties of the Julia set. Ergod. Th. & Dynam. Sys., vol. **19** (1999), 553-558. iii, v, 2, 41
- [6] BEARDON, A.F. Iteration of Rational Functions. Complex Analytic Dynamical Systems. Graduate Texts in Mathematics, 132. Springer-Verlag, New York (1991). 16, 42
- [7] BERS, L. Fiber spaces over Teichmüller spaces. Acta Math., vol. **130** (1973), 89-126.
- [8] BERS, L. On Sullivan's Proof of the Finiteness Theorem and the Eventual Periodicity Theorem. Am. J. Math., vol. **109**, no. 5 (1987), 833-852. 56
- [9] BERGWEILER, W. A new proof of the Ahlfors Five Islands Theorem. J. d'Anal. Math., vol. **76**, no. 1, (1998), 337-347. 51, 53
- [10] BERGWEILER, W. Iteration of Mermorphic Functions. Bull. Am. Math. Soc., vol. **29**, no. 2, (1993), 151-188. 2

- [11] BERGWELER, W., HARUTA M., KRIETE H., MEIER H., -G. & TER-GLANE N., On the limit functions of iterates in wandering domains. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, vol. **18** (1993), 369-375. [iii](#), [v](#), [2](#), [74](#)
- [12] BERGWELER, W. The Role of the Ahlfors Five Islands Theorem in Complex Dynamics. *Conf. Geom. & Dynamics*, vol. **4** (1998), 22-34. [2](#), [51](#)
- [13] CARLESON, L., GAMELIN, T.W. *Complex Dynamics*. University Text: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York (1993). [xi](#), [11](#), [16](#), [38](#)
- [14] DE FARIA, E., DE MELO, W. *Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics*, Cambridge University Press (2008). [iii](#), [v](#), [80](#)
- [15] DE MELO, W. and van STRIEN, S. *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York (1993).
- [16] DEVANEY, R.L. *An Introduction to chaotic dynamical systems*, Second Edition, Addison Wesley, Redwood, CA (1989).
- [17] FAGELLA, N., HENRIKSEN, C. The Teichmüller Space of an Entire Function. In: *Complex Dynamics: Families and Friends*, AK Peters (2008). [xii](#), [66](#)
- [18] EARLE, C.J., MCMULLEN, C.T. *Quasiconformal isotopies, Holomorphic functions and Moduli*, vol **I** (Berkeley, CA, 1986), 143-154, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **10**, Springer, New York (1988).
- [19] EREMENKO, A., LYUBICH, M.Y. Dynamical properties of some classes of entire functions. *Ann. Inst. Fourier*, vol. **42** (1992), 989-1020. [iii](#), [v](#), [1](#), [2](#), [65](#)
- [20] EREMENKO, A., LYUBICH, M.Y. The Dynamics of analytic transformations. *Leningrad. Math. J.*, vol. **1** (1990), 563-634.
- [21] EREMENKO, A. On the iteration of entire functions. *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, Banach Center Publication, vol. **23** (1989), 339-344. [42](#)
- [22] FATOU, P. Sur l'itération des fonctions transcendentes entières. *Acta Math.*, vol. **47** (1926), 337-370. [1](#)
- [23] GOLDBERG, L., and KEEN, L. A finitness theorem for a dynamical class of entire functions. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, vol. **6** (1986), 183-192. [iii](#), [v](#), [1](#), [67](#)

- [24] GROSS, W. Über die singularitäten analytischer Funktionen. *Monat. Math. Phys.*, vol. **29** (1918), 3-47. [67](#)
- [25] MISIUREWICZ, M. On iterates of e^z . *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, Vol. **1**, 103-106 (1981). [2](#), [16](#), [19](#)
- [26] LIMA, E.L. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA (1981).
- [27] MILNOR, J. Dynamics in One Complex Variable. 3rd Ed., *Annals of mathematics studies*, no. 160, Princeton University Press (2006). [11](#), [14](#), [16](#), [27](#), [41](#)
- [28] MOROSAWA, S., NISHIMURA, Y., TANIGUCHI, M. and UEDA, T. *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press (2000). [42](#)
- [29] NEVALINNA, R. *Analytic Functions*, Springer-Verlag (1970). [70](#), [76](#)
- [30] RADSTRÖM, H. On the iteration of analytic functions. *Math. Scand.*, vol. **1** (1953), 85-92. [41](#), [43](#)
- [31] SCHLEICHER, D. (Editor) *Complex Dynamics: families and friends*, (2009). [31](#)
- [32] SCHWICK, W. Normality criteria for families of meromorphic functions. *J. Anal. Math.*, vol. **52** (1989), 241-289.
- [33] SEPPÄLÄ, M., SORVALI, T. *Geometry of Riemann Surfaces and Teichmüller Spaces*, Lecture Notes (1991).
- [34] SULLIVAN, D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann. Math.*, vol. **122** (1985), 401-418. [55](#), [65](#)
- [35] ZALCMAN, L. A Heuristic Principle in Complex Function Theory. *Am. Math. Monthly*, vol. **82**, no. 08 (1975), 813-818. [48](#)