

ESFERAS DE PAPEL FURADAS DINAMICAMENTE DETERMINADAS.

Raibel De Jesus Arias Cantillo

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada  
Orientador: Prof. Dr. André Salles De Carvalho

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da Cnpq

São Paulo, 16 fevereiro de 2017

## **ESFERAS DE PAPEL FURADAS DINAMICAMENTE DETERMINADAS**

Esta é a versão original da tese elaborada pelo candidato, Raibel De Jesus Arias Cantillo, tal como submetida à Comissão Julgadora.

## ESFERAS DE PAPEL FURADAS DINAMICAMENTE DETERMINADAS

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. André Salles de Carvalho (orientador)- IME-USP
- Prof. Dr. Nome Completo - [sem ponto final]
- Prof. Dr. Nome Completo - [sem ponto final]
- Prof. Dr. Nome Completo - [sem ponto final]

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu orientador, André Salles pela sua orientação, paciência, e acompanhamento no desenvolvimento do doutorado, e por me introduzir neste maravilhoso tema de pesquisa. Ao Prof. Sylvain Bonnot por sua apoio constante. Ao IME da Universidade de São Paulo e seu corpo de professores, à Cnpq pelo apoio financeiro. A Minoru obrigado pelas conversas de matemática. A Pedro, Jeovanny, Hector Cabarcas e muitos outros obrigado por me apoiar. *El núcleo duro: Andres e Michael*. Finalmenta a minha família, em especial à minha Avo e Tia, sem elas este logro não tivesse sido possível.

# RESUMO

Um problema central da matemática é entender e descrever homeomorfismos e difeomorfismos em variedades. Em dimensão dois, o *Teorema de Nielsen-Thurston* em [7] é quiza o resultado principal nesta area de conhecimento. Este Teorema que generaliza o problema da classificação dos *automorfismos torais* a qualquer superfície *fechada* orientável de gênero  $g \geq 2$ , propõe que toda classe de isotopia de um automorfismo de superfície contém apenas um representante entre os três seguintes tipos: *ordem finita*, *redutível* ou *pseudo-Anosov*.

Nesta tese estudamos *esferas de papel furadas* e dinamicamente determinadas pelas aplicações unimodias introduzidas por A. de Carvalho e Toby Hall em [1]. Em específico, nós nos concentramos na esfera de papel: *a ferradura justa* que é a esfera complexa de definição do exemplo mais simples, embora não trivial de um *pseudo-Anosov generalizado* em [2]. Este tipo de automorfismos, generalizam os de Thurston. A ferradura é também um modelo *justo* (em [5]) da ferradura de Smale em [8].

São resolvidas nesta tese duas questões de convergência que tem a ver com a densidade de Poincaré e um *modelo Fuchsiano* associados à *ferradura justa furada*, que é uma *superfície de Riemann hiperbólica de tipo topológico infinito*, especificamente, a esfera de Riemann menos infinitos *furos*.

**Palavras-chave:** Esferas de papel, ferradura justa, homeomorfismos *pseudo-Anosov generalizados*, *modelo fuchsiano*.

# ABSTRACT

Understanding homeomorphisms and diffeomorphisms of manifolds is a central problem of mathematics. In the 2-dimensional case, the Thurston's classification of surface homeomorphisms [7] can be the principal result in this topic. This theorem, that generalizes the classification of homeomorphisms of the torus, states that every isotopy class of surface homeomorphisms contains a representative of one of three types: *finite order*; *reducible*; or *pseudo-Anosov*.

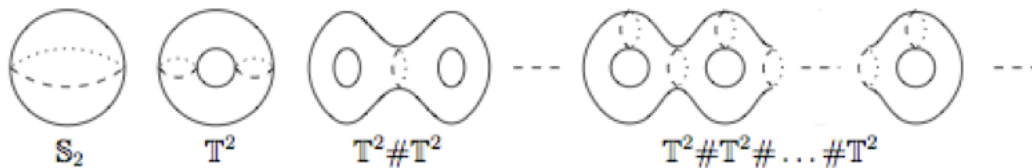
In this thesis, we study spheres with punctures and dynamically determined applications unimodals introduced for André de Carvalho and Toby Hall in [1]. Specifically, we concentrate in the sphere's paper: the *horseshoe tight*, that is the 2-sphere complex of definition of the most simple example, however not trivial, of a generalized pseudo-Anosov in [2]. This type of homeomorphisms generalizes the Thurston's homeomorphisms. The Horseshoe tight is a model "tight" of the Smale horseshoe in [8].

We resolve two questions about the convergence for the density hyperbolic and a model fuchsian associated with the *horseshoe tight punctured*. This is a *Riemann's surfaces hyperbolic with topological type finite*, specifically, the Riemann's sphere minus a set infinite of points.

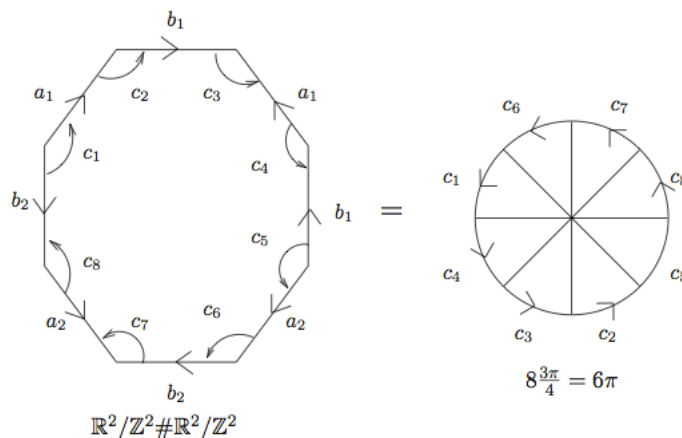
# INTRODUÇÃO

Raibel De Jesus Arias Cantillo. **Esferas de papel furadas e dinamicamente determinadas**. 2016. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

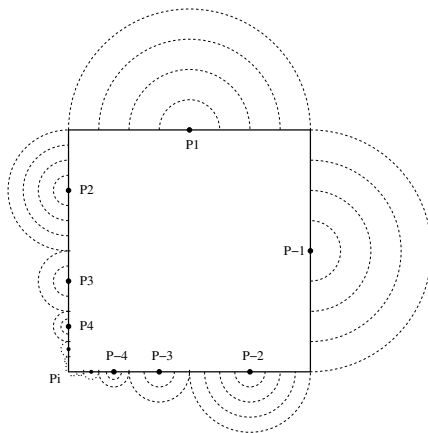
Decorre do Teorema de classificação topológica de superfícies em [?] que toda superfície *fechada*, orientável  $S$  de gênero  $g \geq 0$ , número máximo de laços disjuntos que não a disconectam é homeomorfa ou à esfera  $\mathbb{S}^2$  ( $g = 0$ ) ou, à soma conexa  $\mathbb{T}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{T}^2$  de  $g \geq 1$  copias do toro plano  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .



Para  $g \geq 1$ , cada superfície ( $g \geq 1$ ) da lista é realizada como o quociente topológico  $P/\mathcal{R}$ , com  $P \subset \mathbb{C}$  um polígono de  $4g$  lados e  $\mathcal{R}$  certa relação de equivalência que identifica em pares os lados da fronteira  $\partial P$ . Note se que, no quociente ao se fazer as identificações podem aparecer *vertices cônicos*, nestes pontos teremos excesso ou, pouco ângulo. Exemplo disto é o bi-toro  $\mathbb{T}^2 \oplus \mathbb{T}^2$ , construído a partir de um octógono regular. Ao se fazer a colagem surge um vértice cônico quando identificamos os oito vertices do octógono, e embora exista uma vizinhança ao redor dele que é topologicamente um disco, é claro, a partir do modelo plano, que o ângulo euclidiano total, nesse ponto, é  $8\frac{3\pi}{4} = 6\pi > 2\pi$ , que é o ângulo total das suas oito copias e não  $2\pi$ . Mas não é difícil *remover* tal singularidade e torna o bi-toro numa superfície de Riemann. De fato, para  $g > 1$  o recobrimento universal de  $S$  é o disco unitário,  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ .

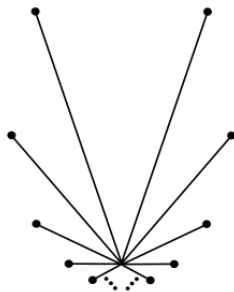


E se identificamos numa região poligonal do plano uma quantidade enumerável infinita de segmentos, então podemos ter superfícies *fechadas*? Podemos colocar uma estrutura de superfície de Riemann caso apareça um  $\infty$ -*vértice*? Neste caso ([1]), podem aparecer pontos cuja pré-imagem é conjunto infinito ou, pontos que são acumulação de vértices. A tais pontos os chamaremos de *pontos singulares*. Exemplo deste tipo de quociente é o espaço de papel: a *ferradura justa*. Construída (informalmente) a partir do quadrado unitário plano  $P = [0, 1]^2 \subset \mathbb{C}$ , dobrando e colando, através de cada ponto  $p_i$ , com  $i \in \mathbb{Z}^*$ , cada segmento mostrado na figura. Note que sobre o *segmento*  $\{0\} \times [0, 1]$  é permitido que um número infinito de dobras se identifiquem. Analogamente, sobre o lado horizontal inferior. O ponto  $p_\infty$  tem infinitas copias, os extremos dos intervalos por onde dobramos. Logo, é um  $\infty$ -*vértice*. Mais ainda, o conjunto  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}^*}$  se acumula no quociente a  $p_\infty$ .



Topologicamente  $S_\infty := P/\mathcal{G}$ , com  $P = [0, 1]^2 \subset \mathbb{C}$  e  $\mathcal{G}$  a *decomposição métrica* ([4]), é, por um resultado de R. L. Moore em [10], uma esfera topológica. Mais ainda, nela podemos colocar uma estrutura conforme ou holomorfa. Pois,  $S_\infty \setminus \{p_\infty\}$  tem *estrutura conico-euclidiana*, e portanto, estrutura holomorfa vindo da estrutura euclidiana do quadrado  $P$ . Mais ainda, a imagem da fronteira de  $P$  pela *projeção associada*, o *bouquet* de segmentos, tendo duas arestas de comprimentos  $1/2^i$  para cada  $i \geq 2$ , é um  $\mathbb{R}$ -*árvore*. Note que  $\{p_k\}_k \in \mathbb{Z}^*$  se acumula em um  $\infty$ -*vértice*, a esquina  $p_\infty$ .





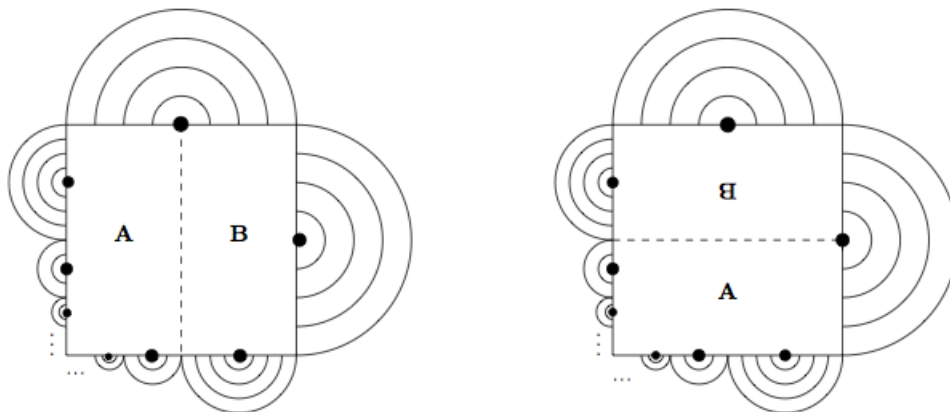
Três tipos de pontos em  $S_\infty$ :

- Pontos 1-cônicos: o conjunto de pontos  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ , por onde dobramos. Para cada  $k \in \mathbb{Z}^*$  temos  $\angle p_k = \pi$ .
- Pontos planares:  $S_\infty \setminus G_\infty$  (homomorfo a  $\text{Int } P$ ) e pontos cuja pré-imagem por  $\pi_\infty$  contém exatamente dois pontos, nenhum deles sendo uma esquina de  $P$ . Nestes pontos temos  $\angle = 2\pi$ .
- Um ponto *singular*: o ponto  $p_\infty$ .

O problema é estender a estrutura conforme ao  $\infty$ -vértice,  $p_\infty$ . Estender a estrutura (em [1]) requer construir uma sequência de *anéis*  $\{A_j\}$  concêntricos convergindo (veja a figura) a  $p_\infty$ , tal que a soma de seus *módulos*  $\sum \text{Mod}(A_j)$  seja  $\infty$ . Isto, de fato, é a condição para que certa integral (do artigo base) calculada nesse ponto seja divergente, o que assegura que a estrutura holomorfa do complementar  $S_\infty \setminus \{p_\infty\}$  se estenda unicamente a esse  $\infty$ -vértice. Assim, pelo Teorema de Uniformização  $S_\infty \simeq \widehat{\mathbb{C}}$  este *espaco de papel* é isomorfo à esfera de Riemann,  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Por outro lado, é possível construir um automorfismo de superfície  $\phi$  que tenha a  $S_\infty$  como esfera complexa de definição. De fato,  $\phi$  é o exemplo mais simples, não trivial, segundo A. de Carvalho, de certos homeomorfismos chamados: *pseudo-Anosov generalizados* (pAg) em [2]. Estes incluem os automorfismos torais e os pseudo-Anosov de Thurston. Poreni, admitem folheações com uma quantidade infinita de singularidades. Embora, estas têm que se acumular num conjunto finito de pontos. Informalmente,

$$pAg = \text{pseudo-Anosov} + \# \text{ numero infinito de singularidades}$$

A ação de  $\phi$  sobre o quadrado é descrita na figura abaixo. Tal homeomorfismo admite um par de folheações transversais  $(\mathcal{F}^u, \mu^u), (\mathcal{F}^s, \mu^s)$ , sendo as projeções por  $\pi_\infty$  das folheações do plano por retas verticais e horizontais. Estas têm 1-singularidades nos pontos dobras,  $p_k$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}^*$ . Geometricamente,  $\phi$  contrai  $P$  verticalmente e o dilata na direção horizontal para, finalmente, gira-lo 180 na direção das manecilhas do relógio de tal forma fique encaixado novamente em  $P$ .



A ferradura de papel justa é só um exemplo de *espaço de papel*. Estes espaços de decomposições  $P/\mathcal{G}$ , com  $P$  um *multipolígono*, união disjunta de  $k$  polígonos do plano, e  $\mathcal{G}$  a *decomposição métrica*, foram estudados em [1] por A. de Carvalho e T. Hall. De fato, sob certas condições topológicas  $P/\mathcal{G}$  é uma superfície *fechada*, isto é, compacta, sem fronteira. Mais ainda, quando a decomposição  $\mathcal{G}$  é *monótona semi-continua superiormente* e *desvinculada*, um Teorema de R. L Moore [10] implica que  $P/\mathcal{G}$  seja uma superfície topológica de gênero 0, isto é homomorfa a  $\mathbb{S}^2$ . Podendo ser provado também que, a imagem do bordo, pela projeção que associa cada  $x \in P$  a classe  $\mathcal{G}$  que o contém, seja um *dentrito*, isto é um continuum localmente conexo que não contém nenhuma copia homeomorfa de  $\mathbb{S}^1$ . Se a superfície não tem pontos  $\infty$ -cônicos nem acumulações, então  $P/\mathcal{G}$  tem uma estrutura *natural* de superfície de Riemann, no sentido, que vem da estrutura plana do multipolígono  $P$ . O conjunto de pontos  $\infty$ -infinito cônico podem ser topologicamente não trivial. Por exemplo eles podem ser um conjunto de Cantor. Uma condição sobre a divergência de certa integral ([1], Teorema 59) assegura que a estrutura holomorfa do complementar dos pontos  $\infty$ -cônicos, que forem isolados, se estende de forma única neles. Assim, se tal condição satisfaz-se, então  $P/\mathcal{G} \simeq \widehat{\mathbb{C}}$  é conformemente isomorfa á esfera de Riemann.

Voltando à ferradura de papel justa. Pelo Teorema de Uniformização, existe  $u_\infty: S_\infty \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , isomorfismo holomorfo único, a menos de uma normalização escolhida. Se é retirado de  $P$  o conjunto

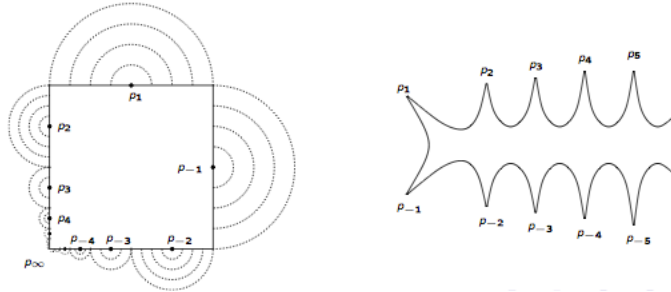
$$A = \left\{ \frac{1}{2^k} \mid k \geq 0 \right\} \cup \left\{ \frac{i}{2^k} \mid k \geq 0 \right\} \cup \{0, 1+i\} \cup \{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}.$$

Então,

$$\rightsquigarrow P \setminus A \xrightarrow{\pi_\infty} S_\infty \setminus \{p_\infty, p_k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$$

Assim,  $S_\infty \setminus \{p_\infty, p_k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$  é a *ferradura justa furada*. A qual é uma *superfície de Riemann hiperbólica de tipo topológico infinito*. Logo,

$$S_\infty \setminus \{\text{furos}\} \simeq_{u_\infty} \Omega_\infty := \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\infty, \text{ com } E_\infty := (u_\infty \circ \pi_\infty)(A).$$



A esfera furada  $\Omega_\infty := \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\infty$  tem associada:

- Uma única *métrica hiperbólica*  $ds_\infty := \rho_\infty(w)|dw|$ , com  $\rho_\infty(w)$  a *densidade hiperbólica*.
- Um único *modelo fuchsiano*, salvo classes de conjugação por Möbius,  $\mathbb{H}/\Gamma_\infty$ , com  $\Gamma_\infty \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  um subgrupo *discreto* de isométrias hiperbólicas.

Levantamos aqui as seguintes duas questões:

É possível *aproximar* a  $\rho_\infty(w)$  em alguma topologia? Existe uma "seqüência" de modelos fuchsianos  $\{\mathbb{H}/\Gamma_n\}$  que *aproxime* ao modelo fuchsiano associado ao espaço de papel a ferradura justa furada  $\Omega_\infty$ ? Em outras palavras, o que pode ser dito sobre  $\{\Gamma_n\}$  quando  $n$  é grande?

Nesta tese prova-se que: a *densidade hiperbólica*  $\rho_\infty$  de  $\Omega_\infty$  é o limite uniforme, nas partes compactas de  $\Omega_\infty$ ,

de uma seqüência de densidades  $\{\rho_n\}$  associada a uma certa seqüência de esferas furadas  $\Omega_n := \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_n$  dinamicamente determinadas por aplicações do intervalo em [1]. Além disso, prova-se, usando um resultado apresentado em [3] por M. Kapovic, que  $\Gamma_\infty$ , grupo fuchsiano associado à ferradura justa furada, é o *limite geométrico* de uma seqüência  $\{\Gamma_n\}$  de subgrupos discretos de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , associados à tal seqüência  $\Omega_n$ . Em resumo, provamos que:

**Teorema 0.0.1 (A).**

$$\rho_\infty = \lim \rho_n \text{ nas partes compactas de } \Omega_\infty.$$

**Teorema 0.0.2 (B).**

$$\Gamma_\infty := \mathrm{Lim}_{n \rightarrow \infty}^{\mathrm{geo}} \Gamma_n$$

# CONTEÚDO

Introdução	7
<b>1 Rudimentos</b>	<b>13</b>
1.1 Superfícies de Riemann hiperbólicas e modelos Fuchsianos	13
<b>2 Esferas de papel</b>	<b>25</b>
2.1 Espaço de papel: A ferradura	25
2.2 Ferradura furada	30
2.3 Quocientes métricos	30
2.4 Construção	31
2.5 Generalidades	33
2.6 Dobraduras planares implicam esferas topológicas	36
2.7 Construção da seqüência de esferas de papel $S_n := P_n/\mathcal{G}_n$	38
<b>3 Convergencia</b>	<b>45</b>
3.1 Convergencia Hausdorff e Carathéodory	46
3.1.1 $\rho_\infty = \lim \rho_n$	52
3.2 $\Gamma_\infty := \text{Lim}_{j \rightarrow \infty}^{\text{geo}} \Gamma_j$	52
3.2.1 Topologia Chabauty	53
3.2.2 Relação com Hausdorff	54
3.2.3 Topologia quase-isométrica	55
3.3 Proof	60
3.4 Possíveis problemas futuros	60

# CAPÍTULO

## 1

# RUDIMENTOS

## 1.1 Superfícies de Riemann hiperbólicas e modelos Fuchsianos

Uma *variedade complexa* é um espaço topológico munido de um atlas holomorfo, assim cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa a um disco aberto em  $\mathbb{C}$ , com funções de transição entre cartas sendo bilholomorfismos. Em particular, uma superfície de Riemann  $R$  é uma 1-variedade complexa. Exemplos clássicos são: o plano complexo  $\mathbb{C}$ , a esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , o semiplano superior  $\mathbb{H} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ . De fato, salvo equivalência conforme, são as únicas superfícies de Riemann simplesmente conexas, pelo Teorema de Uniformização de Koebe-Poincaré-Klein. Superfícies de Riemann podem ter uma quantidade enumerável ou não enumerável de  $g$ -asas [?] e *furos*. Por exemplo, a superfície de Riemann obtida como o complementar de um conjunto de Cantor em  $\mathbb{C}$ . Um furo obtém-se retirando da superfície um ponto, assim, terá uma vizinhança ao redor dele que é conformemente isomorfa à superfície de Riemann, o disco unitário menos um ponto,  $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$ . Decorre do *Teorema de Uniformização* [] que superfícies de Riemann estejam munidas de *geometrias* naturais podendo ser *esférica*, *plana* ou *hiperbólica*. A esfera de Riemann,  $\widehat{\mathbb{C}}$  tem a métrica induzida por  $\mathbb{R}^3$ , daí que tenha curvatura constante positiva, por outro lado  $\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e toros carregam métricas planas, isto é métricas de curvatura Gaussiana igual a 0, embora um 2-toro complexo tenha um *espaço moduli*  $\mathcal{M}_1 := \mathbb{H} / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , conjunto de estruturas holomorfas que carrega uma superfície compacta de gênero  $g$ , delas. Mais ainda, pelo Teorema de Gauss-Bonnet não é possível muni-lo de uma estrutura hiperbólica. De fato, quase todas as superfícies de Riemann carregam uma única, salvo um fator multiplicativo, estrutura hiperbólica, isto é, uma métrica Riemanniana conforme, completa, de área finita e de curvatura Gaussiana constante igual a  $-1$  induzida de um *disco de Poincaré*, [?]. Por exemplo, basta tirar um ponto de um toro para torna-lo uma superfície hiperbólica. Com efeito, o complementar  $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2) \setminus \{p\}$ , *o toro menos um ponto*, se retrata por deformação na *figura oito*. Assim, terá o mesmo tipo de homotopia que esta, e, portanto,  $\pi_1((\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2) \setminus \{p\})$ , o grupo fundamental é não abeliano. De fato, o grupo fundamental é isomorfo ao produto livre de duas cópias de  $\mathbb{Z}$ . Razonamento análogo, implica que, a esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  menos três pontos seja uma superfície hiperbólica. Também é hiperbólica, qualquer subdomínio desta cujo complementar tenha pelo menos três pontos. Em particular, toda superfície compacta (orientada) de gênero  $g > 1$  é uma superfície de Riemann hiperbólica. Isto decorre do *Teorema de hiperbolização para superfícies de Riemann* [?] que implica que superfícies de Riemann com grupo fundamental não abeliano estejam providas de uma única métrica hiperbólica compatível com sua estrutura conforme. No entanto, o disco furado  $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$  e a família de *anéis redondos*

$$A(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$$

tenham grupo fundamental abeliano, ao serem recobertas pelo semiplano superior  $\mathbb{H}$ , herdam a métrica hiperbólica deste disco de Poincaré.

**Exemplos 1.1.1.** (*Exemplos clássicos de superfícies de Riemann*)

1. Provido do atlas  $\mathcal{A} = \{\mathbb{C}, id_{\mathbb{C}}\}$ , onde  $id: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é a aplicação identidade, tem-se que o plano complexo  $\mathbb{C}$  é uma superfície de Riemann. Mais ainda, se  $R$  é uma superfície de Riemann qualquer, então qualquer subconjunto aberto  $S \subset R$  é também uma superfície de Riemann. Com efeito, se  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  é uma estrutura holomorfa sobre  $R$ . Então, a coleção  $\{U_i \cap S, \psi_i\}$  é uma estrutura holomorfa sobre  $S$ , onde  $\psi_i = \phi_i|_{U_i \cap S}$  é a restrição de  $\phi_i$  ao conjunto  $U_i \cap S \neq \emptyset$ . A condição de compatibilidade entre atlas em  $S$  é herda da  $R$ , assim que cada estrutura holomorfa sobre  $R$  induz uma única estrutura holomorfa sobre  $S$ . Observe que *o plano com um furo*,  $\mathbb{C} \setminus \{p\} \subset \mathbb{C}$ , e a família de *anéis*  $A_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ .
2. *2-toros e cilindros complexos*: seja  $\Omega = \Omega(w_1, w_2) := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$  um *lattice* em  $\mathbb{C}$ , com geradores  $\{w_1, w_2\}$ . A ação de  $\Omega < \mathbb{C}$  sobre o grupo topológico  $\mathbb{C}$  é por esquerda (sendo  $\mathbb{C}$  abeliano):

$$\Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \quad w \bullet z \mapsto w + z.$$

Assim, o *espaço de orbitas*  $\mathbb{C}/\Omega$ , como conjunto, é o conjunto de classes laterais de  $\Omega$  sobre  $\mathbb{C}$ .

$$\mathbb{C}/\Omega := \{\Omega \bullet z \mid z \in \mathbb{C}\} \iff (z_1 \mathcal{R} z_2 \iff z_1 - z_2 \in \Omega)$$

Como espaço topológico, munido, naturalmente, da topologia quociente,  $\mathbb{C}/\Omega$  é homeomorfo ao toro plano  $\mathbb{R}^2/Z^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  via a aplicação que ao ponto  $aw_1 + bw_2 \in \mathbb{C}/\Omega$  associa o par  $(e^{2i\pi a}, e^{2i\pi b}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Logo, chamaremos de um 2-toro ao quociente  $\mathbb{C}/\Omega$ , com  $\Omega$  algum lattice. Note que a projeção  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ , associa a cada  $z$  a sua orbita  $\Omega \bullet z$ , é aberta. Escolhendo um aberto  $V \subset \mathbb{C}$  tal que nenhum dos pontos em  $V$  sejam  $\mathcal{R}$ -equivalentes. Então, o par  $(U, \phi)$ , onde  $U := \pi(V)$ , a imagem de  $V$  pela projeção canônica  $\pi$ , é aberto, e  $\phi: U \rightarrow V$  sendo a inversa de  $\pi|_V$ , a restrição de  $\pi$  ao aberto  $V$ , é uma carta holomorfa para um atlas  $\mathcal{A}$  com cartas definidas desta forma. O quociente topológico  $\mathbb{C}/\Omega$  munido desta estrutura é um *2-toro complexo*.

Quantas estruturas? Um *espaço moduli e o espaço de Teichmüller*: nnn  $\mathcal{M} = \mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  tem região de Dirichlet o polígono  $P = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1; |\Re(z)| \leq 1/2\}$  associada ao grupo fuchsiano  $\Gamma = \langle g, h \rangle$  com conjunto de geradores  $g(z) = z + 1$  e  $h(z) = \frac{-1}{z}$ . Veja que com as identificações dadas  $\mathcal{M}$  possui uma estrutura natural de superfície de Riemann, exeto nos pontos cônicos  $i$  e  $\frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}$  com ângulos cônicos  $\pi$  e  $2\pi/3$ , respetivamente. Assim,  $\mathcal{M}$  chamada de *superfície modular* é uma esfera orbifold menos um ponto, o vértice parabólico  $\infty$  do elemento  $g(z) = z + 1$  que identifica os lados geodésicos verticais de  $P$ . De fato, existe uma bijeção entre o conjunto de estruturas conformes que podem ser colocadas numa superfície compacta, orientável, de gênero  $g = 1$  e pontos de  $\mathcal{M}_1 = \mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . Mais geralmente, para cada inteiro  $g \geq 0$ , seja  $\mathcal{M}_g$  o conjunto de todas as estruturas conformes que podem ser colocadas numa superfície compacta de gênero  $g$ . Este espaço conhece-se na literatura como *espaço modulo* de gênero  $g$ .

E já que  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \sim \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1)$ , o grupo fundamental do produto de dois espaços é isomorfo ao produto direto de seus grupos fundamentais. Então, como  $\mathbb{C}/\Omega$  é homeomorfo a  $\mathbb{C}/Z^2$ , seus grupos fundamentais são isomorfos. Portanto,  $\pi_1(\mathbb{C}/\Omega)$  é isomorfo ao produto de dois grupos cíclicos infinitos. Embora,  $\mathbb{C}/\Omega$  e  $\mathbb{C}/Z^2$  são topologicamente equivalentes, podem não ser *idênticas* como superfícies de Riemann, isto é, conformemente equivalentes (ou, isomorfas  $\simeq$ ). De fato, dois toros  $\mathbb{C}/\Omega$  e  $\mathbb{C}/\Omega'$  são isomorfos  $\iff$  seus lattices são similares, no sentido que  $\Omega' = \lambda\Omega$  para algum  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  e  $\lambda\Omega = \{\lambda w \mid w \in \Omega\}$ . a quociente e a aplicação (aberta)  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  é a projeção usual, isto é, a aplicação que associa a cada  $z$  a sua orbita,  $\Omega \bullet z$ . De fato,  $\mathbb{C}/\Omega$  Mais conveniente é trabalhar com o quociente  $P/\Omega$  em vez de  $\mathbb{C}/\Omega$ . Aqui,  $P \subset \mathbb{C}$  é um subconjunto de  $\mathbb{C}$  fechado e conexo satisfazendo:

- (a) Para cada  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P$  contem ao menos um ponto de  $\Omega \bullet z$
- (b) Um par de em  $\text{Int}(P)$  não pertencem à mesma  $\Omega$ -orbita.

Um subconjunto  $P$  em  $\mathbb{C}$  satisfazendo isto é chamado de *uma região fundamental*. Por exemplo, o paralelogramo de vertices  $0, w_1, w_2$  e  $w_1 + w_2$  é uma região fundamental. Assim como o de vertices  $0, w_1, w_1 + w_2$  e  $2w_1 + w_2$ . Portanto, existem infinitas formas de encher ou ladrilhar a  $\mathbb{C}$  com  $P$  e suas infinitas copias. De fato, existe uma especial Região de Dirichlet....

A superfície de Riemann o quociente  $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z} := \{[z]_{\mathcal{R}} \mid z \in \mathbb{C}\}$  do plano complexo pelo grupo aditivo  $2\pi\mathbb{Z}$ , com  $\mathcal{R}$  a relação que identifica dois pontos  $z_1$  e  $z_2$  se, e somente se,  $z_1 = z_2 + 2\pi n$  com  $n \in \mathbb{Z}$ . Munido da topologia

quociente  $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$  é topologicamente equivalente ao cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Um raciocínio análogo ao que foi feito no toro permite colocar uma estrutura holomorfa em  $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ . Com efeito, para cada  $z \in \mathbb{C}$ , a bola aberta  $B = B(z; 1/2)$  é projetada bijectivamente pela projeção  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$  sobre o cilindro. Assim, cobrimos a este com a coleção  $\mathcal{A} = \{U, \psi|_B\}$ , com  $U = \pi(B)$  e  $\psi$  uma inversa local de  $\pi$  restrita à bola  $B$ . Com esta estrutura,  $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$  é isomorfo ao complementar de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  pelo isomorfismo holomorfo induzido por  $z \mapsto e^{iz}$ .

O importante destas construções é que podem ser generalizadas para munir a qualquer quociente  $R/\Gamma$  de uma estrutura holomorfa, sempre que  $R$  seja uma superfície de Riemann e  $\Gamma$  agindo em  $R$  por automorfismo holomorfos de forma *livre e propriamente descontinuamente*. Ver [Don].

Por outro lado, se  $\Gamma$  contém elementos elípticos, então  $R \simeq \mathbb{H}/\Gamma$  é uma superfície de Riemann *orbifold*<sup>1</sup>. O exemplo clássico é a esfera orbifold  $\mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  com um buraco a qual é topologicamente o plano menos um ponto,  $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ .

3. A *esfera de Riemann*  $\widehat{\mathbb{C}}$ : Podemos pensar em  $\widehat{\mathbb{C}}$  ou como a *compactificação* de  $\mathbb{C}$  por um ponto no infinito, isto é, a compactificação de Alexandrov do plano complexo, ou como a esfera unitária  $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ , ou como a linha projetiva complexa  $\mathbb{CP}^1$ . Por exemplo, ao se considerar como a esfera  $\mathbb{S}^2$ . Então, os abertos  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ , a esfera menos o polo norte, e  $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ , a esfera menos o polo sul, cobrem a esfera. Além disso, as duas cartas  $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \phi_N)$ , com  $\phi_N$  sendo a projeção estereográfica sobre  $N$  definida como

$$\phi_N: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}; (x, y, z) \mapsto \frac{x + iy}{1 - z}$$

e  $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \phi_S)$ , com  $\phi_S$  sendo a projeção estereográfica sobre o polo sul  $S$ , isto é,

$$\phi_S: \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}; (x, y, z) \mapsto \frac{x - iy}{1 + z}$$

Portanto,  $\mathbb{S}^2$  provido com o atlas  $\mathcal{A}$  consistindo destas duas únicas cartas é uma superfície de Riemann. Por outro lado, ao se considerar a esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  como a união disjunta do plano complexo  $\mathbb{C}$  junto com o *ponto no infinito*  $\infty$ , isto é,  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Então, provido com *topologia de Alexandrov*, os abertos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  são: abertos usuais em  $\mathbb{C}$  e abertos da forma  $\{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus K)$ , onde  $K$  é qualquer subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$ . Claramente, munido desta topologia  $\widehat{\mathbb{C}}$  é um espaço topológico compacto e Hausdorff. Pode-se provar que a coleção  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1,2}$  formado pelas duas únicas cartas holomorfas  $(U_1, \phi_1) = (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}, id_{\mathbb{C}})$  e  $(U_2, \phi_2) = (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \phi_2)$  com

$$\phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{se } z \in \mathbb{C}^*, \\ 0 & \text{se } z \in \{\infty\} \end{cases}$$

é um atlas holomorfo para  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  e portanto fornece uma estrutura holomorfa ao plano estendido. De fato, desde o ponto de vista da teoria de superfícies de Riemann a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  e o plano estendido são idênticas via a projeção estereográfica sobre  $N$ . Como é usual identificamos ao plano complexo  $\mathbb{C}$  com o plano  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$  identificando o ponto  $z = x + iy$  com o ponto  $(x, y, 0)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Assim que, se indicamos por  $N$  o polo norte de  $\mathbb{S}^2$ , então a projeção estereográfica de  $N$  a qual indicamos por  $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}; Q \mapsto P \in \mathbb{C}$ , com  $P \in \mathbb{C}$ ,  $Q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ , e  $N, P$  e  $Q$  estão alinhados, é um homeomorfismo entre a esfera menos o polo norte e o plano  $\mathbb{C}$ . Definindo  $\pi(N) = \infty$  extendemos o homeomorfismo a toda  $\mathbb{S}^2$ .

Já que  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  é 3-transitivo, então a esfera de Riemann menos um ponto  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p\}$  é isomorfa ao plano complexo  $\mathbb{C}$ . De fato, via a função exponencial temos uma equivalência conforme entre o cilindro  $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$  e  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ . Mais ainda, para quaisquer dois pontos  $p, q \in \widehat{\mathbb{C}}$  tem-se  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}/\mu\mathbb{Z}$ , para algum  $\mu \in \mathbb{C}$ . Finalmente, a esfera de Riemann com qualquer três pontos removidos são todas isomorfas

A continuação enunciamos o análogo ao *Teorema de Killing-Hopf* [] para superfícies de Riemann, e que segundo Ahlfors [], é o resultado mais importante na teoria de funções analíticas de uma variável: O *Teorema de uniformização* afirma que, salvo isomorfismo, as únicas superfícies de Riemann simplesmente conexas são: a esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ , o plano complexo  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  (segue do Teorema de Liouville que estas sejam as únicas possibilidades)

**Teorema 1.1.2** (*Teorema de uniformização*). *Se  $R$  é uma superfície de Riemann simplesmente conexa, então  $R$  é conformemente isomorfa a exactamente uma das seguintes superfícies: a esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ , ao plano complexo  $\mathbb{C}$ , ou, ao disco unitário  $\mathbb{D} \simeq \mathbb{H}$ .*

Onde a aplicação mas importante é a recobrimentos em [9], [?] [?] é o Teorema abaixo.

**Teorema 1.1.3.** *Se  $R$  é uma superfície de Riemann que não é conformemente isomorfa á esfera, nem ao plano, nem a  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ou a um 2-toro complexo  $\mathbb{C}/L$  para algum lattice. Então,  $R$  tem recobrimento universal  $\tilde{R}$  conformemente isomorfo a  $\mathbb{H}$ . Mais ainda  $R$  é isomorfa ao quociente  $\mathbb{H}/\Gamma$ , onde  $\Gamma$  é grupo fuchsiano, livre de torção.*

Em particular, tal Teorema mostra que toda superfície de Riemann  $R$  pode-se obter como o quociente de  $\hat{R} = \widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  modulo um subgrupo  $G$  dos automorfismos conformes,  $\text{Aut}(\hat{R})$ , e que de fato, a maioria de superfícies de Riemann, salvo as exceções acima mostradas, tem recobrimento  $\mathbb{H}$ . de

**Corolário 1.1.4.** (*O teorema de uniformização para recobrimentos, em [Mard]*) *Seja  $R$  uma superfície de Riemann e  $\tilde{R}$  seu recobrimento universal<sup>2</sup>. Então,  $\tilde{R}$  é conformemente isomorfo a*

- $\widehat{\mathbb{C}} \Leftrightarrow R$  é isomorfa a  $\widehat{\mathbb{C}}$ ;
- $\mathbb{C} \Leftrightarrow R$  é isomorfa a  $\mathbb{C}$ , ou  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ou toro;
- $\mathbb{D}$  em todos os outros casos.

**Definição 1.1.5** (*Estrutura hiperbólica*). Uma superfície de Riemann (**SR**)  $R$  tem *estrutura hiperbólica* ou é *hiperbólica*  $\iff$  existe em  $R$  uma métrica Riemanniana,  $g_R$ , conforme, completa, de área finita, de curvatura Gaussiana constante e negativa.

**Definição 1.1.6** (*Superfície de tipo topológico finito*). Uma superfície  $\hat{S}$ , diz-se *de tipo topológico finito* ou simplesmente de *tipo finito* se é homomorfa ao complementar de um conjunto finito de pontos de uma superfície compacta.

**Definição 1.1.7** (*Modelo fuchsiano*). Seja  $R$  uma **SR** tal que  $\tilde{R} \simeq \mathbb{H}$ . Um modelo fuchsiano  $\Gamma \subset \text{PSL}_2(R)$  associado a  $R$  é um subgrupo discreto de  $\text{PSL}_2(R)$  tal que  $R \simeq \mathbb{D}/\Gamma$ .

**Definição 1.1.8** (*Discos de Poincaré*). Um *disco de Poincaré* [?] é qualquer superfície Riemanniana com métrica de curvatura Gaussiana constante igual a  $-1$ . Aqui, nesta tese, trabalhamos com  $\mathcal{D}_1 := (\mathbb{D}, ds_{\mathbb{D}}^2)$  com  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ , o disco unitario em  $\mathbb{C}$  munido da métrica Riemanniana

$$ds_{\mathbb{D}}^2 = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} |dz|^2; \quad (\text{métrica de Poincaré do disco})$$

ou  $\mathcal{D}_2 := (\mathbb{H}, ds_{\mathbb{H}}^2)$  com  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$  o semiplano superior em  $\mathbb{C}$  munido com a métrica

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{(\Im(z))^2} |dz|^2; \quad (\text{métrica de Poincaré do semiplano}).$$

De fato, como variedades Riemannianas estes discos são isométricos via o difeomorfismo holomorfo, *transformação de Caley*,  $C(z) = \frac{z-i}{z+i} \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  de  $\mathbb{H}$ . Assim,  $ds_{\mathbb{H}}^2 = C^*(ds_{\mathbb{D}}^2)$ .

A métrica de Poincaré induz uma distância Riemanniana: *a distancia de Poincaré em  $\mathbb{D}$*  entre qualquer par de pontos  $p, q$  em  $\mathbb{D}d_{\mathbb{D}}^{hyp} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , (ou no semiplano), definida por:

$$d_{\mathbb{D}}^{hyp}(p, q) := \inf_{\gamma} l_{\mathbb{D}}^{hyp}(\gamma) \tag{1.1.1}$$

---

2

*Recobrimentos  $(\tilde{R}, p)$* : se  $R$  é uma superfície de Riemann. Então,  $(\tilde{R}, p)$  também sera! Mais ainda, com esta estrutura, uma aplicação de recobrimento  $p: \tilde{R} \rightarrow R$  é holomorfa e cada *transformação de recobrimento* é um automorfismo holomorfo de  $\tilde{R}$ . Especial interesse é quando  $\tilde{R}$  é simplesmente conexa. Neste caso,  $\tilde{R}$  é o recobrimento *universal* de  $R$ , no sentido de que se  $(\bar{R}, q)$  é qualquer recobrimento de  $R$ , então existe uma aplicação de recobrimento  $f: \tilde{R} \rightarrow \bar{R}$  tal que  $p = q \circ f$  que  $\tilde{R}$ . Isto é, recobre qualquer outra superfície que recobra a  $R$ .



Onde o infimo é tomado sobre o *comprimento hiperbólico*

$$l_{\mathbb{D}}^{\text{hyp}}(\gamma) := \int_{\gamma} \rho_{\mathbb{D}}(t) |dt|$$

de todas as curvas  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  suave por partes conectado a  $p$  com  $q$ .

**Exemplo 1.1.9** (*Outros discos de Poincaré*). O *Teorema da Aplicação de Riemann* implica que qualquer subdomínio próprio  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  simplesmente conexo seja uma superfície de Riemann hiperbólica, com métrica hiperbólica o *pull-back* do isomorfismo holomorfo (aplicação de Riemann) entre  $\Omega$  sobre  $\mathbb{D}$ . Assim,

$$ds_{\Omega} := f^*(ds_{\mathbb{D}}) = \rho_{\mathbb{D}}(f(z)) |f'(z)|. \quad (1.1.2)$$

Logo, qualquer *disco* ou semiplano em  $\mathbb{C}$  é um disco de Poincaré, aceitando que a curvatura Gaussiana seja um *invariante conforme*. Outros exemplos concretos de discos de Poincaré em [?]. Note que a métrica de  $\Omega$  em (1.1.2) não depende do isomorfismo holomorfo, portanto esta bem definida. Com efeito, se  $f$  é qualquer isomorfismo holomorfo entre  $\Omega$  sobre  $\mathbb{D}$ . Então, o conjunto  $\{h \circ f \mid h \in \text{Aut}(\mathbb{D})\}$  contém todos os isomorfismos holomorfos de  $\Omega$  sobre  $\mathbb{D}$ . Usando, o fato, que qualquer automorfismo do disco é uma isometria na métrica de Poincaré e a regra da cadeia, tem-se o resultado. Assim,  $ds_{\Omega}$  não depende da aplicação de Riemann que se escolha.

**Proposição 1.1.10.** • *As curvas minimizantes com respeito à distancia hiperbólica  $d_{\mathbb{D}}^{\text{hyp}}$  correspondem às curvas que são ou a interseção  $C \cap \mathbb{D}$ , com  $C$  sendo o único círculo euclidiano que passa por  $z$  e  $w$  ortogonal ao círculo  $\partial\mathbb{D} \subset \widehat{\mathbb{C}}$  ou diâmetros do disco.*

- $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}}^{\text{hyp}})$  é um espaço metricamente completo.
- A topologia métrica de  $\mathbb{D}$  induzida por  $d_{\mathbb{D}}^{\text{hyp}}$  é equivalente à topologia de subespaço que  $\mathbb{D}$  herda de  $\mathbb{C}$ .
- A curvatura de  $\mathbb{D}$  é  $-1$ .
- O grupo de isometrias orientadas,  $\text{Isom}^+(\mathbb{D})$  em  $\mathbb{D}$  coincide com o seu grupo de automorfismos  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Demonstração.* Fixemos  $0, r \in [0, 1) \subset \mathbb{D}$ . É claro que o segmento  $[0, r]$  é a curva minimizante, na métrica hiperbólica, conectando eles. De fato, se  $\beta$  é qualquer outra curva em  $\mathbb{D}$ , com os mesmos extremos, então

$$\int_{\beta} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \geq \int_{\beta} \frac{2|dx|}{1-|x|^2} \geq \int_{[0,r]} \frac{2dx}{1-x^2} = \log \frac{1+r}{1-r},$$

onde, a igualdade tem-se se e somente se  $\beta$  é  $[0, r]$ , em outras palavras o segmento é a projeção radial de  $\beta$ . Mais ainda, se  $z \in \mathbb{D}$  é qualquer ponto, então,

$$d_{g_{\mathbb{D}}}(0, |z|) = \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Portanto,  $d_{g_{\mathbb{D}}}(0, |z|)_{|z| \rightarrow 1} \rightarrow \infty$ , assim, teremos que um caminho conectando um ponto qualquer  $z_0 \in \mathbb{D}$  a um ponto do *bordo*  $\partial\mathbb{D} \subset \widehat{\mathbb{C}}$  tem comprimento hiperbólico infinito. Isto é uma consequência da completude do disco com a métrica hiperbólica. Agora, para descrever as geodésicas em  $\mathbb{D}$ , fixemos dois pontos quaisquer  $z_1$  e  $z_0$  no disco. Já que a ação do grupo de automorfismos em  $\mathbb{D}$  é 2-transitiva, então existe  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  tal que  $f(z_0) = 0 \in \mathbb{D}$  e  $f(z_1) = |\Re(z_1)| + 0i$ . E sabemos que o segmento  $[0, |\Re(z_1)|]$  é minimizante. Então, a curva  $f([0, |\Re(z_1)|])$ , imagem do segmento  $[0, |\Re(z_1)|]$  pela isometria  $f$  é a geodésica conectando  $z_1$  com  $z_2$  daí que seja ou um arco de círculo ortogonal ao círculo unitário ou um segmento radial.

Bastaria provar que a coleção de bolas métricas  $\mathcal{B} = \{B_{d_{g_{\mathbb{D}}}}(0; r)\}$  que fornece um sistema fundamental de vizinhanças para  $0 \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  é também um sistema fundamental de vizinhanças com respeito à métrica de subespaço. Daí que as duas tipologias coincidam na origem. E já que a aplicação  $z \mapsto \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$  aplica  $0$  em  $a \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ . Então, são as mesmas em qualquer ponto do disco.

Por outro lado, supondo  $\{z_j\}$  uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{D}$  na métrica hiperbólica. Então, é limitada, isto é, existe  $M > 0$  tal que  $||z_j|| \leq M$  para toda  $j \in \mathbb{N}$ . Logo,  $d_{g_{\mathbb{D}}}(0, z_j) = \log \frac{1+|z_j|}{1-|z_j|} \leq M$ . Se resolvemos esta desigualdade para  $|z_j|$ , então obtemos

$$|z_j| \leq \frac{e^{M-1}}{e^M + 1} < 1$$

Assim  $\{z_j\}$  esta contida em um compacto relativo  $K \subset \mathbb{D}$ . Se provamos que a seqüência é de Cauchy com respeito à métrica Euclidiana, então provaríamos que  $\mathbb{D}$  é metricamente completo com respeito a  $d_{g_{\mathbb{D}}}$ , pois se fosse, teríamos que a seqüência  $\{d_{\mathbb{R}^2}|_{\mathbb{D}}(z_j, a)\}$  é convergente, e  $a \in K$ , logo  $\{d_{g_{\mathbb{D}}}(z_j, a)\}$  é uma seqüência convergente. Portanto,  $\mathbb{D}$  é metricamente completo. Finalmente, por o *lema de Swartz-Pick* tem-se que

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{f_{\theta,a} \in \widehat{\mathbb{C}} \mid f_{\theta,a}(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}; \theta \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{D}\} \text{ ( lema de Pick).}$$

Se supomos  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , então,

$$\rho_{\mathbb{D}}(f_{\theta,a}(z))|f'_{\theta,a}(z)| = \frac{2|f'_{\theta,a}(z)|}{1-|f_{\theta,a}(z)|^2} \quad (1.1.3)$$

Um calculo na expressão acima mostra que  $\frac{2|f'_{\theta,a}(z)|}{1-|f_{\theta,a}(z)|^2} = 2\frac{1}{1-|z|^2} = \rho_{\mathbb{D}}(z)$ . Logo,  $f_{\theta,a}$  é uma isometria na métrica hiperbólica. Por outro lado, se supomos que  $f$  é uma isometria em  $\mathbb{D}$  e  $g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , então  $h = g \circ f$  é também uma isometria na métrica  $g_{\mathbb{D}}$ . Sem perda de generalidade,  $h(0) = 0$ , assim

$$2|h'(0)| = \rho_{\mathbb{D}}(h(0)) = \rho_{\mathbb{D}}(0) = 2,$$

Então,  $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  é uma aplicação holomorfa que fixa a origem e  $|h'(0)| = 1$  e pelo Schwarz,  $h$  é um elemento do subgrupo  $\text{Aut}(\mathbb{D}; 0)$  de automorfismos de  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ , que como é sabido coincide com o conjunto de rotações do plano complexo ao redor da origem,  $0 \in \mathbb{C}$ . Então,  $f = g^{-1} \circ h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

Seja  $\rho(z) |dz|$  qualquer métrica *conforme* e invariante por  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ , isto é, para qualquer  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e  $z \in \mathbb{D}$ ,  $\rho(f(z)) |f'(z)| = \rho(z)$ . Sabemos que  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  é da forma

$$f(z) = f_{\theta,a}(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}; \quad \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1$$

Quando  $\theta = 0$  e  $a = z$ , então

$$f_{0,z}(w) = \frac{w-z}{1-\bar{z}w}$$

daí que  $f_{0,z}(z) = 0$ , e, por tanto, dado  $\sigma \in T_z(\mathbb{D})$  a aplicação  $f'_{0,z}(z): T_z(\mathbb{D}) \rightarrow T_0(\mathbb{D})$  esta definida por  $f'_{0,z}(z)\sigma = \frac{\sigma}{1-|z|^2}$ . Aplicando a métrica  $\rho(z) |dz|$  ao vetor  $\sigma \in T_z(\mathbb{D})$ , temos que

$$(\rho(z) |dz|)\sigma = \rho(z)|\sigma| = \rho(0)|f'_{0,z}(z)\sigma| = \rho(0)\frac{\sigma}{1-|z|^2}.$$

Logo, a métrica  $\rho(z) |dz|$  é um multiplo escalar da metrica hiperbólica  $g_{\mathbb{D}}$ . A métrica de Poincare é a única métrica em  $\mathbb{D}$  que é invariante pela ação do grupo  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ .  $\square$

Claramente podemos passar da geometria de  $\mathbb{D}$ , pela isometria  $C$ , a estudar a geometria em  $\mathbb{H}$ . Por exemplo, para qualquer geodésica  $\gamma$  em  $\mathbb{D}$ , temos que  $C^{-1}(\gamma)$  é uma geodésica em  $\mathbb{H}$ : podendo ser um semi-círculo euclidiano ou uma semi-reta ortogonal ao círculo  $\partial\mathbb{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , bordo de  $\mathbb{H}$ .

Daí que resulte importante descrever os automorfismos holomorfos de cada uma dessas superficies. O conjunto de bijeções meromorfas na esfera de Riemann é  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \{T: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } \Delta = ad - bc \neq 0\}$ .

Com a operação de composição, como grupo é isomorfo ao *grupo linear especial projetivo*  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Assim,  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  agê por esquerda em  $\widehat{\mathbb{C}}$  segundo a regra

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Alem disso, é 3-transitivo e cada uns de seus elementos está completamente determinado por sua ação sobre qualquer três pontos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Já o grupo de automorfismos do plano complexo,  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  corresponde com o grupo de transformações afins  $\text{Aff}(\mathbb{C}) = \{az+b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$  em  $\mathbb{C}$ . Assim,  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  agê no plano segundo a regra  $(a, b) \cdot z = a + bz$ . Alem disso, o grupo é 2-transitivo e cada elemento esta determinado por sua ação sobre qualquer dois pontos de  $\mathbb{C}$

**Teorema 1.1.11.** •  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \text{PSL}_2(\mathbb{C});$

- $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \text{Aff}(\mathbb{C}) = \{az + b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$
- $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$

**Definição 1.1.12** (*bordo ideal ou círculo em infinito no disco de Poincaré*). Sabe-se que um círculo  $C$  na esfera de Riemann é ou um círculo Euclidiano usual ou um conjunto da forma  $L \cup \{\infty\}$ , com  $L$  um linha Euclidiana. Daí que, por exemplo,  $\mathbb{S}^1$  e  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  sejam círculos em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Diremos que um *disco*  $D$  em  $\widehat{\mathbb{C}}$  é uma componente conexa do complementar de um círculo na esfera de Riemann. Assim, o semi-plano superior  $\mathbb{H}$  é um disco em  $\widehat{\mathbb{C}}$ , uma componente conexa de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ . Declaramos a  $\partial\mathbb{H} := \widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , a *fronteira no infinito de  $\mathbb{H}$* , como a *borda* ou *fronteira* de  $\mathbb{H}$ . Assim, pontos em  $\partial\mathbb{H}$  são *pontos no infinito*. No modelo da bola a borda é  $C(\partial\mathbb{H}) = \mathbb{S}_\infty^1 = \mathbb{S}^1$ .

Não é difícil ver que dois pontos quaisquer no disco de Poincaré  $\mathcal{D}$  podem ser conectados por uma única *geodésica*, isto é uma curva que *realiza* a distância hiperbólica em  $\mathcal{D}$ . Mais ainda, dado  $p \in \mathcal{D}$  e  $q \in \overline{\mathcal{D}}$ . Então, eles determinam uma única linha hiperbólica (geodésica). Para fixar ideias, se  $\mathcal{D} = \mathbb{H}$  e  $q = \infty$ . Então, basta escolher a linha hiperbólica contida na linha Euclidiana  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = \Re(p)\}$ . Por outro lado, se  $\Re(q) \neq \Re(p)$  ( $q \neq \infty$ ), então o desenho abaixo mostra como construir a única geodésica  $C \cap \mathbb{H}$  passando por  $q$  e  $p$ , com  $C$  um círculo Euclidiano. A parte da linha geodésica entre  $p$  e  $q$  a chamaremos o *raio geodésico passando por  $p$  e com ponto final em infinito, o ponto  $q$* .

Assim que uma outra forma de definir a *fronteira* do disco de Poincaré é via uma relação de equivalência  $\mathcal{R}$  que identifica dois raios geodésicos  $\gamma_1, \gamma_2: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{D}$  se eles estão a distancia hiperbólica limitada, isto é existe  $D > 0$  tal que  $d_{\mathbb{H}}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq D$  para todo  $t \in [0, \infty)$ . Assim,

$$\partial\mathcal{D} := \{\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^2 \text{ raio geodésico}\} / \mathcal{R}.$$

Note que  $\gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2$  se, e somente se,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_2(t)$  em  $\partial\mathcal{D}$ . Pois todo raio geodésico em  $\mathcal{D}$  converge ao um ponto da borda do disco de Poincaré  $\mathcal{D}$ . É possível munir à união  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$  de uma topologia, ver [] tal que a borda  $\partial\mathcal{D}$  seja homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ , círculo unitário no plano euclidiano, e  $\overline{\mathcal{D}}$  seja homeomorfa ao disco fechado unitário, e portanto compacto. Mais ainda, com está topologia toda isometria  $f \in \text{Isom}^+(\mathcal{D})$  pode se estender a um único homeomorfismo  $\overline{f}: \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ . Portanto, sendo  $\overline{\mathcal{D}}$  um disco fechado e  $\overline{f}$  um homeomorfismo, então o *Teorema do ponto fixo Brouwer* [] assegura a existência de pelo menos um ponto fixo de  $\overline{f}$  na clausura de  $\mathbb{D}$ . Obtendo assim a seguinte classificação dos elementos em  $\text{Isom}^+(\mathcal{D})$  considerando o numero de pontos fixos de  $\overline{f}$  em  $\overline{\mathcal{D}}$ . Para fixar ideias consideramos o disco  $\mathcal{D}_2$ . Então, já que  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  com respeito a  $\frac{1}{\Im(z)^2} dz d\bar{z}$  dada  $\overline{\phi}: \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$  bastara analisar, salvo conjugação, a sua representação matricial em  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

(Equação para pontos fixos)  $z = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$ . Então,

- *Elíptica*: transformações para as quais  $|a + d| < 2$ : raízes são complexas. Assim, cada transformação elíptica tem, portanto, um ponto fixo em  $\overline{\mathbb{H}}$ , de fato, em  $\mathbb{H}$ . Toda transformação elíptica é *conjugada* a uma única transformação da forma  $\frac{\cos(\theta)z + \sin(\theta)}{-\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$  para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ . Note-se que no disco  $\mathcal{D}$  a transformação é simplesmente a rotação  $z \mapsto e^{i\theta}z$
- *hiperbólica*: caracterizadas por  $|a + d| < 2$ . Daí que raízes sejam reais. Uma transformação parabólica  $\phi$  tem exatamente dois pontos fixos  $p^+$ , *atractivo* e  $p^-$ , *repulsor*, no círculo em infinito  $\partial\mathbb{H}$ . Se por exemplo, uns deles é 0 e o outro é  $\infty$ , então, a matriz que representa uma transformação hiperbólica é  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ , assim é  $\phi(z) = a^2z$ , uma dilatação. Note-se que ser repulsivo ou atractor é no sentido de que se  $z \neq p^+ \in \overline{\mathbb{H}}$ , então,  $\phi^n(z) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} p^+$  e, analogamente,  $\phi^n(z) \rightarrow_{n \rightarrow -\infty} p^-$ . Finalmente,
- transformações *parabólicas*: caracterizadas por  $|a + d| = 2$ . Assim, têm duas raízes reais e iguais. Portanto, exactamente um ponto fixo em  $\overline{\mathbb{H}}$ , de fato, em  $\partial\mathbb{H}$ . Usando  $\infty$  como ponto fixo, então,  $c = 0$  e a matriz é  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ , com  $a = \pm 1$ . Daí que a matriz para à transformação parabólica que fixa o infinito é  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , que correspondem com transformações horizontais  $z \mapsto z + b$ . Note-se também que estas preservam *horociclos*, isto é, a curva  $C \setminus \{x\}$  em  $\mathbb{H}$  centrada em um ponto  $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , com  $C$  sendo um círculo Euclidiano tangente a  $\partial\mathbb{H}$  em  $x$ . Se  $x = \infty$ , então,  $C \setminus \{x\}$  é a linha horizontal.

**Definição 1.1.13** (*métrica de Poincaré*). Se  $\tilde{R} \simeq \mathbb{H}$ , munido da sua estrutura hiperbólica  $ds_{\mathbb{H}} = \rho_{\mathbb{H}}(z)|dz| = \frac{1}{\Im(z)}|dz|$ . Então,  $R$  tem estrutura hiperbólica  $ds_R := \rho_R(w)|dw|$ , com *densidade hiperbólica*  $\rho_R(w)$  dada por:

$$\rho_R(w) := \frac{\rho_{\mathbb{H}}(z)}{|\pi'(z)|}; \quad z \in \pi^{-1}(w)$$

e  $\pi: \mathbb{H} \rightarrow R$  a aplicação de recobrimento universal.

Por Uniformização *quase* toda **SR** tem associado um modelo fuchsiano, em outras palavras, quase toda **SR** é hiperbólica. Assim, salvo a esfera, o toro, o plano e o cilindro toda superfície de Riemann é o quociente  $\mathbb{H}/\Gamma$ , com  $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  um grupo fuchsiano (sem pontos fixos).

Já que  $\text{Deck}(\mathbb{D})$ , o grupo de automorfismos de recobrimento coincide com o grupo de automorfismos holomorfos  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ , e este por sua vez coincide com  $\text{Isom}^+(\mathbb{D})$ . Então, se uma superfície de Riemann  $R$  é hiperbólica, munimos-a, naturalmente, com a métrica do seu recobrimento induzida pela projeção  $\pi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/\Gamma$ , uma vez que a identificamos, como superfície de Riemann, com  $\mathbb{D}/\Gamma$  e  $\Gamma$  um subgrupo das isometrias em  $\mathbb{D}$ . Em outras palavras, sendo a métrica de Poincaré de  $\mathbb{D}$  invariante por  $\Gamma$ , então munimos a  $R$  com a *métrica do recobrimento*  $\mathbb{D}/\Gamma$  induzida por  $\pi$ . A *métrica de Poincaré*  $ds_R^2$ , a qual satisfaz a condição:

$$\pi^*(ds_R^2) = ds_{\mathbb{D}}^2. \quad (1.1.4)$$

Disto se  $z \in \mathbb{D}$  e  $w = \pi(z)$  a correspondente coordenada. Então, a *densidade de Poincaré de R* é:

$$\rho_R(\pi(z)) |\pi'(z)| = \rho_{\mathbb{D}}(z) \quad (1.1.5)$$

$$\rho_R: R \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ definida por } \rho_R(w) = \frac{\rho_{\mathbb{D}}(z)}{|\pi'(z)|} \quad z = \pi^{-1}(w)$$

Note que como  $\pi$  é *regular*, então a métrica acima não depende do representante que se escolhe na fibra  $\pi^{-1}(w)$ , nem do recobrimento, pois se  $q: \mathbb{D} \rightarrow R$  é outro recobrimento, então da unicidade do recobrimento universal tem-se que  $q = p \circ f$  para algum  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Assim,  $q^*(g_R) = (p \circ f)^*(g_R) = f^*(p^*(g_R)) = f^*(g_{\mathbb{D}}) = g_{\mathbb{D}}$ .

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{R} & \\ p \swarrow & & \searrow \pi \\ R & \xrightarrow{q} & \tilde{R}/\Gamma \end{array}$$

Em geral, não é possível obter uma fórmula explícita da densidade de Poincaré ou densidade hiperbólica (1.1.5), pois a prova do Teorema de Uniformização não é construtiva. Em [?] Pommerenke e Beardon estudam estimativas para a densidades de certas *superfícies de Riemann hiperbólicas planas*, em específico  $\mathbb{C} \setminus K$ , onde  $K$  é um compacto ou  $K$  é um *grupo de Schottky clássico*. Um exemplo clássico é uma *upper bound* para uma *superfície de Riemann hiperbólica plana* qualquer, isto é qualquer subdomínio em  $\mathbb{C}$  cujo complementar tem pelo menos dois pontos.

**Exemplo 1.1.14** (*Densidade não é explícita*). Seja  $R$  uma *superfície de Riemann hiperbólica plana*, então  $\text{Card}(\mathbb{C} \setminus R) \geq 2$ . Dado qualquer  $z \in R$ , quer-se estimar  $\rho_R(z)$ . Fixemos um ponto  $z_0 \in R$ , e escolhamos a *maior bola*  $B = B(z, R) \subset R$  contida em  $R$  centrada em  $z_0$  e radio  $\delta_R(z_0) := \text{dist}(z, \partial R) = \inf\{d_{\mathbb{C}}(z, w) \mid w \in \partial R\} > 0$ . Pela *propriedade de monotonicidade* da métrica hiperbólica tem-se  $\rho_R(z_0) \leq \rho_B(z_0)$ . Assim,

$$\rho_R(z_0) \leq \rho_B(z_0) = \frac{2}{\delta_R(z_0)}, \quad \forall z_0 \in R$$

Mais ainda, se  $R$  for simplesmente conexo. Então,

$$1/2\delta_R(z_0) \leq \rho_R(z_0) \leq 2/\delta_R(z_0)$$

Com efeito, decorre do Teorema da aplicação de Riemann a existencia de um isomorfismo holomorfo  $f : \mathbb{D} \rightarrow R$ , normalizado por  $f(0) = z_0$  e  $f'(0) > 0$ . Sendo  $f$  uma isometria na métrica hiperbólica de  $\mathbb{D}$ , então

$$\rho_R(f(0))|f'(0)| = \rho_{\mathbb{D}}(0) = 2.$$

Se Considerarmos a aplicação holomorfa  $\psi(z) = \frac{f(z)-z_0}{f'(0)}$  em  $\mathbb{D}$ . Como  $\psi(0) = 0$  e  $\psi'(0) = 1$ ; decorre do *Teorema 1/4 de Koebe* que a bola  $B(0; 1/4) = \{w : |w| < 1/4\} \subset \psi(\mathbb{D})$ . Assim que para todo ponto  $w \in B(0; 1/4)$  existe um  $z \in \mathbb{D}$  tal que,

$$\frac{|f(z) - z_0|}{|f'(0)|} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |f(z) - z_0| < \frac{f'(0)}{4},$$

logo,  $f(\mathbb{D}) = \Omega$  contém uma bola com centro  $z_0$  e de raio  $\frac{f'(0)}{4}$ . Portanto,

$$\delta_{\Omega}(z_0) \geq \frac{f'(0)}{4} = 1/2\rho_R(z_0).$$

Logo, as densidades  $\rho_R$  e a  $1/\delta_R$  são funções bi-Lipschitz equivalentes, isto é, se satisfaz a desigualdade

$$1/2\delta_R(z_0) \leq \rho_R(z_0) \leq 2/\delta_R(z_0)$$

De fato,  $\frac{1}{\delta_U}|dz|$  é a  $1/d$ -métrica de  $U$ , sendo  $U$  qualquer um subdomínio de  $\mathbb{C}$  com pelos menos dois pontos de bordo. E por exemplo, a métrica  $1/d$ -métrica de qualquer semiplano aberto  $B$  em  $\mathbb{C}$  coincide com a métrica hiperbólica deste, isto é,  $\rho_B(z)|dz| = \frac{1}{\text{dist}(z, \partial B)}|dz|$ . Superfícies hiperbólicas como  $R$  são conhecidas na literatura como *uniformemente perfeitas*<sup>3</sup>. Um exemplo simple de domínio uniformemente perfeito é o disco  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ , e um não exemplo é, o disco furado  $\mathbb{D}^*$ . De fato, qualquer subdomínio  $\Omega$  em  $\mathbb{C}$  multiplesmente conexo (podendo ser infinitamente) cujo complementar tenha pelo menos dois pontos (mais  $\infty$ ) é uniformemente perfeito, ver [BP] ou [P]: existe uma constante  $C = C(\Omega)$  tal que

$$\frac{C}{2 \text{dist}(z, \partial\Omega)} \leq \rho_{\Omega}(z) \leq \frac{2}{\text{dist}(z, \partial\Omega)}.$$

Resumimos algumas propriedades da densidade de uma superfície hiperbólica na seguinte proposição, ver [?], [?].

**Proposição 1.1.15** (Algumas propriedades da densidade). *Seja  $R$  uma superfície hiperbólica e  $\rho_R$  a densidade hiperbolica. Então,*

- A função densidade  $\rho_R$  é continua e estritamente positiva;
- $\rho_R$  satisfaz a equação em derivadas parciais  $\Delta \log \rho_R = \rho^2$ ;
- A métrica hiperbólica é monotona

A propriedade de *contração da métrica hiperbólica* é o Lemma de Schwarz-Pick]: Sejam  $X$  e  $Y$  são duas superfícies de Riemann hiperbólicas e  $f : X \rightarrow Y$  é uma função holomorfa de  $X$  em  $Y$ . Então,  $f$  é uma *contração* na métrica hiperbólica, isto é:

$$\rho_Y(f(z))|f'(z)| \leq \rho_X(z); \forall z \in X.$$

Onde, temos a igualdade, se  $f$  é uma aplicação de recobrimento. Por hipótese, as superfícies  $(X, g_X)$  e  $(Y, g_Y)$  são recobertas pelo disco  $\mathbb{D}$ . Indica-se por  $p_X : \mathbb{D} \rightarrow X$  e por  $p_Y : \mathbb{D} \rightarrow Y$  de  $X$  e  $Y$  os recobrimentos (universais)

<sup>3</sup>domínios que tem densidade hiperbólica equivalente á função densidade  $\frac{1}{\delta_R(z)}$ , equivalente significa aqui, que existe uma constante  $C = C(R)$  que depende só do domínio  $R$ , tal que

$$\frac{1}{C\delta(z)} \leq \rho_R(z) \leq \frac{C}{\delta(z)}.$$

holomorfos de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Seja  $F := \tilde{f}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  um levantamento holomorfo de  $f$ . Logo, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{F} & \mathbb{D} \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$$= F^*(p_Y^*(g_Y)) = F^*(g_{\mathbb{D}})$$

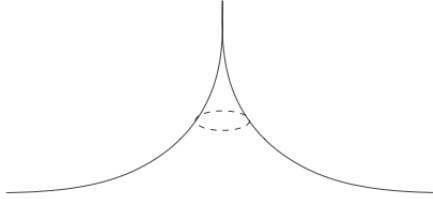
e pelo Lema de Schwarz-Pick no disco,  $F^*(g_{\mathbb{D}}) \leq g_{\mathbb{D}}$  e sendo  $p_X$  uma isometria local, então  $g_{\mathbb{D}} = p_X^*(g_X)$ . Logo,  $p_Y^*(f^*(g_Y)) \leq p_X^*(g_X)$ . Finalmente, usando o fato de que  $p_X$  é uma aplicação de recobrimento; portanto, sobreyetora e localmente um homeomorfismo, temos a desigualdade acima para todo  $z \in X$ . De fato, se  $f: X \rightarrow Y$  fosse um recobrimento, então temos a igualdade para todo  $z \in X$ ; pois  $f$  é um recobrimento se, e somente se,  $F$ , levantamento de  $f$ , é também.

**Exemplos 1.1.16.** (*Densidade é explícita*)

- *O disco com um furo*, o complementar  $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$ , é uma superfície hiperbólica (embora,  $\pi_1(\mathbb{D}^*)$  seja isomorfo ao grupo  $\mathbb{Z}$ ). Com efeito,  $\mathbb{H}$  é o recobrimento universal de  $\mathbb{D}^*$  com aplicação de recobrimento  $z \mapsto e^{2i\pi z}$ . Mais ainda, a densidade hiperbólica está determinada explicitamente por:

$$\rho_{\mathbb{D}^*}(w) = \frac{1}{|w| \log \frac{1}{|w|}}.$$

Para isto, seja  $\xi \in T_z \mathbb{H}$ , então existe uma curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}$ , com  $\gamma(0) = 0$  e  $\gamma'(0) = \xi$ . Se  $v \in T_w \mathbb{D}^*$ ; então  $v = dp(z) \xi = (\pi \circ \gamma)'(0)$ . Portanto,  $g_{\mathbb{D}^*}(v) = (\rho(w)|dw|) v = \rho(w)|v| = \rho(w)|ie^{iz}||\gamma'(0)| = \rho_{\mathbb{H}}(z)|\xi| = \frac{1}{3z}|\xi|$  e sendo  $\xi \neq 0$ , então  $\rho(w) = \frac{1}{|w| \log \frac{1}{|w|}}$ .



- Um *anel*  $A$  é isomorfo ao plano com um furo  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ou a um *anel redondo*  $A_M := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e^{2\pi M}\}$ , para exatamente um valor de  $M \in (0, \infty)$ , que é o módulo  $\text{Mod}(A)$  de  $A$ . O disco furado  $\mathbb{D}^*$  é isomorfo ao exterior do disco  $A_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$ . Calculemos a densidade família de anéis  $A_b = \{z \in \mathbb{C} \mid b < |z| < 1\}$ , indexados por um número  $b$ , com  $0 \leq b < 1$  é também hiperbólica. Esta vem dada por:

$$\rho_{A_b}(z) = \left( \frac{\pi}{|z|\lambda} \right) \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \ln \frac{1}{|z|}\right)}. \quad (1.1.6)$$

Com efeito, se  $b = 0$ , então a métrica hiperbólica  $g_{A_b}$  de  $A_b$  coincide com a métrica do disco furado. Seja  $0 < b < 1$ . Então para determinar  $\rho_{A_b}(z)$  basta provar:

1. A aplicação  $g$  da faixa  $F = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im(w) < \lambda\} \subset \mathbb{C}$  sobre o anel  $A_{e^\lambda}$  definida por  $g(w) = e^{iw}$  é recobrimento regular.
2. A faixa  $F$  é hiperbólica com densidade hiperbólica explícita

$$\rho_F(w) = \left( \frac{\pi}{\lambda} \right) \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi \Im(w)}{\lambda}\right)}.$$

Com efeito, a faixa  $F$  é isomorfa a  $\mathbb{H}$  via o isomorfismo (aplicação de Riemann)  $f: \mathbb{H} \rightarrow F$  definido por  $w = f(z) = \frac{\lambda \ln z}{\pi}$ . Então,

3. Pondo  $b = e^{-\lambda}$  obtém-se a formula.

**Exemplo 1.1.17** (*A menor densidade*). Para qualquer subdomínio plano  $R$  com  $\text{Card}(\mathbb{C} \setminus R) \geq 2$ , tem-se que o plano menos dois pontos tem a *menor densidade*. Mais ainda se  $p, q \in \mathbb{C} \setminus R$ . Então,  $R \subset \mathbb{C} \setminus \{p, q\}$ . Assim que, aplicando o Lema de Schwarz-Pick à inclusão  $i: R \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{p, q\}$  temos que  $\rho_R(z) \geq \rho_{\mathbb{C} \setminus \{p, q\}}(z) = \rho_{p, q}(z)$ . Decorre da propriedade da monotonicidade da métrica hiperbólica que

$$\rho_R(z) \geq \sup_{p, q} \rho_{p, q}(z); \quad \forall z \in R \quad (1.1.7)$$

onde o supremo é tomado sobre todos os pares de pontos  $p, q \in \mathbb{C} \setminus R$ . E já existe uma formula para a densidade hiperbólica  $\rho_{p, q}$  do plano menos dois pontos, ver []. Então, a desigualdade (1.1.7) dá uma cota inferior para a densidade  $\rho_R$  de  $R$

**Proposição 1.1.18.** *Suponha  $R$  é uma superfície hiperbólica. Então,*

1.  $d_R(p, q) = \inf\{d_{\mathbb{D}}(t, s) \mid t, s \in \mathbb{D}, \pi(t) = p, \pi(s) = q\}$ ;
2.  $(R, d_R)$  é metricamente completo.
3. Para quaisquer dois pontos  $p, q$  em  $R$ , existe ao menos um geodésica  $\gamma$  os conectando.

*Demonstração.* (1): Seja  $X$  uma superfície hiperbólica e  $Y$  um domínio plano. Suponha  $g$  um recobrimento regular holomorfo de  $X$  sobre  $Y$ . Então,  $g \circ \pi$  é o recobrimento universal de  $Y$ . E já que  $g$  é regular, dada qualquer curva em  $Y$  esta pode ser levantada, de fato, a levantamos primeiro a  $X$  por qualquer ramo inverso de  $g$  e depois levantamos sua curva pré-imagem a  $\mathbb{D}$  por qualquer ramo inverso de  $\pi$ . Supomos...Assim, aplicando a expressão para densidade de Poincaré de uma superfície temos que

$$\rho_X(t) = \frac{\rho_{\mathbb{D}}(s)}{|\pi'(s)|}$$

e

$$\rho_Y(z) = \frac{\rho_{\mathbb{D}}(s)}{|(g \circ \pi)'(s)|}$$

Igualando e aplicando regra de cadeia temos  $\rho_X(t) = \rho_Y(g(t))|g'(t)|$ . Dai que  $g$  preserve o comprimento hiperbólico de qualquer curvas, isto é  $L_X(\gamma) = L_Y(g(\gamma))$ . Assim, uma expressão para a distância entre quaisquer par de pontos  $z, w \in Y$  é dada por:

$$d_Y(z, w) = \inf\{d_X(t, s) \mid t, s \in X, g(t) = z, g(s) = w\}$$

Em particular, se  $X = \mathbb{D}$ ,  $Y = R$  e  $g = \pi$ , então, temos a igualdade

$$d_R(p, q) = \inf\{d_{\mathbb{D}}(t, s) \mid t, s \in \mathbb{D}, \pi(t) = p, \pi(s) = q\}$$

(2) é um resultado clássico de geometria riemanniana. Com efeito, sendo o par  $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$  metricamente completo; decorre do Teorema de Hopf-Rinow que  $(\mathbb{D}, d_{\text{hip}}^{\mathbb{D}})$  seja geodesicamente completo, e sendo  $\pi: \mathbb{D} \rightarrow R$  uma isometria local; então sua inversa local é, também, uma isometria. Assim, se supomos que  $\gamma: (\epsilon, -\epsilon) \rightarrow R$  é uma geodésica, com  $\gamma(0) = p \in R$  e  $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} = v$ . Então, podemos estender a uma geodésica para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Pois, existe um levantamento  $\tilde{\gamma}: (\epsilon, -\epsilon) \rightarrow \tilde{R}$  (único) de  $\gamma$ , com  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ , sendo  $\tilde{p}$  qualquer ponto em  $\pi^{-1}\{p\}$ , também resulta ser geodésica, logo, a geodésica  $\pi \circ \tilde{\gamma}$  é a extensão de  $\gamma$  a todo  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $R$  é geodesicamente completo, e portanto metricamente completo.

(3): Sejam  $p$  e  $q$  dois pontos quaisquer em  $R$ . Então, sendo  $\pi$  sobre, existem pontos  $x, y \in \mathbb{D}$  tais que  $\pi(x) = p$ ,  $\pi(y) = q$ . Mais ainda, sendo  $\pi$  uma isometria (local),  $d_{\mathbb{D}}(x, y) = d_R(\pi(x), \pi(y)) = d_R(p, q)$ . E já que sempre existe uma curva  $\gamma$ , de fato única, em  $\mathbb{D}$  que realiza a distancia entre  $x$  com  $y$ , então  $\pi \circ \gamma$  é uma geodésica em  $R$  conectando  $p$  com  $q$ . Com efeito,  $d_R(p, q) = d_{\mathbb{D}}(x, y) = L_{\mathbb{D}}(\gamma) = L_R(\pi(\gamma))$ .  $\square$

**Lema 1.1.19.**  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$

**Definição 1.1.20** (*Grupo Fuchsiano*). Um grupo fuchsiano é um subgrupo discreto de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

**Exemplo 1.1.21** (*Modelo fuchsiano de  $\mathbb{D}^*$* ).

**Observação 1.1.22.** *Uma propriedade algébrica de um grupo fuchsiano:* Todo grupo fuchsiano abeliano é cíclico! Assim, toda superfície de Riemann  $R$  com gênero  $g(R) = 1$  é isomorfa a  $\mathbb{C}/L$  para algum lattice. Com efeito, se supomos que  $R$  é recoberta por  $\mathbb{H}$ . Então,  $R \simeq \mathbb{H}/\Gamma$ , com  $\Gamma$  fuchsiano, que é absurdo, pois  $\Gamma$  é isomorfo a  $\pi_1(R)$  que por sua vez é isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Por outro, lado todo elemento de  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  diferente à identidade fixa pelo menos um ponto. Portanto, por uniformização  $\widetilde{R}$  é isomorfa a  $\mathbb{C}$ , e, assim,  $R$  é isomorfa a  $\mathbb{C}/L$  para algum lattice  $L$ .

Finalmente, sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  dois grupos fuchsianos (sem elementos elípticos) que uniformizam a duas superfícies de Riemann  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente. Então,  $R_1 = \mathbb{H}/\Gamma_1$  e  $R_2 = \mathbb{H}/\Gamma_2$  são isomorfas, salvo classes de conjugação por transformações de Möbius.

**Teorema 1.1.23.**  $\mathbb{H}/\Gamma_1$  e  $\mathbb{H}/\Gamma_2$  são isomorfas se, e somente se, existe uma transformação  $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  tal que  $T\Gamma_1T^{-1} = \Gamma_2$ .



## CAPÍTULO

# 2

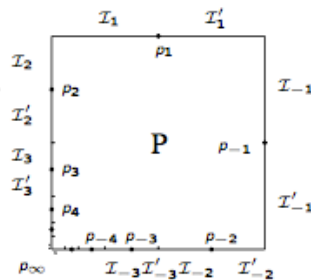
# ESFERAS DE PAPEL

Descrevemos neste capítulo a construção das esferas furadas em  $n + 2$  pontos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , e a qual temos denotado por  $\Omega_n := \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_n$ , assim como a construção topológica da superfície de tipo topológico infinito  $\Omega_\infty := \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\infty$ . Para isto seguimos de perto a construção das 2-esferas complexas como esferas de papel descritas em  $[A, T]$ . Antes de fazer tais construções é preciso dar uma breve introdução ao tema de homeomorfismos de superfície, pois, de fato as construções das esferas de papel de A. de Carvalho e Toby Hall não somente são de interesse em análise complexa se não também em dinâmica de homeomorfismos em dimensão 2. Onde um problema central da matemática é entender e descrever homeomorfismos e difeomorfismos em variedades. Em dimensão 2 um Teorema de Nielsen-Thurston em [ ] é quiza o resultado principal nesta area de conhecimento. Este Teorema generaliza o problema da classificação dos *automorfismos torais* a qualquer superfície fechada orientável de gênero  $g \geq 2$ .

### 2.1 Espaço de papel: A ferradura

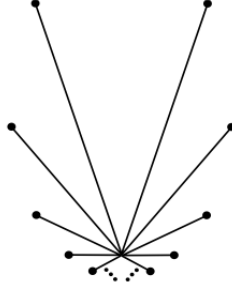
Seja  $P = [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  o quadrado unitário. A família  $\{I_k \cup I'_k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$  de intervalos fechados mostrados na figura é uma cobertura para  $\partial P = \cup_{k \in \mathbb{Z}^*} I_k \cup I'_k$ , isto é, salvo a extremidade inferior do quadrado. Para cada  $k \in \mathbb{Z}^*$ ,  $\phi_k: I_k \rightarrow I'_k$  é uma isometria que reverte orientação. Se sabe em [1] que, o quociente  $S_\infty := P/\mathcal{G}$ , com  $\mathcal{G}$  sendo à *decomposição métrica* associada a  $P$  induzida da coleção de isometrias  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ , é uma esfera topológica, por um Teorema atribuído nesse artigo acima, a R. L. Moore em [10].

Esta esfera topologica tem estrutura de superfície de Riemann, isto é,  $S_\infty \simeq \widehat{\mathbb{C}}$ .



Mais ainda, a imagem da fronteira de  $P$  pela *projeção associada*  $\pi_\infty: P \rightarrow S_\infty$  a projeção canônica associada, o  $\infty$ -bouquet de segmentos, com duas arestas de comprimentos  $1/2^i$  para cada  $i \geq 2$ , é um (ver [1] ou dissertação Marcel Vinhas), isto é, um continuum localmente conexo que não contém nenhuma curva simples fechada, em outras palavras, nenhuma cópia homeomorfa de  $\mathbb{S}^1$ .

Note que  $\{p_k\}_k \in \mathbb{Z}^*$  se acumula em um  $\infty$ -vértice, a esquina  $p_\infty$ . Sendo um  $\infty$ -od. Decorre de um resultado de De Carvalho e Toby Hall em [1] que  $S_\infty \simeq \widehat{\mathbb{C}}$ , em outras palavras  $S_\infty$  é uma esfera complexa.



↪ Três tipos de pontos em  $S_\infty$ :

1. *Pontos 1-cônicos:* os pontos de dobra  $p_k$ . Neles temos que  $\angle p_k = \pi$ .
2. *Pontos planares:*
  - Pontos em  $S_\infty \setminus G_\infty$  estes "vem" de  $\text{Int } P$ ;
  - pontos cuja pré-imagem por  $\pi_\infty$  contém exatamente dois pontos, nenhum deles sendo uma esquina de  $P$ .

↪ Num ponto planar  $z$  tem-se  $\angle z = 2\pi$ .

3. Um ponto *singular:* a acumulação de vértices, o ponto  $p_\infty$ .

↪ A estrutura holomorfa em  $S_\infty$

- Em pontos 1-cônicos e pontos planares, que não tenham pré-imagem um ponto em  $\text{Int}(P)$ , usamos  $z \mapsto z^2$  para introduzir coordenadas holomorfas.
- Em  $S_\infty \setminus G_\infty$  a estrutura holomorfa vem do "interior de  $P$ ".

Assim,  $S_\infty \setminus \{p_\infty\}$  tem estrutura de superfície de Riemann. De fato,  $S_\infty \setminus \{p_\infty\}$  é *cônico-euclidiana*.

O problema está no ponto  $p_\infty \in S_\infty$ . É possível estender unicamente a estrutura holomorfa de  $S_\infty \setminus \{p_\infty\}$  a esse  $\infty$ -vértice? Em [1] são fornecidas as condições para que o poder estender unicamente a estrutura holomorfa de  $S_\infty \setminus \{p_\infty\}$  a esse  $\infty$ -vértice.

**Definição 2.1.1** (*Modulo de Um anel*). Um *anel topológico*  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  é um aberto conexo cujo complementar tem, exatamente, duas componentes conexas. Sabe-se que todo anel topológico pode-se aplicar por uma única aplicação conforme, salvo composição uma homotecia, sobre um anel redondo

$$A(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}.$$

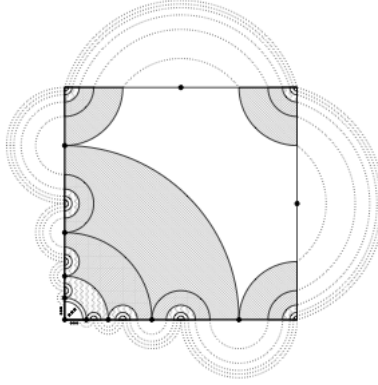
Daí que a razão  $\frac{r_2}{r_1}$  seja um invariante conforme de  $\mathcal{A}$ . O *modulo*  $\text{mod}(\mathcal{A})$  desse domínio está definido por:

$$\text{mod}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \infty & \text{se } r_1 = 0 \text{ ou } r_2 = \infty \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} & \text{em outro caso} \end{cases}.$$

Um teorema clássico sobre *aditividade dos módulos* de superfícies de Riemann estabelece que se  $\mathcal{A}$  é tal anel topológico, e  $\{A_j\}$  é uma família finita ou enumerável de anéis concêntricos<sup>1</sup>, e *encaixados*<sup>2</sup> em  $\mathcal{A}$ , então  $\text{mod}(\mathcal{A}) \geq \sum \text{mod}(A_j)$ .

Seja  $S$  é uma superfície topologica fechada tal que existe um subconjunto  $\Lambda \subset S$  com  $S \setminus \Lambda$  tendo estrutura de superfície de Riemann. Seja  $q \in \Lambda$  um ponto isolado e  $U \subset S$  sendo um disco aberto contendo a  $q$  e nenhum outro ponto de  $\Lambda$ . Então,  $U \setminus \{q\}$  é uma superfície de Riemann plana, especificamente, um anel topológico, e portanto, tem modulo. Este anel é isomorfo ao anel redondo  $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ , com  $r_2 < \infty$ .

A ideia é mostrar que  $\text{mod}(U \setminus \{q\}) = \infty$ . Para isto basta determinar uma seqüência de anéis encaixados em  $U \setminus \{q\}$  com soma divergente. Isto é que segundo os autores assegura a divergência dessa certa integral. Aqui mostramos só que  $\sum \text{mod}(A_j) = \infty$ .



Os infinitos pontos 1-conicos são  $p_{\pm 1}, p_{\pm 2}, \dots, p_{\pm 3}, \dots$ . Onde,

$$p_1 = \frac{1}{2} + i, p_{-1} = 1 + \frac{i}{2}$$

(na verdade é  $\pi(\frac{1}{2} + i) = p_1$ , etc.) e para  $j \geq 2$  temos que  $p_j = \frac{3i}{2^j}, p_{-j} = \frac{3}{2^j}$ .

Construí-se em  $Q$  uma família de anéis  $\{A_j\}_{j \geq 2}$  satisfazendo as duas propriedades abaixo:

- $A_{j+1}$  está contida na componente conexa de  $Q \setminus A_j$  que contém  $p_\infty$ , para cada  $j \geq 2$ ;
- Cada  $A_j$ , separa os pontos  $\{p_{\pm 1}, p_{\pm 2}, \dots, p_{\pm j}\}$  dos pontos  $\{p_k \mid |k| > j\} \cup \{p_\infty\}$

Uma vez construída essa família, então estima-se cotas inferiores de seus módulos. Fixemos um inteiro  $j \geq 2$ . Sejam

$$\alpha_j = \frac{1}{2} \left( p_{-j} - \frac{1}{2^{j-1}} \right) = \frac{1}{2^{j+1}} \quad \text{e} \quad \beta_j = \left( p_{-j} - \frac{1}{2^{j-1}} \right) = \frac{1}{2^j}$$

Para  $2 \leq l \leq j$ , considerarmos os seguintes pontos

$$a_{-l,-}^j = \left( \frac{1}{2^{l-1}} + \alpha_j \right) \quad \text{e} \quad b_{-l,-}^j = \left( \frac{1}{2^{l-1}} + \beta_j \right)$$

$$a_{-l,+}^j = \left( \frac{1}{2^{l-2}} - \alpha_j \right) \quad \text{e} \quad b_{-l,+}^j = \left( \frac{1}{2^{l-2}} - \beta_j \right)$$

$$a_{l,-}^j = \left( \frac{i}{2^{l-1}} + i\alpha_j \right) \quad \text{e} \quad b_{l,-}^j = \left( \frac{i}{2^{l-1}} + i\beta_j \right)$$

<sup>1</sup>  
<sup>2</sup>

$$a_{l,+}^j = \left( \frac{i}{2^{l-2}} - i\alpha_j \right) \text{ e } b_{l,+}^j = \left( \frac{i}{2^{l-2}} - i\beta_j \right)$$

Sejam

$$a_{-1,-}^j = 1 + i\alpha_j \text{ e } b_{-1,-}^j = 1 + i\beta_j$$

$$a_{-1,+}^j = 1 + i(1 - \alpha_j) \text{ e } b_{-1,+}^j = 1 + i(1 - \beta_j)$$

$$a_{1,-}^j = \alpha_j + i \text{ e } b_{1,-}^j = \beta_j + i$$

$$a_{1,+}^j = 1 - \alpha_j + i \text{ e } b_{1,+}^j = 1 - \beta_j + i$$

Por exemplo, para  $j = 4$ , os pontos  $a_{\pm l, \pm}^j$  e  $b_{\pm l, \pm}^j$  se mostram na figura. Note que para todo  $1 \leq l \leq j$  os pontos  $a_{-l,-}^j$  e  $a_{-l,+}^j$ ;  $a_{l,-}^j$  e  $a_{l,+}^j$ ;  $b_{-l,-}^j$  e  $b_{-l,+}^j$ ; e  $b_{l,-}^j$  e  $b_{l,+}^j$  são pareados. Unamos todos os pontos  $a_{\cdot}^j$  por *segmentos circulares* cujos centros estejam em  $\pi^{-1}(p_\infty)$ , da forma seguinte: o primer segmento circular liga aos pontos  $a_{-j,+}^j$  com  $a_{-j+1,-}^j$ , o segundo liga  $a_{-j+1,+}^j$  com  $a_{-j+2,-}^j, \dots$ , se une por um segmento circular  $a_{-2,+}^j$  com  $a_{-1,-}^j$ , logo com outro  $a_{-1,+}^j$  com  $a_{1,+}^j$  e com outro  $a_{2,+}^j$  com  $a_{1,-}^j$ . Se ligam  $a_{l,+}^j$  com  $a_{l-1,-}^j$ , para cada  $1 \leq l \leq j$ . Finalmente, se unem os pontos  $a_{j,-}^j$  com  $a_{-j,-}^j$ , fechando o ciclo. Analogamente, para os pontos  $b_{\cdot}^j$ . Logo, temos construído sobre  $Q$  duas coleções de *pedaços* de segmentos circulares, uma que ligam os pontos  $a_{\cdot}^j$  e outros que unem aos  $b_{\cdot}^j$ , as quais limitam uma coleção finita de pedaços  $A_l^j$ ,  $|l| \leq j-1$ ;  $A_*^j$ , como mostra a figura, novamente para o caso  $j = 4 \dots$

Definimos o anel  $A_j \subset P$  como a projeção destes pedaços, isto é:

$$A_j := \pi \left( \bigcup_{|l| \leq j-1} A_l^j \cup A_*^j \right)$$

A família de anéis  $\{A_j\}_{j \geq 2}$  satisfaz as propriedades 1 e 2 mencionadas anteriormente. Para estimar inferiormente o modulo destes anéis considerarmos em  $Q$  a métrica plana  $\lambda_0(z) = |dz|$ . Indiquemos por  $\mathcal{L}_{\lambda_0}(A_j)$  a  $\lambda_0$ -distância entre as componentes do anel  $A_j$  e por  $\mathcal{A}_{\lambda_0}(A_j)$  a  $\lambda_0$ -área. De fato,

$$\mathcal{L}_{\lambda_0}(A_j) = \beta_j - \alpha_j = \frac{1}{2^{j+1}}$$

Por outro lado,  $\mathcal{A}_{\lambda_0}(A_j) = \mathcal{A}_{\lambda_0}(A_*^j) + \sum_{|l| \leq j-1} \mathcal{A}_{\lambda_0}(A_l^j)$ . Para  $1 < |l| \leq j-1$ , tem-se

$$\mathcal{A}_{\lambda_0}(A_l^j) = \frac{\pi}{2}(\beta_j^2 - \alpha_j^2) = \frac{3\pi}{2^{2j+3}}.$$

Para  $l = -1, 0, 1$ ,

$$\mathcal{A}_{\lambda_0}(A_l^j) = \frac{\pi}{4}(\beta_j^2 - \alpha_j^2) = \frac{3\pi}{2^{2j+4}}.$$

Finalmente,

$$\mathcal{A}_{\lambda_0}(A_*^j) = \frac{\pi}{4}((b_{-j,-}^j)^2 - (a_{-j,-}^j)^2) = \frac{11\pi}{2^{2j+4}}.$$

Logo,

$$\mathcal{A}_{\lambda_0}(A_l^j) = \frac{\pi}{2^{2j+3}}(2j+3)$$

Como  $\text{Mod}(A_j) = \sup_{\rho} \frac{\mathcal{L}_{\rho}(A_j)}{\mathcal{A}_{\rho}(A_j)}$ , onde o supremo é tomado sobre todas as métricas  $\rho(z)|dz|$ , sendo  $\rho(z)$  uma função Boreliana, então

$$\text{Mod}(A_j) \geq \frac{\mathcal{L}_{\lambda_0}(A_j)}{\mathcal{A}_{\lambda_0}(A_j)} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2j+3}$$

Isto implica que  $\sum_{j \geq 2} \text{Mod}(A_j) = +\infty$ . Esta condição é a que de fato implica que uma condição sobre a convergência de certa integral no  $\infty$ -vértice implique que possa-se estender a estrutura holomorfa sobre esse ponto implique Decorrendo pelos resultados do artigo base que possa se estender de forma única a estrutura holomorfa à singularidade  $p_\infty$ .

**Definição 2.1.2** (*pseudo-Anosov generalizado*). Um automorfismo de superfície (em [2])  $\psi: S \rightarrow S$  é dito *pseudo-Anosov generalizado* em [2] (**gpA**) se:

- existe um conjunto finito  $\Sigma \subset S$  invariante por  $\psi$ ,
- um par de folheações  $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$  e  $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$  medíveis, com uma quantidade enumerável infinita de singularidades em  $S \setminus \Sigma$ .  
as quais tem que acumular-se em  $\Sigma$ ,
- um numero real  $\lambda > 1$  tal que

$$\begin{aligned}\psi(\mathcal{F}^s, \mu^s) &= (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda} \mu^s) \\ \psi(\mathcal{F}^u, \mu^u) &= (\mathcal{F}^u, \lambda \mu^u).\end{aligned}$$

Se  $\Sigma = \emptyset$ , então  $\psi$  é pseudo-Anosov.

Especificamente, definimos uma aplicação descontínua  $\widehat{f}$  de  $\widehat{Q} = Q \setminus \Lambda$  nele mesmo, onde  $\Lambda$  é o conjunto de pontos em  $\partial Q \subset \mathbb{C}$  da forma  $\{1/2^j\} \cup \{i/2^j\} \cup \{1+i\}$  junto com a extremidade esquerda inferior do quadrado. O quociente de  $Q \setminus \Lambda$  por certa relação que identifica certos segmentos em  $Q$  é domínio de uma transformação tipo pseudo-Anosov.

Descrevemos a aplicação  $\widehat{f}$  em duas etapas:

- *cortamos*  $\widehat{Q}$  ao longo do segmento de reta  $L = \{x + iy \mid x \in (0, 1); y = 1/2\}$  assim que tenhamos dois retângulos: o retângulo superior  $B$ , e o retângulo inferior  $A$ ,
- definir uma aplicação que fixe os pontos de  $A$  e que aplique cada ponto  $z$  de  $B$  em  $\phi(z) = (i - z) + 2$ . Assim que  $C = A \cup \phi(B)$  seja o retângulo  $[0, 2] \times [0, 1/2]$ . Finalmente, cada ponto  $z = x + iy \in C$  é mapeado no ponto de coordenadas  $\frac{1}{2}x + 2iy$  em  $\mathbb{C}$ .

Definimos  $\widehat{f}$  como a composição das duas aplicações da construção. Observe-se que  $\widehat{f}$  está bem definida em  $\widehat{Q}$ , salvo o segmento  $L$ . Além disso, note que  $L$  é fronteira comum de  $A$  e  $B$ . Como fronteira de  $B$ , a imagem de  $L$  por  $\widehat{f}$  é o conjunto de pontos

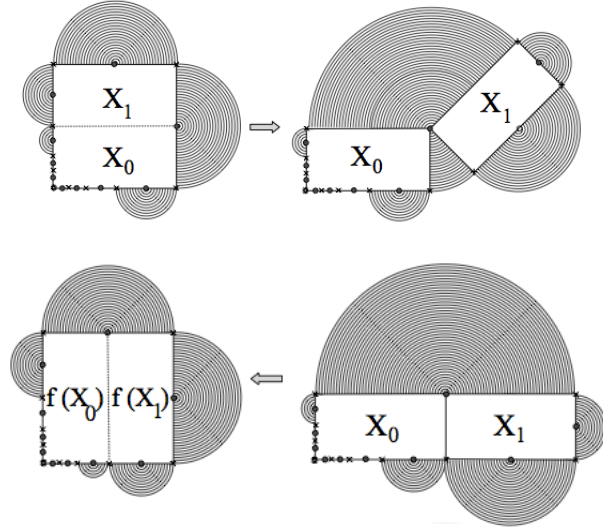
$$\{z = x + iy \mid x \in (1/2, 1), y = 1\},$$

por outro lado, como a fronteira de  $A$  a imagem é

$$\{z = x + iy \mid x \in (0, 1/2), y = 1\}.$$

Logo, se identificamos os pontos  $1/2 \pm p + i$  em  $\widehat{Q}$ , com  $0 < p < 1/2$ , então,  $\widehat{f}$  está bem definida, e ainda mais, é contínua em  $L$ . Note-se também que nesta construção pontos da forma  $1 + i(1/2 \pm p)$ , com  $0 < p < 1$ , isto é pontos no lado vertical direito de  $Q$ , serão identificados para que  $\widehat{f}$  seja injetora.

A aplicação  $f$  induzida no quociente por  $\widehat{f}$  está bem definida quando identificamos pontos da forma  $z : x = 3/4 \pm p, y = 0$ , com  $0 < p < 1/4$ . Finalmente, para que  $f$  no quociente seja injetora temos que identificar os pontos de coordenadas  $y = 3/4 \pm p, x = 0$ , com  $0 < p < 1/4$ . Pois  $\widehat{f}$  aplica o segmento  $\{z = x + iy \mid y \in (1/2, 1), x = 0\}$  no segmento  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < y < 1, x = 1\}$ . Considerando a composição  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  com  $n \geq 1$  temos as identificações da ferradura.



## 2.2 Ferradura furada

Indicamos por  $\widehat{S} := S_\infty \setminus \{\text{furos}\}$  a *ferradura justa furada*. Então,  $\widehat{S} = S_\infty \setminus \{p_\infty, p_k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$  tem *métrica hiperbólica*:

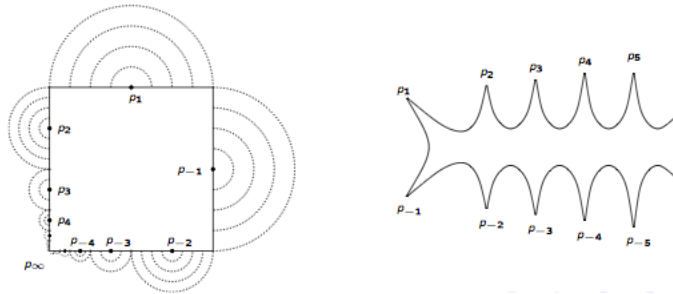
$$ds_\infty := \rho_\infty(w)|dw|,$$

com  $\rho_\infty(w)$  *densidade de Poincaré* "dada" por:

$$\rho_\infty(w) := \frac{\rho_{\mathbb{H}}(z)}{|\pi'(z)|} \quad \pi: \mathbb{H} \longrightarrow \widehat{S}$$

Sabemos que *geometricamente*:

$$\widehat{S} \simeq \mathbb{H}/\Gamma_\infty, \quad \Gamma_\infty \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R}), \text{ um grupo fuchsiano.}$$

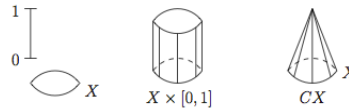


## 2.3 Quocientes métricos

Seja  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{R} \subset X \times X$  uma *relação de equivalência* em  $X$ . Munido com a topologia quociente o conjunto  $X/\mathcal{R} = \{\mathcal{R}(x) \mid x \in X\}$  é o *espaço quociente de  $X$  modulo  $\mathcal{R}$* . A topologia é induzida, naturalmente, pela função que associa a cada  $x \in X$  sua classe de equivalência  $\mathcal{R}(x)$ . Igualmente, se indicamos por  $\mathcal{G}$  qualquer *decomposição*<sup>3</sup> de  $X$ , então associada a essa decomposição é o *espaço de decomposições*  $X/\mathcal{G} = \mathcal{G}$ , o qual está munido com a topologia quociente induzida pela aplicação natural  $X \longrightarrow \mathcal{G}$  que associa a cada  $x \in X$  o único elemento em  $\mathcal{G}(x) = g \in \mathcal{G}$  que o contém. Note que se  $\mathcal{R}$  é uma relação de equivalência, então o conjunto

<sup>3</sup>uma coleção  $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$  de subconjuntos de  $X$  é uma *decomposição de  $X$*  ou *partição* se a coleção é uma cobertura de  $X$ , isto é  $\bigcup \mathcal{G} = X$  e seus elementos são dois a dois disjuntos.

das classes de equivalência fornece uma partição ou decomposição em  $X$ . Reciprocamente, uma decomposição determina uma relação de equivalência em  $X$ . Para isto, basta dizer que  $x$  e  $y$  em  $X$  são equivalentes se, e somente se, pertencem ao mesmo elemento da partição. O quociente topológico de um conjunto qualquer  $X$  dado formaliza a nossa ideia intuitiva de *identificar* ou *colar* pontos em  $X$  agrupando-os em elementos de certa relação ou decomposição de dito espaço, com o fim de criar um novo. Por exemplo, o quociente topológico do disco fechado  $\mathbb{D} := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$  pela relação  $\mathcal{R}$  em  $\mathbb{D}$  que identifica o par ordenado  $(x, y)$  com  $(-x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{S}^1$  é a esfera bibimensional  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , isto é  $\mathbb{D}/\mathcal{R}$  é topologicamente equivalente a  $\mathbb{S}^2$ . Outro exemplo é o *cone topológico*  $CX$  sobre um espaço topológico qualquer  $X$  que se define como o quociente  $(X \times [0, 1])/\mathcal{R}$ , com  $\mathcal{R}$  sendo a relação que identifica o par  $(x, 1)$  com  $(x', 1)$ , para todo  $x, x' \in X$ .



Outro tipo de espaço de decomposições que pode-se definir é o *quociente métrico* que a uma coleção  $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$  dada de subconjuntos de um espaço semi-métrico  $(X, d)$  associa o espaço de decomposições de  $X$  por uma certa partição  $\mathcal{G}_d$  sobre  $X$ , induzida depois de identificar *metricamente* dois pontos que estejam a distancia zero um de outro. Quocientes métricos e quocientes topológicos, embora, possam coincidir como conjuntos, podem ser topologicamente distintos. Por exemplo, o quociente métrico de um espaço métrico é, por definição, um espaço métrico, logo um espaço Hausdorff. Ao contrario de um espaço topológico que não precisa sê-lo. Por exemplo, se considerarmos  $X$  como sendo o intervalo fechado  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  e a decomposição  $\mathcal{G} := \{\{0\}, \{1\}, (0, 1)\}$  de  $X$ . Então,  $X/\mathcal{G} = \mathcal{G}$  não é um espaço Hausdorff. Na verdade, a topologia do quociente métrico é *mais fina* do que a topologia do quociente topológico, isto é, todo aberto, segundo a topologia quociente, é um aberto da topologia segundo o quociente métrico. Ver Teorema (2.4.3).

A figura embaixo mostra o tipo de quocientes métricos com os quais trabalharemos ao longo desta tese. Observe-se que neste caso, permite-se uma enumeração infinita de identificações ao longo do bordo desse polígono. Especificamente, o lado horizontal inferior é subdividido por uma enumeração infinita de intervalos fechados  $\{I_k\}_{k \geq 1}$  de comprimentos  $1/2^k$ . Depois de declarar como colar os elementos do bordo deste polígono e agrupa-los em elementos de certa decomposição  $\mathcal{G}$ . Então, o quociente métrico  $P/\mathcal{G}$  é uma 2-esfera topológica, isto é,  $P/\mathcal{G}$  é homeomorfa à esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

## 2.4 Costrução

Para definir uma esfera de papel de Riemann temos que começar definindo o que entende-se por um *espaço de papel*.

**Definição 2.4.1** ( *$\mathcal{R}$ -itinerários*). Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico,  $x, y \in X$  dois pontos quaisquer, e  $\mathcal{R} \subset X \times X$  uma relação em  $X$  reflexiva e simétrica. Um *itinerário de  $x$  a  $y$* , ou, um  *$\mathcal{R}$ -itinerário* é uma sequência finita de pontos  $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^n \subset X \times X$  que satisfaz

$$x = p_1, q_1 \mathcal{R} p_2, q_2 \mathcal{R} p_3, \dots, q_{n-1} \mathcal{R} p_n \text{ e } y = q_n.$$

Onde, o símbolo  $q_i \mathcal{R} p_{i+1}, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$ , indica simplesmente que  $(q_i, p_{i+1}) \in \mathcal{R}$ . O  *$d$ -comprimento*, ou  *$d$ -custo*, ou, simplesmente, o *custo*, quando a métrica em  $X$  esteja subentendida, do itinerário de  $x$  a  $y$  é o número  $\sum_{i=1}^n d(p_i, q_i)$ . Observe-se que tem *custo*  $d(p_i, q_i)$  quando vamos de  $x$  a  $y$  por um itinerário  $\{(p_i, q_i)\}$  entre elementos não relacionados e é gratuito quando se vá entre elementos de  $X$  que estejam relacionados por  $\mathcal{R}$ . O  *$\mathcal{R}$ -itinerário*  $\{(x, y)\}$  de  $x$  a  $y$  o chamaremos de *trivial*.

Note-se que na definição acima pode-se falar também de coleções de conjuntos  $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$  *identificando* dois pontos em  $X$  e falar de  *$\mathcal{G}$ -itinerários* conectando tais pontos. Pois, basta tomar a  *$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ -relação* em  $X$  *associada*<sup>4</sup> à

<sup>4</sup>toda decomposição  $\mathcal{G}$  de  $X$  determina uma única *relação de equivalência* em  $X$ ,  $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ , definida por:  $x \mathcal{R}_{\mathcal{G}} y$  se, e somente se, existe  $g \in \mathcal{G}$  tal que  $x, y \in g$ , isto é,  $x$  e  $y$  em  $X$  são  $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ -equivalentes se, e somente se, pertencem ao mesmo elemento da partição. Claramente, os elementos de  $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ , suas classes de equivalência, coincidem com as  $\mathcal{G}$ -classes de equivalência de  $\mathcal{G}$ ; assim que  $X/\mathcal{R}_{\mathcal{G}} = X/\mathcal{G}$  e  $\pi_{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}} = \pi_{\mathcal{G}}$ , sendo  $\pi_{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}}$  a projeção associada à relação  $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ . Reciprocamente, toda relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X$  determina uma decomposição  $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$  em  $X$ , cujos elementos correspondem às classes de equivalência determinadas por  $\mathcal{R}$  em  $X$ . Portanto, podemos falar indistintamente de decomposições e relações. .

$\mathcal{G}$ -identificação.

Definimos sobre  $X$  a função  $d^{\mathcal{R}}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  que associa a cada par  $(x, y) \in X \times X$  o ínfimo dos  $d$ -custos sobre todos os  $\mathcal{R}$ -itinerários que conectam  $x$  a  $y$ , isto é:

$$d^{\mathcal{R}}(x, y) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d(p_i, q_i) \mid \{(p_i, q_i)\}_{i=1}^n \text{ é um } \mathcal{R}\text{-itinerário de } x \text{ a } y \right\} \quad (2.4.1)$$

Provida desta função,  $X$  é um espaço semi-métrico, ou, equivalentemente  $d^{\mathcal{R}}$  é uma pseudometria em  $X$ .

**Lema 2.4.2.** *O par  $(X, d^{\mathcal{R}})$  é um espaço semi-métrico*

*Demonstração.* A propriedade do ínfimo dos números reais prova a boa definição de  $d^{\mathcal{R}}$  em  $X$ . Sejam  $x, y, z$  elementos distintos em  $(X, d)$ . Claramente, o conjunto

$$A := \left\{ \sum_{i=1}^n d(p_i, q_i) \mid \{(p_i, q_i)\} \text{ é um } \mathcal{R}\text{-itinerário de } x \text{ a } y \right\}$$

é não vazio. Para isto, basta considerarmos o itinerário trivial  $x = p_1$  e  $q_1 = y$ . Finalmente, sendo  $d$  uma métrica em  $X$ , o  $d$ -comprimento de qualquer itinerário de  $x$  a  $y$  satisfaz  $\sum_{i=1}^n d(p_i, q_i) \in [0, \infty]$ . Daí que, o conjunto  $A$  esteja limitado inferiormente por 0. Por tanto,  $d^{\mathcal{R}}$  está bem definida em  $X$ . Provemos, então, as propriedades de uma semi-métrica. A não negatividade de  $d^{\mathcal{R}}$  é clara, e vem da própria definição de  $d^{\mathcal{R}}$ . Mais ainda, dado  $\epsilon > 0$  quaisquer, e sendo o comprimento do itinerário trivial  $x = p_1$  e  $x = q_1$  menor que  $\epsilon$ , então  $d^{\mathcal{R}}(x, x) = 0$ . Para provar a simetria, seja  $\{(p_i, q_i)\}$  um  $\mathcal{R}$ -itinerário de  $x$  a  $y$ , pela simetria de  $\mathcal{R}$  temos que a seqüência  $\{(r_j, s_j)\}$  com  $r_j = q_{n-j+1}$  e  $s_j = p_{n-j+1}$  é um  $\mathcal{R}$ -itinerário de  $y$  com  $x$  tendo o mesmo  $d$ -comprimento que o itinerário de  $x$  a  $y$ . Assim que,  $d^{\mathcal{R}}(x, y)$  é cota inferior para o conjunto  $\{\sum_{j=1}^n d(r_j, s_j) \mid \{(r_j, s_j)\} \text{ é um } \mathcal{R}\text{-itinerário de } y \text{ a } x\}$ , daí que  $d^{\mathcal{R}}(x, y) \leq d^{\mathcal{R}}(y, x)$ . A outra desigualdade é analoga. Logo,  $d^{\mathcal{R}}$  é simétrica. Finalmente, para provar a desigualdade triangular, considerarmos um  $\mathcal{R}$ -itinerário  $\{(p_i, q_i)\}$  de  $x$  a  $y$  e um  $\mathcal{R}$ -itinerário  $\{(q'_i, r_i)\}_{i=1}^m$  de  $y$  a  $z$ ; logo

$$y = q'_1, r_1 \mathcal{R} q'_2, q_2 \mathcal{R} q'_3, \dots, r_{m-1} \mathcal{R} q'_m \text{ e } z = r_m$$

A concatenação dos  $\mathcal{R}$ -itinerários acima fornece um  $\mathcal{R}$ -itinerário  $x$  a  $z$  satisfazendo

$$x = p_1, q_1 \mathcal{R} p_2, q_2 \mathcal{R} p_3, \dots, q_{n-1} \mathcal{R} p_n \text{ e } y = q_n \mathcal{R} q'_1, r_1 \mathcal{R} q'_2, q_2 \mathcal{R} q'_3, \dots, r_{m-1} \mathcal{R} q'_m \text{ e } z = r_m$$

e com  $d$ -custo a soma dos  $d$ -custos dos itinerários acima. O que mostra que o conjunto de  $d$ -custos de  $\mathcal{R}$ -itinerários de  $x$  a  $z$  contém o conjunto das somas de  $d$ -custos de  $\mathcal{R}$ -itinerários de  $x$  a  $y$  com  $d$ -custos de  $\mathcal{R}$ -itinerários de  $y$  a  $z$ , e o resultado segue de propriedades básicas do ínfimo.  $\square$

Assim, a  $d^{\mathcal{R}}$ -relação que identifica dois pontos em  $x, y \in X$ :  $x d^{\mathcal{R}} y$  se, e somente se,  $d^{\mathcal{R}}(x, y) = 0$ , é uma relação de equivalência em  $X$ . Estamos identificando dois pontos de  $X$  que sejam conectados por um itinerário de comprimento tão pequeno como for possível. O espaço de decomposições de  $X$  por essa relação munido com a métrica, a projeção  $\bar{d}$  de  $d^{\mathcal{R}}$  sobre  $X/d^{\mathcal{R}}$  é o quociente métrico de  $X$  modulo  $d^{\mathcal{R}}$ . A métrica  $\bar{d}$  está definida por

$$\widehat{d}([x]_{d^{\mathcal{R}}}, [y]_{d^{\mathcal{R}}}) := d^{\mathcal{R}}(x, y)$$

Onde,  $[x]_{d^{\mathcal{R}}}$ , classe de equivalência de  $x$  pela  $d^{\mathcal{R}}$ -relação, é o conjunto

$$\{y \in X \mid \forall \epsilon > 0, \text{ existe um } \mathcal{R}\text{-itinerário de } x \text{ a } y \text{ com custo menor do que } \epsilon\}.$$

Indicamos por  $\pi_{d^{\mathcal{R}}}$  a aplicação que cada  $x \in X$  associa a classe de equivalência  $[x]_{d^{\mathcal{R}}}$ . Não é difícil ver que é contínua. Para isto basta ver que  $d^{\mathcal{R}}(x, y) \leq d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ . Pois, dados  $x, y \in X$ , o itinerário trivial os conectando tem custo  $d(x, y)$ . Assim, dado  $a \in X$  e  $\epsilon > 0$  qualquer. Se escolhermos  $\delta = \epsilon$ ; temos que  $\bar{d}([x]_{d^{\mathcal{R}}}, [a]_{d^{\mathcal{R}}}) = d^{\mathcal{R}}(x, a) \leq d(x, a) < \delta = \epsilon$ . Logo,  $\pi_{d^{\mathcal{R}}}$  é contínua em  $X$ .



**Teorema 2.4.3.** *Suponha  $(X, d)$  um espaço métrico,  $\mathcal{R}$  uma relação de equivalência em  $X$  que coincide com a  $d^{\mathcal{R}}$ -relação. Então, a topologia do quociente métrico  $(X/\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}, \hat{d})$  é mais fraca do que a topologia do quociente topológico  $X/\mathcal{R}$ . Os conjuntos têm topologias equivalentes, isto é,  $X/\mathcal{R}$  é homeomorfo a  $X/\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}$ , se o espaço métrico  $X$  fosse compacto.*

*Demonstração.* Por hipótese as duas relações de equivalência  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}$  coincidem, então,  $X/\mathcal{R} = X/\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}$ . Indiquemos por  $\tau_{\hat{d}}$  a topologia gerada gerada por  $\hat{d}$ , isto é a topologia métrica em  $X/\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}$  e por  $\tau_{\mathcal{R}}$  a topologia quociente em  $X/\mathcal{R}$ . Queremos provar que  $\tau_{\hat{d}} \subset \tau_{\mathcal{R}}$ , ou equivalentemente, que a aplicação identidade  $i: (X/\mathcal{R}, \tau_{\mathcal{R}}) \rightarrow (X/\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}, \tau_{\hat{d}})$  seja contínua. O que é claro da continuidade da projeção  $\pi_{\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}}$  e da *propriedade universal do quociente topológico*<sup>5</sup>. Por outro lado, se  $X$  um conjunto compacto, então, claramente,  $X/\mathcal{R} = \pi_{\mathcal{R}}(X)$  é também um conjunto compacto, e sendo a identidade  $i: (X/\mathcal{R}, \tau_{\mathcal{R}}) \rightarrow (X/\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}, \tau_{\hat{d}})$  uma bijeção contínua de um compacto sobre o espaço Hausdorff  $X/\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}$ , então é um homeomorfismo, daí que  $X/\mathcal{R}$  e  $X/\mathcal{R}_{d^{\mathcal{R}}}$  sejam homeomorfos.  $\square$

## 2.5 Generalidades

**Definição 2.5.1** (*Pareamentos, dobra, coleção total*). Para isto, consideremos o par  $(P, d_P)$ , onde  $P$  é um *multipolígono* em  $\mathbb{C}$ , isto é  $P = \bigsqcup_{1 \leq i \leq k} P_i$ , união disjunta de  $k$ -*polígonos*, isto é, um subconjunto do plano homeomorfo a um disco fechado, em  $\mathbb{C}$ , e  $d_P$  a métrica intrínseca induzida da métrica do subespaço. Seja  $C = \partial P$ , fronteira de  $P$ , positivamente orientada. Sejam  $\alpha, \alpha' \subset C$  dois segmentos<sup>6</sup> em  $(P, d_P)$ , orientados positivamente do mesmo comprimento e com interiores disjuntos. O *pareamento*  $\mathcal{G} = \langle \alpha, \alpha' \rangle$  é a decomposição da união  $\alpha \cup \alpha' \subset C$  que identifica pontos de um segmento com pontos do outro preservando comprimento e revertendo orientação. Já que sempre podemos parametrizar por comprimento de arco, então qualquer elemento em  $\langle \alpha, \alpha' \rangle$  é da forma  $\{\gamma_1(t), \gamma'(L-t)\}$ , com  $L$  o comprimento dos segmentos. Os segmentos  $\alpha$  e  $\alpha'$  e quaisquer dois pontos que são identificados pelo pareamento  $\langle \alpha, \alpha' \rangle$  dizem-se *pareados*. Note-se que  $\langle \alpha, \alpha' \rangle$  e  $\langle \alpha', \alpha \rangle$  representam o mesmo pareamento. Diz-se que dois pareamentos  $\langle \alpha, \alpha' \rangle$  e  $\langle \beta, \beta' \rangle$  são *interiormente disjuntos* se os seus segmentos pareados têm interiores dois a dois disjuntos. Um pareamento de dois segmentos que tem uma extremidade em comum é uma *dobra* e a extremidade em comum é o *ponto de dobra*. Daí que, o ponto de dobra não esteja pareado com nenhum outro ponto.

O *comprimento* de um pareamento  $\langle \alpha, \alpha' \rangle$  denotado por  $|\langle \alpha, \alpha' \rangle|$  é o comprimento comum dos segmentos pareados, isto é,  $|\langle \alpha, \alpha' \rangle| = |\alpha| = |\alpha'|$ .

Se  $\mathcal{P} = \bigcup_i \mathcal{G}_i = \{\langle \alpha_i, \alpha'_i \rangle\}$  é uma coleção enumerável (possivelmente finita) de pareamentos interiormente disjuntos e de comprimento  $|\mathcal{P}| = \sum_i |\langle \alpha_i, \alpha'_i \rangle|$ . Então, a coleção é dita *total* se seu comprimento fosse igual à metade do comprimento de  $C$ . Isto significa que a coleção  $\mathcal{P}$  é uma cobertura de  $\partial P$ , salvo um conjunto de medida nula. Se  $\mathcal{P}$  fosse finita, então cobre toda  $\partial P$ . Note que coleções distintas  $\{\langle \alpha_i, \alpha'_i \rangle\}$  e  $\{\langle \beta_i, \beta'_i \rangle\}$  de pareamentos podem dar a mesma coleção  $\mathcal{P}$

**Definição 2.5.2** (*Espaço de papel, superfície de papel*). Uma *dobradura de papel*, ou simplesmente uma *dobradura* é um par  $(P, \mathcal{P})$ , onde  $P$  é um multipolígono e  $\mathcal{P}$  é uma coleção (possivelmente finita) total de pareamentos interiormente disjuntos de  $C$ . O **espaço de papel** associado ao par  $(P, \mathcal{P})$  é o quociente métrico  $S$  de  $P$  modulo a  $d_P^{\mathcal{P}}$ -decomposição, munido da métrica quociente que denotaremos por  $d_S$ . Indicamos por  $\pi_S: P \rightarrow S$  a projeção associada. Quando o espaço de decomposições  $S$  é uma superfície topológica *fechada* (compacta e sem bordo), então  $S$  é a *superfície de papel* associada à dobradura  $(P, \mathcal{P})$ .

**Lema 2.5.3.** •  $d_S$  é estritamente intrínseca;

- $(S, d_S)$  é topologicamente equivalente a ao quociente topológico  $P/d_P^{\mathcal{P}}$ ;
- A cicatriz  $G$  é um conjunto fechado em  $S$ .

*Demonstração.* A métrica quociente  $d_S$  é estritamente intrínseca. Pois, sendo o par  $(P, d_P)$  homeomorfo a  $P$ . Então, é compacto, logo sendo  $\pi_S$  contínua leva compacto em compacto, e sendo sobrejetora temos que  $S = \pi(P)$  é um

<sup>5</sup>Uma propriedade *universal* dos quocientes é: para todo conjunto  $Z$  e para toda função  $f: X \rightarrow Z$  que é constante sobre cada classe de equivalência de  $\mathcal{R}$ , existe uma única função  $\hat{f}: X/\mathcal{R} \rightarrow Z$  tal que  $f = \hat{f} \circ \pi_{\mathcal{R}}$

<sup>6</sup>  $\alpha = \text{Im}(\gamma[0, 1])$  e  $\alpha' = \text{Im}(\gamma'[0, 1])$ , com  $t \xrightarrow{\gamma} (1-t)x + ty$

espaço métrico compacto, portanto a métrica  $d_S$  é estritamente intrínseca. Logo, quaisquer dois pontos em  $S$  podem-se conectar por um caminho  $\gamma$  em  $S$  cujo  $d_S$ -comprimento  $|\gamma|_{d_S}$  é igual à distância  $d_S$  entre eles, ou estão a distância infinita caso não houver um caminho os conectando. Mais ainda, o Teorema (2.4.3) implica que  $(S, d_S)$  seja homeomorfo ao quociente topológico  $P/d_P^{\mathcal{R}_P}$  de  $P$  pela  $d_P^{\mathcal{R}_P}$ -decomposição. Finalmente, sendo  $(P, d_P)$  um compacto e  $S$  um espaço Hausdorff, então a projeção  $\pi_S$  é uma aplicação fechada. Portanto, sendo  $\partial P$  um fechado em  $P$ , temos que  $G = \partial P \subset S$  é fechada em  $S$ .  $\square$

**Definição 2.5.4** (*Pontos num espaço de papel*). Sejam  $(P, \mathcal{P})$  uma dobradura de papel associada a um multipolígono  $P$  e  $S$  o espaço de papel associado a essa dobradura. Para cada  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , um ponto  $x \in G$  é um *vértice de valência  $k$* , ou um  $k$ -vértice, se  $\text{Card}(\pi_S^{-1}\{x\}) \neq 2$ , ou se  $\text{Card}(\pi_S^{-1}\{x\}) = k = 2$  e  $\pi^{-1}\{x\}$  contém um vértice de  $P$ . Esta definição permite distinguir três tipos de pontos em um espaço de papel

- *Conjunto de pontos singulares ou singularidades  $\mathcal{V}^s$* : correspondem a vértices de valência  $\infty$  e acumulações de vértices.
- *Conjuntos de pontos regulares  $\mathcal{V}^r$* : um  $k$ -vértice, com  $k \neq \infty$ , que não é de acumulação de vértices, isto é, vértices isolados de valência finita.
- *Conjuntos de pontos planos  $\text{Plan}(S)$* : pontos em  $G$  que não são nem vertices, nem acumulação de vertices. Assim, são pontos planos pontos que pertencem a um pareamento de  $P$ , isto é cuja pré-imagem por  $\pi_S$  possui exatamente dois pontos, nenhum deles vértice de  $P$  e também os pontos de  $S \setminus G$ .

**Proposição 2.5.5.**  $S \setminus G$  e  $\text{Int } P$  são homeomorfos

*Demonstração.* Seja  $\tilde{p}$  um ponto interior ao polígono, isto é  $\tilde{p} \in \text{Int } P$  e  $\pi_S(\tilde{p}) = p$ . Vejamos quais são os pontos  $q \in B_{d_S}(p; r)$  para qualquer  $r > 0$  dado. Suponha o raio  $r$  da bola é tal que  $B_{d_P}(\tilde{p}; r) \cap P = \emptyset$ . Para isto vejamos que é a imagem inversa dessa bola em  $P$ . Assim, seja  $\tilde{x} \in \pi^{-1}(B_{d_S}(p; r))$ , então  $d_S(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{p})) = d_P^{\mathcal{P}}(\tilde{x}, \tilde{p}) < r$ . Logo, existe um  $\mathcal{P}$ -itinerário de  $\tilde{x}$  a  $\tilde{p}$  com  $d_P$ -custo do que  $< r$ . Se esse itinerário tiver mais que um passo, podemos supor que seu primeiro passo é em  $\partial P$ , pois.... e junto com a hipótese do que  $B_{d_P}(\tilde{p}; r) \cap P = \emptyset$ . Temos que que o  $d_P$ -custo desse passo é maior o igual a  $r$ . Logo, necessariamente o itinerário é trivial, e  $d_P(\tilde{p}, \tilde{x}) < r$ . Então,  $\pi^{-1}(B_{d_S}(p; r)) \subset B_{d_P}(\tilde{p}; r)$ . Mais, ainda decorre da desigualdade  $d_P^{\mathcal{P}} \leq d_P$  que  $\pi(B_{d_P}(\tilde{p}; r)) \subset B_{d_S}(p; r)$  e sendo  $\pi_S$  sobrejetora, então  $B_{d_P}(\tilde{p}; r) \subset \pi^{-1}(B_{d_S}(p; r))$ . Assim temos provado que  $\pi_S^{-1}(B_{d_S}(p; r)) = B_{d_P}(\tilde{p}; r)$  e  $\pi_S(B_{d_P}(\tilde{p}; r)) = B_{d_S}(p; r)$ . O que por sua vez implica que  $\pi_S^{-1}\{p\} = \{\tilde{p}\}$

Indicamos por  $\pi_{\text{Int } P}$  a restrição de  $\pi: P \rightarrow S$  ao interior de  $P$ . É claro que a aplicação  $\pi_{\text{Int } P}: \text{Int } P \rightarrow S \setminus G$  é a inversa da função  $f$  definida acima, mais ainda,  $\pi_{\text{Int } P}$  é continua sendo a restrição da função continua  $\pi$ . Logo, basta ver que para todo aberto  $A$  em  $\text{Int } P$  (com a topologia de subespaço) tem-se que  $\pi_{\text{Int } P}(A)$  é aberto em  $S \setminus G$ . Seja  $A \subset \text{Int } P$  um aberto e  $\tilde{x} \in A$ . Escolhemos  $r_{\tilde{x}} > 0$  satisfazendo (\*) tal que  $B_{d_P}(\tilde{x}, r_{\tilde{x}}) \subset A$ . Como  $A$  é aberto, então é reunião de bolas abertas,  $A = \bigcup_{\tilde{x} \in A} B_{d_P}(\tilde{x}, r_{\tilde{x}})$ , logo

$$\pi_{\text{Int } P}(A) = \pi_{\text{Int } P}\left(\bigcup_{\tilde{x} \in A} B_{d_P}(\tilde{x}, r_{\tilde{x}})\right) = \bigcup_{\tilde{x} \in A} \pi_{\text{Int } P}(B_{d_P}(\tilde{x}, r_{\tilde{x}})) = \bigcup_{\tilde{x} \in A} B_{d_S}(\pi_{\text{Int } P}(\tilde{x}); r_{\tilde{x}}).$$

Portanto, sendo  $\pi_{\text{Int } P}(A)$  reunião de bolas abertas em  $S \setminus G$  é um aberto em  $S \setminus G$ .  $\square$

**Definição 2.5.6** (*Ângulo em pontos não singulares de um espaço de papel*). Seja  $x \in S$  um ponto não-singular com  $\pi_S^{-1}\{x\} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k\}$  e  $\tilde{\theta}_i(\tilde{x}_i) \in [0, 2\pi]$  o ângulo interno de  $P$  em torno de  $\tilde{x}_i$ . O *ângulo conico em  $x$*  é a soma dos ângulos internos a  $P$  de suas (finitas) pré-imagens por  $\pi_S$ , isto é,

$$\theta(x) = \sum_{\tilde{x}_i \in \pi_S^{-1}\{x\}} \tilde{\theta}_i(\tilde{x}_i).$$

No caso em que  $x$  seja um ponto plano, então  $\theta(x) = 2\pi$ . Mas,  $\theta(x)$  pode ser igual a  $2\pi$  sem que  $x$  seja um ponto plano de  $S$ .

**Teorema 2.5.7** (de Carvalho, T. Hall, Teoremas 42 e 50). *Condições necessárias e suficientes são fornecidas para que o espaço de decomposições  $S$  associado a uma dobradura de papel seja uma superfície topologica fechada. Em particular, se a dobradura  $(P, \mathcal{P})$  é planar, isto é  $P$  é um polígono e as identificações ao longo de  $\partial P$  são desvinculadas, então  $S$  é uma 2-esfera topologica e  $G$  é dentrito.*

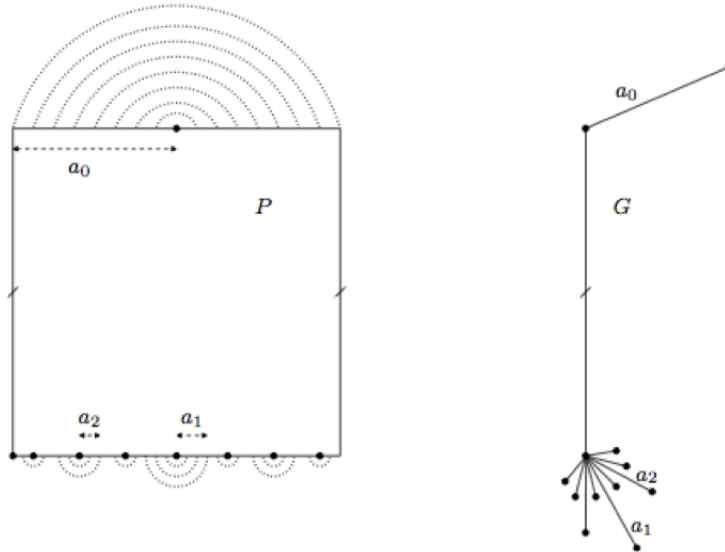
**Exemplos 2.5.8.** 1. Seja  $Q \subset \mathbb{C}$  o quadrado unitário e  $\{a_i\}$  é uma seqüência decrescente de números reais satisfazendo  $\sum_i a_i = 1/2$ . Definamos uma coleção total  $\mathcal{P}$  de  $Q$  como sendo  $\{\langle \alpha_j, \alpha'_j \rangle\}_{j \geq 0} \cup \langle \beta, \beta' \rangle$ , com  $\langle \alpha_0, \alpha'_0 \rangle$  a dobra do lado superior de  $P$ , com ponto de dobra  $1/2 + i$ ;  $\langle \beta, \beta' \rangle$  o pareamento que identifica as duas arestas verticais de  $P$  e  $\langle \alpha_j, \alpha'_j \rangle$  a concatenação de dobras de comprimento  $a_j$  arranjadas como mostra a figura.

A continuação listamos os pontos de  $S \setminus \text{Plan}(S)$ :

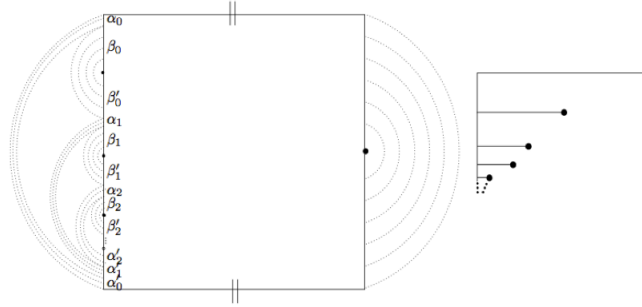
- Um 1-vertice em  $y = \pi(1/2 + i)$  e um 2-vertice em  $z = \pi(i) = \pi(1 + i)$ ;
- 1-vertices em  $x_{j,k} = \pi(\phi_{j,k}(\beta_k))$  para  $j \geq 0$  e  $k \geq 1$ ;
- singularidades em  $s_j = \pi(\phi_j(1/4))$  para  $j \geq 0$ ;
- Um ponto singular  $s$  que aparece como acumulação de pontos cônicos, assim que  $s = \pi(0) = \pi(1) = \pi(1/2) = \pi(1/4) = \dots =$

2. (Não necessariamente tem-se uma concatenação)

Definimos a coleção  $\mathcal{P}$  total de pareamentos interiormente disjuntos na fronteira de  $Q$  assim: dobre  $\{x\} \times [0, 1]$  ao meio, isto é, uma dobra de comprimento  $1/2$ ; um pareamento identificando os dois lados verticais. Consideremos a seqüência  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $\sum_i a_i = 1/2$ . Defina-se a coleção infinita de pareamentos  $\mathcal{P}$  definida em  $\partial P$  consistindo dos seguintes pareamentos:



Sobre o lado horizontal superior uma dobra com ponto de dobra o numero  $1/2 + i$ , um pareamento que identifica os lados verticais. Finalmente, uma coleção infinita de dobras não concatenadas. Note-se que estamos dobrando ao meio cada subintervalo de  $[0, 1]$  removido na construção do conjunto de Cantor usual. Notemos que uma quantidade não enumerável de pontos não são pareados, o fecho do complementar das dobras é um Cantor de conteúdo nulo e é inteiro levado por  $\pi$  em um único ponto sobre o espaço de identificações  $S$ . Analogamente, como nos exemplos acima, que as dobraduras de papel associadas a  $P$  sejam *desvinculadas* implicara que o espaço de papel  $S$  seja topologicamente uma 2-esfera.



## 2.6 Dobraduras planares implicam esferas topologicas

**Teorema 2.6.1** (*A. de Carvalho, Toby Hall*). *O espaço de papel  $S$  associado a uma dobradura planar  $S$  é uma 2-esfera topologica e sua cicatriz  $G$  é um dendrito. Mais ainda, o conjunto de pontos planos é aberto e denso em  $G$ , no entanto o conjunto de vertices e pontos singulares é fechado e denso em toda parte de  $G$ . Além disso, tem medida nula.*

Um Teorema de R. L. Moore em [10], que dá uma condição suficiente para que o quociente topológico de uma 2-esfera topologica por uma decomposição monótona semi-continua superiormente seja novamente uma 2-esfera, e é o resultado sobre o qual se baseia a demonstração de que toda dobradura planar produz um espaço de papel homeomorfo à esfera bidimensional.

**Definição 2.6.2** (*Coleções desvinculadas*). Seja  $\gamma$  uma poligonal<sup>7</sup>, ou um laço poligonal. Dois pares de pontos não necessariamente distintos  $\{x, x'\}, \{y, y'\} \subset \gamma$  dizem-se *desvinculados* se um dos pares está contido no fecho de uma componente conexa do complemento do outro; em outro caso, diz-se que eles são *vinculados*. Finalmente, uma coleção  $\mathcal{G}$  qualquer de subconjuntos de  $\gamma$  é *desvinculada* se são desvinculados quaisquer  $\{x, x'\}, \{y, y'\}$  com  $x, x' \in g \in \mathcal{G}, y, y' \in g' \in \mathcal{G}$  e  $x, x'$  não são identificados por  $\mathcal{G}$  nem a  $y$  nem a  $y'$ .

**Definição 2.6.3** (*Dobradura de papel planar*). Uma poligonal  $\gamma \subset \partial P$  é *planar* se possui as seguintes propriedades:

- Se um pareamento  $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in \mathcal{P}$  é tal que  $\alpha \cap \text{Int } \gamma \neq \emptyset$ , ou  $\alpha' \cap \text{Int } \gamma \neq \emptyset$ , então  $\alpha, \alpha' \subset \gamma$ , isto é, se um pareamento interseca o interior de  $\gamma$ , então ele deve estar contido em  $\gamma$ ;
- a restrição de  $\mathcal{P}$  a  $\gamma$  é desvinculada.

Uma componente de  $\partial P$  é *planar* se é  $\mathcal{P}$ -saturada e se a restrição de  $\mathcal{P}$  a  $\gamma$  é desvinculada. Finalmente a dobradura de papel  $(P, \mathcal{P})$  é *planar* se  $P$  é um único polígono, e  $\partial P$  é planar.

**Teorema 2.6.4.** *O espaço de papel  $S$  associado a uma dobradura planar é homeomorfo à esfera.*

*Demonstração.* (*Bosquejo*) Mostrar que  $S$  é uma esfera é equivalente a provar que  $S$  é homeomorfa ao quociente topológico de uma 2-esfera por uma *decomposição monótona e semi-continua superiormente*. Isto decorre do Teorema de Moore<sup>8</sup> em []. Delineamos o argumento desta prova. Uma maneira conveniente de escrevê-lo rigorosamente envolve a noção de *laminação geodésica* do plano hiperbólico em [] e se encontra em [A, T]. Supomos  $S$  é homeomorfo ao quociente topológico de  $P$  pela decomposição  $d_P^{\mathcal{P}}$ . Considere uma cópia homeomorfa de  $P$  na esfera bidimensional  $\mathbb{S}^2$ , e considere uma decomposição  $\mathcal{G}$  da esfera constituída por curvas disjuntas conectando pares interiores de  $\partial P$ , discos fechados cujas fronteiras incluem pontos  $d_P^{\mathcal{P}}$ -equivalentes de  $\partial P$  que não são pares interiores, e demais pontos de  $\mathbb{S}^2$ , incluindo pontos de  $\text{int}(P)$ . Para fixar ideias e entender esta construção escolhamos o seguinte espaço

<sup>7</sup>Uma *poligonal* é a concatenação de um número finito de segmentos, isto é, uma união finita de segmentos  $\alpha_i$  parametrizados por caminhos retilíneos  $\gamma_i$  que fazem com que o ponto final de  $\alpha_i$  seja o ponto inicial de  $\alpha_{i+1}$ . Um *laço poligonal* é uma poligonal homeomorfa ao círculo unitário, e um *multilaço poligonal* é a união disjunta de laços poligonais. Suporemos que laços poligonais são sempre orientados no sentido anti-horário

8

**Teorema 2.6.5** (*Moore e a 2-esfera*). *O quociente topológico da 2-esfera por uma decomposição monótona e semi-continua superiormente cujos elementos não a separam é homeomorfo à 2-esfera.*

de papel. O exemplo é o seguinte O quociente  $\mathbb{S}^2/\mathcal{G}$  é homeomorfo a  $S$  pois, nessa construção, pontos de  $\partial P$  são  $d_P^{\mathcal{R}^p}$ -equivalentes se, e somente se, forem  $\mathcal{G}$ -equivalentes; os pontos de  $\text{int}(P)$  são  $\mathcal{G}$ -equivalentes somente a si mesmos; e cada ponto de  $\mathbb{S}^2 \setminus P$  é  $\mathcal{G}$ -equivalente a algum ponto de  $\partial P$ . É claro que  $\mathcal{G}$  é monótona, e é possível demonstrar que é semi-contínua superiormente e que seus elementos não separam  $\mathbb{S}^2$ , donde segue que  $\mathbb{S}^2/G$  é homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$   $\square$

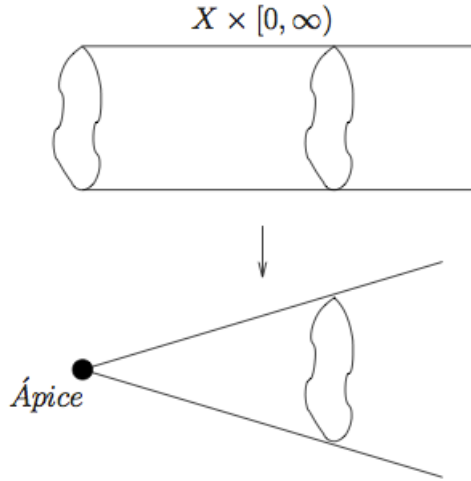
O Teorema seguinte proposto em [1] e demonstrado em [] mostra que um espaço de papel  $S$ , sem pontos singulares é uma *superfície cônico-euclidiana*.

**Teorema 2.6.6.** *Para cada ponto não-singular  $z \in S$ , existem  $r_2 > r_1 > 0$  tais que:*

1.  $B_{d_S}(z, r_1)$ , com a restrição de  $d_S$ , é isométrica à bola de raio  $r_1$  e centro no vértice  $O$  do cone métrico  $\text{Cone}_{\eta(z)}$  sobre o círculo de comprimento  $\eta(z)$ ;
2.  $B_{d_S}(z, r_2)$ , com a métrica intrínseca induzida por  $d_S$ , é isométrica à bola de raio  $r_1$  e centro no vértice  $O$  do cone métrico  $\text{Cone}_{\eta(z)}$  sobre o círculo de comprimento  $\eta(z)$ , com a restrição da métrica cônica; onde  $\eta(z)$  é o ângulo total em torno de  $z$ . Em particular, se  $\eta(z) = 2\pi$  (por exemplo, se  $z$  for plano),  $z$  possui vizinhanças que, com a restrição de  $d_S$  e com a métrica intrínseca induzida por ela, são isométricas a uma bola euclidiana plana.

**Definição 2.6.7** (*Cones métricos*). Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. O *cone métrico*  $\text{Cone}(X)$  sobre  $X$  é o cone topológico

$$\text{Cone}(X) = X \times [0, \infty) / (x, 0) \sim (x', 0) \quad \forall x, x' \in X$$



Note que estamos identificando todos os elementos que pertencem à fibra de  $X \times \{0\}$ . Denotaremos os elementos de  $\text{Cone}(X)$  por  $[x, t]$

Munido da *métrica cônica*  $d_c = d_{\text{Cone}(X)}$  definida como segue: se  $d(x, y) \geq \pi$ , então  $d_c([x, s], [y, t]) = s + t$ ; e se  $d(x, y) \leq \pi$ , então

$$d_c([x, s], [y, t]) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2st \cos(d(x, y))}$$

**Definição 2.6.8.** Uma *superfície cônica-Euclidiana*  $F$  é um espaço métrico que é localmente isométrico a um cone sobre um círculo, isto é, para todo  $p \in F$  existem  $r, \epsilon > 0$ ,  $x \in \text{Cone}(\mathbb{S}_r^1)$  e uma isometria da bola  $B_F(p; \epsilon)$  sobre  $B_{\text{Cone}(\mathbb{S}_r^1)}(x; \epsilon)$ , onde  $\mathbb{S}_r^1$  é o círculo euclidiano de raio  $r$  provido da sua métrica intrínseca. Então, existem dois tipos de pontos em uma superfície cônica-Euclidiana  $S$ : pontos nos quais  $S$  é localmente Euclidiana e pontos onde  $S$  é isométrica á vizinhança do apex de um cone  $\text{Cone}(\mathbb{S}_r^1)$ . Neste caso,  $2\pi r$  é o ângulo cônico desse ponto.

## 2.7 Construção da seqüência de esferas de papel $S_n := P_n/\mathcal{G}_n$

Um problema central da matemática é entender e descrever homeomorfismos e difeomorfismos em variedades. Em dimensão 2 um Teorema de Nielsen-Thurston em [] é quiça o resultado principal nesta area de conhecimento. Este Teorema generaliza o problema da classificação dos *automorfismos torais* a qualquer superfície fechada orientável de gênero  $g \geq 2$ . Lembremos que se  $S$  uma superfície fechada orientável e  $g$  seu gênero. Um *automorfismo de superfície*  $f: S \rightarrow S$  é simplesmente um homeomorfismo que (usualmente) preserva a orientação de  $S$ . O *Teorema de classificação dos automorfismos* em  $f_A: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , com  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ , se reduz a classificar<sup>9</sup> os elementos de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Assim, se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , o polinômio característico de  $A$ :

$$\lambda^2 - (a + b)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \text{tr } A\lambda + 1$$

fornece a seguinte classificação para os valores próprios de  $A$ :

- complexos se  $\text{tr } A = 0, \pm 1$ ; ou seguintes três casos
- ambos são  $\pm 1$ , se  $\text{tr } A = \pm 2$ ;
- reais e distintos se  $|\text{tr } A| > 2$

No caso de valores próprios complexos conjugados, decorre do Teorema de Caley-Hamilton que  $A$  tem ordem finito e algum iterado de  $f_A$  é a identidade, especificamente  $(f_A)^{12} = I$ . Neste caso,  $f_A$  diz-se *periódica*. No segundo caso, temos que  $\pm 1$  é um valor próprio, com vetor próprio  $v$  tal que  $\text{Gen}\{v\}$  projetando-se pela aplicação quociente de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  em uma curva fechada simple  $C$ , a qual é invariante por  $f_A$ , isto é,  $f_A(C) = C$ , mas sendo possível que a orientação seja contrária. Neste caso,  $f_A$  é uma potência de um *Dehn twist* e acostuma-se dizer que  $f_A$  é redutível.

Finalmente, se  $|\text{tr } A| > 2$ , então já que  $\det A = 1$ , então os valores próprios são inversos, digamos  $\lambda, 1/\lambda$  com  $|\lambda| > 1$ . Indiquemos por  $v, v'$  os vetores próprios correspondentes, e por  $\text{Gen}\{v\} = W^s$  e  $\text{Gen}\{v'\} = W^u$  os espaços próprios gerados por eles: linhas com inclinação irracional. De fato, estes fornecem um par de folheações transversais em  $\mathbb{R}^2$  consistindo no conjunto de todas as linhas paralelas a eles, respectivamente. E já que translações preservam linhas, então as folhas das respectivas folheações são *preservadas*. Note-se também que, sendo  $\text{Deck}(\mathbb{T}^2)$  translações, então cada folheação é projetada pela aplicação quociente em folheações  $\mathcal{F}^s$ , *folheação estável* e  $\mathcal{F}^u$  *folheação instável* no toro, as quais alem são transversais em todos os seus pontos. Mais ainda, decorre da inclinação irracional das linhas acima que cada folheação seja uma geodésica densa em  $\mathbb{T}^2$ . Finalmente, existe uma *medida transversa*  $\mu_s$ , respectivamente  $\mu_u$  tal que

$$f_A(\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu_s) \text{ e } f_A(\mathcal{F}^u, \mu_u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu_u)$$

Em outras palavras  $f_A$  contrai uma folheação por um fator  $\lambda^{-1}$  e expande por um fator  $\lambda$  a outra. O difeomorfismo  $f_A$  é chamado *Anosov*. Em superfícies com  $g \geq 2$  qual é o sentido de que um automorfismo, por exemplo, contraia na direção de uma folheação?

**Teorema 2.7.1** (*Teorema de Classificação de Nielsen-Thurston*). *Seja  $S$  uma superfície fechada e orientável. Então, um automorfismo  $f: S \rightarrow S$  é*

- *periódico se  $f^m$  é a identidade para algum  $m > 0$ ;*
- *redutível se  $f$  não é homotopico a um homeomorfismo periódico, e alguma multicurva é invariante por  $f$ ;*
- *pseudo-Anosov*

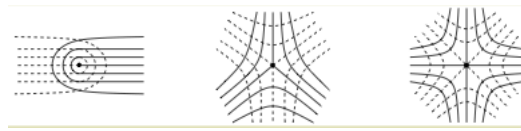
<sup>9</sup>como o grupo fundamental do toro é  $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Tem-se, então, que os homomorfismos de  $\mathbb{T}^2$  são elementos do grupo linear geral  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ , e como qualquer elemento  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$  aplica  $\mathbb{Z}^2$  nele mesmo e também induz uma aplicação continua  $f_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . Então,  $f_A$  tem inversa  $f_A^{-1}$  e o homomorfismo induzido  $(f_A)^*: \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2)$  tem uma matriz  $A$ . Onde,  $f_A$  preserva orientação se, e somente se,  $\det A = 1$ , ou equivalentemente  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$

**Definição 2.7.2** (*pseudo-Anosov*). Um automorfismo de superfície  $\phi: S \rightarrow S$  é dito *pseudo-Anosov* se existir um par folheações  $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$   $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$  (com singularidades) com medidas transversais invariantes de  $S$  e um numero real  $\lambda > 1$  tal que

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{F}^s, \mu^s) &= (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda} \mu^s) \\ \phi(\mathcal{F}^u, \mu^u) &= (\mathcal{F}^u, \lambda \mu^u). \end{aligned}$$

**Definição 2.7.3** (*pseudo-Anosov generalizados*). Um automorfismo de superfície  $\phi: S \rightarrow S$  é dito *pseudo-Anosov generalizado*, o que notaremos por **gpA**, se

- existe um conjunto finito  $\Sigma \subset S$  invariante por  $\phi$ ,
- um par de folheações  $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$  e  $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$  medíveis, com uma quantidade enumerável de singularidades em  $S \setminus \Sigma$  dos tipos:



as quais tem que acumular-se em  $\Sigma$ ,

- um numero real  $\lambda > 1$  tal que

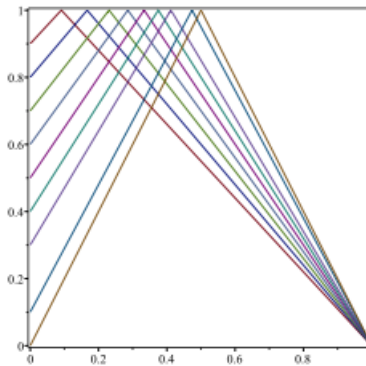
$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{F}^s, \mu^s) &= (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda} \mu^s) \\ \phi(\mathcal{F}^u, \mu^u) &= (\mathcal{F}^u, \lambda \mu^u). \end{aligned}$$

Se  $\Sigma = \emptyset$ , então  $\phi$  é pseudo-Anosov.

A ideia desta seção é explicar a construção da sequência de esferas de papel furadas (em [1]) determinadas dinamicamente por aplicações do intervalo: tipo *tenda*. Para isto, nós nos concentramos na família a 1-parâmetro de aplicações *tendas*  $T_\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , com parâmetro  $\lambda \in (\sqrt{2}, 2]$ , e definidas como abaixo:

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda(x - 1) + 2 & \text{se } x \leq 1 - \frac{1}{\lambda} \\ \lambda(1 - x) & \text{se } x \geq 1 - \frac{1}{\lambda} \end{cases}.$$

Note que  $|\lambda|$  é a inclinação de  $T_\lambda$  em  $[0, 1]$ ; para cada  $\lambda \in (\sqrt{2}, 2]$ , o número  $1 - \frac{1}{\lambda}$  é o *turning point* e  $T_\lambda(1 - \frac{1}{\lambda})$  seu *valor critico*.



A ideia para construir os polígonos  $P_n$ , com forma de *escalera*, é estudar a dinâmica da orbita do valor critico de  $T_\lambda$ . De fato, um Teorema de A. de Carvalho e T. Hall em [2] diz que

**Teorema 2.7.4.** *Existe um conjunto de parâmetros  $\Lambda \subset (\sqrt{2}, 2]$  denso e enumerável, onde a órbita do valor crítico de  $T_\lambda$  é finita, isto é, o valor crítico  $1 - \frac{1}{\lambda}$  é periódico ou pre-periódico. Mais ainda, para cada  $\lambda \in \Lambda$ , é construída uma transformação  $\psi_\lambda: S_\lambda \rightarrow S_\lambda$  **pAg** associada a  $T_\lambda$ , com domínio de definição uma 2-esfera complexa. Isto é,  $S_\lambda \simeq \widehat{\mathbb{C}}$*

**Definição 2.7.5** (*Parâmetros de T. Hall*). Descritos na tese de Toby Hall e denotados por  $NBT = NBT(\frac{1}{n})$  são parâmetros racionais em  $(0, 1/2)$  em  $\Lambda$ , tal que a subfamília  $\{\psi_{\lambda_{1/n}}\}$  de  $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é **pA**. Assim, a esfera complexa  $S_{\lambda_{1/n}}$  pode-se construir como uma esfera de papel com um número finito de identificações ao longo do bordo do polígono (escalera)  $P_{\lambda_{1/n}}$ .

Para cada  $n \geq 3$ , com  $\lambda_n \in NBT$  quer-se construir  $P_{\lambda_n}$ , assim como definir como se identificam os lados ao longo da borda  $\partial P_{\lambda_n}$ .

**Observação 2.7.6.** A construção de  $\psi_{\lambda_n}$  produz uma esfera de papel complexa  $S_{\lambda_n}$ , com  $n + 2$  pontos 1-cônicos, estes de ângulo  $\angle = \pi$ , e um ponto  $n$ -cônico, estes de ângulo  $\angle = n\pi$ , que aparece como a órbita periódica de um ponto em  $\partial P_{\lambda_n}$ .

Descrever  $\mathcal{O}(1) := \{T_\lambda^n \mid n \geq 0\}$ , órbita do valor crítico, a qual no caso que estamos estudando é finita. Descreve-la é importante pois determina como estarão dispostos. No sentido que os lados verticais de  $P_{\lambda_n}$  que notaremos por  $V_0^n, V_1^n, \dots, V_j^n, \dots, V_{n+1}^n$  estão contidos, respectivamente, nas fibras dos iterados de  $T_{\lambda_n}^n(1 - \frac{1}{\lambda_n})$ .

Pela Teoria *kneading* de Milnor-Thurston estudar a dinâmica de equivale a estudar a sequência *kneading* da órbita do valor crítico,

O itinerário de  $T_\lambda$  é :

$$s_j = \begin{cases} 0 & \text{se } T_\lambda^j(x) < 1 - \frac{1}{\lambda} \\ C & \text{se } T_\lambda^j(x) = 1 - \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \text{se } T_\lambda^j(x) > 1 - \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Onde  $s_j \in \{0, 1, C\}^{\mathbb{N}}$ .

E sua sequência *kneading*, no caso dos parâmetros de T. Hall, corresponde a

$$k_{\lambda_n}(1) = (10^{n-1}C)^\infty$$

O que implica que 1 seja um ponto periódico de período  $n + 2$  para  $T_{\lambda_n}$ . Mais ainda, também por Milnor-Thurston O parâmetro  $\lambda$  pode-se ver como o recíproco da menor raiz positiva  $\mu$  de uma certa série de potências. No caso em que 1 é um ponto periódico de período  $N$  para a função  $T_\lambda$ , então  $\mu$  é a menor raiz de  $\sum_{i=0}^{N-1} \theta_i t^i$  com coeficientes  $\theta_i \in \{-1, 1\}$  dados por  $\theta_0 = 1$  e

$$\theta_i = \begin{cases} \theta_{i-1} & \text{se } s_{i-1} = 0 \\ -\theta_{i-1} & \text{se } s_{i-1} = 1 \end{cases}$$

Onde  $1 \leq i < N$ .

Tal  $\mu$  satisfaz é a menor raiz do polinômio

$$f_n(t) = 1 - t - t^2 - \dots - t^n - t^{n+1} + t^{n+2}$$

E por tanto  $\lambda_n = 1/\mu$  deve satisfazer a equação

$$\lambda_n^{n+2} - 2\lambda_n^{n+1} + 2\lambda_n - 1 = 0 \quad (*) \tag{2.7.1}$$

Assim  $(\lambda_n)_n$  é uma sequência crescente com  $\lambda_n \rightarrow 2$ . De fato, a equação (2.7.1) determina os tamanhos dos lados verticais. De fato, se escrevemos  $p_0 = 1$ , os pontos da órbita de  $p_0$  pela ação de  $T_\lambda$  estão determinados pela relação  $p_i = T_\lambda^i(p_0)$  com  $1 \leq i \leq n + 1$ , onde pode-se provar por indução que:

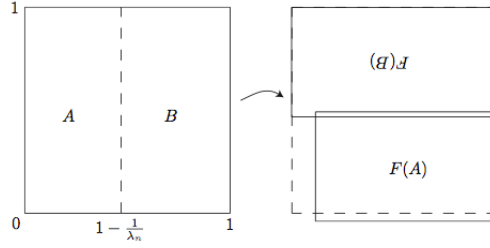


$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i = 1 \\ \frac{(2-\lambda)(\lambda^{i-1}-1)}{\lambda-1} & \text{se } 2 \leq i \leq n \\ 1 - \frac{1}{\lambda} & \text{se } i = n+1 \end{cases}.$$

Para construir a  $\psi_{\lambda_n} := F_n/\sim$ , se define uma função  $F_n = F_{\lambda_n}$  em  $P = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$  pela formula

$$F_n(x, y) = \begin{cases} (\lambda_n(x-1) + 2, \frac{y}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n^{n+1}+1}) & \text{se } x \leq 1 - \frac{1}{\lambda_n} \\ (\lambda_n(1-x), 1 - \frac{y}{\lambda_n}) & \text{se } x > 1 - \frac{1}{\lambda_n} \end{cases}.$$

Note que  $F_n$  age em  $P$  como mostra-se no abaixo

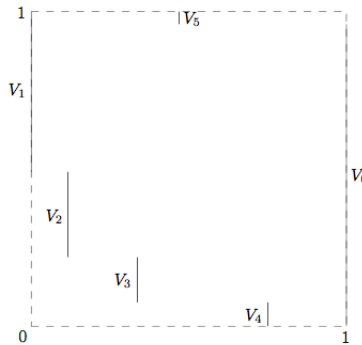


A aplicação como acima é não é injetora e descontínua em  $x = 1 - \frac{1}{\lambda_n}$ . Portanto, o quadrado não serve. Queremos um construir um polígono  $P_n$  em  $\mathbb{C}$  de  $n+2$  lados verticais e  $n+2$  lados horizontais, tal que  $F_n(P_n) = P_n$  com pareamentos  $(P_n, \mathcal{P}_n)$  que façam com que a aplicação induza no quociente um automorfismo pseudo-Anosv  $\psi_n: S_n \rightarrow S_n$ , com  $n+2$ -singularidades nos pontos 1-cônicos de  $P_n$  e uma  $n$ -singularidade num ponto  $n$ -cônico e  $S_n := P_n/d_{P_n}^{P_n}$  é uma esfera de papel complexa, isto é,  $S_n \simeq \widehat{\mathbb{C}}$ .

**Definição 2.7.7** (*Configuração dos lados verticais*). Os  $n+2$  lados verticais  $V_i$  com  $0 \leq i \leq n+1$ , contidos na fibra de  $p_i = T_\lambda^i(1)$ , estão definidos por:

$$V_i = \begin{cases} \{1\} \times [0, h] & \text{se } i = 0 \\ F_n^i(V_0) & \text{se } 1 \leq i \leq n+1 \end{cases}.$$

Onde, decorre da equação (2.7.1)  $h = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^{n+1}+1} = \frac{2\lambda^{n+1}(\lambda-1)}{\lambda^{n+2}-1}$ . Assim, a suma  $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{h}{\lambda^i}$  das alturas dos aldos verticais é 2.



A seguinte proposição determina configuração dos lados verticais do polígono  $P_n$  está dada pela seguinte proposição:

**Proposição 2.7.8** (de Carvalho e T. Hall). *Seja  $\pi_y : \Sigma \rightarrow [0, 1]$  a projeção na segunda coordenada. Então*

1.  $\pi_y(V_0 \cup V_{n+1}) = [0, 1]$  e  $\pi_y(V_0) \cap \pi(V_{n+1})$  é um ponto só.
2.  $\pi_y(\bigcup_{i=1}^n V_i) = [0, 1]$ ; e para  $1 \leq i < j \leq n$  tem-se que  $\pi_y(V_i) \cap \pi(V_j)$  é um ponto só se  $j = i + 1$ , em outro caso é o conjunto vazio.

*Demonstração.* O lado vertical  $V_0$  é aplicado por  $F_n$  ao lado vertical  $V_1$ , como  $F_n(1, 0) = (0, 1)$  e  $|V_1| = \frac{h}{\lambda}$ , então a coordenada vertical do bottom de  $V_1$  é  $1 - \frac{h}{\lambda}$ . E como

$$F_n(0, 1) = (p_2, \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{n+1} + 1}) = (p_2, 1 - \frac{h}{\lambda})$$

então, o topo de  $V_2$  coincide com a base de  $V_1$ . Para o conjunto de valores  $x \leq 1 - \frac{1}{\lambda}$  a função  $F_n$  leva lados verticais em lados verticais e, lados horizontais em lados horizontais, então o topo de  $V_{i+1}$  coincide com o bottom de  $V_i$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ .

$$\sum_{i=1}^n |V_i| = \sum_{i=1}^n \frac{h}{\lambda^i} = h \left( \frac{1}{\lambda} \left[ 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \cdots + \frac{1}{\lambda^{n-1}} \right] \right) = \frac{\lambda^{n+1} - \lambda}{\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} + \lambda - 1}$$

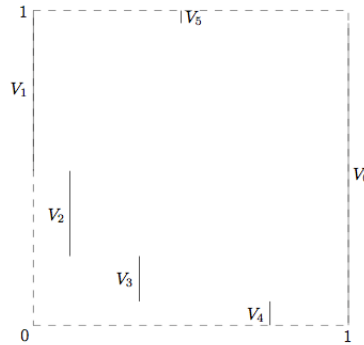
Usando a expressão (\*) temos que  $\sum_{i=1}^n |V_i| = 1$ , assim 2 tem-se. Em particular, o lado

$$V_n = \{p_n\} \times \left[0, \frac{h}{\lambda^n}\right]$$

e, por definição  $F_n(V_n) = V_{n+1}$  e  $F_n(p_n, 0) = (p_{n+1}, 1)$  é a coordenada vertical do topo de  $V_{n+1}$  e sendo a longitude deste igual a  $\frac{h}{\lambda^{n+1}}$ , disto a coordenada vertical do bottom de  $V_{n+1}$  é  $1 - \frac{h}{\lambda^{n+1}}$ , assim o conjunto  $V_{n+1}$  é  $\{p_{n+1}\} \times \left[1 - \frac{h}{\lambda^{n+1}}, 1\right]$ , por outro lado

$$1 - \frac{h}{\lambda^{n+1}} = 1 - \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^{n+1}(\lambda^{n+1} + 1)} = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^{n+1} + 1} = h,$$

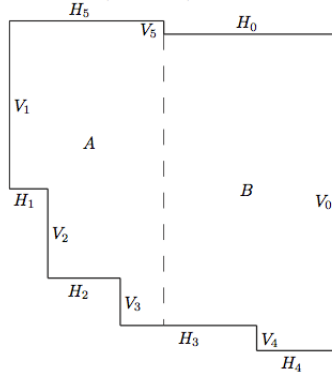
conclue-se que o topo de  $V_0$  coincide com o bottom de  $V_{n+1}$ . □



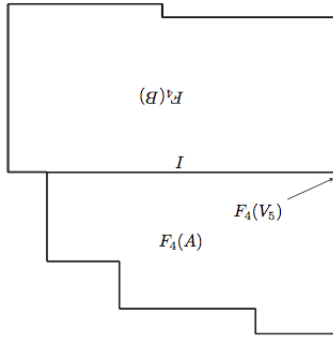
Enquanto que, os  $n + 2$  lados horizontais  $H_0, H_1, \dots, H_{n+1}$  do polígono  $P_n$  estão dispostos com relação aos  $V_i$  assim:

- $H_0$  liga a face superior de  $V_0$  com a face inferior de  $V_{n+1}$ ;
- $H_i$  liga a face inferior de  $V_i$  com a face superior de  $V_{i+1}$  para  $1 \leq i < j \leq n - 1$ ;
- $H_n$  liga a face superior de  $V_i$  com a face inferior de  $V_0$ , e finalmente

- $H_{n+1}$  liga a face superior de  $V_{n+1}$  com a face superior de  $V_1$



Em particular,  $H_{n-1}$  é o único lado de horizontal de  $P_n$  que intersesta a linha de descontinuidade  $x = 1 - \frac{1}{\lambda_n}$  no seu interior.



Agora descreveremos a relação de pareamentos em  $\partial P_n$  sobre os lados verticais de  $P_n$ , para isto, identificamos pontos em cada uns dos  $n + 2$  lados verticais dobrando ao meio cada lado  $V_i$ , onde  $0 \leq i \leq n$ . A função  $F_n$  leva o lado vertical  $V_i$  sobre o lado  $V_{i+1}$  para  $0 \leq i \leq n$ , então as identificações preservam-se. Como  $F_n(V_{n+1}) \subset V_0$  só falta provar que o ponto meio de  $V_{n+1}$  é aplicado por  $F_n$  ao ponto meio de  $V_0$ , assim, neste caso, as identificações seriam preservadas pela ação de  $F_n$  no bordo de  $P_n$ .

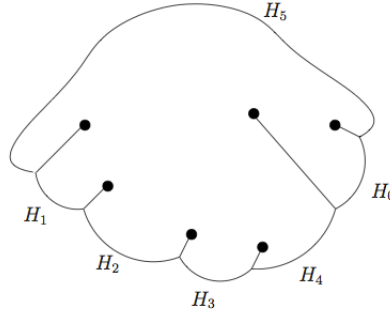
**Proposição 2.7.9.** *A imagem do ponto meio de  $V_{n+1}$  por  $F_n$  é o ponto meio de  $V_0$ .*

*Demonstração.* A longitude de comprimento do lado vertical  $V_{n+1}$  é  $|V_{n+1}| = \frac{h}{\lambda^{n+1}}$ , daí que o ponto meio é  $1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\lambda^{n+1}} \right)$  o qual é aplicado por  $F_n$  a ponto

$$\left( p_0, \frac{1 - h/2\lambda^{n+1}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{n+1} + 1} \right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2(\lambda^{n+1})\lambda} - \frac{1}{\lambda^{n+1} + 1} \in V_0$$

usando a expressão (\*) temos que  $\frac{1-h/2\lambda^{n+1}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{n+1}+1} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^{n+1}+1}$  a qual é a coordenada vertical de do ponto meio do lado vertical  $V_0$ . □

Os pareamentos descritos acima fazem com que a função  $F_n$  seja contínua nos lados verticais do polígono  $P_n$ , em particular na linha de descontinuidade  $x = 1 - \frac{1}{\lambda}$ . Portanto, tomando o quociente dos lados verticais do polígono  $P_n$ , pelas identificações já descritas acima, notado por  $\tilde{P}_n$ , a função  $F_n$  induz uma função  $\tilde{F}_n: \tilde{P}_n \rightarrow \tilde{P}_n$  sobrejetora e contínua.



Definimos agora, os pareamentos nos lados horizontais, onde o objetivo é ver que  $\tilde{F}_n$  seja injetora, daí que seja necessário identificar  $H_{n+1}$  com  $H'_0$  e reproduzir essa identificação pela dinâmica. Vejamos primeiro como  $F_n$  age nas faces horizontais

- $F_n(H_0) = I \cup H_1$ , onde  $I$  é o segmento horizontal ligando o ponto final no vértice direito de  $H_1$  a  $V_0$ . Escrevemos  $H_0 = H'_0 \cup H''_0$ , onde  $F_n(H'_0) = I$  e  $F_n(H''_0) = H_1$ ;
- $F_n(H_i) = H_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq n-2$ ;
- $F_n(H_{n-1}) = H_n \cup H_0$ ;
- $F_n(H_n) = H_{n+1}$ ;
- $F_n(H_{n+1}) = I$

**Observação 2.7.10.** Existe um ponto fixo  $q_0 \in H''_0$  para  $F^n$ , onde os pontos da órbita de  $q_i$  para  $1 \leq i < n$  ficam determinados pela equação recursiva  $q_i = F^n_i(q_0)$ .

Pela observação da acima e a proposição seguinte teremos conseguido o objetivo

**Proposição 2.7.11.** *A coordenada vertical de  $q_0$  é  $1 - \frac{2-\lambda}{\lambda(\lambda+1)}$ . Mais ainda, a distância  $L$  do ponto final esquerdo de  $H_0$  a  $q_0$  é igual ao comprimento de  $H_{n+1}$  mais a distância do vértice esquerdo de  $H_1$  a  $q_1$ .*

Segue que identificando  $L$  com a união de  $H_{n+1}$  e o segmento de  $H_1$  entre seu vértice esquerdo e  $q_1$ , que  $H_{n+1}$  esteja identificado com  $H'_0$  como queríamos. Reproduzir essa identificação pela dinâmica implica que a duas metades do bordo  $\tilde{P}_n$  entre  $q_i$  e  $q_{i+1}$  para cada  $0 \leq i < n-1$ , e duas metades do segmento entre  $q_{n-1}$  e  $q_0$  sejam identificadas. Portanto, existem  $n+2$  lados horizontais pareados, mais os  $n+2$  pareamentos verticais. Pelo teorema 42 de o quociente métrico  $S_n := P_n/d_{P_n}^n$  é uma esfera de papel com estrutura complexa induzida das foleações verticais e horizontais de  $P_n$  e como  $F_n$  contrai na direção vertical um fator  $1/\lambda$  e expande  $\lambda$  na direção horizontal,  $F_n$  induz uma transformação pseudo-Anosov  $f_n$  com domínio  $S_n$ , onde as foleações verticais e horizontais de  $P_n$  descem a um par de foleações medíveis em  $S_n$ . Sendo  $S_n$  uma 2-esfera com estrutura complexa, pelo Teorema de Uniformização  $S_n$  é conformemente equivalente a  $\hat{\mathbb{C}}$ , e portanto existe  $u_n : S_n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  aplicação de uniformização.

Como a cicatriz  $G_n$  não tem singularidades, cada esfera de papel  $S_n$  que é uma 2-esfera topológica tem uma estrutura complexa natural, assim que pelo Teorema de uniformização existe  $u_n : S_n^2 \sim_{iso} \hat{\mathbb{C}}$  unicamente determinada, salvo três pontos. e portanto tem-se que

**Proposição 2.7.12.**  *$S_n$  é uma esfera de papel de Riemann.*

## CAPÍTULO

# 3

# CONVERGENCIA

**Teorema 3.0.13 (A).**

$$\rho_\infty = \lim \rho_n \text{ nas partes compactas de } \Omega_\infty.$$

**Teorema 3.0.14 (B).**

$$\Gamma_\infty := \text{Lim}_{n \rightarrow \infty}^{\text{geo}} \Gamma_n$$

Em  $S_n$  pontos de ângulo  $\pi$ , ou seja as dobras nos lados verticais, formam um conjunto finito, tal que

$$p_1^n, p_2^n, p_3^n, \dots, p_{n+2}^n \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{q_i^n\}_{1 \leq i \leq n+2}$$

Em  $S_\infty$  pontos de ângulo  $\pi$  formam um conjunto infinito, tal que

$$\dots p_{-3}^\infty, p_{-2}^\infty, p_{-1}^\infty, p_1^\infty, p_2^\infty, p_3^\infty, \dots \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{q_i^\infty\}_{i \in \mathbb{Z}^*}$$

Queremos ver que:

$$\Omega_n := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{q_i\}_{1 \leq i \leq n+2} \xrightarrow{?} \Omega_\infty := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\{q_i^\infty\}_{i \in \mathbb{Z}^*}}$$

Onde  $\{q_i^\infty\}$  se acumula na imagem por  $u_\infty \circ \pi_\infty$  do infinito vértice.

$\widehat{P} := P \setminus \{\text{furos}\}$  é o quadrado furado e  $\widehat{P}_n := P_n \setminus \{\text{furos}\}$  é o polígono *escalera* furado.

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{P} & \\ \pi_\infty \swarrow & & \searrow \phi_\infty \\ \widehat{S} & \xrightarrow{u_\infty} & \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{P}_n & \\ \pi_n \swarrow & & \searrow \phi_n \\ \widehat{S}_n & \xrightarrow{u_n} & \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_n \end{array}$$

### 3.1 Convergencia Hausdorff e Carathéodory

Seja  $E_n := \{q_i^n\}_{0 \leq i \leq n+1} \subset \widehat{\mathbb{C}}$  e  $E_\infty := \{q_i^\infty, q_\infty\}_{0 \leq i \leq n+1} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ . Então, considerarmos a *métrica Hausdorff*  $d_{\mathcal{H}}$  entre conjuntos fechados de  $\widehat{\mathbb{C}}$  que se define como:

**Definição 3.1.1** (*Distância Hausdorff*). A *distância Hausdorff*  $d_{\mathcal{H}}$  entre conjuntos fechados  $A_n, A \subset \widehat{\mathbb{C}}$  se define com respeito a bolas  $B_r(x)$  de raio  $r$  ao redor de  $x$  na métrica esférica:

$$d_{\mathcal{H}}(A, A_n) = \inf\{r > 0 : A \subset \cup_{x \in A_n} B_r(x) \text{ e } A_n \subset \cup_{x \in A} B_r(x)\} \quad (3.1.1)$$

Dizemos que existe *convergencia Hausdorff*  $A = \lim A_n$  se, e somente se  $d_{\mathcal{H}}(A, A_n) \rightarrow 0$ .

Um fato clássico em [9] diz que se  $\{A_n\}$  é uma seqüência de fechados em  $\widehat{\mathbb{C}}$ , então existe uma subseqüência  $\{A_m\}$  de  $\{A_n\}$  que converge na topologia Hausdorff a um conjunto fechado  $A$  em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . De fato, uma caracterização (por exemplo, em [11]) desta convergência é a seguinte:

Seja  $\{A_n\}$  uma seqüência de conjuntos em  $\mathcal{F}(X)$  (Aqui  $\mathcal{F}(X)$  indica a família de todos os subconjuntos fechados num espaço métrico compacto qualquer  $X$ ) e  $A \in \mathcal{F}(X)$ . Então,

$d_{\mathcal{H}}(A_n, A) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$  se, e somente se se satisfazem as duas proposições de embaixo

- (1) Para todo  $a \in A$ , existe uma seqüência  $\{a_n\}$ , com  $a_n \in A_n$  tal que  $d(a_n, a) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ ;
- (2) Para toda seqüência  $\{a_{n_k}\}$  convergente, com  $a_{n_k} \in A_{n_k}$ , tem-se  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in A$ .

Com efeito, se supomos que a seqüência  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  de elementos em  $\mathcal{F}(X)$  é convergente a  $A$  com respeito à métrica  $d_{\mathcal{H}}$  e seja  $a \in A$  um elemento qualquer. Para cada  $n$ , definamos  $a_n$  como sendo o *ponto mínimo* da distância entre  $\{a\}$  e  $A_n$ , isto é,  $\text{dist}(\{a\}, A_n) = d(a, a_n)$ . Note que, se para cada  $n$ , o conjunto  $A_n$  é compacto, então a existência de tal ponto mínimo esta garantida. Por hipótese  $d_{\mathcal{H}}(A_n, A) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ . Logo, para qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d_{\mathcal{H}}(A_n, A) < \epsilon$  sempre que  $n > n_0$ . Assim,  $A \subset N_\epsilon(A_n)$  para  $n$  suficientemente grande. Portanto,  $a \in N_\epsilon(A_n)$  se, somente se,  $\text{dist}(a, A_n) = d(a, a_n) < \epsilon$  para  $n$  grande. decorrendo,  $d(a_n, a) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ . Por outro lado, suponhamos que  $a_{n_k} \in A_{n_k}$  é convergente. Por hipótese  $A_n \subset N_\epsilon(A)$ , logo  $a_{n_k} \in N_\epsilon(A)$ . Supondo  $A$  fechado então  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in A$ .

( $\Leftarrow$ ) Por outro lado, se supomos que  $A_n$  não converge a  $A$  na métrica Hausdorff. Então, existe  $\epsilon > 0$  e uma quantidade infinita de  $n$  tal que ou  $A$  não está contido na  $r$ -vizinhança de  $A_n$ , ou  $A_n$  não está contido na  $r$ -vizinhança de  $A$ , isto é  $\underbrace{A \not\subset N_\epsilon(A_n)}_{(1')} \text{ ou } \underbrace{A_n \not\subset N_\epsilon(A)}_{(2')}$ . Se supomos que (1') tem-se, então deve existir pelo menos um  $a \in A$  tal

que  $\text{dist}(\{a\}, A_n) \geq \epsilon$  para infinitos  $n$ , o que contradiz o item 1 da proposição. Por outro lado, se (2') tem-se, então existe uma seqüência  $n_k \rightarrow \infty$  e  $a_{n_k} \in A_{n_k} \setminus N_\epsilon(A)$ . Pela compacidade dos  $A_{n_k}$ , podemos supor que  $a_{n_k} \rightarrow a$  e como  $\text{dist}(a_{n_k}, A) > \epsilon$ , então  $\text{dist}(a, A) > \epsilon$ , logo  $a \notin A$ , o que contradiz o item 2 da proposição.

O seguinte sentido de convergência em [11] é o de Carathéodory:

**Definição 3.1.2** (*Núcleo de Carathéodory de uma seqüência de conjuntos*). Seja  $\{B_n\}$  uma seqüência de conjuntos abertos em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . O *núcleo de Carathéodory* de  $\{B_n\}_{n \geq 1}$ , notado por  $\text{Nuc}\{B_n\}$ , é o *maior aberto*  $B \subset \widehat{\mathbb{C}}$  satisfazendo a propriedade **PK**: Dado qualquer compacto  $K$  na esfera  $\widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $K \subset B$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset B_n$  para  $n \geq n_0$ .

Note que o *núcleo de Carathéodory com respeito a um ponto base*  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  denotado por  $\text{Nuc}_w\{B_n\}$  é a componente conexa de  $\text{Nuc}\{B_n\}$  que contém a  $w$ .

**Observação 3.1.3.** No caso em que o ponto base  $z_0$  seja um ponto interior de  $\bigcap_{n \geq 1} B_n$ , então o núcleo está bem definido, pois se considerarmos a família  $\{A_i\}_{i \in I}$  de todos os abertos que contém o ponto base  $z_0$  e satisfazem a propriedade (??), então não é difícil verificar que  $\{A_i\}_{i \in I}$  tem um elemento máximo respeito à inclusão. Para ver isto, basta ver que  $\bigcup_{i \in I} A_i$  também está na coleção  $\{A_i\}_{i \in I}$ , e portanto é o núcleo. Por outro lado, se o ponto  $z_0 \notin \text{int} \bigcap B_n$ , então o núcleo reduz-se a um único ponto, o ponto base  $z_0$ .

**Definição 3.1.4** (*Convergência no sentido de Carathéodory*). Diz-se que a seqüência  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  é *convergente no sentido de Carathéodory* a  $B = \text{Nuc}\{B_n\}$ , o que notaremos por  $B_n \xrightarrow{c} B$  se qualquer subsequência de  $B_n$  tem núcleo o conjunto  $B$ , isto é  $\text{Nuc}\{B_{n_j}\} = B$  para toda subsequência  $\{B_{n_j}\}_{j \geq 1}$  de  $\{B_n\}_{n \geq 1}$ .

$\Leftrightarrow \{B_n\}$  satisfaça as seguintes duas condições (Caracterização C):

- (1') Todo compacto  $K$  de  $B$  está contido em  $B_n$  para  $n$  suficientemente grande;
- (2') Todo aberto  $U$  contido em  $B_n$  para infinitos valores de  $n \in \mathbb{N}$  também está contido em  $B$ .

**Exemplo 3.1.5.** 1. Se considerarmos os conjuntos  $B_n = \mathbb{C} \setminus \{1 + it : |t| \geq \frac{1}{n}\} \subset \mathbb{C}$ . O núcleo de  $B_n$  é o conjunto desconexo  $B = \text{Nuc}\{B_n\} = \{\Re(z) < 1\} \cup \{\Re(z) > 1\}$ . Mas, com respeito a um ponto base  $w \in \mathbb{C}$  temos que:

$$\text{Nuc}_{z_0}\{B_n\} = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 1\}, & \text{se } \Re(z_0) < 1 \\ \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 1\}, & \text{se } \Re(z_0) > 1 \\ \{1\} & \text{se } z_0 = 1 \end{cases}.$$

2. Considere a seqüência de conjuntos em  $\mathbb{C}$  definida por:

$$B_n = \begin{cases} \mathbb{D} \subset \mathbb{C}, & \text{se } n \text{ é par} \\ Q = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < 1, |\Im z| < 1\}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

O disco unitário  $\mathbb{D} = \text{Nuc}_{(0,0)}\{B_n\} \subset \mathbb{C}$  é o núcleo de Carathéodory da seqüência  $B_n$  tomando como ponto base da seqüência  $B_n$  o origem em  $\mathbb{C}$ .

3. No ultimo exemplo provou-se que a seqüência de conjuntos  $B_n$  tinha núcleo de Carathéodory o disco  $\mathbb{D}$ . Mas, é claro que  $\mathbb{D}$  não é o limite de Carathéodory da seqüência  $B_n$ . Por outro lado, se considerarmos uma seqüência crescente de conjuntos  $\{B_n\}$ ; então

$$\text{Nuc}\{B_n\} = \cup_{n \geq 1} B_n$$

Alem disso,  $B_n \xrightarrow{c} B = \cup_{n \geq 1} B_n$ . De fato, se indicamos por  $K$  qualquer subconjunto compacto em  $\mathbb{C}$  contido em  $\cup_{n \geq 1} B_n$ . Então, o Teorema de Heine-Borel, implica que qualquer que seja o subconjunto  $\{n_1 < n_2 < \dots < n_j\}$  de inteiros positivos, tem-se que

$$K \subset B_{n_1} \cup B_{n_2} \cup \dots \cup B_{n_j} = B_{n_j}$$

Por tanto, existe  $n_j \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset B_n$  para  $n \geq n_j$ . Mais ainda, a condição de maximalidade do  $B_\infty$ , implica que  $\cup_{n \geq 1} B_n \subset B_\infty$ .

Por outro lado  $\cup_{n \geq 1} B_n \subset B_\infty$ , pois se  $x \in B$ , então, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\{x\} \subset B_n$  para  $n \geq n_0$ . Logo,

$$B_\infty \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n$$

Finalmente, a monotonicidade de  $B_n$  implica que qualquer subsequência de  $B_n$  tenha o mesmo núcleo de  $\{B_n\}$ , assim  $B_n \xrightarrow{c} \cup_{n \geq 1} B_n$ .

4. Para  $n \geq 1$  seja  $B_n := \mathbb{C} \setminus (-\infty, \frac{1}{n}]$  seqüência de conjuntos em  $\mathbb{C}$ . A transformação  $f_n = \frac{4z}{n(1-z)^2}$  que aplica o disco unitário  $\mathbb{D}$  em  $B_n$  e como  $f_n(z) \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ , então pelo Teorema do nucleo tem-se que  $B_n \dots$

Estabelecemos a "equivalência" entre estes dois sentidos de convergencia a convergência em Hausdorff e a de Carathéodory que:

**Proposição 3.1.6** (*Versão Hausdorff da convergência de Carathéodory*). *Seja  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  uma seqüência de abertos em  $\widehat{C}$ . Então,*

$$B_n \xrightarrow{c} B \Leftrightarrow d_H(\Lambda_n, \Lambda) \rightarrow 0.$$

$$\text{Onde } \Lambda_n = \widehat{C} \setminus B_n \text{ e } \Lambda = \widehat{C} \setminus B$$

*Demonstração.* (1'  $\Leftrightarrow$  2)

É claro que (2  $\Rightarrow$  1'). Caso contrario  $K \subsetneq B_{n_j}$  para  $j = 1, 2, 3, \dots$ , logo  $K \cap \Lambda_{n_j} \neq \emptyset$ . Se  $\{x_{n_j}\}$  é uma seqüência em  $K \cap \Lambda_{n_j}$ , então pela compacidade de  $K$ , existe uma subseqüência dos  $x_{n_j}$  convergente a um ponto  $x \in K \subset B$ , mas por hipótese  $x \in \Lambda$ .

(1'  $\Rightarrow$  2): suponhamos que  $x \notin \Lambda$ , então  $x \in B$ , e sendo  $B$  aberto, existe uma bola  $\Delta(x; \epsilon) \subset B$  suficientemente pequena, tal que, o seu fecho esta contido em  $B$ , isto é,  $\overline{\Delta(x; \epsilon)} \subset B$ . Por hipóteses  $x_j \in \Lambda_j$  é tal que  $x_j \rightarrow x$  e como  $\text{int } \overline{\Delta(x; \epsilon)} \neq \emptyset$ , então  $\overline{\Delta(x; \epsilon)}$  contém todos os  $x_j$  a partir de um  $j$  suficientemente grande, mas  $\overline{\Delta(x; \epsilon)} \subset B_n$  para  $n > n_0$ , portanto  $\overline{\Delta(x; \epsilon)} \cap \Lambda_j = \emptyset$  para  $j > n_0$ .

(2'  $\Leftrightarrow$  1)

Em outras palavras, queremos provar que todo aberto  $U$  contido em  $B_n$  para infinitos valores de  $n \in \mathbb{N}$  também está contido em  $B$  se, e somente se, para todo  $x \in \Lambda$ , existe uma seqüência  $\{x_n\}$  com  $x_n \rightarrow x$ . Que para todo  $x \in \Lambda$ , existe uma seqüência  $\{x_n\}$  com  $x_n \rightarrow x$  equivale a dizer que toda bola aberta  $\Delta(x; \epsilon)$  intersecta a  $\Lambda_n$  para  $n$  suficientemente grande. Assim, supor que  $x$  não pode-se aproximar por elementos de  $\Lambda_n$  significa que existe uma bola  $\Delta(x; \epsilon)$  que não intersecta a  $\Lambda_n$  para infinitos  $n$ , então  $\Delta(x; \epsilon) \subset \Lambda_n^c = B_n$  para infinitos  $n$ , mas por hipóteses  $\Delta(x; \epsilon) \subset B$ , então  $x \in B$ , o que é uma contradição, pois  $x \in \Lambda$ . Por outro lado, se supomos que  $U \subsetneq B$ , então  $U \cap \Lambda \neq \emptyset$ . Assim, existe  $x \in U \cap \Lambda$  e uma seqüência de pontos  $x_n \in \Lambda_n$ , tal que  $x_n \rightarrow x$  e como  $U$  é aberto tem-se que  $x_n \in U$  para  $n$  grande o suficiente, mas  $U \subset B_n$  para um número infinitos de  $n$ , portanto  $x_n \in B_n$  e também em  $\Lambda_n$ , o que implica um absurdo. □

**Proposição 3.1.7** (*Convergência em Hausdorff dos complementares*).

$$d_{\mathcal{H}}(E_n, E_\infty) \rightarrow 0$$

**Observação 3.1.8.**  $\rightsquigarrow$  se fosse  $E_{n+1} \subset E_n$  para todo  $n$ , então

$$E_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \bigcap_n E_n$$

$\rightsquigarrow E_n \subset E_{n+1}$  para todo  $n$ , então,

$$E_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \overline{\bigcup_n E_n}$$

$\rightsquigarrow$  Mais ainda, existe uma subseqüência  $\{E_m\}$  de  $\{E_n\}$  convergente em Hausdorff a  $E_\infty$ .



**Teorema 3.1.9** (de Carvalho-Toby Hall).

$$d_{\mathcal{H}}(P^n, P) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

*Demonstração.* Basta ver que para  $\epsilon > 0$ , o quadrado  $P_\epsilon = [\epsilon, 1 - \epsilon] \times [\epsilon, 1 - \epsilon] \subset P^n$  para  $n$  suficientemente grande. Para isto veremos que todos os lados do polígono  $P^n$  estão contidos em  $C_\epsilon = P \setminus P_\epsilon$ . Por exemplo, sendo  $V_0^n, V_1^n, H_n^n$ , e  $H_{n+1}^n$  subconjuntos de  $\partial P$ , temos, então, que estão contidos em  $C_\epsilon$  para todo  $n$ . Por outro lado, já que  $\lambda_n > 3/2$  para todo  $n$ , então as aturas dos lados verticais satisfazem  $|V_i^n| < (2/3)^i$ . Escolhamos  $K$  grande o bastante tal que  $\sum_{i=K}^{\infty} (2/3)^i < \epsilon$ . Assim, o lado vertical  $V_i^n$  esta contido em  $[0, 1] \times ([0, \epsilon] \cup (1 - \epsilon, 1]) \subset C_\epsilon$  quando  $i > K$ . Logo,  $H_i^n \subset C_\epsilon$  quando  $i \geq K$ , e  $H_0^n \subset C_\epsilon$  para  $n > K$ .

Escolhemos  $N > K$  grande o bastante tal que  $2 - \lambda_N < \epsilon/2^{K+1}$ , e suponha que  $n \geq N$ . Então já que

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i = 1 \\ \frac{(2-\lambda)(\lambda^{i-1}-1)}{\lambda-1} & \text{se } 2 \leq i \leq n \\ 1 - \frac{1}{\lambda} & \text{se } i = n + 1 \end{cases}.$$

Então, para  $2 \leq i \leq k$  os lados horizontais tem coordenada horizontal

$$\begin{aligned} p_i^n &= \frac{(2 - \lambda_n)(\lambda_n^{i-1} - 1)}{\lambda_n - 1} < 2(2 - \lambda_n)(\lambda_n^{i-1} - 1) \quad (\lambda_n > 3/2) \\ &< \epsilon(\lambda_n^{i-1} - 1)/2^K < \epsilon \end{aligned}$$

Logo,  $V_i^n \subset [0, \epsilon] \times [0, 1] \subset C_\epsilon$ . Portanto,  $H_{i-1}^n \subset C_\epsilon$  □

**Teorema 3.1.10** (de Carvalho-Toby Hall). *Para cada  $N \geq 3$  a seqüência de funções  $\{\phi_n|X_n\}_{n \geq N}$ , onde  $X_n = \cap_{n \geq N} P^n$ , é uniformemente convergente à função  $\phi|X_n$ . Em particular, se  $z_n \rightarrow z$  é convergente em  $P$  com  $z_n \in P^n$  para todo  $n$ , então  $\phi_n \rightarrow \phi$ .*

*Demonstração.* Ver [A, T] pag 72, lema 103 □

Provemos a proposição (3.1.7), ou seja

$$d_{\mathcal{H}}(\{q_j^n\}_{0 \leq j \leq n+1}, \{q_j^\infty, q_\infty\}_{j \in \mathbb{Z}^*}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

*Demonstração.*

$$d_{\mathcal{H}}(E_n, E_\infty) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow$$

Pela construção explícita do polígono  $P_n$  e pela convergência em Hausdorff deste a  $P$ , tem-se que cada ponto de dobra em  $P$  pode ser aproximado por seqüências de pontos de dobras em  $V_j^n$ . Assim, da convergência (em [1]) da função uniformização  $\phi_n$  à função uniformização  $\phi_\infty$ , temos que, para cada  $q_i^\infty$ , com  $i$  fixo, existe  $q_i^n \in E_n$  tal que  $q_i^n \rightarrow q_i^\infty$ . Por outro lado, já que  $\psi_\infty$  é pseudo-Anosov generalizado temos que o  $\infty$ -vértice,  $p_\infty$ , é acumulação das 1-singularidades  $p_k$ , as quais podemos aproximar por dobras do  $P_n$ , e portanto, aproximar a  $q^\infty$  por pontos de  $E_n$ . Assim, para cada  $q_i^\infty \in E_\infty$  exibimos uma seqüência de pontos em  $E_n$  convergente a  $q_i^\infty$ .

Por outro lado, suponha  $\{b_j^{n_k}\}_{k \geq 1}$  qualquer subsequência de  $\{b_j^n\}_{j=0}^{n+1}$ , com  $b_i^{n_k} \in E_{n_k}$  e  $b_i^{n_k} \rightarrow q \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Desejamos provar que  $q \in E_\infty$ , em outras palavras que é a pré-imagem de um ponto dobra em  $Q$ . Com efeito, se escolhermos uma seqüência de pontos  $a_i^{n_k} \in P^{n_k}$  que são as pré-imagens de  $b_i^{n_k}$  por  $\phi_{n_k}$ , com  $a^{n_k} \rightarrow p \in \mathbb{C}$ , então  $p = p^\infty \in P^\infty$  é um ponto de dobra. Assim, usando a convergência uniforme de  $\phi_n \rightarrow \phi$  temos  $\phi_{n_k}(a_i^{n_k}) = b_i^{n_k} \rightarrow \phi(p) = q \in E_\infty$ .

**Afirmção:** Se  $a_k^{n_k} \rightarrow a$ , onde  $a_k^{n_k} \in V_{l_k}^{n_k}$  são pontos de dobra, então  $a \in Q^\infty$  é um ponto dobra.

Basta considerar, então, o caso  $a \neq (0, 0)$ . Se  $a$  está sobre o lado superior de  $Q^\infty$ , ou sobre o lado vertical direito deste, então é claro que  $a = (1/2, 1)$ , ou  $a = (1, 1/2)$ , respectivamente. Suponhamos que  $a$  como acima está sobre o lado vertical esquerdo de  $Q^\infty$ , e escrevamos  $a = (0, y)$ , onde  $0 < y < 1$ .

Para cada  $1 \geq i \geq n$ , defina  $y_i^n$  como a componente horizontal do vértice inferior de  $V_i^n$ . Sendo  $F_n: P \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$F_n(x, y) = \begin{cases} (T_{\lambda_n}, \frac{y}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n^{n+1}+1}) & \text{se } x \leq 1 - \frac{1}{\lambda_n} \\ (T_{\lambda_n}, 1 - \frac{y}{\lambda_n}) & \text{se } x > 1 - \frac{1}{\lambda_n} \end{cases}.$$

Logo,  $F_n$  contrai por um fator de  $1/\lambda_n$  na segunda coordenada. Assim, se  $m \geq n$ . Então,

$$1 - y_m^n = \sum_{i=1}^m |V_i^n| = \sum_{i=1}^m \frac{h_n}{\lambda_n^i} = \frac{h_n}{\lambda_n} \frac{1 - (\lambda_n^m)^{-1}}{1 - (\lambda_n)^{-1}} \rightarrow \frac{1 - 1/2^m}{1 - 1/2} = 1 - 1/2^m$$

Fixe um  $m$  tal que  $1/2^m < y$ , e tome  $b \in V_{m+j}^n$ , onde  $m + j \geq n$ . Então,

$$|a - b| \leq |a - (0, \pi_y(b))| - |(0, \pi_y(b))|$$

Como  $1 - y < \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - y_m^n) = 1 - 1/2^m$ , então para  $n \gg 1$

$$|a - (0, \pi_y(b))| = -\pi_y(b) + y \geq -y_m^n + y > -1/2^m - \delta + y = \delta$$

onde  $\delta = 1/2(y - 1/2^m)$  e conseqüência da proposição (??)

$$|(0, \pi_y(b)) - b| < \frac{\delta}{2}.$$

Logo, se  $n \gg 1$ ,  $|a - b| > \frac{\delta}{2}$  para todo  $b \in V_{m+j}^n$ . Isto implica que o conjunto  $\{a_k\}_{k \geq 1}$  é finito. Logo, existe  $r \geq 1$  tal que  $a_k = r$  para infinitos  $k$ , e portanto, existe uma subsequência  $a_{k_j}^{n_{k_j}}$  de  $a_k^{n_k}$  tal que  $a_{k_j}^{n_{k_j}} \in V_r^{n_{k_j}}$  e  $a_{k_j}^{n_{k_j}} \rightarrow a$ . Isto é,  $a$  pode ser aproximado por pontos dobras dos segmentos  $\{V_r^{n_{k_j}}\}_{j \geq 1}$ . Isto implica que  $a$  seja um ponto dobra de  $Q^\infty$ . Mais exatamente,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \pi_y(V_r^{n_{k_j}}) = \frac{1}{2^r}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \pi_y(V_{r+1}^{n_{k_j}}) = \frac{1}{2^r}$$

e portanto,

$$y = \frac{1/2^r + 1/2^{r+1}}{2} = 3/2^{r+2}$$

que é um ponto de dobra.

Resta o caso  $a$  está sobre o lado inferior de  $P^\infty$ . Seja  $a = (x, 0)$ , com  $0 < x < 1$ . Seja  $j$  tal que  $\frac{3}{2^{j+2}} < x$ . Defina  $p_i^n$  por:

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i = 1 \\ \frac{(2-\lambda)(\lambda^{i-1}-1)}{\lambda-1} & \text{se } 2 \leq i \leq n \\ 1 - \frac{1}{\lambda} & \text{se } i = n+1 \end{cases}.$$

Como  $\lambda_n^{n+2} - \lambda_n^{n+1} + 2\lambda_n - 1 = 0$ , então

$$2 - \lambda_n = \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_{n+1} + 1}$$

e logo, se  $2 \leq i \leq n$ ,  $p_i^n = \left(\frac{\lambda_n+1}{\lambda_{n+1}+1}\right) \frac{\lambda_n^{i-1}-1}{\lambda_n-1}$

para  $2 \leq n-j \leq n$ , temos que

$$\begin{aligned} p_{n-j} &= \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - 1} \frac{\lambda_n^{n-j-1} - 1}{\lambda_{n+1} + 1} = \\ &= \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - 1} \frac{\lambda_n^{n-j-1} - 1}{(\lambda_n^{n-j-1} - 1)\lambda_n^{j+2} - \lambda_n^{j+2} + 1} = \\ &= \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - 1} \frac{1}{\lambda_n^{j+2} - \frac{\lambda_n^{j+2}-1}{\lambda_n^{n-j-1}-1}} \rightarrow \frac{3}{2^{j+2}} \end{aligned}$$

Um análise similar ao caso anterior mostra que existe  $r \geq 2$  tal que existe  $\{a_{k_j}^{n_{k_j}}\}_{j \geq 1}$  uma subsequência de  $\{a_k^{n_k}\}$ , com  $a_k^{n_k} \in V_{n_{k_j}-r}^{n_{k_j}}$  e  $a_k^{n_k} \rightarrow a$ , logo, usando a proposição (??),  $a = (x, 0)$ , com  $x = \frac{3}{2^{j+2}}$  é ponto de dobra de  $P^\infty = P$ .  $\square$

**Corolário 3.1.11.**

$$\Omega_\infty = \text{Nuc}(\Omega_n) \quad e \quad \Omega_n = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_n \xrightarrow{c} \Omega_\infty = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\infty$$

Finalmente, usando o *Teorema do nucleo de Carathéodory*, para recobrimentos do disco, devida a D.A. Hejhal em [6], se conclui o Teorema referente as densidades, pois, usando, "D.Hejhal" não é difícil ver que

$$\Omega_n \xrightarrow{c} \Omega_\infty \implies \rho_n \xrightarrow{u.p.c} \rho_\infty \text{ de } \Omega_\infty$$

**Teorema 3.1.12 (D.A. Hejhal).** *Seja  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  uma seqüência de domínios de  $\widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $z_0 \in B_n$ , para cada  $n$ , e  $\text{Card}(\partial B_n) \geq 3$ . Seja  $p_n : \mathbb{D} \rightarrow B_n$  a aplicação de recobrimento universal, normalizada por  $p_n(0) = z_0$  e  $p_n'(0) > 0$ . Então,*

$$[p_n \xrightarrow{u.p.c} p_\infty] \Leftrightarrow$$

$$B = \text{Nuc}_{z_0} \{B_n\} \text{ é não vazio, } \text{Card}(\partial B) \geq 3, \text{ e } B_n \xrightarrow{c} B.$$

Com estas condições,  $p_\infty : \mathbb{D} \rightarrow B$  é a aplicação de recobrimento universal de  $B$ .

com  $B_n = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_n$  e ponto base  $z_0 = (u_n \circ \pi_n)(1/2, 1/2)$ , e  $z_\infty = (u_\infty \circ \pi_\infty)(1/2, 1/2)$  que são as normalizações das funções normalização em [1] temos o resultado.

**Observação 3.1.13.** Note que a noção do núcleo de Carathéodory de uma seqüência de abertos  $\{B_n\}$  permite estender a ideia de convergência de uma seqüência de funções em  $\mathbb{C}$ . Mais especificamente, se  $\{B_n\}$  uma seqüência de domínios em  $\mathbb{C}$  com núcleo  $B = \text{Nuc}\{\{B_n\}\}$ . Seja  $f_n: B_n \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função para todo  $n \geq 1$ . Então, a seqüência de funções  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  converge em partes compactas a  $f: B \rightarrow \mathbb{C}$  se, para todo compacto  $K$  de  $B$  e todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \text{ para todo } z \in K \text{ e todo } n \geq n_0.$$

### 3.1.1 $\rho_\infty = \lim \rho_n$

A seqüência de densidades métricas  $\{\rho_n\}$  converge á densidade métrica  $\rho_\infty$  de  $\Omega_\infty$  nas partes compactas de  $\{\Omega_n\}$ .

*Demonstração.* Seja  $\rho_n: \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{C}$  a densidade de Poincaré de  $\Omega_n$  e  $\rho_\infty: \Omega_\infty \rightarrow \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{C}$  a de  $\Omega_\infty$ . Provar que a seqüência  $\{\rho_n\}$  converge em partes compactas a  $\rho_\infty$  é equivalente a provar que para qualquer compacto  $K \subset \Omega_\infty$  existen  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\rho_n(z) - \rho_\infty(z)| < \epsilon \text{ para todo } z \in K \text{ e todo } n \geq n_0.$$

Com efeito, já que  $\Omega_n$  é convergente a  $\Omega_\infty := \text{Nuc}\{\Omega_n\}$  na topologia de Carathéodory e se satisfazem as hipóteses do Teorema de Dhjhal (ver []) proposição (??), então, a seqüência  $\{p_n\}$ , de aplicações de recobrimento, converge nas partes compactas do disco à aplicação de recobrimento  $p_\infty$  de  $\Omega_\infty$ . Por outro lado, um resultado básico de análise complexa implica que a seqüência de derivadas  $\{p'_n\}$  de  $p_n$  convirja nas partes compactas do disco a  $p'_\infty$ , que por sua vez implica que  $\{\frac{1}{p'_n}\}$  convirja a  $\frac{1}{p'_\infty}$  nas partes compactas de  $\mathbb{D}$ . Provemos, então, que a seqüência de densidades métricas  $\{\rho_n\}$  de  $\Omega_n$  converge à densidade métrica  $\rho_\infty$  de  $\Omega_\infty$  nas partes compactas de  $\Omega_\infty$ .

Seja  $K \subset \Omega_\infty$  compacto, então existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset \Omega_n$  sempre que  $n \geq n_1$ . Fixemos  $n_1$ , então  $K \subset \Omega_{n_1}$ . Agora consideremos a imagem inversa de  $K$  por  $p_{n_1}$ , isto é,  $p_{n_1}^{-1}(K)$ , o qual é um conjunto compacto em  $\mathbb{D}$ . Assim que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_2$  temos

$$\left| \frac{1}{p'_n(z)} - \frac{1}{p'_\infty(z)} \right| < \frac{\epsilon}{C}; \quad \forall z \in p_{n_1}^{-1}(K), \text{ onde } \sup_{z \in \mathbb{D}} |\rho_{\mathbb{D}}(z)| \leq C.$$

Agora, para  $w \in K$ , pela sobrejetividade de  $p_{n_1}$ , existe  $z \in \mathbb{D}$  tal que  $p_{n_1}(z) = w$ . Então,

$$\begin{aligned} |\rho_n(w) - \rho_\infty(w)| &= \left| \frac{\rho_{\mathbb{D}}(z)}{p'_n} - \frac{\rho_{\mathbb{D}}(z)}{p'_\infty} \right| \\ &\leq C \left| \frac{1}{|p'_n(z)|} - \frac{1}{|p'_\infty(z)|} \right| < \epsilon, \text{ sempre que } n \geq n_2 \end{aligned}$$

□

## 3.2 $\Gamma_\infty := \text{Lim}_{j \rightarrow \infty}^{\text{geo}} \Gamma_j$

Pelo Teorema de Uniformização

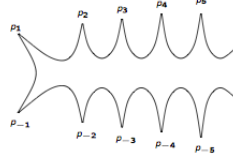
$$\Omega_n \simeq \mathbb{H}/\Gamma_n$$

e

$$\Omega_\infty \simeq \mathbb{H}/\Gamma_\infty.$$

Com  $\Gamma_n, \Gamma_\infty \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  subgrupos discretos, ou seja grupos fuchsianos. Cada uns deles é único salvo classes de conjugação por transformações de Möbius.

**Questão:** Podemos *aproximar* essa esfera hiperbólica  $\mathbb{H}/\Gamma_\infty$ , um modelo fuchsiano de  $\Omega_\infty$  pela seqüência de modelos fuchsianos  $\mathbb{H}/\Gamma_n$  associados a  $\Omega_n$ ?



Sim, se é possível estabelecer uma quase-isometria entre uma *bolas métricas* em  $\Omega_n$  e bolas de  $\Omega_\infty$ . Em outras palavras,

$\Gamma_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty}^{geo} \Gamma_n$  é o *limite geométrico*, também conhecido como o limite *no sentido Gromov-Hausdorff* se, e somente se,  $\forall \epsilon > 0, R > 0, \exists N < \infty$  tal que  $\forall n > N$  existe uma  $(1 + \frac{1}{n}, \epsilon)$ -quase-isometria

$$f_n: B_{R,n}(x_n) \longrightarrow B_{R,\infty}(x_\infty).$$

Onde  $B_{R,n}(x_n)$  é a bola métrica em  $\Omega_n$  com respeito à distância hiperbólica  $d_{\Omega_n}$ . Analogamente, para  $B_{R,\infty}(x_\infty)$ , com respeito à distância  $d_{\Omega_\infty}$ . Então, um resultado em Kapovich ([3]) estabelece o resultado.

### 3.2.1 Topologia Chabauty

Esta topologia foi introduzida em [12] por Claude Chabauty em 1950 para o estudo do espaço dos subgrupos fechados de um grupo localmente compacto. Em [?], para uma introdução a este tema. De fato, ali se apresenta a topologia Chabauty assim,

**Definição 3.2.1.** Seja  $X$  um espaço topológico qualquer. A *topologia Chabauty* sobre a coleção  $\mathcal{G}(X)$  de subconjuntos fechados de  $X$  é a topologia gerada por uma subbase de conjuntos da forma

$$\mathcal{O}_K := \{F \in \mathcal{G}(X) \mid F \cap K = \emptyset\}; \text{ onde } K \text{ é um subconjunto compacto de } X$$

$$\mathcal{O}'_U := \{F \in \mathcal{G}(X) \mid F \cap U \neq \emptyset\}; \text{ onde } U \text{ é um subconjunto aberto de } X$$

Em outras palavras, a topologia Chabauty sobre  $\mathcal{G}(X)$  é a topologia para a qual

$$\{\mathcal{O}_K \mid K \text{ compacto}\} \cup \{\mathcal{O}'_U \mid U \text{ aberto}\}$$

é uma subbase para uma topologia sobre  $\mathcal{G}(X)$ .

Dois fatos desta topologia são:

1. Se  $X$  é qualquer espaço topológico, então a coleção  $\mathcal{G}(X)$  munida com a topologia Chabauty é compacta. Para ver isto, bastaria verificar que, por exemplo, um cobrimento da forma

$$\{\mathcal{O}_{K_i}\}_{i \in I} \cup \{\mathcal{O}'_{U_j}\}_{j \in J}$$

tem um subcobrimento finito, isto decorre do teorema de Tychonov. Defina  $F$  como o complementar da união  $\bigcup_{j \in J} U_j$  em  $X$ , isto é,  $F = X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j$ . Claramente  $F$  é fechado em  $X$  e  $F \notin \mathcal{O}'_{U_j}$  para todo  $j \in J$ , então

deve existir um  $i \in I$  tal que  $F \in \mathcal{O}'_{K_i}$ . Já que a coleção  $\{U_j\}_{j \in J}$  fornece uma cobertura para  $K_i$ , então o teorema de Heine-Borel implica que exista uma subcobertura

$$\{U_{j_1}, U_{j_2}, \dots, U_{j_p}\}$$

de  $K_i$ . Dado um conjunto fechado  $L$ , então, ou  $L \cap U_{j_k} \neq \emptyset$  para algum  $k = 1, 2, \dots, p$ , ou  $L \cap K_i = \emptyset$ . Claramente, se  $L \notin \mathcal{O}_{K_i}$ , então necessariamente  $L \in \mathcal{O}'_{U_{j_q}}$  para algum  $q$ , o que prova esse fato.

2. Se  $X$  é Hausdorff localmente compacto com uma base enumerável de abertos, então  $\mathcal{G}(X)$  também tem base enumerável e é um espaço topológico metrizável. Provemos, inicialmente, que  $\mathcal{G}(X)$  é um espaço Hausdorff. É claro que, sendo  $X$  Hausdorff e localmente compacto, as vizinhanças compactas de cada ponto de  $X$  constituem um sistema fundamental de vizinhanças, daí que,  $X$  seja um conjunto regular. Sejam  $C, L \in \mathcal{G}(X)$  com  $C \neq L$  e seja  $x \in C \setminus L$ . Sendo  $X$  regular, então existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  cujo fecho  $\bar{U}$  é compacto. Além disso  $x \in U \subset \bar{U} \subset X \setminus L$ , logo  $\bar{U}$  não intersesta a  $L$ . Assim,

$$C \in \mathcal{O}'_U, \quad L \in \mathcal{O}_{\bar{U}}, \quad \text{e } \mathcal{O}_{\bar{U}} \cap \mathcal{O}'_U = \emptyset.$$

Logo,  $\mathcal{G}(X)$  é Hausdorff.

Provemos que,  $\mathcal{G}(X)$  tem uma base enumerável de abertos. Por hipótese  $X$  tem uma base enumerável de abertos. Seja  $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$  essa base para  $X$ , onde posemos supor que  $\{\mathcal{O}_{\bar{U}_n}\} \cup \{\mathcal{O}'_{U_n}\}$  é uma subbase para uma topologia de  $\mathcal{G}(X)$ . Seja  $\mathcal{O}_K$  um elemento da subbase e  $L \in \mathcal{O}_K$ , isto é,  $L \cap K = \emptyset$ . Por compacidade existe uma subcobertura  $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_p}\}$  de  $K$  com  $\bar{U}_{n_i} \cap L = \emptyset$  para toda  $1 \leq i \leq p$ . Então,

$$L \in \mathcal{O}_{\bar{U}_{n_1}} \cap \mathcal{O}_{\bar{U}_{n_2}} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{\bar{U}_{n_p}} \subset \mathcal{O}_K$$

A convergência nesta topologia esta caracterizada pela seguinte proposição provada em [Pet]

**Proposição 3.2.2** (Convergência Chabauty). *Seja  $X$  um espaço topológico localmente compacto e metrizável, então uma seqüência  $\{C_n\}$  em  $\mathcal{G}(X)$  converge na topologia Chabauty a  $C \in \mathcal{G}(X)$  se, e somente se, se satisfazem as seguintes duas condições:*

1. *Se  $x \in X$  é tal que existe uma subseqüência  $\{C_{n_i}\}$  de  $\{C_n\}$  e  $x_i \in C_{n_i}$  tal que  $x_i \rightarrow x$ . Então,  $x \in C$ ;*
2. *Dado  $x \in C$  existe  $x_n \in C_n$  para todo  $n$  tal que  $x_n \rightarrow x \in C$*

### 3.2.2 Relação com Hausdorff

Sempre podemos fazer com que  $d_{\mathcal{H}}$  seja uma métrica em  $\mathcal{F}(X)$  mesmo sendo  $X$  não compacto. Para isto basta considerar uma compactificação de Alexandrov de  $X$  que seja metrizável, ver [Hub]. Por exemplo, se  $X$  é um espaço métrico 2-contável e localmente compacto. Assim, se  $X$  é um espaço métrico que admite uma compactificação de Alexandrov  $\bar{X} = X \cup \{p_\infty\}$  metrizável. Então, para cada  $A \in \mathcal{F}(X)$  basta tomar a compactificação  $\bar{A} = A \cup \{p_\infty\} \subset \bar{X}$  com subconjunto de  $\bar{X}$ . Indiquemos por  $\overline{\mathcal{F}(X)}$  o conjunto definido por:

$$\overline{\mathcal{F}(X)} := \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$$

E sendo  $\bar{X}$  metrizável, então,  $d_{\mathcal{H}}$  é uma métrica sobre  $\overline{\mathcal{F}(X)}$ . Assim,  $(\overline{\mathcal{F}(X)}, d_{\mathcal{H}})$  é um espaço métrico.

Seja  $G$  um grupo de Lie e denotarmos por  $\mathcal{F}(G)$  o conjunto de todos os subgrupos fechados. Então, o espaço métrico  $(\overline{\mathcal{F}(G)}, d_{\mathcal{H}})$  é conhecido na literatura como o *espaço Chabauty* de  $G$ . A topologia Chabauty é simplesmente a topologia métrica induzida pela métrica Hausdorff em  $\overline{\mathcal{F}(G)}$ .

**Exemplo 3.2.3** (Topologia Chabauty de  $\mathbb{R}$ ). Os subgrupos fechados do grupo aditivo  $\mathbb{R}$  são, o  $\mathbb{R}$  mesmo e os grupos cíclicos  $a\mathbb{Z}$  com  $a \in \mathbb{R}$ . Sem perda de generalidade só considerarmos o caso  $a \geq 0$ , pois  $a\mathbb{Z} = (-a)\mathbb{Z}$ . Se  $a = 0$ , então  $0\mathbb{Z} = \{0\}$  é o grupo trivial. Para estudar estes grupos na topologia Chabauty, consideramos a compactificação de Alexandrov  $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$  de  $\mathbb{R}$ , a qual é metrizável. Quando  $a \rightarrow 0$  então  $\overline{a\mathbb{Z}} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  na topologia geométrica, e quando  $a \rightarrow \infty$ , então  $\{0, \infty\}$  é o limite geométrico de  $\overline{a\mathbb{Z}}$ . Portanto, o espaço Chabauty de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{G}(\mathbb{R})$  é homeomorfo a  $[0, \infty]$ . Já o espaço Chabauty de  $\mathbb{R}^2$  é homeomorfo a uma 4-esfera, ver [HP]. Porem,  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)$  é de dimensão 9, mas não é uma variedade.

**Definição 3.2.4** (*Limite geométrico*). Seja  $G$  um grupo de Lie e  $\Gamma_j \subset G$  uma seqüência de subgrupos fechados de  $G$ . Então, o *limite geométrico*  $\text{Lim}_{j \rightarrow \infty}^{\text{geo}} \Gamma_j$  da seqüência  $\{\Gamma_j\}$  é um subgrupo  $\Gamma_\infty \subset G$  tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- para cada subsequência convergente  $\gamma_{j_i} \in \Gamma_{j_i}$  o limite  $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{j_i}$  está em  $\Gamma_\infty$ , isto é,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{j_i} \in \Gamma_\infty$ .
- Para cada  $\gamma_\infty \in \Gamma_\infty$ , existe uma seqüência  $\{\gamma_j\}$ , onde cada  $\gamma_j$  é um elemento de  $\Gamma_j$ , convergindo a  $\gamma_\infty$ .

Em outras palavras, a seqüência  $\{\Gamma_j\}$  converge a  $\Gamma_\infty$  na topologia Chabauty. Se  $\text{Lim}_{j \rightarrow \infty}^{\text{geo}} \Gamma_j = \Gamma_\infty$ , então diz-se que os grupos  $\Gamma_j$  convergem a  $\Gamma_\infty$  *geometricamente*.

Pelo item 1 das duas propriedades da topologia Chabauty (3.2.1) temos que qualquer seqüência de subgrupos fechados em  $G$  contem uma subsequência que converge geometricamente.

### 3.2.3 Topologia quase-isométrica

**Definição 3.2.5** (*mergulhos quase-isométricos, quase-isométrias*). Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  dois espaços métricos completos. Um  $(K, C)$ -mergulho quase-isométrico é uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  tal que existem constantes  $K$  e  $C$  tal que:

$$\frac{1}{K}d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq Kd_X(x, x') + C; \quad \forall x, x' \in X \quad (3.2.1)$$

Se  $f$  admite uma *quase-inversa*  $g: Y \rightarrow X$ , no sentido que

$$d_X(g \circ f(x), x) \leq c; \quad d_Y(f \circ g(y), y) \leq c \quad \forall x \in X, y \in Y \quad (3.2.2)$$

que também é um  $(K, C)$ -mergulho quase-isométrico, então  $f$  é uma quase-isometria e os espaços  $X$  e  $Y$  são *quase-isométricos*.

**Definição 3.2.6** (*Domínio senhalado*). Um *domínio senhalado* é um par  $(X, p)$ , com  $X$  sendo um espaço métrico e  $p$  um ponto em  $X$ .

**Definição 3.2.7** (*Convergência quase-isométrica*). Seja  $\{(X_n, x_n)\}$  uma seqüência de domínios senhalados. Diremos (ver [Mk]) que a seqüência  $\{(X_n, x_n)\}$  converge ao domínio senhalado  $(X, x)$ , na *topologia quase-isométrica*, o que notaremos por  $(X_n, x_n) \xrightarrow{GH} (X, x)$  se as bolas métricas  $B_{d_{X_n}}(x_n; r) \subset (X_n, d_{X_n})$  e  $B_{d_X}(x; r) \subset (X, d_X)$  são quase-isométricas. Especificamente, se para cada  $\epsilon > 0, r > 0$  existe um número  $n_0 < \infty$  tal que para todo  $n > n_0$  existe uma  $(1 + 1/n, \epsilon)$ -quase-isometria

$$f_n: B_{d_{X_n}}(x_n; r) \rightarrow B_{d_X}(x; r).$$

**Observação 3.2.8.** Sabemos da proposição.. que a densidade de Poincaré associada a uma superfície hiperbólica é contínua e estritamente positiva. Dai que exista um número real  $r > 0$  tal que  $\rho_\infty(z) \geq r$  para todo  $z$  definido num compacto. De fato, pela convergência uniforme de  $\{\rho_n\}$  a  $\rho_\infty$  tem-se que está também esta limitada inferiormente por esse valor.

**Proposição 3.2.9.** *Para todo  $c \in \Omega_\infty$  e  $0 < \epsilon < R$ , existe  $N \geq 1$  tal que, para cada  $n \geq N$  satisfazem-se as seguintes condições:*

1.  $B_{\Omega_\infty}(c, R - \epsilon) \subset B_{\Omega_n}(c, R) \subset B_{\Omega_\infty}(c, R + \epsilon)$ .
2.  $d_{\Omega_n}(x, y) - \epsilon \leq d_{\Omega_\infty}(x, y) \leq d_{\Omega_n}(x, y) + \epsilon$ , para todo  $x, y \in B_{\Omega_\infty}(c, R + \epsilon)$ .

*Demonstração.* Considerarmos a bola fechada  $K := \overline{B_\infty(c, M)} \subset \Omega_\infty$ , com  $M := 8R + 8\epsilon$ . É claro que  $K$  é um subconjunto compacto em  $(\Omega_\infty, d_\infty)$ , pois  $d_\infty$  induz a mesma topologia que a métrica esférica induz em  $\Omega_\infty$ . Por outro lado, sendo  $K$  compacto e  $\Omega_\infty := \text{Nuc}(\Omega_n)$ , então para  $n$  suficientemente  $K \subset \Omega_n$ , isto é, existe  $N \geq 1$ , tal que,  $K \subset \Omega_n$ , para toda  $n \geq N$ .

A convergência de  $\Omega_n$  a  $\Omega_\infty$  em Carathéodory, implica que a seqüência de densidades de Poincaré  $\{\rho_n|_K\}$  convirja uniformemente a  $\rho_\infty|_K$ . Portanto,

$$\rho_\infty(z) - \frac{r\epsilon}{M} \leq \rho_n(z) \leq \rho_\infty(z) + \frac{r\epsilon}{M}; \quad \forall z \in K \quad (3.2.3)$$

Note que se existe uma curva  $\gamma: [0, 1] \rightarrow K$  conectando dois pontos quaisquer (mais fixados). Então, o comprimento euclidiano da curva esta limitado superiormente pelo seu comprimento na métrica hiperbólica de  $d_n$  por um fator constante (mesmo hale para a métrica  $d_\infty$ ). Com efeito,

$$l_\epsilon = \int_\gamma |dz| \leq \int_\gamma \frac{\rho_n(z)}{r} |dz| = \frac{1}{r} \int_\gamma \rho_n(z) |dz| \quad (*)$$

Fixemos qualquer  $n \geq N$  e vejamos  $B_{\Omega_\infty}(c, R - \epsilon) \subset B_{\Omega_n}(c, R)$ .

Seja  $x \in B_{\Omega_\infty}(c, R - \epsilon)$ . Então, existe uma curva  $\gamma: [0, 1] \rightarrow (\Omega_\infty, d_{\Omega_\infty})$  que realiza a distancia  $d_\infty$  entre  $x$  e seu centro  $c$ , isto é,  $\gamma(0) = c$ ,  $\gamma(1) = x$ , e

$$l_{\Omega_\infty}(\gamma) = \int_\gamma \rho_{\Omega_\infty}(z) |dz| = d_{\Omega_\infty}(c, x)$$

Note-se que para todo  $t \in [0, 1]$  se satisfaz

$$d_{\Omega_\infty}(c, \gamma(t)) \leq l_{\Omega_\infty}(\gamma)$$

$$d_{\Omega_\infty}(c, \gamma(t)) \leq d_{\Omega_\infty}(c, x) < R - \epsilon.$$

Portanto, para todo  $0 \leq t \leq 1$  o ponto  $\gamma(t) \in B_{\Omega_\infty}(c, R - \epsilon) \subset K$ . Assim, podemos integrar ao longo do caminho  $\gamma$  ambos lados da desigualdade

$$\rho_{\Omega_n}(\gamma(t)) - \frac{r\epsilon}{M} \leq \rho_{\Omega_\infty}(\gamma(t))$$

$$\int_\gamma \left[ \rho_{\Omega_n}(\gamma(t)) - \frac{r\epsilon}{M} \right] |dz| \leq \int_\gamma \rho_{\Omega_\infty}(\gamma(t)) |dz|$$

$$\int_\gamma \rho_{\Omega_n}(z) |dz| - \int_\gamma \frac{r\epsilon}{M} |dz| \leq \int_\gamma \rho_{\Omega_\infty}(\gamma(t)) |dz|$$

E já que:



$$\int_\gamma \rho_{\Omega_\infty}(\gamma(t))|dz| = \rho_{\Omega_\infty}(z)|dz| = l_\infty(\gamma) = d_\infty(c, x)$$

$$\int_\gamma \frac{r\epsilon}{M}|dz| = \frac{r\epsilon}{M} \int_\gamma |dz| = \frac{r\epsilon}{M} l_e$$

$$\int_\gamma \rho_{\Omega_n}(z)|dz| \geq d_n(c, x)$$

Então,

$$d_\infty(x, c) \geq d_n(x, c) - \frac{r\epsilon}{M} l_e(\gamma) = l_n(\gamma) - \frac{r\epsilon}{M} l_e(\gamma)$$

E como  $d_\infty(x, c) < R - \epsilon$ , então,

$$R > l_n(\gamma) - \frac{r\epsilon}{M} l_e + \epsilon$$

e pela observação (\*) temos

$$-l_e(\gamma) \geq -\frac{1}{r} l_\infty(\gamma)$$

Dai que

$$R > l_n(\gamma) - \frac{r\epsilon}{M} \frac{l_\infty(\gamma)}{r} + \epsilon = l_n(\gamma) + \epsilon - \frac{l_\infty(\gamma)}{M} \epsilon$$

$$\frac{l_\infty(\gamma)}{M} = \frac{d_\infty(x, c)}{M} < 1$$

então,

$$R > d_n(c, x) + \epsilon - \epsilon = d_n(c, x).$$

Assim,  $x \in B_n(c, R)$ .

Provemos que  $B_{\Omega_n}(c, R) \subset B_{\Omega_\infty}(c, R + \epsilon)$ . Em outro caso,  $x \in B_n(c, R) \setminus B_{\Omega_\infty}(c, R + \epsilon)$ . Seja  $\gamma: [0, 1] \rightarrow (\Omega_n, d_{\Omega_n})$  uma curva que realiza a distância  $d_n$  entre  $c$  e  $x$ , isto é  $\gamma(0) = c$ ,  $\gamma(1) = x$ , e  $l_{\Omega_n}(\gamma) = d_{\Omega_n}(c, x)$ . Considerarmos, então dois casos

**Caso 1:**  $\gamma(t) \in \Omega_\infty$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Por definição,  $l_{\Omega_\infty}(\gamma) \geq d_{\Omega_\infty}(c, x)$  e por hipótese  $x \notin B_{\Omega_\infty}(c, R + \epsilon)$ . Então,  $l_{\Omega_\infty}(\gamma) \geq R + \epsilon$ . Portanto, existe  $\bar{t} \in [0, 1)$  tal que a curva intersecta o bordo da bola  $B_\infty(c, R)$ . Assim,  $l_\infty(\gamma|_{[0, \bar{t}]}) = R + \epsilon$

**Caso 2:** Existe  $\hat{t} > 0$  tal que para todo  $t \in [0, \hat{t})$ , temos  $\gamma(t) \in \Omega_\infty$ , mas  $\gamma(\hat{t}) \notin \Omega_\infty$ , isto é, um furo. Portanto,  $l_{\Omega_\infty}(\gamma|_{[0, \hat{t})}) = \infty$ . Assim, existe  $\bar{t}$  tal que  $\bar{t} < \hat{t}$  e  $l_{\Omega_\infty}(\gamma|_{[0, \bar{t}]}) = R + \epsilon$

Indiquemos por  $\bar{\gamma}$  a restrição de  $\gamma$  ao intervalo  $[0, \bar{t}]$ , isto é,  $\bar{\gamma} := \gamma|_{[0, \bar{t}]}$ . E já que  $\bar{\gamma}(t) \in K$  para todo  $t \in [0, \bar{t}]$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\gamma}} \rho_{\Omega_n}(z)|dz| &\geq \int_{\bar{\gamma}} \rho_{\Omega_\infty}(z)|dz| - \frac{r\epsilon}{M} \int_{\bar{\gamma}} |dz| \\ &= l_\infty(\bar{\gamma}) - \frac{r\epsilon}{M} l_e(\bar{\gamma}) \end{aligned}$$

E já que  $l_n(\gamma) \geq l_n(\bar{\gamma}) = \int_{\bar{\gamma}} \rho_{\Omega_n}(z) |dz|$ . Então,

$$l_n(\gamma) \geq l_\infty(\bar{\gamma}) - \frac{r\epsilon}{M} l_e(\bar{\gamma})$$

$$d_n(c, x) = l_n(\gamma) \geq l_\infty(\bar{\gamma}) - \frac{r\epsilon}{M} l_e(\bar{\gamma})$$

E como  $l_e(\bar{\gamma}) \leq \frac{l_\infty(\bar{\gamma})}{r}$ . Então,

$$d_n(c, x) \geq R + \epsilon - \frac{r\epsilon}{M} \frac{l_\infty(\bar{\gamma})}{r}$$

$$d_n(c, x) \geq R + \epsilon - \frac{\epsilon}{M} (R + \epsilon)$$

$$\geq R + \epsilon - \epsilon = R$$

Portanto,  $d_{\Omega_n}(c, x) \geq R$ , assim que  $x \notin \overline{B_{\Omega_n}(c, R)}$ . Está contradição prova a contenença.

Provaremos (2):

Sejam  $x, y \in B_{\Omega_\infty}(c, R + \epsilon)$  e considerarmos duas curvas  $\gamma_\infty: [0, 1] \rightarrow \Omega_\infty$  e  $\gamma_n: [0, 1] \rightarrow \Omega_n$  duas curvas tais que  $\gamma_\infty(0) = \gamma_n(0) = x$  e  $\gamma_\infty(1) = \gamma_n(1) = y$ . Alem disso,  $d_{\Omega_n}(x, y) = l_{\Omega_n}(\gamma_n)$  e  $d_{\Omega_\infty}(x, y) = l_{\Omega_\infty}(\gamma_\infty)$ .

**Afirmação 1:**  $d_{\Omega_\infty}(c, \gamma_\infty(t)) < 2R + 2\epsilon, \forall t \in [0, 1]$ .

Com efeito,

$$d_{\Omega_\infty}(x, y) \leq d_{\Omega_\infty}(x, c) + d_{\Omega_\infty}(c, y) < 2R + 2\epsilon; \quad \forall t \in [0, 1].$$

Assim,

$$\min\{d_{\Omega_\infty}(x, \gamma_\infty(t)), d_{\Omega_\infty}(y, \gamma_\infty(t))\} < R + \epsilon$$

Por outro lado,

$$d_{\Omega_\infty}(c, \gamma_\infty(t)) \leq d_{\Omega_\infty}(c, x) + d_{\Omega_\infty}(x, \gamma_\infty(t)) < 2R + 2\epsilon.$$

Logo,  $\gamma_\infty(t) \in B_\infty(c, 2R + 2\epsilon) \subset K$ . E portanto,

$$\begin{aligned} d_{\Omega_\infty}(x, y) &= l_{\Omega_\infty}(\gamma_\infty) \geq \int_{\gamma_\infty} \rho_{\Omega_n}(z) |dz| \\ &\geq \int_{\gamma_\infty} \rho_{\Omega_n}(z) |dz| - \frac{\epsilon r}{M} \int_{\gamma_\infty} |dz| \\ &= l_n(\gamma_\infty) - \frac{\epsilon r}{M} l_e(\gamma_\infty) \end{aligned}$$

Por de finição  $l_n(\gamma_\infty) \geq d_n(x, y)$  e como  $l_e(\gamma_\infty) \leq \frac{l_\infty(\gamma_\infty)}{r}$ . Então,

$$\begin{aligned} d_{\Omega_\infty}(x, y) &\geq d_n(x, y) - \frac{\epsilon r}{M} \frac{l_\infty(\gamma_\infty)}{r} \\ &= d_n(x, y) - \frac{\epsilon}{M} d_{\Omega_\infty}(x, y) \end{aligned}$$

Como  $d_{\Omega_\infty}(x, y) < 2R + 2\epsilon < M$ . Então,  $\frac{\epsilon d_{\Omega_\infty}(x, y)}{M} < \epsilon$ . Assim,

$$d_n(x, y) - \frac{\epsilon}{M} d_{\Omega_\infty}(x, y) > d_n(x, y) - \epsilon.$$

Então,

$$d_{\Omega_\infty}(x, y) \geq d_n(x, y) - \epsilon$$

**Afirmação 2:**  $d_{\Omega_n}(c, \gamma_n(t)) < 2R + 4\epsilon, \forall t \in [0, 1]$

Como  $x, y \in B_{\Omega_\infty}(c, R + \epsilon) = B_{\Omega_\infty}(c, (R + 2\epsilon) - \epsilon) \subset B_{\Omega_n}(c, R + 2\epsilon)$ , então  $d_{\Omega_n}(x, y) < 2R + 4\epsilon$ . Logo, basta repetir o argumento feito de acima para provar  $d_{\Omega_n}(c, \gamma_n(t)) < 2R + 4\epsilon, \forall t \in [0, 1]$ . Assim,

$$\begin{aligned} d_{\Omega_n}(x, y) &= l_{\Omega_n}(\gamma_n) \\ &= \int_{\gamma_n} \rho_{\Omega_\infty}(z) |dz| \\ &\geq \int_{\gamma_n} \rho_{\Omega_\infty}(z) |dz| - \frac{r\epsilon}{M} \int_{\gamma_n} |dz| \\ &= l_{\Omega_\infty}(\gamma_n) - \frac{r\epsilon}{M} l_e(\gamma_n). \end{aligned}$$

Daí que,

$$\begin{aligned} d_{\Omega_n}(x, y) &\geq d_{\Omega_\infty}(x, y) - \frac{r\epsilon}{M} l_e(\gamma_n) \\ &\geq d_{\Omega_\infty}(x, y) - \frac{r\epsilon}{M} \frac{l_e(\gamma_n)}{r} \\ &= d_{\Omega_\infty}(x, y) - \frac{\epsilon}{M} d_{\Omega_n}(x, y) \end{aligned}$$

Portanto,  $d_{\Omega_n}(x, y) \geq d_{\Omega_\infty}(x, y) - \epsilon$

□

**Lema 3.2.10.**  $d_{\mathcal{H}}(\overline{B_n(c, R)}, \overline{B_\infty(c, R)}) \leq \epsilon$ .

*Demonstração.* Note-se que  $B_{\Omega_\infty}(c, R - \epsilon) \subset B_{\Omega_n}(c, R) \subset B_{\Omega_\infty}(c, R + \epsilon)$ . Implica que para todo  $n \geq N$  a distância Hausdorff entre as bolas fechadas  $B_{\Omega_n}(c, R)$  e  $B_{\Omega_\infty}(c, R)$ , com respeito à metrica  $d_{\Omega_\infty}$ , é menor o igual do que  $\epsilon$ . □

Assim, a seqüência  $(\Omega_n, x_n)$  converge na topologia quase-isométrica a  $(\Omega_\infty, x)$ . Com efeito, seja  $x \in B_n(c, R)$ . Então,  $x \in B_\infty(c, R + \epsilon)$ . Assim, existe  $y \in B_\infty(c, R)$  tal que  $d_\infty(y, x) \leq \epsilon$ . Definamos a função  $f_n: B_n(c, R) \rightarrow B_\infty(c, R)$  como sendo esse valor, isto é,  $y := f_n(x)$ . Vejamos que  $f_n$  é um  $(1, 3\epsilon)$ -quase-mergulho. Com efeito,

$$\begin{aligned} d_\infty(f_n(x), f_n(y)) &\leq d_\infty(f_n(x), x) + d_\infty(x, y) + d_\infty(y, f_n(y)) \\ &\leq 2\epsilon + d_\infty(x, y) \end{aligned}$$

E como  $d_\infty(x, y) \leq d_n(x, y) + \epsilon$ . Então,

$$d_\infty(f_n(x), f_n(y)) \leq d_n(x, y) + 3\epsilon$$

Finalmente,

$$d_n(x, y) \leq d_\infty(x, y) + \epsilon$$

e a desigualdade triangular implica que

$$\leq d_\infty(x, f_n(x)) + d_\infty(f_n(x), f_n(y)) + d_\infty(f_n(y), y) + \epsilon$$

Então,

$$d_n(x, y) - 3\epsilon \leq d_\infty(f_n(x), f_n(y)).$$

Juntando temos

$$d_n(x, y) - 3\epsilon \leq d_\infty(f_n(x), f_n(y)) \leq d_n(x, y) + 3\epsilon.$$

Finalmente, dado  $y \in B_\infty(c, R)$ . Então,  $y \in B_n(c, R + \epsilon)$ . Portanto, existe  $x \in B_n(c, R)$  tal que  $d_n(x, y) \leq \epsilon$ . Assim, definimos  $g_n : B_\infty(c, R) \rightarrow B_n(c, R)$  como  $g_n(y) := x$ . Está é a  $(1, 3\epsilon)$ -quase-inversa de  $f_n$ .

E já que por Uniformização  $\Omega_n = \mathbb{H}/\Gamma_n$  e  $\Omega_\infty = \mathbb{H}/\Gamma_\infty$ , sendo  $\Gamma_n$  o grupo fuchsiano, unico, salvo conjugação por transformações de Mobius (ver proposição??), associado a  $\Omega_n$ . Analogamente,  $\Gamma_\infty$ . Então, usando um resultado de Epstein, Canary e Green em [ECG]. Especificamente,

**Teorema 3.2.11.** *Uma seqüência de grupos discretos e livre de torção  $\Gamma_j \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  é convergente geometricamente a um grupo  $\Gamma \iff$  como domínios senhlados a seqüência  $\{(\mathbb{H}^n/\Gamma_j, x_j)\}$  converge ao domínio senhalado  $(\mathbb{H}^n/\Gamma, x)$  na topologia quase-isometrica para alguma eleição dos pontos bases.*

### 3.3 Proof

**Corolário 3.3.1.**  $\Gamma_\infty = \text{Lim}_{j \rightarrow \infty}^{\text{geo}} \Gamma_j$

### 3.4 Possíveis problemas futuros

$\rightsquigarrow$  Em que condições poderemos obter os mesmos resultados para esferas que "não sejam  $NBT(1/n)$ "?

$\rightsquigarrow$  É possível aproximar o  $\infty$ -bouquet por sequencias de  $\mathbb{R}$ -arvores. Digamos pela sequencia de  $\mathbb{R}$ -arvores, as cicatrizes  $G_n$  dos polígonos  $P_n$ . Para cada  $n$ ,  $G_n$  tem  $2n + 4$  arestas. O que tipo de informação pode ser obtida disto caso possamos aproximar?

$\rightsquigarrow$  O que pode ser dito sobre a razão de convergência de  $\rho_n$  a  $\rho_\infty$ ? O que pode ser dito sobre outro tipos de densidades nestas esferas vindo da família  $NBT(1/n)$ ?

$\rightsquigarrow$  O que pode ser dito sobre o conjunto limite  $\Lambda(\Gamma_\infty)$  associado à ferradura. Por exemplo, pode ser aproximado na topologia Hausdorff por  $\Lambda_n(\Gamma_n)$ ?

$\rightsquigarrow$  Tem  $\mathbb{H}/\Gamma_\infty$  um Poliedro de Dirichlet "aproximado poliedricamente", segundo Marden e Jorguensen em [9], pelos poliedros de Dirichlet da sequencia  $\mathbb{H}/\Gamma_n$ ?

# BIBLIOGRAFIA

- [1] DE CARVALHO, A and HALL, T; *Paper Folding, Riemann surfaces, and Convergences of Pseudo-Anosov Sequences*; Geometry and Topology, vol.16, 1881- 1966, (2012)
- [2] DE CARVALHO, A and HALL, T; *Unimodal generalized Pseudo-Anosov maps*; Geometry and Topology, vol.8, 1127- 1188, (2004).
- [3] M,KAPOVICH andM,TANIGUCHI; *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*; Modern Birkhauser classics (2001)
- [4] D. BURAGO; Y. BURAGO and; S IVANOV *A course in metric geometry*; Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, (2001).
- [5] DE CARVALHO, A and PATERNAIN, M; *Monotone quotients of surface diffeomorphisms*; Mathematical Research Letters, vol.10, 603- 619, (2003).
- [6] HEJHAL, DENNIS A; *Universal Covering Maps for Variable Regions*; Mathematische Zeitschrift 137, 7-20 (1974).
- [7] THURSTON, WILLIAM P, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*; American Mathematical Society. Bulletin. New Series, vol 19, 417-431, (1988).
- [8] SMALE, S; *Differentiable dynamical systems*; Bulletin of the American Mathematical Society, vol.73, 747-817, (1967).
- [9] A, MARDEN; *Outer Circles: An introduction to Hyperbolic 3-Manifolds*; Cambridge (2007)
- [10] R. L, MOORE ; *Concerning upper semi-continuous collections*; Monatsh. Math. Phys, vol 36, 81-88, (1929).
- [11] M,KATSUHIKO andM,TANIGUCHI; *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*; Oxford Science Publications (2002)
- [12] C, CHABAUTY ; *Limite d'ensembles et géométrie des nombres*; Bull. Soc. Math. France, vol 78:143?151, (1950).
- [13] M, VINHAS ; *Espaços de Papel*; Disertação de mestrado, Universidade de São Paulo, (2012).