Estruturas causais: elementos de uma abordagem geométrica

Raul Quicaño Bellido

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Frank Michael Forger**

Durante o desenvolvimento deste trabalho
o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e do CNPq

São Paulo, agosto de 2016

Estruturas causais:
elementos de uma abordagem geométrica

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo candidato Raul Quicaño Bellido, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Frank Michael Forger (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr.
- Prof. Dr.

A mis padres Saturnino y Estefa.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Frank Michael Forger, não apenas pela oportunidade de trabalhar ao seu lado, mas também pelo apoio, por sua paciência e confiança que nunca faltaram nesses anos todos. Ao programa de Matemática Aplicada do IME-USP, que tornou este trabalho possível. À CAPES e ao CNPq, pelo financiamento recebido.

À minha família pelo apoio incondicional, sempre presente apesar da distância. Aos meus amigos que tornaram a minha estadia em São Paulo agradável, em especial a *los fantasticos*.

Resumo

Esta dissertação aborda o problema de como definir o conceito de uma estrutura de cones em um fibrado vetorial e, em particular, de uma estrutura causal em uma variedade. Propomos uma versão deste conceito que compreende e ao mesmo tempo generaliza a estrutura causal gerada por uma métrica lorentziana, de modo a abranger outros exemplos, entre eles a estrutura causal gerada por um sistema hiperbólico de equações diferenciais parciais (lineares) de primeira ordem, que foi introduzida em uma tese de doutorado recentemente defendida neste Instituto, e também certas estruturas causais que aparecem naturalmente em teoria de controle. Aqui, analisamos algumas questões iniciais e ainda um tanto elementares que surgem neste contexto, afim de pavimentar o caminho para uma investigação mais completa e profunda, a qual foge do escopo de uma dissertação de mestrado.

Palavras-chave: Geometria diferencial, Estruturas de cone, Estruturas causais.

Abstract

This thesis deals with the problem of how to define the concept of a cone structure in a vector bundle and, in particular, of a causal structure in a manifold. We propose a version of this concept that comprehends and at the same time generalizes the causal structure generated by a lorentzian metric, so as to include other examples, among them the causal structure generated by a hyperbolic system of first order (linear) partial differential equations, introduced in a PhD thesis recently approved in this Institute, and also certain causal structures that appear naturally in control theory. Here, we analyze a few initial and still somewhat elementary questions that arise in this context, in order to pave the way for a more complete and profound investigation, which goes beyond the limitations of a MSc thesis.

Keywords: Differential geometry, Cone structures, Causal structures.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação se estudam estruturas causais em variedades, e mais geralmente, estruturas de cones em fibrados vetorias, com o objetivo de estender os fundamentos da teoria da causalidade em geometria lorentziana, ou em termos físicos, em relatividade geral, a outros contextos, fazendo para tanto uso da teoria de fibrados com grupo estrutural. Tal estudo é motivado pela existência de importantes exemplos de estruturas causais que não provêm de uma métrica lorentziana. Por exemplo, aparecem em teoria de controle e no estudo de semigrupos de Lie, e recentemente também surgiram na área de equações diferenciais parciais em variedades – mais precisamente, na investigação de sistemas hiperbólicos simétricos (de primeira ordem). Sendo assim, nasce a questão natural de estudar tais estruturas em seu próprio direito, independentemente do conceito de métrica.

Ao longo do meu estudo do assunto, encontrei na literatura várias propostas, em sua grande maioria de natureza topológica, permitindo definir o que pode ser chamado de uma estrutura causal (ou de cones) *contínua*. No entanto, em geometria diferencial, o que seria mais natural seria o conceito de uma estrutura causal (ou de cones) *suave*. Por exemplo, em geometria lorentziana, um tensor métrico g suave deve induzir uma estrutura causal suave na variedade, mas a pergunta bem natural é o que isso significa. Ou seja: quando é que devemos chamar uma estrutura causal (ou de cones) geral de suave, sem fazer referência a alguma métrica?

No presente trabalho, seguindo uma sugestão do meu orientador, elaboro uma resposta a essa pergunta, adotando para tanto uma estratégia que é padrão em geometria diferencial, onde qualquer estrutura geométrica em uma variedade suave, ou relacionada a algum fibrado suave sobre ela, é declarada suave se pode ser obtida a partir de uma estrutura constante (da mesma natureza) através de alguma trivialização local suave: uma definição tecnicamente correta pode ser formulada usando fibrados com grupo estrutural, ou seja, associados a algum fibrado principal. Pode parecer até estranho, mas não consegui encontrar essa definição em nenhum lugar na literatura!

E é quase óbvio que a estrutura causal induzida por uma métrica lorentziana suave deve ser suave neste sentido: basta usar qualquer referencial ortonormal local suave para transformar os cones de luz em uma vizinhança de um ponto no cone de luz fixo do espaço de Minkowski.

Mais concretamente, esta dissertação está dividida em dois capítulos.

No primeiro capítulo, estudo, no âmbito da álgebra linear, o tipo de cone a ser empregado no resto do trabalho, que às vezes é chamado de *cone próprio*, bastante utilizado na área de otimização. Brevemente, um cone próprio em um espaço vetorial real $\mathbb{E}$ é um subconjunto C de $\mathbb{E}$ que é (a) um cone ($\lambda > 0$, $v \in C \implies \lambda v \in C$), (b) convexo ($\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $v_1, v_2 \in C \implies \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in C$), (c) fechado, (d) gerador ($C - C = \mathbb{E}$) e (e) unilateral ($v \in C$ e $-v \in C \implies v = 0$). Uma das vantagens desta classe de cones é que ela é invariante sob dualidade: todo cone próprio C no espaço $\mathbb{E}$ gera naturalmente um cone próprio dual C^* no espaço dual $\mathbb{E}^*$, e tal que $C^{**} = C$ em $\mathbb{E}^{**} = \mathbb{E}$: C^* é o conjunto de elementos de $\mathbb{E}^*$ que são $\geqslant 0$ sobre C, e vice versa. Também existe uma relação de "ordem" $\prec$ entre tais cones que desempenha um papel fundamental na teoria, a saber, $C_1 \prec C_2 \iff C_1 \setminus \{0\} \subset C_2^o$ (onde o superfixo $.^o$ denota o interior), e dizemos que um tal cone é prensado entre dois outros, digamos C_1 e C_2, se $C_1 \prec C \prec C_2$.[1]

Na literatura, é bem comum chamar um cone próprio simplesmente de cone, e frequentemente seguiremos essa convenção ao longo deste trabalho.

No segundo capítulo, o primeiro passo é munir um fibrado vetorial E, com variedade base M e fibra típica $\mathbb{E}$, de uma família $(C_x)_{x\in M}$ de cones (sendo então C_x um cone em E_x, para todo $x \in M$), e definir quando tal família constitui uma estrutura de cones *localmente trivial*. No caso de um fibrado vetorial trivial explicitamente trivializado, $E = M \times \mathbb{E}$, podemos dizer que a família é *constante* se existe algum cone fixo C_0 em $\mathbb{E}$ tal que $C_x = C_0$, para todo $x \in M$, e que é *trivial* se existem algum cone fixo C_0 em $\mathbb{E}$ e uma função suave $\tau : M \to \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ tal que $\tau(x)(C_x) = C_0$, para todo $x \in M$; em ambos os casos, o cone C_0 é chamado o *cone modelo* da estrutura. Contudo, no caso de um fibrado vetorial não-trivial, ou mesmo de um fibrado vetorial trivial mas não explicitamente trivializado, a noção de uma estrutura de cones constante não faz mais sentido, sendo a noção de uma estrutura de cones (localmente) trivial sua generalização natural quando procuramos por um conceito que seja independente da escolha de trivialização (local) e portanto seja bem definida em fibrados vetoriais gerais. Com esta terminologia, é fácil ver que estruturas de cones gerais (sem nenhuma condição de regulari-

[1]As aspas indicam que não se trata de uma relação de ordem no sentido estrito da palavra, pois ela não é nem reflexiva nem antissimétrica, apenas transitiva.

dade), assim como estruturas de cones localmente triviais, são invariantes sob dualidade e admitem a mesma relação de "ordem" $\prec$ já introduzida acima, definida fibra por fibra.

Em particular, quando o fibrado vetorial subjacente for o fibrado tangente da variedade base, obtemos o conceito de uma estrutura causal geral e de uma estrutura causal localmente trivial. Vale ressaltar que, neste caso, a condição de trivialidade local afirma que, em torno de cada um dos pontos da variedade base, a estrutura causal deve se tornar constante em relação a alguma trivialização local do seu fibrado tangente, ou seja, em relação a algum referencial ("frame") local, mas em geral não em relação a alguma carta local: como já mostra o exemplo das estruturas causais em geometria lorentziana, tal condição seria demasiadamente restritiva, podendo ser satisfeita apenas quando a variedade for conformemente plana. No entanto, ela pode sempre ser prensada entre estruturas causais que, estas sim, são localmente triviais em relação a um atlas de cartas, e num certo sentido com qualquer grau de precisão desejado. Estruturas causais com esta propriedade costumam ser chamadas de contínuas, e se a aproximação só for possível de um lado, de semicontínuas (inferiormente e/ou superiormente), de modo que podemos afirmar que estruturas causais localmente triviais são contínuas – se bem que é fácil encontrar exemplos de estruturas causais contínuas que não são localmente triviais.

O resto do trabalho dedica-se a tomar alguns passos iniciais no estudo de estruturas causais do ponto de vista global. Tanto na geometria lorentziana como no âmbito mais geral contemplado aqui, a dificuldade principal reside na identificação de propriedades adequadas de regularidade – as quais variam entre (semi-)continuidade e suavidade, passando por estruturas Lipschitz contínuas como caso intermediário especialmente interessante: há aqui todo um espectro de possibilidades, e alguns resultados dependem substancialmente da condição de regularidade imposta.

A meta principal do projeto completo, que em muito transcende o âmbito de uma dissertação de mestrado, é estender a teoria da causalidade em variedades lorentzianas a estruturas causais mais gerais. A estratégia básica permanece a mesma: consiste em "integrar" uma estrutura causal "infinitesimal", definida como estrutura de cones no fibrado tangente da variedade, para uma estrutura causal "global", que existe na própria variedade. Tal procedimento levará a toda uma "hierarquia causal" de noções de espaços-tempos, tais como os *causais*, os *fortemente causais*, os *estavelmente causais*. etc., culminando no conceito que reina no topo da hierarquia: o de um espaço-tempo *globalmente hiperbólico*.

O conceito de um espaço-tempo *globalmente hiperbólico* pode ser definido pela condição de que todos os diamantes causais são compactos. Existem outras definições que, no âmbito da geometria lorentziana e após um trabalho longo e árduo por parte de muitos autores que se estendeu por quase meio século, foram identificadas como sendo equivalentes, tais como: a existência de uma superfície de Cauchy, a existência de uma folheação global do espaço-tempo inteiro por superfícies de Cauchy, a existência de uma "função tempo" contínua e, por fim, a existência de uma "função tempo" suave. Passando ao contexto geométrico de estruturas causais como apresentadas neste trabalho, resta então a pergunta: sob quais condições de regularidade é que estas equivalências continuam válidas?

A grande dificuldade a ser enfrentada e superada nesta nova versão de uma teoria da causalidade é a ausência de alguns conceitos bastante utilizados no contexto da geometria lorentziana. Ocorre que para uma estrutura causal não lorentziana, mesmo que localmente trivial, pode não existir nenhuma conexão linear que a preserve: isso depende da natureza do cone modelo, que pode deixar de admitir um grupo não-trivial de transformações lineares que o preservam. Sendo assim, a noção de geodésica perde seu sentido, e qualquer afirmação cuja demonstração envolve esta noção deve ser revista e, em muitos casos, substancialmente modificada.

Capítulo 1

Cones em espaços vetoriais

Durante todo este capítulo inicial, fixamos um espaço vetorial real V de dimensão finita, se bem que uma parte dos conceitos e resultados seja válida em um contexto mais geral, a saber, em espaços de Banach ou até espaços localmente convexos gerais.

1.1 Cones e cones convexos

Começamos por algumas definições elementares.

Definição 1.1 *Um subconjunto C de V é chamado de* ***cone*** *se para qualquer vetor $v \in C$, C contém todos os seus múltiplos positivos, ou seja, $\lambda v \in C$ para todo $\lambda > 0$.*

Definição 1.2 *Um subconjunto C de V é chamado de* ***convexo*** *se para quaisquer dois vetores $v_1, v_2 \in C$, C contém todo o segmento da reta que os conecta, ou seja, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in C$ para $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.*

Neste trabalho, consideraremos quase que exclusivamente cones que, na topologia padrão de V, são ou fechados ou abertos e que são não-triviais, sendo que os cones triviais em V são

- $\emptyset$ e V, que são ao mesmo tempo fechados e abertos;
- $\{0\}$, que é fechado, e $V \setminus \{0\}$, que é aberto.

Note que se C é um cone não-trivial em V, então

- C fechado $\implies$ $0 \in C$;
- C aberto $\implies$ $0 \notin C$.

De fato, se C for fechado e não vazio, tome um vetor $v \in C$: se $v = 0$, não há mais nada a provar, e se $v \neq 0$, temos $\lambda v \in C$ para todo $\lambda > 0$ e portanto $0 = \lim_{\lambda \to 0} \lambda v \in C$. De modo semelhante, se C for aberto e tal que $0 \in C$, C contém uma bola aberta em torno de 0 e, sendo cone, é igual a V.

A restrição a cones fechados ou abertos pode ser feita essencialmente sem perda de generalidade devido ao fato de que o fecho $\bar{C}$ e o interior C^o de um cone C qualquer é novamente um cone, e a mesma afirmação vale se substituírmos a palavra "cone" pela expressão "subconjunto convexo":

- Suponha que C seja um cone: então, dados $\lambda > 0$ e $v \in \bar{C}$, escrevemos $v = \lim_{k \to \infty} v_k$ com $v_k \in C$ e obtemos $\lambda v = \lim_{k \to \infty} \lambda v_k \in \bar{C}$, enquanto que, dados $\lambda > 0$ e $v \in C^o$, existe $\epsilon > 0$ tal que $v + v' \in C$ para todo $v' \in V$ com $\|v'\| < \epsilon/\lambda$ e portanto $\lambda v + w = \lambda(v + w/\lambda) \in C$ para todo $w \in V$ com $\|w\| < \epsilon$, ou seja, $\lambda v \in C^o$.

- Suponha que C seja convexo: então, dados $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $v_1, v_2 \in \bar{C}$, escrevemos $v_1 = \lim_{k \to \infty} v_{1,k}$ e $v_2 = \lim_{k \to \infty} v_{2,k}$ com $v_{1,k}, v_{2,k} \in C$ e obtemos $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lim_{k \to \infty} (\lambda_1 v_{1,k} + \lambda_2 v_{2,k}) \in \bar{C}$, enquanto que, dados $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $v_1, v_2 \in C^o$, existe $\epsilon > 0$ tal que $v_1 + v_1', v_2 + v_2' \in C$ para todos $v_1', v_2' \in V$ com $\|v_1'\|, \|v_2'\| < \epsilon$ e portanto $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + w = \lambda_1(v_1 + w) + \lambda_2(v_2 + w) \in C$ para todo $w \in V$ com $\|w\| < \epsilon$, ou seja, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in C^o$.

Assim como subespaços, podemos gerar cones convexos a partir de subconjuntos quaisquer, formando combinações lineares. Mais concretamente, dado um conjunto finito $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de vetores $v_i \in V$, lembramos que um vetor $v \in V$ é *combinação linear* dos v_i se

$$v \ = \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

com coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, e dizemos que v é *combinação linear positiva* dos v_i se todos os λ_i são $\geqslant 0$ e pelo menos um deles é > 0, e que v é *combinação linear convexa* dos v_i se, além disso, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Então podemos dizer que um subconjunto convexo de um espaço vetorial é um subconjunto fechado sob combinações lineares convexas e um cone convexo em um espaço vetorial é um subconjunto fechado por combinações lineares positivas.

Tendo em vista que qualquer cone em V gera um cone convexo em V, definido simplesmente como o conjunto das combinações lineares positivas (ou mesmo apenas convexas) dos seus vetores, vamos a partir de agora nos restringir a considerar apenas cones convexos.

Quanto à inclusão ou remoção do ápice, notamos para uso posterior que se C é um cone convexo em V, então $C \cup \{0\}$ (que coincide com C se C for fechado) e $C \setminus \{0\}$ (que coincide com C se C for aberto) também são cones convexos em V.

Exemplo 1.1 Suponha que o espaço V, de dimensão n, esteja munido de um produto escalar $(.\,,.)$ lorentziano, i.e., de assinatura $(+-\ldots-)$, digamos. Então dado um vetor $v_0 \in V$ tipo tempo (i.e., tal que $(v_0, v_0) > 0$),

$$C \;=\; \big\{ v \in V \mid (v,v) \geqslant 0\,,\, (v, v_0) \geqslant 0 \big\}$$

é um cone convexo fechado em V e seu interior

$$C^o \;=\; \big\{ v \in V \mid (v,v) > 0\,,\, (v, v_0) > 0 \big\}$$

é um cone convexo aberto em V cujo fecho é o próprio C. Tanto C como C^o são chamados de *cone de luz* em V (relativo ao produto escalar dado), e qualquer cone assim obtido a partir de um produto escalar lorentziano é chamado de *cone lorentziano*.

Exemplo 1.2 Suponha que o espaço V, de dimensão n, esteja munido de uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Então

$$C \;=\; \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\Big|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0 \Big\}$$

é um cone convexo fechado em V e seu interior

$$C^o \;=\; \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\Big|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \Big\}$$

é um cone convexo aberto em V cujo fecho é o próprio C. Tanto C como C^o são chamados de *quadrante positivo* em V (relativo à base dada),[1] e qualquer cone assim obtido a partir de uma base é chamado de *cone facetado*.[2]

[1] Aqui, usamos a palavra "quadrante" num sentido generalizado, não querendo sugerir que deve haver apenas quatro quadrantes possíveis: isto só acontece no caso $n = 2$ e ainda só quando usamos uma base ortonormal em relação ao produto escalar euclideano padrão.

[2] O motivo desta terminologia se revela quando notamos que a definição tem um aspecto iterativo, envolvendo indução sobre n, pois o bordo de um tal cone é a união de n "facetas" que, por sua vez, são cones do mesmo tipo em certos subespaços de V de dimensão $n-1$, a saber, os subespaços dados pela condição de que um dos λ_i deve ser 0. O início da indução se dá notando que, em dimensão 1, tal cone é a semireta positiva ou negativa, em dimensão 2, é a cunha limitada pelas semiretas positivas geradas pelos vetores v_1 e v_2, e assim em diante. O exemplo mais notável são as câmaras de Weyl na subalgebra de Cartan de uma álgebra de Lie semisimples (real).

Exemplo 1.3 Seja E um espaço de Hilbert de dimensão finita, real ou complexo, com produto escalar denotado por $\langle\,.\,,.\rangle$, seja $L(E)$ a álgebra, novamente real ou complexa, das transformações lineares de E em si e $SA(E)$ o subespaço real das transformações lineares autoadjuntas. Então

$$C \;=\; \big\{A \in SA(E) \mid \langle u, Au\rangle \geqslant 0 \text{ para todo } u \in E\big\}$$

é um cone convexo fechado em $SA(E)$ e seu interior

$$C^o \;=\; \big\{A \in SA(E) \mid \langle u, Au\rangle > 0 \text{ para todo } u \in E \setminus \{0\}\big\}$$

é um cone convexo aberto em $SA(E)$ cujo fecho é o próprio C. Tanto C como C^o são chamados de *cone positivo* em $SA(E)$. Em termos de uma base ortonormal de E, podemos pensar nos elementos de C e de C^o como matrizes simétricas (se E for real) ou hermiteanas (se E for complexo) cujos autovalores são, respectivamente, todos $\geqslant 0$ e todos > 0: positividade significa positividade do espectro.

O último exemplo admite generalizações óbvias e sucessivas para espaços de Hilbert de dimensão infinita, C^*-álgebras e até $*$-álgebras localmento convexas, o que motiva fortemente o estudo de cones em espaços de Banach e até espaços localmente convexos gerais. No entanto, tais generalizações fogem do escopo do presente trabalho.

Para aplicações posteriores, precisaremos de uma generalização deste exemplo em uma direção diferente:

Exemplo 1.4 Seja E um espaço vetorial pseudo-hilbertiano de dimensão finita, real ou complexo: isto significa que E vem munido de uma forma bilinear simétrica (no caso real) ou sesquilinear hermitiana (no caso complexo) não-degenerada, mas não necessariamente positiva definida, que mais uma vez será denotada por $\langle\,.\,,.\rangle$. Como antes, consideramos a álgebra $L(E)$, real ou complexa, das transformações lineares de E em si e $PSA(E)$ o subespaço real das transformações lineares pseudo-autoadjuntas. Então

$$C \;=\; \big\{A \in PSA(E) \mid \langle u, Au\rangle \geqslant 0 \text{ para todo } u \in E\big\}$$

é um cone convexo fechado em $PSA(E)$ e seu interior

$$C^o \;=\; \big\{A \in PSA(E) \mid \langle u, Au\rangle > 0 \text{ para todo } u \in E \setminus \{0\}\big\}$$

é um cone convexo aberto em $PSA(E)$ cujo fecho é o próprio C. Mais uma vez, tanto C como C^o são chamados de *cone positivo* em $PSA(E)$.

Ressaltamos que este exemplo pode ser reduzido ao anterior pelo seguinte procedimento. Introduzimos um produto escalar auxiliar positivo definido $\langle\!\langle .\,,. \rangle\!\rangle$ em V que pode ser relacionado com o produto escalar indefinido dado $\langle .\,,. \rangle$ por uma única transformação linear θ que é autoadjunta e também pseudo-autoadjunto, $\theta \in SA(E) \cap PSA(E)$, e não-singular, conforme

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle\!\langle u_1, \theta u_2 \rangle\!\rangle \quad \text{para } u_1, u_2 \in E$$

Então um cálculo elementar mostra que translação a direita por θ define uma transformação linear bijetora

$$\begin{array}{rccc} R_\theta : & L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ & A & \longmapsto & A\theta \end{array}$$

que leva $SA(E, \langle\!\langle .\,,. \rangle\!\rangle)$ em $PSA(E, \langle .\,,. \rangle)$, $C_{\langle\!\langle .,. \rangle\!\rangle}$ em $C_{\langle .,. \rangle}$ e $C^o_{\langle\!\langle .,. \rangle\!\rangle}$ em $C^o_{\langle .,. \rangle}$.

Um outro exemplo, que se revela ser muito mais geral do que os anteriores, provém da teoria dos polinômios hiperbólicos:

Exemplo 1.5 Sejam E um espaço vetorial real de dimensão finita e p um polinômio homogêneo de grau $m > 0$ sobre E, ou seja, um polinômio $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $p(\lambda u) = \lambda^m p(u)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in E$. Diz-se que p é *hiperbólico* se existe um vetor $u^{(0)} \in E$ com $p(u^{(0)}) \neq 0$ tal que, para qualquer outro vetor $u \in E$, o polinômio homogêneo $\lambda \mapsto p(u + \lambda u^{(0)})$ tem apenas raízes reais (neste caso, diz-se também que p é hiperbólico em relação a $u^{(0)}$ ou com respeito a $u^{(0)}$); denotando estas raízes por $\lambda_i(u, u^{(0)})$ $(i = 1, \ldots, m)$, segue que

$$p(u + \lambda u^{(0)}) \;=\; p(u^{(0)}) \prod_{i=1}^{m} \big(\lambda - \lambda_i(u, u^{(0)})\big)\,.$$

Agora, defina

$$h(u, u^{(0)}) = \max_{i=1\ldots m} \lambda_i(u, u^{(0)})$$

e

$$\begin{aligned} C(u^{(0)}) \;&=\; \big\{ u \in E \mid h(u, u^{(0)}) \leqslant 0 \big\} \\ C^o(u^{(0)}) \;&=\; \big\{ u \in E \mid h(u, u^{(0)}) < 0 \big\} \end{aligned}$$

Geometricamente, ao notar que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} p(u^{(0)}) \prod_{i=1}^{m} \big(\lambda - \lambda_i(u + \alpha u^{(0)}, u^{(0)})\big) \;&=\; p\big(u + \alpha u^{(0)} + \lambda u^{(0)}\big) \\ &=\; p(u^{(0)}) \prod_{i=1}^{m} \big(\lambda + \alpha - \lambda_i(u, u^{(0)})\big) \end{aligned}$$

e portanto,

$$\lambda_i(u + \alpha u^{(0)}, u^{(0)}) \;=\; \lambda_i(u, u^{(0)}) - \alpha\,,$$

de modo que

$$h(u + h(u, u^{(0)})u^{(0)} + \alpha u^{(0)}, u^{(0)}) \;=\; -\,\alpha\,,$$

podemos interpretar a situação da seguinte forma: a reta passando por u na direção dada por $u^{(0)}$ entra em $C(u^{(0)})$ no ponto $u + h(u, u^{(0)})u^{(0)}$ e a partir daí (i.e., para $\alpha > 0$), continua em $C^o(u^{(0)})$. Além disso, na teoria dos polinômios hiperbólicos que é desenvolvida em [11] (veja também [13] e [17, Capítulo 12.4]), é mostrado que $C^o(u^{(0)})$ é um cone convexo aberto e $C(u^{(0)})$ é um cone convexo fechado, sendo o segundo o fecho do primeiro e o primeiro o interior do segundo. Também é mostrado que $C^o(u^{(0)})$ pode ser caracterizado abstratamente como a componente conexa do complemento do conjunto dos zeros de p contendo $u^{(0)}$ (note que tanto o conjunto dos zeros de p como o seu complemento são cones, pois p é homogêneo, sendo o último aberto e denso em E), e que o maior subespaço de E contido em $C(u^{(0)})$ é o subespaço $E(p)$ de E ao longo do qual p é constante,

$$E(p) \;=\; \big\{ u \in E \mid p(v+u) = p(v) \text{ para todo } v \in E \big\}\,.$$

Diz-se que p é *completo* se $E(p) = \{0\}$: significa que p é um polinômio que depende não trivialmente de todas as variáveis que compõem o espaço E. Finalmente, é mostrado que se p é hiperbólico em relação a algum vetor $u^{(0)}$, então p também é hiperbólico em relação a qualquer vetor $u^{(1)}$ contido em $C^o(u^{(0)})$, e de tal forma que $C^o(u^{(1)}) = C^o(u^{(0)})$, de modo que podemos omitir a referência a algum vetor específico $u^{(0)}$ e simplesmente chamar C e C^o o *cone de hiperbolicidade* de p.

Observação 1.1 O Exemplo 1.5 generaliza os dois anteriores, sendo que os cones positivos são cones de hiperbolicidade para o polinômio det. No caso do Exemplo 1.3, este fato é bem conhecido, mas vale igualmente para o caso do Exemplo 1.4. De fato, substituindo o espaço E do Exemplo 1.5 pelo espaço $SA(E)$ ou pelo espaço $PSA(E)$ e escrevendo X ao invés de u, notamos que no caso do Exemplo 1.3, det é hiperbólico em relação a 1, pois

$$\det\big(X + \lambda 1\big) \;=\; \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

onde os λ_i são os autovalores de $-X$ e, portanto, todos reais, com

$$C(1) = \{X \in SA(E) \mid X \geqslant 0\}\,,$$

enquanto que no caso do Exemplo 1.4, det é hiperbólico em relação a θ (!), pois

$$\det\bigl(X+\lambda\theta\bigr) \;=\; \det\theta\,\det\bigl(X\theta^{-1}+\lambda 1\bigr) \;=\; \det\theta\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$$

onde os λ_i são os autovalores de $-X\theta^{-1}$ e, novamente, todos reais, com

$$C(\theta)=\{X\in PSA(E)\mid X\theta^{-1}\geqslant 0\}\,.$$

Todo cone convexo C em V proporciona dois subespaços de V definidos de forma canônica. O primeiro é simplesmente o subespaço de V gerado por C: sendo que C é um cone convexo, este é igual a

$$C-C \;=\; \bigl\{v-v'\mid v,v'\in C\bigr\}\,.$$

O segundo é o maior subespaço de V contido em C com ápice acrescido, ou seja, contido no cone convexo $C\cup\{0\}$, e é chamado o *gume* de C: sua existência e unicidade segue do fato de que dado dois subespaços V_1 e V_2 contidos em $C\cup\{0\}$, sua soma V_1+V_2 é novamente um subespaço contido em $C\cup\{0\}$. Na verdade, um cone convexo com gume não trivial costuma ser chamado de *cunha*: em inglês, o gume da cunha é o "edge of the wedge".

Claramente, os cones convexos interessantes são os que geram o espaço inteiro e cujo gume se reduz ao subespaço trivial $\{0\}$, sendo que os demais podem ser construídos a partir destes. (Veja o comentário no última parágrafo desta seção.) Ocorre que cada uma dessas duas condições pode ser reformulada de várias maneiras.

Lema 1.1 *Seja C um cone convexo em V, com fecho $\bar{C}$ e interior C^o. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *C gera V: vale $V=C-C$.*
2. *V admite uma base de vetores pertencendo a C (sendo que tal base ainda pode ser escolhida de modo a conter qualquer base dada de E_C).*
3. *C possui interior não vazio: $C^o\neq\emptyset$.*
4. *C é contido no fecho do seu interior: $\bar{C}=\overline{C^o}$.*

Demonstração: No decorrer desta prova, utilizaremos uma norma $\|.\|$ sobre V, que pode ser escolhida de forma arbitrária (já que todas as normas em espaços vetoriais de dimensão finita são equivalentes).

- (1) $\Longrightarrow$ (2): Supondo que $V = C - C$ e escolhendo uma base qualquer $\{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ de V contendo uma base dada $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de E_C, podemos escrever cada um dos vetores desta base que não pertence a E_C na forma $w_i = v_i^+ - v_i^-$ com $v_i^\pm \in C$ e, por eliminação sucessiva de vetores que dependem linearmente dos demais, reduzir o sistema gerador $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}^+, \ldots, v_n^+, v_{k+1}^-, \ldots, v_n^-\}$ de V a uma base $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ de V que, assim como este, e constituída de vetores que pertencem a C.

- (2) $\Longrightarrow$ (1): Supondo que V admite uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vetores que pertencem a C, todo vetor v de V é da forma

  $$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

  e portanto $v = v^+ - v^-$, com $v^\pm \in C$ definidos por

  $$v^\pm = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\pm v_i$$

  onde $\lambda_i^+ = \lambda_i$, $\lambda_i^- = 0$ se $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i^+ = 0$, $\lambda_i^- = -\lambda_i$ se $\lambda_i < 0$.

- (2) $\Longrightarrow$ (3): Supondo que V admite uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vetores que pertencem a C, segue que C contém o cone positivo aberto relativo a esta base (veja o Exemplo 1.2).

- (3) $\Longrightarrow$ (2): Supondo que $C^o \neq \emptyset$, escolhemos $v_1 \in C^o$ com $\|v_1\| = 1$ e sabemos que existe $r > 0$ tal que todo vetor $v \in V$ com $\|v - v_1\| < r$ pertence a C^o. Portanto, se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é qualquer base de V contendo o vetor v_1, basta definir, para $i = 2, \ldots, n$, $v_i' = v_1 + v_i/(2r\|v_i\|)$ para obter uma nova base $\{v_1, v_2', \ldots, v_n'\}$ de V de vetores que pertencem a C.

- (3) $\Longrightarrow$ (4): Supondo que $C^o \neq \emptyset$ e notando que a inclusão $\bar{C} \supset \overline{C^o}$ é trivial enquanto que a inclusão oposta $\bar{C} \subset \overline{C^o}$ já segue da inclusão $C \subset \overline{C^o}$, vamos demonstrar esta provando que, para quaisquer dois vetores $v_0 \in C$ e $v_1 \in C^o$, todos os vetores no segmento da reta que liga os dois, com a possível exceção do vetor inicial v_0, ou seja, todos os vetores $v_\lambda = (1-\lambda)v_0 + \lambda v_1$ com $0 < \lambda \leqslant 1$, estão contidos não apenas em C (isso já segue da convexidade de C) mas até em C^o; em particular, $v_0 = \lim_{\lambda\to 0} v_\lambda \in \overline{C^o}$. Para tanto, seja $r > 0$ tal que todo vetor $v_1' \in V$ com $\|v_1' - v_1\| < r$ pertence a C; então fixando $0 < \lambda \leqslant 1$, vamos mostrar que todo vetor $v_\lambda' \in V$ com $\|v_\lambda' - v_\lambda\| < \lambda r$ também pertence a C. De fato, dado $v_\lambda' \in V$ com $\|v_\lambda' - v_\lambda\| < \lambda r$, defina

$$v_1' \;=\; v_1 + \frac{1}{\lambda}\,(v_\lambda' - v_\lambda)\,.$$

Então

$$\|v_1' - v_1\| = \frac{1}{\lambda}\,\|v_\lambda' - v_\lambda\| < r$$

e portanto $v_1' \in C$. Mas v_λ' pertence ao segmento da reta que liga v_0 e v_1', pois

$$v_\lambda' = (1-\lambda)v_0 + \lambda v_1'$$

e portanto segue que $v_\lambda' \in C$.

- (4) $\Longrightarrow$ (3): Óbvio, pois estamos supondo (ainda que tacitamente) que $C \neq \emptyset$.

□

Notamos que a implicação (3) $\Longrightarrow$ (4) é a única afirmação onde usamos a convexidade (e apenas a convexidade) de C: o argumento mostra que qualquer subconjunto convexo fechado de um espaço normado com interior não vazio é o fecho deste seu interior.

Lema 1.2 *Seja C um cone convexo em V. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *C é unilateral, i.e., $v \in C \setminus \{0\} \implies -v \notin C \setminus \{0\}$;*
2. *$C \cup \{0\}$ não contém nenhum subespaço unidimensional de V;*
3. *$C \cup \{0\}$ não contém nenhum subespaço não-trivial de V;*
4. *C tem gume trivial $\{0\}$.*

Demonstração: A equivalência destes critérios é evidente. □

Notamos que um aspecto talvez inconveniente de nossa definição do gume de um cone convexo e, em particular, de unilateralidade, é que não é estável sob a passagem de C para o seu fecho ou para o seu interior. O exemplo mais drástico desta instabilidade é o de um semi-espaço: dado uma forma linear não-trivial sobre V, $v^* \in V^* \setminus \{0\}$, cujo núcleo é um hiperplano

$$H \;=\; \ker v^* \;=\; \big\{ v \in V \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \big\}$$

em V, podemos considerar qualquer cone convexo C contido no semi-espaço fechado

$$\bar{C} \;=\; \big\{ v \in V \mid \langle v^*, v \rangle \geqslant 0 \big\}$$

que é um cone convexo fechado em V com gume H, e contendo o semi-espaço aberto

$$C^o = \; \big\{ v \in V \mid \langle v^*, v \rangle > 0 \big\}$$

que é um cone convexo aberto em V com gume $\{0\}$. Assim, o gume E_C de C pode ser qualquer subespaço de H, e podemos questionar se devemos chamar qualquer um destes cones convexos de unilateral ou não. Mas a definição adotada aqui nos parece ser o compromisso mais razoável.

Exemplo 1.6 No plano $V = \mathbb{R}^2$, considere os seguintes cones convexos, que podem todos ser considerados como versões do semiplano superior:

$$\begin{aligned} C_1 \;&=\; \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \big\}\,, \\ C_2 \;&=\; \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \big\} \,\cup\, \big\{ (x,0) \mid x > 0 \big\}\,, \\ C_3 \;&=\; \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \big\} \,\cup\, \big\{ (x,0) \mid x \geqslant 0 \big\}\,, \\ C_4 \;&=\; \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0 \big\}\,. \end{aligned}$$

Então $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4$, sendo que C_1 é aberto e é o interior de todos os demais, C_4 é fechado e é o fecho de todos os demais, e os primeiros três são unilaterais enquanto que o último não é, pois $E(C_4) = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \big\}$.

Definição 1.3 *Um cone convexo K em V é chamado de* ***cone próprio*** *se satisfaz as seguintes propriedades adicionais:*

- *K é fechado;*
- *K gera V (satisfaz todas as condições equivalentes do Lema 1.1);*
- *K é unilateral (satisfaz todas as condições equivalentes do Lema 1.2).*

O termo "cone próprio" foi trazido da área de otimização, onde a classe de cones próprios ocupa uma posição de destaque [6]. Por abuso de linguagem, a expressão "cone próprio" é frequentemente abreviada e se fala simplesmente em "cone".

A relação entre cones convexos fechados e cones próprios é relativamente simples: Se C é um cone convexo fechado em V com gume E_C e que gera o subespaço V_C de V, temos a seguinte sequência de inclusões:

$$\{0\} \subset E_C \subset C \subset V_C \subset V\,. \tag{1.1}$$

Como caso especial de afirmações que serão provadas na próxima seção, segue então que a imagem de C sob a projeção canônica de V_C sobre V_C/E_C é um cone próprio neste espaço quociente V_C/E_C, e reciprocamente, todo cone convexo fechado em V é obtido como a pré-imagem de um cone próprio em algum espaço subquociente (= espaço quociente de um subespaço) de V.

1.2 Imagem direta e inversa

Nesta seção, queremos investigar o comportamento de cones convexos em relação a transformações lineares. Para não deixar a formulação dos resultados excessivamente complicados, vamos na discussão da relação entre os respectivos gumes supor que os cones convexos considerados contenham o seu ápice (caso contrário, passamos primeiro de C para $C \cup \{0\}$, notando que, por definição, $E_C = E_{C\cup\{0\}}$), o que, como já vimos, inclui os cones convexos fechados mas não os cones convexos abertos.

Começamos por uma observação simples. Dado um cone convexo C em um espaço vetorial V que gera um subespaço V_C de V, em conjunto com outro subespaço V' de V, a intersecção $C \cap V'$ e a soma $C + V'$ são novamente cones convexos em V, mas a relação entre os subespaços gerados e os gumes pode ser complicada: temos

$$\begin{aligned} V_{C\cap V'} \subset V_C \cap V' \quad &, \quad V_{C+V'} = V_C + V'\,, \\ E_{C\cap V'} = E_C \cap V' \quad &, \quad E_{C+V'} \supset E_C + V'\,, \end{aligned}$$

onde as inclusões podem ser estritas, dependendo da posição relativa entre C e V', como ilustra o seguinte

Exemplo 1.7 No plano $V = \mathbb{R}^2$, considere o quadrante positivo

$$C \;=\; \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\,, y \geqslant 0\big\}$$

que é um cone próprio, em conjunto com uma reta com inclinação α, onde $0 \leqslant \alpha < \pi$:

$$V_\alpha \;=\; \bigl\{\lambda(\cos\alpha, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\bigr\}$$

Para $0 < \alpha < \pi/2$, $C \cap V_\alpha$ é uma semireta e $C + V_\alpha$ é o plano inteiro, de modo que $V_{C \cap V_\alpha} = V_\alpha$ e $E_{C+V_\alpha} = V \supsetneqq V_\alpha$, enquanto que para $\pi/2 < \alpha < \pi$, $C \cap V_\alpha$ se reduz à origem e $C + V_\alpha$ é o semiplano fechado superior e à direita da reta V_α, de modo que $V_{C \cap V_\alpha} = \{0\} \subsetneqq V_\alpha$ e $E_{C+V_\alpha} = V_\alpha$.

Proposição 1.1 *Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais reais V e W de dimensão finita.*

- *Dado um cone convexo C em V, sua imagem sob f é um cone convexo $f(C)$ em W, e se C é fechado/aberto em V, $f(C)$ é fechado/aberto em $f(V)$.[3] Ademais, supondo que $0 \in C$ e denotando por V_C o subespaço de V gerado por C, por $W_{f(C)}$ o subespaço de W gerado por $f(C)$, por E_C o gume de C, por $E_{f(C)}$ o gume de $f(C)$ e por $E_{C+\ker f}$ o gume de $C + \ker f$, vale*

$$f(V_C) = W_{f(C)} \quad , \quad f(E_C) \subset f(E_{C+\ker f}) = E_{f(C)}\,.$$

- *Dado um cone convexo C em W, sua pré-imagem sob f é um cone convexo $f^{-1}(C)$ em V, e se C é fechado/aberto em W, $f^{-1}(C)$ é fechado/aberto em V. Ademais, supondo que $0 \in C$ e denotando por W_C o subespaço de W gerado por C, por $W_{C \cap \mathrm{im} f}$ o subespaço de W gerado por $C \cap \mathrm{im} f$, por $V_{f^{-1}(C)}$ o subespaço de V gerado por $f^{-1}(C)$, por E_C o gume de C e por $E_{f^{-1}(C)}$ o gume de $f^{-1}(C)$, vale*

$$f^{-1}(W_C) \supset f^{-1}(W_{C \cap \mathrm{im} f}) = V_{f^{-1}(C)} \quad , \quad f^{-1}(E_C) = E_{f^{-1}(C)}\,.$$

Como já foi mencionado, a relação entre os dois subespaços E_C e $E_{C+\ker f}$, no primeiro caso (imagem direta), e entre os dois subespaços W_C e $W_{C \cap \mathrm{im} f}$, no segundo caso (imagem inversa), pode ser complicada: de modo geral só temos as inclusões óbvias $E_C \subset E_{C+\ker f}$, pois $C \subset C + \ker f$, e $W_C \supset W_{C \cap \mathrm{im} f}$, pois $C \supset C \cap \mathrm{im} f$.

Demonstração: Primeiro, o fato de que a imagem e a pré-imagem de um cone convexo sob uma aplicação linear é novamente um cone convexo é uma consequência imediata das definições. Também é claro que se $C \subset W$ é aberto/fechado em W, $f^{-1}(C) \subset V$ é aberto/fechado em V, pois f é contínua.

[3] Obviamente, isso implica que se C é fechado em V, $f(C)$ é também fechado em W, mas é claro que tal conclusão não pode ser verdade se substituírmos "fechado" por "aberto".

De modo semelhante, se C é aberto em V, $f(C)$ é aberto em $f(V)$, pois como aplicação linear sobrejetora de V para $f(V)$, f é uma aplicação aberta. Por outro lado, para mostrar que se C é fechado em V, $f(C)$ é fechado em $f(V)$, ou equivalentemente, em W, fazemos uso da hipótese de que C é um cone: denotando por S a esfera unitária de V em relação a algum produto escalar positivo definido (qualquer um serve), $C \cap S$ é compacto e portanto $f(C \cap S)$ também é; logo, $f(C) = \{\lambda w \mid \lambda \geqslant 0\,,\, w \in f(C \cap S)\}$ é fechado. Sendo assim, resta apenas provar as afirmações referentes aos subespaços gerados e aos gumes, lembrando que nesta parte, supomos que $0 \in C$.

- Imagem direta: Para os subespaços gerados, a igualdade segue diretamente das definições: para $w \in W$, vale

$$\begin{aligned} w \in f(V_C) &\iff w = f(v) \ \text{ com } \ v \in V_C = C - C \\ &\iff w = f(v_1 - v_2) \ \text{ com } \ v_1, v_2 \in C \\ &\iff w = w_1 - w_2 \ \text{ com } \ w_1, w_2 \in f(C) \\ &\iff w \in f(C) - f(C) = W_{f(C)}\,. \end{aligned}$$

  De modo semelhante, para os gumes, a primeira inclusão é óbvia:

$$C \subset C + \ker f \implies E_C \subset E_{C+\ker f} \implies f(E_C) \subset f(E_{C+\ker f})\,,$$

  enquanto que a segunda igualdade segue diretamente das definições: por um lado, o subespaço $E_{C+\ker f}$ de V é contido em $C + \ker f$ e assim o subespaço $f(E_{C+\ker f})$ de W é contido em $f(C+\ker f) = f(C)$, o que implica a inclusão $f(E_{C+\ker f}) \subset E_{f(C)}$, e por outro lado, o subespaço $E_{f(C)}$ de W é contido em $f(C)$ e portanto o subespaço $f^{-1}(E_{f(C)})$ de V é contido em $f^{-1}(f(C)) = C + \ker f$, o que implica a inclusão $f^{-1}(E_{f(C)}) \subset E_{C+\ker f}$; logo, $E_{f(C)} \subset f(E_{C+\ker f})$.

- Imagem inversa: Para os subespaços gerados, a primeira inclusão é óbvia:

$$C \supset C \cap \mathrm{im} f \implies W_C \supset W_{C \cap \mathrm{im} f} \implies f^{-1}(W_C) \supset f^{-1}(W_{C \cap \mathrm{im} f})\,,$$

  enquanto que a segunda igualdade segue diretamente das definições: para $v \in V$, vale

$$\begin{aligned} v \in f^{-1}(W_{C \cap \mathrm{im} f}) &\iff f(v) \in W_{C \cap \mathrm{im} f} = (C \cap \mathrm{im} f) - (C \cap \mathrm{im} f) \\ &\iff f(v) = w_1 - w_2 \ \text{ com } \ w_1, w_2 \in C \cap \mathrm{im} f \\ &\iff f(v) = f(v_1) - f(v_2) \ \text{ com } \ v_1, v_2 \in f^{-1}(C) \\ &\iff v = v_1 - v_2 \ \text{ com } \ v_1, v_2 \in f^{-1}(C) \\ &\iff v \in f^{-1}(C) - f^{-1}(C) = V_{f^{-1}(C)}\,, \end{aligned}$$

onde a penúltima equivalência decorre da hipótese de que C contém 0 e portanto $f^{-1}(C)$ contém $\ker f$. De modo semelhante, para os gumes, a igualdade segue diretamente das definições: por um lado, o subespaço E_C de W é contido em C e portanto o subespaço $f^{-1}(E_C)$ de V é contido em $f^{-1}(C)$, o que implica a inclusão $f^{-1}(E_C) \subset E_{f^{-1}(C)}$, e por outro lado, o subespaço $E_{f^{-1}(C)}$ de V é contido em $f^{-1}(C)$ e portanto o subespaço $f(E_{f^{-1}(C)})$ de W é contido em $f(f^{-1}(C)) = C$, o que implica a inclusão $f(E_{f^{-1}(C)}) \subset E_C$; usando novamente a hipótese de que C contém 0 e portanto $E_{f^{-1}(C)}$ contém $\ker f$, segue que $E_{f^{-1}(C)} = f^{-1}(f(E_{f^{-1}(C)})) \subset f^{-1}(E_C)$.

□

Como caso especial, notamos as seguintes propriedades de estabilidade de cones próprios:

Corolário 1.1 *Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais reais V e W de dimensão finita.*

- *Se f for sobrejetora e C for um cone próprio em V tal que*

  $$C \cap \ker f = \{0\}\,,$$

  então a imagem de C sob f é um cone próprio $f(C)$ em W.

- *Se f for injetora e C for um cone próprio em W tal que*

  $$C^o \cap \mathrm{im} f \neq \emptyset\,,$$

  então a pré-imagem de C sob f é um cone próprio $f^{-1}(C)$ em V.

Demonstração:

- Imagem direta: Conforme a Proposição 1.1, f sendo sobrejetora garante que $f(C)$ gera W, pois C gera V. Resta portanto provar que a outra condição implica que $f(C)$ é unilateral. Por absurdo, suponha então que existe um vetor $w \in W \setminus \{0\}$ tal que $w \in f(C)$ e $-w \in f(C)$. Escrevendo $\pm w = f(v_\pm)$ com $v_\pm \in C$, obtemos que o vetor $v_+ + v_-$ pertence a $C \cap \ker f$, mas não pode ser igual a 0 porque C é unilateral.

- Imagem inversa: Conforme a Proposição 1.1, f sendo injetora garante que $f^{-1}(C)$ é unilateral, pois C é unilateral. Resta portanto provar que a outra condição implica que $f^{-1}(C)$ gera V. Mas isso segue diretamente do Lema 1.1, pois se $C^o \cap \mathrm{im} f$, que é um aberto de $\mathrm{im} f$, não é vazio, a sua imagem inversa sob f, que é exatamente o interior de $f^{-1}(C)$, também não é vazio.

□

1.3 Cones e dualidade

A seguir, e ao longo de todo este trabalho, denotaremos a pareamento canônico entre um espaço vetorial V e seu espaço dual V^* por

$$\begin{array}{rccc} \langle\,.\,,.\rangle : & V^* \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (v^*, v) & \longmapsto & \langle v^*, v\rangle \end{array}$$

Dado um subconjunto X de V, podemos definir seu *cone dual* por

$$X^* = \big\{ x^* \in V^* \mid \langle x^*, x\rangle \geqslant 0 \text{ para todo } x \in X \big\} \tag{1.2}$$

notando que X^* será sempre um cone convexo fechado em V^*. De fato, se $\lambda > 0$ e $x^* \in X^*$, temos que, para todo $x \in X$, $\langle \lambda x^*, x\rangle = \lambda\langle x^*, x\rangle \geqslant 0$, ou seja, $\lambda x^* \in X^*$. De modo semelhante, se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, e $x_1^*, x_2^* \in X^*$, temos que, para todo $x \in X$,

$$\langle \lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^*\,,\, x\rangle \;=\; \lambda_1\langle x_1^*, x\rangle + \lambda_2\langle x_2^*, x\rangle \;\geqslant\; 0\,,$$

ou seja, $\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^* \in X^*$. Finalmente, X^* é fechado por que é a intersecção de uma família de (semi-espaços) fechados,

$$X^* \;=\; \bigcap_{x \in X} \big\{ x^* \in V^* \mid \langle x^*, x\rangle \geqslant 0 \big\}\,.$$

Obviamente,

$$X_1 \subset X_2 \quad\Longrightarrow\quad X_2^* \subset X_1^*. \tag{1.3}$$

Dado um subconjunto X de V qualquer, podemos considerar o cone convexo fechado *gerado* por X em V, que por definição é o menor cone convexo fechado em V contendo X. (Tal conceito é bem conhecido; por exemplo, se substituírmos “cone convexo fechado” por “ cone” ou por “subconjunto convexo” ou por “subconjunto fechado”, obtemos, respectivamente, o cone gerado por X ou o envelope convexo de X ou o fecho de X.) Explicitamente, o cone convexo fechado gerado por X é igual ao cone convexo gerado pelo fecho $\bar{X}$ de X e portanto consiste de todos os vetores de V que podem ser escritos como combinações lineares de vetores de $\bar{X}$ com coeficientes $\geqslant 0$: denotaremos-o aqui por $CCF(X)$. Então é claro que $CCF(X) = X$ se e somente se X já for um cone convexo fechado e que, de modo geral,

$$(CCF(X))^* \;=\; X^*. \tag{1.4}$$

Sendo assim, basta considerar o conceito de subconjunto dual apenas para uma classe especial de subconjuntos, os cones convexos fechados.

Definição 1.4 *Seja C um cone convexo fechado em V. Então o cone convexo fechado C^* em V^* é chamado o* ***cone dual*** *de C.*

É interessante notar como este conceito de cone dual se comporta quando passamos a considerar o bidual.

Teorema 1.1 *Se C for um cone convexo fechado em V, C^* seu cone dual e C^{**} seu cone bidual (o dual do dual), vale*

$$C^{**} = C\,.$$

Portanto, se X for um subconjunto qualquer de V, X^* seu dual e X^{**} seu bidual (o dual do dual), vale

$$X^{**} = CCF(X)\,.$$

Pelos argumentos apresentados anteriormente, a segunda afirmação segue da primeira. Para provar essa, note que a inclusão $C \subset C^{**}$ é trivial, enquanto que a inclusão $C \supset C^{**}$ segue da seguinte

Proposição 1.2 *Seja C um cone convexo fechado em V. Para todo vetor $v \in V \setminus C$, existe um covetor $v^* \in C^*$ tal que $\langle v^*, v\rangle < 0$.*

Demonstração: Esta afirmação é uma consequência direta do teorema de separação por hiperplanos, o qual afirma que existem um covetor $v^* \in V^*$ e um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle v^*, u\rangle > \alpha > \langle v^*, v\rangle \quad \text{para todo } u \in C.$$

Veja, por exemplo, [6, Example 2.20, p. 49] (os argumentos utilizados na prova apresentada neste livro claramente não dependem da escolha do produto escalar empregado). Em particular, como $0 \in C$, vale $\alpha < 0$. E como C é um cone, segue que

$$\langle v^*, u\rangle \geqslant 0 \quad \text{para todo } u \in C.$$

De fato, suponha por contradição que existe $u \in C$ tal que $\lambda = \langle v^*, u\rangle < 0$. Então vale $\alpha/\lambda > 0$ e portanto $2(\alpha/\lambda)u \in C$, de modo que, pela desigualdade anterior,

$$\langle v^*, 2(\alpha/\lambda)u\rangle > \alpha\,.$$

Mas como $\alpha < 0$, temos

$$\langle v^*, 2(\alpha/\lambda)u\rangle = 2\alpha < \alpha$$

o que é uma contradição. □

Notemos que esta proposição é equivalente a dizer que um vetor $v \in V$ que satisfaz a condição $\langle v^*, v \rangle \geqslant 0$ para todo $v^* \in C^*$ já pertence a C, o que é exatamente a afirmação de que $C^{**} = C$.

Na passagem ao cone dual no espaço dual, o subespaço gerado e o gume trocam de papel, no seguinte sentido:

Proposição 1.3 *Seja C um cone convexo fechado em V e C^* seu cone dual. Então o subespaço V_{C^*} de V^* gerado por C^* é o aniquilador do gume E_C de C e o gume E_{C^*} de C^* é o aniquilador do subespaço V_C de V gerado por C:*

$$V_{C^*} = E_C^{\perp} \quad , \quad E_{C^*} = V_C^{\perp} .$$

Em particular, se C é unilateral, C^* possui interior não vazio, e se C possui interior não vazio, C^* é unilateral. Portanto, o dual de um cone próprio é um cone próprio.

Lembramos que o aniquilador de um subespaço W de um espaço vetorial V é o subespaço $W^{\perp}$ do seu espaço dual V^* que consiste de todas as formas lineares sobre V que se anulam sobre W.

Demonstração: Notamos primeiro que trocando V com V^*, C com C^* e aplicando a operação $.^{\perp}$ de passar ao aniquilador de um subespaço, transformamos cada uma das duas igualdades desta proposição na outra, devido ao Teorema 1.1; portanto, basta provar uma delas, digamos a segunda. Mas para um covetor $v^* \in V^*$, a condição $v^* \in V_C^{\perp}$ significa que v^*, como forma linear sobre V, se anula sobre V_C, ou ainda, sobre C (pois C gera V_C), o que é equivalente a dizer que $\pm v^*$ (i.e., tanto v^* como $-v^*$) é $\geqslant 0$ sobre C, ou seja, $\pm v^* \in C^*$, o que por sua vez significa que $v^* \in E_{C^*}$. $\square$

Uma outra afirmação que se mostra útil é a seguinte proposição, que caracteriza o interior do cone dual como formas lineares que são estritamente positivas sobre o cone original (a menos do seu ápice):

Proposição 1.4 *Seja C um cone convexo fechado em V e C^* seu cone dual. Então vale*

$$(C^*)^o = \big\{ v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle > 0 \ \textit{para todo} \ v \in C \setminus \{0\} \big\}$$

e, reciprocamente, se C for unilateral,

$$C \setminus \{0\} = \big\{ v \in V \mid \langle v^*, v \rangle > 0 \ \textit{para todo} \ v^* \in (C^*)^o \big\}$$

Demonstração:

- Para provar a primeira afirmação, observamos primeiro que neste caso também podemos supor, sem perda de generalidade, que C seja unilateral, pois senão ambos os lados são $\emptyset$. Escolhemos então uma norma qualquer $\|.\|$ em V, em conjunto com a norma induzida $\|.\|$ em V^*, e denotando por $S_1(V)$ a correspondente esfera unitária em V, notamos que $C \cap S_1(V)$ é compacto e portanto, para todo covetor $v^* \in C^*$, vale

$$
\begin{aligned}
& \langle v^*, v \rangle > 0 \ \text{ para todo } \ v \in C \setminus \{0\} \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad \langle v^*, v_1 \rangle > 0 \ \text{ para todo } \ v_1 \in C \cap S_1(V) \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } \ \alpha > 0 \ \text{ tal que } \ \langle v^*, v_1 \rangle \geqslant \alpha \ \text{ para todo } \ v_1 \in C \cap S_1(V) \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } \ \alpha > 0 \ \text{ tal que } \ \langle v^*, v \rangle \geqslant \alpha \|v\| \ \text{ para todo } \ v \in C \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{existe } \ \alpha > 0 \ \text{ tal que } \ \langle v^*, v \rangle + \langle w^*, v \rangle \geqslant 0 \\ \text{para todo } \ w^* \in V^* \ \text{com } \|w^*\| \leqslant \alpha \ \text{ e todo } \ v \in C \end{array} \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{existe } \ \alpha > 0 \ \text{ tal que } \ v^* + w^* \in C^* \\ \text{para todo } \ w^* \in V^* \ \text{com } \|w^*\| \leqslant \alpha \end{array} \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad v^* \in (C^*)^o
\end{aligned}
$$

- Quanto à segunda afirmação, notamos que a inclusão "$\subset$" segue diretamente da primeira, enquanto que a inclusão oposta "$\supset$" (na qual, obviamente, podemos substituir $C \setminus \{0\}$ por C) pode ser deduzida da Proposição 1.2, a qual garante que para todo vetor $v \in V \setminus C$ existe um covetor $v^* \in C^*$ tal que $\langle v^*, v \rangle < 0$, de modo que, se escrevermos $v^* = \lim_{k \to \infty} v_k^*$ com $v_k^* \in (C^*)^o$, conforme o Lema 1.1, não podemos ter $\langle v_k^*, v \rangle > 0$ para todo k.

$\square$

Como corolário, obtemos:

Corolário 1.2 *Seja K um cone próprio em V, com interior K^o e fronteira ∂K, e sejam v_0 e v_1 vetores em $K \setminus \{0\}$. Então vale:*

- *Se um dos dois vetores pertence a K^o, então temos $v_0 + v_1 \in K^o$, ou seja, vale $K + K^o \subset K^o$.*

- *Se ambos os vetores pertencem a ∂K, mas existe algum $\lambda \in]0,1[$ tal que $\lambda v_0 + (1-\lambda) v_1 \in K^o$, então temos $\alpha v_0 + (1-\alpha) v_1 \in K^o$ para todo $\alpha \in]0,1[$.*

A segunda afirmação diz que se o segmento entre dois vetores na fronteira de um cone próprio entra no seu interior, este segmento (a menos de suas extremidades) já está inteiramente contido no seu interior.

Demonstração: Conforme a primeira afirmação da Proposição 1.4, aplicada ao cone dual K^* e combinada com o Teorema 1.1, temos

$$K^o = \big\{ v \in V \mid \langle v^*, v \rangle > 0 \ \text{ para todo } \ v^* \in K^* \setminus \{0\} \big\}$$

Sejam agora $v_0, v_1 \in K \setminus \{0\}$; então para todo $v^* \in K^* \setminus \{0\}$, temos $\langle v^*, v_0 \rangle \geqslant 0$ e $\langle v^*, v_1 \rangle \geqslant 0$. Suponha primeiro que um dos dois vetores, digamos v_1, pertence a K^o; então para todo $v^* \in K^* \setminus \{0\}$, temos $\langle v^*, v_1 \rangle > 0$ e portanto $\langle v^*, v_0 + v_1 \rangle > 0$, de modo que $v_0 + v_1 \in K^o$. Agora, suponha que ambos os vetores pertencem apenas a K, mas que existe algum $\lambda \in]0, 1[$ tal que $\lambda v_0 + (1-\lambda) v_1 \in K^o$; então para todo $v^* \in K^* \setminus \{0\}$, temos $\langle v^*, v_0 \rangle > 0$ *ou* $\langle v^*, v_1 \rangle > 0$ e portanto, para todo $\alpha \in]0, 1[$, $\langle v^*, \alpha v_0 + (1-\alpha) v_1 \rangle > 0$, de modo que $\alpha v_0 + (1-\alpha) v_1 \in K^o$. □

1.4 Ordem entre cones

Concluímos este capítulo menionando uma relação de ordenamento (que, infelizmente, não é uma relação de ordem no estrito sentido matemático) entre cones próprios que é muito útil, e mais forte do que a mera inclusão:

Definição 1.5 *Sejam K_1 e K_2 dois cones próprios em V. Dizemos que K_1 é **mais estreito** do que K_2 e escrevemos $K_1 \prec K_2$, ou equivalentemente, dizemos que K_2 é **mais amplo** do que K_1, e escrevemos $K_2 \succ K_1$, se K_1, a menos do seu ápice, é contido no interior de K_2:*

$$K_1 \prec K_2 \quad \Longleftrightarrow \quad K_1 \backslash \{0\} \subset (K_2)^o \,.$$

Podemos recuperar um cone próprio (a menos do seu ápice) como a interseção dos interiores de todos os cones próprios mais amplos e o seu interior como a união de todos os cones próprios (a menos do seu ápice) mais estreitos:

Proposição 1.5 *Seja K um cone próprio em V. Então vale*

$$K^o \;=\; \bigcup_{\substack{K' \text{ cone próprio} \\ K' \prec K}} K' \backslash \{0\} \qquad \text{e} \qquad K \backslash \{0\} \;=\; \bigcap_{\substack{K' \text{ cone próprio} \\ K' \succ K}} K'^{\,o} \,,$$

onde ainda podemos substituir "K' cone próprio" por "K' cone lorentziano (fechado)".

Demonstração: As inclusões "$\supset$", no primeiro caso, e "$\subset$", no segundo caso, são triviais. Para provar as inclusões opostas, fixamos um produto escalar positivo definido $(.\,,.)$ qualquer em V, com norma induzida denotada por $\|.\|$, e para todo vetor $v \in V$, denotamos por $B_r(v)$ a bola aberta e por $\bar{B}_r(v)$ a bola fechada de raio $r > 0$ em torno de v, em relação a esta norma, assim como por S_1 a correspondente esfera unitária. Também, quando fixamos um vetor $v_0 \in S_1$ e uma constante $c > 0$, decompomos o espaço V na soma direta

$$V \;=\; \mathbb{R}v_0 \oplus v_0^\perp$$

de modo que qualquer vetor $v \in V$ se decompõe de maneira única como $v = \lambda v_0 + v^\perp$ com $\lambda = (v, v_0)$ e $v^\perp = v - (v, v_0)v_0$, e notando que

$$\big(\lambda_1 v_0 + v_1^\perp\,,\,\lambda_2 v_0 + v_2^\perp\big) \;=\; \lambda_1\lambda_2 \;+\; (v_1^\perp, v_2^\perp)\,,$$

introduzimos um produto escalar lorentziano $(.\,,.)_c$ em V pondo

$$\big(\lambda_1 v_0 + v_1^\perp\,,\,\lambda_2 v_0 + v_2^\perp\big)_c \;=\; \lambda_1\lambda_2 \;-\; \frac{1}{c^2}(v_1^\perp, v_2^\perp)\,.$$

Assim, o correspondente cone lorentziano (fechado) é

$$K_c \;=\; \big\{\lambda v_0 + v^\perp \in V \mid c\lambda \geqslant \|v^\perp\|\big\}\,,$$

com interior

$$K_c^o \;=\; \big\{\lambda v_0 + v^\perp \in V \mid c\lambda > \|v^\perp\|\big\}\,.$$

- Dado um vetor v em K^o, que é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\bar{B}_\epsilon(v) \subset K^o$. Assim, pondo $v_0 = v$ e $c = \epsilon$, segue que $K_c \backslash \{0\} \subset K^o$, pois para qualquer vetor $v' = \lambda' v + (v')^\perp \in K_c \backslash \{0\}$, temos $\lambda' > 0$ e

  $$\Big\|\frac{1}{\lambda'}v' - v\Big\| \;=\; \Big\|\frac{1}{\lambda'}(v')^\perp\Big\| \;\leqslant c \;=\; \epsilon\,,$$

  de modo que $v'/\lambda' \in \bar{B}_\epsilon(v) \subset K^o$ e portanto $v' \in K^o$.

- Dado um vetor v em $V \backslash K$, a Proposição 1.2 garante que existe um covetor $v^* \in V^*$ que pertence ao cone dual K^* de K e satisfaz $\langle v^*, v\rangle < 0$. Esta desigualdade permanece verdadeira para todos os covetores em uma vizinhança de v^* em V^*, e como K^* coincide com o fecho do seu interior, podemos encontrar um covetor $v_0^* \in V^*$ que pertence ao interior $(K^*)^o$ do cone dual K^* de K e ainda satisfaz $\langle v_0^*, v\rangle < 0$. Aplicando o "isomorfismo musical" entre V e V^* proporcionado pelo produto escalar $(.\,,.)$ e aplicando a Proposição 1.4, concluímos que existe um vetor $v_0 \in V$, e sem perda de generalidade de norma 1, tal que $(v_0, v') > 0$ para todo $v' \in K \backslash \{0\}$, enquanto que $(v_0, v) < 0$. Como $K \cap S_1$ é compacto, concluímos que existe $\epsilon > 0$ tal que vale $(v_0, v') \geqslant \epsilon$ para todo $v' \in K \cap S_1$. Agora, supondo que $\epsilon < 1$ e tomando $c = 1/\epsilon$, segue que $K \backslash \{0\} \subset K_c^o$, pois para qualquer vetor $v' = \lambda' v_0 + (v')^\perp \in K \backslash \{0\}$, temos $\|v'\|^2 = \lambda'^2 + \|(v')^\perp\|^2 > 0$ e

$$\begin{aligned}
\frac{v'}{\|v'\|} \in K \cap S_1 \implies \frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2 + \|(v')^\perp\|^2}} \;&=\; \Big(v_0\,,\,\frac{v'}{\|v'\|}\Big) \;\geqslant\; \epsilon \\
\implies \epsilon^{-2}\lambda'^2 \;&\geqslant\; \lambda'^2 + \|(v')^\perp\|^2 \\
\implies c^2\lambda'^2 \;>\; (\epsilon^{-2} - 1)\lambda'^2 \;&\geqslant\; \|(v')^\perp\|^2 \\
\implies v' \in K_c^o\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos $v \in V \backslash K_c^o$, pois ainda vale $(v_0, v') > 0$ para todo $v' \in K_c^o$, enquanto que $(v_0, v) < 0$.

Para uso no próximo capítulo, ainda registramos a seguinte inclusão: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, exlicitamente dado por

$$\delta \;=\; \frac{\epsilon}{\sqrt{1+c^2}}\,,$$

tal que a intersecção do cone futuro transladado por δ na direção passada $-v_0$ com o cone passado transladado por δ na direção futura v_0 (a qual é chamada de "diamante causal") é contida na bola de raio ϵ em torno da origem:

$$\big(-\delta v_0 + K_c\big) \cap \big(\delta v_0 - K_c\big) \;\subset\; \bar{B}_\epsilon(0)\,. \tag{1.5}$$

De fato, dado $v \in \big(-\delta v_0 + K_c\big) \cap \big(\delta v_0 - K_c\big)$ e escrevendo $v = \lambda v_0 + v^\perp$ com $\lambda = (v, v_0)$ e $v^\perp = v - (v, v_0)v_0$, como acima, temos

$$\begin{aligned}
v + \delta v_0 \in K_c \quad &\implies \quad c(\lambda + \delta) \geqslant \|v^\perp\| \\
-\,v + \delta v_0 \in K_c \quad &\implies \quad c(-\lambda + \delta) \geqslant \|v^\perp\|
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|v^\perp\| - c\delta \leqslant c\lambda \leqslant -\,\|v^\perp\| + c\delta\,,$$

o que implica $\|v^\perp\| \leqslant c\delta$ e $|\lambda| \leqslant \delta$; portanto,

$$\|v\| = \sqrt{\lambda^2 + \|v^\perp\|^2} \leqslant \sqrt{1+c^2}\,\delta\,.$$

□

Capítulo 2

Estruturas de cones e estruturas causais

Neste capítulo, estudaremos estruturas de cones em fibrados vetoriais e, como caso particular, estruturas causais em variedades. Para simplificar a terminologia, adotaremos ao longo deste capítulo a convenção de chamar cones próprios simplesmente de *cones*, pois trabalharemos apenas com tais cones e seus interiores.

2.1 Estruturas de cones em fibrados vetoriais

Intuitivamente, uma estrutura de cones $\mathcal{C}$ em um fibrado vetorial E sobre uma variedade base M é simplesmente uma família $(C_x)_{x \in M}$ onde, para todo ponto x de M, C_x é um cone (no sentido da convenção acima) na fibra E_x de E neste ponto. A questão que se coloca é qual seria a propriedade de regularidade adequada a ser imposta sobre esta família, no que se refere à dependência do cone C_x em relação ao ponto x. Um estudo da literatura revela que existem aqui várias propostas, em sua maioria de natureza topológica, permitindo definir o que pode ser chamado de uma estrutura de cones contínua. No entanto, em geometria diferencial, o que interessa seria o conceito de uma estrutura de cones suave, e nenhuma das definições que encontramos na literatura serve para tal propósito.

Ocorre que existe um procedimento padrão em geometria diferencial para resolver essa questão: supondo que o fibrado vetorial ambiente E seja (pelo menos) de classe C^r, uma estrutura de cones em E deve ser dita de classe C^r se e somente se existe uma família de trivializações locais de classe C^r de E, cujos domínios recobrem M, tal que cada uma delas mapea a estrutura de cones dada, restrita ao domínio pertinente, em uma estrutura constante.[1] É surpreendente que uma ideia tão básica e óbvia ainda não tenha sido explorada muito mais amplamente.

Para melhor especificar os ingredientes desta abordagem, vamos primeiro examinar a questão no caso de um fibrado trivial. Sejam então M uma variedade, $\mathbb{E}$ um espaço vetorial fixo e $E = M \times \mathbb{E}$ o fibrado vetorial trivial sobre M com fibra típica $\mathbb{E}$. Dizemos que uma estrutura de cones $\mathcal{C}$ em E é

- *constante* se existe algum cone fixo C_0 em $\mathbb{E}$ tal que $C_x = C_0$, para todo $x \in M$;
- *trivial* (de classe C^r) se existem algum cone fixo C_0 em $\mathbb{E}$ e uma função (de classe C^r) $\tau : M \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ tal que $\tau(x)(C_x) = C_0$, para todo $x \in M$: este cone C_0 é chamado o *cone modelo* da estrutura.

Ocorre que a segunda propriedade configura a extensão natural da primeira quando queremos independência da escolha de trivialização e portanto admite uma extensão natural a fibrados vetoriais gerais, a ser apresentada logo abaixo.

No entanto, antes de abordar esta generalização, queremos formular e provar uma afirmação tecnicamente importante: a de que, em um fibrado vetorial trivial $E = M \times \mathbb{E}$, qualquer estrutura de cones $\mathcal{C}$ que é trivial contínua (i.e., trivial de classe C^0) pode sempre, pelo menos localmente, ser "prensada" ("pinched") entre duas constantes. Para tanto, continuamos empregando a relação de ordem $\prec$ entre cones já introduzida no capítulo anterior, conforme a qual dois cones C_1 e C_2 satisfazem $C_1 \prec C_2$ se e somente se C_1 é contido na união de $\{0\}$ com o interior C_2^o de C_2, e notamos primeiro o seguinte

Lema 2.1 *Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico munido de uma ação contínua $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Dados um compacto K e um aberto U de X tais que $K \subset U$, existe uma vizinhança aberta N de 1 em G tal que $N \cdot K \subset U$.*

Demonstração: Devido à continuidade da ação, podemos para cada ponto x de K escolher vizinhanças abertas N_x de 1 em G e V_x de x em X tais que

$$N_x \cdot V_x \subset U\,.$$

[1] Aqui, podemos ter $r \in \{0, 1, \ldots, \infty, \omega\}$, mas estamos essencialmente interessados em três casos: $r = 0$, $r = 1$ ou $r = \infty$.

Assim, $(V_x)_{x \in K}$ é um recobrimento aberto de K, e portanto existem pontos $x_1, \ldots, x_k \in K$ tais que $K \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_k}$. Pondo $N = N_{x_1} \cap \ldots \cap N_{x_k}$, obtemos a inclusão desejada, $N \cdot K \subset U$. □

Proposição 2.1 *Sejam M uma variedade, $\mathbb{E}$ um espaço vetorial e $\mathcal{C}$ uma estrutura de cones trivial contínua no fibrado vetorial trivial $E = M \times \mathbb{E}$ sobre M, com cone modelo C_0. Então $\mathcal{C}$ é **localmente prensada** entre estruturas de cones constantes, i.e., para qualquer ponto x de M e quaisquer dois cones $C^<$ e $C^>$ em $\mathbb{E}$ tais que $C^< \prec C_x \prec C^>$, existe uma vizinhança aberta U de x em M tal que $C^< \prec C_{x'} \prec C^>$, para todo $x' \in U$.*

Demonstração: Fixando um produto escalar positivo definido qualquer em $\mathbb{E}$ e denotando por S^{n-1} a correspondente esfera unitária, as hipóteses da proposição implicam que valem as seguintes inclusões:

$$C^< \cap S^{n-1} \subset C_x^o \quad \text{e} \quad C_x \cap S^{n-1} \subset (C^>)^o$$

onde notamos que o subconjunto menor é compacto enquanto que o subconjunto maior é aberto. Aplicando o lema à ação natural de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ em $\mathbb{E}$, obtemos uma vizinhança aberta N de 1 em $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ tal que

$$g \in N \implies g\big(C^< \cap S^{n-1}\big) \subset C_x^o \quad \text{e} \quad g^{-1}\big(C_x \cap S^{n-1}\big) \subset (C^>)^o$$

e, devido à linearidade da ação,

$$g \in N \implies g\big(C^<\big) \subset C_x^o \cup \{0\} \quad \text{e} \quad g^{-1}\big(C_x\big) \subset (C^>)^o \cup \{0\}$$

Agora, usando que existe uma aplicação contínua $\tau : M \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ tal que $\tau(z)(C_z) = C_0$ para todo $z \in M$, definimos $\tau_x : M \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ por $\tau_x(x') = \tau(x)^{-1}\,\tau(x')$, de modo que $\tau_x(x) = 1$, e pomos $U = \tau_x^{-1}(N)$; então vale

$$\begin{aligned}
x' \in U &\implies \tau(x)^{-1}\,\tau(x') \in N \\
&\implies \begin{cases} \big(\tau(x)^{-1}\,\tau(x')\big)\big(C^<\big) \subset C_x^o \cup \{0\} \\ \big(\tau(x)^{-1}\,\tau(x')\big)^{-1}\big(C_x\big) \subset (C^>)^o \cup \{0\} \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} C^< \subset \big(\tau(x)^{-1}\,\tau(x')\big)^{-1}\big(C_x^o \cup \{0\}\big) \\ \big(\tau(x)^{-1}\,\tau(x')\big)^{-1}\big(C_x\big) \subset (C^>)^o \cup \{0\} \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} C^< \subset C_{x'}^o \cup \{0\} \\ C_{x'} \subset (C^>)^o \cup \{0\} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Definição 2.1 *Dado um fibrado vetorial E sobre uma variedade base M (ambos de classe C^r), uma* ***estrutura de cones*** *em E (sem especificação adicional) é simplesmente uma família $(C_x)_{x \in M}$ de cones próprios $C_x \subset E_x$. Em particular, fixando um cone próprio C_0 na fibra típica $\mathbb{E}$, tal estrutura de cones $\mathcal{C}$ é chamada de* ***localmente trivial*** *(de classe C^s, com $s \leqslant r$) se para todo ponto x de M, existem uma vizinhança aberta U de x e uma trivialização $\Phi : E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{E}$ de E sobre U (de classe C^s) que mapea $\mathcal{C}$ para a estrutura constante $\mathcal{C}_0$ sobre U_α, i.e., tal que, para todo $x' \in U$, $\Phi_{x'} : E_{x'} \longrightarrow \mathbb{E}$ mapea o cone $C_{x'}$ no cone fixo C_0: dizemos então que C_0 é o* ***cone modelo*** *da estrutura.*

Alternativamente, uma estrutura de cones localmente trivial de classe C^0 será chamada de localmente trivial contínua e uma estrutura de cones localmente trivial de classe C^∞ será chamada de localmente trivial suave.

Comparando com outras definições de "regularidade" que se encontram na literatura, é importante enfatizar que a condição de trivialidade local exigida aqui, mesmo no caso de trivialidade local meramente contínua, é mais restritiva do que a condição de continuidade empregada pelos autores de alguns trabalhos que se encontram na literatura, tais como [9] e [20]. No entanto, nossa abordagem corresponde fielmente à estratégia adotada em geometria diferencial para definir regularidade local de qualquer estrutura geométrica, que normalmente é dada por alguma seção de algum fibrado: seções de fibrados (o que inclui funções, campos vetoriais, formas diferenciais, campos tensoriais etc.) são contínuas, diferenciáveis etc. se e somente se suas representações em relação a trivializações locais o são. Pode haver outros métodos para definir continuidade, mas não para definir diferenciabilidade. Assim, a motivação principal de usar a definição adotada aqui é que esta parece ser a única forma de chegar a um conceito de uma estrutura de cones que seja diferenciável e não apenas contínua – se bem que esta condição pode não ser suficientemente geral para acomodar todos os casos de interesse para as aplicações, como veremos mais explicitamente na discussão do Exemplo 2.2.

Independentemente de quais sejam as condições de regularidade a serem impostas, adotamos a seguinte

Definição 2.2 *Dada uma variedade M, uma* ***estrutura causal*** *– ou mais precisamente,* ***estrutura causal "infinitesimal"*** *– em M é uma estrutura de cones no seu fibrado tangente TM.*

Por definição, uma estrutura de cones localmente trivial é constante em *alguma* trivialização local do fibrado vetorial ambiente, mas obviamente não em todas. Porém, a Proposição 2.1 implica que em *qualquer* trivialização local do fibrado vetorial ambiente ela será pelo menos prensada entre estruturas constantes:

Proposição 2.2 *Seja $\mathcal{C}$ uma estrutura de cones localmente trivial contínua em um fibrado vetorial E sobre uma variedade base M. Então para qualquer trivialização $\Phi : E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{E}$ de E sobre um aberto U de M, qualquer ponto x de U e quaisquer dois cones $C^<$ e $C^>$ em $\mathbb{E}$ tais que $C^< \prec \Phi_x(C_x) \prec C^>$, existe uma vizinhança aberta $U_x \subset U$ de x em M tal que $C^< \prec \Phi_{x'}(C_{x'}) \prec C^>$, para todo $x' \in U_x$.*

Em particular, para estruturas causais em variedades, cabe fazer a seguinte

Observação 2.1 É preciso enfatizar que a condição de trivialidade local de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ em uma variedade M não afirma que, para qualquer ponto x de M, ela deva se tornar constante em relação a alguma carta local de M em torno de x, pois tal condição seria demasiadamente restritiva, mas apenas em relação a alguma trivialização local de TM em torno de x. No entanto, a Proposição 2.2 mostra e implica que, em relação a qualquer carta local (U, ϕ) de M em torno de x e para quaisquer dois cones $C^<$, $C^>$ em $\mathbb{R}^n$ que satisfazem $C^< \prec T_x\phi\,(C_x) \prec C^>$, ela fica prensada, em alguma vizinhança aberta U_x de x contida em U, entre as estruturas de cone constantes geradas por $C^<$ e $C^>$, i.e., vale

$$C^< \prec T_{x'}\phi\,(C_{x'}) \prec C^>$$

para todo $x' \in U_x$.

Também sempre podemos garantir a existência de seções globais com regularidade máxima que passam por qualquer vetor no interior de qualquer cone e tomam valores no interior de cada cone:

Proposição 2.3 *Seja $\mathcal{C}$ uma estrutura de cones localmente trivial contínua em um fibrado vetorial E sobre uma variedade base M (ambos de classe C^r). Então para qualquer ponto x_0 de M e qualquer vetor e_0 na fibra de E sobre x_0 tal que $e_0 \in C^o_{x_0}$, existe uma seção φ de E (de classe C^r) que passa por e_0 e toma valores em $\mathcal{C}^o$ (i.e., satisfaz $\varphi(x_0) = e_0$ e $\varphi(x) \in C^o_x$ para todo $x \in M$).*

Demonstração: Seja $(U_\alpha, \chi_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família formada por um recobrimento aberto localmente finito $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M, uma partição da unidade

$(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$ subjacente a este recobrimento e uma família $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de trivializações $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{E}$ de E sobre U_α que mapeam $\mathcal{C}$ para a estrutura constante $\mathcal{C}_0$ sobre U_α. Para todo $\alpha \in A$, escolha algum vetor $v_\alpha \in C_0^o$ tal que $\Phi_\alpha^{-1}(x_0, v_\alpha) = e_0$ caso $x_0 \in U_\alpha$ e defina uma seção φ_α de E sobre U_α por

$$\varphi_\alpha(x) = \Phi_\alpha^{-1}(x, v_\alpha) \quad \text{para } x \in U_\alpha\,.$$

Então tendo em vista que $\operatorname{supp} \chi_\alpha \subset U_\alpha$, $\chi_\alpha \varphi_\alpha$ é uma seção de E (definida como $\equiv 0$ fora de U_α) e, como os cones C_x^o são todos convexos,

$$\varphi = \sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha \varphi_\alpha$$

é uma seção de E com as propriedades enunciadas. □

Infelizmente, não há uma extensão geral e natural do Corolário 1.1 para estruturas de cones localmente triviais em fibrados vetoriais. Mais precisamente, se $f : E \longrightarrow F$ é um morfismo estrito entre dois fibrados vetoriais reais E e F sobre uma variedade M, então

- se for sobrejetor nas fibras e $\mathcal{C}$ for uma estrutura de cones em E tal que
$$\mathcal{C} \cap \ker f = \{0\}\,,$$
então a imagem de $\mathcal{C}$ sob f é uma estrutura de cones $f(\mathcal{C})$ em F, mas não há argumento geral para garantir que $\mathcal{C}$ sendo localmente trivial, $f(\mathcal{C})$ também o seja (exceto se f for um isomorfismo, é claro);
- se f for injetor nas fibras e $\mathcal{C}$ for uma estrutura de cones em F tal que
$$\mathcal{C}^o \cap \operatorname{im} f \neq \emptyset\,,$$
então a pré-imagem de $\mathcal{C}$ sob f é uma estrutura de cones $f^{-1}(\mathcal{C})$ em E, mas não há argumento geral para garantir que $\mathcal{C}$ sendo localmente trivial, $f^{-1}(\mathcal{C})$ também o seja (exceto se f for um isomorfismo, é claro).

O problema que aparece aqui é que, apesar de que, sob as hipóteses enunciadas, f é de posto constante e portanto $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ são subfibrados vetoriais, de modo que existem trivializações locais de E e F nas quais $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ são constantes, assim como trivializações locais nas quais $\mathcal{C}$ é constante, nada garante que existam trivializações locais nas quais $\ker f$ e $\mathcal{C}$ ou $\operatorname{im} f$ e $\mathcal{C}$ são *simultaneamente* constantes: isso sim seria claramente suficiente para garantir a trivialidade local de $f(\mathcal{C})$ ou $f^{-1}(\mathcal{C})$.

Porém, tal situação pode ser implementada da seguinte forma geral. Suponha que seja possível encontrar um fibrado principal P sobre M, com grupo estrutural G, tal que E e F são fibrados associados, i.e., $E = P \times_G E_0$ e $F = P \times_G F_0$ onde E_0 e F_0 são espaços vetoriais munidos de certas representações de G, e tal que $f : E \longrightarrow F$ é induzido por uma aplicação linear $f_0 : E_0 \longrightarrow F_0$ que é G-equivariante. Suponha ainda que a estrutura de cones $\mathcal{C}$ (em E ou em F) também seja induzida por um cone fixo C_0 (em E_0 ou em F_0): isso requer que C_0 seja G-invariante. Então é claro que todas as estruturas de cone assim obtidas são automaticamente localmente triviais, pois toda seção local de P induz trivializações locais nos fibrados vetoriais associados em que $\ker f$, $\mathrm{im} f$ e $\mathcal{C}$ são todos simultaneamente constantes.

Aplicando a construção do cone dual conforme descrita no Capítulo 1 fibra a fibra, chegamos à seguinte

Proposição 2.4 *Toda estrutura de cones $\mathcal{C}$ localmente trivial em um fibrado vetorial E sobre uma variedade base M induz de maneira canônica uma estrutura de cones $\mathcal{C}^*$ localmente trivial no fibrado dual E^* de E, definida por $(C^*)_x = (C_x)^*$, chamada a **estrutura de cones dual**.*

2.2 Exemplos

O primeiro exemplo é o mais óbvio, provindo da geometria lorentziana ou, em termos de Física, da relatividade geral.

Exemplo 2.1 Seja M uma variedade lorentziana orientada no tempo, com tensor métrico $\boldsymbol{g}$ e orientação temporal representada por algum campo vetorial tipo tempo n, e para todo ponto x de M, seja C_x o cone dos vetores tangentes em x causais (i.e., tipo tempo ou tipo luz) futuros, acrescido do vetor 0,

$$C_x \;=\; \left\{ u_x \in T_xM \mid \boldsymbol{g}_x(u_x, u_x) \geqslant 0 \,,\, \boldsymbol{g}_x(n_x, u_x) \geqslant 0 \right\} \,, \tag{2.1}$$

cujo interior é o cone dos vetores tangentes em x tipo tempo futuros,

$$C_x^o \;=\; \left\{ u_x \in T_xM \mid \boldsymbol{g}_x(u_x, u_x) > 0 \,,\, \boldsymbol{g}_x(n_x, u_x) > 0 \right\} \,. \tag{2.2}$$

Então a família $(C_x)_{x \in M}$ define uma estrutura causal C em M que é localmente trivial (com grau de diferenciabilidade igual à do tensor métrico).

De fato, a trivialidade local desta estrutura segue imediatamente usando qualquer trivialização local de TM por um referencial local ortonormal e orientado no tempo.

O segundo exemplo é menos imediato e provém da estrutura causal gerada por um sistema hiperbólico de equações diferenciais parciais (lineares) de primeira ordem, no sentido introduzido em uma tese de doutorado recentemente defendida neste Instituto [27].

Exemplo 2.2 Seja D um operador diferencial linear de primeira ordem agindo nas seções de um fibrado vetorial E, real ou complexo, sobre uma variedade base M, com símbolo principal

$$\gamma : T^*M \longrightarrow L(E) \tag{2.3}$$

que é *simétrico hiperbólico* em relação a alguma métrica nas fibras de E,

$$\begin{array}{ccc} E \times_M E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,v) & \longmapsto & \bar{u}v \end{array} \tag{2.4}$$

a qual é pseudo-riemanniana (induzindo uma forma bilinear simétrica não degenerada em cada fibra), no caso real, ou pseudo-hermiteana (induzindo uma forma sesquilinear hermiteana não degenerada em cada fibra), no caso complexo: isso significa que, para todo ponto x de M e todo covetor $\xi \in T_x^*M$, $\gamma(\xi)$ é pseudo-simétrico ou pseudo-hermiteano,

$$\overline{\gamma(\xi)u}\, v \;=\; \bar{u}\gamma(\xi)v \quad \text{para } \; u, v \in E_x \, , \tag{2.5}$$

e que em todo ponto x de M, existe algum covetor $\xi_0 \in T_x^*M$ tal que a forma $(u,v) \longmapsto \bar{u}\gamma(\xi_0)v$ seja positiva definida:

$$\bar{u}\gamma(\xi_0)u > 0 \quad \text{para } \; u \in E_x \backslash \{0\} \, . \tag{2.6}$$

Então para todo ponto x de M, definimos C_x^* como o cone dos vetores cotangentes em x que, sob γ, proporcionam formas positivas semidefinidas,

$$C_x^* \;=\; \left\{ \xi \in T_x^*M \mid \bar{u}\gamma(\xi)u \geqslant 0 \text{ para } u \in E_x \right\} \, , \tag{2.7}$$

cujo interior é o cone dos vetores cotangentes em x que, sob γ, proporcionam formas positivas definidas,

$$(C_x^*)^o \;=\; \left\{ \xi \in T_x^*M \mid \bar{u}\gamma(\xi)u > 0 \text{ para } u \in E_x \backslash \{0\} \right\} \, . \tag{2.8}$$

Suponha agora que

$$\ker \gamma = \{0\} \, . \tag{2.9}$$

Então o Exemplo 1.4 combinado com o segundo item do Corolário 1.1 mostra que a família $(C_x^*)_{x \in M}$ é uma estrutura de cones em T^*M e a Proposição 1.3

implica que a família $(C_x)_{x \in M}$ dos cones duais define uma estrutura causal $\mathcal{C}$ em M.

Infelizmente, não é possível garantir que a estrutura causal assim gerada seja sempre localmente trivial. Um simples contra-exemplo pode ser dado considerando o caso em que E é a soma direta ortogonal $E_1 \oplus E_2$ de dois subfibrados vetoriais tal que D e portanto γ são "diagonais em bloco", ou seja, D é a soma direta $D_1 \oplus D_2$ de dois operadores diferenciais lineares de primeira ordem D_1 agindo nas seções de E_1 e D_2 agindo nas seções de E_2, com respectivos símbolos principais $\gamma_1 : T^*M \longrightarrow L(E_1)$ e $\gamma_2 : T^*M \longrightarrow L(E_2)$; então é claro que, para todo ponto x de M e todo covetor $\xi \in T_x^*M$, vale $\gamma(\xi) = \gamma_1(\xi) \oplus \gamma_2(\xi)$ e assim $C_x = C_x^{(1)} \cap C_x^{(2)}$. Mas em geral, a interseção de duas estruturas de cones localmente triviais pode não ser localmente trivial e até pode deixar de ser associada com um cone modelo fixo: por exemplo, a interseção de dois cones futuros no espaço de Minkowski, referentes a dois produtos escalares lorentzianos diferentes, não é um cone futuro associado a qualquer produto escalar lorentziano neste espaço (tanto quanto a interseção de duas elipses não é uma elipse).

No entanto, existe uma situação importante em que podemos garantir trivialidade local: quando o operador D, ou melhor, o seu símbolo principal γ, é "geométrico" no sentido de que os fibrados vetoriais envolvidos, T^*M e E, inclusive a métrica nas fibras do segundo, são associados a um mesmo fibrado principal, em relação ao qual γ se torna constante. Mais precisamente, suponha que G é algum grupo de Lie conexo e P é um fibrado principal sobre M com grupo estrutural G admitindo representações

$$G \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad G \longrightarrow O(\mathbb{E}) \text{ ou } U(\mathbb{E})$$

de modo que os fibrados vetoriais T^*M e E sejam isomorfos aos correspondentes fibrados vetoriais associados

$$T^*M \cong P \times_G \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad E \cong P \times_G \mathbb{E}$$

e tal que em trivializações locais de ambos induzidas pela mesma seção local de P, o símbolo principal γ de D na equação (2.3) seja representado por uma aplicação linear fixa G-equivariante

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow L(\mathbb{E})$$

e a métrica nas fibras de E na equação (2.4) seja representada por uma forma bilinear simétrica ou forma sesquilinear hermiteana não degenerada fixa G-invariante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u, v) & \longmapsto & \bar{u}v \end{array}$$

Então é claro que estes últimos dois objetos definem um cone próprio modelo C_0 em $\mathbb{R}^n$ que é G-invariante e que toda seção local de P induz uma trivialização local de T^*M que implementa uma trivialização local da estrutura de cones $(C_x^*)_{x\in M}$.[2]

Essa situação "geométrica", que prevalece no caso do operador de Dirac, por exemplo, onde G é o grupo Spin (o recobrimento duplo=universal do grupo de Lorentz) e P é o fibrado dos referenciais espinoriais (um recobrimento duplo do fibrado dos referenciais ortonormais orientados e orientados no tempo), ou seja, uma "estrutura spin" [22], parece ser a melhor interpretação do que pode ser um "operador diferencial a coeficientes constantes" sobre uma variedade curva, uma vez que a noção usual, por não ser invariante sob transformações de coordenadas (locais), é restrita a operadores diferenciais agindo em funções sobre abertos de $\mathbb{R}^n$; note que aqui a constância dos coeficientes (dos termos de ordem mais alta) se refere a expressões em termos não de coordenadas e sim de referenciais: o passo essencial que faz com que tal generalização funcione consiste em permitir que estes referenciais podem (e até devem) deixar de ser holônomos.

No que diz respeito a definição de um operador simétrico hiperbólico acima citada, ressaltamos aqui a opção de que a métrica nas fibras (2.4) seja apenas não degenerada e não necessariamente positiva definida: é este o ponto principal que faz com que esta noção de um operador simétrico hiperbólico [27] seja mais ampla do que o conceito clássico de Friedrichs [10], e é essencial para incorporar o operador de Dirac hiperbólico.

2.3 Variedades com estrutura causal

Nesta seção, pretendemos tomar alguns passos iniciais para a formulação de uma teoria de *variedades causais*, a qual estende a teoria de estruturas causais em variedades lorentzianas para um âmbito mais geral. Desenvolver tal teoria por completo é um programa ambicioso que vai muito além do escopo de uma dissertação de mestrado e deverá ser deixado para trabalhos posteriores. Contudo, a meta principal é a mesma que no caso da geometria lorentziana: consiste em "integrar" uma estrutura causal "infinitesimal" (ou

[2] No caso em que a primeira representação é fiel e sua imagem for um subgrupo fechado de $GL(n,\mathbb{R})$, de modo que podemos considerar G como subgrupo fechado de $GL(n,\mathbb{R})$, tal fibrado principal P constitui uma redução de grupo estrutural do fibrado dos referenciais lineares de M [18, p. 53] e proporciona o que é conhecido como uma "G-estrutura" sobre M. No entanto, é importante permitir que G seja um recobrimento ou até uma extensão mais ampla de algum subgrupo fechado de $GL(n,\mathbb{R})$.

seja, uma estrutura de cones no fibrado tangente da variedade) para uma estrutura causal "global" (que pode ser vista como uma relação de ordem entre os pontos da própria variedade).[3] Isso leva a toda uma hierarquia de noções, tais como espaços-tempos *causais, fortemente causais, estavelmente causais.* etc, culminando no conceito de um espaço-tempo *globalmente hiperbólico*, que reina no topo da "escada causal", como explicado em [23].

2.3.1 Condições de regularidade

Para melhor situar a abordagem seguida aqui, é importante mencionar alguns artigos anteriores nesta mesma direção, sendo que em todos eles, a pergunta crítica é qual seria a condição de regularidade a ser imposta.

Talvez o primeiro trabalho que trata de estruturas causais como conceito independente de uma métrica lorentziana é [19], onde são vistas como relações de ordem (ordem causal e ordem cronológica) e induzindo uma certa topologia na variedade subjacente (a topologia de Alexandrov) que, em espaços-tempos fortemente causais, coincide com sua topologia usual.

Também usamos [20], onde se segue a ideia de definir estruturas causais como sendo semicontínuas inferiormente, semicontínuas superiormente ou contínuas se podem ser "localmente prensadas" entre estruturas que são constantes em alguma carta.[4] Mais precisamente, adotamos a seguinte

Definição 2.3 *Dada uma variedade M, uma estrutura causal $\mathcal{C}$ em M é chamada de*

- ***semicontínua inferiormente*** *se para todo ponto x de M e todo cone próprio $C_x^<$ em T_xM tal que $C_x^< \prec C_x$, existe uma carta local (U, ϕ) de M em torno de x tal que, para todo $x' \in U$, vale*

$$T_x\phi(C_x^<) \prec T_{x'}\phi(C_{x'})\,;$$

- ***semicontínua superiormente*** *se para todo ponto x de M e todo cone próprio $C_x^>$ em T_xM tal que $C_x \prec C_x^>$, existe uma carta local (U, ϕ) de M em torno de x tal que, para todo $x' \in U$, vale*

$$T_{x'}\phi(C_{x'}) \prec T_x\phi(C_x^>)\,;$$

[3]Neste trabalho, a palavra "ordem", sem qualquer especificação, é usada no seu sentido mais amplo: é simplesmente uma relação binária da qual se exige apenas transitividade, podendo ser reflexiva ($\leqslant$) ou não ($<$) e ainda podendo deixar de ser antissimétrica.

[4]A definição de estrutura suave adotada em [20] nos parece inadequada, por ser demasiadamente fraca, e também não é inteiramente claro se a definição de semicontinuidade inferior adotada em [20] é equivalente à nossa.

- ***contínua*** *se é semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente ao mesmo tempo.*

Note-se aqui que esta definição de semicontinuidade (inferior ou superior) não depende da escolha de carta, pois é fácil verificar que se a condição é satisfeita para alguma carta, ela será satisfeita para qualquer outra carta (com domínio suficientemente pequeno). Também mencionamos que, conforme notado na Observação 2.1, estruturas causais localmente triviais contínuas são contínuas, de modo que não há nenhuma inconsistência na terminologia. Por fim, observamos que o análogo da Proposição 2.3 continua valendo:

Proposição 2.5 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ semicontínua inferiormente, existem campos vetoriais e 1-formas globais tipo tempo. Mais especificamente, para qualquer ponto x_0 de M, qualquer vetor tangente $v_0 \in T_{x_0}M$ e qualquer vetor cotangente $v_0^* \in T_{x_0}^*M$ cronológico, existem um campo vetorial global X cronológico e uma 1-forma global α cronológica tais que $X(x_0) = v_0$ e $\alpha(x_0) = v_0^*$, respectivamente.*

Finalmente, é preciso destacar um trabalho mais recente [9] sobre estruturas causais que são localmente Lipschitz (em relação a uma noção de distância entre cones próprios que é uma adaptação da distância de Hausdorff entre compactos) onde é provada, neste âmbito muito geral, a mesma equivalência entre as diversas definições de um epaço-tempo globalmente hiperbólico que foi estabelecida no início deste século em geometria lorentziana [3–5].

Nesta dissertação, queremos explorar a possibilidade de se adotar uma condição mais restritiva sobre a regularidade das estruturas causais – e, mais geralmente, estruturas de cones – a serem consideradas: a de localidade trivial – se bem que estarmos conscientes que, desta forma, importantes aplicações (por exemplo, provindo da teoria de sistemas de equações diferenciais parciais hiperbólicas) podem deixar de serem contempladas.

2.3.2 Curvas causais e curvas cronológicas

Como já foi mencionado no início desta seção, estruturas causais em variedades podem vir em duas versões: uma "infinitesimal", dada por uma estrutura de cones no fibrado tangente da variedade, e uma "global", dada por uma relação de ordem entre os pontos da própria variedade. A "integração" da versão "infinitesimal" para a versão "global" passa pela noção de curvas causais e curvas cronológicas e, mais uma vez, requer uma discussão das condições de regularidade que devem ser exigidas das curvas a serem permitidas.

A condição mínima é que se consideram apenas curvas $\gamma : I \longrightarrow M$ que são contínuas, mas é importante admitir que o domínio de definição seja um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ geral: pode ser aberto ou fechado ou semi-aberto, e pode ser finito ou infinito ($I = \mathbb{R}$) ou semi-infinito. Diremos que tal curva tem *ponto inicial* p se I é da forma $[a,b]$ ou $[a,b[$ ou $[a,\infty[$ e $\gamma(a) = p$ e que tem *ponto final* q se I é da forma $[a,b]$ ou $]a,b]$ ou $]-\infty,b]$ e $\gamma(b) = q$. Uma condição ligeiramente mais restritiva, adotada em [7, 8], é que, em relação a alguma métrica riemanniana completa sobre M, γ seja *localmente Lipschitz*: essa condição não depende da escolha da métrica usada na sua definição [7], garante que γ seja *localmente absolutamente contínua* e portanto possui derivada $\dot{\gamma}$ definida sobre I em q.t.p. que é localmente integrável no sentido de Lebesgue e tal que vale o teorema fundamental do cálculo (estes fatos são conhecidos como o teorema de Rademacher), e finalmente implica um bom comportamento sob o processo de tomar limites (ou mais geralmente, considerar curvas de acumulação) de sequências de curvas [7]. No entanto, a hipótese mais tradicional é que γ seja *suave por partes*, ou mais geralmente *de classe C^{r+1} por partes*, o que significa que deve existir uma partição do intervalo I em um número finito de subintervalos tal que a restrição de γ a cada um destes subintervalos é suave, ou mais geralmente de classe C^{r+1}.[5] Uma das dificuldades para lidar com tais curvas provém do fato de que, para curvas contínuas $\gamma : I \longrightarrow M$ definidas sobre um intervalo I que não é aberto, a questão de quando devemos chamar uma tal curva de suave, ou mais geralmente de classe C^{r+1}, admite duas respostas *a priori* distintas:

- na versão mais fraca, exige-se que a restrição de γ ao interior de I seja suave ou, mais geralmente, de classe C^{r+1}, e tal que cada derivada de γ de ordem $\leqslant r+1$ admita extensão contínua ao bordo de I, e

- na versão mais forte, exige-se que γ admita uma extensão a uma curva suave ou, mais geralmente, de classe C^{r+1}, definida sobre algum intervalo aberto contendo I.

Para curvas em geral, ocorre que essas duas versões são de fato equivalentes, pois se γ for de classe C^{r+1} sobre um intervalo fechado $[a,b]$, digamos, no sentido fraco, podemos trabalhar em uma carta local de M em torno de $\gamma(a)$ e outra em torno de $\gamma(b)$ e usar os vetores

$$\gamma^{(p),+}(a) = \lim_{t\to a, t>a} \gamma^{(p)}(t) \quad , \quad \gamma^{(p),-}(b) = \lim_{t\to b, t<b} \gamma^{(p)}(t) \qquad (0 \leqslant p \leqslant r+1)$$

[5] Aqui, podemos ter $r \in \{0,\ldots,\infty\}$, mas estamos essencialmente interessados em dois casos: $r = 0$ ou $r = \infty$.

como coeficientes de Taylor para definir uma extensão de γ a um intervalo $]a-\epsilon, b+\epsilon[$ que é de classe C^{r+1}: isso é óbvio quando $r < \infty$ mas também vale quando $r = \infty$, devido a um teorema clássico de extensão de Borel; veja, por exemplo, [16, Theorem 1.2.6, p. 16]. No entanto, este procedimento pode falhar quando considerarmos curvas que devem satisfazer condições adicionais e exigirmos que as suas extensões ainda satisfaçam as mesmas condições adicionais; um exemplo deste fenômeno que é relevante no nosso contexto (curvas causais) será discutido logo abaixo.

De qualquer modo, uma curva $\gamma : I \longrightarrow M$ que é suave, ou mais geralmente de classe C^{r+1}, por partes admite, em cada ponto t de I, *derivadas laterais* a esquerda e a direita, denotadas por

$$\dot{\gamma}^{-}(t) = \lim_{t' \to t, t' < t} \dot{\gamma}(t) \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}^{+}(t) = \lim_{t' \to t, t' > t} \dot{\gamma}(t)$$

respectivamente, que são iguais no interior de cada um dos subintervalos onde γ é suave mas não necessariamente nos pontos de contato entre dois subintervalos adjacentes.

Definição 2.4 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ e uma curva $\gamma : I \longrightarrow M$ que é suave, ou mais geralmente de classe C^{r+1}, por partes, dizemos que γ é **causal** se*

$$\dot{\gamma}^{\pm}(t) \in C_{\gamma(t)} \backslash \{0\} \quad \textit{para todo} \;\; t \in I\,,$$

*que γ é **cronológica** ou **tipo tempo** se*

$$\dot{\gamma}^{\pm}(t) \in C^{o}_{\gamma(t)} \quad \textit{para todo} \;\; t \in I\,,$$

*e que γ é **tipo luz** se*

$$\dot{\gamma}^{\pm}(t) \in \partial C_{\gamma(t)} \backslash \{0\} \quad \textit{para todo} \;\; t \in I\,,$$

*onde C^{o}_{x} denota o interior e ∂C_x denota o bordo de C_x, como antes. Ainda dizemos que uma curva causal γ é **cronológica em algum ponto**, digamos, no ponto $\gamma(t_0)$ para um certo t_0 no interior de I, se existe $s_0 \in [0,1]$ tal que a combinação convexa $s_0\dot{\gamma}^{-}(t_0) + (1-s_0)\dot{\gamma}^{+}(t_0)$ pertence a $C^{o}_{\gamma(t_0)}$. Obviamente, se γ for diferenciável em t_0, isso significa que $\dot{\gamma}(t_0)$ deve ser cronológico, enquanto que se γ apresentar um ponto de quebra em t_0, este deve ser um **ponto de quebra cronológica**, no sentido de que o segmento da reta no cone $C_{\gamma(t_0)}$ conectando as duas derivadas laterais de γ em t_0 deve passar por seu interior e, conforme o Corolário 1.2, deve estar inteiramente contido no seu interior, i.e., para todo $s \in]0,1[$, vale a relação*

$$s\dot{\gamma}^{-}(t_0) + (1-s)\dot{\gamma}^{+}(t_0) \in C^{o}_{\gamma(t_0)}\,.$$

Em particular, curvas constantes (ou mesmo paradas durante algum tempo ou até paradas em algum instante, i.e., constantes sobre um subintervalo ou até com derivada se anulando em algum lugar) não qualificam como causais.

Também notamos que a unilateralidade dos cones C_x já induz uma direção temporal preferida que, por convenção, imaginamos ser ao futuro, sendo que a existência de um campo vetorial que define a orientação temporal é garantida pela Proposição 2.5 acima. Desta forma, vale enfatizar que as curvas causais e curvas cronológicas consideradas neste trabalho *sempre* serão dirigidas ao futuro, o que requer certas adaptações na definição de alguns dos conceitos a seguir, em relação às definições análogas encontradas na literatura sobre estruturas causais na relatividade geral.

Como último item nesta subseção, queremos discutir a questão sob quais condições e em que sentido curvas causais/cronológicas podem ser realizadas como curvas integrais de campos vetoriais causais/cronológicos.

Em um primeiro passo, vamos abordar o tema para curvas em geral, onde já podemos identificar logo de cara uma condição necessária: devido ao teorema de unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, curvas integrais de campos vetoriais são injetoras, ou seja, não possuem auto-interseções. Mas para provar uma afirmação mais concreta dando condições suficientes, devemos garantir que a imagem $\gamma(I)$ da curva γ seja uma subvariedade de M: neste caso, podemos usar o teorema da vizinhança tubular para construir a extensão desejada de $\dot{\gamma}$. Seguem os detalhes.

Proposição 2.6 *Seja $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ uma curva de classe C^{r+1} em uma variedade M, com ponto inicial $p = \gamma(a)$ e ponto final $q = \gamma(b)$, sem auto-interseções e tal que $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Então γ admite uma extensão a uma curva de classe C^{r+1} definida sobre um intervalo aberto maior, $]a-\epsilon, b+\epsilon[$, também denotada por γ, que é um mergulho de classe C^{r+1} e cuja imagem é subvariedade de classe C^{r+1} de M, e pode ser escrita como segmento de uma curva integral de um campo vetorial X de classe C^r sobre M. Ademais, se γ for cronológica em relação a alguma estrutura causal $\mathcal{C}$ em M que é semicontínua inferiormente, qualquer tal extensão γ da curva original a uma curva definida sobre $]a-\epsilon, b+\epsilon[$ será cronológica se ϵ for suficientemente pequeno, e qualquer tal campo vetorial X sobre M será cronológico em uma vizinhança aberta da imagem da curva original em M, podendo sempre ser escolhido de modo a ser cronológico na variedade M inteira.*

Demonstração: Como já foi mencionado anteriormente, γ admite uma extensão a uma curva de classe C^{r+1} definida sobre um intervalo aberto I contendo $[a,b]$, também denotada por γ (mas, claramente, longe de ser única), e que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, é uma imersão injetora quando restrita a $]a-\epsilon, b+\epsilon[\, \subset I$, por continuidade (já que $p \neq q$ e assim existem vizinhanças abertas disjuntas de p e q com $\gamma(t)$ contido na primeira quando $a-\epsilon < t \leqslant a$ e na segunda quando $b \leqslant t < b+\epsilon$). Portanto, a sua restrição a qualquer subintervalo fechado de $]a-\epsilon, b+\epsilon[$ é um mergulho de classe C^{r+1}, por um argumento de compacidade, de modo que diminuindo ϵ minimamente, podemos concluir que γ é um mergulho de classe C^{r+1} quando restrita a $]a-\epsilon, b+\epsilon[$, e portanto sua imagem

$$N_\epsilon \;=\; \gamma(]a-\epsilon, b+\epsilon[)$$

é uma subvariedade de classe C^{r+1} de M. Assim, podemos fixar uma métrica riemanniana auxiliar sobre M e usar o fluxo geodésico normal a N_ϵ para construir um difeomorfismo de classe C^{r+1}

$$\exp^\perp : \,]a-\epsilon, b+\epsilon[\, \times B(0,\rho) \xrightarrow{\cong} U$$

onde $B(0,\rho)$ é a bola aberta de raio ρ em $\mathbb{R}^{n-1}$ e U é uma vizinhança aberta "tubular" de N_ϵ em M, de modo que

$$\exp^\perp(t,0) = \gamma(t)\,.$$

Por fim, escolhemos um compacto K de M contido em U e contendo $\gamma([a,b])$ no seu interior e uma função teste $\chi \in C_c^\infty(M)$ tal que $\chi = 1$ sobre K e $\operatorname{supp}\chi \subset U$ e definimos

$$X(x) \;=\; \begin{cases} \chi(x)\, T_{(t,y)} \exp^\perp\big((1,0)\big) & \text{para } x = \exp^\perp(t,y) \in U \\ 0 & \text{para } x \notin U \end{cases}$$

Então X é campo vetorial de classe C^r sobre M tal que, para $a \leqslant t \leqslant b$,

$$X(\gamma(t)) \;=\; T_{(t,0)} \exp^\perp\big((1,0)\big) \;=\; \dot\gamma(t)\,,$$

como queríamos. Para provar as afirmações adicionais, observamos que para estruturas causais semicontínuas inferiormente, cronologia é uma relação aberta: portanto, dada qualquer extensão da curva original γ a uma curva contínua γ definida sobre um intervalo aberto maior $]a-\epsilon, b+\epsilon[$, digamos, o conjunto dos pontos t no intervalo $]a-\epsilon, b+\epsilon[$ onde γ é cronológica é uma vizinhança aberta de $[a,b]$ em $]a-\epsilon, b+\epsilon[$, e de modo semelhante, dado qualquer campo vetorial X contínuo sobre M que estende a derivada $\dot\gamma$ da curva original γ, o conjunto dos pontos x em M onde X é cronológico é uma vizinhança aberta U de $\gamma([a,b])$ em M. Finalmente, um campo vetorial $\tilde X$ de classe C^r sobre M que estende a derivada $\dot\gamma$ da curva original γ e que é cronológico na variedade M inteira pode ser construído introduzindo uma função teste $\chi \in C_c^\infty(M)$, $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, que vale 1 sobre uma vizinhança aberta de $\gamma([a,b])$ e com suporte contido em U, assim como um campo vetorial cronológico Y qualquer sobre M, cuja existência é garantida pela Proposição 2.5, e pondo $\tilde{X} = \chi X + (1-\chi)Y$. □

Cabe ressaltar que, mesmo assumindo propriedades de regularidade muito mais fortes sobre a estrutura causal $\mathcal{C}$, a afirmação análoga para curvas causais – obtida quando substituírmos, na última parte desta proposição, a palavra "cronológico(a)" pela palavra "causal", é falsa. Por exemplo, no espaço de Minkowski bidimensional com sua estrutura causal padrão, que é constante, a curva suave γ dada por

$$\gamma(t) \ = \ (t, t^2/2) \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

é causal sobre o intervalo $[0,1]$, mas qualquer extensão a uma curva definida sobre um intervalo da forma $]-\epsilon, 1+\epsilon[$ e ainda causal é, no máximo, de classe C^1, apresentando uma descontinuidade na sua segunda derivada, em $t=1$. Portanto, quando realizamos curvas causais como curvas integrais de campos vetoriais, precisamos ou (a) permitir que estes sejam causais apenas em uma parte de M (a ser meticulosamente especificada) ou (b) arcar com uma possível perda no grau de diferenciabilidade, da classe C^r para a classe C^0 (campos contínuos) ou talvez $C^{(0,1)}$ (campos localmente Lipschitz). Aqui, pretendemos seguir a primeira opção.

Proposição 2.7 *Seja $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ uma curva de classe C^{r+1} em uma variedade M, com ponto inicial $p = \gamma(a)$ e ponto final $q = \gamma(b)$, sem auto-interseções, e suponha que γ seja causal em relação a alguma estrutura causal $\mathcal{C}$ em M que é localmente trivial de classe C^r. Assim como na proposição anterior, estenda γ a uma curva de classe C^{r+1} definida sobre um intervalo aberto maior, $]a-\epsilon, b+\epsilon[$, também denotada por γ, que é um mergulho de classe C^{r+1} e cuja imagem $N_\epsilon \ = \ \gamma(]a-\epsilon, b+\epsilon[)$ é subvariedade de classe C^{r+1} de M, fixe uma métrica riemanniana auxiliar sobre M e use o fluxo geodésico normal a N_ϵ para construir um difeomorfismo de classe C^{r+1}*

$$\exp^\perp\colon]a-\epsilon, b+\epsilon[\times B(0,\rho) \xrightarrow{\cong} U$$

onde $B(0,\rho)$ é a bola aberta de raio ρ em $\mathbb{R}^{n-1}$ e U é uma "vizinhança tubular aberta" de N_ϵ em M, de modo que

$$\exp^\perp(t,0) \ = \ \gamma(t)\,.$$

Então γ pode ser escrita como segmento de uma curva integral de um campo vetorial X de classe C^r sobre M que é causal sobre uma "vizinhança tubular compacta" de $\gamma([a,b])$, da forma $K_\delta = \exp^\perp\big([a,b] \times \bar{B}(0,\delta)\big)$, onde $\bar{B}(0,\delta)$ é a bola fechada de raio δ em $\mathbb{R}^{n-1}$, para algum δ com $0 < \delta < \rho$.

Demonstração: Escolhendo a extensão de γ ao intervalo aberto $]a-\epsilon, b+\epsilon[$ e sua vizinhança tubular U como indicado na proposição, fazemos uso da trivialidade local de $\mathcal{C}$ para encontrar, para todo $t \in]a-\epsilon, b+\epsilon[$, $\delta_t > 0$ com $\delta_t \leqslant \min\{t-a, b-t\} + \epsilon$ e $\rho_t > 0$ com $\rho_t \leqslant \rho$ tais que existam trivializações da estrutura $\mathcal{C}$ sobre $\exp^\perp\big(]t-\delta_t, t+\delta_t[\, \times B(0,\rho_t)\big)$. Diminuindo ϵ minimamente, podemos supor sem perda de generalidade que $]a-\epsilon, b+\epsilon[$ é recoberto por um número finito de intervalos $]t_i-\delta_i, t_i+\delta_i[$ e, substituindo ρ pelo mímimo dos ρ_i (e U pela correspondente vizinhança aberta de N_ϵ em M), podemos encontrar funções

$$A_i :]t_i-\delta_i, t_i+\delta_i[\, \times B(0,\rho) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

tais que, para $t_i - \delta_i < t < t_i + \delta_i$ e $y \in B(0,\rho)$,

$$C_{\exp^\perp(t,y)} \;=\; T_{(t,y)} \exp^\perp\big(A_i(t,y)C_0\big)\,.$$

Em particular, como $\exp^\perp(t,0) = \gamma(t)$, vale $T_{(t,0)} \exp^\perp\big((1,0)\big) = \dot{\gamma}(t) \in C_{\gamma(t)}$, de modo que

$$A_i(t,0)^{-1}(1,0) \in C_0\,.$$

Introduzimos, ainda, uma partição da unidade sobre $]a-\epsilon, b+\epsilon[$ constituída de funções teste $\chi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \chi_i \leqslant 1$, tais que $\operatorname{supp}\chi_i \subset]t_i-\delta_i, t_i+\delta_i[$, e uma outra função teste $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, que vale 1 sobre $\bar{B}(0,\delta)$, onde $\delta < \rho$, e com suporte contido em $B(0,\rho)$, e definimos

$$X(x) \;=\; \begin{cases} T_{(t,y)} \exp^\perp\big(Z(t,y)\big) & \text{para } x = \exp^\perp(t,y) \in U \\ 0 & \text{para } x \notin U \end{cases}$$

onde

$$Z(t,y) \;=\; \sum_i \chi_i(t)\chi(y)A_i(t,y)A_i(t,0)^{-1}(1,0)\,.$$

Então X é campo vetorial de classe C^r sobre M tal que, para $a \leqslant t \leqslant b$ e $y \in \bar{B}(0,\delta)$,

$$X(\gamma(t)) \;=\; T_{(t,0)} \exp^\perp\big(Z(t,0)\big) \;=\; T_{(t,0)} \exp^\perp\big((1,0)\big) \;=\; \dot{\gamma}(t)$$

e, por convexidade,

$$X(\exp^\perp(t,y)) \;=\; \sum_i \chi_i(t)\, T_{(t,0)} \exp^\perp\big(A_i(t,y)A_i(t,0)^{-1}(1,0)\big) \;\in\; C_{\exp^\perp(t,y)}\,,$$

como queríamos. $\square$

2.3.3 Ordem causal e cronológico: futuro e passado

A seguir, voltamos a trabalhar exclusivamente com curvas suaves por partes.

Definição 2.5 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ e dados dois pontos $p, q \in M$, dizemos que p é* ***causalmente anterior*** *a q ou q é* ***causalmente posterior*** *a p, e escrevemos $p < q$ ou $q < p$, se existe uma curva causal γ com ponto inicial p e ponto final q; ainda escrevemos $p \leqslant q$ ou $q \leqslant p$ se existe uma curva γ com ponto inicial p e ponto final q que é causal ou constante. De modo semelhante, dizemos que p é (cronologicamente)* ***anterior*** *a q ou q é (cronologicamente)* ***posterior*** *a p, e escrevemos $p \ll q$ ou $q \gg p$, se existe uma curva cronológica γ com ponto inicial p e ponto final q. Então o* ***futuro causal*** *e o* ***futuro cronológico*** *de um ponto p de M e, mais geralmente, de um subconjunto A de M, são os subconjuntos de M definidos por:*

$$J^+(p) \,=\, \{\, q \in M \,|\, p \leqslant q \,\} \quad , \quad J^+(A) \,=\, \bigcup_{p \in A} J^+(p)\,,$$

$$I^+(p) \,=\, \{\, q \in M \,|\, p \ll q \,\} \quad , \quad I^+(A) \,=\, \bigcup_{p \in A} I^+(p)\,.$$

De forma análoga, definem-se o ***passado causal*** *e o* ***passado cronológico*** *de um ponto q de M e, mais geralmente, de um subconjunto B de M:*

$$J^-(q) \,=\, \{\, p \in M \,|\, p \leqslant q \,\} \quad , \quad J^-(B) \,=\, \bigcup_{q \in B} J^-(q)\,,$$

$$I^-(q) \,=\, \{\, p \in M \,|\, p \ll q \,\} \quad , \quad I^-(B) \,=\, \bigcup_{q \in B} I^-(q)\,.$$

Notamos que as relações "$\leqslant$" e "$\ll$" assim definidas, que podemos reexpressar na forma

$$p \leqslant q \iff q \in J^+(p) \quad , \quad p \ll q \iff q \in I^+(p)\,, \tag{2.10}$$

compartilham algumas mas não todas as propriedades de uma relação de ordem: é imediato a partir das definições que são transitivas, i.e., para $p, q, r \in M$, vale

$$p \leqslant q\,,\; q \leqslant r \implies p \leqslant r \quad , \quad p \ll q\,,\; q \ll r \implies p \ll r\,, \tag{2.11}$$

mas em geral não são nem reflexivas nem antissimétricas. Isso motiva a seguinte

Definição 2.6 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$, dizemos que M é* ***causal*** *(em relação a $\mathcal{C}$) se não admite curvas causais fechadas. De modo semelhante, dizemos que M é* ***cronológica*** *(em relação a $\mathcal{C}$) se não admite curvas cronológicas fechadas.*

Concluímos então que "$\leqslant$" é uma "bona fide" relação de ordem em M se e somente se M é causal, enquanto que "$\ll$" nunca é.

Para uma estrutura causal constante sobre um aberto U de um espaço vetorial $\mathbb{E}$, essas relações são o que se espera, e o mesmo vale para o futuro e passado de um ponto (e portanto também de um subconjunto geral de U), tanto o causal como o cronológico:

Proposição 2.8 *Dado um aberto convexo U de um espaço vetorial $\mathbb{E}$ munido de uma estrutura causal constante $\mathcal{C}_0$, dada por um cone próprio C_0 fixo em $\mathbb{E}$, e dados dois pontos $p, q \in U$, temos*

$$\begin{aligned} p \leqslant q &\iff q - p \in C_0\,, \\ p \ll q &\iff q - p \in C_0^o\,, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} J^+(p) &= U \cap (p + C_0) \quad , \quad J^-(q) = U \cap (q - C_0)\,, \\ I^+(p) &= U \cap (p + C_0^o) \quad , \quad J^-(q) = U \cap (q - C_0^o)\,, \end{aligned}$$

Mais geralmente, se existe uma curva causal com ponto inicial p e ponto final q que é cronológica em algum ponto, segue que $p \ll q$.

Demonstração: Obviamente, a primeira afirmação é equivalente a

$$p < q \iff q - p \in C_0 \setminus \{0\}\,.$$

Suponha então que vale (a) $q - p \in C_0 \setminus \{0\}$ ou (b) $q - p \in C_0^o$, e considere o segmento da reta que passa por p e q, i.e., a curva suave γ definida por $\gamma(t) = p + t(q-p)$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$, que (devido à convexidade de U) é inteiramente contida em U, que tem ponto inicial p e ponto final q e que é (a) causal ou (b) cronológica, provando que (a) $p < q$ ou (b) $p \ll q$. Reciprocamente, suponha que (a) $p < q$ ou (b) $p \ll q$, i.e., que existe alguma curva $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$ em U que tem ponto inicial $\gamma(a) = p$ e ponto final $\gamma(b) = q$ e que é (a) causal ou (b) cronológica. Então denotando, como antes, por C_0^* o cone dual de C_0 e por $(C_0^*)^o$ seu interior, temos que para qualquer covetor $\theta \in \mathbb{E}^*$ que pertence (a) a $(C_0^*)^o$ ou (b) a $C_0^* \setminus \{0\}$, a função $f_\theta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_\theta(t) = \theta(\gamma(t))$ é estritamente crescente, pois segundo a Proposição 1.4, sua derivada satisfaz $\dot{f}_\theta^\pm(t) = \theta(\dot{\gamma}^\pm(t)) > 0$ para todo $t \in I$; logo, $\theta(q-p) = f_\theta(b) - f_\theta(a) > 0$ e portanto, novamente segundo a Proposição 1.4, vale (a) $q - p \in C_0 \setminus \{0\}$ ou (b) $q - p \in C_0^o$. Finalmente, para provar a última afirmação, suponha que γ seja cronológica em algum ponto, digamos $\gamma(t_0)$. Então podemos aplicar o mesmo argumento: supondo que θ pertence a $C_0^* \setminus \{0\}$, obtemos que $\dot{f}_\theta^\pm(t) = \theta(\dot{\gamma}^\pm(t))$ é $\geqslant 0$ para todo $t \in I$ e é > 0 em alguma vizinhança de t_0, o que pelo teorema fundamental do cálculo ainda permite concluir que $\theta(q-p) = f_\theta(b) - f_\theta(a) > 0$ e portanto que $q - p \in C_0^o$, como antes. □

Em geometria lorentziana (veja o Exemplo 2.1), há algumas propriedades relativamente elementares e bem conhecidas do futuro/passado causal e cronológico cuja generalização ao ambiente deste trabalho constitui um primeiro passo rumo ao desenvolvimento de uma teoria de causalidade mais geral. Continuando a denotar pontos de M por p, q, r etc. e subconjuntos arbitrários de M por A, sabe-se, por exemplo, que $J^\pm(p)$ pode não ser fechado, mas:

1. $I^\pm(p)$, e mais geralmente $I^\pm(A)$, é aberto; veja [7, Proposition 2.4.12].
2. $I^\pm(p)$ e $J^\pm(p)$, e mais geralmente $I^\pm(A)$ e $J^\pm(A)$, possuem o mesmo fecho; mais precisamente, vale
$$I^\pm(p) \subset J^\pm(p) \subset \overline{I^\pm(p)}\,; \tag{2.12}$$
veja [7, Corollary 2.4.19].
3. Vale o "pushup lemma"
$$I^\pm(J^\pm(p)) = I^\pm(p) = J^\pm(I^\pm(p))\,, \tag{2.13}$$
ou seja
$$p \leqslant q\,,\, q \ll r \ \text{ ou } \ p \ll q\,,\, q \leqslant r \quad \Longrightarrow \quad p \ll r\,, \tag{2.14}$$
veja [7, Lemma 2.4.14].
4. Vale a última afirmação da Proposição 2.8 acima: Se existe uma curva causal com ponto inicial p e ponto final q que é cronológica em algum ponto, segue que $p \ll q$; veja [7, Corollary 2.4.16].

O resto deste trabalho será dedicado a provar que, sob hipóteses adequadas a serem enunciadas e discutidas a seguir, essas propriedades chave continuam valendo para estruturas causais mais gerais.

A primeira afirmação da lista acima é que o futuro/passado cronológico de um ponto (e mais geralmente de qualquer subconjunto) é aberto, e ela vale sob hipóteses bem brandas.

Teorema 2.1 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ semicontínua inferiormente, o futuro e o passado cronológico de qualquer ponto de M, e mais geralmente de qualquer subconjunto de M, é aberto em M.*

Demonstração: Como a união de abertos é aberto e como o passado cronológico de um ponto em relação à estrutura causal $\mathcal{C}$ é igual ao seu futuro cronológico em relação à estrutura causal $-\mathcal{C}$, basta provar a afirmação para o futuro cronológico $I^+(p)$ de qualquer ponto p de M. Suponha então que $q \in I^+(p)$ e que $\gamma \colon [a,b] \longrightarrow M$ é uma curva cronológica com ponto inicial p e ponto final q. Para mostrar que existe uma vizinhança de q tal que para todo ponto $\tilde{q}$ nesta vizinhança, existe uma curva cronológica $\tilde{\gamma}$ com ponto inicial p e ponto final $\tilde{q}$, a ideia é obter $\tilde{\gamma}$ modificando γ apenas num pequeno trecho final; portanto, podemos trabalhar em uma carta de M em torno de q e assim identificar a estrutura causal no domínio desta carta e o trecho final da curva contido nele com uma estrutura causal e uma curva em um aberto U de $\mathbb{R}^n$. Agora, como $\dot{\gamma}^-(b) \in C_q^o$, podemos escolher um cone próprio C_0 em $\mathbb{R}^n$ tal que $\dot{\gamma}^-(b) \subset C_0^o \subset C_0 \backslash \{0\} \subset C_q^o$. Além disso, $\mathcal{C}$ sendo semicontínua inferiormente em q, podemos encontrar uma vizinhança aberta $V \subset U$ de q que é convexa e tal que $C_0 \backslash \{0\} \subset C_x^o$ para $x \in V$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que γ é suave em $[b-\delta, b]$ e, para $t \in [b-\delta, b]$, satisfaz $\gamma(t) \in V \subset U$ (pois γ é contínua em b) e $\dot{\gamma}(t) \in C_0^o$ (pois $\dot{\gamma}$ é contínua em b); assim, segue que $\dot{\gamma}(t) \in C_0^o \subset C_0 \backslash \{0\} \subset C_{\gamma(t)}^o$, para $t \in [b-\delta, b]$. Sendo assim, a curva $\gamma|_{[b-\delta,b]}$ em V, com ponto inicial $r = \gamma(b-\delta)$ e ponto final $q = \gamma(b)$, é cronológica em relação à estrutura causal constante em V dada pelo cone próprio C_0, e podemos aplicar a Proposição 2.8 para concluir que $q - r \in C_0^o$. Logo, existe uma vizinhança aberta $W \subset V$ de q em V tal que, para todo $\tilde{q} \in W$, vale $\tilde{q} - r \in C_0^o$ e portanto

$$\tilde{\gamma}(t) \;=\; \begin{cases} \gamma(t) & \text{para } a \leqslant t \leqslant b-\delta \\ \dfrac{\tilde{q}-r}{\delta}\, t + \dfrac{br - (b-\delta)\tilde{q}}{\delta} & \text{para } b-\delta \leqslant t \leqslant b \end{cases}$$

define uma curva cronológica $\tilde{\gamma} \colon [a,b] \longrightarrow M$ com ponto inicial p e ponto final $\tilde{q}$. $\square$

Para as demais afirmações, vamos primeiro formular um lema que permite reduzir o estudo de curvas suaves por partes ao de curvas suaves. Para tanto, definimos (provisoriamente) uma nova relação "$\preceq$" por

$$p \preceq q \iff q \in \overline{I^+(p)} \tag{2.15}$$

e provamos que, novamente sob hipóteses bem brandas, ela também é transitiva, i.e., para $p, q, r \in M$, vale

$$p \preceq q \ , \ q \preceq r \implies p \preceq r \, . \tag{2.16}$$

Lema 2.2 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ semicontínua inferiormente, a relação "$\preceq$" é transitiva, ou seja, vale a equação (2.16).*

Demonstração: Sejam $p, q, r \in M$ tais que $q \in \overline{I^+(p)}$ e $r \in \overline{I^+(q)}$; e sejam $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de pontos $q_k \in I^+(p)$ e $r_n \in I^+(q)$ tais que $\lim_{k\to\infty} q_k = q$ e $\lim_{n\to\infty} r_n = r$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $q \in I^-(r_n)$, e sabemos pelo Teorema 2.1 que $I^-(r_n)$ é aberto; logo existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geqslant k_n$, vale $q_k \in I^-(r_n)$. Segue que $q_k \in I^+(p)$ e $r_n \in I^+(q_k)$; portanto, $r_n \in I^+(p)$ e $r \in \overline{I^+(p)}$. □

A vantagem de trabalhar com curvas suaves, em vez de curvas que são apenas suaves por partes, é que elas podem ser escritas como curvas integrais de campos vetoriais suaves, conforme explicado no final da subseção anterior: veremos logo como explorar este fato nas demonstrações a seguir.

A segunda afirmação da lista acima é que o futuro/passado causal de um ponto (e de fato de qualquer subconjunto) é contido no fecho do seu futuro/passado cronológico, e ela requer hipóteses bem mais restritivas. Por exemplo, é conhecido que vale para estruturas causais lorentzianas suaves [7] mas que deixa de ser verdade para estruturas causais lorentzianas que são apenas contínuas [8]. A demonstração a ser dada aqui é baseada na seguinte

Proposição 2.9 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ localmente trivial suave, e dada uma curva causal suave $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow M$, com ponto inicial $p = \gamma(a)$ e ponto final $q = \gamma(b)$, sem auto-interseções, existe uma "deformação cronológica suave" de γ, i.e., uma família suave de curvas cronológicas suaves $\gamma_s : [a, b] \longrightarrow M$, todas com o mesmo ponto inicial $p = \gamma_s(a)$ e com pontos finais $q_s = \gamma_s(b)$, tal que*

$$\lim_{s\to 0} q_s \ = \ q \, .$$

Demonstração: A ideia básica é aplicar a Proposição 2.7 para construir um campo vetorial X sobre M tal que γ é curva integral de X sobre $[a, b]$ (e até sobre um intervalo aberto ligeiramente maior, $]a - \epsilon, b + \epsilon[$) e que é causal sobre uma vizinhança tubular compacta K_δ de $\gamma([a, b])$. Escolhemos ainda um campo vetorial cronológico Y qualquer sobre M, cuja existência é garantida pela Proposição 2.5, e introduzimos uma família a um parâmetro de campos vetoriais X_s sobre M, definidos por $X_s = X + sY$ $(s \in \mathbb{R})$; então γ_s será a curva integral de X_s com condição inicial $\gamma_s(a) = p$. Usando o teorema padrão de continuidade do fluxo de campos vetoriais em relação a parâmetros, podemos concluir que para s suficientemente pequeno (e com ϵ adequadamente diminuido), a curva integral γ_s também é bem definida sobre $[a, b]$ (e até sobre $]a - \epsilon, b + \epsilon[$) e satisfaz $\lim_{s\to 0} \gamma_s(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [a, b]$, uniformemente em t, o que garante que, mais uma vez para s suficientemente pequeno, $\gamma_s([a, b]) \subset K_\delta$; portanto, para s suficientemente pequeno e $s > 0$, γ_s é cronológica. $\square$

Como corolário, temos

Teorema 2.2 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ localmente trivial suave, o futuro/passado causal de qualquer ponto de M, e mais geralmente de qualquer subconjunto de M, é contido no fecho do seu futuro/passado cronológico.*

Demonstração: Como a união dos fechos de uma família de subconjuntos é contida no fecho de sua união e como o passado causal/cronológico de um ponto em relação à estrutura causal $\mathcal{C}$ é igual ao seu futuro causal/ cronológico em relação à estrutura causal $-\mathcal{C}$, basta provar que vale a inclusão $J^+(p) \subset \overline{I^+(p)}$, para qualquer ponto p de M. Suponha então que $q \in J^+(p)$ e que $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ é uma curva causal com ponto inicial p e ponto final q. (Note que podemos supor $q \neq p$, pois é óbvio que $p \in \overline{I^+(p)}$: basta tomar qualquer curva cronológica $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \longrightarrow M$ com ponto inicial p e observar que $p = \lim_{t\to 0} \tilde{\gamma}(t)$.) Usando o fato que tanto a relação "$\leqslant$" como a relação "$\preceq$" são transitivas (veja as equações (2.11) e (2.16), assim como o Lema 2.2), podemos sem perda de generalidade supor que γ seja suave, e não apenas suave por partes, e sem pontos de auto-interseções: caso contrário, decompomos γ na concatenação de um número finito de trechos, cada um conectando um ponto de quebra ao seguinte por uma curva causal suave, e ainda eliminamos eventuais laços. Assim, uma simples aplicação da Proposição 2.9 fecha a demonstração. $\square$

A terceira afirmação da lista acima, ou seja, o "pushup lemma", é uma consequência direta da segunda:

Teorema 2.3 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ localmente trivial suave, vale*

$$p \leqslant q\,,\, q \ll r \quad \text{ou} \quad p \ll q\,,\, q \leqslant r \quad \Longrightarrow \quad p \ll r\,.$$

Demonstração: Supondo que (a) $p \leqslant q$ e $q \ll r$ ou (b) $p \ll q$ e $q \leqslant r$, o Teorema 2.1 mostra que existe uma vizinhança aberta U de q em M tal que (a) $\tilde{q} \ll r$ ou (b) $p \ll \tilde{q}$ para todo $\tilde{q} \in U$, enquanto que o Teorema 2.2 mostra que existe uma sequência $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em M com $\lim_{k\to\infty} q_k = q$ tal que (a) $p \ll q_k$ ou (b) $q_k \ll r$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, quando k for suficientemente grande para que valha $q_k \in U$, segue que, em ambos os casos, $p \ll q_k$ e $q_k \ll r$; logo, $p \ll r$. $\square$

Finalmente, a quarta e última afirmação da lista acima segue imediatamente da terceira, em combinação com o seguinte

Lema 2.3 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ semicontínua inferiormente, e dada uma curva causal $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ em M com ponto inicial p e ponto final q que é cronológica em algum ponto $\gamma(t_0)$, digamos, existe uma curva causal $\tilde{\gamma} : [a,b] \longrightarrow M$ em M com o mesmo ponto inicial p e o mesmo ponto final q que é suave e cronológica em um subintervalo não-trivial I de $[a,b]$ contendo t_0.*

Demonstração: Como $\tilde{\gamma}$ coincidirá com γ exceto em uma vizinhança do ponto $\gamma(t_0)$ suficientemente pequena para estar contida no domínio de alguma carta de M, podemos substituir M por algum aberto U de $\mathbb{R}^n$, cortando trechos iniciais e finais onde as duas curvas são idênticas para supor, sem perda de generalidade, que γ é curva em U. Temos então que distinguir dois casos. Se, por um lado, γ for suave em t_0, a hipótese significa que $\dot{\gamma}(t_0) \in C^o_{\gamma(t_0)}$ (se $t_0 = a$ ou $t_0 = b$, escrevemos simplesmente $\dot{\gamma}(a)$ ao invés de $\dot{\gamma}^+(a)$ e $\dot{\gamma}(b)$ ao invés de $\dot{\gamma}^-(b)$), e podemos escolher um cone próprio C_0 em $\mathbb{R}^n$ tal que $\dot{\gamma}(t_0) \in C^o_0 \subset C_0 \backslash \{0\} \subset C^o_{\gamma(t_0)}$. Além disso, $\mathcal{C}$ sendo semicontínua inferiormente em $\gamma(t_0)$, podemos encontrar uma vizinhança aberta $V \subset U$ de $\gamma(t_0)$ tal que $C_0 \backslash \{0\} \subset C^o_x$ para $x \in V$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que γ é suave em $I_\delta = [a,b] \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ e, para $t \in I_\delta$, satisfaz $\gamma(t) \in V \subset U$ (pois γ é contínua em t_0) e $\dot{\gamma}(t) \in C^o_0$ (pois $\dot{\gamma}$ é contínua em t_0); assim, segue que $\dot{\gamma}(t) \in C^o_0 \subset C_0 \backslash \{0\} \subset C^o_{\gamma(t)}$, para $t \in I_\delta$. Se, por outro lado, γ apresentar um ponto de quebra cronológica em t_0 (note que isso só faz sentido para $t_0 \in]a,b[$), temos $\frac{1}{2}\big(\dot{\gamma}^+(t_0) + \dot{\gamma}^-(t_0)\big) \in C^o_{\gamma(t_0)}$ e procedemos como antes: podemos escolher um cone próprio C_0 em $\mathbb{R}^n$ tal que $\frac{1}{2}\big(\dot{\gamma}^+(t_0) + \dot{\gamma}^-(t_0)\big) \in C^o_0 \subset C_0 \backslash \{0\} \subset C^o_{\gamma(t_0)}$, e $\mathcal{C}$ sendo semicontínua inferiormente em $\gamma(t_0)$, podemos encontrar uma vizinhança aberta convexa $V \subset U$ de $\gamma(t_0)$ tal que $C_0 \backslash \{0\} \subset C^o_x$ para $x \in V$. Agora defina uma curva $\gamma_\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, onde $0 < \delta < \min\{t_0 - a\,, b - t_0\}$, por:

$$\gamma_\delta(t) = \gamma(t)$$
$$\text{se } \ a \leqslant t \leqslant t_0 - \delta \ \text{ ou } \ t_0 + \delta \leqslant t \leqslant b$$

$$\gamma_\delta(t) = \gamma(t_0 - \delta) + \frac{1}{2\delta}\big(t - t_0 + \delta\big)\big(\gamma(t_0 + \delta) - \gamma(t_0 - \delta)\big)$$
$$\text{se } \ t_0 - \delta \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$$

Então γ_δ, assim como γ, é contínua e suave por partes, e notando que

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \dot{\gamma}_\delta(t) \;&=\; \lim_{\delta\to 0} \;\frac{1}{2\delta}\big(\gamma(t_0 + \delta) - \gamma(t_0 - \delta)\big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{\delta\to 0} \frac{\gamma(t_0 + \delta) - \gamma(t_0)}{\delta} \;+\; \lim_{\delta\to 0} \frac{\gamma(t_0 - \delta) - \gamma(t_0)}{-\delta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\big(\dot{\gamma}^+(t_0) + \dot{\gamma}^-(t_0)\big)\,,
\end{aligned}$$

concluímos que para δ suficientemente pequeno, $\gamma_\delta(t_0 \pm \delta) = \gamma(t_0 \pm \delta) \in V$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que γ_δ é suave (pois é linear) em $I_\delta =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ e, para $t \in I_\delta$, satisfaz $\gamma_\delta(t) \in V \subset U$ (pois V é convexa) e $\dot{\gamma}_\delta(t) \in C_0^o$; assim, segue que $\dot{\gamma}_\delta(t) \in C_0^o \subset C_0 \backslash \{0\} \subset C^o_{\gamma_\delta(t)}$, para $t \in I_\delta$. □

Teorema 2.4 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ localmente trivial suave, então se existe uma curva causal com ponto inicial p e ponto final q que é cronológica em algum ponto, segue que $p \ll q$.*

Demonstração: Conforme o lema anterior, podemos substituir a curva causal original por uma curva causal que é cronológica em um subintervalo não trivial e portanto pode ser vista como concatenação de uma curva causal (ou constante) inicial, de p até algum p', com uma curva cronológica intermediária, de p' até algum q', e uma curva causal (ou constante) final, de q' até q. Devido ao Teorema 2.3, segue que $p \ll q$. □

2.3.4 Causalidade forte e estável

Com os teoremas básicos estabelecidos na subseção anterior, parece ser viável desenvolver todo o resto da teoria da causalidade em variedades seguindo o mesmo raciocínio que na geometria lorentziana.

O primeiro conjunto de conceitos importantes nesta direção são as várias noções de causalidade de uma variedade. A mais fraca delas é a de causalidade mesmo, que exige a inexistência de curvas causais fechadas; veja a Definição 2.6 acima. Versões mais fortes são a de causalidade forte e de causalidade estável: a primeira se basea no conceito de convexidade causal, enquanto que a segunda implementa a ideia de que a propriedade de causalidade seja preservada sob pequenas perturbações da estrutura causal dada, para uma estrutura causal ligeiramente mais ampla.

Definição 2.7 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$, dizemos que um subconjunto A de M é **causalmente convexo** se, para quaisquer dois pontos p e q de A tais que $p \leqslant q$ e qualquer curva causal $\gamma : I \longrightarrow M$ que os conecta, digamos com $p = \gamma(a)$ e $q = \gamma(b)$ onde $a, b \in I$, o segmento inteiro $\gamma([a, b])$ está contido em A. Isso é equivalente a exigir que, para quaisquer três pontos p, q, r de M, vale*

$$p \leqslant q \leqslant r \quad \text{e} \quad p, r \in A \quad \Longrightarrow \quad q \in A\,.$$

Também é equivalente a exigir que qualquer curva causal $\gamma\colon I \longrightarrow M$ intersecta A, no máximo, "apenas uma vez", i.e., o conjunto $\{t \in I \mid \gamma(t) \in V\}$, se não vazio, é conexo (ou seja, um único intervalo).

Definição 2.8 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$, dizemos que M é **fortemente causal** (em relação a $\mathcal{C}$) se M é **localmente causalmente convexa**, i.e., para todo ponto p de M e toda vizinhança U de p, existe uma vizinhança V de p contida em U que é causalmente convexa.*

Veja, por exemplo, [14, p. 192], [25, p. 27] ou [29, p. 196]. É claro que nestas condições, qualquer curva causal suave será automaticamente um mergulho.

Definição 2.9 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$, dizemos que M é **estavelmente causal** (em relação a $\mathcal{C}$) se existe uma estrutura causal $\mathcal{C}'$ tal que $\mathcal{C} \prec \mathcal{C}'$ e tal que M é causal em relação a $\mathcal{C}'$.*

Neste contexto, já podemos notar alguns resultados interessantes. O primeiro deles é retirado diretamente da geometria lorentziana [24] e diz que variedades compactas não podem ser causais: portanto, como modelos para estudar relatividade geral ou, mais geralmente, equações diferenciais parciais hiperbólicas, são inúteis. Para provar isso, fazemos uso do seguinte

Lema 2.4 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ semicontínua inferiormente, então para todo ponto p de M e toda vizinhança aberta U de p, existem pontos $p_<$ e $p_>$ em U tais que $p_< \ll p \ll p_>$.*

Demonstração: Sejam (ϕ, V) uma carta local de M em torno de p e $C_p^<$ um cone próprio em T_pM tal que $C_p^< \prec C_p$; substituindo o domínio desta carta por uma vizinhança aberta menor de p conforme necessário, podemos então supor sem perda de generalidade que $V \subset U$ e $T_p\phi(C_p^<) \prec T_{p'}\phi(C_{p'})$ para todo $p' \in V$. Seja $\rho > 0$ tal que a bola aberta $B_\rho(0)$ está contida em $\phi(V)$. Então para todo vetor $v \in T_p\phi(C_p^<)$ com $\|v\| = 1$, a curva $\gamma\colon]-\rho, \rho[\longrightarrow M$ definida por $\gamma(t) = \phi^{-1}(tv)$ é cronológica, e para qualquer $t_- \in]-\rho, 0[$ e qualquer $t_+ \in]0, \rho[$, temos $\gamma(t_-) \ll p \ll \gamma(t_+)$. $\square$

Proposição 2.10 *Toda variedade M compacta munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ semicontínua inferiormente admite curvas cronológicas fechadas.*

Demonstração: Pelo lema anterior, o futuro e o passado cronológico de qualquer ponto de M não pode ser vazio e portanto $(I^+(p))_{p\in M}$ é um recobrimento aberto de M que, pela hipótese da compacidade de M, admite um subrecobrimento finito $(I^+(p_i))_{i=1\ldots k}$, e ainda podemos supor sem perda de generalidade que nenhum dos pontos p_i pertence a algum outro $I^+(p_j)$ (caso contrário, teríamos $I^+(p_i) \subset I^+(p_j)$ e poderíamos remover $I^+(p_i)$). Mas então

$$p_i \in \bigcup_j I^+(p_j) \ \text{ e } \ p_i \notin \bigcup_{j\neq i} I^+(p_j) \quad \Longrightarrow \quad p_i \in I^+(p_i)\,,$$

ou seja, existe uma curva cronológica que conecta p_i com p_i mesmo. □

A condição de causalidade forte também merece alguma discussão, pois ela viabiliza uma análise da estrutura causal em termos de subconjuntos mias explícitos: os "diamantes causais" – também chamados de "intervalos" (em relação à ordem causal dada) – e os "diamantes cronológicos":

Definição 2.10 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$, introduzimos, para cada par de pontos p e q de M tais que $p \leqslant q$, o **diamante causal***

$$\leqslant\! p, q \!\geqslant \;=\; J^+(p) \cap J^-(q)\,,$$

*e, analogamente, para cada par de pontos p e q de M tais que $p \ll q$, o **diamante cronológico***

$$\ll\! p, q \!\gg \;=\; I^+(p) \cap I^-(q)\,.$$

Segue imediatamente desta definição, em conjunto com a transitividade da relação "$\leqslant$", que todo diamante causal é causalmente convexo, e reciprocamente, todo subconjunto causalmente convexo A é a união dos diamantes causais nele contidos:

$$A \;=\; \bigcup_{\substack{p,q\in A\\ p\leqslant q}} \leqslant\! p, q\!\geqslant\ . \tag{2.17}$$

Também segue, conforme o Teorema 2.1 que, se a estrutura causal $\mathcal{C}$ for pelo menos semicontínua inferiormente, os diamantes cronológicos são abertos. Da mesma forma, quando a estrutura causal $\mathcal{C}$ satisfizer a condição (2.12), a mesma inclusão vale para os diamentes causais:

$$\ll\! p, q\!\gg \;\subset\; \leqslant\! p, q\!\geqslant \;\subset\; \overline{\ll\! p, q\!\gg}\,; \tag{2.18}$$

conforme o Teorema 2.2, isso cale, em particular, se a estrutura causal $\mathcal{C}$ for localmente trivial suave.

Proposição 2.11 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ semicontínua inferiormente, o conjunto de todos os diamantes cronológicos constitui uma base para uma topologia em M, chamada a* ***topologia de Alexandrov****.*

Demonstração: Para todo ponto p de M, o Lema 2.4 garante que existem pontos $p_<$ e $p_>$ em M tais que $p \in \ll p_<, p_> \gg$. Agora sejam p, p_1, p_2, q_1, q_2 pontos de M, com $p_i \ll q_i$, tais que $p \in U_1 \cap U_2$ onde $U_i = \ll p_i, q_i \gg$ $(i = 1, 2)$. Como $U_1 \cap U_2$ é uma vizinhança aberta de p, o Lema 2.4 garante a existencia de pontos $p_<$ e $p_>$ em $U_1 \cap U_2$ tais que $p \in \ll p_<, p_> \gg$. Mas então $p_i \ll p_<$ (pois $p_< \in U_i$) e $p_> \ll q_i$ (pois $p_> \in U_i$) e por transitividade da relação "$\ll$" segue que $\ll p_<, p_> \gg \subset U_1 \cap U_2$. □

Obviamente, a topologia padrão de M (como variedade) é mais fina do que a topologia de Alexandrov, e surge naturalmente a pergunta quando as duas são iguais. Para tanto, consideramos as seguintes três afirmações:

(1) Para todo ponto p de M e toda vizinhança U de p, existe um diamante cronológico $\ll p_<, p_> \gg$ contendo p e contido em U.

(2) Para todo ponto p de M e toda vizinhança U de p, existe um diamante causal $\leqslant p_<, p_> \geqslant$ contendo p no seu interior e contido em U.

(3) Para todo ponto p de M e toda vizinhança U de p, existe um subconjunto causalmente convexo A de M contendo p no seu interior e contido em U.

Claramente, a topologia de Alexandrov coincide com a topologia padrão de M se e somente se vale a primeira afirmação, assegurando que os diamantes cronológicos formam uma base para a topologia padrão de M, enquanto que, conforme a Definição 2.8, M é fortemente causal se e somente se vale a terceira afirmação. Mas na verdade, todas esta afirmações são equivalentes, desde que a estrutura causal $\mathcal{C}$ for contínua e satisfizer a condição (2.12) e, portanto, a condição (2.18). Isso é imediato para as implicações (1) $\Longrightarrow$ (2) e (2) $\Longrightarrow$ (3) (usando a condição (2.18) no primeiro caso), e as implicações recíprocas podem ser provadas fazendo uso do fato de que, localmente, toda estrutura causal contínua é fortemente causal, como mostra o seguinte

Lema 2.5 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ contínua, então para todo ponto p de M e toda vizinhança aberta U de p, existe uma vizinhança aberta V de p contida em U que, como subvariedade aberta de M com a estrutura causal $\mathcal{C}_V$ induzida por restrição, tem todas as* *propriedades (1)-(3) enunciadas acima em relação ao ponto p, ou seja: para toda vizinhança aberta W de p contida em V, existem pontos $p_<$ e $p_>$ em W tais que*

$$p \in \ll p_<, p_> \gg_V \subset \leqslant p_<, p_> \geqslant_V \subset W\,, \tag{2.19}$$

onde $\ll p_<, p_> \gg_V$ e $\leqslant p_<, p_> \geqslant_V$ denotam, respectivamente, o diamante cronológico e o diamante causal entre $p_<$ e $p_>$ em V.

Demonstração: Procedemos de forma análoga à prova do lema 2.4. Sejam (ϕ, V) uma carta local de M em torno de p e $C_p^<$, $C_p^>$ cones próprios em T_pM tais que $C_p^< \prec C_p \prec C_p^>$; substituindo o domínio desta carta por uma vizinhança aberta menor de p conforme necessário, podemos então supor sem perda de generalidade que $V \subset U$ e que $T_p\phi(C_p^<) \prec T_{p'}\phi(C_{p'}) \prec T_p\phi(C_p^>)$ para todo $p' \in V$. Restringindo V ainda mais, podemos também supor que $\phi(V)$ seja o espaço $\mathbb{R}^n$ inteiro e aplicar a metodologia desenvolvida na demonstração da Proposição 1.5, escolhendo um vetor $v_0 \in T_p\phi(C_p^<)$ com $\|v_0\| = 1$ e supondo que $T_p\phi(C_p^>)$ seja um cone lorentziano K_c em $\mathbb{R}^n$. Então a equação (1.5), combinada com a Proposição 2.8, mostra que, para todo $\epsilon > 0$, pondo $\delta = \epsilon/\sqrt{1+c^2}$ garante que, em $\mathbb{R}^n$, com a estrutura causal constante definida pelo cone K_c, o diamante cronológico entre $-\delta v_0$ e δv_0 contém 0 e é contido no diamante causal entre $-\delta v_0$ e δv_0, que por sua vez é contido na bola fechada $\bar{B}_\epsilon(0)$. Aplicando ϕ^{-1}, concluímos que o diamante cronológico $\ll \phi^{-1}(-\delta v_0), \phi^{-1}(\delta v_0) \geqslant_V$ contém p e é contido no diamante causal $\leqslant \phi^{-1}(-\delta v_0), \phi^{-1}(\delta v_0) \geqslant_V$, que por sua vez é contido em $\phi^{-1}(\bar{B}_\epsilon(0))$, o que prova o lema. □

Com este lema à disposição, podemos provar que há uma condição aparentemente mais fraca mas que já é suficiente para garantir que M satisfaça todas as condições desejadas, que é a seguinte [23, Lemma 3.21]:

(FC) Para todo ponto p de M e toda vizinhança U de p, existe uma vizinhança V de p contida em U tal que toda curva causal em M com ponto inicial e ponto final em V é inteiramente contida em U.

Proposição 2.12 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ contínua que satisfaz a condição (FC), então todas as propriedades (1)-(3) enunciadas acima são válidas; em particular, M é fortemente causal e a topologia de Alexandrov coincide com a topologia padrão.*

Demonstração: Obviamente, a condição (FC) é necessária para que M seja fortemente causal (pois se a vizinhança V é causalmente convexa, toda curva causal com ponto inicial e ponto final em V é inteiramente contida em V, e não apenas em U). Para mostrar que ela também é suficiente, aplicamos o Lema 2.5: Dados um ponto p de M e uma vizinhança U de p (que podemos supor ser aberta, sem perda de generalidade), escolhemos uma vizinhança aberta V de p contida em U com as propriedades enunciadas no lema e em seguida uma vizinhança aberta W de p contida em V conforme a condição (FC) (com U substituído por V e V substituído por W) e, por fim, pontos $p_<$ e $p_>$ em W tais que valem as inclusões da equação (2.19): então toda curva causal (ou cronológica) em M com ponto inicial e ponto final em $\leqslant p_<, p_> \geqslant_V$ (ou em $\ll p_<, p_> \gg_V$) é inteiramente contida em V e logo, por concatenação, em $\leqslant p_<, p_> \geqslant_V$ (ou em $\ll p_<, p_> \gg_V$): assim, segue que, na verdade, $\leqslant p_<, p_> \geqslant_V \, = \, \leqslant p_<, p_> \geqslant_M$ (e $\ll p_<, p_> \gg_V \, = \, \ll p_<, p_> \gg_M$).

□

2.3.5 Perspectivas

Concluímos nosso tratamento com algumas observações sobre o conceito central da teoria: o de hiperbolicidade global. Em geometria lorentziana, foram propostas várias definições do que seria um espaço-tempo globalmente hiperbólico, e a tarefa de provar a equivalência entre as diversas definições levou meio século para ser completada.

Começamos com uma definição baseada na noção de superfície de Cauchy, que envolve os conceitos de conjuntos acronais e acausais e do domínio de dependência de um conjunto.

Definição 2.11 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$, dizemos que um subconjunto A de M é*

- ***acronal*** *se $I^\pm(A) \cap A = \emptyset$, i.e., qualquer curva cronológica em M intersecta A no máximo uma vez;*
- ***acausal*** *se $J^\pm(A) \cap A = \emptyset$, i.e., qualquer curva causal em M intersecta A no máximo uma vez.*

Definição 2.12 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$ e um subconjunto fechado A de M, o* ***domínio de dependência (futuro)*** *de A é o subconjunto $D^+(A)$ de M definido por*

$$D^+(A) \;=\; \{\, p \in M \mid \begin{array}{c} \textit{toda curva cronológica sem ponto inicial} \\ \textit{e com ponto final } p \textit{ intersecta } A \end{array} \}\,.$$

De forma análoga, o ***domínio de dependência (passado)*** *de A é o subconjunto $D^-(A)$ de M definido por*

$$D^-(A) \;=\; \{\, p \in M \mid \begin{array}{c}\textit{toda curva cronológica sem ponto final}\\ \textit{e com ponto inicial } p \textit{ intersecta } A\end{array} \}\,.$$

Finalmente, o ***domínio de dependência*** *de A é a união*

$$D(A) = D^+(A) \cup D^-(A)\,.$$

Poderíamos ter formulado a mesma definição substituindo curvas cronológicas por curvas causais, como é feito, por exemplo em [14]. No entanto, se definirmos

$$\tilde{D}^+(A) \;=\; \{\, p \in M \mid \begin{array}{c}\text{toda curva causal sem ponto inicial}\\ \text{e com ponto final } p \text{ intersecta } A\end{array} \}\,,$$

e

$$\tilde{D}^-(A) \;=\; \{\, p \in M \mid \begin{array}{c}\text{toda curva causal sem ponto final}\\ \text{e com ponto inicial } p \text{ intersecta } A\end{array} \}\,,$$

e

$$\tilde{D}(A) = \tilde{D}^+(A) \cup \tilde{D}^-(A)\,,$$

esperamos que, mediante hipóteses adequadas de regularidade (que precisariam ser especificadas), $D^\pm(A)$ se comporta melhor do que $\tilde{D}^\pm(A)$, no sentido de que $D^\pm(A)$ será sempre fechado e, de fato, será exatamente o fecho de $\tilde{D}^\pm(A)$; a demonstração desta afirmação no âmbito da geometria lorentziana pode ser encontrada em [14, Proposition 6.5.1]. Mas vale notar que essa ambiguidade propaga para a definição do conceito de superfície de Cauchy, para a qual encontramos duas versões diferentes na literatura:

Definição 2.13 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$, dizemos que um subconjunto fechado S de M é uma* ***superfície de Cauchy***

- *se S for acronal e $D(S) = M$, i.e., qualquer curva inextendível cronológica em M intersecta S exatamente uma vez (**versão cronológica** [25]);*
- *se S for acausal e $\tilde{D}(S) = M$, i.e., qualquer curva inextendível causal em M intersecta S exatamente uma vez (**versão causal** [14]).*

Seria interessante analisar sob quais condições estes dois conceitos de superfície de Cauchy coincidem.

Um outro conceito que desempenha um papel importante na teoria das estruturas causais é o de uma função tempo ou função temporal:

Definição 2.14 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$, com estrutura de cones dual $\mathcal{C}^*$, dizemos que uma função contínua t sobre M é uma **função tempo** se ela for estritamente crescente ao longo de qualquer curva causal, e que uma função suave t sobre M é uma **função temporal** se*

$$dt_p \in (C_p^*)^o \quad \textit{para todo } p \in M.$$

*Finalmente, dizemos que uma função tipo tempo ou temporal é uma **função de Cauchy** se sua restrição a qualquer curva causal inextendível tiver como imagem a reta real $\mathbb{R}$ inteira.*

Com estas noções, podemos formular a seguinte

Definição 2.15 *Dada uma variedade M munida de uma estrutura causal $\mathcal{C}$, dizemos que M é **globalmente hiperbólica** se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *M admite uma subvariedade Σ que é superfície de Cauchy.*
2. *M admite uma folheação por superfícies de Cauchy, i.e., existe um difeomorfismo $M \cong \mathbb{R} \times \Sigma$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$, a folha $\Sigma_t \cong \{t\} \times \Sigma$ é uma superfície de Cauchy.*
3. *M admite uma função suave de Cauchy.*
4. *M é fortemente causal e os diamantes causais $J^+(p) \cap J^-(q)$ em M são compactos.*

Devido aos trabalhos desenvolvidos por muitos autores durante décadas (veja, entre outros, [2–5, 12, 14, 19, 23–26]), sabe-se que, no âmbito da geometria lorentziana, estas quatro condições são equivalentes entre si e portanto qualquer uma delas pode ser utilizada para definir o que é uma variedade globalmente hiperbólica, conforme o gosto do autor. Resta a tarefa, para um trabalho posterior, formular e provar os teoremas correspondentes para estruturas causais em geral e identificar as condições de regularidade requeridas para cada um deles. Resultados parciais nesta direção podem ser encontrados em [7, 8], em um trabalho não publicado de Neeb e, principalmente, no artigo [9], que merece destaque.

Referências Bibliográficas

[1] R. Abraham & J.E. Marsden, *Foundations of mechanics*, 2^{nd} edition, Benjamin/Cummings, Reading 1978.

[2] J.K. Beem, P.E. Ehrlich & K.L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Monographs Textsbooks Pure Appl. Math. 202, Marcel Dekker Inc., New York 1996.

[3] A. Bernal & M. Sánchez, *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem*, Communications in Mathematical Physics, **243** (2003) 461-470.

[4] A. Bernal & M. Sánchez, *Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes*, Communications in Mathematical Physics, **257** (2005) 43-50.

[5] A. Bernal & M. Sánchez, *Futher results on the smoothability of Cauchy hypersurfaces and Cauchy time functions*, Lett. Math. Phys. **77** (2006) 183-197.

[6] S. Boyd & L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.

[7] P.T. Chruściel, *Elements of Causality Theory*, Preprint UWThPh-2011-32, `arXiv:1110.6760v1`.

[8] P.T. Chruściel & J.D.E. Grant, *On Lorentzian Causality with Continuous Metrics*, Class. Quant. Grav. **29** (2012) 145001, 32 pp.

[9] A. Fathi & A. Siconolfi, *On Smooth Time Functions*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **152(2)** (2012) 303-339.

[10] K.O. Friedrichs, *Symmetric Hyperbolic Linear Differential Equations*, Commun. Pure Appl. Math. (1953) 345-392.

[11] L. Gårding, *An Inequality for Hyperbolic Polynomials*, J. Math. Mech. **8** (1959) 957-965.

[12] R. Geroch, *Domain of Dependence*, J. Math. Phys. **11** (1970) 437-449.

[13] O. Güler, *Hyperbolic Polynomials and Interior Point Methods for Convex Programming*, Math. Op. Res. **22** (1997) 350-377.

[14] S. Hawking & G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press (1973).

[15] J. Hilgert, K.H. Hofmann, & J.D. Lawson, *Lie Groups, Convex Cones and Semigroups*, Oxford Press, Oxford 1989

[16] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Second Edition, Springer, Berlin 1990.

[17] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II*, Springer, Berlin 1983.

[18] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Interscience, New York 1963.

[19] E.H. Kronheimer & R. Penrose, *On the Structure of Causal Spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc. **63** (1967) 481-501.

[20] J.D. Lawson, *Ordered Manifolds, Invariant Cone Fields and Semigroups*, Forum Mathematicum **1** (1989), 273-308.

[21] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer (2003).

[22] J. Milnor, *Spin Structures on Manifolds*, L. Ens. Math. **9** (1963) 198-203.

[23] E. Minguzzi & M. Sánchez, *The causal hierarchy of spacetimes*, Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys. (2008) pp. 299-358.

[24] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press Inc., New York 1983.

[25] R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, CBSM-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia 1972.

[26] M. Sánchez, *Causal Hierarchy of Spacetimes, Temporal Functions and Smoothness of Geroch's Splitting. A Revision*, Matemática Contemporânea, **29** (2005) 127-155.

[27] S. J. Vidal, *Operadores Diferenciais Globalmente Hiperbólicos*, PhD thesis, IME-Universidade de São Paulo, São Paulo 2013.

[28] N.E. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton 1951.

[29] R.M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago 1984.